Maicon José Benvenutti

Estabilidade não-linear de soluções estacionárias das equações de Euler incompressíveis com simetria helicoidal

CAMPINAS
2014

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

MAICON JOSÉ BENVENUTTI

ESTABILIDADE NÃO-LINEAR DE SOLUÇÕES ESTACIONÁRIAS DAS EQUAÇÕES DE EULER INCOMPRESSÍVEIS COM SIMETRIA HELICOIDAL

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em matemática.

Orientadora: Helena Judith Nussenzveig Lopes

Coorientador: Milton da Costa Lopes Filho

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO MAICON JOSÉ BENVENUTTI, E ORIENTADA PELA PROFA. DRA. HELENA JUDITH NUSSENZVEIG LOPES.

Assinatura da Orientadora

____

Assinatura do Coorientador

____

CAMPINAS
2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

B447e

Benvenutti, Maicon José, 1985-
Estabilidade não-linear de soluções estacionárias das equações de Euler incompressíveis com simetria helicoidal / Maicon José Benvenutti. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Helena Judith Nussenzveig Lopes.
Coorientador: Milton da Costa Lopes Filho.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Euler, Equações de. 2. Dinâmica dos fluidos. 3. Estabilidade. I. Lopes, Helena Judith Nussenzveig,1963-. II. Lopes Filho, Milton da Costa,1963-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Non-linear stability for steady solutions of incompressible Euler equations with helical symmetry
Palavras-chave em inglês:
Euler equations
Fluid dynamics
Stability
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Milton da Costa Lopes Filho [Coorientador]
Marcelo Martins dos Santos
Olivâine Santana de Queiroz
Jáuber Cavalcante de Oliveira
Jaime Angulo Pava
Data de defesa: 14-04-2014
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 14 de abril de 2014 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). MILTON DA COSTA LOPES FILHO

Prof(a). Dr(a). MARCELO MARTINS DOS SANTOS

Prof(a). Dr(a). OLIVÂINE SANTANA DE QUEIROZ

Jáuber C. de Oliveira

Prof(a). Dr(a). JÁUBER CAVALCANTE DE OLIVEIRA

Prof(a). Dr(a). JAIME ÂNGULO PAVA

Abstract

In this work, we approach issues regarding weak solutions existences and nonlinear stability for the incompressible Euler equations. More precisely, we analyze two distinct issues within these topics. At first, we consider the Euler equations with helical symmetry and with no swirl. Then, we use the reduction through symmetry to extend the stability techniques developed by Burton and by Wan and Pulvirenti to the helical case. Consequently, for a simply connected, bounded in horizontal planes and smooth helical domain, we prove that the strict maximiser of kinetic energy relative to all rearrangement of an arbitrary helical function in L^p is a steady and L^p-stable helical vorticity. Furthermore, in a cylindrical domain, we also prove that there exists a steady and L^1-stable helical vorticity which can be seen as an extension of the circular vortex patch. On the second issue, we consider the two-dimensional Euler equations in the domain $\mathbb{R}^2$ and with initial data that do not decay at infinity. We show that initial vortex patches covered by Serfati Existence of Solutions Theorem (that is, solutions with bounded velocities and vorticities) cannot contain arbitrarily large balls. In addition, we construct a counterexample of a vortex patch for which there exists an associated bounded velocity and such that there exists a subset in which the vortex patch does not have any associated bounded velocity.

Keywords: Incompressible Euler equations, Fluid dynamics, stability.

Resumo

Neste trabalho, abordamos questões de existência de soluções fracas e de estabilidade não-linear para as equações de Euler incompressíveis. Mais precisamente, analisamos dois tópicos distintos dentro destes assuntos. No primeiro, consideramos as equações de Euler sob a simetria helicoidal e com a restrição geométrica de ser livre de rodopio. Assim, utilizando as reduções provenientes da simetria, estendemos as técnicas de estabilidade desenvolvidas por Burton e por Wan e Pulvirenti para o caso helicoidal. Consequentemente, para um domínio helicoidal, simplesmente conexo, suave e limitado nos planos horizontais, demonstramos que o ponto de máximo estrito da energia cinética restrito à classe de rearranjos de uma função helicoidal qualquer em L^p é uma vorticidade helicoidal estacionária e L^p-estável num sentido não-linear. Além disto, em um domínio cilíndrico, mostramos também que há uma vorticidade helicoidal estacionária e L^1-estável que pode ser vista como uma extensão do *vortex patch* circular. No segundo tópico, consideramos as equações de Euler bidimensionais em $\mathbb{R}^2$ e com dados iniciais que não decaem no infinito. Demonstramos que os *vortex patches* iniciais abrangidos pelo Teorema de Existência de Soluções de Serfati (isto é, soluções com velocidades e vorticidades limitadas) não podem conter bolas arbitrariamente grandes. Além disto, construímos um contra exemplo de um *vortex patch* com velocidade associada limitada e tal que existe um subconjunto cujo *vortex patch* não possui uma velocidade associada limitada.

Palavras-chave: Equações de Euler incompressíveis, Dinâmina dos fluidos, estabilidade.

