



NELSON GOMES BRASIL JUNIOR

BIJEÇÕES ENVOLVENDO OS NÚMEROS DE CATALAN

CAMPINAS
2014



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

NELSON GOMES BRASIL JUNIOR

BIJEÇÕES ENVOLVENDO OS NÚMEROS DE CATALAN

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: José Plínio de Oliveira Santos

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO NELSON GOMES BRASIL JUNIOR, E ORIENTADA PELO PROF. DR. JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA SANTOS.

Assinatura do Orientador

A handwritten signature in black ink, appearing to read "José Plínio de Oliveira Santos", is written over a horizontal line. The signature is fluid and cursive.

CAMPINAS
2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

B736b Brasil Junior, Nelson Gomes, 1989-
Bijeções envolvendo os números de Catalan / Nelson Gomes Brasil Junior. –
Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: José Plínio de Oliveira Santos.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Problemas de enumeração combinatória. 2. Análise combinatória. 3.
Catalan, Números de. 4. Bijeções. 5. Provas bijetivas. I. Santos, José Plínio de
Oliveira, 1951-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Bijections involving the Catalan numbers

Palavras-chave em inglês:

Combinatorial enumeration problems

Combinatorial analysis

Catalan numbers

Bijections

Bijjective proofs

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

José Plínio de Oliveira Santos [Orientador]

Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita

Robson da Silva

Data de defesa: 09-05-2014

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Dissertação de Mestrado defendida em 09 de maio de 2014 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof.(a). Dr(a). JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA SANTOS



Prof.(a). Dr(a). MARCOS EDUARDO RIBEIRO DO VALLE MESQUITA



Prof.(a). Dr(a). ROBSON DA SILVA

Abstract

In this work, we study the sequence of Catalan Numbers, which appears as a solution of many counting problems involving trees, words, graphs and other combinatorial structures. Nowadays, about 200 different combinatorial interpretations of the Catalan Numbers are known and that motivates the study between them, i. e., the study between sets whose cardinality is given by the terms of this sequence. The main objective of our work is therefore to show bijections between these sets. In the beginning, we make a short historical introduction of the Catalan Numbers and define some ways to represent the sequence. After that, we show some classical bijections between sets counted by the Catalan Numbers. Additionally, we exhibit other bijections between sets involving several combinatorial objects. Altogether, 29 bijections are presented.

Keywords: Combinatorial enumeration problems, Combinatorial analysis, Catalan Numbers, Bijections, Bijective proofs.

Resumo

Neste trabalho, estudamos a sequência dos números de Catalan, uma sequência que aparece como solução de vários problemas de contagem envolvendo árvores, palavras, grafos e outras estruturas combinatórias. Atualmente, são conhecidas cerca de 200 interpretações combinatórias distintas para os números de Catalan, o que motiva o estudo de relações entre estas interpretações, isto é, entre conjuntos cuja cardinalidade é dada pelos termos desta sequência. O principal objetivo do nosso trabalho é, portanto, mostrar bijeções entre esses conjuntos. No início do texto fazemos uma pequena introdução histórica aos números de Catalan, assim como definimos algumas formas de representar a sequência estudada. Depois mostramos algumas bijeções clássicas entre conjuntos contados pela sequência de Catalan. Além disso, apresentamos outras bijeções entre conjuntos envolvendo diversos objetos combinatórios. No total, são exibidas 29 bijeções.

Palavras-chave: Problemas de enumeração combinatória, Análise combinatória, Números de Catalan, Bijeções, Provas bijetivas

Sumário

Dedicatória	ix
Agradecimentos	x
1 Introdução e Motivação	1
2 Números de Catalan	3
2.1 História	3
2.2 Propriedades dos números de Catalan	6
2.2.1 Função Geradora para C_n	7
2.3 Algumas interpretações para os números de Catalan	9
2.3.1 Triangulações distintas de um $(n + 2)$ -ágono	10
2.3.2 Caminhos reticulados de $(0, 0)$ a (n, n) que não cruzam a reta $x = y$	11
2.3.3 Provas combinatórias	15
3 Bijeções (I)	19
3.1 Parêntesis	19
3.2 Árvores binárias planas	21
3.3 Agrupamento de parêntesis	23
3.4 Árvores Binárias com n vértices	26
3.5 Árvores Planas com $n + 1$ vértices	27
3.6 Árvores Padrão	29
3.7 Pontos conectados por cordas com vértices a esquerda distintos	30
3.8 Pontos sobre uma circunferência por segmentos que não se cruzam	32
3.9 Caminhos de Dyck que não tem picos de tamanho 2	34
3.10 Caminhos de Dyck de tamanho $4n$ com passos para baixo de tamanho 2	36
4 Bijeções (II)	39
4.1 Sequências em que cada termo interno divide a soma de seus vizinhos	39
4.2 Sequências com soma parcial menor do que i	42
4.3 Sequências crescentes com $a_i \leq i$	43
4.4 Sequências crescentes com $1 \leq a_i \leq 2i$	44
4.5 Permutações em um multiconjunto	44
4.6 Permutações de n com restrições	45

4.7	Permutações que evitam o padrão 321	46
4.8	Permutações de $2n + 2$ simétricas e que evitam 123	49
4.9	Pats obtidos da permutação de $[n + 1]$	50
4.10	Pares de composições	52
4.11	Fatorações primitivas	53
4.12	Pares de termos relacionados com uma permutação	55
4.13	Uma sequência construída recursivamente	57
4.14	Matriz $2 \times n$ de inteiros	59
5	Bijeções (III)	60
5.1	Pilha de moedas	60
5.2	Ladrilhamento em forma de escada	61
5.3	Poliminós com perímetro $2n + 2$	63
5.4	Poliminó escada com altura $n + 1$	66
5.5	Benzenóide triangular	67
	Referências	72

Ao meu pai, Sr. Nelson Brasil, que se foi antes que eu concluísse o mestrado.

Agradecimentos

Agradeço a D. Margarida, minha mãe. Guerreira e que não se entregou mesmo com tantas dificuldades. A pessoa que deve estar mais orgulhosa de mim, mesmo não entendendo bem o que estudei ou o que é um mestrado.

À minha irmã, pela companhia.

Aos meus amigos da minha querida cidade de Brazópolis, pelo apoio e amizade durante muitos anos.

Aos professores José Benedito (Dito) e Patrícia, por acreditarem em mim e pela imensa ajuda, e ao (atualmente professor) Rodrigo Lima por ter me incentivado a vir para a Unicamp e pela acolhida nos meus primeiros meses aqui.

Aos meus professores de Brazópolis, pela confiança e por sempre me motivarem, em especial a Sandra, Assunção, Regina, Luzia, Régis, Catarina, Ana Lecy e Élide.

Agradeço também aos amigos que fiz em Campinas, dos mais antigos aos mais recentes, principalmente os que estiveram próximos nos últimos (e difíceis) meses do mestrado.

Aos professores da banca pelas sugestões feitas.

E ao CNPq, pelo apoio financeiro.

1

Introdução e Motivação

A *Combinatória* é uma área da matemática dedicada ao estudo de objetos discretos, isto é, objetos que podem ser descritos por certas regras de construção, mas que sejam finitas. Como exemplos de *estruturas combinatórias* temos as palavras, permutações, árvores, grafos, caminhos reticulados, composições e partições de inteiros, subconjuntos, entre outros [6].

Uma questão interessante que surge no estudo destas estruturas são as maneiras de contar quantos objetos possuem certas propriedades.

Definição 1.0.1. Uma classe combinatória, é um conjunto finito ou enumerável cuja função tamanho é definida satisfazendo as seguintes propriedades

- (i) o tamanho de um elemento é um inteiro não negativo;
- (ii) o número de elementos de qualquer tamanho é finito.

Dada uma classe combinatória \mathcal{A} , chamamos de \mathcal{A}_n o conjunto dos objetos de \mathcal{A} que tenham tamanho n . Por exemplo, defina \mathfrak{S} como a classe das permutações. O tamanho de uma permutação é o número de elementos que a compõe. Então \mathfrak{S}_n é o conjunto das permutações de n elementos.

Definição 1.0.2. Dado um conjunto \mathcal{A}_n em uma classe combinatória, definimos a *cardinalidade* deste conjunto como sendo o número de elementos da classe \mathcal{A} que estão em \mathcal{A}_n .

A notação para cardinalidade são duas barras verticais, $|\cdot|$.

Definição 1.0.3. A *sequência de contagem* de uma classe combinatória é uma sequência de inteiros não negativos A_n , onde

$$A_n = |\mathcal{A}_n|,$$

para todo n , ou seja, A_n é o número de objetos da classe \mathcal{A} que tem tamanho n .

Exemplo 1.0.4. Considere o conjunto \mathcal{W} de palavras binárias, ou seja, sequências formadas apenas por elementos no alfabeto $\mathfrak{A} = \{0, 1\}$.

$$\mathcal{W} := \{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, \dots\},$$

onde ϵ é a palavra vazia. Definimos o tamanho de uma palavra como sendo o número de letras que a compõe. Para cada letra, temos duas possibilidades. Então para uma palavra de tamanho n temos 2^n possibilidades e assim

$$W_n = 2^n.$$

O estudo da contagem dos elementos de um conjunto é chamada de *Combinatória Enumerativa*. Esta é uma área extensa e existem vários livros que tratam de problemas de contagem, desde assuntos mais elementares até problemas em aberto. Como bibliografia sugerida, temos [4, 18, 29, 30]. Neste trabalho, trataremos de uma área específica da combinatória enumerativa, as *provas bijetivas*. O que queremos é mostrar que dois conjuntos de cardinalidade finita A e B possuem a mesma cardinalidade exibindo uma correspondência um-a-um (uma bijeção) entre eles.

Definição 1.0.5. Uma *função* de X para Y é uma tripla ordenada (X, Y, G) , onde G é um subconjunto de $X \times Y$ tal que para cada $x \in X$ existe exatamente um $y \in Y$ com $(x, y) \in G$. Normalmente, denotamos uma função f de X a Y como $f : X \rightarrow Y$, e $f(x) = y$ para representar o par ordenado (x, y) .

Definição 1.0.6. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é uma função *injetiva* se e somente se para todo $x, \tilde{x} \in X$, $x \neq \tilde{x}$ implica $f(x) \neq f(\tilde{x})$.

Definição 1.0.7. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é uma função *sobrejetiva* se e somente se para todo $y \in Y$ existir um $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Definição 1.0.8. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é uma função *bijetiva* se e somente se f for injetiva e sobrejetiva. Podemos dizer também que f é bijetiva se e somente se para todo $y \in Y$ existir um único $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Vamos então exibir classes combinatórias cuja sequência de contagem seja a *Sequência de Catalan*, que é o centro dos nossos estudos. Esta sequência é a entrada **A000108** em [27], e tem como primeiros termos

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, \dots,$$

sendo a sequência com maior número de interpretações nesta referência. Nos próximos capítulos exibiremos bijeções entre conjuntos contados pelos números de Catalan. Começaremos com um resumo das principais propriedades desta sequência.

2

Números de Catalan

Neste capítulo falaremos um pouco sobre a sequência estudada, a sequência dos números de Catalan. O interesse nesta sequência é dado pelo grande número de interpretações combinatórias que ela tem, em diferentes áreas da matemática.

Fizemos um pequeno resumo histórico do surgimento e desenvolvimento do estudo desta sequência, e nos baseamos nos trabalhos de R. Stanley [30], T. Koshy [14], R. Grimaldi [12] e no blog de I. Pak [21]. Outras referências são apresentadas no decorrer do texto.

Apresentaremos a função geradora para os números de Catalan e algumas interpretações combinatórias. Vamos mostrar, usando tanto argumentos algébricos quanto combinatórios a equivalência entre algumas fórmulas para C_n .

2.1 História

No ano de 1751, em uma carta para o matemático Christian Goldbach, Leonard Euler discutiu o seguinte problema:

Dado um polígono convexo de $n \geq 3$ lados. De quantas maneiras distintas podemos ligar as diagonais deste polígono de modo que este seja triangulado e as diagonais não se cruzem?

Um polígono é chamado convexo quando, dado dois pontos A e B que são interiores ao polígono, qualquer ponto do segmento que une A a B também é interior ao polígono.

A idéia é traçar $n - 3$ diagonais no interior de um polígono convexo de n lados, tal que as diagonais não se intersectem e o polígono fique inteiramente dividido em triângulos. O número de maneiras distintas de se fazer isto será denotado por T_n e mostramos, na Figura 2.1, a configuração para os casos de polígonos de $n = 4, 5, 6$ lados.

Na mesma carta, Euler diz ter descoberto um método possível de resolver este problema, porém não demonstra este resultado. Diz, também, que se seu método estivesse correto, os valores para a divisão de um polígono de n lados poderia ser calculado rapidamente. Usando um argumento

indutivo, Euler estabeleceu que

$$T_n = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n - 10)}{(n - 1)!}, \quad n \geq 3,$$

porém não sabia se seu resultado estava correto.

Euler sugeriu o problema da triangulação ao matemático e físico húngaro Johann Andreas von Segner. Euler já sabia o valor de T_n para $n \leq 9$ e enviou tais valores para von Segner, que em 1758 obteve a seguinte relação de recorrência para o problema.

$$T_n = T_2 T_{n-1} + T_3 T_{n-2} + \cdots + T_{n-1} T_2. \quad (2.1)$$

Porém, o resultado, descrito numa carta de von Segner a Euler, não demonstrava o método utilizado. Von Segner apenas usou a recorrência (2.1) para calcular os valores de T_n para n menor do que 20. Porém, devido a alguns erros de aritmética, para alguns valores de n o resultado estava errado. Euler, então, resolveu a recorrência e calculou valores até $n = 25$, mas não se tem notícias de ter dado detalhes para a demonstração deste resultado.

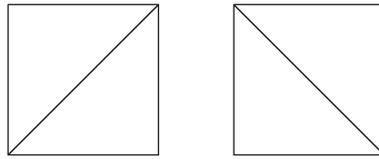
Uma demonstração combinatória para este problema foi dado pelo matemático francês Gabriel Lamé, em uma carta para Joseph Liouville, em 1838, e a prova combinatória será mostrada na Seção 2.3.1. A prova dada por Lamé foi discutida em artigos publicados em 1838/39 pelo matemático belga Eugène Charles Catalan.

Além de estudar e citar o resultado de Lamé, Catalan também escreveu outros artigos que envolviam a mesma sequência, entre eles um artigo em que relaciona a relação de Lamé com um problema algébrico, que consistia em calcular o número de maneiras possíveis de se multiplicar n termos, sendo que só é possível fazer a multiplicação dois a dois. Assim, dado uma lista $x_1 x_2 \cdots x_n$, queremos inserir $n - 1$ pares de parêntesis sendo que dentro de cada par (\cdot) podemos ter

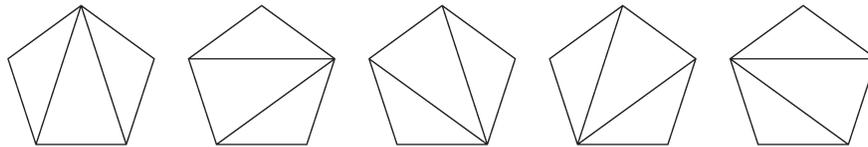
- o produto de dois símbolos, $(x_i x_{i+1})$;
- o produto de um símbolo e uma expressão entre parêntesis, $(x_i A)$ ou $(A x_i)$;
- o produto de duas expressões, cada uma delas entre parêntesis, (AB) .

Catalan resolveu este problema [3], identificando-o com a relação obtida por Lamé. Outro autor que se dedicou ao estudo desta sequência foi O. Rodrigues [24]. No ano de 1901, o matemático alemão E. Netto atribuiu a Catalan a solução do problema dos polígonos, assim como o problema dos parêntesis [19]. O termo “Números de Catalan” surgiu dessas citações. Curiosamente, Catalan contribuiu para o desenvolvimento do estudo da sequência, porém a sua contribuição não foi crucial, apesar de ser atribuído a ele o nome da sequência.

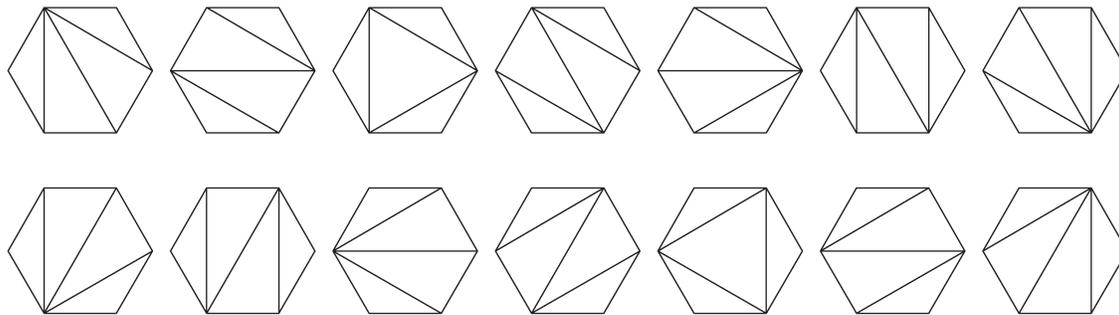
Na década de 1960, descobriu-se que um matemático mongól An-T’u Ming, que viveu no século XVIII, também conhecia a sequência dos números de Catalan. Ele usou a sequência no estudo de séries infinitas, porém não relacionou com nenhum objeto combinatório. Seu trabalho permaneceu oculto por mais de 200 anos, só sendo descoberto quando seus trabalhos foram traduzidos para o inglês. P. J. Larcombe fez um resumo sobre o trabalho deste matemático [16].



(a) $n = 4$



(b) $n = 5$



(c) $n = 6$

Figura 2.1: Triangulação de um polígono com n lados

O matemático Richard P. Stanley mantém em sua página pessoal um adendo ao Exercício 6.19 do segundo volume do livro *Enumerative Combinatorics* [30], totalizando 207 interpretações combinatórias para os números de Catalan (atualizado em 25/05/2013). Existe também uma extensa bibliografia de artigos tratando desta sequência, que foram compilados por H. Gould [11].

O interesse em estudar esta sequência surge justamente do grande número de interpretações, o que nos leva a pensar se não existe uma relação (bijeção) entre os objetos que são contados pelos números de Catalan. Neste trabalho, mostraremos algumas bijeções interessantes entre conjuntos que são contados por C_n .

2.2 Propriedades dos números de Catalan

Agora, vamos mostrar outras maneiras de se representar a Sequência dos números de Catalan. Faremos isto exibindo sua função geradora, relação de recorrência a algumas fórmulas fechadas para C_n .

A relação de recorrência para a sequência T_n é obtida a partir do problema da triangulação. Para obter a recorrência em C_n , usamos que $T_n = C_{n-2}$, e então

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \quad C_0 = 1. \quad (2.2)$$

A partir desta relação de recorrência, podemos encontrar uma função geradora para a sequência. Para isto, vamos definir o que é uma função geradora de uma sequência numérica. As definições a seguir foram baseadas no trabalho [26].

Definição 2.2.1. Uma *série de potências* é uma soma infinita $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ tal que $a_i \in \mathbb{R}$, para todo $i = 0, 1, 2, \dots$ e x uma variável.

A soma de duas séries de potências é ainda uma série de potências. Seus coeficientes são obtidos somando os coeficientes dos termos com a mesma potência de x . Da mesma forma, o produto de duas séries é também uma série de potências. A fórmula para o coeficiente do termo n do produto de duas séries de potência é dado pelo produto do termo i de uma série pelo termo $n - i$ do outro, ou seja

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots) = (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots + \left(\sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}\right)x^n + \dots$$

Definição 2.2.2. Dada uma sequência numérica $f = (f_0, f_1, \dots)$, a *função geradora ordinária* para esta sequência é dada pela série de potência que tem o coeficiente de x^i igual a f_i , para todo $i = 0, 1, \dots$. Além disso, podemos escrever

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \quad (2.3)$$

Seguindo a Definição 2.2.2, vemos que a função geradora

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \dots$$

é uma função geradora para a sequência $a = (1, 1, 1, \dots)$. Sabemos dos cursos de Cálculo que $f(x)$ pode ser escrita como a função

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad (2.4)$$

na região onde $|x| < 1$. Sabemos também que para valores de x fora desta região, $f(x)$ não converge e portanto não define uma função. Diferentemente do contexto de Cálculo, não estamos interessados na região de convergência da função e quase nunca vamos substituir o valor de x . O

que nos interessa aqui são os coeficientes de f na expansão em séries de potências. Então, podemos manipular tais séries e funções sem a preocupação com a convergência. Na literatura, as séries, quando observadas por este ponto de vista, são conhecidas como *série de potências formais*. Um estudo das séries de potências formais é feita por N. Loehr, em [18]. As funções que representam as sequências também podem ser somadas e multiplicadas, gerando novas funções geradoras, do mesmo modo que as sequências.

$$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n + g_n)x^n \quad (2.5)$$

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n f_k g_{n-k} \right) x^n \quad (2.6)$$

2.2.1 Função Geradora para C_n

As funções geradoras são uma ferramenta algébrica importante na resolução de problemas de contagem. Através delas, podemos provar que dois conjuntos são contados pela mesma sequência, mostrando que possuem a mesma função geradora. Elas também ajudam a encontrar uma expressão mais simples para os termos de uma sequência, evitando o uso de um cálculo recursivo.

Vamos então nos dedicar a encontrar a função geradora para a sequência de Catalan. Tal função tem C_n como coeficiente do termo x^n , ou seja

$$c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n. \quad (2.7)$$

Agora, se substituirmos, para cada $n > 1$ a relação de recorrência (2.2) que determina os números de Catalan, teremos

$$c(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k} \right) x^n. \quad (2.8)$$

Note que para $n = 0$ a relação de recorrência não faz sentido e, por isso, tiramos o primeiro termo do somatório anterior. Então, deslocamos em uma unidade o somatório mais externo, de modo que a soma em n comece em zero. Para isto, fazemos a seguinte mudança de variáveis

$$n = m + 1 \implies (n = 1 \implies m = 0);$$

Assim, podemos modificar o somatório, transformando a expressão dada em (2.8) por

$$\begin{aligned} c(x) &= 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^m C_k C_{m-k} \right) x^{m+1} \\ &= 1 + x \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^m C_k C_{m-k} \right) x^m. \end{aligned}$$

E, por (2.6), podemos transformar o somatório duplo em um produto de duas séries de potências. No caso, as duas séries são $c(x)$ e então temos

$$c(x) = 1 + x c^2(x). \quad (2.9)$$

Agora, para encontrar a função $c(x)$, resolvemos a equação de segundo grau em $c(x)$. Obtemos duas soluções, que são

$$c(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}. \quad (2.10)$$

Devemos analisar qual das duas funções encontradas representa a sequência de Catalan. Observe que, pela definição da série, quando $x = 0$ temos $c(0) = 1$. E então para obter a expressão correta a partir de (2.10), precisamos calcular o limite de cada uma das funções por causa da descontinuidade do denominador em $x = 0$. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} = 0.$$

Selecionamos, portanto, o sinal negativo e temos que a função geradora para a sequência dos números de Catalan é dada por

$$c(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}. \quad (2.11)$$

Ao expandir em séries de potências a função $c(x)$ obtida, centrando em $x = 0$ e não importando com a convergência, encontramos uma forma equivalente de escrever a sequência.

A n -ésima derivada da função $f(y) = \sqrt{1 - y}$ aplicada em $y = 0$ é

$$f^{(n)}(0) = -\frac{(1 \cdot 3 \cdots (2n - 3))}{2^n},$$

que pode ser facilmente verificado por indução. A função que queremos expandir em série é uma função composta, dada por $g(x) = f(4x)$. Usando a informação já obtida das derivadas de $f(x)$, podemos encontrar as derivadas da função composta $g(x)$, usando a regra da cadeia. Obtemos assim que $g^{(n)}(x) = 4^n f^{(n)}(4x)$. Então, temos que

$$g^{(n)}(0) = -\frac{4^n (1 \cdot 3 \cdots (2n - 3))}{2^n} = -2^n (1 \cdot 3 \cdots (2n - 3)). \quad (2.12)$$

Para escrever de uma maneira mais compacta a expressão em (2.12), primeiro notamos que dentro do parêntesis temos o produto dos primeiros $n - 1$ números ímpares. Partindo de $(2n - 2)!$, dividindo em $n - 1$ números pares e $n - 1$ números ímpares, recuperamos um múltiplo do produto dos ímpares. Ou seja

$$\begin{aligned} (2n - 2)! &= 1 \cdot 2 \cdots (2n - 3)(2n - 2) \\ &= (1 \cdot 3 \cdots (2n - 3))(2 \cdot 4 \cdots (2n - 2)) \\ &= 2^{n-1} (1 \cdot 3 \cdots (2n - 3))(n - 1)!. \end{aligned}$$

Então, desta forma

$$g^{(n)}(0) = -\frac{2(2n-2)!}{(n-1)!}.$$

A série de potências de $g(x) = f(4x)$ é, portanto

$$\sqrt{1-4x} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(2n-2)!}{n!(n-1)!} x^n,$$

e

$$c(x) = \frac{1-g(x)}{2x} = \frac{1}{2x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(2n-2)!}{n!(n-1)!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} x^{n-1}.$$

Fazendo novamente a mudança de variáveis já proposta anteriormente, temos

$$c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n. \quad (2.13)$$

E associando (2.13) com (2.7), temos que

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}. \quad (2.14)$$

Veja que a forma descrita em (2.14) fornece uma maneira equivalente e direta para o cálculo de C_n , que não depende dos valores anteriores a n para o cálculo.

Uma outra expressão para C_n surge se fizermos a divisão de C_{n+1} por C_n , para $n \geq 1$.

