UNICAMP

Gustavo Grings Machado

Dimensão de Gelfand-Kirillov em álgebras relativamente livres

CAMPINAS
2014

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

GUSTAVO GRINGS MACHADO

DIMENSÃO DE GELFAND-KIRILLOV EM ÁLGEBRAS RELATIVAMENTE LIVRES

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em matemática.

Orientador: Plamen Emilov Koshlukov

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO GUSTAVO GRINGS MACHADO E ORIENTADA PELO PROF. DR. PLAMEN EMILOV KOSHLUKOV.

Assinatura do Orientador

P Koshlukov

CAMPINAS
2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

M18d

Machado, Gustavo Grings, 1987-
Dimensão de Gelfand-Kirillov em álgebras relativamente livres / Gustavo Grings Machado. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Plamen Emilov Kochloukov.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Gelfand-Kirillov, Dimensão de. 2. PI-álgebras. 3. Álgebras livres. 4. Lie, Álgebras de. I. Kochloukov, Plamen Emilov,1958-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

<u>Informações para Biblioteca Digital</u>

Título em outro idioma: Gelfand-Kirillov dimension in relatively free algebras
Palavras-chave em inglês:
Gelfand-Kirillov dimension
PI-algebras
Free algebras
Lie algebras
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Plamen Emilov Kochloukov [Orientador]
Artem Lopatin
Ivan Chestakov
Henrique Guzzo Júnior
Vitor de Oliveira Ferreira
Data de defesa: 20-08-2014
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 20 de agosto de 2014 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). PLAMEN EMILOV KOCHLOUKOV

Prof(a). Dr(a). ARTEM LOPATIN

Prof(a). Dr(a). IVAN CHESTAKOV

Prof(a). Dr(a). HENRIQUE GUZZO JÚNIOR

Prof(a). Dr(a). VITOR DE OLIVEIRA FERREIRA

Abstract

In this thesis we study the invariant called Gelfand-Kirillov Dimension for algebras with polynomial identities, mainly for non-associative algebras, aiming at better understanding the structure of the polynomial identities.

This invariant has gained importance lately since in many cases it is relatively easy to calculate and, surprisingly, it is capable of distinguishing the growth of two algebras. For associative algebras GK-dimension was found to be very useful to detect that algebras which on one hand are PI-equivalent over fields of characteristic zero, according to Tensor Product Theorem of Kemer, on the other hand are not PI-equivalent when the characteristic of the infinite base field is positive. This points towards the rise of new T-ideals, sets of identities satisfied by an algebra, which are T-prime for infinite fields of positive characteristic. The classification and the understanding of such T-ideals in positive characteristic are still open problems, although it is well understood for associative PI-Algebras in characteristic zero, using Kemer's theory.

The situation is much less clear for varieties of non-associative algebras like Jordan Algebras or Lie Algebras. Very little is known about results towards a classification of T-ideals outside the associative case, even over fields of characteristic zero. Accordingly little is known concerning the behavior of T-ideals, even for simple algebras. Here we make a step towards this goal by computing some GK-dimensions of some relatively free algebras of finite rank by using the expression of the Hilbert series. In particular we compute the Gelfand-Kirillov dimension of the relatively free algebra of any finite rank generated by the Lie Algebra of the 2×2 traceless matrices over an infinite field of characteristic different from 2. We hope that results in this direction will contribute to a better understanding of the behavior of T-ideals in non-associative algebras.

Keywords:
Gefand-Kirillov dimension, PI-algebras, Free algebras, Lie algebras.

Resumo

Neste trabalho estudamos o invariante denominado dimensão de Gelfand-Kirillov para álgebras com identidades polinomiais, sobretudo para álgebras não-associativas, com o objetivo de melhor compreender a estrutura das identidades polinomiais.

Ultimamente este invariante tem ganhado importância, uma vez que ele é relativamente fácil de calcular e, de certa forma, é capaz de diferenciar o crescimento de duas álgebras. Para álgebras associativas a GK-dimensão mostrou-se muito útil ao detectar que álgebras que por um lado são PI-equivalentes sobre corpos de característica zero pelo Teorema do Produto Tensorial de Kemer, por outro lado não são PI-equivalentes quando a característica do corpo infinito é positiva. Isto aponta para o surgimento de novos T-ideais, conjuntos de identidades satisfeitas por uma álgebra, que são T-primos para corpos infinitos de característica positiva. Ainda é um problema em aberto a classificação e a compreensão destes T-ideais em característica positiva, embora seja bem compreendida para PI-Álgebras associativas em característica zero, segundo a teoria de Kemer.

Entretanto a situação é ainda menos clara para variedades de álgebras não-associativas como Álgebras de Jordan ou Álgebras de Lie. Sabe-se muito pouco sobre resultados que apontem para uma classificação de T-ideais fora do caso associativo, até mesmo sobre corpos de característica zero. Inclusive se conhece pouco sobre o comportamento dos T-ideais, mesmo de álgebras simples. Aqui damos um passo, calculando algumas GK-dimensões para álgebras relativamente livres de posto finito a partir da expressão da série de Hilbert. Destacamos em especial que calculamos a dimensão de Gelfand-Kirillov da álgebra relativamente livre de qualquer posto finito da álgebra de Lie das matrizes 2×2 de traço zero sobre um corpo infinito de característica diferente de 2. Acreditamos que estes resultados permitirão ajudar a compreender melhor o comportamento dos T-ideais em álgebras não-associativas.

Palavras-chave:
Dimensão de Gelfand-Kirillov, PI-álgebras, Álgebras livres, Álgebras de Lie.

Sumário

“O bom do caminho é haver volta.
Para ida sem vinda
basta o tempo.”
Mia Couto

A família que está crescendo:
Juliana e Kikito.

Agradecimentos

Agradeço, antes de tudo a Deus, pela vida.

À minha família pela força, pela ajuda e por acreditarem no meu potencial.

Sou muito grato ao meu ex-professor João Batista Peneireiro. E claro, ao amigo Juliano que nos apresentou. Sem eles eu teria demorado muito para conseguir me encontrar no curso de Matemática.

Agradeço a todos os que foram meus professores, especialmente aos docentes do departamento de Matemática da UFSM pela motivação e incentivo e aos docentes do departamento de Matemática do IMECC pela sabedoria transmitida.

Aos professores e funcionários do IMECC-UNICAMP, principalmente aos que compõem a secretaria de Pós-Graduação, da Biblioteca e do setor de Informática, pelos serviços e pela forma atenciosa e respeitosa que sempre fui tratado.

Agradeço aos amigos que fiz até aqui. Sentirei saudades. Tenho certeza que nos encontraremos muitas vezes.

Ao meu orientador Plamen Koshlukov, pela orientação, pelas sugestões, pela preocupação em acertar os prazos nesta fase de transição e por toda ajuda e atenção dispensada.

Às Agências CAPES e CNPq, que possibilitaram a realização deste trabalho e à banca examinadora, que avaliou este trabalho e ajudou com críticas e sugestões, e agradeço em especial ao Vitor de Oliveira Ferreira pela leitura minuciosa que contribuiu muito para a redação deste e de futuros trabalhos.

Agradeço e muito a querida Juliana pelo companheirismo, amor, amizade, dedicação e incentivo.

Sem mais, sou muito grato a todos que de alguma forma ou outra participaram de minha vida até agora e possibilitaram esse momento.

Lista de Símbolos

Aqui listamos algumas notações e símbolos utilizados. São conceitos fáceis que não encontraram lugar adequado ao longo texto. Optamos por descrever aqui, pois não há uniformidade no uso destes símbolos em livros, embora sejam frequentemente encontrados em textos.

(ver p. 11) I_n denota o subconjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ dos naturais quando n é um número natural.

(ver p. 12) $|X|$ denota a cardinalidade do conjunto X;

(ver p. 16) $(-1)^\sigma$, onde σ pertence ao grupo simétrico (de permutações) S_n, é o sinal da permutação σ, isto é,

$$(-1)^\sigma = \begin{cases} -1, & \text{se } \sigma \text{ pode ser escrito como produto de um número ímpar de transposições} \\ 1, & \text{se } \sigma \text{ pode ser escrito como produto de um número par de transposições.} \end{cases}$$

Alternativamente

$$(-1)^\sigma = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i};$$

(ver p. 21) ε denotará a identidade, o elemento neutro de um grupo, ou seja, para todos elementos g do grupo vale $\varepsilon \star g = g \star \varepsilon = g$;

(ver p. 60) $a^{\underline{b+1}}$ para números naturais a e b é o fatorial descendente, definido indutivamente por

$$a^{\underline{0}} = 1 \qquad \text{e} \qquad a^{\underline{b+1}} = a \cdot a^{\underline{b}} = a(a-1)\cdots(a-b);$$

(ver p. 61) $\lfloor . \rfloor$ e $\lceil . \rceil$ denotam as funções maior inteiro menor que e menor inteiro maior que, respectivamente, e podem ser definidas por

$$\begin{cases} \lfloor x \rfloor = n, & \text{se } n \leqslant x < n+1 \text{ para } n \text{ um número inteiro e } x \text{ número real} \\ \lceil x \rceil = n, & \text{se } n-1 < x \leqslant n \text{ para } n \text{ um número inteiro e } x \text{ número real.} \end{cases}$$

Introdução

Com muita frequência estruturas algébricas são introduzidas por meio de equações e relações satisfeitas por qualquer um de seus elementos. Elementos (ou álgebras) dessas estruturas normalmente são apresentados por geradores e relações satisfeitas por esses geradores. E nestas equações normalmente são usados uma quantidade finita de operações e operadores. Embora isso seja muito anterior, talvez tenha ganhado mais importância com o Teorema de Birkhoff que diz que variedades de álgebras (mesmo no sentido mais geral, munido de uma assinatura), ou seja uma classe de álgebras que é fechada para as operações de imagem homomorfa, subálgebras e produtos (que naturalmente seria o esperado de uma estrutura algébrica) é equivalente à classe ser definida através de equações satisfeitas por todos seus elementos.

Muitos ramos da Matemática seguiram seus caminhos com estas ideias como pano de fundo e em muitos casos foi possível estabelecer belas teorias estruturais como por exemplo para álgebras de Lie, ou para álgebras comutativas e álgebras de dimensão finita quando a álgebra é associativa. Embora álgebras de dimensão finita não sejam definidas equacionalmente também são importantes do ponto de vista das equações, pois satisfazem relações polinomiais entre seus elementos (e sob certas condições, por exemplo para álgebras associativas e primitivas conforme Teorema de Kaplansky, satisfazer uma identidade polinomial é suficiente para ter dimensão finita; também podemos mencionar aqui a resposta positiva para o problema de Kurosch na classe de PI-álgebras associativas). Mais precisamente, para cada uma das álgebras anteriores, existe um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n)$ com variáveis não comutando e cujos monômios dependem da colocação dos parênteses que se anula quando avaliado nos elementos das mesmas. A álgebra que cumpre tal condição é denominada uma álgebra com identidade polinomial, ou simplesmente uma PI-Álgebra. Seu estudo, a princípio, consiste em relacionar o efeito das identidades polinomiais na estrutura das álgebras que as satisfazem. Gostaríamos de deixar claro que os temas de estudo em PI-teoria são bastante amplos e diversos, definitivamente não se resumem somente a estudos da estrutura das PI-Álgebras. Muitos resultados são revelados usando técnicas combinatórias, por exemplo.

Historicamente, o desenvolvimento da Teoria de Identidades Polinomiais (PI-teoria) começou na década de 30, com os trabalhos de Dëhn e Wagner, ainda com forte motivação geométrica. Nesses trabalhos aparecem, embora de forma subentendida, algumas identidades polinomiais para as matrizes de ordem 2. Vale lembrar que alguns conceitos da PI-teoria encontram-se ainda em trabalhos de Sylvester, por volta de 1852. Evidentemente tais conceitos aparecem nesses trabalhos de forma bastante implícita, e têm caráter secundário. A pesquisa das PI-Álgebras começou a se intensificar por volta da década de 50 com trabalhos de Jacobson e Kaplansky. Em 1950 foi demonstrado o célebre Teorema de Amitsur e Levitzki, um resultado clássico mostrando que a álgebra associativa das matrizes de ordem n com entradas num corpo (ou ainda domínio com unidade) satisfazem o polinômio standard de grau $2n$ (isto é, o somatório alternado de todos os produtos de $2n$ matrizes de ordem n é sempre igual a matriz nula). Na mesma época, algebristas reconhecidos deram contribuições importantes para a PI-teoria. Podemos relacionar aqui (sem pretensões de sermos completos) os nomes de Amitsur, Cohn, Herstein, Higman, Jacobson, Kaplansky, Levitzki, Nagata, Malcev, Posner, Procesi, Shirshov, Specht entre outros.

Assim, até a década de 1980 vários pesquisadores tinham obtido diversos resultados de grande importância na área. De certa forma a teoria que se desenvolveu melhor foi a de PI-Álgebras associativas. No entanto a compreensão das identidades no contexto associativo pode ser (e foi) usada em diversos outros casos, por exemplo quando a álgebra pode ser mergulhada em uma álgebra associativa (álgebras de Lie e álgebras de Jordan especiais), assim a álgebra livre num contexto não-associativo pode ser "visualizada", em certo sentido, dentro da álgebra associativa livre e consequentemente as identidades podem ser vistas e estudadas dentro do contexto das identidades associativas.

Um passo importante foi dado com a construção dos chamados polinômios centrais para as álgebras associativas de matrizes $M_n(K)$, com entrados num corpo K qualquer, por Formanek [22] e independentemente por Razmyslov [50]. Estes polinômios quando avaliados em matrizes resultam em todas as matrizes escalares (estão no centro) e fornecem uma conexão interessante com a teoria e métodos desenvolvidos para anéis comutativos. Foram desenvolvidos métodos poderosos provenientes da Combinatória Algébrica e baseados na Teoria das Representações do Grupo Simétrico e do Grupo Geral Linear (ou na Teoria de Invariantes). Tais métodos mostraram-se extremamente úteis para a descrição das variedades de álgebras. Por volta de 1985–1987, Kemer desenvolveu métodos e teorias que permitiram classificar os T-ideais em característica zero, e serviram de base para vários outros estudos. Para recordar uma parte dos principais resultados obtidos por Kemer, precisaremos alguns conceitos.

As álgebras verbalmente primas (ou T-primas) desempenham um papel proeminente na PI-teoria. Uma álgebra é verbalmente prima se seu T-ideal é primo na classe de todos os T-ideais da álgebra associativa livre. A maioria dos resultados conhecidos sobre álgebras verbalmente primas estão no caso em que estas álgebras têm como base corpos de característica zero. A teoria estrutural de T-ideais desenvolvida por Kemer classificou as álgebras verbalmente primas sobre tais corpos. Mais ainda, Kemer mostrou que os T-ideais verbalmente semiprimos são interseções finitas de T-ideais verbalmente primos, e finalmente que se I é um T-ideal, então $J^n \subseteq I \subseteq J$ para alguma escolha de n e de um T-ideal J verbalmente semiprimo.

De acordo com a teoria de Kemer as álgebras unitárias sobre o corpo K e verbalmente primas são exatamente as seguintes:

- A trivial $K\langle X\rangle$, a álgebra associativa livre de posto infinito;
- Por conseguinte, $M_n(K)$, as álgebras das matrizes $n \times n$ com entradas em K;
- A segunda classe não trivial de álgebras verbalmente primas é dada pelas álgebras das matrizes $n \times n$ com entradas em E, denotada por $M_n(E)$;
- A última classe de álgebras verbalmente primas é denotada por $M_{a,b}(E)$,

onde E é a álgebra de Grassmann (ou exterior) de um espaço vetorial V com base $\{e_1, e_2, \dots\}$. Como espaço vetorial, E tem base consistindo dos elementos 1 e $e_{i_1} \cdots e_{i_k}$, onde $i_1 < \cdots < i_k$, $k = 1, 2, \dots$, e a multiplicação em E é induzida por $e_i e_j = -e_j e_i$, para todos i e j. A álgebra E tem $\mathbb{Z}_2$-graduação natural definida como segue. Denotando por E_0 o centro de E, E_0 é gerado como espaço vetorial por todos os monômios em V com comprimento par, denotamos por E_1 o espaço gerado pelos monômios de comprimento ímpar. Deste modo, os elementos de E_1 anticomutam entre si. E $M_{a,b}(E)$ com a e b inteiros positivos é a subálgebra de $M_{a+b}(E)$ que consiste de todas as matrizes sob a forma $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, onde $A \in M_a(E_0), B \in M_{a \times b}(E_1), C \in M_{b \times a}(E_1)$ e $D \in M_b(E_0)$.

Aqui recordamos que a descrição das álgebras verbalmente primas acima vale quando K é de característica zero. A descrição das álgebras T-primas em característica positiva está em aberto; sabe-se que além destas álgebras, a lista das álgebras T-primas deve envolver muitas outras.

Como consequência de sua teoria estrutural, Kemer (1987) resolveu em afirmativo o famoso e antigo problema (1950) proposto por Specht: Todo T-ideal (em característica zero) é finitamente gerado como um T-ideal? Recomendamos a leitura de [30] para mais detalhes sobre a teoria estrutural de PI-Álgebras e as contribuições de Kemer nesta teoria. Se o corpo base tem característica $p > 0$, o problema de Specht tem resposta negativa; exemplos foram construídos por Belov [6], Grishin [26] e Shchigolev [55] por volta de 1999.

Uma das principais ferramentas utilizadas na teoria de Kemer foram as identidades graduadas. A álgebra de Grassmann E admite uma graduação natural com o grupo cíclico de ordem 2, $\mathbb{Z}_2$; essa graduação induz $\mathbb{Z}_2$-graduações em $M_n(E)$ e em $M_{a,b}(E)$. Deste modo conseguiu incorporar simetria e anti-simetria em uma mesma estrutura algébrica, as superálgebras. Logo após a teoria de Kemer, o estudo de graduações (com grupos arbitrários) e das respectivas identidades graduadas intensificou-se devido às variadas aplicações.

Mesmo sabendo que todo T-ideal é finitamente gerado como T-ideal, conhecer as identidades polinomiais de uma dada álgebra é uma tarefa difícil. Apesar de álgebras associativas de matrizes $M_n(K)$ ser um objeto comum na PI-teoria, são conhecidas de fato as bases (finitas) para as identidades satisfeitas apenas para $n = 2$ sobre corpos infinitos e de característica diferente de 2 (e é claro que o caso $n = 1$ também é conhecido, pois reduz-se ao corpo K). Sobre corpos de característica zero foi obtido um conjunto finito por Razmyslov em [51] e posteriormente foi reduzido a uma base minimal por Drensky em [15]. E para corpos infinitos de característica $p > 3$ foi obtida uma base minimal por Koshlukov em [34]. Já para corpos finitos, usando técnicas completamente diferentes, são conhecidas as identidades apenas para $n \leqslant 4$, veja [23, 24, 25, 38].

E mesmo conhecendo os geradores de um T-ideal é difícil obter a partir deles informações sobre os polinômios do T-ideal de um dado grau. Deste modo torna-se interessante estudar o comportamento e o crescimento deste T-ideal, tentando assim evitar essas dificuldades. Estas ideias foram introduzidas por Regev em [53].

É bem conhecido que em característica zero cada identidade, usando o processo de linearização, é equivalente a um conjunto finito de identidades multilineares. Aqui recordamos que a linearização funciona em característica positiva, mas apenas para obter *consequências* da identidade inicial; a volta para ela nem sempre é possível. Assim para se estudar um T-ideal pode-se entender primeiro suas identidades multilineares P_n formadas por polinômios de grau $n = 1, \dots$. Em especial pode se estudar o crescimento da sequência de codimensões dessas identidades multilineares. E como

T-ideais são invariantes sob endomorfismos, a ação natural do grupo simétrico S_n nos polinômios multilineares e em P_n os torna S_n-módulos. É claro que o espaço vetorial dos polinômios multilineares de grau n, munido com a ação natural de S_n, é um S_n-módulo, o qual é isomorfo ao módulo regular de S_n. Assim, pode-se usar a teoria de representações do grupo simétrico em característica zero.

Então pode-se associar a cada T-ideal uma sequência dos caracteres dos grupos simétricos S_n, $n = 1, \ldots$, chamada de sequência dos cocaracteres de uma dada PI-álgebra, e uma sequência numérica de codimensões, dadas pelas respectivas dimensões das representações. Em [53] é provado que a sequência das codimensões de uma PI-álgebra associativa é exponencialmente limitada. Segue de resultados de Kemer que o crescimento desta sequência é polinomial ou exponencial.

Como cada T-ideal é naturalmente multigraduado pelo grau em cada variável, existem métodos para relacionar diretamente a sequência de cocaracteres com a série de Hilbert (ou Poincaré) da álgebra relativamente livre. Em particular, o problema de decompor a sequência de cocaracteres em caracteres irredutíveis se traduz no problema de escrever a série de Hilbert como soma de funções simétricas (polinômios) de Schur. Assim pode-se dizer que a descrição das séries de Hilbert aproximadamente acompanha a obtenção das identidades em álgebras importantes.

Duas álgebras A e B são ditas PI-equivalentes, escrevemos $T(A) = T(B)$, se elas satisfazem as mesmas identidades polinomiais. Como outra consequência de sua teoria estrutural, Kemer mostrou que a classe das álgebras T-primas é fechada sob produtos tensoriais. Mais precisamente, ele descreveu a PI-equivalência nos produtos tensoriais (sobre o corpo) de álgebras verbalmente primas. Esta descrição é conhecida como:

Teorema do Produto Tensorial (T.P.T.) *Assuma* $\operatorname{char} K = 0$. *Então:*

(*i*) $T(M_{a,b}(E) \otimes E) = T(M_{a+b}(E))$;

(*ii*) $T(M_{a,b}(E) \otimes M_{c,d}(E)) = T(M_{ac+bd,ad+bc}(E))$;

(*iii*) $T(E \otimes E) = T(M_{1,1}(E))$.

O Teorema do Produto Tensorial admite provas que independem da teoria estrutural desenvolvida por Kemer. A primeira tal prova foi proposta por Regev [54], e mais tarde Di Vincenzo e Nardozza, provaram partes deste teorema (veja [12, 14, 13]). Estas demonstrações foram construídas sob a hipótese que o corpo base é de característica zero. Outras provas elementares de casos do T.P.T. foram dadas por Azevedo, Fidelis e Koshlukov em [3, 2, 35]. Atentamos que em [3, 2, 35] foi estudado o comportamento dos correspondentes T-ideais em característica positiva. Nestes artigos, os autores provaram que o T.P.T. continua válido sobre corpos infinitos de característica positiva $p > 2$, desde que considere-se apenas as identidades polinomiais multilineares. Mais ainda sobre corpos infinitos de característica positiva $p > 2$, em [2] eles provaram que a terceira afirmação do T.P.T. falha, e em [3] provaram que a primeira afirmação falha (quando $a = b = 1$).

Em [35] os autores construíram um modelo apropriado para a álgebra relativamente livre na variedade das álgebras determinadas por $E \otimes E$ quando $\operatorname{char} K = p > 2$. Este modelo é a álgebra genérica de $A = K \oplus M_{1,1}(E')$ onde E' denota a álgebra de Grassmann sem unidade. Eles provaram que as álgebras A e $E \otimes E$ satisfazem as mesmas identidades polinomiais ordinárias.

Usando propriedades da álgebra A, em [2] os autores provaram que $T(M_{1,1}(E)) \subsetneq T(E \otimes E)$ em característica positiva.

A dimensão de Gelfand-Kirillov foi introduzida originalmente por Gelfand e Kirillov (1966) para estudar o crescimento de álgebras envolventes de álgebras de Lie de dimensão finita, posteriormente tornou-se um importante invariante para outras álgebras, pois independe da escolha do conjunto de geradores (ao contrário das séries de Hilbert). Além disso, a GK-dimensão estende os conceitos de grau de transcendência para extensões de corpos e dimensão de Krull para anéis comutativos. Tem a vantagem de ser um conceito que pode ser introduzido independentemente da característica do corpo. Uma referência padrão sobre GK-dimensão é o livro de Krause e Lenagan (veja [36]), que também contém os principais resultados sobre este invariante para PI-Álgebras.

Berele em [8] construiu modelos para as álgebras relativamente livres de posto m, $R_m(M_n(E))$ e $R_m(M_{a,b}(E))$, nas variedades determinadas por $M_n(E)$ e $M_{a,b}(E)$, respectivamente, baseando-se na construção das matrizes genéricas introduzidas por Procesi. No que segue, vamos assumir que o posto m das respectivas álgebras relativamente livres é $\geqslant 2$. Em [49], Procesi calculou a GK-dimensão da álgebra gerada por m matrizes genéricas de ordem n, ou seja, mostrou que $\operatorname{GKdim} R_m(M_n(K)) = (m-1)n^2 + 1$. Berele mostrou que $\operatorname{GKdim} R_m(M_n(E)) = (m-1)n^2 + 1$ e também que $\operatorname{GKdim} R_m(M_{a,b}(E)) = (m-1)(a^2 + b^2) + 2$ em [8]. Alves e Koshlukov [43] provam, usando a dimensão de Gelfand-Kirillov, a não PI-equivalência sobre corpos infinitos de característica > 2 de algumas álgebras T-primas envolvidas no T.P.T. Com isto obteve-se um resultado interessante a respeito da estrutura das identidades associativas que pode ser demonstrado usando a GK-dimensão. Deste modo a dimensão de Gelfand-Kirillov ganhou bastante importância.

Neste trabalho calculamos a dimensão de Gelfand-Kirillov de álgebras relativamente livres de posto finito de algumas álgebras, que pode ser visto como um passo inicial para entender como calcular esse invariante em outros casos, o que permitirá uma melhor compreensão do comportamento das identidades em álgebras não-associativas.

O texto está organizado em três capítulos, os quais, vale ressaltar, procuramos tornar independentes conforme possível, apesar de fazer uso de diversas referências internas. O leitor pode achar útil uma descrição do conteúdo e da motivação dos capítulos que será dada aqui:

- O Capítulo 1 é dedicado às definições preliminares e apresentação da teoria clássica de PI-Álgebras (principalmente associativas), bem como alguns aspectos históricos e resultados clássicos que motivaram o desenvolvimento da teoria das Identidades Polinomiais, ou simplesmente PI-teoria. Nosso objetivo é basicamente estabelecer notação e os resultados expostos aqui são para dar um panorama da teoria. Procuramos não expor tanto a teoria estrutural diretamente. Este capítulo auxilia o leitor como referência aos resultados básicos, usando basicamente a referência [18] para demonstrações omitidas. Na medida do possível, tentamos colocar as demonstrações de resultados clássicos com a linguagem de álgebras graduadas. Aqui alguns conceitos são expostos com um rigor de gosto pessoal, e funcionam como usualmente expostos em outras referências. Ressaltamos que para um leitor com bom conhecimento da PI-teoria e acostumado com as notações usadas em exposições desta teoria, este capítulo pode ser evitado sem comprometimento dos demais. Optamos por não discutir a dimensão de Gelfand-Kirillov neste capítulo e deixar isso para o segundo capítulo. Em nossa opinião o Capítulo 1 tornou-se mais leve e o Capítulo 2 mais fechado e pouco dependente dos outros.

- O Capítulo 2 é dedicado introduzir a dimensão de Gelfand-Kirillov em álgebras finitamente geradas de forma adequada, como estudo do crescimento de uma álgebra. Começamos falando dos resultados de séries de Hilbert que também são muito importantes e estão diretamente relacionadas com a Teoria de Representações do Grupo Simétrico e do Grupo Geral Linear. Em seguida apresentamos conceitos básicos e exemplos para ganhar familiaridade com o conceito de GK-dimensão. Finalizamos este capítulo apresentando um breve estudo sobre a GK-dimensão das álgebras relativamente livres, relacionando alguns resultados da PI-teoria. Este capítulo é importante para entender as técnicas e ideias que serão usadas no Capítulo 3.

- O Capítulo 3 compreende os cálculos com a dimensão de Gelfand-Kirillov a partir da descrição das séries de Hilbert das álgebras relativamente livres e contém os resultados originais da tese. Destacamos que calculamos aqui a GK-dimensão da álgebra relativamente livre de qualquer posto finito da álgebra de Lie das matrizes 2×2 de traço zero sobre um corpo infinito de característica diferente de 2. Alertamos o leitor que estas contas são longas e frequentemente aparecem expressões grandes que muitas vezes não cabem muito bem na página. Procuramos na medida do possível melhorar a legibilidade das expressões destacadas colocando no texto alguns dos fatores que não interferem nas contas. Os resultados deste capítulo já foram submetidos para publicação.

Capítulo 1

PI-Álgebras: Conceitos Básicos

Neste capítulo apresentaremos os conceitos básicos para fixar a notação e alguns resultados importantes para a teoria de PI-Álgebras associativas. Começaremos com a definição de álgebra e exemplos, de modo costumeiro em PI-Álgebras. Para evitar repetir frequentemente "…sobre o corpo K", a menos que se diga algo em contrário, sempre consideraremos os espaços vetoriais e as álgebras como sendo sobre o corpo K.

1.1 Álgebras, PI-Álgebras e Variedades

Nesta seção introduzimos os conceitos de Álgebra, Álgebra com Identidade Polinomial, que é uma importante classe de álgebras, Variedades e Álgebras Relativamente Livres.

1.1.1 Álgebras: Conceitos Gerais

Uma álgebra é simplesmente um espaço vetorial sobre um corpo K, equipado com uma multiplicação de vetores compatível com a soma e multiplicação por escalar.

Definição 1.1.1. *Diremos que $(A, *)$ é uma **álgebra sobre** K (ou diremos simplesmente que A é **álgebra**, quando estiver claro qual é a operação $*$), se A é um K-espaço vetorial munido de uma operação binária, $*\colon A \times A \to A$, denominada de **multiplicação**, que é uma aplicação bilinear, ou seja, para qualquer $\alpha \in K$ e quaisquer a, b, $c \in A$, valem:*

(i) $(a + b) * c = a * c + b * c$;

(ii) $a * (b + c) = a * b + a * c$;

(iii) $\alpha(a * b) = (\alpha a) * b = a * (\alpha b)$.

Por simplicidade, omitiremos o sinal de $*$, distinguindo a multiplicação por escalar da multiplicação da álgebra ao usar letras gregas no primeiro caso.

Diremos que:

(i) *A é **comutativa**, se a multiplicação for simétrica, isto é $ab = ba$ para quaisquer $a, b \in A$;*

(*ii*) *A é* ***associativa****, se* $(ab)c = a(bc)$ *para quaisquer* $a,\ b,\ c \in A$*, ou seja,* $(A, +, *)$ *é um anel associativo. Neste caso os parênteses podem ser omitidos;*

(*iii*) *A é* ***unitária****, se existir* $1_A \in A$*,* $1_A \neq 0_A$*, tal que* $1_A a = a 1_A = a$ *para qualquer* $a \in A$ *(vamos escrever apenas 1, em vez de* 1_A*);*

(*iv*) *A é uma* ***álgebra de Lie*** *se para quaisquer* $a,\ b,\ c \in A$ *valem:*

$$aa = 0 \text{ (anticomutatividade)},$$

$$(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0 \text{ (identidade de Jacobi)};$$

(*v*) *A é uma* ***álgebra de Jordan*** *se para quaisquer* $a,\ b \in A$ *valem:*

$$ab = ba,$$

$$(a^2 b)a = a^2(ba), \text{ onde } a^2 = aa.$$

Observação 1.1.2. Notemos que a anticomutatividade é equivalente a

$$ab = -ba$$

para álgebras sobre corpos K com $\operatorname{char} K \neq 2$. Esta noção de equivalência será trabalhada mais adiante.

A seguir providenciamos alguns exemplos de álgebras.

Exemplo 1.1.3. O espaço vetorial $M_n(K)$ das matrizes $n \times n$ com entradas em K, com a multiplicação sendo a multiplicação usual de matrizes, é uma álgebra associativa unitária.

Exemplo 1.1.4. O espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ sobre o corpo dos reais com o produto vetorial $\times$ usual é uma álgebra de Lie.

Exemplo 1.1.5. O espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ sobre o corpo dos reais com base $\{e_1, e_2, e_3\}$ e multiplicação $*$ comutativa induzida por: $e_1 * e_2 = 0$, $e_1 * e_3 = e_3 = e_2 * e_3$, $e_1 * e_1 = e_1$, $e_2 * e_2 = e_2$, $e_3 * e_3 = e_1 + e_2$, é uma álgebra não associativa. Este é um exemplo de uma álgebra de Jordan.

