JOSÉ CARLOS CIFUENTES VÁSQUEZ

O PROBLEMA DA COMPACTIFICAÇÃO EM TEORIA DE MODELOS

UMA REINTERPRETAÇÃO DO TEOREMA DE ULTRAPRODUTOS DE ŁOŚ

TESE DE DOUTORADO

O PROBLEMA DA COMPACTIFICAÇÃO EM TEORIA DE MODELOS

UMA REINTERPRETAÇÃO DO TEOREMA DE ULTRAPRODUTOS DE ŁOŚ

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. José Carlos Cifuentes Vásquez e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 29 de outubro de 1993

Prof. Dr. ______________________

Antonio Mário Antunes Sette

Orientador

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Ciências Matemáticas.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

O título desta tese trata de resumir o conteúdo da mesma, como pretendemos mostrar a seguir.

Em Teoria de Modelos, os espaços de estruturas (só consideraremos, por simplicidade, estruturas unissortidas, i.e. com apenas um domínio) admitem uma topologia intimamente relacionada com as propriedades lógicas das estruturas consideradas. Por exemplo, seguindo Tarski, demonstra-se facilmente que a compacidade lógica é equivalente à compacidade topológica desses espaços.

Em teoria de modelos abstrata, ou extendida, a compacidade de uma lógica significa garantir a "existência" de modelos com propriedades previamente estipuladas. A lógica elementar, ou de $1^{a.}$ ordem, $L_{\omega\omega}$ é compacta e uma de suas principais consequências, do ponto de vista dos fundamentos da matemática por exemplo, é que permite "atingir" o infinito atual a partir do infinito potencial: toda coleção $\sum$ de sentenças que têm modelos arbitrariamente grandes, têm modelos infinitos; em particular, todo "conjunto" arbitrariamente grande é infinito, observe que o conceito de "conjunto" não é capturado por $L_{\omega\omega}$. No entanto, veremos que o mesmo fenômeno de compacidade, aplicado a uma outra lógica, permitirá separar essencialmente aqueles dois conceitos, mostrando a existência de "objetos" finitos arbitrariamente grandes, objetos cuja natureza, em princípio, não é capturada pela lógica considerada (ver seção 3.3).

Desde o aparecimento das lógicas que extendem $L_{\omega\omega}$, a propriedade de compacidade é considerada natural, a tal ponto que, se uma lógica não era compacta, procurava-se alguma propriedade análoga onde o conceito de "finito" fosse substituído por uma noção diferente de "pequeno" (cf. [Ba] pag. 7).

Embora a propriedade de compacidade de uma lógica seja considerada natural, Lindström demonstrou que as lógicas compactas eram relativamente escassas: com a propriedade adicional de Löwenheim-Skolem reduziam-se a $L_{\omega\omega}$. Mas, neste ponto devemos esclarecer que a compacidade a que o teorema de Lindström se refere está ligada à semântica dada pelas estruturas clássicas, i.e. algébricas ou relacionais. Aliás, as lógicas consideradas na teoria de modelos abstrata têm como semântica aquele tipo de estruturas (cf. [E] pags. 26 ss).

Por outro lado, como a compacidade lógica é equivalente à compacidade de certos espaços topológicos e, em princípio, sempre é possível compactificar um espaço, o problema natural que se nos apresenta, colocado em forma simples, é o de *encontrar alguma compactificação adequada dos espaços de estruturas que tenha um conteúdo lógico*, mais precisamente, que torne a lógica compacta a respeito dessa nova semântica.

De fato, tal compactificação daria uma nova semântica pois, compactificar envolve a adjunção de elementos impróprios ou ideais.

A alternativa de modificar a semântica é já mencionada por Barwise (cf. [Ba] pag. 21): "Lindström's theorem poses a dilemma: Give up either compactness or Löwenheim-Skolem. However, there is an escape from the horns of the dilemma mentioned earlier. Implicit in the discussion ... has been the assumption that we were discussing logics that have the same basic sort of syntax and semantics as first-order logic. There is always the possibility of violating one or both of these assumptions by studying logics that have different sorts of structures, or have syntactic rules that are stronger in some ways than first-order logic but weaker in others".

A compacidade e, em consequência, a possibilidade de compactificação, tanto a nível topológico como lógico, que é o tema central que nos ocupa, é de transcendente importância, como já dissemos, pelo simples fato de estar ligada a provas de existência. Os teoremas de compacidade em Topologia e em Análise Funcional, assim como em Teoria de Modelos, garantem a existência de certas entidades matemáticas, na maioria dos casos, ligadas à "convergência" de outras entidades conhecidas. Como ilustração podemos mencionar que, em Análise Funcional, o conhecido teorema de aproximação de Stone-Weierstrass usa, como argumento de compacidade, o fato que a bola unitária do dual de um espaço normado é compacta com relação à topologia fraca-*.

Os teoremas de compacidade e os processos de compactificação são também um "instrumento" de volta ao finito, quando os argumentos de finitude não são aplicáveis.

Acrescentar elementos ideais para compactificar um espaço ou para fechar uma teoria são processos frequentes em Matemática: aparecem na construção dos espaços projetivos como pontos e retas no infinito, na compactificação do plano complexo para o estudo das funções meromorfas, na própria construção dos números complexos para garantir a existência de raízes de toda equação polinomial, ou na construção dos números reais como completamento dos racionais, etc.

A introdução de elementos ideais também está na mesma origem da metamatemática como teoria da demonstração. D. Hilbert, no seu artigo fundamental "On the Infinite" (cf. [Hi]), argumenta primeiro sobre a existência de uma base matemática segura, na qual inclui a teoria de números, um domínio "real" cujo conhecimento é baseado no imediatamente dado à nossa intuição: a matemática finitista ou finitária.

Para Hilbert, a virtude da matemática finitária é a sua segurança e esta radica no fato que os números, e mais geralmente os signos, são representáveis na intuição, no entanto, as funções, conjuntos e outros objetos "transfinitos", como o infinito, as demonstrações, etc., são idéias da razão pura.

Tais elementos não reais, i.e. não intuitivos, que Hilbert chamará de elementos "ideais", são objetos sem conteúdo prévio, cuja introdução na matemática supõe uma extensão da base finitária cuja legitimidade é o principal problema do Programa de Hilbert.

Consequentemente, a introdução de modelos "ideais" no processo de compactificar uma lógica está intimamente relacionada com o problema da consistência das teorias matemáticas no sentido do programa de Hilbert.

A introdução destes objetos ideais nos espaços de estruturas, i.e. a introdução de "modelos generalizados", não é fato novo em teoria de modelos. Eles já aparecem, por exemplo, como cadeias de modelos dirigidos por inclusão, introduzidas por Karp para o estudo semântico de certas lógicas infinitárias (cf. [Ka2]), ou como modelos de Kripke para a lógica intuicionista. Atualmente está-se desenvolvendo, em forma mais geral, uma teoria de modelos sobre feixes de estruturas (cf. [S-Ca]).

O nosso problema, então, é o de compactificar uma lógica, i.e. construir, para uma lógica dada, uma semântica nova que seja logicamente compacta, mediante certos processos de compactificação de espaços topológicos. Este é um problema que nesta tese não pretendemos solucionar, apenas daremos um pequeno passo na sua solução: pretendemos compreendê-lo e fundamentá-lo devidamente (daí a primeira parte do título deste trabalho), dando uma solução parcial ao mesmo e levantando uma série de problemas conexos, cujo empreendimento será a continuação natural desta pesquisa.

Adiantamos que a nossa solução será parcial na medida que a semântica aqui construída para os modelos generalizados basear-se-á somente na noção de "verdade", deixando em suspense a noção mais importante de "satisfação". Isto é devido a que a topologia dos espaços de estruturas é definida a partir das sentenças da linguagem considerada, e não a partir das fórmulas com variáveis livres. O problema de estender a semântica para este caso não é trivial e consiste em encontrar o domínio ontológico das variáveis em relação aos novos modelos. Por exemplo, nos feixes de estruturas, o domínio de variação das variáveis está constituído pelas seções locais do feixe.

A solução deste segundo problema, sobre a noção de satisfação, está intimamente relacionada com a definição da noção de isomorfismo na nova categoria, e por conseguinte, com o desenvolvimento efetivo da teoria de modelos destes novos objetos. Portanto, o segundo passo na solução de nosso problema deve ser nessa direção.

Esta tese começou com a seguinte motivação. R. Fraïssé, para o caso da lógica de 1ª ordem, e X. Caicedo, para o caso de lógicas mais gerais, observaram que a topologia dos espaços de modelos admite uma estrutura uniforme subjacente. Portanto, para esses espaços faz sentido a pergunta pelo seu completamento no sentido de Cauchy, e qual o conteúdo lógico desse completamento.

No caso das lógicas compactas, i.e. de espaços de estruturas compactos, a topologia uniforme garante a completude desses espaços. Em particular, os espaços de estruturas correspondentes à lógica de 1ª ordem são Cauchy-completos. A nossa idéia inicial foi testar o fato de se a construção de ultraprodutos, no teorema de Łoś, corresponde à construção dos limites das redes de Cauchy do espaço, com o qual provaríamos que o teorema de Łoś é uma demonstração da completude de Cauchy dos espaços de estruturas. É já conhecido que a compacidade destes espaços é consequência do teorema de Łoś.

De fato, a nossa suposição foi verificada para o caso dos espaços de estruturas de tipo de similaridade finito por D. Mundici e A. M. Sette, e logo generalizada por nós para o caso de tipo arbitrário (cf. [C-M-S]).

O estudo deste caso é o conteúdo do capítulo 1 sob o título "Fundamentos Topológicos da Teoria de Modelos". Nele incluímos uma discussão histórica e metodológica dos métodos topológicos desta teoria, em especial, a fundamentação conjuntista de uma teoria de espaços topológicos grandes com topologias pequenas, i.e. classes próprias munidas de uma topologia que pode ser parametrizada por um conjunto. Incluímos também, em decorrência da análise da convergência nos espaços de estruturas, uma versão abstrata do teorema de Łoś para qualquer lógica L, a qual demonstramos ser equivalente à compacidade da lógica.

No capítulo 2 são colocados estes resultados no contexto abstrato dos espaços topológicos zero-dimensionais, obtendo versões topológicas do teorema de Łoś, principal ingrediente dos métodos desenvolvidos neste trabalho (daí a segunda parte do título desta tese). A partir dessas versões obtem-se caracterizações da compacidade e da completude de Cauchy dos espaços considerados, e como corolários, caracterizações das classes elementares EC_Δ e EC relativas a uma lógica compacta.

Neste capítulo, sob o título "Estrutura Uniforme dos Espaços zero-dimensionais: O caso compacto", aplicamos os métodos desenvolvidos à análise, por exemplo, dos espaços de n-tipos, do espectro real de um anel, e do espectro primo de um anel de Boole, todos eles como consequência da análise da convergência no espaço de Stone de uma álgebra de Boole.

No capítulo 3, com o título "Compactificação de Espaços Topológicos mediante Ultrafiltros Locais", construímos uma nova compactificação para qualquer espaço topológico sem nenhuma condição de separação, estudamos suas propriedades funtoriais e a correspondente propriedade de extensão de funções contínuas, mostrando suas vantagens no caso dos espaços zero-dimensionais. Neste último caso, tal compactificação é também o completamento de Cauchy destes espaços.

Aqui aplicamos os métodos de compactificação introduzidos ao estudo da compactificação e completamento de uma lógica abstrata.

Devemos salientar, neste capítulo, a observação de uma diferença importante nas demonstrações da compacidade do espaço compactificado, nos casos do espaço original ser uma classe própria ou um conjunto: no primeiro caso precisa-se do axioma da escolha, no segundo, entretanto, apenas do teorema do ultrafiltro, o qual é reconhecidamente mais fraco que aquele.

Também são desenvolvidas, neste capítulo, técnicas topológicas especiais, como a de quase-homeomorfismos, as quais permitirão estabelecer a relação estreita entre um espaço e seu compactificado, no caso compacto (relação não trivial já que os espaços considerados em geral não são Hausdorff). Além disso, como um subproduto destas técnicas poderemos explicitar a relação entre dois quaisquer completamentos de um espaço uniforme não-Hausdorff, assim como a relação íntima entre um anel e qualquer um dos seus quocientes não-triviais, ou qualquer uma de suas localizações.

No capítulo 4, e final, com o título "Uma Semântica Compacta Mínima para Lógicas com Modelos Fracos", apresentamos, devidamente fundamentados, basicamente três problemas conexos com a nossa pesquisa. O problema de compactificar uma lógica abstrata (i.e. os espaços de modelos correspondentes) mediante o seu mergulho numa lógica compacta, como é o caso dos modelos standard da lógica de $2^{a.}$ ordem, e ordem superior, a respeito dos modelos fracos (modelos gerais "a la Henkin"); o problema de extender o método de compactificação de Fraïssé da lógica de $1^{a.}$ ordem (que apresentamos como apêndice do capítulo 1) a outras lógicas mais gerais, por exemplo, àquelas que permitem uma caracterização tipo back-and-forth para a equivalência elementar correspondente, em especial a algumas lógicas infinitárias; e o problema do completamento de uma estrutura, i.e. a obtenção de uma extensão elementar de uma estrutura dada que seja um completamento de Cauchy da mesma.

A respeito do primeiro problema salientamos sua forte dependência com o teorema de incompletude de Gödel: devido a este teorema, o espaço de modelos standard não é denso no espaço de modelos fracos. Este fato nos permite levantar aquele problema para o caso de lógicas com quantificadores generalizados, cuja semântica admite modelos fracos.

Agradeço ao Prof. Antonio Mário Sette, meu orientador, e ao Prof. Xavier Caicedo da Universidade de Los Andes, Bogotá, Colombia, assim como ao Grupo de Lógica da UNICAMP, pelo entusiasmo e constante estímulo oferecidos durante o desenvolvimento desta pesquisa. A idéia do estudo do completamento e subsequente compactificação de uma lógica abstrata nasceu no seminário dado por Caicedo no IMECC-UNICAMP durante a sua permanência como Professor Visitante em 1989.

Fico grato também ao IMECC pela grande oportunidade e as boas condições oferecidas para o meu trabalho de Doutoramento, especialmente através das bolsas CAPES e FAEP (UNICAMP).

O meu agradecimento especial à Roseli do R. Rodrigues Cassis porque muito além do delicado e esmerado trabalho de digitação especializada, eu ganhei uma nova amizade.

Finalmente, não poderia deixar de expressar minha mais profunda gratidão a meus pais Humberto e Maruja, a quem devo minha formação espiritual e humana; e a minha esposa Blanca, a que além de me presentear com sua paciência de companheira, fez de mim alguém melhor. A eles dedico esta tese e todos os seus frutos.

CAPÍTULO 1

FUNDAMENTOS TOPOLÓGICOS DA TEORIA DE MODELOS

Esta primeira parte é introdutória e expõe com certo detalhe o artigo, em colaboração com D. Mundici e A. M. Sette, "Cauchy Completeness in Elementary Logic" (cf. [C-M-S]). Além disso, inclui as definições e resultados relevantes para todo o trabalho.

Aqui se faz uma discussão suficientemente ampla, do ponto de vista histórico e metodológico, dos métodos topológicos usados na teoria de modelos tanto clássica como abstrata, e a finalidade principal é apresentar uma nova demonstração topológica do Teorema de Compacidade da lógica elementar no contexto da teoria de espaços uniformes (cf. [Ke] caps. 2, 5 e 6), salientando a sua conexão com o Teorema de Ultraprodutos de Łoś, conexão que, como veremos, está intimamente ligada à propriedade de *Completude de Cauchy* dos espaços considerados.

Inclui-se uma referência aos métodos uniformes desenvolvidos principalmente por X. Caicedo e se apresenta detalhadamente, a maneira de apêndice, a demonstração da compacidade da lógica elementar dada por R. Fraïssé (cf. [Fr] cap. 6), porém numa versão simplificada sugerida por A. M. Sette (cf. [S-C]).

1.1 O MÉTODO TOPOLÓGICO EM TEORIA DE MODELOS

O teorema de compacidade da lógica elementar $L_{\omega\omega}$, interpretado topologicamente pela primeira vez por A. Tarski em 1950 (cf. [Ta]), é importante, nas próprias palavras de Tarski, porque "provide us with a rather general method of constructing (or, at least, proving the existence of) algebraic systems with some properties prescribed in advance" ([Ta] pag. 717), permitindo esclarecer alguns problemas de definibilidade e expressabilidade (i.e. possibilidade de axiomatização) das teorias matemáticas.

Tarski forneceu a interpretação topológica do teorema de compacidade para os espaços de estruturas St^τ com tipo de similaridade τ finito (embora, de acordo com Tarski, a finitude de τ não é essencial). Ele introduz a topologia elementar nesses espaços mediante o seguinte operador de fecho (cf. [Ta] pag. 713): para $K \subseteq St^\tau$,

$$C(K) = \bigcap \{ \operatorname{Mod}(\varphi) / \varphi \text{ é uma sentença de } L^\tau_{\omega\omega} \text{ e } K \subseteq \operatorname{Mod}(\varphi)\},$$

sendo $\operatorname{Mod}(\varphi)$ a coleção dos modelos (em St^τ e com relação a $L_{\omega\omega}$) de φ.

Para Tarski, a topologia elementar definida assim não era uma topologia no sentido adotado naquela época, que exigia uma certa condição de separação. Tarski observa que

"Since, however, $\{\mathcal{A}\} \neq C(\{\mathcal{A}\})$ for any $\mathcal{A} \in [St^\tau]$ ... it is not a topological space in the narrower sense (i.e., not a T_1-space)" ([Ta] pag. 714). Esta exigência é decorrente da necessidade de preservar as boas propriedades dos espaços métricos nos espaços mais gerais, dentre elas, por exemplo, a de que um conjunto compacto, no sentido de Heine-Borel-Lebesgue (i.e. que todo cobrimento por abertos admita um subcobrimento finito) deve ser fechado, e um ponto, que obviamente é compacto, não seria fechado na definição de Tarski.

Então, definindo em St^τ a relação de equivalência seguinte: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ se e somente se $C(\{\mathcal{A}\}) = C(\{\mathcal{B}\})$, o qual equivale a $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ serem elementarmente equivalentes (arithmetically equivalent), Tarski mostra que o espaço quociente respectivo $St^\tau/\equiv$, com o operador de fecho induzido, é um espaço topológico (no sentido estrito) totalmente desconexo, compacto e, pela finitude de τ, separável, i.e. a base induzida em $St^\tau/\equiv$ pela coleção de classes elementares (arithmetical classes) $B^\tau = \{\,\mathrm{Mod}(\varphi)/\varphi$ é uma sentença de $L^\tau_{\omega\omega}\}$ é enumerável (cf. [Ke] para as noções usuais de topologia geral).

A passagem ao quociente, que para Tarski era conveniente por razões topológicas, ainda acarreta certas complicações de caráter conjuntista. O problema reside em que, sendo a coleção St^τ uma classe própria, os processos conjuntistas envolvidos na "construção" da coleção B^τ, que é uma coleção de classes próprias, e outras coleções similares que possam ser construídas na teoria de classes elementares, exigem um certo grau de legitimidade. Tarski, ciente desta exigência teórica e, embora convencido da legitimidade de tais processos, num intento de dar uma solução alternativa afirma o seguinte: "To avoid any appearance of antinomial constructions we can agree to restrict ourselves to algebras $< A, \ldots >$ in which A is a subset of a certain infinite set U fixed in advance. With this restriction, the set $[St^\tau]$ and all other sets involved in the discussion become legitimate mathematical entities whose existence can be derived from axioms of set theory" ([Ta] pag. 706 footnote).

A escolha do universo U indicado não é explicitada e acarreta as mesmas dificuldades que têm os processos de relativização que o próprio Tarski descreve mais adiante: "... V being the set of all algebraic systems in which we are interested, we introduce the notions of an ... arithmetical class, etc., *relative to* V, ... in particular, that arithmetical classes relative to V are simply intersections of V with arithmetical classes in the absolute sense, i.e. relative to $[St^\tau]$ ... Most theorems stated in this paper automatically extend to relativized notions. In a few important cases, however, some restrictive assumptions concerning V are necessary. For instance, Theorems 17-19 [relative to compactness] do not apply to arithmetical classes relative to an arbitrary set V, but they prove to hold under the assumption that V is itself a member of AC [the class of arithmetical classes] or, more generally, of AC_δ [the class of intersections of arithmetical classes] (in the absolute sense)" ([Ta] pag. 714-15).

O mesmo problema sobre a escolha do universo U ainda é observado por J. L. Bell e A. B. Slomson: "We can get over this difficulty by working instead of with $[St^\tau]$, with a *subset* of $[St^\tau]$, which although sufficiently small to be a set, is still roomy enough to allow the standard model theoretic constructions (formation of ultrapowers, productions of models of consistent sets of sentences, etc.) to be out within it" ([B-S] pag. 157).

O quociente $St^\tau/\equiv$ é uma coleção de classes próprias, as classes de equivalência módulo $\equiv$, a qual tem a seguinte propriedade "sutil": $St^\tau/\equiv$ pode ser parametrizada por um conjunto, o conjunto de teorias consistentes e completas de $L^\tau_{\omega\omega}$, e isso é devido a que a lógica $L_{\omega\omega}$ é *pequena*, i.e. para todo tipo τ, a coleção de sentenças de $L^\tau_{\omega\omega}$ é um conjunto. Classes parametrizadas por conjuntos são usualmente chamadas de *classes pequenas*. A base B^τ é também uma classe pequena pois pode ser parametrizada pelo conjunto de sentenças de $L^\tau_{\omega\omega}$.

Intuitivamente, as classes pequenas são suficientemente elementares para serem aceitas sem problemas do ponto de vista dos fundamentos da teoria dos conjuntos. Elas podem ser entendidas, por exemplo, identificando classes de estruturas com propriedades de estruturas; assim, se a linguagem é um conjunto, coleções de classes de estruturas são tão legítimas como conjuntos de propriedades. "Instead of properties of relational systems we shall speak of classes of systems" ([F-M-S] pag. 211).

Diversos autores que trabalham nos aspectos topológicos da teoria de modelos, inclusive a respeito de lógicas abstratas (cf. [E] para as noções relacionadas com lógicas abstratas, i.e. model - theoretic logics, e ver também a nota 1.2.3), têm feito uso indiscriminado de classes pequenas e de operações booleanas infinitárias sobre elas. Como ilustração mencionaremos alguns deles. S. Kochen afirma: "The class AC [of arithmetical classes] forms a boolean algebra under the set-theoretical operations" ([Ko] pag. 223). H. Saycki (cf. [Sa]) analisa a interação entre St^τ e $St^\tau/\equiv$, e usa implicitamente um certo axioma de escolha para classes pequenas, pois a própria construção do quociente $St^\tau/\equiv$ equivale à escolha de um representante de cada classe de equivalência módulo $\equiv$. H. Mannila (cf. [Ma]) opera arbitrariamente com famílias de classes próprias parametrizadas por cardinais.

D. Mundici, em [Mu] pag. 785, referindo-se a uma lógica com quantificadores generalizados pequena $L = L_{\omega\omega}(Q^i)_{i\in I}$, i.e. com I um conjunto, diz: "Since I is a set, for each type τ the family of equivalence classes on $[St^\tau]$ determined by $\equiv_L$ is actually (identifiable with) a set $[St^\tau/\equiv_L]$".

Para X. Caicedo (cf. [Ca1] pag. 35): "Since the logic is small, the topologies of these space are also small (they are indexed by sets) and there is not danger in working with them as with ordinary topological spaces".

Este último autor é mais explícito a respeito da solução alternativa sugerida já por Tarski: "Of course, one could also make the spaces $[St^\tau]$ small, by working with isomorphism classes of structures of cardinality no greater than the Löwenheim number of theories in $[L^\tau]$, τ being the largest vocabulary involved in the arguments" ([Ca1] pag. 35).

O número de Löwenheim de uma lógica L (na realidade de L^τ já que depende do tipo de similaridade τ em consideração) é o menor cardinal α tal que toda coleção de sentenças de L^τ que tem um modelo, admite um modelo de cardinalidade $\leq \alpha$. Analogamente, define-se o número de Hanf de uma lógica L como o menor cardinal α tal que toda coleção de sentenças que tem modelos de cardinalidade $\geq \alpha$, tem modelos de cardinalidade arbitrariamente grande. A existência do número de Löwenheim e do número de Hanf para lógicas pequenas, i.e. lógicas L onde para cada tipo τ, a coleção de sentenças de L^τ é um conjunto, foi demonstrada por Hanf (cf. [B-S] pag. 85).

Se L é uma lógica pequena, a afirmação de Caicedo mencionada anteriormente pode ser esclarecida mediante a seguinte argumentação: seja α o número de Löwenheim de L^τ e St^τ_α a subclasse de St^τ das estruturas de cardinalidade $\leq \alpha$; então St^τ_α com a topologia induzida é um subespaço denso de St^τ e, se L é compacta, então St^τ_α é um subespaço compacto (não-fechado) de St^τ. St^τ_α (identificando estruturas isomorfas) é um conjunto.

Neste trabalho não adotaremos esta solução pois não está claro que todas as construções de teoria de modelos possam ser feitas em St^τ_α, principalmente as relacionadas com ultraprodutos. Por essa razão insistiremos no uso de classes pequenas, i.e. de coleções de classes (possivelmente classes próprias) parametrizadas por conjuntos, e por tal motivo, para o estudo dos espaços de estruturas que aparecem na teoria de modelos, restringiremos a nossa atenção ao caso de lógicas pequenas. Esta escolha permite também o estudo dos espaços St^τ, com preferência aos espaços $St^\tau/\equiv$, pois algumas situações relevantes de St^τ não se refletem nos quocientes; por exemplo, imagens de subclasses projetivas disjuntas em St^τ poderiam não ser disjuntas em $St^\tau/\equiv$, o que prejudica a análise da propriedade de interpolação nestes quocientes.

Uma teoria de conjuntos suficientemente forte e relativamente consistente com **ZF** + { existe pelo menos um cardinal inacessível θ} é sugerida por Levy em [Le] pag. 204: "A different variant ... is obtained if we adhere to the limitation of size doctrine by requiring that a small class, e.g. a finite class, be a set even if its members are proper classes. In this variant we ... amend the axiom of replacement ... to read: If F is a function and a is a set, then there is a set which contains exactly the values $F(X)$, which may be sets or classes, for all members X of a which are in the domain of F" . Um modelo natural de tal sistema poderia ser obtido, por exemplo, interpretando "classe" por "conjunto" e "conjunto" por "conjunto de cardinalidade $< \theta$".

Não pretendemos fazer aqui uma discussão desta "teoria de conjuntos de Levy", no entanto supô-la-emos já desenvolvida e fecharemos esta pequena digressão fazendo apenas os seguintes comentários que consideramos interessantes e relevantes para os fundamentos do nosso trabalho: em primeiro lugar, na teoria de Levy, as variáveis devem variar sobre classes em geral, pois em caso contrário, por exemplo, a coleção de classes próprias $\{A_i\}_{i\in I}$ não poderia ser co-extensiva com a propriedade (expressa em alguma linguagem adequada) $\bigvee_{i\in I}(x = A_i)$. Este fato, no contexto da teoria de modelos, poderia invalidar os efeitos da compacidade como prova da "existência" de modelos. Por outro lado, suporemos que nossa "teoria de conjuntos de Levy" contém um axioma de escolha para coleções pequenas de classes, i.e. se $\{A_i\}_{i\in I}$ é uma coleção pequena de classes (próprias), existe um conjunto A contendo um elemento de cada classe da coleção. Esta versão será denotada por AC^w.

Assumindo estas idéias pode-se desenvolver em forma razoável uma teoria de espaços topológicos "grandes" com topologias "pequenas". Este é o caso dos espaços de estruturas St^{τ} com τ arbitrário, pois sendo a base $\mathcal{B}^{\tau}$ pequena, a topologia gerada por ela é também pequena.

Num espaço deste tipo, i.e. com uma topologia pequena, os conceitos de interior e fecho podem ser definidos pois envolvem apenas uniões e interseções de coleções pequenas de abertos e de fechados respectivamente. A propriedade de compacidade envolve somente cobrimentos por famílias pequenas de abertos ou famílias pequenas de fechados com a Propriedade de Interseção Finita (PIF), e a convergência pode ser estudada mediante redes definidas em conjuntos (não classes) dirigidos. Em particular, no caso de estruturas uniformes pequenas (entenda-se definidas a partir de uma base pequena) definidas em classes próprias, a noção de completude de Cauchy envolve apenas a convergência de redes pequenas de Cauchy.

Entretanto, devemos alertar sobre o seguinte fato: a teoria geral de convergência usando filtros e ultrafiltros não é aplicável neste contexto pois os filtros e ultrafiltros não são classes pequenas, mesmo que as bases de filtro (filterbases) que os geram o sejam, já que aqueles estão definidos no espaço todo.

Além disso, a teoria de conjuntos subjacente não poderia garantir a existência de ultrafiltros, definidos no espaço todo, contendo famílias pequenas com a PIF, i.e. esta versão forte do Teorema do Ultrafiltro poderia não ser demonstrável na teoria de conjuntos de Levy, mesmo com o axioma de escolha AC^{m}. Portanto, é importante caracterizar os conceitos topológicos que nos interessam em termos de noções, como a de base de filtro, não envolvendo o espaço todo na sua definição. Ilustraremos isto na seguinte caracterização da compacidade.

1.1.1 Definição.

i) Seja X uma classe (própria) e τ uma topologia pequena sobre X. Seja $\mathcal{B}$ uma coleção de subclasses de X, dizemos que $\mathcal{B}$ é *base de filtro* se

a) $\mathcal{B} \neq \phi$

b) $\phi \notin \mathcal{B}$

c) se $A, B \in \mathcal{B}$ então, existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $C \subseteq A \cap B$.

ii) Se $\mathcal{B}$ é uma base de filtro pequena podemos definir $Adh\ \mathcal{B} = \bigcap\{\overline{B}/B \in \mathcal{B}\}$ (a barra denota o fecho na topologia τ). Os elementos de $Adh\ \mathcal{B}$ são chamados de pontos de aderência de $\mathcal{B}$.

iii) Seja $\{x_i\}_{i \in D}$ uma rede em X com D conjunto. Definimos $adh\ \{x_i\}$ como a coleção dos $x \in X$ tais que para toda vizinhança $V \ni x$ e para todo $k \in D$ existe $i \geq k$ tal que $x_i \in V$. Os elementos de $adh\ \{x_i\}$ são chamados de pontos de aderência da rede (cluster points).

iv) Seja $\{x_i\}_{i\in D}$ uma rede em X com D conjunto. Definimos $\lim_i x_i$ como a coleção dos $x \in X$ tais que para toda vizinhança $V \ni x$ existe $k \in D$ tal que para todo $i \geq k, x_i \in V$. Os elementos de $\lim_i x_i$ são chamados de pontos limites da rede.

v) X é compacto se e somente se toda família (pequena) de abertos que cobre X tem uma subfamília finita que cobre X; ou equivalentemente, toda família (pequena) de fechados com a PIF, tem interseção não-vazia.

1.1.2 Proposição. X é compacto $\Leftrightarrow$ toda base de filtro pequena tem ponto de aderência.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Seja $\mathcal{B}$ uma base de filtro pequena e $\mathcal{C} = \{\overline{B}/B \in \mathcal{B}\}$

Afirmação. $\mathcal{C}$ é uma coleção (pequena) de fechados com a PIF.

Com efeito, se $\overline{B}_1 \cap ... \cap \overline{B}_n = \phi$, então $B_1 \cap ... \cap B_n = \phi$ pois $B_1 \cap ... \cap B_n \subseteq \overline{B}_1 \cap ... \cap \overline{B}_n$, logo, $\phi \in \mathcal{B}$, uma contradição.

Portanto, como X é compacto, existe $x \in \bigcap \mathcal{C} = Adh\ \mathcal{B}$.

($\Leftarrow$) Seja $\{F_i\}_{i\in I}$ uma família pequena de fechados com a PIF (i.e. I é um conjunto). Podemos supor a família fechada por interseções finitas (que é uma operação conjuntista), então $\{F_i\}_{i\in I}$ é uma base de filtro $\mathcal{B}$, logo, por hipótese, $\bigcap_{i\in I} F_i = \bigcap_{i\in I} \overline{F}_i = Adh\ \mathcal{B} \neq \phi$, portanto, X é compacto ■

Kelley, em [Ke] pag. 136, dá a seguinte caracterização da compacidade usando redes, a qual pode ser adaptada ao caso de espaços grandes com topologias pequenas: X é compacto $\Leftrightarrow$ toda rede (pequena) em X tem ponto de aderência.

A respeito da demonstração de Kelley, no caso de espaços grandes com topologias pequenas, devemos mencionar que ela é possível uma vez que é estabelecida a seguinte relação entre bases de filtro e redes em X:

a) Se $\{x_i\}_{i\in D}$ é uma rede em X (com D conjunto), então para cada $k \in D$ definimos $B_k = \{x_i / i \geq k\}$. Temos que a família $\{B_k\}_{k\in D}$ tem a PIF, e portanto é uma base de filtro pequena em X, e $adh\ \{x_i\} = Adh\ \{B_k\}$.

b) Seja $\mathcal{B}$ uma base de filtro pequena em X (podemos supor $\mathcal{B}$ fechada por interseções finitas), então $\mathcal{B}$ é dirigida por inclusão inversa. Aplicando o axioma de escolha AC^w, para cada $B \in \mathcal{B}$ escolhemos $x_B \in B$, então $\{x_B\}_{B\in\mathcal{B}}$ é uma rede em X e $adh\{x_B\} \subseteq Adh\ \mathcal{B}$.

A última inclusão, embora não seja uma igualdade, é suficiente para demonstrar a caracterização da compacidade na versão de Kelley.

1.2 ANÁLISE DA COMPACIDADE DE $L_{\omega\omega}$

A compacidade lógica de $L_{\omega\omega}$ é usualmente formulada da seguinte maneira: para todo tipo τ, se $\sum$ é uma coleção de sentenças de $L^{\tau}_{\omega\omega}$ tal que toda subcoleção finita tem modelo (em St^{τ}), então $\sum$ tem modelo (em St^{τ}). Equivalentemente, se para toda subcoleção finita $\Delta \subseteq \sum$, $\text{Mod}(\Delta) = \bigcap_{\varphi\in\Delta} \text{Mod}(\varphi) \neq \phi$, então $\text{Mod}(\sum) = \bigcap_{\varphi\in\sum} \text{Mod}(\varphi) \neq \phi$.

Observando que os espaços St^{τ} são zero-dimensionais no sentido que as bases $\mathcal{B}^{\tau}$ são bases de clopens (abertos - fechados), vemos que a segunda versão significa a compacidade topológica de cada St^{τ} em termos de famílias de fechados (básicos) com a PIF.

As demonstrações mais conhecidas de caráter puramente semântico da compacidade de $L_{\omega\omega}$ usam a construção de ultraprodutos e o teorema de Łoś para sentenças, o qual afirma o seguinte: para todo tipo τ, se $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ é uma família de estruturas em St^{τ} (observe que I é um conjunto) e U é um ultrafiltro sobre I, denotando com $\prod_U \mathcal{A}_i$ o ultraproduto da família módulo U, temos que para toda sentença φ de $L^{\tau}_{\omega\omega}$,

$$(*) \qquad \Pi_U\mathcal{A}_i \in \text{Mod}(\varphi) \Leftrightarrow \{i \in I/\mathcal{A}_i \in \text{Mod}(\varphi)\} \in U\ .$$

Estas demonstrações (cf. [F-M-S] pag. 216 ou [B-S] pag. 102) escolhem, usando implicitamente o axioma AC^{w}, para cada $\Delta \in \mathcal{P}_\omega(\sum)$ (partes finitas de $\sum$) um $\mathcal{A}_\Delta \in \text{Mod}(\Delta)$, e mostram que para um determinado ultrafiltro U sobre $\mathcal{P}_\omega(\sum), \prod_U \mathcal{A}_\Delta \in \text{Mod}(\sum)$.

Uma pequena observação mostra que a própria construção do ultraproduto usado não é essencial, bastaria qualquer estrutura $\mathcal{A}$ satisfazendo $(*)$, em vez de $\prod_U \mathcal{A}_i$. Este fato motiva a seguinte definição:

1.2.1 Definição. Para toda família $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ em St^{τ} e todo ultrafiltro U sobre I, definimos $\lim_U \mathcal{A}_i$ como a coleção das estruturas $\mathcal{A} \in St^{\tau}$ tais que para toda sentença φ de $L^{\tau}_{\omega\omega}$,

$$\mathcal{A} \in \text{Mod}(\varphi) \Leftrightarrow \{i \in I/\mathcal{A}_i \in \text{Mod}(\varphi)\} \in U.$$

Como já observamos, a seguinte forma abstrata do teorema de Łoś é suficiente para provar o teorema de compacidade (esta pode ser formulada para qualquer lógica L):

1.2.2 Teorema de Łoś Abstrato (TŁA).

Para todo tipo τ, toda família $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ em St^{τ} e todo ultrafiltro U sobre I, $\lim_U \mathcal{A}_i \neq \phi$ ∎

Segue-se da definição acima que $\lim_U \mathcal{A}_i = \bigcap\{\text{Mod}(\varphi)/\{i \in I/\mathcal{A}_i \in \text{Mod}(\varphi)\} \in U\}$. Isto mostra que o teorema de compacidade implica também TŁA, pois $\lim_U \mathcal{A}_i$ é expressa como interseção de uma família de fechados básicos com a PIF.

Os argumentos prévios, enquanto não utilizam a construção de ultraprodutos, são também aplicáveis a qualquer lógica abstrata regular pequena.

1.2.3 Nota. Uma lógica abstrata é um par $< L, \models_L >$ onde L é uma aplicação definida sobre a coleção de vocabulários (ou tipos de similaridade) τ, tal que para cada τ, L^τ é a classe das sentenças de L de tipo τ, e $\models_L \subseteq \bigcup_\tau (St^\tau \times L^\tau)$ é a relação de satisfação de L, satisfazendo as seguintes propriedades dadas em [E] pag. 27, Def. 1.1.1:

e_1) Se $\tau \subseteq \sigma$, então, $L^\tau \subseteq L^\sigma$.

e_2) Se $\mathcal{A} \models_L \varphi$, então, $\varphi \in L^{\tau(\mathcal{A})}$.

e_3) Se $\mathcal{A} \models_L \varphi$ e $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}$, então, $\mathcal{B} \models_L \varphi$.

e_4) Se $\varphi \in L^\tau$ e $\tau \subseteq \tau(\mathcal{A})$, então,

$$\mathcal{A} \models_L \varphi \Leftrightarrow \mathcal{A}\lceil\tau \models_L \varphi.$$

e_5) Se $\rho : \tau \to \sigma$ é um "renaming", então, para cada $\varphi \in L^\tau$ existe $\varphi^\rho \in L^\sigma$ tal que para toda $\mathcal{A} \in St^\tau$,

$$\mathcal{A} \models_L \varphi \Leftrightarrow \mathcal{A}^\rho \models_L \varphi^\rho.$$

Uma lógica L é dita *pequena* se para cada τ, L^τ é um conjunto.