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{(n+1)! n!}{(2n)!} \frac{(2n+2)!}{(n+2)!(n+1)!} = \frac{2(2n+1)}{n+2},$$

e assim

$$C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n, \quad (2.15)$$

que é a fórmula encontrada por Euler. As demonstrações apresentadas, que mostram a equivalência entre as definições, são puramente algébricas. Ainda neste capítulo vamos apresentar a equivalência entre algumas fórmulas para os números de Catalan, mas usando argumentos combinatórios.

2.3 Algumas interpretações para os números de Catalan

Nesta seção, apresentamos duas classes combinatórias cuja sequência de contagem é a sequência dos números de Catalan. Estas interpretações serão usadas como base para a construção das bijeções, ou seja, serão usadas para demonstrar que outros conjuntos são também contados pela mesma sequência.

2.3.1 Triangulações distintas de um $(n + 2)$ -ágono

Queremos contar o número de maneiras distintas de se ligar as diagonais de um polígono com n lados, dividindo-o em triângulos, de maneira que as diagonais não se cruzem. Este foi introduzido anteriormente e a relação de recorrência para a solução é dada em (2.1). Apresentaremos aqui uma prova combinatória para a recorrência. Tal demonstração é devida a Gabriel Lamé, em uma carta a Liouville [15] (uma tradução para o inglês é encontrada no artigo de J. Lodder [17]).

Considere um polígono P com n lados. Enumere seus vértices como a_1, a_2, \dots, a_n em algum sentido (horário, por exemplo) e fixe um dos lados. Na Figura 2.2, o lado $\overline{a_1 a_n}$ foi fixado, e o chamamos de **Base**.

Como queremos dividir o n -ágono por diagonais que não se cruzam, temos que o lado $\overline{a_1 a_n}$ fixado deve pertencer a um único triângulo que compõe a triangulação. De fato, se este lado pertencesse a mais de um triângulo, então as diagonais que formariam os triângulos com este lado deveriam se cruzar em algum ponto no interior do polígono, o que não pode acontecer. Vamos, então, contar quantas triangulações do n -ágono contém o triângulo $\Delta a_1 a_r a_n$, com $r = 2, \dots, n - 1$. Como cada triangulação contém *exatamente* um triângulo cujo lado é $\overline{a_1 a_n}$, ao variar r não contaremos o mesmo objeto mais de uma vez e também não deixamos de contar nenhum objeto.

Procedemos então da seguinte forma: Construimos o triângulo $\Delta a_1 a_r a_n$ para algum valor de r . Caso $r = 2$ ou $r = n - 1$, o que nos sobra é apenas um polígono com $n - 1$ lados. Agora, caso $r = 3, \dots, n - 2$, dividimos o polígono em dois polígonos, sendo um deles com r lados e o outro com $n + 1 - r$ lados representados em cores diferentes na Figura 2.2.

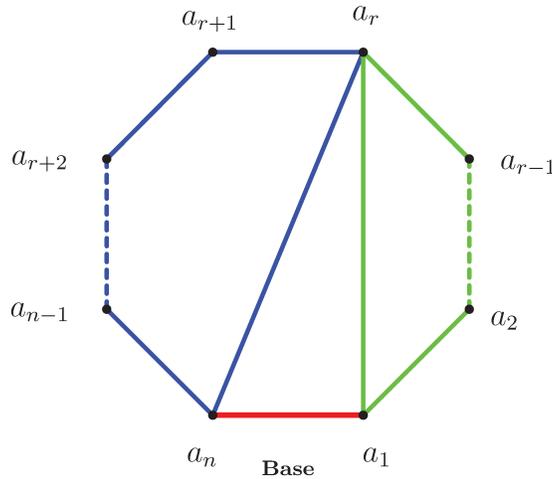


Figura 2.2: Esquema para a triangulação de um polígono com n lados

Temos então T_{n-1} triangulações contendo $\Delta a_1 a_r a_n$ quando $r = 2, n - 1$ e para os outros valores de r podemos contar facilmente, notando que ao fixar uma triangulação do r -ágono, temos T_{n+1-r} triangulações possíveis para o n -ágono. Assim, são $T_r T_{n+1-r}$ divisões possíveis para cada r . Desta

forma, o número total deve ser a soma destes valores. Colocando $T_2 = 1$, recuperamos a relação de recorrência, como queríamos.

Como exemplo, tomamos as $T_6 = 14$ divisões possíveis de um hexágono. Fixamos uma base e variamos o terceiro vértice do triângulo. Assim, para $r = 2$ e $r = 5$ temos $T_5T_2 = 5$ possibilidades, $r = 3$ e $r = 4$ temos $T_4T_3 = 2$ possibilidades. Fazendo a soma destes valores, recuperamos o valor de T_6 . A Figura 2.3 mostra cada uma das 14 divisões possíveis de um hexágono com o triângulo $\triangle a_1a_r a_n$ fixado, para os valores de r .

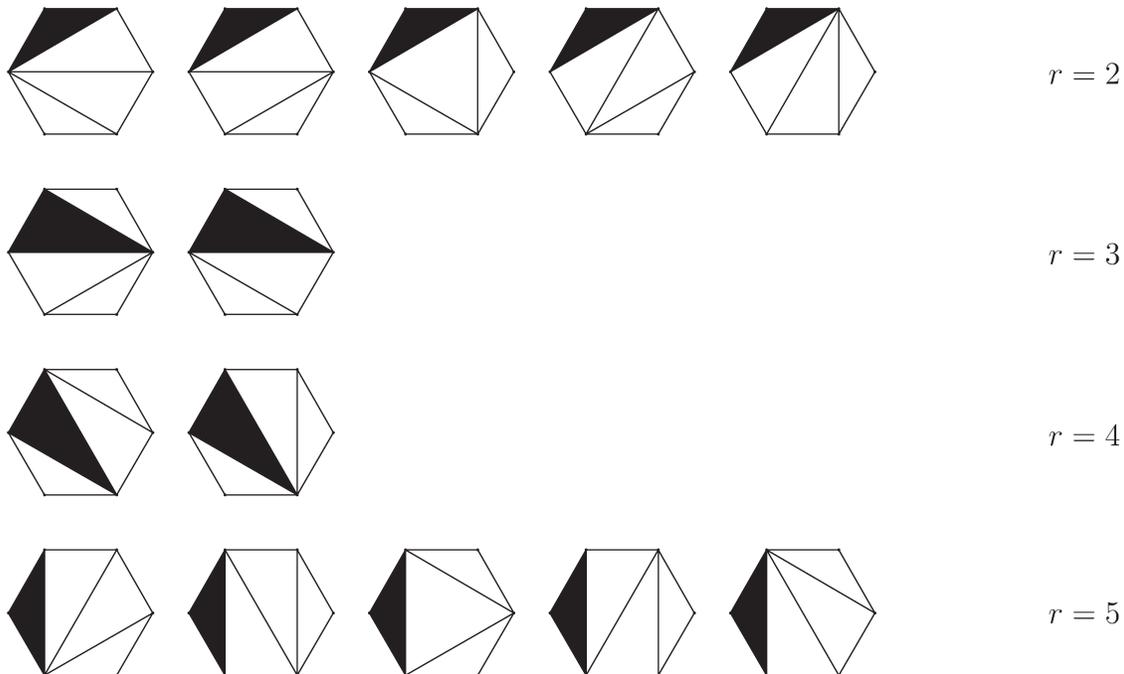


Figura 2.3: Divisões de um hexágono, aplicando a demonstração de Gabriel Lamé

2.3.2 Caminhos reticulados de $(0, 0)$ a (n, n) que não cruzam a reta $x = y$

Para ilustrar uma outra ocorrência dos números de Catalan, analisaremos o problema de contar de quantas maneiras distintas podemos partir do ponto $(0, 0)$ e chegar ao ponto (a, b) , com a e b inteiros não negativos, sendo possível usar apenas passos de comprimento 1 na direção leste ou na direção norte. Ou seja, queremos um caminho com a passos na direção $(1, 0)$ e b passos na direção $(0, 1)$. A escolha dos a (b) passos na direção leste (norte) determina unicamente o caminho, pois escolhidos estes passos, os outros deverão ser, necessariamente, na direção norte (leste). Seja $\mathcal{K}_{(a,b)}$ o conjunto destes caminhos. Desta forma

$$|\mathcal{K}_{(a,b)}| = \binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b}.$$

Vamos então adicionar uma restrição ao problema. Consideremos que o ponto de chegada seja tal que $a \leq b$, e que somente são permitidos caminhos que não cruzem a reta $x = y$. Ou seja, queremos caminhos de $(0, 0)$ a (a, b) que não contenham nenhum ponto abaixo da reta dada. Na Figura 2.4(a) mostramos um caminho permitido, enquanto a Figura 2.4(b) mostra um caminho proibido, dada a restrição. Podemos representar um caminho também como uma sequência \mathcal{C} de pontos $(x_i, y_i) \in \mathbb{Z}^2$, para $i = 0, \dots, a + b$, tal que $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $(x_{a+b}, y_{a+b}) = (a, b)$ e

$$(x_{i+1}, y_{i+1}) = \begin{cases} (x_i, y_i + 1) & \text{ou} \\ (x_i + 1, y_i). \end{cases}$$

O número de caminhos permitidos é obtido se notarmos que o número total de caminhos de $(0, 0)$ a (a, b) existentes pode ser dividido em dois conjuntos disjuntos: os que satisfazem a restrição dada e os que não satisfazem. Logo, se contarmos o número de caminhos proibidos e o subtraímos do número total de caminhos obtemos a cardinalidade do conjunto desejado.

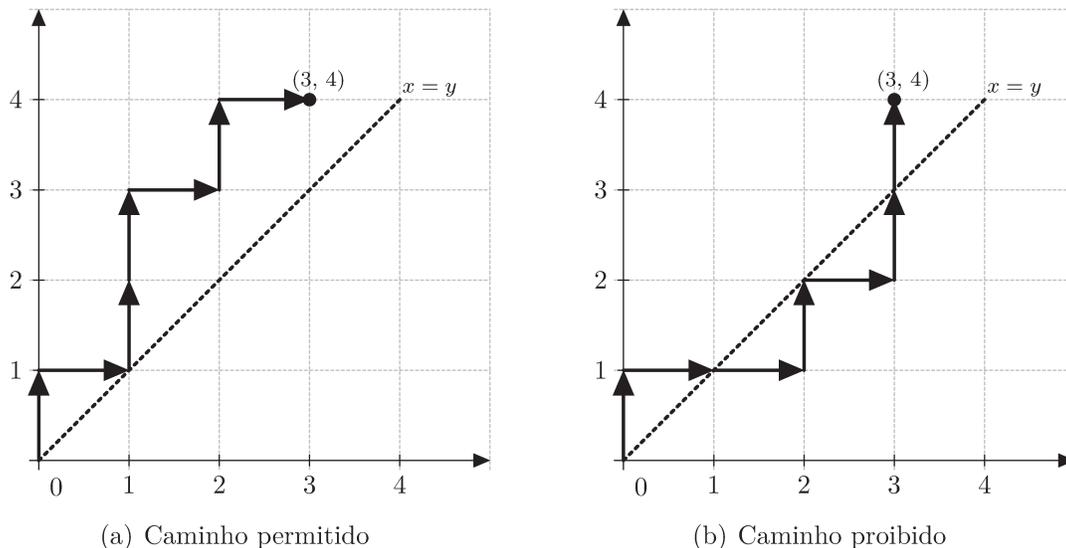


Figura 2.4: Exemplo de dois caminhos de $(0, 0)$ a $(3, 4)$

Seja \mathcal{C} um caminho proibido de $(0, 0)$ a (a, b) . Sabemos que, em algum ponto, ele deve cruzar a reta $x = y$. Portanto, existe um número inteiro positivo \bar{k} , tal que $(\bar{k} + 1, \bar{k}) \in \mathcal{C}$. Sabendo disso, podemos decompor o caminho \mathcal{C} em dois caminhos, \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 , de forma que \mathcal{C}_1 seja o caminho de $(0, 0)$ a $(\bar{k} + 1, \bar{k})$ (e \bar{k} seja o menor inteiro positivo para o qual este ponto esteja no caminho) e \mathcal{C}_2 seja o caminho de $(\bar{k} + 1, \bar{k})$ a (a, b) .

Construímos então um caminho \mathcal{C}' tal que este caminho seja formado pela concatenação do caminho \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}'_2 , este último sendo a reflexão do caminho \mathcal{C}_2 com relação a reta $y = x - 1$. Esta reflexão transforma os passos na direção $(1, 0)$ em passos na direção $(0, 1)$ e vice-versa. Como o caminho \mathcal{C}_2 tem $a - (\bar{k} + 1)$ passos na direção $(1, 0)$ e $b - \bar{k}$ passos na direção $(0, 1)$, o caminho refletido \mathcal{C}'_2 terá $b - \bar{k}$ passos na direção $(1, 0)$ e $a - (\bar{k} + 1)$ passos na direção $(0, 1)$. No fim,

geramos um caminho

$$\mathcal{C}' = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}'_2 = \begin{cases} (k+1) + b - k = b+1 \text{ passos na direção } (1, 0) \text{ e} \\ k + a - (k+1) = a-1 \text{ passos na direção } (0, 1). \end{cases}$$

Ou seja, \mathcal{C}' é um caminho de $(0, 0)$ a $(b+1, a-1)$. Vamos mostrar com um exemplo o que acabamos de fazer. Trataremos o caso onde $a = 3$ e $b = 4$. Escrevemos um caminho de $(0, 0)$ a $(3, 4)$ que cruze a linha $x = y$. Tal caminho é mostrado na Figura 2.5. Podemos, então, identificar as duas partes deste caminho. Na Figura 2.5, \mathcal{C}_1 está representado pelas flechas pretas contínuas (\longrightarrow) enquanto \mathcal{C}_2 está representado pelas flechas pontilhadas ($--\rightarrow$).

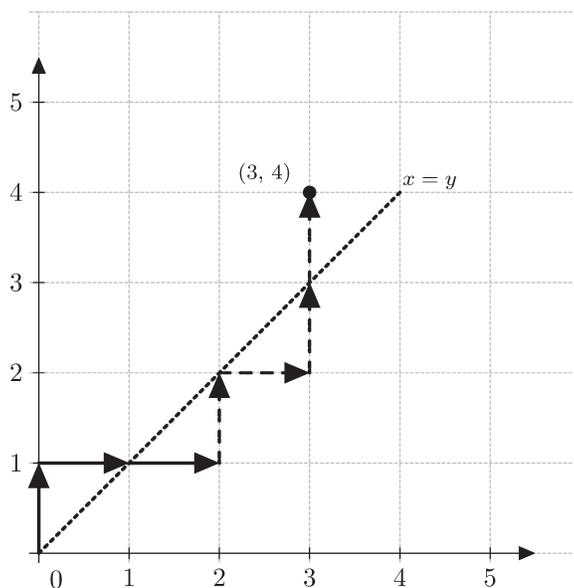


Figura 2.5: Caminho proibido de $(0, 0)$ a $(3, 4)$

Agora, traçamos a reta $y = x - 1$ e refletimos \mathcal{C}_2 , obtendo \mathcal{C}'_2 , representada com as flechas pontilhadas em cor diferente ($--\rightarrow$), conforme vemos na Figura 2.6. O ponto final do caminho construído, que chamamos de \mathcal{C}' , é o ponto $(5, 2) = (b+1, a-1)$.

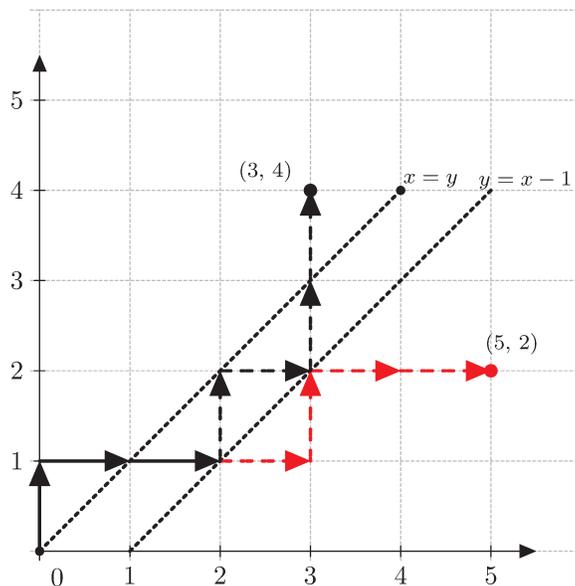


Figura 2.6: Reflexão do caminho da Figura 2.5, gerando o ponto final $(5, 2)$

Queremos mostrar que cada caminho \mathcal{C}' pode ser identificado a exatamente um caminho \mathcal{C} , isto é, que a reflexão dada representa uma transformação bijetora.

Pela construção de \mathcal{C}' a partir de \mathcal{C} , vemos que cada caminho proibido é associado a um caminho \mathcal{C}' . Para mostrar que cada caminho de $(0, 0)$ a $(b + 1, a - 1)$ representa um caminho proibido, veja que todo caminho desta forma deve, obrigatoriamente, passar por algum ponto $(k + 1, k)$, para algum k inteiro positivo. Escolha o menor k tal que isso aconteça. Repetindo o processo (dividir o caminho em dois e refletir usando a reta $y = x - 1$), vamos recuperar um caminho de $(0, 0)$ a (a, b) que é proibido. Veja que, se fizermos a reflexão de \mathcal{C}'_2 no exemplo mostrado na Figura 2.6, recuperamos o caminho original \mathcal{C}_2 , marcado com flechas pontilhadas em preto, na mesma Figura 2.6 ($-->$). É óbvio que caminhos diferentes levam em reflexões diferentes, pois tem algum ponto diferente, que continua distinto após a reflexão.

Assim, cada caminho \mathcal{C}' está unicamente relacionado a um caminho \mathcal{C} e vice-versa, o que demonstra a bijeção. Portanto, se chamamos de $L_{a,b}$ o número de caminhos permitidos, conseguimos

$$\begin{aligned}
 L_{a,b} &= \binom{a+b}{a} - \binom{a+b}{a-1} \\
 &= \frac{(a+b)!}{(a-1)! b!} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b+1} \right)
 \end{aligned}$$

$$L_{a,b} = \frac{b+1-a}{b+1} \binom{a+b}{a}.$$

No caso em que $a = b = n$, temos que o número de caminhos L_n é

$$L_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n},$$

que é a expressão para o n -ésimo número de Catalan.

A Figura 2.7 mostra todos os $C_3 = 5$ caminhos possíveis para $n = 3$.

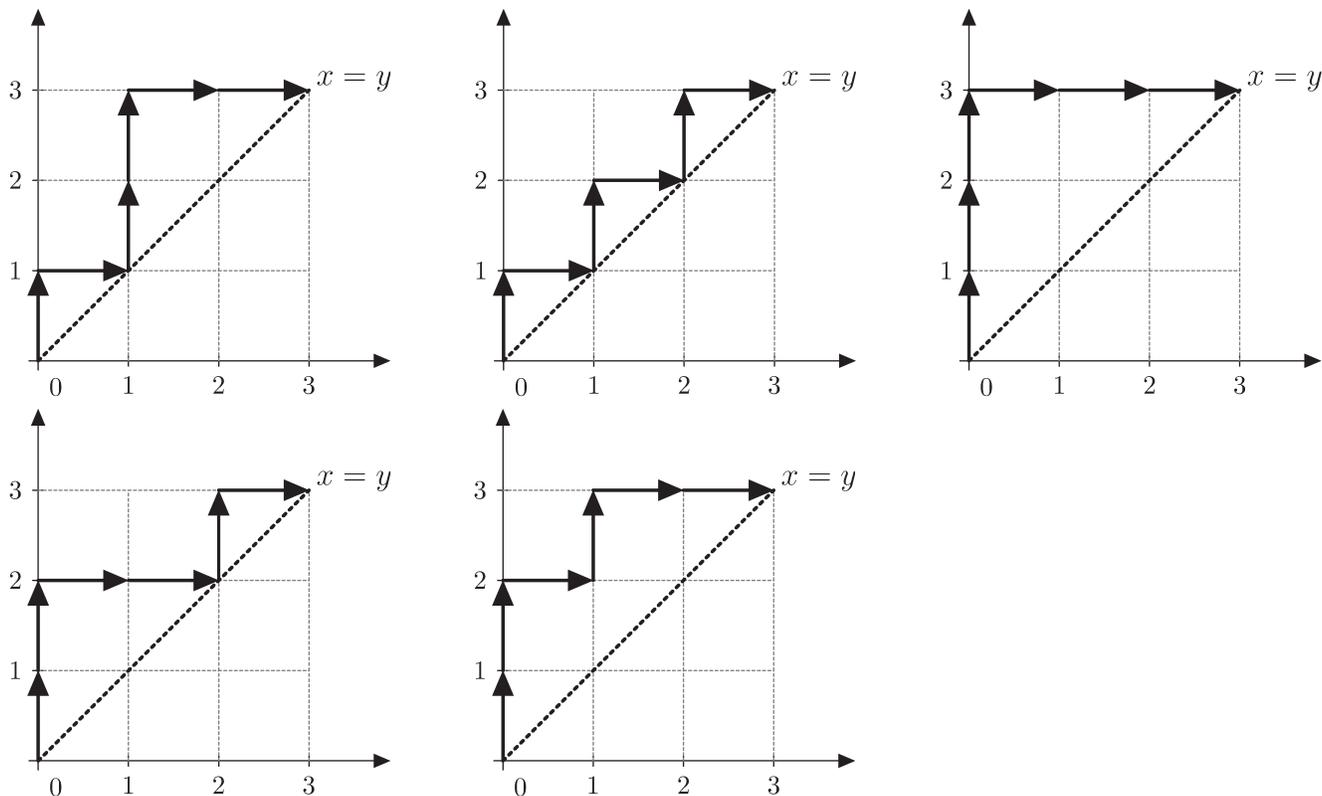


Figura 2.7: Caminhos reticulados de $(0, 0)$ a $(3, 3)$

2.3.3 Provas combinatórias

Esta subseção vai tratar de um tipo de demonstração, que é usada quando queremos mostrar a igualdade de duas identidades trabalhando apenas com argumentos combinatórios. Nossa intenção é aplicar este tipo de demonstração para mostrar a equivalência entre as definições para C_n . Como referência para esta subseção sugerimos o livro de N. Loehr [18].

Considere o problema de provar a identidade $A = B$, onde A e B são fórmulas que podem envolver fatoriais, coeficientes binomiais, recorrências, entre outros. Uma maneira de provar a igualdade é dando uma prova algébrica, como fizemos com as diferentes fórmulas para os números de Catalan. Uma outra maneira, as vezes bem mais elegante, é encontrar uma *prova combinatória*. Tais provas estabelecem a igualdade de duas fórmulas ao exibirmos um conjunto cuja cardinalidade é dada pelas duas expressões. Devemos seguir os seguintes passos

- Defina um conjunto S de objetos;
- Através de algum argumento baseado em contagem, mostre que $|S| = A$;
- Apresente algum argumento diferente para provar que $|S| = B$;
- Conclua que $A = B$.

Exemplo 2.3.1. Queremos mostrar que

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

A prova algébrica para esta relação pode ser dada usando a expansão do binômio $(1+x)^n$, depois substituindo $x = 1$. Estamos interessados na demonstração combinatória para o problema.

Fixe n , um inteiro positivo. Então, considere o conjunto $A = \{1, 2, \dots, n\}$. O número de subconjuntos deste conjunto é dado por 2^n – cada elemento pode estar ou não no subconjunto, dando duas possibilidades para cada i , e portanto o número total de subconjuntos.

Por outro lado, todo subconjunto de A tem cardinalidade $k \leq n$ e então se contarmos o número de subconjuntos de cardinalidade k e depois fizermos a soma sobre k , obtemos o número de subconjuntos de A . Mas sabemos que o número de subconjuntos de A com cardinalidade k é dado por $\binom{n}{k}$ – dos n elementos de A escolhemos k para compor o subconjunto. Assim, somando em k , teremos a igualdade desejada.

Já exibimos provas algébricas para a equivalência entre as expressões (2.2), (2.14) e (2.15). Vamos agora dar provas combinatórias para essa equivalência.

Proposição 2.3.2.

$$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}.$$

Demonstração. O lado esquerdo desta relação foi mostrado na Seção 2.3.2. Para o lado direito, tome um caminho reticulado \mathcal{P} de $(0, 0)$ a (n, n) que não tenha nenhum passo abaixo da reta $x = y$. Seja k o menor inteiro não negativo, entre 1 e n de forma que (k, k) pertença a \mathcal{P} . Daí temos que o caminho \mathcal{P} é composto de dois caminhos reticulados: o caminho \mathcal{P}_1 , de $(0, 0)$ a (k, k) , sendo que só toca na reta $x = y$ em 0 e k e o caminho \mathcal{P}_2 , de (k, k) a (n, n) , que não cruza a reta $x = y$.

- Pelas propriedades do caminho reticulado \mathcal{P}_1 , temos que este caminho deve começar com um passo $(0, 1)$ e terminar com um passo $(1, 0)$. Então, o caminho é determinado pelos passos intermediários, de $(0, 1)$ até $(k-1, k)$. Além disso, temos que k é o menor inteiro positivo tal que $(k, k) \in \mathcal{P}_1$. Logo, o caminho \mathcal{P}_1 é determinado por passos de $(0, 1)$ a $(k-1, k)$ que não

cruzam a reta $y = x + 1$. Para contar quantos caminhos \mathcal{P}_1 existem para um k fixado, vamos fazer a mudança de variáveis

$$\begin{cases} x' = x; \\ y' = y - 1. \end{cases}$$

Com a mudança de variáveis proposta, temos que \mathcal{P}_1 está em bijeção com um caminho de $(0, 0)$ a $(k - 1, k - 1)$, que não passa abaixo da reta $x' = y'$. Portanto, temos que para um dado k , temos C_{k-1} caminhos.