Exemplo 1.1.6. O anel $K[x_1, \ldots, x_n]$ dos polinômios em n variáveis comutativas com as operações usuais do anel é uma álgebra, pois ele também é um K-espaço vetorial. Ela é associativa, comutativa e unitária.

Exemplo 1.1.7. Se $K \subseteq L$ é uma extensão de corpos, então L é um K-espaço vetorial que é álgebra sobre K associativa, comutativa, unitária, quando consideramos as operações de corpo em L.

Exemplo 1.1.8. Seja $(G, \star)$ um grupo. A álgebra de grupo KG que possui base $\{g \mid g \in G\}$ e multiplicação $*$ definida na base por $g * h = g \star h$ é uma álgebra associativa e unitária.

Exemplo 1.1.9. O subespaço $U_n(K)$ de $M_n(K)$ das matrizes triangulares superiores (ou seja, $U_n(K) = \{(a_{ij}) \in M_n(K) \mid a_{ij} = 0 \text{ se } i > j\}$) com a multiplicação "herdada" de $M_n(K)$, também é uma álgebra associativa unitária.

Exemplo 1.1.10. Se A é uma álgebra associativa com multiplicação $*$, então o espaço vetorial A se torna uma álgebra de Lie com a multiplicação dada pelo comutador $[a_1, a_2] = a_1 * a_2 - a_2 * a_1$. Essa álgebra $(A, [\,.\,,\,.\,])$ é denotada por $A^{(-)}$.

Exemplo 1.1.11. Considerando a álgebra $A = M_n(K)$, denotaremos por $gl_n(K)$ a álgebra de Lie $A^{(-)}$, ou seja, o espaço vetorial das matrizes $n \times n$ com entradas em K equipado com multiplicação $[\,.\,,\,.\,]$ dada por $[a, b] = ab - ba$.

Exemplo 1.1.12. Como no caso de álgebras de Lie, se A é uma álgebra associativa com multiplicação $*$ sobre um corpo K, $\operatorname{char} K \neq 2$, substituindo-se o produto de A pelo produto simétrico $a \circ b = (a * b + b * a)/2$ obteremos uma álgebra de Jordan, denotada por $A^{(+)}$.

Observação 1.1.13. É bem conhecido que toda álgebra de Lie é isomorfa a uma subálgebra de alguma álgebra de Lie do tipo $A^{(-)}$, onde A é associativa. Esta afirmação é conhecida como Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt. Deste modo, normalmente usa-se o símbolo de colchete $[\,.\,,\,.\,]$ para denotar a multiplicação em uma álgebra de Lie. Considerando-se álgebras de Jordan, isso deixa de ser verdadeiro. As álgebras de Jordan que são subálgebras de $A^{(+)}$ são chamadas de **especiais**, e as demais, de **excepcionais**.

Definição 1.1.14. *Sejam $(A, *_A)$ e $(B, *_B)$ duas álgebras sobre um mesmo corpo. Seja $f\colon A \to B$ uma transformação linear.*

*Diremos que f é um **homomorfismo de álgebras** se $f(x *_A y) = f(x) *_B f(y)$, para todos $x, y \in A$. Definimos por $\ker(f) = f^{-1}(0_B)$ e por $Im(f) = f(A)$ o núcleo e a imagem de f, respectivamente. Agora podemos definir subálgebra e ideal (bilateral).*

*Continuando na mesma notação, $C \subseteq B$ é uma **subálgebra** de B se C é imagem de um homomorfismo de álgebras com contradomínio B. Outra forma equivalente é se C é um subespaço vetorial de B, que equipado com a restrição de $*_B$ a $C \times C$, C é uma álgebra.*

*Diremos que I é **ideal (bilateral)** de A se I for núcleo de algum homomorfismo de álgebras com domínio A. Outra forma equivalente bem conhecida é quando I é um subespaço de A tal que $AI \subseteq I$ (isto é, I é ideal à esquerda) e $IA \subseteq I$ (isto é, I é ideal à direita).*

Observação 1.1.15. Quando estivermos lidando com álgebras unitárias, exigimos que para C ser subálgebra, ela deve ser unitária, e ter a mesma unidade de B. Desse modo, ideais não triviais de álgebras (unitárias) não são subálgebras. Na verdade, quando se considera como objetos álgebras unitárias com $1 \neq 0$, torna-se interessante estudar apenas os homomorfismos tais que $f(1_A) = 1_B$. Aqui usaremos que homomorfismos entre álgebras unitárias preservam a unidade. Costuma-se chamar aos ideais nesta categoria de próprios.

Observação 1.1.16. Se considerarmos todos os espaços vetoriais equipados com multiplicações trivialmente nulas, todas as transformações lineares seriam homomorfismos de álgebra. Neste sentido a teoria de álgebras como enunciamos aqui estende a teoria de espaços vetoriais.

Exemplo 1.1.17. O subespaço $U_n(K)$ é uma subálgebra de $M_n(K)$. O subespaço I de $U_n(K)$ que consiste das matrizes em que todos os elementos da diagonal são 0 é um ideal bilateral (e próprio) de $U_n(K)$ (mas não de $M_n(K)$).

Exemplo 1.1.18. O subespaço $sl_n(K)$ das matrizes $n \times n$ e traço nulo é um ideal (e subálgebra) da álgebra de Lie $gl_n(K)$.

Exemplo 1.1.19. Seja A uma álgebra e I um ideal bilateral de A. Então temos que

$$A/I = \{+_a(I) \mid a \in A\},$$

o espaço quociente de A por I, em que $+_a: x \in A \to a + x \in A$, possui uma estrutura natural de álgebra considerando a multiplicação $*: (+_a(I), +_b(I)) \in A/I \times A/I \to +_{ab}(I) \in A/I$ que fica bem definida, tendo em vista a bilateralidade de I e o fato de A/I ser uma partição de A.

Notação 1.1.20. *Usualmente denotam-se os conjuntos (ou elementos conforme o ponto de vista) $+_a(I)$ do exemplo anterior por $a + I$ (em alguns casos costuma-se usar $\overline{a}$). A partir de agora faremos uso da notação usual para uma classe lateral.*

Exemplo 1.1.21. Seja $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ uma família de álgebras sobre um mesmo corpo. Os espaços produto (direto), $\prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ e soma direta, $\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ tornam-se naturalmente álgebras considerando a multiplicação coordenada a coordenada usuais. Observamos que a soma direta $\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ de uma infinidade de álgebras unitárias não é unitária.

Exemplo 1.1.22. Sejam $(A, *_A)$ e $(B, *_B)$ duas álgebras sobre um mesmo corpo K. Sabemos que o produto tensorial $A \otimes B$ tem a estrutura de espaço vetorial. Podemos definir uma multiplicação $*$ natural em $A \otimes B$ que opera da seguinte forma nos geradores

$$(a_0 \otimes b_0) * (a_1 \otimes b_1) = (a_0 *_A a_1) \otimes (b_0 *_B b_1).$$

Assim temos que $(A \otimes B, *)$ é uma álgebra. Deste modo, o produto tensorial de duas álgebras é uma álgebra e satisfaz uma propriedade semelhante à propriedade universal do produto tensorial de espaços vetoriais: para toda aplicação bilinear $\varphi: A \times B \to C$ cujo contradomínio C é uma álgebra e tal que $\varphi(a *_A a', b *_B b') = \varphi(a, b) *_C \varphi(a', b')$, existe um único homomorfismo de álgebras $\overline{\varphi}: A \otimes B \to C$, tal que $\overline{\varphi}(a \otimes b) = \varphi(a, b)$. Todos os produtos tensoriais que vamos considerar nesta tese serão como este, sempre sobre o corpo K.

Exemplo 1.1.23. (**Álgebra de Grassmann**)

Seja V um espaço vetorial de dimensão infinita, com base enumerável $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$. Definimos a **álgebra de Grassmann** de V, denotada por E, como sendo a álgebra associativa com base, como espaço vetorial, consistente dos produtos $D = \{1\} \cup \{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_k,\ k \geqslant 1\}$ e cuja multiplicação satisfaz as relações $e_i^2 = 0$ e $e_ie_j = -e_je_i$ para quaisquer i, $j \in \mathbb{N}$. Sejam E_0 e E_1 os subespaços vetoriais de E gerados pelos conjuntos $D_0 = \{1\} \cup \{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_m} \mid m \text{ par}\}$, e $D_1 = \{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k} \mid k \text{ ímpar}\}$, respectivamente. É fácil ver que

$$(e_{i_1}\cdots e_{i_m})(e_{j_1}\cdots e_{j_k}) = (-1)^{mk}(e_{j_1}\cdots e_{j_k})(e_{i_1}\cdots e_{i_m}),$$

para quaisquer m, $k \in \mathbb{N}$, e assim podemos concluir que $g_0 x = x g_0$ para quaisquer $g_0 \in E_0$ e $x \in E$, e $g_1 g_2 = -g_2 g_1$ para quaisquer g_1, $g_2 \in E_1$. Ainda temos que $E = E_0 \oplus E_1$.

Além disso, se V_n é o subespaço vetorial de V gerado por $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ denotaremos por $E(V_n)$ sua álgebra de Grassmann correspondente e por vezes chamaremos de **álgebra exterior do espaço** V_n.

Exemplo 1.1.24. Um exemplo importante de produto tensorial de álgebras é a álgebra $E \otimes E$, onde E é a álgebra de Grassmann (construída sobre um espaço vetorial de dimensão infinita e enumerável).

Exemplo 1.1.25. (**Centro de uma álgebra**)

Sendo A uma álgebra, o conjunto

$$Z(A) = \{a \in A \mid \text{para todos } x \in A, ax = xa\}$$

é uma subálgebra de A, chamada de **centro de** A. No exemplo 1.1.23, $Z(E) = E_0$, se $\operatorname{char} K \neq 2$. Se $\operatorname{char} K = 2$, então a álgebra E é comutativa e neste caso $Z(E) = E$.

Exemplo 1.1.26. (**Álgebra de Clifford**)

Seja V um espaço vetorial de dimensão infinita (ou finita), com base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$ ($\{e_1, \ldots, e_n\}$, respectivamente). Se V possui uma forma bilinear simétrica $\langle\, .\, ,\, .\, \rangle$, a **álgebra de Clifford** C_V associada a V é a álgebra associativa com unidade cuja base como espaço vetorial é $D = \{1\} \cup \{e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_k,\ k \geqslant 1\}$ e cuja multiplicação satisfaz as relações $e_i e_j + e_j e_i = \langle e_i, e_j \rangle$ para todos i, $j \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.1.27. Seja A uma álgebra. Podemos definir um espaço vetorial de matrizes $a \times b$ com entradas em A, $M_{a\times b}(A) = \{x \colon I_a \times I_b \to A\}$ (para notação ver p. xiii) sobre o mesmo corpo K, definindo a soma e o produto por escalar coordenada a coordenada. Podemos ainda definir uma multiplicação $*$ entre elementos de $M_{a\times b}(A)$ e $M_{b\times c}(A)$ da seguinte forma

$$(x * y)(i, j) = \sum_{k=1}^{b} x(i, k) y(k, j).$$

Exemplo 1.1.28. (**Álgebras de matrizes com entradas na álgebra de Grassmann**)

Um exemplo importante é $M_n(E)$, a álgebra das matrizes $n \times n$ com entradas na álgebra de Grassmann E, munido com a multiplicação definida no exemplo anterior.

Sejam a, $b \in \mathbb{N}$ com $a + b = n$, mostra-se facilmente que o subespaço de $M_{a+b}(E)$ das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \text{ onde } A \in M_a(E_0), B \in M_{a\times b}(E_1), C \in M_{b\times a}(E_1), D \in M_b(E_0),$$

é uma subálgebra de $M_{a+b}(E)$. Denotaremos tal subálgebra por $M_{a,b}(E)$.

Definição 1.1.29. *Um homomorfismo de álgebras $\varphi \colon A \to B$ é dito:*

- ***monomorfismo**, se* $\ker(\varphi) = \{0\}$*;*

- ***epimorfismo***, *se* $Im(\varphi) = B$;
- ***isomorfismo***, *se é monomorfismo e epimorfismo. Neste caso denotamos* $A \cong B$;
- ***endomorfismo***, *se* $B = A$. *Denotaremos o conjunto dos endomorfismos de* A *por* $\mathrm{End}(A)$;
- ***automorfismo***, *se é isomorfismo e endomorfismo.*

Exemplo 1.1.30. Seja $(A, *_A)$ uma álgebra. Considere $A^{op} = A$, como espaço vetorial. Definimos em A^{op} a multiplicação $*$ como $a * b = b *_A a$, para todos $a, b \in A^{op}$. Dessa forma, A^{op} é uma álgebra, chamada de **álgebra oposta de** A.

Exemplo 1.1.31. Da propriedade universal de produto tensorial conclui-se facilmente que para uma álgebra A vale $M_n(A) \cong M_n(K) \otimes A$. Em particular, notamos que $M_n(E) \cong M_n(K) \otimes E$ e também que se L é uma extensão do corpo K, então $M_n(L) \cong M_n(K) \otimes L$, onde consideramos L como sendo uma K-álgebra.

Para álgebras vale um resultado análogo ao Teorema dos Isomorfismos para anéis, grupos e espaços vetoriais, o qual também chamaremos de Teorema dos Isomorfismos. A sua demonstração é análoga em todos estes casos.

Teorema 1.1.32. ***(Teorema dos Isomorfismos)***

Seja $\varphi\colon R_1 \longrightarrow R_2$ *um homomorfismo de álgebras. Então* $\ker(\varphi)$ *é um ideal bilateral de* R_1 *e a álgebra quociente* $R_1/\ker(\varphi)$ *é isomorfa a* $Im(\varphi)$.

1.1.2 Álgebras Livres, Identidades Polinomiais e PI-Álgebras

Nesta seção definiremos as Álgebras Livres. São importantes, pois são o "ambiente" onde é introduzido o conceito de identidades polinomiais, através do qual definimos a classe das álgebras com identidades polinomiais. Começaremos com a definição de Álgebras Livres.

Definição 1.1.33. *Seja* $\mathcal{B}$ *uma classe de álgebras e* $F \in \mathcal{B}$ *uma álgebra gerada por um conjunto* X. *A álgebra* F *é dita* ***livre na classe*** $\mathcal{B}$***, livremente gerada pelo conjunto*** X, *se satisfaz a seguinte propriedade universal: Para toda álgebra* $R \in \mathcal{B}$, *qualquer aplicação* $X \to R$ *pode ser estendida a um homomorfismo* $F \to R$. *A cardinalidade* $|X|$ *do conjunto* X *será chamada de* ***posto de*** F.

Observação 1.1.34. Não é necessário pedir a unicidade do homomorfismo na definição acima. Esta unicidade é uma condição necessária quando X é um conjunto gerador de F e o homomorfismo está unicamente determinado em X, já que estende a aplicação de conjuntos.

A seguir construímos uma álgebra livre na classe das K-álgebras associativas e unitárias. Seja X um conjunto. Seja $\overline{X} = X \cup \{\phi\}$, onde $\phi \notin X$. Consideremos o conjunto

$$Pal = \{p\colon \mathbb{N} \to \overline{X} \mid p^{-1}(X) = \emptyset \text{ ou } p^{-1}(X) = I_n, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\},$$

também conhecido como conjunto das palavras de X e $p_0 \in Pal$ palavra constante ϕ é a palavra vazia. Agora considere $K\langle X\rangle = \{\varphi\colon Pal \to K \mid \varphi \text{ tem suporte finito}\}$ (lembramos que o suporte de φ é o conjunto $\varphi^{-1}(\{0\}^c)$) é um espaço vetorial com base as funções característica de apenas um elemento de Pal, ou seja a base pode ser identificada com Pal. Em especial, a função característica da palavra vazia será denotada por 1. Outra forma mais usual de descrever isto: uma palavra sobre X é uma sequência $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $x_{i_j} \in X$. A palavra vazia será denotada por 1. Denotaremos por $K\langle X\rangle$ o espaço vetorial que tem como base o conjunto de todas as palavras sobre X. Assim, os elementos de $K\langle X\rangle$ são somas (formais) de termos que são produtos (formais) de um escalar por uma palavra em X.

Definição 1.1.35. *Os elementos $x \in X$ são chamados de* ***variáveis****, os produtos (formais) de um escalar não nulo de K por uma palavra são chamados de* ***monômios*** *(no primeiro formato apresentado são as funções que atribuem a uma palavra um elemento não nulo de K e às demais palavras 0, ou seja, múltiplos não nulos das funções característica de apenas um elemento de Pal) e os elementos de $K\langle X\rangle$ são chamados de* ***polinômios****. Seja $f \in K\langle X\rangle$, dizemos que f* ***depende da variável*** *x se existe uma palavra p, tal que $x \in p(\mathbb{N})$ e $f(p) \neq 0$. Denotamos $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ se $f \in K\langle X\rangle$ não depende das variáveis distintas de $x_1, \ldots, x_n$. Um monômio M tem* ***grau*** *k em x se a variável x ocorre em M exatamente k vezes, denotamos $\deg_x(M) = k$ (no primeiro formato o grau de M em x é a cardinalidade de $p^{-1}(x)$, onde p é a única palavra tal que $M(p) \neq 0$). Dizemos que dois monômios M e N tem o mesmo* ***multigrau*** *se $\deg_x(M) = \deg_x(N)$, para todos $x \in X$. Dizemos que um monômio M tem* ***grau total*** *k se $\sum_{x\in X} \deg_x(M) = k$, denotando isto por $\deg(M) = k$. Um polinômio que é soma de monômios de grau total k é dito* ***homogêneo de grau*** *k, denotaremos por $\deg(f) = k$. Um polinômio f é* ***homogêneo de grau*** *k* ***em*** *x, se todos os seus monômios tem grau k em x, denotamos este fato por $\deg_x f = k$. Dizemos que f é* ***multi-homogêneo****, se para cada variável x todos os seus monômios têm o mesmo grau em x. Um polinômio* ***linear em*** *x é um polinômio de grau 1 em x. Se f é linear em toda variável da qual ele dependa, dizemos que f é* ***multilinear****.*

Consideremos agora em $K\langle X\rangle$ a multiplicação definida na base por

$$(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n})(x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}) = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}$$

(no primeiro formato apresentado definimos primeiro a multiplicação das palavras p e q,

$$pq(t) = \begin{cases} p(t), & \text{se } t \in p^{-1}(X) \\ q(t-n), & \text{onde } n = |p^{-1}(X)|, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

e depois a multiplicação da função característica de p pela função característica de q, que é a função característica de pq).

Munido deste produto $K\langle X\rangle$ é uma álgebra associativa, com unidade, que é palavra vazia, o 1. É chamada a álgebra dos polinômios associativos (em uma quantidade $|X|$ de variáveis). A proposição a seguir garante que $K\langle X\rangle$ é livre na classe das álgebras associativas com unidade.

Proposição 1.1.36. *A álgebra $K\langle X\rangle$ é livre na classe das álgebras associativas com unidade.*

Demonstração. Para ver isto, considere A uma álgebra associativa com unidade e $h\colon X \longrightarrow A$ uma aplicação qualquer, para cada $x \in X$ denotaremos por a_x a imagem de x por h. Consideremos agora a aplicação linear $\varphi_h\colon K\langle X\rangle \longrightarrow A$ tal que $\varphi_h(1) = 1_A$ e $\varphi(p) = a_{p_1}a_{p_2}\cdots a_{p_n}$, onde a palavra $p\colon j \in \mathbb{N} \mapsto p_j \in \overline{X}$ satisfaz $p^{-1}(X) = I_n$ (lembre que $\overline{X} = X \cup \{\phi\}$ e $\phi \notin X$). Ela é bem definida, pois está definida na base de $K\langle X\rangle$. Além disso é fácil ver que φ_h é um homomorfismo de álgebras e é o único satisfazendo $\varphi_h|_X = h$. □

Observação 1.1.37. Este resultado é de todo interessante, pois em suma diz que para se conhecer um homomorfismo em $K\langle X\rangle$ basta conhecer como ele age em X.

Se $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$, denotaremos por $f(a_1, \ldots, a_n)$ a imagem de f por φ_h da Proposição 1.1.36 anterior. Na verdade $f(a_1, \ldots, a_n)$ é o elemento de A que se obtém substituindo cada x_i por a_i em f.

Observação 1.1.38. Existem várias construções de álgebras livres, conforme a classe de álgebras considerada. A seguir daremos mais uma construção para álgebras associativas. Seja X um conjunto (não vazio) qualquer. Considerando-se

$$V = \{f\colon X \to K \text{ de suporte finito}\},$$

temos que V é um K-espaço vetorial, com base de mesma cardinalidade de X, a saber as funções características χ_x de um único elemento $x \in X$. Ponha $T(V)^1 = V$ e defina indutivamente os espaços vetoriais $T(V)^{n+1} = T(V)^n \otimes V$ para todos $n \in \mathbb{N}$. É claro que os elementos

$$\otimes_{k\in p^{-1}(X)}\chi_{p_k} = \chi_{p_1} \otimes \ldots \otimes \chi_{p_n},$$

onde $p : k \in I_n \mapsto p_k \in X$ formam uma base para $T(V)^n$. Agora $T(V) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} T(V)^n$ é um espaço vetorial. Também é fácil notar que os elementos $\otimes_{k\in p^{-1}(X)}\chi_{p_k}$, onde p é uma função de domínio I_n para algum $n \in \mathbb{N}$ e contradomínio X formam uma base de $T(V)$. Definimos finalmente a multiplicação em $T(V)$, $*\colon T(V) \times T(V) \to T(V)$ na base por

$$\otimes_{k\in p^{-1}(X)}\chi_{p_k} * \otimes_{k\in q^{-1}(X)}\chi_{q_k} = (\otimes_{k\in p^{-1}(X)}\chi_{p_k}) \otimes (\otimes_{k\in q^{-1}(X)}\chi_{q_k}) = \otimes_{k\in (p*q)^{-1}(X)}\chi_{p*q}(k),$$

onde

$$p * q(k) = \begin{cases} p(k), & \text{se } t \in p^{-1}(X) \\ q(t-n), & \text{onde } n = |p^{-1}(X)|, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Claramente essa multiplicação $*$, definida acima, é bilinear e assim $T(V)$ é álgebra, conhecida também como álgebra tensorial de V (sem unidade).

Demonstra-se facilmente que $T(V)$ é livre na classe das álgebras associativas (não necessariamente unitárias) e de posto $|X|$.

Observação 1.1.39. Podemos fazer uma "**adjunção da unidade**" em $T(V)$, $A = K \oplus T(V)$ e definimos em A a multiplicação $*$ por $(\alpha \oplus f) * (\beta \oplus g) = \alpha\beta \oplus (\alpha g + \beta f + fg)$. Claramente $*$ é bilinear e assim A é uma álgebra com unidade (o $1 \oplus 0$). Mostra-se que $(A, *)$ é uma álgebra livre na classe das álgebras associativas com unidade e de posto $|X|$. Com estas informações, lembrando que as álgebras associativas constituem uma variedade, utilizando o Teorema 1.1.72, temos que A é isomorfa a $K\langle X\rangle$.

De agora em diante, a menos que se diga algo em contrário X denotará um conjunto enumerável $X = \{x_1, x_2, \dots\}$.

Definição 1.1.40. *Seja A uma álgebra associativa. Um polinômio $f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X\rangle$ (ou a própria expressão $f(x_1, \dots, x_n) = 0$) é uma **identidade polinomial** de A se $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in A$. Neste caso diremos que A **satisfaz a identidade** $f(x_1, \dots, x_n) = 0$. Denotaremos por $T(A)$ o conjunto de todas as identidades polinomiais de A. Dizemos A é uma **álgebra associativa com identidade polinomial** ou **PI-Álgebra associativa** se $T(A) \neq \{0\}$. Se A_1 e A_2 são álgebras associativas, dizemos que A_1 e A_2 são **PI-equivalentes** se $T(A_1) = T(A_2)$.*

Observação 1.1.41. Claramente esta definição pode ser estendida, considerando-se apenas A álgebra, e considerando-se as identidades polinomiais em $K\{X\}$, a álgebra unitária livre dos polinômios não associativos, ou até mesmo no espaço vetorial dos polinômios em $K\{X\}$ com componente homogênea no grau total zero sendo nula (a álgebra livre). Justificamos nossa definição restrita por ser o caso mais estudado, com a teoria mais bem desenvolvida e mais resultados. Assim, a partir de agora para cobrir alguns tópicos da teoria neste capítulo sempre vamos considerar as álgebras associativas e unitárias, salvo menção em contrário.

Observação 1.1.42. Não é difícil ver que $f = f(x_1, \dots, x_n)$ é uma identidade de A se, e somente se, f pertence aos núcleos de todos os homomorfismos de $K\langle X\rangle$ em A.

Exemplo 1.1.43. A álgebra $K\langle X\rangle$ não é uma PI-Álgebra na nossa definição, pois se $f \neq 0$, mas $f \in T(K\langle X\rangle)$ então para $h\colon X \to K\langle X\rangle$ a inclusão, o endomorfismo induzido φ_h é a identidade de $K\langle X\rangle$ e assim $\varphi_h(f) = f \neq 0$, portanto $T(K\langle X\rangle) = \{0\}$.

Definição 1.1.44. *(**Comutador (de Lie) de comprimento** $n > 1$)*

O comutador (de Lie) de comprimento $n > 1$ é definido indutivamente por

$$[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1,$$

$$[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}] = [[x_1, x_2, \dots, x_n], x_{n+1}].$$

Exemplo 1.1.45. Se A é uma álgebra comutativa (e associativa), então $[x_1, x_2] \in K\langle X\rangle$ é uma identidade polinomial para A. Em particular qualquer álgebra comutativa é uma PI-Álgebra.

Exemplo 1.1.46. O polinômio $[x_1, x_2, x_3]$ é uma identidade polinomial da álgebra de Grassmann E. Para ver isto, basta observar que $[a, b] \in E_0 = Z(E)$ para quaisquer a, $b \in E$. Este fato é óbvio para monômios $e_{i_1} \cdots e_{i_k}$, e como a identidade é 3-linear a identidade continua válida para combinações lineares de tais monômios. Assim E é uma PI-Álgebra.

Sabemos que o conjunto das identidades polinomiais satisfeitas por uma determinada álgebra é um ideal de $K\langle X\rangle$. Além disso ele apresenta uma propriedade importante: esse conjunto é invariante por endomorfismos. Ideais com essa propriedade são denominados T-ideais.

Definição 1.1.47. *Dizemos que um ideal I de $K\langle X\rangle$ é um **T-ideal** se $\varphi(I) \subseteq I$, para todos $\varphi \in \operatorname{End}(K\langle X\rangle)$, ou equivalentemente, se $f(g_1, \dots, g_n) \in I$ para quaisquer $f(x_1, \dots, x_n) \in I$ e $g_1, \dots, g_n \in K\langle X\rangle$.*

Proposição 1.1.48. *Se A é uma álgebra, então $T(A)$ é um T-ideal de $K\langle X\rangle$. Reciprocamente, se I é um T-ideal de $K\langle X\rangle$, então existe alguma álgebra B tal que $T(B) = I$.*

Demonstração. Sejam $\psi \in \mathrm{End}(K\langle X\rangle)$ e $f(x_1,\dots,x_m) \in T(A)$. Denotando $\psi(x_i) = g_i(x_1,\dots,x_{n_i})$ para todos $i \in I_m$ temos $\psi(f) = f(g_1,\dots,g_m) \in K\langle X\rangle$. Seja $h\colon X \to A$ uma aplicação, φ_h o homomorfismo induzido em $K\langle X\rangle$, $\varphi_h(g_i) = g_i(h(x_1),\dots,h(x_{n_i})) \in A$. Portanto teremos $\varphi_h(\psi(f)) = \varphi_h(f(g_1,\dots,g_n)) = f(\varphi_h(g_1),\dots,\varphi_h(g_n)) = 0$. Assim $\psi(f) \in T(A)$ e $T(A)$ é um T-ideal. Agora se I é T-ideal de $K\langle X\rangle$, então é fácil ver que $B = K\langle X\rangle/I$ é uma álgebra tal que $T(B) = I$. □

Teorema 1.1.49. *(**Teorema de Regev**, [18, p. 115], Teorema 8.1.10)*
Se A e B são PI-Álgebras, então $A \otimes B$ é PI-Álgebra.

Observação 1.1.50. Com frequência omitiremos algumas demonstrações para simplificar o texto. Nestes casos sempre adicionamos alguma referência, onde o leitor mais interessado pode encontrar a demonstração e mais referências.

Agora enunciaremos um teorema muito famoso na teoria de PI-Álgebras, o Teorema de Amitsur-Levitzki.

Teorema 1.1.51. *(**Teorema de Amitsur-Levitzki**, [18, p. 79], Teorema 7.1.3)*
A álgebra $M_n(K)$ satisfaz o polinômio standard de grau $2n$

$$s_{2n}(x_1,\dots,x_{2n}) = \sum_{\sigma \in S_{2n}} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(2n)},$$

onde S_{2n} é o grupo das permutações de I_{2n} e $(-1)^\sigma$ é o sinal da permutação σ (para a notação, ver p. xiii). Além disso, para todos $k \in \mathbb{N}$, a álgebra $M_n(K)$ não satisfaz identidades da forma s_m^k, quando $m < 2n$ e $k \geqslant 1$.

Assim, com este teorema, temos que as álgebras de matrizes $M_n(K)$ são PI-Álgebras. Na verdade, toda álgebra de dimensão finita n satisfaz uma identidade standard de grau $n+1$, pois esta identidade é multilinear, logo só precisa ser avaliada em elementos de uma base fixada, e é uma identidade anti-simétrica nas suas variáveis, isto é, anula quando há repetições.

1.1.3 Álgebras e Geradores

Nesta seção olharemos para as álgebras do ponto de vista de geradores, com o objetivo de fixar notação. Para isso, começamos com espaços vetoriais.

Definição 1.1.52. *Seja $X \subseteq V$ um subconjunto não vazio de um espaço vetorial V. Diremos que X **gera linearmente** V se para todos $v \in V$, v é combinação linear finita de elementos de X.*

*Diremos que X é **linearmente dependente** se existe uma combinação linear finita não trivial de elementos de X que é nula. Caso contrário, X será dito **linearmente independente**. Quando X gera V e X é linearmente independente, X é dito uma **base de** V.*

Observação 1.1.53. É bem conhecido que espaços vetoriais (não nulos) possuem uma base, utilizando-se para isso o Lema de Zorn. Além disso, dado um conjunto X não vazio, existe um espaço vetorial com base B de mesma cardinalidade de X. A saber,

$$K^{(X)} = \{f\colon X \to K \mid f \text{ tem suporte finito}\} = \bigoplus_{x\in X} K$$

torna-se naturalmente um espaço vetorial com as operações usuais de funções, e $B = \{\chi_x \mid x \in X\}$ é uma base, onde

$$\chi_x(y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y = x \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Um fato importante é que para se conhecer uma transformação linear T de domínio V basta conhecer como ela age numa base de V. Em outras palavras, se X é uma base de V, dado $w\colon X \to W$, onde W é um espaço vetorial, existe uma única transformação linear T de V em W que estende w.

Assim, podemos dizer que X gera V, se μ é transformação linear sobrejetiva, onde

$$\begin{aligned} \mu\colon K^{(X)} &\longrightarrow V \\ \chi_x &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Definição 1.1.54. *Seja $X \subseteq V$ um subconjunto não vazio de um espaço vetorial V. Denotaremos o espaço vetorial gerado pelo conjunto X em V por* $\operatorname{span} X$ *e escrevemos*

$$\operatorname{span} X = \left\{ \sum_{x\in\alpha^{-1}(\{0\}^c)} \alpha(x)x \mid \alpha \in K^{(X)} \setminus \{\mathbf{0}\} \right\} \cup \{\mathbf{0}\}.$$

Observação 1.1.55. É fácil ver que

$$\operatorname{span} X = Im(\mu),$$

para μ definida como acima na Observação 1.1.53, e que

$$\operatorname{span} X = \bigcap \{W \mid W \text{ é subespaço vetorial de } V \text{ e } X \subseteq W\},$$

ou seja, $\operatorname{span} X$ é o menor subespaço vetorial de V que contém X.

Assim é imediato que $\operatorname{span}(\operatorname{span} X) = \operatorname{span} X$. Também é imediato que $\operatorname{span} X = X$, se e só se, X é subespaço vetorial de V. Além disso $\operatorname{span} X = V$, se e só se X gera V.

Observação 1.1.56. Também é interessante observar que quando X é um subconjunto finito e não vazio de V, ou seja, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ podemos simplificar a notação escrevendo

$$\operatorname{span} X = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \mid \text{ onde } \alpha_i \in K \right\}.$$

Agora podemos fazer algo semelhante com a multiplicação em álgebras.