Exigiremos de cada lógica L que seja extensão de $L_{\omega\omega}$ no seguinte sentido. Se $\mathrm{Mod}_L(\varphi) = \{\mathcal{A} \in St^\tau / \mathcal{A} \models_L \varphi\}$, então, são satisfeitas:

i) *Propriedade das sentenças atômicas:* para todo τ e toda sentença atômica $\varphi \in L^\tau_{\omega\omega}$, existe $\psi \in L^\tau$ tal que $\mathrm{Mod}_L(\psi) = \mathrm{Mod}_{L_{\omega\omega}}(\varphi)$.

ii) *Propriedade da negação:* para todo τ e toda $\varphi \in L^\tau$, existe $\psi \in L^\tau$ tal que $\mathrm{Mod}_L(\psi) = \mathrm{Mod}_L(\varphi)^c$ (o complementar em St^τ).

iii) *Propriedade da conjunção:* para todo τ e quaisquer $\varphi, \psi \in L^\tau$, existe $\theta \in L^\tau$ tal que $\mathrm{Mod}_L(\theta) = \mathrm{Mod}_L(\varphi) \cap \mathrm{Mod}_L(\psi)$.

iv) *Propriedade de particularização:* se $c \in \tau$, então, para todo $\varphi \in L^\tau$, existe $\psi \in L^{\tau\setminus\{c\}}$ tal que para toda $\mathcal{A} =< A, \ldots > \in St^{\tau\setminus\{c\}}$, $\mathcal{A} \models_L \psi \Leftrightarrow$ para algum $a \in A$, $< \mathcal{A}, a > \models_L \varphi$.

Se L é uma lógica abstrata, o conceito de fórmula pode ser definido da seguinte maneira: uma *fórmula n-ária* de L^τ é qualquer sentença $\varphi \in L^{\tau'}$ onde $\tau' = \tau \cup \{c_1, \ldots, c_n\}$ e $c_1, \ldots, c_n \notin \tau$. Neste caso, se $\mathcal{A} =< A, \ldots > \in St^\tau$, definimos $\varphi^A = \{< a_1, \ldots, a_n > \in A^n / < \mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n > \models_L \varphi\}$.

Com as convenções anteriores, dizemos que L é *regular* se satisfaz as seguintes propriedades (cf. [Ca2]):

a) *Propriedade de substituição:* para quaisquer fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in L^\tau$, sendo φ_i n_i-ária, e qualquer $\theta \in L^{\tau'}$, onde $\tau' = \tau \cup \{R_1, \ldots, R_k\}$ e R_i é n_i-ária, existe $\alpha(\theta) = \theta(R_1/\varphi_1, \ldots, R_k/\varphi_k) \in L^\tau$ tal que para todo $\mathcal{A} =< A, \ldots >\in St^\tau, \mathcal{A} \models_L \alpha(\theta) \Leftrightarrow\ < \mathcal{A}, \varphi_1^A, \ldots, \varphi_k^A > \models_L \theta$.

b) *Propriedade de relativização:* para todo predicado monádico $P \in \tau$ e toda $\varphi \in L^{\tau \setminus \{P\}}$ existe $\varphi^P \in L^\tau$ tal que para toda $\mathcal{A} =< A, \ldots >\in St^\tau, \mathcal{A} \models_L \varphi^P \Leftrightarrow \mathcal{A}\lceil P^A \models_L \varphi$.

As propriedades (i), (ii) e (iii) anteriores garantem que a coleção $\mathcal{B}^\tau = \{\mathrm{Mod}_L(\varphi)/\varphi \in L^\tau\}$ é base para uma topologia zero-dimensional sobre St^τ, fechada para interseções finitas e complementares. Denotaremos com $St^\tau(L)$ o espaço St^τ munido dessa topologia, e simplesmente St^τ se a topologia é dada por $L_{\omega\omega}$.

Com estes preliminares, temos então demonstrada a seguinte proposição.

1.2.4 Proposição. Se L é uma lógica abstrata regular pequena que extende $L_{\omega\omega}$, então são equivalentes:

i) L é compacta.

ii) T-Ł A ∎

Para lógicas compactas diferentes de $L_{\omega\omega}$ pode-se levantar aqui o interessante problema da "construção", para cada família $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ e cada ultrafiltro U sobre I, de uma estrutura $\mathcal{A} \in \lim_U \mathcal{A}_i$.

Os itens 1.2.1, 1.2.2 e 1.2.4 podem ser considerados o ponto de partida deste trabalho. Aí estão contidas a noção de convergência adequada ao estudo dos espaços zero-dimensionais (ver definição 2.2.1), uma versão topológica do teorema de Łoś (ver observação 2.2.8), e uma caracterização da compacidade e a completude daqueles espaços em termos destas noções (ver proposição 2.2.7). Elas, embora motivadas pelos espaços de estruturas, serão estudadas em forma abstrata no capítulo 2 não somente para o caso zero-dimensional mas também para espaços topológicos arbitrários.

O conceito de $\lim_U$ já aparece em [F-M-S] pags. 223 ss. como "operação ultralimite" para o caso dos espaços booleanos, os quais são zero-dimensionais. Em [C-K] pags. 11 ss. é definido $\lim_U$ para os espaços compactos de Hausdorff não necessariamente zero-dimensionais. Em ambos os casos, a condição de ser Hausdorff não é essencial, apenas garante a unicidade do $\lim_U$; a compacidade, como veremos, garantirá sua existência.

Uma outra demonstração topológica do teorema de compacidade, baseada também no teorema de Łoś, é dada, embora sem menção explícita, por Kochen (cf. [Ko] pag. 255, Th. 11.7). Ele prova que se $K = \{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ é uma família de estruturas, então o fecho de

K, i.e. a coleção de pontos de aderência de K é $C(K) = \{\prod_U A_i/U$ é um ultrafiltro sobre $I\}$. Temos então aqui o teorema de compacidade (topológica) a partir da versão de Kelley dada acima.

1.3 ESTRUTURA UNIFORME DOS ESPAÇOS St^τ

R. Fraïssé (cf. [Fr] pag. 129) foi o primeiro a observar, no caso da lógica $L_{\omega\omega}$ e para τ finito, que a topologia elementar dos espaços St^τ é uniformizável, e explicita uma base (pequena) de uniformidade usando a noção de isomorfismos parciais: "La topologie considérée est uniforme, en prenant comme entourages, pour chaque caractéristique (k,p), où k et p sont des entiers naturels, la classe des couples de relations (k,p)-équivalentes".

Aqui adotaremos a seguinte definição dada em [Ke] pag. 177:

1.3.1 Definição. Se X é uma classe, uma família pequena $\mathcal{B} = \{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ de subclasses de $X \times X$ é base para alguma uniformidade sobre X se

a) Para todo $i \in I, \mathcal{U}_i$ contém a diagonal $\Delta = \{(x,x)/x \in X\}$.

b) Para todo $i \in I$, existe $j \in I$ tal que $\mathcal{U}_j \subseteq \mathcal{U}_i^{-1}$.

c) Para todo $i \in I$, existe $j \in I$ tal que $\mathcal{U}_j \circ \mathcal{U}_j \subseteq \mathcal{U}_i$.

d) Para todo $i, j \in I$, existe $k \in I$ tal que $\mathcal{U}_k \subseteq \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$.

Se $\mathcal{B}$ satisfaz somente (a), (b) e (c) temos uma sub-base de uniformidade.

Atualmente é usual substituir a noção de (k,p)-equivalência de Fraïssé pela de n-equivalência de Karp, sendo n um inteiro natural (cf. [Ka1]): duas estruturas $\mathcal{A} = < A, ... >$ e $\mathcal{B} = < B, ... >$ são ditas n equivalentes ($n \geq 1$), em símbolos $\mathcal{A} \cong_n \mathcal{B}$, se existe uma sequência $I_0 \supseteq I_1 \supseteq ... \supseteq I_{n-1}$ de conjuntos não-vazios de isomorfismos parciais que satisfaz a seguinte *propriedade de back-and-forth*: para todo m tal que $m+1 < n$, $f \in I_{m+1}$ e $a \in A$ (respectivamente $b \in B$) existe $g \in I_m$ tal que $f \subseteq g$ e $a \in dom\ g$ (respectivamente $b \in im\ g$). $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são ditas 0-equivalentes se existe um isomorfismo parcial de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$.

Os elementos de I_m, $m = 0, ..., n-1$, são chamados de m-isomorfismos parciais de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$, ou abreviadamente, m-iso.

Definindo o grau quantificacional $qr(\varphi)$ de uma fórmula φ como em [Ka1] pag. 408 (ver também seção 3.4), a n-equivalência de Karp admite a seguinte versão linguística dada pelo teorema de Fraïssé-Karp: para τ finito, $n \in \omega$ e $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in St^\tau$ temos que $\mathcal{A} \cong_n \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A} \equiv_n \mathcal{B}$, onde $\equiv_n$ é a equivalência elementar a respeito da coleção de sentenças φ com $qr(\varphi) \leq n$ (cf. [Ka1] pag. 409 e [Fr] pag. 120).

Portanto, a uniformidade de Fraïssé pode ser definida a partir da seguinte base $\mathcal{B}_F$ (base de Fraïssé) $= \{\mathcal{U}_n\}_{n\in\omega}$, onde para cada $n \in \omega$, $\mathcal{U}_n = \{(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in St^\tau \times St^\tau / \mathcal{A} \equiv_n \mathcal{B}\}$.

Por outro lado, para todo tipo τ, a topologia elementar de St^τ admite a seguinte base "natural" de uniformidade sugerida pela zero-dimensionalidade do espaço: $\mathcal{B}_N$ (base natural) $= \{\mathcal{U}_\Phi/\Phi$ é um conjunto finito de sentenças de $L^\tau_{\omega\omega}\}$, onde para cada Φ, $\mathcal{U}_\Phi = \{(\mathcal{A},\mathcal{B}) \in St^\tau \times St^\tau/\mathcal{A} \equiv_\Phi \mathcal{B}\}$, sendo $\equiv_\Phi$ a equivalência elementar com relação à coleção Φ.

Observa-se que os elementos $\mathcal{U}$ das bases $\mathcal{B}_F$ e $\mathcal{B}_N$ estão definidos mediante relações de equivalência, em particular, $\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U}$ e $\mathcal{U} \circ \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$.

A base $\mathcal{B}_N$ tem as seguintes propriedades (abreviando $\mathcal{U}_{\{\varphi\}}$ por $\mathcal{U}_\varphi$): se $\Phi = \{\varphi_1,\ldots,\varphi_k\}$ então $\mathcal{U}_\Phi = \mathcal{U}_{\varphi_1} \cap \ldots \cap \mathcal{U}_{\varphi_k}$, e para cada φ, $\mathcal{U}_\varphi[\mathcal{A}] = \{\mathcal{B} \in St^\tau/(\mathcal{A},\mathcal{B}) \in \mathcal{U}_\varphi\} = \begin{cases} \mathrm{Mod}(\varphi), & \text{se} \quad \mathcal{A} \models \varphi \\ \mathrm{Mod}(\neg\varphi), & \text{se} \quad \mathcal{A} \not\models \varphi \,. \end{cases}$

Esta última propriedade garante para todo tipo τ que o espaço uniforme resultante é totalmente limitado ou pré-compacto, i.e. para toda sentença φ existem $\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_m \in St^\tau$ tais que $\mathcal{U}_\varphi[\mathcal{A}_1] \cup \ldots \cup \mathcal{U}_\varphi[\mathcal{A}_m] = St^\tau$ (cf. [Ke] pag. 198), e que a base de uniformidade dada gera a topologia elementar.

1.3.2 Proposição. Para τ finito, as bases $\mathcal{B}_F$ e $\mathcal{B}_N$ são uniformemente equivalentes no seguinte sentido (cf. [Ke] pag. 181): para cada $n \in \omega$ existe Φ finito tal que $\mathcal{U}_\Phi \subseteq \mathcal{U}_n$ e para cada Φ finito existe $n \in \omega$ tal que $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_\Phi$.

Demonstração.

Seja $n \in \omega$, então, como já tínhamos observado, existem no máximo um número finito de sentenças não logicamente equivalentes entre si de grau quantificacional $\leq n$. Logo, tomando Φ como tal coleção de sentenças temos que $\mathcal{U}_\Phi \subseteq \mathcal{U}_n$.

Seja $\Phi = \{\varphi_1,\ldots,\varphi_k\}$, então tomando $n = \max(qr(\varphi_1),\ldots,qr(\varphi_k))$ temos que $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_\Phi$ ∎

Como consequência temos também que a base $\mathcal{B}_F$ é totalmente limitada e gera a topologia elementar de St^τ (τ finito).

A base $\mathcal{B}_F$ (sempre no caso τ finito) tem a seguinte propriedade adicional: para cada $n \in \omega$, $\mathcal{U}_n \supseteq \mathcal{U}_{n+1}$. Além disso, como o espaço St^τ tem base enumerável, é pseudo-metrizável (cf. [Ke] pag. 186) e as propriedades de $\mathcal{B}_F$ permitem demonstrar a seguinte proposição geral:

1.3.3 Proposição. Seja $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\omega}$ uma base de uniformidade (sobre um espaço X) tal que cada $\mathcal{U}_n$ é uma relação de equivalência e $\mathcal{U}_n \supseteq \mathcal{U}_{n+1}$; então, definindo

$$d(x,y) = \inf\{\frac{1}{n+1}/(x,y) \in \mathcal{U}_n\}$$

temos que d é uma pseudo-métrica em X não-arquimediana, i.e. satisfaz a desigualdade ultramétrica $d(x,y) \leq \max(d(x,z),\ d(z,y))$, e tal que para cada $n \in \omega$, $\mathcal{U}_n =$

$\{(x,y)/d(x,y) < \frac{1}{n}\}$.

Demonstração.

i) É óbvio que $d(x,y) \geq 0$; além disso, $d(x,x) = 0$ pois $\Delta \subseteq \mathcal{U}_n$ para todo $n \in \omega$. Em geral, $d(x,y) = 0$ se e só se $(x,y) \in \bigcap_{n\in\omega} \mathcal{U}_n$.

ii) $d(x,y) = d(y,x)$ pela simetria de cada $\mathcal{U}_n$.

iii) (desigualdade ultramétrica) suponhamos $d(x,y) > \max(d(x,z),\ d(z,y))$, então existe $n \in \omega$ tal que $d(x,y) = \frac{1}{n+1}$ e $d(x,z) < \frac{1}{n+1}$, $d(z,y) < \frac{1}{n+1}$.

Pelas propriedades do ínfimo temos que existem $r, s \in \omega$ (podemos supor $r \leq s$) tais que $\frac{1}{r+1}$ e $\frac{1}{s+1}$ são $< \frac{1}{n+1}$, i.e. $n < r \leq s$ e $(x,z) \in \mathcal{U}_r$, $(z,y) \in \mathcal{U}_s$, mas, $\mathcal{U}_s \subseteq \mathcal{U}_r \subseteq \mathcal{U}_n$, logo, (x,z), $(z,y) \in \mathcal{U}_r$, por tanto, pela transitividade de $\mathcal{U}_r$, $(x,y) \in \mathcal{U}_r$, o que implica que $d(x,y) \leq \frac{1}{r+1}$, i.e. $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{r+1}$ ou $r \leq n$, uma contradição.

Obviamente a desigualdade ultramétrica implica a desigualdade triangular.

iv) Suponhamos que $d(x,y) < \frac{1}{n}$, i.e. $\inf\{\frac{1}{m+1}/(x,y) \in \mathcal{U}_m\} < \frac{1}{n}$, então existe $m \in \omega$ com $\frac{1}{m+1} < \frac{1}{n}$, i.e. $n \leq m$, e $(x,y) \in \mathcal{U}_m$, logo, como $\mathcal{U}_m \subseteq \mathcal{U}_n$ temos que $(x,y) \in \mathcal{U}_n$.

Reciprocamente, suponhamos $(x,y) \in \mathcal{U}_n$, então $d(x,y) \leq \frac{1}{n+1}$, i.e. $d(x,y) < \frac{1}{n}$ ∎

No caso dos espaços de estruturas St^τ, para τ finito, temos que a topologia elementar admite a seguinte pseudo-métrica: para $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in St^\tau$,

$$d(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \inf\ \{\frac{1}{n+1}/\mathcal{A} \equiv_n \mathcal{B}\}\ .$$

A intuição desta pseudo-métrica, ainda para lógicas mais gerais que $L_{\omega\omega}$, por exemplo, lógicas com quantificadores generalizados, foi obtida por X. Caicedo (cf. [Ca2]). Ela mede o grau de proximidade entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, no sentido que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ estão tão próximas quanto o máximo grau quantificacional das sentenças que satisfazem simultaneamente. Em particular, $d(\mathcal{A},\mathcal{B}) = 0$ se e só se $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Pode-se provar facilmente que a seguinte é uma pseudo-métrica equivalente à dada na proposição 1.3.3:

$$d(x,y) = \frac{1}{1+\sup\{n \in \omega/(x,y) \in \mathcal{U}_n\}} \ .$$

Caicedo (cf. [Ca2]) iniciou o estudo sistemático da teoria de modelos de lógicas abstratas a partir das propriedades uniformes da topologia elementar dos espaços de estruturas. Ele observa, por exemplo, que as propriedades de substituição e relativização que uma lógica abstrata regular satisfaz, são formas fortes de continuidade uniforme de certas aplicações entre espaços de estruturas.

Veremos no capítulo 2 (ver proposição 2.1.9) uma versão topológica desta forma forte de continuidade uniforme a qual, no contexto da teoria de modelos, equivale à seguinte propriedade de redução uniforme.

1.3.4 Definição. Sejam L_1 e L_2 lógicas e $F : St^\tau(L_1) \to St^\mu(L_2)$ uma aplicação (possivelmente parcial). Dizemos que F tem a *propriedade de redução uniforme* com relação a L_1 e L_2 se para toda $\varphi \in L_2^\mu$ existe $T(\varphi) \in L_1^\tau$ tal que para toda $\mathcal{A} \in St^\tau$:

$$\mathcal{A} \models_{L_1} T(\varphi) \Leftrightarrow F(\mathcal{A}) \models_{L_2} \varphi \ .$$

A função T é dita uma *tradução* para F.

As propriedades de substituição e relativização de uma lógica abstrata L expressam o fato que as seguintes aplicações tem a propriedade de redução uniforme com relação a L.

a) Dadas $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in L^\tau$ com φ_i n_i-ária, e relações $R_1, \ldots, R_k$ com R_i n_i-ária não em τ, a aplicação $F : St^\tau(L) \to St^{\tau'}(L), \tau' = \tau \cup \{R_1, \ldots, R_k\}$, definida por $F(\mathcal{A}) = <\mathcal{A}, \varphi_1^A, \ldots, \varphi_k^A>$.

b) Para cada predicado monádico $P \in \tau$, a aplicação $F : St^\tau(L) \to St^{\tau\setminus\{P\}}(L)$ dada por $F(\mathcal{A}) = \mathcal{A}\lceil P^A$.

1.4 COMPLETUDE DE CAUCHY DOS ESPAÇOS St^τ

Na teoria de espaços uniformes tem-se o seguinte resultado fundamental (o qual é também válido para espaços grandes com topologias pequenas):

COMPACIDADE = COMPLETUDE DE CAUCHY + LIMITAÇÃO TOTAL (cf. [Ke] pag. 198).

Aqui, a completude de Cauchy define-se como a convergência de toda rede de Cauchy (para os conceitos de rede de Cauchy e limite de uma rede de Cauchy ver definição 2.2.5), e no caso do espaço ter base enumerável, como a convergência de toda sequência de Cauchy. Obviamente a completude e limitação total de um espaço uniforme dependem da uniformidade considerada.

No caso dos espaços de estruturas St^τ, τ arbitrário, munidos da estrutura uniforme gerada pela base natural $\mathcal{B}_N$, provar a compacidade da topologia elementar equivale a provar a completude de Cauchy da estrutura uniforme subjacente pois, como já vimos, ela é totalmente limitada.

Para o caso de τ finito, compacidade equivale a compacidade enumerável que, pela sua vez, equivale a compacidade sequencial, i.e. toda sequência contém uma subsequência convergente (cf. [Ke] pag. 162).

Fraïssé (cf. [Fr] pag. 127) foi o primeiro que provou a completude de Cauchy dos espaços St^τ para τ finito, e como consequência disso a compacidade sequencial desses espaços (cf. [Fr] pag. 128). Ele usa sem menção explícita a equivalência entre as bases $\mathcal{B}_F$ e $\mathcal{B}_N$, e prova que os limites de sequências de Cauchy de estruturas podem ser obtidos como limites indutivos de certas famílias de estruturas dirigidas por isomorfismos parciais. Incluiremos, como apêndice deste capítulo, uma versão desta prova usando a noção de n-equivalência de Karp, a qual, devidamente adaptada, permitirá futuramente a análise de lógicas Cauchy-completas que não sejam compactas. Este problema, no caso de algumas lógicas infinitárias, será levantado no capítulo 4. É importante salientar que o método de Fraïssé não faz uso de ultraprodutos nem do teorema de Łoś.

Daremos aqui um esboço de uma demonstração mais simples da completude de Cauchy dos espaços St^τ para τ arbitrário, a mesma que será tratada em forma mais geral no capítulo 2. Pretendemos mostrar que, no caso da lógica elementar $L_{\omega\omega}$, o teorema de Łoś fornece uma demonstração da completude de Cauchy onde os ultraprodutos de redes de Cauchy de estruturas são os limites correspondentes (cf. [C-M-S]). Adaptando a demonstração para τ finito mediante o uso da pseudo-métrica definida anteriormente, obtemos uma prova simples da completude de Cauchy destes espaços.

Seja $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ uma base de uniformidade subjacente ao espaço St^τ (não necessariamente totalmente limitada, embora qualquer uma o seja já que no caso de $L_{\omega\omega}$, os espaços St^τ são compactos). Em particular, para cada α e para cada $\mathcal{A} \in St^\tau$, $\mathcal{U}_\alpha[\mathcal{A}]$ é aberto na topologia elementar.

1.4.1 Definição. Seja $(D, \leq)$ um conjunto dirigido.

i) Uma *rede de Cauchy* em St^τ é uma família de estruturas $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in D}$ tal que para todo α existe $k \in D$ tal que para todo $i, j \geq k$, $(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j) \in \mathcal{U}_\alpha$.

ii) Seja $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in D}$ uma rede; $\lim_i \mathcal{A}_i$ é a coleção dos $\mathcal{A} \in St^\tau$ tais que para todo α existe $k \in D$ tal que para todo $i \geq k$, $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_i) \in \mathcal{U}_\alpha$.

iii) Seja U um ultrafiltro sobre D e $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in D}$ uma rede; $\lim_U \mathcal{A}_i$ é a coleção dos $\mathcal{A} \in St^\tau$ tais que para todo α existe $X \in U$ tal que para todo $i \in X$, $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_i) \in \mathcal{U}_\alpha$; ou equivalentemente, se para todo α, $\{i \in D/(\mathcal{A}, \mathcal{A}_i) \in \mathcal{U}_\alpha\} \in U$.

iv) Um ultrafiltro U sobre D é chamado *livre* se contém todos os subconjuntos $Y_k = \{i \in D/i \geq k\}$ para $k \in D$.

A parte (iii) da definição acima coincide com a definição 1.2.1 no caso de $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ ser a base natural $\mathcal{B}_N$; neste caso D não é necessariamente uma rede. Por outro lado, a noção de ultrafiltro livre sobre um conjunto dirigido generaliza a noção de ultrafiltro não-principal sobre ω. Observe que a família $\{Y_k\}_{k\in D}$ tem a PIF.

Os elementos de $\lim_i \mathcal{A}_i$ são os limites de Cauchy da rede dada, os quais não são necessariamente únicos, já que os espaços St^τ não são Hausdorff.

A seguinte proposição é o Teorema de Łoś Abstrato (TŁA) formulado para qualquer uniformidade subjacente à topologia elementar de St^τ para qualquer tipo τ.

1.4.2 Proposição. Em $L_{\omega\omega}$ temos: para todo tipo τ, toda família $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in D}$ em St^τ e todo ultrafiltro U sobre D, $\lim_U \mathcal{A}_i \neq \phi$.

Demonstração. Mostraremos que $\prod_U \mathcal{A}_i \in \lim_U \mathcal{A}_i$. Suponhamos pelo absurdo que existe α tal que $\{i \in D/(\mathcal{A}, \mathcal{A}_i) \notin \mathcal{U}_\alpha\} = \{i \in D/\mathcal{A}_i \notin \mathcal{U}_\alpha[\mathcal{A}]\} \in U$.

Como $\mathcal{U}_\alpha[\mathcal{A}]$ é aberto na topologia elementar e $\mathcal{A} \in \mathcal{U}_\alpha[\mathcal{A}]$, existe $\psi_\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(\psi_\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{U}_\alpha[\mathcal{A}]$, i.e. $\mathcal{A} \models \psi_\mathcal{A}$ e $\mathcal{U}_\alpha[\mathcal{A}] \supseteq \mathrm{Mod}(\psi_\mathcal{A})$. Logo, $\{i \in D/\mathcal{A}_i \notin \mathcal{U}_\alpha[\mathcal{A}]\} \subseteq \{i \in D/\mathcal{A}_i \notin \mathrm{Mod}(\psi_\mathcal{A})\}$, i.e. $\{i \in D/\mathcal{A}_i \models \neg\psi_\mathcal{A}\} \in U$, portanto, pelo teorema de Łoś, $\mathcal{A} \models \neg\psi_\mathcal{A}$, uma contradição ∎

O seguinte lema é essencial para a demonstração da completude de Cauchy dos espaços St^τ e é devido fundamentalmente a D. Mundici e A. M. Sette; a importância que ele tem para a interpretação da convergência nos espaços de estruturas sugere lhe dar um nome e aqui será chamado de "Lema de Convergência". Ele admite uma versão topológica geral a qual será enunciada e demonstrada no capítulo 2 (ver proposição 2.2.7).

1.4.3 Lema de Convergência. Se $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in D}$ é uma rede de Cauchy em St^τ e U é um ultrafiltro livre sobre D, então $\lim_i \mathcal{A}_i = \lim_U \mathcal{A}_i$. Em particular, $\lim_U \mathcal{A}_i$ independe do ultrafiltro livre U ∎

1.4.4 Corolário. Em $L_{\omega\omega}$ temos: para todo tipo τ, o espaço St^τ é Cauchy-completo.

Demonstração. Se $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in D}$ é uma rede de Cauchy em St^τ, então, pela proposição 1.4.2 existe $\mathcal{A} \in \lim_U \mathcal{A}_i$, sendo U qualquer ultrafiltro sobre D o qual podemos escolher livre; logo, pelo lema de convergência, $\mathcal{A}$ é um limite de Cauchy da rede dada ∎

X. Caicedo obteve independentemente uma prova similar da completude de Cauchy dos espaços St^τ (cf. [Ca2]).

A discussão feita neste capítulo mostra que o estudo da compactificação de lógicas abstratas mediante o completamento de Cauchy dos espaços de estruturas é viável, e é o problema que pesquisaremos nos capítulos seguintes.

1.5 APÊNDICE DO CAPÍTULO 1: O MÉTODO DE FRAÏSSÉ PARA A CONSTRUÇÃO DE LIMITES DE CAUCHY DE SEQUÊNCIAS DE ESTRUTURAS

Neste apêndice adaptaremos o método de Fraïssé (cf. [Fr] pags. 126 ss.) à construção de limites de Cauchy de sequências de estruturas para a lógica $L^\tau_{\omega\omega}$ com τ finito. Mostraremos que estes limites podem ser obtidos como limites indutivos de certas subsequências das sequências dadas.

Esta construção estabelecerá a completude de Cauchy dos espaços St^τ com τ finito, já que, para tal efeito, basta a análise da convergência de sequências, e não de redes em geral, pois os espaços em consideração têm base enumerável.

Seja τ um tipo de similaridade finito (o qual podemos supor, por simplicidade, relacional). Suporemos St^τ munido da uniformidade de Fraïssé, i.e. a uniformidade gerada pela base $\mathcal{B}_F = \{\mathcal{U}_n\}_{n\in\omega}$ onde para cada $n \in \omega$, $\mathcal{U}_n = \{(\mathcal{A},\mathcal{B})/\mathcal{A} \equiv_n \mathcal{B}\}$. Lembrar que o teorema de Fraïssé-Karp estabelece que para todo $n \in \omega$ e para todo $\mathcal{A},\mathcal{B} \in St^\tau$: $\mathcal{A} \equiv_n \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A} \cong_n \mathcal{B}$.

Se $\mathcal{A} =< A,\ldots >\in St^\tau$, $S \subseteq A, n \in \omega$ e $a \in A$, então, denotamos com $[a]^n_S$ o conjunto: $[a]^n_S = \{a' \in A/$ existe um n-iso $g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tal que $g\lceil S = id_A$ e $g(a) = a'\}$.

1.5.1 Lema. Para todo $n \in \omega$ e todo $S \subseteq A$ finito, os conjuntos $[a]^n_S$ formam uma partição finita de A.

Demonstração. Basta observar que para $\mathcal{A} =< A,\ldots >\in St^\tau$ (τ finito), $n \in \omega$ e $S \subseteq A$ finito, os conjuntos $[a]^n_S$ são as classes de equivalência da relação $a \sim^n_S a' \Leftrightarrow g : S \cup \{a\} \to S \cup \{a'\}$ definida por $g\lceil S = id_A$ e $g(a) = a'$ é um n-iso de $\mathcal{A} \Leftrightarrow < \mathcal{A}, a >\equiv_n< \mathcal{A}, a' >$ na linguagem $L^{\tau\cup S\cup\{c\}}_{\omega\omega} \Leftrightarrow$ para toda $\varphi(x) \in L^{\tau\cup S}$ com $qr(\varphi) \leq n : \mathcal{A} \models \varphi[a] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a']$; portanto, a relação $\sim^n_S$ está determinada pelas $\varphi(x) \in L^{\tau\cup S}$ com $qr(\varphi) \leq n$, as quais, salvo equivalência lógica, são um número finito ■

1.5.2 Proposição (Construção de Fraïssé). Seja $\{\mathcal{A}_n\}$ uma sequência de Cauchy em St^τ. Então, existe um diagrama (sistema dirigido) $< \{\mathcal{B}_n\}, \{f_n\} >$ associado a $\{\mathcal{A}_n\}$ satisfazendo as seguintes condições:

1. $\{\mathcal{B}_n\}$ é uma subsequência de $\{\mathcal{A}_n\}$.
2. para todo $n, f_n : \mathcal{B}_n \to \mathcal{B}_{n+1}$ é um n-iso com $im\ f_n \subseteq dom\ f_{n+1}$.

3. *dom* f_n é finito para todo n.

4. para todo $a \in B_n$ existem $b \in dom\ f_{n+1}$ e $\overline{f}_n \supseteq f_n$ tal que $\overline{f}_n$ é um $(n-1)$-iso e $\overline{f}_n(a) = b$.

Demonstração. O diagrama $< \{\mathcal{B}_n\},\ \{f_n\} >$ será construído por indução. Deve-se observar que $\{\mathcal{A}_n\}$ é de Cauchy se e somente se para todo m existe k_m tal que para quaisquer $i,\ j \geq k_m$ tem-se que $\mathcal{A}_i \cong_m \mathcal{A}_j$, i.e., $\phi : \mathcal{A}_i \to \mathcal{A}_j$ é um m-iso.

n = 0: tomando $m = 1$ existe k_1 (que podemos supor mínimo) tal que para $i,\ j \geq k_1$, $\mathcal{A}_i \cong_1 \mathcal{A}_j$, i.e., $\phi : \mathcal{A}_i \to \mathcal{A}_j$ é um 1-iso.

Consideremos a subsequência $\mathcal{A}_{k_1} \xrightarrow{\phi} \mathcal{A}_{k_1+1} \xrightarrow{\phi} \mathcal{A}_{k_1+2} \xrightarrow{\phi} \ldots$ e definamos $\mathcal{B}_0 = \mathcal{A}_{k_1}$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{A}_{k_1+1}$ e $f_0 = \phi$ que satisfazem trivialmente as condições 1 - 4. Observa-se que na sequência construída $\mathcal{B}_0 \xrightarrow{f_0} \mathcal{B}_1 \xrightarrow{\phi} \mathcal{A}_{k_1+2} \xrightarrow{\phi} \ldots$ todas as funções subsequentes são 1-iso e tem domínio finito, e em toda a sequência a imagem de uma função está contida no domínio da seguinte.

n > 0: em geral, como hipótese indutiva para o passo n suporemos construída uma subsequência

$$\mathcal{B}_0 \xrightarrow{f_0} \mathcal{B}_1 \xrightarrow{f_1} \ldots \mathcal{B}_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \mathcal{B}_n \xrightarrow{g} \mathcal{A}_k \to \mathcal{A}_{k+1} \to \ldots$$

para um certo k, onde $f_0, \ldots, f_{n-1}$ satisfazem as condições 1 - 4, as funções subsequentes são n-iso e tem domínio finito, e em toda a sequência a imagem de uma função está contida no domínio da seguinte.

Seja $m = d + n\ell_n + (n+1)$ onde $d = |dom\ g|$ e $\ell_n = |\{[b]^n_{dom\ g} / b \in B_n \setminus dom\ g\}|$, então existe $k_m \geq k$ (mínimo) tal que para $i,\ j \geq k_m$, $\phi : \mathcal{A}_i \to \mathcal{A}_j$ é um m-iso. Temos então

$$\mathcal{B}_0 \xrightarrow{f_0} \mathcal{B}_1 \xrightarrow{f_1} \ldots \mathcal{B}_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \mathcal{B}_n \xrightarrow{g} \ldots \xrightarrow{h} \mathcal{A}_{k_m} \xrightarrow{\phi} \mathcal{A}_{k_m+1} \xrightarrow{\phi} \ldots;$$

observa-se que $g' = h \circ \ldots \circ g$ é um n-iso por hipótese indutiva. Podemos definir então $\mathcal{B}_{n+1} = \mathcal{A}_{k_m}$ e $f_n = g'$ e tem-se, também por hipótese indutiva, que $im\ f_{n-1} \subseteq dom\ f_n (= dom\ g' = dom\ g)$.

A seguir construiremos as funções subsequentes de tal maneira que sejam $(n+1)$-iso e em toda a sequência a imagem de uma função esteja contida no domínio da seguinte.

Estendemos o m-iso $\phi : \mathcal{B}_{n+1} \to \mathcal{A}_{k_m+1}$ a $im f_n$, a qual tem d elementos, obtendo um $n\ell_n + (n+1)$-iso que chamaremos de g''. Agora consideremos a partição de B_n dada por $\{[b]^n_S / b \in B_n\}$ sendo $S = dom\ f_n = dom\ g$.

De cada classe $[b]^n_S$ com $b \notin dom\ f_n$ escolhemos no máximo n elementos, então, como f_n é um n-iso, para cada um deles, digamos c, existe um elemento $d \in B_{n+1} \setminus im\ f_n$ e uma extensão $\overline{f}_n \supseteq f_n$ que é um $(n-1)$-iso tal que $\overline{f}_n(c) = d$. Percorrendo todas as classes $[b]^n_S$ obtemos em $\mathcal{B}_{n+1} \setminus im\ f_n$ no máximo $n\ell_n$ elementos. Finalmente estendemos g'' a esses $n\ell_n$ elementos obtendo um $(n+1)$-iso g''': $\mathcal{B}_{n+1} \to \mathcal{A}_{k_m+1}$ tal que $dom\ g'''$ é finito e $im\ f_n \subseteq dom\ g'''$. Deve-se observar que $dom\ g'''$ será tomado como $dom\ f_{n+1}$ no passo indutivo seguinte.

O processo se conclui estendendo $\phi : \mathcal{A}_{k_m+1} \to \mathcal{A}_{k_m+2}$ a $im\ g'''$, que tem no máximo $d + n\ell_n$ elementos, obtendo um $(n+1)$-iso, e repetindo-o para as subsequentes funções ϕ.

É importante observar que a partição de $\mathcal{B}_n$, módulo a existência de um n-iso em $\mathcal{B}_n$, foi escolhida justamente para satisfazer a condição 4, já que se $a \in \mathcal{B}_n$, existe $a' \in [a]^n_S$ que, pelo processo anterior, é levado por uma extensão $\overline{f}_n$ de f_n a $dom\ f_{n+1} (= dom\ g''')$ ∎

1.5.3 Definição. Se $\{\mathcal{A}_n\}$ é de Cauchy em St^τ e $< \{\mathcal{B}_n\}, \{f_n\} >$ é um diagrama que satisfaz as condições 1 - 4 da proposição 1.5.2, definimos $\ell\{\mathcal{B}_n\} = \varinjlim \mathcal{B}_n \lceil dom\ f_n$, onde $\varinjlim \mathcal{B}_n \lceil dom\ f_n =< \mathcal{B}, \ldots >$ com $B = \{< a, n > / n \in \omega \text{ e } a \in dom\ f_n\} / \sim$, sendo que a relação $\sim$ é dada por: $< a, n > \sim < b, m >$ com $n \leq m$ se $f_{n,m}(a) = f_{m-1} \circ \ldots \circ f_n(a) = b$. Além disso, denotando com $[a, n]$ a classe de equivalência de $< a, n >$, define-se para cada $R \in \tau$, $R^{\mathcal{B}}([a_1, n_1], \ldots, [a_r, n_r])$ se e só se $\mathcal{B}_n \models R[f_{n_1,n}(a_1), \ldots, f_{n_r,n}(a_r)]$ onde $n = \max(n_1, \ldots, n_r)$. É claro que, neste caso, se $m \geq n$, então $\mathcal{B}_m \models R[f_{n_1,m}(a_1), \ldots, f_{n_r,m}(a_r)]$.

Para cada $n \in \omega$ definem-se as projeções $f^*_n : dom f_n \subseteq B_n \to B$ por $f^*_n(a) = [a, n]$. Observa-se que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_n & \xrightarrow{f_n} & \mathcal{B}_{n+1} \\ f^*_n & \searrow \quad \swarrow & f^*_{n+1} \\ & \ell\{\mathcal{B}_n\} & \end{array}$$

pois se $a \in dom\ f_n$, temos que $f^*_{n+1} \circ f_n(a) = f^*_{n+1}(f_n(a)) = [f_n(a), n+1] = [a, n] = f^*_n(a)$ já que $< a, n > \sim < f_n(a), n+1 >$.

1.5.4 Proposição. Para todo $n \in \omega$, f^*_n é um n-iso.

Demonstração. É claro que $f^*_0 = \phi$ é um 0-iso e que todo f^*_n é um 0-iso, i.e. um isomorfismo parcial, pois se $R \in \tau$, então, $R^{\mathcal{B}}(f^*_n(a_1), \ldots, f^*_n(a_k)) \Leftrightarrow R^{\mathcal{B}}([a_1, n], \ldots, [a_k, n]) \Leftrightarrow \mathcal{B}_n \models R(f_{n,n}(a_1), \ldots, f_{n,n}(a_k)) \Leftrightarrow \mathcal{B}_n \models R[a_1, \ldots, a_k]$.