- o O caminho \mathcal{P}_2 também pode ser transformado em um caminho que contamos na Seção 2.3.2, se fizermos a mudança de variáveis

$$\begin{cases} \tilde{x} = x - k; \\ \tilde{y} = y - k. \end{cases}$$

E assim \mathcal{P}_2 se transforma em um caminho reticulado de $(0, 0)$ a $(n - k, n - k)$, que não cruza a reta $x = y$. E para cada k fixado, temos C_{n-k} caminhos.

Então, para cada $k = 1, \dots, n$, temos $C_k C_{n-k}$ caminhos. Fazendo a soma em k e deslocando a soma em uma unidade para a esquerda (trocando m por $k - 1$), temos que o número de caminhos reticulados de $(0, 0)$ a (n, n) é dado pela relação de recorrência que define os números de Catalan, obtendo o resultado desejado.

□

Proposição 2.3.3.

$$\frac{2(2n - 1)}{n + 1} C_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}.$$

Demonstração. Usando argumentos combinatórios, vamos mostrar a validade da relação

$$2(2n - 1)C_{n-1} = (n + 1)C_n.$$

Para isto, tome um $(n + 1)$ -ágono triangulado e fixe uma base. Depois, escolha uma das arestas (um lado, exceto o fixado, ou uma das diagonais) e oriente-a. Podemos escolher um dos n lados ou uma das $n - 1$ diagonais, o que nos dá $2n - 1$ possibilidades de escolha. Como queremos orientar a aresta, temos duas alternativas, chegando a um total de $4n - 2$ possibilidades de escolha. Estas escolhas são feitas para qualquer uma das C_{n-1} triangulações do $(n + 1)$ -ágono e então, o número de escolhas possíveis é dado por $(4n - 2)C_{n-1}$.

Agora, dado um polígono com $n + 2$ lados, vamos novamente marcar um lado para ficar fixado como base. Fazemos a triangulação deste polígono (C_n maneiras possíveis) e vamos marcar um dos lados do polígono, diferente da base. Assim, temos $n + 1$ possibilidades para cada triangulação. Ou seja, temos $(n + 1)C_n$ possibilidades.

Para provar que os dois valores obtidos são iguais, e assim provar a relação pedida, vamos exibir uma bijeção entre eles. Seja um dos $(4n - 2)C_{n-1}$ elementos do primeiro conjunto, ou seja,

um polígono com $n + 1$ lados, triangulado, com uma base fixada e uma de suas arestas marcada e orientada. Para transformar em um elemento do outro conjunto, acrescentamos um lado ao polígono, a direita (no sentido horário) do ponto de chegada da aresta escolhida. Construímos então um triângulo tendo como vértices o ponto de saída, o de chegada da aresta marcada e o novo ponto construído. Marcamos o lado criado e desmarcamos a aresta. O resultado é um polígono com $n + 2$ lados com um lado fixado e outro marcado.

Vemos que isto é de fato uma bijeção pois, dado que um polígono com $n + 2$ lados tendo um lado fixado e outro marcado, podemos compactar este lado em um ponto, ou seja, excluimos este lado. Como o lado excluído era lado de um único triângulo na triangulação, juntamos os dois outros lados e o marcamos. Podemos orientar esta aresta que foi marcada, fazendo ela apontar em direção ao vértice que foi compactado. Deste modo, temos um elemento do primeiro conjunto, provando a bijeção. Como exemplo desta construção, mostramos a Figura 2.8.

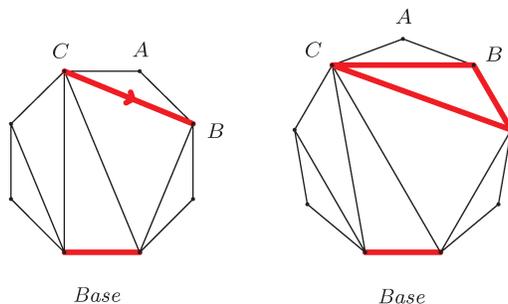


Figura 2.8: Exemplo da bijeção entre $(4n - 2)C_{n-1}$ e $(n + 1)C_n$

Temos então que $(4n-2)C_{n-1} = (n+1)C_n$. Combinando o resultado do número de triangulações obtido na Seção 2.3.1 com o valor de C_n resultante, temos a prova combinatória desejada. \square

3

Bijeções (I)

A partir de agora, vamos ilustrar com exemplos outras classes combinatórias cuja sequência de contagem é dada pelos números de Catalan. A intenção é encontrar bijeções entre o conjunto desejado e algum outro que já sabemos que é contado pela sequência. Tentamos separar os conjuntos em uma ordem lógica e dedicar a maior parte deste capítulo a conjuntos envolvendo árvores e estruturas próximas.

Neste capítulo está a primeira parte dos conjuntos.

3.1 Parêntesis

Este problema já foi enunciado na Seção 2.1, quando falamos da história dos número de Catalan. Suponha que queremos multiplicar $n + 1$ símbolos, de modo que só sabemos multiplicá-los dois a dois e queremos manter a ordem da multiplicação. Então, de quantas maneiras podemos colocar parêntesis na expressão $x_1x_2 \cdots x_{n+1}$ de modo a efetuar o produto? Para $n = 3$, temos as seguintes configurações

$$(x_1(x_2(x_3x_4))) \quad ((x_1x_2)(x_3x_4)) \quad ((x_1(x_2x_3))x_4) \quad (((x_1x_2)x_3)x_4) \quad (x_1((x_2x_3)x_4)).$$

Vamos exibir uma bijeção, sugerida por H. G. Forder em [8], entre as diferentes triangulações e as maneiras de se multiplicar $n + 1$ fatores. Tome um $(n + 2)$ -ágono triangulado e escolha um lado deste para ser fixado. Depois, enumere os outros $n + 1$ lados de x_1, \dots, x_{n+1} no sentido horário, por exemplo. Então, seja A o lado fixado e, como já dissemos anteriormente, A é lado de um único triângulo que compõe a triangulação. Vamos então chamar de B e C os outros dois lados do triângulo, nomeados no mesmo sentido que os lados do polígono. Feito isso, associamos o lado A ao produto $A = (BC)$, ou seja, dizemos que o lado fixado é o produto dos dois lados que formam o triângulo com ele. Note que a ordem da multiplicação é mantida, pois estamos multiplicando sempre no mesmo sentido que nomeamos os lados do $(n + 2)$ -ágono.

Agora, vamos analisar individualmente os lados B e C . Cada um deles pode ser um lado do polígono original ou então uma diagonal traçada na triangulação. No primeiro caso, faremos a substituição $-(B \text{ ou } C) = x_i$. Caso seja uma diagonal, a tratamos como sendo o lado fixado

de um polígono (com r lados) e repetimos o processo, escrevendo o triângulo formado pelo lado escolhido como uma multiplicação de dois termos, até que os dois lados do triângulo escolhido sejam os lados do polígono. Em cada passo estamos fazendo o produto de dois valores, ou seja, estamos aplicando uma operação binária e colocando parêntesis. No fim, estaremos realizando a multiplicação desejada.

Note que, se tomarmos duas triangulações diferentes e aplicarmos o processo descrito acima, obteremos duas multiplicações distintas, pois em alguma etapa a diagonal traçada será diferente, levando a um produto diferente de fatores. Portanto, temos um processo injetivo. Para que tenhamos uma bijeção, devemos mostrar que cada produto é gerado a partir de uma triangulação, ou seja, mostrar que o processo é também sobrejetivo. Para isto, vamos escrever um produto qualquer em uma dos lados de um $(n + 2)$ -ágono. Retire o primeiro parêntesis (e seu respectivo par) da expressão obtida e, note que podemos dividir a expressão em duas, uma com r termos (B) e uma com $n + 1 - r$ termos (C). Então, associamos B e C a um polígono de r e $n + 1 - r$ lados, respectivamente. Fazemos a triangulação de cada um deles separadamente, obtendo o resultado desejado.

Exemplo 3.1.1. Considere a triangulação de um hexágono, como mostra a Figura 3.1(a). Seleccionamos um lado para ser a base e nomeamos os outros lados, de x_1 a x_5 . A base forma um triângulo com o lado x_1 e a diagonal C , mostrado na Figura 3.1(b), e então $A = (x_1C)$. Como já atingimos o lado do hexágono com $B = x_1$, vamos apenas analisar C , que será visto como a base de um pentágono. O triângulo formado por C envolve duas diagonais D e E , como vemos na Figura 3.1(c). Assim, $A = (x_1C) = (x_1(DE))$, e olhamos separadamente para as diagonais restantes. Na Figura 3.1(d), vemos que $D = (x_2x_3)$, $E = (x_4x_5)$ e assim concluímos a transformação, chegando em $A = (x_1((x_2x_3)(x_4x_5)))$.

Para fazer o processo contrário, partimos da expressão $A = (x_1((x_2x_3)(x_4x_5)))$, e retiramos o par de parêntesis mais externo, obtendo $B = x_1$ e $C = ((x_2x_3)(x_4x_5))$. Associamos a B um lado do hexágono e a C um pentágono triangulado. Se repetirmos o processo com C , obtemos $D = (x_2x_3)$ e $E = (x_4x_5)$. Assim, podemos montar o hexágono original e triangular ele de acordo com as relações obtidas.

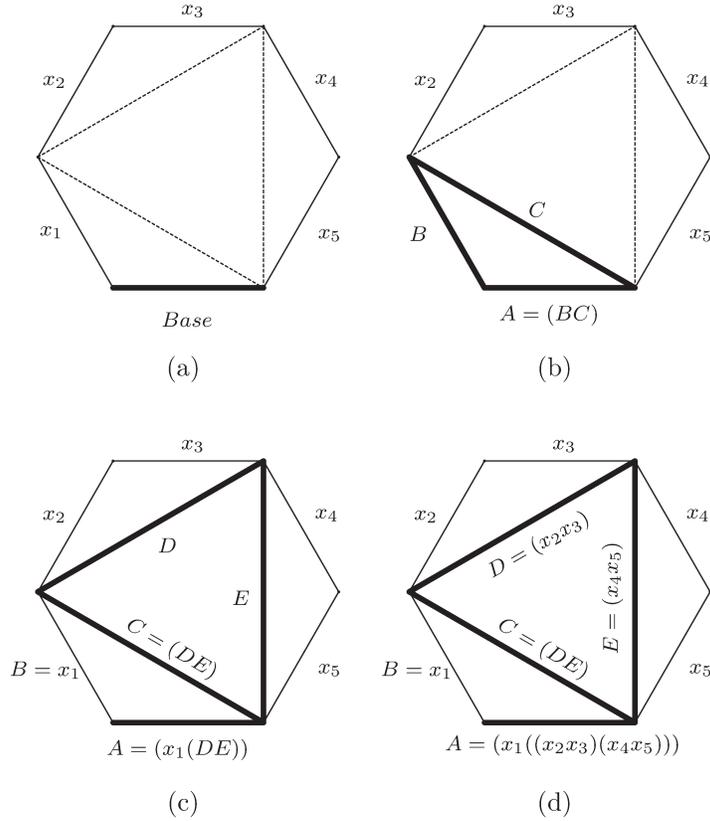


Figura 3.1: Exemplo de bijeção entre um hexágono e um produto de 5 termos

3.2 Árvores binárias planas

No volume 1 do livro Enumerative Combinatorics, o autor R. Stanley [29] define uma árvore de maneira recursiva, como sendo um conjunto finito de vértices tal que

- Um dos vértices é selecionado para ser a *raiz*;
- Os vértices restantes, se existirem, são divididos em $m \geq 1$ conjuntos disjuntos e não vazios T_1, T_2, \dots, T_m , sendo que cada conjunto também é uma árvore. Os conjuntos T_i , $i = 1, \dots, m$ são chamados de subárvores.

No mesmo livro, define como uma árvore plana (ou *ordenada*), que segue a mesma definição de árvore, trocando a segunda parte por

- Os vértices restantes, se existirem, são colocados em uma partição *ordenada* (T_1, T_2, \dots, T_m) de $m \geq 0$ conjuntos não vazios e disjuntos T_1, T_2, \dots, T_m tal que cada um deles é uma árvore plana.

Agora, uma árvore binária plana (alguns autores nomeiam como árvore binária plana completa) é uma árvore plana tal que cada vértice ou é uma folha (não tem nenhum filho) ou tem dois filhos. O que queremos mostrar é que o número de árvores binárias planas com $2n + 1$ vértices é contado pelos números de Catalan. O exemplo para $n = 3$ é mostrado na Figura 3.2.

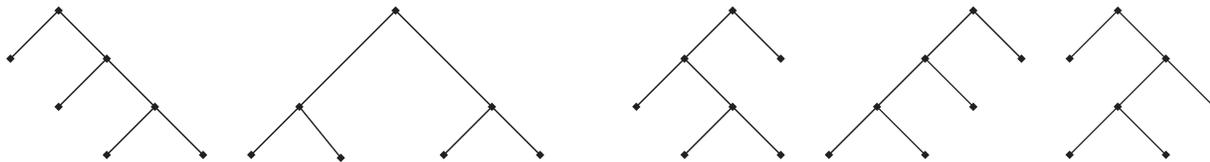


Figura 3.2: Árvores binárias planas com $2n + 1 = 7$ vértices

A bijeção (em [30]) neste caso surge se enumerarmos em uma ordem (da esquerda para a direita, por exemplo) as folhas da árvore, ou seja, os vértices sem filhos, como x_1, x_2, \dots, x_{n+1} . Então, quando dois vértices, que representam alguma expressão no conjunto das multiplicações, tiverem o mesmo vértice “pai”, assumimos o produto entre eles, isto é, se v_1 e v_2 são vértices da árvore e tem o mesmo pai, chamamos o vértice-pai de (v_1v_2) .

Exemplo 3.2.1. Tomamos uma árvore binária plana com 7 vértices. Enumeramos suas folhas com a, b, c e d , da esquerda para a direita, como mostra a Figura 3.3. Tais folhas serão associados a símbolos x_1, x_2, x_3 e x_4 , que devemos multiplicar nesta ordem tal que só podemos multiplicá-los dois a dois. Para encontrar a multiplicação equivalente a esta árvore, vamos aplicar o que enunciamos anteriormente.

Como podemos ver na Figura 3.3, as folhas b e c tem o mesmo vértice em comum, e portanto escrevemos (bc) . Da mesma forma, a e (bc) tem o mesmo pai, e então chamamos o pai de $(a(bc))$. Por último, temos que a raiz da árvore é pai de $(a(bc))$ e d . Portanto, a raiz é descrita como $((a(bc))d)$. Ou seja, a árvore mostrada na Figura 3.3 é equivalente ao produto $((a(bc))d)$.

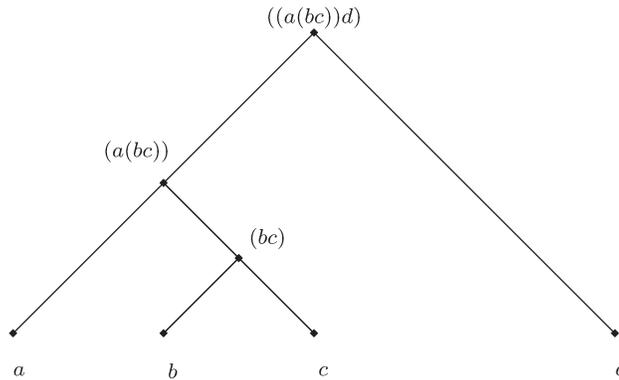


Figura 3.3: Exemplo de bijeção entre uma árvore binária plana e uma expressão entre parêntesis

Agora, note que pela construção da árvore e da multiplicação resultante, objetos diferentes implicam em multiplicações diferentes. Isso quer dizer que o processo é injetivo. O que precisamos é mostrar que também é sobrejetivo. Para isto, tomamos um elemento qualquer do conjunto das multiplicações binárias não comutativas de $n + 1$ termos e precisamos indicar uma árvore tal que, esta seja equivalente (no sentido dado acima) à multiplicação tomada. Para isto, precisamos decompor a expressão em uma seqüência de produtos binários. Por exemplo, o produto $((a(bc))d)$ é decomposto como $A_1 = (bc)$, $A_2 = (aA_1)$, $A_3 = (A_2d)$. Deste modo, consideramos o último elemento da seqüência como sendo a raiz da árvore, e os termos do produto seriam seus filhos. Assim, recuperamos uma árvore que gera o produto (quando fizermos a operação inversa), provando a sobrejetividade da função. Ou seja, estabelecemos uma bijeção e portanto, o número de árvores com $2n + 1$ vértices é, de fato, C_n .

3.3 Agrupamento de parêntesis

Considere o seguinte problema: De quantas maneiras possíveis podemos agrupar n pares de parêntesis tal que a expressão resultante esteja balanceada. Isto quer dizer que, se olharmos da esquerda para a direita nas posições 1 a $i = 2, \dots, 2n$, o número de “(” é sempre maior ou igual ao número de “)”. Chamaremos o conjunto de todas as configurações de \mathfrak{D}_n . No caso de $n = 3$, temos os seguintes elementos no conjunto.

$$\mathfrak{D}_3 = \{((())()), ()(()), ((())), ()()(), ((())())\}.$$

Queremos mostrar que a solução para este problema também é dado pelos números de Catalan. Para isto, vamos mostrar que existe uma relação bijetiva entre o conjunto contado na Seção 3.2 e o conjunto \mathfrak{D}_n . Tome uma árvore binária plana, com $2n + 1$ vértices (ou com $n + 1$ vértices sem filhos). Faça uma busca em profundidade usando pré-ordem nesta árvore, enumerando as arestas que ligam os vértices. Se a aresta é para a esquerda ($/$), representamos como um parêntesis aberto

“(” e caso a aresta seja para a direita (\backslash), representamos como um parêntesis fechado “)”. A busca em pré-ordem é feita segundo o algoritmo (Confira pela Figura 3.4).

Algoritmo para busca em pré-ordem:

- passo 1:** Comece a partir da raiz da árvore;
- passo 2:** Percorra a subárvore esquerda (**B**) em pré-ordem;
- passo 3:** Percorra a subárvore direita (**C**) em pré-ordem;

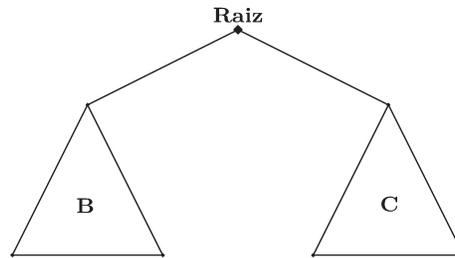


Figura 3.4: Esquema para busca em pré-ordem em uma árvore binária

Exemplo 3.3.1. Observe a árvore dada na Figura 3.5. Nomeamos as suas arestas e vamos percorrer a árvore usando o algoritmo de pré-ordem. A sequência de arestas percorridas será a, c, d, g, h, b, e, f . Depois de percorrer a árvore e organizar as arestas encontradas, vemos que as arestas a, c, e, g são arestas a esquerda ($/$), enquanto as outras, b, d, f, h são arestas para a direita (\backslash). Então, relacionando as arestas aos parêntesis, conseguimos a seguinte sequência balanceada (bem ordenada) $((())())$.

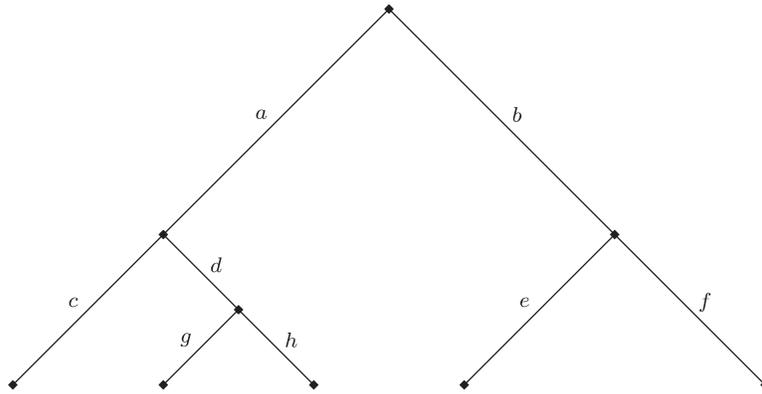


Figura 3.5: Árvore binária percorrida em pré-ordem

Garantimos que a saída deste algoritmo nos dá de fato um elemento de \mathfrak{D}_n , pois as árvores que estamos tratando tem a propriedade de um vértice ou ter dois filhos ou nenhum. Ou seja, teremos sempre $2n$ arestas, metade delas para a direita e metade para a esquerda. Temos ainda que a aresta para a esquerda aparece sempre antes da respectiva aresta para a direita, pela característica do tipo de busca e leitura que fazemos na árvore. Além disso, o algoritmo é injetivo, pois duas árvores diferentes terão arestas em posições diferentes, levando a resultados distintos.

Agora, a construção de uma árvore a partir de uma expressão de parêntesis também é facilmente realizada. Pegamos uma expressão em \mathfrak{D}_n , desenhe uma raiz para a árvore e leia a expressão da esquerda para a direita. Quando a posição analisada tiver um símbolo “(”, desça um nível e construa uma aresta a esquerda. Quando tivermos um “)”, volte ao maior nível que não contenha uma aresta a direita e desenhe uma. A árvore resultante terá $2n$ arestas, sendo n a direita e n a esquerda. Observe que, como a expressão em \mathfrak{D}_n é balanceada, temos que todo vértice terá, obrigatoriamente, ou zero ou dois filhos. Considere a expressão

$$()(())()$$

Teremos então:

- (— a esquerda, nível 0-1;
-) — a direita, nível 0-1;
- (— a esquerda, nível 1-2;
- (— a esquerda, nível 2-3;
-) — a direita, nível 2-3;
-) — a direita, nível 1-2;

- (— a esquerda, nível 2-3;
-) — a direita, nível 2-3,

e a árvore resultante está representada na Figura 3.6.

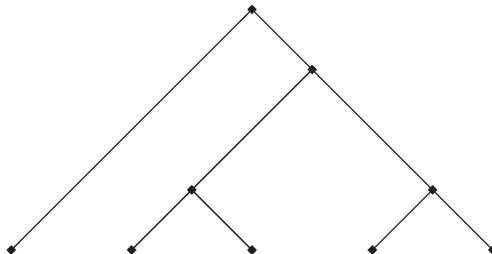


Figura 3.6: Árvore binária T tal que a imagem sobre o algoritmo leva a $(())(())()$

3.4 Árvores Binárias com n vértices

Outro conjunto contado pelos números de Catalan é o conjunto árvores binárias com n vértices. Agora, estamos considerando as árvores tais que cada vértice tem no máximo dois filhos. Um exemplo do caso $n = 3$ é mostrado na Figura 3.7.

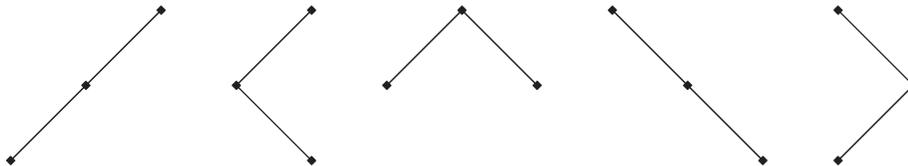


Figura 3.7: Árvores Binárias planas com $n = 3$ vértices

Para mostrar que de fato a cardinalidade do conjunto das árvores binárias com n vértices é C_n , vamos construir a seguinte bijeção (dada em [31]) entre este conjunto e o das árvores binárias planas:

Tome uma árvore T_1 com n vértices e percorra esta árvore adicionando a cada vértice uma quantidade de filhos tal que cada vértice de T_1 passe a ter dois filhos. No fim do processo, teremos uma nova árvore S_1 cujos vértices internos são os vértices de T_1 . Sabemos que, por construção, S_1 é tal que todos os vértices tem ou zero ou dois filhos. Além disso, terá $2n + 1$ vértices, pois cada vértice de T_1 terá dois filhos, totalizando $2n$ vértices, mais a raiz de T_1 que não foi contada. Portanto, S_1 é um elemento do conjunto contado na Seção 3.2.

Agora considere o processo inverso. Tomamos uma árvore binária plana e apagamos todas as folhas e as respectivas arestas. Conseguimos então uma árvore com n vértices tal que cada vértice tem zero, um ou dois filhos. Ou seja, a árvore resultante é uma árvore binária.

Observe que descrevemos dois processos, um inverso do outro e, como o último pode ser aplicado em qualquer árvore binária da Seção 3.2, temos uma bijeção. A Figura 3.8 mostra as duas árvores sobrepostas, sendo a linha tracejada as arestas que deverão ser adicionadas ou retiradas, dependendo da função aplicada.

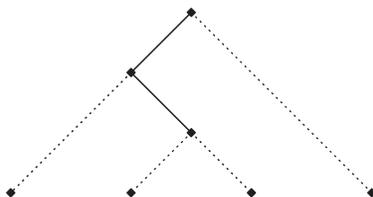


Figura 3.8: Bijeção entre uma árvore binária com n vértices e uma árvore binária plana com $2n + 1$ vértices

3.5 Árvores Planas com $n + 1$ vértices

Agora, retiramos a exigência de termos cada vértice com no máximo dois filhos. Ou seja, consideramos agora qualquer árvore plana, com $n + 1$ vértices. Para o caso $n = 3$ temos cinco árvores planas com 4 vértices, que são dadas na Figura 3.9.

