UNICAMP

CARLOS EDUARDO DE OLIVEIRA

TRIGONOMETRIA DO ENSINO MÉDIO E APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES POR POLINÔMIOS TRIGONOMÉTRICOS

CAMPINAS
2014

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

**INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA**

CARLOS EDUARDO DE OLIVEIRA

TRIGONOMETRIA DO ENSINO MÉDIO E APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES POR POLINÔMIOS TRIGONOMÉTRICOS

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

Orientador(a): Ary Orozimbo Chiacchio

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA
DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO(A) ALUNO
CARLOS EDUARDO DE OLIVEIRA E ORIENTADA PELO(A)
PROF. DR ARY OROZIMBO CHIACCHIO

Assinatura do(a) Orientador(a)

Ary O. Chiacchio

**CAMPINAS
2014**

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

OL4t Oliveira, Carlos Eduardo, 1981-
Trigonometria do ensino médio e aproximação de funções por polinômios trigonométricos / Carlos Eduardo de Oliveira. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Ary Orozimbo Chiacchio.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Trigonometria. 2. Teoria da aproximação. I. Chiacchio, Ary Orozimbo,1957-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: High school trigonometry and approximation of functions by trigonometric polynomials
Palavras-chave em inglês:
Trigonometry
Approximation theory
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestre
Banca examinadora:
Ary Orozimbo Chiacchio [Orientador]
Maria Sueli Marconi Roversi
Ires Dias
Data de defesa: 26-03-2014
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 26 de março de 2014 e aprovada Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Ary O. Chiacchio

____
Prof.(a). Dr(a). ARY OROZIMBO CHIACCHIO

____
Prof.(a). Dr(a). MARIA SUELI MARCONI ROVERSI

Ires Dias

____
Prof.(a). Dr(a). IRES DIAS

ABSTRACT

In this work we present a proposed approach of the educational content of high school trigonometry with theoretical presentation, exercises and problems, both ranked by difficulty level in order to assist and measure the individual progress of each student during the text.

We also present, in addition to the above content, the approximation of continuous functions by trigonometric polynomials with the aid of the Weierstrass Approximation Theorem.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos uma proposta de abordagem do conteúdo didático-programático de trigonometria de ensino médio, com apresentação teórica, exercícios e problemas, ambos classificados por nível de dificuldade, com o intuito de auxiliar e mensurar a evolução individual de cada aluno no decorrer do texto.

Apresentamos também, além do conteúdo supramencionado, a aproximação de funções contínuas por polinômios trigonométricos com o auxílio do Teorema da Aproximação de Weierstrass.

SUMÁRIO

Às mulheres da minha vida.
À minha mãe Ângela.
À minha madrinha Angélica.
À minha avó Osvailda.
À minha irmã Marcella.
À minha esposa Maiara.
À minha filha – luz da minha vida – Alice.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que me ajudaram na elaboração deste trabalho.

Agradeço a meus familiares pelo apoio e confiança incondicional em minha capacidade.

Agradeço a minha esposa pelos momentos ao seu lado e pela paciência em me suportar.

Agradeço a minha filha e a seu futuro irmão por darem sentido à minha vida.

Agradeço aos meus amigos Thiago, Raul e Fábio pela companhia e parceria durante os dois últimos anos e pelas fantásticas tardes enogastronômicas.

Agradeço ao meu orientador Ary Orozimbo Chiacchio pela paciência, apoio e sábias correções.

Agradeço aos meus empregadores pelo suporte financeiro.

INTRODUÇÃO

A trigonometria é um dos mais antigos ramos da matemática, de fundamental importância no ensino médio e cada vez mais com maior incidência em exames de seleção. Apesar de muitos atribuírem aos gregos o início de seu estudo, há relatos históricos do conhecimento de propriedades trigonométricas no Papiro de Rhind e em tabelas cuneiformes babilônicas, ambos datados de aproximadamente 5000 a.C. Com o passar dos tempos, a trigonometria cada vez mais veio abandonando a correlação intrínseca à geometria euclidiana plana e ganhando sua abordagem particular com o conhecimento e aceitação dos arcos não pertencentes à primeira volta e sua associação ao estudo de funções que permitiu a aplicação de seus modelos em diversas situações práticas de características periódicas.

A primeira parte desta dissertação consiste em um curso básico de trigonometria para o ensino médio. No capítulo 1 apresentamos a trigonometria na sua forma mais pura, aplicável à geometria plana e com seus conceitos elementares mais básicos. Nos capítulos 2 a 5 apresentamos e associamos as propriedades trigonométricas inerentes aos ângulos agora aos arcos de circunferência, acarretando assim o surgimento de propriedades trigonométricas positivas e negativas e também a semelhança trigonométrica entre arcos de medidas diferentes. Nos capítulos 6 a 9 apresentamos a trigonometria por um enfoque prioritariamente algébrico, de fundamental importância para o surgimento de suas novas correlações com as funções apresentadas nos capítulos 10 e 11 seguintes.

Na segunda parte – capítulo 12 – apresentamos as definições e demonstramos os teoremas que garantem a aproximação de funções reais contínuas por polinômios trigonométricos.

A motivação da elaboração deste trabalho teve origem na necessidade da criação de um material didático com enfoque principal na trigonometria de ensino médio que forneça suporte aos estudantes para realização de exames vestibulares e, ao mesmo tempo, seja pré-requisito àqueles que pretendem prosseguir seus estudos de ensino superior em ciências exatas.

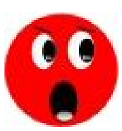
O texto, elaborado em cores, com gráficos e ilustrações vetorizadas, vem estruturado na forma de capítulos e com cada um destes dividido em subitens com o intuito de facilitar a localização de cada conteúdo específico de um determinado tema. Estes conteúdos, fórmulas e conceitos são todos demonstrados de forma clara e objetiva, com auxílio da interlocução, para tornar a leitura mais inteligível e agradável ao aluno. Ao final de cada conteúdo ou bloco de conteúdos, o texto apresenta uma seção de exemplos resolvidos, com o intuito imediato de aplicar em problemas os conceitos supra desenvolvidos.

Ao final de cada capítulo, é também apresentada uma seção de exercícios – de conhecimento geral, de elaboração do autor ou selecionados em bancos de dados dos principais exames de seleção conhecidos – classificados sobre quatro níveis de dificuldade/aprendizado:

Problemas de aplicação direta de uma conceito relacionado ao capítulo – em geral não é necessário relembrar outros conceitos ou usar de operações algébricas de maior complexidade.

Problemas de aplicação direta de algum conceito relacionado ao capítulo mas que exigirá a relação com algum outro conceito da matemática ou operações algébricas de maior complexidade.

Problemas que exigem um conhecimento avançado da trigonometria de forma acumulativa, bem como sua correlação com outros conceitos da matemática.



Problemas da série desafio, com grau de complexidade muito avançado, sua realização não é necessária e fundamental a todos os alunos.

Capítulo 1

Trigonometria no triângulo retângulo

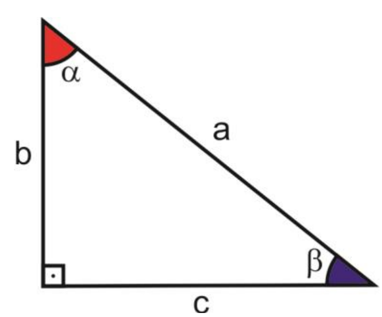
1.1. A Trigonometria

A trigonometria é o ramo da matemática que estuda as características dos ângulos e arcos de circunferências e suas aplicações à resolução de triângulos, deslocamentos na Terra, Astronomia dentre outros.

Muitos atribuem aos gregos o início do estudo da trigonometria, mas sabe-se hoje que esta informação é controversa. Há relatos históricos do conhecimento de propriedades trigonométricas no Papiro de Rhind e em tabelas cuneiformes babilônicas, ambos datados de aproximadamente 5000 a.C.

1.2. Triângulo Retângulo

Uma das mais importantes ferramentas da trigonometria e através da qual iremos definir em breve as primeiras propriedades trigonométricas é o **triângulo retângulo**, que é o triângulo que possui um ângulo reto (igual a 90°) e dois ângulos agudos (denotados por α e β na figura abaixo):



Os lados de um triângulo retângulo são nomeados como:

- Hipotenusa: É o lado oposto ao ângulo reto. É também o maior lado do triângulo:

No triângulo acima, o lado de medida **a** é a hipotenusa.

- Cateto Oposto: É o lado oposto a algum dos ângulos agudos tomado como referência:

No triângulo acima, o lado de medida **c** é o cateto oposto a α e o lado de medida **b** é o cateto oposto a β.

- Cateto Adjacente: É o lado adjacente (que está ao lado) a algum dos ângulos agudos tomado como referência.

No triângulo acima, o lado de medida **b** é o cateto adjacente a α e o lado de medida **c** é o cateto adjacente a β.

1.3. Trigonometria no Triângulo Retângulo

Através desta importante ferramenta para a trigonometria que é o triângulo retângulo, vamos definir as três primeiras propriedades trigonométricas dos ângulos, chamadas seno, cosseno e tangente.

Dado um triângulo retângulo, de ângulos agudos α e β, definimos:

- Seno: razão entre as medidas do cateto oposto e hipotenusa (nesta ordem), ou seja, $Seno = \dfrac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$.

No exemplo do item 1.2 temos:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{c}{a} \text{ e } \text{sen}\,\beta = \frac{b}{a}$$

- Cosseno: razão entre as medidas do cateto adjacente e hipotenusa (nesta ordem), ou seja, $Cosseno = \dfrac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$.

No exemplo do item 1.2 temos:

$$\cos\alpha = \frac{b}{a} \text{ e } \cos\beta = \frac{c}{a}$$

- Tangente: razão entre as medidas do cateto oposto e cateto adjacente (nesta ordem), ou seja, $Tangente = \dfrac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$.

No exemplo do item 1.2 temos:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{c}{b} \text{ e } \text{tg}\,\beta = \frac{b}{c}$$

Note agora que, uma vez conhecidas as definições de seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo através do triângulo retângulo, podemos concluir uma fórmula alternativa para a tangente que é:

$$Tangente = \frac{Seno}{Cosseno}$$

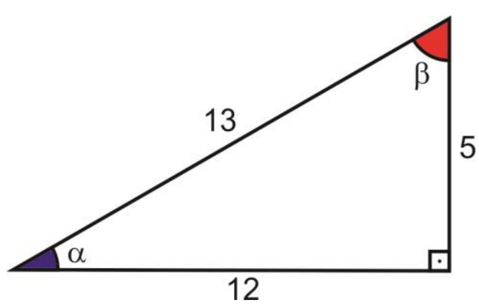
A dedução desta expressão vem do resultado direto da divisão entre as definições de seno e cosseno:

$$\frac{Seno}{Cosseno} = \frac{\dfrac{cateto\ oposto}{hipotenusa}}{\dfrac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}} = \frac{cateto\ oposto}{\cancel{hipotenusa}} \cdot \frac{\cancel{hipotenusa}}{cateto\ adjacente} =$$

$$= \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = Tangente$$

Exemplos Resolvidos

1. No triângulo retângulo abaixo, calcule os valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos α e β.



O seno é obtido pela razão entre as medidas do cateto oposto e hipotenusa, então:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{5}{13} \text{ e } \text{sen}\,\beta = \frac{12}{13}$$

O cosseno é obtido pela razão entre as medidas do cateto adjacente e hipotenusa, então:

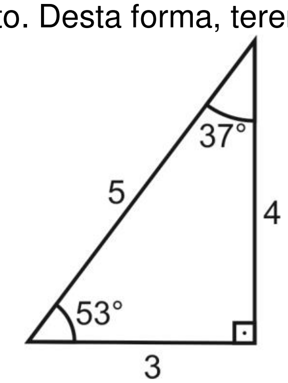
$$\cos\alpha = \frac{12}{13} \text{ e } \cos\beta = \frac{5}{13}$$

A tangente é obtida pela razão entre as medidas do cateto oposto e cateto adjacente, então:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{5}{12} \text{ e } \text{tg}\,\beta = \frac{12}{5}$$

2. Um importante triângulo retângulo é aquele cujos lados medem 3, 4 e 5. Sabendo que os ângulos deste triângulo medem aproximadamente 37° e 53°, calcule o valor do seno, cosseno e tangente destes ângulos apresentando os resultados na forma decimal.

Para desenhar o triângulo, devemos nos lembrar que quanto maior o lado, maior também será seu ângulo oposto. Desta forma, teremos o triângulo:



Portanto,

$$\text{sen}\,37° = \frac{3}{5} = 0{,}6 \qquad \text{sen}\,53° = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$$\cos 37° = \frac{4}{5} = 0{,}8 \qquad \cos 53° = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\text{tg}\,37° = \frac{3}{4} = 0{,}75 \qquad \text{tg}\,53° = \frac{4}{3} = 1{,}33...$$

1.4. Ângulos Complementares

Observando os exemplos dos tópicos anteriores é possível notar uma interessante coincidência entre os senos, cossenos e tangentes de dois ângulos agudos que compõem um triângulo retângulo. Na verdade esta coincidência é uma regra aplicável a quaisquer pares de ângulos como tais.

Sejam α e β dois ângulos complementares, isto é, $\alpha + \beta = 90°$, então:

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$$
$$\operatorname{sen}\beta = \cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$$

O motivo pelo qual este teorema acontece é bem simples. Como dois ângulos complementares sempre podem ser inseridos em um mesmo triângulo retângulo, o cateto oposto de um será o cateto adjacente do outro e isto implica que a expressão do seno do primeiro será igual à expressão do cosseno do segundo. Esta demonstração provém diretamente dos resultados obtidos no item 1.3.

1.5. Ângulos Notáveis

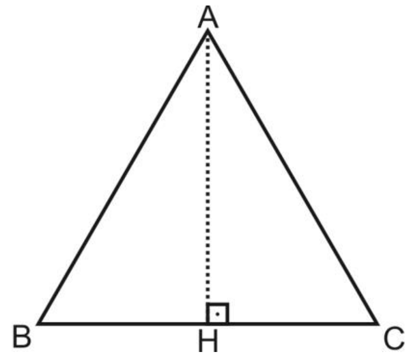
Os ângulos de 30°, 45° e 60°, também conhecidos como ângulos notáveis, formam o conjunto de ângulos mais importantes da trigonometria. São estes que justificarão grande parte dos resultados que obteremos daqui em diante neste texto e, para isso, devemos conhecer os valores de seus senos cossenos e tangentes dados pela tabela abaixo:

ÂNGULOS NOTÁVEIS			
	30°	45°	60°
SENO	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
COSSENO	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
TANGENTE	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

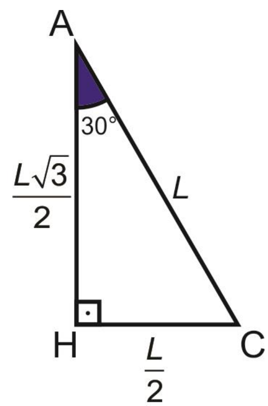
Os resultados da tabela acima podem ser facilmente deduzidos, veja:

- Para o ângulo de 30°:

Considere um triângulo equilátero ABC e sua altura AH relativa ao vértice A:



Analisando o triângulo retângulo ACH (lembre-se de que a altura de um triângulo equilátero de lado L é dada por $\frac{L\sqrt{3}}{2}$, além de também ser uma bissetriz e mediana);



e aplicando as definições trigonométricas temos:

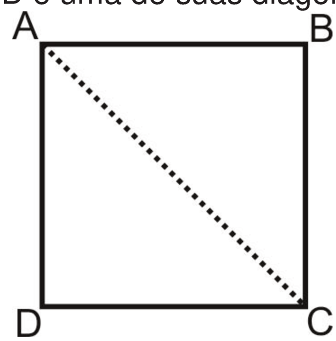
$$\text{sen}30° = \frac{\frac{L}{2}}{L} = \frac{L}{2}.\frac{1}{L} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\frac{L\sqrt{3}}{2}}{L} = \frac{L\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

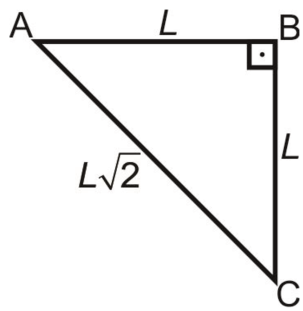
$$\text{tg}30° = \frac{\frac{L}{2}}{\frac{L\sqrt{3}}{2}} = \frac{L}{2}.\frac{2}{L\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- Para o ângulo de 45°:

Considere um quadrado ABCD e uma de suas diagonais AC:



A análise do triângulo retângulo ABC nos fornece (lembre-se de que a diagonal de um quadrado de lado L é dada por $L\sqrt{2}$, além de também ser uma bissetriz):



$$\text{sen}\,45° = \frac{L}{L\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{L}{L\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg}\,45° = \frac{L}{L} = 1$$

- Para o ângulo de 60°:

Poderíamos ter usado nesta demonstração o mesmo triângulo utilizado para demonstrar as propriedades do ângulo de 30°, porém, vamos aproveitar este momento para usar, pela primeira vez, o teorema do item 1.4.

Sabe-se que 30° e 60° são complementares, assim:

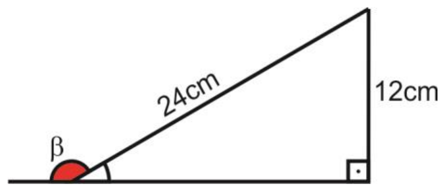
$$\text{sen}\,60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \text{sen}\,30° = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\,60° = \frac{1}{\text{tg}\,30°} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Exemplos Resolvidos

1. Na figura a seguir, calcule o valor do ângulo β.



Consideremos α o ângulo adjacente e suplementar de β na figura acima. Então, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$.
Como α é um ângulo agudo, temos, $\alpha = 30°$.
Portanto, $\beta = 180° - \alpha = 180° - 30° = 150°$.

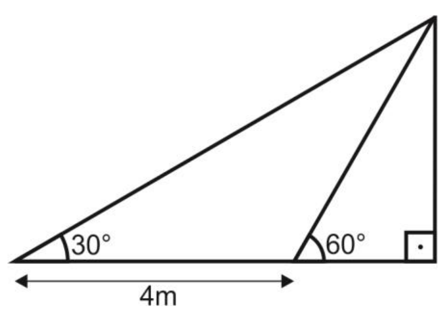
2. Um pedestre (de altura desprezível) deseja estimar a altura de um poste situado à sua frente. Para isso recorre ao seguinte procedimento trigonométrico:

i) Observa o topo do poste e nota que neste instante seus olhos fazem um ângulo de 30° com a horizontal.

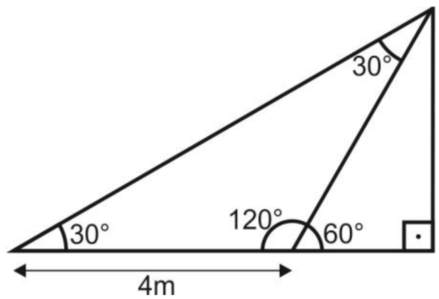
ii) Caminha 4m em direção ao poste e refaz o procedimento anterior, notando agora que seus olhos fazem um ângulo de 60° com a horizontal.

Determine a altura encontrada para o poste.

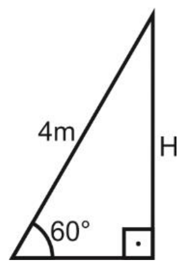
A ilustração que descreve o problema é:



Completando os ângulos do triângulo à esquerda notamos se tratar de um triângulo isósceles:



Temos, então, que a hipotenusa do triângulo retângulo à direita também mede 4m:



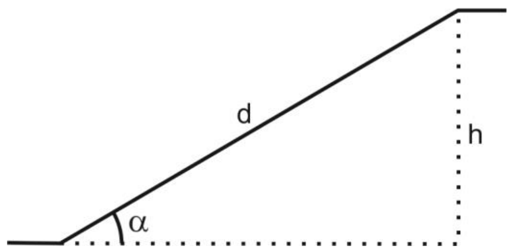
Portanto, $\operatorname{sen} 60° = \frac{H}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{H}{4} \Leftrightarrow H = 2\sqrt{3}$ m.

Exercícios

1. (FUVEST) Um móvel parte de A e segue numa direção que forma com a reta AC um ângulo de 30°. Sabe se que o móvel caminha com velocidade constante de 50 km/h. Após 3 horas de percurso, a distância que o móvel se encontra da reta AC é de:

a)75km b) $75\sqrt{2}$ km c)50km d) $75/2$ km e) $50\sqrt{3}$ km

2. (UFG) Uma pessoa deseja subir uma rampa de comprimento “d” que forma um ângulo α com a horizontal. Após subir a rampa, essa pessoa estará “h” metros acima da posição em que se encontrava inicialmente, como mostra a figura a seguir:



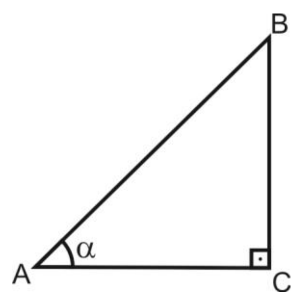
a) Que relação existe entre os valores de α , h e d?
b) Supondo $\alpha = 30°$ e h = 1m, qual o valor de d?

3. (ESPM) Uma pessoa cujos olhos estão a 1,80 m de altura em relação ao chão avista o topo de um edifício segundo um ângulo de 30° com a horizontal. Percorrendo 80 m no sentido de aproximação do edifício, esse ângulo passa a medir 60°. Usando o valor 1,73 para a raiz quadrada de 3, podemos concluir que a altura desse edifício é de aproximadamente:

a)59m b)62 m c)65 m d)69 m e)71 m

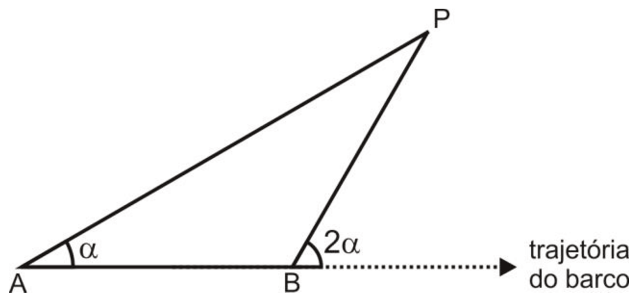
4. Sejam a e b os ângulos agudos de um triângulo retângulo de hipotenusa 13. Sabendo que $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \cos a + \cos b = \frac{34}{13}$, calcule a medida dos catetos deste triângulo.

5. (UFJF) Considere um triângulo ABC retângulo em C e α o ângulo $B\hat{A}C$. Sendo $\overline{AC} = 1$ e $sen(\alpha) = \frac{1}{3}$, quanto vale a medida da hipotenusa desse triângulo?



a) 3 b) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ c) $\sqrt{10}$ d) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ e) $\frac{3}{2}$

6. (ENEM) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual a fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação:



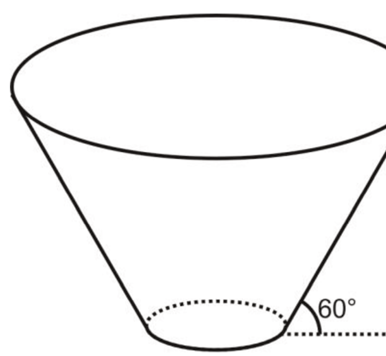
Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30°$ e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância $AB = 2000$ m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será:

a) 1000m b) $1000\sqrt{3}m$ c) $2000\dfrac{\sqrt{3}}{3}m$ d) 2000m e) $2000\sqrt{3}$m

7. (PUCRJ) O valor de $\dfrac{\cos 45^\circ + sen 30^\circ}{\cos 60^\circ}$ *é*:

a) $\sqrt{2}+1$ b) 2 c) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$ e) 0

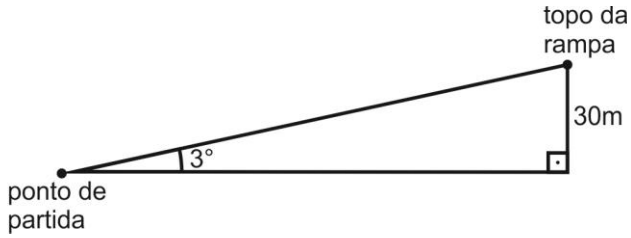
8. (ENEM) Uma empresa precisa comprar uma tampa para o seu reservatório, que tem a forma de um tronco de cone circular reto, conforme mostrado na figura.



Considere que a base do reservatório tenha raio $r = 2\sqrt{3}$ m e que sua lateral faça um ângulo de 60° com o solo. Se a altura do reservatório é 12 m, a tampa a ser comprada deverá cobrir uma área de

a) 12π m^2 b) 108π m^2 c) $(12+2\sqrt{3})2\pi$ m^2 d) 300π m^2 e) $(24+2\sqrt{3})2\pi$ m^2

9. (UNESP) Um ciclista sobe, em linha reta, uma rampa com inclinação de 3 graus a uma velocidade constante de 4 metros por segundo. A altura do topo da rampa em relação ao ponto de partida é 30 m.



Use a aproximação sen $3^{\circ} = 0,05$ e responda. O tempo, em minutos, que o ciclista levou para percorrer completamente a rampa é

a) 2,5. b) 7,5. c) 10. d) 15. e) 30.

10. (FUVEST) Dois pontos A e B estão situados na mesma margem de um rio e distantes 40m um do outro. Um ponto C, na outra margem do rio, está situado de tal modo que o ângulo $C\hat{A}B$ mede 75° e o ângulo $A\hat{C}B$ mede 75°. Determine a largura do rio.

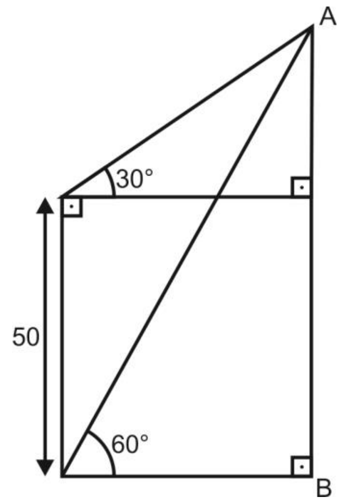
11. (UNESP) Uma escada apoiada em uma parede, num ponto que dista 3m do solo, forma, com essa parede, um ângulo de 30°. A distância da parede ao "pé" da escada, em metros, é de:

a) $3\sqrt{3}$ m b) $2\sqrt{3}$ m c) $\sqrt{3}$ m d) $\sqrt{3}/2$ m e) 2m

12. (VUNESP) A partir de um ponto observa-se o topo de um prédio sob um ângulo de 30 graus. Caminhando 23 metros em direção ao prédio, atingimos outro ponto onde se vê o topo do prédio segundo um ângulo de 60°. Desprezando a altura do observador, a altura do prédio em metros é:

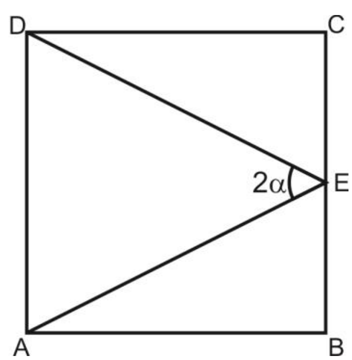
a) entre 10 e 12
b) entre12 e 15
c) entre 15 e 18
d) entre 18 e 19
e) maior que 19

13. (MACKENZIE) Na figura, determine a medida de AB:



14. (UFMG) Um avião, em vôo retilíneo horizontal, passa por um ponto na vertical acima da cabeça de uma pessoa situada no solo. Em um determinado momento, essa pessoa registra que o ângulo de elevação do avião, em relação ao solo, é de 60° e que, 15 segundos depois desse registro, é de 45° . Suponha que o avião voa a uma velocidade constante de 720 km/h e despreze a altura da pessoa. Calcule a altura em que estava o avião quando passou acima da cabeça da pessoa.

15. (UFMG) Observe a figura: Nessa figura, E é o ponto médio do lado BC do quadrado ABCD. A tangente do ângulo α é:

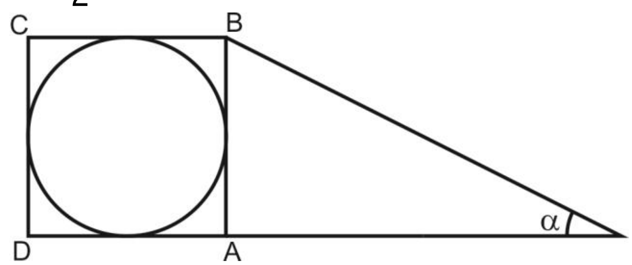


a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) 2 d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

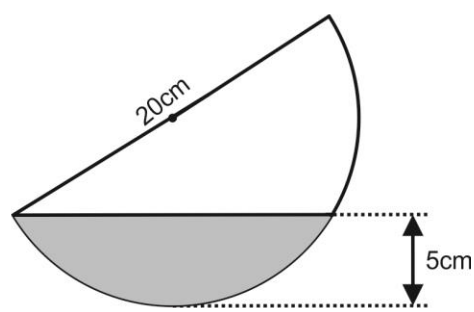
16. Suponha que em uma determinada cidade da Terra o sol nasce às 7h00m e se põe às 17h00m. Determine em qual dos horários abaixo a sombra projetada por um prédio tem o mesmo comprimento que sua altura.
a)8h00m b)9h30m c)12h00m d)13h30m e)14h00m

17. Sejam α e β dois ângulos agudos tais que a equação de incógnita x: $(\text{sen}\,\alpha)x^2 + (2\,\text{sen}\,\alpha)x + \cos\beta = 0$ possua duas soluções reais iguais. Então, pode-se afirmar que:
a) $\alpha + \beta = 30°$ b) $\alpha + \beta = 45°$ c) $\alpha + \beta = 60°$ d) $\alpha = \beta$ e) $\alpha + \beta = 90°$

18. Na figura abaixo, $\overline{OA} = 12$ e o raio da circunferência inscrita no quadrado ABCD é 2,5. Calcule $\text{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}$.

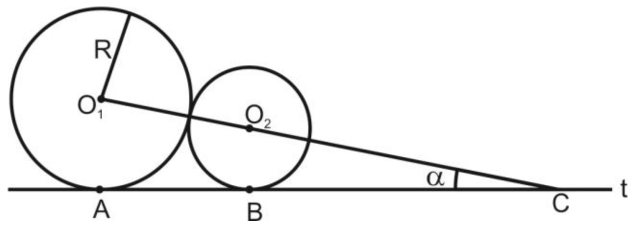


19. (UFPR) Um recipiente, no formato de hemisfério, contém um líquido que tem profundidade máxima de 5 cm. Sabendo que a medida do diâmetro do recipiente é de 20 cm, qual o maior ângulo, em relação à horizontal, em que ele pode ser inclinado até que o líquido alcance a borda, antes de começar a derramar?



a)75° b)60° c)45° d)30° e)15°

20. As circunferências da figura abaixo são tangentes entre si e tangentes à reta t nos pontos A e B.

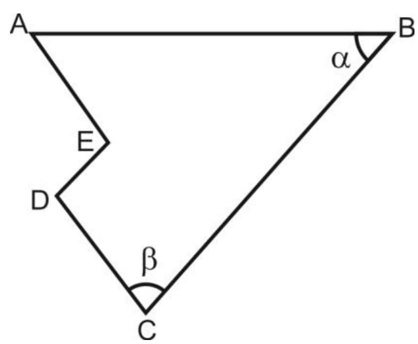


Dados:
$BC = 4\sqrt{3}$, $R = 12$ e $\alpha = 30°$.

A medida do segmento AB é igual a:
a) $2\sqrt{3}$ a) $4\sqrt{3}$ a) $8\sqrt{3}$ a) $12\sqrt{3}$

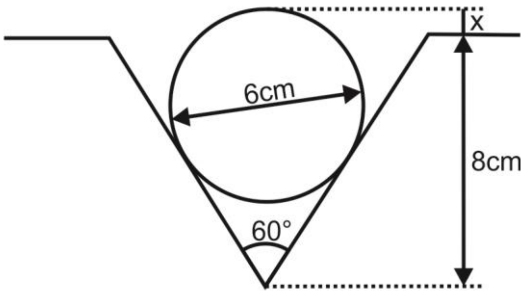
21. (ESPM) As medidas dos lados de um triângulo retângulo formam uma PA. Se x é a medida do menor ângulo deste triangulo retângulo, o valor de $\text{tg}\, x$ é:
a)0,6 b)0,5 c)0,8 d)0,45 e)0,75

22. (FUVEST) Na figura, tem-se $\overline{AE}$ paralelo a $\overline{CD}$, $\overline{BC}$, paralelo a $\overline{DE}$, $AE = 2$, $\alpha = 45º$, $\beta = 75º$. Nessas condições, a distância do ponto E ao segmento $\overline{AB}$ é igual a



a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

23. (UFPR) Num projeto hidráulico, um cano com diâmetro externo de 6 cm será encaixado no vão triangular de uma superfície, como ilustra a figura abaixo. Que porção x da altura do cano permanecerá acima da superfície?



a) $\frac{1}{2}cm$ b) 1 cm c) $\frac{\sqrt{3}}{2}cm$ d) $\frac{\pi}{2}cm$ e) 2 cm

24. (ITA) Em um triângulo retângulo, a medida da mediana relativa à hipotenusa é a média geométrica das medidas dos catetos. Então, o valor do cosseno de um dos ângulos do triângulo é igual a:

a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$ c) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ d) $\frac{1}{4}\sqrt{4+\sqrt{3}}$ e) $\frac{1}{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

25. (UFC) Calcule o valor numérico da expressão:

$$\log\left[\mathrm{tg}\left(\pi/5\right)\right]+\log\left[\mathrm{tg}\left(3\pi/10\right)\right]$$

em que log indica o logaritmo na base 10 e tg indica a tangente do ângulo.

26. (ITA) Assinale a opção que indica a soma dos elementos de A ∪ B, sendo:

$$A=\left\{x_k=\mathrm{sen}^2\left(\frac{k^2\pi}{24}\right):k=1,2\right\} \qquad B=\left\{y_k=\mathrm{sen}^2\left(\frac{(3k+5)\pi}{24}\right):k=1,2\right\}$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) $\frac{[2-\sqrt{(2+\sqrt{3})}]}{3}$ e) $\frac{[2+\sqrt{(2-\sqrt{3})}]}{3}$

27. (FGV) a) Num triângulo isósceles ABC, em que AB = AC, o ângulo Â mede o dobro da soma dos outros dois. O lado $\overline{BC}$ mede 10 cm. Obtenha o perímetro desse triângulo.

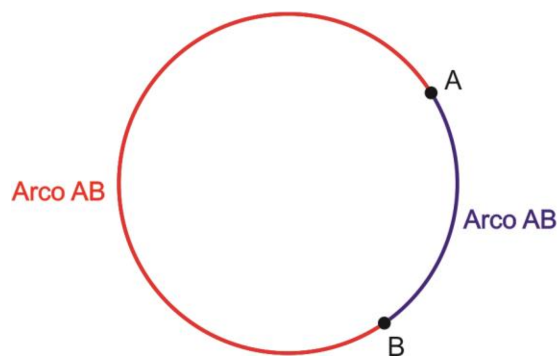
b) Considerando que sen x + cos x = k, calcule, em função de k, o valor da expressão $\mathrm{sen}^3 x + \cos^3 x$.