Suponhamos como hipótese indutiva que $f^*_0, \ldots, f^*_{n-1}$ são k-iso ($k = 0, \ldots, n-1$ respectivamente), e que para todo $r \geq 0$, f^*_{n+r} é $(n-1)$-iso.

Observe que para $n = 1$ temos a situação anterior.

Afirmação. Para todo $r \geq 0$, f^*_{n+r} é n-iso, em particular, f^*_n é n-iso.

i) Seja $a \in B_{n+r}$, então, pela condição 4, existe $b \in dom\ f_{n+r+1}$ e $g \supseteq f_{n+r}(n+r-1)$-iso, tal que, $g(a) = b$, em particular, g é $(n-1)$-iso.

Definindo $g' = f^*_{n+r+1} \circ g : \mathcal{B}_{n+r} \to \ell\{\mathcal{B}_n\}$ temos que g' é $(n-1)$-iso já que, por hipótese indutiva, f^*_{n+r+1} é $(n-1)$-iso, além disso, $a \in dom\ g'$ pois $a \in dom\ g$ $(g'(a) = f^*_{n+r+1}(g(a)) = f^*_{n+r+1}(b) = [b, n+r+1])$.

Por outro lado, $g' \supseteq f^*_{n+r}$ pois se $c \in dom\ f^*_{n+r}(= dom\ f_{n+r})$, então, $g'(c) = f^*_{n+r+1}(g(c)) = [g(c), n+r+1] = [f(c), n+r+1] = [c, n+r] = f^*_{n+r}(c)$.

ii) Seja $[b, m] \in B$, então $b \in dom\ f_m$ e $f^*_m(b) = [b, m]$.

Caso 1. $m \leq n+r$:

Tomando $a = f_{n+r-1} \circ \ldots \circ f_m(b)$ temos que $a \in dom\ f_{n+r}(= dom\ f^*_{n+r})$ pela condição 2, e que $[b, m] = [a, n+r] = f^*_{n+r}(a)$, logo, a própria f^*_{n+r} pode ser tomada como extensão.

Caso 2. $n+r < m$:

Consideremos o seguinte diagrama:

$$\mathcal{B}_{n+r} \stackrel{f_{n+r}}{\to} \ldots \to \mathcal{B}_{m-1} \stackrel{f_{m-1}}{\to} \mathcal{B}_m \stackrel{f^*_m}{\to} \ell\{\mathcal{B}_n\}\ ,$$

e seja $h = f_{m-1} \circ \ldots \circ f_{n+r}$, então, h é $(n+r)$-iso e $dom\ h = dom\ f_{n+r}$. Como $b \in B_m$, existe $h' \supseteq h$ $(n+r-1)$-iso tal que $b \in im\ h'$.

Vejamos que $f^*_m \circ h' \supseteq f^*_{n+r}$ e $[b, m] \in im\ f^*_m \circ h'$. Com efeito, se $c \in dom\ f^*_{n+r}(= dom\ f_{n+r} = dom\ h)$, então, $f^*_m \circ h'(c) = f^*_m(h'(c)) = [h'(c), m] = [h(c), m] = [c, n+r] = f^*_{n+r}(c)$. Finalmente, como $b \in im\ h'$, então, existe $a \in dom\ h'$ tal que $h'(a) = b$, logo, $f^*_m \circ h'(a) = f^*_m(h'(a)) = f^*_m(b) = [b, m]$ ∎

A seguinte proposição estabelece que $\ell\{\mathcal{B}_n\}$ é um limite de Cauchy da sequência $\{\mathcal{B}_n\}$, e portanto de $\{\mathcal{A}_n\}$ já que $\{\mathcal{B}_n\}$ é subsequência de $\{\mathcal{A}_n\}$, e esta última é de Cauchy. É conveniente observar que em termos da uniformidade de Fraïssé $\mathcal{B}_F = \{\mathcal{U}_n\}_{n \in \omega}$, $\ell\{\mathcal{B}_n\} \in \lim_n \mathcal{B}_n$ se e só se para todo m existe k tal que para todo $i \geq k$, $\ell\{\mathcal{B}_n\} \equiv_m \mathcal{B}_i$.

1.5.5. Proposição. $\ell\{\mathcal{B}_n\} \in \lim_n \mathcal{B}_n$.

Demonstração. Seja $m \in \omega$, então, pela proposição 1.5.4 temos que $\ell\{\mathcal{B}_n\} \cong_m \mathcal{B}_m$, i.e. $\ell\{\mathcal{B}_n\} \equiv_m \mathcal{B}_m$.

Tomemos $k = m$ e consideremos $i \geq k$, então $\ell\{\mathcal{B}_n\} \equiv_i \mathcal{B}_i$, logo, como $\mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{U}_m, \ell\{\mathcal{B}_n\} \equiv_m \mathcal{B}_i$, portanto, $\ell\{\mathcal{B}_n\} \in \lim_n \mathcal{B}_n$ ■

Terminaremos este apêndice explicitando a relação de *satisfação* para o limite de Fraïssé $\ell\{\mathcal{B}_n\}$.

1.5.6 Lema. Se $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ é uma fórmula de $L^\tau_{\omega\omega}$ (τ relacional finito) com $qr(\varphi) \leq n$, e $a_1, \ldots, a_k \in dom\ f_n$, então

$$\mathcal{B}_n \models \varphi[a_1, \ldots, a_k] \Leftrightarrow \ell\{\mathcal{B}_n\} \models \varphi[f^*_n(a_1), \ldots, f^*_n(a_k)].$$

Demonstração. É consequência imediata do fato de termos $f^*_n : \mathcal{B}_n \cong_n \ell\{\mathcal{B}_n\}$ ■

1.5.7 Proposição. Se $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ é uma fórmula de $L^\tau_{\omega\omega}$, então, se $[a_1, n_1], \ldots, [a_k, n_k] \in B$ e $n = \max(qr(\varphi), n_1, \ldots, n_k)$ temos que:

$$\ell\{\mathcal{B}_n\} \models \varphi[[a_1, n_1], \ldots, [a_k, n_k]] \Leftrightarrow \mathcal{B}_n \models \varphi[f_{n_1,n}(a_1), \ldots, f_{n_k,n}(a_k)]\ .$$

Demonstração. Como $qr(\varphi) \leq n$, e como $a_1 \in dom\ f_{n_1}, \ldots, a_k \in dom\ f_{n_k}$ implicam $f_{n_1,n}(a_1), \ldots, f_{n_k,n}(a_k) \in dom\ f_n$, temos que, pelo lema: $\mathcal{B}_n \models \varphi[f_{n_1,n}(a_1), \ldots, f_{n_k,n}(a_k)] \Leftrightarrow \ell\{\mathcal{B}_n\} \models \varphi[f^*_n(f_{n_1,n}(a_1)), \ldots, f^*_n(f_{n_k,n}(a_k))] \Leftrightarrow \ell\{\mathcal{B}_n\} \models \varphi[[f_{n_1,n}(a_1), n], \ldots, [f_{n_k,n}(a_k), n]] \Leftrightarrow \ell\{\mathcal{B}_n\} \models \varphi[[a_1, n_1], \ldots, [a_k, n_k]]$, sendo que esta última equivalência é devida ao fato de $< f_{n_i,n}(a_i), n > \sim < a_i, n_i >$ ■

CAPÍTULO 2

ESTRUTURA UNIFORME DOS ESPAÇOS ZERO-DIMENSIONAIS: O CASO COMPACTO

Neste capítulo estudaremos em forma abstrata uma estrutura uniforme "natural" subjacente aos espaços topológicos zero-dimensionais, mostrando que é totalmente limitada, e caracterizaremos a completude de Cauchy destes espaços, e portanto sua compacidade, em termos de uma versão topológica do Teorema de Ultraprodutos de Łoś.

A noção de convergência, que chamaremos de U-convergência, que está por trás do teorema de Łoś é facilmente adaptável a qualquer espaço topológico, não necessariamente zero-dimensional, fornecendo uma outra caracterização da compacidade destes espaços. Devemos salientar que as técnicas utilizadas neste capítulo (e no capítulo 3) são válidas para espaços topológicos grandes com topologias pequenas.

No final serão analisados com certo detalhe os seguintes exemplos entre outros: (a) os espaços de n-tipos de uma teoria completa na lógica elementar, (b) o espectro real de um anel com as topologias ordinária e construtiva, e (c) o espectro primo de um anel de Boole, sendo todos eles espaços de Hausdorff zero-dimensionais compactos.

2.1 ESPAÇOS ZERO-DIMENSIONAIS

Seja X um espaço topológico (grande). Dizemos que X é *zero-dimensional* (z-d) se a topologia de X admite uma base de clopens (i.e. abertos-fechados).

Observa-se que um espaço com uma sub-base de clopens é um espaço zero-dimensional, que o fecho por interseções finitas e complementares de uma base de clopens é ainda uma base de clopens, e que a coleção de todos os abertos-fechados de um espaço zero-dimensional é uma base do espaço. Nem toda base de clopens é fechada por complementares, por exemplo, todo espaço discreto é zero-dimensional e admite como base a coleção de todos os subconjuntos unitários. É claro que uma classe própria munida de uma topologia pequena não pode ser um espaço discreto, além disso, neste caso, a coleção de fechos das subclasses do espaço é um conjunto.

A seguir τ denota a topologia do espaço X e $\overline{\tau}$ a coleção de todos os fechados de X.

2.1.1 Proposição. X é z-d $\Leftrightarrow$ para todo $x \in X$ e todo $F \in \overline{\tau}$ com $x \notin F$, existe A clopen tal que $x \in A$ e $A \cap F = \phi$.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Seja $x \in X$ e $F \in \overline{\tau}$ tal que $x \notin F$, então $x \in F^c \in \tau$, logo, existe A clopen (i.e. na base) tal que $x \in A \subseteq F^c$, i.e. $x \in A$ e $A \cap F = \phi$.

($\Leftarrow$) Seja $B \in \tau$ e $x \in B$, então $B^c \in \overline{\tau}$ e $x \notin B^c$, logo, existe A clopen tal que $x \in A$ e $A \cap B^c = \phi$, i.e. $x \in A \subseteq B$, portanto, τ admite uma base de clopens ∎

2.1.2 Corolário. Todo espaço zero-dimensional é regular.

Demonstração. Pela proposição anterior, toda vizinhança de um ponto contém uma vizinhança fechada do ponto ∎

Podemos melhorar o resultado do corolário anterior na seguinte proposição.

2.1.3 Proposição. Todo espaço zero-dimensional é completamente regular.

Demonstração. Seja $x \in X$ e $F \in \overline{\tau}$ tal que $x \notin F$. Seja A clopen tal que $x \in A \subseteq F^c$, então a *função característica* de A $\varphi_A : X \to I\!R$ é contínua (pois $\varphi^{-1}[W]$ é ϕ, A, A^c ou X para diferentes abertos W de $I\!R$), $\varphi_A \lceil F = 0$ e $\varphi_A(x) = 1$ ∎

A proposição 2.1.3 é importante pois garante a existência de uma estrutura uniforme subjacente a todo espaço z-d, já que um espaço topológico é uniformizável se e somente se é completamente regular (cf. [Ke] pag. 188).

Mais adiante definiremos uma estrutura uniforme "natural" em todo espaço z-d.

2.1.4 Proposição. Todo espaço zero-dimensional T_1 é Hausdorff.

Demonstração. Suponhamos $x \neq y$, então, como $X \setminus \{x\}$ é aberto e $y \in X \setminus \{x\}$ temos que existe A clopen tal que $y \in A \subseteq X \setminus \{x\}$. Tomando $B = A^c$ temos que B é aberto, $x \in B$ e $A \cap B = \phi$ ∎

2.1.5 Proposição. Todo espaço T_4 (i.e. normal e T_1) enumerável e zero-dimensional.

Demonstração. Seja X um tal espaço. Seja G aberto em X e $x \in G$, construiremos um clopen C tal que $x \in C \subseteq G$; portanto, X teria uma base de clopens.

Sendo X um espaço T_4, então é regular, logo, existe V aberto tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq G$ ($\overline{V}$ é o fecho de V na topologia de X). Como X é normal, pelo Lema de Urysohn (cf. [Ke] pag. 115), existe uma função contínua $f : X \to [0,1]$ tal que $f \lceil \overline{V} = 1$ e $f \lceil G^c = 0$.

Como X é enumerável e $[0,1]$ é não-enumerável, existe $0 < \alpha < 1$ tal que $\alpha \notin$ *im* f.

Seja $C = \{z \in X/f(z) > \alpha\}$, então temos que C é clopen pois o seu complementar é $\{z \in X/f(z) < \alpha\}$; além disso, $x \in C \subseteq G$ ■

Os resultados anteriores e os seguintes exemplos são incluídos aqui não somente para criar uma intuição sobre os espaços z-d, senão para futuras aplicações da teoria desenvolvida.

2.1.6 Exemplos

a) Os racionais $\mathbb{Q}$ com a topologia induzida de $\mathbb{R}$ é zero-dimensional. Este exemplo é um caso particular da proposição anterior. Observa-se que $\mathbb{Q}$ é um espaço de Hausdorff não compacto, além disso, com a uniformidade proveniente da métrica usual, não é um espaço totalmente limitado.

b) Todo subespaço de um espaço z-d é um espaço z-d.

c) *Os espaços de estruturas:*

Seja τ um tipo de similaridade e L uma lógica abstrata regular pequena, portanto fechada para conjunções finitas e negações, sendo L^τ o conjunto de sentenças de tipo τ. Então, $\mathcal{B}^\tau = \{\operatorname{Mod}_L(\varphi)/\varphi \in L^\tau\}$ é uma base de clopens para a topologia elementar de $St^\tau(L)$ fechada para interseções finitas e complementares (para lógicas infinitárias, $\mathcal{B}^\tau$ é também fechada para algumas interseções infinitas). Pela interpretação de Tarski temos que L é uma lógica compacta se e somente se para todo τ, o espaço $St^\tau(L)$ é compacto.

Em $St^\tau(L)$ os fechados são coleções da forma $\operatorname{Mod}_L(\sum)$ onde $\sum \subseteq L^\tau$. O teorema de Hanf sobre a existência do número de Hanf para uma lógica pequena (cf. [B-S] pag. 85) garante que o espaço $St^\tau(L)$ nunca é Hausdorff.

d) Seja τ um tipo de similaridade. Em $St^\tau(L)$ definimos a relação de equivalência seguinte: $\mathcal{A} \sim_L \mathcal{B}$ se e só se $\overline{\{\mathcal{A}\}} = \overline{\{\mathcal{B}\}}$. Verifica-se facilmente que $\mathcal{A} \sim_L \mathcal{B}$ se e só se $\mathcal{A} \equiv_L \mathcal{B}$ se e só se $Th_L(\mathcal{A}) = Th_L(\mathcal{B})$, sendo $\equiv_L$ a relação de L-equivalência elementar, e $Th_L(\mathcal{A}) = \{\varphi \in L^\tau/\mathcal{A} \models_L \varphi\}$ é a teoria em L de $\mathcal{A}$.

Consideremos $St^\tau(L)/\equiv_L$ com a topologia quociente dada pela projeção canônica $\pi : St^\tau(L) \to St^\tau(L)/\equiv_L$. Então, verifica-se facilmente que a coleção $\{\pi[\operatorname{Mod}_L(\varphi)]/\varphi \in L^\tau\}$ é uma base de clopens para essa topologia a qual também é fechada para interseções finitas e complementares. Além disso, $St^\tau(L)/\equiv_L$ é um espaço de Hausdorff e, é compacto se e só se $St^\tau(L)$ é compacto.

e) *Os espaços de n-tipos:*

Sejam $\mathcal{A} =< A, \ldots >\in St^\tau$ e $Y \subseteq A$. Seja L a linguagem de 1^a ordem adequada à estrutura $\mathcal{A}$ com parâmetros em Y e consideremos $T = Th_L(< \mathcal{A}, y >_{y\in Y})$. É claro que T é uma teoria completa.

Se $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in L$, dizemos que $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ é consistente com T se $T \vdash (\exists x_1) \ldots (\exists x_n)\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, ou equivalentemente, $< \mathcal{A}, y >_{y \in Y} \models (\exists x_1) \ldots (\exists x_n)\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Uma coleção p de fórmulas com no máximo as variáveis livres $x_1, \ldots, x_n$ é dita consistente com T se para qualquer $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\} \subseteq p$ temos que $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k$ é consistente com T. Um n-tipo sobre T é um conjunto maximal de fórmulas, nas variáveis livres $x_1, \ldots, x_n$, consistente com T.

Chamamos de S_nT a coleção de n-tipos sobre T.

Se $p \in S_nT$, então são satisfeitas as seguintes propriedades básicas: se $\varphi, \psi \in p$, então $\varphi \wedge \psi \in p$, e $\varphi \notin p$ se e só se $\neg\varphi \in p$.

A partir daqui podemos definir sobre S_nT a seguinte base de clopens: $\{U_\varphi / \varphi(x_1, \ldots, x_n) \in L\}$, onde $U_\varphi = \{p \in S_nT / \varphi \in p\}$, tornando S_nT num espaço z-d. A base dada é fechada para interseções finitas e complementares.

O espaço S_nT é Hausdorff pois se $p, q \in S_nT$ com $p \neq q$, então, por exemplo, existe $\varphi \in p$ com $\varphi \notin q$, i.e. $\neg\varphi \in q$, logo, $p \in U_\varphi$, $q \in U_{\neg\varphi}$ e obviamente $U_\varphi \cap U_{\neg\varphi} = \phi$.

S_nT é também um espaço compacto, o que é consequência da compacidade de $L_{\omega\omega}$. Mas este fato será demonstrado mais adiante pelas técnicas desenvolvidas neste capítulo (ver 2.3.5).

Terminaremos este exemplo mencionando o seguinte: S_nT tem como subespaço denso, o subespaço dos n-tipos principais, onde um n-tipo p é dito *principal* se existe uma n-upla $< a_1, \ldots, a_n > \in A^n$ tal que $p = \{\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in L / < \mathcal{A}, y >_{y \in Y} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]\}$ que denotaremos com $p_{<a_1, \ldots, a_n>}$. Com efeito, se $U_\varphi \neq \phi$, então, existe $p \in U_\varphi$, i.e. $\varphi \in p$, o que significa que φ é consistente com T, i.e. $< \mathcal{A}, y >_{y \in Y} \models (\exists x_1) \ldots (\exists x_n)\varphi$, logo, existe $< a_1, \ldots, a_n > \in A^n$ tal que $< \mathcal{A}, y >_{y \in Y} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$, i.e. $\varphi \in p_{<a_1, \ldots, a_n>}$, ou $p_{<a_1, \ldots, a_n>} \in U_\varphi$; portanto, U_φ contém um n-tipo principal.

f) *O espectro real de um anel:*

Seja A um anel comutativo com identidade 1. Um ideal I de A é dito *real* se $a_1^2 + \ldots + a_n^2 \in I$ implica que $a_1, \ldots, a_n \in I$. Um anel que admite ideais reais primos é chamado de *semi-real* (cf. [L] pag. 772-773).

Seja $\alpha \subseteq A$, α é dito um *cone primo* de A se (i) $\alpha + \alpha \subseteq \alpha$, (ii) $\alpha \cdot \alpha \subseteq \alpha$, (iii) $A^2 \subseteq \alpha$, (iv) $-1 \notin \alpha$ e (v) $ab \in -\alpha$ implica que $a \in \alpha$ ou $b \in \alpha$. Verifica-se facilmente que a condição (v) é equivalente a (v') $\alpha \cup -\alpha = A$ e $\alpha \cap -\alpha$ é um ideal primo (real) de A. O ideal $\alpha \cap -\alpha$ é chamado de *suporte de* α e denotado por $supp(\alpha)$.

A existência de cones primos de A é equivalente a A ser um anel semi-real e também ao fato de $-1 \notin \sum A^2$. Denotamos com $Spec_r(A)$ a coleção de cones primos de A (cf. [B-C-R] pags. 80 ss).

Define-se a *topologia ordinária* sobre $Spec_r(A)$ pela seguinte sub-base de abertos: $\mathcal{B} = \{H_A(a)\}_{a\in A}$ onde $H_A(a) = \{\alpha \in Spec_r(A) \ / \ a \notin -\alpha\}$. A *topologia construtiva* sobre $Spec_r(A)$ é definida tomando como base o fecho booleano de $\mathcal{B}$, i.e. a coleção de combinações booleanas finitas de elementos de $\mathcal{B}$. É claro que a topologia construtiva é mais fina que a topologia ordinária.

Um caso particular importante é quando o anel é um corpo real F, i.e. -1 não é soma de quadrados em F. Neste caso, os cones primos de F são exatamente os cones positivos de ordens de F, e $Spec_r(F)$, denotado também por X_F, é o espaço de ordens de F (um cone de ordem em F é um subconjunto $P \subseteq F$ tal que: $P + P \subseteq P, P \cdot P \subseteq P, P \cap -P = \{0\}$ e $P \cup -P = F$). A topologia ordinária e a topologia construtiva coincidem pois $\mathcal{B}$ é fechado por complementares ($(H_F(a))^c = H_F(-a)$). Esta topologia é chamada de *topologia de Harrison* sobre X_F.

Observa-se que $Spec_r(A)$ com a topologia construtiva é um espaço zero-dimensional, cuja topologia é gerada pela seguinte sub-base: $\{H_A(a)\}_{a\in A} \cup \{H_A(a)^c\}_{a\in A}$.

A topologia ordinária sobre $Spec_r(A)$ em geral não é Hausdorff desde que um cone primo α pode ter *especializações* próprias, i.e. cones primos $\beta \supseteq \alpha$ com $\beta \neq \alpha$, pois verifica-se facilmente que $\alpha \subseteq \beta$ se e só se $\beta \in \overline{\{\alpha\}}$ (a barra denota o fecho na topologia ordinária). No entanto, a topologia construtiva sobre $Spec_r(A)$ é Hausdorff. Com efeito, pela proposição 2.1.4 basta provar que é T_1: seja $\alpha \in Spec_r(A)$ e $\beta \in cl(\{\alpha\})$ (cl denota o fecho na topologia construtiva), então, usando a sub-base dada, temos que, para todo $a \in A, \beta \in H_A(a)$ implica $\alpha \in H_A(a)$, e $\beta \in H_A(a)^c$ implica $\alpha \in H_A(a)^c$, i.e. para todo $a \in A$, $a \notin -\beta$ implica $a \notin -\alpha$, e $a \in -\beta$ implica $a \in -\alpha$, ou seja, para todo $a \in A, a \in \alpha$ implica $a \in \beta$, e $a \in \beta$ implica $a \in \alpha$, portanto, $\beta = \alpha$, logo, $cl(\{\alpha\}) = \{\alpha\}$.

$Spec_r(A)$, com a topologia construtiva, é um espaço compacto. A prova usual deste fato consiste em mergulhar $Spec_r(A)$ no espaço $\{0,1\}^A$, munido da topologia produto, como um subespaço fechado, portanto, ele será compacto já que, pelo teorema de Tychonoff, $\{0,1\}^A$ é compacto. O mergulho procurado é o seguinte

$$\begin{aligned} \varphi : Spec_r(A) &\to \{0,1\}^A \\ \alpha &\mapsto \varphi_\alpha : A \to \{0,1\} \end{aligned}$$

onde $\varphi_\alpha(a) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad \alpha \in H_A(a) \\ 0, & \text{se} \quad \alpha \in H_A(a)^c \end{cases}$ (cf. [L] pag. 782). Daremos uma demonstração diferente deste fato na seção 2.3 (ver 2.3.5).

g) *O espectro primo de um anel de Boole:*

Um anel A comutativo com identidade 1 é dito um anel de Boole se para todo $x \in A : x^2 = x$, i.e. todo elemento de A é um idempotente.

O espectro primo de $A, Spec(A)$, é o conjunto dos ideais primos de A. Para cada $a \in A$ definimos $V_a = \{P \in Spec(A)/a \notin P\}$, então, a família $\{V_a\}_{a \in A}$ é base para a topologia de Zariski sobre $Spec(A)$ (verifica-se facilmente que $V_a \cap V_b = V_{ab}$ e $V_1 = Spec(A)$).

Para cada $a \in A, V_a$ é clopen: com efeito, se $a \in A$, então $a^2 = a$, logo, $a(1-a) = 0$, daqui resulta que $V_a^c = V_{1-a}$, portanto, $Spec(A)$ é um espaço zero-dimensional e a base dada é fechada para interseções finitas e complementares.

O espaço $Spec(A)$ é Hausdorff: com efeito, como é z-d, basta provar que é T_1. Seja $P \in Spec(A)$, então é consequência imediata da definição que $Q \in \overline{\{P\}}$ se e só se $P \subseteq Q$. Por outro lado, num anel de Boole todo ideal primo é maximal (cf. [A-M] pag. 13), portanto, se $Q \in \overline{\{P\}}$, então $Q = P$, i.e. $\overline{\{P\}} = \{P\}$.

$Spec(A)$ é um espaço compacto, mesmo que A não fôsse um anel de Boole, e tal fato, no caso zero-dimensional, será consequência da proposição 2.3.2.

Na realidade os espaços $St^r(L)/\equiv_L$ (para L compacta), $S_nT, Spec_r(A)$ e $Spec(A)$ como descritos nos exemplos (d), (e), (f) e (g) são realizações diferentes de uma mesma construção: o espaço de Stone de uma álgebra de Boole (ver exemplo (h) a seguir). Assim temos que, $St^r(L)/\equiv_L$, sendo um espaço booleano (i.e. Hausdorff, compacto e z-d) é homeomorfo ao espaço de Stone de sua álgebra característica, i.e. a álgebra de Boole dos clopens do espaço (cf. [B-S] pag. 26); S_nT é (homeomorfo a) o espaço de Stone da álgebra de Boole das classes de equivalência das fórmulas $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ da linguagem de T módulo a equivalência $\varphi \sim \psi$ se e só se $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ (cf. [S] pag. 72); $Spec_r(A)$, com a topologia construtiva, é (homeomorfo a) o espaço de Stone da álgebra de Boole dos conjuntos construtíveis de $Spec_r(A)$ (cf. [B-C-R] pag. 114); e $Spec(A)$, no caso de A ser um anel de Boole, é o espaço de Stone da álgebra de Boole definida em A mediante as operações $a \vee b = a + b + ab$, $a \wedge b = ab$ e o complementar $a^* = 1 - a$ (cf. [A-M] pag. 15-16).

h) *O espaço de Stone de uma álgebra de Boole:*

Seja B uma álgebra de Boole (cf. [B-S] cap. 1) e $S(B)$ a coleção de todos os ultrafiltros de B. Para cada $x \in B$ definimos $V_x = \{U \in S(B)/x \in U\}$, então a família $\{V_x\}_{x \in B}$ é uma base de clopens fechada para interseções finitas e complementares, para uma topologia zero-dimensional sobre $S(B)$. O espaço assim construído é chamado de *espaço de Stone* de B.

$S(B)$ é um espaço compacto, Hausdorff e zero-dimensional, i.e. é um espaço booleano, e a compacidade dele será estabelecida como corolário da proposição 2.3.2.

Terminaremos a nossa lista de exemplos com um exemplo frequente em Álgebra e Análise Funcional, os grupos (anéis ou espaços vetoriais) topológicos não-arquimedianos.

i) *Os grupos topológicos não-arquimedianos:*

Seja G um grupo com e a identidade de G. Um subconjunto $S \subseteq G$ é dito *não-arquimediano* se $S \cdot S \subseteq S$. Seja $< G, \tau >$ um grupo topológico, sendo τ a topologia de G, dizemos que G é um grupo topológico não-arquimediano se τ admite uma base local em e de conjuntos não-arquimedianos.

Vejamos que toda vizinhança (não necessariamente aberta) não-arquimediana V de e é um clopen: com efeito, V é aberto, pois se $x \in V$, então $x \cdot V$ é uma vizinhança de x com $x \in x \cdot V$ e, pela não-arquimedianidade de V, $x \cdot V \subseteq V$; V^c é também aberto, pois se $x \in V^c$, então $x \cdot V^{-1}$ é uma vizinhança de x tal que $x \cdot V^{-1} \subseteq V^c$ (para ver esta última relação, suponhamos que exista $y \in V \cap x \cdot V^{-1}$, então $y \in V$ e existe $z \in V$ tal que $y = xz^{-1}$, i.e. $x = yz$ com $y, z \in V$, logo, pela não-arquimedianidade de V, $x \in V$, uma contradição).

Em consequência, todo grupo topológico não-arquimediano é zero-dimensional. Observa-se que a base dada, embora possa ser fechada para interseções finitas, não é fechada por complementares.

Análoga descrição adquirem os anéis ou espaços vetoriais topológicos não-arquimedianos, substituindo a multiplicação pela adição nas definições acima.

Um exemplo particularmente importante, que aparece em Álgebra Comutativa, é o caso de um anel A munido da topologia I-ádica, onde I é um ideal de A. Esta topologia é definida pelo seguinte sistema fundamental de vizinhanças no zero: $A = I^0 \supseteq I \supseteq I^2 \supseteq \ldots \supseteq I^n \supseteq \ldots$.

A topologia I-ádica sobre A admite a seguinte base de uniformidade: para cada $n \in \omega$, $\mathcal{U}_n = \{(x, y) \in A \times A / x - y \in I^n\}$. Observa-se que cada $\mathcal{U}_n$ está definida mediante uma relação de equivalência e que $\mathcal{U}_n \supseteq \mathcal{U}_{n+1}$, portanto, pela proposição 1.3.3, essa topologia pode ser definida a partir da pseudo-métrica $d(x, y) = \inf\{\frac{1}{n+1} / x - y \in I^n\}$, para a qual os conjuntos $\mathcal{U}_n[x] = \{y \in A / x - y \in I^n\} = x + I^n$ constituem o sistema fundamental de vizinhanças no ponto x.

Pode-se observar facilmente que o anel A como espaço uniforme é totalmente limitado se e só se para todo $n \in \omega$, o anel quociente A/I^n é finito; basta observar que uma decomposição da forma $A = \mathcal{U}_n[x_1] \cup \ldots \cup \mathcal{U}_n[x_k] = (x_1 + I^n) \cup \ldots \cup (x_k + I^n)$ é uma decomposição mediante classes laterais módulo I^n.

A seguir descreveremos a estrutura uniforme dos espaços zero-dimensionais.

2.1.7 Definição. Seja X um espaço z-d e $\mathcal{B}$ uma base de clopens de X, a qual podemos supor fechada por interseções finitas e complementares. Definimos a *uniformidade natural* sobre X mediante a seguinte sub-base: $\{\mathcal{U}_V\}_{V\in\mathcal{B}}$ onde $\mathcal{U}_V = \{(x,y) \in X \times X / x \in V \Leftrightarrow y \in V\}$. A base natural de uniformidade é definida então por $\mathcal{B}_N = \{\mathcal{U}_{V_1} \cap \ldots \cap \mathcal{U}_{V_n} / V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{B}\}$.

Observa-se que $\mathcal{U}_V = (V \times V) \cup (V^c \times V^c)$ o que mostra, em particular, que os $\mathcal{U}_V$ são clopens na topologia do produto $X \times X$.

2.1.8 Observação. Nos exemplos dados acima e na definição anterior, insistimos em mencionar que uma determinada base é fechada por interseções finitas e complementares porque, em geral, muitas das construções feitas em topologia, como por exemplo as compactificações tipo Wallman que serão de nosso especial interesse, dependem da base de início.

Dada uma base de clopens de X, sempre é possível obter uma base de clopens fechada para interseções finitas e complementares, basta tomar o fecho booleano da base dada.

A sub-base dada tem a seguinte propriedade, a qual, além de garantir que a topologia do espaço é gerada por essa uniformidade, mostra que o espaço uniforme resultante é totalmente limitado: para todo $x \in X$ e todo $V \in \mathcal{B}, \mathcal{U}_V[x] = \{y \in X/(x,y) \in \mathcal{U}_V\} = \begin{cases} V, & \text{se} \quad x \in V \\ V^c, & \text{se} \quad x \notin V \ . \end{cases}$

Para ver que é totalmente limitado basta observar que: se $V = \phi$, então $V^c = X$, logo, para qualquer $x, \mathcal{U}_V[x] = V^c = X$; se $V = X$, então, para qualquer $x, \mathcal{U}_V[x] = V = X$; e se $V \neq \phi, X$, então para qualquer $x \in V$ e $y \in V^c, \mathcal{U}_V[x] \cup \mathcal{U}_V[y] = V \cup V^c = X$.

Em geral, o argumento anterior pode ser extendido da seguinte maneira: para cada $n \geq 1$ definimos $S_n = \{\sigma = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)/\varepsilon_i = 0, 1\}$, então, dados $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{B}$ podemos decompor $X = \bigcup\limits_{\sigma \in S_n} (V_1^{\varepsilon_1} \cap \ldots \cap V_n^{\varepsilon_n})$ onde $V_i^{\varepsilon_i} = \begin{cases} V_i, & \text{se} \quad \varepsilon_i = 1 \\ V_i^c, & \text{se} \quad \varepsilon_i = 0 \end{cases}$; portanto, tomando, para cada $\sigma \in S_n, x_\sigma \in V_1^{\varepsilon_1} \cap \ldots \cap V_n^{\varepsilon_n}$ (se não for vazio) temos que $X = \bigcup\limits_{\sigma \in S_n} (\mathcal{U}_{V_1} \cap \ldots \cap \mathcal{U}_{V_n})[x_\sigma]$.

A prova anterior da limitação total e o fato da sub-base de uniformidade dada gerar a topologia de X, independem do fato de $\mathcal{B}$ ser fechada por interseções finitas e complementares.

Para os espaços zero-dimensionais, munidos da uniformidade natural, sendo totalmente limitados, temos que, ser Cauchy-completo é equivalente a ser compacto.

Na próxima seção daremos uma caracterização da compacidade, e portanto da completude de Cauchy, dos espaços zero-dimensionais, em termos de uma versão topológica do teorema de Łoś. A noção de convergência que está por trás desta versão do teorema de Łoś pode ser definida para espaços topológicos arbitrários, fornecendo uma caracterização da compacidade de qualquer espaço.

Terminaremos esta seção dando uma definição de continuidade uniforme forte entre espaços z-d, de especial interesse para as aplicações à teoria de modelos.

2.1.9 Proposição. Sejam X e Y espaços z-d com $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases de clopens respectivamente, e seja $f : X \to Y$ uma aplicação. Então, são equivalentes:

i) Para todo $W \in \mathcal{C}$ existe $V \in \mathcal{B}$ tal que para todo $x \in X : x \in V \Leftrightarrow f(x) \in W$.

ii) Para todo $W \in \mathcal{C}$ existe $V \in \mathcal{B}$ tal que para quaisquer $x, y \in X : (x, y) \in \mathcal{U}_V \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in \mathcal{U}_W$.

Demonstração.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sejam $W \in \mathcal{C}, x, y \in X$ e $V \in \mathcal{B}$ que por (i) existe. Então, se $y \in V$ temos que $f(y) \in W$ e $(x, y) \in \mathcal{U}_V \Leftrightarrow x \in \mathcal{U}_V[y] = V \Leftrightarrow f(x) \in W = \mathcal{U}_W[f(y)] \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in \mathcal{U}_W$, analogamente, se $y \notin V$, então, $f(y) \notin W$ e $(x, y) \in \mathcal{U}_V \Leftrightarrow x \in \mathcal{U}_V[y] = V^c \Leftrightarrow x \notin V \Leftrightarrow f(x) \notin W \Leftrightarrow f(x) \in W^c = \mathcal{U}_W[f(y)] \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in \mathcal{U}_W$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Seja $W \in \mathcal{C}$ (podemos supor $W \neq \phi$), então, existe $V_1 \in \mathcal{B}$ tal que para todo $x, y \in X, (x, y) \in \mathcal{U}_{V_1} \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in \mathcal{U}_W$. Como X é totalmente limitado, existem $x_1, \ldots, x_n \in X$ tais que $\mathcal{U}_{V_1}[x_1] \cup \ldots \cup \mathcal{U}_{V_1}[x_n] = X$, além disso, podemos escolhe-los de tal modo que $f(x_n) \in W$. Definimos $V = \bigcup\{\mathcal{U}_{V_1}[x_i] / f(x_i) \in W\}$, então $V \neq \phi$ e: $x \in V \Rightarrow$ existe i tal que $f(x_i) \in W$ e $x \in \mathcal{U}_{V_1}[x_i] \Rightarrow f(x_i) \in W$ e $(x, x_i) \in \mathcal{U}_{V_1} \Rightarrow f(x_i) \in W$ e $(f(x), f(x_i)) \in \mathcal{U}_W \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}_W[f(x_i)] = W$; reciprocamente, $f(x) \in W \Rightarrow$ (como $f(x_n) \in W$) $f(x) \in \mathcal{U}_W[f(x_n)] \Rightarrow (f(x), f(x_n)) \in \mathcal{U}_W \Rightarrow (x, x_n) \in \mathcal{U}_{V_1} \Rightarrow x \in \mathcal{U}_{V_1}[x_n] \Rightarrow x \in V$ ■

2.1.10 Observação. Observa-se que o V cuja existência é afirmada na parte (i) da proposição anterior é único, pois se houver V_1 e V_2 teríamos para todo $x \in X, x \in V_1 \Leftrightarrow f(x) \in W \Leftrightarrow x \in V_2$, portanto, $V_1 = V_2$. De fato, $V = f^{-1}[W]$ e a parte (i) da proposição anterior equivale à seguinte forma forte de continuidade: para todo $W \in \mathcal{C}, f^{-1}[W] \in \mathcal{B}$.

2.1.11 Definição. Uma aplicação f satisfazendo as condições (i) e/ou (ii) da proposição 2.1.9 será chamada de *fortemente uniformemente contínua*, abreviadamente s-uniformemente contínua.

Obviamente toda aplicação s-uniformemente contínua é uniformemente contínua (cf. [Ke] pag. 180).

2.1.12 Corolário. Uma aplicação $F : St^{\tau}(L_1) \to St^{\mu}(L_2)$ tem a propriedade de redução uniforme (ver definição 1.3.4) se e somente se é s-uniformemente contínua (a respeito das bases elementares $\mathcal{B}^{\tau}$ e $\mathcal{B}^{\mu}$ respectivamente) ■

2.2 UMA VERSÃO TOPOLÓGICA DO TEOREMA DE ŁOŚ E CARACTERIZAÇÃO DA COMPACIDADE

Nesta seção daremos uma caracterização dos espaços topológicos (grandes com topologias pequenas) compactos, e em especial dos espaços zero-dimensionais compactos, em termos de uma noção de convergência definida por ultrafiltros locais, onde entendemos por *ultrafiltro local* sobre um espaço X, um ultrafiltro definido sobre algum conjunto contido em X. Esta noção de convergência, que chamaremos de U-convergência, está por trás do teorema de Łoś e faz dele um teorema de completude de Cauchy.