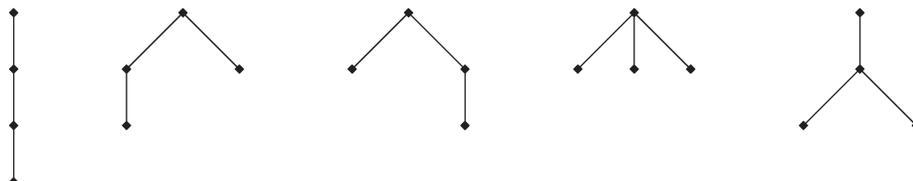


Figura 3.9: Árvores Planas com 4 vértices

Para mostrar que uma árvore plana com $n + 1$ vértices é contada pelos números de Catalan, vamos estabelecer a seguinte função, denotada por φ , retirada de [31].

Seja T uma árvore plana (ordenada). Se T é apenas um vértice simples, então faça $\varphi(T)$ ser uma sequência vazia de parêntesis. Suponha que φ está definida para qualquer árvore plana \tilde{T} com $k + 1$ vértices, com $k < n$, e que $\varphi(\tilde{T})$ é uma sequência bem ordenada de parêntesis de comprimento $2k$. Agora, seja T uma árvore plana com $n + 1$ vértices, com subárvores T_1, T_2, \dots, T_r .

Como cada subárvore tem menos vértices do que a árvore principal, podemos definir uma sequência bem ordenada de parêntesis para cada uma delas. Seja $P_i = \varphi(T_i)$. Construimos então

$$\varphi(T) = P = (P_1)(P_2) \dots (P_r).$$

O número de parêntesis em P é obtido somando-se a quantidade de parêntesis em P_i , $i = 1, \dots, r$ mais $2r$, um par de parêntesis para cada P_i . Mas o número de parêntesis em P_i é dado por $2(N-1)$, onde N é o número de vértices em T_i . Fazendo a soma, temos que o número de parêntesis em P é $2n$, como queríamos.

Da mesma forma, podemos definir uma inversa para φ , que relaciona uma sequência bem ordenada de $2n$ parêntesis com uma árvore plana com $n+1$ vértices. Seja $\varphi^{-1}(\emptyset)$ a árvore com apenas um vértice, e definiremos novamente de forma recursiva. Assumimos que $\varphi^{-1}(\tilde{P}) = \tilde{T}$ já está definido para todas as sequências bem ordenadas de parêntesis de tamanho $2k$ e árvores planas de $k+1$ vértices, para $k < n$. Agora tome uma sequência bem ordenada de comprimento $2n$. Escreva $P = \tilde{P}_1\tilde{P}_2 \dots \tilde{P}_r$, onde cada \tilde{P}_i é uma sequência bem ordenada. Definimos então $\tilde{P}_i = (P_i)$ e sabemos que P_i ainda é uma sequência bem ordenada e portanto está associado a uma árvore plana. Faça $\varphi^{-1}(P_i) = T_i$ e construa a árvore T tal que suas subárvores sejam T_1, T_2, \dots, T_r . Pela construção, vemos que a árvore terá $n+1$ vértices, e portanto estabelecemos a bijeção.

Exemplo 3.5.1. Observe a árvore T mostrada na Figura 3.10. A árvore possui três subárvores T_1, T_2 e T_3 , conforme indicado. Portanto $P = \varphi(T) = (\varphi(T_1))(\varphi(T_2))(\varphi(T_3))$. Vamos analisar separadamente cada uma das subárvores, calculando a função em cada uma delas.

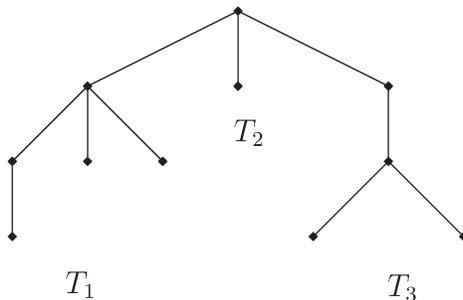


Figura 3.10: Árvore Plana com 11 vértices

- A subárvore T_1 contém três subárvores, T_{11} com dois vértices, e T_{12} e T_{13} com apenas um vértice. Então $\varphi(T_1) = (()) () ()$.
- A subárvore T_2 é apenas um vértice, portanto $\varphi(T_2) = \emptyset$.
- A subárvore T_3 tem uma subárvore, que tem duas subárvores com um vértice cada. Portanto temos $\varphi(T_3) = (() ())$.

Combinando os itens anteriores, temos o resultado $P = ((()) () ()) () ((() ()))$, uma sequência bem ordenada de 20 parêntesis.

3.6 Árvores Padrão

Uma árvore plana com $n + 1$ vértices é dita *admissível* se não existem $0 \leq i < j < k \leq n$ tal que as linhas que conectam i a j e j a k sejam ambas arestas da árvore. Uma árvore é chamada de *árvore padrão* se é admissível e suas arestas não se cruzam. Ou seja, podemos desenhar os vértices da árvore em uma linha e conectá-los sem que haja interseção. O exemplo das árvores padrão para $n = 3$ é mostrado na Figura 3.11. Queremos mostrar que o conjunto das árvores padrão é contado pelos números de Catalan.



Figura 3.11: Árvores padrão com 4 vértices

A bijeção entre o conjunto das árvores padrão com $n + 1$ vértices e o conjunto das árvores binárias com n vértices é dado em [10, Teorema 6.4].

Para encontrar a bijeção, vamos usar o processo de indução. Se $n = 1$, então identificamos o único elemento dos dois conjuntos. Agora, seja $n > 1$ e uma árvore padrão com $n + 1$ vértices dispostos em uma linha e numerados de 0 a n da esquerda para a direita. Por definição, toda árvore padrão com $n + 1$ vértices contém a aresta $(0, n)$ – aresta que liga o vértice 0 ao n . Apague esta aresta e teremos duas árvores padrão, uma a esquerda e outra a direita, sendo a esquerda de 0 a k e a direita de $k + 1$ a n . Então, vamos construir uma árvore binária tal que as subárvores a esquerda e a direita sejam equivalentes às subárvores esquerda e direita da árvore padrão. Para isto, repita o processo descrito com cada uma das subárvores. Podemos ver que depois da transformação, teremos uma árvore binária pois cada vez que apagamos uma aresta, particionamos a árvore padrão em uma ou duas outras árvores. Podemos ver também que a árvore binária terá n vértices, porque este é o número de arestas da árvore padrão original, e cada aresta vai gerar um vértice da árvore na imagem.

A injetividade deste processo surge naturalmente, pela construção da função. A sobrejetividade vem do fato que uma árvore binária com n vértices pode ser identificada com uma árvore padrão se fizermos a reconstrução, partindo da raiz da árvore e vendo quantos pontos estão a direita e a esquerda. Temos então que a função é uma bijeção e portanto os dois conjuntos devem ter a mesma cardinalidade. Isso implica que o conjunto das árvores padrão são contadas pelos números de Catalan.

Exemplo 3.6.1. Vamos mostrar como a bijeção funciona. Na Figura 3.12 mostramos no alto a árvore padrão. Na primeira linha a esquerda, retiramos a aresta que liga o primeiro ao último ponto. Com isso, geramos um vértice da árvore binária, e desenhamos este vértice na mesma linha, a direita. O ramo a esquerda será dos pontos 0 a 3 e o ramo da direita, do 4 ao 6. Na segunda linha retiramos as arestas das subárvores e marcamos os respectivos pontos a direita e a esquerda. Na terceira e última linha, vemos quais árvores padrão restaram. No ramo a esquerda, temos uma

a esquerda e uma a direita, enquanto no ramo a direita, temos apenas uma a esquerda. Montamos assim a árvore binária correspondente, que é mostrada na última linha a direita.

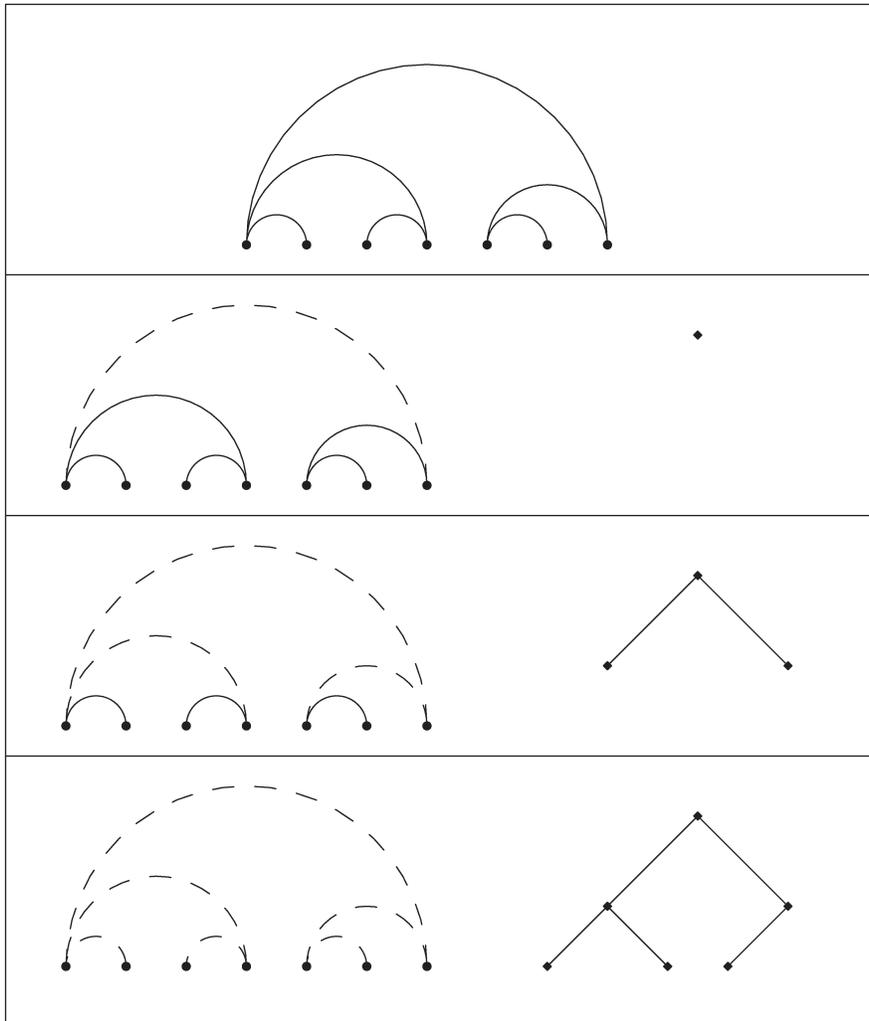


Figura 3.12: Construção da bijeção entre as duas estruturas

3.7 Pontos conectados por cordas com vértices a esquerda distintos

Considere $n + 1$ pontos sobre uma linha horizontal. Queremos conectá-los com n cordas tal que não haja cruzamento e que os pontos finais a esquerda das cordas sejam distintos. Mostramos um exemplo para $n = 3$ na Figura 3.13.



Figura 3.13: Maneiras de se ligar 4 pontos tendo pontos finais a esquerda distintos

Vamos mostrar que existe uma bijeção entre este conjunto e o conjunto das árvores planas com $n + 1$ vértices. Esta bijeção foi sugerida por S. Forcey et al. em [7].

Para isto, note que para $n = 1$, temos uma única maneira de ligar os pontos. Então associe este elemento com a única árvore plana com dois vértices. Suponha agora que, para todo $k \leq n$ podemos associar um elemento do conjunto de pontos a uma árvore plana com k vértices. Tome, então, um conjunto T de $n + 1$ pontos e numere esses pontos de 1 a $n + 1$ da direita para a esquerda. Vamos olhar agora para as cordas que ligam o ponto 1 aos outros pontos. Como elas não se cruzam, se 1 é ligado a j temos que não existem $l < j < k$ tal que l esteja ligado a k . Dessa forma, se 1 está conectado aos pontos $1 < a_1 \leq \dots \leq a_m \leq n$, dividimos o conjunto de $n + 1$ pontos em vários conjuntos, $T_i = [a_i, a_{i+1} - 1]$, para todo $i = 1, \dots, m - 1$. Olhando para cada conjunto de pontos T_i podemos perceber que por ser um subconjunto de T e seus pontos serem consecutivos, e deve seguir as mesmas propriedades de T . Ou seja, seus pontos estão conectados e os pontos finais a esquerda são todos distintos. Assim, podemos associar a cada T_i uma árvore plana.

Para completar, considere o ponto 1 como raiz de uma árvore, sendo suas subárvores a árvore correspondente aos conjuntos T_i , colocando-as em ordem crescente de índice. Podemos então relacionar cada conjunto T a uma árvore plana com $n + 1$ vértices.

O processo descrito é claramente um processo bijetivo que relaciona os dois conjuntos. A injetividade surge da divisão dos pontos. Se dois elementos T e U do conjunto de pontos são distintos, então existe alguma aresta em T que não está em U . Portanto, a árvore obtida como imagem deve ser diferente. Da mesma forma, tomando uma árvore no conjunto das árvores planas com $n + 1$ vértices, separe as subárvores e escreva cada uma delas como T_i , um elemento do conjunto dos pontos. Depois concatene os pontos, colocando T_{i+1} a direita de T_i , para todo i e por último acrescente um ponto a direita de todos e conecte-o aos pontos correspondente às raízes de cada subárvore.

Exemplo 3.7.1. Vamos exemplificar como esta bijeção funciona. Trabalharemos com $n = 6$ e uma sequência de 7 pontos, que satisfazem as propriedades já citadas, como dado na Figura 3.14.

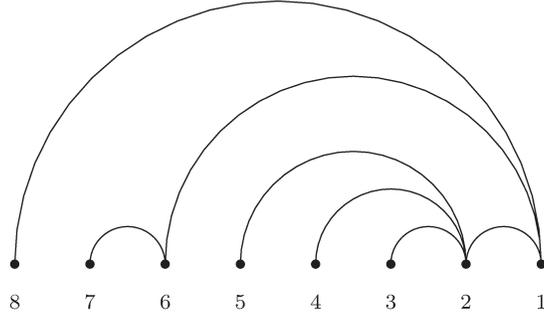


Figura 3.14: Exemplo de um conjunto de pontos conectados

Numeramos os pontos da direita para a esquerda e, pela Figura 3.14, vemos que o ponto 1 está ligado aos pontos 2, 6 e 8. Temos portanto três subárvores, sendo a com raiz no ponto 2 a mais a esquerda, com raiz em 6 a do meio e a com raiz em 8 a mais a direita. Podemos então nos focar em cada uma das subárvores. O caso da subárvore em 8, só temos um ponto, o que leva à subárvore com um vértice. Para o caso da raiz em 6, temos dois pontos, e também uma única subárvore associada. Agora, para o caso da subárvore composta por 2, 3, 4 e 5, podemos aplicar de novo nosso algoritmo. Assim, 2 seria a raiz, 3 a subárvore a esquerda, 4 a do meio e 5 a direita, completando uma árvore plana. A árvore resultante é mostrada na Figura 3.15.

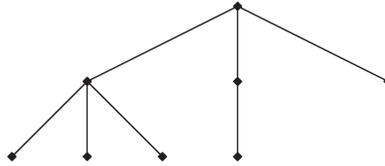


Figura 3.15: Imagem do elemento contado na Figura 3.14 através da bijeção

3.8 Pontos sobre uma circunferência por segmentos que não se cruzam

Considere um conjunto de $2n$ pontos sobre uma circunferência. Queremos conectar os pontos dois a dois, de modo que as cordas que liguem estes pontos não se intersectem. Para $n = 3$ teremos seis pontos, e as configurações possíveis são dadas na Figura 3.16. Mostraremos que o número de maneiras possíveis de se conectar esses $2n$ pontos é dado por C_n , o n -ésimo número de Catalan.

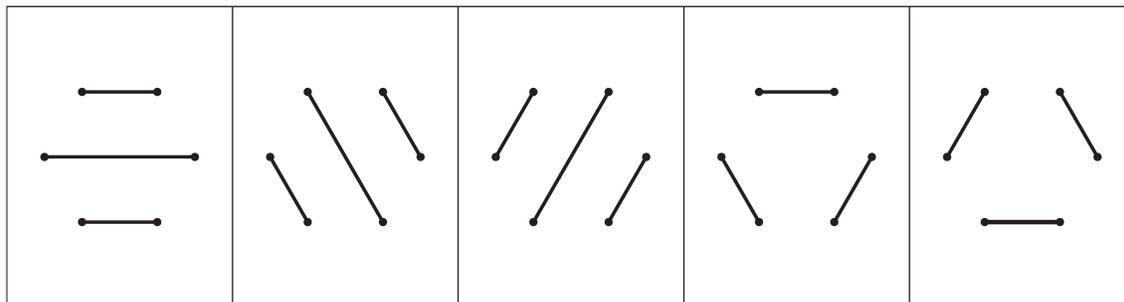


Figura 3.16: Configurações possíveis para 6 pontos em uma circunferência conectados dois a dois com retas que não se cruzam

Para isto, vamos estabelecer uma bijeção entre este conjunto e o conjunto dado na Seção 3.3. Escolha um elemento do conjunto dos pontos sobre a circunferência e enumere os pontos no sentido horário, por exemplo.

Começando a leitura a partir do ponto 1, vemos que em cada $i = 1, \dots, 2n$ encontraremos uma corda que liga i a um outro ponto. Se a outra ponta da corda que se conecta a i é um ponto j tal que j seja maior do que i , então escrevemos um parêntesis a esquerda (aberto) na posição i . Caso contrário – se $j < i$, escrevemos um parêntesis a direita (fechado) em i .

Estamos colocando os pares de parêntesis corretamente agrupados, pois consideramos que o ponto de origem da corda é o que tem o menor valor quando enumeramos os pontos. Ou seja, o ponto inicial da corda ocorre sempre antes do ponto final, e deste modo, nenhum parêntesis é fechado antes de ser aberto. Assim, garantimos que a imagem desta transformação está no conjunto representado na Seção 3.3, o conjunto \mathfrak{D}_n . Para existir a bijeção, precisamos ou exibir uma transformação inversa, ou mostrar que a transformação dada é sobrejetiva.

A sequência bem ordenada de parêntesis dada pode ser agrupada em pares (i, j) , onde i é a posição do parêntesis aberto e j a posição do parêntesis fechado. Assim, a sequência pode ser agrupada em pares sem que haja qualquer cruzamento entre eles, ou seja, podemos construir um conjunto $V = \{(i_1, j_1), \dots, (i_n, j_n)\}$ tal que não existem k, m tais que $i_k < i_m < j_k < j_m$. Se acontecesse isto, faríamos uma troca de j_k por j_m , mantendo o não cruzamento e a sequência inalterada. A partir deste agrupamento feito, desenhamos $2n$ pontos em uma circunferência e ligamos os pontos, usando os pares do conjunto V . Deste modo, mostramos a bijeção entre os conjuntos.

Exemplo 3.8.1. Fazendo $n = 5$, e temos a seguinte configuração de cordas

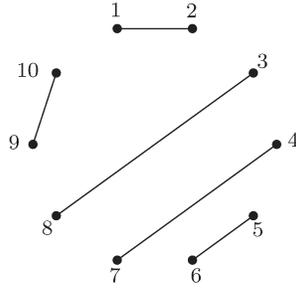


Figura 3.17: Exemplo da construção da bijeção entre o conjunto dos pontos e uma sequência bem ordenada de parêntesis

Seguimos a partir do ponto 1 e criamos a sequência usando a função dada. Assim, temos que as cordas partem dos pontos 1, 3, 4, 5 e 9 e chegam em 2, 6, 7, 8 e 10. Como resultado, obtemos $()((()))()$.

Da mesma forma, considere a sequência balanceada e perceba que podemos escrever o conjunto $V = \{(1, 2), (3, 8), (4, 7), (5, 6), (9, 10)\}$, lembrando que o par (i_k, j_k) representa a posição do par de parêntesis. Assim, o primeiro par abre na posição 1 e fecha na 2, o segundo abre na 3 e fecha na 8, e assim por diante. Perceba que não existe cruzamento entre os pares. Podemos então escrever os pontos em uma circunferência e ligar os pares por uma corda (vide Figura 3.17), garantindo que não haverá cruzamentos.

Observação 3.8.2. Um outro conjunto contado pelos números de Catalan, que estão em uma bijeção óbvia com os elementos do conjunto apresentado nesta seção são as maneiras de se conectar $2n$ pontos em uma linha, dois a dois, de forma que cada ponto é conectado a apenas um outro ponto e as cordas (arestas) que os conectam não se cruzam.

A bijeção é dada da seguinte forma: Enumere os pontos do conjunto dado acima, em um mesmo sentido. Depois, coloque os pontos em sequência sobre uma linha e faça as ligações.

Os dois conjuntos possuem a mesma propriedade, pois não existem $i < j < k < l$ tal que i está conectado a k e j a l . Temos então uma relação um a um entre estes dois conjuntos.

3.9 Caminhos de Dyck que não tem picos de tamanho 2

Um caminho de Dyck de comprimento $2n$ é um caminho no \mathbb{R}^2 de $(0, 0)$ a $(2n, 0)$ com passos $(1, 1)$ ou $(1, -1)$ tal que o caminho não passe abaixo da reta $x = 0$. Existe uma relação bijetiva entre os caminhos de Dyck e os caminhos reticulados que exibimos na Seção 2.3.2. Basta transformar os passos $(1, 1)$ em $(0, 0)$ e os passos $(1, -1)$ em $(1, 0)$.

Em um caminho de Dyck, um *pico* é um ponto imediatamente precedido por um passo $(1, 1)$ e imediatamente seguido por um passo $(1, -1)$. Um pico tem altura k se a sua coordenada y é k . Todas essas definições são dadas no artigo de P. Peart et al. [22].

Caminhos de Dyck de comprimento $2n + 2$ que não possuem picos de tamanho 2 são contados pelos números de Catalan. Para mostrar isso, vamos construir uma bijeção com os caminhos de Dyck, conforme dado em [22].

Considere um elemento P do conjunto dos caminhos de Dyck de tamanho $2n$. Proceda da seguinte forma:

- 1) Anexe um pico de tamanho 1 no começo do caminho P , produzindo um caminho de Dyck de comprimento $2n + 2$, P^* .
- 2) Seja S^* um sub-caminho de Dyck de P^* tal que S^* não tenha picos de tamanho 1. Para cada S^* , adicione um passo $(1, 1)$ no começo e um passo $(1, -1)$ no fim deste, produzindo um subcaminho de Dyck \tilde{S} e um caminho \tilde{P} .
- 3) De \tilde{P} , retire todo caminho de Dyck de comprimento 2 que está imediatamente a esquerda de cada \tilde{S} . Temos então um único caminho de Dyck \hat{P} .

De fato, teremos um caminho de comprimento $2n + 2$, e garantimos que este caminho não tem nenhum pico de altura 2 pela construção da função. A função inversa é definida da seguinte maneira:

- 1) Seja \hat{S} o subcaminho de Dyck de \hat{P} que está entre os dois pontos no eixo x não tendo picos de altura 1. Para cada \hat{S} , adicione um caminho de Dyck de comprimento 2 imediatamente a esquerda. Esse passo produz o caminho \tilde{P} .
- 2) Seja \tilde{S} um sub-caminho de Dyck de \tilde{P} . Para cada \tilde{S} , remova um passo $(1, 1)$ no começo e um passo $(1, -1)$ no fim deste, produzindo um subcaminho de Dyck S^* . Esse passo produz o caminho P^* , que tem tamanho $2n + 2$.
- 3) De P^* , retire todo caminho de Dyck de comprimento 2 no começo do caminho, produzindo o caminho P .

Vamos ilustrar esta bijeção com um exemplo.

Exemplo 3.9.1. Começamos com um caminho de Dyck e vamos aplicando cada um dos passos. A Figura 3.18(a) mostra o caminho de Dyck P de comprimento 14, ou seja $n = 7$. Na Figura 3.18(b), temos o caminho P^* , que é o primeiro passo da transformação, pois aumentamos um pico de comprimento 2 do caminho original. A transformação representada na Figura 3.18(c) é o segundo parte, no qual aumentamos um passo início e no fim do subcaminho. A Figura 3.18(d) é o final, onde cancelamos os picos de comprimento 2, obtendo um caminho de Dyck de tamanho 16 tal que não haja picos de altura 2.

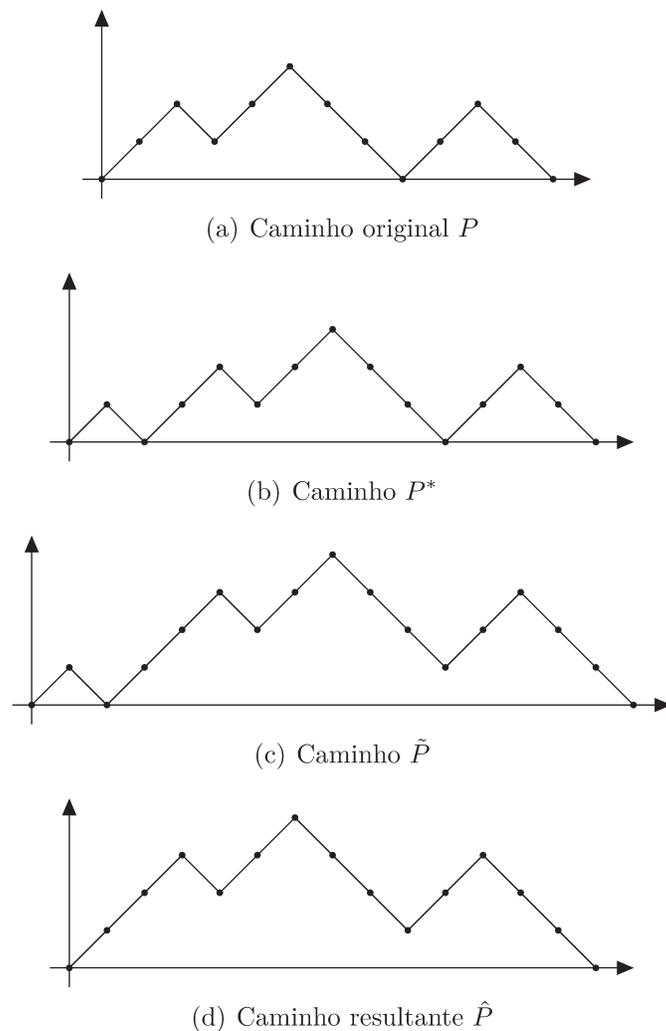


Figura 3.18: Construção da função bijetora entre os caminhos de Dyck

Estabelecemos então uma bijeção entre os dois conjuntos. Provamos que existe uma função que associa cada elemento de um conjunto a um elemento do outro (exibindo a inversa). Portanto, acabamos de mostrar que o conjunto dos caminhos de Dyck de comprimento $2n$ e o conjunto dos caminhos de Dyck com comprimento $2n + 2$ sem picos de altura 2 tem a mesma cardinalidade, que é C_n .