Capítulo 2

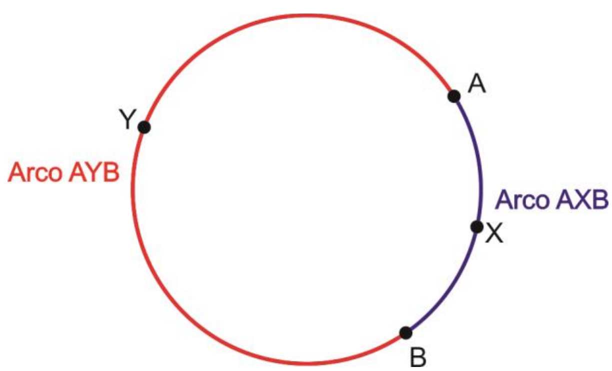
Arcos de circunferência

2.1. Definição

Dada uma circunferência e dois pontos A e B de seu contorno, definimos como arco AB (AB) qualquer uma das duas partes da circunferência compreendidas entre estes pontos:



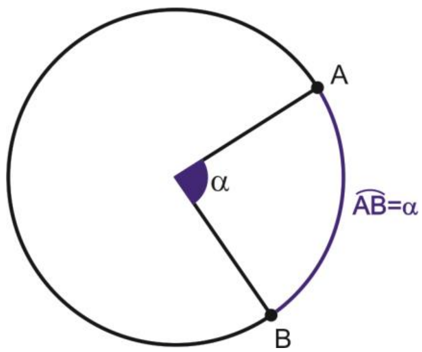
Frequentemente, podemos inserir um novo ponto entre os pontos A e B para evitar a confusão entre qual arco um texto se refere: AB



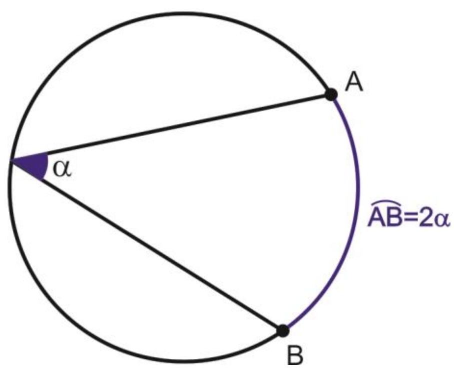
2.2. Medida de Arcos

Estudam-se em geometria plana, diversas relações entre as medidas de um arco e de ângulos presentes nos arredores da circunferência (central, inscrito, excêntricos). No entanto, para a trigonometria, será suficiente lembrarmos que um arco de circunferência:

- Possui a mesma medida que o ângulo central correspondente:



- Possui o dobro da medida do ângulo inscrito correspondente:



2.3. Unidades de Medida de Arcos

Uma vez que já está claro que a medida de arco se dá por um caráter angular, usaremos duas unidades de medida para aferi-los:

- Grau (°):

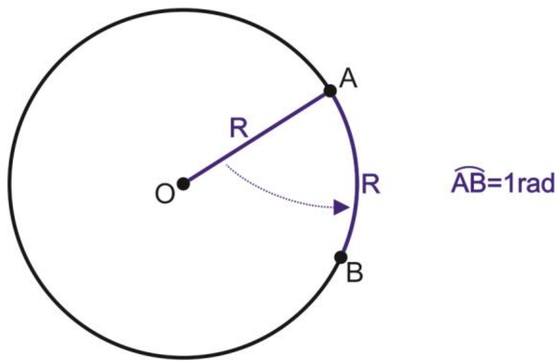
É a unidade mais usual na geometria. Esta é a unidade definida pela divisão da circunferência em 360 partes iguais.
Desta forma, é evidente que uma circunferência inteira possui 360°.

Esta unidade ainda possui subdivisões chamadas de minutos (´) e segundos (´´) assim definidas:

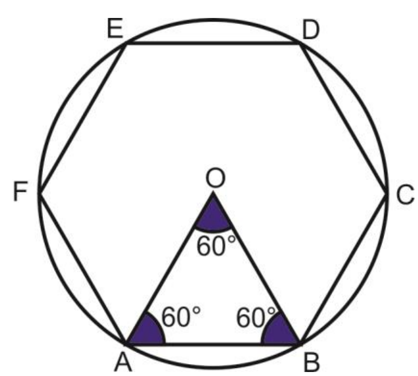
1° = 60’ (1 grau equivale a sessenta minutos)
1’ = 60’’ (1 minuto equivale a sessenta segundos)

- Radiano (rad):

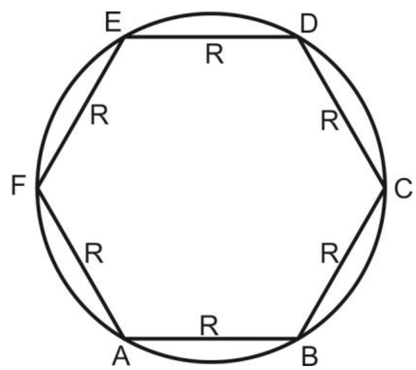
É a unidade obtida ao sobrepor sobre o contorno da circunferência, um arco cujo comprimento é equivalente ao raio da mesma.



Descobrir quantos radianos perfazem uma circunferência não é tão simples como fizemos para o grau anteriormente. Uma maneira de abordar aproximadamente este problema é visualizar um hexágono regular inscrito em uma circunferência de raio R:



Pela análise do triângulo OAB, nota-se que este é equilátero por possuir os três ângulos congruentes. Desta forma, podemos concluir que $\overline{AB} = R$ e, por se tratar de um hexágono regular, concluímos que os demais lados também possuem medida R:



Observe agora que cada arco definido por dois vértices consecutivos do hexágono é ligeiramente maior do que o segmento definido por estes pontos: $AB > \overline{AB}$, $BC > \overline{BC}$, $CD > \overline{CD}$, ...

Então, é imediato observar que é possível compor o contorno da circunferência com 6 raios mas ainda faltará uma pequena parcela resultante das desigualdades acima. Esta parcela é fixa em função de R e sempre vale aproximadamente 0,2831853.R.

Portanto, o processo de medir uma circunferência por completo, em radianos, resulta em aproximadamente 6,2831853rad mas, por uma questão de simplicidade, preferimos usar 2π rad (lembre-se de que $\pi \cong 3{,}141592$ e por isso $2\pi \cong 6{,}2831853$).

Exemplos Resolvidos

1. Efetue a adição de dois arcos de medidas: $\alpha = 12°45'32''$ e $\beta = 5°52'26''$.

Para efetuar a adição destes arcos, basta adicionarmos as partes correspondentes de α e β (grau com grau, minuto com minuto e segundo com segundo) e, ao final, fazemos as conversões adequadas:

$$\begin{array}{rrrr} & 12° & 45' & 32'' \\ + & 5° & 52' & 26'' \\ \hline & 17° & 97' & 58'' \end{array}$$

Agora observe que a adição foi feita, porém, não é usual fornecer valores de minutos e segundos iguais ou superiores a 60. Para sanar isto, é necessário que

seja feita uma conversão entre as unidades. Neste problema, há apenas uma conversão a ser feita, o 97´.
Lembremos que 1° = 60´, desta forma, podemos escrever 97´= 60´ + 37´ = 1° + 37´. Assim, "deslocamos" 60´ para a unidade dos graus no formato de 1°, restando ali apenas 37´:

$$18°37´58´´$$

2. Efetue a subtração entre os mesmos arcos α e β do exemplo anterior.

O processo de subtração é análogo ao de adição quanto ao agrupamento de unidades correspondentes:

$$\begin{array}{rrrr} & 12° & 45´ & 32´´ \\ - & 5° & 52´ & 26´´ \\ \hline \end{array}$$

Porém, observe que se efetuarmos esta operação imediatamente, obteremos resultados positivos para os graus e segundos e um resultado negativo para os minutos. Um resultado desta forma não é adequado e, por isso, devemos efetuar uma conversão entre unidades antes da subtração.
Como 1° = 60´, podemos inicialmente "retirar" 1° de α e escrevê-lo como 60´ apenas para que a parte dos minutos de α seja superior à de β:

$$\begin{array}{rrrr} & 11° & 105´ & 32´´ \\ - & 5° & 52´ & 26´´ \\ \hline & 6° & 53´ & 06´´ \end{array}$$

3. Efetue a multiplicação do arco $\alpha = 6°15´26´´$ por 8.

Inicialmente, multiplica-se cada unidade de α por 8:

$$\begin{array}{rrrr} & 6° & 15´ & 26´´ \\ \times & & & 8 \\ \hline & 48° & 120´ & 208´´ \end{array}$$

Mais uma vez efetuamos a operação mas surgiram valores inadequados para as unidades de minutos e segundos. Basta que a conversão seja feita. Porém note que no caso da multiplicação é usual que encontremos valores muito superiores a 60. Neste caso, por exemplo, veja que extrair 60´´ dos 208´´ não será suficiente para que o resultado esteja na forma adequada. Neste caso é necessário extrair 180´´ = 3.60´´ para tal.
Portanto vejamos que:

$$208´´ = 180´´ + 28´´ = 3´+ 28´´$$

Agora, observe que além dos 120´obtidos através da multiplicação, devemos também considerar os 3´ resultantes da conversão de unidades acima, assim:

123´ = 120´+ 03´ = 2° + 03´.

Portanto, teremos:

50° 03´ 28´´

2.4. Conversões entre graus e radianos

Eventualmente nos depararemos com a necessidade de converter arcos medidos em graus para radianos e vice-versa.

Esta conversão pode ser feita através de uma regra de três (pois já sabemos que 2π rad e 360° são equivalentes):

$$\frac{360°}{180°} = \frac{2\pi rad}{x} \Rightarrow 360x = 360\pi \Rightarrow x = \pi \text{ rad}$$

E este resultado ($180° = \pi rad$) passará a ser nossa relação de equivalência preferida a partir de agora

Exemplos Resolvidos

1. Converta para radianos os arcos de:

a) 60°.

Estabelecendo a proporção pela equivalência apontada acima temos:

$$\frac{\cancel{180°}}{\cancel{60°}} = \frac{\pi rad}{x} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

b) 45°.

Da mesma forma que o exemplo acima:

$$\frac{\cancel{180°}}{\cancel{45°}} = \frac{\pi rad}{x} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

2. Converta para graus os arcos de:

a) $\frac{\pi}{6}$rad.

Um procedimento alternativo ao de fazer a correspondência pela proporção da regra de três é fazer a simples substituição de π rad por 180°:

$$\frac{\pi}{6}rad = \frac{180°}{6} = 30°$$

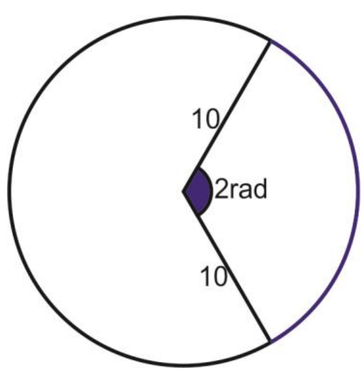
b) $\frac{5\pi}{4}$ rad.

Da mesma forma: $\frac{5\pi}{4}rad = \frac{5.180°}{4} = 225°$

2.5. Comprimento de Arcos

Primeiramente devemos entender a diferença conceitual entre medida e comprimento de um arco. Enquanto o conceito de medida de um arco se refere à uma característica angular do mesmo (medida em graus ou radianos) o comprimento por sua vez é uma medida de tamanho, dada em unidades de comprimento como metros, centímetros, quilômetros,...
Este conceito é na verdade uma consequência da definição dos radianos. Vejamos um exemplo: calcule o comprimento de um arco de 2rad em uma circunferência de raio 10cm.

Esta é a ilustração que descreve o problema:



Se lembrarmos do significado dos radianos, entenderemos que o arco evidenciado na figura acima de medida 2rad é formado por 2 raios da circunferência e como o raio desta é 10cm, é imediato perceber que o comprimento deste arco será dado por: $C = 2.10 = 20cm$

Em linhas gerais, este será o nosso procedimento padrão: multiplicar a medida do arco **em radianos** pelo raio da circunferência:

$$\boxed{C = \alpha.R}$$

onde α é a medida do arco em radianos e R o raio da circunferência em que o arco se encontra.

Exemplos Resolvidos

1. Calcule o comprimento de um arco de $30°$ em uma circunferência de raio 24km.

Para aplicarmos a fórmula de comprimento de arcos temos a única exigência de usar a medida do arco em radianos. Como sabemos que $30° = \frac{\pi}{6}$ rad, temos que:

$$C = \alpha.R$$
$$C = \frac{\pi}{\cancel{6}}.\cancel{24}$$
$$C = 4\pi \text{ km}$$

2. Calcule a medida de um arco de 6π cm contido em uma circunferência de raio 12cm.

$$C = \alpha.R$$
$$6\pi = \alpha.12$$
$$\alpha = \frac{\pi}{2} \text{rad}$$

3. Um arco de circunferência cuja medida é 300° possui 2000π m de extensão. Calcule o raio desta circunferência.

Note que $300° = 5 * 60° = 5.\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ rad

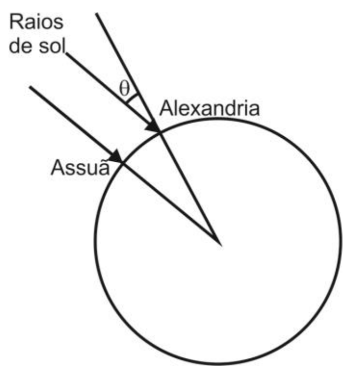
$C = \alpha.R$

$2000\pi = \frac{5\pi}{3}.R$

$R = \frac{2000.\cancel{\pi}.3}{5.\cancel{\pi}} = 1200\ \text{m}$

EXERCÍCIOS

1. (FUVEST) Uma das primeiras estimativas do raio da Terra é atribuída a Eratóstenes, estudioso grego que viveu, aproximadamente, entre 275 a.C. e 195 a.C. Sabendo que em Assuã, cidade localizada no sul do Egito, ao meio dia do solstício de verão, um bastão vertical não apresentava sombra, Eratóstenes decidiu investigar o que ocorreria, nas mesmas condições, em Alexandria, cidade no norte do Egito. O estudioso observou que, em Alexandria, ao meio dia do solstício de verão, um bastão vertical apresentava sombra e determinou o ângulo θ entre as direções do bastão e de incidência dos raios de sol. O valor do raio da Terra, obtido a partir de θ e da distância entre Alexandria e Assuã foi de, aproximadamente, 7500 km.



O mês em que foram realizadas as observações e o valor aproximado de θ são (<u>Note e adote</u>: distância estimada por Eratóstenes entre Assuã e Alexandria ≈ 900 km; $\pi = 3$.)

a) junho; 7°.
b) dezembro; 7°.
c) junho; 23°.
d) dezembro; 23°.
e) junho; 0,3°.

2. Calcule o menor ângulo formado entre os ponteiros de um relógio às 6:20

3. Considere duas circunferências de raios 6cm e 4cm com centros distantes 12 cm um do outro. Calcule o comprimento da menor circunferência que tangencia externamente as duas.

4. (UEL) Uma família viaja para Belém (PA) em seu automóvel. Em um dado instante, o GPS do veículo indica que ele se localiza nas seguintes coordenadas: latitude 21°20' Sul e longitude 48°30' Oeste. O motorista solicita a um dos passageiros que acesse a Internet em seu celular e obtenha o raio médio da Terra, que é de 6730 km, e as coordenadas geográficas de Belém, que são latitude 1°20' Sul e longitude 48°30' Oeste. A partir desses dados, supondo que a superfície da Terra é esférica, o motorista calcula a distância D, do veículo a Belém, sobre o meridiano 48°30' Oeste.
Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o valor da distância D, em km.

a) $D = \frac{\pi}{9}6730$ b) $D = \frac{\pi}{18}(6730)^2$ c) $D = \frac{\pi}{9}\sqrt{6730}$ d) $D = \frac{\pi}{36}6730$ e) $D = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 6730$

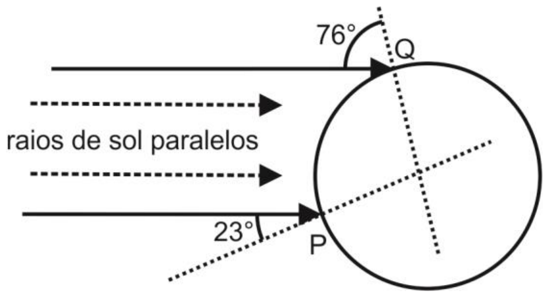
5. (UEL) Um relógio marca que faltam 20 minutos para o meio-dia. Então, o menor ângulo formado pelos ponteiros das horas e dos minutos é:
a) 90° b) 100° c) 110° d) 115° e) 125°

6. (UEG) Duas importantes cidades estão localizadas sobre a linha do Equador: uma é a capital do Amapá e a outra é a capital do Equador, ambas na América do Sul. Suas longitudes são, respectivamente, 78° Oeste e 52° Oeste. Considerando que a Terra é uma esfera de raio 6400 km, qual é a distância entre essas duas cidades?

7. (UFSM) No último pleito, o horário de encerramento das votações, segundo determinação do TSE para todo o estado do Rio Grande do Sul, foi às 17 horas. Passados 5 minutos do encerramento, o menor ângulo entre os ponteiros do relógio era de:
a) 123° b) 122° 30' c) 122° d) 120° 30' e) 120

8. (UFAL) Considere que:
- Os raios de Sol incidem paralelamente sobre a Terra.
- O planeta Terra é uma esfera cuja linha do Equador tem 40.000 km de perímetro.

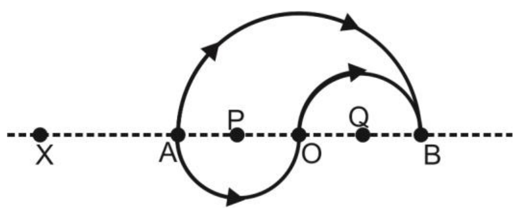
Na figura a seguir são representados os raios solares incidindo nos pontos P e Q da linha do Equador do planeta Terra e são indicadas as medidas dos ângulos que esses raios formam com as normais à superfície terrestre nesses pontos.



O comprimento do arco PQ, que corresponde à menor distância de P a Q, em quilômetros, é igual a

a) 11.000 b) 10880 c) 10666 d) 10444 e) 9000

9. (UERJ)

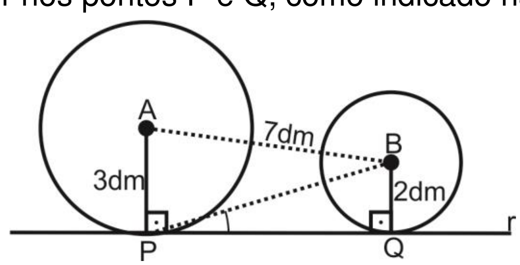


No esquema acima estão representadas as trajetórias de dois atletas que, partindo do ponto X, passam simultaneamente pelo ponto A e rumam para o ponto B por caminhos diferentes, com velocidades iguais e constantes. Um deles segue a trajetória de uma semicircunferência de centro O e raio 2R. O outro percorre duas semicircunferências cujos centros são P e Q.

Considerando $\sqrt{2} = 1{,}4$, quando um dos atletas tiver percorrido 3/4 do seu trajeto de A para B, a distância entre eles será igual a:

a) 0,4 R b) 0,6 R c) 0,8 R d) 1,0 R

10. (UNESP) Paulo fabricou uma bicicleta, tendo rodas de tamanhos distintos, com o raio da roda maior (dianteira) medindo 3 dm, o raio da roda menor medindo 2 dm e a distância entre os centros A e B das rodas sendo 7 dm. As rodas da bicicleta, ao serem apoiadas no solo horizontal, podem ser representadas no plano (desprezando-se os pneus) como duas circunferências, de centros A e B, que tangenciam a reta r nos pontos P e Q, como indicado na figura.



a) Determine a distância entre os pontos de tangência P e Q e o valor do seno do ângulo BPQ.

b) Quando a bicicleta avança, supondo que não haja deslizamento, se os raios da roda maior descrevem um ângulo de 60°, determine a medida, em graus, do ângulo descrito pelos raios da roda menor. Calcule, também, quantas voltas terá dado a roda menor quando a maior tiver rodado 80 voltas.

11**.** (UEL) Os primeiros relógios baseavam-se no aparente movimento do Sol na abóboda celeste e no deslocamento da sombra projetada sobre a superfície de um corpo iluminado pelo astro. Considere que: a Terra é esférica e seu período de rotação é de 24 horas no sentido oeste-leste; o tempo gasto a cada 15° de rotação é de 1 hora; o triângulo Brasília/Centro da Terra/Luzaka (Zâmbia) forma, em seu vértice central, um ângulo de 75°.

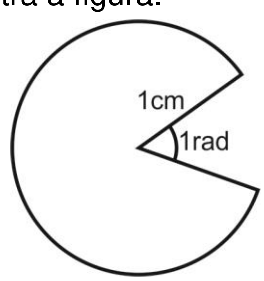
A hora marcada em Luzaka, num relógio solar, quando o sol está a pino em Brasília é:

a)5horas b)9horas c)12horas d)17horas e)21horas.

12. (ITA) Entre duas superposições consecutivas dos ponteiros das horas e dos minutos de um relógio, o ponteiro dos minutos varre um ângulo cuja medida, em radianos, é igual a

a) $\frac{23}{11}\pi$. b) $\frac{16}{6}\pi$. c) $\frac{24}{11}\pi$. d) $\frac{25}{11}\pi$. e) $\frac{7}{3}\pi$.

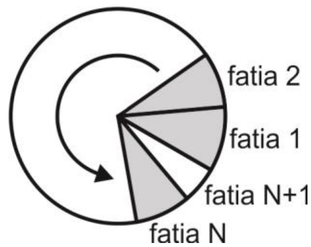
13**.** (UNESP) Em um jogo eletrônico, o "monstro" tem a forma de um setor circular de raio 1 cm, como mostra a figura.



A parte que falta no círculo é a boca do "monstro", e o ângulo de abertura mede 1 radiano. O perímetro do "monstro", em cm, é:

a) π - 1. b) π + 1. c) 2π - 1. d) 2π. e) 2π + 1.

14. (UFSCAR) Uma pizza circular será fatiada, a partir do seu centro, em setores circulares. Se o arco de cada setor medir 0,8 radiano, obtém-se um número máximo N de fatias idênticas, sobrando, no final, uma fatia menor, que é indicada na figura por fatia N+1.



Considerando π = 3,14, o arco da fatia N+1, em radiano, é

a) 0,74. b) 0,72. c) 0,68. d) 0,56. e) 0,34.

15. (UFRN) No protótipo antigo de uma bicicleta, conforme figura abaixo, a roda maior tem 55 cm de raio e a roda menor tem 35 cm de raio. O número mínimo de voltas completas da roda maior para que a roda menor gire um número inteiro de vezes é

a) 5 voltas. b) 7 voltas. c) 9 voltas. d) 11 voltas.

16. (UNB) Quanto mede, em radianos, um arco de 2°15'.

17. (ESPM) Uma pista de atletismo é circular de raio 25m. Se um atleta dá 18 voltas na pista, quantos metros ele percorre?

18. Numa corrida de atletismo (pista circular), 8 atletas disputarão uma corrida de 200 m. Se o atleta nº 1 (mais próximo do centro) está a 20 m do centro da pista e o atleta nº 8 (mais distante do centro) está a 40 m do centro, pergunta-se: qual a medida do arco percorrido pelos dois atletas?

19. (FUVEST) É 1 h da tarde; o ponteiro dos minutos coincidirá com o ponteiro das horas, pela primeira vez, aproximadamente às:
a)13h 5’ 23”
b)13h 5’ 25”
c)13h 5’ 27”
d)13h 5’ 29”
e)13h 5’ 31”

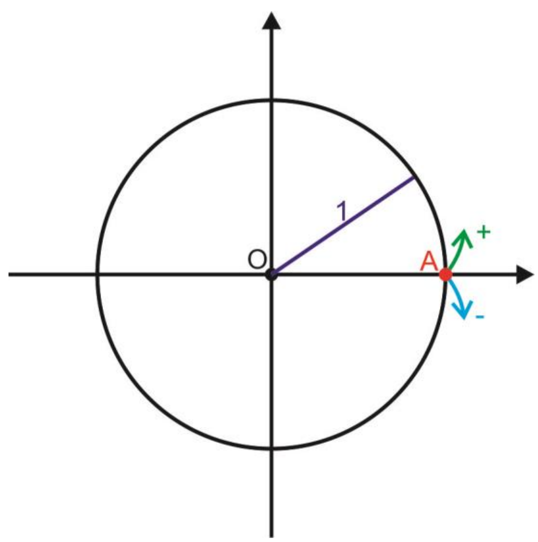
20. (UNICAMP) Um relógio foi acertado exatamente ao meio-dia. Determine as horas e minutos que estará marcando esse relógio após o ponteiro menor ter percorrido um ângulo de 42°.

Capítulo 3

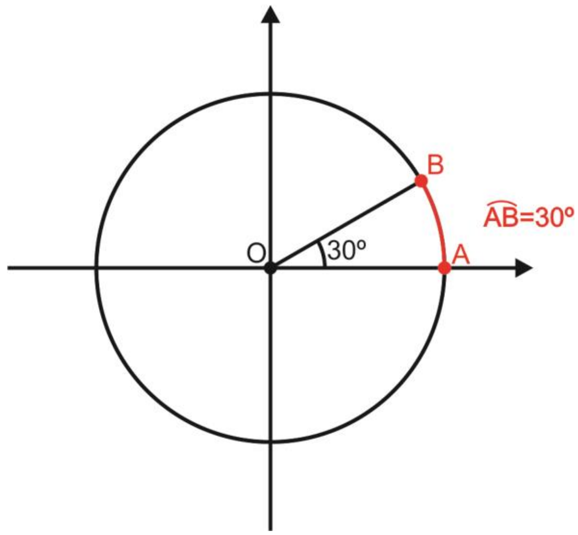
Círculo Trigonométrico

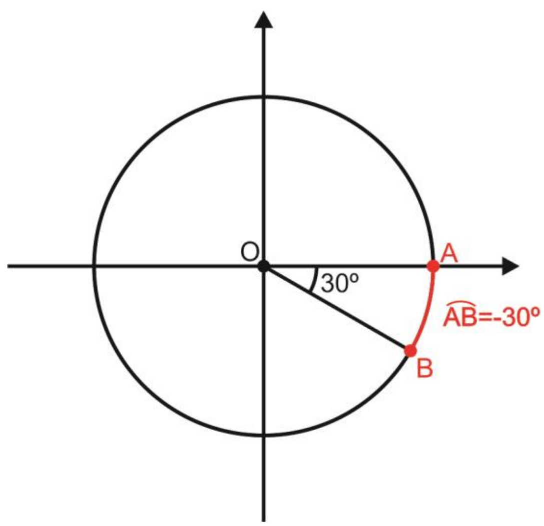
3.1. Definição

O círculo trigonométrico (ou ciclo trigonométrico ou circunferência trigonométrica) é uma circunferência com centro na origem do plano cartesiano e raio igual a 1. Estudamos este caso particular de circunferência pois, assim como o triângulo retângulo, esta também será uma ferramenta para a obtenção de propriedades trigonométricas mas com a diferença que poderemos extrapolar os ângulos agudos ($0 < \alpha < 90º$).



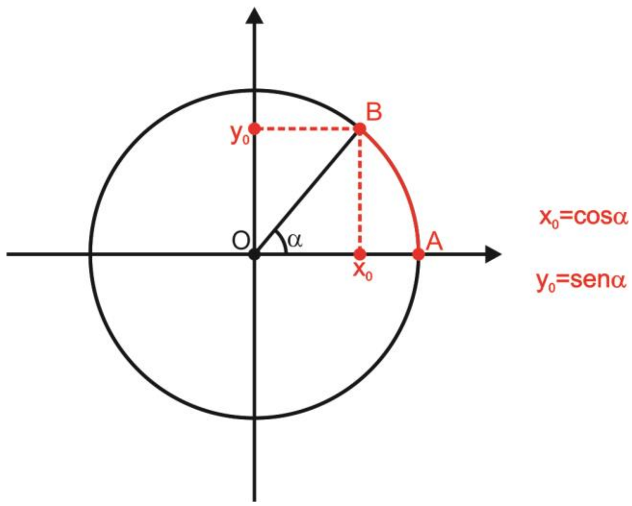
Na figura acima temos o círculo trigonométrico. O ponto A é chamado origem dos arcos – qualquer arco a ser demarcado neste círculo terá o ponto A como ponto inicial. Convenciona-se que os arcos (com origem em A) demarcados no sentido anti-horário terão medida positiva e aqueles demarcados no sentido horário terão medida negativa. Veja alguns exemplos:



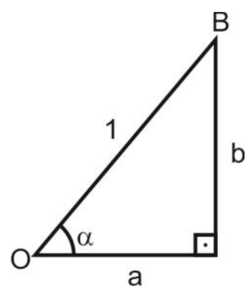


3.2. Seno e Cosseno no Círculo Trigonométrico

Dado um arco $AB = \alpha$ do círculo trigonométrico em que A é a origem dos arcos e B um ponto qualquer de coordenadas (x_0, y_0), então, $x_0 = \cos\alpha$ e $y_0 = \operatorname{sen}\alpha$:



O motivo pelo qual isto acontece é bem simples: observe o triângulo OBx_0 (ou OBy_0):



Note que os catetos foram denotados por a e b e que:

$$\cos\alpha = \frac{a}{1} \Rightarrow a = \cos\alpha$$

Portanto, $x_0 = \cos\alpha$.

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{b}{1} \Rightarrow b = \text{sen}\,\alpha$$

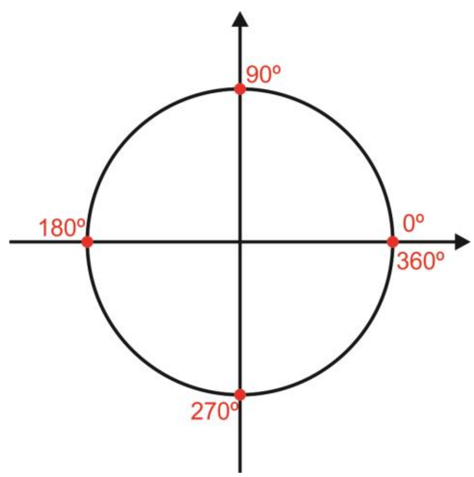
Portanto, $y_0 = \text{sen}\,\alpha$.

Como a partir de agora usaremos o eixo horizontal para denotar cossenos e o eixo vertical para denotar senos, chamaremos estes eixos de eixo dos cossenos e eixo dos senos, respectivamente.

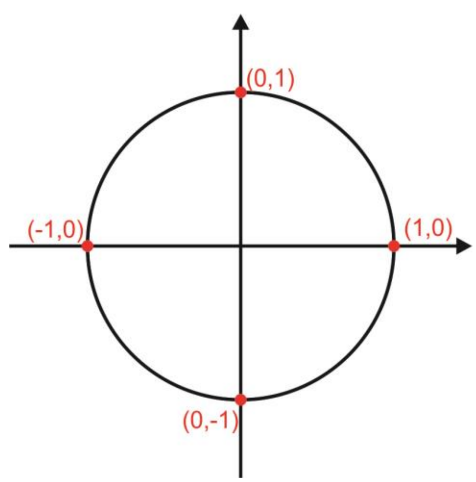
Observe que a expansão desta noção para os quadrantes seguintes também é possível mas desde que as coordenadas x_0 e y_0 sejam tomadas em módulo.

3.3. Arcos Divisores de Quadrantes

Esta nova forma de observar as propriedades trigonométricas é elucidativa para descobrir o seno e cosseno dos arcos divisores de quadrantes: 0º, 90º, 180º, 270º e 360º (0 rad, $\frac{\pi}{2}$ rad, π rad, $\frac{3\pi}{2}$ rad e 2π rad).



Como observamos no item anterior, o cosseno e o seno de cada um destes arcos pode ser obtido pelas coordenadas de cada um dos pontos acima:



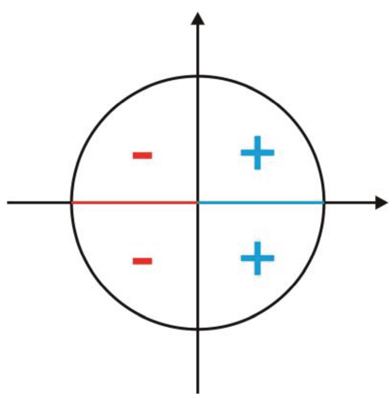
Da comparação entre as duas figuras anteriores podemos deduzir:

ARCO	COSSENO	SENO
0° ou 0 rad	1	0
90° ou $\frac{\pi}{2}$ rad	0	1
180° ou π rad	-1	0
270° ou $\frac{3\pi}{2}$ rad	0	-1
360° ou 2π rad	1	0

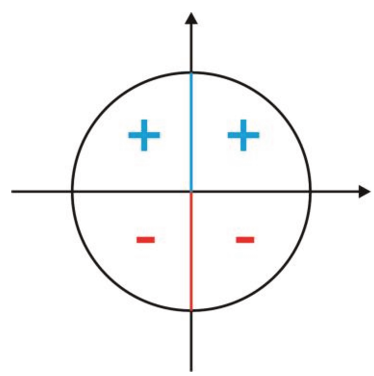
3.4. Variação de Sinais – Seno e Cosseno

Outra característica trigonométrica facilmente perceptível pela análise do círculo trigonométrico é que como agora o seno e o cosseno de um arco podem ser observados como as coordenadas de um ponto, estas poderão assumir valores positivos, negativos e nulos.

- Cosseno:



- Seno:



Note também que o menor e o maior valor que podemos encontrar para o cosseno ou para o seno de um arco são, respectivamente, -1 e 1, portanto, para qualquer que seja um arco α, temos:

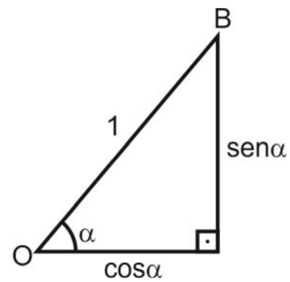
$$\boxed{-1 \leq \cos\alpha \leq 1}$$

e

$$\boxed{-1 \leq \operatorname{sen}\alpha \leq 1}$$

3.5. Relação Fundamental da Trigonometria

Voltemos a observar o triângulo extraído do círculo trigonométrico no item 3.2:



Por se tratar de um triângulo retângulo, o Teorema de Pitágoras deve ser satisfeito, assim:

$$(\text{sen}\,\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1^2$$

$$\boxed{\mathbf{sen}^2\,\alpha + \mathbf{cos}^2\,\alpha = \mathbf{1}}$$

Esta última expressão é conhecida como **relação fundamental da trigonometria** e como o próprio nome já remete, é uma das principais fórmulas que estudaremos neste texto.

Observe nesta expressão que $\text{sen}^2\alpha$ é a notação usual para indicar que calcularemos o valor do seno de α elevado ao quadrado: $\text{sen}^2\alpha = (\text{sen}\,\alpha)^2$. Além disso perceba que na expressão $\text{sen}\,\alpha^2$, apenas α será elevado ao quadrado.

Note também que a relação fundamental pode ser apresentada de outras duas formas:

$$\boxed{\mathbf{sen}^2\,\alpha = \mathbf{1} - \mathbf{cos}^2\,\alpha}$$

$$\boxed{\mathbf{cos}^2\,\alpha = \mathbf{1} - \mathbf{sen}^2\,\alpha}$$

Exemplos Resolvidos

1. Calcule $\cos\alpha$ sabendo que α é um arco do 2° quadrante tal que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{8}{17}$

Sabemos que $\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha$, portanto:

$$\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{8}{17}\right)^2$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{64}{289} = \frac{289-64}{289} = \frac{225}{289}$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{225}{289}} = \pm\frac{15}{17}$$

Neste momento, será necessário analisar os quadrantes para a escolha do sinal do cosseno acima. Como α pertence ao 2° quadrante, temos (item 3.4) que seu cosseno deve ser negativo, assim:

$$\cos\alpha = -\frac{15}{17}$$

2. É possível que para um determinado arco x tenhamos: $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$ e $\cos x = \frac{2}{3}$?

A resposta a esta pergunta claramente é não.

Observe que a relação fundamental é obrigatória para qualquer arco x, assim, teremos:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \neq 1$$

3. Encontre os valores de a que satisfazem simultaneamente $\operatorname{sen}\alpha = a$ e $\cos\alpha = \sqrt{1-2a}$.

Para satisfazer a relação fundamental:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$a^2 + \left(\sqrt{1-2a}\right)^2 = 1$$

$$a^2 + 1 - 2a = 1$$

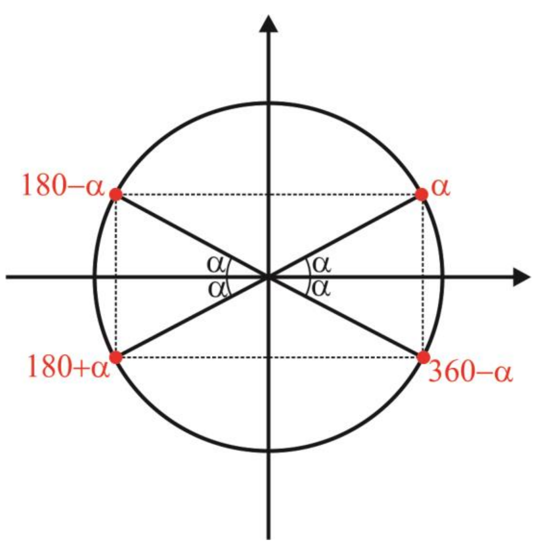
$$a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } a = 2$$

Porém observe que para $a = 2$ teremos $\text{sen}\alpha = 2$ e $\cos\alpha = \sqrt{-3}$ que são claramente impossíveis (o primeiro por ser maior que 1 e o segundo por não ser real).

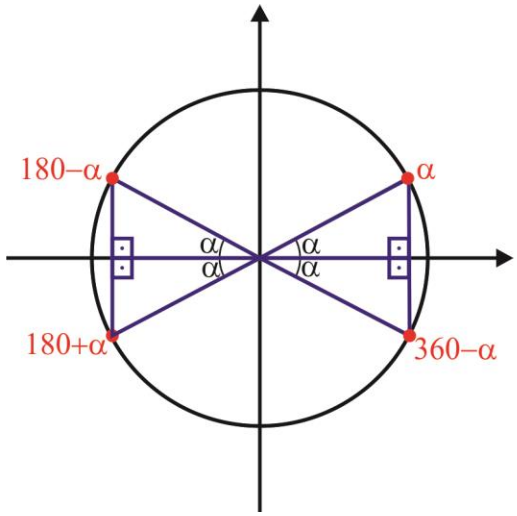
Desta forma, o único valor aceito é $a = 0$.