Definição 1.1.57. *Seja $X \subseteq A$ um subconjunto não vazio de uma álgebra A. Diremos que X* ***gera*** *A* ***(como álgebra)*** *se para todos $a \in A$, a é combinação linear finita de produtos finitos de elementos de X. Muitas vezes diremos monômios em X, em lugar de produtos finitos de elementos de X, além disso também chamaremos de polinômios em X às combinações lineares de monômios em X.*

Diremos que X é ***algebricamente dependente*** *se existe um polinômio em X não trivial que é nulo. Caso contrário, X será dito* ***algebricamente independente****. Caso X gera A como álgebra e X é algebricamente independente, X é dito uma* ***base algébrica de*** *A.*

Observação 1.1.58. De agora em diante, diremos apenas X gera A quando quisermos dizer X gera A como álgebra. Observamos que se X gera linearmente A, então X gera A como álgebra. Podemos dizer que X gera a álgebra associativa unitária A, se μ é homomorfismo (que leva unidade em unidade) sobrejetivo, onde

$$\begin{aligned} \mu\colon K\langle X\rangle &\longrightarrow A \\ \chi_p &\longmapsto p(1)\cdots p(n), \end{aligned}$$

onde p é uma palavra de comprimento n. Notemos que como espaços vetoriais $K\langle X\rangle = K^{(Pal)}$, para $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$.

Definição 1.1.59. *Seja $R \subseteq A$ um subconjunto não vazio de uma álgebra associativa e unitária A. Denotaremos a álgebra gerado pelo conjunto R em A por $K(R)$ e escrevemos*

$$K(R) = \left\{ \sum_{p\in\alpha^{-1}(\{0\}^c)} \alpha(p)\mu(\chi_p) \mid \alpha \in K\langle R\rangle \setminus \{\mathbf{0}\} \right\} \cup \{\mathbf{0}\}.$$

Observação 1.1.60. É fácil ver que

$$K(R) = Im(\mu),$$

para μ definida como acima na Observação 1.1.58, e que

$$K(R) = \bigcap \{B \mid B \text{ é subálgebra de } A \text{ e } R \subseteq B\},$$

ou seja, $K(R)$ é a menor subálgebra de A que contém R.

Assim é imediato que $K(K(R)) = K(R)$. Também é imediato que $K(R) = R$, se e só se, R é subálgebra de A. Além disso $K(R) = A$, se e só se R gera A.

Observação 1.1.61. Além disso é interessante observar que quando R é um subconjunto finito e não vazio de A, ou seja, $R = \{r_1, \ldots, r_n\}$ podemos simplificar a notação escrevendo

$$K(R) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i r_{f_i(1)} r_{f_i(2)} \cdots r_{f_i(j_i)} \mid \text{ onde para todos } i \in I_k, \alpha_i \in K \text{ e } f_i\colon I_{j_i} \to I_n \right\}.$$

Definição 1.1.62. *Diremos que uma álgebra A é* ***finitamente gerada*** *se existir um subconjunto finito R que gera A.*

Em particular, toda álgebra de dimensão finita é finitamente gerada, em vista da Observação 1.1.58.

Ainda podemos relacionar um pouco mais essas duas formas de "gerar".

Definição 1.1.63. *Seja $V \subseteq A$ um subconjunto não vazio de uma álgebra A. Definimos o n-ésimo* span *de V em A*

$$V^n = \operatorname{span}\{\textit{monômios de comprimento } n, \textit{ com letras em } V\}.$$

Em particular, $V^1 = \operatorname{span} V$.

Essa definição será retomada nas Definições 2.2.8 e 2.3.1, quando iremos definir crescimento de álgebras e dimensão de Gelfand-Kirillov.

Observação 1.1.64. Agora podemos observar que se A é uma álgebra unitária então teremos $K(R) = K \cdot 1_A + \sum_{n \in \mathbb{N}} R^n$. Além disso, quando A é uma álgebra unitária, e $1 \in R$, temos que $\sum_{n=1}^{k} R^n = R^k$.

1.1.4 Variedades e Álgebras Relativamente Livres

Nesta seção, apresentaremos os conceitos de variedades (de álgebras associativas) e de álgebras relativamente livres.

Definição 1.1.65. *Seja $\{f_i \in K\langle X\rangle \mid i \in I\}$ um conjunto de polinômios da álgebra associativa livre $K\langle X\rangle$. A classe $\mathcal{B}$ de todas as álgebras associativas que satisfazem as identidades $f_i = 0$, $i \in I$, é chamada de* ***variedade (de álgebras associativas) determinada pelo sistema de identidades polinomiais*** *$\{f_i \in K\langle X\rangle \mid i \in I\}$. A variedade $\mathcal{M}$ é chamada de* ***subvariedade*** *de $\mathcal{B}$ se $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}$. O conjunto $T(\mathcal{B})$ de todas as identidades polinomiais satisfeitas por todas as álgebras da variedade $\mathcal{B}$ é denominado* ***o T-ideal de $\mathcal{B}$****. Dizemos que o T-ideal $T(\mathcal{B})$ é* ***gerado, como T-ideal****, pelo conjunto $\{f_i \in K\langle X\rangle \mid i \in I\}$. Usaremos a notação $T(\mathcal{B}) = \langle f_i \in K\langle X\rangle \mid i \in I\rangle^T$ e dizemos que o conjunto $\{f_i \in K\langle X\rangle \mid i \in I\}$ é uma* ***base para as identidades polinomiais de $\mathcal{B}$****. Os elementos de $T(\mathcal{B})$ são chamados* ***consequências*** *das identidades polinomiais da base.*

De maneira análoga, mudando-se a álgebra livre $K\langle X\rangle$ conforme o caso, define-se variedade de álgebras de Lie, de Jordan, etc.

Já vimos, na Proposição 1.1.48, que o conjunto $T(A)$ das identidades polinomiais satisfeitas por uma álgebra A é um T-ideal. Não é difícil ver que a interseção de T-ideais também é um T-ideal, e portanto o conjunto $T(\mathcal{B})$ das identidades polinomiais satisfeitas por todas as álgebras de uma variedade $\mathcal{B}$ também é um T-ideal, o que justifica denominarmos $T(\mathcal{B})$ "o T-ideal de $\mathcal{B}$".

Exemplo 1.1.66. A classe das álgebras comutativas é a variedade determinada pela identidade $[x_1, x_2]$.

Exemplo 1.1.67. A classe das álgebras associativas é a variedade determinada pelo conjunto $I = \emptyset$.

Um dos principais problemas na teoria das álgebras com identidades polinomiais é encontrar uma base para as identidades dessa álgebra. Esse é, em geral, um problema bastante complicado. Apenas para se ter uma ideia ainda não são conhecidas bases para as identidades polinomiais de $M_n(K)$ quando $n \geqslant 3$, nem mesmo em característica 0. Tampouco é conhecida uma base para $M_2(K)$ quando $|K|=\infty$ e $\operatorname{char} K = 2$.

A seguir daremos alguns exemplos de bases para algumas das PI-Álgebras.

Exemplo 1.1.68. Se $\operatorname{char} K = 0$, então $T(K) = \langle [x_1, x_2] \rangle^T$.

Exemplo 1.1.69. O T-ideal das identidades da álgebra de Grassmann E é gerado pela identidade $[x_1, x_2, x_3]$, quando o corpo K satisfaz $\operatorname{char} K = 0$.

Veja [18, p. 50], Teorema 5.1.2 para maiores detalhes.

Exemplo 1.1.70. Se K é um corpo infinito, então

$$T(U_n(K)) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}] \rangle^T.$$

Veja [18, p. 52], Teorema 5.2.1.

Definição 1.1.71. *Fixado um conjunto Y, a álgebra $R_Y(\mathcal{B})$ na variedade $\mathcal{B}$ é dita a **álgebra relativamente livre de $\mathcal{B}$, livremente gerada por** Y (ou a **álgebra $\mathcal{B}$-livre**), se $R_Y(\mathcal{B})$ é livre na classe $\mathcal{B}$, livremente gerada por Y.*

O próximo teorema mostra que toda variedade tem uma álgebra livre e que a álgebra relativamente livre é determinada, a menos de isomorfismo, pela cardinalidade de Y.

Teorema 1.1.72. *([18, p. 23], Proposição 2.2.5)*

Sejam $\mathcal{B}$ a variedade determinada pelo conjunto de identidades associativas $\{f_i \mid i \in I\}$, Y um conjunto e J o ideal de $K\langle Y \rangle$ gerado por

$$\{f_i(g_1, \ldots, g_{n_i}) \mid g_i \in K\langle Y \rangle, i \in I\}.$$

Então a álgebra associativa $R = K\langle Y \rangle / J$ é relativamente livre em $\mathcal{B}$ com um conjunto de geradores livres $\overline{Y} = \{y + J | y \in Y\}$. E quaisquer duas álgebras relativamente livres em $\mathcal{B}$ de mesmo posto são isomorfas.

Observação 1.1.73. Seja A uma PI-Álgebra e $\mathcal{A}$ a variedade determinada por $T(A)$ (ou por A). Claramente $T(\mathcal{A}) = T(A)$. Assim, dado um conjunto Y, definimos $R_Y(A) = R_Y(\mathcal{A})$, a álgebra relativamente livre de posto $|Y|$ determinada por A. Mais ainda se $m = |Y| \in \mathbb{N}$, denotaremos por $R_m(A)$ a álgebra relativamente livre de posto m. Se Y for enumerável, escreveremos simplesmente $R(A)$.

Definição 1.1.74. *Seja $\mathcal{B}$ uma classe de álgebras. Denotaremos por $\mathcal{CB}$, $\mathcal{SB}$ e $\mathcal{QB}$ as classes obtidas de $\mathcal{B}$ tomando-se produtos diretos (somas Cartesianas), subálgebras e álgebras quocientes, respectivamente, de álgebras de $\mathcal{B}$.*

Teorema 1.1.75. *(**Teorema de Birkhoff**, [18, p. 24], Teorema 2.3.2)*

Uma classe de álgebras $\mathcal{B}$ é uma variedade se, e só se, $\mathcal{B}$ é fechada para produtos diretos, subálgebras e álgebras quocientes, isto é, $\mathcal{CB}$, $\mathcal{SB}$, $\mathcal{QB} \subseteq \mathcal{B}$.

1.2 Álgebras Graduadas

1.2.1 Álgebras Graduadas: Conceitos Gerais

Nesta seção apresentaremos os conceitos de álgebras e identidades graduadas que são muito úteis no estudo de álgebras com identidades polinomiais. Essencialmente a graduação de álgebras é uma forma interessante de "quebrar a álgebra em pedaços", com o intuito de facilitar a análise nos "pedaços". Muitas vezes pode-se juntar a análise nos pedaços e inferir propriedades a respeito da álgebra toda. Embora não utilizaremos de forma substancial, optamos por apresentar de forma sistemática os resultados e demonstrações, de forma parecida com a teoria básica de identidades polinomiais.

Definição 1.2.1. *Seja $(G, \star)$ um grupo com identidade ε (para notação, ver p. xiii). Uma álgebra $(A, *)$ é chamada de **álgebra G-graduada**, se $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$, onde A_g é subespaço de A para todos $g \in G$ e $A_g * A_h \subseteq A_{g \star h}$ para todos g, $h \in G$. No decorrer do texto omitiremos as operações $\star$ e $*$, fazendo-se entender qual é a operação contextualmente. Um elemento $a \in \bigcup_{g \in G} A_g$ é chamado **homogêneo**. Quando $a \in A_g$, dizemos que a é **homogêneo de grau** g e denotamos $\mathrm{wt}(a) = g$. Se $a = \sum_{g \in G} a_g$, com $\mathrm{wt}(a_g) = g$, chamamos a_g de **componente homogênea de grau** g **de** a e dizemos que $\sum_{g \in G} a_g$ é a **decomposição de** a **como soma de elementos homogêneos**. O **suporte** da G-graduação é o conjunto dos elementos $g \in G$ tal que $A_g \neq 0$. Claramente cada elemento se decompõe de maneira única como soma de elementos homogêneos. Dizemos que um subespaço B de A é G-**graduado** na G-graduação de A, se*

$$B = \bigoplus_{g \in G} B_g, \text{ onde } B_g = B \cap A_g \text{ são os subespaços homogêneos de } B.$$

*Se um ideal I de A é um subespaço G-graduado, dizemos que I é um **ideal G-graduado** de A. Se uma subálgebra B de A é um subespaço G-graduado, dizemos que B é uma **subálgebra G-graduada** de A.*

Exemplo 1.2.2. Seja A uma álgebra. Então é fácil ver que a decomposição

$$\bigoplus_{g \in G} A_g,$$

onde $A_g = \{0\}$ se $g \neq \varepsilon$ e $A_\varepsilon = A$, onde ε é a identidade de G, é uma G-graduação em A. Esta graduação é chamada de trivial.

Observação 1.2.3. É fácil ver que se a álgebra A é unitária, então $1 \in A_\varepsilon$. De fato, considere a decomposição da unidade em elementos homogêneos $1 = 1_\varepsilon + \sum_{g \neq \varepsilon} 1_g$. Para $x \in A_h$, temos $x - x1_\varepsilon = \sum_{g \neq \varepsilon} x1_g \in A_h \cap \bigoplus_{g \neq h} A_g$. Portanto $x - x1_\varepsilon = 0$, ou seja, $x1_\varepsilon = x$. Analogamente $1_\varepsilon x = x$ e assim $1 = 1_\varepsilon$.

Exemplo 1.2.4. A álgebra de Grassmann E possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural $E = E_0 \oplus E_1$, onde E_0 e E_1 são os subespaços definidos no Exemplo 1.1.23.

Exemplo 1.2.5. Se A e B são álgebras G-graduadas, então $A \otimes B$ também é G-graduada considerando as seguintes componentes homogêneas:

$$(A \otimes B)_k = \sum_{g,h;gh=k} A_g \otimes A_h.$$

Exemplo 1.2.6. Consideremos

$$(E \otimes E)_0 = (E_0 \otimes E_0) \oplus (E_1 \otimes E_1) \text{ e } (E \otimes E)_1 = (E_0 \otimes E_1) \oplus (E_1 \otimes E_0).$$

É imediato verificar que

$$E \otimes E = (E \otimes E)_0 \oplus (E \otimes E)_1, \qquad (E \otimes E)_i (E \otimes E)_j \subseteq (E \otimes E)_{i+j}$$

para todos i, $j \in \mathbb{Z}_2$. Portanto a álgebra $E \otimes E$ é $\mathbb{Z}_2$-graduada.

Exemplo 1.2.7. Consideremos a decomposição

$$M_{1,1}(E) = (M_{1,1}(E))_0 \oplus (M_{1,1}(E))_1$$

onde

$$(M_{1,1}(E))_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in E_0 \right\} \quad \text{e} \quad (M_{1,1}(E))_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid b, c \in E_1 \right\}$$

e verificamos diretamente que

$$(M_{1,1}(E))_i (M_{1,1}(E))_j \subseteq (M_{1,1}(E))_{i+j} \text{ para todos } i, j \in \mathbb{Z}_2.$$

Assim essa decomposição é uma $\mathbb{Z}_2$-graduação para $M_{1,1}(E)$

Exemplo 1.2.8. Sejam $X = \{x\}$ e $K\langle X \rangle = K[x]$ a álgebra dos polinômios a uma variável x sobre K. Então $K[x]$ admite uma $\mathbb{Z}$-graduação: $K[x]_n$ é o espaço gerado por x^n, quando $n \geqslant 0$, e $K[x]_n = 0$ se $n < 0$.

Se X for um conjunto finito de m elementos, podemos considerar em $K\langle X \rangle$ uma $\mathbb{Z}^m$-graduação usando os espaços de multigrau homogêneo. Para um conjunto X podemos considerar uma $\mathbb{Z}$-graduação levando em conta o grau total.

Exemplo 1.2.9. (sobre a descrição de álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas, veja [30, p. 21])

Seja A uma álgebra sobre um corpo K algebricamente fechado e de char $K \neq 2$, e $\dim_K(A) < \infty$. Um resultado clássico de C. T. C. Wall (1963) [57] descreve as possíveis $\mathbb{Z}_2$-graduações de A supondo-se que A seja $\mathbb{Z}_2$-simples (isto é, os dois únicos ideais homogêneos são 0 e A e $A^2 \neq 0$). A menos de isomorfismo graduado (definiremos em breve), A tem de ser uma das seguintes álgebras:

(i) $A = M_n(K)$ com a graduação trivial $A_0 = A$ e $A_1 = 0$;

(ii) $A = M_{a+b}(K)$ é dividida em 4 blocos, sendo os blocos da diagonal de tamanhos $a \times a$ e $b \times b$. Neste caso

$$A_0 = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0 & W \\ T & 0 \end{pmatrix},$$

onde $U \in M_a(K)$, $V \in M_b(K)$, $W \in M_{a \times b}(K)$ e $T \in M_{b \times a}(K)$;

(iii) $A = M_n(K) \oplus tM_n(K)$, onde $A_0 = M_n(K)$ e $A_1 = tM_n(K)$ e t é um elemento tal que $t^2 = 1$.

Exemplo 1.2.10. Considerando $M_n(K)$, denotemos por $E_{ij}\colon (k,l) \in I_n \times I_n \mapsto \delta_{ik}\delta_{jl} \in K$, as matrizes "unitárias". Para cada $\gamma \in \mathbb{Z}_n$, definimos o subespaço $M_\gamma = \operatorname{span}\{E_{ij} \mid j - i \equiv_n \gamma\}$ e para cada $k \in \mathbb{Z}$, definimos

$$M_k = \begin{cases} \{0\}, & \text{se } |k| \geqslant n \\ \operatorname{span}\{E_{ij} \mid j - i = k\}, & \text{se } |k| < n. \end{cases}$$

É fácil ver que

$$M = \bigoplus_{\gamma \in \mathbb{Z}_n} M_\gamma \qquad \text{e} \qquad M = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k.$$

Agora, para ver que estas decomposições definem uma $\mathbb{Z}_n$-graduação e uma $\mathbb{Z}$-graduação, respectivamente, em $M_n(K)$, basta observar que

$$E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il},$$

donde segue que $M_{\gamma_1}M_{\gamma_2} \subseteq M_{\gamma_1+\gamma_2}$ para γ_1, $\gamma_2 \in \mathbb{Z}_n$, e $M_{k_1}M_{k_2} \subseteq M_{k_1+k_2}$ para k_1, $k_2 \in \mathbb{Z}$.

Nas graduações definidas em $M_n(K)$ no Exemplo 1.2.10 acima as matrizes elementares são homogêneas. Mais ainda, $E_{ij} \in M_{j-i}$, tanto para $i, j \in \mathbb{Z}_n$, como para $i, j \in \mathbb{Z}$.

Definição 1.2.11. *A G-graduação*

$$A = M_n(K) = \bigoplus_{g \in G} A_g$$

*na álgebra das matrizes $n \times n$ sobre um corpo K é **elementar** se existe uma n-upla de elementos $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ tal que $E_{ij} \in A_{g_i^{-1}g_j}$.*

Exemplo 1.2.12. A $\mathbb{Z}_n$-graduação e a $\mathbb{Z}$-graduação definidas do Exemplo 1.2.10 são elementares.

Observação 1.2.13. Observamos que uma graduação em $M_n(K)$ é elementar se, e somente se, todas E_{ij} são homogêneas. De fato, se a graduação é elementar é óbvio que todas E_{ij} são homogêneas.

Agora se todas E_{ij} são homogêneas, ou seja $E_{ij} \in A_{h_{ij}}$ então temos que

$$E_{ik} = E_{ij}E_{jk} \in A_{h_{ik}} \cap (A_{h_{ij}}A_{h_{jk}}) \subseteq A_{h_{ik}} \cap A_{h_{ij}h_{jk}}$$

e portanto $h_{ik} = h_{ij}h_{jk}$. Para $j = i$, obtemos $h_{ik} = h_{ii}h_{ik}$, donde $h_{ii} = \varepsilon$, onde ε é o elemento neutro de G. Ponha $g_1 = \varepsilon$, e defina indutivamente $g_{j+1} = g_j h_{j,j+1}$. Agora faremos duas induções. Temos $h_{11} = \varepsilon = g_1^{-1}g_1$ e o passo indutivo de j segue de $h_{1,j+1} = h_{1j}h_{j,j+1} = g_1^{-1}g_j h_{j,j+1} = g_1^{-1}g_{j+1}$. Com isso temos que $h_{1j} = g_1^{-1}g_j$ para todos j. E finalmente, o passo indutivo de i segue de $h_{i+1,j} = h_{i,i+1}^{-1}h_{ij} = h_{i,i+1}^{-1}g_i^{-1}g_j = (g_i h_{i,i+1})^{-1}g_j = g_{i+1}^{-1}g_j$. Assim, existe uma n-upla $(g_1, \ldots, g_n)$, tal que $E_{ij} \in A_{h_{ij}} = A_{g_i^{-1}g_j}$ e a graduação é elementar.

A seguir damos uma caracterização bastante útil dos subespaços G-graduados de uma álgebra G-graduada.

Proposição 1.2.14. *Sejam A uma álgebra G-graduada e B um subespaço de A. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *B é subespaço G-graduado de A;*

(ii) *As componentes homogêneas de cada elemento de B pertencem a B;*

(iii) *B é linearmente gerado por elementos homogêneos.*

Demonstração. Suponha que vale (i). Seja $b \in B$ e $b = \sum_{g \in G} b_g$, onde $b_g \in B_g$. Temos que b_g é a componente homogênea de grau g de b. Como $B_g = B \cap A_g \subseteq B$, cada b_g pertence a B.

Se vale (ii) então o conjunto $B \cap (\bigcup_{g \in G} A_g)$ gera B, e segue (iii). De fato, seja $b \in B$ e $b = \sum_{g \in G} b_g$, onde $b_g \in A_g$, a decomposição de b como soma de elementos homogêneos, em relação a G-graduação de A. Segue de (ii) que $b_g \in B$, ou seja $b_g \in B \cap (\bigcup_{g \in G} A_g)$, logo B é gerado por elementos homogêneos.

Suponha que vale (iii). Seja C uma base de B, com $C \subseteq (\bigcup_{g \in G} A_g)$ composta de elementos homogêneos e seja $B_g = B \cap A_g$, que é um espaço vetorial. Seja $C_g = C \cap A_g$. Agora consideremos o elemento $b = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i$, onde $c_i \in C$ e $\lambda_i \neq 0$. $b \in B_g$ se, e somente se, $\mathrm{wt}(c_i) = g$, para todos $i \in I_n$. Assim $C_g = C \cap A_g$ é uma base para B_g e como $C = \bigcup_{g \in G} C_g$ segue que $B = \bigoplus_{g \in G} B_g$ e a proposição está provada. □

Exemplo 1.2.15. Se consideramos $M_n(K)$ com qualquer uma das graduações definidas no Exemplo 1.2.10, então é fácil ver que a álgebra $U_n(K)$ das matrizes triangulares superiores é subálgebra homogênea de $M_n(K)$, já que é gerada pelos elementos homogêneos $\{E_{ij} \mid i \leqslant j\}$.

Definição 1.2.16. *Uma aplicação $\Phi \colon A \to B$ entre álgebras G-graduadas é chamada **homomorfismo G-graduado**, se Φ é um homomorfismo que satisfaz $\Phi(A_g) \subseteq B_g$ para todos $g \in G$. De modo análogo, definimos **isomorfismo, endomorfismo** e **automorfismo G-graduado**.*

Observação 1.2.17. Agora também estamos aptos a dar outras caracterizações dos ideais e das subálgebras. I é ideal G-graduado de A se I é núcleo de algum homomorfismo G-graduado com domínio A. C é subálgebra G-graduada de B quando C é imagem de algum homomorfismo G-graduado de contradomínio B.

Proposição 1.2.18. *Se I é um ideal G-graduado de uma álgebra G-graduada A, então A/I é uma álgebra G-graduada considerando $(A/I)_g = \{a + I \mid a \in A_g\}$.*

Demonstração. É claro que $A/I = \sum_{g \in G} (A/I)_g$, e que $(A/I)_g (A/I)_h \subseteq (A/I)_{gh}$. Para concluir resta mostrar que a soma é direta. Suponhamos que $\sum_{g \in G} (a_g + I) = 0$. Neste caso $\sum_{g \in G} a_g \in I$ e como I é G-graduado segue da Proposição 1.2.14 que $a_g \in I$, ou seja $(a_g + I) = 0$. Assim temos que $A/I = \bigoplus_{g \in G} (A/I)_g$ e a proposição está demonstrada. □

A proposição a seguir é uma versão graduada do Teorema 1.1.32, ao longo da tese também iremos nos referir a ela como Teorema dos Isomorfismos.

Proposição 1.2.19. ***(Teorema dos Isomorfismos)***

Sejam A e B álgebras G-graduadas e $\Phi\colon A \to B$ um homomorfismo G-graduado. Então, o $\ker(\Phi)$ *é um ideal G-graduado de A e a álgebra quociente $A/\ker(\Phi)$ é isomorfa (como álgebra graduada) à $Im(\Phi) = \Phi(A)$.*

Demonstração. É fácil ver que $\ker(\Phi)$ é um ideal de A, vamos mostrar que ele é G-graduado. Seja $a \in \ker(\Phi)$ e $a = \sum_{g\in G} a_g$, onde $a_g \in A_g$ é a sua decomposição como soma de elementos homogêneos. Como Φ é homomorfismo graduado temos que $0 = \sum_{g\in G}(\Phi(a_g))$ e $\Phi(a_g) \in B_g$, portanto $\Phi(a_g) = 0$ e $a_g \in \ker(\Phi)$.

A aplicação $\Psi\colon A/\ker\Phi \to B$ dada por $\Psi(a + \ker(\Phi)) = \Phi(a)$ está bem definida pois se a, $b \in A$ são tais que $a + \ker(\Phi) = b + \ker(\Phi)$, então $a - b \in \ker(\Phi)$ e $\Phi(a) = \Phi(b)$, ou seja $\Psi(a + \ker(\Phi)) = \Psi(b + \ker(\Phi))$. É fácil ver que Ψ é um homomorfismo graduado, assim resta apenas mostrar que Ψ é injetor. Se $\Psi(a + \ker(\Phi)) = 0$ então $\Phi(a) = 0$ e $a \in \ker(\Phi)$, logo $a + \ker(\Phi) = 0$ e a proposição está provada. □

1.2.2 Álgebras Graduadas Livres e Identidades Polinomiais Graduadas

Precisamos do conceito de álgebra associativa G-graduada livre para falar das identidades polinomiais graduadas e posteriormente desenvolver alguns resultados da teoria clássica de álgebras associativas. Deste modo, lembramos que até o fim deste capítulo consideraremos apenas álgebras associativas e unitárias. Consideremos uma família $\{X_g\}_{g\in G}$ de conjuntos enumeráveis e dois a dois disjuntos. Tomemos então $X = \bigcup_{g\in G} X_g$ e consideremos a álgebra associativa livre unitária $K\langle X\rangle$. Até o final desta seção, salvo menção em contrário usaremos $X = \bigcup_{g\in G} X_g$. Definimos então

$$\operatorname{wt}(1) = \varepsilon \quad \text{e} \quad \operatorname{wt}(x_1x_2\cdots x_m) = \operatorname{wt}(x_1)\operatorname{wt}(x_2)\cdots\operatorname{wt}(x_m),$$

onde $\operatorname{wt}(x_i) = g$ se $x_i \in X_g$ e ε é o elemento neutro de G. Sendo então m um monômio de $K\langle X\rangle$, dizemos que $\operatorname{wt}(m)$ é o G-grau de m. Tomando para cada $g \in G$

$$K\langle X\rangle_g = \operatorname{span}\{m \mid m \text{ é monômio de } K\langle X\rangle \text{ e } \operatorname{wt}(m) = g\}$$

temos

$$K\langle X\rangle = \bigoplus_{g\in G} K\langle X\rangle_g \text{ e } K\langle X\rangle_g K\langle X\rangle_h \subseteq K\langle X\rangle_{gh}$$

para quaisquer $g, h \in G$, assim $K\langle X\rangle$ é uma álgebra G-graduada denominada a álgebra associativa livre (unitária) G-graduada.

Proposição 1.2.20. *A álgebra G-graduada $K\langle X\rangle$ satisfaz a seguinte propriedade universal: Para toda álgebra G-graduada A, toda função $\Phi\colon \bigcup_{g\in G} X_g \to A$ tal que $\Phi(X_g) \subseteq A_g$ para todos $g \in G$, pode ser estendida a um único homomorfismo G-graduado de álgebras $K\langle X\rangle \to A$.*

Agora podemos dar a definição de identidade polinomial graduada.

Definição 1.2.21. *Seja $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra associativa G-graduada. Dizemos que um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$ é uma* ***identidade G-graduada*** *de A se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_i \in A_{\operatorname{wt}(x_i)}$ com $i \in I_n$.*

Daremos agora a definição de T_G-ideal, que é análoga ao conceito de T-ideal para o caso de identidades polinomiais graduadas.

Definição 1.2.22. *Seja $K\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre G-graduada. Um ideal G-graduado I de $K\langle X\rangle$ é dito ser um T_G**-ideal** se $\varphi(I) \subseteq I$ para todos endomorfismos G-graduado φ de $K\langle X\rangle$. Dado um subconjunto S qualquer de $K\langle X\rangle$, definimos o T_G**-ideal gerado por** S, denotado por $\langle S\rangle^{T_G}$, como sendo a interseção de todos os T_G-ideais de $K\langle X\rangle$ que contêm S.*

É claro que $K\langle X\rangle$ é um T_G-ideal que contém S, assim na definição acima $\langle S\rangle^{T_G}$ é interseção de uma família não vazia de conjuntos. Além disso não é difícil ver que a interseção de uma família qualquer de T_G-ideais é ainda um T_G-ideal, portanto $\langle S\rangle^{T_G}$ está bem definido e é o menor T_G-ideal que contém S.

O T_G-ideal gerado por S coincide com o subespaço vetorial de $K\langle X\rangle$ gerado pelo conjunto

$$\{h_1 f(g_1,\ldots,g_n)h_2 \mid f(x_1,\ldots,x_n) \in S, h_1,h_2 \in K\langle X\rangle, g_i \in K\langle X\rangle_{\mathrm{wt}(x_i)} \text{ para } i=1,\ldots n\}.$$

A proposição a seguir é bastante útil, sua demonstração é simples e análoga à da Proposição 1.1.48 e por isso será omitida.

Proposição 1.2.23. *Sendo A uma álgebra G-graduada, temos que o conjunto $T_G(A)$ das identidades G-graduadas de A é um T_G-ideal de $K\langle X\rangle$.*

Exemplo 1.2.24. Consideremos a álgebra de Grassmann E com sua $\mathbb{Z}_2$-graduação natural (conforme definida no Exemplo 1.2.4). Como $ab = -ba$ para quaisquer elementos a, $b \in E_1$, temos que $f(x_1,x_2) = x_1x_2 + x_2x_1 \in K\langle X\rangle$, onde $K\langle X\rangle$ é a álgebra livre $\mathbb{Z}_2$-graduada, com $wt(x_1) = wt(x_2) = 1$, é identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada de E.

O próximo resultado mostra uma importante relação entre os conceitos de identidades polinomiais ordinárias e graduadas.

Proposição 1.2.25. *Sejam A e B duas álgebras. Se A e B possuem G-graduações tais que $T_G(A) \subseteq T_G(B)$, então $T(A) \subseteq T(B)$. Ainda se $T_G(A) = T_G(B)$, então $T(A) = T(B)$.*

Demonstração. Consideremos a álgebra associativa livre $K\langle X\rangle$ e seja $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in T(A)$. Dados $b_1,b_2,\ldots,b_n \in B$, tomemos $b_{ig} \in B_g$, para $i=1,\ldots,n$ e uma quantidade finita de elementos $g \in G$, tais que $b_i = \sum b_{ig}$, ou seja cada b_i é uma soma finita de b_{ig} que pertencem a um número finito de componentes homogêneas na G-graduação. Consideremos agora, com i fixado, $\sum x_{ig}$, em que $x_{ig} \in X_g$ e o somatório é sobre o mesmo conjunto finito de índices dos somatórios $b_i = \sum b_{ig}$. Como $f \in T(A)$, é fácil ver que $f_1 = f(\sum x_{1g},\ldots,\sum x_{ng}) \in T_G(A)$ Pela hipótese temos que $f_1 \in T_G(B)$, logo substituindo x_{ig} por b_{ig} temos

$$f(b_1,b_2,\ldots,b_n) = f\left(\sum b_{1g},\sum b_{2g},\ldots,\sum b_{ng}\right) = 0$$

e assim $f \in T(B)$.