3.10 Caminhos de Dyck de tamanho $4n$ com passos para baixo de tamanho 2

Outro tipo de caminho de Dyck que é contado pelos números de Catalan é um caminho de tamanho $4n$ tal que toda parte decrescente do caminho tenha tamanho 2, ou seja, o passo $d = (1, -1)$

sempre aparece em pares. Para o caso em que $n = 2$, temos os caminhos de Dyck mostrados na Figura 3.19. A bijeção para este problema foi esquematizada em [28] e é devida a E. Deutsch.

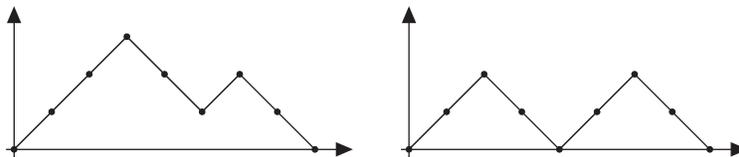


Figura 3.19: Caminhos de Dyck de tamanho 8 com passos $(1, -1)$ ocorrendo em pares

Para estabelecer uma bijeção entre este conjunto e o conjunto das árvores binárias planas (completas), vamos pegar uma árvore T e percorrê-la usando o algoritmo de pré-ordem, novamente usando a ferramenta usada na Seção 3.3 com uma pequena modificação. Cada vez que encontrarmos uma aresta a esquerda, desenharemos uma sequência de dois passos para cima e um para baixo e quando encontrarmos uma aresta a direita, desenhemos apenas um passo para baixo.

Por definição, temos $2n$ arestas, sendo n a esquerda e n a direita. Assim, teremos $3n$ passos resultante das arestas a esquerda e n resultantes da aresta a direita, totalizando $4n$ passos. O que precisamos mostrar é que o caminho \tilde{P} originado é um caminho de Dyck.

Mas veja que, cada aresta a esquerda faz o que o caminho se eleve em uma unidade (dois passos para cima e um para baixo), e uma aresta a direita faz com que ele desça uma unidade. Pelo algoritmo e a discussão feita na Seção 3.3, sabemos que em cada passo do algoritmo, o número de arestas a esquerda visitadas é sempre maior ou igual ao número de arestas a direita. Então, o caminho \tilde{P} nunca passa abaixo do eixo x e portanto é um caminho de Dyck. Por construção, \tilde{P} é tal que todos os passos $u = (1, 1)$ aparecem em pares. Para obter o caminho P a partir de \tilde{P} , basta ler o caminho na ordem contrária, da direita para a esquerda, e trocar os passos u e d .

Está claro que a transformação é bijetiva. A parte do algoritmo segue como dado na Seção 3.3 e a transformação de \tilde{P} em P também é uma bijeção.

Exemplo 3.10.1. A Figura 3.20 mostra uma árvore binária plana e a ordem com que as arestas serão percorridas (ordem alfabética). Temos que as arestas A, B, D são a esquerda e C, E e F são arestas a direita.

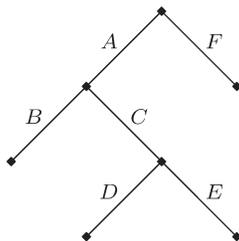


Figura 3.20: Árvore Binária Plana do Exemplo 3.10.1

Logo o caminho de Dyck \tilde{P} gerado será $uduudduudd$, com u e d já definidos acima.

Agora, transformando este caminho \tilde{P} em P , o caminho que nós procuramos, teremos $uuuddduudd$ (lemos a sequência da direita para a esquerda trocando u por d e vice-versa). Note que, se desenharmos o caminho representado pela sequência anterior, obtemos o caminho da Figura 3.21.

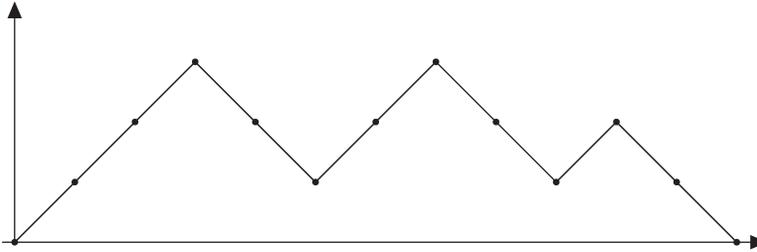


Figura 3.21: Exemplo de bijeção entre uma árvore binária plana e um caminho de Dyck com pares de passos para baixo

4

Bijeções (II)

Uma outra classe de conjuntos que são contados pelos números de Catalan são os que envolvem seqüências numéricas, palavras, composições e permutações de inteiros. A bijeção dada na Seção 4.1 foi desenvolvida pelo autor deste texto.

Nas próximas seções vamos mostrar através de bijeções que a cardinalidade de alguns conjuntos envolvendo esses objetos são contados pelos números de Catalan.

4.1 Sequências em que cada termo interno divide a soma de seus vizinhos

Considere o conjunto \mathcal{A}_n das seqüências de inteiros $(1, a_1, \dots, a_n, 1)$ tal que $a_i \geq 2$ e a_i divide a soma dos seus dois vizinhos $(a_{i-1} + a_{i+1})$. Para $n = 3$, podemos gerar as seguintes seqüências

$$\mathcal{A}_3 = \{14321, 13521, 13231, 12531, 12341\}.$$

Podemos observar que, na seqüência criada, existe pelo menos um i satisfazendo

$$a_{i-1} < a_i > a_{i+1}, \text{ para algum } i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.1)$$

onde $a_0 = a_{n+1} = 1$.

Suponha que a_1, \dots, a_n seja uma seqüência crescente, ou seja, que não exista um a_i no interior da seqüência satisfazendo (4.1). Mas então, escolha $i = n$ e veja que $a_{n-1} < a_n$, pois a seqüência é crescente, e $a_n \geq 2 > 1$ pela definição. Portanto, existe um i satisfazendo a propriedade (4.1).

Agora, para todo i que satisfaz (4.1), como a_i divide $(a_{i-1} + a_{i+1})$, e os dois valores são menores do que a_i , então $a_i = (a_{i-1} + a_{i+1})$.

Fizemos esta observação para mostrar que, se removermos a_i da seqüência, conseguimos um elemento do conjunto \mathcal{A}_{n-1} . Veja que a única alteração que acontece é que a_{i-1} deverá dividir $(a_{i-2} + a_{i+1})$ e a_{i+1} deverá dividir $(a_{i+2} + a_{i-1})$. Mas, usando que $a_{i-1} + a_{i+1} = a_i$, temos

$$\begin{aligned} a_{i-2} + a_{i+1} &= a_{i-2} + a_i - a_{i-1} = k_- a_{i-1} - a_{i-1} = (k_- - 1)a_{i-1} \\ a_{i+2} + a_{i-1} &= a_{i+2} + a_i - a_{i+1} = k_+ a_{i+1} - a_{i+1} = (k_+ - 1)a_{i+1}, \end{aligned}$$

demonstrando que a propriedade é mantida. Assim, construímos um método para montar/desmontar uma sequência em \mathcal{A}_n . O que queremos é mostrar que existe uma bijeção entre este conjunto e algum outro que seja contado pelos números de Catalan.

Faremos isto da seguinte maneira:

- 1) Construa uma cadeia de sequências, começando de $(1, 1)$ e chegando até a sequência desejada. Sabemos que é possível fazer isto pelos argumentos apresentados anteriormente.
- 2) Quando obter a sequência desejada, anote os termos que foram somados em cada etapa.
- 3) Desenhe $n + 1$ pontos sobre uma linha e enumere-os de 1 a $n + 1$ da esquerda para a direita. Sempre que tivermos $a_k + a_j = a_i$ com $k < i < j$ então construa a aresta que conecta i e j .

Teremos como resultado (i.e. a imagem da sequência pela função definida) é um conjunto com n pontos dispostos em uma linha e conectados dois a dois. Como $i < j$ e a_i é o resultado de uma única soma, temos que o conjunto obtido tem pontos a esquerda (que representam os resultados das somas) distintos.

Pela definição, cada a_i é resultado de uma única soma, portanto é ponto final de uma única aresta. Assim, dados duas sequências diferentes, temos que a soma de algum termo i é diferente nos dois casos, e portanto as arestas devem conectar pontos diferentes. Assim, o processo é injetivo.

Agora, dado um elemento no conjunto dos pontos, queremos mostrar que conseguimos recuperar uma sequência do conjunto \mathcal{A}_n . Vamos então pegar uma árvore qualquer e tentar montar uma sequência a partir dela. Faça o seguinte:

- 1) A configuração do conjunto de pontos foi construído de tal forma que temos blocos de pontos e arestas. Comece pelo bloco com a aresta de maior comprimento, ou seja, a aresta que conecta os pontos mais distantes. Se existir duas arestas de mesmo tamanho, escolha a mais a esquerda. Seja k_j o número de arestas que saem do ponto j , ou seja, o número de arestas que ligam j a i com $i < j$. Então ligue j a 0 e depois ligue j aos $k_j - 1$ pontos do bloco, começando pelo ponto mais a esquerda.
- 2) Faça para os outros blocos de aresta. Ligue o ponto mais a direita com o ponto a_0 , e os outros pontos, comece ligando a partir do ponto final do bloco anterior.

No fim, teremos uma sequência de operações de adição que, pelo que já vimos anteriormente, vai formar uma sequência em \mathcal{A}_n . Ou seja, para toda árvore, existe uma sequência em \mathcal{A}_n tal que elas se relacionam. Temos então a bijeção desejada.

Exemplo 4.1.1. Vamos mostrar em um exemplo como funciona a bijeção. Primeiro, vamos construir a sequência $(1, 3, 5, 7, 2, 5, 3, 1)$

$$(1, 1) \rightarrow (1, \mathbf{2}, 1) \rightarrow (1, \mathbf{3}, 2, 1) \rightarrow (1, 3, 2, \mathbf{3}, 1) \rightarrow (1, 3, \mathbf{5}, 2, 3, 1) \rightarrow (1, 3, 5, \mathbf{7}, 2, 3, 1)$$

Então temos:

$$\begin{cases} a_4 = a_0 + a_7; \\ a_1 = a_0 + a_4; \\ a_2 = a_1 + a_4; \\ a_3 = a_2 + a_4; \\ a_6 = a_4 + a_7; \\ a_5 = a_4 + a_6. \end{cases}$$

E as arestas construídas serão (i, j) com $i < j$:

$$(4, 7), \quad (1, 4), \quad (2, 4), \quad (3, 4), \quad (6, 7), \quad (5, 6).$$

Teremos então o grafo com linha preenchida, na Figura 4.1.

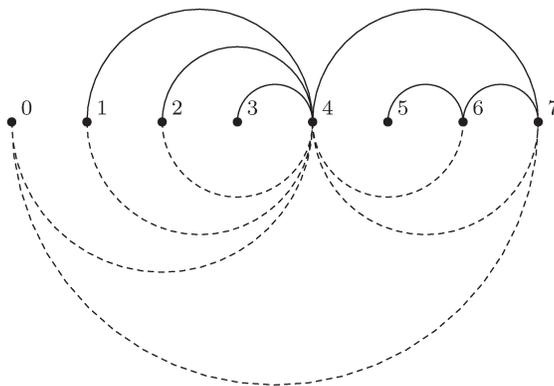


Figura 4.1: Bijeção entre a sequência de \mathcal{A}_n e um grafo com pontos distintos a esquerda

Agora, pegando o grafo, perceba que existem dois blocos de arestas, um que cobre os pontos 1 a 4 e o outro que cobre os pontos 4 a 7. Pelo passo 1), vamos escolher o bloco cujo maior ponto é o 4. Como temos três arestas saindo do ponto 4, ligaremos as arestas nos pontos 0, 1 e 2. Como não há mais nenhuma aresta saindo de nenhum ponto menor do que 4, vamos pro próximo bloco. Temos agora duas arestas saindo do ponto 7 e uma saindo do ponto 6. Ligaremos, então o ponto 7 ao ponto 0 e ao ponto 4 e depois ligaremos o ponto 6 ao ponto 4. As ligações feitas estão representadas pelos semicírculos pontilhados na Figura 4.1. Para reconstruir a sequência vamos usar os ciclos formados na Figura 4.1:

$$\begin{cases} a_0 + a_7 = a_4; \\ a_0 + a_4 = a_1; \\ a_1 + a_4 = a_2; \\ a_2 + a_4 = a_3; \\ a_4 + a_7 = a_6; \\ a_4 + a_6 = a_5. \end{cases}$$

Como $a_0 = a_7 = 1$, temos $a_4 = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = 7$, $a_6 = 3$, $a_5 = 5$, recuperando a sequência original.

4.2 Sequências com soma parcial menor do que i

Seja \mathcal{B}_n o conjunto das sequências de inteiros não negativos (a_1, \dots, a_n) tal que a soma parcial até um termo i é sempre maior ou igual a i e a soma dos elementos da sequência é igual a n . Para o caso $n = 3$, temos

$$\mathcal{B}_3 = \{111, 120, 210, 201, 300\}.$$

Para estabelecer a bijeção, vamos primeiramente fazer a seguinte função que transforma a sequência original em uma sequência das somas parciais. Seja $a = (a_1, \dots, a_n)$, então

$$f(a) = (b_1, b_2, \dots, b_n), \quad \text{com } b_i = \sum_{k=1}^i a_k.$$

A função f que acabamos de construir é uma função bijetora. A sua inversa é facilmente encontrada se percebermos que $b_{i+1} = b_i + a_{i+1}$ para $i < n$. Agora que fizemos esta adaptação, vamos relacionar as sequências que são imagem de \mathcal{B}_n por f com um caminho reticulado.

Sabemos que o conjunto dos caminhos reticulados de $(0, 0)$ a (n, n) que não cruzam a reta $x = y$ é contado pelos números de Catalan. Então tome um destes caminhos, que chamaremos de \mathcal{P} . Seja b_i a área acima do eixo x , limitada por $x = i - 1$, $x = i$ e abaixo do caminho \mathcal{P} . Como este caminho sempre se encontra acima da reta $x = y$, temos que a área é sempre maior do que i e que para $i = n$, $b_n = n$. Assim, temos uma sequência (b_1, \dots, b_n) crescente tal que $b_i \geq i$ para $i = 1, \dots, n - 1$ e $b_n = n$. Se aplicarmos a inversa da função f definida acima, teremos uma sequência em \mathcal{B}_n .

Para ver que isso de fato é uma bijeção entre os dois conjuntos, perceba que dois caminhos diferentes terão áreas diferentes e obtemos sequência distintas (injetividade). Agora, tome uma sequência qualquer em \mathcal{B}_n . Aplicamos f e conseguimos uma outra sequência com propriedades já discutidas. Podemos assim, criar um caminho reticulado, acoplando os retângulos e marcando o caminho. Portanto, conseguimos uma identificação um a um dos dois conjuntos. Portanto, a quantidade de sequências em \mathcal{B}_n é dado pelo n -ésimo número de Catalan.

Exemplo 4.2.1. Considere o caminho dado na Figura 4.2. Conforme citamos acima, podemos criar os termos b_i da sequência a partir da área entre $x = i - 1$ e $x = i$. Conseguimos então que $b_1 = 2$, $b_2 = 3$, $b_3 = 3$, $b_4 = 4$ e $b_5 = 5$. Então, usando a função inversa de f , obtemos

$$f^{-1}(b) = (2, 1, 0, 1, 1),$$

que é uma sequência em \mathcal{B}_5 . A construção do caminho a partir desta sequência é feita facilmente.

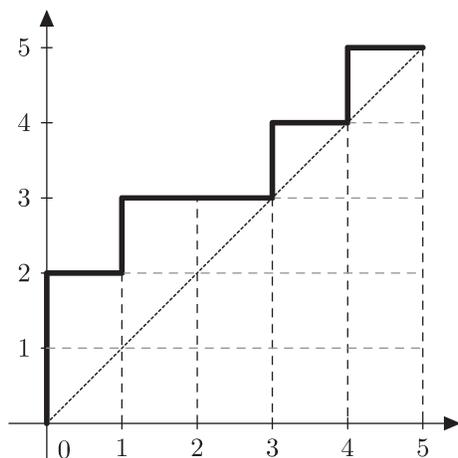


Figura 4.2: Caminho reticulado que é imagem de uma sequência em \mathcal{B}_5

4.3 Sequências crescentes com $a_i \leq i$

Vamos agora contar a cardinalidade do conjunto das sequências crescentes de n inteiros positivos, tal que $a_i \leq i$. Para cada n , denotaremos o conjunto destas sequências por \mathcal{C}_n . Portanto, para $n = 3$ temos as seguintes possibilidades:

$$\mathcal{C}_3 = \{123, 122, 111, 112, 113\}.$$

Seja $a = (a_1, \dots, a_n)$ uma sequência como na Seção 4.2 e seja $b = f(a) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ como definido na mesma seção. Agora, vamos criar uma função g , definida como

$$g(b) = c = (c_1, c_2, \dots, c_n), \text{ tal que } c_i = n + 1 - b_{n+1-i}.$$

A composta $g \circ f$ é uma função bijetora, pois é composta de duas funções bijetoras, cujo domínio é o conjunto das sequências em \mathcal{B}_n , descrito anteriormente. A imagem são as sequências c , tais que

$$c_i = n + 1 - b_{n+1-i} \leq n + 1 - (n + 1 - i) = i.$$

Temos também que $b_{n+1-i} \geq b_{n-i}$ e portanto

$$c_i = n + 1 - b_{n+1-i} \leq n + 1 - b_{n-i} = c_{i+1},$$

e a sequência c é não decrescente.

Então, temos que o conjunto das sequências não decrescentes de tamanho n tal que $c_i \leq i$, $i = 1, \dots, n$ tem a mesma cardinalidade do conjunto \mathcal{B}_n , que é o respectivo número de Catalan. Esta bijeção foi dada em [30, Exercício 6.19 (s)].

4.4 Sequências crescentes com $1 \leq a_i \leq 2i$

Estabeleça a seguinte função cujo domínio são as sequências de inteiros $a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1}$ tal que $1 \leq a_i \leq 2i$.

$$h(a) = b = (1, a_1, a_2 - 1, \dots, a_{n-1} - n + 2).$$

A função h é bijetora, e sua inversa é dada por

$$h^{-1}(b) = a = (b_2, b_3 + 1, \dots, b_n + n - 2).$$

Para descobrir qual a cardinalidade do conjunto formado pelas sequências a , vamos tentar descobrir qual a imagem de a por h . Sabemos que um elemento da imagem é uma sequência de tamanho n , tal que $b_{i+1} = a_i - (i - 1)$, para $i > 1$.

Usando que $a_i \leq 2i$, conseguimos que

$$b_{i+1} \leq 2i - i + 1 = i + 1.$$

Assim, como $b_1 = 1$, temos que

$$b_i \leq i, \text{ para todo } i = 1, \dots, n. \quad (4.2)$$

Também, como

$$b_i = a_{i-1} - (i - 2) < a_i - (i - 2) < a_i - (i - 1) + 1 = b_{i+1} + 1.$$

Novamente usando que $b_1 = 1 \leq a_1$, temos

$$b_i \leq b_{i+1} \text{ para todo } i = 1, \dots, n. \quad (4.3)$$

Assim, o conjunto imagem de h são sequências $b = (b_1, \dots, b_n)$ satisfazendo as condições (4.2) e (4.3). As sequências que satisfazem essas condições são elementos do conjunto mostrado na Seção 4.3. Como os conjuntos estão em bijeção, temos o resultado.

4.5 Permutações em um multiconjunto

Um *multiconjunto* é um conjunto no qual é possível ter várias cópias de um mesmo elemento. Por exemplo, $\{1, 2, 2, 3\}$ é um multiconjunto, e podemos representá-lo por $\{1, 2^2, 3\}$.

Seja \mathcal{D}_n o subconjunto das permutações do multiconjunto $\{1^2, 2^2, \dots, (n+1)^2\}$ tal que o primeiro aparecimento de $1, 2, \dots, n+1$ ocorre na ordem e entre os dois aparecimentos de i existe exatamente um $i+1$ para $i = 1, 2, \dots, n$. No caso de $n = 3$, temos as cinco possibilidades abaixo

$$\mathcal{D}_3 = \{12132434, 12134234, 12314234, 12314234, 12341234\}$$

Um esquema da bijeção é dado em [28, Exercício 6.19 (c^7)] e é devido a D. Callan.

As duas primeiras entradas da permutação devem ser necessariamente 1 e 2, pois 2 deve aparecer entre dois 1's e a primeira ocorrência de $1, 2, \dots, n+1$ ocorre nesta ordem. Então, retiramos os

dois primeiros termos e ficamos com uma sequência $a_1 a_2 \cdots a_{2n}$, contendo apenas um 1 e um 2 e dois exemplares de cada um dos valores de 3 a $n + 1$.

Agora, anotamos a primeira ocorrência de $3, 4, \dots, n + 1$. Queremos mostrar que esta primeira ocorrência dos termos estabelece uma bijeção com o conjunto das sequências contadas na Seção 4.4. Vamos chamar de b_{j-2} a posição de $j = 3, 4, \dots, n + 1$. Pela propriedade da sequência, temos que a primeira ocorrência de j deve aparecer entre dois $j - 1$ e, depois deste j , devem aparecer duas cópias de $j + 1, \dots, n + 1$. Além disso, um outro j também deve ocorrer após o primeiro.

Portanto, temos $2(n+1-j) + 2 = 2(n+2-j)$ termos após o primeiro j . Considerando que a sequência a tem $2n$ termos, o primeiro j deve aparecer antes da posição $2n - 2(n+2-j) = 2(j-2)$. Assim, como b_{j-2} é a posição de j , temos que $b_{j-2} \leq 2(j-2)$, ou seja, $1 \leq b_k \leq 2k$, que é a sequência contada anteriormente.

Para ver que isto é de fato uma bijeção, basta mostrar que, dada as posições dos valores $3, 4, \dots, n + 1$, a sequência é recuperada. Em uma sequência de tamanho $2n$, coloque os termos $j = 3, \dots, n + 1$ nas posições b_{j-2} . Com isso, sobrarão $n + 1$ espaços, que serão completados colocando 1 logo depois da primeira ocorrência do 3, 2 logo após a ocorrência do 1 e assim por diante.

Por último, colocamos 12 no começo da sequência. Desta forma, conseguimos criar a sequência e manter a propriedade de existir apenas um $k + 1$ entre duas ocorrências de k . Perceba que isto é o mesmo que colocar $1, 2, \dots, n + 1$ nesta ordem nos espaços faltantes. Isto, portanto, prova a sobrejetividade que queríamos.

Exemplo 4.5.1. A sequência

1 2 1 3 4 2 5 3 6 7 4 5 6 7

tem a propriedade de que, entre as duas ocorrências de $k = 1, 2, \dots, n$ existe *exatamente* um $k + 1$. Vamos então transformá-la na outra sequência. Para isto, retiramos os dois primeiros termos e note que a ocorrência de 3, 4, 5, 6 e 7 ocorrem nas posições $b_1 = 2, b_2 = 3, b_3 = 5, b_4 = 7$ e $b_5 = 8$. E temos $1 \leq b_1 < b_2 < \cdots < b_5$ e $b_i \leq 2i$ para todo i .

Do mesmo modo, tomando a sequência $b = 2 4 5 7 8$, vamos mostrar que existe uma sequência a cuja a imagem é b . Construimos então

_ 3 _ 4 5 _ 6 7 _ _ _ _

Agora, colocamos $1, 2, \dots, 7$ nos espaços que sobram, e depois completamos com 12 no início, conseguindo

1 2 1 3 2 4 5 3 6 7 4 5 6 7,

que é uma sequência de \mathcal{D}_6 .

4.6 Permutações de n com restrições

Seja \mathfrak{S}_n as permutações do conjunto dos inteiros de 1 a n . Então, definimos \mathcal{E}_n como o subconjunto das permutações $a_1 \cdots a_n \in \mathfrak{S}_n$ para as quais não existe $1 \leq i < j \leq n$ satisfazendo $i < j \leq a_i < a_j$ e $a_i < a_j < i < j$. Como um exemplo, temos

$$\mathcal{E}_3 = \{123, 132, 213, 312, 321\},$$

e vamos então mostrar que a cardinalidade de \mathcal{E}_n é C_n , para todo n , exibindo uma bijeção dada em [28], sugerida por Eva Y.P. Deng.

Pegue $2n$ pontos e pinte de duas cores distintas (vermelho e azul, por exemplo) da esquerda para a direita, alternando as cores e começando com a cor azul. Assim, teremos n pontos azuis e n vermelhos. Agora, para qualquer elemento pertencente ao conjunto dado na Observação 3.8.2, teremos que os pontos vermelhos devem estar conectados a pontos azuis. Caso contrário, se conectássemos dois pontos vermelhos, por exemplo, haveria um número ímpar de pontos entre os dois e, com isso, não poderíamos conectar todos os pontos dois a dois sem cruzar as arestas.