2.2.1 Definição (U-convergência). Seja X um espaço qualquer e $\mathcal{B}$ uma base de X. Sejam $\{x_i\}_{i\in I}$ uma família de elementos de X (com I conjunto) e U um ultrafiltro sobre I. Definimos $\lim_U x_i$ como a coleção dos $x \in X$ tais que para todo $V \in \mathcal{B}$ com $x \in V : \{i \in I/x_i \in V\} \in U$, ou equivalentemente, para todo $V \in \mathcal{B}$ com $x \in V$, existe $A \in U$ tal que para todo $i \in A, x_i \in V$. Neste caso dizemos que $\{x_i\}_{i\in I}$ U-converge a x ou que x é U-limite de $\{x_i\}_{i\in I}$.

2.2.2 Observação. Pode-se provar facilmente que se X é um espaço z-d e $\mathcal{B}$ é uma base de clopens de X então são equivalentes (usando a uniformidade natural determinada por $\mathcal{B}$):

a) $x \in \lim_U x_i$.

b) Para todo $V \in \mathcal{B}$, existe $A \in U$ tal que para todo $i \in A, (x, x_i) \in \mathcal{U}_V$.

c) Para todo $V \in \mathcal{B}, \{i \in I/(x, x_i) \in \mathcal{U}_V\} \in U$.

d) Para todo $V \in \mathcal{B}, x \in V \Leftrightarrow \{i \in I/x_i \in V\} \in U$.

A forma (d) dada acima, no caso dos espaços de estruturas St^τ com a base das classes elementares $\mathcal{B}^\tau$, é a forma de convergência que o teorema de Łoś nos fornece. Além disso, (d) diz que, no caso zero-dimensional, $\lim_U\ x_i = \bigcap\{V \in \mathcal{B}/\{i \in I/x_i \in V\} \in U\}$, portanto, é a interseção de uma família de fechados com a PIF.

Consideremos para cada $x \in X$ a base local em $x, \nu_x = \{V \in \mathcal{B}/x \in V\}$. Então, é consequência da definição acima que $x \in \lim_U\ x_i$ se e só se $\nu_x \subseteq \bigcup\limits_{A\in U}\bigcap\limits_{i\in A}\nu_{x_i}$, sendo esta inclusão uma igualdade no caso zero-dimensional (basta observar que $\{i \in I/x_i \in V\} \in U \Leftrightarrow$ existe $A \in U$ tal que para todo $i \in A, x_i \in V \Leftrightarrow V \in \bigcup\limits_{A\in U}\bigcap\limits_{i\in A}\nu_{x_i}$).

Além disso, $\bigcup\limits_{A\in U}\bigcap\limits_{i\in A}\nu_{x_i}$ é uma base de filtro (pequena) em X, portanto, $x \in \lim_U\ x_i$ se e só se $\bigcup\limits_{A\in U}\bigcap\limits_{i\in A}\nu_{x_i}$ converge a x.

No caso zero-dimensional, se $x, y \in \lim_U x_i$, então para todo $V \in \mathcal{B}, x \in V$ se e só se $y \in V$, i.e. $(x, y) \in \bigcap_{V \in \mathcal{B}} \mathcal{U}_V$. Portanto, se X é Hausdorff e $x, y \in \lim_U x_i$, então $x = y$. Abreviaremos por $x \equiv y$ o fato de $(x, y) \in \bigcap_{V \in \mathcal{B}} \mathcal{U}_V$.

2.2.3 Proposição (Caracterização da compacidade). Seja X um espaço topológico qualquer, então são equivalentes.

i) O espaço X é compacto.

ii) Para toda família $\{x_i\}_{i \in I}$ e todo ultrafiltro U sobre $I, \lim_U x_i \neq \phi$ (i.e. a base de filtro $\bigcup_{A \in U} \bigcap_{i \in A} \nu_{x_i}$ converge).

iii) Para toda rede $\{x_i\}_{i \in D}$ e todo ultrafiltro U livre sobre $D, \lim_U x_i \neq \phi$.

Demonstração.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Suponhamos que para todo $x \in X$ existe $V_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V_x$ e $\{i \in I / x_i \in V_x\} \notin U$. Obviamente, a família $\{V_x\}_{x \in X}$ (que pode ser parametrizada por um conjunto) é um cobrimento aberto de X, logo, como X é compacto, existem $x_1, \ldots, x_n \in X$ tais que $\{V_{x_k}\}$ é ainda um cobrimento de X.

Afirmação 1. $\{i \in I / x_i \in V_{x_1}\} \cup \ldots \cup \{i \in I / x_i \in V_{x_n}\} = I$.

Com efeito, dado $i \in I, x_i \in X = \bigcup_{k=1}^{n} V_{x_k}$, então, existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x_i \in V_{x_k}$, i.e. $i \in \{i \in I / x_i \in V_{x_k}\}$.

Portanto, como $I \in U$ e U é um ultrafiltro, existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\{i \in I / x_i \in V_{x_k}\} \in U$, uma contradição, logo, $\lim_U x_i \neq \phi$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Óbvio.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Seja $\{F_j\}_{j \in J}$ uma família de fechados de X com a PIF (observe que J é um conjunto). Seja $K = \mathcal{P}_\omega(J)$ a coleção de subconjuntos finitos de J, e para cada $\Delta \in K$ seja $x_\Delta \in \bigcap_{j \in \Delta} F_j$. Consideremos a família $\{x_\Delta\}_{\Delta \in K}$; esta família é uma rede com a ordem natural sobre K dada pela inclusão.

Para cada $\Delta \in K$, seja $A_\Delta = \{\Delta' \in K / \Delta \subseteq \Delta'\}$, então $\{A_\Delta\}_{\Delta \in K}$ tem a PIF pois, para quaisquer $\Delta_1, \ldots, \Delta_n \in K, \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n \in A_{\Delta_1} \cap \ldots \cap A_{\Delta_n}$. Seja U um ultrafiltro sobre K tal que $\{A_\Delta\}_{\Delta \in K} \subseteq U$, então, U é livre e, por (iii), existe $x \in \lim_U x_\Delta$.

Afirmação 2. $x \in \bigcap_{j \in J} F_j$.

Com efeito, seja $s \in J$ e suponhamos que $x \notin F_s$, então, $x \in F_s^c$ que é aberto, logo, existe $V \in \mathcal{B}$ com $x \in V$ e $V \cap F_s = \phi$. Mas, como $x \in \lim_U x_\Delta$, para aquele V temos que $\{\Delta \in K / x_\Delta \in V\} \in U$; além disso, $A_{\{s\}} \in U$, em particular, $\{\Delta \in K / x_\Delta \in V\} \cap A_{\{s\}} \neq \phi$, i.e. existe $\Delta \in K$ com $s \in \Delta$ tal que $x_\Delta \in V$. Por outro lado, $x_\Delta \in \bigcap_{j \in \Delta} F_j$, em particular, $x_\Delta \in F_s$, i.e. $V \cap F_s \neq \phi$, uma contradição ∎

Com a seguinte proposição pretendemos discutir qual a relação da nossa caracterização da compacidade de um espaço topológico com a dada na proposição 1.1.2.

2.2.4 Proposição. Definindo, para toda família $\{x_i\}_{i \in I}$ e todo ultrafiltro U sobre $I, \mathcal{B}_{I,U} = \{\overline{A} / A \subseteq X \text{ e } \{i \in I / x_i \in A\} \in U\}$, então

i) $\mathcal{B}_{I,U}$ é uma base de filtro pequena em X,

ii) $\lim_U x_i = Adh\ \mathcal{B}_{I,U}$.

Demonstração.

i) É óbvio que $\mathcal{B}_{I,U}$ é uma base de filtro pelas propriedades do ultrafiltro U, e ela é pequena pois, embora A possa ser qualquer subclasse de X, $\overline{A}$ é sempre um fechado e a coleção de fechados de X é uma classe pequena.

ii) Suponhamos $x \in \lim_U x_i$, então, para todo $V \in \mathcal{B}$ com $x \in V, \{i \in I / x_i \in V\} \in U$. Suponhamos que existe $A \subseteq X$ tal que $\{i \in I / x_i \in A\} \in U$ e $x \notin \overline{A}$, então $x \in \overline{A}^c$ que é aberto, logo, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subseteq \overline{A}^c$; portanto, por hipótese $\{i \in I / x_i \in W\} \in U$, logo, $\{i \in I / x_i \in \overline{A}^c\} \in U$, mas $\{i \in I / x_i \in \overline{A}\} \in U$, uma contradição. Em consequência, $\lim_U x_i \subseteq Adh\ \mathcal{B}_{I,U}$.

Seja $x \in Adh\ \mathcal{B}_{I,U}$ e suponhamos que existe $V \in \mathcal{B}$ com $x \in V$ e $\{i \in I / x_i \in V\} \notin U$, então $\{i \in I / x_i \in V^c\} \in U$, logo, por hipótese $x \in \overline{V^c} = V^c$, uma contradição. Portanto, $Adh\ \mathcal{B}_{I,U} \subseteq \lim_U x_i$ ∎

Da proposição 2.2.4 e de nossa caracterização da compacidade (proposição 2.2.3) podemos concluir então que um espaço X é compacto se e somente se a aderência de toda base de filtro da forma $\mathcal{B}_{I,U}$ é não-vazia.

No caso de ser o próprio espaço X um conjunto, então, para toda base de filtro $\mathcal{B}$ podemos encontrar I e U tais que $Adh\ \mathcal{B} = Adh\ \mathcal{B}_{I,U}$; basta tomar $I = \bigcup \mathcal{B}$ e U um ultrafiltro sobre I que contém $\mathcal{B}$. Neste caso, as proposições 1.1.2 e 2.2.3 são equivalentes.

Se X é uma classe própria não é claro que a afirmação acima seja verdadeira. De fato, no argumento anterior, I poderia não ser um conjunto. Neste caso, a proposição 2.2.3 generaliza a proposição 1.1.2.

Daí a nossa denominação de "ultrafiltros locais" para os ultrafiltros definidos sobre conjuntos contidos em X e a nossa preferência desses ultrafiltros para o estudo da convergência em classes próprias.

Uma outra conexão, no caso de ser X um conjunto, de nossa caracterização da compacidade com a dada pela convergência de todo ultrafiltro sobre X, é a seguinte, de verificação imediata: para U um ultrafiltro sobre X e considerando X como uma família parametrizada por seus próprios elementos, $x \in \lim_U X$ se e só se U converge a x.

2.2.5 Definição. Sejam X um espaço z-d e $\{x_i\}_{i\in D}$ uma rede em X.

i) $\{x_i\}_{i\in D}$ é dita *rede de Cauchy* se para todo $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{B}$ existe $k \in D$ tal que para todo $i, j \geq k, (x_i, x_j) \in \mathcal{U}_{V_1} \cap \ldots \cap \mathcal{U}_{V_n}$.

ii) Define-se $\lim_i x_i$ como o conjunto dos $x \in X$ tais que para quaisquer $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{B}$, existe $k \in D$ tal que para todo $i \geq k, (x, x_i) \in \mathcal{U}_{V_1} \cap \ldots \cap \mathcal{U}_{V_n}$.

2.2.6 Observação. É fácil ver que na definição acima, por ser D um conjunto dirigido, pode-se substituir $V_1, \ldots, V_n$ por apenas um $V \in \mathcal{B}$, i.e. pode-se substituir a base pela sub-base de uniformidade. Neste caso, a definição do $\lim_i x_i$ é a versão zero-dimensional da que foi dada na definição 1.1.1 (iv).

A seguinte é a versão topológica do Lema de Convergência dado em 1.4.3.

2.2.7 Proposição (Lema de Convergência). Seja $\{x_i\}_{i\in D}$ uma rede de Cauchy em X e U um ultrafiltro livre sobre D, então $\lim_i x_i = \lim_U x_i$ (e, em consequência, $\lim_U x_i$ independe do ultrafiltro livre U).

Demonstração.

a) Seja $x \in \lim_i x_i$ e seja $V \in \mathcal{B}$ com $x \in V$; temos que existe $k \in D$ tal que para todo $i \geq k, (x, x_i) \in \mathcal{U}_V$, i.e. $x_i \in \mathcal{U}_V[x] = V$, logo, $A_k = \{i \in D / i \geq k\} \subseteq \{i \in D / x_i \in V\}$, portanto, como U é livre temos que $\{i \in D / x_i \in V\} \in U$, i.e. $x \in \lim_U x_i$.

b) Sejam $x \in \lim_U x_i$ e $V \in \mathcal{B}$, então, existe $A_V \in U$ tal que para todo $i \in A_V, (x, x_i) \in \mathcal{U}_V$. Por outro lado, como a rede $\{x_i\}_{i\in D}$ é de Cauchy, existe $k_V \in D$ tal que para $i, j \geq k_V, (x_i, x_j) \in \mathcal{U}_V$. Seja $A_{k_V} = \{i \in D / i \geq k_V\}$.

Consideremos $Z = A_V \cap A_{k_V}$, então $Z \in U$ por ser U livre, em particular, $Z \neq \phi$. Seja $k \in Z$ qualquer.

Afirmação. Para todo $i \geq k, (x, x_i) \in \mathcal{U}_V$.

Com efeito, se $i \geq k$, então, como $k \in A_V$, temos que $(x, x_k) \in \mathcal{U}_V$. Além disso, como $i, k \geq k_V$ temos que $(x_k, x_i) \in \mathcal{U}_V$, logo, $(x, x_i) \in \mathcal{U}_V \circ \mathcal{U}_V \subseteq \mathcal{U}_V$.

Portanto, $x \in \lim_i x_i$ ∎

A parte (a) da demonstração acima é facilmente adaptável a qualquer espaço topológico, mostrando que se $\{x_i\}_{i \in D}$ é uma rede e U é livre sobre D, então, $\lim_i x_i \subseteq \lim_U x_i$.

2.2.8 Proposição (Caracterização da completude de Cauchy dos espaços z-d). As seguintes afirmações são equivalentes para espaços z-d:

i) Para toda família $\{x_i\}_{i \in I}$ e todo ultrafiltro U sobre $I, \lim_U x_i \neq \phi$.

ii) Para toda rede de Cauchy $\{x_i\}_{i \in D}$ e todo ultrafiltro livre U sobre $D, \lim_U x_i \neq \phi$.

iii) O espaço X (munido da uniformidade natural) é Cauchy-completo, i.e. para toda rede de Cauchy $\{x_i\}_{i \in D}, \lim_i x_i \neq \phi$.

iv) O espaço X é compacto.

Demonstração.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Trivial.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): É consequência imediata do Lema de Convergência.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): É imediato por ser X um espaço uniforme totalmente limitado.

(iv) $\Rightarrow$ (i): É imediato pela proposição 2.2.3 ou, em forma mais simples tratando-se de espaços z-d, pelo fato de que $\lim_U x_i$ expressa-se como interseção de uma família de fechados com a PIF ∎

2.2.9 Observação. A afirmação (i) da proposição anterior é a versão topológica do teorema de Łoś abstrato (TŁA) num espaço z-d. É importante salientar que ela é equivalente à compacidade do espaço, e tratando-se de uma lógica abstrata L, se for válida em todo espaço $St^{\tau}(L)$, é equivalente à compacidade da lógica (ver proposição 1.2.4).

2.2.10 Proposição. Seja X um espaço topológico qualquer e $C \subseteq X$. Então $x \in \overline{C}$ se e somente se existem $\{x_i\}_{i \in I}$ e U ultrafiltro sobre I tais que $x \in \lim_U x_i$.

Demonstração. Seja $I = \{V \in \mathcal{B} / x \in V\} (= \nu_x)$. Então, se $x \in \overline{C}$, para todo $V \in I, C \cap V \neq \phi$. Usando o axioma de escolha AC^{ω}, seja $x_V \in C \cap V$, então $\{x_V\} \subseteq C$.

Observa-se que I é um conjunto dirigido pela inclusão inversa (e $|I| \leq |\mathcal{B}|$).

Consideremos para cada $V \in I, A_V = \{W \in I / W \subseteq V\}$, então a família $\{A_V\}$ tem a PIF.

Seja U um ultrafiltro sobre I tal que $\{A_V\} \subseteq U$ e seja $V \ni x$, i.e. $V \in I$, então $A_V \subseteq \{W \in I / x_W \in V\}$, pois se $W \in A_V$, então $W \subseteq V$, mas $x_W \in W$, logo, $x_W \in V$. Portanto, $\{W \in I / x_W \in V\} \in U$, i.e. $x \in \lim_U x_V$.

Para a recíproca basta observar que se $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq C$, então $\lim_U x_i \subseteq \overline{\{x_i\}_{i\in I}} \subseteq \overline{C}$ ∎

2.2.11 Corolário. Seja L uma lógica abstrata qualquer e $K \subseteq St^\tau(L)$ (τ arbitrário), então $\mathcal{A} \in \overline{K} = \mathrm{Mod}_L(Th_L(K)) \Leftrightarrow$ existe $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I} \subseteq K$ e U ultrafiltro sobre I tal que $\mathcal{A} \in \lim_U \mathcal{A}_i$ ∎

A seguir precisaremos das seguintes notações: seja $K \subseteq St^\tau(L)$, dizemos que K é uma classe EC se existe uma sentença $\varphi \in L^\tau$ tal que $K = \mathrm{Mod}_L(\varphi)$; K é uma classe EC_Δ se existe uma coleção e sentenças $\sum \subseteq L^\tau$ tal que $K = \mathrm{Mod}_L(\sum) = \bigcap_{\varphi \in \sum} \mathrm{Mod}_L(\varphi)$; K é uma classe EC_Σ se existe uma coleção de sentenças $\Gamma \subseteq L^\tau$ tal que $K = \bigcup_{\varphi\in\Gamma} \mathrm{Mod}_L(\varphi)$.

2.2.12 Corolário. Seja L uma lógica compacta qualquer e $K \subseteq St^\tau(L)$ (τ arbitrário). Então, K é uma classe EC_Δ se e só se

i) K é fechada por equivalência elementar,

ii) $K \cap \lim_U \mathcal{A}_i \neq \phi$ para toda família $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I} \subseteq K$ e todo ultrafiltro U sobre I.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Trivial. A parte (ii) é consequência do fato que, sendo K fechado e L compacta, então K é um subespaço z-d compacto de $St^\tau(L)$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que K satisfaz (i) e (ii). Provaremos que $\overline{K} \subseteq K$.

Seja $\mathcal{A} \in \overline{K}$, então, pelo corolário 2.2.11, $\mathcal{A} \in \lim_U \mathcal{A}_i$ para alguma família $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I} \subseteq K$, logo, pela condição (ii) existe $\mathcal{B} \in K$ tal que $\mathcal{B} \in \lim_U \mathcal{A}_i$, o que implica $\mathcal{B} \equiv_L \mathcal{A}$, portanto, pela condição (i), $\mathcal{A} \in K$ ∎

Se L é uma lógica compacta, então, é de fácil verificação que a classe de classes elementares EC tem a seguinte propriedade: $EC = EC_\Delta \cap EC_\Sigma$ (cf. [B-S] pag. 144). Em consequência, temos a seguinte caracterização das classes EC.

2.2.13 Proposição. Seja L uma lógica compacta qualquer e $K \subseteq St^\tau(L)$ (τ arbitrário). Então, K é uma classe EC se e só se

i) K é fechada por equivalência elementar,

ii) $K \cap \lim_U \mathcal{A}_i \neq \phi$ e $K^c \cap \lim_W \mathcal{B}_j \neq \phi$ para quaisquer famílias $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I} \subseteq K$, $\{\mathcal{B}_j\}_{j\in J} \subseteq K^c$ e ultrafiltros U sobre I e W sobre J respectivamente.

Demonstração.

($\Rightarrow$) É consequência imediata do corolário 2.2.12 pelo fato de K e K^c serem classes EC_Δ.

($\Leftarrow$) Como K é fechada por equivalência elementar, então K^c também o é. Logo, pelo corolário 2.2.12, K e K^c são classes EC_Δ, em particular, K é EC_Σ por ser K^c uma classe EC_Δ. Portanto, pela observação prévia, K é uma classe EC ∎

O corolário 2.2.12 e a proposição 2.2.13 são versões gerais, para lógicas compactas, da caracterização das classes EC_Δ e EC dadas em [B-S] pags. 151-152.

2.3 ANÁLISE DA CONVERGÊNCIA NO ESPAÇO DE STONE DE UMA ÁLGEBRA DE BOOLE: APLICAÇÕES

Seja B uma álgebra de Boole e $S(B)$ o espaço de Stone correspondente. Então, $S(B)$ é um espaço z-d, logo, a estrutura uniforme natural sobre $S(B)$ é totalmente limitada. Como já vimos, $S(B)$ é também um espaço de Hausdorff.

Nesta seção provaremos a compacidade de $S(B)$ provando sua completude de Cauchy, e para tal efeito, caracterizando mediante a nossa versão topológica do teorema de Łoś, os limites (os quais são únicos) das redes de Cauchy do espaço.

2.3.1 Lema. Sejam $\mathcal{A} = < A, \ldots > \in St^\tau$, P um predicado monádico adicional e $L = L_{\omega\omega}^{\tau\cup\{P\}}$. Sejam $\{< \mathcal{A}, C_i >\}_{i\in I}$ uma família de estruturas em $St^{\tau\cup\{P\}}$ e U um ultrafiltro sobre I. Definindo $C = \{a \in A / \{i \in I / a \in C_i\} \in U\} (= \bigcup_{J\in U} \bigcap_{i\in J} C_i)$ temos que se satisfaz a seguinte versão do teorema de Łoś:

a) Se $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in L$ é uma fórmula cuja forma normal prenex é existencial e $a_1, \ldots, a_n \in A$ então

$$< \mathcal{A}, C > \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \Rightarrow \{i \in I / < \mathcal{A}, C_i > \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]\} \in U \ .$$

b) Se $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in L$ é uma fórmula cuja forma normal prenex é universal e $a_1, \ldots, a_n \in A$, então

$$\{i \in I / < \mathcal{A}, C_i > \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]\} \in U \Rightarrow < \mathcal{A}, C > \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \ .$$

Demonstração. É claro que (a) e (b) são equivalentes. Demonstraremos (a) por indução sobre a complexidade de φ.

Caso 1. Se φ é $t_1 = t_2$ com t_1 e t_2 termos de L:
$< \mathcal{A}, C >\models (t_1 = t_2)[a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow t_1[a_1, \ldots, a_n] = t_2[a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow$ para todo $i \in I, < \mathcal{A}, C_i >\models (t_1 = t_2)[a_1, \ldots, a_n]$ (pois φ não depende de i) $\Leftrightarrow \{i \in I / < \mathcal{A}, C_i >\models (t_1 = t_2)[a_1, \ldots, a_n]\}(= I) \in U$.

Caso 2. Se φ é $R(t_1, \ldots, t_n)$ com $R \in \tau$ e $t_1, \ldots, t_n$ termos de L: análogo ao caso 1.

Caso 3. Se φ é $P(t)$ com t um termo de L:
$< \mathcal{A}, C >\models P(t)[a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow t[a_1, \ldots, a_n] \in C \Leftrightarrow$ (por definição de C) $\{i \in I / t[a_1, \ldots, a_n] \in C_i\} \in U \Leftrightarrow \{i \in I / < \mathcal{A}, C_i >\models P(t)[a_1, \ldots, a_n]\} \in U$.

Caso 4. Se φ é $\neg\psi$ ou $\psi \wedge \theta$: é imediato pelas propriedades elementares do ultrafiltro U.

Caso 5. Se φ é $(\exists x)\psi$:
$< \mathcal{A}, C >\models (\exists x)\psi[a_1, \ldots, a_n] \Rightarrow$ existe $b \in A$ tal que $< \mathcal{A}, C >\models \psi[b, a_1, \ldots, a_n] \Rightarrow$ (por hipótese indutiva) existe $b \in A$ tal que $\{i \in I / < \mathcal{A}, C_i >\models \psi[b, a_1, \ldots, a_n]\} \in U \Rightarrow \{i \in I / < \mathcal{A}, C_i >\models (\exists x)\psi[a_1, \ldots, a_n]\} \in U$ ■

Observa-se que a versão do teorema de Łoś dada no lema anterior não depende do axioma de escolha; de fato, a estrutura $< \mathcal{A}, C >$ aí construída não é um ultraproduto das estruturas $< \mathcal{A}, C_i >$, no entanto, podemos observar (por sugestão do Prof. A. J. Engler) que se contruimos o ultraproduto das estruturas $< \mathcal{A}, C_i >$ módulo U, i.e. $\prod_U < \mathcal{A}, C_i > = < A^I/U, \prod_U C_i >$, então temos que $(\prod_U C_i) \cap A = \bigcup_{J \in U} \bigcap_{i \in J} C_i (= C)$. Com efeito, denotando com $^*a$ a classe de equivalência de $a (\in A)$ módulo U e usando o teorema de Łoś, temos que: $a \in (\prod_U C_i) \cap A \Leftrightarrow \prod_U < \mathcal{A}, C_i >\models {}^*a \in \prod_U C_i \Leftrightarrow \{i \in I / a \in C_i\} \in U \Leftrightarrow a \in C$.

Por outro lado, deve-se observar também que se φ é uma fórmula sem quantificadores, então, as implicações dadas em (a) e (b) do lema anterior, são equivalências.

Na realidade, o lema anterior pode ser generalizado da seguinte maneira: sejam $\mathcal{A} = < A, \ldots > \in St^\tau$, $\{P_k\}_{k \in K}$ uma coleção de predicados n_k-ádicos e $L = L^{\tau'}_{\omega\omega}$ onde $\tau' = \tau \cup \{P_k\}_{k \in K}$; se $\{< \mathcal{A}, \{R^i_k\}_{k \in K} >\}_{i \in I}$ é uma família de estruturas em $St^{\tau'}$ e U é um ultrafiltro sobre I, definindo para cada $k \in K, R_k = \{< a_1, \ldots, a_{n_k} > \in A^{n_k} / \{i \in I / R^i_k(a_1, \ldots, a_{n_k})\} \in U\} (= \bigcup_{J \in U} \bigcap_{i \in J} R^i_k)$ temos que a estrutura $< \mathcal{A}, \{R_k\}_{k \in K} >$ satisfaz as condições (a) e (b) dadas no lema.

2.3.2 Proposição. Seja $\{W_i\}_{i \in I}$ uma família (de ultrafiltros) em $S(B)$ e U um ultrafiltro sobre I. Seja $W = \bigcup_{J \in U} \bigcap_{i \in J} W_i$, então:

i) $W \in S(B)$, i.e. W é um ultrafiltro de B.

ii) $W = \lim_U \ W_i$.

Demonstração.

i) É consequência imediata do lema (parte (b)) pois as propriedades que caracterizam os ultrafiltros da álgebra de Boole B podem ser expressas mediante fórmulas, com forma normal prenex universal, de $L_{\omega\omega}^{\tau \cup \{P\}}$, sendo τ o tipo de B.

ii) Seja $x \in B$ e suponhamos que $W \in V_x$, então $x \in W$, logo, pela definição de W, $\{i \in I / x \in W_i\} \in U$, i.e. $\{i \in I / W_i \in V_x\} \in U$ ∎

2.3.3 Corolário. $S(B)$ é Cauchy-completo, e portanto, compacto ∎

A proposição 2.3.2 acima tem o seguinte importante significado: se $\{W_i\}_{i \in D}$ é uma rede de Cauchy em $S(B)$, então, o limite de Cauchy da rede fica univocamente determinado por $W = \bigcup_{J \in U} \bigcap_{i \in J} W_i$ (a unicidade é consequência de ser $S(B)$ um espaço de Hausdorff).

Um caso particular e de nosso interesse é quando a álgebra de Boole B é atômica, i.e. para todo $x \neq 0$ em B existe $a \in B$ átomo tal que $a \leq x$. Pode-se provar facilmente que, no caso de a ser um átomo, então o filtro $W_a = \{x \in B / x \geq a\}$ é um ultrafiltro, chamado de *ultrafiltro principal*. Com efeito, se $x \notin W_a$, então, $x \ngeq a$, i.e. $x \wedge a \neq a$, mas $x \wedge a \leq a$, logo, por ser a um átomo, $x \wedge a = 0$, i.e. $a \leq x^*$, logo, $x^* \in W_a$. Mais ainda, se a é um átomo, então W_a é um ponto isolado de $S(B)$: com efeito, $V_a = \{W \in S(B) / a \in W\} = \{W \in S(B) / W_a \subseteq W\} = \{W \in S(B) / W = W_a\} = \{W_a\}$.

Estes preliminares são necessários para a seguinte proposição.

2.3.4 Proposição. Seja B uma álgebra de Boole atômica, então:

i) A coleção de ultrafiltros principais de $S(B)$ é densa em $S(B)$.

ii) Para todo $W \in S(B)$, existe uma família de átomos $\{a_i\}_{i \in I}$ em B e um ultrafiltro U sobre I, tal que $W = \lim_U \ W_{a_i} (= \bigcup_{J \in U} \bigcap_{i \in J} W_{a_i})$.

Demonstração.

i) Seja $V_x \neq \phi$ um membro da base de $S(B)$, então $x \neq 0$ e existe $W \in V_x$, i.e. $x \in W$. Como $x \neq 0$ e B é atômica, existe um átomo $a \in B$ tal que $a \leq x$, logo, $x \in W_a$, i.e. $W_a \in V_x$.

ii) Se $W \in S(B)$ então está no fecho da coleção de ultrafiltros principais, logo, existe uma rede $\{W_{a_i}\}_{i \in I}$ tal que $\lim_i W_{a_i} = W$, portanto, pelo lema de convergência, se U é um ultrafiltro livre sobre I, $W = \lim_U W_{a_i}$ ∎

2.3.5 Consequências.

Todos estes fatos a respeito do espaço de Stone de uma álgebra de Boole, tem consequências interessantes na interpretação da convergência nos diversos exemplos considerados na seção 2.1.

Por exemplo, no caso dos quocientes $St^\tau(L)/\equiv_L$, para L compacta, temos o seguinte (denotando com $[\mathcal{A}]$ a classe de equivalência da estrutura $\mathcal{A}$): se $\{[\mathcal{A}_i]\}_{i \in I}$ é uma família em $St^\tau(L)/\equiv_L$ e U é um ultrafiltro sobre I, então, $\lim_U [\mathcal{A}_i] = \bigcup_{J \in U} \bigcap_{i \in J} [\mathcal{A}_i] = [\mathcal{A}^*]$ para alguma estrutura $\mathcal{A}^*$.

No caso de ser $L = L_{\omega\omega}$, temos que $\lim_U [\mathcal{A}_i] = [\prod_U \mathcal{A}_i] = [\lim_{J \in U} \prod_{i \in J} \mathcal{A}_i]$. Esta última igualdade sugere a idéia que $\lim_U$ é um certo tipo de limite indutivo, e reforça a problemática da construção de tal limite para uma lógica compacta qualquer.

No caso compacto geral, fazendo a identificação $[\mathcal{A}] \leftrightarrow Th(\mathcal{A})$, podemos concluir que à família $\{[\mathcal{A}_i]\}_{i \in I}$ do espaço $St^\tau(L)/\equiv_L$, lhe corresponde a família $\{Th(\mathcal{A}_i)\}_{i \in I}$ no espaço de teorias completas de L^τ, no qual $\lim_U Th(\mathcal{A}_i) = \bigcup_{J \in U} \bigcap_{i \in J} Th(\mathcal{A}_i) = Th(\mathcal{A}^*)$; i.e. $\lim_U Th(\mathcal{A}_i) = Th(\mathcal{A}^*)$ onde $\mathcal{A}^* \in \lim_U \mathcal{A}_i$.

Vejamos o caso dos espaços de n-tipos $S_nT (= S_n Th_L(< \mathcal{A}, y >_{y \in Y})$ com $\mathcal{A} \in St^\tau)$. Em geral, se $\{p_i\}_{i \in I}$ é uma família de n-tipos e U é um ultrafiltro sobre I, então $\lim_U p_i = \bigcup_{J \in U} \bigcap_{i \in J} p_i$ é um n-tipo e é o limite indutivo dos n-tipos p_i.

G. Sacks em [S] pag. 73 demonstra que se $\mathcal{A}$ é uma estrutura infinita e $p \in S_nT$, então, existe uma extensão elementar $\mathcal{B} \succ \mathcal{A}$ tal que p é realizado em $\mathcal{B}$. A demonstração de Sacks é uma prova de existência usando um argumento de compacidade. A seguir melhoraremos este resultado explicitando $\mathcal{B}$ como uma ultrapotência de $\mathcal{A}$, cujo conjunto de índices é o mesmo que o das redes que convergem a p em S_nT.

2.3.5.1 Proposição. Seja $\mathcal{A}$ uma estrutura infinita e $p \in S_nT$. Então, existe um conjunto dirigido I tal que para qualquer ultrafiltro U livre sobre I, p é realizado em $\mathcal{A}^I/U$.

Demonstração. É consequência do fato que S_nT é o espaço de Stone de uma álgebra de Boole atômica, correspondendo aos seus átomos os tipos principais.

Seja $p \in S_nT$, como a coleção de tipos principais é densa temos que existe uma família $\{\vec{a_i}\}_{i\in I} \subseteq A^n$ tal que $p = \lim_i p_{\vec{a_i}}$. Então, pelo Lema de Convergência, para qualquer ultrafiltro U livre sobre $I, p = \lim_U p_{\vec{a_i}} = \bigcup_{J\in U}\bigcap_{i\in J} p_{\vec{a_i}} = \{\varphi(x_1,\ldots,x_n)/\{i \in I/\varphi \in p_{\vec{a_i}}\} \in U\} = \{\varphi(x_1,\ldots,x_n)/\{i \in I/\mathcal{A} \models \varphi[\vec{a_i}]\} \in U\}$.

Seja $\vec{f} : I \to A^n$ definida por $\vec{f}(i) = \vec{a_i}$, e ${}^*\vec{f}$ a classe de equivalência de $\vec{f}$ módulo U, então, pelo teorema de Łoś temos que $\mathcal{A}^I/U \models \varphi[{}^*\vec{f}] \Leftrightarrow \{i \in I/\mathcal{A} \models \varphi[\vec{a_i}]\} \in U$, portanto, $p = \{\varphi(x_1,\ldots,x_n)/\mathcal{A}^I/U \models \varphi[{}^*\vec{f}]\}(= p_{{}^*\vec{f}})$, i.e. p é realizado por ${}^*\vec{f}$ em $\mathcal{A}^I/U$ ∎

Como consequência da proposição anterior temos que se S_nT tem base enumerável e $p \in S_nT$, então, para todo ultrafiltro U não-principal sobre ω, p é realizado em $\mathcal{A}^\omega/U$, i.e. $\mathcal{A}^\omega/U$ realiza todos os n-tipos de $< \mathcal{A}, y >_{y\in Y}$.

Consideremos agora o caso do espectro real $Spec_r(A)$ de um anel A com a topologia construtiva. A mesma análise é válida para o espectro primo de um anel de Boole. Temos que se $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ é uma família de cones primos em A e U é um ultrafiltro sobre I, então, $\alpha^* = \text{c-}\lim_U \alpha_i$ (o U-limite a respeito da topologia construtiva) $= \bigcup_{J\in U}\bigcap_{i\in J}\alpha_i$ é um cone primo e é o limite indutivo dos α_i, i.e. α^* é único e satisfaz o teorema de Łoś respectivo: para todo $a \in A$, $\alpha^* \in H_A(a) \Leftrightarrow \{i \in I/\alpha_i \in H_A(a)\} \in U$.

É interessante observar que se $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ é uma família de cones primos em A e U é um ultrafiltro sobre I, então, o ultraproduto $\prod_U \alpha_i$ é um cone primo em $A^I/U(\supseteq A)$ tal que $(\prod_U \alpha_i) \cap A = \alpha^*$.

Isto estabelece a compacidade da topologia construtiva de $Spec_r(A)$ mediante sua completude de Cauchy. Como consequência temos que a topologia ordinária sobre $Spec_r(A)$ é também compacta por ser menos fina.

Se denotamos com o-$\lim_U$ o U-limite a respeito da topologia ordinária, então, dada qualquer família $\{\alpha_i\}_{i\in I} \subseteq Spec_r(A)$, temos que o-$\lim_U \alpha_i \neq \phi$ (podendo não ser um conjunto unitário por não ser $Spec_r(A)$ um espaço de Hausdorff), e para qualquer $\beta \in$ o-$\lim_U \alpha_i$ e qualquer $a \in A$: se $\beta \in H_A(a)$, então $\{i \in I/\alpha_i \in H_A(a)\} \in U$ (i.e. $\alpha^* \in H_A(a)$), logo, para qualquer $a \in A$, se $a \notin -\beta$, então, $a \notin -\alpha^*$, portanto, $\alpha^* \subseteq \beta$, i.e. o-$\lim_U \alpha_i = \overline{\{\alpha^*\}}$ (o fecho na topologia ordinária), ou seja, o-$\lim_U \alpha_i = \overline{\{\text{c} - \lim_U \alpha_i\}}$.

CAPÍTULO 3

COMPACTIFICAÇÃO DE ESPAÇOS TOPOLÓGICOS MEDIANTE ULTRAFILTROS LOCAIS

No capítulo 2 definimos, para cada família de elementos do espaço X, $\{x_i\}_{i\in I}$ (com I um conjunto), e todo ultrafiltro U sobre I, a coleção $\lim_U x_i$. É claro que esta pode ser definida para qualquer conjunto K contido em X e qualquer ultrafiltro U sobre K, obtendo $\lim_U K$ (basta considerar K como uma família cujos elementos são parametrizados por eles próprios).

Por outro lado, dada uma família $\{x_i\}_{i\in I}$ e U um ultrafiltro sobre I, entendendo a família como uma função $x : I \to X$ tal que para todo $i \in I, x(i) = x_i$, podemos definir $K_x = x[I]$ e $U_x = \{A \subseteq x[I]/x^{-1}[A] \in U\}$. É claro que K_x é um conjunto contido em X e que U_x é um ultrafiltro sobre K_x. Além disso, temos o seguinte: para todo $V \in \mathcal{B}, x^{-1}[\{z \in x[I]/z \in V\}] = \{i \in I/x_i \in V\}$, de onde $\lim_U x_i = \lim_{U_x} K_x$. Portanto, os pares (K, U) com K um conjunto contido em X e U um ultrafiltro sobre K, determinam completamente os U-limites de famílias de elementos em X. Para estes pares, a definição de $\lim_U$ adota a seguinte forma: $x \in \lim_U K \Leftrightarrow$ para todo $V \in \mathcal{B}$ com $x \in V, K \cap V \in U$, o que implica, no caso zero-dimensional, que $\lim_U K = \bigcap\{V \in \mathcal{B}/K \cap V \in U\}$. Observa-se que $K \cap V \in U$ se e só se existe $A \in U$ tal que $A \subseteq V$, fato que será importante para comparar o nosso método de compactificação (a seguir) com as compactificações tipo Wallman.