Sumário

Dedico esta tese ao meu Senhor Jesus Cristo
como um singelo reconhecimento à sua preciosa e perfeita obra restauradora,
que foi revelada, por amor à criação, no tempo em que se fez homem e maldição na cruz,
para poder receber bênçãos e a salvação todo aquele que nEle crer.

"...O rei de Aram estava em guerra contra Israel. Tomou conselho com seus oficiais e disse-lhes: "Fareis uma incursão contra tal lugar."Mas Eliseu mandou dizer ao rei de Israel: "Cuidado com tal lugar, pois os arameus descem para lá" e o rei de Israel mandou seus homens para o lugar onde Eliseu lhe havia indicado. Ele o advertia e o rei ficava de sobreaviso; e isso se deu não apenas uma ou duas vezes.

O coração do rei de Aram ficou perplexo com a coisa e ele convocou seus oficiais para perguntar-lhes: "Não me poderíeis descobrir quem é que está nos traindo junto do rei de Israel?" Um dos seus oficiais respondeu: "Ninguém, senhor meu rei; é Eliseu, profeta de Israel, que revela ao rei de Israel até mesmo as palavras que dizes no teu quarto de dormir." Ordenou ele: "Ide, vede onde ele está e mandarei prendê-lo." E foi-lhe anunciado: "Eis que ele está em Dotã." Então o rei mandou para lá cavalos, carros e uma poderosa tropa; chegaram de noite e cercaram o lugar.

No dia seguinte, Eliseu levantou-se bem cedo e saiu. E eis que um batalhão cercava a cidade com cavalos e carros! Seu servo lhe disse: "Ai, meu senhor, como vamos fazer?" "Não tenhas medo", respondeu, "pois são mais numerosos os que estão conosco que os que estão com eles." Eliseu orou dizendo: "Iahweh abre seus olhos para que veja!"Iahweh abriu os olhos do servo e ele viu a montanha coberta de cavalos e carros de fogo em torno de Eliseu!

E quando os arameus desciam contra ele, Eliseu orou assim a Iahweh: "Digna-te ferir essa gente de belida." Então Eliseu lhes disse: "Não é este o caminho, nem é esta a cidade. Segui-me, que vos conduzirei ao homem que procurais." Mas ele os conduziu a Samaria. Ao entrarem em Samaria, Eliseu disse: "Iahweh, abre os olhos dessa gente, para que veja." Iahweh abriu seus olhos e eles viram: estavam no centro de Samaria!

Quando os viu, o rei de Israel disse a Eliseu: "Devo matá-los, meu pai?" Mas ele respondeu: "Não! Tiras a vida àqueles que tua espada e teu arco fizeram prisioneiros? Dá-lhes pão e água, para que comam e bebam e depois voltem para seu senhor." O rei lhes serviu um grande banquete; depois de terem comido e bebido, despediu-os e eles voltaram para o seu senhor. Os bandos arameus não fizeram mais incursões no território de Israel ... "

II Reis 6, 8-23

"...Assim disse Iahweh: Que o sábio não se glorie de sua sabedoria, que o valente não se glorie de sua valentia, que o rico não se glorie de sua riqueza!

Mas aquele que quer gloriar-se glorie-se disto: Que ele tenha inteligência e me conheça, porque eu sou Iahweh que pratico o amor, o direito e a justiça na terra. Porque, é disto que eu gosto, oráculo de Iahweh!..."

Jeremias 9, 22-23

Agradecimentos

Ao Senhor Jesus Cristo, por ter me sustentado em todos os momentos.

À minha família, que sempre foi uma base forte e aconchegante: aos meus pais Sérgio e Lúcia, por todo o amor e suporte que sempre me proporcionaram; à minha irmã Mayk, pelo apoio e por ter me dado dois lindos sobrinhos, Sarah e João.

A Lívia, pelo companheirismo, parceira, carinho, amor, cuidado e confiança nestes dois anos que nos conhecemos. Uma pessoa maravilhosa que me faz crescer e que amo estar ao lado compartilhando a vida.

A dona Mazé, seu Francisco, Mila e João, uma nova família que ganhei em Campinas, por todo o suporte e amor que me deram.

Ao Pastor Fernando Henrique Cavalcante de Oliveira, pelas orações e ensinamento da Palavra.

A Martinha e ao grupo de estudos bíblicos que se reunem em sua casa, pelo grande apoio e recepção que me deram quando cheguei em Campinas.

Ao Leonardo Borges, pela amizade criada no primeiro ano de doutorado, quando dividimos uma república e compartilhamos todo o peso das qualificações com muito bom humor e incentivo.

Ao Rafael Abreu e ao Alysson Tobias, pela amizade criada quando dividimos por três anos uma república e pudemos passar juntos por momentos inesquecíveis.

A Débora Albanez e ao Thiago Pinguello de Andrade pela caminhada fraternal neste doutorado.

Aos meus orientadores de doutorado Helena Judith Nussenzveig Lopes e Milton da Costa Lopes Filho, por todo o conhecimento que me passaram.