Se $T_G(A) = T_G(B)$, então $T_G(A) \subseteq T_G(B)$ e $T_G(B) \subseteq T_G(A)$, donde temos a última afirmação. □

Observação 1.2.26. É importante observar que a recíproca do resultado acima é falsa. As álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas $E = E_0 + E_1$ e $E = E + 0$ (graduação trivial), satisfazem identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas diferentes.

1.2.3 Identidades Graduadas Multilineares, Homogêneas e Próprias

Nesta seção veremos que sob determinadas condições podemos simplificar as identidades com que trabalhamos, podendo nos restringir a alguns tipos especiais de identidades.

Proposição 1.2.27. *Seja $f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{n} f_i(x_1, \ldots, x_m) \in K\langle X\rangle$ onde f_i é a componente homogênea de f com grau i em x_1, fixado.*

(i) Se o corpo K contém mais que n elementos, então $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \langle f\rangle^{T_G}$;

(ii) Se o corpo K satisfaz $\operatorname{char} K = 0$ ou maior que o grau de f, então $\langle f\rangle^{T_G}$ admite uma base composta por uma família finita de polinômios multilineares.

Demonstração. (*i*) Seja $I = \langle f\rangle^{T_G}$ o T_G-ideal de $K\langle X\rangle$ gerado por f. Escolhemos $n+1$ elementos distintos $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ de K. Como I é um T_G-ideal, obtemos que

$$f(\alpha_j x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_j^i f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in I \text{ para } j = 0, 1, \ldots, n.$$

Consideramos estas equações como um sistema linear com incógnitas $f_0, f_1, \ldots, f_n$. Como o determinante do sistema é

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \cdots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (\alpha_j - \alpha_i),$$

o determinante de Vandermonde que é diferente de 0, temos que cada $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in I$, isto é, as identidades $f_i = 0$ são consequências de $f = 0$.

(*ii*) Por (*i*), podemos assumir que $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ é multi-homogêneo. Seja $j = \deg_{x_1} f$. Faremos indução sobre j. Escrevemos $f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_m) \in I = \langle f\rangle^{T_G}$ (aqui $y_1, y_2 \in X_{\mathrm{wt}(x_1)}$) sob a forma

$$f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{j} f_i(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_m)$$

onde f_i é a componente homogênea de grau i em y_1. Logo, $f_i \in I$ para $i = 0, 1, \ldots, j$, pelo resultado (*i*). Como $\deg_{y_k} f_i < j$ para $i = 1, 2, \ldots, j-1$ e $k = 1, 2$, podemos aplicar argumentos indutivos e obtemos um conjunto de consequências multilineares de f. Para ver que estas identidades multilineares são uma base para $\langle f\rangle^{T_G}$ é suficiente observarmos que

$$f_i(y_1, y_1, x_2, \ldots, x_m) = \binom{j}{i} f(y_1, x_2, \ldots, x_m)$$

e que o coeficiente binomial é diferente de 0, uma vez que temos por hipótese $\operatorname{char} K = 0$ ou $\operatorname{char} K > \deg(f)$.

$\square$

Corolário 1.2.28. *Seja A uma álgebra. Então:*

(*i*) *Se o corpo K é infinito, todas identidades polinomiais graduadas de A seguem de suas identidades graduadas multi-homogêneas;*

(*ii*) *Se o corpo K satisfaz $\operatorname{char} K = 0$, todas as identidades polinomiais graduadas de A seguem de suas identidades multilineares graduadas.*

Exemplo 1.2.29. Aqui podemos explicar melhor a equivalência citada na Observação 1.1.2. De acordo com a demonstração da Proposição 1.2.27 anterior, a identidade $x^2 = 0$ implica (usando $x = y_1 + y_2$) $0 = (y_1 + y_2)^2 = y_1^2 + y_1y_2 + y_2y_1 + y_2^2$, donde obtemos a consequência $y_1y_2 + y_2y_1 = 0$. No entanto a identidade $y_1y_2 + y_2y_1 = 0$ implica (fazendo $y_1 = y_2 = x$) $2x^2 = 0$ que tem como consequência $x^2 = 0$ apenas quando o corpo K possui $\operatorname{char} K \neq 2$.

Neste momento podemos dar mais alguns exemplos de álgebras associativas que não são PI-Álgebras.

Exemplo 1.2.30. Seja V um espaço vetorial de base enumerável $\{v_1, \dots, v_n, \dots\}$ sobre um corpo K. Seja $\mathcal{L}$ o espaço vetorial das transformações lineares de V em V, ou seja, os endomorfismos. Temos que $\mathcal{L}$ se torna uma álgebra quando equipada com a multiplicação dada pela composição. Ela é unitária e associativa. Considere o subespaço $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ dos endomorfismos de posto finito (cuja imagem tem dimensão finita). Ele também é uma álgebra com a multiplicação dada pela composição, é uma álgebra associativa embora não seja unitária. Assim, $\mathcal{L}'$ pode ser visto como uma subálgebra de $\mathcal{L}$, desde que se esqueça que $\mathcal{L}$ é unitária. Temos que tanto $\mathcal{L}'$, quanto $\mathcal{L}$ não são PI-Álgebras. Caso fossem PI-Álgebras, deveriam satisfazer algum polinômio multilinear de grau digamos d ($d \geqslant 1$), sem perda de generalidade podemos escrever a relação satisfeita da seguinte forma

$$x_1 \cdots x_d = \sum_{\sigma \in S_d \setminus \{\varepsilon\}} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(d)},$$

onde S_d denota o grupo simétrico de ordem $d!$.

Considere $\varphi_{(i,j)}$ o endomorfismo tal que $\varphi_{(i,j)}(v_k) = \delta_{jk} v_i$ para todos i, j e $k \in \mathbb{N}$. Temos que $\varphi_{(i,j)} \in \mathcal{L}'$. No entanto,

$$0 \neq \varphi_{(1,d+1)} = \varphi_{(1,2)} \circ \cdots \circ \varphi_{(d,d+1)} = \sum_{\sigma \in S_d \setminus \{\varepsilon\}} \alpha_\sigma \varphi_{(\sigma(1),\sigma(1)+1)} \circ \cdots \circ \varphi_{(\sigma(d),\sigma(d)+1)} = 0,$$

o que é absurdo. Logo nem $\mathcal{L}$, nem $\mathcal{L}'$ são PI-Álgebras.

Quando a álgebra é unitária podemos restringir a nossa busca de identidades polinomiais a um determinado tipo de polinômios (polinômios próprios), conforme explicamos a seguir. No que segue, $Y = X_\varepsilon$ e $Z = \bigcup_{g \neq \varepsilon} X_g$, assim $X = Y \cup Z$. As variáveis de G-grau ε serão denotas por y_i, com $i \in \mathbb{N}$; as variáveis de G-grau diferente de ε serão denotadas por z_j, para $j \in \mathbb{N}$ e quando uma variável tiver grau arbitrário será denotada por x_i, com $i \in \mathbb{N}$.

Definição 1.2.31. *Um polinômio $f \in K\langle X\rangle$ é chamado **polinômio próprio**, se as variáveis de G-grau ε aparecem em comutadores apenas, isto é,*

$$\begin{aligned} f =& f(y_1,\dots,y_m,z_1,\dots,z_k) = f(x_1,\dots,x_n)\\ =& \sum \alpha_{i,\dots,j} z_1^{a_1} z_2^{a_2}\cdots z_k^{a_k}[x_{i_1},\dots,x_{i_p}]\cdots[x_{j_1},\dots,x_{j_q}],\ \textit{com } \alpha_{i,\dots,j}\in K,\end{aligned}$$

em que $a_i \in \mathbb{N}$, para $i = 1,\dots,k$ e assumimos que 1 é um polinômio próprio (é considerado produto de um conjunto vazio de comutadores). Denotamos por $B_G(X)$ o conjunto de todos os polinômios próprios de $K\langle X\rangle$. Se considerarmos a graduação trivial escreveremos apenas $B(X)$.

A Proposição 1.2.37 mais adiante mostra a importância dos polinômios próprios para encontrar uma base das identidades de uma álgebra unitária. A demonstração está baseada no Teorema de Witt e no Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt. Antes de enunciá-los precisamos da definição a seguir.

Definição 1.2.32. *Se A é uma álgebra associativa e a álgebra de Lie L é isomorfa a uma subálgebra da álgebra de Lie $A^{(-)}$, definida como no Exemplo 1.1.10, dizemos que A é uma **álgebra envolvente de** L. A álgebra associativa $U = U(L)$ é a **álgebra envolvente universal da álgebra de Lie** L, se L é uma subálgebra de $U^{(-)}$ e U satisfaz a seguinte propriedade universal: Para qualquer álgebra associativa A e qualquer homomorfismo de álgebras de Lie $\varphi\colon L \to A^{(-)}$ existe um único homomorfismo de álgebras associativas (que leva unidade em unidade) $\psi\colon U \to A$ que estende φ, ou seja, tal que $\psi(x) = \varphi(x)$ para todos $x \in L$.*

O teorema a seguir garante que toda álgebra de Lie possui uma álgebra envolvente universal, que é única a menos de isomorfismos. Recordamos que no início deste capítulo fizemos um comentário na Observação 1.1.13 dizendo que toda álgebra de Lie L é isomorfa a uma subálgebra de alguma álgebra $A^{(-)}$, para alguma álgebra associativa A.

Teorema 1.2.33. *(**Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt** [18, p. 11], Teorema 1.3.2)*
Toda álgebra de Lie L possui uma única (a menos de isomorfismo) álgebra envolvente universal $U(L)$. Se L tem uma base $E = \{e_i \mid i \in I\}$, onde I é um conjunto ordenado por $\leqslant$, então $U(L) = K\langle E\rangle/J$, onde J é o ideal de $K\langle E\rangle$ gerado pelos polinômios $[e_i, e_j] - e_i * e_j$ (o símbolo $*$ denota a multiplicação em L). Além disso, os elementos

$$\{e_{i_1}\cdots e_{i_p} \mid i_1,\dots,i_p \in I, i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_p, p = 1,2,\dots\} \cup \{1\},$$

formam uma base de $U(L)$.

Para álgebras de Jordan não temos algo nesse sentido, como já comentamos na Observação 1.1.13.

Exemplo 1.2.34. Apenas para ilustrar, daremos um exemplo de álgebra de Jordan excepcional, também chamadas de **álgebras de Albert**, veja [1]. Seja $\mathbb{C}$ o corpo dos complexos, que agora olhamos como $\mathbb{R}$-álgebra. Denotaremos por $\mathbb{H}$ a álgebra dos quatérnios, que é o conjunto $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ equipado com soma usual, coordenada a coordenada, e a multiplicação

$$(a,b)*(c,d) = (ac - \overline{d}b, da + b\overline{c}),$$

onde $\overline{x}$ denota a conjugação complexa. Claramente $\mathbb{H}$ é uma álgebra associativa unitária (com $1_{\mathbb{H}} = (1_{\mathbb{C}}, 0)$), não comutativa, com divisão, isto é, para todos (a,b) existe (c,d), tal que vale $(a,b) * (c,d) = (1_{\mathbb{C}}, 0) = (c,d) * (a,b)$.

Definimos a conjugação nos quatérnios por $\overline{(a,b)} = (\overline{a}, -b)$.

Denotaremos por $\mathbb{O}$ a álgebra dos octônios, que é o conjunto $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ equipado com soma usual, coordenada a coordenada, e a multiplicação

$$(p,q) * (r,s) = (pr - \overline{s}q, sp + q\overline{r}),$$

onde $\overline{x}$ denota a conjugação nos quatérnios definida acima. Claramente $\mathbb{O}$ é uma álgebra não associativa unitária, não comutativa, com divisão, isto é, para todos (p,q) existe (r,s), tal que $(p,q) * (r,s) = (1_{\mathbb{H}}, 0) = (r,s) * (p,q)$.

Defina a conjugação nos octônios por $\overline{(p,q)} = (\overline{p}, -q)$.

Seja agora a álgebra $M_3(\mathbb{O})$. O conjunto J das matrizes auto-adjuntas de $M_3(\mathbb{O})$ é uma subálgebra de $(M_3(\mathbb{O}))^{(+)}$, que é uma álgebra de Jordan excepcional.

Teorema 1.2.35. *(**Teorema de Shirshov-Witt**, [18, p. 14], Teorema 1.3.5)*
A subálgebra de Lie $L(X)$ de $K\langle X\rangle^{(-)}$ gerada por X (isto é, $L(X)$ é a interseção de todas as álgebras de Lie que contém X), é livre na classe das álgebras de Lie. Além disso $U(L(X)) = K\langle X\rangle$.

Agora vamos utilizar estes dois teoremas para encontrar uma base de $K\langle X\rangle$ bastante útil.

Proposição 1.2.36. *Suponhamos que os elementos*

$$x_1, x_2, \ldots, [x_{i_1}, x_{i_2}], [x_{j_1}, x_{j_2}], \ldots, [x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}], \ldots,$$

formam uma base ordenada de $L(X)$ onde os elementos de X: $x_1, x_2, \ldots$ precedem os comutadores. Então

(i) O espaço vetorial $K\langle X\rangle$ tem base formada pelos elementos

$$x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m} [x_{i_1}, x_{i_2}]^b \cdots [x_{l_1}, \ldots, x_{l_p}]^c,$$

onde $a_1, \ldots, a_m, b, \ldots, c \geqslant 0$ e $[x_{i_1}, x_{i_2}] < \cdots < [x_{l_1}, \ldots, x_{l_p}]$, na ordenação da base de $L(X)$;

(ii) Os elementos desta base tais que $a_i = 0$ sempre que $\mathrm{wt}(x_i) = \varepsilon$, para $i = 1, \ldots m$, formam uma base para $B_G(X)$.

Demonstração. O item (i) segue do Teorema de Witt 1.2.35 que garante que $U(L(X)) = K\langle X\rangle$, e do Teorema de Poincaré-Brirkhoff-Witt 1.2.33, que nos diz como encontrar uma base para $U(L(X))$ a partir de uma base ordenada de $L(X)$. O item (ii) segue diretamente do item (i) e da definição de $B_G(X)$. $\square$

A seguir utilizaremos a base de $K\langle X\rangle$ dada na Proposição anterior para provar que quando o corpo é infinito as identidades graduadas de uma álgebra unitária seguem de suas identidades próprias. Para tanto será necessário utilizar o seguinte fato: Se A é uma álgebra G-graduada, então sua unidade é homogênea de grau ε. Isto já foi observado em Observação 1.2.3.

Proposição 1.2.37. *Se A é uma álgebra unitária G-graduada sobre um corpo infinito K, então todas as identidades polinomiais graduadas de A seguem das suas identidades próprias (ou seja, daquelas em $T_G(A) \cap B_G(X)$). Se* $\operatorname{char} K = 0$*, então todas identidades polinomiais graduadas de A seguem das suas identidades próprias multilineares.*

Demonstração. Seja $f(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n) \in K\langle X \rangle$, não nulo. Pela Proposição 1.2.36 podemos escrever f como

$$f = \sum \alpha_a y_1^{a_1} \cdots y_m^{a_m} w_a(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n), \quad \alpha_a \in K, \tag{1.2.1}$$

onde $w_a \in B_G(X)$ e a soma é feita sobre as m-uplas $a = (a_1, \dots, a_m)$ tais que $a_i \leqslant \deg_{y_i}(f)$, para $i = 1, \dots, m$.

Mostraremos que quando $f \in T_G(A)$, temos que

$$\sum_{a;a_1 \text{fixado}} \alpha_a y_2^{a_2} \cdots y_m^{a_m} w_a \in T_G(A).$$

O resultado seguirá indutivamente da nossa demonstração.

A demonstração da proposição segue desta afirmação, juntamente com a Proposição 1.2.27, pois se f é multi-homogêneo, então f é consequência das identidades

$$\{w_a(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n) \mid \alpha_a \neq 0\}.$$

A parte multilinear da proposição segue do fato que, supondo f multilinear, temos os polinômios w_a multilineares.

Para cada f nessa forma (1.2.1), definimos o conjunto

$$\begin{aligned} M(f) =& \{M_1, M_2, \dots, M_l\} \\ =& \{a_1 \mid a_1 \text{ é o primeiro termo de uma } m\text{-upla } a = (a_1, \dots, a_m) \text{ com } \alpha_a \neq 0\}, \end{aligned}$$

onde $M_1 > M_2 > \cdots > M_l \geqslant 0$.

Afirmamos que se $f \in T_G(A)$ e f é homogêneo em y_1, então para todos $j = 1, \dots, l$,

$$g_j = \sum_{a;a_1 = M_j} \alpha_a y_2^{a_2} \cdots y_m^{a_m} w_a \in T_G(A).$$

Se $M_1 = 0$, então não há nada a fazer, pois $f = \sum \alpha_a y_2^{a_2} \cdots y_m^{a_m} w_a \in T_G(A)$. Assim supomos $M_1 > 0$. Uma vez que em w_a as variáveis $y_1, \dots, y_m$ aparecem apenas nos comutadores, é claro que

$$w_a(y_1 + 1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n) = w_a(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n).$$

Como $\operatorname{wt}(y_1 + 1) = \operatorname{wt}(y_1) = \varepsilon$, segue que $f(y_1 + 1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n)$ também é identidade polinomial graduada para A e concluímos que

$$f(y_1 + 1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n) = \sum \alpha_a \sum_{i=0}^{a_1} \binom{a_1}{i} y_1^i y_2^{a_2} \cdots y_m^{a_m} w_a(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n) \in T_G(A).$$

Observamos que no somatório acima a parcela com i fixado é a componente homogênea em relação a y_1 de grau $i + \deg_{y_1}(w_a)$.

Como f é homogêneo em y_1, temos $a_1 + \deg_{y_1}(w_a) = \deg_{y_1}(f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n))$, assim a componente homogênea de $f(y_1 + 1, \ldots)$ com menor grau em relação a y_1 é obtido das parcelas com $a_1 = M_1$ e $i = 0$ e é dada por

$$g_1 = \sum_{a;a_1=M_1} \alpha_a y_2^{a_2} \cdots y_m^{a_m} w_a,$$

onde o sub-índice $a_1 = M_1$ no somatório significa que a soma é feita sobre os $a = (a_1 \ldots, a_m)$ tais que $a_1 = M_1$. Lembrando que o corpo K é infinito (tem mais de $\deg_{y_1}(f)$ elementos), segue da Proposição 1.2.27 que o polinômio g_1 pertence a $T_G(A)$.

Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para $1, 2, \ldots, k$, onde k é um número natural menor que l.

Tomando $g = \sum_{j=1}^{k} y_1^{M_j} g_j \in T_G(A)$ e subtraindo esta identidade de nossa identidade inicial $f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n)$ obtemos uma nova identidade

$$h(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) = \sum_{a;a_1<M_k} \alpha_a y_1^{a_1} \cdots y_m^{a_m} w_a \in T_G(A).$$

É claro que $M(h) = \{M_{k+1}, \ldots, M_l\}$ e aplicando os argumentos anteriores ao polinômio h concluímos que

$$\sum_{a;a_1=M_{k+1}} \alpha_a y_2^{a_2} \cdots y_m^{a_m} w_a \in T_G(A),$$

e a afirmação está provada.

$\square$

Observação 1.2.38. Denotaremos por

- P_n o conjunto dos polinômios $f(x_1, \ldots, x_n)$ multilineares;
- $\Gamma_n = B(X) \cap P_n$ o conjunto dos polinômios próprios multilineares;
- $P_n(A) = P_n/(P_n \cap T(A))$ os elementos multilineares de uma PI-Álgebra A;
- $\Gamma_n(A) = \Gamma_n/(\Gamma_n \cap T(A))$ os elementos próprios multilineares de uma PI-Álgebra associativa e unitária A.

Capítulo 2

Álgebras finitamente geradas

Neste capítulo estudamos o conceito de séries de Hilbert, função de crescimento e GK-dimensão em álgebras finitamente geradas, sua relação com as PI-Álgebras e a PI-equivalência (definida na Definição 1.1.40), bem como sua relação com outras dimensões algébricas. Neste capítulo voltamos a considerar álgebras arbitrárias, salvo menção em contrário.

2.1 Séries de Hilbert

A série de Hilbert de uma álgebra é muito importante, pois consegue captar boa parte da estrutura da álgebra e informações a respeito do comportamento assintótico da álgebra. Aqui veremos suas propriedades básicas e sua importância para PI-Álgebras.

2.1.1 Definições e resultados básicos

No livro [37] podem ser encontradas muito provavelmente as primeiras referências explícitas para as séries de Hilbert.

Definição 2.1.1. *Seja A uma álgebra graduada por $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{Z}$-graduada cujo suporte é $\mathbb{N}$), isto é,*

$$A = \bigoplus_{n\geqslant 0} A_n, \qquad e \qquad A_nA_m \subseteq A_{n+m},$$

cujas componentes homogêneas têm dimensão finita.

A série formal

$$H(A,t) = \sum_{n\geqslant 0} \dim(A_n)t^n$$

é chamada de ***série de Hilbert da álgebra*** *A.*

De modo similar podemos definir para álgebras multigraduadas por $\mathbb{N}^m$, isto é,

$$A = \bigoplus_{n_i\geqslant 0} A_{(n_1,\ldots,n_m)}, \qquad e \qquad A_{(n_1,\ldots,n_m)}A_{(p_1,\ldots,p_m)} \subseteq A_{(n_1,\ldots,n_m)+(p_1,\ldots,p_m)} = A_{(n_1+p_1,\ldots,n_m+p_m)},$$

a ***série de Hilbert multigraduada***

$$H(A; t_1, \ldots, t_m) = \sum_{n_i \geqslant 0} \dim(A_{(n_1, \ldots, n_m)}) t_1^{n_1} \cdots t_m^{n_m}.$$

Além disso, escrevemos que uma série é igual a uma função f se a série convergir em uma vizinhança da origem e estes valores coincidem com os valores da f.

Observação 2.1.2. Para simplificar a notação usaremos uma barra para denotar os multi-índices, por exemplo $\bar{t} = t_1, \ldots, t_m$, $\bar{n} = (n_1, \ldots, n_m)$ e $t^{\bar{n}} = t_1^{n_1} \cdots t_m^{n_m}$.

Observação 2.1.3. Como a série de Hilbert pode ser vista como um caso particular da série de Hilbert multigraduada, enunciaremos apenas os resultados para o caso multigraduado.

Proposição 2.1.4. *Sejam A, B álgebras graduadas e I um ideal graduado de A, então:*

- $H(A \oplus B; \bar{t}) = H(A; \bar{t}) + H(B; \bar{t})$;
- $H(A \otimes B; \bar{t}) = H(A; \bar{t}) \cdot H(B; \bar{t})$;
- $H(A; \bar{t}) = H(A/I; \bar{t}) + H(I; \bar{t})$.

Demonstração. O resultado é elementar e decorre das propriedades de operações com séries e das seguintes igualdades:

- $\dim(A \oplus B)_{\bar{n}} = \dim(A_{\bar{n}}) + \dim(B_{\bar{n}})$;
- $\dim(A \otimes B)_{\bar{n}} = \sum_{\bar{p}, \bar{q}; \bar{p} + \bar{q} = \bar{n}} \dim(A_{\bar{p}}) \cdot \dim(B_{\bar{q}})$;
- $\dim(A/I)_{\bar{n}} = \dim(A_{\bar{n}}) - \dim(I_{\bar{n}})$.

□

Exemplo 2.1.5. Consideremos as graduações usuais e $X_m = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Usando simples princípios de contagem são conhecidas as seguintes séries de Hilbert:

- $H(K[X_m]; \bar{t}) = \prod_{i=1}^{m} (1 - t_i)^{-1}$;
- $H(K\langle X_m \rangle; \bar{t}) = (1 - (t_1 + \cdots + t_m))^{-1}$;
- $H(E(V_m); \bar{t}) = \prod_{i=1}^{m} (1 + t_i)$.

Lembre que $E(V_m)$ denota a álgebra exterior de um espaço m-dimensional V_m, ver Exemplo 1.1.23.

2.1.2 Em álgebras relativamente livres

As séries de Hilbert ganham mais importância para classes de álgebras com alguma graduação natural, pois não dependem de escolhas. E este é o caso quando tratamos de álgebras relativamente livres de posto finito considerando álgebras sobre corpos infinitos. Lembre que isto garante que os T-ideais serão (multi-)homogêneos na (multi-)graduação herdada da álgebra livre.

Definição 2.1.6. *Seja $T(A)$ um T-ideal de uma álgebra A que é homogêneo na álgebra livre $K\langle X\rangle$. Então para $m \geqslant 1$ escrevemos:*

$$H(R_m(A);\bar{t}) = H_m(A;\bar{t}) = \sum_{n_i \geqslant 0} \dim(R_m(A))^{(\bar{n})} t^{\bar{n}},$$

e para série de Hilbert em uma variável:

$$H(R_m(A),t) = H_m(A,t) = \sum_{n \geqslant 0} \dim(R_m(A))^{(n)} t^{n},$$

onde $(R_m(A))^{(n)}$ (e $(R_m(A))^{(\bar{n})}$) denota a componente (multi-)homogênea da álgebra relativamente livre.

Observação 2.1.7. Salientamos aqui mais uma vez que estamos introduzindo na Definição anterior as notações $H_m(A;\bar{t}) = H(R_m(A);\bar{t})$ e $H_m(A,t) = H(R_m(A),t)$.

Os próximos resultados garantem que as séries de Hilbert se comportam bem para álgebras relativamente livres.

Proposição 2.1.8. *([19, p. 22])*
Sejam I e J ideais multi-homogêneos da álgebra livre $K\langle x_1,\dots,x_m\rangle$. Então as séries de Hilbert de IJ, I e J são relacionadas pela equação:

$$H(I;\bar{t}) \cdot H(J;\bar{t}) = H(IJ;\bar{t}) \cdot H(K\langle x_1,\dots,x_m\rangle;\bar{t}).$$

Corolário 2.1.9. *([19, p. 23])*
Sejam A, B e C PI-Álgebras sobre um corpo infinito tais que $T(C) = T(A)T(B)$. Então as séries de Hilbert das álgebras relativamente livres de posto finito das álgebras A, B e C satisfazem:

$$H_m(C;\bar{t}) = H_m(A;\bar{t}) + H_m(B;\bar{t}) + (t_1 + \cdots + t_m - 1) H_m(A;\bar{t}) \cdot H_m(B;\bar{t}).$$

A próxima proposição relaciona a série de Hilbert da álgebra relativamente livre de A e a álgebra dos seus elementos próprios $B(A) = B(X)/(T(A) \cap B(X))$, onde $B(X)$ são os polinômios próprios (na G-graduação trivial, veja a Definição 1.2.31).

Proposição 2.1.10. *([18, p. 47])*
Seja A uma PI-Álgebra unitária sobre um corpo infinito. Consideremos $B_m(X) = B(X) \cap K\langle x_1,\dots,x_m\rangle$ e $B_m(A) = B_m(X)/(T(A) \cap B_m(X))$. Então:

$$H_m(A;\bar{t}) = H(B_m(A);\bar{t}) \cdot \prod_{i=1}^{m} (1 - t_i)^{-1};$$

$$H_m(A,t) = H(B_m(A),t) \cdot (1-t)^{-m}.$$

2.1.3 Em teoria de representações

Nosso objetivo nessa subseção é relacionar a teoria de representações com as séries de Hilbert e pretendemos ser o mais breve possível, evitando demonstrações. Seguiremos aproximadamente o exposto em [18, 19]. Para maiores detalhes e demonstrações sugerimos a leitura de [11, 27, 58]. Ao final desta subseção apresentaremos alguns resultados importantes para PI-Álgebras associativas.

Denotaremos por V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo K (de característica zero até o final desta subseção, alguns resultados não são válidos sobre corpos de característica prima) e seja $GL(V)$ o grupo geral linear dos endomorfismos invertíveis (ou seja, automorfismos) de V. Quando $\dim_K V = m < \infty$, podemos escrever $GL_m = GL(V)$ e fixando uma base de V identificamos GL_m com o grupo das matrizes $m \times m$ invertíveis com entradas em K.

Definição 2.1.11. (i) *Uma **representação de um grupo G em V** é um homomorfismo de grupos $\rho\colon G \to GL(V)$. A **dimensão da representação** $\dim(\rho)$ ou $\dim(V)$ é a dimensão de V, $\dim_K(V)$, como espaço vetorial;*

(ii) *Duas representações $\phi\colon G \to GL(V)$ e $\rho\colon G \to GL(V)$ são **isomorfas** se existe um isomorfismo $\theta\colon V \to W$ tal que*

$$(\theta \circ \phi(g))(v) = (\rho(g) \circ \theta)(v), g \in G, v \in V;$$

(iii) *Seja W um subespaço de V tal que $(\rho(G))(W) = W$, então a representação $\phi\colon G \to GL(W)$ definida por*

$$(\phi(g))(w) = (\rho(g))(w), g \in G, w \in W \subseteq V,$$

*é chamada de **subrepresentação** da representação ρ. A subrepresentação ϕ é dita **própria** se $W \neq \{0\}$ e $W \neq V$;*

(iv) *Se $\phi\colon G \to GL(V)$ e $\psi\colon G \to GL(W)$ são duas representações de G, então a representação $\rho = \phi \oplus \psi\colon G \to GL(V \oplus W)$ definida por*

$$(\rho(g))(v, w) = ((\phi(g))(v), (\psi(g))(w)), g \in G, (v, w) \in V \oplus W,$$

*é chamada **soma direta de ϕ e ψ**. O **produto tensorial** $\rho = \phi \otimes \psi\colon G \to GL(V \otimes W)$ das representações ϕ e ψ é definido por*

$$(\rho(g))(v \otimes w) = (\phi(g))(v) \otimes (\psi(g))(w), g \in G, v \otimes w \in V \otimes W;$$

(v) *A representação $\rho\colon G \to GL(V)$ é **irredutível** se não possui subrepresentações próprias; ρ é **completamente redutível** se é soma direta de representações irredutíveis.*

(vi) *Se $\rho\colon G \to GL(V)$ é uma representação, então a função*

$$\begin{aligned} \chi_\rho\colon G &\longrightarrow K \\ g &\longmapsto \operatorname{tr}(\rho(g)) \end{aligned}$$

*é chamada **caracter da representação** ρ. Se estiver claro qual é a representação, podemos usar também $\chi_G(V) = \chi_\rho$.*

As representações de grupos são um caso particular da teoria de módulos e por ser mais antiga ainda preservamos algumas nomenclaturas diferentes das estudadas em módulos. Aqui usaremos as duas nomenclaturas livremente. A ideia das representações é trazer a estrutura algébrica para dentro de conjuntos de transformações lineares, onde pode-se usar as ferramentas de álgebra linear. No caso de grupos, trazemos a estrutura de um grupo abstrato para dentro do grupo de matrizes.

Pondo $\mathrm{End}(V)$ para a álgebra dos endomorfismos de V, a representação $\rho\colon G \to GL(V)$ estende para um homomorfismo de álgebras $\rho\colon KG \to \mathrm{End}(V)$, que torna V um KG-módulo (a esquerda) com $g \cdot v = (\rho(g))(v)$ satisfazendo $1_G \cdot v = v$ e $g \cdot (h \cdot v) = (gh) \cdot v$. Por sua vez, se um espaço vetorial M é um KG-módulo (a esquerda), então definindo $\rho\colon G \to \mathrm{End}(V)$ de tal modo que $(\rho(g))(v) = g \cdot v$, temos que ρ é uma representação de G em V (notemos que as propriedades de módulo garantem que a imagem de ρ está em $GL(V)$). Aqui consideraremos a ação dos módulos sempre a esquerda, salvo menção em contrário.

Pelo teorema de Maschke, as representações de dimensão finita de um grupo finito G são completamente redutíveis. Equivalentemente, a álgebra de grupo KG é semissimples e isomorfa a soma direta

$$M_{d_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{d_r}(D_r), \tag{2.1.1}$$

onde $M_{d_i}(D_i)$ são álgebras de matrizes com coeficientes na álgebra de divisão com dimensão finta D_i, para $i = 1, \ldots, r$. Todos KG-módulos de dimensão finita são soma direta de KG-módulos irredutíveis (ou simples). Todos KG-módulos irredutíveis são isomorfos a ideais a esquerda e minimais de KG (e portanto a um ideal a esquerda e minimal de algum $M_{d_i}(D_i)$), onde G age em KG multiplicando a esquerda.