3.6. Redução ao primeiro quadrante

Outra relação importante que podemos observar pela análise do círculo trigonométrico é a possibilidade da obtenção de propriedades trigonométricas de arcos pertencentes ao 2°, 3° e 4° quadrantes através da comparação com o 1° quadrante. Observe a figura a seguir:



Nesta figura estão representados os pontos finais dos arcos dos quatro quadrantes que formam um ângulo α com o eixo dos cossenos. Observe também a existência de quatro triângulos que possuem α como um de seus ângulos internos:



Estes triângulos são congruentes, pois além de semelhantes (caso AA) possuem hipotenusas iguais a 1. Como os catetos destes triângulos representam os valores do seno e cosseno (em módulo) de cada um dos arcos evidenciados, fica evidente que valem as relações:

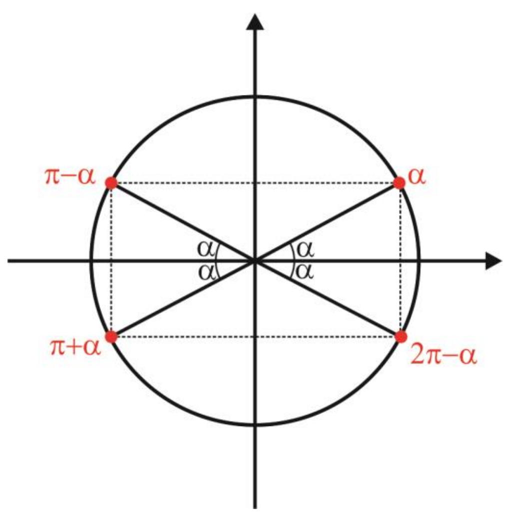
$$\text{sen}\,\alpha = |\text{sen}(180-\alpha)| = |\text{sen}(180+\alpha)| = |\text{sen}(360-\alpha)|$$

e

$$\cos\alpha = |\cos(180-\alpha)| = |\cos(180+\alpha)| = |\cos(360-\alpha)|$$

Em suma, adotaremos α, $180°-\alpha$, $180°+\alpha$ e $360°-\alpha$ como **arcos correspondentes**. Este conceito implica que todas as suas propriedades trigonométricas serão iguais em módulo.

É interessante observar que esta correspondência entre arcos também pode ser feita em radianos:



Será também muito útil lembrar que, dado um arco α da forma $\alpha = \frac{\pi}{N} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, seus correspondentes no 2°, 3° e 4° quadrantes serão, respectivamente: $\frac{(N-1)\pi}{N}$, $\frac{(N+1)\pi}{N}$ e $\frac{(2N-1)\pi}{N}$.

Exemplos Resolvidos

1. Encontre o valor do seno, cosseno e tangente de 120°.

Primeiramente devemos identificar o quadrante a que o arco pertence: $120° \in \left]90°;180°\right[\Rightarrow$ 2° quad.

A expressão que gera o arco correspondente a α no 2° quadrante é $180-\alpha$, assim:

$$180-\alpha = 120 \Rightarrow \alpha = 60°$$

Portanto, as propriedades trigonométricas de 120° são iguais às do 60°, em módulo. Para decidir o sinal, basta lembrarmos que no 2° quadrante o seno é positivo, o cosseno negativo e a tangente, por ser o quociente entre seno e cosseno, será negativa também:

$$\text{sen}120° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 120° = -\frac{1}{2} \qquad \text{tg}120° = -\sqrt{3}$$

2. Encontre o valor do seno, cosseno e tangente de $\frac{7\pi}{4}$.

Neste caso, em que o arco é dado em radianos, podemos proceder como no exemplo anterior, identificando que o arco pertence ao 4° quadrante e igualando o mesmo a $2\pi-\alpha$.

Ou apenas notar que este arco é da forma $\frac{(2N-1)\pi}{N}$ para $N=4$, portanto, é o correspondente de $\frac{\pi}{4}$ no 4° quadrante. Assim, suas propriedades serão iguais às de $\frac{\pi}{4}$ (em módulo) e os sinais de seu seno, cosseno e tangente são, respectivamente, negativo, positivo e negativo:

$$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}=-1$$

3. Encontre o valor do seno, cosseno e tangente de $\frac{7\pi}{6}$.

Basta observar que $\frac{7\pi}{6}$ é da forma $\frac{(N+1)\pi}{N}$ para $N=6$, portanto, é o correspondente a $\frac{\pi}{6}$ no 3° quadrante, assim:

$$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}=-\frac{1}{2} \qquad \cos\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

EXERCÍCIOS

1. Se $x\in\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right[$ e $\cos x=2k-3$, então qual o intervalo de variação de k?

2. (FUVEST) O menor valor de $\frac{1}{3-\cos x}$, com x real, é:

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 1 e) 3

3. Calcule o valor de $(\operatorname{sen}x+\cos x)^2+(\operatorname{sen}x-\cos x)^2$

4. (UNESP) Determine todos os valores de x, $0\le x\le 2\pi$ para os quais se verifica a igualdade $(\operatorname{sen}x+\cos x)^2=1$

5. Calcule o valor da expressão $\sqrt{sen^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4 sen^2 x}$

6. (INSPER) O professor de Matemática de Artur e Bia pediu aos alunos que colocassem suas calculadoras científicas no modo “radianos” e calculassem o valor de $sen\frac{\pi}{2}$. Tomando um valor aproximado, Artur digitou em sua calculadora o número $1,6$ e, em seguida, calculou o seu seno, encontrando o valor A. Já Bia calculou o seno de $1,5$, obtendo o valor B. Considerando que $\frac{\pi}{2}$ vale aproximadamente $1,5708$, assinale a alternativa que traz a correta ordenação dos valores A, B e $sen\frac{\pi}{2}$.

a) $sen\frac{\pi}{2} < A < B.$

b) $A < sen\frac{\pi}{2} < B.$

c) $A < B < sen\frac{\pi}{2}.$

d) $B < sen\frac{\pi}{2} < A.$

e) $B < A < sen\frac{\pi}{2}.$

7. (FGV) A soma $\cos^2 0° + \cos^2 2° + \cos^2 4° + \cos^2 6° + ... + \cos^2 358° + \cos^2 360°$ é igual a

a) 316. b) 270. c) 181. d) 180. e) 91.

8. (PUCRS) Para representar os harmônicos emitidos pelos sons dos instrumentos da orquestra, usam-se funções trigonométricas. A expressão $2sen^2 x + 2\cos^2 x - 5$ envolve estas funções e, para $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, seu valor de é:

a) –7 b) –3 c) –1 d) $2\pi - 5$ e) $3\pi - 5$

9. (MACKENZIE)

I) $\cos 225° < \cos 215°$

II) $tg\,(5\pi/12) > sen\,(5\pi/12)$

III) $sen\,160° > sen\,172°$

Das afirmações acima:

a) todas são verdadeiras.
b) todas são falsas.
c) somente II e III são verdadeiras.
d) somente II é verdadeira.
e) somente I e II são verdadeiras.

10. (FGV) Os valores numéricos da expressão $A=\sum_{n=0}^{17}(\cos x)^n = 1+\cos x+\cos^2 x+...+\cos^{17} x$, para $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ e $x=\pi$ são, respectivamente:

a) 18, 1, 0 b) 17, 0, 1 c) 18, 0, 1 d) 18, 1, 1 e) 17, 1, 0

11. (FGV) Considere a função $f(x)=5^{-\operatorname{sen} x}$, definida no intervalo $[0;2\pi]$. O valor de x que a maximiza:

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{3\pi}{4}$ c) π d) $\frac{3\pi}{2}$ e) 2π

12. Uma roda-gigante tem 30 metros de diâmetro, completa uma volta em 120 segundos e o embarque dos passageiros se dá no carro situado no ponto mais baixo da roda-gigante, a 2 metros de altura a partir do solo. Considere, ainda, a roda como uma circunferência num plano perpendicular ao plano do solo, o passageiro como um ponto dessa circunferência, o movimento uniforme e o instante do início do movimento como t = 0.

a) Encontre a altura máxima, em relação ao solo, alcançada pelo passageiro durante uma volta completa e a velocidade angular da roda, em radianos por segundo.
b) É verdadeira a afirmação: “Em quinze segundos, a altura alcançada pelo passageiro é um quarto da altura máxima que ele pode alcançar”? Justifique sua resposta.
c) Encontre a altura em que o passageiro estará no instante t =75.
d) Determine $h(t)$, altura (em relação ao solo) em que se encontra o passageiro no instante t.

13. Sabendo que $\operatorname{sen} x+\cos x=b$ e $\operatorname{sen} x-\cos x=b$, calcule em função de a e b o valor de $\operatorname{sen}^4 x-\cos^4 x$.

14. (UFMT) Dado um triângulo isósceles de lados congruentes medindo $20\,\text{cm}$, e o ângulo α formado por esses dois lados, tal que $4\text{sen}\alpha = 3\cos\alpha$, determine:

a) O valor numérico de $\text{sen}\alpha$.

b) O perímetro desse triângulo.

15. (UFU) Seja α um ângulo fixado, medido em radianos, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Sobre as raízes da equação $x^2 - (\text{sen}\alpha)x = \dfrac{\cos^2\alpha}{4}$ pode-se afirmar que

a) pelo menos uma das raízes é igual a 1.

b) as duas raízes são maiores do que 1.

c) uma raiz é maior do que 1 e a outra é menor do que 1.

d) as duas raízes são menores do que 1

16. (UFRGS) Considere as afirmativas abaixo.

I. $\tan 92^\circ = -\tan 88^\circ$

II. $\tan 178^\circ = \tan 88^\circ$

III. $\tan 268^\circ = \tan 88^\circ$

IV. $\tan 272^\circ = -\tan 88^\circ$

Quais estão corretas?

a) Apenas I e III.
b) Apenas III e IV.
c) Apenas I, II e IV.
d) Apenas I, III e IV.
e) Apenas II, III e IV.

17.(UFC) Sejam $x = r\,\text{sen}\phi\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\phi\,\text{sen}\theta$ e $z = r\cos\phi$, onde $0 \le \phi \le \pi$ e $0 \le \theta \le 2\pi$. Então $x^2 + y^2 + z^2$ é igual a:

a) r^2
b) $r^2\,\text{sen}\theta$
c) $r^2\cos\phi$
d) $r^2\,\text{sen}\phi$
e) $r^2\cos\theta$

18. Seja $f_k(x) = \dfrac{1}{k}(\text{sen}^k x + \cos^k x)$. Mostre que para qualquer x real, $f_4(x) - f_6(x)$ é constante e calcule seu valor

Capítulo 4

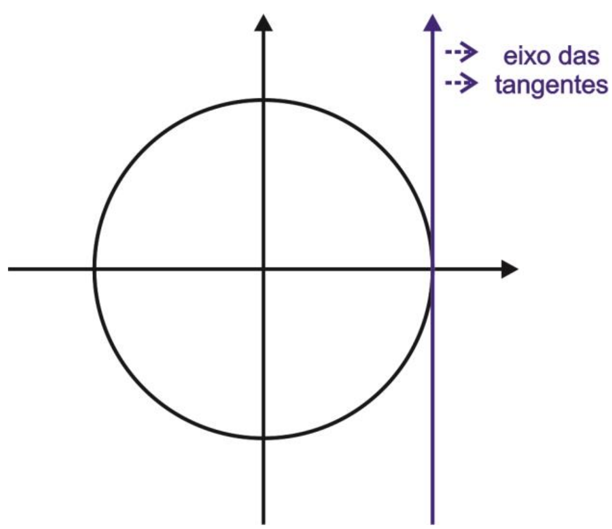
Tangente, Cotangente, Secante e Cossecante

4.1. Tangente e Secante

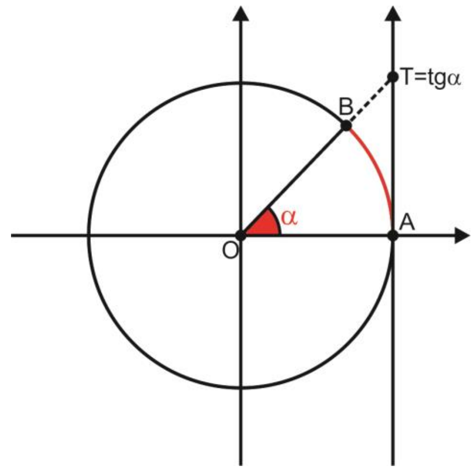
Dado um arco α (com $\cos\alpha \neq 0$), define-se algebricamente a tangente e a secante de α pelas expressões:

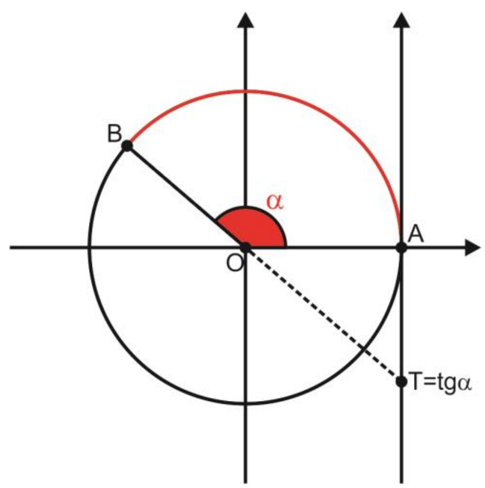
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{e} \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

Estas duas características trigonométricas também podem ser obtidas através do círculo trigonométrico, com o auxílio de um novo eixo ordenado, vertical e que contém o ponto (1,0), chamado eixo das tangentes:

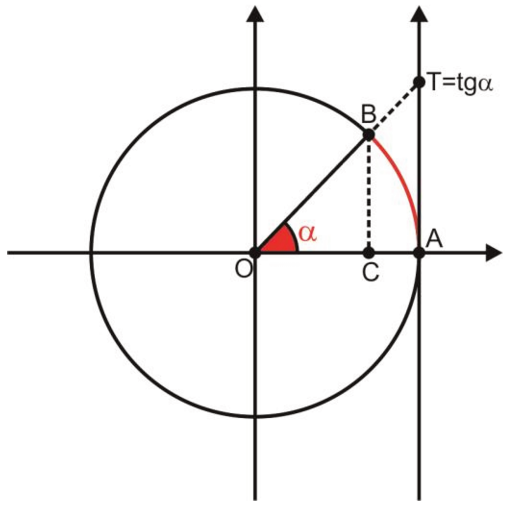


Seja α um arco do círculo trigonométrico com ponto final em B. O valor da $\text{tg}\alpha$ será numericamente igual à coordenada encontrada pela intersecção do prolongamento de $\overline{OB}$ com o eixo das tangentes (T). Além disso, o módulo da secante de α será numericamente igual ao comprimento do segmento $\overline{OT}$, veja alguns exemplos:

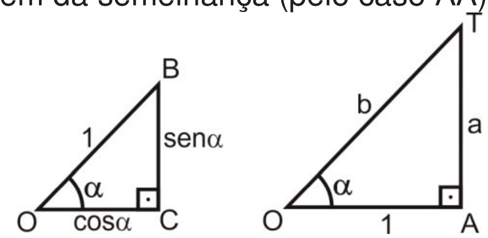




A garantia de que estes resultados são realmente a $\text{tg}\alpha$ e $|\sec\alpha|$ vem do desenvolvimento de uma relação de semelhança entre os triângulos OAT e OCB abaixo:



É evidente notar que, além da semelhança (pelo caso AA) temos:



$$\frac{\overline{AT}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CO}} \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow a = \text{tg}\,\alpha$$

$$\frac{\overline{OT}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{CO}} \Rightarrow \frac{b}{1} = \frac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow b = \sec\alpha$$

E, por consequência do Teorema de Pitágoras no triângulo OAT, temos:

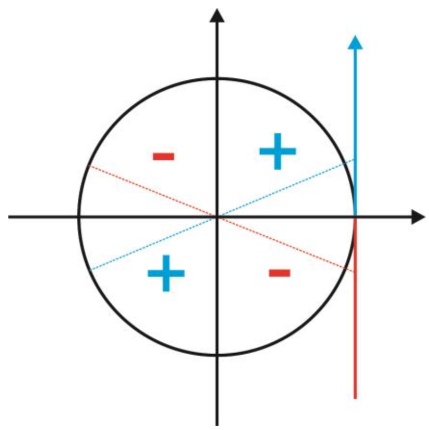
$$b^2 = 1^2 + a^2$$

$$\boxed{\sec^2\alpha = 1 + \text{tg}^2\,\alpha}$$

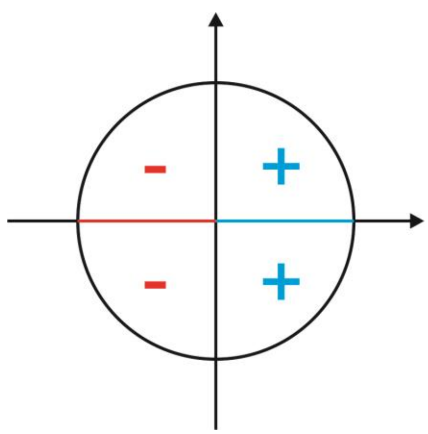
4.2. Variação de Sinais – Tangente e Secante

Esta forma de visualizar a tangente e secante é completa para a primeira, mas não para a segunda, pois não deixa evidente seu sinal (lembre-se de que $\overline{OT}$ sempre tem comprimento positivo e representa $|\sec\alpha|$). Em função disso, a análise do sinal da secante será desenvolvida apenas pelo argumento algébrico, pois é fato que $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ sempre terá o mesmo sinal que $\cos\alpha$.

- Tangente:

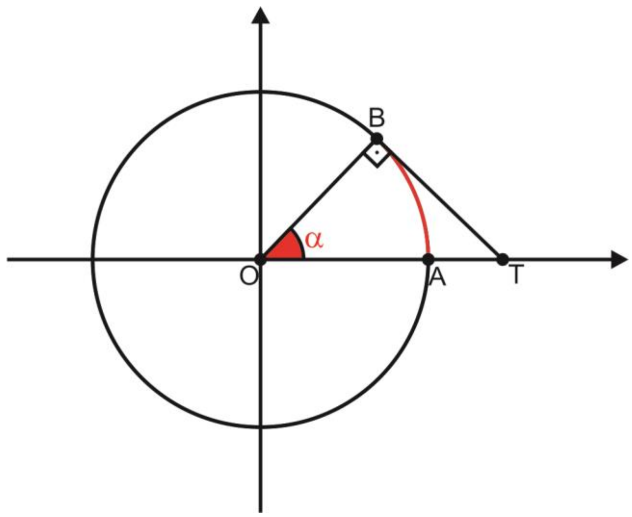


- Secante:

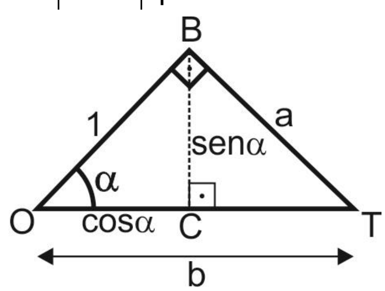


4.3. Método Alternativo – Tangente e Secante

Outra forma de visualizar a tangente e a secante de um arco de medida α, com ponto final em B é traçar o segmento BT, tangente ao círculo trigonométrico em B e com o ponto T pertencente ao eixo dos cossenos:



Neste caso, $\overline{BT} = |\text{tg}\alpha|$ e $\overline{OT} = |\sec\alpha|$ pois:



Pela semelhança entre os triângulos COB e OBT temos:

$$\frac{\overline{BT}}{\overline{BO}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CO}} \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow a = \text{tg}\alpha$$

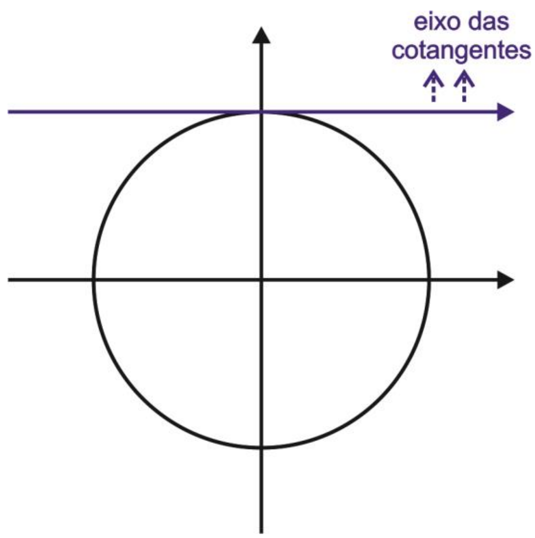
$$\frac{\overline{OT}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} \Rightarrow \frac{b}{1} = \frac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow b = \sec\alpha$$

4.4. Cotangente e Cossecante

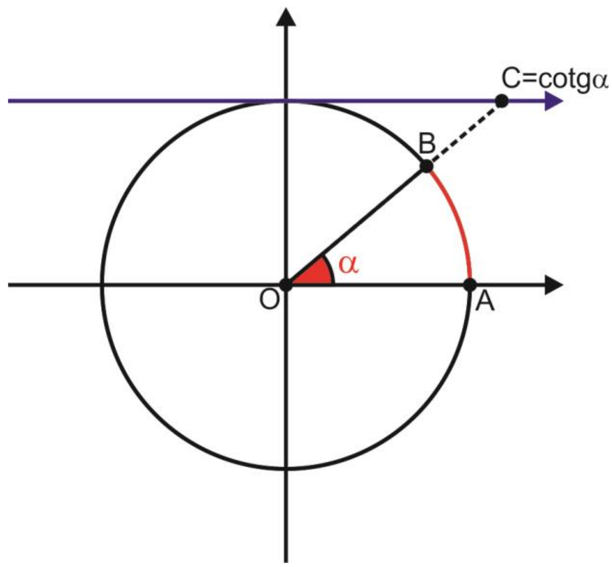
Dado um arco α (com $\text{sen}\alpha \neq 0$), define-se algebricamente a cotangente e cossecante de α pelas expressões:

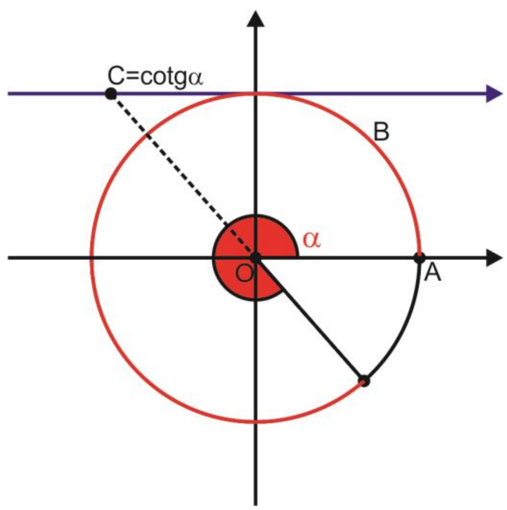
$$\text{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} \text{ e } \text{cossec}\alpha = \frac{1}{\text{sen}\alpha}$$

Estas duas características trigonométricas também podem ser obtidas através do círculo trigonométrico, com o auxílio de um novo eixo ordenado, horizontal e que contém o ponto (0,1), chamado eixo das cotangentes:

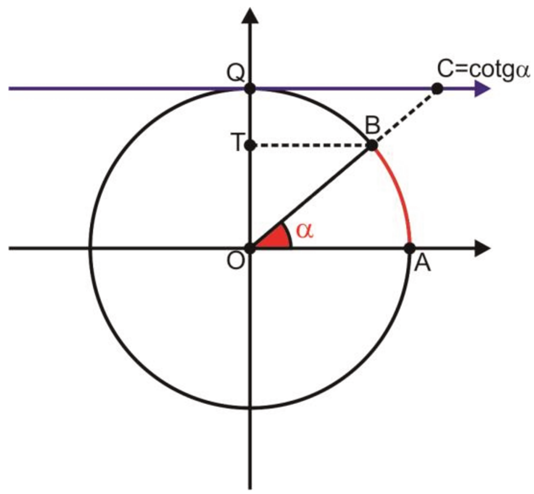


Seja α um arco do círculo trigonométrico com ponto final em B. O valor da $\text{cotg}\alpha$ será numericamente igual à coordenada encontrada pela intersecção do prolongamento de $\overline{OB}$ com o eixo das cotangentes (C). Além disso, o módulo da cossecante de α será numericamente igual ao comprimento do segmento $\overline{OC}$, veja alguns exemplos:

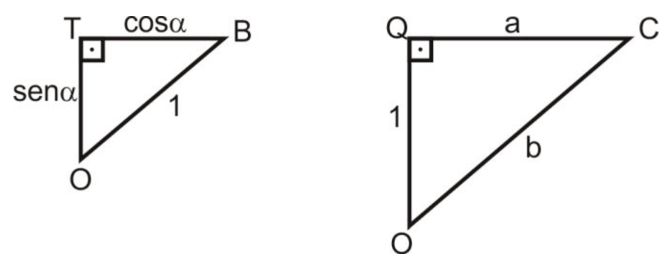




A garantia de que estes resultados são realmente a $\text{cotg}\,\alpha$ e $|\text{cossec}\,\alpha|$ vem do desenvolvimento de uma relação de semelhança entre os triângulos OBT e OCQ a seguir:



É evidente notar que além da semelhança (pelo caso AA), temos:



$$\frac{\overline{QC}}{\overline{QO}} = \frac{\overline{TB}}{\overline{TO}} \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \Rightarrow a = \operatorname{cotg}\alpha$$

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{QO}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{TO}} \Rightarrow \frac{b}{1} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \Rightarrow b = \operatorname{cossec}\alpha$$

E por consequência do Teorema de Pitágoras no triângulo OCQ, temos:

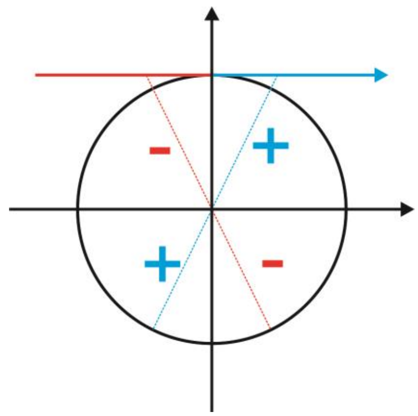
$$b^2 = 1^2 + a^2$$

$$\boxed{\operatorname{cossec}^2\alpha = 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha}$$

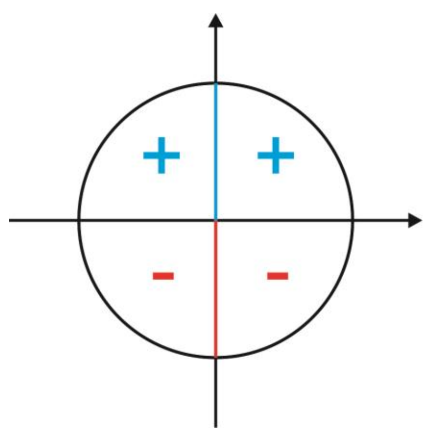
4.5. Variação de Sinais – Cotangente e Cossecante

Note que esta forma de visualizar a cotangente e cossecante é completa para a primeira, mas não para a segunda, pois não deixa evidente seu sinal (lembre-se de que $\overline{OC}$ sempre tem comprimento positivo e representa $|\text{cossec}\,\alpha|$). Em função disso, a análise do sinal da cossecante será desenvolvida apenas pelo argumento algébrico, pois é fato que $\text{cossec}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha}$, sempre terá o mesmo sinal que $\text{sen}\,\alpha$.

- Cotangente:

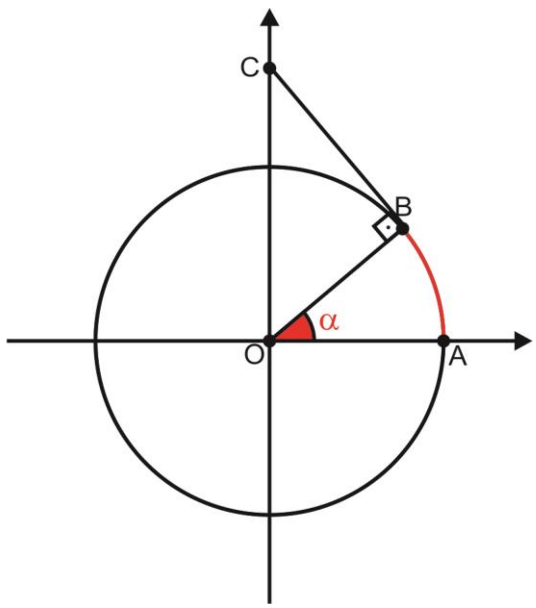


- Cossecante:

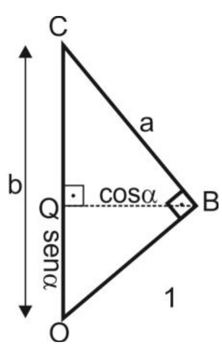


4.6. Método Alternativo – Cotangente e Cossecante

Outra forma de visualizar a cotangente e cossecante de um arco de medida α, com ponto final em B é traçar o segmento BC, tangente ao círculo trigonométrico em B e com o ponto C pertencente ao eixo dos senos:



Neste caso, $\overline{BC} = |\text{cotg}\,\alpha|$ e $\overline{OC} = |\text{cossec}\,\alpha|$ pois:



Pela semelhança entre os triângulos OBQ e OBC temos:

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{BO}} = \frac{\overline{QB}}{\overline{QO}} \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} \Rightarrow a = \text{cotg}\,\alpha$$

$$\frac{\overline{CO}}{\overline{BO}}=\frac{\overline{BO}}{\overline{QO}}\Rightarrow\frac{b}{1}=\frac{1}{\text{sen}\,\alpha}\Rightarrow b=\text{cossec}\,\alpha$$

Exemplos Resolvidos

1. Prove que $\text{sen}\,\alpha.\text{tg}\,\alpha+\cos\alpha=\sec\alpha$.

A expressão acima é denominada identidade trigonométrica. Para prova-la, basta simplificá-la até alcançar uma relação visivelmente idêntica. Neste caso, simplificaremos o lado esquerdo da igualdade até encontrar a expressão do lado direito:

$$\text{sen}\,\alpha.\text{tg}\,\alpha+\cos\alpha=\text{sen}\,\alpha.\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}+\cos\alpha=\frac{\text{sen}^2\,\alpha}{\cos\alpha}+\cos\alpha=\frac{\text{sen}^2\,\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha}$$

Como $\text{sen}^2\,\alpha+\cos^2\alpha=1$, temos:

$$\frac{\text{sen}^2\,\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}=\sec\alpha\text{, c.q.d.}$$

2. Prove que $\text{cossec}\,x=\text{cotg}\,x+\dfrac{\text{sen}\,x}{1+cox}$.

Simplificando o lado direito da igualdade:

$$\text{cotg}\,x+\frac{\text{sen}\,x}{1+cox}=\frac{\cos x}{\text{sen}\,x}+\frac{\text{sen}\,x}{1+cox}=\frac{\cos x(1+\cos x)+\text{sen}^2\,x}{\text{sen}\,x.(1+\cos x)}=\frac{\cos x+\cos^2 x+\text{sen}^2\,x}{\text{sen}\,x.(1+\cos x)}$$

Como $\text{sen}^2\,\alpha+\cos^2\alpha=1$, temos:

$$\frac{\cancel{\cos x+1}}{\text{sen}\,x.\cancel{(1+\cos x)}}=\frac{1}{\text{sen}\,x}=\text{cossec}\,x\text{, c.q.d.}$$

EXERCÍCIOS

1. (IBMECRJ) O valor de m para que exista um ângulo x com $\cos x = \dfrac{2}{m-1}$ e $tg(x) = \sqrt{m-2}$ é dado por:

a) Um número par.
b) Um número ímpar.
c) Um número negativo.
d) Um número natural maior que 10.
e) Um número irracional.

2. (UFC) Considere a igualdade $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} x + \dfrac{P(2-\sec^2 x)}{2\operatorname{tg} x}$. Assinale a opção que apresenta o valor de P, para o qual a igualdade acima seja válida para todo x ∈ R, $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$, k inteiro.

a) 2. b) 1. c) 0. d) -1. e) -2.

3. Seja $\alpha \in \left]\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right[$ tal que $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$, calcule $\operatorname{sen}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$, $\sec\alpha$ e $\operatorname{cossec}\alpha$.

4. (FGV) A função trigonométrica equivalente a $\dfrac{\sec x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{cossec} x + \cos x}$ é:

a) $\operatorname{sen} x$ b) $\operatorname{cotg} x$ c) $\sec x$ d) $\operatorname{cossec} x$ e) $\operatorname{tg} x$

5. (UFSCAR) O conjunto das soluções em r e θ do sistema de equações

$$\begin{cases} r \,.\, \operatorname{sen}\theta = \sqrt{3} \\ r \,.\, \cos\theta = 1 \end{cases}$$

para r > 0 e $0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ é:

a) $\left\{2, \dfrac{\pi}{6}\right\}$ b) $\left\{1, \dfrac{\pi}{3}\right\}$ c) {2, 1} d) {1, 0} e) $\left\{2, \dfrac{\pi}{3}\right\}$

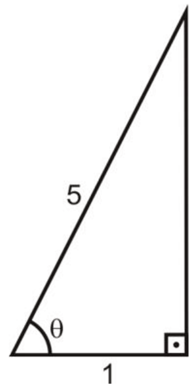
6. (UEL) O triângulo ABC é retângulo em A. Se $\cos B = 0{,}6$, então $\operatorname{cotg} C$ é igual a

a) 5/3 b) 4/3 c) 3/4 d) 3/5 e) 1/2

7. (INSPER) Seja θ um ângulo maior do que 45° e menor do que 90°. Considere uma progressão geométrica cujo primeiro termo e cuja razão são, respectivamente, $a_1 = tg^2(\theta) - 1$ e $q = sen^2\theta$.

a) Determine, em termos de θ, o limite da soma dos termos dessa progressão: $S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$

b) Considere agora que θ é o ângulo dado no triângulo retângulo e não isósceles representado a seguir, cuja hipotenusa mede 5 e cujo cateto menor mede 1. Calcule o valor numérico do limite da soma obtida no item (a).



8. (UFPA) Simplifique a expressão $\dfrac{1 - \text{sen}^2 x}{\text{cotg}\, x . \text{sen}\, x}$

9. (FAAP) Sabendo que $\text{tg}\, x = a$, calcule em função de a o valor da expressão: $\dfrac{\text{sen}\, x + \cos x}{\text{sen}\, x - \cos x}$.

10. Considere $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}; \pi\right[$ que satisfaz $\text{tg}^2\, x + \text{tg}\, x - 2 = 0$. Calcule o valor da cotangente de x.

11. (FUVEST) Se α está no intervalo $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ e satisfaz $\text{sen}^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \dfrac{1}{4}$, então o valor da tangente de α é:

a) $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ b) $\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ c) $\sqrt{\dfrac{3}{7}}$ d) $\sqrt{\dfrac{7}{3}}$ e) $\sqrt{\dfrac{5}{7}}$

12. Sabendo que $\operatorname{sen} x = \dfrac{2}{n+1}$, calcule o valor de $\dfrac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg}^2 x}$ em função de n.

13. (PUCRS) A expressão $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} + \dfrac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x}$ é igual a:

a) 1 b) 2 c) $2\operatorname{sen} x$ d) $2\sec x$ e) $2\operatorname{cossec} x$

14. (UECE) Sabendo que $\cos\phi = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ e $\dfrac{\pi}{2} < \phi < \pi$, calcular o valor de $\sqrt{2\operatorname{cotg}\phi + \operatorname{cossec}^2\phi}$

15. Se (FGV) $\operatorname{sen} a = \dfrac{24}{25}$ e a secante de a é negativa, então o valor de $\sqrt{\dfrac{1-\cos a}{1+\cos a}}$ é:

a) $\dfrac{3}{4}$ b) $\dfrac{3}{5}$ c) $\dfrac{5}{4}$ d) $\dfrac{4}{3}$ e) $\dfrac{1}{2}$

16.(ITA) Se $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais e (a,b) o intervalo aberto $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, seja $f: \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{\sec^2 x + \operatorname{cossec}^2 x}$. Se $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ é tal que $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$, então $f(\alpha)$ é igual a:

a) $\dfrac{a+b}{2}$ b) $\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$ c) $\dfrac{a^2-b^2}{ab}$ d) $\dfrac{a^2+b^2}{ab}$ e)n.d.a.