Pelo exposto, os pares (K, U) serão chamados de *ultrafiltros locais* sobre X. Eles constituirão os elementos "ideais" que teremos de acrescentar ao espaço X para compactificá-lo, de tal maneira que toda coleção $\lim_U K$ no novo espaço seja não-vazia.

Neste capítulo exporemos o nosso método de compactificação mediante ultrafiltros locais para espaços arbitrários em geral, e para espaços z-d em especial. Estudaremos algumas propriedades topológicas desta compactificação, como uma certa propriedade de extensão de funções contínuas, e a aplicaremos à análise da compactificação de lógicas regulares pequenas. Finalmente, analisaremos o completamento de certas lógicas que admitem uma uniformidade tipo Fraïssé.

No decorrer deste capítulo desenvolveremos algumas técnicas topológicas especiais, como a de quase-homeomorfismos, que nos permitirão analisar de um ponto de vista topológico e lógico, a relação estreita que existe entre alguns dos espaços considerados.

É importante salientar que o nosso método de compactificação e as técnicas topológicas desenvolvidas são idôneas para o estudo dos espaços não-Hausdorff. Neste capítulo, se X é um espaço qualquer, $\mathcal{B}$ é uma base de X e $x, y \in X$, então definimos $x \equiv y$ se e somente se x e y pertencem aos mesmos abertos, i.e. para todo $V \in \mathcal{B}, x \in V \Leftrightarrow y \in V$. Prova-se facilmente que $x \equiv y$ equivale a $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$, e no caso zero-dimensional, a $(x,y) \in \cap\{\mathcal{U}_V / V \in \mathcal{B}\}$.

3.1 MÉTODO DE COMPACTIFICAÇÃO

O seguinte é um método de compactificação de todo espaço topológico (grande com topologia pequena) sem nenhuma condição de separação. No caso zero-dimensional, sob certas condições sobre a base de clopens, ele preserva a zero-dimensionalidade do espaço.

Seja X um espaço topológico qualquer e $\mathcal{B}$ uma base de X fechada por interseções finitas e contendo X e ϕ (pode-se considerar a própria topologia gerada por $\mathcal{B}$).

Construiremos uma compactificação γX de X onde toda família de elementos de X U-convirja em γX e onde todo ponto de γX seja U-limite de alguma família em X. Deste ponto de vista, γX pode ser considerado o "completamento" de X com relação à U-convergência.

3.1.1 Definição.

Seja γX a coleção de todos os pares (K,U) onde K é um conjunto contido em X e U é um ultrafiltro sobre K. Definimos sobre γX a seguinte base: $\mathcal{B}^* = \{V^* \,/\, V \in \mathcal{B}\}$ onde $V^* = \{(K,U) \in \gamma X \;/\; K \cap V \in U\}$.

Esta base é fechada para interseções finitas e, no caso zero-dimensional, se $\mathcal{B}$ é fechada por complementares, $\mathcal{B}^*$ também o é, pois, $V^* \cap W^* = (V \cap W)^*$ e $(V^*)^c = (V^c)^*$. Além disso, $\phi^* = \phi$ e $X^* = \gamma X$. Observa-se que a topologia de γX depende fortemente da base $\mathcal{B}$ considerada em X.

Por exemplo, consideremos X um espaço discreto infinito e $\mathcal{B} = \{\{x\}/x \in X\} \cup \{\phi, X\}$. É evidente que X é um espaço z-d e $\mathcal{B}$ é uma base de clopens de X fechada por interseções finitas e contendo ϕ e X, mas não é fechada por complementares.

Vejamos que $\mathcal{B}^*$ não é base de clopens de γX: consideremos $\{x\}^* = \{(K,U)/K \cap \{x\} \in U\} = \{(K,U)/x \in K$ e $U = U_x$ (o ultrafiltro principal gerado por x)$\}$. Seja $(M,W) \in \{x\}^{*c}$ com M infinito e W não-principal sobre M. Se $\{x\}^{*c}$ fosse aberto, existiria $y \in X$ tal que $(M,W) \in \{y\}^* \subseteq \{x\}^{*c}$, o que é impossível pois $\{y\}^*$ só consta de pares (K,U) com $y \in K$ e $U = U_y$, portanto, $\{x\}^*$ não é fechado, i.e. não é um clopen de γX.

Consideremos a seguinte aplicação injetora $\varphi : X \to \gamma X$ dada por $\varphi(x) = (\{x\}, \{\{x\}\})$. Verifica-se facilmente que: (a) $\varphi(x) \in V^* \Leftrightarrow x \in V$, (b) φ é um mergulho de X em γX pois $V^* \cap \varphi[X] = \varphi[V]$, e (c) $\varphi[X]$ é denso em γX, já que se $(K,U) \in V^*$ existe $x \in K$ tal que $\varphi(x) \in V^*$.

A seguir daremos duas demonstrações do fato de γX ser compacto; a primeira, mais geral, para o caso de ser X uma classe (possivelmente própria), explicitando o ponto onde se requer a aplicação do axioma de escolha AC^w; a segunda, para o caso de ser X um conjunto, mencionando que neste caso apenas se requer a aplicação do teorema do ultrafiltro, o qual é essencialmente mais fraco que o axioma de escolha.

3.1.2 Proposição. γX é compacto, sendo X uma classe própria.

Demonstração. Seja $\{V_i^{*c}\}_{i\in I}$ uma coleção de fechados básicos com a PIF (observe-se que I é um conjunto). Temos que provar que $\bigcap_{i\in I} V_i^{*c} \neq \phi$.

Seja $J = \mathcal{P}_\omega(I)$ (partes finitas de I) e para cada $\Delta \in J$ escolhemos (baseados no axioma AC^w) um elemento $(K_\Delta, U_\Delta) \in \bigcap_{i\in\Delta} V_i^{*c}$. Temos que $\{K_\Delta\}_{\Delta\in J}$ é uma coleção de conjuntos e $K = \bigcup_{\Delta\in J} K_\Delta$ é um conjunto.

Afirmação 1. A família $\{K \cap V_i^c\}_{i\in I}$ tem a PIF.

Com efeito, seja $\Delta \in J$, então, como $(K_\Delta, U_\Delta) \in \bigcap_{i\in\Delta} V_i^{*c}$ temos que para $i \in \Delta$, $K_\Delta \cap V_i \notin U_\Delta$, i.e. $K_\Delta \cap V_i^c \in U_\Delta$, logo, $K_\Delta \cap (\bigcap_{i\in\Delta} V_i^c) \in U_\Delta$, em particular, $K_\Delta \cap (\bigcap_{i\in\Delta} V_i^c) \neq \phi$, portanto, $\bigcap_{i\in\Delta}(K \cap V_i^c) = K \cap (\bigcap_{i\in\Delta} V_i^c) \neq \phi$ pois $K_\Delta \subseteq K$.

Seja $M = \bigcup_{i\in I}(K \cap V_i^c)$, então, M é um conjunto e existe um ultrafiltro W sobre M tal que $\{K \cap V_i^c\}_{i\in I} \subseteq W$.

Afirmação 2. $(M, W) \in \bigcap_{i\in I} V_i^{*c}$.

Com efeito, seja $j \in I$, então, como $K \cap V_j^c \in W$ e $M \cap V_j^c = \bigcup_{i\in I}(K \cap V_i^c) \cap V_j^c = \bigcup_{i\in I}(K \cap V_i^c) \cap (K \cap V_j^c) = K \cap V_j^c$ temos que $M \cap V_j^c \in W$, i.e. $M \cap V_j \notin W$, logo, $(M, W) \in V_j^{*c}$. Portanto, $(M, W) \in \bigcap_{i\in I} V_i^{*c}$ ∎

3.1.3 Proposição. γX é compacto, sendo X um conjunto.

Demonstração. Seja $\{V_i^{*c}\}_{i\in I}$ uma coleção de fechados básicos com a PIF.

Afirmação 1. $\{V_i^c\}_{i\in I}$ tem a PIF.

Com efeito, se $i_1, \ldots, i_n \in I$, existe $(K, U) \in V_{i_1}^{*c} \cap \ldots \cap V_{i_n}^{*c}$, ie. $K \cap (V_{i_1}^c \cap \ldots \cap V_{i_n}^c) \in U$, logo, existe $x \in K$ tal que $x \in V_{i_1}^c \cap \ldots \cap V_{i_n}^c$.

Seja $M = \bigcup_{i\in I} V_i^c$, então existe um ultrafiltro W sobre M que contém $\{V_i^c\}_{i\in I}$.

Afirmação 2. $(M,\ W) \in \bigcap_{i\in I} V_i^{*c}$.

Basta observar que para cada $i \in I$, $M \cap V_i^c = V_i^c \in W$ ∎

Na realidade, a prova da proposição 3.1.3 reproduz a prova da proposição 3.1.2, tomando $K = X$, o que não precisa do axioma AC^w.

3.1.4 Observação. Podemos modificar a construção de γX da seguinte maneira: seja $\kappa = |\mathcal{B}|$ e definamos $\lambda X = \{(K,U)/K \subseteq X, |K| \leq \kappa$ e U é um ultrafiltro sobre $K\}$, sendo $V^* = \{(K,U) \in \lambda X/K \cap V \in U\}$ para cada $V \in \mathcal{B}$. Então, a prova que λX é compacto segue os mesmos passos que na proposição 3.1.2, observando que os conjuntos K e M definidos aí têm cardinalidade $\leq \kappa$. No caso de ser X um conjunto, a demonstração da proposição 3.1.3 já não é mais válida, portanto, para preservar a limitação dos conjuntos, tanto para X classe própria ou conjunto, precisa-se do axioma AC^w. O mergulho de X em λX é o mesmo dado acima.

Por exemplo, se X tem base enumerável, bastam subconjuntos enumeráveis de X para compactifcá-lo.

Esta forma alternativa de compactificar X é muito importante porque permitirá calcular ou controlar a cardinalidade de λX em função da cardinalidade de X e, no caso da teoria de modelos, porque permitirá limitar as construções que envolvem "ultraprodutos" a ultraprodutos de cardinalidade máxima.

3.1.5 Proposição. Se X é compacto zero-dimensional, então, para todo $(K,U) \in \gamma X$ existe $x \in \overline{K}$ (o fecho em X) tal que $\varphi(x) \equiv (K,U)$, i.e. para todo $V \in \mathcal{B}, \varphi(x) \in V^* \Leftrightarrow (K,U) \in V^*$, o que equivale a termos $cl\{\varphi(x)\} = cl\{(K,U)\}$ onde cl denota o fecho em γX.

Demonstração. Seja $(K,U) \in \gamma X$ e consideremos a família de fechados de $\overline{K}$: $\{\overline{K} \cap V/(K,U) \in V^*\}$.

Verifica-se facilmente que essa família tem a PIF. Em consequência, como $\overline{K}$ é compacto (já que X o é) existe $x \in \bigcap\{\overline{K} \cap V/(K,U) \in V^*\} = \overline{K} \cap \bigcap\{V/(K,U) \in V^*\}$, i.e. $x \in \overline{K}$ e $\varphi(x) \in \bigcap\{V^*/(K,U) \in V^*\}$, logo, para todo $V, (K,U) \in V^* \Rightarrow \varphi(x) \in V^*$, o que implica, tomando complementares, $\varphi(x) \in V^* \Leftrightarrow (K,U) \in V^*$, i.e. $\varphi(x) \equiv (K,U)$ ∎

A proposição anterior têm como consequência que se X é Hausdorff (compacto, zero-dimensional), então $\gamma X/\equiv$ é homeomorfo a X. Em geral, se X é compacto, γX não se reduz a X, por outro lado, γX nunca é Hausdorff, mesmo que X fôsse, como veremos a seguir.

Seja $(K,U) \in \gamma X$ e $J \subseteq K$, então $U\lceil J = \{A \cap J/A \in U\}$ é um ultrafiltro sobre J que satisfaz trivialmente: para todo $A \subseteq K, A \in U$ se e só se $A \cap J \in U\lceil J$.

3.1.6 Proposição. Para todo $(K,U) \in \gamma X$ e todo $J \subseteq K, (K,U) \equiv (J, U\lceil J)$, em particular, se $x \in K$ e U_x é o ultrafiltro principal (sobre K) gerado por x, então, $(K, U_x) \equiv (\{x\}, \{\{x\}\})$ (comparar com [B-S] pag. 123, Th. 22).

Demonstração.

i) Seja $(K,U) \in V^*$, i.e. $K \cap V \in U$, suponhamos $J \cap V \notin U\lceil J$, então, para todo $A \in U, J \cap V \neq A \cap J$, em particular, para $A = K \cap V$ temos que $J \cap V \neq K \cap V \cap J = J \cap V$ (pois $J \subseteq K$), uma contradição, logo, $(J, U\lceil J) \in V^*$.

ii) Seja $(J, U\lceil J) \in V^*$, i.e. $J \cap V \in U\lceil J$, então, existe $A \in U$ tal que $J \cap V = A \cap J$; suponhamos que $K \cap V \notin U$, então, $K \cap V^c \in U$, logo, $K \cap V^c \cap J \in U\lceil J$, i.e. $J \cap V^c \in U\lceil J$, portanto, $J \cap V \notin U\lceil J$, uma contradição, em consequência, $(K,U) \in V^*$.

Para o caso de (K, U_x) basta tomar $J = \{x\}$ de onde $U_x\lceil J = \{\{x\}\}$ ∎

Como consequência desta proposição temos que, γX não é um espaço T_1 (e portanto não é Hausdorff) pois, em geral, $cl\{(K,U)\} \neq \{(K,U)\}$.

3.1.7 Proposição. Seja $(x_i)_{i \in I}$ uma família em X entendida como uma função $x : I \to X$, e U um ultrafiltro sobre I.

Seja $K_x = x[I]$ e $U_x = \{A \subseteq K_x \ / \ x^{-1}[A] \in U\}$.

Então, identificando $x_i (\in X)$ com $\varphi(x_i)$ $(\in \gamma X)$, temos que, em γX: $(K_x, \ U_x) \in \lim_U x_i$, i.e. toda família de elementos de X U-converge em γX.

Demonstração. Observando que são equivalentes $x_i \in V$ com $\varphi(x_i) \in V^*$, devemos provar que para todo V^* com $(K_x, \ U_x) \in V^*$, $\{i \in I \ / \ x_i \in V\} \in U$.

Com efeito, se $(K_x, \ U_x) \in V^*$, então $K_x \cap V \in U_x$, logo, por definição, $x^{-1}[K_x \cap V] \in U$, mas $x^{-1}[K_x \cap V] = \{i \in I \ / \ x_i \in V\}$, portanto, $\{i \in I \ / \ x_i \in V\} \in U$ ∎

3.1.8 Proposição. Em γX : $\lim_U K = cl\{(K,U)\}$, em particular, se $(K, \ U) \in \gamma X$, então $(K, \ U) \in \lim_U K$, i.e. todo ponto de γX é U-limite de uma família em X.

Demonstração. $(A, W) \in \lim_U K \Leftrightarrow$ para todo V^* com $(A, W) \in V^*$: $\{x \in K / x \in V\} \in U$, mas, $\{x \in K / x \in V\} \in U \Leftrightarrow K \cap V \in U \Leftrightarrow (K,U) \in V^* \Leftrightarrow V^* \cap \{(K,U)\} \neq \phi$, logo, $(A, W) \in \lim_K U \Leftrightarrow$ para todo V^* com $(A, W) \in V^*$: $V^* \cap \{(K,U)\} \neq \phi \Leftrightarrow (A, W) \in cl\{(K,U)\}$ ∎

3.1.9 Observação. γX é uma compactificação de X em qualquer caso, zero-dimensional ou não. No caso zero-dimensional é também o completamento de Cauchy correspondente. No caso arbitrário, γX pode ser considerado como o completamento de X a respeito da

U-convergência como já dissemos, onde toda família de elementos de X U-converge a algum limite em γX, e todo ponto de γX é U-limite de alguma família de elementos de X.

O processo de identificar elementos, fundamentalmente em $\gamma X \backslash X$, mediante a relação $\equiv$, pode reduzir em forma apreciável a compactificação de X. O estudo destas compactificações reduzidas não será feito aqui.

Por exemplo, para efeitos da teoria de modelos, além da redução dada na proposição 3.1.6, podemos formular o seguinte.

3.1.10 Proposição. Seja K um conjunto infinito contido em X e U um ultrfiltro não-principal sobre K, então, existe $J \subseteq K$ e W ultrafiltro uniforme sobre J (i.e. para todo $A \in W : |A| = |J|$) tal que $(K, U) \equiv (J, W)$ (comparar com [B-S] pag. 124 cor. 2.4).

Demonstração. Seja $\alpha = \min\{|A|/A \in U\}$ e seja $J \in U$ qualquer com $|J| = \alpha$, então, pela proposição 3.1.6, $(K, U) \equiv (J, U\lceil J)$ (se U fôsse principal, então $\alpha = 1$ e $J = \{x\}$ com $x \in K$, sendo $U\lceil J = \{\{x\}\}$ que é uniforme, logo, o caso que interessa é quando U é não-principal).

Afirmação. $U\lceil J$ é uniforme, i.e. para todo $B \in U\lceil J, |B| = \alpha$.

Com efeito, se $B \in U\lceil J$, então, existe $A \in U$ tal que $B = A \cap J$. Temos que $|B| = |A \cap J| \leq |J| = \alpha$, por outro lado, como $A, J \in U$, temos que, $B \in U$, logo, $|B| \geq \alpha$ pois α é mínimo, portanto, $|B| = \alpha$ ∎

Observa-se que a proposição 3.1.6 reduz os ultrafiltros principais sobre K a elementos de X, e a proposição 3.1.10 reduz os ultrafiltros não-principais a ultrafiltros uniformes.

Por outro lado, se X é um conjunto, podemos ter a seguinte redução.

3.1.11 Proposição. Para todo $(K, U) \in \gamma X$, existe um ultrafiltro W sobre X tal que $(K, U) \equiv (X, W)$.

Demonstração. Seja $(K, U) \in \gamma X$, então U, como coleção de subconjuntos de X, é uma família com a PIF, logo, existe W ultrafiltro sobre X tal que $W \supseteq U$.

i) Seja $(X, W) \in V^*$, i.e. $V \in W$, e suponhamos que $K \cap V \notin U$, então, $K \cap V^c \in U$, logo, $K \cap V^c \in W$, portanto, $\phi = K \cap V^c \cap V \in W$, uma contradição, em consequência, $(K, U) \in V^*$.

ii) Suponhamos $(X, W) \notin V^*$, i.e. $V \notin W$, então $V^c \in W$. Se $K \cap V \in U$, então $K \cap V \in W$, logo, $\phi = K \cap V \cap V^c \in W$, uma contradição, portanto, $(K, U) \notin V^*$ ∎

Observa-se que se $(K, U) = (\{x\}, \{\{x\}\})$, então o único ultrafiltro sobre X que extende $\{\{x\}\}$ é o ultrafiltro principal U_x, logo, $(\{x\}, \{\{x\}\}) \equiv (X, U_x)$.

Por tanto, o espaço quociente $\gamma X/\equiv$ pode ser identificado com a coleção $\{U/U$ é ultrafiltro sobre $X\}$ estando X mergulhado mediante a aplicação $x \mapsto U_x$. A topologia sobre este espaço é dada por: para cada $V \in \mathcal{B}, V^* = \{U/V \in U\} = \{U/$ existe $A \in U$ com $A \subseteq V\}$. Observa-se que a topologia gerada é uma subtopologia da compactificação de Wallman de X, suposto X munido da topologia discreta (cf. [En] pag. 231).

3.2 PROPRIEDADES FUNTORIAIS E EXTENSÃO DE FUNÇÕES CONTÍNUAS

A seguir definiremos um funtor $*$ da categoria dos espaços topológicos $< X,\ \mathcal{B} >$ com uma base distinguida na categoria dos espaços compactos também com uma base distinguida. Um morfismo nesta categoria é uma função contínua $f :< X,\ \mathcal{B} > \rightarrow < Y,\ \mathcal{C} >$ que preserva as bases respectivas, i.e. se $W \in \mathcal{C}$, então $f^{-1}[W] \in \mathcal{B}$. Diremos simplesmente que f é s-contínua (strongly continuous). Observa-se que se os espaços considerados são z-d e as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são bases de clopens, então, pela proposição 2.1.9, f é s-contínua se e só se f é s-uniformemente contínua. Analogamente, definem-se função s-aberta e s-homeomorfismo.

3.2.1 Definição. Define-se $f^* :< X^*,\ \mathcal{B}^* > \rightarrow < Y^*,\ \mathcal{C}^* >$, onde $X^* = \gamma X$ e $Y^* = \gamma Y$, de modo que o seguinte diagrama comute (sendo φ e ψ as imersões canônicas):

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ X^* & \xrightarrow[f^*]{} & Y^* \end{array}$$

Se $(K,\ U) \in X^*$, $f^*(K,\ U) = (K_f,\ U_f)$ onde $K_f = f[K]$ e $U_f = \{A \subseteq f[K]\ /\ K \cap f^{-1}[A] \in U\}$.

f^* tem as seguintes propriedades: (a) U_f é um ultrafiltro sobre K_f, (b) $f^* \circ \varphi = \psi \circ f$, i.e. $f^* \restriction X = f$, (c) $(id_X)^* = id_{X^*}$, (d) $U_{g \circ f} = (U_f)_g$, donde $(g \circ f)^* = g^* \circ f^*$.

Na definição anterior podem ser substituídos γX e γY por λX e λY respectivamente, pois se $|K| \leq \kappa$, então, $|f[K]| \leq \kappa$.

3.2.2 Proposição. f^* é s-contínua.

Demonstração. Provaremos que para cada $W \in \mathcal{C}, (f^*)^{-1}[W^*] = (f^{-1}[W])^*$. Seja $W^* = \{(K',\ U') \in Y^*\ /\ K' \cap W \in U'\} \in \mathcal{C}^*$, então $(f^*)^{-1}[W^*] = \{(K,\ U) \in X^*\ /\ f(K,\ U) \in W^*\} = \{(K,\ U) \in X^*\ /\ (K_f,\ U_f) \in W^*\} = \{(K,\ U) \in X^*\ /\ K_f \cap W \in U_f\} = \{(K,\ U) \in X^*\ /\ K \cap f^{-1}[f[K] \cap W] \in U\} = \{(K,\ U) \in X^*\ /\ K \cap f^{-1}[W] \in U\} = (f^{-1}[W])^* \in \mathcal{B}^*$ ∎

A seguir daremos os resultados referentes à propriedade de extensão da compactificação construída.

3.2.3 Lema (X. Caicedo). Seja X um espaço regular com τ a topologia sobre X, K um conjunto contido em X e U um ultrafiltro sobre K. Então, em X : $\lim_U K = \bigcap\{\overline{V}/V \in \tau$ e $K \cap V \in U\}$ (a barra denota o fecho em X).

Demonstração.

i) Seja $x \in \lim_U K$, i.e. para todo $V \in \tau$ com $x \in V, K \cap V \in U$, e seja $V \in \tau$ com $K \cap V \in U$, se $x \notin \overline{V}$, então $x \in \overline{V}^c$ que é aberto, logo, por ser X um espaço regular, existe $W \in \tau$ tal que $x \in W \subseteq \overline{W} \subseteq \overline{V}^c$; como $x \in W$ temos, por hipótese, que $K \cap W \in U$, portanto, $K \cap (V \cap W) \in U$, uma contradição, pois $V \cap W = \phi$.

ii) Seja $x \in \bigcap\{\overline{V}/V \in \tau$ e $K \cap V \in U\}$ e suponhamos que $x \notin \lim_U K$, então, existe $V \in \tau$ com $x \in V$ e $K \cap V \notin U$. Seja $W \in \tau$ tal que $x \in W \subseteq \overline{W} \subseteq V$, então, $K \cap \overline{W} \notin U$, logo, $K \cap \overline{W}^c \in U$, e como $\overline{W}^c \in \tau$, por hipótese temos que $x \in \overline{\overline{W}^c}$; isto significa que todo aberto que contém x deve intersecar $\overline{W}^c$, mas $x \in W$ e $\overline{W}^c \cap W = \phi$, uma contradição ■

3.2.4 Proposição. Seja X um espaço compacto regular e γX a compactificação de X construída considerando $\mathcal{B} = \tau$ (a topologia de X). Então X é um *retrato* de γX, i.e. existe $g : \gamma X \to X$ contínua tal que $g\lceil X = id_X$ (a função g é chamada de retração).

Demonstração. Definimos $g : \gamma X \to X$ da seguinte maneira: seja $(K, U) \in \gamma X$, então, como X é compacto existe $x \in \lim_U K$, i.e. para todo $V \in \tau$ com $x \in V, K \cap V \in U$; definimos $g(K, U) = x$ (observar que a escolha de x é arbitrária). Se $(K, U) = (\{z\}, \{\{z\}\})$ com $z \in X$, temos que $\bigcap\{\overline{V}/V \in \tau$ e $\{z\} \cap V \in \{\{z\}\}\} = \bigcap\{\overline{V}/V \in \tau$ e $z \in V\}$, logo, neste caso definimos $g(K, U) = z$ obtendo que $g\lceil X = id_X$.

Provaremos que g é contínua em (K, U): seja $V \in \tau$ tal que $g(K, U) = x \in V$, então, como X é regular, existe $W \in \tau$ tal que $W \subseteq \overline{W} \subseteq V$. É claro que $(K, U) \in W^*$ pois, por definição de $x, K \cap W \in U$.

Afirmação. $g[W^*] \subseteq V$.

Com efeito, seja $(K_1, U_1) \in W^*$, então, $K_1 \cap W \in U_1$, logo, como $x_1 = g(K_1, U_1) \in \lim_{U_1} K_1$, pelo lema, $x_1 \in \overline{W} \subseteq V$, portanto, $g(K_1, U_1) \in V$ ■

Se o espaço X é zero-dimensional, então o resultado anterior pode ser melhorado substancialmente. Neste caso, o Lema 3.2.3 pode ser reformulado da seguinte maneira: sendo X um espaço z-d, se K é um conjunto contido em X e U é um ultrafiltro sobre K, então, em X, $\lim_U K = \bigcap\{V \in \mathcal{B}/K \cap V \in U\}$.

3.2.5 Proposição. Se X é uma espaço z-d compacto, então existe uma aplicação $g : \gamma X \to X$ que satisfaz as seguintes propriedades:

i) g é s-contínua e $g\lceil X = id_X$ (identificando X com $\varphi[X]$), em particular, X é um retrato de γX.

ii) g é s-aberta.

iii) Para todo $V \in \mathcal{B} : g^{-1}[g[V^*]] = V^*$.

iv) g é uma aplicação própria, i.e. g é fechada e se $K \subseteq X$ é compacto, então $g^{-1}[K]$ é compacto em γX.

v) γX e X tem as topologias induzida e co-induzida por g respectivamente.

Demonstração. Seja $(K,\ U) \in \gamma X$, então, pela proposição 3.1.7, $(K,\ U) \in \lim_U K$, além disso, existe $x \in X$ tal que $x \in \lim_U K$. Definimos $g(K,\ U) = x$ (observar que a escolha de x é, em princípio, arbitrária em $\lim_U K$). No caso de $(K,\ U) = (\{z\},\ \{\{z\}\})$ com $z \in X$ temos que $\bigcap\{V \in \mathcal{B} \ / \ \{z\} \cap V \in \{\{z\}\}\} = \bigcap\{V \in \mathcal{B} \ / \ z \in V\}$, logo, definimos $g(K,\ U) = z$ satisfazendo a exigência de ter $g\lceil X = id_X$.

i) Para provar a s-continuidade de g provaremos que para todo $V \in \mathcal{B} : g^{-1}[V] = V^*$.

Se $(K,\ U) \in g^{-1}[V]$, então $x = g(K,\ U) \in V$, mas como $x \in \lim_U K$ temos que, para aquele V, $K \cap V \in U$, i.e. $(K,\ U) \in V^*$.

Se $(K,\ U) \in V^*$, então, por definição, $x = g(K,\ U) \in \lim_U K = \bigcap\{W \in \mathcal{B} \ / \ K \cap W \in U\}$, em particular, como $K \cap V \in U$ temos que $x \in V$, portanto, $(K,\ U) \in g^{-1}[V]$.

ii) De (i) resulta que se $V \in \mathcal{B}$, $g[V^*] = g[g^{-1}[V]] = V$ por ser g (obviamente) sobrejetora. Portanto, g é aberta.

iii) É consequência imediata de (i) e (ii) que para todo $V \in \mathcal{B}$: $g^{-1}[g[V^*]] = g^{-1}[V] = V^*$.

iv) O fato de g ser fechada será provado em duas partes.

a) Para todo $V \in \mathcal{B}$, $g[V^{*c}]^c \in \mathcal{B}$: com efeito, provaremos que $g[V^{*c}] = V^c$; da demonstração da parte (i) resulta que $V^* = g^{-1}[V]$, donde $V^{*c} = g^{-1}[V]^c = g^{-1}[V^c]$, logo, $g[V^{*c}] = g[g^{-1}[V^c]] = V^c$ por ser g sobrejetora.

b) $g[\bigcap\limits_{i\in I} V_i^{*c}] = \bigcap\limits_{i\in I} g[V_i^{*c}]$: com efeito, $\bigcap\limits_{i\in I} V_i^{*c} = \bigcap\limits_{i\in I} g^{-1}[V_i^c] = g^{-1}[\bigcap\limits_{i\in I} V_i^c]$, logo, $g[\bigcap\limits_{i\in I} V_i^{*c}] = \bigcap\limits_{i\in I} V_i^c = \bigcap\limits_{i\in I} g[V_i^{*c}]$.

Seja $K \subseteq X$ compacto e suponhamos que $g^{-1}[K] \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i^*$, então, $K = g[g^{-1}[K]] \subseteq g[\bigcup_{i\in I} V_i^*] = \bigcup_{i\in I} g[V_i^*] = \bigcup_{i\in I} V_i$, logo, como é K compacto, existem $i_1, \ldots, i_n \in I$ tais que $K \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} V_{i_k}$, portanto, $g^{-1}[K] \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} g^{-1}[V_{i_k}] = \bigcup_{k=1}^{n} V_{i_k}^*$, ie. $g^{-1}[K]$ é compacto.

v) Basta provar que γX e X tem como bases a induzida e co-induzida por g respectivamente.

Com efeito, como para todo $V \in \mathcal{B}$ temos que $g^{-1}[V] = V^*$, então, $\mathcal{B}^* = \{V^*/V \in \mathcal{B}\} = \{g^{-1}[V]/V \in \mathcal{B}\}$ = base induzida por g; analogamente, $\mathcal{B} = \{V/V^* \in \mathcal{B}^*\} = \{V/g^{-1}[V] \in \mathcal{B}^*\}$ = base co-induzida por g $\blacksquare$

A parte (v) da proposição anterior diz que X é um quociente de γX (sempre no caso de X z-d compacto). O seguinte corolário dá o quociente explicitamente.

3.2.6 Corolário. Definindo em γX a relação de equivalência determinada por g, i.e. $(K, U) \sim_g (M, W) \Leftrightarrow g(K, U) = g(M, W)$, temos que o espaço quociente $\gamma X/g$ é s-homeomorfo a X.

Demonstração. Denotando com $[K, U]$ a classe de equivalência de (K, U) em γX, podemos definir a aplicação $\tilde{g} : \gamma X/g \to X$ por $\tilde{g}([K, U]) = g(K, U)$ que obviamente está bem definida e é uma bijeção.

Finalmente, a partir das relações encontradas na proposição anterior pode-se provar facilmente que para todo $V \in \mathcal{B}$:

$$\tilde{g}^{-1}[V] = \pi[V^*]$$

e

$$\tilde{g}[\pi[V^*]] = V$$

sendo $\pi : \gamma X \to \gamma X/g$ a projeção canônica, o que prova que $\tilde{g}$ é s-contínua e s-aberta, i.e. é um s-homeomorfismo $\blacksquare$

3.2.7 Proposição. Seja X um espaço topológico, $\mathcal{B}$ uma base de X e γX construído a partir de $\mathcal{B}$.

a) Seja Y um espaço regular compacto e $f : X \to Y$ contínua, então, existe $\tilde{f} : \gamma X \to Y$ contínua tal que $\tilde{f} \lceil X = f$.

b) Seja Y um espaço z-d compacto e $f : X \to Y$ s-contínua, então, existe $\tilde{f} : \gamma X \to Y$ s-contínua tal que $\tilde{f} \lceil X = f$.

Demonstração. Basta considerar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & & \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi & & \\ X^* & \xrightarrow[f^*]{} & Y^* & \xrightarrow[g]{} & Y \end{array}$$

Definindo $\tilde{f} = g \circ f^*$ temos que $\tilde{f}$ é contínua no caso (a) e s-contínua no caso (b) pelas proposições 3.2.2, 3.2.4 e 3.2.5, e que se $x \in X$, $\tilde{f}(x) = g(f^*(x)) = g(f(x)) = f(x)$, ie. $\tilde{f}\lceil X = f$ ■

Terminaremos esta seção enunciando um teorema de caracterização da compacidade no caso dos espaços zero-dimensionais. Este será demonstrado, no caso dos espaços de modelos, na próxima seção, no lema 3.3.11 e na proposição 3.3.15. A demonstração, no caso geral, segue os mesmos passos.

3.2.8 Proposição. Seja X um espaço z-d, então, são equivalentes:

a) X é compacto,

b) $\gamma X/\equiv$ é homeomorfo a $X/\equiv$ ■

Na seção seguinte aplica-se o método de compactificação desenvolvido nesta seção ao caso de uma lógica abstrata regular pequena. Ela copia parte essencial do artigo "Compacidad y Compactificación en Teoría de Modelos" (cf. [Ci1]), apresentado no IX Simpósio Latinoamericano de Lógica Matemática (Bahía Blanca, Argentina, 1992), e por tal motivo está escrito em espanhol. Ele reproduz, em forma adaptada, algumas das demonstrações feitas nesta seção para salientar o peculiar comportamento, no contexto lógico, das propriedades estudadas; e outras são feitas de modo diferente, por exemplo, na proposição 3.3.6 demonstra-se a propriedade de extensão de funções contínuas sem fazer uso do funtor *.

3.3 COMPACTIFICACIÓN DE $St^\tau(L)$

Para cada τ definimos $CSt^\tau = \{(K,U)/K \subseteq St^\tau$ es un "conjunto" y U es un ultrafiltro sobre $K\}$, y para cada $\varphi \in L^\tau$ definimos $\mathrm{Mod}^*(\varphi) = \{(K,U) \in CSt^\tau/\{\mathcal{A} \in K/\mathcal{A} \models \varphi\} \in U\} = \{(K,U) \in CSt^\tau/K \cap \mathrm{Mod}(\varphi) \in U\}$.

$\mathrm{Mod}^*(\varphi)$ es la colección de "Modelos Generalizados" de φ. De este punto de vista podemos definir la "verdad" (truth) de φ en (K,U) como

$$(K,U) \Vdash \varphi \Leftrightarrow (K,U) \in \mathrm{Mod}^*(\varphi) \Leftrightarrow \{\mathcal{A} \in K/\mathcal{A} \models \varphi\} \in U \Leftrightarrow K \cap \mathrm{Mod}(\varphi) \in U,$$

por lo tanto, (K, U) se comporta como un ultraproducto de K módulo U. De hecho, si $L = L_{\omega\omega}$, entonces para todo $\varphi, (K, U) \Vdash \varphi \Leftrightarrow \Pi_U K \models \varphi$, ie. $(K, U) \equiv \Pi_U K$ ($\equiv$ denota la relación de equivalencia elemental de L).

La colección $\{ \operatorname{Mod}^*(\varphi)/\varphi \in L^\tau \}$ tiene las siguientes propiedades:

i) $\operatorname{Mod}^*(\varphi) \cap \operatorname{Mod}^*(\psi) = \operatorname{Mod}^*(\varphi \wedge \psi)$

ii) $\operatorname{Mod}^*(\varphi)^c = \operatorname{Mod}^*(\neg\varphi)$

iii) $(St^\tau)^* = CSt^\tau$.

Por lo tanto, es una base de clopens para una topología pequeña cero-dimensional en CSt^τ, que es cerrada para intersecciones finitas y complementos.

Consideremos la aplicación $h : St^\tau \to CSt^\tau$ dada por $h(\mathcal{A}) = (\{\mathcal{A}\}, \{\{\mathcal{A}\}\})$.

Puede probarse facilmente lo siguiente:

a) h es inyectiva.

b) para todo $\mathcal{A} \in St^\tau$ y todo $\varphi \in L^\tau : h(\mathcal{A}) \Vdash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi$, por lo tanto, la semántica de CSt^τ extiende la semántica de St^τ (es importante observar que el lenguaje L^τ no ha cambiado al extender la semántica).

c) $\operatorname{Mod}^*(\varphi) \cap h[St^\tau] = h[\operatorname{Mod}(\varphi)]$, lo que implica que h es un homeomorfismo de St^τ sobre $h[St^\tau]$, ie. St^τ puede ser considerado como un subespacio de CSt^τ.

En lo que sigue identificaremos $h[St^\tau]$ con St^τ y $h(\mathcal{A})$ con $\mathcal{A}$.

3.3.1 Proposición. St^τ es un subespacio denso de CSt^τ.

Demonstración. Sea $\varphi \in L^\tau$ tal que $\operatorname{Mod}^*(\varphi) \neq \phi$, entonces existe $(K, U) \in \operatorname{Mod}^*(\varphi)$, ie. $\{\mathcal{A} \in K/\mathcal{A} \models \varphi\} \in U$, en particular, como U es un filtro propio, existe $\mathcal{A} \in K$ tal que $\mathcal{A} \models \varphi$, ie. (por (b)) $\mathcal{A} \Vdash \varphi$, luego, $\mathcal{A} \in \operatorname{Mod}^*(\varphi)$ ∎

La *compacidad lógica* de L^τ con respecto a la semántica extendida CSt^τ puede ser formulada de la siguiente manera: sea $\sum \subseteq L^\tau$ tal que todo subconjunto finito de $\sum$ tiene modelo generalizado (ie. en CSt^τ), entonces $\sum$ tiene modelo generalizado.

La cero-dimensionalidad de CSt^τ implica que la compacidad lógica de L^τ es equivalente a la compacidad topológica de CSt^τ.

3.3.2 Proposición. CSt^τ es compacto.

Demonstración. Sea $\{ \operatorname{Mod}^*(\varphi_i)\}_{i \in I}$ una colección (pequeña, ie. I es un conjunto) de cerrados básicos de CSt^τ con la propiedad de intersección finita.

Sea $J = \mathcal{P}_\omega(I)$ (partes finitas de I) y para cada $\Delta \in J$ "elegimos" $(K_\Delta, U_\Delta) \in \bigcap_{i\in\Delta} \mathrm{Mod}^*(\varphi_i)$.

Aqui está siendo usado el axioma de elección para clases pequeñas AC^w.

Consideremos $K = \bigcup_{\Delta\in J} K_\Delta$ el cual es un conjunto. Construiremos un ultrafiltro W sobre K de tal modo que $(K, W) \in \bigcap_{i\in I} \mathrm{Mod}^*(\varphi_i)$.