No caso especial do grupo simétrico todas as álgebras de divisão na decomposição (2.1.1) coincidem com o corpo K e

$$KS_n \cong M_{d_1}(K) \oplus \cdots \oplus M_{d_r}(K).$$

As representações irredutíveis e não isomorfas do grupo simétrico (e portanto os KS_n-módulos irredutíveis) estão em correspondência biunívoca com as classes de conjugação de S_n e são descritas em termos de partições e diagramas de Young.

Definição 2.1.12. *Uma **partição** de um inteiro não negativo n (denotaremos por $\lambda \vdash n$ ou $|n|$) é uma sequência de inteiros $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ tal que*

$$\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r \geqslant 0 \text{ e } \lambda_1 + \cdots + \lambda_r = n.$$

Assumimos que duas partições $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ e $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_s)$ são iguais se

$$\lambda_1 = \mu_1, \ldots, \lambda_k = \mu_k, \lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_r = \mu_{k+1} = \cdots = \mu_s = 0.$$

Quando $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{k_1+\cdots+k_p})$ e

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{k_1} = \mu_1, \ldots, \lambda_{k_1+\cdots+k_{p-1}+1} = \cdots = \lambda_{k_1+\cdots+k_p} = \mu_p,$$

aceitamos a notação

$$\lambda = (\mu_1^{k_1}, \ldots, \mu_p^{k_p}).$$

Existe uma correspondência natural entre as partições de n e as classes de conjugação de S_n. Se $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \vdash n$, então a classe de conjugação correspondente consiste de todas as permutações σ de S_n que podem ser escritas da seguinte forma como produto de ciclos disjuntos:

$$\sigma = (i_1 \ldots i_{\lambda_1})(j_1 \ldots j_{\lambda_2}) \cdots (k_1 \ldots k_{\lambda_r}).$$

Definição 2.1.13. *O **diagrama de Young** $[\lambda]$ da partição $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ é o conjunto de pontos $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$, tais que $1 \leqslant j \leqslant \lambda_i$ para $i = 1, \ldots, r$.*

É conveniente representar os diagramas de Young graficamente como segue. Para cada ponto de $\mathbb{Z}^2$ no diagrama desenhamos caixas (ou quadrados) empilhados de modo que a primeira coordenada i (índice das linhas) aumenta de cima para baixo e a segunda coordenada j (índice da coluna) cresce da esquerda para a direita. Por exemplo o diagrama associado a partição $\lambda = (5^2, 3, 1^2)$ é representado pela figura

$$[\lambda] = \ydiagram{5,5,3,1,1}.$$

Definição 2.1.14. *(i) Um **tablô de Young** T_λ do diagrama $[\lambda]$ com n quadrados é um preenchimento dos quadrados de $[\lambda]$ com os inteiros positivos $1, 2, \ldots, n$ sem repetições. Se λ é uma partição de n e $\tau \in S_n$, denotamos por $T_\lambda(\tau)$ o tablô tal que a primeira coluna contém os inteiros $\tau(1), \ldots, \tau(c_1)$ escritos nesta ordem, de cima para baixo, a segunda coluna possui escritos os inteiros $\tau(c_1 + 1), \ldots, \tau(c_1 + c_2)$, e assim por diante. Observamos aqui que os números c_j são os comprimentos da j-ésima coluna do diagrama.*

*(ii) O tablô T_λ é chamado **padrão**, se os inteiros escritos em cada coluna e em cada linha crescem, respectivamente, de cima para baixo e da esquerda para a direita. Observamos aqui que*

Por exemplo, para $\lambda = (4, 2, 1)$,

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

o tablô $T_\lambda(\tau)$ não é padrão e o tablô $T_\lambda(\tau_1)$ é padrão:

$$T_\lambda(\tau) = \begin{ytableau} 2 & 6 & 1 & 5 \\ 3 & 7 \\ 4 \end{ytableau}, \qquad T_\lambda(\tau_1) = \begin{ytableau} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 7 \\ 5 \end{ytableau}.$$

Definição 2.1.15. *Seja $\lambda \vdash n$, $\lambda \in S_n$ e seja $T = T_\lambda(\tau)$ o tablô de Young correspondente. O* ***estabilizador de linhas de*** *T é o subgrupo $R(T)$ de todas as permutações σ em S_n tais que i e $\sigma(i)$ estão na mesma linha de T, para $i = 1, \ldots, n$. Analogamente define-se o* ***estabilizador de colunas*** *$C(T)$ de T.*

Para o exemplo acima,

$$T = T_\lambda(\tau), \qquad \lambda = (4,2,1), \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

o estabilizador de linhas $R(T)$ é o subgrupo $S_4 \times S_2 \times S_1$ de S_7, onde S_4, S_2 e S_1 agem respectivamente nos conjuntos $\{2,6,1,5\}$, $\{3,7\}$ e $\{4\}$.

Para cada partição λ de n denotaremos por $M(\lambda)$ e χ_λ os correspondentes KS_n-módulo e caracter irredutíveis, respectivamente.

Teorema 2.1.16. *(i) Seja $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \vdash n$, $\tau \in S_n$ e seja $T = T_\lambda(\tau)$ o tablô de Young correspondente. A menos de constante multiplicativa o elemento de KS_n*

$$e_T = \sum_{\sigma \in R(T)} \sum_{\gamma \in C(T)} (-1)^\gamma \sigma\gamma$$

é um idempotente minimal que gera um submódulo de KS_n isomorfo a $M(\lambda)$. Logo se $\mu \vdash n$ é outra partição e T' é um μ-tablô de Young, então os KS_n-módulos $KS_n e_T$ e $KS_n e_{T'}$ são isomorfos se e só se $\lambda = \mu$. Além disso, todos KS_n-módulos irredutíveis são isomorfos a $KS_n e_T$ para alguma partição $\lambda \vdash n$ e algum tablô de Young $T = T_\lambda$;

(ii) A soma de todos os KS_n-módulos $KS_n e_T$, onde T percorre o conjunto dos λ-tablôs padrão, é direta. É igual a um ideal bilateral e minimal $I(\lambda)$ de KS_n correspondente a λ, e

$$KS_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} I(\lambda);$$

(iii) A dimensão de $M(\lambda)$ é dada pela fórmula do gancho

$$\dim M(\lambda) = \frac{m!}{\prod(\lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1)},$$

onde $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s$ são os comprimentos das colunas de $[\lambda]$ e o produto no denominador é sobre todas os quadrados de $[\lambda]$. A dimensão $\dim M(\lambda)$ também é igual ao número de λ-tablôs padrão $T_\lambda(\tau)$, $\tau \in S_n$.

Por exemplo, se $\lambda = (n)$, então o diagrama $[\lambda]$ de λ possui apenas uma linha e para qualquer (n)-tablô T:

$$R(T) = S_n, \qquad C(T) = 1.$$

Portanto o KS_n-módulo unidimensional trivial $M(n)$ é gerado pelo elemento

$$e_T = \sum_{\sigma \in S_n} \sigma.$$

No outro extremo, se $\lambda = (1^n)$ temos $R(T) = 1$, $C(T) = S_n$. O KS_n-módulo unidimensional $M(1^n)$ corresponde a representação sinal e é gerado por

$$e_T = \sum_{\gamma \in S_n} (-1)^\gamma \gamma.$$

As representações polinomiais dos grupos gerais lineares se comportam de modo similar às representações de grupos finitos e têm muitas propriedades em comum com as representações dos grupos simétricos.

Definição 2.1.17. (*i*) *Uma representação do grupo geral linear* GL_m

$$\varphi\colon GL_m \to GL_s = GL(V)$$

é dita ***polinomial*** *(e V é um KGL_m-módulo polinomial), se as entradas $\varphi_{pq}(g)$ das matrizes $s \times s$, $\varphi(g) \in GL_s$, são funções polinomiais das entradas a_{ij} para cada matriz $m \times m$, $g = (a_{ij}) \in GL_m$. Quando todas φ_{pq} são polinômios homogêneos de grau d, então φ é uma* ***representação homogênea de grau*** *d.*

(*ii*) *Seja*

$$D_m = \{g \in GL_m \mid g = g(b_1, \ldots, b_m) = b_1 e_{11} + \cdots + b_m e_{mm}\}$$

o subgrupo das matrizes diagonais de GL_m. Para toda m-upla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ de inteiros, definimos a ***componente homogênea de peso*** *α (ou de grau α) do KGL_m-módulo V por*

$$V^\alpha = \{v \in V \mid g(b_1, \ldots, b_m)(v) = b_1^{\alpha_1} \cdots b_m^{\alpha_m} v \text{ para todos } g \in D_m\}.$$

O teorema a seguir lista alguma das boas propriedades das representações polinomiais dos grupos gerais lineares.

Teorema 2.1.18. *Seja $\varphi\colon GL_m \to GL_s = GL(V)$ uma representação polinomial de GL_m. Então:*

(*i*) *O KGL_m-módulo V é completamente redutível e é uma soma direta de módulos polinomiais homogêneos e irredutíveis;*

(*ii*) *Como espaço vetorial V é uma soma direta de suas componentes homogêneas V^α, com $\alpha \in \mathbb{Z}^m$;*

(*iii*) *A série de Hilbert de V*

$$H(V) = H(V; t_1, \ldots, t_m) = \sum (\dim V^\alpha) t_1^{\alpha_1} \cdots t_m^{\alpha_m}$$

é uma função simétrica de $t_1, \ldots, t_m$. Se V é homogêneo de grau d, então $H(V)$ também é homogênea de grau d.

(*iv*) *Dois KGL_m-módulos polinomiais V_1 e V_2 são isomorfos se e somente se $H(V_1) = H(V_2)$. Além disso,*

$$H(V_1 \oplus V_2) = H(V_1) + H(V_2), \qquad H(V_1 \otimes V_2) = H(V_1) \cdot H(V_2).$$

Note que pela parte (iv), a série de Hilbert de um GL_m-módulo V se comporta como o caracter de V.

A descrição das representações polinomiais irredutíveis de GL_m é dada abaixo:

Teorema 2.1.19. *(i) As representações polinomiais irredutíveis de GL_m estão em correspondência biunívoca com as partições $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ em não mais do que m partes. Denotaremos por $N_m(\lambda)$ o KGL_m-módulo irredutível correspondente a λ;*

(ii) *A dimensão de $N_m(\lambda)$ é dada pela fórmula*

$$\dim N_m(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \prod_{\substack{i,j\in I_m \\ j<i}} \frac{i-j+\lambda_j-\lambda_i}{i-j};$$

(iii) *Seja*

$$D(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \begin{vmatrix} t_1^{\lambda_1} & t_2^{\lambda_1} & \cdots & t_m^{\lambda_1} \\ t_1^{\lambda_2} & t_2^{\lambda_2} & \cdots & t_m^{\lambda_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^{\lambda_m} & t_2^{\lambda_m} & \cdots & t_m^{\lambda_m} \end{vmatrix}.$$

Então o polinômio simétrico

$$S_\lambda(t_1, \ldots, t_m) = H(N_m(\lambda); t_1, \ldots, t_m) = \sum(\dim(N_m(\lambda))^\alpha) t_1^{\alpha_1} \cdots t_m^{\alpha_m},$$

chamado ***função de Schur*** *de $N_m(\lambda)$ (e de λ se assumirmos m fixado), é expresso como*

$$S_\lambda(t_1, \ldots, t_m) = \frac{D(\lambda_1+m-1, \lambda_2+m-2, \ldots, \lambda_{m-1}+1, \lambda_m)}{D(m-1, m-2, \ldots, 1, 0)};$$

(iv) *A menos de constante multiplicativa, existe um único elemento de peso λ em $N_m(\lambda)$. Ele é chamado de vetor de peso máximo de $N_m(\lambda)$ e é caracterizado pela propriedades de ser invariante pela ação do subgrupo $T_m(K)$ de GL_m formado pelas matrizes triangulares superiores com identidade na diagonal;*

(v) *Sejam V_1 e V_2 dois submódulos isomorfos a $N_m(\lambda)$ com vetores de peso máximo v_1 e v_2, respectivamente. Se $\varphi\colon V_1 \to V_2$ é um isomorfismo de KGL_m-módulos, então $\varphi(v_1) = \alpha v_2$, para algum $\alpha \in K$ não nulo. Reciprocamente, para todos $\alpha \in K$ não nulo existe um único isomorfismo de KGL_m-módulos $\varphi\colon V_1 \to V_2$ tal que $\varphi(v_1) = \alpha v_2$.*

Seja V_m um espaço vetorial m-dimensional com base $\{x_1, \ldots, x_m\}$ equipado com a ação canônica de $GL_m = GL(V_m)$. O grupo geral linear GL_m age diagonalmente na álgebra tensorial

$$T(V_m) = \bigoplus_{n\geqslant 0} V_m^{\otimes n},$$

ou seja, para todos $g \in GL_m$ e $x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_n} \in V_m^{\otimes n}$

$$g(x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_n}) = g(x_{i_1}) \otimes \cdots \otimes g(x_{i_n}). \tag{2.1.2}$$

É fácil ver que a componente multihomogênea de peso $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ do KGL_m-módulo $T(V_m)$ coincide com o espaço vetorial gerado pelos tensores $x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_n}$ de grau α_j em relação a cada respectivo x_j.

Teorema 2.1.20. *Seja $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ uma partição de n.*

(i) O GL_m-módulo polinomial irredutível $N_m(\lambda)$ é isomorfo a um submódulo da n-ésima potência tensorial $V_m^{\otimes n}$ de V_m e

$$V_m^{\otimes n} \cong \bigoplus (\dim M(\lambda)) N_m(\lambda), \qquad (2.1.3)$$

onde $\dim M(\lambda)$ é a dimensão do KS_d-módulo irredutível correspondente e a soma percorre todas as partições $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \vdash n$.

(ii) Seja $d_\lambda = \dim M(\lambda)$ e sejam $N_1 \oplus \cdots \oplus N_{d_\lambda}$ os d_λ somandos diretos isomorfos a $N_m(\lambda)$ na decomposição (2.1.3) de $V_m^{\otimes n}$, e sejam $v_1, \ldots, v_{d_\lambda}$ os correspondentes vetores de peso máximo. Então o vetor de peso máximo v de cada $N_m(\lambda) \subset V_m^{\otimes n}$ é igual a uma combinação linear com coeficientes não nulos:

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_{d_\lambda} v_{d_\lambda}, \qquad a_i \in K.$$

Para cálculos concretos com os KGL_m-submódulos de $V_m^{\otimes n}$ pode-se usar a forma explícita dos vetores de peso máximo das componentes irredutíveis na decomposição (2.1.3). Para mais detalhes, veja [18], Seção 12.4.

Agora para usar a teoria de representações em PI-Álgebras, precisamos olhar os conjuntos adequados da teoria e definir corretamente as ações dos grupos.

No caso de álgebras não-associativas é preciso tomar alguns cuidados, mas as ideias ainda funcionam bem. Inicialmente se consideram os produtos com uma posição fixada nos parênteses e a teoria segue como no caso associativo. E então analisa-se os resultados obtidos em cada etapa de parênteses fixados. Por exemplo, para álgebras de Lie ou associativas, basta analisar os monômios com os parênteses normados a esquerda.

Seja P_n o conjunto dos polinômios $f(x_1, \ldots, x_n)$ homogêneos multilineares de grau n, em $K\langle X \rangle$. Como espaço vetorial P_n possui base $\{x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}$. O grupo simétrico S_n age a esquerda em P_n pela seguinte regra:

$$\sigma(x_{i_1} \cdots x_{i_n}) = x_{\sigma(i_1)} \cdots x_{\sigma(i_n)}, \quad x_{i_1} \cdots x_{i_n} \in P_n, \quad \sigma \in S_n.$$

Então o KS_n-módulo P_n é isomorfo a álgebra de grupo KS_n com a ação natural de S_n multiplicando a esquerda.

Já vimos na Observação 1.1.38 que $K\langle X_m \rangle = K\langle x_1, \ldots, x_m \rangle$ é isomorfo a álgebra tensorial de um espaço m-dimensional, com base $\{x_1, \ldots, x_m\}$. Consideramos em $K\langle X_m \rangle$ a ação diagonal dada na equação (2.1.2) induzida com este isomorfismo, isto é:

$$g(x_{i_1} \cdots x_{i_d}) = g(x_{i_1}) \cdots g(x_{i_d}), \quad x_{i_1} \cdots x_{i_d} \in K\langle X_m \rangle^{(d)}, \quad g \in GL_m.$$

Então $K\langle X_m \rangle$ é isomorfo a álgebra tensorial $T(V_m)$ também como KGL_m-módulos.

Proposição 2.1.21. *Para toda PI-Álgebra associativa A e para todos $n \geqslant 0$, o conjunto $P_n \cap T(A)$ das identidades multilineares de A é um submódulo do KS_n-módulo P_n. Portanto*

$$P_n(A) = P_n/(P_n \cap T(A))$$

é um KS_n-módulo e um módulo quociente de P_n.

Definição 2.1.22. *Seja A uma PI-Álgebra. O S_n-caracter*

$$\chi_n(A) = \chi_{S_n}(P_n(A)), n = 0, 1, 2, \ldots,$$

*é chamado de **n-ésimo cocaracter de** A.*

As representações do grupo simétrico e as representações polinomiais do grupo geral linear são equivalentes, e elas vêm sendo usadas simultaneamente em diversos ramos da matemática. E isto também é o que acontece na teoria de PI-Álgebras.

Proposição 2.1.23. *Seja A uma PI-Álgebra com T-ideal $T(A)$ e seja $m \geqslant 1$.*

(i) O conjunto $K\langle X_m\rangle \cap T(A)$ é um submódulo do KGL_m-módulo $K\langle X_m\rangle$. Portanto a álgebra relativamente livre $R_m(A)$ é um módulo quociente de $K\langle X_m\rangle$;

(ii) Se

$$R_m(A) \cong \bigoplus m'_\lambda N_m(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$$

é a decomposição do KGL_m-módulo $R_m(A)$, então

$$H_m(A; \bar{t}) = \sum m'_\lambda S_\lambda(t_1, \ldots, t_m).$$

As multiplicidades m'_λ estão unicamente determinadas pela série de Hilbert $H_m(A; \bar{t})$.

O próximo teorema é importante e mostra que para qualquer PI-Álgebra A as estruturas do KS_n-módulo $P_n(A)$ e do KGL_m-módulo $R_m(A)$ coincidem.

Teorema 2.1.24. *Seja A uma PI-Álgebra e sejam*

$$P_n(A) \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} m_\lambda M(\lambda), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$R_m(A) \cong \bigoplus_{n \geqslant 0} \bigoplus_{\lambda \vdash n} m'_\lambda N_m(\lambda).$$

Então $m'_\lambda = m_\lambda$ para toda partição $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ e $m'_\lambda = 0$ quando $\lambda_{m+1} > 0$. Equivalentemente, se

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda,$$

então

$$H_m(A; \bar{t}) = \sum_{n \geqslant 0} \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda S_\lambda(t_1, \ldots, t_m),$$

onde na série de Hilbert o somatório é apenas sobre partições com $\lambda_{m+1} = 0$

Lembramos que pelo Teorema de Witt 1.2.35, podemos considerar a álgebra de Lie livre naturalmente mergulhada na álgebra dos polinômios associativos

$$L(X) \subset K\langle X\rangle^{(-)}.$$

Além disso pela Proposição 1.2.37, cada variedade de álgebras associativas unitárias sobre um corpo K de característica zero é determinado por suas identidades próprias e multilineares. Se $P_n(sl_2(K))$ são as identidades multilineares da álgebra de Lie $sl_2(K)$ das matrizes 2×2 de traço zero e $\Gamma_n(M_2(K))$ são as identidades próprias multilineares da álgebra associativa das matrizes 2×2, então pode-se assumir que $R_m(sl_2(K)) \subset R_m(M_2(K))^{(-)}$ e $P_n(sl_2(K)) \subset \Gamma_n(M_2(K))$.

Usando estas ideias, Drensky provou em [16, p. 92], Teorema 4.2, as seguintes decomposições dos KS_n-módulos:

Teorema 2.1.25. *Para cada $n > 1$, os KS_n-módulos $P_n(sl_2(K))$ e $\Gamma_n(M_2(K))$ se decompõem em soma de KS_n-módulos irredutíveis não isomorfos correspondentes às partições $\lambda = (p+q+r, p+q, p) \vdash n$:*

- *Para $P_n(sl_2(K))$, partições com $p + q \neq 0$, q ímpar ou r ímpar;*
- *Para $\Gamma_n(M_2(K))$, partições com $p + q \neq 0$ e, se $q = r = 0$, então $p > 1$.*

A próxima proposição relaciona as decomposições em KGL_m-módulos irredutíveis de $R_m(A)$ e $B_m(A)$ (álgebra dos elementos próprios em m-variáveis) para PI-Álgebras associativas e unitárias. Ou equivalentemente, também podemos relacionar as decomposições dos respectivos KS_n-módulos associados.

Teorema 2.1.26. *([18, p. 233])*
Seja A uma PI-Álgebra associativa e unitária e sejam

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\eta_n(A) = \chi_{S_n}(\Gamma_n(A)) = \sum_{\nu \vdash n} p_\nu \chi_\nu, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

os cocaracteres e os cocaracteres próprios (dos elementos próprios multilineares) de A. Então as multiplicidades m_λ e p_ν estão relacionadas por

$$m_\lambda = \sum p_\nu,$$

onde para $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ o somatório percorre todas as partições $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ tais que

$$\lambda_1 \geqslant \nu_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \nu_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant \nu_n.$$

Usando o resultado acima, Drensky provou em [17], Teorema 3.1, a seguinte decomposição do KS_n-módulo $P_n(M_2(K))$:

Teorema 2.1.27. *([18, p. 242])*
A decomposição do cocaracter de $M_2(K)$ em irredutíveis é dado por:

$$\chi_n(M_2(K)) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda, \quad n = 0, 1, 2 \ldots,$$

onde $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ e

(i) $m_{(n)} = 1$;

(ii) $m_{(\lambda_1,\lambda_2)} = (\lambda_1 - \lambda_2 + 1)\lambda_2$, *se* $\lambda_2 > 0$;

(iii) $m_{(\lambda_1,1,1,\lambda_4)} = \lambda_1(2 - \lambda_4) - 1$;

(iv) $m_\lambda = (\lambda_1 - \lambda_2 + 1)(\lambda_2 - \lambda_3 + 1)(\lambda_3 - \lambda_4 + 1)$ *para as demais partições.*

Diante disso, ainda em [17] são descritas as seguintes séries de Hilbert:

Teorema 2.1.28. *([17], Teoremas 3.2 e 4.1)*
Denotemos por $\theta(x, y, z)$ a expressão

$$\frac{2(m-1)!^{-1}}{(m-2)!\,(m-3)!\,x^2y} \frac{\partial^{3(m-3)}}{\partial x^{m-3} \partial y^{m-3} \partial z^{m-3}} \left(\frac{(xyz)^{m-3}}{(1-xyz)} \frac{x^2y(1-x^2y)}{(1-xy)^3(1-x)^3} \right).$$

Então para $m \geqslant 3$

(i) $H_m(M_2(K), t) = (1-t)^{-m} \Big(\theta(t,t,t) - (1-t)^{-m} + 1 - \binom{m}{3} t^3\Big)$;

(ii) $$H_m(sl_2(K), t) = (1/4)\Big(3\theta(t,t,t) - \theta(t,-t,-t) - \theta(-t,t,-t) - \theta(-t,-t,t)\Big) + \\ + (1/2)\Big((1+t)^{-m} - (1-t)^{-m}\Big) + mt.$$

Observação 2.1.29. Estes resultados também foram obtidos em [48], usando técnicas diferentes. Através da teoria de invariantes é obtida a decomposição como KGL_m-módulos das álgebras relativamente livres $R_m(M_2(K))$ e $R_m(sl_2(K))$ que independe da característica. Também são descritas as séries de Hilbert destas álgebras

2.2 Função de Crescimento

As séries de Hilbert podem não ser invariantes da álgebra, caso não esteja fixada uma graduação. Por exemplo, para álgebras finitamente geradas a série de Hilbert depende do conjunto gerador escolhido. No entanto os coeficientes em todas essas séries partilham algo em comum, e parte disso se reflete na noção de crescimento.

2.2.1 Preliminares básicas

Aqui definiremos crescimento e função de crescimento de álgebras, enunciando algumas de suas propriedades.

Definição 2.2.1. *Consideremos Φ o conjunto de todas as sequências $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eventualmente monótonas não-decrescentes e a valores positivos. Isto significa que existe natural n_0, tal que $f(n_0) > 0$ e $f(n_2) \geqslant f(n_1)$ para todos n_1 e n_2 com $n_2 \geqslant n_1 \geqslant n_0$.*

Definimos uma ordem parcial em Φ pondo $f \preccurlyeq g$ se, e somente se, existem inteiros positivos u e v, tais que para n suficientemente grande vale a desigualdade $f(n) \leqslant v \cdot g(un)$. A equivalência associada a essa ordem será denotada por $\sim$, escreveremos $f \sim g$ quando $f \preccurlyeq g$ e $g \preccurlyeq f$. A classe de equivalência de f será denotada por $[f]$ e chamada de ***crescimento de** f.*

Observação 2.2.2. Sempre podemos tomar uma função representante em $[f]$ que seja monótona não-decrescente. Além disso as operações e relações usuais de funções passam para as classes:

$$[f] + [g] = [f + g], \qquad [f] \cdot [g] = [fg] \qquad \text{e} \qquad [f] \preccurlyeq [g] \iff f \preccurlyeq g.$$

Exemplo 2.2.3. Temos a seguinte ordem nos crescimentos: $[a^n] = [b^n] \succ [n^\alpha] \succ [n^\beta]$ para todos $a, b > 1$, $\alpha > \beta \geqslant 0$.

Além disso vale a igualdade $[a^n] = [b^n]$ se, e somente se, ocorre ou $a, b > 1$, ou $a = b = 1$.

Todos os polinômios em Φ de mesmo grau d possuem mesmo crescimento $[n^d]$ que é dito um **crescimento polinomial de grau** d. Se $[f] \preccurlyeq [n^d]$ para algum d o crescimento da f é dito ser **polinomial**. O crescimento $[2^n]$ é chamado de **exponencial**. Crescimentos que são polinomiais ou exponenciais são chamados de **alternativos**. E os crescimentos que não são alternativos são ditos **intermediários**.

A proposição a seguir é bastante útil para simplificar manipulações com crescimentos de funções.

Proposição 2.2.4. *Seja $f(n) = h \cdot g(an + b) + c$ para n suficientemente grande, onde $a, h > 0$ e c adequado (para garantir $f \in \Phi$). Então $[f] = [g]$.*

Demonstração. Dividindo em um caso para cada coeficiente a demonstração é mais fácil. Por exemplo, supondo sem perda de generalidade que g é monótona não-decrescente, $g(an) \in [g]$, pois $g(n) \leqslant g(an)$ e existe inteiro positivo u tal que $u > a$, donde $g(an) \leqslant g(un)$. Com os demais coeficientes a prova é análoga. $\square$

Exemplo 2.2.5. O crescimento $[\sqrt{n+3}]$ é polinomial (pois é limitado por $[n]$), e o crescimento $[\exp(\sqrt{n})]$ é intermediário. Além disso $[\log(n)]$ é polinomial e $\prec [n^\alpha]$ para todos $\alpha > 0$.

Embora possa parecer intuitivo lidar com crescimento de funções, é necessário ter cautela ao relacionar o crescimento de combinações lineares de funções cujo crescimento é conhecido. Vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 2.2.6. ([36, p. 9])

Defina $f \in \Phi$ por

$$f(n) = ((i+1)!\,)^2, \text{ se } i! \leqslant n < (i+1)!\,.$$

Claramente, $f(n) > n^2$, donde $[f] \succcurlyeq [n^2]$. Além disso, para inteiros positivos u e v, para uma quantidade infinita de $n = i!$ com $i \geqslant cm^2$ temos que

$$f(n) = ((i+1)!\,)^2 > i \cdot (i!\,)^2 \geqslant c(mn)^2,$$

donde $[f] \succ [n^2]$. Colocando $g(n) = f(n) - n^2$, temos para $n = i!$, $i \geqslant 2$,

$$g(n+1) = ((i+1)!\,)^2 - (i!+1)^2 < ((i+1)!\,)^2 - (i!\,)^2 = g(n)$$

e assim $g \notin \Phi$.

Proposição 2.2.7. *([36, p. 10])*

- *Se $f, g \in \Phi$ e $[f] \succcurlyeq [g]$, então $[f+g] = [f]$.*
- *Seja t um inteiro positivo, seja $f \in \Phi$ com $[f] \succ [n^t]$, ponha $g(n) = f(n)/(n^t)$. Assumindo que $g \in \phi$, se f^* é obtido de f ao adicionar qualquer polinômio de grau no máximo t, então $[f^*] = [f]$*

Definição 2.2.8. *Seja A uma álgebra finitamente gerada por um conjunto $V = \{r_1, \ldots, r_m\}$. Como definido na Definição 1.1.63, usando $V^n = \operatorname{span}\{monômios\ de\ comprimento\ n, com\ letras\ em\ V\}$ e $V^0 = K$ quando A é unitária e $V^0 = K$ caso contrário, definimos o a* ***função crescimento da álgebra*** *A* ***com relação a*** *V por:*

$$\begin{aligned} g_V \colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto \dim_K\Big(\sum_{i=0}^{n} V^i\Big). \end{aligned}$$

E, como $g_V \in \Phi$, definimos por $[g_V]$ o ***crescimento da álgebra*** *A, denotando por $[A]$.*

Observação 2.2.9. O crescimento da álgebra não depende do conjunto finito que gera. De fato sejam V e W dois conjuntos finitos que geram uma álgebra A. Como são conjuntos geradores, existe inteiro positivo s tal que $V \subseteq \sum_{i=0}^{s} W^i$, e assim $\dim_K(\sum_{i=1}^{n} V^i) \leqslant \dim_K(\sum_{i=0}^{ns} W^i)$. Logo temos $g_V(n) \leqslant g_W(ns)$, donde $g_V \preccurlyeq g_W$. Analogamente $g_W \preccurlyeq g_V$, donde segue a igualdade.

Exemplo 2.2.10. Seja $X_m = \{x_1, \ldots x_m\}$. Considerando a álgebra unitária dos polinômios associativos em $m > 1$ variáveis $K\langle X_m \rangle$, temos $g_{X_m}(n) = \sum_{i=0}^{n} m^n = \frac{m^{n+1}-1}{m-1}$ que possui crescimento exponencial $[K\langle X_m\rangle] = [m^{n+1}] = [2^n]$.

Exemplo 2.2.11. Já para a álgebra unitária dos polinômios em $m \geqslant 1$ variáveis comutativas $K[X_m]$, com relação ao conjunto gerador usual X_m

$$\begin{aligned} g_{X_m}(n) &= |\{\text{monômios de grau } \leqslant n \text{ em } m \text{ variáveis comutativas}\}| \\ &= |\{\text{monômios de grau } n \text{ em } m+1 \text{ variáveis comutativas}\}| \\ &= |\{\text{sequências de } n \bullet \text{ e } m \circ\}| \\ &= \frac{(m+n)!}{m!\,n!} = \binom{m+n}{m}. \end{aligned}$$

Basta observar que,

$$\begin{array}{rcl} x_1^{a_1}\cdots x_m^{a_m} & \xrightarrow{\sim} & y_0^{a_0}\cdot y_1^{a_1}\cdots y_m^{a_m} \\ & \xrightarrow{\sim} & a_0\bullet\circ\ldots\circ a_m\bullet. \end{array}$$

Portanto $g_V(n) = \binom{m+n}{m} = \frac{(m+n)\cdots(n+1)}{m!}$, que é uma função polinomial de grau m. Deste modo $[K[X]] = [n^m]$.

Para deixar mais claro, no exemplo anterior identificamos, no caso particular $m = 2$ e $n = 6$, $x_1^2x_2$ com $y_0^3y_1^2y_2$, com $3\bullet\circ 2\bullet\circ 1\bullet$ que pode ser vista como a sequência de símbolos $\bullet\bullet\bullet\circ\bullet\bullet\circ\bullet$.

Exemplo 2.2.12. E para a álgebra exterior $E(V_m)$ de um espaço m-dimensional V_m, fixando uma base $X_m = \{x_1,\ldots,x_m\}$, temos

$$g_{X_m}(n) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n}\binom{m}{i}, & \text{se } n\leqslant m \\ 2^m, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e assim o crescimento é constante.

Observação 2.2.13. Em geral o crescimento é uma construção mais grosseira que a série de Hilbert, mas está definido em uma classe mais ampla: para qualquer sequência eventualmente monótona não-decrescente. No entanto, em muitos casos é exatamente o crescimento que influencia a estrutura de um objeto.