Então, se existe uma aresta ligando o i -ésimo azul ao j -ésimo ponto vermelho, vamos escrever que $w(i) = j$, ou então que $a_i = j$, onde $a_1 a_2 \cdots a_n$ é a permutação desejada. Por definição, as arestas que conectam os pontos não se cruzam e, portanto, não temos as seguintes configurações

$$i < j < a_i < a_j \text{ ou } a_i < a_j < i < j.$$

Ou seja, as arestas que conectam i a a_i e j a a_j não podem se cruzar. Observe que assumimos, sem perda de generalidade, que $i < j$. Assim, caracterizamos a permutação que estamos trabalhando. A cada sequência de pontos conectados, temos uma permutação associada, tal que não existem $1 \leq i < j \leq n$ tal que $i < j < a_i < a_j$ ou $a_i < a_j < i < j$. Isto é, claramente, uma bijeção. A injetividade é óbvia dado que para arestas ligando pontos diferentes, teremos a_i 's diferentes. Da mesma forma, dado uma permutação, basta associar a ela a sequência de pontos, colorindo e criando as arestas. Temos, portanto, que esta permutação é contada pelos números de Catalan.

Exemplo 4.6.1. Vamos montar a permutação dada pelo conjunto de pontos conectados da Figura 4.3. Colorimos os pontos e pelas posições das arestas vemos que os pontos azuis estão conectados aos pontos vermelhos correspondentes às posições 3, 1, 2, 5 e 4, respectivamente. Assim, a permutação associada é $w = 31254$.

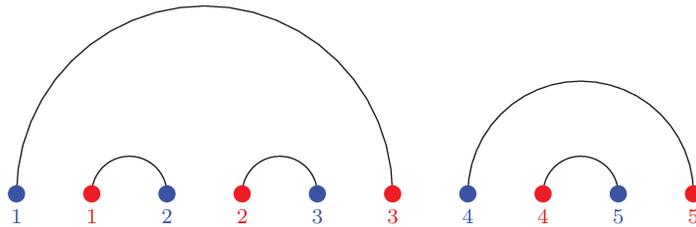


Figura 4.3: Conjunto de pontos conectados por arestas que não se cruzam

4.7 Permutações que evitam o padrão 321

A bijeção descrita nesta seção foi retirada de [25]. Antes de definirmos a bijeção do conjunto das permutações de n que evitam 123 no conjunto dos caminhos reticulados, vamos estudar e dar

algumas definições sobre essas permutações.

Seja w uma permutação de $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ e seja $j \in [n]$. Então, definimos $E_w(j)$ e $D_w(j)$ como os elementos a esquerda e a direita de j , respectivamente, em w . Um *máximo da esquerda para a direita* de w é o conjunto dos elementos j tal que $j > k$ e $k \in E_w(j)$. Chamaremos de M_w o conjunto ordenado de todos os máximos da esquerda para a direita de w e N_w o conjunto ordenado que contém os elementos restantes da permutação.

Exemplo 4.7.1. Tomando a permutação $w = 21546837$, e selecionando o termo 4, temos que $E_w(4) = \{2, 1, 5\}$ e $D_w(4) = \{6, 8, 3, 7\}$. Ainda, $M_w = \{2, 5, 6, 8\}$ e $N_w = \{1, 4, 3, 7\}$.

Dadas estas definições, podemos descrever um processo que transforma uma permutação w em uma sequência b , da seguinte forma: Se $w = w_0w_1 \cdots w_{n-1}$, faça o seguinte

Algoritmo 1:

Passo 1: Seja $b_0 = 0$

Passo 2: Para $i = 1, \dots, n - 1$

- a) $b_i = b_{i-1}$, se e somente se $w_i \in M_w$;
- b) $b_i = w_i$, se e somente se $w_i \in N_w$;

Primeiro, queremos mostrar que w é uma permutação que evita o padrão 321 se e somente se os elementos no conjunto N_w aparecem em ordem crescente. Para isto, pegue uma permutação que não evita 321, isto é, uma permutação que tenha uma subsequência de tamanho 3 decrescente. Então $a_i > a_j > a_k$ para $i < j < k$. Assim, temos que a_j e a_k não são máximos da esquerda para a direita e, portanto, $a_j \in N_w$, $a_k \in N_w$, e $a_j > a_k$. Ou seja, se w não evita 321, então os elementos de N_w não estão na ordem crescente.

Agora, se w contém elementos w_j e $w_k \in N_w$ com $j < k$ e $w_j < w_k$, então existe um elementos $a_i \in E_w(a_j)$ tal que $a_i > a_j$, e portanto w tem uma subsequência decrescente de tamanho 3, então w não evita 321, completando a demonstração.

Mostaremos agora que, se w evita o padrão 321, então a sequência b correspondente é uma sequência não decrescente, ou seja $b_0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_{n-1}$ e $b_j \leq j$, para $j = 0, 1, \dots, n - 1$. Assuma que $b_j > b_{j+1}$, para algum $j > 0$. Então, pelas regras da função descrita acima, temos que $b_{j+1} = a_{j+1} \in N_w$ e $b_j = a_l \in N_w$, desde que $b_j \neq 0$ para algum $l \leq j$. Mas $a_j > a_{j+1}$, o que contradiz o fato dos elementos de N_w estarem em ordem crescente.

Por outro lado, seja j o menor índice tal que $b_j > j$. Então $j > 0$. Segue então que $b_j \neq b_{j-1}$. Pela função descrita, temos que $b_j = a_j \notin N_w$, e, pela definição de N_w existe um elemento a_i tal que $a_i > a_j$ e $a_i \in E_w(a_j)$. Todos os a_{j-1} elementos que são menores do a_j devem pertencer em $E_w(a_j)$. Agora, se existir um elemento $a_l < a_j$ com $a_l \notin E_w(a_j)$, então (a_i, a_j, a_l) é uma subsequência decrescente de tamanho 3 em w . Deste modo, $E_w(a_j)$ deve ter, pelo menos, a_j elementos, mas isso contradiz o fato de $a_j > j$, pois $E_w(a_j)$ tem exatamente j elementos.

Agora, vamos usar uma transformação T que vai levar a sequência b numa sequência

$$\tilde{b} = (b_0 + 1, b_1 + 1, \dots, b_{n-1} + 1).$$

A transformação T é obviamente uma transformação bijetiva e a sequência \tilde{b} tem a propriedade de que

$$\tilde{b}_i = b_i + 1 \leq i + 1.$$

Observe que esta é a mesma sequência (a menos de uma troca nos índices) da Seção 4.3.

Queremos então, mostrar que pegando uma sequência \tilde{b} podemos recuperar uma permutação de tamanho n que evita 321. A transformação de \tilde{b} em b é biunívoca. Tomando então a sequência b , vamos criar uma função que leva em uma permutação desejada. Para isto comece com uma sequência vazia $a = (a_1, \dots, a_n)$, percorra os elementos de b e faça conforme o algoritmo abaixo:

Algoritmo 2:

Passo 1: Para $j > 0$, se $b_j \neq b_{j-1}$, então faça $b_j = a_j$

Passo 2: Complete os termos de a que permanecem vazios com os valores de $[n]$ faltantes, colocando-os na ordem crescente.

Vamos mostrar que sequência a formada é uma permutação que evita 321. O fato de ser uma permutação é óbvio, pois inserimos valores inteiros de 1 a n sem repetição. Agora, suponha que exista em a uma subsequência de tamanho 3 que seja decrescente. Então, pelo princípio da casa dos pombos, dois dos elementos da subsequência foram inseridos no mesmo passo do algoritmo anterior. Mas cada passo insere os elementos em ordem crescente e portanto, temos uma contradição, como queríamos. Temos ainda que a função definida pela inversa de T composta com o algoritmo é injetora. Portanto, obtemos uma correspondência um-a-um entre os elementos dos dois conjuntos. Temos assim uma bijeção e o resultado desejado.

Exemplo 4.7.2. Seja a permutação $w = 21534$, que evita o padrão 321. Vamos então transformá-la em uma sequência que pertence ao conjunto \mathcal{C}_5 . Antes de aplicar o **Algoritmo 1**, separamos w nos conjuntos $M_w = \{2, 5\}$ e $N_w = \{1, 3, 4\}$. Então, teremos pelo **Algoritmo 1**:

- $b_0 = 0$;
- $i = 1 \rightarrow w_1 = 1 \in N_w$ e então $b_1 = w_1 = 1$;
- $i = 2 \rightarrow w_2 = 5 \in M_w$ e então $b_2 = b_1 = 1$;
- $i = 3 \rightarrow w_3 = 3 \in N_w$ e então $b_3 = w_3 = 3$;
- $i = 4 \rightarrow w_4 = 4 \in N_w$ e então $b_4 = w_4 = 4$.

Como saída temos a sequência $b = (0, 1, 1, 3, 4)$. Então, somando 1 a cada elemento de b , obtemos $\tilde{b} = (1, 2, 2, 4, 5) \in \mathcal{C}_5$.

Agora, partindo da sequência $\tilde{b} = (1, 2, 2, 4, 5)$. Obtemos b subtraindo 1 de cada elemento, e assim $b = (0, 1, 1, 3, 4)$. E aplicando o **Algoritmo 2**:

- Começamos com uma sequência $a = (0, 0, 0, 0, 0)$;

- Pelo **Passo 1**, temos $a_0 = 0$ e

$$j = 1 \rightarrow b_1 \neq b_0 \text{ e então } a_1 = b_1 = 1;$$

$$j = 2 \rightarrow b_2 = b_1 \text{ e então } a_2 = 0;$$

$$j = 3 \rightarrow b_3 \neq b_2 \text{ e então } a_3 = b_3 = 3;$$

$$j = 4 \rightarrow b_4 \neq b_3 \text{ e então } a_4 = b_4 = 4.$$

- Pelo **Passo 2**, começamos com $a = (0, 1, 0, 3, 4)$.

Completamos a com os valores 2 e 5, obtendo $a = (2, 1, 5, 3, 4)$.

Como saída, temos $w = 21534$, que evita 321, exemplificando a bijeção.

4.8 Permutações de $2n + 2$ simétricas e que evitam 123

Vamos agora tratar do conjunto das permutações $w = a_1 a_2 \cdots a_{2n+1} \in \mathfrak{S}_{2n+1}$ que são simétricas, isto é, $a_i + a_{2n+2-i} = 2n + 2$ e que evitam o padrão 123, ou seja, não existe em w uma subsequência de tamanho 3 e crescente. Chamaremos este conjunto de \mathcal{F}_n . Para $n = 3$, existem as seguintes permutações

$$\mathcal{F}_3 = \{5764213, 6574132, 6754312, 7564231, 7654321\}$$

Por causa da característica de simetria, quando $i = n + 1$, temos $2a_{n+1} = 2n + 2$, e assim $a_{n+1} = n + 1$ para toda permutação em \mathcal{F}_n . Agora, além disso, temos que tais permutações evitam o padrão 123. Isto é, não existe uma subsequência de uma permutação $w \in \mathcal{F}_n$ que seja crescente. Por causa disso, temos que as últimas n entradas da permutação devem ser $1, 2, \dots, n$. Se uma das primeiras entradas fosse algum $i \leq n$, teríamos que a entrada correspondente, para manter a sequência simétrica, seria maior que $n + 1$, e a permutação não evitaria 123. Do mesmo modo, as últimas n entradas tem que evitar 123.

Podemos montar uma bijeção entre as permutações $w \in \mathfrak{S}_{2n+1}$ simétricas que evitam 123 e as permutações $u \in \mathfrak{S}_n$ que evitam 123. Começando com $u = u_1 u_2 \cdots u_n$, acrescentamos $n + 1$ e uma subsequência $v = v_n v_{n-1} \cdots v_1$ tal que $v_i = 2n + 2 - u_i$. A sequência formada $w = v(n + 1)u$ é uma permutação em \mathfrak{S}_{2n+1} , simétrica e que evita 123. Observe que essa maneira de construir é única, logo, uma bijeção.

Exemplo 4.8.1. Começemos com a sequência $u = 52413$. Para construir a sequência w correspondente, vamos escrever $v = 9(11)8(10)7$. Portanto, $w = v(n + 1)u = 9(11)8(10)7652413$.

4.9 Pats obtidos da permutação de $[n + 1]$

Em [9, Cap. 1], M. Gardner descreve um *flexágono* como um polígono construído a partir de tiras de papel cortadas ou retas, com a propriedade de mudar suas faces quando dobrado, ou flexionado. Neste mesmo texto, M. Gardner descreve como obter hexaflexágonos, flexágonos construídos com hexágonos. Um tratamento matemático a esse tipo de estrutura foi dado por C. Oakley e R. J. Wisner [20], que relacionaram os hexaflexágonos com uma certa classe de permutações, que denominaram por *pat*.

Podemos definir um pat como uma permutação $a \in \mathfrak{S}_{n+1}$, sendo a um conjunto unitário ou uma permutação que pode ser fatorada como $a = bc$, b e c permutações sendo todo elemento de b maior do que qualquer elemento de c . Além disso, o reverso de b e c também são pats. Quando $n = 3$, temos cinco permutações de 4 elementos que são pats

$$2431 \quad 3241 \quad 3412 \quad 4132 \quad 4213.$$

Queremos mostrar que o número de pats de $[n + 1]$ é dada pelo n -ésimo número de Catalan. Para isto, vamos exibir uma bijeção, dada em [2], entre um pat de $[n + 1]$ e uma estrutura de Catalan.

Escreva o pat p e, como podemos dividí-lo em p_1 e p_2 – divisão única, considere p_1 como a subárvore esquerda e p_2 como a subárvore direita para uma árvore T . Repita o procedimento em p_1 e p_2 . Sempre teremos subárvores a esquerda e a direita, nunca apenas uma delas. E a árvore resultante terá $n + 1$ folhas. Ou seja, dado um pat, obtemos uma árvore binária completa. Agora, para obter o pat a partir da árvore, vamos usar a indução e mostrar que é possível. Para $n = 1, 2$ temos um pat definido para cada, como pode ser visto na Figura 4.4.

Agora, para um n qualquer, suponha que conhecemos todos os pats de tamanho até $n - 1$ e já sabemos associar cada árvore binária plana completa com menos de n folhas a um pat. Pegue então uma árvore com n folhas. Tal árvore tem uma subárvore a direita com j folhas e uma a esquerda, com $n - j$ folhas. Para a subárvore a esquerda, associe um p_1 , permutação de $\{j + 1, \dots, n\}$ tal que a reversa seja um pat. Associe a subárvore a direita com uma permutação p_2 , de $[j]$. Assim, dada uma árvore montamos uma permutação $p = p_1 p_2$ tal que os elementos de p_1 são todos maiores do que os de p_2 e cada um deles é uma permutação cuja reversa é um pat. Logo, p é um pat de tamanho n , como queríamos provar.

Conseguimos portanto uma representação única de um pat como uma árvore binária completa, o que nos leva a uma bijeção. Logo, concluímos a demonstração. Na Figura 4.4, exibimos o caso $n = 1, 2, 3$, e mostramos a árvore correspondente aos pats existentes.

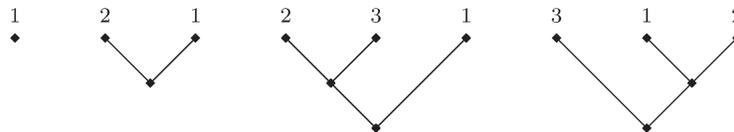


Figura 4.4: Bijeção entre árvores binárias planas e pats de tamanho 1, 2, 3

Exemplo 4.9.1. Vamos exemplificar a bijeção. Começamos com a permutação $p = 54786132$, que é um pat. A partir da raiz da árvore, primeiro dividimos $p = (54786)(132)$ onde $p_1 = 54786$ e $p_2 = 132$ – a subárvore a esquerda e a direita. Analisamos então separadamente, obtendo $p_1 = (54)(786)$ e $p_2 = (1)(32)$, onde os parêntesis representam as subárvores a esquerda e a direita. Da mesma maneira, dividimos

- $(54) = ((5)(4))$;
- $(786) = ((78)(6))$ e depois dividimos $(78) = ((7)(8))$;
- $(32) = ((3)(2))$.

Podemos então montar a árvore referente a este pat, que mostramos na Figura 4.5.

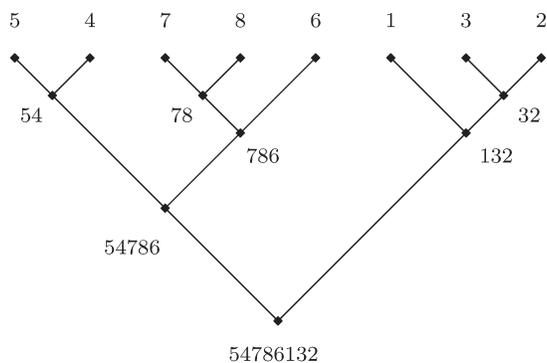


Figura 4.5: Árvore construída a partir do pat $p = 54786132$

Agora, vamos construir o pat a partir da árvore dada na Figura 4.6. Já dividimos a árvore em duas subárvores, a esquerda de tamanho 4 e a direita e tamanho 3. Temos que as duas subárvores representam permutações tal que a permutação reversa seja um pat. Tome, por exemplo, a subárvore a esquerda. Vamos nomear suas folhas como a_1, a_2, a_3 e a_4 , da esquerda para a direita. Então $p_1 = a_1a_2a_3a_4$ e $p_1^r = a_4a_3a_2a_1$ é um pat. Da mesma forma $p_2 = b_1b_2b_3$ e $p_2^r = b_3b_2b_1$ é um pat.

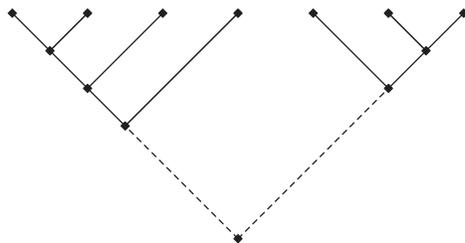


Figura 4.6: Construção da bijeção entre uma árvore e um pat

Vamos montar a árvore referente a p_2^r , que é o mesmo que refletir a árvore de p_2 por uma reta vertical, conforme mostra a Figura 4.7. A árvore da direita é a árvore refletida, que representa um pat. Podemos associá-la com o pat 231. Portanto $p_2^r = 231$ e $p_2 = 132$.

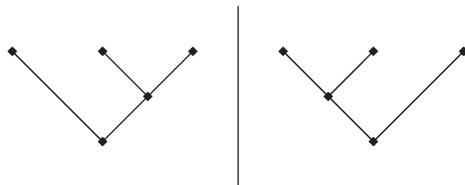


Figura 4.7: Subárvore representando p_1 (a esquerda) e sua reflexão (a direita)

Para p_1 , devemos fazer a mesma coisa, associando uma árvore ao pat p_1^r . Ao refletir a árvore, encontraremos o pat $p_1^r = 4132$ e portanto $p_1 = 2314$. Como todos os elementos de p_1 devem ser maiores do que os elementos de p_2 , somamos $j = 3$ a todas as entradas de p_1 e acoplamos as duas permutações, obtendo $p = 5647132$, que por definição, é um pat.

4.10 Pares de composições

Uma composição do inteiro n é uma sequência de inteiros positivos tal que a soma seja n , e a ordem das parcelas importa. Assim, $(3, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 2, 1)$ são algumas das composições de 5. Cada uma das parcelas da soma numa composição é chamado de *parte*.

Agora, considere α e β , composições de n em um mesmo número de partes. Queremos contar o número de pares de composições de n , (α, β) tal que a soma parcial das partes de α seja sempre maior ou igual a mesma soma em β . O caso $n = 3$ nos dá cinco diferentes pares,

$$(111, 111), \quad (12, 12), \quad (21, 21), \quad (21, 12), \quad (3, 3).$$

Agora, para ver que no caso n geral teremos a quantidade destes pares igual a C_n , tome um caminho reticulado que não cruza a reta $x = y$. Temos que, o número de passos na direção leste é sempre menor ou igual a quantidade de passos na direção norte. Sendo assim, comece a leitura do caminho pelo ponto $(0, 0)$. Conte quantos passos na direção norte temos até aparecer o primeiro passo para leste, e chame este valor de α_1 . Agora conte quantos passos na direção leste teremos e chame de β_1 . Repita o procedimento, chamando de α_i a quantidade de passos na direção norte entre o $(i - 1)$ -ésimo e o i -ésimo passo para o leste, e β_i a quantidade de passos para leste entre o $(i - 1)$ -ésimo e o i -ésimo passo para o norte.

Observe que obteremos um par (α, β) tal que ambos somam n , e a soma parcial dos elementos de α é sempre maior do que os elementos de β . Isso nos dá uma bijeção entre os dois conjuntos. Dado um caminho reticulado, construímos um par como dissemos acima. E dado um par, recuperamos o caminho. Portanto, sabemos que o conjunto dos pares de composição de n com a propriedade dada é contado pelos números de Catalan.

Exemplo 4.10.1. Vamos associar o par $(22, 13)$ com um caminho reticulado. Usando a função que definimos, teremos o seguinte caminho:

- 2 passos para Norte;
- 1 passo para Leste;
- 2 passos para Norte;
- 3 passos para Leste.

A Figura 4.8 mostra este caminho, mostrando em cores diferentes os passos para Leste e Norte.

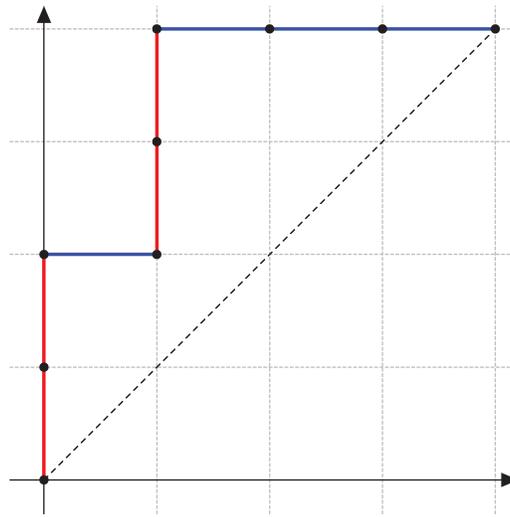


Figura 4.8: Caminho reticulado associado ao par $(22, 13)$

4.11 Fatorações primitivas

Seja um ciclo de permutação dado por $(1\ 2\ \dots\ n+1)$. Agora, considere uma fatoração deste ciclo em n transposições $(a_1\ b_1)(a_2\ b_2)\cdots(a_n\ b_n)$ com a propriedade de que $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ e $a_i < b_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. Esse tipo de fatoração é chamada de *fatoração primitiva*. No caso $n = 3$, temos as seguintes fatorações primitivas para o ciclo $(1\ 2\ 3\ 4)$

$$(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2), \quad (1\ 4)(1\ 2)(2\ 3), \quad (1\ 3)(1\ 2)(3\ 4), \quad (1\ 2)(2\ 4)(2\ 3), \quad (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4).$$

Para mostrar que o conjunto das fatorações primitivas do ciclo $(1\ 2\ \dots\ n+1)$ é contado pelos números de Catalan, vamos mostrar que este conjunto está em bijeção com o conjunto das permutações de n que evitam 231. O Lema 4.11.1 a seguir é a peça chave para a bijeção.

Lema 4.11.1. Seja $(a_1\ b_1)(a_2\ b_2)\cdots(a_n\ b_n)$ uma fatoração primitiva do ciclo $(1\ 2\ \dots\ n+1)$.

- (I) Se para algum j tivermos $a_j = a_{j+1}$, então $b_j > b_{j+1}$;
- (II) A sequência $b_1 b_2 \cdots b_n$ construída com o segundo componente de cada transposição é uma permutação de $\{2, 3, \dots, n+1\}$;
- (III) A permutação $b_1 b_2 \cdots b_n$ evita o padrão 231.

Demonstração. Faremos a demonstração dos três itens usando indução sobre os índices. Para o caso $n = 1$ e $n = 2$ o resultado segue facilmente. Vamos então ver o que acontece com um ciclo de tamanho $n + 1$.

Pela definição da fatoração primitiva, sabemos que todas as ocorrências do valor 1 ocorrem nas primeiras posições das primeiras transposições. Além disso, como a imagem de 1 na permutação é 2, temos que a última ocorrência de 1 na primeira posição acontece com a transposição $(1\ 2)$.

Então, seja $(1\ 2 \dots n+1) = (1\ b_1)(1\ b_2) \cdots (1\ b_{i-1})(1\ 2)(a_{i+1}\ b_{i+1}) \dots (a_n\ b_n)$ uma fatoração primitiva. Multiplique a esquerda os dois lados da expressão por $(1\ 2)$:

$$(1\ 2)(1\ 2 \dots n+1) = (1\ 2)(1\ b_1)(1\ b_2) \cdots (1\ b_{i-1})(1\ 2)(a_{i+1}\ b_{i+1}) \dots (a_n\ b_n),$$

e obtemos

$$(1)(2 \dots n+1) = (2\ b_1)(2\ b_2) \cdots (2\ b_{i-1})(a_{i+1}\ b_{i+1}) \dots (a_n\ b_n), \quad (4.4)$$

que é uma fatoração primitiva de um ciclo com n elementos, basta renomear as entradas, fazendo um shift de “ -1 ”.

Agora, os itens do Lema seguem facilmente. Temos que $b_1 > b_2 > \cdots > b_{i-1}$ pela hipótese de indução, e portanto provamos (I). Note que, como não alteramos a segunda parte da fatoração, a propriedade permanece inalterada.

Temos também que todos $b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n$ são distintos, pois são todos elementos correspondentes a segunda posição de uma transposição. Além disso, devem ser diferentes de 2, o lado direito de (4.4) representa uma fatoração de $(2\ 3 \dots n+1)$, satisfazendo todas as propriedades e, portanto, o menor valor não pode ocorrer na segunda posição de nenhuma transposição. Logo, temos que $b_i = 2$ e b_1, \dots, b_n são elementos distintos do conjunto $\{2, 3, \dots, n+1\}$ e portanto são uma permutação deste, provando (II).