Afirmación 1. $\{K \cap \mathrm{Mod}(\varphi_i)\}_{i\in I}$ es una colección de subconjuntos de K que tiene la propiedad de intersección finita.

En efecto, sea $\Delta \in J$, entonces, como $(K_\Delta, U_\Delta) \in \bigcap_{i\in\Delta} \mathrm{Mod}^*(\varphi_i)$ tenemos que para cada $i \in \Delta, K_\Delta \cap \mathrm{Mod}(\varphi_i) \in U_\Delta$, luego, $K_\Delta \cap \mathrm{Mod}(\bigwedge_{i\in\Delta} \varphi_i) \in U_\Delta$, en particular, existe $\mathcal{A} \in K_\Delta \subseteq K$ tal que $\mathcal{A} \models \bigwedge_{i\in\Delta} \varphi_i$.

Sea W un ultrafiltro sobre K que contiene la familia $\{K \cap \mathrm{Mod}(\varphi_i)\}_{i\in I}$.

Afirmación 2. $(K, W) \in \bigcap_{i\in I} \mathrm{Mod}^*(\varphi_i)$.

En efecto, sea $i \in I$, entonces $K \cap \mathrm{Mod}(\varphi_i) \in W$, ie. por definición, $(K, W) \in \mathrm{Mod}^*(\varphi_i)$.

En consecuencia, CSt^τ es compacto ■

3.3.3 Proposición. Si St^τ es compacto, entonces para todo $(K, U) \in CSt^\tau$ existe $\mathcal{A} \in St^\tau$ tal que $\mathcal{A} \equiv (K, U)$, ie. para todo $\varphi \in L^\tau, \mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow (K, U) \Vdash \varphi$. Además, podemos escoger $\mathcal{A} \in \overline{K}$, donde $\overline{K}$ es la clausura de K en St^τ.

Demonstración. Sea $(K, U) \in St^\tau$ y consideremos la siguiente familia de cerrados de $\overline{K} : \{\overline{K} \cap \mathrm{Mod}(\varphi)/(K, U) \Vdash \varphi\}$.

Afirmación. La familia dada tiene la propiedad de intersección finita.

En efecto, sean $\varphi_1, ..., \varphi_n$ tales que $(K, U) \Vdash \varphi_i, i = 1, ..., n$, entonces $K \cap \mathrm{Mod}(\varphi_1) \in U, ..., K \cap \mathrm{Mod}(\varphi_n) \in U$, luego, $(\overline{K} \cap \mathrm{Mod}(\varphi_1)) \cap ... \cap (\overline{K} \cap \mathrm{Mod}(\varphi_n)) \in U$, en particular es $\neq \phi$.

En consecuencia, como St^τ es compacto, también $\overline{K}$ es compacto, por lo tanto, existe $\mathcal{A} \in \bigcap\{\overline{K} \cap \mathrm{Mod}(\varphi)/(K,U) \Vdash \varphi\} = \overline{K} \cap \bigcap\{\mathrm{Mod}(\varphi)/(K, U) \Vdash \varphi\}$, ie. existe $\mathcal{A} \in \overline{K}$ tal que para todo $\varphi \in L^\tau, (K, U) \Vdash \varphi \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi$, luego, considerando las negaciones, tenemos $(K, U) \Vdash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi$ ■

Hemos conseguido entonces compactificar la lógica L extendiendo la semántica. Más aún, hemos obtenido una compactificación topológica del espacio St^τ. Sin embargo, si St^τ es compacto, CSt^τ no se reduce a St^τ pues este último no es Hausdorff (ver proposición

3.3.9).

UNA APLICACIÓN

En el parágrafo anterior se ha demostrado que toda lógica (regular y pequeña) admite una semántica compacta que extiende la semántica usual.

La compacidad (lógica) de la nueva semántica, al igual que la compacidad de la lógica elemental, es importante por sus consecuencias, no solo porque permite garantizar la existencia de ciertos "modelos" satisfaciendo determinadas propiedades, sino por su poder en el análisis de la expresabilidad de las teorías matemáticas.

A continuación veremos un pequeño ejemplo de este análisis, sugerido por A.M. Sette.

Sea κ un cardinal infinito y consideremos la lógica infinitaria $L = L_{\kappa\kappa}(Q_\kappa)$ donde Q_κ es el cuantificador cardinal cuya interpretación en una estructura $\mathcal{A} = < A, ... >$ es la siguiente: $\mathcal{A} \models (Q_\kappa x)\varphi(x) \Leftrightarrow |\{a \in A/\mathcal{A} \models \varphi[a]\}| \geq \kappa$ (Q_κ es denotado a veces por Q_α siendo α el ordinal tal que $\kappa = \aleph_\alpha$). L permite conjunciones, disyunciones y cuantificaciones universales y existenciales de longitud $< \kappa$ (cf. [B-S] cap. 13 y 14).

En L puede ser expresado el hecho que un conjunto A tenga $|A| < \kappa$; en efecto, $|A| < \kappa \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \neg(Q_\kappa x)(x = x)$. Por otro lado, para cualquier $\lambda < \kappa$, puede ser expresado también el hecho que $|A| \geq \lambda$ de la siguiente manera: sea $\exists^{\geq\lambda}$ el enunciado $(\exists x_0)...(\exists x_\eta)... \bigwedge_{\alpha<\beta<\lambda} (x_\alpha \neq x_\beta)$ con $\eta < \lambda$, entonces, se verifica que $|A| \geq \lambda \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \exists^{\geq\lambda}$.

Puede observarse facilmente que si A es un conjunto (ie. $A \in St^\phi$, donde ϕ es el tipo de similaridad vacío, o sea, el único símbolo de relación permitido en las estructuras de St^ϕ es la igualdad $=$), entonces, $|A| \geq \lambda$ para todo $\lambda < \kappa$ implica $|A| \geq \kappa$, lo que está virtualmente en contradicción con $|A| < \kappa$. Sin embargo, mostraremos que el conjunto de enunciados $\sum = \{\exists^{\geq\lambda}/\lambda < \kappa\} \cup \{\neg(Q_\kappa x)(x = x)\}$ es no-contradictorio del punto de vista semántico, ie. existe algún modelo generalizado de $\sum$. De hecho, la existencia queda garantizada por la compacidad de CSt^ϕ pues todo subconjunto finito de $\sum$ tiene modelo en St^ϕ. En lo que sigue construiremos un modelo concreto de $\sum$.

Consideremos el espacio St^ϕ y para cada $\lambda < \kappa$ escojemos $A_\lambda \in St^\phi$ tal que $|A_\lambda| = \lambda$. Sea $K = \{A_\lambda/\lambda < \kappa\}$ (se observa que $|K| = \kappa$). Obviamente, para cualquier ultrafiltro U sobre K tenemos que $(K, U) \Vdash \neg(Q_\kappa x)(x = x)$ pues $\{A \in K/A \models \neg(Q_\kappa x)(x = x)\} = \{A \in K/|A| < \kappa\} = K \in U$.

Construiremos ahora un ultrafiltro U sobre K tal que para todo $\lambda < \kappa, (K, U) \Vdash \exists^{\geq\lambda}$.

Para cada $\lambda < \kappa$, sea $M_\lambda = \{A \in K/|A| \geq \lambda\}$, entonces, la familia $\{M_\lambda\}_{\lambda<\kappa}$ tiene la propiedad de intersección finita, pues si $\lambda_1, ..., \lambda_n < \kappa$, tenemos que $A \in M_{\lambda_1} \cap ... \cap M_{\lambda_n} \Leftrightarrow |A| \geq$ máx $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, y como máx $(\lambda_1, ..., \lambda_n) < \kappa$, existe $A \in M_{\lambda_1} \cap ... \cap M_{\lambda_n}$.

Es más, si κ es regular, ie. para toda familia de cardinales $\{\alpha_\eta\}_{\eta<\lambda}$ con $\lambda < \kappa$ y cada

$\alpha_\eta < \kappa$ se tiene que $\sup_{\eta<\lambda} \alpha_\eta < \kappa$, entonces, la familia $\{M_\lambda\}_{\lambda<\kappa}$ tiene la propiedad de κ-intersección, ie. $\bigcap\limits_{\eta<\lambda} M_{\alpha_\eta} \neq \phi$ para toda familia de cardinales $\{\alpha_\eta\}_{\eta<\lambda}$ como la descrita antes. En este caso, el filtro generado por la familia es κ-completo.

Sea U un ultrafiltro que contiene la familia $\{M_\lambda\}_{\lambda<\kappa}$ (de hecho U es no-principal), entonces para todo $\lambda < \kappa, (K, U) \Vdash \exists^{\geq\lambda}$ pues $\{A \in K/A \models \exists^{\geq\lambda}\} = \{A \in K/|A| \geq \lambda\} = M_\lambda \in U$.

Luego, (K, U) es el modelo generalizado que hace compatibles los conceptos de "tener cardinalidad $\geq \lambda$ para todo $\lambda < \kappa$" y "tener cardinalidad $< \kappa$". En el caso particular de ser $\kappa = \aleph_0$, son compatibles los conceptos de "ser arbitrariamente grande" y "ser finito".

DISCUSIÓN SOBRE LA COMPACIDAD DE CSt^τ

Ya hemos visto que la colección $\{\mathrm{Mod}^*(\varphi)/\varphi \in L^\tau\}$ es una base de clopens para el espacio CSt^τ, por lo tanto, podemos adaptar la definición de $\lim_U$ en su versión cero-dimensional, al espacio CSt^τ, y definir para una familia $\{(K_i, U_i)\}_{i\in I}$ y un ultrafiltro U sobre I : $(M, W) \in \lim_U(K_i, U_i)$ si y solo si para todo $\varphi \in L^\tau$,

$$(M, W) \in \mathrm{Mod}^*(\varphi) \Leftrightarrow \{i \in I/(K_i, U_i) \in \mathrm{Mod}^*(\varphi)\} \in U,$$

ie.

$$\{\mathcal{A} \in M/\mathcal{A} \models \varphi\} \in W \Leftrightarrow \{i \in I/\{\mathcal{A} \in K_i/\mathcal{A} \models \varphi\} \in U_i\} \in U,$$

o aún, escrita en términos de las familias $M = \{\mathcal{A}_j\}_{j\in J}, K_i = \{\mathcal{A}_{ij}\}_{j\in J_i}$, con ultrafiltros W en J y U_i en J_i respectivamente, tenemos

$$\{j \in J/\mathcal{A}_j \models \varphi\} \in W \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \{i \in I/\{j \in J_i/\mathcal{A}_{ij} \models \varphi\} \in U_i\} \in U.$$

Ahora, la proposición 2.2.8, adaptada al caso del espacio CSt^τ, junto con la proposición 3.3.2, tienen como consecuencia para cualquier lógica L que, para cada familia $\{(K_i, U_i)\}_{i\in I}$ en CSt^τ y cada ultrafiltro U sobre $I, \lim_U(K_i, U_i) \neq \phi$, ie. existe $(M, W) \in CSt^\tau$ satisfaciendo la equivalencia $(*)$. Ésto puede ser considerado como el correspondiente Teorema de Łos para los espacios CSt^τ. El problema de la construcción del par (M, W) para cualquier lógica L queda aquí sugerido.

3.3.4 Proposición. Si L es compacta, entonces, para todo τ, toda familia $\{(K_i, U_i)\}_{i\in I}$ en CSt^τ, con $K_i = \{\mathcal{A}_{ij}\}_{j\in J_i}$ y U_i ultrafiltro sobre J_i, existe $\mathcal{A} \in St^\tau$ tal que para todo $\varphi \in L^\tau$:

$$\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \{i \in I/\{j \in J_i/\mathcal{A}_{ij} \models \varphi\} \in U_i\} \in U.$$

Demonstración. Es consecuencia inmediata de la discusión anterior y de la proposición 3.3.3 ■

En $L_{\omega\omega}$ esta estructura $\mathcal{A}$ puede ser realizada explicitamente como el ultraproducto $\Pi_U(\Pi_{U_i}\mathcal{A}_{ij})$.

3.3.5 Observación. Si $(K,U) \in CSt^\tau$, entonces considerando K como una familia en CSt^τ cuyos elementos están parametrizados por ellos mismos, es fácil probar que $\lim_U K = cl\{(K,U)\}$ (cl denota la clausura en CSt^τ). En particular, $(K,U) \in \lim_U K$, lo que refuerza la interpretación de (K,U) como un ultraproducto generalizado de K módulo U.

PROPIEDAD DE EXTENSIÓN

Sean $< X,\mathcal{B} >$ y $< Y,\mathcal{C} >$ dos espacios cero-dimensionales con $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ bases de clopens de X e Y respectivamente, cerradas para intersecciones finitas y complementos. Sea $f : X \to Y$ una función, recordemos que f es s-continua (strongly continuous) si para todo $W \in \mathcal{C}, f^{-1}[W] \in \mathcal{B}$. Obviamente toda función s-continua es continua. También, f es s-abierta si para todo $V \in \mathcal{B}, f[V] \in \mathcal{C}$.

Son ejemplos de funciones s-continuas los siguientes:

1. h: $St^\tau \to CSt^\tau$ es s-continua ya que para todo $\varphi \in L^\tau$ tenemos $h^{-1}[\mathrm{Mod}^*(\varphi)] = \mathrm{Mod}^*(\varphi) \cap St^\tau = \mathrm{Mod}(\varphi)$.

2. Si $L_1 \leq L_2$ (ie. para cada $\varphi \in L_1^\tau$ existe $\psi \in L_2^\tau$ tal que $\mathrm{Mod}_{L_2}(\psi) = \mathrm{Mod}_{L_1}(\varphi)$) entonces, la identidad $I : St^\tau(L_2) \to St^\tau(L_1)$ es s-continua. En particular, si $L_1 \leq L_2$ y $L_2 \leq L_1$ entonces la identidad I mencionada es un homeomorfismo que preserva las bases. Un tal homeomorfismo, ie. una función biyectiva s-continua y s-abierta, es llamado "s-homeomorfismo".

3.3.6 Proposición. Sean $< X,\mathcal{B} >$ un espacio cero-dimensional *compacto* con $\mathcal{B}$ una base de clopens cerrada para intersecciones finitas y complementos, y $f : St^\tau \to X$ una función s-continua (St^τ es considerado con la base dada anteriormente),entonces existe $F : CSt^\tau \to X$ s-continua tal que $F[St^\tau = f$.

Demonstración. Sea $(K,U) \in CSt^\tau$ y consideremos la colección $M = \{V \in \mathcal{B}/ K \cap f^{-1}[V] \in U\}$.

Afirmación 1. M es una colección de cerrados de X con la propiedad de intersección finita.

En efecto, obviamente M consta de cerrados pues $\mathcal{B}$ es una base de clopens. Ahora, si $V_1,...,V_n \in M$, entonces, $K \cap f^{-1}[V_1],...,K \cap f^{-1}[V_n] \in U$, luego, $K \cap f^{-1}[V_1 \cap ... \cap V_n] = (K \cap f^{-1}[V_1]) \cap ... \cap (K \cap f^{-1}[V_n]) \in U$, en particular, $f^{-1}[V_1 \cap ... \cap V_n] \neq \phi$, ie. $V_1 \cap ... \cap V_n \neq \phi$.

En consecuencia, como X es compacto, para cada $(K,U) \in CSt^\tau$ tenemos que $\bigcap\{V \in \mathcal{B}/K \cap f^{-1}[V] \in U\} \neq \phi$.

Definimos $F(K,U) \in \bigcap\{V \in \mathcal{B}/K \cap f^{-1}[V] \in U\}$ en forma arbitraria con la única siguiente restricción: si $(K,U) = (\{\mathcal{A}\},\{\{\mathcal{A}\}\})$ con $\mathcal{A} \in St^\tau$ se observa que $\bigcap\{V \in \mathcal{B}/K \cap f^{-1}[V] \in U\} = \bigcap\{V \in \mathcal{B}/f(\mathcal{A}) \in V\} = \overline{\{f(\mathcal{A})\}}$, luego, exigiendo que $F(\{\mathcal{A}\},\{\{\mathcal{A}\}\}) = f(\mathcal{A})$ tenemos que $F\lceil St^\tau = f$.

Afirmación 2. Para todo $V \in \mathcal{B}, F^{-1}[V] = (f^{-1}[V])^*$.

Observemos primero que como f es s-continua, para cada $V \in \mathcal{B}$ existe $\varphi \in L^\tau$ tal que $f^{-1}[V] = \text{Mod}(\varphi)$, luego, $(f^{-1}[V])^*$ significa $\text{Mod}^*(\varphi)$.

Sea $(K,U) \in F^{-1}[V]$, entonces, $F(K,U) \in V$, por otro lado, $F(K,U) \in \bigcap\{W \in \mathcal{B}/K \cap f^{-1}[W] \in U\}$. Supongamos que $(K,U) \notin (f^{-1}[V])^* = \text{Mod}^*(\varphi)$, entonces, $(K,U) \in \text{Mod}^*(\neg\varphi)$, ie. $K \cap \text{Mod}(\neg\varphi) \in U$, pero $\text{Mod}(\neg\varphi) = f^{-1}[V^c]$ y $V^c \in \mathcal{B}$, luego, $K \cap f^{-1}[V^c] = K \cap \text{Mod}(\neg\varphi) \in U$, ie. para $W = V^c$ tenemos que $(K,U) \in W$, una contradicción, por lo tanto, $(K,U) \in (f^{-1}[V])^*$.

Sea $(K,U) \in (f^{-1}[V])^* = \text{Mod}^*(\varphi)$, entonces, $K \cap \text{Mod}(\varphi) \in U$, ie. $K \cap f^{-1}[V] \in U$, luego, como $F(K,U) \in \bigcap\{W \in \mathcal{B}/K \cap f^{-1}[W] \in U\}$ tenemos que $F(K,U) \in V$, ie. $(K,U) \in F^{-1}[V]$.

En consecuencia, F es s-continua ∎

3.3.7 Corolario. Sean $L_1 \leq L_2$ con L_1 compacta, entonces, para todo tipo $\tau, St^\tau(L_1)$ es un *retracto* s-continuo de $CSt^\tau(L_2)$, ie. existe $F : CSt^\tau(L_2) \to St^\tau(L_1)$ s-continuo tal que $F\lceil St^\tau(L_2) = I$ (la identidad). F es llamado también un retracto.

Demostración. Consideremos la identidad $I : St^\tau(L_2) \to St^\tau(L_1)$ que, como ya vimos, es s-continua. Entonces, como $St^\tau(L_1)$ es compacto cero-dimensional, por la propiedad de extensión (proposición 3.3.6) existe $F : CSt^\tau(L_2) \to St^\tau(L_1)$ s-continua tal que $F\lceil St^\tau(L_2) = I$, ie. $St^\tau(L_1)$ es trivialmente un retracto s-continuo de $CSt^\tau(L_2)$ ∎

3.3.8 Observación. La s-continuidad de la F construida en el corolario anterior se puede expresar, siguiendo la afirmación (2) de la proposición 3.3.6, de la siguiente manera: para todo $\varphi \in L_1^\tau$ existe $\psi \in L_2^\tau$ tal que $F^{-1}[\text{Mod}_{L_1}(\varphi)] = \text{Mod}^*_{L_2}(\psi)$.

Desde el punto de vista lógico, y en el caso de $L_1 = L_2$, podemos obtener aún una mejor descripción de la relación entre CSt^τ y St^τ en el caso compacto. Primero observemos que la propiedad: $F^{-1}[\text{Mod}(\varphi)] = \text{Mod}^*(\varphi)$ para todo φ, dada en la afirmación (2) de la proposición 3.3.6, expresa lo siguiente: para todo $\varphi \in L^\tau, (K,U) \in \text{Mod}^*(\varphi) \Leftrightarrow$

$F(K,U) \in \mathrm{Mod}(\varphi)$; y dado que F es sobre tenemos que: para todo $\varphi \in L^{\tau}$

$$(K,U) \in \mathrm{Mod}^{*}(\varphi) \Leftrightarrow F(K,U) \in F[\mathrm{Mod}^{*}(\varphi)].$$

Esto motiva la siguiente definición de Quasi-Homeomorfismo.

QUASI-HOMEOMORFISMOS

Consideremos estructuras topológicas $< X, \mathcal{B} >$ y $< Y, \mathcal{C} >$ siendo $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ bases de abiertos, y una aplicación $f : X \to Y$ sobreyectiva, s-continua y s-abierta tal que para todo $a \in X$ y para todo $A \in \mathcal{B}$:

$$a \in A \overset{(\Delta)}{\Leftrightarrow} f(a) \in f[A].$$

Se observa facilmente que la condición (Δ) exigida, es equivalente a: para todo $A \in \mathcal{B}, A = f^{-1}[f[A]]$, ie. cada $A \in \mathcal{B}$ es *saturado con respecto a f*. Una función f satisfaciendo las condiciones dadas en el párrafo anterior será llamada "q-homeomorfismo" (ie. quasi-homeomorfismo, ya que f sería inyectiva si y solo si para todo $B \subseteq X, B = f^{-1}[f[B]]$) (cf. [Ci2] parag. 1.4.4).

El retracto $F : CSt^{\tau}(L) \to St^{\tau}(L)$ es un q-homeomorfismo. Es más, se puede demostrar facilmente, adaptando la demostración de la proposición 3.2.5, que todo q-homeomorfismo cumple las propiedades enunciadas en dicha proposición.

Para todo par de cardinales $\kappa \geq \lambda \geq \omega$, sea $L^{-}_{\kappa\lambda}$ el lenguaje formal que tiene como símbolos primitivos: variables $x_0, x_1, ..., x_\alpha, ..., \alpha < \kappa$, para elementos de X (respectivamente Y), $V_0, V_1, ..., V_\alpha, ..., \alpha < \kappa$, para elementos de $\mathcal{B}$ (respectivamente $\mathcal{C}$), el símbolo de pertenencia "$\in$" que relaciona elementos de X con elementos de $\mathcal{B}$ (ie. $x_i \in V_j$), y el símbolo de igualdad "$=$" entre elementos de $\mathcal{B}$ (ie. $V_i = V_j$). Este lenguaje permite conjunciones y disyunciones infinitas de longitud $< \kappa$, y cuantificación universal y existencial infinita de longitud $< \lambda$, pero no permite la igualdad entre elementos de X.

En este lenguaje podemos expresar, por ejemplo, el hecho de ser $\mathcal{B}$ base de una topología, así como el hecho de ser X un espacio con base enumerable, o de ser un espacio normal o regular. Sin embargo, la propiedad de ser Hausdorff no es expresable porque involucra la igualdad entre elementos de X.

En la siguiente proposición $\vec{x}$ y $\vec{V}$ denotan secuencias finitas o infinitas de variables.

3.3.9 Proposición. Sea $f :< X, \mathcal{B} > \to < Y, \mathcal{C} >$ un q-homeomorfismo. Si $\varphi(\vec{x}, \vec{V})$ es una fórmula de $L^{-}_{\kappa\lambda}$, entonces para toda secuencia $\vec{a}$ de elementos de X y $\vec{A}$ de elementos de $\mathcal{B}$ tenemos:

$$< X, \mathcal{B} > \models \varphi[\vec{a}, \vec{A}] \Leftrightarrow < Y, \mathcal{C} > \models \varphi[f(\vec{a}), f[\vec{A}]];$$

en particular, $< X, \mathcal{B} > \equiv_{L^-_{\kappa\lambda}} < Y, \mathcal{C} >$.

Demonstración. La demostración es por inducción sobre la complejidad de la fórmula φ.

Caso 1. Si φ es atómica de la forma $x_i \in V_j$:
$< X, \mathcal{B} > \models (x_i \in V_j)[a, A] \Leftrightarrow a \in A \Leftrightarrow$ (por la condición $(\Delta)) f(a) \in f[A] \Leftrightarrow$ $< Y, \mathcal{C} > \models (x_i \in V_j)[f(a), f[A]]$.

Caso 2. Si φ es atómica de la forma $V_i = V_j$:
$< X, \mathcal{B} > \models (V_i = V_j)[A, B] \Leftrightarrow A = B \Leftrightarrow f[A] = f[B]$ (ya que para todo $A \in \mathcal{B}$, $A = f^{-1}[f[A]]) \Leftrightarrow < Y, \mathcal{C} > \models (V_i = V_j)[f[A], f[B]]$.

Caso 3. Si φ es $\neg\psi$ o $\bigwedge_{i \in I} \varphi_i$ con $|I| < \kappa$: es trivial.

Caso 4. Si $\varphi(\vec{x}, \vec{V})$ es $(\exists \vec{z})\psi(\vec{z}, \vec{x}, \vec{V})$:
$< X, \mathcal{B} > \models (\exists \vec{z})\psi[\vec{a}, \vec{A}] \Leftrightarrow$ existe $\vec{b} \in X$ tal que $< X, \mathcal{B} > \models \psi[\vec{b}, \vec{a}, \vec{A}] \Leftrightarrow$ (por hipótesis inductiva) existe $\vec{b} \in X$ tal que $< Y, \mathcal{C} > \models \psi[f(\vec{b}), f(\vec{a}), f[\vec{A}]] \Leftrightarrow$ (por ser f sobre) existe $\vec{c}$ $(= f(\vec{b})) \in Y$ tal que $< Y, \mathcal{C} > \models \psi[\vec{c}, f(\vec{a}), f[\vec{A}]] \Leftrightarrow$ $< Y, \mathcal{C} > \models (\exists \vec{z})\psi[f(\vec{a}), f[\vec{A}]]$.

Caso 5. Si $\varphi(\vec{x}, \vec{V})$ es $(\exists \vec{W})\psi(\vec{x}, \vec{V}, \vec{W})$:
$< X, \mathcal{B} > \models (\exists \vec{W})\psi[\vec{a}, \vec{A}] \Leftrightarrow$ existe $\vec{B} \in \mathcal{B}$ tal que $< X, \mathcal{B} > \models \psi[\vec{a}, \vec{A}, \vec{B}] \Leftrightarrow$ (por hipótesis inductiva) existe $\vec{B} \in \mathcal{B}$ tal que $< Y, \mathcal{C} > \models \psi[f(\vec{a}), f[\vec{A}], f[\vec{B}]] \Leftrightarrow$ existe $\vec{C}(= f[\vec{B}]) \in \mathcal{C}$ tal que $< Y, \mathcal{C} > \models \psi[f(\vec{a}), f[\vec{A}], \vec{C}] \Leftrightarrow < Y, \mathcal{C} > \models$ $(\exists \vec{W})\psi[f(\vec{a}), f[\vec{A}]]$ ■

Una consecuencia inmediata de la proposición anterior es que, si $f : X \to Y$ es un q-homeomorfismo, entonces, X es compacto (normal, regular) si y solo si Y es compacto (normal, regular).

Un ejemplo genérico de q-homeomorfismos se da en la siguiente proposición.

3.3.10 Proposición. Sea X un espacio topológico. Definimos sobre X la siguiente relación de equivalencia: $x \equiv y \Leftrightarrow \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$, donde la barra denota la clausura en X. Entonces, si $X/\equiv$ es el espacio cociente respectivo (llamado "espacio de Kolmogoroff de X"), la proyección canónica $\pi : X \to X/\equiv$ es un q-homeomorfismo.

Demonstración. Obviamente, considerando los espacios con sus topologías totales como bases, π es sobre y s-continua. Si probamos que todo abierto A de X es saturado con respecto a π, ie. $\pi^{-1}[\pi[A]] = A$, será inmediato que π es s-abierta y además satisface la condición (Δ).

Basta probar que $\pi^{-1}[\pi[A]] \subseteq A$. Sea $x \in \pi^{-1}[\pi[A]]$, entonces, $\pi(x) \in \pi[A]$, luego existe $z \in A$ tal que $\pi(x) = \pi(z)$, ie. $\overline{\{x\}} = \overline{\{z\}}$. Si $x \notin A$, entonces, $x \in A^c$ (que es cerrado), luego, $\overline{\{z\}} = \overline{\{x\}} \subseteq \overline{A^c} = A^c$, ie. $z \in A^c$, lo cual es una contradicción, por lo tanto, $x \in A$ ∎

En teoría de modelos tenemos que, si $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in St^\tau(L)$ entonces, con respecto a la topología elemental, $\overline{\{\mathcal{A}\}} = \overline{\{\mathcal{B}\}} \Leftrightarrow \mathcal{A} \equiv_L \mathcal{B}$, por lo tanto, la proyección $\pi : St^\tau(L) \to St^\tau(L)/\equiv_L$ es un q-homeomorfismo; es más, es un q-homeomorfismo con respecto a las bases elementales. En particular, $St^\tau(L)$ es compacto si y solo si $St^\tau(L)/\equiv_L$ es compacto.

Análoga descripción puede hacerse con respecto al espacio $CSt^\tau(L)$. Aquí, $(K,U) \equiv_L (M,W)$ significa que para todo $\varphi \in L^\tau, (K,U) \Vdash \varphi \Leftrightarrow (M,W) \Vdash \varphi$. Luego, la proyección $\pi : CSt^\tau(L) \to CSt^\tau(L)/\equiv_L$ es un q-homeomorfismo (con respecto a las bases elementales). En este caso, ambos espacios son compactos.

Debemos observar que si L no es una lógica compacta, entonces, en general, $CSt^\tau/\equiv$ no es homeomorfo a $St^\tau/\equiv$. Sin embargo, si L es compacta, entonces, probaremos en la proposición 3.3.12 siguiente que, para todo tipo $\tau, CSt^\tau/\equiv$ es homeomorfo a $St^\tau/\equiv$. Es más, el homeomorfismo construido será un s-homeomorfismo.

3.3.11 Lema. Si St^τ es compacto, entonces, con respecto al retracto $F : CSt^\tau \to St^\tau$ tenemos lo siguiente: $(K,U) \equiv (M,W) \Leftrightarrow F(K,U) \equiv F(M,W)$.

Demonstración.

Supongamos $(K,U) \equiv (M,W)$, entonces, para todo $\varphi \in L^\tau, (K,U) \Vdash \varphi \Leftrightarrow (M,W) \Vdash \varphi$, ie. $K \cap \text{Mod}(\varphi) \in U \Leftrightarrow M \cap \text{Mod}(\varphi) \in W$.

Probaremos que $F(K,U) \equiv F(M,W)$. Sea $\varphi \in L^\tau$ tal que $F(K,U) \models \varphi$, ie. $F(K,U) \in \text{Mod}(\varphi)$, entonces, $K \cap \text{Mod}(\varphi) \in U$, pues si no, tendríamos que $K \cap \text{Mod}(\neg\varphi) \in U$, luego $F(K,U) \in \text{Mod}(\neg\varphi)$ ya que, por construcción, $F(K,U) \in \bigcap\{\text{Mod}(\psi)/K \cap \text{Mod}(\psi) \in U\}$, una contradicción. Tenemos entonces que $M \cap \text{Mod}(\varphi) \in W$, por lo tanto, como $F(M,W) \in \bigcap\{\text{Mod}(\psi)/M \cap \text{Mod}(\psi) \in W\}, F(M,W) \in \text{Mod}(\varphi)$, ie. $F(M,W) \models \varphi$.

Analogamente se prueba que $F(M,W) \models \varphi$ implica $F(K,U) \models \varphi$.

Supongamos que $F(K,U) \equiv F(M,W)$, entonces, para todo $\varphi \in L^\tau, F(K,U) \in \text{Mod}(\varphi) \Leftrightarrow F(M,W) \in \text{Mod}(\varphi)$.

Probaremos que $(K,U) \equiv (M,W)$. Sea $\varphi \in L^\tau$ tal que $(K,U) \Vdash \varphi$, ie. $K \cap \text{Mod}(\varphi) \in U$, entonces, $F(K,U) \in \text{Mod}(\varphi)$ pues, por construcción, $F(K,U) \in \bigcap\{\text{Mod}(\psi)/K \cap \text{Mod}(\psi) \in U\}$, luego, $F(M,W) \in \text{Mod}(\varphi)$, de ahí $M \cap \text{Mod}(\varphi) \in W$ pues si no tendríamos que $M \cap \text{Mod}(\neg\varphi) \in W$, y como $F(M,W) \in \bigcap\{\text{Mod}(\psi)/M \cap \text{Mod}(\psi) \in$

$W\}$, tendríamos que $F(M,W) \in \text{Mod}(\neg\varphi)$, una contradicción. Por lo tanto, $(M,W) \Vdash \varphi$.

Analogamente se prueba que $(M,W) \Vdash \varphi$ implica $(K,U) \Vdash \varphi$ ■

3.3.12 Proposición. Para cualquier lógica L y cualquier tipo τ tenemos: para ser St^τ compacto es necesario y suficiente que $CSt^\tau/\equiv$ sea homeomorfo a $St^\tau/\equiv$.

Demonstración.

Suficiencia. Si $CSt^\tau/\equiv$ es homeomorfo a $St^\tau/\equiv$, entonces $St^\tau/\equiv$ es compacto, luego, como la proyección $\pi : St^\tau \to St^\tau/\equiv$ es un q-homeomorfismo, también es compacto St^τ.

Necesidad. Supongamos St^τ compacto, y consideremos el retracto $F : CSt^\tau \to St^\tau$ y la proyección $\pi : St^\tau \to St^\tau/\equiv$.

F induce la aplicación $F' : CSt^\tau/\equiv \to St^\tau/\equiv$ dada por $F'([K,U]) = \pi(F(K,U))$, donde $[K,U]$ denota la clase de equivalencia de (K,U) en CSt^τ).

Es fácil ver que F' está bien definida pues, por el lema anterior, $(K,U) \equiv (M,W) \Rightarrow F(K,U) \equiv F(M,W)$. Por otro lado, la otra implicación dada por el lema, ie. $F(K,U) \equiv F(M,W) \Rightarrow (K,U) \equiv (M,W)$, garantiza que F' es inyectiva. Por lo tanto, F' es una biyección ya que es obviamente sobreyectiva.

Afirmación. F' es continua y abierta.

En realidad probaremos que F' es s-continua y s-abierta. Para esto tenemos que explicitar las bases de $CSt^\tau/\equiv$ y $St^\tau/\equiv$ respectivamente.

Consideremos las proyecciones canónicas $\pi_1 : St^\tau \to St^\tau/\equiv$ y $\pi_2 : CSt^\tau \to CSt^\tau/\equiv$; como ellas son q-homeomorfismos, es fácil de verificar que las colecciones $\{\pi_1[\text{Mod}(\varphi)]/\varphi \in L^\tau\}$ y $\{\pi_2[\text{Mod}^*(\varphi)]/\varphi \in L^\tau\}$ son bases (de clopens) de $St^\tau/\equiv$ y $CSt^\tau/\equiv$ respectivamente.

A partir de ahí es de rutina demostrar que para todo $\varphi \in L^\tau$,

$$(F')^{-1}[\pi_1[\text{Mod}(\varphi)]] = \pi_2[\text{Mod}^*(\varphi)]$$

y

$$(F')[\pi_2[\text{Mod}^*(\varphi)]] = \pi_1[\text{Mod}(\varphi)]$$

(siendo ambas equivalentes por ser F' una biyección). Ésto termina la demostración ■

3.4 COMPLETAMENTO DE CAUCHY DE UMA LÓGICA A PARTIR DA UNIFORMIDADE DE FRAÏSSÉ

Nesta seção estudamos o completamento de Cauchy dos espaços de estruturas $St^\tau(L)$ usando a uniformidade de Fraïssé, quando esta é definível. Para tal efeito escolhemos, como um exemplo típico, a lógica $L = L_{\omega\omega}(Q_1, \ldots, Q_n)$, onde cada Q_i é um quantificador (monádico por simplicidade) cuja interpretação numa estrutura $\mathcal{A} =< A, \ldots >$ é dada por uma coleção $q_i(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{P}(A)$ tal que,

$$\mathcal{A} \models (Q_i x)\varphi(x) \Leftrightarrow \{a \in A / \mathcal{A} \models \varphi[a]\} \in q_i(\mathcal{A}),$$

e τ é um tipo relacional finito.

Neste caso, a topologia elementar gerada por L^τ é definível a partir da seguinte uniformidade de Fraïssé: $\{\mathcal{U}_m\}_{m\in\omega}$, onde $\mathcal{U}_m = \{(\mathcal{A}, \mathcal{B}) / \mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}\}$ e $\equiv_m$ é a equivalência elementar com relação às sentenças $\varphi \in L^\tau$ com grau quantificacional $qr(\varphi) \leq m$. $qr(\varphi)$ é definido (de modo usual) como segue:

i) $qr(\varphi) = 0$ se φ é atômica,

ii) $qr(\neg\varphi) = qr(\varphi)$,

iii) $qr(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = \max(qr(\varphi_1), qr(\varphi_2))$,

iv) $qr((\exists x)\varphi) = qr((Q_i x)\varphi) = qr(\varphi) + 1$.

Neste caso, a proposição 1.3.2 é também válida mostrando que a uniformidade de Fraïssé é uniformemente equivalente à uniformidade natural. Isto significa, entre outras coisas, que ambas as uniformidades definem as mesmas sequências de Cauchy e, portanto, os completamentos são equivalentes.

Como a topologia dos espaços $St^\tau(L)$ tem base enumerável, bastam sequências para o estudo da convergência nestes espaços.

Estenderemos a noção usual de modelo (como uma estrutura $< \mathcal{A}, q_1(A), \ldots, q_n(A) >$, que abreviaremos apenas por $\mathcal{A}$) à noção mais geral de *sequência de Cauchy de estruturas*, da mesma maneira como os racionais são estendidos aos reais mediante sequências de Cauchy de racionais.

3.4.1 Estrutura Métrica de $St^\tau(L)$.

Dados $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in St^\tau(L)$ definimos $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \dfrac{1}{1 + \sup\{m \in \omega \ / \ \mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}\}}$.

Como o número de fórmulas φ de L^τ com $qr(\varphi) \leq n$ é finito, a menos de equivalência lógica, segue-se que o espaço pseudo-métrico $< St^\tau(L),\ d >$ é totalmente limitado (uma vez que dado s, o conjunto das bolas $b_s(\mathcal{A}) = \{\mathcal{B} \in St^\tau(L) \ / \ d(\mathcal{A},\ \mathcal{B}) < s\}$ que cobrem $St^\tau(L)$ é finito), portanto, o espaço $< St^\tau(L),\ d >$ é compacto se e somente se ele for completo (cf. [Ke] pag. 198). Um argumento conhecido mostra que a compacidade topológica coincide, neste caso, com a compacidade lógica de L^τ (supondo que os "modelos" são os objetos de $St^\tau(L)$).

Por exemplo, como é sabido (cf. [B - S] pag. 263) $L = L^\tau_{\omega\omega}(Q_0)$, onde $\mathcal{A} \models Q_0 x\varphi(x)$ significa "existe um número infinito de elementos $a \in A$ tais que $\mathcal{A} \models \varphi[a]$", não é compacto, portanto, o espaço correspondente $< St^\tau(L),\ d >$ não é completo.

No que segue consideraremos o completamento usual de $< St^\tau(L),\ d >$ (cf. [Ke] pag. 195).