Além disso a função de crescimento da álgebra muitas vezes pode ser equivalente a conhecer os coeficientes da série de Hilbert, quando tivermos por exemplo que o conjunto V finito que gera A satisfaz $A = \bigoplus_{i\geqslant 0} V^i$ e $V_i = V^n$, já que neste caso teremos $g_V(n) = \dim\left(\sum_{i=0}^{n} V^i\right) = \sum_{i=0}^{n}\dim V^i$ e os coeficientes da série de Hilbert podem ser obtidos da relação $\dim V^n = g_V(n) - g_V(n-1)$.

2.3 Dimensão de Gelfand-Kirillov

Nesta seção apresentaremos conceitos básicos e propriedades da teoria de GK-dimensão necessários para uma boa compreensão do próximo capítulo. Após, vamos relacionar alguns resultados importantes para PI-Álgebras associativas.

2.3.1 Conceitos básicos e propriedades

Iniciamos com a definição do nosso principal objeto de estudos, a dimensão de Gelfand-Kirillov. Muitas vezes determinar explicitamente o crescimento de uma álgebra é uma tarefa difícil. Portanto torna-se útil fazer mais identificações a fim de obter uma ferramenta mais tratável e que ainda capte boa parte da estrutura das álgebras. Teoricamente existem muitas maneiras de fazer isso, mas na prática é melhor usar o limite superior do logaritmo da função crescimento. Intuitivamente falando, isto capta o grau do crescimento polinomial. Deste modo obtemos um invariante que se comporta bem com outros invariantes bem conhecidos para várias álgebras clássicas. Seguiremos a exposição dada em [18], Seções 9.3 e 9.4.

Definição 2.3.1. *Seja A uma K-álgebra, gerada por V.*

Pondo $V^0 = \begin{cases} K, & \textit{se } A \textit{ é unitária} \\ 0, & \textit{caso contrário,} \end{cases}$

Usando a função crescimento de A com respeito a V, $g_V(n)$, a ***dimensão de Gelfand-Kirillov de*** *A é definida por:*

$$\mathrm{GKdim}(A) = \limsup \log_n g_V(n).$$

Observação 2.3.2. A dimensão de Gelfand-Kirillov de uma álgebra A pode não existir, não ser um número real. Neste caso, por abuso, ainda diremos que existe a dimensão de Gelfand-Kirillov e escrevemos $\mathrm{GKdim}(A) = \infty$. Caso seja necessário, consideraremos a aritmética real estendida sem menções explícitas, uma vez que o comportamento é natural.

Observação 2.3.3. Na verdade, o conceito de dimensão de Gelfand-Kirillov é mais geral e esta é uma versão particular para álgebras finitamente geradas. Para maiores detalhes veja [36].

Proposição 2.3.4. $\mathrm{GKdim}(A)$ *não depende da escolha de V, conjunto finito que gera A.*

Demonstração. De fato, sejam $V = \{r_1, \ldots, r_m\}$ e $W = \{s_1, \ldots, s_{m'}\}$ conjuntos que geram A .

Como V gera A como álgebra, para cada $s_j \in W \subseteq R$, existe $p_j \in \mathbb{N}$ tal que $s_j \in \sum_{i=0}^{p_j} V^i$.

Assim existe $p = \max\{p_1, \ldots, p_{m'}\}$ tal que $W \subseteq \sum_{i=0}^{p} V^i$. Logo $W^1 \subseteq \sum_{i=0}^{p} V^i$, donde concluímos que $W^n \subseteq \sum_{i=0}^{pn} V^i$ e também que $\sum_{i=0}^{n} W^i \subseteq \sum_{i=0}^{pn} V^i$.

Agora temos $g_W(n) \leqslant g_V(pn)$, donde tiramos

$$\log_n g_W(n) \leqslant \log_n g_V(pn) = \log_n pn \cdot \log_{pn} g_V(pn) = (1 + \log_n p) \log_{pn} g_V(pn) =: c_n.$$

Sejam $c = \limsup c_n$, $d_n = \log_{pn} g_V(pn)$ e $d = \limsup d_n$. Mostremos que $c = d$.

Primeiro vamos mostrar que $d \leqslant c$. Para todos $n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant p$ implica $0 = \log_n 1 \leqslant \log_n p$, donde $1 \leqslant 1 + \log_n p$, e assim $d_n = \log_{pn} g_V(pn) \leqslant (1 + \log_n p) d_n = c_n$.

Portanto $d \leqslant c$.

Agora mostremos que $c \leqslant d$. Existe sequência crescente $n\colon j \in \mathbb{N} \hookrightarrow n_j \in \mathbb{N}$ tal que $\lim\limits_j c_{n_j} = c$ (mesmo que c seja ∞).

Existe $\lim\limits_n (1 + \log_n p) = 1$, logo existe $\lim\limits_j (1 + \log_{n_j} p) = 1$.

Agora $\lim\limits_j d_{n_j} = \lim\limits_j \dfrac{c_{n_j}}{(1 + \log_{n_j} p)} = \dfrac{\lim_j c_{n_j}}{\lim_j (1 + \log_{n_j} p)} = c$. Portanto $c \leqslant d$.

Assim $\limsup \log_n g_W(n) \leqslant d = \limsup\limits_n \log_{pn} g_V(pn) \leqslant \limsup\limits_k \log_k g_V(k)$.

Finalmente, $\mathrm{GKdim}_W(A) \leqslant \mathrm{GKdim}_V(A)$.

Analogamente mostra-se que $\mathrm{GKdim}_V(A) \leqslant \mathrm{GKdim}_W(A)$. $\square$

Proposição 2.3.5. *[18, p. 139]*

Para A e B álgebras finitamente geradas:

- $\mathrm{GKdim}(A) = \inf_\alpha \{\alpha \in \mathbb{R} \mid [A] \preccurlyeq [n^\alpha]\}$
- *Se* $[A] = [B]$, *então* $\mathrm{GKdim}(A) = \mathrm{GKdim}(B)$.

Exemplo 2.3.6. Para $A = K[X_m]$, onde $X_m = \{x_1, \ldots, x_m\}$, a álgebra unitária dos polinômios em m variáveis comutativas, temos $\mathrm{GKdim}(A) = m$.

De fato, com relação ao conjunto usual que gera os polinômios, X_m, vimos no Exemplo 2.2.11 que a função de crescimento é $g_{X_m}(n) = \binom{m+n}{m}$ uma função polinomial de grau m. Logo temos que $\mathrm{GKdim}(A) = \limsup \log_n g_{X_m}(n) = m$.

Exemplo 2.3.7. Para $A = K\langle X_m\rangle$, onde $X_m = \{x_1, \ldots, x_m\}$ e $m > 1$, temos $\mathrm{GKdim}(A) = \infty$. De fato, suponha que $\mathrm{GKdim}(A) = t \in \mathbb{R}$. Então teríamos pelo Exemplo 2.2.10 e pela Proposição 2.3.5 anterior que $[2^n] = [A] \preccurlyeq [n^{t+\varepsilon}]$, o que não pode ocorrer de acordo com o exposto no Exemplo 2.2.3.

Observação 2.3.8. Para álgebras associativas ou para álgebras de Lie temos que para um conjunto gerador $V = \{r_1, \ldots, r_m\}$, os espaços V^n podem ser simplificados. No primeiro caso para uma álgebra associativa $V^n = \mathrm{span}\{r_{i_1} \cdots r_{i_n} \mid r_{i_j} \in V\}$, já que pela identidade associativa não importa as posições dos parênteses nos monômios, e assim $V^{n+1} = V^n \cdot V^1$.

Para álgebras de Lie, usando a notação de comutadores longos introduzida na Definição 1.1.44, como consequência da identidade de Jacobi temos $V^n = \mathrm{span}\{[r_{i_1}, \ldots, r_{i_n}] \mid r_{i_j} \in V\}$, e deste modo $V^{n+1} = [V^n, V^1]$. Logo nestes casos o crescimento de álgebras finitamente geradas será no máximo exponencial.

Proposição 2.3.9. *Seja A uma álgebra finitamente gerada que é associativa ou álgebra de Lie. Então $\dim_K A < \infty$ se, e somente se, $\mathrm{GKdim}(A) = 0$. Mais ainda, se $\dim_K A = \infty$, então $\mathrm{GKdim}(A) \geqslant 1$.*

Demonstração. Seja $V = \{r_1, \ldots, r_m\}$ conjunto que gera A.

Sabemos que para álgebras associativas $V^{n+1} = V^n \cdot V^1$ e para álgebras de Lie $V^{n+1} = [V^n, V^1]$. Temos dois casos a considerar.

• Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $V^{n_0+1} \subseteq \sum_{i=0}^{n_0} V^i$. Neste caso, $p \in \mathbb{N}$ implica que $V^{n_0+p} \subseteq \sum_{i=0}^{n_0} V^i$, e assim $g_V(n_0 + p) = g_V(n_0)$. Logo $n \geqslant n_0$ implica $g_V(n) = g_V(n_0) < \infty$, o que nos dá que $\mathrm{GKdim}(A) = 0$.

Isto ocorre se $\dim_K A < \infty$ (basta tomar $V = \{r_1, \ldots, r_m\}$ base de A).

• Para todos $n \in \mathbb{N}$, $V^{n+1} \nsubseteq \sum_{i=0}^{n} V^i$. Neste caso, $\sum_{i=0}^{n} V^i \subsetneq \sum_{i=0}^{n+1} V^i$, donde $g_V(n) < g_V(n+1)$. Mostremos que $g_V(n) \geqslant n$ por indução.

(*i*) $g_V(0) \geqslant 0$ trivialmente;

(*ii*) $g_V(n+1) > g_V(n) \geqslant n$, logo $g_V(n+1) > n$ donde $g_V(n+1) \geqslant n+1$ como queríamos.

Enfim, $\log_n g_V(n) \geqslant 1$, implicando $\mathrm{GKdim}(A) = \limsup \log_n g_V(n) \geqslant 1$. Isto ocorre se $\dim_K R = \infty$. $\square$

Proposição 2.3.10. *Seja A uma álgebra, e $H = h(A)$ imagem homomorfa de A pelo homomorfismo h. Então $\mathrm{GKdim}(H) \leqslant \mathrm{GKdim}(A)$.*

Demonstração. Sejam $h\colon A \to h(A) = H$ homomorfismo de K-álgebras e $V = \{r_1, \ldots, r_m\}$ conjunto que gera A . Claramente temos que $W = \{h(r_1), \ldots, h(r_m)\}$ é um conjunto que gera H.

Agora, para todos $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} W^i \subseteq \sum_{i=0}^{n} h(V^i) = h(\sum_{i=0}^{n} V^i).$$

Assim

$$g_W(n) = \dim_K \sum_{i=0}^{n} W^i \leqslant \dim_K h(\sum_{i=0}^{n} V^i) \leqslant \dim_K \sum_{i=0}^{n} V^i = g_V(n).$$

Portanto $\mathrm{GKdim}(H) \leqslant \mathrm{GKdim}(A)$. □

Corolário 2.3.11. *Se I é um ideal da álgebra A, então* $\mathrm{GKdim}(A/I) \leqslant \mathrm{GKdim}(A)$.

Proposição 2.3.12. *Sejam A uma álgebra finitamente gerada, e S uma subálgebra de R, finitamente gerada.*

Então $\mathrm{GKdim}(S) \leqslant \mathrm{GKdim}(A)$.

Demonstração. Sejam $W = \{s_1, \ldots, s_{m'}\}$ conjunto que gera S, e $U = \{r_1, \ldots, r_m\}$ conjunto que gera A.

Como $V = W \cup U$ gera A e para todos $n \in \mathbb{N}$ temos $W^n \subseteq V^n$, donde $g_W(n) \leqslant g_V(n)$ e finalmente $\mathrm{GKdim}(S) \leqslant \mathrm{GKdim}(A)$. □

Proposição 2.3.13. *Seja A uma álgebra associativa, S uma subálgebra do centro de A finitamente gerada, tal que A é finitamente gerado como S-módulo. Então A é finitamente gerada e* $\mathrm{GKdim}(S) = \mathrm{GKdim}(A)$.

Demonstração. Seja $U = \{r_1, \ldots, r_m\}$ conjunto gerador de A como S-módulo, isto é, $A = \sum_{i=1}^{m} Sr_i$. Temos $r_i r_j = \sum_{k=0}^{m} s_{ij}^{(k)} r_k$, onde $s_{ij}^{(k)} \in S$. Seja $T = \{s_1, \ldots, s_p\}$ conjunto que gera S. Temos que $W = T \cup \{s_{ij}^{(k)} \mid (i,j,k) \in I_m \times I_m \times I_m\}$ é conjunto que gera S. Logo $V = W \cup U$ gera A.

Mostremos que $\sum_{t=0}^{n} V^t \subseteq \sum_{t=0}^{n} W^t + \sum_{k=1}^{m} \sum_{t=1}^{n} W^{t-1} r_k$.

Primeiro vamos provar por indução em t que $V^t \subseteq W^t + \sum_{i=1}^{m} W^{t-1} r_i$.

(i) $V^0 = W^0$ claramente;

(ii) $V^t \cdot V^1 \subseteq (W^t + \sum_{i=1}^{m} W^{t-1} r_i) \cdot (W^1 + U^1) \subseteq W^{t+1} + \sum_{i=1}^{m} W^t r_i + \sum_{i,j=1}^{m} W^{t-1} r_i r_j$
$\subseteq W^{t+1} + \sum_{i=1}^{m} W^t r_i + \sum_{i,j,k=1}^{m} W^{t-1} s_{ij}^{(k)} r_k \subseteq W^{t+1} + \sum_{i=1}^{m} W^t r_i$, o que prova o passo indutivo.

Somando em t, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{n} V^t &\subseteq W^0 + \sum_{t=1}^{n} \left(W^t + \sum_{i=1}^{m} W^{t-1} r_i \right) \\ &\subseteq \sum_{t=0}^{n} W^t + \sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{n} W^{t-1} r_i\,.\end{aligned}$$

Portanto $g_V(n) \leqslant (m+1) g_W(n)$ e $\mathrm{GKdim}(A) \leqslant \mathrm{GKdim}(S)$. Pela Proposição 2.3.12 anterior, $\mathrm{GKdim}(S) \leqslant \mathrm{GKdim}(A)$. E assim, $\mathrm{GKdim}(S) = \mathrm{GKdim}(A)$. □

Proposição 2.3.14. *Seja A uma álgebra associativa e comutativa. Então* $\mathrm{GKdim}(A)$ *é igual a dimensão de Krull de A (igual ao grau de transcendência sobre o corpo ou ao número máximo de elementos algebricamente independentes).*

Demonstração. Usando o Teorema de Normalização de Noether, que nos diz que A contém uma subálgebra polinomial S, ou seja $S \cong K[y_1, \ldots, y_d]$, onde d é a *Dimensão de Krull* de A (comprimento da maximal cadeia de ideais primos de A), tal que A é um S-módulo finitamente gerado (A é integral sobre S).

Assim de $S \cong \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_d]$ temos que $\mathrm{GKdim}(S) = d$ (Proposição 2.3.10 e Exemplo 2.3.6).

Pela Proposição anterior $\mathrm{GKdim}(A) = \mathrm{GKdim}(S) = d$. □

Observação 2.3.15. Este resultado é interessante, pois de certo modo diz que a dimensão de Gelfand-Kirillov é uma boa generalização do conceito de dimensão de Krull, pelo menos para álgebras comutativas. Já é conhecido que a dimensão de Gelfand-Kirillov coincide com a dimensão de Krull clássica para PI-Álgebras associativas semiprimas e finitamente geradas, num resultado de Malliavin-Bremeret [39]. Mais interessante ainda é observar que, a princípio a dimensão de Gelfand-Kirillov assumiria qualquer valor real, no entanto em álgebras comutativas ela assume apenas valores inteiros (positivos).

Proposição 2.3.16. *Seja L uma álgebra de Lie finitamente gerada e seja $U = U(L)$ sua álgebra envolvente universal. Então* $\mathrm{GKdim}(U) = \dim(L)$.

Demonstração. Se $G = \{g_i\}_{i \in I}$ é uma base ordenada de L, então o Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt 1.2.33 nos diz que G é um conjunto gerador de U e

$$\sum_{k=1}^{n} G^k = span\{g_{i_1}^{a_1} \cdots g_{i_n}^{a_n} \mid i_j \in I, g_{i_1} < \cdots < g_{i_n} \text{ e } \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant n\},$$

ou seja, o crescimento $[U]$ é o mesmo da álgebra dos polinômios comutativos nas variáveis g_i, $[K[G]]$, donde segue o resultado. □

Vejamos agora mais alguns resultados que facilitam o cálculo da dimensão de Gelfand-Kirillov.

Proposição 2.3.17. *Seja A uma álgebra*

- *Já vimos que* $\mathrm{GKdim}(A) = 0$ *se, e só se* $\dim_K A < \infty$. *Se* $\dim_K A = \infty$ *e A é associativa, então* $\mathrm{GKdim}(A) = 1$ *ou* $\mathrm{GKdim}(A) \geqslant 2$*;*

- *Para todos $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geqslant 2$, existe uma álgebra associativa B com* $\mathrm{GKdim}(B) = \alpha$*;*

- *Se B é uma álgebra, então*

$$\mathrm{GKdim}(A \oplus B) = \max\{\mathrm{GKdim}(A), \mathrm{GKdim}(B)\};$$

- *Se $B = A[x_1, \ldots, x_m]$, então*

$$\mathrm{GKdim}(B) = \mathrm{GKdim}(A) + m;$$

- *Se A e B são álgebras unitárias, então*

$$\max\{\mathrm{GKdim}(A), \mathrm{GKdim}(B)\} \leqslant \mathrm{GKdim}(A \otimes B) \leqslant \mathrm{GKdim}(A) + \mathrm{GKdim}(B).$$

Demonstração. Para maiores detalhes, veja [36], pp. 18, 21, 23, 26 e 28. □

Observação 2.3.18. Quanto aos dois primeiros itens, para álgebras de Lie a situação é diferente. Em [46], para cada número real $\alpha \geqslant 1$ são exibidas álgebras de Lie cuja GK-dimensão é α.

Teorema 2.3.19. *([7], [18, p. 142], Teorema 9.4.1)*
Toda PI-Álgebra associativa finitamente gerada possui GK-dimensão finita.

Apesar de a GK-dimensão fazer mais identificações na função de crescimento de uma álgebra, o teorema acima diz que para PI-Álgebras associativas finitamente geradas a dimensão de Gelfand-Kirillov ainda é um bom invariante, com capacidade de diferenciar os possíveis crescimentos de álgebras de dimensão infinita.

2.3.2 Em álgebras relativamente livres

Nesta subseção mostraremos resultados que permitem relacionar os conceitos de GK-dimensão e de PI-equivalência e alguns resultados que mostram a importância da dimensão de Gelfand-Kirillov para PI-Álgebras associativas. Consideraremos até o final desta subseção que o corpo K é infinito.

Definição 2.3.20. *(Relembramos a Definição 1.1.71 e a notação introduzida na Observação 1.1.73) A álgebra relativamente livre de posto $m \in \mathbb{N}$ na variedade gerada pela álgebra associativa A é definida por*

$$R_m(A) = K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle / (T(A) \cap K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle).$$

Observação 2.3.21. De maneira análoga, mudando-se a álgebra livre conforme o caso, define-se álgebras relativamente livres de posto finito m em variedades geradas por álgebras de Lie, de Jordan, etc. Por exemplo para álgebras de Lie, consideramos $L(x_1, \ldots, x_m)$ a álgebra de Lie livre, livremente gerada por $x_1, \ldots, x_m$, que pode ser vista mergulhada em $K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle^{(-)}$ pelo Teorema de Witt 1.2.35. Então para uma álgebra de Lie A

$$R_m(A) = L(x_1, \ldots, x_m) / (T(A) \cap L(x_1, \ldots, x_m)).$$

Com o intuito de unificar as demonstrações, usaremos $F(X)$ e $F(X_m)$ para designar o objeto livre na variedade considerada, com posto enumerável e com posto finito m, respectivamente. Usaremos ainda $T_m(A) = T(A) \cap F(X_m)$.

Observação 2.3.22. A $\mathrm{GKdim}(R_m(A))$ pode ser vista como uma medida do crescimento das "não identidades" de uma álgebra A.

Observação 2.3.23. Para álgebras relativamente livres as séries de Hilbert têm grande importância e estão bem relacionadas com o crescimento destas álgebras. Aqui é importante que o corpo seja infinito para que $F(X_m)$, $T_m(A)$ e $R_m(A)$ sejam graduados por X_m. Assim se

$$H_m(A,t) = \sum_{r \geqslant 0} a_r t^r$$

teremos

$$g_{X_m}(w) = \sum_{r=0}^{w} a_r.$$

Se em particular g_{X_m} tiver mesmo crescimento de um polinômio de grau p, usando a Proposição 2.3.5 teremos que $\text{GKdim}(R_m(A)) = p$.

Proposição 2.3.24. *Se A e B são duas álgebras PI-equivalentes, então*

$$R_m(A) = R_m(B) \text{ e } \operatorname{GKdim} R_m(A) = \operatorname{GKdim} R_m(B).$$

Demonstração. Sendo A e B álgebras PI-equivalentes, temos que $T(A) = T(B)$. Daí, vem que $T_m(A) = T(A) \cap F(X_m) = T(B) \cap F(X_m) = T_m(B)$ e

$$R_m(A) = F(X_m)/T_m(A) = F(X_m)/T_m(B) = R_m(B).$$

Portanto, $\operatorname{GKdim} R_m(A) = \operatorname{GKdim} R_m(B)$. □

Observação 2.3.25. Podemos extrair uma relação extremamente útil desta proposição. Podemos utilizar a contra-positiva da Proposição 2.3.24 para concluir a não PI-equivalência de álgebras, pois essa contra-positiva diz que:

PI-Álgebras que possuem álgebras relativamente livres de posto m com dimensões de Gelfand-Kirillov diferentes não são PI-equivalentes.

Proposição 2.3.26. *Se $T(A) \subseteq T(B)$, então* $\operatorname{GKdim} R_m(A) \geqslant \operatorname{GKdim} R_m(B)$.

Demonstração. Sendo $T(A) \subseteq T(B)$ obtemos que $T_m(A) \subseteq T_m(B)$. A partir disso obtemos o seguinte homomorfismo sobrejetor:

$$\begin{aligned} \Psi \colon R_m(A) &\longrightarrow R_m(B) \\ f + T_m(A) &\longmapsto f + T_m(B). \end{aligned}$$

Daí, $R_m(B)$ é imagem homomorfa de $R_m(A)$ e da Proposição 2.3.10, obtemos que

$$\operatorname{GKdim} R_m(A) \geqslant \operatorname{GKdim} R_m(B)$$

como queríamos. □

Proposição 2.3.27. *Se $B \subseteq A$, então* $\operatorname{GKdim} R_m(B) \leqslant \operatorname{GKdim} R_m(A)$.

Demonstração. Como $B \subseteq A$, temos $T(B) \supseteq T(A)$ e em seguida usamos a Proposição 2.3.26. □

Teorema 2.3.28. $\operatorname{GKdim} R_m(A \oplus B) = \max\{\operatorname{GKdim} R_m(A), \operatorname{GKdim} R_m(B)\}$.

Demonstração. Inicialmente, observamos que

(*i*) $T(A \oplus B) = T(A) \cap T(B)$ e $T_m(A \oplus B) = T_m(A) \cap T_m(B)$;

(*ii*) $R_m(A \oplus B) = F(X_m)/T_m(A \oplus B) = F(X_m)/T_m(A) \cap T_m(B)$.

Agora, sendo $A, B \subseteq A \oplus B$, usamos a Proposição 2.3.27, para obter que

$$\operatorname{GKdim} R_m(A), \operatorname{GKdim} R_m(B) \leqslant \operatorname{GKdim} R_m(A \oplus B).$$

Daí, vem que

$$\operatorname{GKdim} R_m(A \oplus B) \geqslant \max\{\operatorname{GKdim} R_m(A), \operatorname{GKdim} R_m(B)\}. \tag{2.3.1}$$

Consideramos agora a imersão natural

$$F(X_m)/T_m(A \oplus B) \hookrightarrow F(X_m)/T_m(A) \oplus F(X_m)/T_m(B),$$

ou seja,

$$R_m(A \oplus B) \hookrightarrow R_m(A) \oplus R_m(B).$$

Utilizando (1) e a Proposição 2.3.12 (juntamente com Proposição 2.3.10), obtemos que

$$\operatorname{GKdim} R_m(A \oplus B) \leqslant \max\{\operatorname{GKdim} R_m(A), \operatorname{GKdim} R_m(B)\}. \tag{2.3.2}$$

A partir das equações (2.3.1) e (2.3.2), obtemos que

$$\operatorname{GKdim} R_m(A \oplus B) = \max\{\operatorname{GKdim} R_m(A), \operatorname{GKdim} R_m(B)\} = \operatorname{GKdim}(R_m(A) \oplus R_m(B))$$

como desejado. □

Agora vamos relacionar a GK-dimensão com a teoria desenvolvida por Kemer para PI-Álgebras associativas sobre corpos de característica zero. Para isto será necessária a seguinte definição.

Definição 2.3.29.

- *O T-ideal P de $K\langle X\rangle$ é dito T-primo se $UV \subseteq P$ para T-ideais U e V, implica que $U \subseteq P$ ou $V \subseteq P$;*
- *O T-ideal S de $K\langle X\rangle$ é dito T-semiprimo se $U^n \subseteq S$ para um T-ideal U implica que $U \subseteq S$.*

Teorema 2.3.30. *(ver [28])*

(i) Para toda (não necessariamente finitamente gerada) PI-Álgebra associativa A existe um inteiro positivo n e um T-ideal T-semiprimo S tal que $S^n \subseteq T(A) \subseteq S$;

(ii) Todos T-ideais T-semiprimos são interseção de uma quantidade finita de ideais T-primos

(iii) Sobre corpos de característica zero os únicos T-ideais T-primos não triviais são os conjuntos de identidades das seguintes álgebras associativas:

- *$M_n(K)$;*
- *$M_n(E)$;*
- *$M_{a,b}(E)$, como definida na Definição 1.1.28.*

(iv) (Teorema sobre o Produto Tensorial de Kemer)

Sobre corpos de característica zero para $a, b, c, d \in \mathbb{N}$:

- *$T(M_{a,b}(E) \otimes E) = T(M_{a+b}(E))$;*
- *$T(M_{a,b}(E) \otimes M_{c,d}(E)) = T(M_{ac+bd,ad+bc}(E))$;*
- *$T(E \otimes E) = T(M_{1,1}(E))$.*

Resumindo, pela teoria de Kemer as PI-Álgebras mais importantes são $M_n(K)$, $M_n(E)$ e $M_{a,b}(E)$ por terem T-ideais T-primos, que podem ser vistos como "pedras fundamentais" para formar T-ideais.

Observação 2.3.31. Razmyslov observou a existência de "novos" T-ideais T-primos em característica positiva > 3, além daqueles que aparecem no caso de corpos de característica zero. Assim a classificação obtida em característica zero não descreve todos os T-ideais T-primos em característica positiva. Para mais detalhes, veja [52], Capítulo 4, Teorema 33.3.

Posteriormente foram usados modelos genéricos para a álgebra relativamente livre de $M_n(K)$ (veja [49]), conhecido como a álgebra das matrizes genéricas, a fim de compreender melhor essa álgebra. Este modelo foi adaptado para conseguir modelos genéricos para $M_n(E)$ e $M_{a,b}(E)$ em [8], também chamados de álgebras de matrizes genéricas. Além disso, vale salientar que para essas álgebras de matrizes genéricas serem isomorfas as respectivas álgebras relativamente livres, basta que o corpo seja infinito, ou seja, esta é uma aproximação independente da característica.

As dimensões de Gelfand-Kirillov destas álgebras genéricas foram calculadas em [49] para $M_n(K)$ e em [8] para $M_n(E)$ e $M_{a,b}(E)$, resultando no seguinte:

Teorema 2.3.32. *Sobre corpos infinitos, para $m > 1$:*

- $\mathrm{GKdim}(R_m(M_n(K))) = (m-1)n^2 + 1$;
- $\mathrm{GKdim}(R_m(M_n(E))) = (m-1)n^2 + 1$;
- $\mathrm{GKdim}(R_m(M_{a,b}(K))) = (m-1)(a^2 + b^2) + 2$.

Assim usando o item (iv) do Teorema 2.3.30 e o Teorema 2.3.32 obtém-se:

Teorema 2.3.33. *Sobre corpos de característica zero para $m > 1$:*

- $\mathrm{GKdim}(R_m(M_{a,b}(E) \otimes E)) = (m-1)(a+b)^2 + 1$;
- $\mathrm{GKdim}(R_m(M_{a,b}(E) \otimes M_{c,d}(E))) = (m-1)\left((ac+bd)^2 + (ad+bc)^2\right) + 2$;
- $\mathrm{GKdim}(R_m(E \otimes E)) = 2m$.

Pela teoria de Kemer [28] toda (não necessariamente finitamente gerada) PI-Álgebra associativa A satisfaz todas identidades polinomiais de alguma álgebra $M_n(E)$. Assim A é uma imagem homomorfa de $R(M_n(E))$ (lembre que isto denota posto enumerável). Usando que $\mathrm{GKdim}(R_m(M_n(E)))$ depende linearmente em m, em [9] foi provado o seguinte resultado:

Proposição 2.3.34. *Para toda (não necessariamente finitamente gerada) PI-Álgebra associativa A existe uma função linear $f_A(m)$, tal que para toda subálgebra com m-geradores S de A vale:*

$$\mathrm{GKdim}(S) \leqslant f_A(m).$$

Apesar de muitos dos exemplos que exibem um comportamento indesejado da dimensão de Gelfand-Kirillov serem PI-Álgebras, pode-se mostrar que a dimensão de Gelfand-Kirillov de álgebras associativas relativamente livres finitamente geradas é um inteiro.

Teorema 2.3.35. *([5])*
A série de Hilbert de álgebras associativas relativamente livres $R_m(A)$ é uma função racional.

É bem conhecido que para uma álgebra graduada A com série de Hilbert racional a $\mathrm{GKdim}(A)$ pode ser obtida contando a ordem (ou multiplicidade) do pólo em $t = 1$ desta função racional e assim o crescimento é alternativo (pode ser exponencial, como por exemplo na série de Hilbert $H(K\langle X_m\rangle, t) = (1 - mt)^{-1}$ onde temos $\mathrm{GKdim}(K\langle X_m\rangle) = \infty$) Deste modo combinando o Teorema 2.3.35 anterior com o Teorema 2.3.19, obtém-se:

Corolário 2.3.36. *A dimensão de Gelfand-Kirillov de PI-Álgebras associativas relativamente livres de posto finito é um inteiro.*

Observação 2.3.37. Este resultado pode ser obtido de outra maneira. Uma álgebra associativa A é dita representável se é isomorfa a uma álgebra $M_n(S)$, em que S é uma álgebra comutativa. Em [29] é demonstrado que PI-Álgebras associativas relativamente livres de posto finito são representáveis e em [40] é provado que álgebras representáveis e finitamente geradas possuem GK-dimensão inteira.

Uma peculiaridade importante das PI-Álgebras associativas é observada quando se comparam os casos sobre corpos infinitos de característica positiva com aqueles sobre corpos de característica zero. Em [2, 3, 35] foram estudados os T-ideais das álgebras envolvidas no Teorema do Produto Tensorial (TPT) de Kemer sobre corpos infinitos de característica $p > 2$. Já era conhecido que o TPT valia sobre corpos infinitos de característica $p > 2$, contanto que se considere apenas as identidades multilineares, veja [54]. Em [2] provaram que $T(M_{1,1}(E)) \subsetneq T(E \otimes E)$ e em [3] provaram que $T(M_2(E)) \subsetneq T(M_{1,1}(E))$ como consequência do estudo das identidades graduadas de modelos genéricos para estas álgebras. Usando a dimensão de Gelfand-Kirillov em [43] e a Observação 2.3.25 foi provado a não PI-equivalência de algumas álgebras T-primas em característica positiva, que são PI-equivalentes em característica zero. Por exemplo em [43] obtiveram que:

Proposição 2.3.38. *Sobre um corpo K infinito de característica $p > 2$, para $m > 1$*

$$\mathrm{GKdim}(R_m(E \otimes E)) = m \qquad e \qquad \mathrm{GKdim}(R_m(M_{1,1}(E) \otimes E)) = 2m.$$

Como pelo Teorema 2.3.32 temos que para $m > 1$ vale $\text{GKdim}(R_m(M_{1,1})) = 2m$ e também $\text{GKdim}(R_m(M_2(E)) = 4m - 2$, donde pela Observação 2.3.25 segue que:

Corolário 2.3.39. *Sobre um corpo K infinito de característica $p > 2$,*

$$T(M_{1,1}(E)) \neq T(E \otimes E) \qquad e \quad T(M_2(E)) \neq T(M_{1,1}(E)).$$

Estes resultados são relevantes para a teoria e indicam o surgimento de novos T-ideais T-primos em característica positiva.