Para demonstrar (III), assumamos que temos uma subsequência $b_j < b_k > b_l$, para $j < k < l$. O termo $b_i = 2$ não pode ocorrer na subsequência, pois é o menor valor possível e só poderia ser b_l . Porém, como os elementos antes de b_i estão em ordem decrescente, isso não pode acontecer. Então, a subsequência na forma procurada é uma subsequência de $(b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n)$. Mas, pela hipótese de indução, não existe nenhuma subsequência 231 aí. \square

Lema 4.11.2. Se σ é uma permutação e $\sigma = (a_1\ b_1)(a_2\ b_2) \cdots (a_k\ b_k)$ é a representação de σ no menor número possível de transposições, então, para cada i , a_i e b_i estão no mesmo ciclo de σ quando escrito como um produto de ciclos disjuntos.

Demonstração. Veja no artigo de P. Biane [1, Lema 2]. \square

A parte (III) do Lema 4.11.1 nos dá uma maneira de identificar uma fatoração primitiva a uma permutação de tamanho n que evita 231. Para que seja uma bijeção, precisamos mostrar que

para cada permutação $b_1 \cdots b_n$ existe uma única maneira de se obter números a_1, \dots, a_n tal que $(a_1 b_1)(a_2 b_2) \cdots (a_n b_n)$ seja uma fatoração primitiva. Da permutação, sabemos que exatamente um dos elementos será 2. Seja $b_l = 2$, por exemplo. Então a_1, a_2, \dots, a_l devem ser iguais a 1. Agora considere a permutação $\sigma = (a_l b_l)(a_{l-1} b_{l-1}) \cdots (a_1 b_1)(1 2 \dots n + 1)$, que é igual a $(a_{l+1} b_{l+1}) \cdots (a_n b_n)$. Do Lema 4.11.2 podemos considerar separadamente cada ciclo de σ , e depois aplicamos a regra recursivamente e teremos a escolha dos a_i , concluindo a bijeção.

Exemplo 4.11.3. Considere a permutação que evita 231: 32459687. Vamos então construir uma fatoração primitiva que gera esta sequência. Construimos então uma fatoração

$$(1 2 3 4 5 6 7 8 9) = (a_1 3)(a_2 2)(a_3 4)(a_4 5)(a_5 9)(a_6 6)(a_7 8)(a_8 7),$$

e temos que descobrir os a_i , $i = 1, \dots, 8$. Diretamente, tiramos que $a_1 = a_2 = 1$. Agora, usando a estratégia dada na construção da bijeção, vamos aplicar

$$(1 2)(1 3)(1 2 3 4 5 6 7 8 9) = (1)(2)(3 4 5 6 7 8 9) = (a_3 4)(a_4 5)(a_5 9)(a_6 6)(a_7 8)(a_8 7).$$

Então, associamos $a_3 = 3$, menor valor do ciclo com mais de um elemento da expressão anterior. Então, aplicamos

$$(3 4)(3 4 5 6 7 8 9) = (3)(4 5 6 7 8 9) = (a_4 5)(a_5 9)(a_6 6)(a_7 8)(a_8 7)$$

e podemos atribuir $a_4 = 5$. Aplicando novamente

$$(4 5)(4 5 6 7 8 9) = (4)(5 6 7 8 9),$$

e então, atribuímos $a_5 = a_6 = 5$. Falta agora determinar os valores de a_7, a_8 , que serão determinados da mesma forma.

$$(5 6)(5 9)(5 6 7 8 9) = (5)(6 7 8)(9),$$

chegando em $a_7 = a_8 = 6$. Este valor poderia ser obtido também se usássemos a propriedade de que $a_i < b_i$ para todo i . Portanto, obtemos a seguinte fatoração

$$(1 2 3 4 5 6 7 8 9) = (1 3)(1 2)(3 4)(4 5)(5 9)(5 6)(6 8)(6 7).$$

4.12 Pares de termos relacionados com uma permutação

Seja $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ uma permutação de n elementos. Um termo desta permutação w_i é um *Mínimo da direita para a esquerda* se, para todo $j > i$, temos $w_i < w_j$. Agora, em uma permutação w , pegue os mínimos da esquerda para a direita. Construa duas sequências a e b , sendo $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ e $b = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ tal que tenhamos b_i como os mínimos da direita para a esquerda de w e a_i a posição do i -ésimo mínimo. Seja \mathcal{J}_n o conjunto das sequências (a, b) . Por exemplo, para $n = 3$ temos os seguintes pares

$$\mathcal{J}_3 = \{(123, 123), (12, 13), (13, 23), (12, 23), (1, 3)\}.$$

Vamos montar uma bijeção entre o conjunto \mathcal{J}_n e os caminhos de Dyck de tamanho $2n$. Para isto, vamos seguir a bijeção dada por Y. Hu [13].

Dado um caminho de Dyck de tamanho $2n$ com k picos, lemos o caminho da esquerda para a direita fazendo a seguinte transformação que chamaremos de T :

- Nomeie os pontos finais dos passos $(1, 1)$ da esquerda para a direita de 1 a n . Como temos n passos $(1, 1)$ então temos n pontos finais;
- Nomeie os pontos iniciais dos passos $(1, -1)$ da esquerda para a direita de 1 a n . Temos também n pontos iniciais;
- Lembre que um pico é uma sequência de $(1, 1)$ seguido de um $(1, -1)$. Considere agora a coordenada (i, j) de um pico, sendo o pico o i -ésimo ponto final e o j -ésimo ponto inicial. Assuma que a coordenada dos k picos são $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_k, b_k)$. Então $a_1 < a_2 < \dots < a_k = m$ e $1 = b_1 < b_2 < \dots < b_k$.
- Obtenha uma especificação dos valores e posições e os mínimos da direita para a esquerda de uma permutação, fazendo $w(a_i) = b_i, 1 \leq i \leq k$.

Mostraremos agora que a transformação T dada é de fato uma bijeção. Primeiro, vamos mostrar que a transformação T nos dá uma permutação $w \in \mathfrak{S}_n$ tal que as posições dos mínimos da direita para a esquerda estão nas posições definidas.

Assuma que os nomes dos $n - k$ pontos finais dos passos $(1, 1)$ que não são picos são $c_1 < c_2 < \dots < c_{n-k}$ e os $n - k$ passos $(1, -1)$ que não são picos são $d_1 < d_2 < \dots < d_{n-k}$. Então

$$\{a_1, a_2, \dots, a_k, c_1, c_2, \dots, c_{n-k}\} = \{b_1, b_2, \dots, b_k, d_1, d_2, \dots, d_{n-k}\} = \{1, 2, \dots, m\}.$$

Como o número de passos $(1, 1)$ é sempre maior ou igual ao número de $(1, -1)$, temos que $c_j < d_j$ para todo $1 \leq j \leq m - j$. Então, coloque $w(a_i) = b_i$ e $w(c_j) = d_j$. Queremos mostrar que os mínimos da direita para a esquerda são os pares (a_i, b_i) .

Mas, para todo $j = 1, 2, \dots, m - k$, como um caminho de Dyck nunca passa abaixo do eixo x , deve haver um pico i no caminho entre c_j e d_j . Então, temos que $c_j < a_i$ e $b_i < d_j$. Então, na permutação w , temos $b_i = w(a_i) < w(c_j) = d_j$. Então, b_i está a direita de d_j . Então, d_j não pode ser um mínimo da direita para a esquerda.

Por outro lado, para todo i entre 1 e k , não existe um valor l tal que $b_l < b_i$ e $a_l > a_i$. Agora, se existir algum j entre 1 e $n - k$ tal que $d_j = w(c_j) < b_i = w(a_i)$ e $c_j < a_j$, então pelo parágrafo anterior, existe $1 \leq l \leq k$ tal que $b_l < d_j < b_i$ e $a_i < c_j < a_l$, obtendo uma contradição, provando que os únicos mínimos da direita para a esquerda são os pares (a_i, b_i) .

Agora vamos mostrar que a transformação inversa de T está bem definida e portanto T é uma bijeção.

Vamos tomar um conjunto de mínimos da direita para a esquerda de uma permutação

$$\{(a_i, b_i), 1 \leq i \leq k\}.$$

Então temos $a_1 < a_2 < \dots < a_k = m$ e $1 = b_1 < b_2 < \dots < b_k$. Vamos construir a correspondência com os caminhos de Dyck, partindo do ponto $(0, 0)$ e caminhamos a_1 passos para cima e voltamos para baixo, caminhando $b_2 - b_1$ passos e voltamos para cima, caminhando $a_2 - a_1$ passos para cima, e assim por diante. Generalizando, caminhamos $a_i - a_{i-1}$ passos para cima e depois $b_{i+1} - b_i$

passos para baixo $2 \leq i \leq n - 1$. No último passo, caminhamos $a_m - a_{m-1}$ passos para cima e depois $m + 1 - b_m$ passos para baixo. Durante todo o caminho, caminhamos

$$a_1 + (a_2 - a_1) + \cdots + a_m - a_{m-1} = a_m = m$$

passos para cima e

$$(b_2 - b_1) + \cdots + (b_m - b_{m-1}) + m + 1 - b_m = m$$

passos para baixo. Temos k picos e temos a garantia que o caminho não passa abaixo do eixo x , pois para todo i entre 1 e $k - 1$, temos $a_i \leq a_{i+1} - 1 \leq b_{i+1} - 1$ e portanto não caminhamos abaixo do eixo x .

Exemplo 4.12.1. Agora considere o caminho de Dyck representado na Figura 4.9. Primeiro, aplicamos a transformação T , obtendo as coordenadas marcadas nos picos do caminho $(2, 1)$, $(3, 3)$, $(5, 4)$, $(6, 5)$. Temos então a permutação

$$w = _13_45.$$

Como queremos montar uma permutação de seis elementos tal que 1, 3, 4 e 5 sejam mínimos da direita para a esquerda, e então, temos $c_1 = 1$, $c_2 = 4$ e $d_1 = 2$, $d_2 = 6$. E assim, a permutação será

$$w = 213645.$$

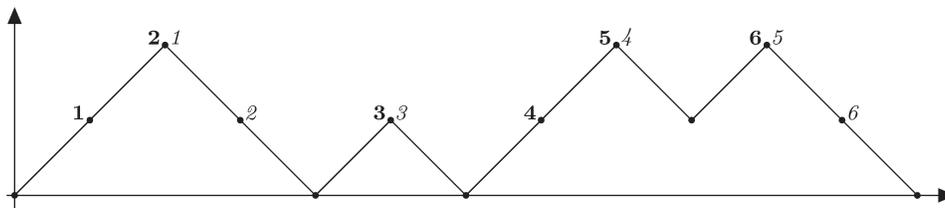


Figura 4.9: Caminho de Dyck marcado pela função bijetiva criada

4.13 Uma sequência construída recursivamente

Definimos uma sequência $a_1 a_2 \cdots a_n$ que será construída de forma recursiva, pelo seguinte processo

- 1 é uma sequência admissível;
- Obtemos $a_0 a_1 \cdots a_n$ de uma sequência de comprimento n de um dos dois modos:
 - (I) Acrescentamos 1 como último elemento da sequência de comprimento $n - 1$ ou
 - (II) Acrescentamos $a_{k-1} + a_k$ na posição entre os elementos a_{k-1} e a_k .

Para $n = 3$, temos cinco seqüências admissíveis, 1111, 1121, 1321, 1211 e 1231.

A bijeção (proposta por J. Stevens, segundo [28]) com o conjunto das triangulações de um polígono com $n + 2$ lados surge naturalmente da recursão. Começamos com um triângulo e fixe um dos vértices. Nomeie os outros vértices no sentido horário, a_0 e a_1 . Geramos a seqüência 11. Agora, para criar uma seqüência de comprimento $n + 1$ a partir de uma seqüência admissível de comprimento n podemos acrescentar 1 como último elemento da seqüência original, e isto significa que vamos acrescentar um vértice a direita de v , depois do vértice nomeado como a_n . Ou seja, pegamos o polígono triangulado P e acrescentamos um vértice, formando um triângulo com v e a_n , mantendo a propriedade da triangulação. Uma outra maneira é acrescentar um termo entre a_k e a_{k+1} , sendo este a soma dos valores dos vértices. Isso é o mesmo que acrescentarmos um novo vértice ao polígono P , entre a_k e a_{k+1} , novamente criando um triângulo com os dois vértices, mais o acrescentado.

Para mostrar que isto é de fato uma bijeção entre os dois conjuntos, pegue duas seqüências diferentes, a e a' . Ou seja, existe pelo menos um índice i tal que $a_i \neq a'_i$. Portanto em algum passo da recursão o processo de construção foi diferente. Como construímos a triangulação pelo mesmo processo, o resultado deverá ser duas triangulações distintas, também. Da mesma forma, se construirmos duas triangulações diferentes, pelo mesmo argumento, chegaremos a seqüências diferentes. Portanto, as triangulações e as seqüências estão relacionadas por um processo um a um, uma bijeção.

Exemplo 4.13.1. Vamos mostrar aqui o processo de construção de uma seqüência admissível e de uma triangulação, aplicando as mesmas regras para os dois. Primeiro a seqüência.

$$1 \rightarrow 11 \rightarrow 121 \rightarrow 1211 \rightarrow 13211 \rightarrow 143211 \rightarrow 1432111,$$

ou seja, aplicamos a seqüência de regras (II)(I)(II)(II)(I).

Vamos então aplicar agora estas mesmas regras ao polígono. O resultado das iterações está na Figura 4.10, e marcamos o vértice v de onde deve começar a enumeração e a leitura da seqüência. Cada polígono é o correspondente à seqüência gerada naquele passo. O último polígono a direita, por exemplo, corresponde à seqüência 1432111. Para ver isto, basta escrever a seqüência nos vértices do octógono e fazer a leitura.

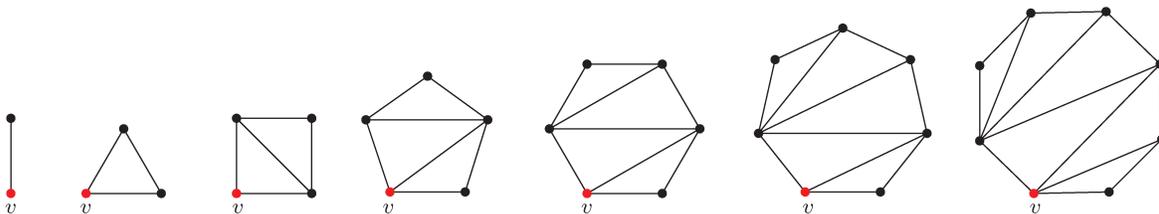


Figura 4.10: Processo de criação da triangulação

4.14 Matriz $2 \times n$ de inteiros

Um outro conjunto que também queremos mostrar que é contado pelos números de Catalan é o conjunto das matrizes $2 \times n$ tais que as entradas são valores de 1 a $2n$, sem repetição e que as linhas formem uma sequência crescente, assim como as colunas. O caso $n = 3$ é mostrado abaixo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

A bijeção neste caso é bem simples, retirada de [18]. Basta pegar qualquer expressão no conjunto \mathfrak{D}_n da Seção 3.3 e construir uma matriz da seguinte forma: colocamos na primeira linha as posições (na ordem crescente) do símbolo “(” e na segunda linha as posições, também na ordem crescente, do símbolo “)”. A injetividade é óbvia, dado que, para expressões diferentes, os parêntesis são colocados em posições diferentes e, portanto, teremos imagens diferentes.

A sobrejetividade também surge imediatamente, pois basta pegar uma matriz na forma descrita e colocar os símbolos “(” e “)” nas posições indicadas na primeira e segunda linhas, respectivamente. Se a_i são os elementos da primeira linha e b_i os da segunda, temos que $a_i < b_i$, portanto um parêntesis aberto vem sempre antes de um fechado. Ou seja, a sequência obtida é de fato uma sequência bem ordenada de n símbolos “(” e $n + 1$ “)”

Exemplo 4.14.1. Para $n = 3$, as matrizes e as expressões equivalentes são dados por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \iff ((());$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \iff ()(());$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \iff ()()();$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \iff (()());$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \iff (())().$$

5

Bijeções (III)

Neste capítulo, separamos uma última seleção de conjuntos que são contados pelos números de Catalan.

5.1 Pilha de moedas

Uma outra interpretação para os números de Catalan é contar de quantas maneiras podemos fazer uma pilha com moedas tal que a pilha seja decrescente e a base tenha n moedas. Ou seja, a primeira linha deve ter n moedas, a segunda linha deve ter no máximo $n - 1$ moedas e assim por diante. No caso com a base tendo $n = 3$ moedas, temos as 5 configurações dadas na Figura 5.1

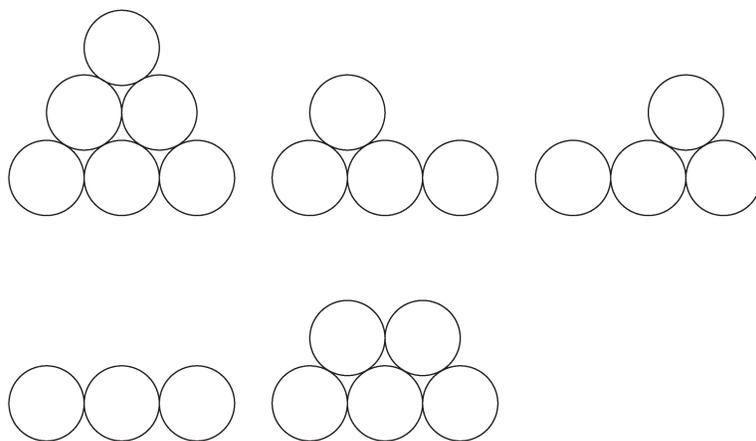


Figura 5.1: Pilhas de moedas tendo 3 moedas na base

Construiremos a bijeção fazendo o seguinte. Seja o quadrado de lado $\sqrt{2}$ tal que cada moeda

esteja inscrita neste quadrado. Agora vamos substituir todas as moedas por esses quadrados, encaixando-os conforme mostra a Figura 5.2(a).

Depois, marque apenas a borda da figura resultante, começando pelo quadrado mais a esquerda e indo até o quadrado mais a direita. O resultado será um caminho começando em um ponto e, por construção, nunca passando abaixo da reta horizontal que liga o ponto inicial ao ponto final. Ou seja, será um caminho com passos $(1, \pm 1)$ sempre acima do eixo x . Existe uma relação bijetiva entre tais caminhos e os caminhos dados na Seção 2.3.2. Na Figura 5.2(b), marcamos a linha que deverá ser o caminho construído.

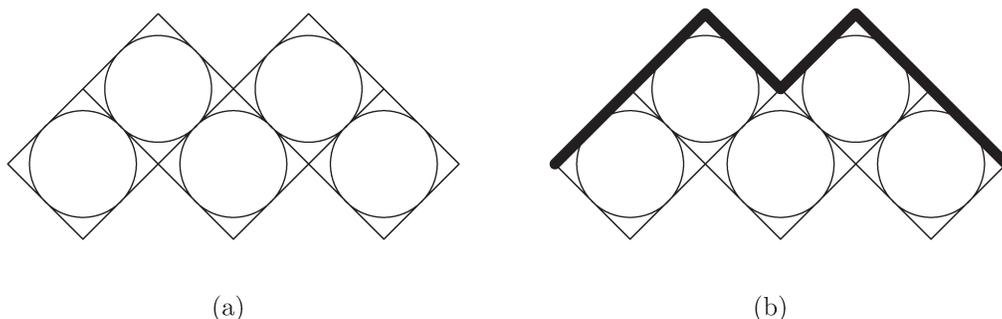


Figura 5.2: Relação entre a pilha de moedas e um caminho acima de uma reta horizontal

Note que a função estabelecida é de fato bijetiva. A maneira de traçar a linha como definimos acima é única e, além disso, está bem definida. Como a base sempre tem n moedas, e por causa da construção, garantimos que nunca a linha traçada nunca cruzará a reta horizontal que liga os centros das moedas.

Da mesma maneira, para cada caminho dado, recuperamos um bloco de moedas. Quadriculamos a região abaixo do caminho e colocamos n moedas na base. Depois completamos a pilha, colocando moedas dentro dos quadrados restantes. Ou seja, dado um caminho, recuperamos uma pilha de moedas e vice-versa. Isto mostra a bijeção entre os dois conjuntos, como queríamos.

5.2 Ladrilhamento em forma de escada

O seguinte problema também leva a uma interpretação usando os números de Catalan. Suponha que temos um bloco em formato de escada, isto é, um bloco com a primeira linha de tamanho n , a segunda de tamanho $n - 1$ e assim por diante. Suponha também, que queremos ladrilhar este bloco com ladrilhos de tamanho $m_1 \times m_2$, com $m_1, m_2 = 1, \dots, n$. Queremos saber de quantas maneiras possíveis podemos ladrilhar tal bloco usando exatamente n ladrilhos. Mostramos um exemplo na Figura 5.3, para o caso onde $n = 3$.

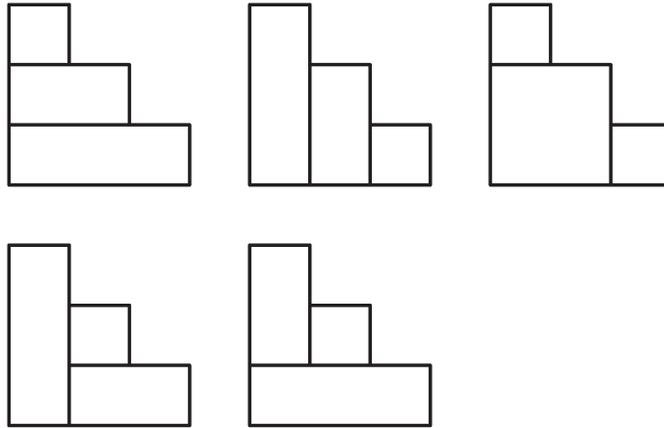


Figura 5.3: Ladrilhamento de um bloco com 3 degraus usando 3 ladrilhos

Existe uma bijeção entre os blocos e as árvores binárias planas completas. A idéia para esta bijeção foi dada em [28]. Para mostrar esta bijeção, vamos usar o processo de indução.

Para $n = 1$ só existe um bloco em forma de escada, e associamos ele à árvore binária com duas folhas. Suponha agora que podemos associar bijetivamente um bloco em forma de escada a uma árvore com $k + 1$ folhas (ou $2k + 1$ vértices) para todo $k \leq n - 1$. Queremos mostrar que é possível associar a cada bloco em forma de escada com n degraus uma árvore binária com $n + 1$ folhas. Para isto, tome um retângulo de dimensão $m_1 \times m_2$, de forma que $m_1 + m_2 = n + 1$. Destacamos o retângulo construído na Figura 5.4. A região **A** da Figura 5.4 tem $m_2 - 1$ degraus e a região **B** tem $m_1 - 1$ degraus. Pela relação entre m_1 e m_2 , temos que

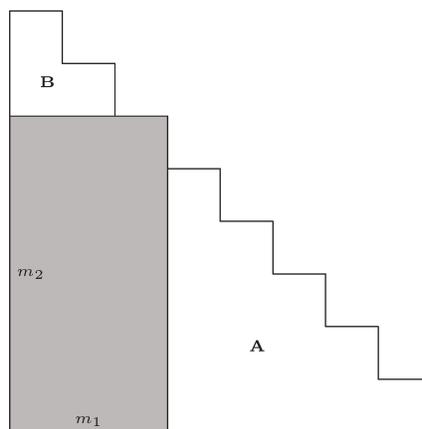


Figura 5.4: Construção da bijeção através da indução

- A região **A** tem $m_2 - 1 = n - m_1$ degraus e
- A região **B** tem $n - m_2$ degraus.

Teremos então dois blocos em forma de escada com tamanho menor ou igual a $n - 1$. Podemos dividir **A** em $m_2 - 1$ retângulos e **B** em $m_1 - 1$ retângulos e assim associar cada um deles a uma árvore binária, pela suposição de que já conhecemos a árvore binária associada a cada bloco. Então, dizemos que o vértice inferior esquerdo do retângulo destacado (na Figura 5.4) é raiz de uma árvore binária, que tem como subárvore esquerda a árvore associada a **A** e subárvore direita a árvore associada a **B**. Teremos então uma árvore com $n + 1$ folhas, como queríamos. Além disso, como toda árvore binária é unicamente determinada pelas suas subárvores esquerda e direita, temos uma bijeção.

Exemplo 5.2.1. Como exemplo, temos a Figura 5.5. Mostramos um bloco ladrilhado com 6 degraus e árvore correspondente. Perceba que o bloco que divide a árvore em duas subárvores é o bloco que contém o vértice inferior esquerdo. O ladrilhamento correspondente a cada subárvore é exibido abaixo da árvore.