Por FSt^τ designamos a classe de todas as sequências de Cauchy de $St^\tau(L)$ e por $< FSt^\tau,\ d^* >$ o completamento de $< St^\tau(L),\ d >$, onde dadas as sequências $\{\mathcal{A}_n\},\ \{\mathcal{B}_n\} \in FSt^\tau$ define-se:

$$d^*(\{\mathcal{A}_n\},\ \{\mathcal{B}_n\}) = \lim_{k\to\infty} d(\mathcal{A}_k,\ \mathcal{B}_k).$$

Com esta definição temos que $i : St^\tau(L) \to FSt^\tau$ definida por $i(\mathcal{A}) = \{\mathcal{A}_n\}$ com $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}$ para todo n, é uma imersão isométrica, $i[St^\tau(L)]$ é denso em FSt^τ e FSt^τ é completo (cf. [Ke] pag. 196).

Observemos que a construção de $< FSt^\tau,\ d^* >$ é puramente topológica (geométrica) e, em princípio, nada tem a ver com a lógica (a não ser através da métrica inicial d). Veremos a seguir que existe uma maneira canônica de se introduzir uma nova métrica d' em FSt^τ derivada da lógica L e equivalente a d^*.

3.4.2 Estrutura Lógica de FSt^τ.

Dado $\{\mathcal{A}_n\} \in FSt^\tau$ e uma sentença $\varphi \in L^\tau$, dizemos que a sequência $\{\mathcal{A}_n\}$ satisfaz φ, em símbolos $\{\mathcal{A}_n\} \models\!\equiv \varphi$, se existe $k_0 \in \omega$ tal que $\mathcal{A}_k \models \varphi$ (no sentido usual) para todo $k \geq k_0$.

Observemos que:

1. Dados $\{\mathcal{A}_n\} \in FSt^\tau$ e $\ell \in \omega$ existe $k_0 \in \omega$ tal que para todo $k,\ k' \geq k_0$, $\mathcal{A}_k \equiv_\ell \mathcal{A}_{k'}$; portanto, se φ é uma sentença de L^τ com $qr(\varphi) \leq \ell$ temos que $\{\mathcal{A}_n\} \models\!\equiv \varphi$ ou $\{\mathcal{A}_n\} \models\!\equiv \neg\varphi$ (e não ocorre ambos os casos), i.e. $\{\mathcal{A}_n\} \models\!\equiv \varphi$ está bem definida e $\{\mathcal{A}_n\} \models\!\equiv \neg\varphi$ see $\{\mathcal{A}_n\} \not\models\!\equiv \varphi$.

2. $\{\mathcal{A}_n\} \models\!\equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2$ see $\{\mathcal{A}_n\} \models\!\equiv \varphi_1$ e $\{\mathcal{A}_n\} \models\!\equiv \varphi_2$.

3. A semântica dada por $\models\!\equiv$ é uma extensão da semântica usual $\models$ uma vez que $\mathcal{A} \models \varphi$ see $i(\mathcal{A}) \models\!\equiv \varphi$, qualquer que seja a sentença $\varphi \in L^\tau$.

Com estes preliminares definimos então para $\{\mathcal{A}_n\},\ \{\mathcal{B}_n\} \in FSt^\tau$

$$d'(\{\mathcal{A}_n\},\ \{\mathcal{B}_n\}) = \frac{1}{1 + \sup\{m \in \omega \ /\ \{\mathcal{A}_n\} \equiv_m \{\mathcal{B}_n\}\}},$$

onde, neste caso, $\{\mathcal{A}_n\} \equiv_m \{\mathcal{B}_n\}$ tem o significado da m-equivalência correspondente à nova semântica.

Verifica-se facilmente que d' é uma pseudo-métrica em FSt^τ, que o espaço uniforme definido é totalmente limitado, pela mesma razão que no caso de d, e que a topologia gerada é definida tomando-se como base as classes elementares de sequências de Cauchy.

Portanto, no caso de ser o espaço $< FSt^\tau,\ d' >$ topologicamente compacto, a lógica L^τ será logicamente compacta no seguinte sentido: seja $\sum$ um conjunto de sentenças de L^τ, então $\sum$ tem modelo (generalizado) em FSt^τ se e somente se todo subconjunto finito de $\sum$ tem modelo em FSt^τ.

3.4.3 Proposição. A identidade $I :< FSt^\tau,\ d' > \to < FSt^\tau,\ d^* >$ é uma isometria.

Demonstração. Basta provar que $\sup\{m \in \omega \ / \ \{\mathcal{A}_n\} \equiv_m \{\mathcal{B}_n\}\} = \lim\limits_{k\to\infty} \sup\{m \in \omega / \ \mathcal{A}_k \equiv_m \mathcal{B}_k\}$.

1. Suponhamos que $\sup\{m \ / \ \{\mathcal{A}_n\} \equiv_m \{\mathcal{B}_n\}\} = \ell \in \omega$, então tem-se que

   a) $\{\mathcal{A}_n\} \equiv_\ell \{\mathcal{B}_n\}$ e b) $\{\mathcal{A}_n\} \not\equiv_{\ell+1} \{\mathcal{B}_n\}$.

   Afirmação. Existe k_0 tal que para todo $k \geq k_0$, $\mathcal{A}_k \equiv_\ell \mathcal{B}_k$ e $\mathcal{A}_k \not\equiv_{\ell+1} \mathcal{B}_k$, isto implicará que para $k \geq k_0$, $\sup\{m \ / \ \mathcal{A}_k \equiv_m \mathcal{B}_k\} = \ell$, i.e., $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\{m \ / \ \mathcal{A}_k \equiv_m \mathcal{B}_k\} = \ell$.

   Com efeito, por (a), para toda sentença φ com $qr(\varphi) \leq \ell$ tem-se que $\{\mathcal{A}_n\} \models \varphi$ see $\{\mathcal{B}_n\} \models \varphi$. Seja $\varphi_\ell = \bigwedge\{\varphi \ / \ qr(\varphi) \leq \ell$ e $\{\mathcal{A}_n\} \models \varphi\}$, então $\{\mathcal{A}_n\} \models \varphi_\ell$ e portanto, $\{\mathcal{B}_n\} \models \varphi_\ell$, logo, existem k_1 e k_2 tais que se $k \geq k_1$ então $\mathcal{A}_k \models \varphi_\ell$ e se $k \geq k_2$ então $\mathcal{B}_k \models \varphi_\ell$; tomando $k' = \max(k_1,\ k_2)$ temos que para $k \geq k'$, $\mathcal{A}_k \models \varphi_\ell$ e $\mathcal{B}_k \models \varphi_\ell$, i.e. $\mathcal{A}_k \equiv_\ell \mathcal{B}_k$.

   Por (b) existe ψ com $qr(\psi) = \ell + 1$ tal que $\{\mathcal{A}_n\} \models \psi$ e $\{\mathcal{B}_n\} \models \neg\psi$, logo, existe k'' tal que para todo $k \geq k''$ temos que $\mathcal{A}_k \models \psi$ e $\mathcal{B}_k \models \neg\psi$, i.e. $\mathcal{A}_k \not\equiv_{\ell+1} \mathcal{B}_k$. Finalmente, tomando $k_0 = \max(k',\ k'')$ segue-se a afirmação.

2. Suponhamos agora que $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\{m \ / \ \mathcal{A}_k \equiv_m \mathcal{B}_k\} = \ell \in \omega$, então existe k' tal que para todo $k \geq k'$, $\sup\{m \ / \ \mathcal{A}_k \equiv_m \mathcal{B}_k\} = \ell$, i.e. para $k \geq k'$ tem-se que $\mathcal{A}_k \equiv_\ell \mathcal{B}_k$ e $\mathcal{A}_k \not\equiv_{\ell+1} \mathcal{B}_k$. Daí segue-se que $\{\mathcal{A}_n\} \equiv_\ell \{\mathcal{B}_n\}$ e $\{\mathcal{A}_n\} \not\equiv_{\ell+1} \{\mathcal{B}_n\}$, i.e. $\sup\{m \ / \ \{\mathcal{A}_n\} \equiv_m \{\mathcal{B}_n\}\} = \ell$.

   De (1) e (2) segue-se que $\sup\{m/\{\mathcal{A}_n\} \equiv_m \{\mathcal{B}_n\}\} = \infty$ see $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\{m \ / \ \mathcal{A}_k \equiv_m \mathcal{B}_k\} = \infty$. Isto completa a demostração. ∎

Demonstramos então a seguinte proposição:

3.2.4 Proposição. Para toda lógica $L = L^{\tau}_{\omega\omega}(Q_1, \ldots, Q_n)$ com τ finito existe uma extensão FSt^{τ} da semântica usual $St^{\tau}(L)$, com relação à uniformidade de Fraïssé, tal que:

1. FSt^{τ} é um espaço topológico uniforme cuja topologia é gerada pelas classes elementares correspondentes.

2. $St^{\tau}(L)$ é denso em FSt^{τ}.

3. FSt^{τ} é totalmente limitado.

4. FSt^{τ} é completo e, em consequência, compacto.

5. $L^{\tau}_{\omega\omega}(Q_1, \ldots, Q_n)$ é compacta com relação à semântica estendida. ∎

Existe uma outra forma de se introduzir uma lógica subjacente a FSt^{τ} que é equivalente à dada por $\models$. Observe-se que a equivalência mencionada é dada, na proposição 3.4.5 a seguir, na forma de um teorema de Łoś para FSt^{τ} e é consequência da proposição 2.2.7, pois o espaço FSt^{τ} é zero-dimensional compacto. Aqui será dada uma outra demonstração, já que a uniformidade considerada é a de Fraïssé.

Sejam $\{\mathcal{A}_n\}$ uma sequência de estruturas em $St^{\tau}(L)$, U um ultrafiltro não-principal em ω e φ uma sentença de L^{τ}. Dizemos que $\{\mathcal{A}_n\}$ U-satisfaz φ, em símbolos $\{\mathcal{A}_n\} \models_U \varphi$, se $\{k \in \omega \ / \ \mathcal{A}_k \models \varphi\} \in U$.

3.4.5 Proposição. Se $\{\mathcal{A}_n\} \in FSt^{\tau}$ e U é um ultrafiltro não-principal em ω, então, para toda sentença $\varphi \in L^{\tau}$ temos

$$\{\mathcal{A}_n\} \models \varphi \quad \text{see} \quad \{\mathcal{A}_n\} \models_U \varphi.$$

Demonstração.

1. Suponhamos $\{\mathcal{A}_n\} \models \varphi$, então existe k_0 tal que para $k \geq k_0$, $\mathcal{A}_k \models \varphi$, portanto, o conjunto $X = \{k \in \omega \ / \ \mathcal{A}_k \models \varphi\}$ é cofinito, i.e. $X \in U$ por ser U não-principal, logo, $\{\mathcal{A}_n\} \models_U \varphi$.

2. Se $\{\mathcal{A}_n\} \models_U \varphi$, então o conjunto $X = \{k \in \omega \ / \ \mathcal{A}_k \models \varphi\} \in U$, logo, como U é não-principal, X é infinito, portanto, cofinal, i.e. para todo $k \in \omega$ existe $j > k$ tal que $j \in X$.

Afirmação. Existe k_0 tal que para $k \geq k_0$, $\mathcal{A}_k \models \varphi$.

Com efeito, como $\{\mathcal{A}_n\}$ é de Cauchy, para $\ell = qr(\varphi)$ existe k_1 tal que para todo $i, j \geq k_1$, $\mathcal{A}_i \equiv_\ell \mathcal{A}_j$, em particular para φ, $\mathcal{A}_i \models \varphi$ see $\mathcal{A}_j \models \varphi$.

Pela cofinalidade de X, para k_1 existe $k_0 > k_1$ tal que $k_0 \in X$, i.e. $\mathcal{A}_{k_0} \models \varphi$, logo, se $k \geq k_0 (> k_1)$ temos que $\mathcal{A}_k \models \varphi$; portanto, $\{\mathcal{A}_n\} \models \varphi$ ■

3.4.6 Corolário. Se $\{\mathcal{A}_n\}$ é uma sequência convergente em $St^\tau(L)$ e $\mathcal{A} \in \lim_n \mathcal{A}_n$, então para toda sentença $\varphi \in L^\tau$:

$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \text{see} \quad \{\mathcal{A}_n\} \models_U \varphi.$$

Demonstração. Basta provar que $\{\mathcal{A}_n\} \equiv_L I(\mathcal{A})$ no sentido de $\models$. Seja $\varphi \in L^\tau$, e k' tal que para todo $k \geq k'$, $\mathcal{A}_k \equiv_\ell \mathcal{A}$, sendo $\ell = qr(\varphi)$.

1. Se $\{\mathcal{A}_n\} \models \varphi$ então existe k_0 tal que para todo $k \geq k_0$, $\mathcal{A}_k \models \varphi$. Logo, tomando $k \geq \max(k', k_0)$ temos que $\mathcal{A} \models \varphi$, i.e. $I(\mathcal{A}) \models \varphi$.

2. Se $I(\mathcal{A}) \models \varphi$, i.e. $\mathcal{A} \models \varphi$, então, para todo $k \geq k'$, $\mathcal{A}_k \models \varphi$, logo, $\{\mathcal{A}_n\} \models \varphi$ ■

A proposição 3.4.5 e o corolário 3.4.6 são outra forma de dizer que $\{\mathcal{A}_n\} \in \lim_U i\{\mathcal{A}_n\}$ para todo ultrafiltro não-principal U sobre ω, no sentido da topologia de FSt^τ.

Análoga construção pode ser feita em qualquer espaço z-d X com base de clopens enumerável $\mathcal{B}$. Se $\mathcal{B} = \{V_n\}_{n \in \omega}$ é uma enumeração da base, então, pode ser definida a seguinte uniformidade de Fraïssé: para cada $n \in \omega, \mathcal{U}_n = \{(x, y) \in X \times X /$ para todo $k < n, x \in V_k \Leftrightarrow y \in V_k\} = \bigcap_{k<n} \mathcal{U}_{V_k}$. Para esta uniformidade é igualmente válida a proposição 1.3.2 e, portanto, todos os desenvolvimentos desta seção. A construção de uma uniformidade de Fraïssé para o caso de uma base não-enumerável pode resultar numa estrutura uniforme não totalmente limitada e, portanto, o completamento correspondente não daria uma compactificação do espaço. Este caso será analizado brevemente na seção 4.2. Aí será levantado o problema de extender o método de Fraïssé, exposto na seção 1.5, para lógicas que admitem uma caraterização tipo back-and-forth para a relação de equivalência elementar correspondente. Uma caracterização deste tipo permitirá traduzir as redes de Cauchy, usualmente definidas a partir da uniformidade de Fraïssé determinada pela equivalência elementar, em sistemas dirigidos, por isomorfismos parciais, de tal maneira que o limite indutivo de tais sistemas seja o limite de Cauchy procurado.

3.5 APÊNDICE DO CAPÍTULO 3: A TÉCNICA DE QUASE-HOMEOMORFISMOS NUM CONTEXTO GERAL

Na seção 3.3 introduzimos a noção de quase-homeomorfismo para estruturas de um tipo muito especial: espaços topológicos $< X, \mathcal{B} >$ com uma base distinguida. Neste apêndice estenderemos esta noção para ***espaços topológicos em sentido amplo*** (s.a.), i.e. estruturas $< X, \tau >$ onde $X \neq \phi$ é uma classe qualquer e τ qualquer coleção (pequena) de subclasses de X. Neste caso, os conceitos de função contínua, aberta ou fechada, de homeomorfismo, fecho ou compacidade, etc. serão os usuais da topologia considerando os elementos de τ como "abertos" em sentido amplo.

Muitas das proposições desta seção serão apenas enunciadas sem demonstração, porque os argumentos envolvidos são triviais (pode-se ver também [Ci2] parág. 1.4.4).

3.5.1 Definição. Sejam $< X, \tau >$ e $< Y, \sigma >$ espaços s.a. Um *quase-homeomorfismo* (q-h) de $< X, \tau >$ em $< Y, \sigma >$ é um par de funções $< f, g >$, onde $f : X \to Y$ e $g : \tau \to \sigma$ satisfazendo: para todo $x \in X$ e todo $A \in \tau$,

$$x \in A \overset{(\Delta)}{\Leftrightarrow} f(x) \in g(A).$$

3.5.2 Definição. Sejam $< X, \tau >$ e $< Y, \sigma >$ espaços s.a., $f : X \to Y$ e $g : \tau \to \sigma$.

i) f é dita *τ-saturada* se todo $A \in \tau$ é saturado com relação a f, i.e. para todo $A \in \tau$, $A = f^{-1}[f[A]]$ (os colchetes denotam imagem direta ou inversa segundo o caso).

ii) g é dita *τ-compatível com f* se para todo $A \in \tau, f[A] = g(A) \cap f[X]$.

3.5.3 Proposição. São equivalentes:

i) O par $< f, g >$ é um q-h.

ii) Para todo $A \in \tau$, $A = f^{-1}[g(A)]$.

iii) f é τ-saturada e g é τ-compatível com f ∎

Observar que (ii) da proposição acima garante que g é sempre injetora. De fato, os casos interessantes são quando g é também sobrejetora. Neste caso, além de termos $|\tau| = |\sigma|$, temos que f é contínua s.a.; e se f for injetora e $g(\phi) = \phi$ (no caso de $\phi \in \tau$), então X é imerso mediante f em Y como um subespaço denso s.a.. Aliás, o fato de ser g τ-compatível com f (e termos $g(\phi) = \phi$ no caso de $\phi \in \tau$) diz que $f[X]$ é um subespaço denso s.a. em Y. Daqui em diante só consideraremos g sobrejetora.

3.5.4 Proposição. Se f é sobrejetora (sendo g também sobrejetora), são equivalentes:

i) O par $< f, g >$ é um q-h.

ii) f é contínua, aberta, τ-saturada e g está dada por $g(A) = f[A]$ para todo $A \in \tau$ ■

Baseados na proposição anterior podemos adotar a convenção de chamar de q-h de 1ª espécie (ou simplesmente q-h se não houver confusão), uma função $f : X \to Y$ sobrejetora, contínua, aberta e τ-saturada. Observa-se que um q-h de 1ª espécie f, na medida que é τ-saturado, não está longe de ser um homeomorfismo s.a., pois o fato de ser injetora equivale a que toda subclasse de X é saturada a respeito da f.

O fato de ser $f :< X, \tau > \to < Y, \sigma >$ um q-h de 1ª espécie é uma relação muito forte entre os espaços X e Y. Por exemplo, verifica-se facilmente que, neste caso, τ e σ são as topologias s.a. induzida e co-induzida por f em X e Y respectivamente. Em particular, o quociente X/f, do espaço X pela relação $x \sim y$ se e só se $f(x) = f(y)$, é homeomorfo s.a. a Y.

Mais ainda, se $L^{-}_{k\lambda}$ é a linguagem infinitária descrita na seção 3.3, então, é válida a proposição 3.3.9 para um quase-homeomorfismo $f :< X, \tau > \to < Y, \sigma >$ qualquer. Em particular, $< X, \tau > \equiv_{L^{-}_{k\lambda}} < Y, \sigma >$.

Se $L^{-2}_{k\lambda}$ denota a sublinguagem de $L^{-}_{k\lambda}$ consistindo das fórmulas sem quantificadores sobre variáveis individuais, e $< f, g >:< X, \tau > \to < Y, \sigma >$ é um q-h (não necessariamente de 1ª espécie), então, temos o seguinte transfer.

3.5.5 Proposição. Se $\varphi(\vec{x}, \vec{V})$ é uma fórmula de $L^{-2}_{k\lambda}$, então, para toda sequência $\vec{a}$ de elementos de X e $\vec{A}$ de elementos de τ temos:

$$< X, \tau > \models \varphi[\vec{a}, \vec{A}] \Leftrightarrow < Y, \sigma > \models \varphi[f(\vec{a}), g(\vec{A})];$$

em particular, $< X, \tau > \equiv_{L^{-2}_{k\lambda}} < Y, \sigma >$ ■

Observe que a compacidade (pela sua condição de cobrimento), embora possa ser expressa em $L^{-}_{k\lambda}$, não o é em $L^{-2}_{k\lambda}$.

A seguir daremos alguns exemplos que ilustrem a generalidade do conceito de quase-homeomorfismo.

Exemplo 1. O seguinte é um exemplo genérico de quase-homeomorfismos de 1ª espécie (ver proposição 3.3.10): seja X um espaço s.a. e $X/\equiv$ o espaço de Kolmogoroff de X, i.e. o quociente de X pela relação $x \equiv y \Leftrightarrow \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$; então, a projeção canônica $\pi : X \to X/\equiv$ é um q-h.

Em teoria de modelos, como já vimos na seção 3.3, temos como casos particulares as projeções $St^\tau(L) \to St^\tau(L)/\equiv_L$ e $CSt^\tau(L) \to CSt^\tau(L)/\equiv_L$ com relação às bases elementares. Ou, em forma mais geral, se X é um espaço topológico, então a projeção $X \to X/\equiv$ é um q-h, onde $x \equiv y$ se e só se para todo $V \in \mathcal{B} : x \in V \Leftrightarrow y \in V$, que no caso zero-dimensional equivale a $(x,y) \in \bigcap_{V \in \mathcal{B}} \mathcal{U}_V$.

O processo, descrito acima para um espaço z-d, pode ser aplicado a qualquer espaço uniforme $< X,\mathcal{U} >$, sendo $\mathcal{U}$ uma estrutura uniforme sobre X (cf. [Ke] pag. 176); o espaço separado (i.e. Hausdorff) correspondente $< \hat{X},\hat{\mathcal{U}} >$ obtém-se quocientando pela relação $x \sim y \Leftrightarrow (x,y) \in \bigcap \mathcal{U}$. Pode-se verificar facilmente que $\hat{X}$ é o espaço de Kolmogoroff de X, portanto, a projeção $\pi : X \to \hat{X}$ é um q-h (com relação às topologias respectivas e não às uniformidades).

Seja $< X,\mathcal{U} >$ um espaço uniforme separado. Sabe-se que se $< X_1,\mathcal{U}_1 >$ e $< X_2,\mathcal{U}_2 >$ são dois completamentos de Cauchy de $< X,\mathcal{U} >$, então, eles são uniformemente homeomorfos (cf. [Ke] pag. 197); no entanto, se $< X,\mathcal{U} >$ não é separado, não há um resultado análogo. Na seguinte proposição estabeleceremos a relação íntima entre dois tais completamentos no caso não-separado.

3.5.6 Proposição. Sejam $< X,\mathcal{U} >$ um espaço uniforme não-separado, e $< X_1,\mathcal{U}_1 >$, $< X_2,\mathcal{U}_2 >$ dois completamentos. Então, se τ_1 e τ_2 são as topologias correspondentes, temos que $< X_1,\tau_1 > \equiv_{L^-_{k\lambda}} < X_2,\tau_2 >$.

Demonstração. Basta observar o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & < X_1,\mathcal{U}_1 > \arrow[r, "\pi_1"] & < \hat{X}_1,\hat{\mathcal{U}}_1 > \\
< X,\mathcal{U} > \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] \arrow[r, "\pi"] & < \hat{X},\hat{\mathcal{U}} > \arrow[ur, "j_1"] \arrow[dr, "j_2"'] & \\
 & < X_2,\mathcal{U}_2 > \arrow[r, "\pi_2"'] & < \hat{X}_2,\hat{\mathcal{U}}_2 >
\end{tikzcd}$$

Demonstra-se que $< \hat{X}_1,\hat{\mathcal{U}}_1 >$ e $< \hat{X}_2,\hat{\mathcal{U}}_2 >$ são completamentos de $< \hat{X},\hat{\mathcal{U}} >$ (que é um espaço separado) mediante j_1 e j_2 definidas de tal maneira que o diagrama comute. Neste caso temos:

$$< X_1,\tau_1 > \equiv_{L^-_{k\lambda}} < \hat{X}_1,\hat{\tau}_1 > \cong < \hat{X}_2,\hat{\tau}_2 > \equiv_{L^-_{k\lambda}} < X_2,\tau_2 > \quad \blacksquare$$

Exemplo 2. Seja L uma lógica abstrata regular e seja τ um tipo de similaridade com $c \in \tau$, consideremos a aplicação $f : St^\tau(L) \to St^{\tau\setminus\{c\}}(L)$ dada por $< \mathcal{A}, a > \mapsto \mathcal{A}$. Então, pela propriedade de particularização (ver nota 1.2.3) podemos definir $g : \mathcal{B}^{\tau} \to \mathcal{B}^{\tau\setminus\{c\}}$ dada por $\mathrm{Mod}(\varphi) \mapsto \mathrm{Mod}(\psi)$, de tal maneira que o par $< f, g >$ é um q-h. Observa-se que f e g são ambas sobrejetoras, portanto, pela proposição 3.5.4, g fica determinada por f da seguinte maneira: $\mathrm{Mod}(\psi) = g(\mathrm{Mod}(\varphi)) = f[\mathrm{Mod}(\varphi)] = \{\mathcal{A} \in St^{\tau\setminus\{c\}} /$ para algum $a \in A, < \mathcal{A}, a > \models \varphi\}$. Logo, f é um q-h de $1^{a.}$ espécie.

Este exemplo é particularmente importante para nossa pesquisa, porque a propriedade de particularização, que permite definir o quantificador existencial na lógica L, não pode ser extendida em forma natural aos espaços CSt^{τ}, principal problema na definição da noção de satisfação na nova semântica.

Como a f definida é s-contínua a respeito das bases elementares, talvez um passo adiante possa ser dado mediante a análise da aplicação do funtor $*$ (ver definição 3.2.1) no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} St^{\tau} & \xrightarrow{f} & St^{\tau\setminus\{c\}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ CSt^{\tau} & \xrightarrow[f^*]{} & CSt^{\tau\setminus\{c\}} \end{array}$$

Como f^* é s-contínua (também a respeito das bases elementares que são definidas a partir da mesma linguagem L), o diagrama anterior permite formular a propriedade de particularização para os espaços CSt^{τ} da seguinte maneira (comparar com a nota 1.2.3): para toda $\varphi \in L^{\tau}$ existe $\psi \in L^{\tau\setminus\{c\}}$ tal que para todo $(M, W) \in CSt^{\tau\setminus\{c\}}$ temos, $(M, W) \Vdash \psi \Leftrightarrow$ existe $(K, U) \in (f^*)^{-1}(M, W)$ tal que $(K, U) \Vdash \varphi$.

Exemplo 3. Na nossa teoria de compactificação temos os dois seguintes exemplos de quase-homeomorfismos: o par $< \varphi, h >$ onde $\varphi : X \to \gamma X$ é o mergulho dado por $\varphi(x) = (\{x\}, \{\{x\}\})$ e $V \overset{h}{\mapsto} V^*$; observa-se que h é sobrejetora por definição, no entanto, φ não é, portanto, pela propriedade $x \in V \Leftrightarrow \varphi(x) \in V^*$, temos que o par $< \varphi, h >$ é um q-h não de $1^{a.}$ espécie. Para este caso, $X \equiv_{L_{k\lambda}^{-2}} \gamma X$. Um outro exemplo é dado pela retração $g : \gamma X \to X$ (ver proposição 3.2.5) no caso de X ser um espaço z-d compacto. Neste caso, a respeito das bases $\mathcal{B}^*$ e $\mathcal{B}$ respectivamente, g é sobrejetora, s-contínua, s-aberta e $\mathcal{B}^*$-saturada, portanto, é um q-h de $1^{a.}$ espécie, em particular, $\gamma X \equiv_{L_{k\lambda}^{-}} X$ (ver também corolário 3.2.6). Os nossos argumentos não nos permitem concluir o mesmo resultado no caso de ser X um espaço compacto qualquer (não necessariamente z-d).

Ainda, na nossa teoria de compactificação podemos construir o seguinte exemplo de quase-homeomorfismo de $1^{a.}$ espécie: consideremos o espaço γX (X qualquer) e definamos a seguinte relação de equivalência $(A, U) \sim (B, W)$ se e só se $A = B$ e $\mathcal{B}_A \cap U = \mathcal{B}_A \cap W$, onde $\mathcal{B}_A = \{A \cap V / V \in \mathcal{B}\}$ é a base relativa ao subespaço A. Podemos entender $\mathcal{B}_A \cap U$ como o *traço* de U na topologia de A, ou U como um ultrafiltro sobre A que contém a base de filtro $\mathcal{B}_A$. Portanto, a relação $\sim$ identifica todos os ultrafiltros sobre A que contém $\mathcal{B}_A$.

Consideremos $\gamma X/\sim$ com a topologia quociente e a projeção $\pi : \gamma X \to \gamma X/\sim$.

3.5.7 Proposição. Para todo $V \in \mathcal{B}$ e todo $(A,U) \in \gamma X$:

$$(A,U) \in V^* \Leftrightarrow \pi((A,U)) \in \pi[V^*],$$

portanto, π é um q-h de $1^{a\cdot}$ espécie.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Óbvio.

($\Leftarrow$) Se $\pi((A,U)) \in \pi[V^*]$, então, existe $(B,W) \in V^*$ tal que $(A,U) \sim (B,W)$, i.e. $B \cap V \in W$, $A = B$ e $\mathcal{B}_A \cap U = \mathcal{B}_A \cap W$, logo, $A \cap V \in W$, i.e. $A \cap V \in \mathcal{B}_A \cap W = \mathcal{B}_A \cap U$, portanto, $A \cap V \in U$, i.e. $(A,U) \in V^*$ ∎

Este exemplo é interessante porque fornece uma outra compactificação do espaço X que é $L^-_{k\lambda}$-equivalente a γX, já que $X/\sim$ é compacto e $\pi\lceil X$ é injetora (basta observar que se $(A,U) \sim (\{x\},\{\{x\}\})$, então $A = \{x\}$ e $U = \{\{x\}\}$).

Os dois últimos exemplos seguintes são tomados da Álgebra.

Exemplo 4. Seja $f : A \to B$ um epimorfismo de anéis (comutativos com identidade), τ a coleção de ideais próprios de A (resp. ideais primos, primários ou maximais) que contém $Ker f$, e σ a coleção de ideais próprios de B (resp. ideais primos, primários ou maximais). Então f é um q-h de $1^{a\cdot}$ espécie. Em particular, se I é um ideal próprio de A, então $A \equiv_{L^-_{k\lambda}} A/I$ com relação às coleções τ e σ mencionadas (basta considerar a projeção $\pi : A \to A/I$).

Exemplo 5. Seja A um anel comutativo com identidade e S um sistema multiplicativo de A com $1 \in S$. Sejam $f : A \to A_S$ o homomorfismo canônico $a \mapsto \dfrac{a}{1}$, $\tau = \{P \subsetneq A/P$ é um ideal primo e $P \cap S = \phi\}$ e $\sigma = \{Q \subsetneq A_S/Q$ é um ideal primo $\}$ (A_S, denotado também por $S^{-1}A$, é o anel de frações de A módulo S; cf. [A-M] pags. 41 ss.).

Definindo $g : \tau \to \sigma$ por $g(P) = P^e$ (a extensão de P em A_S) temos que g é sobrejetora, já que todo ideal (primo) de A_S é um ideal extendido (cf. [A-M] pag. 47).

3.5.8 Proposição. Para todo $a \in A$ e todo $P \in \tau$,

$$a \in P \Leftrightarrow f(a) \in P^e,$$

portanto, o par $< f, g >$ é um q-h.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Se $a \in P$ então, $f(a) = \frac{a}{1} \in f[P] \subseteq P^e$.

($\Leftarrow$) Suponhamos $\frac{a}{1} \in P^e$, então $a \in f^{-1}[P^e] = P^{ec} = \bigcup_{s \in S}(P : s)$, i.e. existe $s \in S$ tal que $a \in (P : s) = \{x \in A / xs \in P\}$, logo, $as \in P$, portanto, como P é primo, $a \in P$ ou $s \in P$, mas $s \notin P$ pois $P \cap S = \phi$, logo, $a \in P$ ∎

Em particular, se P é um ideal primo de A, temos que $A \equiv_{L^{-2}_{k\lambda}} A_P$.

Terminaremos este apêndice dando algumas propriedades adicionais dos quase-homeomorfismos de 1ª espécie, todas elas de verificação rotineira.

3.5.9 Proposição. Se $f :< X, \tau > \rightarrow < Y, \sigma >$ é um q-h de 1ª espécie e $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$, denotando com $\beta\{A_i\}$ uma combinação booleana arbitrária dos A_i (incluindo uniões e interseções infinitas), temos:

i) $f[\beta\{A_i\}] = \beta\{f[A_i]\}$, em particular, a função $g : \tau \rightarrow \sigma$ dada por $g(A) = f[A]$ é um isomorfismo com relação à operação β.

ii) τ é fechada para a operação β se e somente se σ o é.

iii) $\beta\{A_i\}$ é saturada com relação a f.

iv) Se τ^β e σ^β são os fechos de τ e σ com relação à operação β, então, $f :< X, \tau^\beta > \rightarrow < Y, \sigma^\beta >$ é un q-h; em particular, se τ_{sat} é a coleção de subclasses de X saturados com relação a f, então τ_{sat} é uma topologia (no sentido usual) z-d sobre X maximal, para a qual f é um q-h.

v) f é uma aplicação própria s.a., i.e. f é fechada s.a. e para todo $K \subseteq Y$ compacto s.a., $f^{-1}[K]$ é compacto s.a. em X.

vi) Para todo $x \in X$, $f[\overline{\{x\}}] = \overline{\{f(x)\}}$, em particular, se X é um espaço T_0 s.a., i.e. $x \neq y$ implica $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$, então f é um homeomorfismo s.a. ∎

CAPÍTULO 4

UMA SEMÂNTICA COMPACTA MÍNIMA PARA LÓGICAS COM MODELOS FRACOS

Este último capítulo pretende colocar, devidamente fundamentados, basicamente três problemas relacionados com a pesquisa que nos ocupa. Para o autor desta tese, estes problemas deveriam ter sido suficientemente analisados para ser apresentados aqui em forma mais completa, entretanto, a sua importância, que pretendemos destacar, nos exige colocá-los em forma de problemas em aberto para pesquisas futuras.

De fato, o título deste capítulo refere-se ao primeiro destes problemas que, numa opinião pessoal, consideramos, senão o mais importante, talvez o mais interessante. Este será descrito no parágrafo 4.1 analisando, como um exemplo de destaque, o caso da lógica de 2ª ordem monádica. A importância deste problema, veremos, reside nas suas conexões com o teorema de incompletude de Gödel.

No parágrafo 4.2 analisaremos a possibilidade de aplicar o método de Fraïssé a algumas lógicas cuja equivalência elementar admite uma caracterização tipo back-and-forth. Um exemplo de destaque é a lógica infinitária $L_{\infty\omega}$. Uma solução positiva deste problema forneceria exemplos de lógicas Cauchy-completas que não são compactas, dado que a uniformidade de Fraïssé motivada pelo back-and-forth mencionado, em geral não é totalmente limitada.

O terceiro problema considerado é o completamento de uma estrutura a respeito da lógica de 1ª ordem. Ele é apresentado no parágrafo 4.3 e pretende analisar a possibilidade de "construir" extensões elementares de uma estrutura que simultaneamente sejam o seu completamento de Cauchy com relação a uma determinada uniformidade.

Muitos outros problemas têm sido sugeridos e esboçados ao longo destas páginas. Faremos um pequeno resumo deles. Em primeiro lugar, e o mais importante, é a definição de *satisfação* para os modelos generalizados, problema que, como é sugerido no exemplo 2 da seção 3.5, está intimamente relacionado com o comportamento do quantificador existencial nos novos modelos. Um outro problema estreitamente relacionado com aquele é o das definições de *isomorfismo, subestrutura* e *subestrutura elementar* na nova categoria de modelos. Tais definições permitiriam a descrição "adequada" dos novos objetos e o desenvolvimento da teoria de modelos das diferentes compactificações estudadas (cadeias elementares, teoremas de Löwenheim-Skolem, omissão de tipos, teorema da ultrapotência de Keisler, etc).

Um outro problema que também se apresenta urgente, do ponto de vista topológico, é o estudo detalhado da dependência da base na construção do espaço compactificado γX, assim como sua relação com as diferentes compactificações conhecidas: Wallman, Stone-Čech, etc, relação que foi apenas esboçada no capítulo 3. Ligado a este problema, e de profundo interesse para a teoria de modelos, é o estudo de outros tipos de compacidade, como a $[\kappa, \lambda]$-compacidade, qual o teorema de Łoś que está por trás deste tipo de compacidade, e a $[\kappa, \lambda]$-compactificação correspondente. Um primeiro estudo, e motivado pelos nossos interesses comuns, foi feito por X. Caicedo durante sua permanência como Professor Visitante junto ao IMECC, no segundo semestre de 1992 (cf. [Ca3]).

Finalmente, devemos mencionar novamente o problema da "construção", no caso das lógicas compactas, para cada família $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ e cada ultrafiltro U sobre I, de um representante canônico de $\lim_U \mathcal{A}_i$. No caso da lógica de 1ª ordem é o ultraproduto $\prod_U \mathcal{A}_i = \lim\limits_{J\in U} \prod\limits_{i\in J} \mathcal{A}_i$. Para o caso de outras lógicas talvez deva-se substituir o produto cartesiano por algum outro "produto generalizado" do estilo de Feferman-Vaught, por exemplo.

4.1 UMA SEMÂNTICA COMPACTA MÍNIMA PARA A LÓGICA DE SEGUNDA ORDEM

Existem dois métodos gerais de completar um espaço uniforme: (a) mergulhar o espaço como um subespaço denso no espaço de todas as redes de Cauchy do referido espaço, como feito na seção 3.4, e (b) mergulhar o espaço num outro espaço que seja completo e tomar o fecho respectivo. Nesta seção aplicaremos o segundo método para compactificar uma lógica.

Para tal efeito consideraremos lógicas cuja semântica admite modelos fracos, i.e. modelos onde a interpretação de alguns dos seus símbolos, usualmente quantificadores, não é a standard. Tal é o caso das lógicas de 2ª ordem e ordem superior, e das lógicas com quantificadores generalizados (ver seção 3.4).

Nesta seção analisaremos o caso da lógica de 2ª ordem (monádica por simplicidade) e transladaremos a problemática levantada, para o caso de lógicas com outros quantificadores.

Denotamos com St^τ_w a classe de todos os pares $< \mathcal{A}, q >$ onde $\mathcal{A} =< A, \ldots > \in St^\tau$ e $\phi \neq q \subseteq \mathcal{P}(A)$. St^τ_w será o ambiente natural para definir uma semântica compacta tanto para a lógica de 2ª ordem monádica L^2_M, como para lógicas com quantificadores monádicos $L(Q)$.

A linguagem de L^2_M tem dois tipos de variáveis:

- variáveis de 1ª ordem (para elementos): $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$

- variáveis de 2ª ordem (para subconjuntos): $X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$,
  e a relação de pertinência $\in$ que liga uma com a outra;

no entanto, a linguagem de $L(Q)$ apenas precisa do primeiro tipo.