Observação 2.3.40. A dimensão de Gelfand-Kirillov em álgebras de Jordan foi estudada em [41, 42].

Em Álgebras de Lie, infelizmente a existência de uma identidade polinomial não é uma condição forte. Mesmo para Álgebras de Lie finitamente geradas importantes que satisfazem uma identidade polinomial não trivial a GK-dimensão pode ser infinita. O exemplo mais simples é a Álgebra de Lie solúvel de classe 3 livre, definida pela identidade polinomial

$$[[[x_1, x_2], [x_3, x_4]], [[x_5, x_6], [x_7, x_8]]] = 0.$$

É conhecido que o crescimento de Álgebras de Lie finitamente geradas pode ser intermediário não polinomial (também chamado de subexponencial), veja [31, 32]. Em [44] também foi mostrado que álgebras de Lie solúveis e livres com posto finito podem ter crescimento subexponencial.

Em [45, 46] é desenvolvida a teoria de q-dimensões, dimensões superiores capazes de diferenciar crescimentos intermediários que são menores que o crescimento exponencial. Isto é interessante, pois para álgebras com crescimento subexponencial a dimensão de Gelfand-Kirillov é infinita e não consegue diferenciar o crescimento delas. A 1-dimensão coincide com a dimensão usual de espaços vetoriais, a 2-dimensão é a GK-dimensão e a 3-dimensão (a menos de normalização) é a superdimensão introduzida em [10]. As demais são inteiramente novas. Em [47] foi calculada a GK-dimensão de álgebras livres de posto finito nas variedades polinilpotentes de álgebras de Lie $\mathcal{N}_c\mathcal{N}_d$.

Pouco é conhecido para álgebras relativamente livres de posto finito das álgebras de Lie simples.

Capítulo 3

Cálculo da Dimensão de Gelfand-Kirillov

Neste capítulo calcularemos a dimensão de Gelfand-Kirillov de algumas álgebras relativamente livres e contém os principais resultados originais da tese.

3.1 Para $R_m(sl_2(K))$

Nesta seção calcularemos a dimensão de Gelfand-Kirillov de

$$R_m(sl_2(K)) = L(x_1, \dots, x_m)/(L(x_1, \dots, x_m) \cap T(sl_2(K))),$$

a álgebra de Lie relativamente livre de posto m na variedade determinada pela álgebra de Lie das matrizes 2×2 com traço zero sobre um corpo infinito de característica diferente de 2, $sl_2(K)$.

Claramente $sl_2(K)$ satisfaz identidades polinomiais. Toda álgebra de Lie de dimensão n satisfaz uma identidade standard de Lie

$$s_{\text{Lie},n+2}(x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{\sigma \in S_{n+1}} [x_0, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n+1)}].$$

Além disso em [51] foi descrita uma base finita para as identidades de $sl_2(K)$ e em [21] foi obtida uma base minimal, considerando que $\text{char}(K) = 0$, consistindo apenas da identidade:

$$[x_2, x_3, [x_4, x_1], x_1] + [x_2, x_1, [x_3, x_1], x_4].$$

No resultado principal desta seção provamos que, para $\text{char}(K) \neq 2$:

$$\text{GKdim}(R_m(sl_2(K))) = 3(m-1).$$

Primeiramente consideraremos $\text{char}\, K = 0$. Para simplificar a notação nesta subseção escreveremos $R_m = R_m(sl_2(K))$.

Antes de começarmos a demonstração propriamente dita faremos um esboço da demonstração visto que a mesma será bastante longa. Começaremos com a série de Hilbert, obtendo uma expressão como série de potências usando o Lema 3.1.1. Estudaremos a função de crescimento, lidando com as parcelas de forma separada e avaliadas em naturais da forma $12w + 11$. Faremos manipulações e descartamos parcelas que não contribuem para o crescimento dessa função. Por fim obteremos um polinômio cujo coeficiente líder precisamos mostrar que é positivo.

A série de Hilbert $H_m(t) = H_m(sl_2(K), t) = H(R_m(sl_2(K), t)$ foi calculada explicitamente em [17, Teorema 4.1]. Denotemos por $\theta(x, y, z)$ a expressão

$$\frac{2(m-1)!^{-1}}{(m-2)!\,(m-3)!\,x^2y}\frac{\partial^{3(m-3)}}{\partial x^{m-3}\partial y^{m-3}\partial z^{m-3}}\left(\frac{(xyz)^{m-3}}{(1-xyz)}\frac{x^2y(1-x^2y)}{(1-xy)^3(1-x)^3}\right). \tag{3.1.1}$$

De acordo com [17], para $m \geqslant 3$ tem-se:

$$\begin{aligned} H_m(t) \quad &= \quad (1/4)\Big(3\theta(t,t,t) - \theta(t,-t,-t) - \theta(-t,t,-t) - \theta(-t,-t,t)\Big) + \\ & \qquad +(1/2)\Big((1+t)^{-m} - (1-t)^{-m}\Big) + mt. \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Agora iremos analisar o comportamento assintótico de cada uma das parcelas da Equação (3.1.2) separadamente. Para isto será particularmente útil a identidade de séries de potências:

Lema 3.1.1.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+a}{a}t^n = (1-t)^{-1-a}$$

Demonstração. Trabalharemos com séries formais nessa demonstração e não nos preocuparemos com questões de convergência. Prova-se este resultado por indução. Para $a = 0$ verifica-se diretamente que $(\sum_{n=0}^{\infty} t^n)(1-t) = 1$. Para o passo indutivo, derivando formalmente termo a termo a equação

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+a}{a}\frac{t^n}{1+a} = \frac{(1-t)^{-1-a}}{1+a},$$

obtemos

$$(1-t)^{-1-(a+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\binom{n+a}{a}\frac{n}{1+a}t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+a+1}{a+1}t^n.$$

□

3.1.1 Primeira parcela

Começamos escrevendo θ na equação (3.1.1) em um modo mais conveniente, escrevendo como série de potências (ver Lema 3.1.1) e aplicando as derivadas parciais. De agora em diante fixemos $k = m - 3$. Temos que $2(k+2)(k+1)(k!\,)^3\theta(x, y, z)$ é expresso como:

$$\begin{aligned} &\sum_{0\leqslant n\leqslant m\leqslant p}(m-n+2)^{\underline{2}}(p-m+2)^{\underline{2}}(n+k)^{\underline{k}}\times \\ &\times\Big((m+k+1)^{\underline{k}}(p+k+2)^{\underline{k}} - (m+k+2)^{\underline{k}}(p+k+4)^{\underline{k}}x^2y\Big)x^py^mz^n, \end{aligned}$$

onde $a^{\underline{b+1}}$ é o fatorial descendente (para a notação, ver p. xiii).

A primeira parcela que estudaremos será

$$I = (1/4)\Big(3\theta(t,t,t) - \theta(t,-t,-t) - \theta(-t,t,-t) - \theta(-t,-t,t)\Big).$$

As demais parcelas serão estudadas na próxima subseção.

Substituindo na última expressão de θ conforme indicado o $\pm t$ e simplificando obtemos que $8(k+2)(k+1)(k!)^3 I$ é:

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{0\leqslant n\leqslant m\leqslant p}(m-n+2)^{\underline{2}}(p-m+2)^{\underline{2}}(n+k)^{\underline{k}}t^{p+m+n}\times\\
&\times\Big((m+k+1)^{\underline{k}}(p+k+2)^{\underline{k}}(3-(-1)^{m+n}-(-1)^{n+p}-(-1)^{p+m})\\
&-(m+k+2)^{\underline{k}}(p+k+4)^{\underline{k}}(3+(-1)^{m+n}-(-1)^{n+p}+(-1)^{p+m})t^3)\Big).
\end{aligned}$$

Para $r\in\mathbb{N}$ é fácil ver que os conjuntos $\{(n,m,p)\in\mathbb{Z}^3\mid 0\leqslant n\leqslant m\leqslant p \text{ e } n+m+p=r\}$ e $\{(n,r-n-p,p)\in\mathbb{Z}\mid 0\leqslant n\leqslant\lfloor r/3\rfloor \text{ e } \lceil(r-n)/2\rceil\leqslant p\leqslant r-2n\}$ coincidem (para a notação, ver p. xiii). Deste modo a expressão acima pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\lfloor\frac{r}{3}\rfloor}\sum_{p=\lceil\frac{r-n}{2}\rceil}^{r-2n}(r-2n-p+2)^{\underline{2}}(2p-r+n+2)^{\underline{2}}(n+k)^{\underline{k}}t^r\times\\
&\times\Big((r-n-p+k+1)^{\underline{k}}(p+k+2)^{\underline{k}}(3-(-1)^{r-p}-(-1)^{n+p}-(-1)^{r-n})\\
&-(r-n-p+k+2)^{\underline{k}}(p+k+4)^{\underline{k}}(3+(-1)^{r-p}-(-1)^{n+p}+(-1)^{r-n})t^3)\Big)\\
=&4k!\,(k+1)!\,(k+3)!\,(2t+(k+2)t^2)+\textstyle\sum_{r=0}^{\infty}(F_2-G_2)(r,n,p)t^{r+3},
\end{aligned}$$

em que as funções f, g, φ, F_1, F_2, G_1 e G_2 são definidas como segue:

$$\begin{aligned}
&f(r,n,p)=(r-2n-p+2)^{\underline{2}}(2p-r+n+2)^{\underline{2}}(n+k)^{\underline{k}}(r-n-p+k+1)^{\underline{k}}(p+k+2)^{\underline{k}},\\
&g(r,n,p)=(r-2n-p+2)^{\underline{2}}(2p-r+n+2)^{\underline{2}}(n+k)^{\underline{k}}(r-n-p+k+2)^{\underline{k}}(p+k+4)^{\underline{k}},\\
&\varphi(r,n,p)=3+(-1)^{r-p}-(-1)^{n+p}+(-1)^{r-n},\\
&F_1(r,n,p)=\sum_{p=\lceil\frac{r+3-n}{2}\rceil}^{r+3-2n}f(r+3,n,p)\varphi(r,n,p),\ \ F_2(r,n,p)=\sum_{n=0}^{\lfloor\frac{r}{3}\rfloor+1}F_1(r,n,p),\\
&G_1(r,n,p)=\sum_{p=\lceil\frac{r-n}{2}\rceil}^{r-2n}g(r,n,p)\varphi(r,n,p),\ \ G_2(r,n,p)=\sum_{n=0}^{\lfloor\frac{r}{3}\rfloor}G_1(r,n,p).
\end{aligned}$$

Agora se queremos analisar o comportamento assintótico da função de crescimento de R_m é suficiente considerar apenas a parte $\sum_{r=0}^{\infty}(F_2-G_2)(r,n,p)t^{r+3}$.

Descreveremos apenas $\sum_{r=0}^{S}(F_2-G_2)(r,n,p)$, onde $S\equiv 11 \pmod{12}$, pois usando a Proposição 2.2.4 está na mesma classe de equivalência da função de crescimento. Deste modo temos $w=(S-11)/12\in\mathbb{N}$. A partir de agora usaremos o símbolo $\simeq_q$ quando estivermos considerando equivalências módulo polinômios de grau total estritamente menor que $3k+6-q$. A fim de facilitar a leitura, comentamos o motivo desta notação. Nosso objetivo é mostrar que o comportamento assintótico é de ordem polinomial $3k+6=3(m-1)$ e deste modo q pode ser visto como o número de somatórios nas variáveis que contribuem nessa ordem (ao usar o Lema 3.1.3) que foram omitidos. Para $R = 12r$, $\sum_{r=0}^{S}(F_2 - G_2)(r,n,p)$ é igual a:

$$\sum_{r=0}^{w}\sum_{x=0}^{11}(F_2 - G_2)(R+x,n,p) = \sum_{r=0}^{w}\sum_{x=0}^{2}\sum_{j=0}^{3}(F_2 - G_2)(R+x+3j,n,p)$$
$$= \sum_{r=0}^{w}\sum_{x=0}^{2}\sum_{j=0}^{3}\left(\sum_{n=0}^{\frac{R}{3}+j+1} F_1(R+x+3j,n,p) - \sum_{n=0}^{\frac{R}{3}+j} G_1(R+x+3j,n,p)\right) \simeq_0$$
$$\simeq_0 \sum_{r=0}^{w}\sum_{x=0}^{2}\sum_{j=0}^{3}\sum_{n=0}^{\frac{R}{3}-1}(F_1 - G_1)(R+x+3j,n,p).$$

Nós podemos descartar as parcelas com avaliações $(n = \frac{R}{3}), \ldots, (n = \frac{R}{3} + j + 1)$, pois não dependem de r, n e p e possuem grau total $\leqslant 3k + 2 < 3k + 6$, como mostra o lema a seguir:

Lema 3.1.2. *Seja* $0 \leqslant a \leqslant j+1$. *Então* $\deg F_1(R+x+3j, R/3+a, p) \leqslant 3k$, *e analogamente para* G_1.

Demonstração. Faremos apenas os cálculos para F_1, pois são análogos aos para G_1. Sejam $b = j + 1 - a$, $c = R/3 + j + 1$. Então $F_1(R+x+3j, R/3+a, p)$ é igual a:

$$\sum\nolimits_{p=c+\lceil\frac{x+b}{2}\rceil}^{c+x+2b} f(3c+x, c-b, p)\varphi(c+x, c-b, p)$$
$$= \sum\nolimits_{p=\lceil\frac{x+b}{2}\rceil}^{x+2b} f(3c+x, c-b, c+p)\varphi(c+x, c-b, c+p)$$
$$= \sum\nolimits_{p=\lceil\frac{x+b}{2}\rceil}^{x+2b} (x+2b-p+2)^{\underline{2}}(2p-x-b+2)^{\underline{2}}\times$$
$$\times\, (c-b+k)^{\underline{k}}(c+x+b-p+k+1)^{\underline{k}}(c+p+k+2)^{\underline{k}}\varphi(c+x, c-b, c+p).$$

Notemos que os fatoriais descendentes $(x+2b-p+2)^{\underline{2}}$ e $(2p-x-b+2)^{\underline{2}}$ não dependem de r (ou R) e n. Como $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant b \leqslant j+1$ e $0 \leqslant j \leqslant 3$, ao somar em p temos no máximo $x + 2b - \lceil\frac{x+b}{2}\rceil + 1 \leqslant 8$ parcelas, todas com grau total menor ou igual a $3k$. □

Temos que $R/3 - 1 \in \mathbb{N}$, e além disso $R/3 - 1 \equiv 3 \pmod 4$. Colocando $N = 4n$, temos que $\sum_{n=0}^{R/3-1}(F_1 - G_1)(R+x+3j,n,p)$ vale:

$$\sum\nolimits_{n=1}^{r}\sum\nolimits_{y=-4}^{-1}(F_1 - G_1)(R+x+3j, N+y, p)$$
$$= \sum\nolimits_{n=1}^{r}\sum\nolimits_{y=-4-j}^{-1-j}(F_1 - G_1)(R+x+3j, N+y+j, p).$$

Simplificando $(F_1 - G_1)(R+x+3j, N+y+j, p)$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=\frac{R-N}{2}+j+\lceil\frac{3+x-y}{2}\rceil}^{R-2N+j+3+x-2y} f(R+x+3j+3, N+y+j, p)\varphi(x+j, y+j, p)\\
&\qquad - \sum_{p=\frac{R-N}{2}+j+\lceil\frac{x-y}{2}\rceil}^{R-2N+j+x-2y} g(R+x+3j, N+y+j, p)\varphi(x+j, y+j, p)\\
&= \sum_{p=\frac{R-N}{2}+\lceil\frac{3+x-y}{2}\rceil}^{R-2N+3+x-2y} f(R+x+3j+3, N+y+j, p+j)\varphi(x+j, y+j, p+j)\\
&\qquad - \sum_{p=\frac{R-N}{2}+\lceil\frac{x-y}{2}\rceil}^{R-2N+x-2y} g(R+x+3j, N+y+j, p+j)\varphi(x+j, y+j, p+j) \simeq_2\\
&\simeq_2 \sum_{p=\frac{R-N}{2}+\lceil\frac{x-y}{2}\rceil}^{R-2N+x-2y} \Big(f(R+x+3j+3, N+y+j, p+j)\\
&\qquad - g(R+x+3j, N+y+j, p+j)\Big)\varphi(x+j, y+j, p+j),
\end{aligned}$$

onde a última expressão é obtida adicionando termos com avaliações

$$(p = \frac{R-N}{2} + \lceil\frac{x-y}{2}\rceil), \ldots, (p = \frac{R-N}{2} + \lceil\frac{3+x-y}{2}\rceil - 1)$$

e removendo aqueles com avaliações

$$(p = R-2N+1+x-2y), \ldots, (p = R-2N+3+x-2y).$$

Podemos fazer isso pois f possui grau total nas variáveis R, N menor ou igual a $3k+2$ nestas avaliações.

Agora analisando $f(R+x+3j+3, N+y+j, p+j)$ temos:

$$\begin{aligned}
&(R-2N-p+x-2y+5)^{\underline{2}}(2p-R+N-x+y-1)^{\underline{2}}\times\\
&\times (N+y+j+k)^{\underline{k}}(R-N-p+j+3+x-y+k+1)^{\underline{k}}(p+j+k+2)^{\underline{k}},
\end{aligned}$$

e para $g(R+x+3j, N+y+j, p+j)$:

$$\begin{aligned}
&(R-2N-p+x-2y+2)^{\underline{2}}(2p-R+N-x+y+2)^{\underline{2}}\times\\
&\times (N+y+j+k)^{\underline{k}}(R-N-p+j+x-y+k+2)^{\underline{k}}(p+j+k+4)^{\underline{k}}.
\end{aligned}$$

Claramente os monômios de maior grau total, $3k+4$, em f e em g, se cancelam: em ambos os casos são determinados por $(R-2N-p)^2(2p-R+N)^2(N)^k(R-N-p)^k(p)^k$.

Então trabalhando módulo polinômios de grau total estritamente menor que $3k+3$ temos

$$\begin{aligned}
&f(R+x+3j+3, N+y+j, p+j) - g(R+x+3j, N+y+j, p+j) \simeq_3\\
&\simeq_3 2a^2b^2c^kd^ke^k(3/a - 3/b + k/d - k/e) = 2z(3/a - 3/b + k/d - k/e), \qquad (3.1.3)
\end{aligned}$$

onde $a = R - 2N - p$, $b = 2p - R + N$, $c = N$, $d = R - N - p$, $e = p$ e $z = a^2 b^2 c^k d^k e^k$.

Uma vez que $\varphi(r, n, p) = 3 + (-1)^{r-p} - (-1)^{p+n} + (-1)^{r-n}$ obtemos:

$$\varphi(x+j, y+j, p+j) = \varphi(x, y, p) = \begin{cases} 4, \text{ se } x \text{ e } y \text{ têm mesma paridade} \\ 2 + 2(-1)^p, \text{ se } x \text{ é par e } y \text{ é ímpar} \\ 2 - 2(-1)^p, \text{ se } x \text{ é ímpar } y \text{ é par.} \end{cases}$$

Resumindo $\varphi(x, y, p) \neq 0$ apenas para: p par com x par e y ímpar; p ímpar com x ímpar e y par; e para todos p se x e y tem mesma paridade. Em todos estes casos $\varphi(x, y, p) = 4$.

O próximo lema é importante, pois permitirá usar ferramentas do cálculo para avaliar os somatórios.

Lema 3.1.3. *Considerando os seguintes somatórios como polinômios em n:*

(i) O termo líder em n de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^k$ é $\frac{n^{k+1}}{k+1} = \displaystyle\int_0^n i^k di$;

(ii) O termo líder de $\displaystyle\sum_{i=1,\, i \text{ par}}^{2n} i^k$ é $\frac{(2n)^{k+1}}{2(k+1)} = 2^{-1}\displaystyle\int_0^{2n} i^k di$;

(iii) O termo líder de $\displaystyle\sum_{i=1,\, i \text{ ímpar}}^{2n+1} i^k$ é $\frac{(2n+1)^{k+1}}{2(k+1)} = 2^{-1}\displaystyle\int_0^{2n+1} i^k di$.

Demonstração. A prova destes fatos é elementar. A título de ilustração provaremos o item (i) indutivamente. Para o passo 0 claramente $\sum_{i=1}^{n} i^0 = n$. O passo indutivo segue de

$$n^{k+1} = \sum_{i=1}^{n} i^{k+1} - (i-1)^{k+1} = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} (-1)^{k+1-j} i^j = \sum_{i=1}^{n} (k+1) i^k + \dots ,$$

pois os termos omitidos em $\dots$ possuem grau menor ou igual a k pela indução. $\square$

A tabela abaixo lista os valores de φ que precisaremos considerar, para cada valor de x, y e j:

$y \backslash x$	0	1	2
$-4-j$	ρ	δ	ρ
$-3-j$	δ	ρ	δ
$-2-j$	ρ	δ	ρ
$-1-j$	δ	ρ	δ

,

em que

$$\rho(j) = \rho = \begin{cases} 1, \text{ se } j \text{ é par} \\ 2^{-1}, \text{ se } j \text{ é ímpar} \end{cases}$$

e

$$\delta(j) = \delta = \begin{cases} 2^{-1}, \text{ se } j \text{ é par} \\ 1, \text{ se } j \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Notemos que $(\rho+\delta)(j)=\frac{3}{2}$.

Ponha $b_{x,y}=R-2N+b'_{x,y}$ e $a_{x,y}=\frac{R-N}{2}+a'_{x,y}$ para os limites superiores e inferiores (que ainda dependem de j) que precisaremos ao usar o Lema 3.1.3. Lembramos ainda que estamos mantendo a notação da equação (3.1.3). Então:

$$\begin{aligned}
&\sum_{x=0}^{2}\sum_{y=-4-j}^{-1-j}\sum_{p=(R-N)/2+\lceil(x-y)/2\rceil}^{R-2N+x-2y}\Big(f(R+x+3j+3,N+y+j,p+j)\\
&-g(R+x+3j,N+y+j,p+j)\Big)\varphi(x,y,p)\simeq_2\\
\simeq_2 & 4\Bigg(\rho\int_{a_{0,-4-j}}^{b_{0,-4-j}}+\delta\int_{a_{1,-4-j}}^{b_{1,-4-j}}+\rho\int_{a_{2,-4-j}}^{b_{2,-4-j}}+\delta\int_{a_{0,-3-j}}^{b_{0,-3-j}}+\rho\int_{a_{1,-3-j}}^{b_{1,-3-j}}\\
&+\delta\int_{a_{2,-3-j}}^{b_{2,-3-j}}+\rho\int_{a_{0,-2-j}}^{b_{0,-2-j}}+\delta\int_{a_{1,-2-j}}^{b_{1,-2-j}}+\rho\int_{a_{2,-2-j}}^{b_{2,-2-j}}\\
&+\delta\int_{a_{0,-1-j}}^{b_{0,-1-j}}+\rho\int_{a_{1,-1-j}}^{b_{1,-1-j}}+\delta\int_{a_{2,-1-j}}^{b_{2,-1-j}}dp\Bigg)2z\left(\frac{3}{a}-\frac{3}{b}+\frac{k}{d}-\frac{k}{e}\right)\simeq_2\\
\simeq_2 & 4\cdot 6(\rho+\delta)\int_{\frac{R-N}{2}}^{R-2N}2z\left(\frac{3}{a}-\frac{3}{b}+\frac{k}{d}-\frac{k}{e}\right)dp\\
= & 9\cdot 8\int_{\frac{R-N}{2}}^{R-2N}z\left(\frac{3}{a}-\frac{3}{b}+\frac{k}{d}-\frac{k}{e}\right)dp.
\end{aligned}$$

Na passagem acima descartamos os termos $b'_{x,y}$ e $a'_{x,y}$ nos limites das integrais, visto que estamos interessados no termo líder, ou seja, no termo de maior grau total em R e N.

Agora usando o Lema 3.1.2 para substituir o somatório em n por uma integral e realizando a mudança de variáveis $4n=N=r\cdot u$, $p=r\cdot v$. Lembre que $R=12r$ e $z\,(3/a-3/b+k/d-k/e)$ é homogêneo de grau total $3k+3$:

$$\begin{aligned}
&9\cdot 8\cdot\sum_{j=0}^{3}\sum_{n=1}^{r}\int_{\frac{R-N}{2}}^{R-2N}z\left(\frac{3}{a}-\frac{3}{b}+\frac{k}{d}-\frac{k}{e}\right)dp\simeq_1\\
\simeq_1 & 9\cdot 8r^{3k+5}\int_0^4\int_{\frac{12-u}{2}}^{12-2u}z_0\left(\frac{3}{a_0}-\frac{3}{b_0}+\frac{k}{d_0}-\frac{k}{e_0}\right)dvdu,
\end{aligned}$$

onde $a_0=(12-2u-v)$, $b_0=2v-12+u$, $d_0=12-u-v$, $e_0=v$ e $z_0=a_0^2b_0^2u^kd_0^ke_0^k$.

Mas

$$\int_0^4\int_{\frac{12-u}{2}}^{12-2u}z_0(\frac{k}{d_0}-\frac{k}{e_0})dvdu\geqslant 0,$$

visto que

$$k/d_0-k/e_0=k(v-(12-u-v))/(d_0e_0)=k(2v-12+u)(d_0e_0)=kb_0/(d_0e_0)$$

e todos os fatores de z_0 são não negativos na região

$$\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\mid 0\leqslant u\leqslant 4,\frac{12-u}{2}\leqslant v\leqslant 12-2u\}.$$

Agora mostraremos que a integral restante é positiva. Deste modo, novamente pelo Lema 3.1.3, a contribuição da primeira parcela I para o comportamento assintótico da função de crescimento será da ordem $3k+5+1$.

$$\begin{aligned}
&\int_0^4 \int_{\frac{12-u}{2}}^{12-2u} z_0(3/a_0 - 3/b_0) dv du = 9 \int_0^4 \int_{\frac{12-u}{2}}^{12-2u} z_0\Big((v-8+u/(a_0b_0)\Big) dv du \\
\geqslant & 9 \int_0^4 \int_{\frac{12-u}{2}}^{10-\frac{3u}{2}} a_0 b_0 u^k d_0^k e_0^k (v-8+u) dv du \\
\geqslant & 9 \cdot 8^k \int_0^4 \int_{\frac{12-u}{2}}^{10-\frac{3u}{2}} a_0 b_0 u^k (v-8+u) dv du \\
= & 9 \cdot 8^k \int_0^4 \int_{-2+\frac{u}{2}}^{2-\frac{u}{2}} (4-u-V)(2V+4-u) u^k V dV du \\
= & \frac{3}{4} 8^k \int_0^4 (4-u)^4 u^k du \geqslant \frac{3}{4} 8^k \int_1^3 (4-u)^4 u^k du \geqslant \frac{3}{2} 8^k > 0,
\end{aligned}$$

pois todos os fatores são não negativos na região

$$\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant u \leqslant 4, 10 - 3u/2 \leqslant v \leqslant 12 - 2u\}.$$

Observamos que na passagem acima usamos $d_0 = (12-u-v) \geqslant 2$ e $e_0 = v \geqslant 4$. Fizemos a mudança de variáveis $V = v - 8 + u$. Por fim usamos que $(4-u)^4$ e $u^k \geqslant 0$ para $0 \leqslant u \leqslant 1$ ou $3 \leqslant u \leqslant 4$, e $(4-u)$, $u \geqslant 1$ quando $1 \leqslant u \leqslant 3$.

Portanto concluímos que a parcela I na função de crescimento se comporta assintoticamente como o polinômio w^{3k+6}.

3.1.2 Demais parcelas

Para podermos concluir que o comportamento assintótico da função de crescimento da álgebra relativamente livre de posto m na variedade determinada pela álgebra de Lie das matrizes 2×2 com traço zero é da ordem $3k+6$, ainda precisamos provar que a ordem da contribuição das demais parcelas

$$II = (1/2)\Big((1+t)^{-m} - (1-t)^{-m}\Big) \qquad \text{e} \qquad III = mt$$

é (estritamente) menor que $3k+6$.

Trabalhando com II e escrevendo como séries de potências (usando Lema 3.1.1), obtemos

$$II = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{-(1-(-1)^r)}{2} \binom{r+m-1}{m-1} t^r = -\sum_{r=0}^{\infty} \binom{2r+1+m-1}{m-1} t^{2r+1}. \tag{3.1.4}$$

Portanto considerando o somatório em r até $6w+6$ para compararmos com o comportamento da primeira parcela I (lembre que $S = 12w+11$, assim $2 \cdot (6w+6)+1 = S+2$ e o coeficiente de t^{S+3} é zero em II), temos que

$$-\sum_{r=0}^{6w+6} \binom{2r+1+m-1}{m-1}$$

comporta-se assintoticamente como $w^{k+3} = w^m$. Uma vez que $3k + 6 > k + 3$ para $k > -2$, a parcela II não influencia o comportamento assintótico da função de crescimento, frente a parcela I.

O último somando

$$III = mt$$

claramente não influencia a ordem da função de crescimento.

Seja $d_m(n)$ a função de crescimento de R_m. Pelo que provamos $d_m(S + 3) = d_m(12w + 14)$ é um polinômio de grau $3k + 6$ em w, com coeficiente líder positivo. Como a função d_m é não-decrescente e positiva, segue pela Proposição 2.2.4 que d_m e $h(w) = d_m(12w + 14)$ possuem o mesmo comportamento assintótico. Portanto

$$\limsup \log_w d_m(w) = \limsup \log_w h(w) = 3k + 6.$$

Mas $3k + 6 = 3(m - 1)$, e assim temos o seguinte teorema.

Teorema 3.1.4. *Seja K corpo com* $\operatorname{char}(K) = 0$. *A dimensão de Gelfand-Kirillov da álgebra relativamente livre de posto m na variedade das álgebras de Lie determinada por $sl_2(K)$ é*

$$\operatorname{GKdim}(R_m(sl_2(K))) = 3(m - 1).$$

Na verdade, nossa demonstração vale apenas para $m \geqslant 3$, porque a expressão θ calculada em [17] é válida apenas neste caso. Entretanto o caso $m = 2$ foi tratado em [4]. Neste artigo é provado que a série de Hilbert para posto 2 é

$$H(R_2(sl_2(K), t) = 2t + (2^{-1} + t) \sum_{k>1} k(k + 1))t^{2k} = 2t + (1 + 2t)t^2(1 - t^2)^{-3},$$

donde segue facilmente que a função de crescimento d_2 satisfaz

$$d_2(2k + 1) = 2 + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{k} (i^2 + i) = 2 + \frac{k(k + 1)(k + 2)}{2}$$

e deste modo $\operatorname{GKdim}(R_2(sl_2(K))) = 3$.

Além disso, o caso $m = 1$ é trivial, já que $R_1(sl_2(K))$ é abeliana (comutativa) de dimensão 1, e assim sua dimensão de Gelfand-Kirillov é 0.

Agora trataremos do caso em que K é infinito e $\operatorname{char}(K) > 2$. Em [56, Proposição 2.1] é exibida uma base homogênea para a álgebra relativamente livre de $sl_2(K)$, que não depende da característica do corpo. Deste modo a série de Hilbert neste caso é a mesma para corpos de característica zero. Portanto vale o seguinte resultado:

Teorema 3.1.5. *Seja K corpo infinito com* $\operatorname{char}(K) \neq 2$. *A dimensão de Gelfand-Kirillov da álgebra relativamente livre de posto m na variedade das álgebras de Lie determinada por $sl_2(K)$ é*

$$\operatorname{GKdim}(R_m(sl_2(K))) = 3(m - 1).$$

3.2 Para $R_m(C_n, V_n)$

Nesta seção calcularemos a dimensão de Gelfand-Kirillov de $R_m(C_n, V_n) = \frac{K\langle X_m\rangle}{K\langle X_m\rangle \cap T(C_n,V_n)}$ a álgebra "relativamente livre" de posto m determinada pelas identidades fracas do par (C_n, V_n) (veja Observação 3.2.1 abaixo), em que V_n é um espaço vetorial n-dimensional e C_n é a respectiva álgebra de Clifford considerando uma forma bilinear não-degenerada e simétrica $\langle\, .\, ,\, .\,\rangle$ (veja Exemplo 1.1.26). Consideramos ainda, abusando da notação, que n pode ser ∞ e deste modo V_∞ é um espaço vetorial com base enumerável e C_∞ é a respectiva álgebra de Clifford.