17. (UEL) Seja x um número real pertencente ao intervalo $[0, \dfrac{\pi}{2}]$. Se $\sec x = \dfrac{3}{2}$, então tgx é igual a

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ b) $\dfrac{2}{3}$ c) $\dfrac{1}{2}$ d) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ e) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

18. Calcule o valor de $\sec x + \operatorname{tg} x$ sabendo que $\sec x - \operatorname{tg} x = 5$.

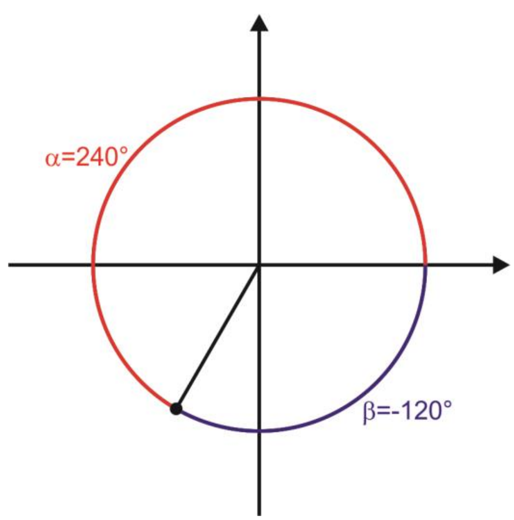
Capítulo 5

Congruência de Arcos e Equações Trigonométricas

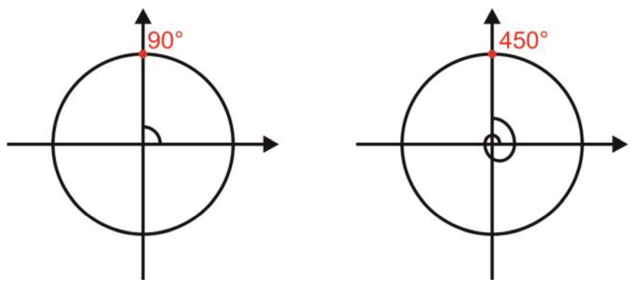
5.1. Congruência de Arcos

Dois arcos α e β do círculo trigonométrico são congruentes (ou côngruos) se, e somente se, possuem as mesmas extremidades. No entanto esta noção pode ser resumida a: Dois arcos α e β do círculo trigonométrico são congruentes (ou côngruos) se, e somente se, possuem o mesmo ponto final, uma vez que os pontos iniciais de quaisquer arcos do círculo trigonométrico são coincidentes. Neste caso escrevemos $\alpha \equiv \beta$.

Durante os capítulos anteriores, esta noção poderia ser visualizada apenas com exemplos de um arco demarcado no sentido positivo e outro no sentido negativo:



No entanto, a partir de agora, poderemos usar o círculo trigonométrico para determinar arcos que extrapolam uma volta tanto no sentido positivo quanto negativo. Com isto, note, por exemplo, que o arco de 90° é congruente ao arco de 450° pois $450° = 90° + 360°$:



De um modo geral, dado um arco α $\left(\alpha \in [0;360°[\right)$, qualquer arco congruente a α deve ser da forma $\alpha + k.360°$, com $k \in \mathbb{Z}$. Ou seja, qualquer arco congruente a α deve ser formado por α mais *k* voltas, onde *k* pode assumir qualquer valor inteiro. Notemos também que para o caso mais usual, em que $\alpha \in [0;2\pi[$, a expressão equivalente é:

$$\alpha \equiv \alpha + k.2\pi \text{, com } k \in \mathbb{Z}$$

Exemplos Resolvidos

1. Encontre a determinação principal dos arcos de:
a) 1490°.
A determinação principal é o nome dado à primeira determinação positiva de um arco qualquer.
Observe que para encontrar a primeira determinação positiva de 1490° devemos desconsiderar a quantidade de voltas inteiras dadas no círculo trigonométrico para sua formação. Para descobrir esta quantidade de voltas, basta realizar a divisão de 1490° por 360°:

$$\begin{array}{r|l} 1490 & \underline{360} \\ 50 & \;\;4 \end{array}$$

Este resultado significa que, para formar um arco de 1490° é necessário percorrer 4 voltas inteiras no círculo trigonométrico e ainda percorrer mais 50°, ou seja, $1490° = 50° + 4.360°$.
Ao ignorar a quantidade inteira de voltas, temos que $1490° \equiv 50°$.

b) -1960°.
Vamos realizar este procedimento com o arco positivo (1960°) e depois realizar as conversões necessárias:

$$\begin{array}{r|l} 1960 & 360 \\ \hline 160 & 5 \end{array}$$

Portanto, $1960° = 160° + 5.360°$. Multiplicando esta equação por -1:

$$-1960° = -160° + 5.(-360°)$$

Assim, $-1960° \equiv -160° \equiv 200°$.

2. Calcule o valor do seno e cosseno de:

a) $\dfrac{25\pi}{6}$

Quando o arco é fornecido em radianos ainda é possível, porém pouco produtivo realizar o mesmo procedimento do exemplo 1, pois envolve fazer as conversões entre unidades desnecessariamente. Neste caso podemos desmembrar o arco dado em duas partes de forma que uma delas represente uma quantidade inteira de voltas, veja:

$$\frac{25\pi}{6} = \frac{24\pi + \pi}{6} = \frac{24\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 4\pi + \frac{\pi}{6}$$

Como 4π representa 2 voltas, temos que $\dfrac{25\pi}{6} \equiv \dfrac{\pi}{6}$

Portanto,

$$\text{sen}\frac{25\pi}{6} = \text{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \cos\frac{25\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) $\dfrac{35\pi}{3}$

Observe o que acontece, quando efetuamos o mesmo procedimento do item anterior:

$$\frac{35\pi}{3} = \frac{33\pi + 2\pi}{3} = \frac{33\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 11\pi + \frac{\pi}{3}$$

Porém observe que 11π não representa uma quantidade inteira de voltas e, por isso, não pode ser ignorado. Neste caso, devemos buscar outro múltiplo de 3 para desmembrar o arco dado:

$$\frac{35\pi}{3} = \frac{30\pi + 5\pi}{3} = \frac{30\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = 10\pi + \frac{5\pi}{3}$$

Como 10π representa 5 voltas, temos que $\frac{35\pi}{3} \equiv \frac{5\pi}{3}$, portanto:

$$\operatorname{sen}\frac{35\pi}{3} = \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{e} \qquad \cos\frac{35\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

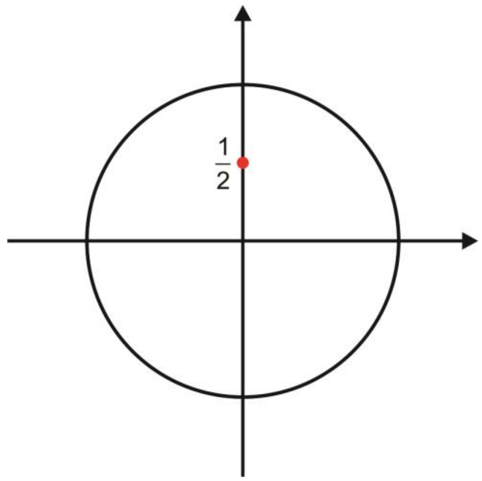
5.2. Equações Trigonométricas

Denominamos equação trigonométrica qualquer equação que envolva termos trigonométricos (seno, cosseno, tangente,...) em sua(s) incógnita(s). Resolver uma equação trigonométrica consiste em encontrar quais são os arcos de um intervalo fornecido que resolvem aquela expressão. A teoria para resolução deste tipo de problema já foi abordada nesta aula e também nas anteriores, por isto neste momento nos ateremos somente aos procedimentos para tal. Neste primeiro momento trataremos apenas das equações trigonométricas imediatas (da forma $\operatorname{sen} x = k$, $\cos x = k$ ou $\operatorname{tg} x = k$) mas no futuro estas equações voltarão ao nosso curso de forma mais elaborada.

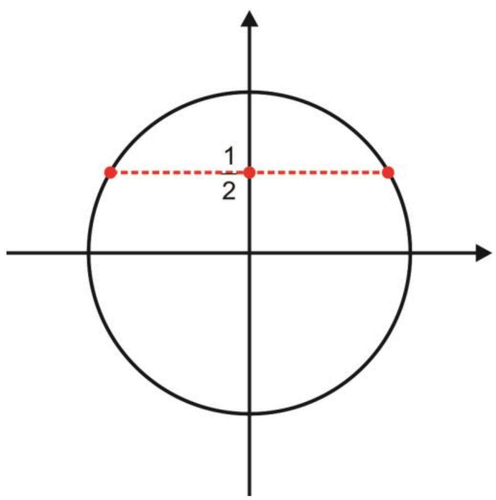
Exemplos Resolvidos

1. Resolva a equação $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ para $0 \leq x < 2\pi$.

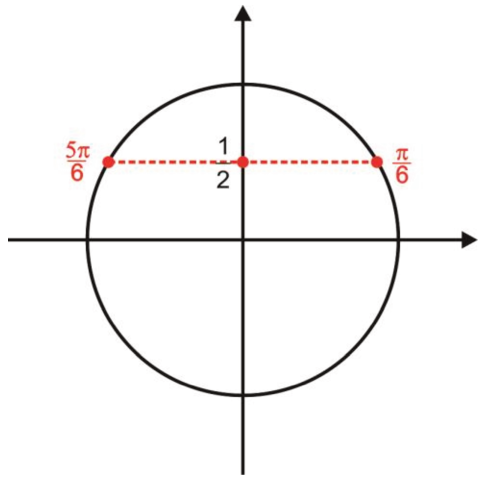
Neste problema deseja-se encontrar quais são os arcos, no intervalo $0 \leq x < 2\pi$ que possuem seno igual a $\frac{1}{2}$. Observemos esta situação no círculo trigonométrico:



A proposta é, então, observar graficamente quantos e quais pontos (arcos) do círculo trigonométrico possuem ordenada no ponto destacado na figura anterior. É imediato notar que são dois:



O procedimento agora é apenas descobrir quais são os arcos evidenciados pelos pontos acima. É sabido que o arco do primeiro quadrante que possui seno igual a $\frac{1}{2}$ é $\frac{\pi}{6}$ e, portanto, o outro é seu correspondente no segundo quadrante $\frac{5\pi}{6}$:



Portanto, $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$.

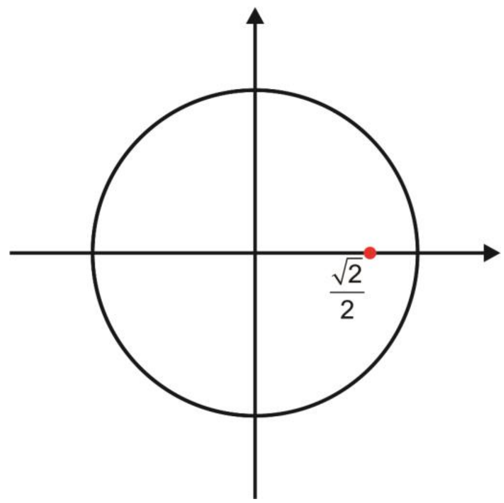
2. Resolva a equação $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ para $x \in \mathbb{R}$.

Resolver uma equação trigonométrica para $x \in \mathbb{R}$ consiste em resolvê-la sem se restringir a um intervalo específico como fizemos no exemplo 1. Neste caso, cada ponto encontrado como solução representa uma infinidade de arcos congruentes e nossa resposta deverá ser a expressão (ou as expressões) de congruência deste ponto. No caso deste problema específico, encontramos dois pontos em $[0;2\pi[$ que satisfazem as condições da equação. A resposta deste problema será então a expressão dos arcos congruentes a estes pontos:

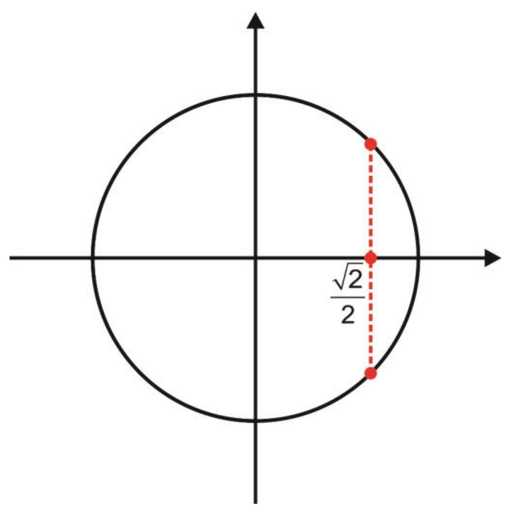
$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{, com } k \in \mathbb{Z} \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{, com } k \in \mathbb{Z}$$

3. Resolva a equação $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ para $0 \le x < 2\pi$.

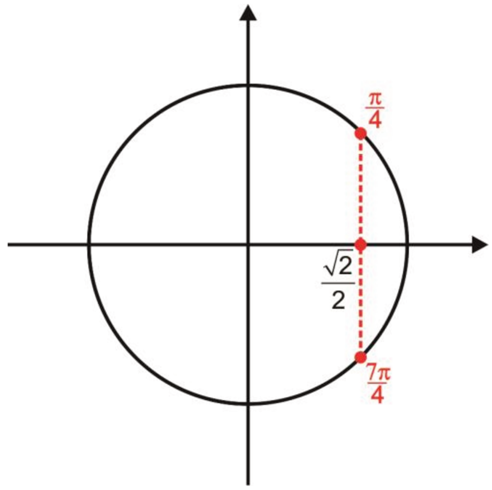
Neste caso, buscamos os arcos que terão seus cossenos representados pelo ponto da figura a seguir:



É mais uma vez imediato perceber que dois arcos cumprem esta condição:



O arco do 1° quadrante que possui cosseno igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ é $\frac{\pi}{4}$ e certamente o outro ponto será seu correspondente no 4° quadrante $\frac{7\pi}{4}$:



Portanto, $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$.

4. Resolva a equação $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Quando uma equação trigonométrica não evidenciar o intervalo a ser considerado na resolução, consideraremos sempre a reta toda.

Portanto devemos encontrar as expressões dos arcos congruentes a $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$ que são:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{, com } k \in \mathbb{Z} \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \text{, com } k \in \mathbb{Z}$$

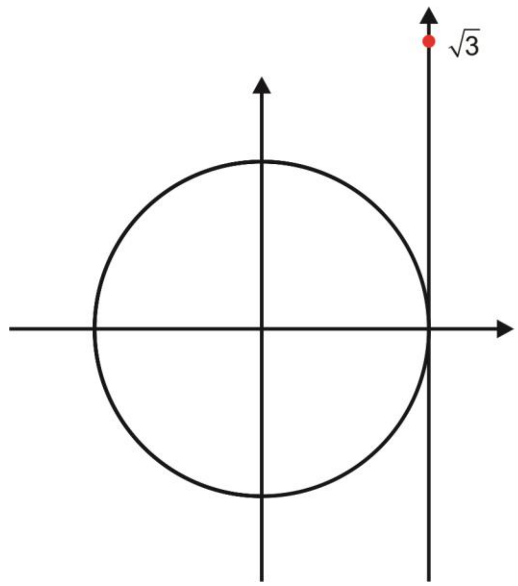
Porém observe que neste caso (e na maioria das equações envolvendo $\cos x$ como incógnita) podemos escrever estas duas expressões em apenas uma linha. Através da análise dos arcos encontrados como resposta no exemplo 3, note que $\frac{7\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4}$, desta forma podemos escrever $x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ como $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ e a resposta final deste problema seria:

$$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{, com } k \in \mathbb{Z}$$

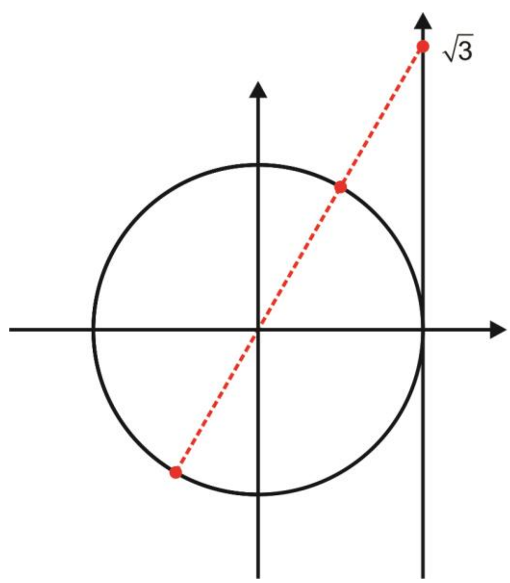
Esta última forma de fornecer a resposta é mais enxuta que a anterior e por isso sempre contará com a nossa preferência em problemas posteriores.

5. Resolva a equação $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ para $0 \le x < 2\pi$.

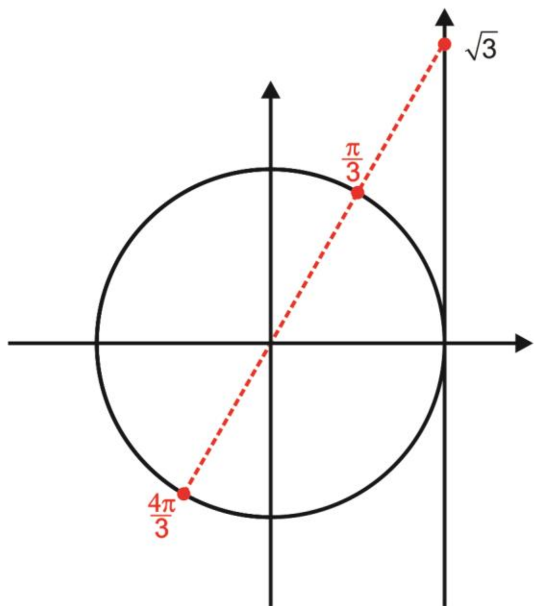
Por se tratar de uma equação cuja incógnita trigonométrica depende da tangente, devemos recorrer ao eixo das tangentes para encontrar geometricamente a posição do número $\sqrt{3}$:



É possível observar que dois arcos cumprirão a condição necessária:

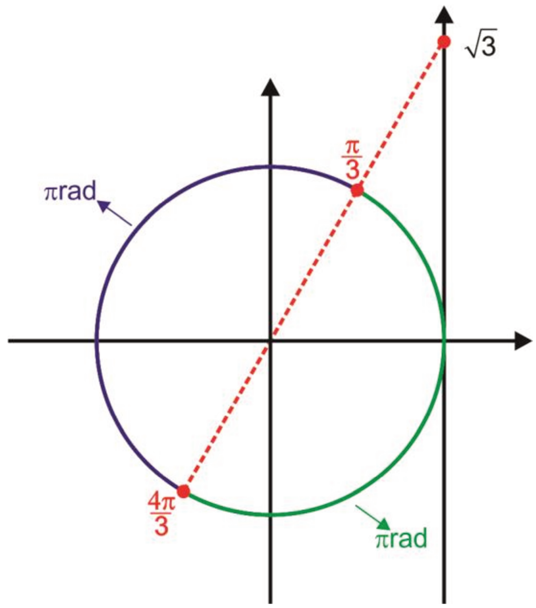


Sabendo que o ponto encontrado no primeiro quadrante representa $\frac{\pi}{3}$, certamente o ponto do terceiro quadrante será seu correspondente: $\frac{4\pi}{3}$.



Desta forma temos: $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$.

6. Resolva a equação $\text{tg}\, x = \sqrt{3}$.
Transformar a solução do exemplo 5 acima para a reta real envolve os mesmos passos já citados nos exemplos 2 e 4 anteriores, porém com uma ressalva. Observe que no caso desta equação há um intervalo constante entre os dois pontos que representam as soluções:



Portanto, veja que se tomarmos qualquer um dos valores obtidos no exemplo 5 como ponto de partida e, a partir dali, percorrermos sobre o círculo trigonométrico um número inteiro de meias voltas (equivalentes a πrad), sempre encontraremos um arco situado sobre os dois pontos já estabelecidos. Assim, ao invés de fornecer a resposta através de duas expressões:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{, com } k \in \mathbb{Z} \qquad \text{e} \qquad x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \text{, com } k \in \mathbb{Z}$$

iremos fornecer com apenas uma

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{, com } k \in \mathbb{Z}$$

De uma forma geral, para transformar soluções no intervalo $[0;2\pi[$ em soluções reais, usaremos da seguinte ideia:

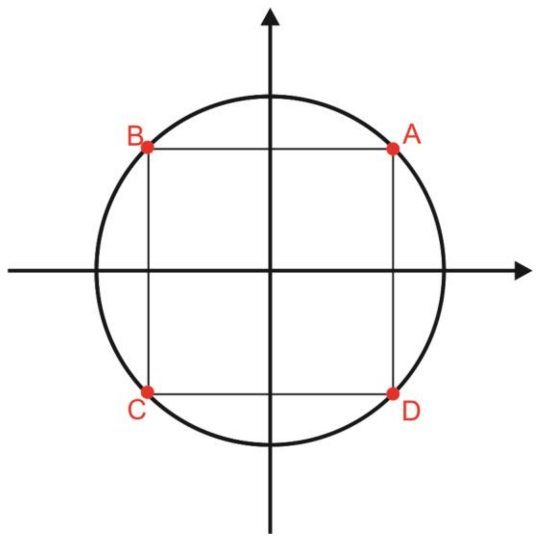
$$x = x_0 + k.P \text{, com } k \in \mathbb{Z}.$$

Onde x_0 é uma solução da primeira volta e P é o período, ou seja, a medida do arco compreendido entre as raízes **quando esta for constante**.

]

EXERCÍCIOS

1. Na figura abaixo, A representa os arcos côngruos a $\frac{\pi}{4}$ e o quadrilátero ABCD é um retângulo. Encontre a expressão real para todos os arcos côngruos com extremidade final em:



a) A

b) B

c) C

d) D

e) A ou B

f) A ou D

g) B ou C

h) A ou C

i) B ou D

j) A ou B ou C ou D

k) A ou B ou D

2. Encontre o valor do seno, cosseno e tangente de:

a) 3180°

b) $\frac{31\pi}{4}$

c) $-\frac{63\pi}{6}$

3. Resolva as equações abaixo considerando $x \in [0;2\pi[$:

a) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$

c) $\operatorname{sen} x = 1$

d) $\operatorname{sen} x = 0$

e) $\cos x = -\frac{1}{2}$

f) $\cos x = 0$

g) $\cos x = \pm 1$

h) $\operatorname{tg} x = 1$

i) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

j) $\operatorname{tg} = 0$

4. Resolva as equações abaixo considerando $x \in \mathbb{R}$:

a) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$

c) $\operatorname{sen} x = 1$

d) $\operatorname{sen} x = 0$

e) $\cos x = -\frac{1}{2}$

f) $\cos x = 0$

g) $\cos x = \pm 1$

h) $\operatorname{tg} x = 1$

i) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

j) $\operatorname{tg} = 0$

Capítulo 6

Adição e Diferença de Arcos

6.1. Definição

Você já deve ter percebido em seus estudos anteriores que o valor de uma propriedade trigonométrica não varia proporcionalmente com o valor do arco, por exemplo, $\operatorname{sen}(a+b) \neq \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b$. O objetivo deste capítulo é estudar o desenvolvimento de expressões do tipo $\operatorname{sen}(a \pm b)$, $\cos(a \pm b)$ e $\operatorname{tg}(a \pm b)$.

6.2. Seno

As expressões utilizadas para o desenvolvimento de senos da adição e subtração de quaisquer dois arcos a e b são:

$$\boxed{\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a.\cos b + \operatorname{sen} b.\cos a}$$

e

$$\boxed{\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a.\cos b - \operatorname{sen} b.\cos a}$$

6.3. Cosseno

As expressões utilizadas para o desenvolvimento de cossenos da adição e subtração de quaisquer dois arcos a e b são:

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b}$$

e

$$\boxed{\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b}$$

6.4. Tangente

As expressões utilizadas para o desenvolvimento de tangentes da adição e subtração de quaisquer dois arcos a e b são:

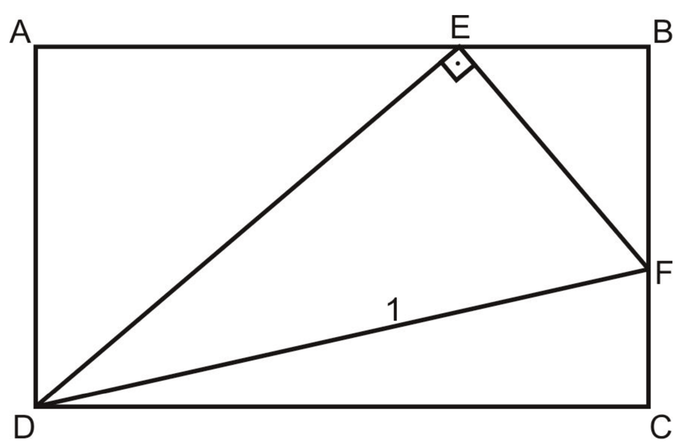
$$\boxed{\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a.\operatorname{tg}b}}$$

e

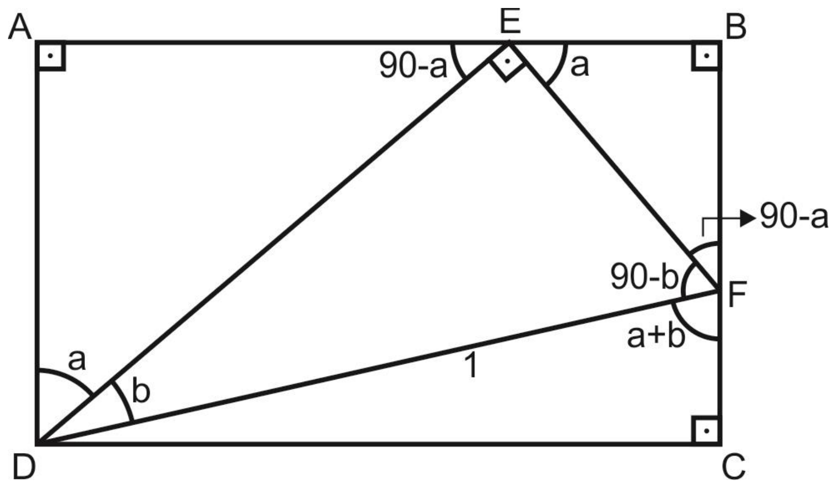
$$\boxed{\operatorname{tg}(a-b)=\frac{\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b}{1+\operatorname{tg}a.\operatorname{tg}b}}$$

6.5. Demonstrações

Vamos demonstrar a validade destas fórmulas para dois ângulos a e b agudos:
Considere um retângulo ABCD e três segmentos $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{DF}$, tais que $DEF = 90°$ e $\overline{DF} = 1$, conforme figura abaixo:



Tomemos $ADE = a$ e $EDF = b$ e observe que podemos transportar a e b pela figura da seguinte forma:



Pela análise do triângulo DEF temos:

$$\operatorname{sen} b = \frac{\overline{EF}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{EF}}{1} \Rightarrow \operatorname{sen} b = \overline{EF}$$

$$\cos b = \frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{DE}}{1} \Rightarrow \cos b = \overline{DE}$$

Pela análise do triângulo ADE temos:

$$\operatorname{sen} a = \frac{\overline{AE}}{\overline{DE}} \Rightarrow \overline{AE} = \operatorname{sen} a . \overline{DE} \Rightarrow \overline{AE} = \operatorname{sen} a . \cos b$$

$$\cos a = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} \Rightarrow \overline{AD} = \cos a . \overline{DE} \Rightarrow \overline{AD} = \cos a . \cos b$$

Pela análise do triângulo EBF temos:

$$\operatorname{sen} a = \frac{\overline{BF}}{\overline{EF}} \Rightarrow \overline{BF} = \operatorname{sen} a . \overline{EF} \Rightarrow \overline{BF} = \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} b$$

$$\cos a = \frac{\overline{EB}}{\overline{EF}} \Rightarrow \overline{EB} = \overline{EF} . \cos a \Rightarrow \overline{EB} = \operatorname{sen} b . \cos a$$

Pela análise do triângulo CDF temos:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \frac{\overline{CD}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{CD}}{1} \Rightarrow \operatorname{sen}(a+b) = \overline{CD}$$

$$\cos(a+b) = \frac{\overline{FC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{FC}}{1} \Rightarrow \cos(a+b) = \overline{FC}$$

Como $\overline{AD} = \overline{BF} + \overline{FC}$, então:

$$\cos a.\cos b = \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b + \cos(a+b)$$

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b}$$

Como $\overline{CD} = \overline{AE} + \overline{EB}$, então:

$$\boxed{\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a.\cos b + \operatorname{sen} b.\cos a}$$

Como $\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)}$, então:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{sen} a.\cos b + \operatorname{sen} b.\cos a}{\cos a.\cos b - \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b}$$

Dividindo todos os termos à direita por $\cos a.\cos b$:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} a.\cancel{\cos b}}{\cos a.\cancel{\cos b}} + \dfrac{\operatorname{sen} b.\cancel{\cos a}}{\cancel{\cos a}.\cos b}}{\dfrac{\cancel{\cos a.\cos b}}{\cancel{\cos a.\cos b}} - \dfrac{\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b}{\cos a.\cos b}} \therefore$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a.\operatorname{tg} b}}$$

Note que esta demonstração contempla apenas ângulos a e b agudos e cuja soma seja menor que 90°, mas a garantia de que estas relações se estendem para outros casos vem imediatamente pela redução ao primeiro quadrante. Já as demonstrações destas fórmulas para o caso da diferença de arcos ($a-b$) vêm do fato de que para qualquer arco α temos que $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ e $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ (estes conceitos serão estudados durante as funções trigonométricas).

Exemplos Resolvidos

1. Usando as fórmulas de adição e subtração de arcos, prove que $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen}(\pi + x) = -\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{sen}(2\pi - x) = -\operatorname{sen} x$.

Aplicando as relações $\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a.\cos b \pm \operatorname{sen} b.\cos a$ diretamente, temos:

$$\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen}\pi.\cos x - \operatorname{sen} x.\cos\pi = 0.\cos x - \operatorname{sen} x.(-1) \ \operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$$

$$\text{sen}(\pi + x) = \text{sen}\,\pi.\cos x + \text{sen}\,x.\cos\pi = 0.\cos x + \text{sen}\,x.(-1)$$
$$\text{sen}(\pi + x) = -\text{sen}\,x$$

$$\text{sen}(2\pi - x) = \text{sen}\,2\pi.\cos x - \text{sen}\,x.\cos 2\pi = 0.\cos x - \text{sen}\,x.1$$
$$\text{sen}(2\pi - x) = -\text{sen}\,x$$

2. Calcule o valor de $\cos 75°$.

Desmembrando $75° = 45° + 30°$, temos:

$$\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45°.\cos 30° - \text{sen}\,45°.\text{sen}\,30°$$
$$\cos 75° = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

3. Calcule o valor de $\text{sen}\,15°$.
Desmembrando $15° = 45° - 30°$, temos:

$$\text{sen}\,15° = \text{sen}(45° - 30°) = \text{sen}\,45°.\cos 30° - \text{sen}\,30°.\cos 45°$$
$$\text{sen}\,75° = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Note que os resultados encontrados nos exemplos 2 e 3 são coincidentes pois $75° + 15° = 90°$, assim, $\cos 75° = \text{sen}\,15°$.

4. Desenvolva uma expressão para $\text{tg}(2a)$ em função de $\text{tg}\,a$.
Desmembrando $2a = a + a$, temos:

$$\text{tg}(2a) = \text{tg}(a + a) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,a}{1 - \text{tg}\,a.\text{tg}\,a}$$
$$\text{tg}(2a) = \frac{2\,\text{tg}\,a}{1 - \text{tg}^2\,a}$$

EXERCÍCIOS

1. Usando as fórmulas de adição e subtração de arcos, prove que $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\cos(\pi + x) = -\cos x$ e $\cos(2\pi - x) = \cos x$.

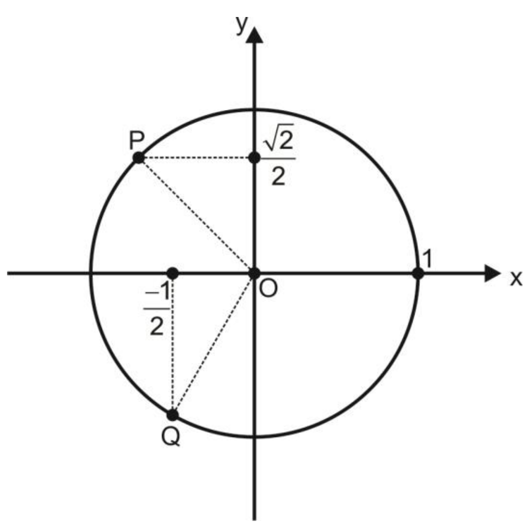
2. (FEI) O valor de $y = (\cos a + \cos b)^2 + (\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b)^2$ para $a + b = \dfrac{\pi}{2}$ é:

a) $\dfrac{1}{2}$ b) 2 c) 0 d)1 e)4

3. (UFU) O valor de $\operatorname{sen}17°.\cos13° + \cos17°.\operatorname{sen}13° + \cos73°.\cos17°$
$-\operatorname{sen}73°.\cos17 + \dfrac{\operatorname{tg}31° + \operatorname{tg}14°}{1 - \operatorname{tg}31°.\operatorname{tg}14°}$

a) $\dfrac{5}{2}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) 0 d) 1 e) $\dfrac{3}{2}$

4. (ESPCEX) Os pontos P e Q representados no círculo trigonométrico abaixo correspondem às extremidades de dois arcos, ambos com origem em (1,0), denominados respectivamente α e β, medidos no sentido positivo. O valor de $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ é



a) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$ b) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$ c) $2+\sqrt{3}$ d) $2-\sqrt{3}$ e) $-1+\sqrt{3}$

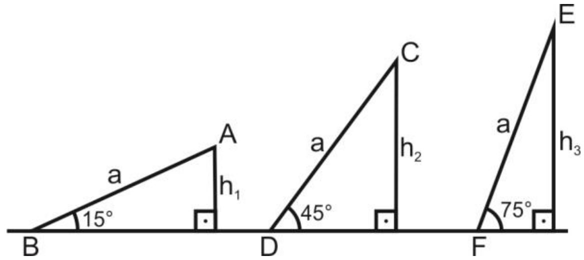
5. (UFRGS) A expressão $\text{sen}(150° + x) + \text{sen}(150° - x)$ é equivalente a:

a) $\cos x$ b) $-\text{sen}\, x$ c) $\text{sen}\dfrac{\pi}{2}$ d) $\text{sen}\, x$ e) $\cos\dfrac{5\pi}{6}$

6. (MACKENZIE) O maior valor inteiro de k, para que a equação $\sqrt{3}\,\text{sen}\, x + \cos x = k - 2$ apresente soluções reais é

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

7. (UERJ) Um esqueitista treina em três rampas planas de mesmo comprimento *a*, mas com inclinações diferentes. As figuras abaixo representam as trajetórias retilíneas $AB = CD = EF$, contidas nas retas de maior declive de cada rampa.

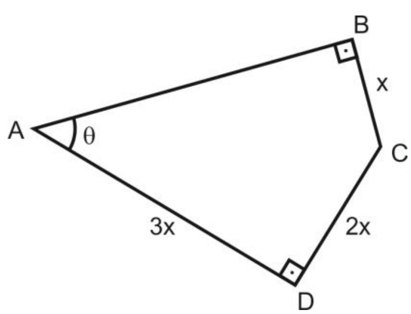


Sabendo que as alturas, em metros, dos pontos de partida A, C e E são, respectivamente, h_1, h_2 e h_3, conclui-se que $h_1 + h_2$ é igual a:

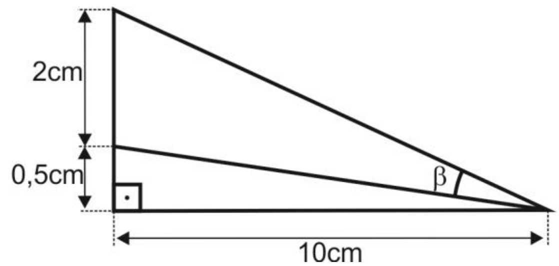
a) $h_3\sqrt{3}$ b) $h_3\sqrt{2}$ c) $2h_3$ d) h_3

8. (FGV) No quadrilátero ABCD mostrado na figura a seguir, B e D são ângulos retos, $\overline{BC} = x$, $\overline{CD} = 2x$, $\overline{AD} = 3x$ e $\hat{A} = \theta$. Determine:

a) O comprimento dos segmentos AC e AB em função de x.
b) O valor de $sen\,\theta$.



9. (MACKENZIE) Na figura, $\text{tg}\,\beta$ é igual a:



a) $\frac{16}{81}$ b) $\frac{8}{27}$ c) $\frac{19}{63}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{4}$

10. Em um triângulo ABC, $3\operatorname{sen} A + 4\cos B = 6$ e $4\operatorname{sen} B + 3\cos A = 1$. Encontre o valor de $\operatorname{sen} C$.