As cláusulas para a relação de satisfação fraca dos novos quantificadores são respectivamente:

1. Para L^2_M,

$$<\mathcal{A}, q> \models (\exists X)\varphi(X) \;\Leftrightarrow\; \text{existe } S \in q \text{ tal que } <\mathcal{A}, q> \models \varphi[S],$$
$$<\mathcal{A}, q> \models (\forall X)\varphi(X) \;\Leftrightarrow\; \text{para todo } S \in q,\ <\mathcal{A}, q> \models \varphi[S];$$

2. Para $L(Q)$,

$$<\mathcal{A}, q> \models (Qx)\varphi(x) \;\Leftrightarrow\; \{a \in A / <\mathcal{A}, q> \models \varphi[a]\} \in q,$$

e se q é uma classe monótona, i.e. $S_1 \in q$ e $S_2 \supseteq S_1$ implicam $S_2 \in q$, então, esta última é equivalente a: existe $S \in q$ tal que para todo $a \in S, <\mathcal{A}, q> \models \varphi[a]$. No caso de ser q uma classe monótona, $<\mathcal{A}, q>$ é chamada de estrutura monótona.

O espaço $St^\tau_w(L^2_M)$, também chamado de "semântica de Henkin", tem um subespaço distinguido: aquele dos modelos standard da lógica de 2ª ordem, onde $<\mathcal{A}, q>$ é dito *standard* se $q = \mathcal{P}(A)$. Este subespaço será denotado por $St^\tau_0(L^2_M)$. Analogamente, se Q é um quantificador (monádico) e a sua "interpretação standard" está dada pela aplicação F_Q que a cada conjunto A associa uma determinada coleção $F_Q(A) \subseteq \mathcal{P}(A)$, então o subespaço $St^\tau_0(L(Q))$ dos modelos standard de $L(Q)$ é a subcoleção de $St^\tau_w(L(Q))$ que consta das estruturas $<\mathcal{A}, F_Q(A)>$.

Neste contexto, um quantificador Q é dito *monótono* se para todo conjunto $A, F_Q(A)$ é uma coleção monótona de subconjuntos de A. Por exemplo, os quantificadores cardinais Q_α são monótonos, pois para cada conjunto $A, F_{Q_\alpha}(A) = \{X \subseteq A / |X| \geq \aleph_\alpha\}$ é uma classe monótona.

Alguns autores restringem a classe St^τ_w, no caso da lógica $L(Q)$, à subclasse das estruturas monótonas (cf. [M-T]), e no caso da lógica L^2_M, à subclasse das estruturas $<\mathcal{A}, q>$ que satisfazem o esquema de compreensão e o axioma da extensionalidade, sendo estes os seguintes:

a) *Esquema de compreensão:* Dada $\varphi(z_1, \ldots, z_m, x)$, temos

$$(\forall z_1) \ldots (\forall z_m)(\exists X)(\forall x)(\varphi(z_1, \ldots, z_m, x) \leftrightarrow x \in X).$$

b) *Axioma de extensionalidade:* $(\forall x)(x \in X \leftrightarrow x \in Y) \rightarrow X = Y$.

Nós adotaremos estas restrições se for necessário.

É conveniente mencionar neste ponto que a determinação exata de St^{τ}_{w} e St^{τ}_{0}, tanto para a lógica L^2_M como para $L(Q)$, depende fortemente da teoria de conjuntos subjacente à nossa metateoria. Por exemplo, se assumimos ou não a Hipótese Generalizada do Contínuo, o conjunto potência $\mathcal{P}(A)$ terá propriedades diferentes. Uma análise da influência da teoria de conjuntos na lógica de $2^{a.}$ ordem é feita, por exemplo, em [Ha] e [H-O].

A seguir esboçaremos brevemente a demonstração de que os espaços $St^{\tau}_{w}(L^2_M)$ e $St^{\tau}_{w}(L(Q))$ são (zero-dimensionais) compactos.

4.1.1 Proposição. $St^{\tau}_{w}(L^2_M)$ é compacto.

Demonstração. Basta traduzir a linguagem L^2_M na linguagem de $1^{a.}$ ordem de tal maneira que os modelos se correspondam.

A tradução se faz mediante a seguinte operação:

$$\begin{array}{l}
(x_n)^* = x_{2n} \\
(X_n)^* = x_{2n+1} \\
(x \in X)^* = P(x^*, X^*) \\
(\varphi \wedge \psi)^* = \varphi^* \wedge \psi^* \\
(\neg\varphi)^* = \neg\varphi^*,
\end{array}$$

sendo P um predicado binário que traduz a "pertinência". E introduzindo os predicados $V(x)$ para "x é um elemento", e $U(x)$ para "x é um predicado unário", temos que:

$$\begin{array}{rcl}
((\forall x)\varphi(x))^* & = & (\forall x^*)(V(x^*) \rightarrow \varphi^*(x^*)) \\
((\exists x)\varphi(x))^* & = & (\exists x^*)(V(x^*) \wedge \varphi^*(x^*)) \\
((\forall X)\varphi(X))^* & = & (\forall X^*)(U(X^*) \rightarrow \varphi^*(X^*)) \\
((\exists X)\varphi(X))^* & = & (\exists X^*)(U(X^*) \wedge \varphi^*(X^*))\ .
\end{array}$$

A correspondência entre os modelos se consegue mediante os seguintes axiomas que governam os símbolos introduzidos:

i) $(\forall x)(\forall y)(V(x) \wedge U(y) \rightarrow x \neq y)$,

ii) $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \rightarrow V(x) \wedge U(y))$,

iii) $(\forall z_1)\ldots(\forall z_m)(\exists x)(\forall y)(\varphi(z_1,\ldots,z_m,y) \leftrightarrow P(y,x))$ (esta é a versão em primeira ordem do esquema de compreensão),

iv) $(\forall z)(P(z,x) \leftrightarrow P(z,y)) \rightarrow x = y$ (esta é a versão em primeira ordem do axioma de extensionalidade).

Finalizaremos mencionando que, em particular, o axioma de extensionalidade é importante pelo seguinte: se $< \mathcal{A}, S >$ é um modelo de $1^{a.}$ ordem obtido, sendo P a relação de "pertinência" entre elementos de A e elementos de S, então, podemos obter o modelo de $2^{a.}$ ordem correspondente $< \mathcal{A}, q >$ definindo $q = \{\overline{z}/z \in S\}$, onde $\overline{z} = \{x \in A/P(x,z)\}$. Prova-se, usando extensionalidade, que $< \mathcal{A}, S >$ e $< \mathcal{A}, q >$ são isomorfos como estruturas de espécie dupla ■

4.1.2 Proposição. $St^{\tau}_{w}(L(Q))$ é compacto.

Demonstração. A compacidade deste espaço será estabelecida pela determinação de um elemento canônico de $\lim_U < \mathcal{A}_i, q_i >$, onde $\{< \mathcal{A}_i, q_i >\}_{i \in I}$ é uma família qualquer e U é um ultrafiltro sobre I (ver proposição 2.2.8), i.e. construiremos um ultraproduto da família que satisfaça o teorema de Łoś.

Sejam $\{< \mathcal{A}_i, q_i >\}_{i \in I}$ uma família e U um ultrafiltro sobre I, então, o ultraproduto da família módulo U é dado por $\prod_U < \mathcal{A}_i, q_i > = < \prod_U \mathcal{A}_i, q >$ onde $q (\subseteq \mathcal{P}(\prod_U A_i))$ é construído da seguinte maneira: consideremos as projeções $\pi_i : \prod A_j \rightarrow A_i$ e extendamos a $\hat{\pi}_i : \mathcal{P}(\prod A_j) \rightarrow \mathcal{P}(A_i)$ mediante a função "imagem direta", i.e. $\hat{\pi}_i(C) = \pi_i[C]$; então, podemos definir $\hat{q} = \bigcup_{J \in U} \bigcap_{i \in J} \hat{\pi}_i^{-1}[q_i] \subseteq \mathcal{P}(\prod A_i)$. Finalmente, considerando a projeção $p : \prod A_i \rightarrow \prod_U A_i$ e sua extensão $\hat{p} : \mathcal{P}(\prod A_i) \rightarrow \mathcal{P}(\prod_U A_i)$, definimos $q = \hat{p}[\hat{q}]$.

Neste caso temos que : se ${}^*f_1, \ldots, {}^*f_n \in \prod_U A_i, < \prod_U \mathcal{A}_i, q > \models (Qx)\varphi[{}^*f_1, \ldots, {}^*f_n]$ $\Leftrightarrow$ $\{{}^*g \in \prod_U A_i / < \prod_U \mathcal{A}_i, q > \models \varphi[{}^*f_1, \ldots, {}^*f_n, {}^*g]\} \in q \Leftrightarrow$ existe $C \in \hat{q}$ tal que $\{{}^*g \in \prod_U A_i / < \prod_U \mathcal{A}_i, q > \models \varphi[{}^*f_1, \ldots, {}^*f_n, {}^*g]\} = \hat{p}(C) = p[C]$, i.e. $C = \{g \in \prod A_i / < \prod_U \mathcal{A}_i, q > \models \varphi[{}^*f_1, \ldots, {}^*f_n, {}^*g]\} \in \hat{q} \Leftrightarrow$ existe $J \in U$ tal que para todo $i \in J, C \in \hat{\pi}_i^{-1}[q_i]$, i.e. $\hat{\pi}_i(C) = \pi_i[C] \in q_i \Leftrightarrow \{i \in I / \pi_i[C] \in q_i\} \in U$, mas, $\pi_i[C] = \{a_i \in A_i / < \prod_U \mathcal{A}_i, q > \models \varphi[{}^*f_1, \ldots, {}^*f_n, {}^*g]\}$ sendo g definida por $g(i) = a_i$ (para os i pertinentes); além disso, por hipótese indutiva teríamos $< \prod_U \mathcal{A}_i, q > \models \varphi[{}^*f_1, \ldots, {}^*f_n, {}^*g]$ se e só se $\{i \in I / < \mathcal{A}_i, q_i > \models \varphi[f_1(i), \ldots, f_n(i), g(i)]\} \in U$, portanto, se i é tal que $\pi_i[C] \in q_i$, temos que $< \mathcal{A}_i, q_i > \models \varphi[f_1(i), \ldots, f_n(i), a_i]$, logo, $\{i \in I / \pi_i[C] \in q_i\} \in U \Leftrightarrow \{i \in I / \{a_i \in A_i / < \mathcal{A}_i, q_i > \models \varphi[f_1(i), \ldots, f_n(i), a_i]\} \in q_i\} \in U \Leftrightarrow \{i \in I / < \mathcal{A}_i, q_i > \models (Qx)\varphi[f_1(i), \ldots, f_n(i)]\} \in U$ ■

Demonstrações análogas deste fato são feitas em [Br] e [M-T].

Com a exposição precedente criamos o ambiente para colocar o nosso problema central: sob que condições o subespaço St^{τ}_{0} dos modelos standard (em qualquer uma das lógicas consideradas) é denso ou não no espaço compacto St^{τ}_{w} dos modelos fracos. Aqui analisaremos com detalhe o caso da lógica L^2_M explicitando sua conexão com o teorema de incompletude de Gödel. Veremos que o teorema de Gödel permite demonstrar que a semântica de Henkin é "grande demais", e os métodos topológicos permitirão estudar a mínima semântica compacta contida naquela e que contém aos modelos standard. Denotaremos, em qualquer caso com $\overline{St_0^\tau}$ o fecho de St_0^τ em St_ω^τ. O espaço $\overline{St_0^\tau}$ é um subespaço z-d compacto de St_ω^τ e é a mínima semântica compacta que contém St_0^τ.

Pode-se ver facilmente que a classe $\overline{St_0^\tau}$ (como subclasse de St_ω^τ) é axiomatizável pela coleção de todas as sentenças de L^τ (L_M^2 ou $L(Q)$) que são satisfeitas por todos os modelos standard: com efeito, $\overline{St_0^\tau} = \mathrm{Mod}_L(Th_L(St_0^\tau))$. Por outro lado, é claro que $Th_L(St_0^\tau)$ não é uma coleção recursiva de sentenças de L^τ.

Seja $\sum$ qualquer subcoleção recursiva de $Th_L(St_0^\tau)$ e $St_\Sigma^\tau = \mathrm{Mod}_L(\sum)$. É claro que $\overline{St_0^\tau} \subseteq St_\Sigma^\tau \subseteq St_\omega^\tau$.

4.1.3 Proposição. Se $L = L_M^2$, então, para todo $\sum$ recursivo como acima, temos que $\overline{St_0^\tau} \neq St_\Sigma^\tau$, i.e. St_0^τ é *essencialmente* não denso em St_ω^τ.

Demonstração (Esta demonstração foi sugerida por X. Caicedo). Seja τ_0 o tipo de similaridade dos números naturais $I\!N$ (na linguagem da aritmética de Peano AP^1) e $\tau \supseteq \tau_0$. Seja $\varphi \in L^\tau$ uma sentença da aritmética que seja verdadeira em $I\!N$ mas não demonstrável em AP^1 (i.e. φ é uma sentença de Gödel).

Sejam σ o axioma de indução completa (i.e. de 2ª ordem) e $\Gamma = AP^1 \cup \sum \cup \{\sigma\}$.

Afirmação 1. $\Gamma \models_0 \varphi$ ($\models_0$ é a relação de satisfação a respeito dos modelos standard).

Com efeito, se $<\mathcal{A}, q> \in St_0^\tau$ e $<\mathcal{A}, q> \models \Gamma$, então, pela categoricidade de $I\!N$ (em 2ª ordem) temos que $<\mathcal{A}, q> \cong <I\!N, \mathcal{P}(I\!N)>$, mas $<I\!N, \mathcal{P}(I\!N)> \models \varphi$, logo, $<\mathcal{A}, q> \models \varphi$.

Afirmação 2. Existe uma sentença $\theta \in L^\tau$ tal que $\mathrm{Mod}_L(\neg\theta) \cap St_\Sigma^\tau \neq \phi$ e $\mathrm{Mod}_L(\neg\theta) \cap St_0^\tau = \phi$. Isto estabelece a não-densidade de St_0^τ em St_Σ^τ.

Consideremos ${}^*I\!N \succ_{L_{\omega\omega}} I\!N$ um modelo não-standard de AP^1 em que seja falsa φ, e $q_d \subseteq \mathcal{P}({}^*I\!N)$ a coleção dos subconjuntos definíveis de ${}^*I\!N$. Neste caso, $<{}^*I\!N, q_d> \models \sigma$ pois σ, referido aos conjuntos definíveis, coincide com o esquema de indução de 1ª ordem. Além disso, obviamente $<{}^*I\!N, q_d> \models AP^1 \cup \sum$, logo, $<{}^*I\!N, q_d> \models \Gamma$, em particular, $<{}^*I\!N, q_d> \in St_\Sigma^\tau \backslash St_0^\tau$.

Seja $\Gamma_0 = AP_0^1 \cup \sum_0 \cup \{\sigma\}$ onde AP_0^1 é a axiomática de Peano de 1ª ordem sem o esquema de indução (de 1ª ordem), e $\sum_0 \subseteq \sum$ finito qualquer contendo os axiomas de extensionalidade e compreensão, e seja $\theta = \bigwedge \Gamma_0 \to \varphi$. Obviamente, $<{}^*I\!N, q_d> \models \neg\theta$, portanto, $\mathrm{Mod}_L(\neg\theta) \cap St_\Sigma^\tau \neq \phi$. Por outro lado, se existisse algum modelo standard $<\mathcal{A}, q> \models \neg\theta$, então $<\mathcal{A}, q> \models \bigwedge \Gamma_0 \wedge \neg\varphi$, logo, novamente pela categoricidade de $I\!N$, $<\mathcal{A}, q> \cong <I\!N, \mathcal{P}(I\!N)>$, uma contradição, pois φ é verdadeira em $I\!N$, em consequência, $\mathrm{Mod}_L(\neg\theta) \cap St_0^\tau = \phi$ ∎

Para o caso das lógicas $L(Q)$, o problema de determinar a densidade ou não de St_0^τ em St_ω^τ obviamente depende do quantificador Q e de sua função de interpretação standard F_Q. Talvez os quantificadores Q para os quais não haja densidade escondam algum "teorema tipo Gödel" para $L(Q)$. Observar que na demonstração da proposição 4.1.3, o fato de existir um número finito de sentenças que definam categoricamente uma estrutura, parece ser essencial.

4.2. APLICAÇÃO DO MÉTODO DE FRAÏSSÉ À LÓGICA $L_{\infty\omega}$

Nesta seção faremos somente a proposta de dois problemas relacionados com o método de Fraïssé, exposto na seção 1.5 para o caso de $L_{\omega\omega}$. O primeiro deles ligado à possível extensão deste método ao caso da lógica $L_{\infty\omega}$, e o segundo ligado a uma possível interpretação desse método do ponto de vista dos feixes de estruturas.

Em primeiro lugar, devemos mencionar que a lógica $L_{\infty\omega}$ não é uma lógica pequena, mas este fato não é importante para efeitos do método de Fraïssé.

A nossa suposição de que o método de Fraïssé funciona para este caso baseia-se no fato que a relação de equivalência elementar $\equiv_{\infty\omega}$ admite uma caracterização tipo back-and-forth como no caso da lógica $L_{\omega\omega}$. Definindo o grau quantificacional e a relação $\equiv_{\infty\omega}^\alpha$, onde α é um ordinal, como em [Bal] tem-se o seguinte (cf. [Bal] pag. 17): para todo $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in St^\tau$ e para todo ordinal α, são equivalentes,

a) $\mathcal{A} \equiv_{\infty\omega}^\alpha \mathcal{B}$

b) Existe uma sequência $I_0 \supseteq I_1 \supseteq \ldots \supseteq I_\alpha$, tal que para todo $\beta \leq \alpha, I_\beta$ é um conjunto não-vazio de isomorfismos parciais entre subestruturas de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, e se $\beta + 1 \leq \alpha, f \in I_{\beta+1}$ e $a \in A$ (resp. $b \in B$), então, existe $g \in I_\beta$ com $f \subseteq g$ e $a \in dom\ g$ (resp. $b \in im\ g$).

Os elementos de I_β serão chamados de β-iso.

Nós conjecturamos que a construção de Fraïssé dada na proposição 1.5.2 é possível de ser adaptada ao caso de $L_{\infty\omega}$ na seguinte versão:

4.2.1 Proposição. Seja $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in D}$ uma rede de Cauchy em St^τ. Então, existe um sistema dirigido $< \{\mathcal{B}_\alpha\}, \{f_\alpha\} >_{\alpha<|D|}$ associado a $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in D}$ satisfazendo as seguintes condições:

1. $\{\mathcal{B}_\alpha\}_{\alpha<|D|}$ é uma subrede linearmente ordenada de $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in D}$.
2. Para todo $\alpha < |D|, f_\alpha : \mathcal{B}_\alpha \to \mathcal{B}_{\alpha+1}$ é um α-iso com $im\ f_\alpha \subseteq dom\ f_{\alpha+1}$.
3. Se $\lambda(< |D|)$ é um ordinal limite, então $\mathcal{B}_\lambda = \varinjlim_{\beta<\lambda} \mathcal{B}_\beta[dom\ f_\beta$.

4. Para todo $a \in B_\alpha$ existem $b \in dom\ f_{\alpha+1}$ e $\overline{f}_\alpha \supseteq f_\alpha$ tal que $\overline{f}_\alpha$ é um β-iso para todo $\beta < \alpha$ e $\overline{f}_\alpha(a) = b$ ■

Neste caso, $\lim\limits_{\alpha < |D|} B_\alpha [dom\ f_\alpha$ daria o limite de Cauchy da rede, e portanto, estabeleceria a completude de Cauchy de $St^\tau(L_{\infty\omega})$ com relação à uniformidade de Fraïssé, a qual é dada por $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in On}$ onde para cada ordinal α, $\mathcal{U}_\alpha = \{(\mathcal{A}, \mathcal{B}) / \mathcal{A} \equiv^\alpha_{\infty\omega} \mathcal{B}\}$.

De fato, a uniformidade de Fraïssé gera a topologia elementar de St^τ pois $\mathcal{U}_\alpha[\mathcal{A}] = \{\mathcal{B} / \mathcal{A} \equiv^\alpha_{\infty\omega} \mathcal{B}\} = \{\mathcal{B}/$ para toda φ com $qr(\varphi) \leq \alpha : \mathcal{A} \in \text{Mod}(\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{B} \in \text{Mod}(\varphi)\} = \bigcap\limits_{qr(\varphi)\leq\alpha} \mathcal{U}_\varphi[\mathcal{A}] = \bigcap\limits_{qr(\varphi)\leq\alpha} \left\{ \begin{array}{ll} \text{Mod}(\varphi), & \text{se} \quad \mathcal{A} \models \varphi \\ \text{Mod}(\neg\varphi), & \text{se} \quad \mathcal{A} \models \neg\varphi \end{array} \right\} = \text{Mod}(\bigwedge\limits_{qr(\varphi)\leq\alpha} \{\varphi / \mathcal{A} \models \varphi\})$ (esta última igualdade devido a que $qr(\neg\varphi) = qr(\varphi)$).

Portanto, se a nossa conjectura é válida teríamos um exemplo de uma lógica Cauchy-completa que não é compacta (aliás, $L_{\infty\omega}$ não é compacta, pois a uniformidade de Fraïssé dada acima não é totalmente limitada).

Por outro lado, a respeito do método de Fraïssé existe uma outra linha de pesquisa iniciada por Caicedo e Sette em [Ca-S].

Sem entrar em detalhes podemos dizer que, no caso de $L_{\omega\omega}$, eles associam à sequência $< \{\mathcal{B}_n\}, \{f_n\} >$ construída na proposição 1.5.2, um feixe de estruturas definido sobre a compactificação de Alexandroff $\omega \cup \{\infty\}$ (do espaço ω com a topologia discreta), de tal maneira que a fibra sobre ∞ é genérica, i.e. o "forcing" e a "verdade" coincidem. Logo, existe uma estrutura "real" (no ∞) que é o limite de Cauchy da sequência.

Neste contexto podemos propor a seguinte conjectura: se L é uma lógica cuja equivalência elementar é caracterizável por um back-and-forth, e se $St^\tau(L)$ tem base enumerável, então, $St^\tau(L)$ é compacto se e somente se para toda sequência de Cauchy $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in\omega} \subseteq St^\tau(L)$, a fibra sobre ∞ do feixe construído (como em [Ca-S]) sobre $\omega \cup \{\infty\}$ é genérica.

Para concluir esta seção, também conjecturamos, junto com Caicedo e Sette, que o espaço de feixes $Sh_\tau(\omega \cup \{\infty\})$ com a topologia natural dada pelas classes da forma $\mathcal{O}_\varphi = \{S \in Sh_\tau(\omega \cup \{\infty\}) / S \Vdash \varphi\}$ é compacto.

Neste caso, $Sh_\tau(\omega \cup \{\infty\})$ forneceria uma compactificação de $St^\tau(L)$ já que este último espaço pode ser mergulhado continuamente naquele mediante a identificação de uma estrutura $\mathcal{A}$ com o feixe constante $\overline{\mathcal{A}}$ sobre $\omega \cup \{\infty\}$.

4.3 SOBRE O COMPLETAMENTO DE UMA ESTRUTURA

Seja $L = L_{\omega\omega}$ e $\mathcal{A} =< A, \ldots >\in St^{\tau}$ que por simplicidade consideraremos relacional. Seja $Y \subseteq A$ e consideremos $L^{\tau \cup Y}$ a linguagem de $\mathcal{A}$ com parâmetros em Y, i.e. a linguagem de $< \mathcal{A}, y >_{y \in Y}$.

Definimos sobre A a seguinte topologia: para cada $\varphi(x)$ em $L^{\tau \cup Y}$, seja $V_{\varphi(x)} = \{a \in A / < \mathcal{A}, y >_{y\in Y} \models \varphi[a]\}$. É claro que $\{V_{\varphi(x)}\}_{\varphi(x)\in L^{\tau\cup Y}}$ é uma base de clopens sobre A.

Seja $\equiv$ a relação de equivalência sobre A definida por: $a \equiv b$ se e só se para toda $\varphi(x) \in L^{\tau\cup Y}, < \mathcal{A}, y >_{y\in Y} \models \varphi[a] \Leftrightarrow < \mathcal{A}, y >_{y\in Y} \models \varphi[b]$, i.e. os 1-tipos p_a e p_b gerados por a e b respectivamente (na teoria $Th(< \mathcal{A}, y >_{y\in Y})$) são iguais. Então, o quociente $A/\equiv$ com a topologia quociente pode ser mergulhado densamente no espaço compacto (e Hausdorff) $S_1T = S_1Th(< \mathcal{A}, y >_{y\in Y})$.

O problema que propomos é o de encontrar uma extensão elementar $\overline{\mathcal{A}} \succ \mathcal{A}$ tal que feche o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{A} & \xrightarrow{\prec} & \overline{\mathcal{A}} & \\ \equiv & \downarrow & & \downarrow & \equiv \\ & A/\equiv & \xrightarrow[1-1]{} & S_1T & \end{array}$$

$\overline{\mathcal{A}}$ tem a seguinte topologia induzida pela de $\mathcal{A}$: para cada $\varphi(x) \in L^{\tau\cup Y}$, os abertos básicos são dados por $\overline{V}_{\varphi(x)} = \{\overline{a} \in \overline{A} / < \overline{\mathcal{A}}, y >_{y\in Y} \models \varphi[\overline{a}]\}$. Nesse caso, $\overline{\mathcal{A}}$ será chamado o "completamento de $\mathcal{A}$", se a topologia definida acima é compacta.

De fato, $\mathcal{A}$ está mergulhado densamente em qualquer extensão elementar sua, pois se $\overline{V}_{\varphi(x)} \neq \phi$, então, existe $\overline{a} \in \overline{A}$ tal que $< \overline{\mathcal{A}}, y >_{y\in Y} \models \varphi[\overline{a}]$, mas, como $\mathcal{A} \prec \overline{\mathcal{A}}$, existe $a \in A$ tal que $< \mathcal{A}, y >_{y\in Y} \models \varphi[a]$, logo, $a \in V_{\varphi(x)} (= \overline{V}_{\varphi(x)} \cap A)$.

Um candidato para $\overline{\mathcal{A}}$ está dado em [S] pag. 73, Prop. 15.1 (2), sendo aí $\overline{\mathcal{A}}$ uma extensão elementar de $\mathcal{A}$ que realiza todos os 1-tipos de $Th(< \mathcal{A}, y >_{y\in Y})$.

A seguir propomos a seguinte construção para um completamento $\overline{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ no caso de τ ser um tipo de similaridade (relacional) no máximo enumerável e Y um subconjunto de A no máximo enumerável. Neste caso, a topologia definida sobre A tem base enumerável e, para o estudo da convergência em A são suficientes as sequências.

Seja $\{a_n\}$ uma sequência em A, então, $\{a_n\}$ é de Cauchy se para toda $\varphi(x) \in L^{\tau\cup Y}$ existe $n \in \omega$ tal que para todo $i, j \geq n, < \mathcal{A}, y >_{y\in Y} \models \varphi[a_i] \Leftrightarrow < \mathcal{A}, y >_{y\in Y} \models \varphi[a_j]$.

Sejam A^* a coleção de todas as sequências de Cauchy de A e D um ultrafiltro não-principal sobre ω. Então, definimos $\overline{A} = A^*/D$, subcoleção da ultrapotência A^{ω}/D. Denotaremos a classe de equivalência de $\{a_n\}$ módulo D por $< a_n >$.

Se $R \in \tau$ e $< a_n^1 >, \ldots, < a_n^k > \in \overline{A}$, definimos $\overline{R}(< a_n^1 >, \ldots, < a_n^k >) \Leftrightarrow \{n / R(a_n^1, \ldots, a_n^k)\} \in D$. Então, a nova estrutura $\overline{\mathcal{A}}$ é subestrutura de $\mathcal{A}^{\omega}/D$ e satisfaz o teorema de Łoś seguinte: para toda $\varphi(x_1,\ldots,x_k)$ em $L^{\tau\cup Y}$ e $<a_n^1>,\ldots,<a_n^k>\in\overline{\mathcal{A}}$ temos que,

$$\overline{\mathcal{A}}\models\varphi[<a_n^1>,\ldots,<a_n^k>]\Leftrightarrow\{n/\mathcal{A}\models\varphi[a_n^1,\ldots,a_n^k]\}\in D.$$

O passo crítico na demonstração deste fato é para $\varphi=(\exists x)\psi$ e na direção "$\Leftarrow$".

Suponhamos que $\{n/\mathcal{A}\models(\exists x)\psi[a_n^1,\ldots,a_n^k]\}\in D$. Então, $\{n/$ existe $b_n\in A$ com $\mathcal{A}\models\psi[a_n^1,\ldots,a_n^k,b_n]\}\in D$; como a topologia sobre A é z-d e, portanto, totalmente limitada, então, a sequência $\{b_n\}$ tem uma subsequência $\{b_{n_r}\}$ de Cauchy. Verifica-se facilmente que $\{r/\mathcal{A}\models\psi[a_{n_r}^1,\ldots,a_{n_r}^k,b_{n_r}]\}\in D$, portanto, por hipótese indutiva, $\overline{\mathcal{A}}\models\psi[<a_{n_r}^1>,\ldots,<a_{n_r}^k>,<b_{n_r}>]$, logo, $\overline{\mathcal{A}}\models(\exists x)\psi[<a_{n_r}^1>,\ldots,<a_{n_r}^k>]$; finalmente, como D é não-principal, temos que $<a_{n_r}^i>=<a_n^i>$ para $i=1,\ldots,k$, portanto, $\overline{\mathcal{A}}\models(\exists x)\psi[<a_n^1>,\ldots,<a_n^k>]$.

O argumento anterior implica que $\mathcal{A}\prec\overline{\mathcal{A}}$ e portanto, $\mathcal{A}$ está mergulhado densamente em $\overline{\mathcal{A}}$ como já vimos.

Observa-se que a construção da extensão elementar $\overline{\mathcal{A}}\succ\mathcal{A}$ depende da lógica; no entanto, a construção da extensão elementar $\mathcal{A}^\omega/D\succ\mathcal{A}$ é puramente algébrica.

Provaremos que $\overline{\mathcal{A}}$ com a topologia z-d proveniente da linguagem $L^{\tau\cup Y}$ é um espaço compacto e que realiza todos os 1-tipos de $<\mathcal{A},y>_{y\in Y}$.

Para provar a compacidade provaremos que $\overline{\mathcal{A}}$ satisfaz o teorema abstrato de Łoś, i.e. para toda família $\{<a_n^k>\}_{k\in\omega}$ e todo ultrafiltro U sobre ω, $\lim_U<a_n^k>\neq\phi$.

Seja $\{<a_n^k>\}_{k\in\omega}$ uma família em $\overline{\mathcal{A}}$ e U um ultrafiltro sobre ω. Construiremos um $<b_n>\in\lim_U\ <a_n^k>$ (sendo $\{b_n\}$ de Cauchy). $<b_n>$ deve satisfazer o seguinte: para toda $\varphi(x)\in L^{\tau\cup Y}$,

$$<b_n>\in\overline{V}_{\varphi(x)}\Leftrightarrow\{k/<a_n^k>\in\overline{V}_{\varphi(x)}\}\in U$$

i.e.

$$\overline{\mathcal{A}}\models\varphi[<b_n>]\Leftrightarrow\{k/\overline{\mathcal{A}}\models\varphi[<a_n^k>]\}\in U$$

ou seja, pelo teorema de Łoś,

$$\{n/\mathcal{A}\models\varphi[b_n]\}\in D\Leftrightarrow\{k/\{n/\mathcal{A}\models\varphi[a_n^k]\}\in D\}\in U.$$

Um argumento diagonal permite escolher uma sequência $\{b_n\}$ satisfazendo esta última equivalência.

É consequência imediata da compacidade que $\overline{\mathcal{A}}$ realiza todos os 1-tipos de $<\mathcal{A},y>_{y\in Y}$: seja $p\in S_1Th(<\mathcal{A},y>_{y\in Y})$, então, por definição, todo subconjunto finito de p é realizado em $<\mathcal{A},y>_{y\in Y}$, i.e. a coleção $\{\overline{V}_{\varphi(x)}/\varphi\in p\}$ é uma família de fechados (básicos) com a PIF, logo, como $\overline{\mathcal{A}}$ é compacto, existe $<a_n>\in\bigcap\{\overline{V}_{\varphi(x)}/\varphi\in p\}$, i.e. para todo $\varphi\in p,\overline{\mathcal{A}}\models\varphi[<a_n>]$, portanto, $<a_n>$ realiza p em $\overline{\mathcal{A}}$. Aliás, pode-se provar facilmente que se $\mathcal{B}\succ\mathcal{A}$, então, a topologia sobre B induzida pela de A é compacta se e somente se $\mathcal{B}$ realiza todos os 1-tipos de $\mathcal{A}$.

Concluímos colocando o problema de generalizar este método de construção, do completamento de uma estrutura, cuja motivação é consequência do trabalho conjunto com A. M. Sette e W. A. Carnielli, aos casos não-enumeráveis, assim como o estudo das suas consequências nas teorias de omissão de tipos e modelos saturados.

REFERÊNCIAS

[A-M] ATIYAH, M. F. e MACDONALD, I. G. *Introducción al Álgebra Conmutativa.* Ed. Reverté S.A. Barcelona, 1973.

[Ba] BARWISE, J. *Model-Theoretic Logics: Background and Aims.* In: Model-Theoretic Logics (Barwise, J. e Feferman, S. Eds.) Springer-Verlag, New York, (1985) 3-23.

[Ba1] BARWISE, J. *Back-and-Forth Through Infinitary Logic.* In: Studies in Model Theory (Morley, M. Ed.). Math. Assoc. of America vol. 8 (1973) 5-34.

[B-C-R] BOCHNAK. J., COSTE, M. e ROY, M-F. *Géométrie Algébrique Réelle.* Springer-Verlag, 1987.

[Br] BROESTERHUIZEN, G. *A generalized Łoś Ultraproduct Theorem.* Coll. Mathematicum 33 (1975) 161-173.

[B-S] BELL, J. L. e SLOMSON, A. B. *Models and Ultraproducts: An Introduction.* North-Holand Pub. Comp. Amsterdam, 1969.

[Ca1] CAICEDO, X. *Compactness and Normality in Abstract Logics.* Ann. of Pure and App. Logic 59 (1993) 33-43.

[Ca2] CAICEDO, X. *Continuous Operations on Spaces of Structures.* In: Quantifiers. Kluwer. A aparecer.

[Ca3] CAICEDO X. *Compactness of Topological Spaces of Models.* Relatório de Pesquisa RP 64/92 IMECC-UNICAMP, 1992.

[Ca-S] CAICEDO X. e SETTE, A. M. *On Fraïssé's Proof of Compactness.* Relatório de Pesquisa RP 02/93 IMECC-UNICAMP, 1993.

[Ci1] CIFUENTES, J. C. *Compacidad y Compactificación en Teoría de Modelos.* Proc. IX SLALM, Bahía Blanca, Argentina, 1992. A aparecer.

[Ci2] CIFUENTES, J. C. *O método dos Isomorfismos Parciais. Um Estudo da Expressabilidade Matemática.* Coleção CLE, UNICAMP, São Paulo, 1992.

[C-K] CHANG, C.C. e KEISLER, H. J. *Continuous Model Theory.* Princeton Univ. Press, Princeton, 1966.

[C-M-S] CIFUENTES, J. C., MUNDICI, D. e SETTE, A. M. *Cauchy Completeness in Elementary Logic.* The Journal of Symbolic Logic. A aparecer.

[E] EBBINGHAUS, H. D. *Extended Logics: The General Framework.* In: Model-Theoretic Logics (Barwise, J. e Feferman, S. Eds.). Springer-Verlag, New York (1985) 25-76.

[En] ENGELKING, R. *Topology.*

[F-M-S] FRAYNE, T., MOREL, A. C. e SCOTT, D. S. *Reduced Direct Products.* Fund. Mathematicae 51 (1962) 195-228.

[Fr] FRAÏSSÉ, R. *Cours de Logique Mathématique.* Tome 1. Gauthier-Villars, Paris, 1967.

[Ha] HASENJAEGER, G. *On Löwenheim-Skolem-Type Insufficiencies of Second Order Logic.* In: Sets, Models and Recursion Theory (Crossley, John Ed.). North-Holland Pub. Comp., Amsterdam, 1967.

[Hi] HILBERT, D. *On the Infinite.* In: Philosophy of Mathematics (Benacerraf, P. e Putnam, H. Eds.). Prentice-Hall, Inc. New Jersey, (1964) 134-151.

[H-O] HORT, C. e OSSWALD, H. *On Nonstandard Models in Higher Order Logic.* The Journal of Symbolic Logic 49 (1984) 204-219.

[Ka1] KARP, C. *Finite-Quantifier Equivalence.* In: The Theory of Models (Addison, J. W., Henkin, L. A. e Tarski, A. Eds.). North-Holland Pub. Comp. (1965) 407-412.

[Ka2] KARP, C. *Infinite-Quantifier Languages and ω-Chains of Models.* Proc. of the Tarski Symposium (Henkin, L. Ed.). AMS Proc. of Symposia in Pure Math. vol. 25 (1974) 225-232.

[Ke] KELLEY, J. L. *General Topology.* Van Nostrand Reinhold, 1955.

[Ko] KOCHEN, S. *Ultraproducts in the Theory of Models.* Ann. of Math. 74 (1961) 221-261.

[L] LAM, T. Y. *An Introduction to Real Algebra.* Rocky Mountain J. of Math. 14 (1984) 767-814.

[Le] LÉVY, A. *The Role of Classes in Set Theory.* In: Sets and Classes: on the Work by Paul Bernays. North-Holland Pub. Comp. (1976) 173-215.

[Ma] MANNILA, H. *A Topological Characterization of $(\lambda,\mu)^*$-Compactness.* Ann. of Pure and App. Logic 25 (1983) 301-305.

[M-T] MAKOWSKI, J. A. e TULIPANI, S. *Some Model Theory for Monotone Quantifiers.* Arch. Math. Logik 18 (1977) 115-134.

[Mu] MUNDICI, D. *Inverse Topological Systems and Compactness in Abstract Model Theory.* The Journal of Symbolic Logic (1986) 785-794.

[S] SACKS, G. *Saturated Model Theory.* W. A. Benjamin, Inc. 1972.

[Sa] SAYEKI, H. *Some Consequences of the Normality of the Space of Models.* Fund. Mathematicae 61 (1968) 243-251.

[S-Ca] SETTE, A. M. e CAICEDO, X. *Equivalência Elementar entre Feixes.* Relatório Técnico nº 36/91. IMECC-UNICAMP, 1991.

[S-C] SETTE, A. M. e CIFUENTES, J. C. *Aplicação do Método de Fraïssé à Compactificação de Lógicas com Quantificadores Co-filtro.* Relatório de Pesquisa RP 10/92, IMECC-UNICAMP, 1992.

[Ta] TARSKI, A. *Some Notions and Methods on the Borderline of Algebra and Metamathematics.* Proc. of the Int. Cong. of Math. 1950. AMS (1952) 705-720.