Observação 3.2.1. Esta álgebra $R_m(C_n, V_n)$ não é exatamente relativamente livre, pois $T(C_n, V_n)$ não é um T-ideal. Mas pode ser vista como relativamente livre considerando pares algébricos ((A, S) é um par algébrico se A é uma álgebra associativa e S é um subespaço que gera A). Uma variedade de pares algébricos gerada por um par algébrico (A, S) é uma classe de pares (A', S') satisfazendo todas as identidades fracas $T(A, S)$, isto é polinômios $f \in K\langle X\rangle$ que se anulam em toda avaliação por elementos de S. E nesta variedade pode-se mostrar que o objeto livre, livremente gerado por X, é o par $(R(A, S), \overline{\operatorname{span} X})$ em que $R(A, S) = \frac{K\langle X\rangle}{T(A,S)}$ e $\overline{\operatorname{span} X}$ é a imagem de $\operatorname{span} X$ através do isomorfismo canônico que leva $K\langle X\rangle$ em $R(A, S)$.

A técnica será muito semelhante à da seção anterior, usaremos a descrição da série de Hilbert e calcularemos a GK-dimensão a partir da análise do comportamento assintótico de uma expressão dessa série. Considerando $\operatorname{char}(K) = 0$, em [20] os autores obtiveram a seguinte expressão para a série de Hilbert desta álgebra:

$$H_m(t) = H(R_m(C_n, V_n), t) = \sum_{r\geqslant 0} \sum_{\substack{\lambda\vdash r\\ \lambda_{m+1}=0\\ \lambda_{n+1}=0}} \dim N_m(\lambda) t^r. \tag{3.2.1}$$

Para $n = \infty$ basta retirar a condição $\lambda_{n+1} = 0$ no somatório. Aproveitamos para lembrar que

$$\dim N_m(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \prod_{\substack{i,j\in I_m\\ i<j}} \frac{j - i + \lambda_i - \lambda_j}{j - i} = \prod_{\substack{i,j\in I_m\\ i<j}} (j - i + \lambda_i - \lambda_j) \cdot \left(\prod_{i=1}^{m-1} i!\right)^{-1}.$$

3.2.1 Caso $n \geqslant m \geqslant 2$ ou $n = \infty$ e $m \geqslant 2$

Começamos descrevendo o somatório na equação (3.2.1) de forma iterada. Para $m \geqslant 2$ e $r \in \mathbb{N}$ é fácil ver que os seguintes conjuntos

$$\left\{(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{N}^m \mid 0 \leqslant \lambda_m \leqslant \cdots \leqslant \lambda_1 \text{ e } \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = r\right\}$$

e

$$\left\{(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{N}^m \mid \lambda_{j+1} \leqslant \lambda_j \leqslant \left\lfloor \frac{r - \sum_{i=j+1}^{m} \lambda_i}{j} \right\rfloor \text{ para } j \geqslant 3 \text{ e} \right.$$
$$\left. \left\lceil \frac{r - \sum_{i=3}^{m} \lambda_i}{2} \right\rceil \leqslant \lambda_1 \leqslant r - \lambda_3 - \sum_{i=3}^{m} \lambda_i, \text{ com } (\lambda_2 = r - \lambda_1 - \sum_{i=3}^{m} \lambda_i)\right\}$$

coincidem. Aqui estamos usando que $\lambda_{m+1} = 0$ e $\sum\limits_{i=a}^{m} f(i) = 0$ para $a > m$.

Fixemos $M = \left(\prod_{i=1}^{m-1} i!\right)^{-1}$. Assim, precisaremos analisar o comportamento assintótico de

$$M \sum_{r=0}^{w} \sum_{\lambda_m=0}^{\left\lfloor \frac{r}{m} \right\rfloor} \sum_{\lambda_{m-1}=\lambda_m}^{\left\lfloor \frac{r-\lambda_m}{m-1} \right\rfloor} \cdots \sum_{\lambda_3=\lambda_4}^{\left\lfloor \frac{r-\sum_{i=4}^{m}\lambda_i}{3} \right\rfloor} \sum_{\lambda_1=\left\lceil \frac{r-\sum_{i=3}^{m}\lambda_i}{2} \right\rceil}^{r-\lambda_3-\sum_{i=3}^{m}\lambda_i} \prod_{\substack{i,j\in I_m\\ i<j}} (j - i + \lambda_i - \lambda_j).$$

Usando o Lema 3.1.3, podemos considerar apenas o termo líder da expressão acima, caso o mesmo seja não nulo. Desta forma podemos substituir os somatórios por integrais, e usar o termo líder em cada fator. Deste modo, sem alterar o termo líder obtemos:

$$M \int_0^{w} \int_0^{\left\lfloor \frac{r}{m} \right\rfloor} \int_{\lambda_m}^{\left\lfloor \frac{r-\lambda_m}{m-1} \right\rfloor} \cdots \int_{\lambda_4}^{\left\lfloor \frac{r-\sum_{i=4}^{m}\lambda_i}{3} \right\rfloor} \int_{\left\lceil \frac{r-\sum_{i=3}^{m}\lambda_i}{2} \right\rceil}^{r-\lambda_3-\sum_{i=3}^{m}\lambda_i} \prod_{\substack{i,j\in I_m\\ i<j}} (\lambda_i - \lambda_j) d\lambda_1 d\lambda_3 \cdots d\lambda_{m-1} d\lambda_m dr.$$

Observação 3.2.2. Como $\lfloor a/b \rfloor = x$, com $x \leqslant a/b < x + 1$, podemos escrever $\lfloor a/b \rfloor = a/b - c/b$, com $0 \leqslant c = a - bn < b$. Analogamente $\lceil a/2 \rceil = a/2 + c/2$ com $c = 0$ ou $c = 1$. Uma vez que estamos considerando apenas o termo líder do polinômio, as integrais podem ser consideradas com os limites de integração desprezando-se os símbolos $\lfloor . \rfloor$ e $\lceil . \rceil$.

Assim, considerando a observação acima nossa expressão fica

$$M \int_0^{w} \int_0^{\frac{r}{m}} \int_{\lambda_m}^{\frac{r-\lambda_m}{m-1}} \cdots \int_{\lambda_4}^{\frac{r-\sum_{i=4}^{m}\lambda_i}{3}} \int_{\frac{r-\sum_{i=3}^{m}\lambda_i}{2}}^{r-\lambda_3-\sum_{i=3}^{m}\lambda_i} \prod_{\substack{i,j\in I_m\\ i<j}} (\lambda_i - \lambda_j) d\lambda_1 d\lambda_3 \cdots d\lambda_{m-1} d\lambda_m dr.$$

Agora, realizando a mudança de variáveis $\lambda_1 = r\mu_1$, $\lambda_3 = r\mu_3, \ldots, \lambda_m = r\mu_m$ (donde segue que $\lambda_2 = r\mu_2$), obtemos

$$M \int_0^{w} r^{\frac{(m+1)m}{2}-1} \int_0^{\frac{1}{m}} \int_{\mu_m}^{\frac{1-\mu_m}{m-1}} \cdots \int_{\mu_4}^{\frac{1-\sum_{i=4}^{m}\mu_i}{3}} \int_{\frac{1-\sum_{i=3}^{m}\mu_i}{2}}^{1-\mu_3-\sum_{i=3}^{m}\mu_i} \prod_{\substack{i,j\in I_m\\ i<j}} (\mu_i - \mu_j) d\mu_1 d\mu_3 \cdots d\mu_{m-1} d\mu_m dr =$$

$$= 2M \frac{w^{\frac{(m+1)m}{2}}}{(m+1)m} \int_0^{\frac{1}{m}} \int_{\mu_m}^{\frac{1-\mu_m}{m-1}} \cdots \int_{\mu_4}^{\frac{1-\sum_{i=4}^{m}\mu_i}{3}} \int_{\frac{1-\sum_{i=3}^{m}\mu_i}{2}}^{1-\mu_3-\sum_{i=3}^{m}\mu_i} \prod_{\substack{i,j\in I_m\\ i<j}} (\mu_i - \mu_j) d\mu_1 d\mu_3 \cdots d\mu_{m-1} d\mu_m. \quad (3.2.2)$$

Enfim resta mostrar que a integral na expressão (3.2.2) é positiva. Diante deste fato teremos provado que a função de crescimento desta álgebra se comporta assintoticamente como $w^{\frac{(m+1)m}{2}}$ e então sua dimensão de Gelfand-Kirillov será $\frac{(m+1)m}{2}$.

Claramente na região de integração temos $\prod_{\substack{i,j\in I_m\\ i<j}}(\mu_i-\mu_j)\geqslant 0$, pois cada fator é não negativo, já que $\mu_1\geqslant\cdots\geqslant\mu_m\geqslant 0$. Os pontos do bordo desta região satisfazem $\mu_i=\mu_{i+1}$ para algum i (lembre que $\lambda_{m+1}=\mu_{m+1}=0$), além de $\sum_{i=1}^m\mu_i=1$.

No entanto considerando o ponto $\mu'=(\mu'_1,\ldots,\mu'_m)$ com $\mu'_i=\frac{2(m+1-i)}{m(m+1)}$ ele é interior a região de integração, pois $\mu'_i-\mu'_j=\frac{2(j-i)}{m(m+1)}>0$ para $i<j$ e $\sum_{i=1}^m\mu'_i=1$. Logo $\prod_{\substack{i,j\in I_m\\ i<j}}(\mu'_i-\mu'_j)>0$ e pela continuidade, a integral na expressão (3.2.2) é positiva.

Ainda podemos considerar $m=1$. Neste caso $R_1(C_n,V_n)$ claramente é isomorfa a álgebra de polinômios em uma variável $K[x]$ e assim possui GK-dimensão 1. A demonstração com o abuso de notação $n=\infty$ é exatamente a mesma.

Finalizamos esta subseção com o enunciado do resultado provado.

Teorema 3.2.3. *Seja K corpo com* $\mathrm{char}(K)=0$. *Então para $n\geqslant m$:*

$$\mathrm{GKdim}\,(R_m(C_n,V_n))=\frac{m(m+1)}{2}.$$

3.2.2 Caso $m>n\geqslant 2$

A demonstração seguirá de forma parecida com a da seção anterior, tomando o cuidado que como $m>n$ e λ é uma partição em não mais que m partes, com $\lambda_{n+1}=0$ (uma consequência de satisfazer a identidade standard s_{n+1}, ver p. 16), teremos que λ possuirá pelo menos $m-n$ zeros.

Mais precisamente, conforme a descrição obtida em [20] temos que a série de Hilbert (ver (3.2.1)) desta álgebra é:

$$H_m(t)=H(R_m(C_n,V_n),t)=\sum_{r\geqslant 0}\sum_{\substack{\lambda\vdash r\\ \lambda_{n+1}=0}}\dim N_m(\lambda)t^r, \tag{3.2.3}$$

e aqui

$$N_m(\lambda)=N_m(\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\underbrace{0,\ldots,0}_{m-n}).$$

Deste modo teremos

$$\dim N_m(\lambda)=\prod_{\substack{i,j\in I_n\\ i<j}}\frac{j-i+\lambda_i-\lambda_j}{j-i}\cdot\prod_{\substack{i\in I_n\\ n<j\leqslant m}}\frac{j-i+\lambda_i-\lambda_j}{j-i}\cdot\prod_{\substack{i,j\in I_m\\ n<i<j}}\frac{j-i+\lambda_i-\lambda_j}{j-i}=$$

$$=\prod_{\substack{i,j\in I_n\\ i<j}}(j-i+\lambda_i-\lambda_j)\cdot\prod_{i=1}^{n}\binom{\lambda_i+m-i}{m-n}\cdot\prod_{i=1}^{n-1}(m-i)^{-i}.$$

Para $n\geqslant 2$ e $r\in\mathbb{N}$ é fácil ver que os seguintes conjuntos

$$\left\{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{N}^n\mid 0\leqslant\lambda_n\leqslant\cdots\leqslant\lambda_1 \text{ e } \sum_{i=1}^n\lambda_i=r\right\}$$

e

$$\Big\{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{N}^n \mid \lambda_{j+1}\leqslant\lambda_j\leqslant\left\lfloor\frac{r-\sum_{i=j+1}^n\lambda_i}{j}\right\rfloor \text{ para } j\geqslant 3 \text{ e}$$
$$\left\lceil\frac{r-\sum_{i=3}^n\lambda_i}{2}\right\rceil\leqslant\lambda_1\leqslant r-\lambda_3-\sum_{i=3}^n\lambda_i,\text{ com } (\lambda_2=r-\lambda_1-\sum_{i=3}^n\lambda_i)\Big\}$$

coincidem. Aqui estamos usando que $\lambda_{n+1}=0$ e $\sum\limits_{i=a}^n f(i)=0$ para $a>n$.

Fixemos $M=\prod_{i=1}^{n-1}(m-i)^{-i}$. Nosso objetivo será analisar o comportamento assintótico de

$$M\sum_{r=0}^{w}\sum_{\lambda_n=0}^{\lfloor\frac{r}{n}\rfloor}\sum_{\lambda_{n-1}=\lambda_n}^{\lfloor\frac{r-\lambda_n}{n-1}\rfloor}\cdots\sum_{\lambda_3=\lambda_4}^{\left\lfloor\frac{r-\sum_{i=4}^n\lambda_i}{3}\right\rfloor}\sum_{\lambda_1=\left\lceil\frac{r-\sum_{i=3}^n\lambda_i}{2}\right\rceil}^{r-\lambda_3-\sum_{i=3}^n\lambda_i}\prod_{\substack{i,j\in I_n\\ i<j}}(j-i+\lambda_i-\lambda_j)\cdot\prod_{i=1}^n\binom{\lambda_i+m-i}{m-n}.$$

Podemos trabalhar apenas o termo líder da expressão acima, caso o mesmo seja não nulo. Usando o Lema 3.1.3 podemos substituir os somatórios por integrais, e usar o termo líder em cada fator. Deste modo, sem alterar o termo líder obtemos:

$$M\int_0^w\int_0^{\lfloor\frac{r}{n}\rfloor}\int_{\lambda_n}^{\lfloor\frac{r-\lambda_n}{n-1}\rfloor}\cdots\int_{\lambda_4}^{\left\lfloor\frac{r-\sum_{i=4}^n\lambda_i}{3}\right\rfloor}\int_{\left\lceil\frac{r-\sum_{i=3}^n\lambda_i}{2}\right\rceil}^{r-\lambda_3-\sum_{i=3}^n\lambda_i}\prod_{\substack{i,j\in I_n\\ i<j}}(\lambda_i-\lambda_j)\cdot\prod_{i=1}^n\lambda_i^{m-n}d\lambda_1 d\lambda_3\cdots d\lambda_{n-1}d\lambda_n dr.$$

Agora repetimos o argumento usado na Observação 3.2.2. Ao desprezar os símbolos $\lfloor\,.\,\rfloor$ e $\lceil\,.\,\rceil$ nos limites de integração não alteramos o termo líder. Consequentemente, a fim de estudar o comportamento assintótico, podemos considerar a expressão

$$M\int_0^w\int_0^{\frac{r}{n}}\int_{\lambda_n}^{\frac{r-\lambda_n}{n-1}}\cdots\int_{\lambda_4}^{\frac{r-\sum_{i=4}^n\lambda_i}{3}}\int_{\frac{r-\sum_{i=3}^n\lambda_i}{2}}^{r-\lambda_3-\sum_{i=3}^n\lambda_i}\prod_{\substack{i,j\in I_n\\ i<j}}(\lambda_i-\lambda_j)\cdot\prod_{i=1}^n\lambda_i^{m-n}d\lambda_1 d\lambda_3\cdots d\lambda_{n-1}d\lambda_n dr.$$

Então, realizando a mudança de variáveis $\lambda_1=r\mu_1$, $\lambda_3=r\mu_3,\ldots,\lambda_n=r\mu_n$ (donde segue que $\lambda_2=r\mu_2$), obtemos

$$M\int_0^w r^{\frac{(2m-n+1)n}{2}-1}\int_0^{\frac{1}{n}}\int_{\mu_n}^{\frac{1-\mu_n}{n-1}}\cdots\int_{\mu_4}^{\frac{1-\sum_{i=4}^n\mu_i}{3}}\int_{\frac{1-\sum_{i=3}^n\mu_i}{2}}^{1-\mu_3-\sum_{i=3}^n\mu_i}\prod_{\substack{i,j\in I_n\\ i<j}}(\mu_i-\mu_j)\cdot\prod_{i=1}^n\mu_i^{m-n}d\mu_1 d\mu_3\cdots d\mu_{n-1}d\mu_n dr=$$

$$=2M\frac{w^{\frac{(2m-n+1)n}{2}}}{(2m-n+1)n}\int_0^{\frac{1}{n}}\int_{\mu_n}^{\frac{1-\mu_n}{n-1}}\cdots\int_{\mu_4}^{\frac{1-\sum_{i=4}^n\mu_i}{3}}\int_{\frac{1-\sum_{i=3}^n\mu_i}{2}}^{1-\mu_3-\sum_{i=3}^n\mu_i}\prod_{\substack{i,j\in I_n\\ i<j}}(\mu_i-\mu_j)\cdot\prod_{i=1}^n\mu_i^{m-n}d\mu_1 d\mu_3\cdots d\mu_{n-1}d\mu_n. \tag{3.2.4}$$

Finalmente resta mostrar que a integral na expressão (3.2.4) é positiva. Diante deste fato teremos provado que a função de crescimento desta álgebra se comporta assintoticamente como $w^{\frac{(2m-n+1)n}{2}}$ e então sua dimensão de Gelfand-Kirillov será $\frac{(2m-n+1)n}{2}$.

Claramente na região de integração temos $\prod_{\substack{i,j\in I_n \\ i<j}}(\mu_i-\mu_j)\prod_{i=1}^{n}\mu_i^{m-n}\geqslant 0$, pois cada fator é não negativo, já que $\mu_1\geqslant\cdots\geqslant\mu_n\geqslant 0$. Os pontos do bordo desta região satisfazem $\mu_i=\mu_{i+1}$ para algum i (lembre que $\lambda_{n+1}=\mu_{n+1}=0$), além de $\sum_{i=1}^{n}\mu_i=1$.

Entretanto considerando o ponto $\mu'=(\mu'_1,\ldots,\mu'_n)$ com $\mu'_i=\frac{2(n+1-i)}{n(n+1)}$ ele é interior a região de integração, pois $\mu'_i-\mu'_j=\frac{2(j-i)}{n(n+1)}>0$ para $i<j$ e $\sum_{i=1}^{n}\mu'_i=1$. Portanto $\prod_{\substack{i,j\in I_m \\ i<j}}(\mu'_i-\mu'_j)>0$ e por argumentos de continuidade, a integral na expressão (3.2.4) é positiva.

Considerando $n=1$. Neste caso é fácil ver que C_1 é comutativa, logo $R_m(C_1,V_1)$ é isomorfa a uma álgebra de polinômios comutativos em m variáveis e assim possui GK-dimensão m.

Com estes argumentos provamos:

Teorema 3.2.4. *Seja K corpo com $\mathrm{char}(K)=0$. Então para $m\geqslant n$:*

$$\mathrm{GKdim}\,(R_m(C_n,V_n))=\frac{(2m-n+1)n}{2}.$$

3.2.3 Em corpos infinitos com $\mathrm{char}(K)>2$

Podemos ainda apresentar de forma mais concisa o que já temos provado nas duas últimas subseções:

Teorema 3.2.5. *Seja K corpo com $\mathrm{char}(K)=0$. Então para $m\in\mathbb{N}$ e $n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, considerando $p=\min\{n,m\}$:*

$$\mathrm{GKdim}\,(R_m(C_n,V_n))=\frac{(2m-p+1)p}{2}.$$

Para tratar do caso em que K é infinito e $\mathrm{char}(K)>2$, observamos que em [33] foi provado que uma base para as identidades fracas de (C_n,V_n) é formada por $[x^2,y]$ e W_{n+1}. A identidade W_{n+1} é multilinear e anti-simétrica em suas n variáveis. Neste mesmo artigo é observado que módulo a identidade $[x^2,y]$, W_{n+1} é um múltiplo da identidade standard s_{n+1} (ver 16). Deste modo as bases são equivalentes e as séries de Hilbert coincidem. Logo podemos concluir:

Teorema 3.2.6. *Seja K corpo infinito com $\mathrm{char}(K)\neq 2$. Então para $m\in\mathbb{N}$ e $n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, considerando $p=\min\{n,m\}$:*

$$\mathrm{GKdim}\,(R_m(C_n,V_n))=\frac{(2m-p+1)p}{2}.$$

Referências

[1] A. A. Albert. "On a certain algebra of quantum mechanics". Em: *Ann. of Math. (2)* 35.1 (1934), pp. 65–73 (ver p. 29).

[2] S. S. Azevedo, M. Fidelis e P. Koshlukov. "Tensor product theorems in positive characteristic". Em: *J. Algebra* 276.2 (2004), pp. 836–845 (ver pp. 4–5, 57).

[3] S. S. Azevedo, M. Fidelis e P. Koshlukov. "Graded identities and PI equivalence of algebras in positive characteristic". Em: *Comm. Algebra* 33.4 (2005), pp. 1011–1022 (ver pp. 4, 57).

[4] Y. A. Bahturin. "Identities of two variables in Lie algebra sl(2, k)". Em: *Trudy Sem. Petrovsk.* 5 (1979), pp. 205–208 (ver p. 67).

[5] A. Y. Belov. "Rationality of Hilbert series with respect to free algebras". Em: *Uspekhi Mat. Nauk* 52.2(314) (1997), pp. 153–154 (ver p. 57).

[6] A. Y. Belov. "On non-Specht varieties". Em: *Fundam. Prikl. Mat.* 5.1 (1999), pp. 47–66 (ver p. 3).

[7] A. Berele. "Homogeneous polynomial identities". Em: *Israel J. Math.* 42.3 (1982), pp. 258–272 (ver p. 53).

[8] A. Berele. "Generic verbally prime PI-algebras and their GK-dimensions". Em: *Comm. Algebra* 21.5 (1993), pp. 1487–1504 (ver pp. 5, 56).

[9] A. Berele. "Rates of growth of p.i. algebras". Em: *Proc. Amer. Math. Soc.* 120.4 (1994), pp. 1047–1048 (ver p. 57).

[10] W. Borho e H. Kraft. "Über die Gelfand-Kirillov-Dimension". Em: *Math. Ann.* 220.1 (1976), pp. 1–24 (ver p. 58).

[11] C. W. Curtis e I. Reiner. *Representation theory of finite groups and associative algebras.* Reimpressão do original de 1962. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2006 (ver p. 36).

[12] O. M. Di Vincenzo. "On the graded identities of $M_{1,1}(E)$". Em: *Israel J. Math.* 80.3 (1992), pp. 323–335 (ver p. 4).

[13] O. M. Di Vincenzo e V. Nardozza. "$\mathbb{Z}_{k+l} \times \mathbb{Z}_2$-graded polynomial identities for $M_{k,l}(E) \otimes E$". Em: *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* 108 (2002), pp. 27–39 (ver p. 4).

[14] O. M. Di Vincenzo e V. Nardozza. "Graded polynomial identities for tensor products by the Grassmann algebra". Em: *Comm. Algebra* 31.3 (2003), pp. 1453–1474 (ver p. 4).

[15] V. S. Drensky. “A minimal basis for identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0”. Em: *Algebra i Logika* 20.3 (1981), pp. 282–290, 361 (ver p. 3).

[16] V. S. Drensky. “Representations of the symmetric group and varieties of linear algebras”. Em: *Mat. Sb. (N.S.)* 115(157).1 (1981), pp. 98–115, 159 (ver p. 44).

[17] V. S. Drensky. “Codimensions of T-ideals and Hilbert series of relatively free algebras”. Em: *J. Algebra* 91.1 (1984), pp. 1–17 (ver pp. 44–45, 60, 67).

[18] V. S. Drensky. *Free algebras and PI-algebras*. Graduate course in algebra. Springer-Verlag Singapore, Singapore, 2000 (ver pp. 5, 16, 20, 29–30, 35–36, 42, 44–45, 48–49, 53).

[19] V. S. Drensky e E. Formanek. *Polynomial identity rings*. Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona. Birkhäuser Verlag, Basel, 2004 (ver pp. 35–36).

[20] V. S. Drensky e P. Koshlukov. “Weak polynomial identities for a vector space with a symmetric bilinear form”. Em: *Mathematics and mathematical education (Bulgarian) (Sunny Beach (Sl"nchev Bryag))*. Publ. House Bulgar. Acad. Sci., Sofia, 1987, pp. 213–219 (ver pp. 68, 70).

[21] V. T. Filippov. “On a variety of Mal’tsev algebras”. Em: *Algebra i Logika* 20.3 (1981), pp. 300–314, 361 (ver p. 59).

[22] E. Formanek. “Central polynomials for matrix rings”. Em: *J. Algebra* 23 (1972), pp. 129–132 (ver p. 2).

[23] G. K. Genov. “Basis for identities of a third-order matrix algebra over a finite field”. Em: *Algebra i Logika* 20.4 (1981), pp. 365–388, 484 (ver p. 3).

[24] G. K. Genov e P. N. Siderov. “A basis for identities of the algebra of fourth-order matrices over a finite field. I”. Em: *Serdica* 8.3 (1982), pp. 313–323 (ver p. 3).

[25] G. K. Genov e P. N. Siderov. “A basis for the identities of the algebra of fourth-order matrices over a finite field. II”. Em: *Serdica* 8.4 (1982), 351–366 (1983) (ver p. 3).

[26] A. V. Grishin. “Examples of T-spaces and T-ideals of characteristic 2 without the finite basis property”. Em: *Fundam. Prikl. Mat.* 5.1 (1999), pp. 101–118 (ver p. 3).

[27] G. James e A. Kerber. *The representation theory of the symmetric group*. Vol. 16. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Com um prefácio de P. M. Cohn, Com uma introdução de Gilbert de B. Robinson. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1981 (ver p. 36).

[28] A. R. Kemer. “Varieties and Z_2-graded algebras”. Em: *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 48.5 (1984), pp. 1042–1059 (ver pp. 55, 57).

[29] A. R. Kemer. “Representability of reduced-free algebras”. Em: *Algebra i Logika* 27.3 (1988), pp. 274–294, 375 (ver p. 57).

[30] A. R. Kemer. *Ideals of identities of associative algebras*. Vol. 87. Translations of Mathematical Monographs. Traduzido do Russo por C. W. Kohls. American Mathematical Society, Providence, RI, 1991 (ver pp. 3, 22).

[31] A. A. Kirillov e M. L. Kontsevich. “The growth of the Lie algebra generated by two generic vector fields on the line”. Em: *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.* 4 (1983), pp. 15–20 (ver p. 58).

[32] A. A. Kirillov, M. L. Kontsevich e A. I. Molev. “Algebras of intermediate growth”. Em: *Akad. Nauk SSSR Inst. Prikl. Mat. Preprint* 39 (1983). Traduzido em Selecta Math. Soviet. **9** (1990), no. 2, 137–153, p. 19 (ver p. 58).

[33] P. Koshlukov. “Finitely based ideals of weak polynomial identities”. Em: *Comm. Algebra* 26.10 (1998), pp. 3335–3359 (ver p. 72).

[34] P. Koshlukov. “Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic $p \neq 2$”. Em: *J. Algebra* 241.1 (2001), pp. 410–434 (ver p. 3).

[35] P. Koshlukov e S. S. de Azevedo. “Graded identities for T-prime algebras over fields of positive characteristic”. Em: *Israel J. Math.* 128 (2002), pp. 157–176 (ver pp. 4, 57).

[36] G. R. Krause e T. H. Lenagan. *Growth of algebras and Gelfand-Kirillov dimension.* Vol. 116. Research Notes in Mathematics. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985 (ver pp. 5, 46–47, 49, 53).

[37] F. S. Macaulay. *The algebraic theory of modular systems.* Cambridge Mathematical Library. Revised reprint of the 1916 original, With an introduction by Paul Roberts. Cambridge University Press, Cambridge, 1994 (ver p. 33).

[38] J. N. Mal’cev e E. N. Kuz’min. “A basis for identities of the algebra of second-order matrices over a finite field”. Em: *Algebra i Logika* 17.1 (1978), pp. 28–32, 121 (ver p. 3).

[39] M.-P. Malliavin-Brameret. “Dimension de Gelfand-Kirillov des algèbres à identités polynomiales”. Em: *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 282.13 (1976), Ai, A679–A681 (ver p. 52).

[40] V. T. Markov. “The Gelfand-Kirillov dimension: nilpotency, representability, non-matrix varieties”. Em: *Tez. Dokl. Sib. Shkola po Mnogoobr. Algebraicheskih Sistem,* Abstracts, Barnaul, Zbl. 685.00002 (1988). (em Russo), pp. 43–45 (ver p. 57).

[41] C. Martinez. “Gel’fand-Kirillov dimension in Jordan algebras”. Em: *Trans. Amer. Math. Soc.* 348.1 (1996), pp. 119–126 (ver p. 58).

[42] C. Martinez e E. Zelmanov. “Jordan algebras of Gel’fand-Kirillov dimension one”. Em: *J. Algebra* 180.1 (1996), pp. 211–238 (ver p. 58).

[43] S. Mota Alves e P. Koshlukov. “Polynomial identities of algebras in positive characteristic”. Em: *J. Algebra* 305.2 (2006), pp. 1149–1165 (ver pp. 5, 57).

[44] V. M. Petrogradsky. “Some type of intermediate growth in Lie algebras”. Em: *Uspekhi Mat. Nauk* 48.5(293) (1993), pp. 181–182 (ver p. 58).

[45] V. M. Petrogradsky. “Intermediate growth in Lie algebras and their enveloping algebras”. Em: *J. Algebra* 179.2 (1996), pp. 459–482 (ver p. 58).

[46] V. M. Petrogradsky. “On Lie algebras with nonintegral q-dimensions”. Em: *Proc. Amer. Math. Soc.* 125.3 (1997), pp. 649–656 (ver pp. 53, 58).

[47] V. M. Petrogradsky. “Growth of finitely generated polynilpotent Lie algebras and groups, generalized partitions, and functions analytic in the unit circle”. Em: *Internat. J. Algebra Comput.* 9.2 (1999), pp. 179–212 (ver p. 58).

[48] C. Procesi. “Computing with 2×2 matrices”. Em: *J. Algebra* 87.2 (1984), pp. 342–359 (ver p. 45).

[49] C. Procesi. “Non-commutative affine rings”. Em: *Atti Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Sez. I (8)* 8 (1967), pp. 237–255 (ver pp. 5, 56).

[50] Y. P. Razmyslov. “A certain problem of Kaplansky”. Em: *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 37 (1973), pp. 483–501 (ver p. 2).

[51] Y. P. Razmyslov. “The existence of a finite basis for the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic zero”. Em: *Algebra i Logika* 12 (1973), pp. 83–113, 121 (ver pp. 3, 59).

[52] Y. P. Razmyslov. *Identities of algebras and their representations*. Vol. 138. Translations of Mathematical Monographs. Traduzido do original de 1989 em Russo por A. M. Shtern. American Mathematical Society, Providence, RI, 1994 (ver p. 56).

[53] A. Regev. “Existence of identities in $A \otimes B$”. Em: *Israel J. Math.* 11 (1972), pp. 131–152 (ver pp. 3–4).

[54] A. Regev. “Tensor products of matrix algebras over the Grassmann algebra”. Em: *J. Algebra* 133.2 (1990), pp. 512–526 (ver pp. 4, 57).

[55] V. V. Shchigolev. “Examples of infinitely based T-ideals”. Em: *Fundam. Prikl. Mat.* 5.1 (1999), pp. 307–312 (ver p. 3).

[56] S. Y. Vasilovsky. “The basis of identities of a three-dimensional simple Lie algebra over an infinite field”. Em: *Algebra i Logika* 28.5 (1989), pp. 534–554, 611 (ver p. 67).

[57] C. T. C. Wall. “Graded Brauer groups”. Em: *J. Reine Angew. Math.* 213 (1963/1964), pp. 187–199 (ver p. 22).

[58] H. Weyl. *The classical groups*. Princeton Landmarks in Mathematics. Their invariants and representations, Fifteenth printing, Princeton Paperbacks. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997 (ver p. 36).

Índice Remissivo