11. (FUVEST) Sejam x e y números reais positivos tais que $x + y = \frac{\pi}{2}$. Sabendo-se que $sen(y - x) = \frac{1}{3}$, o valor de $tg^2 y - tg^2 x$ é igual a

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{5}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{8}$

12. (UFPE) Considerando a medida de ângulos em radianos, se $\theta = \frac{3\pi}{4}$ é correto afirmar, dado que $y = sen(\theta - x) / sen(\theta + x)$, que

a) $y = \tan(\theta + x)$

b) $y = \operatorname{cotan}(\theta - x)$

c) $y = \operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{3} + x\right)$

d) $y = \tan\left(\frac{\theta}{3} + x\right)$

e) $y = \tan\left(\frac{\theta}{3} - x\right)$

13. (UFC) Os números reais *a*, *b* e *y* são tais que $a \neq 0$, $a\cos y \neq b\operatorname{sen} y$. Se $tg\ x = \frac{a\ seny + b\ \cos y}{a\ \cos y - b\ seny}$, calcule o valor de $tg\ (x - y)$ em função de *a* e *b* somente.

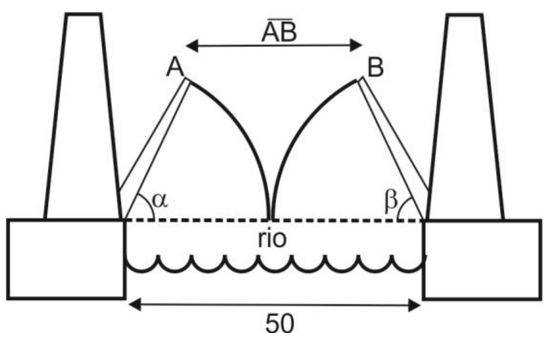
14. (UEL) Se a medida x de um arco é tal que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, então

a) sen (x + π) > 0
b) cos (x + π) < 0
c) tg (x + π) > 0
d) cos (x + 2π) > 0
e) sen (x + 2π) > 0

15. (ITA) Num triângulo ABC o lado $\overline{AB}$ mede 2 cm, a altura relativa ao lado $\overline{AB}$ mede 1 cm, o ângulo ABC mede 135° e M é o ponto médio de $\overline{AB}$. Então a medida de $BAC + BMC$, em radianos, é igual a

a) $\frac{1}{5}\pi$. b) $\frac{1}{4}\pi$. c) $\frac{1}{3}\pi$. d) $\frac{3}{8}\pi$. e) $\frac{2}{5}\pi$.

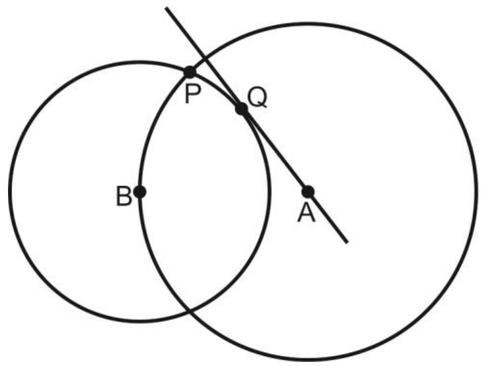
16. (UNICAMP) Uma ponte levadiça, com 50 metros de comprimento, estende-se sobre um rio. Para dar passagem a algumas embarcações, pode-se abrir a ponte a partir de seu centro, criando um vão $\overline{AB}$, conforme mostra a figura a seguir.



Considerando que os pontos A e B têm alturas iguais, não importando a posição da ponte, responda às questões a seguir.
a) Se o tempo gasto para girar a ponte em 1° equivale a 30 segundos, qual será o tempo necessário para elevar os pontos A e B a uma altura de 12,5 m, com relação à posição destes quando a ponte está abaixada?
b) Se $\alpha = 75°$, quanto mede $\overline{AB}$?

17. (FUVEST) Na figura a seguir, as circunferências têm centros A e B. O raio da maior é $\frac{5}{4}$ do raio da menor; P é um ponto de intersecção delas e a reta AQ é

tangente à circunferência menor no ponto Q.



Calcule:
a) cos ABQ
b) cos ABP
c) cos QBP

18. (PUCPR) Três números α, β e θ estão em progressão aritmética.
Então, o valor de: $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\theta}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\theta}$ é:

a) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\theta)$
b) $\operatorname{tg}\beta$
c) $\operatorname{cotg}(\alpha+\beta)$
d) $\operatorname{tg}\alpha$
e) $\operatorname{tg}(\theta-\beta)$

Capítulo 7

Arco Duplo

7.1. Definição

Chamamos de fórmulas de arco duplo aquelas que definem seno, cosseno e tangente de um arco da forma 2α, em função de propriedades trigonométricas de α.

7.2. Seno

Desejamos aqui desenvolver uma expressão que forneça o valor de $\text{sen}(2\alpha)$. Usando a expressão do seno da adição abordada nas aulas anteriores:

$$\text{sen}(2\alpha) = \text{sen}(\alpha + \alpha) = \text{sen}\,\alpha.\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha.\cos\alpha$$

$$\boxed{\text{sen}(2\alpha) = 2.\text{sen}\,\alpha.\cos\alpha}$$

7.3. Cosseno

Desejamos aqui desenvolver uma expressão que forneça o valor de $\cos(2\alpha)$. Usando a expressão do cosseno da adição abordada nas aulas anteriores:

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha.\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha.\text{sen}\,\alpha$$

$$\boxed{\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2}$$

Como $\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha$ e $\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, observe que podemos reescrever a expressão acima de duas outras formas:

$\cos(2\alpha) = 1 - 2\text{sen}^2\alpha$ e $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$

7.4. Tangente

Desejamos aqui desenvolver uma expressão que forneça o valor de $\text{tg}(2\alpha)$. Usando a expressão da tangente da adição abordada nas aulas anteriores:

$$\text{tg}(2\alpha) = \text{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}\alpha.\text{tg}\alpha}$$

$$\boxed{\text{tg}(2\alpha) = \frac{2\,\text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}}$$

7.5. Arco Metade

Uma consequência direta das fórmulas de arco duplo são as fórmulas de arco metade, ou seja, fórmulas que fornecem os valores de seno, cosseno e tangente de $\frac{\beta}{2}$ em função de β. Para isto, vamos analisar as fórmulas de arco duplo efetuando uma troca de variáveis: $\alpha = \frac{\beta}{2} \Rightarrow \beta = 2\alpha$:

- Cosseno do Arco Metade:

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \cos\beta = 2\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\beta + 1 = 2\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \Rightarrow \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\cos\beta + 1}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\cos\beta + 1}{2}}}$$

- Seno do Arco Metade:

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\,\text{sen}^2\,\alpha \Rightarrow \cos\beta = 1 - 2\,\text{sen}^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\,\text{sen}^2\left(\frac{\beta}{2}\right) = 1 - \cos\beta \Rightarrow \text{sen}^2\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{1 - \cos\beta}{2}$$

$$\boxed{\text{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\beta}{2}}}$$

- Tangente do Arco Metade:

$$\text{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)} = \pm\frac{\sqrt{\frac{1 - \cos\beta}{2}}}{\sqrt{\frac{1 + \cos\beta}{2}}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\beta}{1 + \cos\beta}}}$$

7.6. Arco Triplo

Também podemos recorrer às fórmulas de arco duplo para desenvolvermos as expressões de arco triplo, ou seja, expressões que fornecem as propriedades trigonométricas de 3α em função de α:

- Cosseno do Arco Triplo:

$$\cos(3\alpha) = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos(2\alpha).\cos\alpha - \text{sen}(2\alpha).\text{sen}\,\alpha =$$

$$= \left(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha\right)\cos\alpha - 2.\text{sen}\,\alpha.\cos\alpha.\text{sen}\,\alpha = \cos^3\alpha - \text{sen}^2\alpha.\cos\alpha - 2\,\text{sen}^2\alpha.\cos\alpha =$$

$$= \cos^3\alpha - 3\,\text{sen}^2\alpha.\cos\alpha = \cos^3\alpha - 3(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha$$

$$\boxed{\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha}$$

- Seno do Arco Triplo:

$$\text{sen}(3\alpha) = \text{sen}(2\alpha+\alpha) = \text{sen}(2\alpha).\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha.\cos(2\alpha) =$$

$$= 2.\text{sen}\,\alpha.\cos\alpha.\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha.\left(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha\right) = 2.\text{sen}\,\alpha.\cos^2\alpha + \text{sen}\,\alpha.\cos^2\alpha - \text{sen}^3\alpha =$$

$$= 2.\text{sen}\,\alpha.(1-\text{sen}^2\alpha) + \text{sen}\,\alpha.(1-\text{sen}^2\alpha) - \text{sen}^3\alpha =$$

$$\boxed{\text{sen}(3\alpha) = 3\,\text{sen}\,\alpha - 4\,\text{sen}^3\alpha}$$

- Tangente do Arco Triplo:

$$\text{tg}(3\alpha) = \text{tg}(2\alpha+\alpha) = \frac{\text{tg}(2\alpha)+\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}(2\alpha).\text{tg}\,\alpha} = \frac{\dfrac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}+\text{tg}\,\alpha}{1-\dfrac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}.\text{tg}\,\alpha} =$$

$$= \frac{\dfrac{2\,\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\alpha(1-\text{tg}^2\alpha)}{\cancel{1-\text{tg}^2\alpha}}}{\dfrac{1-\text{tg}^2\alpha - 2\,\text{tg}^2\alpha}{\cancel{1-\text{tg}^2\alpha}}} =$$

$$\boxed{\text{tg}(3\alpha) = \frac{3\,\text{tg}\,\alpha - \text{tg}^3\alpha}{1-3\,\text{tg}^2\alpha}}$$

7.7. Consequências

O estudo e o desenvolvimento das expressões de arco duplo, arco metade, adição e subtração de arcos também nos trazem outras consequências que estudaremos aqui apenas em caráter de aprofundamento:

- Se $\alpha+\beta+\theta=\pi$, então:

$$\boxed{\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta+\text{tg}\theta=\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta.\text{tg}\theta}$$

e

$$\boxed{\text{cotg}\alpha.\text{cotg}\beta+\text{cotg}\alpha.\text{cotg}\theta+\text{cotg}\beta.\text{cotg}\theta=1}$$

Como $\alpha+\beta+\theta=\pi$, então, $\alpha+\beta=\pi-\theta$, assim:

$$\text{tg}(\alpha+\beta)=\text{tg}(\pi-\theta)\Rightarrow\frac{\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta}{1-\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta}=-\text{tg}\theta\Rightarrow$$
$$\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta=-\text{tg}\theta+\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta.\text{tg}\theta\Rightarrow$$
$$\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta+\text{tg}\theta=\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta.\text{tg}\theta$$

Sabendo que $\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta+\text{tg}\theta=\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta.\text{tg}\theta$, então:

$$\frac{\cancel{\text{tg}\alpha}}{\cancel{\text{tg}\alpha}.\text{tg}\beta.\text{tg}\theta}+\frac{\cancel{\text{tg}\beta}}{\text{tg}\alpha.\cancel{\text{tg}\beta}.\text{tg}\theta}+\frac{\cancel{\text{tg}\theta}}{\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta.\cancel{\text{tg}\theta}}=1\Rightarrow\frac{1}{\text{tg}\beta.\text{tg}\theta}+\frac{1}{\text{tg}\alpha.\text{tg}\theta}+\frac{1}{\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta}=1\Rightarrow$$
$$\text{cotg}\alpha.\text{cotg}\beta+\text{cotg}\alpha.\text{cotg}\theta+\text{cotg}\beta.\text{cotg}\theta=1$$

- Se $\alpha+\beta+\theta=\frac{\pi}{2}$, então:

$$\boxed{\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta+\text{tg}\alpha.\text{tg}\theta+\text{tg}\beta.\text{tg}\theta=1}$$

e

$$\boxed{\text{cotg}\alpha+\text{cotg}\beta+\text{cotg}\theta=\text{cotg}\alpha.\text{cotg}\beta.\text{cotg}\theta}$$

Como $\alpha+\beta+\theta=\dfrac{\pi}{2}$, então, $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}-\theta$, assim:

$$\text{tg}(\alpha+\beta)=\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\Rightarrow\frac{\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta}{1-\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta}=\frac{1}{\text{tg}\theta}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\text{tg}\alpha.\text{tg}\theta+\text{tg}\beta.\text{tg}\theta=1-\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta\Rightarrow$$
$$\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta+\text{tg}\alpha.\text{tg}\theta+\text{tg}\beta.\text{tg}\theta=1$$

Multiplicando ambos os lados da expressão $\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta+\text{tg}\alpha.\text{tg}\theta+\text{tg}\beta.\text{tg}\theta=1$ por $\text{cotg}\alpha.\text{cotg}\beta.\text{cotg}\theta$, concluímos diretamente que $\text{cotg}\alpha+\text{cotg}\beta+\text{cotg}\theta=\text{cotg}\alpha.\text{cotg}\beta.\text{cotg}\theta$.

Note que é evidente que as expressões acima só serão válidas nos casos em que α, β e θ possuem suas tangentes e cotangentes definidas.

Exemplos Resolvidos

1. Calcule $\cos 2\alpha$ sabendo que $\text{sen}\alpha=-\dfrac{1}{3}$ e que $\alpha\in\left]\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right[$.

Uma maneira de resolver este problema é inicialmente calcular $\cos^2\alpha$ pela relação fundamental:

$$\cos^2\alpha=1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}.$$

Portanto,

$$\cos(2\alpha)=1-2\text{sen}^2\alpha=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

Outra forma de resolver o mesmo problema seria recorrer somente à expressão:

$$\cos(2\alpha)=1-2\text{sen}^2\alpha=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

2. Calcule o valor de $\text{tg}(22°30')$.

Veja que $22°30'$ é a metade de 45°, portanto, pela tangente do arco metade, temos:

$$\text{tg}(22°30') = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 45°}{1+\cos 45°}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{\cancel{2}}}{\frac{2+\sqrt{2}}{\cancel{2}}}} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \pm\sqrt{\frac{\cancel{2}(3-2\sqrt{2})}{\cancel{2}}} = \pm\sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

Porém, como $22°30' \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, sua tangente será positiva: $\text{tg}\,22°30' = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

3. Calcule o valor da expressão: $\left(\text{sen}\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12}\right)^2$

Desenvolvendo o produto notável temos:

$$\underbrace{\text{sen}^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{\pi}{12}}_{1} - \underbrace{2\,\text{sen}\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{12}}_{\text{sen}\,2.\frac{\pi}{12}} = 1 + \text{sen}\frac{\pi}{6} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

EXERCÍCIOS

1. (UNESP) Sabendo-se que $\cos(2x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$ para quais valores de x a função $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cdot\cos(2x)$ assume seu valor mínimo no intervalo $0 \le x \le 2\pi$?

2. (UFPE) Analise a veracidade das afirmações seguintes sobre identidades trigonométricas.

( ) $\text{sen}^4 x - \cos^4 x = \text{sen}^2 x - \cos^2 x$, para todo x real.

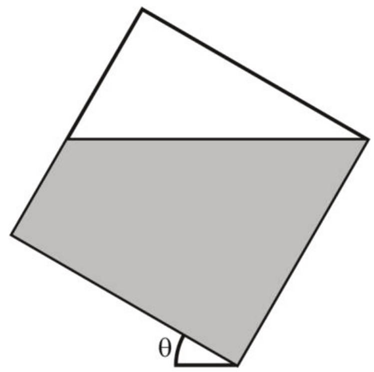
( ) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$, para todo x real.

( ) $\text{tg}\,x + \text{cotg}\,x = \frac{2}{\text{sen}(2x)}$, para x real e $x \ne \frac{k\pi}{2}$, com k inteiro.

( ) $2\cos^2 x + \cos(2x) = 3 + 4\cos^2 x,$ para todo x real.

( ) $\text{sen}(x+y) + \text{sen}(x-y) = 2\cos x \cos y,$ para quaisquer x e y reais.

3. (UNICAMP) Um recipiente cúbico de aresta *a* e sem tampa, apoiado em um plano horizontal, contém água até a altura $\frac{3}{4}a$. Inclina-se lentamente o cubo, girando-o em um ângulo θ em torno de uma das arestas da base, como está representado na figura abaixo.



a) Supondo que o giro é interrompido exatamente antes de a água começar a derramar, determine a tangente do ângulo θ.

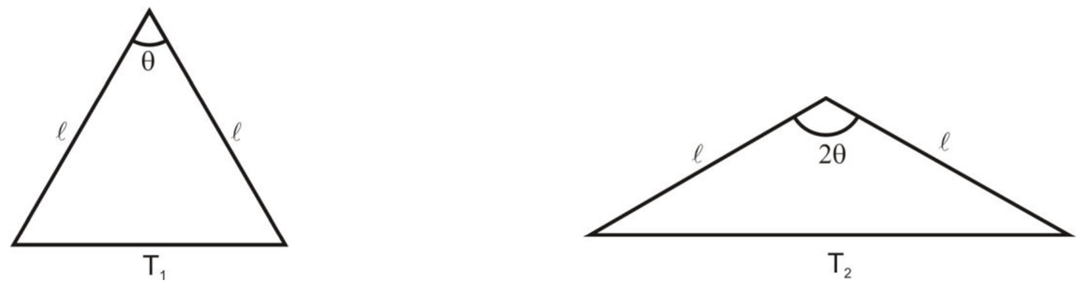
b) Considerando, agora, a inclinação tal que $\tan(\theta) = 1/4,$ *com* $0 < \theta < \pi/2,$ calcule o valor numérico da expressão $\cos(2\theta) - sen(2\theta)$.

4. (FUVEST) Um caminhão sobe uma ladeira com inclinação de 15°. A diferença entre a altura final e a altura inicial de um ponto determinado do caminhão, depois de percorridos 100 m da ladeira, será de, aproximadamente,

Dados: $\sqrt{3} \cong 1{,}73;\ sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos\theta}{2}.$

a) 7 m b) 26 m c) 40 m d) 52 m e) 67 m

5. (INSPER) Movendo as hastes de um compasso, ambas de comprimento ℓ, é possível determinar diferentes triângulos, como os dois representados a seguir, fora de escala.



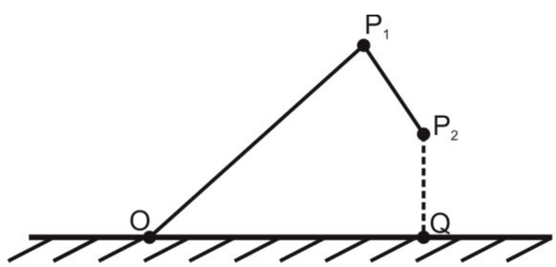
Se a área do triângulo T_1 é o triplo da área do triângulo T_2, então o valor de $\cos\theta$ é igual a

a) $\frac{1}{6}$.   b) $\frac{1}{3}$.   c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.   d) $\frac{1}{2}$.   e) $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

6. (FUVEST) O número real x, com $0 < x < \pi$, satisfaz $\log_3(1-\cos x)+\log_3(1+\cos x)=-2$. Então, $\cos 2x + sen\ x$ vale

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{7}{9}$ d) $\frac{8}{9}$ e) $\frac{10}{9}$

7. (FUVEST)



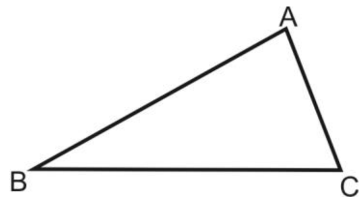
Um guindaste, instalado em um terreno plano, tem dois braços articulados que se movem em um plano vertical, perpendicular ao plano do chão. Na figura, os pontos O, P_1 e P_2 representam, respectivamente, a articulação de um dos braços com a base, a articulação dos dois braços e a extremidade livre do guindaste. O braço $\overline{OP_1}$ tem comprimento 6 e o braço $\overline{P_1P_2}$ tem comprimento 2. Num dado momento, a altura de P_2 é 2, P_2 está a uma altura menor do que P_1 e a distância de O a P_2 é $2\sqrt{10}$. Sendo Q o pé da perpendicular de P_2 ao plano do chão, determine

a) o seno e o cosseno do ângulo $P_2\hat{O}Q$ entre a reta $\overleftrightarrow{OP_2}$ e o plano do chão;

b) a medida do ângulo $O\hat{P}_1P_2$ entre os braços do guindaste;

c) o seno do ângulo $P_1\hat{O}Q$ entre o braço $\overline{OP_1}$ e o plano do chão.

8. (FUVEST)



No triângulo acutângulo ABC, ilustrado na figura, o comprimento do lado $\overline{BC}$ mede $\frac{\sqrt{15}}{5}$, o ângulo interno de vértice C mede α, e o ângulo interno de vértice B mede $\frac{\alpha}{2}$. Sabe-se, também, que $2\cos(2\alpha)+3\cos\alpha+1=0$

Nessas condições, calcule

a) o valor de $\operatorname{sen}\alpha$;

b) o comprimento do lado $\overline{AC}$.

9. (UDESC) A expressão $\operatorname{cotg}(2x)+\operatorname{cossec}(2x)$ pode ser escrita como:

a) $\dfrac{\cos(x)+sen(x)}{\cos(x)sen(x)}$

b) $\operatorname{tg}(x)$

c) $\operatorname{cotg}(x)$

d) $\dfrac{2\left[\cos^2(2x)+sen(2x)\right]}{sen(4x)}$

e) $\dfrac{2\left[\cos(2x)+sen^2(2x)\right]}{sen(4x)}$

10. (ITA) Seja $x\in[0,2\pi]$ tal que $\operatorname{sen}(x).\cos(x)=\frac{2}{5}$. Então, o produto e a soma de todos os possíveis valores de $\operatorname{tg}(x)$ são, respectivamente.

a) 1 e 0 b) 1 e $\frac{5}{2}$ c) - 1 e 0 d) 1 e 5 e) -1 e $-\frac{5}{2}$

11. (UFT) Se $sen\theta=\frac{5}{13}$ e $\theta\in\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$, então o valor de $\operatorname{tg}(2\theta)$ é:

a) $-\frac{12}{13}$ b) $-\frac{120}{119}$ c) $\frac{120}{119}$ d) 1 e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

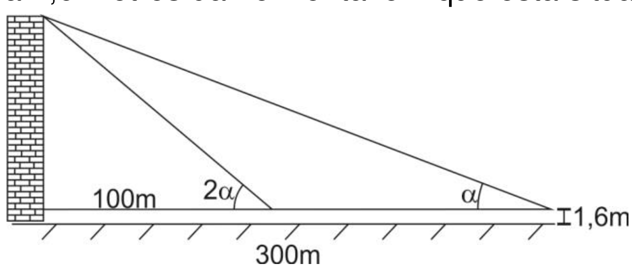
12. (UEL) Se cos (2x) = 1/2, então o valor de $\tan^2(x)+\sec^2(x)$ é:

a) 1/3 b) 2/3 c) 1 d) 4/3 e) 5/3

13. (FGV) O valor de $\cos 72^\circ - \cos^2 36^\circ$ é idêntico ao de
a) $\cos 36^\circ$. b) $-\cos^2 36^\circ$. c) $\cos^2 36^\circ$. d) $-\text{sen}^2 36^\circ$. e) $\text{sen}^2 36^\circ$.

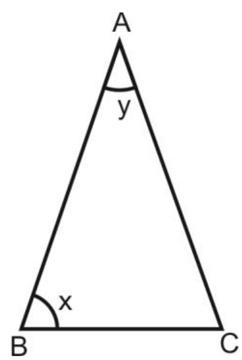
14. A expressão $\text{cossec}\, x . \text{cossec}(3x)$ é equivalente a:
a) $1 - \text{sen}(2x)$
b) $\text{sen}^2 x - \cos^2 x$
c) $1 + 2\cos(2x)$
d) $2 - 2\cos x$
e) $1 - 2\cos(2x)$

15. (UFES) Uma pessoa, quando situada a 300 metros de uma torre, avista o topo da torre sob um ângulo α em relação à horizontal. Quando está a 100 metros da torre, ela avista o topo da torre sob um ângulo 2α. O nível dos olhos dessa pessoa está a 1,6 metros da horizontal em que está situada a base da torre.



a) Determine o valor de α.
b) Determine a altura dessa torre.

16. (MACKENZIE) No triângulo ABC temos AB=AC e sen x = $\frac{3}{4}$. Então cos y é igual a:



a) $\frac{9}{16}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{7}{9}$ d) $\frac{1}{8}$ e) $\frac{3}{16}$

17. (FGV) A função $f(x)=16.\text{sen}\,x.\cos x$ assume valor máximo igual a:

a) 16 b) 12 c) 10 d) 8 e) 4

18. (ITA) O valor da expressão $x=\dfrac{2\,\text{tg}\,\theta}{1-\text{tg}^2\,\theta}$ quando $\cos\theta=-\dfrac{3}{7}$ e $\text{tg}\,\theta<0$, é:

a) $\dfrac{4\sqrt{10}}{31}$ b) $-\dfrac{2\sqrt{10}}{31}$ c) $\dfrac{2\sqrt{10}}{15}$ d) $\dfrac{3\sqrt{10}}{7}$ e) n.r.a.

19. (ITA) $\left(\dfrac{1-\text{tg}\,x}{1+\text{tg}\,x}\right)^2$ vale:

a) $\dfrac{1-2\,\text{sen}\,2x}{1+\text{sen}\,2x}$ b) $\dfrac{1-2\,\text{sen}\,2x}{1-\text{sen}\,2x}$ c) $\dfrac{1+\text{sen}\,2x}{1-\text{sen}\,2x}$ d) $\dfrac{1-\text{sen}\,2x}{1+\text{sen}\,2x}$ e) n.r.a.

20. (ITA) Seja $D=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq\log\dfrac{n\pi}{2},\ n=1,2,3,\ldots\right\}$. Com respeito à função $D\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\dfrac{\text{sen}\left(3e^x\right)}{\text{sen}\,e^x}-\dfrac{\cos\left(3e^x\right)}{\cos e^x}$, podemos afirmar que:

a) $f(x)=2$ para todo x em D
b) $f(x)=3$ para todo x em D
c) $f(x)=e^3$ para todo x em D
d) $f(x)$ não é constante em D
e) n.r.a.

21. (ITA) A equação $\{\text{sen}(\cos x)\}.\{\cos(\cos x)\}=1$ é satisfeita para:

a) $x=\dfrac{\pi}{4}$
b) $x=0$
c) nenhum valor de x
d) todos os valores de x
e) todos os valores de x pertencentes ao primeiro quadrante

22. (ITA) Se $\text{tg}(2A)=5$, então $\text{tg}\left(A+\dfrac{\pi}{4}\right)-\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-A\right)$ é igual a:

a) $-\dfrac{40}{21}$ b) -2 c) 5 d) 8 e) 10

Capítulo 8

Fatoração Trigonométrica

8.1. Definição

Fatorar uma expressão significa transformar esta expressão em um produto. Nesta aula estudaremos algumas fórmulas de fatoração de expressões trigonométricas, também conhecidas como fórmulas de prostaférese.
Estas expressões são consequência direta das fórmulas de adição e subtração de arcos já estudadas em aulas anteriores:

$$\begin{aligned}
\text{sen}(\alpha+\beta) &= \text{sen}\,\alpha.\cos\beta + \text{sen}\,\alpha.\cos\alpha \\
\text{sen}(\alpha-\beta) &= \text{sen}\,\alpha.\cos\beta - \text{sen}\,\alpha.\cos\alpha \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha.\cos\beta - \text{sen}\,\alpha.\text{sen}\,\beta \\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha.\cos\beta + \text{sen}\,\alpha.\text{sen}\,\beta
\end{aligned}$$

8.2. Fórmulas

Dados dois arcos α e β, denotemos:

$$\begin{cases} p = \alpha + \beta \\ q = \alpha - \beta \end{cases}$$

Somando as duas expressões, temos:

$$p + q = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{p+q}{2}$$

Subtraindo as duas expressões, temos:

$$p-q=2\beta \Rightarrow \beta=\frac{p-q}{2}$$

- Somando as duas primeiras expressões do item 1, temos:

$$\text{sen}(\alpha+\beta)+\text{sen}(\alpha-\beta)=2.\text{sen}\,\alpha.\cos\beta$$

Trocando as variáveis: $\alpha+\beta=p$, $\alpha-\beta=q$, $\alpha=\frac{p+q}{2}$ e $\beta=\frac{p-q}{2}$:

$$\boxed{\text{sen}\,p+\text{sen}\,q=2.\text{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

- Subtraindo as duas primeiras expressões do item 1, temos:

$$\text{sen}(\alpha+\beta)-\text{sen}(\alpha-\beta)=2.\text{sen}\,\beta.\cos\alpha$$

Trocando as variáveis:

$$\boxed{\text{sen}\,p-\text{sen}\,q=2.\text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right).\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)}$$

- Somando as duas últimas expressões do item 1, temos:

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2.\cos\alpha.\cos\beta$$

Trocando as variáveis:

$$\boxed{\cos p+\cos q=2.\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

- Subtraindo as duas últimas expressões do item 1, temos:

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2.\text{sen}\,\alpha.\text{sen}\,\beta$$

Trocando as variáveis:

$$\boxed{\cos p-\cos q=-2.\text{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right).\text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

- Utilizando as expressões acima, podemos escrever a soma entre duas tangentes como:

$$\text{tg}\,p+\text{tg}\,q=\frac{\text{sen}\,p}{\cos p}+\frac{\text{sen}\,q}{\cos q}=\frac{\text{sen}\,p.\cos q+\text{sen}\,q.\cos p}{\cos p.\cos q}$$

$$\boxed{\text{tg}\,p+\text{tg}\,q=\frac{\text{sen}(p+q)}{\cos p.\cos q}}$$

- Utilizando as expressões acima, podemos escrever a diferença entre duas tangentes como:

$$\text{tg}\,p-\text{tg}\,q=\frac{\text{sen}\,p}{\cos p}-\frac{\text{sen}\,q}{\cos q}=\frac{\text{sen}\,p.\cos q-\text{sen}\,q.\cos p}{\cos p.\cos q}$$

$$\boxed{\text{tg}\,p-\text{tg}\,q=\frac{\text{sen}(p-q)}{\cos p.\cos q}}$$

Exemplos Resolvidos

1. Fatore $\text{sen}\,6x+\text{sen}\,2x$

Utilizando a fatoração de $\text{sen}\,p+\text{sen}\,q$, temos:

$$\text{sen}\,6x+\text{sen}\,2x=2.\text{sen}\left(\frac{6x+2x}{2}\right).\cos\left(\frac{6x-2x}{2}\right)$$

$$\text{sen}6x + \text{sen}2x = 2.\text{sen}(4x).\cos(2x)$$

2. Calcule o valor de $\cos\frac{7\pi}{8}.\cos\frac{\pi}{8}$

Operando-se inversamente com as fórmulas de fatoração, devemos buscar dois arcos *a* e *b*, tais que:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = \frac{7\pi}{8} \\ \frac{a-b}{2} = \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

Assim temos $a = \pi$ e $b = \frac{3\pi}{4}$. Desta forma, podemos fatorar $\cos\pi + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ como:

$$\cos\pi + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2.\cos\left(\frac{\pi + \frac{3\pi}{4}}{2}\right).\cos\left(\frac{\pi - \frac{3\pi}{4}}{2}\right)$$

$$-1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2.\cos\frac{7\pi}{8}.\cos\frac{\pi}{8}$$

$$\cos\frac{7\pi}{8}.\cos\frac{\pi}{8} = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

3. Fatore a expressão: $1 + \text{tg}\,a$

Tomando $\text{tg}\,45° = 1$, temos:

$$1 + \text{tg}\,a = \text{tg}\,45° + \text{tg}\,a = \frac{\text{sen}(45° + a)}{\cos 45°.\cos a}$$

EXERCÍCIOS

1. (UEL) Se $\cos(2x) = \frac{1}{3}$, onde $x \in (0;\pi)$ então o valor de $y = \frac{[\text{sen}(3x) - \text{sen}(x)]}{\cos(2x)}$ é:

a) -1 b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{3}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ e) 1

2. Se $\text{sen}\,50° = k$, calcule, em função de k, o valor de $\text{sen}\,5° + \cos 5°$.

3. Fatore as expressões:
a) $\text{sen}\,3x + \text{sen}\,x$
b) $\cos 3x + \cos x$

4. Fatore $\text{sen}\,90 - \text{sen}\,5x + \text{sen}\,3x + \text{sen}\,x$

5. Resolva a equação $\cos x = \cos 80° + \cos 40°$

6. (FUVEST) A medida x, em radianos, de um ângulo satisfaz $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ e verifica a equação $\text{sen}\,x + \text{sen}\,2x + \text{sen}\,3x = 0$. Assim,
a) Determine x.
b) Calcule $\cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

7. Os ângulos de um triângulo ABC satisfazem $\cos A + \cos B = \text{sen}\,C$. Prove que o triangulo ABC é retângulo.

8. (ITA) Seja $P = \text{sen}^2\,ax - \text{sen}^2\,bx$. Temos, então, que:
a) $P = \text{sen}\,ax.\cos bx$
b) $P = \cos\frac{a}{2}x.\text{tg}\,x$
c) $P = 2.\text{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right).\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
d) $P = \text{sen}(a+b)x.\text{sen}(a-b)x$
e) n.r.a.

9. (ITA) Resolvendo a equação $\operatorname{tg}\left(2\ln x - \frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{tg}\left(\ln x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ temos:

a) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k = 0,1,2,...$

b) $x = e^{\frac{\pi}{2} \pm k\pi}$, $k = 0,1,2,...$

c) $\ln x = \frac{\pi}{6} \pm k\pi$, $k = 0,1,2,...$

d) $x = e^{\frac{\pi}{6} \pm 2k\pi}$, $k = 0,1,2,...$

e) n.r.a.

Capítulo 9

Equações e Inequações Trigonométricas

9.1. Introdução

Em aulas anteriores já tratamos do conceito de equações trigonométricas em intervalos restritos e também em $\mathbb{R}$; neste módulo abordaremos de novo este conceito, adicionando também as inequações trigonométricas.

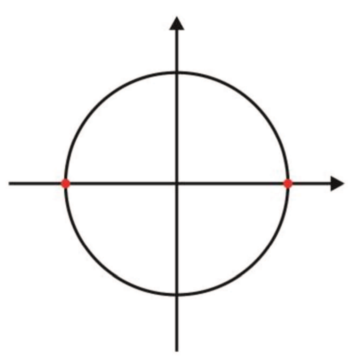
9.2. Equações trigonométricas

Exemplos Resolvidos

1. Resolva a equação $\text{sen}(2x) = 0$.

Este problema será abordado de duas formas:

- Sabemos que um seno é igual a zero nos arcos da forma $k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$:



Neste problema devemos ter:

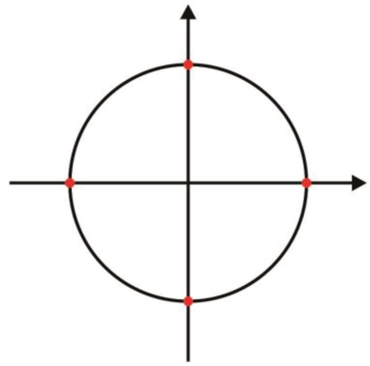
$$2x = k\pi$$

$$x = \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

- Usando a expressão do arco duplo para o seno a equação se transforma em:

$$2.\text{sen}\, x.\cos x = 0$$

Para que este produto seja 0, $\operatorname{sen} x = 0$ ou $\cos x = 0$:



Portanto, $x = \frac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

2. Resolva a equação $\sqrt{3}.\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{3}$

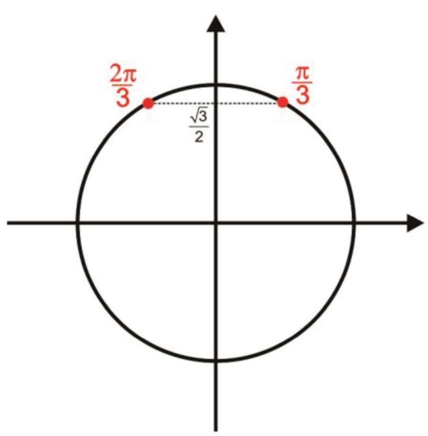
Esta equação tem sua resolução bastante simplificada quando dividimos ambos os lados da igualdade por 2:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}.\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}.\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Note agora que $\frac{\sqrt{3}}{2}.\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}.\cos x$ é equivalente ao $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ ou $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Efetuando uma das duas substituições indicadas concluímos que:

$$\operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Portanto, $\begin{cases} x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \\ ou \\ x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \\ ou \\ x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases}, k\in\mathbb{Z}$

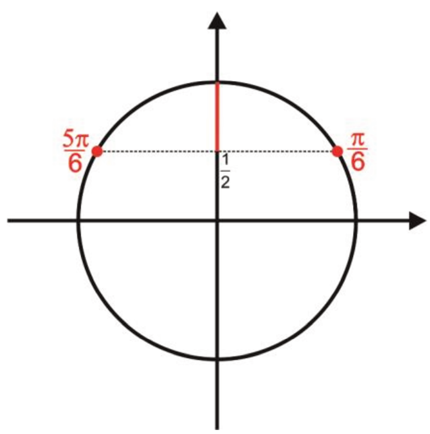
9.3. Inequações trigonométricas

Exemplos Resolvidos

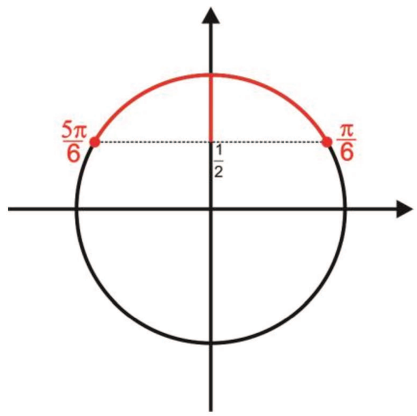
3. Resolva as inequações abaixo para $0\leq x<2\pi$ e para $x\in\mathbb{R}$:

a) $\operatorname{sen} x \geq \dfrac{1}{2}$

Devemos encontrar o intervalo do círculo trigonométrico que possui seno na região:



É imediato observar que os arcos com esta característica são aqueles compreendidos entre os dois arcos evidenciados ($\dfrac{\pi}{6}$ e $\dfrac{5\pi}{6}$):



Portanto, para $0 \leq x < 2\pi$ a solução será: $\dfrac{\pi}{6} \leq x \leq \dfrac{5\pi}{6}$.