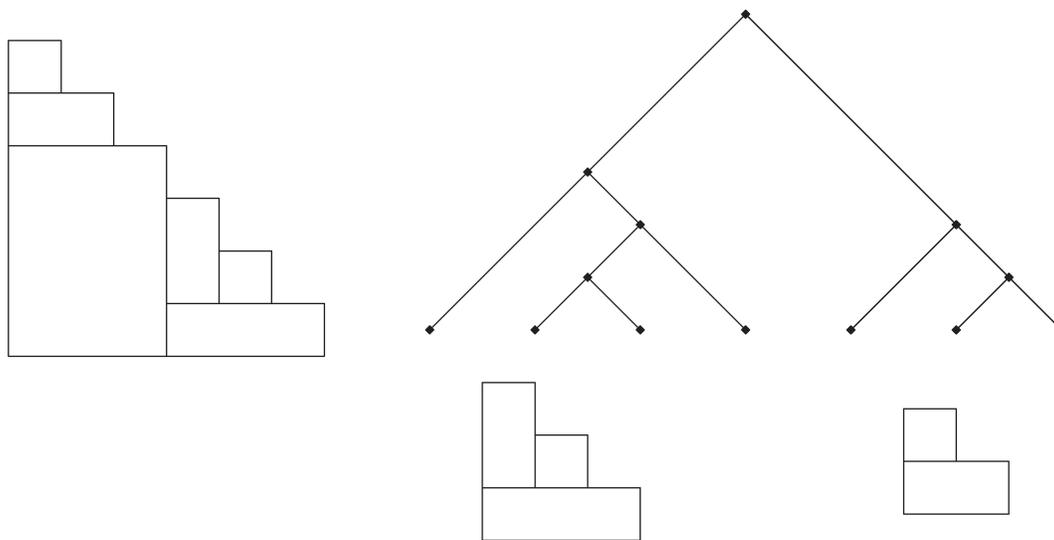


Figura 5.5: Exemplo da bijeção entre os ladrilhamentos e árvores binárias planas

5.3 Poliminós com perímetro $2n + 2$

Considere dois caminhos reticulados com passos $(0, 1)$ e $(1, 0)$, tendo cada caminho um total de $n + 1$ passos, partindo do $(0, 0)$ e terminando no mesmo ponto. Além disso, considere que eles só se intersectam nos pontos final e inicial. Vamos mostrar que este conjunto também é contado pelos números de Catalan.

Podemos enunciar o problema de outra maneira, chamando a região limitada pelos caminhos de *poliminó*. Então, o número de poliminós distintos com perímetro $2n + 2$ é dado pelo n -ésimo número de Catalan.

A bijeção mostrada aqui foi retirada de [30]. Na mesma referência, são citados outros artigos que também tratam deste problema ou do estudo de poliminós.

Da esquerda para a direita, nomeie as r colunas do poliminó de K_1, K_2, \dots, K_r . E seja a_i o número de quadrados na coluna K_i , para $1 \leq i \leq r$, e b_i o número de linhas em comum entre K_i e K_{i+1} , para $1 \leq i \leq k - 1$. Então, defina uma sequência de 0 e 1 da seguinte forma

$$\pi = 1^{a_1} 0^{a_1 - b_1 + 1} 1^{a_2 - b_1 + 1} 0^{a_2 - b_2 + 1} \dots 1^{a_r - b_{r-1} + 1} 0^{a_r},$$

onde o expoente nos valores 0 e 1 representam a repetição deles.

Vamos então analisar a sequência obtida. Observe que pela definição de um poliminó, $a_i \geq b_i$ e $a_{i+1} \geq b_i$, pois a interseção de duas colunas não excede a altura delas. Logo,

$$\begin{cases} a_i - b_i + 1 \geq 1; \\ a_{i+1} - b_i + 1 \geq 1, \end{cases} \quad (5.1)$$

e cada 0 e 1 na expressão de π aparece pelo menos uma vez. Além disso, temos que a quantidade de 0's em π é sempre menor ou igual do que a quantidade de 1, se lemos a sequência da esquerda para a direita. Podemos ver isso observando as desigualdades dadas em (5.1). A quantidade de 0's em um dado ponto da sequência é dado por

$$\sum_{i=1}^k a_i - b_i + 1,$$

e a quantidade de 1's é dado por

$$a_1 + \sum_{i=2}^k a_i - b_{i-1} + 1.$$

Logo, a quantidade de 1's menos a quantidade de 0's é

$$a_1 - b_1 + 1 - a_1 + \sum_{i=2}^k (a_i - b_{i-1} + 1) - (a_i - b_i + 1) = b_k - 1 \geq 0.$$

Garantimos que b_k é estritamente positivo pois se fosse igual a zero os dois caminhos reticulados iriam se interceptar, o que contraria a definição.

Vamos mostrar também que a sequência tem a mesma quantidade de 0 e 1. Para isto, basta somar até r as duas sequências separadamente.

$$\begin{cases} \#0 = \sum_{i=1}^{r-1} (a_i - b_i + 1) + a_r = \sum_{i=1}^{r-1} (1 - b_i) + \sum_{i=1}^r a_i, \\ \#1 = a_1 + \sum_{i=2}^r (a_i - b_{i-1} + 1) = \sum_{i=2}^r (1 - b_{i-1}) + \sum_{i=1}^r a_i. \end{cases} \quad (5.2)$$

Podemos ver que as duas somas são iguais. Portanto, a sequência π é uma sequência binária que se lida da esquerda para a direita, a quantidade de 0's é sempre menor ou igual a quantidade de 1's. Podemos então associar esta sequência a uma sequência bem ordenada de parêntesis com comprimento $2n$. Note que, da mesma forma, dada uma sequência de parêntesis podemos reconstruir o poliminó.

Observação 5.3.1. Para ver que a sequência binária gerada tem tamanho $2n$ considere separadamente as somas. A subtração $a_i - b_i$ nos mostra quantos quadrados sobram na coluna i . Então, $a_i - b_i$ é o número de passos na vertical na reta $x = i$, $i = 1, 2, \dots, r - 1$ e a_r é o número de passos verticais na reta $x = r$. Então, a soma destes termos deve ser o número de passos na vertical do caminho reticulado. Como cada caminho tem $n + 1$ passo no total, e devemos ter r passos na horizontal, temos que

$$\sum_{i=1}^{r-1} (a_i - b_i) + a_r = n + 1 - r,$$

e relacionando com a expressão em (5.2), temos que $\#0 = n$.

Exemplo 5.3.2. Vamos mostrar um exemplo da bijeção dada anteriormente. Primeiro, pegamos um poliminó, representado na Figura 5.6. As colunas deste poliminó tem as seguintes alturas $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 3, a_4 = 4, a_5 = 2$. Agora, calculando as intercessões, temos $b_1 = 2, b_2 = 1, b_3 = 3, b_4 = 2$. Deste modo, podemos calcular a sequência π , que é

$$\pi = 1^1 0^1 1^3 0^3 1^3 0^1 1^2 0^3 1^1 0^2 = 10111000111011000100.$$

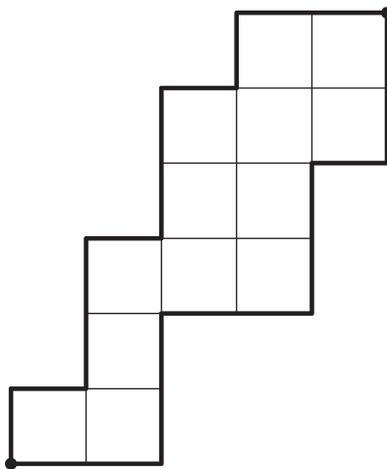


Figura 5.6: Polimonó

Agora, considere a sequência π e vamos ver que recuperamos o mesmo poliminó. Da sequência, tiramos que

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_1 - b_1 + 1 = 1 \\ a_2 - b_1 + 1 = 3 \\ a_2 - b_2 + 1 = 3 \\ a_3 - b_2 + 1 = 3 \\ a_3 - b_3 + 1 = 1 \\ a_4 - b_3 + 1 = 2 \\ a_4 - b_4 + 1 = 3 \\ a_5 - b_4 + 1 = 1 \\ a_5 = 2. \end{array} \right.$$

A última equação fica completamente determinada pelas anteriores, dado que o valor de a_5 é obtido diretamente dos valores anteriores. Assim, temos um sistema de 9 equações com 9 incógnitas. Podemos resolver esse sistema usando substituição, encontrando os valores para a_i e b_i , que devem ser valores únicos. Portanto, podemos construir o poliminó correspondente. Resolvendo o sistema, teremos exatamente os valores dados anteriormente, referentes ao poliminó da Figura 5.6.

5.4 Poliminó escada com altura $n + 1$

Agora vamos usar um tipo específico de poliminó, chamado de poliminó escada. Estes objetos são poliminós tais que cada borda no sentido horizontal tem tamanho 1. Vamos mostrar que conjunto dos poliminós escada com altura $n + 1$, \mathcal{H}_{n+1} é contado pelos números de Catalan. O caso $n = 3$ é dado abaixo.

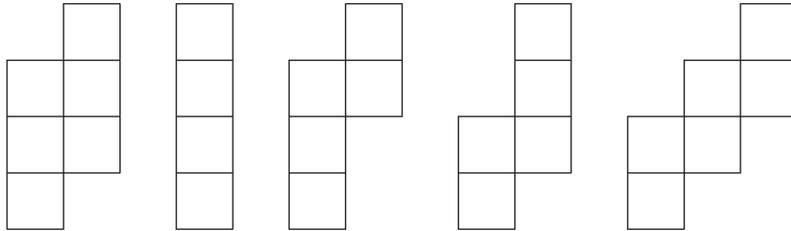


Figura 5.7: Poliminós do tipo escada com altura 4

A bijeção que será dada a seguir foi retirada do artigo de A. Reifegerste [23]. Pegando um poliminó escada P , vamos transformá-lo em duas sequências de inteiros, $\alpha = (l_1 - 1, l_2, l_3, \dots, l_w)$ e $\beta = (k_1, k_2, \dots, k_{w-1}, k_w - 1)$, onde l_i e k_i são os tamanhos do i -ésimo segmento vertical do caminho de cima e de baixo, respectivamente. Identificaremos o poliminó escada pelo par (α, β) e vice versa.

Dado um poliminó com largura w e altura $n + 1$, então α e β são composições de n (a soma das alturas dos segmentos menos um) em w partes (cada segmento horizontal tem tamanho 1, e então temos w segmentos horizontais).

Agora, tomando um par de composições de inteiros (α, β) , para termos um poliminó escada de largura w e altura $n + 1$ se e somente se as somas parciais de α são maiores do que as respectivas somas parciais em β . Vamos supor que esta condição falhe, ou seja, que $\alpha_1 + \dots + \alpha_i < \beta_1 + \dots + \beta_i$ para algum i . Então, temos que os caminhos que formam a borda do poliminó iriam se encontrar no ponto $(a_1 + \dots + a_i + 1, i)$, o que nos leva a uma contradição.

Então estabelecemos uma bijeção entre o conjunto \mathcal{H}_{n+1} e o conjunto dos pares de composição dados na Seção 4.10, que é contado por C_n . Logo $|\mathcal{H}_{n+1}| = C_n$.

Exemplo 5.4.1. Vamos mostrar a relação entre um poliminó escada e um par de composições. Tome por exemplo o poliminó escada da Figura 5.8. Vamos transformá-lo na composição, onde $\alpha = (1, 2, 1, 1)$ e $\beta = (1, 1, 2, 1)$. Do mesmo modo, dado o par (α, β) , colocamos os respectivos passos na horizontal, e montamos o caminho desejado.

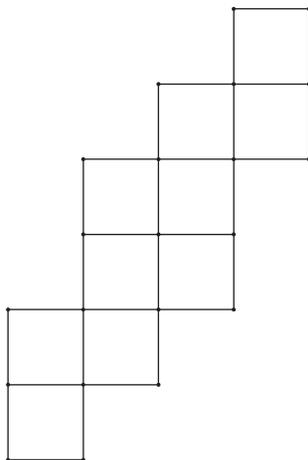


Figura 5.8: Poliminó escada com largura 4 e altura 6

5.5 Benzenóide triangular

Trataremos agora de um tipo especial de grafo. Vamos considerar apenas grafos planares, ou seja, grafos desenhados no plano. Então tome apenas grafos tais que a região limitada por eles sejam hexágonos, chamados de *grafos benzenóides*. As próximas definições foram extraídas de [5].

Além disso, uma classe mais simples de um grafo benzenóide será definido abaixo.

Definição 5.5.1. Um benzenóide triangular T_n é uma estrutura com $n(n + 1)/2$ hexágonos, dispostos em n linhas, tais que a linha i tem $n + 1 - i$ hexágonos, deslocados de meio hexágono para a direita com relação a linha imediatamente inferior, como mostra a Figura 5.9.

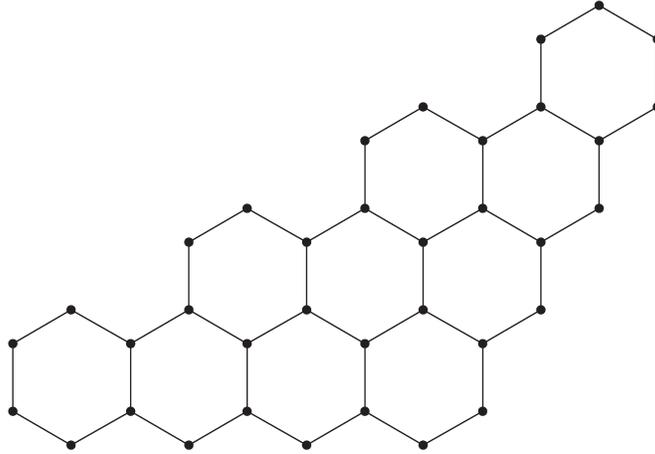


Figura 5.9: Benzenóide triangular B_4

Definição 5.5.2. Dado um grafo G , um acoplamento é um conjunto de arestas N tal que duas arestas não compartilham o mesmo vértice. Agora, um *acoplamento perfeito* (ou *perfect matching*) é um conjunto M de arestas do grafo G tal que cada vértice de G é incidente com exatamente uma aresta de M .

O conjunto dos acoplamentos perfeitos em um benzenóide triangular T_{n-1} será denotado por \mathcal{G}_n . Queremos mostrar que este conjunto é contado pela sequência de Catalan. Para o caso $n = 3$, temos as seguintes formas

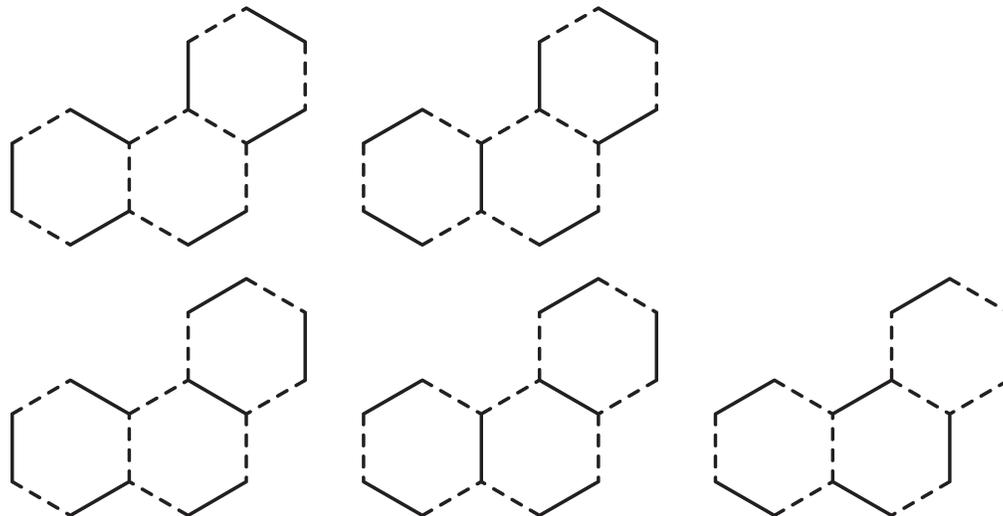


Figura 5.10: Benzenóides triangulares de tamanho 2

Antes de demonstrar a bijeção, vamos enunciar mais um resultado sobre os benzenóides triangulares.

Teorema 5.5.3. [5, Teorema 3.2] Toda acoplamento perfeito em um benzenóide triangular contém exatamente uma aresta vertical em cada linha.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [5]. □

A bijeção será mostrada a seguir: Faça uma leitura por linhas, começando da linha com apenas um hexágono, continuando depois na ordem crescente. Seja B_k o número de hexágonos a *direita* da barra vertical desenhada na linha k . Na primeira linha teremos ou 0 ou 1 hexágono, na segunda, de 0 a 2 e assim por diante, até termos de 0 a $n - 1$ hexágonos na última linha. Dado o valor B_k , construa um retângulo de dimensão $B_k \times 1$ e encaixe este retângulo colocando o vértice inferior esquerdo na posição $(0, k)$. Repita este procedimento (construção e encaixe) para todo $k = 1, \dots, n - 1$. Ao final, construa um caminho, começando em $(0, 0)$, indo a $(0, 1)$ e depois seguindo a borda interior da figura formada pelos blocos. Quando chegarmos a (j, n) para algum j , complete o caminho com passos horizontais até (n, n) .

Veja que, na linha k existe sempre um número menor do que k de hexágonos possíveis a direita. Temos também, pela definição do caminho criado (cf. [5]) que a sequência dos B_k é não decrescente. Isso define as propriedades do caminho: nunca cruza a reta $x = y$ e sempre é construído com passos $(0, 1)$ ou $(1, 0)$. Da mesma forma, dado um caminho reticulado, podemos recuperar o benzenóide triangular, determinando a posição B_k da barra vertical na linha k e completando, de maneira única, para termos uma acoplamento perfeito.

Exemplo 5.5.4. Pegamos um benzenóide triangular, conforme mostra a Figura 5.11. Se fizermos a leitura da maneira que mencionamos acima, vamos ter que, na primeira linha temos $B_1 = 1$. Assim, colocamos um quadrado com vértice em $(0, 1)$ (veja a Figura 5.11). Na segunda linha, temos $B_2 = 1$, e colocamos mais um quadrado, desta vez em $(0, 2)$. Por último temos $B_3 = 2$ e portanto, um retângulo dois por um com vértice $(0, 3)$. Temos portanto uma maneira de se transformar um benzenóide triangular em um caminho reticulado.

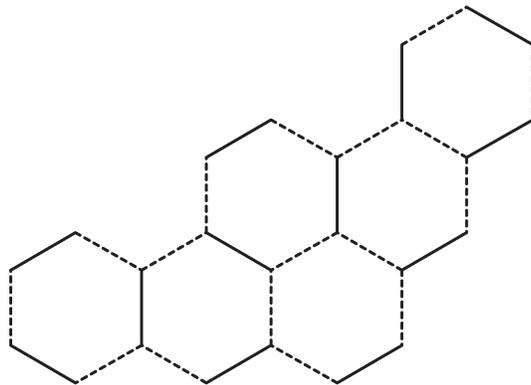


Figura 5.11: Benzenóide triangular de tamanho 3

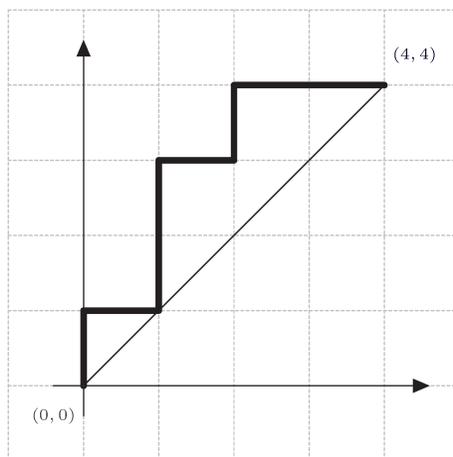


Figura 5.12: Caminho reticulado correspondente ao Benzenóide triangular da Figura 5.11

Conclusão

Neste trabalho, estudamos a sequência dos Números de Catalan, dando ênfase nas provas bijetivas que envolvem as diferentes interpretações combinatórias para esta sequência. Devido ao grande número destas interpretações – 207 até o fechamento deste trabalho, não foi (e nem seria) possível apresentar todas as bijeções existentes, cerca de 21 mil. Além disso, várias bijeções envolvendo esta sequência são óbvias ou muito próximas de outras bijeções que foram mostradas ao longo do texto. Então, tentamos exibir as bijeções mais clássicas e as que envolviam os conjuntos mais conhecidos contados por esta sequência, por exemplo as mostradas nas Seções 3.2, 3.3, 3.8 e 4.7. Tais conjuntos e bijeções são as mais citadas e julgamos que estas sejam as mais importantes em um primeiro estudo da sequência de Catalan.

Exibimos, também, algumas bijeções que nos desafiaram durante o trabalho, seja pela dificuldade inicial com elas, seja pela engenhosidade da solução. A saber, tais bijeções se encontram nas Seções 4.5, 4.6, 4.9, 5.2 e 5.5. Tentamos escrever as relações bijetivas para estes conjuntos de maneira clara, explicando cada passo da construção.

Apresentamos, ainda, na Seção 4.1 uma bijeção desenvolvida pelo autor do texto, diferente da proposta na literatura. Acreditamos que tal bijeção seja um pouco mais clara do que a conhecida.

De um modo geral, a escolha das bijeções se deu segundo os argumentos apresentados acima, aliados à proposta de escrever e exemplificar bijeções com maior apelo visual, para que o texto fluísse de maneira mais suave e não tediosa para o leitor.

Durante o trabalho, o que pudemos perceber é que existe uma vasta bibliografia de bijeções e interpretações combinatórias envolvendo a sequência estudada, que poderia ser um caminho a ser trilhado em trabalhos futuros. Um outro caminho seria partir para outras sequências de inteiros, trabalhando sempre com provas bijetivas e enumeração. Existe também a possibilidade de trabalhar com as generalizações dos números de Catalan, como por exemplos seus q -análogos e suas interpretações.

Referências Bibliográficas

- [1] P. BIANE, *Minimal factorizations of a cycle and central multiplicative functions on the infinite symmetric group*, journal of combinatorial theory, Series A, 76 (1996), pp. 197–212.
- [2] D. CALLAN, *Flexagons yield a curious Catalan number identity*, arXiv preprint arXiv:1005.5736, (2010).
- [3] E. CATALAN, *Note sur une équation aux différences finies.*, Journal de mathématiques pures et appliquées, (1838).
- [4] C. A. CHARALAMBIDES, *Enumerative Combinatorics*, CRC Press, 2002.
- [5] T. DOŠLIĆ, *Perfect matchings in lattice animals and lattice paths with constraints*, Croatica chemica acta, 78 (2005), pp. 251–259.
- [6] P. FLAJOLET AND R. SEDGEWICK, *Analytic Combinatorics*, Cambridge University Press, 2009.
- [7] S. FORCEY, M. KAFASHAN, M. MALEKI, AND M. STRAYER, *Recursive bijections for Catalan objects*, Journal of Integer Sequences, 16 (2013).
- [8] H. G. FORDER, *Some problems in combinatorics*, The Mathematical Gazette, (1961), pp. 199–201.
- [9] M. GARDNER, *Curious topological models*, Hexaflexagons and other Mathematical Diversions, (1959).
- [10] I. M. GELFAND, M. I. GRAEV, AND A. POSTNIKOV, *Combinatorics of hypergeometric functions associated with positive roots*, in The Arnold-Gelfand mathematical seminars, Springer, 1997, pp. 205–221.
- [11] H. W. GOULD, *Catalan and Bell numbers: Research bibliography of two special number sequences*. <http://www.math.wvu.edu/~gould/BibGood%20final.pdf>, 1979, editado e revisado em 2007. último acesso em 03-03-2014.
- [12] R. GRIMALDI, *Fibonacci and Catalan Numbers: An Introduction*, John Wiley & Sons, 2012.
- [13] Y. HU, *On the number of fixed-length semiorders*, Journal of Integer Sequences, 17 (2014).

- [14] T. KOSHY, *Catalan numbers with applications*, AMC, 10 (2009).
- [15] G. LAMÉ, *Un polygone convexe étant donné, de combien de manières peut-on le partager en triangles au moyen de diagonales?*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 3 (1838), pp. 505–507.
- [16] P. LARCOMBE, *The 18th century chinese discovery of the catalan numbers*, Mathematical Spectrum, 32 (1999), pp. 5–6.
- [17] J. LODDER, *Gabriel Lamé’s counting of triangulations*, AMC, 10, p. 12.
- [18] N. A. LOEHR, *Bijjective Combinatorics*, Chapman & Hall/CRC, 2011.
- [19] E. NETTO, *Lehrbuch der Combinatorik*, vol. 7, BG Teubner, 1901.
- [20] C. OAKLEY AND R. J. WISNER, *Flexagons*, American Mathematical Monthly, (1957), pp. 143–154.
- [21] I. PAK, *Who computed Catalan numbers?* <http://igorpak.wordpress.com/2013/02/20/who-computed-catalan-numbers>, 2013. último acesso em 06-03-2014.
- [22] P. PEART AND W.-J. WOAN, *Dyck paths with no peaks at height k*, J. Integer Seq, 4 (2001).
- [23] A. REIFEGERSTE, *The excedances and descents of bi-increasing permutations, preprint, 2002*, arXiv preprint math.CO/0212247.
- [24] O. RODRIGUES, *Sur le nombre de manières d’effectuer un produit de n facteurs.*, Journal de mathématiques pures et appliquées, (1838), p. 549.
- [25] D. ROTEM, *On a correspondence between binary trees and a certain type of permutation*, Information processing letters, 4 (1975), pp. 58–61.
- [26] J. P. D. O. SANTOS AND R. DA SILVA, *Aspectos combinatórios da teoria aditiva dos números*, (2010).
- [27] N. J. A. SLOANE ET AL., *The on-line encyclopedia of integer sequences*. <http://oeis.org/A000108>, 1964. último acesso em 23-02-2014.
- [28] R. P. STANLEY, *Catalan addendum, versão de 25 de maio de 2013*. <http://www-math.mit.edu/~rstan/ec/catadd.pdf>. último acesso em 20-02-2014.
- [29] R. P. STANLEY, *Enumerative Combinatorics, Vol. 1 (Cambridge Studies in Advanced Mathematics 49)*, Cambridge university press, 1997.
- [30] —, *Enumerative Combinatorics, Vol. 2 (Cambridge Studies in Advanced Mathematics 62)*, Cambridge University Press, 2001.
- [31] D. STANTON AND D. WHITE, *Constructive combinatorics*, Springer-Verlag New York, Inc., 1986.