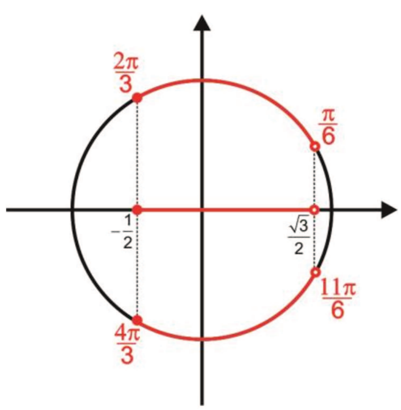
Já para resolver este problema em $\mathbb{R}$, basta escrevermos o menor número de expressões que sempre resultam no intervalo evidenciado acima para a primeira volta.

Para isto, iremos escrever as extremidades do intervalo como as expressões dos arcos congruentes a $\dfrac{\pi}{6}$ e $\dfrac{5\pi}{6}$:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

b) $\dfrac{-1}{2} \leq \cos x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Denotando este intervalo no eixo dos cossenos:



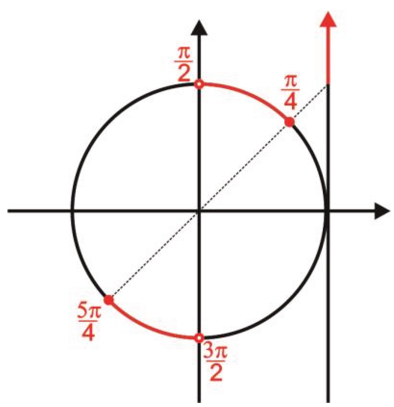
Assim, pela análise gráfica temos que para $0 \leq x < 2\pi$ a solução será:

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{6} < x \leq \dfrac{2\pi}{3} \\ ou \\ \dfrac{4\pi}{3} \leq x < \dfrac{11\pi}{6} \end{cases}$$

Esta mesma solução em $\mathbb{R}$ será: $\begin{cases} \dfrac{\pi}{6}+2k\pi < x \le \dfrac{2\pi}{3}+2k\pi \\ ou \\ \dfrac{4\pi}{3}+2k\pi \le x < \dfrac{11\pi}{6}+2k\pi \end{cases}$, com $k \in \mathbb{Z}$

c) $\text{tg}\, x \ge 1$

Através da análise gráfica do círculo trigonométrico:



temos que para $0 \le x < 2\pi$ a solução será:

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{4} \le x < \dfrac{\pi}{2} \\ ou \\ \dfrac{5\pi}{4} \le x < \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Note que nos pontos $\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{3\pi}{2}$ o intervalo foi considerado aberto já que a tangente não está definida nestes dois pontos.

Para solucionar esta inequação em $\mathbb{R}$, observe que o intervalo do primeiro quadrante, ao ser deslocado meia volta (π rad) coincide com o intervalo do terceiro quadrante. Assim, é possível fornecer esta resposta com apenas uma expressão:

$$\frac{\pi}{4}+k\pi \le x < \frac{\pi}{2}+k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

EXERCÍCIOS

1. Resolva a equação $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$.

2. (FUVEST) Ache todas as soluções da equação $\operatorname{sen}^3 x.\cos x - 3\operatorname{sen} x.\cos^3 x = 0$

3. (UNIRIO) Resolva a sentença $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 \le 0$, sendo $0 \le x < 2\pi$.

4. Resolva a equação $3\operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 3 = 0$

5. Resolva a equação: $\operatorname{sen}(2x+\pi) = \frac{1}{2}$

6. (MACKENZIE) Dê a expressão geral dos arcos x para os quais $2(\cos x + \sec x) = 5$

a) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

b) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

c) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$

d) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$

e)nra

7. (UNESP) Sejam a e b ângulos tais que a = 2b. Se vale a relação $(\cos a + \cos b)^2 + (\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b)^2 = 3$, determinar a e b.

8. (UNESP) O conjunto de todos os pontos P(x, y) do plano, com $y \neq 0$, para os quais x e y satisfazem a equação $\operatorname{sen}\left[y/(x^2+1) \right] = 0$ é uma:

a) família de parábolas.

b) família de circunferências centradas na origem.

c) família de retas.

d) parábola passando pelo ponto Q(0,1).

e) circunferência centrada na origem.

9. (UFES) Determine todos os valores de θ para os quais $\operatorname{sen}^3 \theta . \cos\theta - \operatorname{sen}\theta . \cos^3 \theta = \frac{1}{4}$

10. (UFPE) Quantas soluções a equação trigonométrica $\operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \cos x}$ admite, no intervalo $[0;80\pi)$?

11. (UECE) O número de soluções da equação $3\operatorname{sen}^2 x - 3|\operatorname{sen} x| + \cos^2 x = 0$ que estão no intervalo $[0;2\pi]$ é

a) 2. b) 8. c) 4. d) 6

12. (UFSCAR) O conjunto solução da equação $\operatorname{sen}[8\pi/9 + 8\pi/27 + 8\pi/81 + ...] = \cos x$, com $x \in [0;2\pi[$, é

a) {2π/3, 4π/3}.
b) {5π/6, 7π/6}.
c) {3π/4, 5π/4}.
d) {π/6, 11π/6}.
e) {π/3, 5π/3}.

13. (ITA) O conjunto solução de $(\operatorname{tg}^2 x - 1)(1 - \operatorname{cotg}^2 x) = 4$, $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ é:

a) $\{\pi/3 + k\pi/4,\ k \in \mathbb{Z}\}$
b) $\{\pi/4 + k\pi/4,\ k \in \mathbb{Z}\}$
c) $\{\pi/6 + k\pi/4,\ k \in \mathbb{Z}\}$
d) $\{\pi/8 + k\pi/4,\ k \in \mathbb{Z}\}$
e) $\{\pi/12 + k\pi/4,\ k \in \mathbb{Z}\}$

14. (PUCRS) O conjunto solução da equação $\operatorname{sen}(x) = \cos[x - \pi/2]$ em $\mathbb{R}$ é
a) {-1, 0, 1}
b) [-1, 1]
c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
e) $\mathbb{R}$

15. (FGV) Em certa cidade litorânea, verificou-se que a altura da água do mar em um certo ponto era dada por $f(x) = 4 + 3\cos\left(\dfrac{\pi x}{6}\right)$ em que *x* representa o número de horas decorridas a partir de zero hora de determinado dia, e a altura *f*(*x*) é medida em metros.
Em que instantes, entre 0 e 12 horas, a maré atingiu a altura de $2{,}5\,\text{m}$ naquele dia?
a) 5 e 9 horas
b) 7 e 12 horas
c) 4 e 8 horas
d) 3 e 7 horas
e) 6 e 10 horas

16. (UNIFESP) A função $D(t) = 12 + (1{,}6) \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{180}(t + 10)\right)$ fornece uma aproximação da duração do dia (diferença em horas entre o horário do pôr do sol e o horário do nascer do sol) numa cidade do Sul do país, no dia t de 2010. A variável inteira t, que representa o dia, varia de 1 a 365, sendo $t = 1$ correspondente ao dia 1.º de janeiro e $t = 365$ correspondente ao dia 31 de dezembro. O argumento da função cosseno é medido em radianos. Com base nessa função, determine:

a) a duração do dia 19.02.2010, expressando o resultado em horas e minutos.
b) em quantos dias no ano de 2010 a duração do dia naquela cidade foi menor ou igual a doze horas.

17. (UDESC) A soma de todos os valores de $x \in [0, 2\pi]$ que satisfazem a equação $\cos^2(2x) - \text{sen}^2(x) = \cos^6(x)$ é igual a:

a) π b) 2π c) 5π d) 3π e) 4π

18. (FUVEST) A medida x, em radianos, de um ângulo satisfaz $\pi/2 < x < \pi$ e verifica a equação $\text{sen}\, x + \text{sen}\, 2x + \text{sen}\, 3x = 0$. Assim,

a) determine x.

b) calcule cos x + cos 2x + cos 3x.

19. (FUVEST) Determine os valores de x no intervalo $]0; 2\pi[$ para os quais $\cos x \geq \sqrt{3}\,\text{sen}\, x + \sqrt{3}$.

20. (MACKENZIE) Quando resolvida no intervalo $[0; 2\pi]$, o número de quadrantes nos quais a desigualdade $2\cos x < \sqrt{3}$ apresenta soluções é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

21. (FEI) Se $0 < x < 2\pi$ e $\text{sen}\, x > \cos x$ então:

a) $\pi/4 < x < 5\pi/4$

b) $\pi/4 < x < 7\pi/4$

c) $\pi/8 < x < 7\pi/8$

d) $\pi/2 < x < 3\pi/2$

e) $\pi/4 < x < 3\pi/2$

22. (UFF) Determine o(s) valor(es) de $x \in \mathbb{R}$ que satisfaz(em) à desigualdade: $\cos^2 x \geq 2(\text{sen}\, x + 1)$

23. (UNESP) O conjunto solução de $|\cos x| < 1/2$, para $0 < x < 2\pi$ é definido por:

24. (ITA) O conjunto de todos os valores de α, $\alpha \in \left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, tais que as soluções da equação (em x) $x^4 - \left(\sqrt[4]{48}\right)x^2 + \text{tg}\,\alpha = 0$ são todas reais, é:

a) $\left[-\dfrac{\pi}{3},0\right]$ b) $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ c) $\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right]$ d) $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ e) $\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{3}\right]$

25. (ITA) Para x no intervalo $[0;\pi/2]$, o conjunto de todas as soluções da inequação $\operatorname{sen}(2x)-\operatorname{sen}[3x-\pi/2]>0$ é o intervalo definido por:

a) $\pi/10<x<\pi/2$
b) $\pi/12<x<\pi/4$
c) $\pi/6<x<\pi/3$
d) $\pi/4<x<\pi/2$
e) $\pi/4<x<\pi/3$

26. (ITA) Determine o maior domínio $D\subset\mathbb{R}$ da função: $f:D\to\mathbb{R}$,
$f(x)=\log_{x(\frac{\pi}{4}-x)}(4\operatorname{sen}x\cos x-1)$.

27. (ITA) A inequação $4\operatorname{sen}^2 x-2(1+\sqrt{2})\operatorname{sen}x+\sqrt{2}<0$, tem uma solução x tal que:
a) $45°<x<60°$
b) $0°<x<30°$
c) $35°<x<45°$
d) $60°<x<75°$
e) n.r.a.

Capítulo 10

Funções Trigonométricas

10.1. Introdução

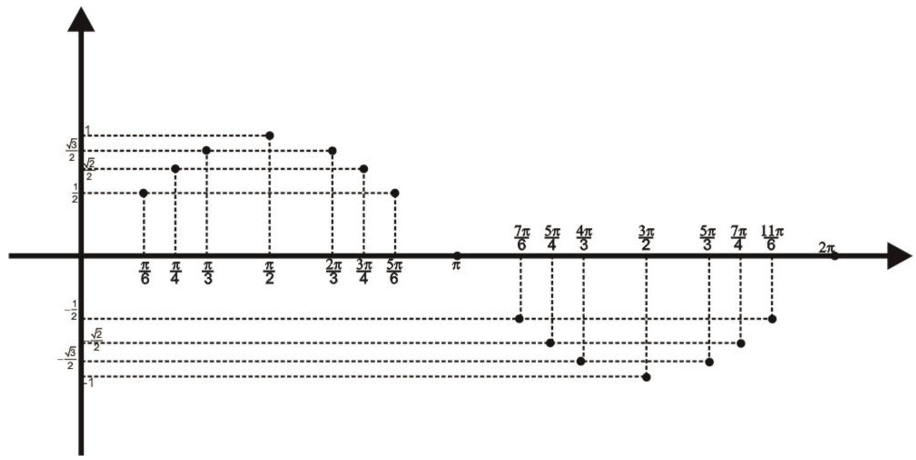
Nesta aula trataremos de algumas propriedades trigonométricas mas por um enfoque diferente: o de funções. O objetivo aqui é observar como se comportam estas propriedades quando as analisamos no formato gráfico e suas consequentes características.

10.2. Função Seno

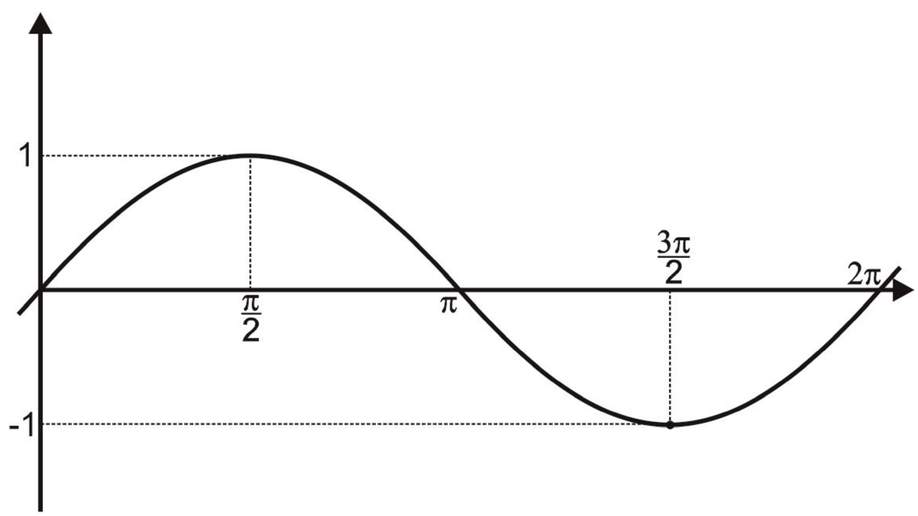
Analisemos a função $f(x) = \text{sen}\, x$ com o auxílio da tabela abaixo:

x	$\text{sen}\, x$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$

Aplicando estes pontos aos eixos cartesianos encontramos:



Aplicando mais pontos sobre os eixos, chegamos à conclusão de que seu gráfico será:



Vejamos agora algumas características fundamentais da função $f(x) = \text{sen}\, x$:

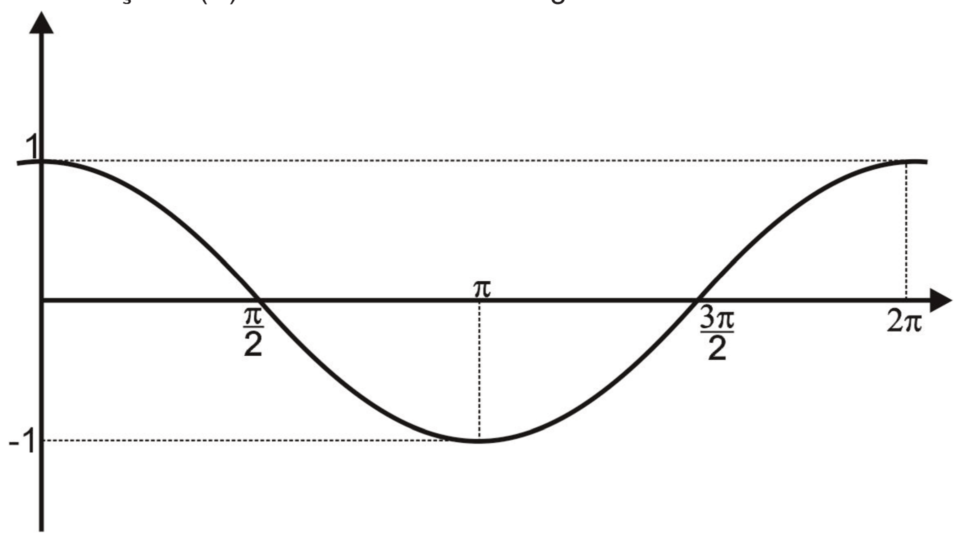
- Domínio: São os valores de x para os quais a função está definida. Logo, $\text{Dom} f = \mathbb{R}$, pois para cada $x \in \mathbb{R}$, existe $f(x) = \text{sen}\, x$.
- Imagem: São os valores que a função assume. Logo, $\text{Im} f = [-1;1]$, pois $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \text{sen}\, x \leq 1$.
- Amplitude: É a distância entre o menor e o maior valor que a função assume. Logo, $A = 2$

- Período: É o intervalo percorrido no eixo das abcissas até que o gráfico volte a se repetir. Logo, $P = 2\pi$.
- Paridade: Se $f(x)$ é uma função cujo domínio é um intervalo simétrico em $\mathbb{R}$, isto é, se $x \in \text{Dom} f \Rightarrow -x \in \text{Dom} f$ e obedece $f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in \text{Dom} f$, então, $f(x)$ é denominada função ímpar. Logo, $f(x) = \text{sen}\, x$ é uma função ímpar, pois $\text{sen}(x) = -\text{sen}(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

10.3. Função Cosseno

Como a tabela de valores da função seno já foi elaborada no item anterior, a mesma não será abordada para a montagem da função cosseno para evitar redundâncias.

O gráfico da função $f(x) = \cos x$ é como se segue:



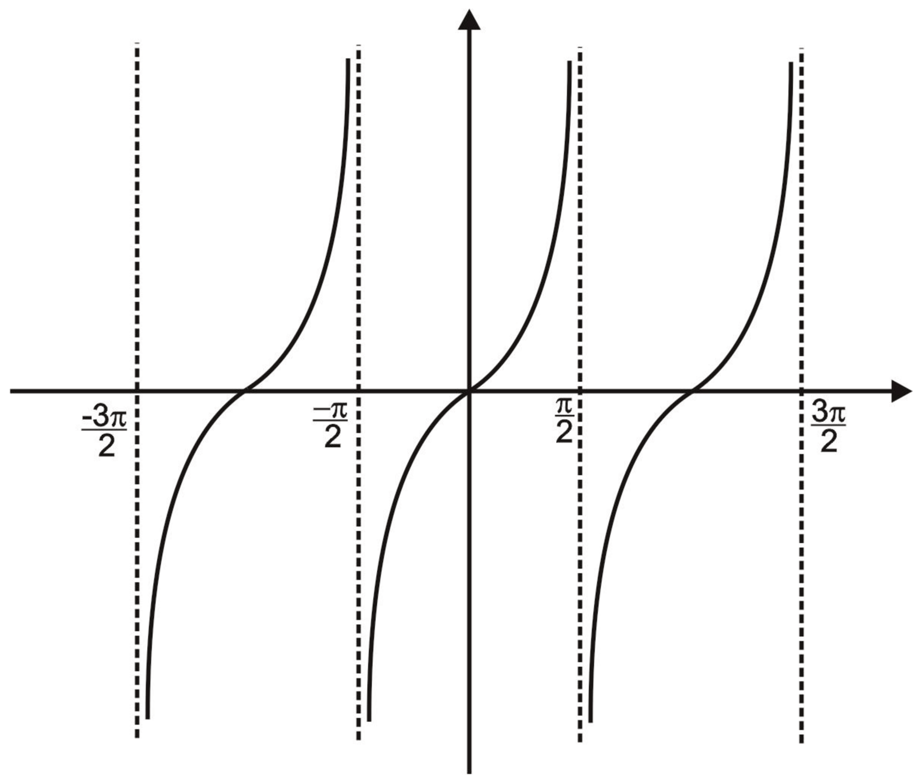
Vejamos agora algumas características fundamentais da função $f(x) = \cos x$:

- Domínio: São os valores de x para os quais a função está definida. Logo, $\text{Dom} f = \mathbb{R}$, pois para cada $x \in \mathbb{R}$, existe $f(x) = \cos x$.
- Imagem: São os valores que a função assume. Logo, $\text{Im} f = [-1;1]$, pois $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos x \leq 1$.
- Amplitude: É a distância entre o menor e o maior valor que a função assume. Logo, $A = 2$.

- Período: É o intervalo percorrido no eixo das abcissas até que o gráfico volte a se repetir. Logo, $P = 2\pi$.
- Paridade: Se $f(x)$ é uma função cujo domínio é um intervalo simétrico em $\mathbb{R}$, isto é, se $x \in \text{Dom} f \Rightarrow -x \in \text{Dom} f$ e obedece $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \text{Dom} f$, então, $f(x)$ é denominada função par. Logo, $f(x) = \cos x$ é uma função par, pois $\cos(x) = \cos(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

10.4. Função Tangente

O gráfico da função $f(x) = \text{tg}\, x$ é como se segue:



Vejamos agora algumas características fundamentais da função $f(x) = \text{tg}\, x$:

- Domínio São os valores de x para os quais a função está definida. Logo, $\text{Dom} f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, a tangente não é definida para os arcos congruentes a $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$.
- Imagem: São os valores que a função assume. Logo, $\text{Im} f = \mathbb{R}$.

- Amplitude: É a distância entre o menor e o maior valor que a função assume. Logo, este conceito não é definido para $f(x) = \text{tg}\, x$ já que esta função não possui ponto mínimo ou máximo.
- Período: É o intervalo percorrido no eixo das abcissas até que o gráfico volte a se repetir. Logo, $P = \pi$.
- Paridade: $f(x) = \text{tg}\, x$ é uma função ímpar, pois $\text{tg}(x) = -\text{tg}(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

As linhas verticais traçadas no gráfico, representando as retas $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$, dentre outras, são linhas que o gráfico da função $f(x) = \text{tg}\, x$ nunca alcança e são chamadas de assíntotas verticais.

10.5. Senóides, Cossenóides e Tangentóides

As funções trigonométricas que dependem de uma variável seno, cosseno ou tangente, são respectivamente denominadas: senóides, cossenóides e tangentóides.
Aqui estudaremos estas funções com a inserção de até quatro constantes reais a, b, c e d:

$$f(x) = a + b.\text{sen}(cx + d)$$
$$f(x) = a + b.\cos(cx + d)$$
$$f(x) = a + b.\text{tg}(cx + d))$$

e suas respectivas implicações gráficas em cada uma das funções.

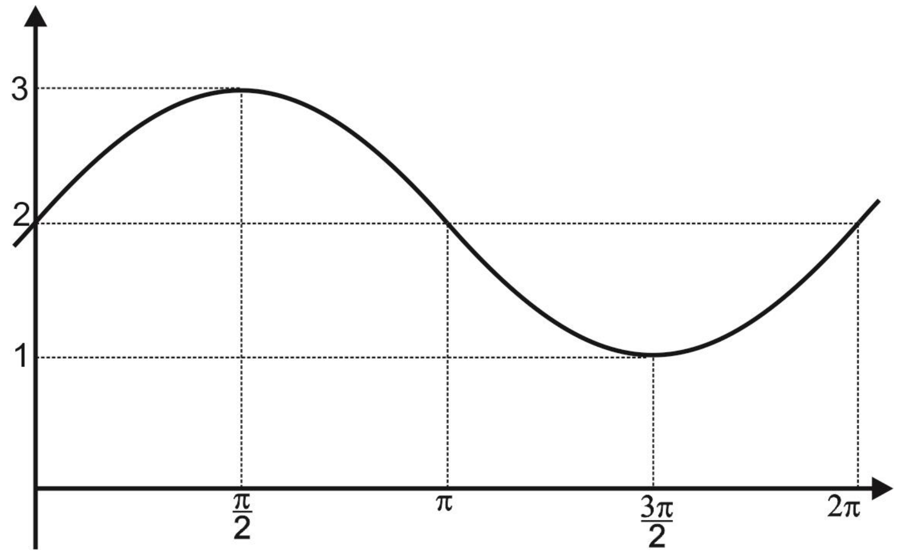
- A alteração da constante real "a" em qualquer uma das funções citadas gera graficamente um deslocamento completo do gráfico no sentido vertical. Nos casos em que $a > 0$ o deslocamento ocorre para cima e, nos casos em que $a < 0$, o deslocamento ocorre para baixo:

Exemplos Resolvidos

1. Esboce o gráfico e forneça o conjunto imagem das funções:

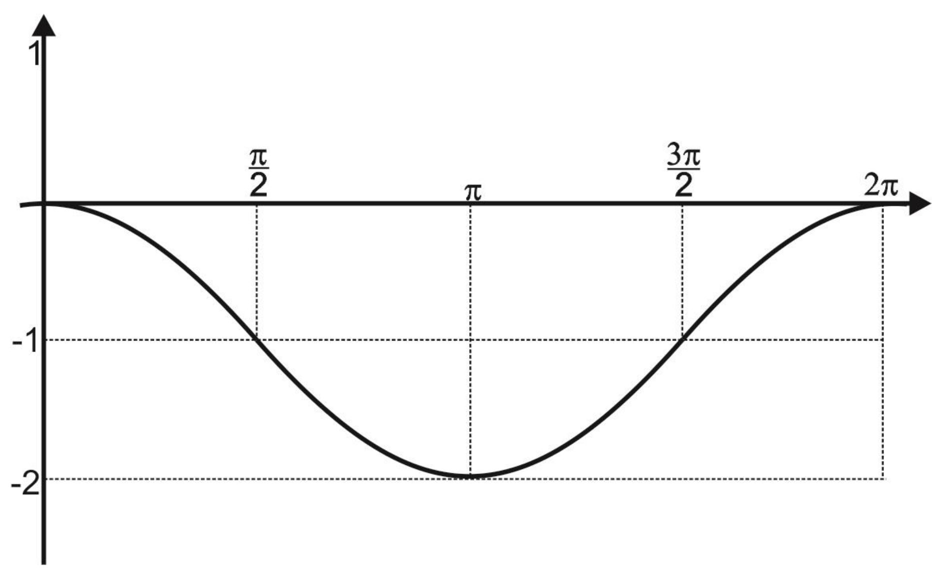
a) $f(x) = 2 + \text{sen}\, x$.

Como $a = 2$, o gráfico da função seno será deslocado em 2 unidades para cima:



Portanto, sua imagem é $\text{Im} = [1;3]$

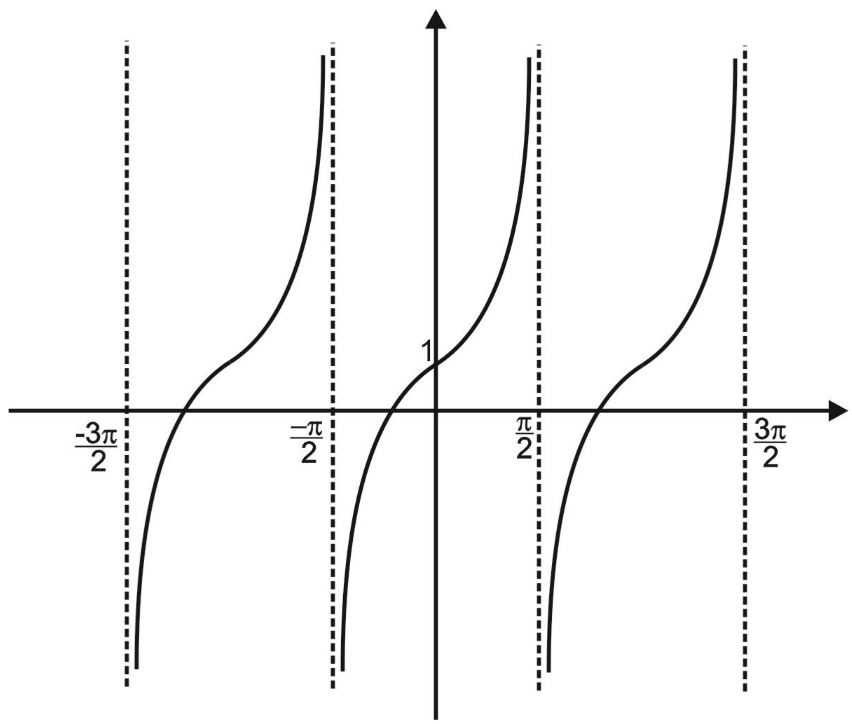
b) $f(x) = -1 + \cos x$
Como $a = -1$, o gráfico da função seno será deslocado em 1 unidade para baixo:



Portanto, sua imagem é $\text{Im} = [-2;0]$

c) $f(x) = 1 + \text{tg}\, x$

Como $a = 1$, o gráfico da função tangente será deslocado em 1 unidade para cima:



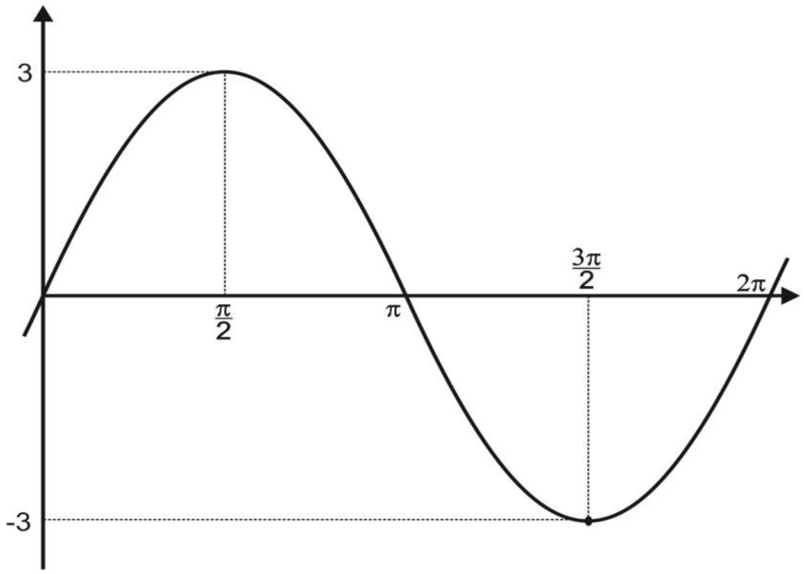
- A alteração da constante real "b" altera a amplitude das senóides e cossenóides, de acordo com a expressão: $A = 2.|b|$. Já para as tangentóides não faz sentido falar em amplitude uma vez que esta não é uma característica deste tipo de função mas, na prática, a constante "b" alterará esta função da mesma forma, "esticando-a" ou "comprimindo-a" verticalmente. Observe que nos casos em que $b < 0$, além da alteração de amplitude, os gráficos também serão refletidos em relação ao eixo x.

Exemplos Resolvidos

1. Esboce o gráfico das funções:

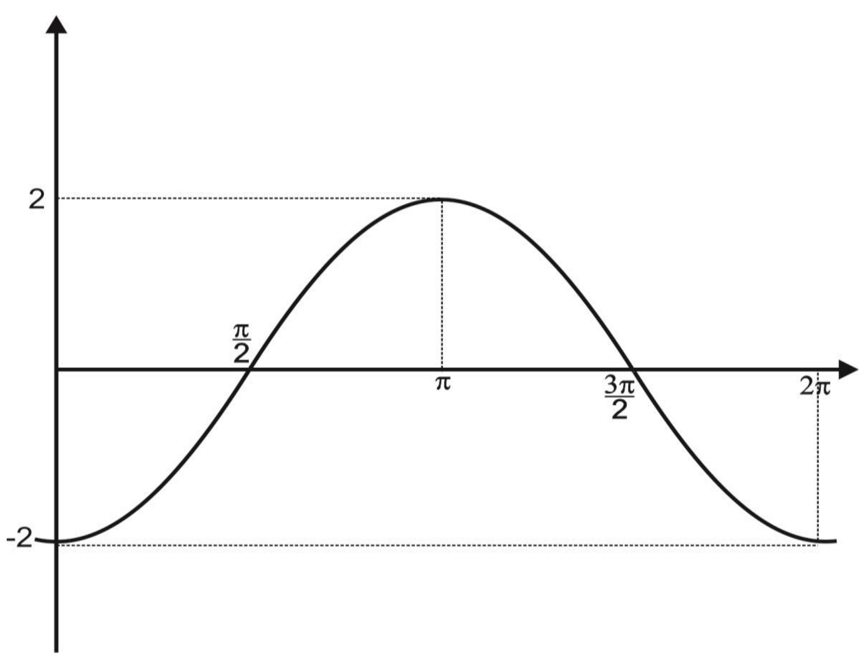
a) $f(x) = 3\,\text{sen}\, x$.

Como $b = 3$, esta senóide terá amplitude $A = 2.|3| = 6$, portanto, sua imagem será o intervalo $[-3;3]$:



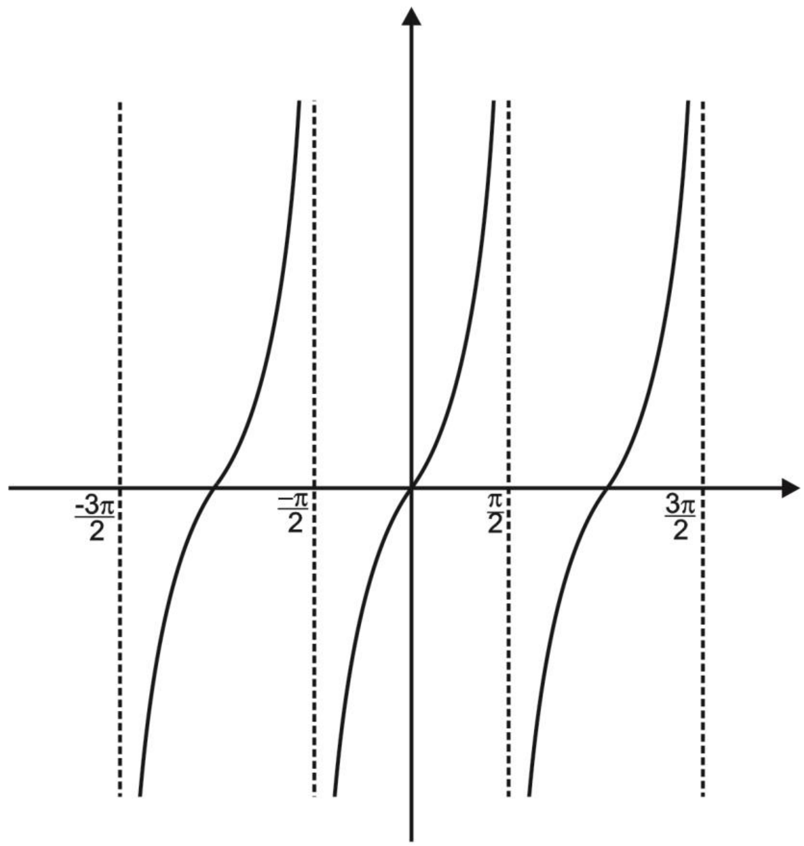
b) $f(x) = -2\cos x$.

Como $b = 2$, esta cossenóide terá amplitude $A = 2.|-2| = 4$, portanto, sua imagem será o intervalo $[-2;2]$. Observe, porém, que $b < 0$, portanto, devemos refletir o gráfico desta cossenóide em relação ao eixo x:



c) $f(x) = 4\,\text{tg}\,x$.

Como $b = 2$, esta tangentóide será "esticada" verticalmente – grosso modo, é o mesmo procedimento que aumentar a amplitude. No que com isso, a curva central da tangentóide fica mais suave:



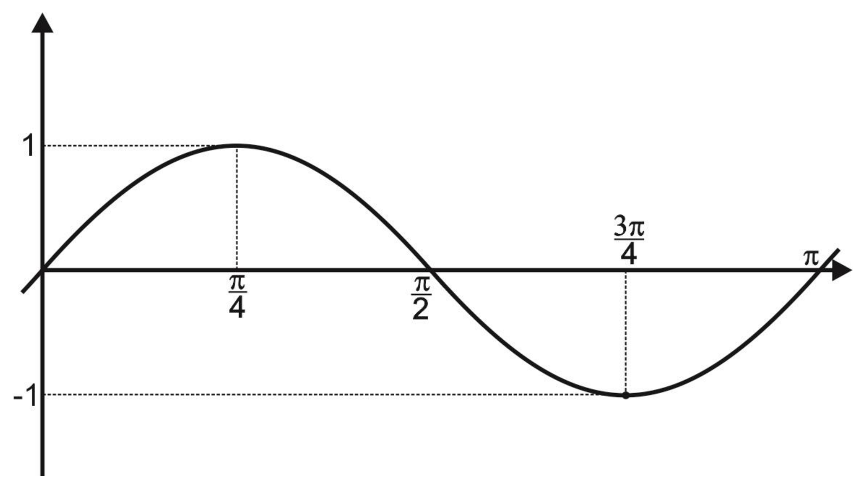
- A alteração da constante real "c" em qualquer uma das funções citadas gera uma mudança em seus períodos. Nas senóides e cossenóides, o período é calculado pela expressão $P = \dfrac{2\pi}{|c|}$, já nas tangentóides, o período é calculado pela expressão $P = \dfrac{\pi}{|c|}$. Observe, além disso, que nos casos em que $c < 0$, as senóides e tangentóides serão refletidas em relação ao eixo x, já as cossenóides não sofrem qualquer alteração neste sentido. O motivo para tal é que a função cosseno é par $(\cos(x) = \cos(-x))$ enquanto as funções seno e tangente são ímpares $(\text{sen}(x) = -\text{sen}(-x)$ e $\text{tg}(x) = -\text{tg}(-x))$.

Exemplos Resolvidos

1. Esboce o gráfico e forneça o período das funções:

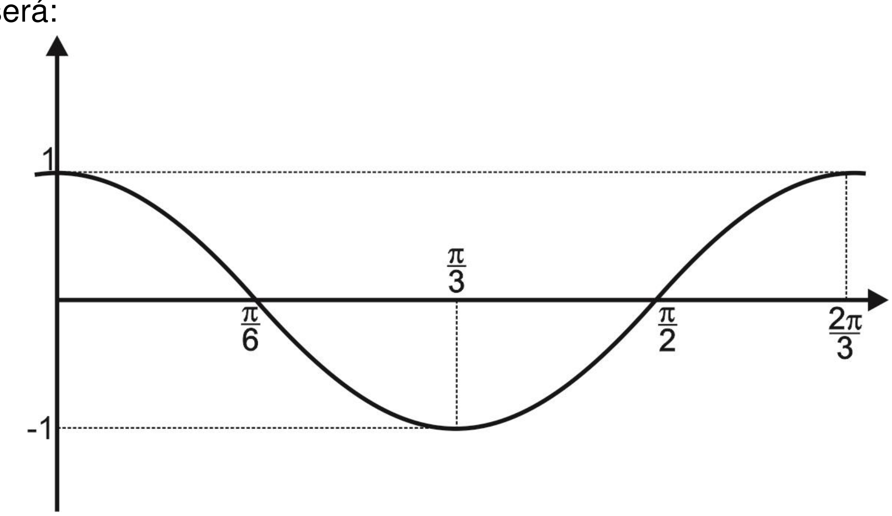
a) $f(x) = \text{sen}(2x)$.

O período das senóides é dado por $P = \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$. Desta forma, o gráfico de $f(x)$ será:



b) $f(x) = \cos(-3x)$

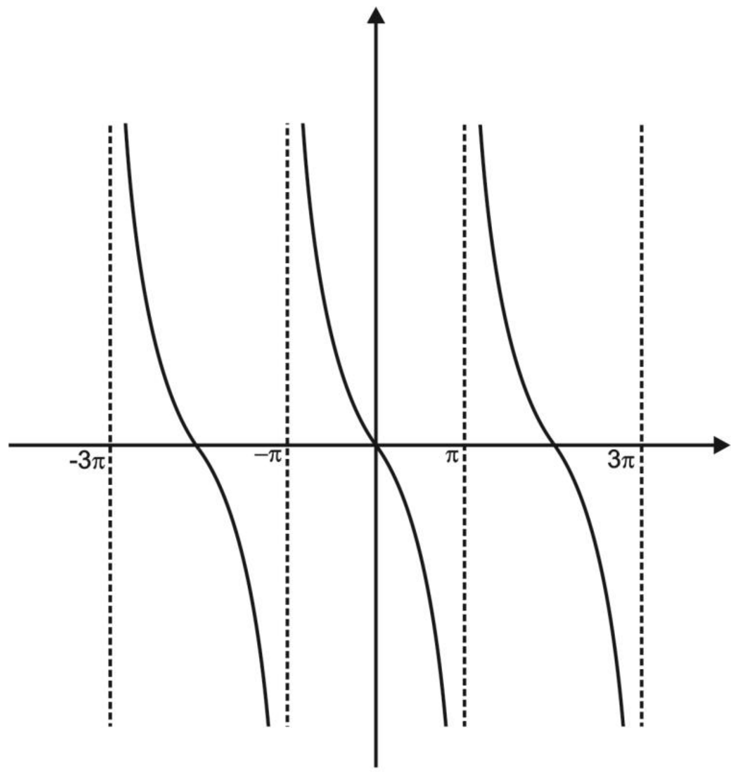
O período das cossenóides é dado por $P = \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$. Desta forma, o gráfico de $f(x)$ será:



Observe que, conforme esperado, não houve reflexão do gráfico em relação ao eixo x, pois sabemos que $\cos(2x) = \cos(-2x)$

c) $f(x) = \text{tg}\left(-\dfrac{x}{2}\right)$

O período das tangentóides é dado por $P = \dfrac{\pi}{|c|} = \dfrac{\pi}{\left|\dfrac{-1}{2}\right|} = 2\pi$. Desta forma, o gráfico de $f(x)$ será:



Observe que, conforme esperado, houve reflexão do gráfico em relação ao eixo x, pois sabemos que $\text{tg}\left(-\dfrac{x}{2}\right) = -\text{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

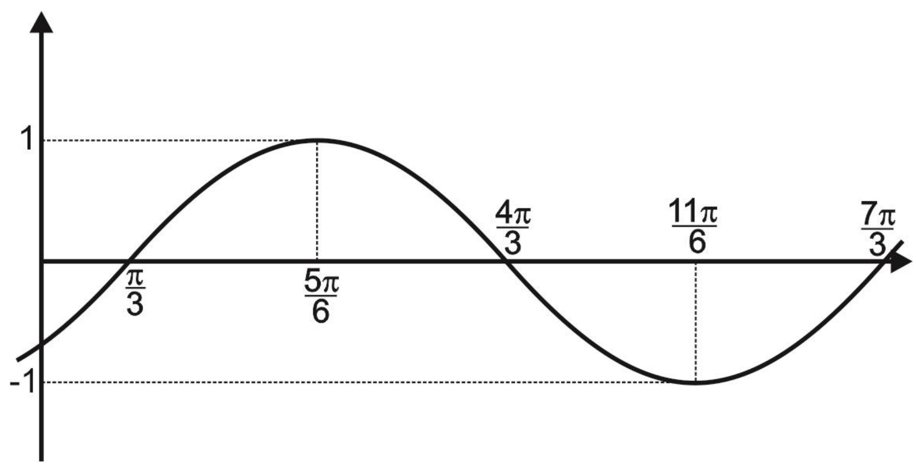
- A alteração da constante real "d" em qualquer uma das funções citadas gera graficamente um deslocamento completo do gráfico no sentido horizontal. Nos casos em que $\dfrac{d}{c} > 0$ ocorre o deslocamento de $\dfrac{d}{c}$ unidades para a esquerda e, nos casos em que $\dfrac{d}{c} < 0$ ocorre o deslocamento de $\left|\dfrac{d}{c}\right|$ unidades para a direita.

Exemplos Resolvidos

1. Esboce os gráficos e forneça o domínio das funções:

a) $f(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

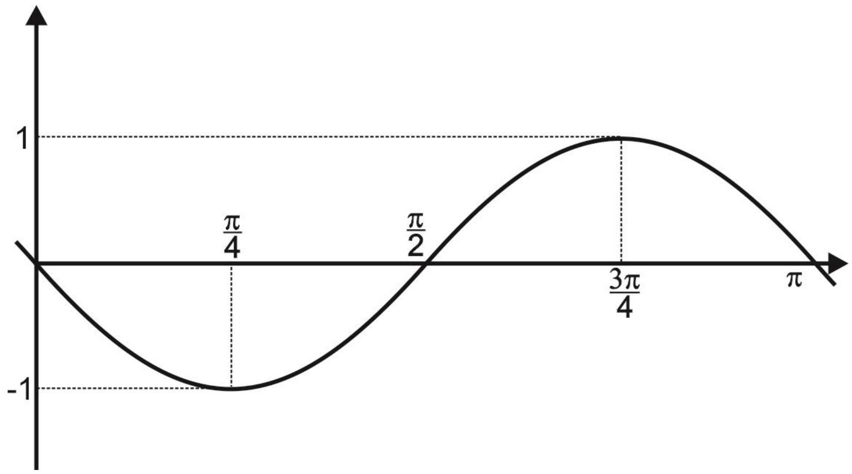
Nesta senóide, como $c = 1$ e $d = \frac{-\pi}{3}$, temos, $\frac{d}{c} = \frac{-\pi}{3}$, portanto, teremos um deslocamento completo do gráfico de $f(x) = \text{sen}\,x$ em $\frac{\pi}{3}$ unidades para a direita:



Observa-se pela análise gráfica que o domínio não foi alterado.

b) $f(x) = \cos(2x + \pi)$

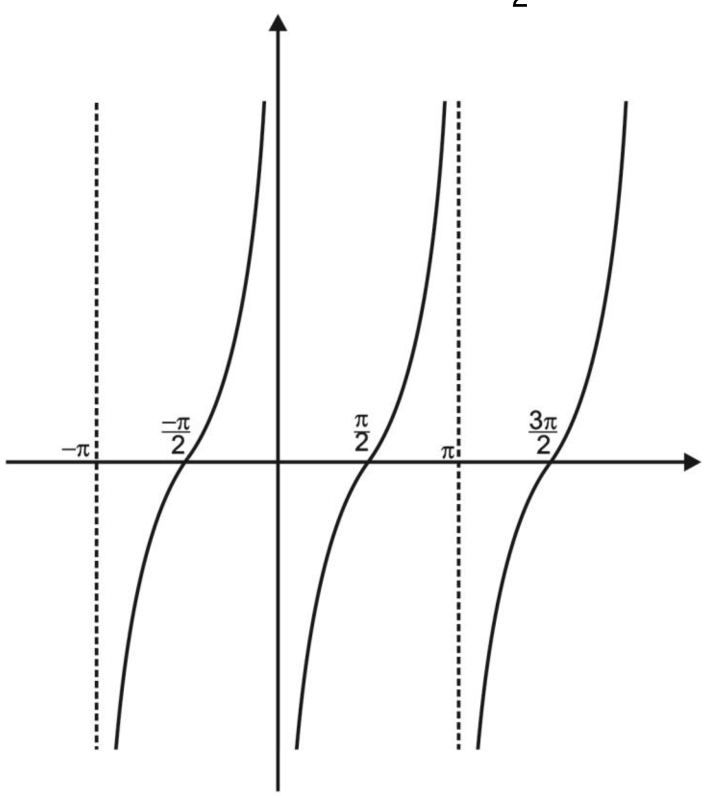
Nesta cossenóide, como $c = 2$ e $d = \pi$, temos, $\frac{d}{c} = \frac{\pi}{2}$, portanto, teremos um deslocamento completo do gráfico de $f(x) = \cos x$ em $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda. Além disso, note que o período da função também será alterado para $P = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$:



Observa-se pela análise gráfica que o domínio não foi alterado.

c) $f(x) = \text{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

Nesta tangentóide, como $c = 1$ e $d = -\dfrac{\pi}{2}$, temos, $\dfrac{d}{c} = \dfrac{-\pi}{2}$, portanto, teremos um deslocamento completo do gráfico de $f(x) = \text{tg}\, x$ em $\dfrac{\pi}{2}$ unidades para a direita:



Neste caso, observa-se que as assíntotas (restrições do domínio de $f(x)$ também se deslocaram $\frac{\pi}{2}$ unidades para a direita). Desta forma, o domínio de $f(x)$ será:

$$Dom = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

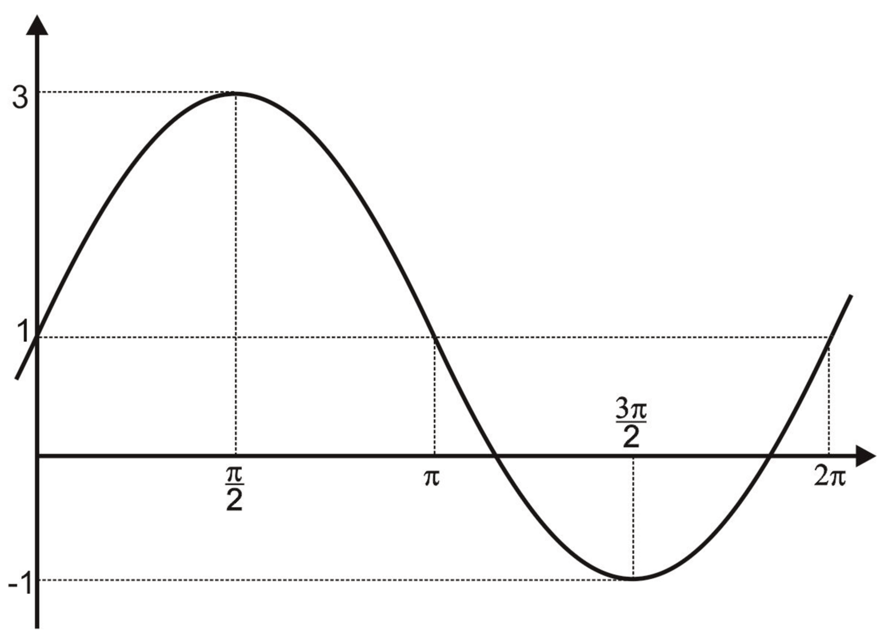
$$Dom = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exemplos Resolvidos

1. Esboce o gráfico, forneça o domínio, imagem, amplitude e período das funções trigonométricas:

a) $f(x) = 1 + 2\operatorname{sen} x$

É imediato notar que devemos aplicar nesta senóide as alterações geradas pela constante $a = 1$ (deslocamento completo do gráfico em 1 unidade para cima) e $b = 2$ (alteração da amplitude para $A = 2.|2| = 4$. Portanto seu gráfico será:

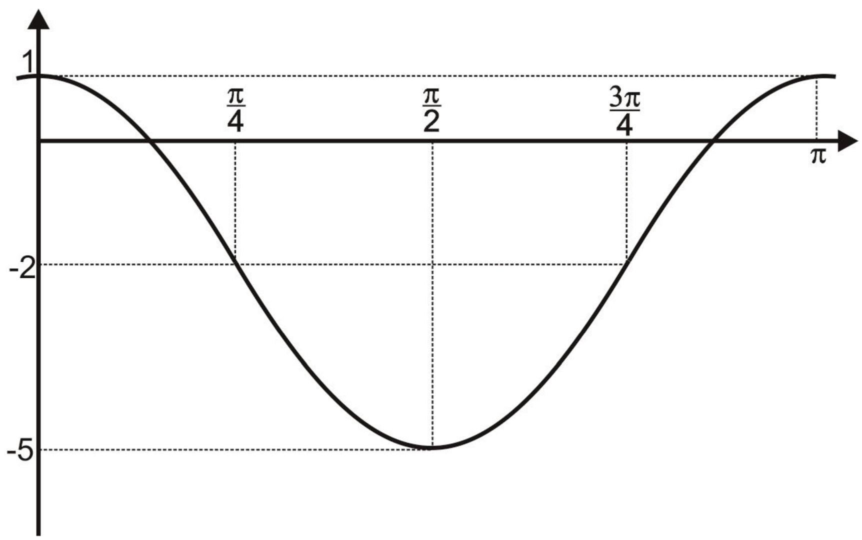


Portanto, temos:

$Dom = \mathbb{R}$, $\text{Im} = [-1;3]$, $A = 4$, $P = 2\pi$

b) $f(x) = -2 + 3\cos(2x)$

Notamos que esta cossenóide será alterada por um deslocamento completo do gráfico em 2 unidades para baixo ($a = -2$), terá amplitude igual a 6 ($A = 2.|3| = 6$) e período π ($P = \dfrac{2\pi}{|2|} = \pi$). Portanto, teremos:



Assim, pela análise gráfica acima temos:

$Dom = \mathbb{R}$, $\text{Im} = [-5;1]$, $A = 6$, $P = \pi$

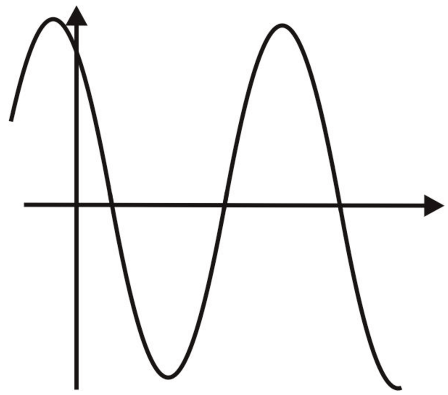
Exercícios

1. (UFPR) Suponha que, durante certo período do ano, a temperatura T, em graus Celsius, na superfície de um lago possa ser descrita pela função $F(t) = 21 - 4\cos\left(\dfrac{\pi}{12}t\right)$, sendo t o tempo em horas medido a partir das 06h00 da manhã.

a) Qual a variação de temperatura num período de 24 horas?

b) A que horas do dia a temperatura atingirá 23ºC?

2. (UFPE) Considere a função f, com domínio e contradomínio o conjunto dos números reais, dada por $f(x) = \sqrt{3}\ \cos x - sen\ x$, que tem parte de seu gráfico esboçado a seguir.



Analise a veracidade das afirmações seguintes acerca de f:

( ) $f(x) = 2 \cdot sen\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$, para todo x real.

( ) f é periódica com período 2π.

( ) As raízes de f(x) são $\dfrac{-\pi}{6} + 2k\pi$, com k inteiro.

( ) $f(x) \geq -\sqrt{3}$, para todo x real.

( ) $f(x) \leq 2$, para todo x real.

3. (UFRGS) O número de interseções da função $f(x) = \text{sen}5x$ com o eixo das abscissas no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ é:

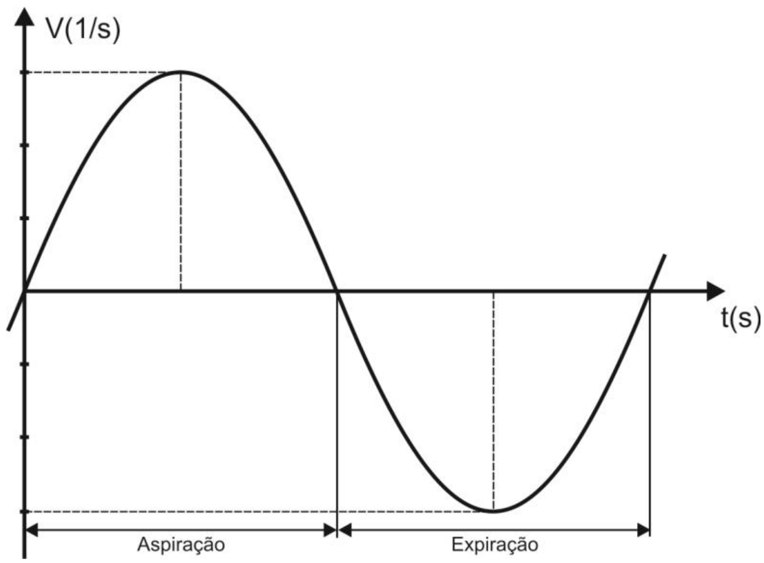
a) 10 b) 14 c) 21 d) 24 e) 27

4. (UFC) Considere as funções definidas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, respectivamente, por $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = \cos x - \text{sen}\, x$.

a) Explicite a função composta $h(x) = f(g(x))$.

b) Determine o valor máximo da função composta $h(x) = f(g(x))$.

5. (UNESP) Em situação normal, observa-se que os sucessivos períodos de aspiração e expiração de ar dos pulmões em um indivíduo são iguais em tempo, bem como na quantidade de ar inalada e expelida. A velocidade de aspiração e expiração de ar dos pulmões de um indivíduo está representada pela curva do gráfico, considerando apenas um ciclo do processo.



Sabendo-se que, em uma pessoa em estado de repouso, um ciclo de aspiração e expiração completo ocorre a cada 5 segundos e que a taxa máxima de inalação e exalação, em módulo, é 0,6 1/s, a expressão da função cujo gráfico mais se aproxima da curva representada na figura é:

a) $V(t) = \frac{2\pi}{5} sen\left(\frac{3}{5}t\right)$

b) $V(t) = \frac{3}{5} sen\left(\frac{5}{2\pi}t\right)$

c) $V(t) = 0{,}6 \cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$

d) $V(t) = 0{,}6 sen\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$

e) $V(t) = \frac{5}{2\pi}\cos(0{,}6t)$

6. (UERN) Um determinado inseto no período de reprodução emite sons cuja intensidade sonora oscila entre o valor mínimo de 20 decibéis até o máximo de 40 decibéis, sendo t a variável tempo em segundos. Entre as funções a seguir, aquela que melhor representa a variação da intensidade sonora com o tempo $I(t)$ é

a) $50 - 10\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$.

b) $30 + 10\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$.

c) $40 + 20\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$.

d) $60 - 20\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$.

7. (UEPG) Com base nas assertivas abaixo, calcule a soma das alternativas corretas.

01) O valor mínimo da função $f(x) = 2 + 5\,\text{sen}\,4x$ é -3.
02) O período e o conjunto-imagem da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4\,\text{sen}\,x \cos x$ são, respectivamente, 2π e $[-4, 4]$.
04) Se $\text{cotg}(a).\sec(a) > 0$ e $\text{sen}(a).\cos(a) < 0$ então $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$.
08) Se $A = \text{sen}\,430°$ e $B = \text{sen}\,700°$, então A < B.
16) Para todo $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, o valor de $(\text{tg}^2 x + 1).(\text{sen}^2 x - 1)$ é -1.

8. (FGV) A previsão de vendas mensais de uma empresa para 2011, em toneladas de um produto, é dada por $f(x) = 100 + 0{,}5x + 3sen\frac{\pi x}{6}$, em que $x = 1$ corresponde a janeiro de 2011, $x = 2$ corresponde a fevereiro de 2011 e assim por diante.
A previsão de vendas (em toneladas) para o primeiro trimestre de 2011 é:
(Use a aproximação decimal $\sqrt{3} = 1{,}7$)
a)308,55 b)309,05 c)309,55 d)310,05 e)310,55

9. (UFPR) Suponha que a expressão $P = 100 + 20\,\text{sen}(2\pi t)$ descreve de maneira aproximada a pressão sanguínea P, em milímetros de mercúrio, de uma certa pessoa durante um teste. Nessa expressão, t representa o tempo em segundos.
A pressão oscila entre 20 milímetros de mercúrio acima e abaixo dos 100 milímetros de mercúrio, indicando que a pressão sanguínea da pessoa é 120 por 80. Como essa função tem um período de 1 segundo, o coração da pessoa bate 60 vezes por minuto durante o teste.
a) Dê o valor da pressão sanguínea dessa pessoa em $t = 0s$; t = 0,75s.
b) Em que momento, durante o primeiro segundo, a pressão sanguínea atingiu seu mínimo?

10. (UFPB) Com o objetivo de aumentar a produção de alimentos em certa região, uma secretaria de agricultura encomendou a uma equipe de agrônomos um estudo sobre as potencialidades do solo dessa região. Na análise da temperatura do solo, a equipe efetuou medições diárias, durante quatro dias consecutivos, em intervalos de uma hora. As medições tiveram início às 6 horas

da manhã do primeiro dia $(t=0)$. Os estudos indicaram que a temperatura T, medida em graus Celsius, e o tempo t, representando o número de horas decorridas após o início das observações, relacionavam-se através da expressão

$$T(t)=26+5\cos\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{4\pi}{3}\right).$$

Com base nessas informações, identifique as afirmativas corretas:
( ) A temperatura do solo, às 6 horas da manhã do primeiro dia foi de 23,5 ºC.
( ) A função T(t) é periódica e tem período igual a 24 h.
( ) A função T(t) atinge valor máximo igual a 30 ºC.
( ) A temperatura do solo atingiu o valor máximo, no primeiro dia, às 14 h.
( ) A função T(t) é crescente no intervalo [0,8].

11. (PUCPR) Um terremoto de magnitude 8 graus da escala Richter atingiu, em setembro de 2009, a região de Samoa. O terremoto causou ondas de até 3 metros. A maré alta neste local ocorreu à meia-noite.

Suponha que o nível de água na maré alta era de 3 metros; mais tarde, na maré baixa, era de 3 cm. Supondo que a próxima maré alta seja exatamente ao meio-dia e que a altura da água é dada por uma curva seno ou cosseno, qual das alternativas a seguir corresponde à fórmula para o nível da água na região em função do tempo?

a) $1{,}515+1{,}485\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

b) $1{,}515+1{,}485\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

c) $1{,}485\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

d) $1{,}485\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

e) $1{,}485+1{,}515\cos(\pi t)$

12. (UFRGS) O período da função definida por $f(x)=\text{sen}\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$ é:

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{5\pi}{6}$ d) π e) 2π

13. (UFPR) Suponha que o horário do pôr do sol na cidade de Curitiba, durante o ano de 2009, possa ser descrito pela função

$$f(t) = 18{,}8 - 1{,}3sen\left(\frac{2\pi}{365}t\right)$$

sendo t o tempo dado em dias e t = 0 o dia 1º de janeiro. Com base nessas informações, considere as seguintes afirmativas:

1. O período da função acima é 2π.
2. Foi no mês de abril o dia em que o pôr do sol ocorreu mais cedo.
3. O horário em que o pôr do sol ocorreu mais cedo foi 17h30.

Assinale a alternativa correta.

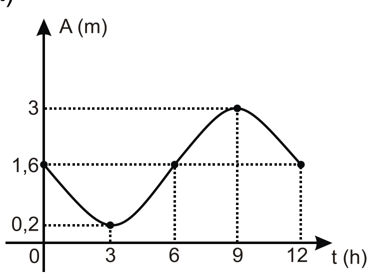
a) Somente a afirmativa 3 é verdadeira.
b) Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.
d) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.
e) As afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.

14. (UFPB) Um especialista, ao estudar a influência da variação da altura das marés na vida de várias espécies em certo manguezal, concluiu que a altura *A* das marés, dada em metros, em um espaço de tempo não muito grande, poderia ser modelada de acordo com a função:

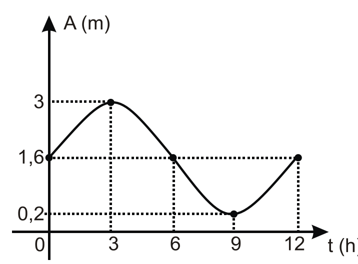
$$A(t) = 1{,}6 - 1{,}4\ sen\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

Nessa função, a variável *t* representa o tempo decorrido, em horas, a partir da meia-noite de certo dia. Nesse contexto, conclui-se que a função *A*, no intervalo [0,12], está representada pelo gráfico:

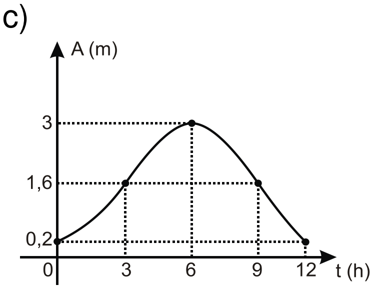
a)



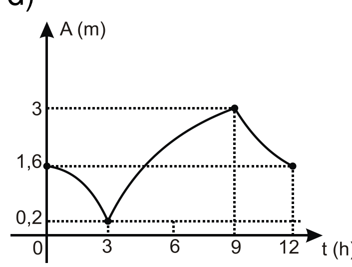
b)



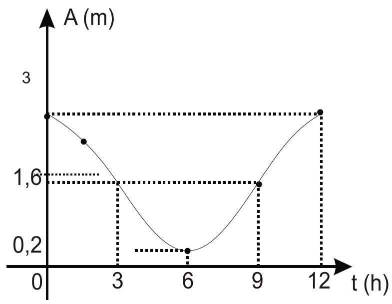
c)



d)

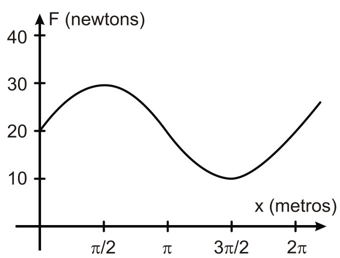


e)

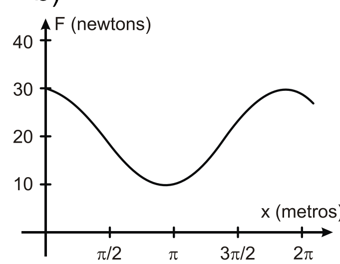


15. (UCS) Para colocar um objeto em movimento e deslocá-lo sobre uma trajetória retilínea por x metros, é necessário aplicar uma força de $20 + 10\,\text{sen}\,x$ newtons sobre ele. Em qual dos gráficos abaixo está representada a relação entre a força aplicada e a distância, quando o objeto é deslocado até 3 metros?

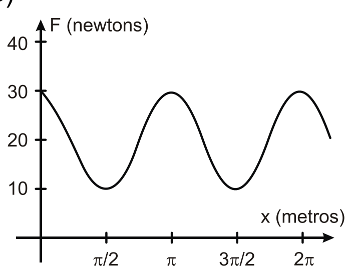
a)



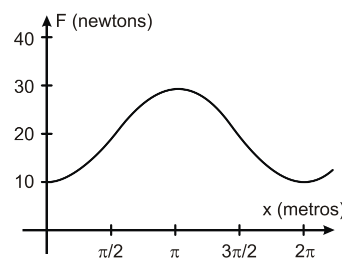
b)



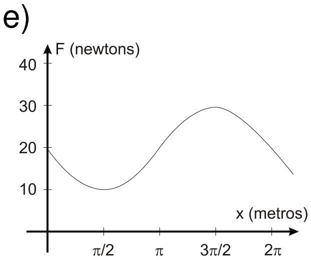
c)



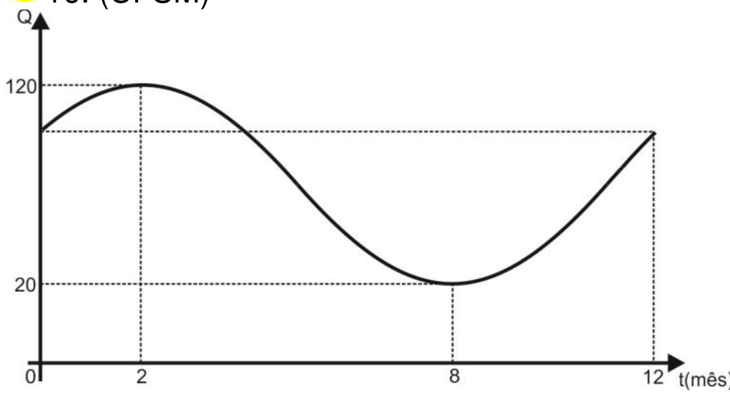
c)



e)



16. (UFSM)



O gráfico mostra a quantidade de animais que uma certa área de pastagem pode sustentar ao longo de 12 meses. Propõe-se a função $Q(t) = a\,\text{sen}(b + ct) + d$ para descrever essa situação. De acordo com os dados, $Q(0)$ é igual a:

a)100 b)97 c)95 d)92 e)90

17. (UFRGS) Traçando os gráficos das funções *f* e *g* definidas por $f(x) = |\text{sen}\,x|$ e $g(x) = |\cos x|$, com *x* variando no conjunto dos números reais de -2π a 2π, no mesmo sistema de coordenadas, o número de interseções é

a)7 b)8 c)9 d)10 e)12

18. (FGV)

a) Construa o gráfico das funções $f(x) = 2 + \text{sen}\,x$ e $g(x) = 2 + \cos 2x$ para $0 \le x \le 2\pi$

b) Admita que $f(x)$ e $g(x)$ indiquem as cotações das ações das empresas F e G na bolsa de valores de São Paulo no intervalo de horas $0 \le x \le 2\pi$ ($x = 0$ indica 12h00, e $x = 2\pi \approx 6{,}28$ indica, aproximadamente, 18h17). Determine algebricamente (equações e/ou inequações) o intervalo de horas, com $0 \le x \le 2\pi$, em que a cotação das ações da empresa F foi maior ou igual à cotação das ações da empresa G.

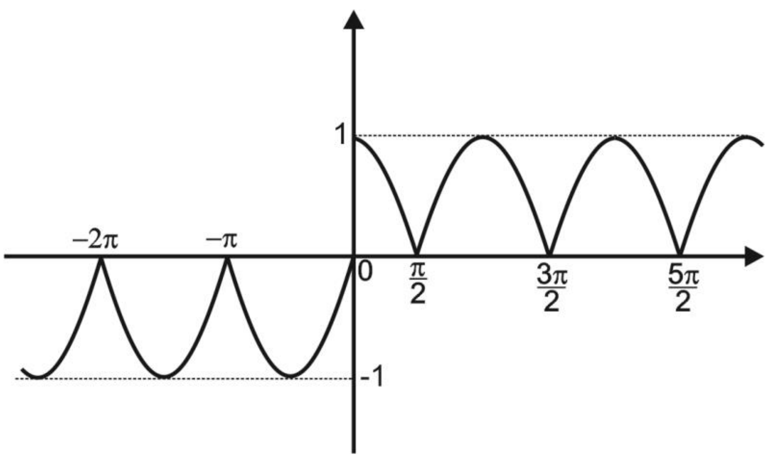
19. (EPCAR) Uma piscina com ondas artificiais foi programada de modo que a altura da onda varie com o tempo de acordo com o modelo

$f(x) = 3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{4}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ em que $y = f(x)$ é a altura da onda, em metros, e **x** o tempo, em minutos.

Dentre as alternativas que seguem, assinale a única cuja conclusão **NÃO** condiz com o modelo proposto.
a) A altura de uma onda nunca atinge 2 metros.
b) Entre o momento de detecção de uma crista (altura máxima de uma onda) e o de outra seguinte, passam-se 2 minutos.

c) De zero a 4 minutos, podem ser observadas mais de duas cristas.
d) As alturas das ondas observadas com 30, 90, 150,... segundos são sempre iguais.

20. (ESPCEX) A função real $f(x)$ está representada no gráfico abaixo.



A expressão algébrica de f(x) é

a) $f(x)=\begin{cases} -|\operatorname{sen} x|, \text{ se } x<0 \\ |\cos x|, \text{ se } x\geq 0 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} |\cos x|, \text{ se } x<0 \\ |\operatorname{sen} x|, \text{ se } x\geq 0 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} -|\cos x|, \text{ se } x<0 \\ |\operatorname{sen} x|, \text{ se } x\geq 0 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} |\operatorname{sen} x|, \text{ se } x<0 \\ |\cos x|, \text{ se } x\geq 0 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} -\operatorname{sen} x, \text{ se } x<0 \\ \cos x, \text{ se } x\geq 0 \end{cases}$

21. (ITA) O conjunto imagem e o período de $f(x)=2\operatorname{sen}^2(3x)+\operatorname{sen}(6x)-1$ são, respectivamente,

a) $[-3,3]$ e 2π

b) $[-2,2]$ e $2\pi/3$

c) $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ e $\pi/3$

d) $[-1,3]$ e $\pi/3$

e) $[-1,3]$ e $2\pi/3$

22. (EPCAR) Considere A o conjunto mais amplo possível na função real $f: A \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cossec} x} + \dfrac{\cos x}{\sec x}$. Sobre a função f é correto afirmar que:

a) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) é periódica com período igual a π.

c) é decrescente se $x \in \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

d) é ímpar.

Capítulo 11

Funções Trigonométricas Inversas

11.1. Introdução

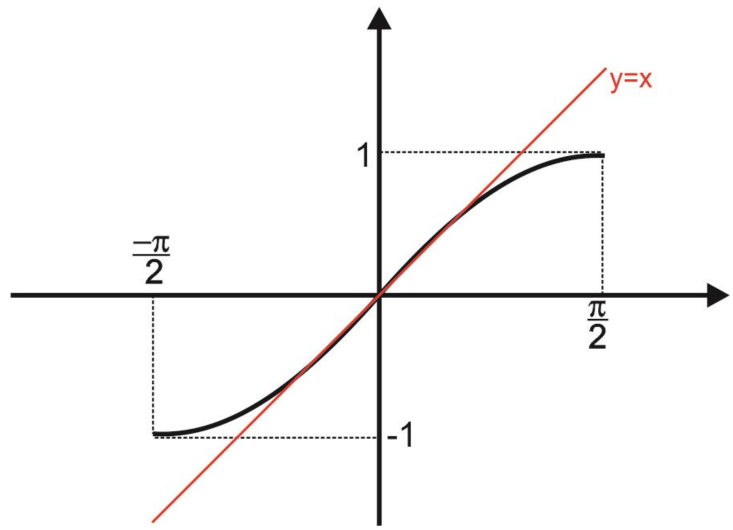
Dada uma função bijetora $f : A \to B$, definimos como função inversa de *f*, a função $f^{-1} : B \to A$ tal que $f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in A$ e $f(f^{-1}(x)) = x$, $\forall x \in B$.
Se escolhermos apropriadamente os conjuntos domínio e contradomínio das funções trigonométricas estudadas anteriormente, podemos definir suas inversas que são denominadas arco seno, arco cosseno e arco tangente.

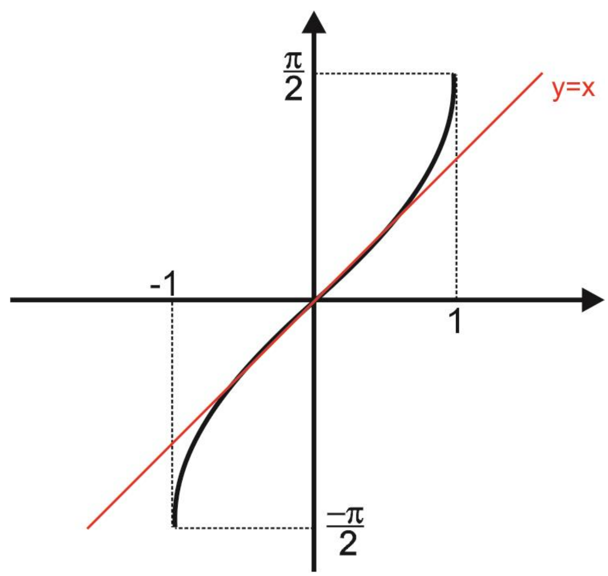
11.2. Função Arco Seno

Se, $f : \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \to [-1;1]$ é tal que $f(x) = \operatorname{sen} x$, a função $f^{-1} : [-1;1] \to \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ é denominada arco seno de x e é denotada por $f^{-1}(x) = \operatorname{arcsen}(x)$.

Lembre-se que, na prática, a função inversa efetua o "caminho inverso" da relação dada por f, ou seja, se $f(a) = b$ então, $f^{-1}(b) = a$.

O gráfico de uma função e de sua inversa (caso esta exista) são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. Se analisarmos a função $f(x) = \operatorname{sen} x$, com o domínio restrito a $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ e sua reflexão sobre a reta $y = x$ temos:





Exemplos Resolvidos

1. Calcule cada um dos valores abaixo:
a) arcsen(1)

Desejamos obter o valor do arco $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ tal que $\operatorname{sen} x = 1$. Portanto, $x = \operatorname{arcsen}(1) = \frac{\pi}{2}$.

b) $\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

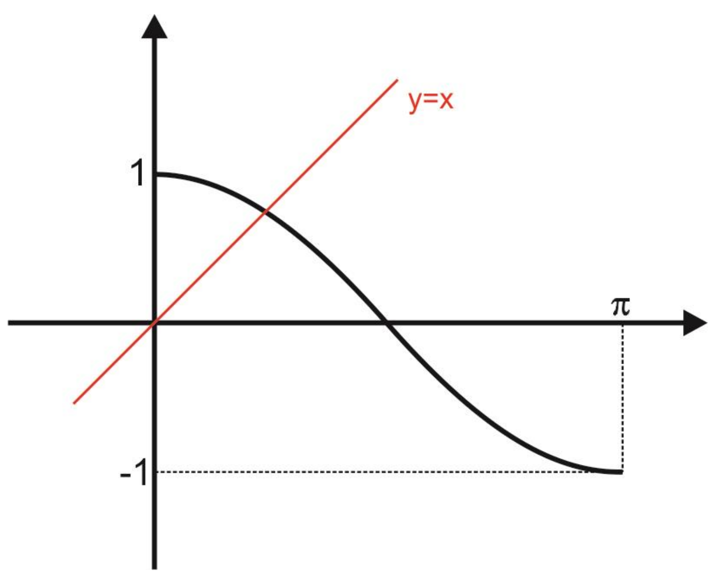
Desejamos obter o valor do arco $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ tal que $\text{sen}\, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Portanto, $x = \text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

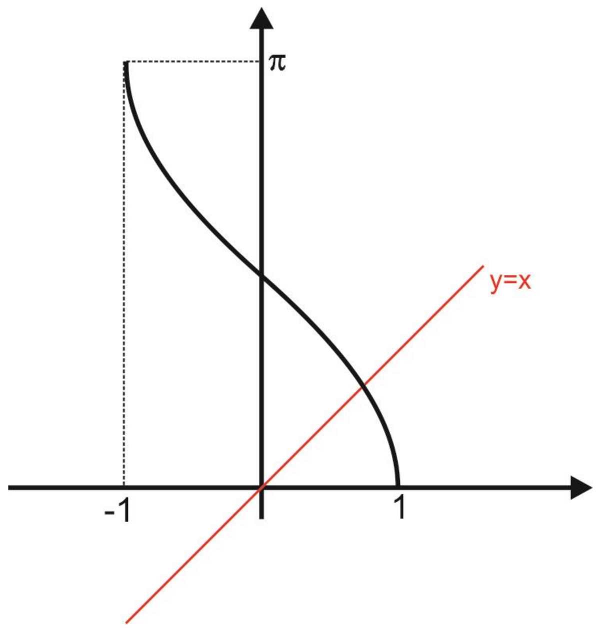
c) $\text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$

Desejamos obter o valor do arco $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ tal que $\text{sen}\, x = -\frac{1}{2}$. Portanto, $x = \text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{11\pi}{6}$.

11.3. Função Arco Cosseno

Se, $f:[0;\pi] \to [-1;1]$ é tal que $f(x) = \cos x$, a função $f^{-1}:[-1;1] \to [0;\pi]$ é denominada arco cosseno de x e é denotada por $f^{-1}(x) = \arccos(x)$.
Assim como no caso anterior, o gráfico da função $f^{-1}(x) = \arccos(x)$ é simétrico ao gráfico da função $f(x) = \cos(x)$ em relação à reta $y = x$:





Exemplos Resolvidos

1. Calcule cada um dos valores abaixo:

a) $\arccos(-1)$

Desejamos obter o valor do arco $x \in [0;\pi]$ tal que $\cos x = -1$. Portanto, $x = \arccos(-1) = \pi$.

b) $\arccos\left(\dfrac{1}{2}\right)$

Desejamos obter o valor do arco $x \in [0;\pi]$ tal que $\cos x = \dfrac{1}{2}$. Portanto, $x = \arccos\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

c) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Desejamos obter o valor do arco $x \in [0;\pi]$ tal que $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Portanto, $x = \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$.

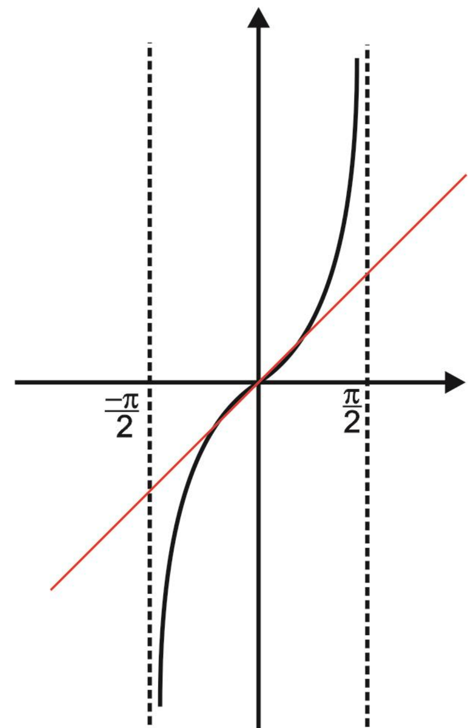
2. Calcule o valor de $\cos(\text{arcsen}(x))$ para qualquer $x \in [-1;1]$.
Se $\text{arcsen}(x) = \alpha$, então, $\text{sen}\,\alpha = x$ e portanto, $\cos(\text{arcsen}(x)) = \cos(\alpha)$.

Usando a relação fundamental:
$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow x^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{1-x^2}$
Porém, note que a imagem da função $\text{arcsen}(x)$ é $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ e neste intervalo qualquer cosseno é positivo, logo:

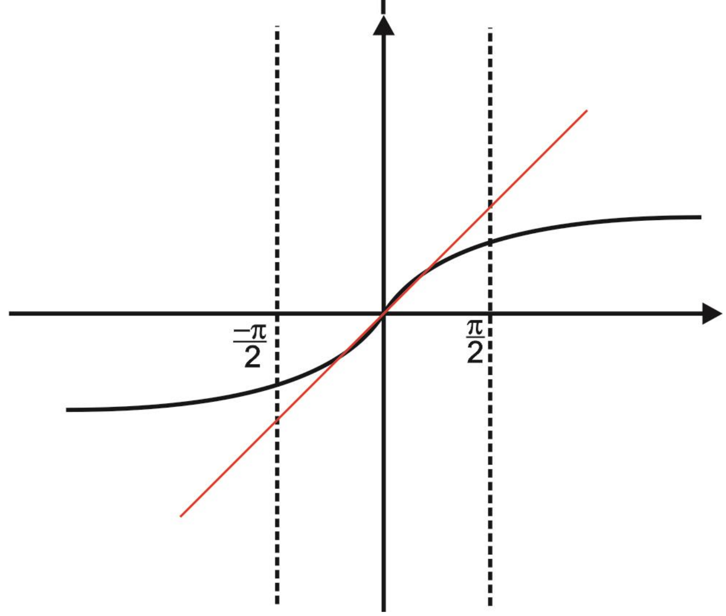
$$\cos\alpha = \cos(\text{arcsen}(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

11.4. Função Arco Tangente

Se, $f : \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ é tal que $f(x) = \text{tg}\,x$, a função $f^{-1} : \mathbb{R} \to \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ é denominada arco tangente de x e é denotada por $f^{-1}(x) = \text{arctg}(x)$.
Assim como nos casos anteriores, o gráfico da função $f^{-1}(x) = \text{arctg}(x)$ é simétrico ao gráfico da função $f(x) = \text{tg}(x)$ em relação à reta $y = x$:



$\frac{-\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$



$\frac{-\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$

Exemplos Resolvidos

1. Calcule cada um dos valores abaixo:

a) arctg(1)

Desejamos obter o valor do arco $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tal que $\operatorname{tg} x = 1$. Portanto, $x = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$.

b) arctg(0)

Desejamos obter o valor do arco $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tal que $\operatorname{tg} x = 0$. Portanto, $x = \operatorname{arctg}(0) = 0$

b) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Desejamos obter o valor do arco $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tal que $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Portanto, $x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$

2. Calcule o valor de $\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen}(x))$ para qualquer $x \in \left]-1;1\right[$.
Se $\operatorname{arcsen}(x) = \alpha$, então, $\operatorname{sen}\alpha = x$ e portanto, $\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen}(x)) = \operatorname{tg}(\alpha)$.

Como $\cos(\alpha) = \sqrt{1-x^2}$ (conforme exemplo 2 do item anterior) então:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen}(x)) = \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$$

EXERCÍCIOS

1. (FGV) Sendo $p = \frac{1}{2}$ e $(p+1).(q+1) = 2$, então a medida de $\text{arctg}\, p + \text{arctg}\, q$, em radianos, é

a) $\pi/2$ b) $\pi/3$ c) $\pi/4$ d) $\pi/5$ e) $\pi/6$

2. (UFF) Nos itens a seguir, **arccos** denota a função inversa da função **cosseno** restrita ao intervalo $[0,\pi]$ e **arctg** denota a função inversa da função **tangente** restrita ao intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

a) Calcule $\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)$.

b) Calcule $\text{sen}\left(\text{arctg}(-1)\right)$.

c) Verifique que $\text{sen}\left(\arccos(x)\right) = \sqrt{1-x^2}$ para todo $x \in [-1,1]$.

3. (PUCPR) O conjunto domínio de $f(x) = \text{arcsen}(2x-3)$ está contido no intervalo:

a) [2/3, 3/4]
b) [-1, 1]
c) [0, 1]
d) [1, 2]
e) [-1/2, 3/2]

4. (MACKENZIE) O valor de $\text{tg}\left(\text{arcsen}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right)$ é:

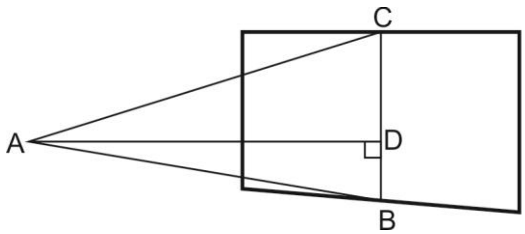
a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ c) $3\sqrt{2}$ d) $2\sqrt{2}$ e) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

5. (IME) Seja $\text{arcsen}\, x + \text{arcsen}\, y + \text{arcsen}\, z = \frac{3\pi}{2}$ onde x, y e z são números reais pertencentes ao intervalo $[-1,1]$. Determine o valor de

$$x^{100} + y^{100} + z^{100} - \frac{9}{x^{101} + y^{101} + z^{101}}.$$

a) –2 b) –1 c) 0 d) 1 e) 2

6. (UFPB) Em uma sala de cinema cuja tela é plana, o olho de uma espectadora vê a tela a uma distância de 10m, segundo um ângulo de visão vertical $BAC = BAD + DAC$, como mostra a figura a seguir.



Sabendo que os segmentos de reta CD e DB medem, respectivamente, 2 m e 1 m, e que AD e BC são perpendiculares, conclui-se que o ângulo de visão BAC é igual a:

a) $\text{arctg}\left(\frac{1}{10}\right)$ b) $\text{arctg}\left(\frac{2}{10}\right)$ c) $\text{arctg}\left(\frac{3}{10}\right)$ d) $\text{arctg}\left(\frac{15}{49}\right)$ e) $\text{arctg}\left(\frac{25}{49}\right)$

7. (ITA) Considerando as funções: $\text{arcsen}:[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\text{arccos}:[-1,1] \to [0,\pi]$, assinale o valor de $\cos\left[\text{arcsen}\left(\frac{3}{5}\right) + \text{arccos}\left(\frac{4}{5}\right)\right]$.

a) $\frac{6}{25}$ b) $\frac{7}{25}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{5}{12}$

8. (ITA) Considere os contradomínios das funções arco seno e arco cosseno como sendo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $[0,\pi]$, respectivamente. Com respeito à função $f:[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $f(x) = \text{arcsen}\, x + \text{arccos}\, x$.

a) f é não-crescente e ímpar.
b) f não é par nem ímpar.
c) f é sobrejetora.
d) f é injetora.
e) f é constante.

9. (ITA) Num triângulo acutângulo ABC, o lado oposto ao ângulo Â mede 5 cm.

Sabendo que Â = $\arccos\frac{3}{5}$ e C = $\operatorname{arcsen}\frac{2}{\sqrt{5}}$, então a área do triângulo ABC é igual a

a) $\frac{5}{2}\,\text{cm}^2$ b) $12\ \text{cm}^2$ c) $15\ \text{cm}^2$ d) $2\sqrt{5}\ \text{cm}^2$ e) $\frac{25}{2}\,\text{cm}^2$

10. (ITA) Consideremos a equação $\left[\log_e^{(\operatorname{sen} x)}\right]^2 - \log_e^{(\operatorname{sen} x)} - 6 = 0$, a(s) solução(es) da equação acima é dada por:

a) $x = \operatorname{arcsen}\left(e^2\right)$ e $x = \operatorname{arcsen}(3)$

b) $x = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)$ e $x = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3}\right)$

c) $x = \operatorname{arctg}\left(e^2\right)$ e $x = \arccos(3)$

d) $x = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{e^2}\right)$

e) n.r.a

11. (ITA) A solução da equação $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1} = \frac{\pi}{4}$ definida no conjunto dos reais diferentes de -1 é:

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ e 1 d) 2 e) 2 e 1

12. (ITA) Num triângulo isósceles, o perímetro mede 64m e os ângulos adjacentes são iguais ao $\arccos\frac{7}{25}$. Então a área do triângulo é de:

a) $168\,\text{cm}^2$ b) $192\,\text{cm}^2$ c) $84\,\text{cm}^2$ d) $96\,\text{cm}^2$ e) $157\,\text{cm}^2$

Capítulo 12

Aproximação de funções contínuas por polinômios trigonométricos

12.1. Introdução

Nesta parte da dissertação discutiremos a aproximação de funções contínuas* por polinômios trigonométricos.

* Uma função $f(x)$ é contínua em um ponto x_0 se, e somente se, $f(x)$ está definida para $x = x_0$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Uma função $f(x)$ é contínua em um conjunto D se for contínua em todos os pontos de D.

12.2. Definição

Uma função $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita um polinômio trigonométrico de ordem n se existem números reais $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ e $b_1, b_2, ..., b_n$ tais que:

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx) \right)$$

Se $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$, T será um polinômio trigonométrico par:

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) \right).$$

Se $a_0 = a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$, T será um polinômio trigonométrico ímpar:

$$T(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(b_k\,\text{sen}(kx)\right).$$

Exemplos

- $T(x)=-2+\sum_{k=1}^{10}\left(k^2\cos(kx)+(3k-1)\,\text{sen}(kx)\right)$, é um polinômio trigonométrico composto.
- $T(x)=5+\sum_{k=1}^{12}\left(k\cos(2x)\right)$, é um polinômio trigonométrico par.
- $T(x)=\sum_{k=1}^{6}\left(2^k\,\text{sen}(kx)\right)$, é um polinômio trigonométrico ímpar.

12.3. Teoremas

- Teorema 1: Se $T(x)$ é um polinômio trigonométrico par, então $T_1(x)=\cos x.T(x)$ também é um polinômio trigonométrico par.

Demonstração: seja $T(x)$ um polinômio trigonométrico par, então,

$$T(x)=a_0+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos(kx)\right)$$

Daí,

$$\text{T}_1(\text{x})=\cos x.T(x)=a_0\cos x+\cos x.\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos(kx)\right)=a_0\cos x+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos(kx).\cos(x)\right)$$

No entanto, usando a fatoração trigonométrica de $\cos p+\cos q$ nota-se que cada termo da forma $a_k\cos(kx).\cos x$ pode ser escrito como $\frac{a_k}{2}\left[\cos\left((k+1)x\right)+\cos\left((k-1)x\right)\right]$, assim:

$$T_1(x)=a_0\cos x+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2}\left[\cos\left((k+1)x\right)+\cos\left((k-1)x\right)\right]$$

que é um polinômio trigonométrico par.

- Teorema 2: Se $T(x)$ é um polinômio trigonométrico, então $T_1(x) = \operatorname{sen} x . T(x)$ também é um polinômio trigonométrico.

Demonstração: analogamente à anterior, se:

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx) \right), \text{ então}$$

$$\mathrm{T}_1(\mathrm{x}) = \operatorname{sen} x T(x) = a_0 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx) \right) =$$

$$= a_0 \operatorname{sen} x + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx).\operatorname{sen}(x) + b_k \operatorname{sen}(kx).\operatorname{sen}(x) \right)$$

Substituindo os termos:

$$a_k \cos(kx).\operatorname{sen}(x) = \frac{a_k}{2} \left[\operatorname{sen}\left((k+1)x\right) - \operatorname{sen}\left((k-1)x\right) \right]$$

e

$$b_k \operatorname{sen}(kx).\operatorname{sen}(x) = \frac{b_k}{2} \left[\cos\left((k+1)x\right) - \cos\left((k-1)x\right) \right]$$

$T_1(x)$ passa a ser escrito como uma soma de senos e cossenos:

$$T_1(x) = a_0 \operatorname{sen} x + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2} \left[\operatorname{sen}\left((k+1)x\right) - \operatorname{sen}\left((k-1)x\right) \right] + \frac{b_k}{2} \left[\cos\left((k+1)x\right) - \cos\left((k-1)x\right) \right]$$

Logo, $T_1(x)$ é um polinômio trigonométrico.

- Teorema 3: Se $T(x)$ é um polinômio trigonométrico, então $T_1(x) = T(x+a)$ com $a \in \mathbb{R}$, também é um polinômio trigonométrico.

Demonstração:

$$T_1(\mathrm{x}) = \mathrm{T}(\mathrm{x}+\mathrm{a}) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos(k(x+a)) + b_k \operatorname{sen}(k(x+a))\right) =$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos(kx+ka) + b_k \operatorname{sen}(kx+ka)\right)$$

Como k e a são constantes, temos:

$$a_k \cos(kx+ka) = a_k\left(\cos kx.\cos ka - \operatorname{sen} kx.\operatorname{sen} ka\right)$$

$$a_k \cos(kx+ka) = c_k.\cos kx + d_k.\operatorname{sen} kx$$

Onde c_k e d_k são constantes dadas, respectivamente, por $a_k \cos ka$ e $a_k \operatorname{sen} ka$.

O raciocínio é análogo para $b_k \operatorname{sen}(kx+ka)$:

$$b_k \operatorname{sen}(kx+ka) = \mathrm{b}_k\left(\operatorname{sen} kx.\cos ka + \operatorname{sen} ka.\cos kx\right)$$

$$b_k \operatorname{sen}(kx+ka) = e_k.\operatorname{sen} kx + f_k.\cos kx$$

Onde e_k e f_k são constantes dadas, respectivamente, por $b_k \cos ka$ e $b_k \operatorname{sen} ka$.

Portanto, $T_1(x)$ é um polinômio trigonométrico.

Obs.: Na demonstração do Teorema 4 utilizaremos o teorema da aproximação de Weierstrass: se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é contínua, então, existe um polinômio P tal que $|f(x)-P(x)|<\varepsilon$ para todo $x\in[a,b]$ e todo $\varepsilon>0$.

- Teorema 4: Sejam $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ contínua e $\varepsilon>0$ dado. Então, existe um polinômio trigonométrico par T tal que $|f(x)-T(x)|<\varepsilon$ para todo $x\in[0,\pi]$.

Demonstração: Seja $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$ definida por $g(t)=f(\arccos(t))$. Pelo teorema de Weierstrass, existe um polinômio P tal que $|P(t)-g(t)|<\varepsilon$, para todo $t\in[-1,1]$. Fazendo $x=\arccos t$, ou seja, $t=\cos x$ temos $|P(\text{cosx})-\text{f(x)}|<\varepsilon$ para todo $x\in[0,\pi]$

Pelo teorema 1 temos que $\cos^k x$ ($k\in\mathbb{N}^*$) pode ser expresso como um polinômio trigonométrico par, daí:
$T(x)=P(\cos x)=a_0+a_1\cos x+...+a_n\cos^n x$ é um polinômio trigonométrico par e $|T(x)-f(x)|<\varepsilon$ para todo $x\in[0,\pi]$.

- Teorema 5: Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua, par e de período 2π. Então, para cada $\varepsilon>0$, existe um polinômio trigonométrico $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $|f(x)-T(x)|<\varepsilon$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

O teorema 4 nos garante o resultado acima no caso em que $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$. Mas, como $f(x)=f(-x)$ e $T(x)=T(-x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$, temos $|f(-x)-T(-x)|=|f(x)-T(x)|<\varepsilon$ para todo $x\in[-\pi,\pi]$.
Como f e T são periódicas com período 2π, $f-T$ também o é, e portanto $|f(x)-T(x)|<\varepsilon$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

- Teorema 6: Sejam $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ uma função contínua e $\varepsilon>0$. Então, existe um polinômio trigonométrico T tal que $|f(x)-T(x)|<\varepsilon$ para todo $x\in[0,2\pi]$.

Demonstração: Estenda f a toda reta $\mathbb{R}$ colocando $f(x+2\pi)=f(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

Considere as funções $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por:

$g(x)=f(x)+f(-x)$ e $h(x)=[f(x)-f(-x)]\,\text{sen}\,x$

Como:

$$g(x) = f(x) + f(-x)$$
$$\text{e}$$
$$g(-x) = f(-x) + f(x)$$

Temos:

$$g(x) = g(-x).$$

Como:

$$h(x) = [f(x) - f(-x)]\text{sen}(x)$$
$$\text{e}$$
$$h(-x) = [f(-x) - f(x)]\text{sen}(-x) = [-f(-x) + f(x)]\text{sen}(x)$$

Temos:

$$h(x) = h(-x).$$

Então, g e h satisfazem as hipóteses do Teorema 5. Logo, existem polinômios trigonométricos T_1 e T_2 tais que:

$$\alpha_1(x) = g(x) - T_1(x) \text{ e } \alpha_2(x) = h(x) - T_2(x)$$

satisfazem $|\alpha_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Multiplicando $\alpha_1(x) = g(x) - T_1(x)$ por $\text{sen}^2 x$ temos:

$$\alpha_1(\text{x})\text{sen}^2 x = g(x)\text{sen}^2 x - T_1(\text{x})\text{sen}^2 x$$

e então:

$$g(x)\text{sen}^2 x = T_1(\text{x})\text{sen}^2 x + \alpha_1(\text{x})\text{sen}^2 x$$

Logo:

$$f(x)\text{sen}^2 x + f(-x)\text{sen}^2 x = T_1(\text{x})\text{sen}^2 x + \alpha_1(\text{x})\text{sen}^2 x \qquad (1)$$

Multiplicando $\alpha_2(x) = h(x) - T_2(x)$ por $\operatorname{sen} x$ temos:

$$\alpha_2(\mathrm{x})\operatorname{sen} x = h(x)\operatorname{sen} x - T_2(\mathrm{x})\operatorname{sen} x$$

e então:

$$h(x)\operatorname{sen} x = T_2(\mathrm{x})\operatorname{sen} x + \alpha_2(\mathrm{x})\operatorname{sen} x$$

logo:

$$f(x)\operatorname{sen}^2 x - f(-x)\operatorname{sen}^2 x = T_2(\mathrm{x})\operatorname{sen} x + \alpha_2(\mathrm{x})\operatorname{sen} x \qquad (2)$$

Somando (1) e (2):

$$f(x)\operatorname{sen}^2 x = \underbrace{\frac{T_1 \operatorname{sen}^2 x + T_2 \operatorname{sen} x}{2}}_{T_3(x)} + \underbrace{\frac{\alpha_1 \operatorname{sen}^2 x + \alpha_2 \operatorname{sen} x}{2}}_{\beta(x)}$$

$$f(x)\operatorname{sen}^2 x = T_3(x) + \beta(x) \qquad (3)$$

onde $T_3(x)$ é um polinômio trigonométrico e $|\beta(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

O Teorema 3 nos garante que o mesmo vale para $f\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$:

$$f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}^2 x = \underbrace{T_3\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}_{T_4(x)} + \underbrace{\beta\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}_{\gamma(x)}$$

$$f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}^2 x = T_4(x) + \gamma(x) \qquad (4)$$

onde $T_4(x)$ é um polinômio trigonométrico e $|\gamma(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Substituindo x por $x + \dfrac{\pi}{2}$ em (4) temos:

$$f(x)\operatorname{sen}^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \underbrace{T_4\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}_{T_5(x)} + \underbrace{\gamma\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}_{\delta(x)}$$

$$f(x)\cos^2 x = T_5(x) + \delta(x) \qquad (5)$$

onde $T_5(x)$ é um polinômio trigonométrico e $|\delta(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Somando (3) e (5):

$$f(x)\text{sen}^2 x + f(x)\cos^2 x = T_3(x) + T_5(x) + \beta(x) + \delta(x)$$
$$f(x)(\text{sen}^2 x + \cos^2 x) = \underbrace{T_3(x) + T_5(x)}_{T_6(x)} + \underbrace{\beta(x) + \delta(x)}_{\mu(x)}$$
$$f(x) = T_6(x) + \mu(x)\,.$$

onde $T_6(x)$ é um polinômio trigonométrico e $|\mu(x)| < \varepsilon$. Portanto, $T_6(x) = T_3(x) + T_5(x)$ é um polinômio trigonométrico que satisfaz o enunciado.

GABARITO

Capítulo 1

1. A

2.

a) $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{h}{d}$

b) d=2

3. E

4. 5 e 12

5. D

6. B

7. A

8. B

9. A

10. 20m

11. C

12. E

13. 75

14. $\dfrac{3\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}$km

15. A

16. B

17. E

18. $\frac{1}{5}$

19. D

20. C

21. E

22. A

23. B

24. C

25. 0

26. C

27.

a) $10+\frac{20\sqrt{3}}{3}$ cm

b) $\frac{3k-k^3}{2}$

28. B

Capítulo 2

1. A

2. 50°

3. 4π cm

4. A

5. C

6. $\frac{8320\pi}{9}$ km

7. B

8. A

9. B

10. a) $4\sqrt{3}$ dm e $\operatorname{sen} BPQ = \frac{\sqrt{13}}{13}$
b) 90° e 120 voltas

11. D

12. C

13. E

14. C

15. B

16. $\frac{\pi}{80}$ rad

17. 900π m

18. 10rad e 5rad

19. C

20.1:24

21. B

Capítulo 3

1. $1 \leq k < \frac{3}{2}$

2. B

3. 2

4. $S = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$

5. 3

6. E

7. E

8. B

9. C

10. A

11. D

12.

a) $H_{\max} = 32m$, $V = \frac{\pi}{60} rad / s$

b) Falso. Sua altura será $17 - \frac{15\sqrt{2}}{2}$ m

c) $H = 17 + \frac{15\sqrt{2}}{2}$ m

d) $H(t) = 17 - 15\cos\left(\frac{\pi t}{60}\right)$.

13. ab

14.

a) $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$

b) $4(10 + \sqrt{10})\text{cm}$

15. D

16. D

17. A

18. $\frac{1}{12}$

19. D

Capítulo 4

1. B

2. E

3.
$\text{sen}\,\alpha = -\frac{4}{5}$, $\text{tg}\,\alpha = \frac{4}{3}$, $\text{cotg}\,\alpha = \frac{3}{4}$, $\sec\alpha = -\frac{5}{3}$ e $\text{cossec}\,\alpha = -\frac{5}{4}$

4. E

5. E

6. B

7.
a) $\sec^2\theta(\sec^2\theta - 2)$
b) 575

8. $\cos x$

9. $\frac{a+1}{a-1}$

10. $\text{cotg}\,x = -1$

11. B

12. $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$

13. E

14. 2

15. D

16. D

17. D

18. $\frac{1}{5}$

19. A

Capítulo 5

1.

a) $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

b) $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

c) $x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

d) $x=\frac{7\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

e) $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

f) $x=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

g) $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

h) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

i) $x=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

j) $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

k) $x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

2.

a) $\text{sen}3180°=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \cos 3180°=\dfrac{1}{2}$ e $\text{tg}3180°=-\sqrt{3}$

b) $\text{sen}\dfrac{31\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\dfrac{31\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $\text{tg}\dfrac{31\pi}{4}=-1$

c) $\text{sen}\dfrac{-63\pi}{6}=-1$, $\cos\dfrac{-63\pi}{6}=0$ e $\text{tg}\dfrac{-63\pi}{6}=\nexists$

3.

a) $x=\dfrac{\pi}{3}$ ou $x=\dfrac{2\pi}{3}$

b) $x=\dfrac{7\pi}{6}$ ou $x=\dfrac{11\pi}{6}$

c) $x=\dfrac{\pi}{2}$

d) $x=0$ ou $x=\pi$

e) $x=\dfrac{2\pi}{3}$ ou $x=\dfrac{4\pi}{3}$

f) $x=\dfrac{\pi}{2}$ ou $x=\dfrac{3\pi}{2}$

g) $x=0$ ou $x=\pi$

h) $x=\dfrac{\pi}{4}$ ou $x=\dfrac{3\pi}{4}$

i) $x=\dfrac{2\pi}{3}$ ou $x=\dfrac{5\pi}{3}$

j) $x=0$ ou $x=\pi$

4.

a) $x=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

b) $x=\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\dfrac{11\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

c) $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

d) $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

e) $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

f) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

g) $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

h) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

i) $x=\frac{2\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

j) $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Capítulo 6

1. Demonstração

2. B

3. E

4.D

5. A

6. B

7. D

8. a) $\overline{AC}=\sqrt{13}\,x$ e $\overline{AB}=2\sqrt{3}\,x$

b) $\frac{4\sqrt{3}+3}{13}$

9. A

10. $\text{sen}\,C=\frac{1}{2}$

11. A

12. D

13. $\text{tg}(x - y) = \dfrac{b}{a}$

14. E

15. B

16.
a) 15 minutos
b) $\overline{AB} = 50\left[1 - \left(\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)\right]\text{m}$

17.
a) $\cos ABQ = \dfrac{4}{5}$
b) $\cos ABP = \dfrac{2}{5}$
c) $\cos QBP = \dfrac{8 + 3\sqrt{21}}{25}$

18. B

19. B

20. B

Capítulo 7

1. $x = \dfrac{2\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{4\pi}{3}$

2. V, V, V, F, F

3.

a) $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2}$

b) $\frac{7}{17}$

4. B

5. A

6. E

7.

a) $\operatorname{sen} P_2OQ = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos P_2OQ = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

b) 90°

c) $\operatorname{sen} P_1OQ = \frac{3}{5}$

8.

a) $\frac{\sqrt{15}}{4}$

b) $\frac{2\sqrt{15}}{15}$

9. C

10. B

11. B

12. E

13. D

14. C

15.

a) $\alpha = 30°$

b) $H = 100\sqrt{3} + 1{,}6\,\text{m}$

16. D

17. D

18. E

19. D

20. A

21. C

22. E

Capítulo 8

1. D

2. $k\sqrt{2}$

3.
a) $4 \operatorname{sen} x \cos^2 x$
b) $4 \cos x \cos(2x)$

4. $4 \operatorname{sen}(2x).\cos(3x).\cos(4x)$

5. $x = \pm\dfrac{\pi}{18} + k2\pi\ ,\ \ k \in \mathbb{Z}$

6.
a) $x = \dfrac{2\pi}{3}$
b) 0

7. Demonstração

8. D

9. B

Capítulo 9

1. $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \quad ,k \in \mathbb{Z}$

2. $\begin{cases} x = \frac{k\pi}{3} \\ ou \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} ,k \in \mathbb{Z}$

3. $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{3} \le x < 2\pi$

4. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

5. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ ou \\ x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} ,k \in \mathbb{Z}$

6. A

7. $\begin{cases} a = \pm\frac{2\pi}{3} + 4k\pi \\ b = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} ,k \in \mathbb{Z}$

8. A

9. $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \quad ,k \in \mathbb{Z}$

10. 80 soluções

11. D

12. B

13. D

14. E

15. C

16.
a) 12h48m
b) 181 dias

17. C

18.
a) $\frac{2\pi}{3}$
b) 0

19. $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{11\pi}{6}$

20. E

21. A

22. $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\ , k \in \mathbb{Z}$

23. $\pi/3 < x < 2\pi/3$ ou $4\pi/3 < x < 5\pi/3$

24. D

25. A

26. $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4} \right\}$

27. C

Capítulo 10

1.
a) De 17°C a 25°C
b) Às 14h00m e às 22h00m

2. F, V, F, F, V

3. C

4.
a) $h(x) = 2 - \text{sen}(2x)$
b) 3

5. D

6. B

7. 17

8. D

9.
a) 100mm de Hg e 80mm de Hg
b) 0,75s

10. V, V, F, V, V

11. A

12. B

13. D

14. A

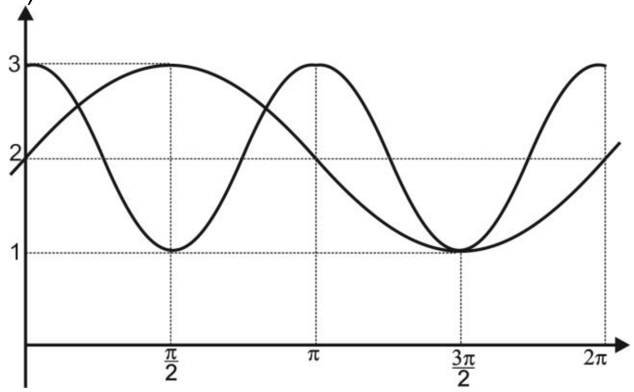
15. A

16. C

17. B

18.

a)



b)

$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$ ou $x = \pi$

19. C

20. A

21. C

22. A

Capítulo 11

1. C

2.

a) $\frac{\pi}{5}$

b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) DEMONSTRAÇÃO

3. D

4. D

5. C

6. D

7. B

8. E

9. E

10. D

11. B

12. A

BIBLIOGRAFIA

[1] Iezzi, G., Fundamentos da matemática elementar, vol. 3, Atual (2004)

[2] Barreto, A. C., Tópicos de análise, IMPA (1971)

[3] Eves, H., Introdução à história da matemática, Editora da Unicamp (2011)

[4] Andreescu T., Feng Z., 103 trigonometry problems: from the training os the USA IMO team, Birkhäuser (2005)

[5] Associación Fondo de Investigadores y Editores, Compendio académico de matemática – trigonometria, Associación Fondo de Investigadores y Editores (2010)

[6] Durell, C. V., Robson, A., Advanced trigonometry, G. Bell and sons (1930)