Ao meu orientador de mestrado e amigo Jáuber Cavalcante de Oliveira, pelos conselhos dado no início e no fim do doutorado.

Aos professores do IMECC, pela forma como ensinam com competência e paixão a matemática. Em especial ao professor Lucas Catão Ferreira, também pelos sábios conselhos.

À banca examinadora, pelas sugestões e correções da tese.

A todos do colegas do IMECC, cuja amizade, admiração e gratidão deixaram esta jornada bem mais agradável: Adriana Araujo Cintra, Ailton Ribeiro de Oliveira, Alda Dayana Mattos, Ariane Piovezan Entringer, Arnoldo Rafael Teherán Herrera, Carlos Frank Lima, Cláudia Aline Azevedo dos Santos, Fernanda de Andrade Pereira, Guido Gerson Espiritu Ledesma, Igor dos Santos Lima, Jesus E Achire Quispe, Leandro Cruvinel Lemes, Lidiane Dos Santos Lima, Luiz Alberto Viana da Silva, Matheus Correia dos Santos, Michael Santos Gonzales Gargate, Nestor F. Castañeda Centurión, Patrícia Borges dos Santos, Paulo Henrique Pereira da Costa, Rodolfo de P. Ribeiro Jr., Thiago Rodrigo Alves, Wender José de Souza.

A Capes e ao CNPq pelas bolsas concedidas.

Introdução

Neste trabalho, tratamos as equações de Euler que modelam fluidos ideais e incompressíveis. Mais precisamente, pesquisamos dois tópicos distintos dentro deste assunto. No primeiro, abordamos as equações de Euler 3-D com simetria helicoidal e analisamos questões relacionadas à existência de soluções e estabilidade não-linear. No segundo, consideramos as equações de Euler 2-D e lidamos com propriedades para dados iniciais que não decaem no infinito.

As equações que modelam o movimento de fluidos incompressíveis e não-viscosos foram derivadas por Leonard Euler em 1757 ([28]). Embora haja mais de dois séculos e meio de contribuições acadêmicas sobre o tema, muitas questões envolvendo estas equações ainda continuam em aberto. Mesmo a existência de soluções globalmente definidas no tempo é um desafio corrente para a comunidade científica (veja [5], [19], [45] e [47] para detalhes). A fim de evidenciar a atualidade do assunto, lembramos que no contexto análogo de Navier-Stokes, a obtenção de soluções globais e suaves para dados iniciais suaves é um dos famosos problemas do milênio proposto pelo Clay Institute.

Casos particulares em que há melhores resultados são os escoamentos com simetria. Uma simetria amplamente estudada na literatura é a bidimensional. Nesta, o campo de velocidades é paralelo ao plano $x_3 = 0$ e independente de x_3. Para estes escoamentos, teoremas de boa colocação global e de comportamento para tempos longos têm sido obtidos desde décadas passadas (veja [41], [45] e [47]). Uma das razões para o bom tratamentos de fluxos bidimensionais é o fato que a vorticidade satisfaz uma equação do transporte escalar, e portanto pode ser estimada mais facilmente. Outra simetria frequentemente considerada na literatura é a axial e estudos deste caso podem ser encontrados em [45].

A simetria que consideramos na primeira parte deste trabalho é a helicoidal. Nesta, o campo de velocidades, quando escrito em coordenadas cilíndricas, depende da combinação $(r, \theta + z)$. Em [13], [24], [27], [35], [43] e [44] encontramos teoremas de existência de soluções globais e de limites evanescentes para as equações de Euler e de Navier-Stokes helicoidais. Na primeira parte deste trabalho, temos como resultado principal a existência de soluções estacionárias e estáveis para as equações de Euler helicoidais. Notamos que apenas recentemente fluxos helicoidais têm atraído a atenção da comunidade científica de forma mais recorrente. Uma possível razão é a falta de um sistema de coordenadas adequado para a simetria.

Uma condição geométrica adicional pode ser considerada no caso Euler helicoidal. Chamamos de escoamentos sem rodopio aos campos de velocidades que também são ortogonais às hélices verticais $\theta + z = cte$. Apesar de fisicamente restritiva, esta condição torna os fluxos, em certo sentido, semelhantes aos bidimensionais, e portanto matematicamente mais tratáveis.

Escoamentos helicoidais sem rodopio têm o campo de vorticidades da forma $(x_2, -x_1, 1)\omega_3$, com ω_3 constante sobre as hélices $\theta + z = cte$ (veja Proposição 2.5). Portanto, para um escoamento em uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, a vorticidade está completamente definida pela restrição de ω_3 ao subconjunto Ω_o, para $\Omega_o = \Omega \bigcap \{z = 0\}$. À esta restrição chamamos ξ. Além disso, para v uma transformação linear adequada das duas primeiras componentes do campo de velocidades, e para a notação $v.\nabla = v_1\partial_{x_1} + v_2\partial_{x_2}$, temos que a equação da vorticidade é reduzida à seguinte equação do transporte escalar (veja a Proposição 2.10):

$$\frac{\partial}{\partial t}\xi + (v.\nabla)\xi \;=\; 0 \text{ em } \Omega_o \times [0, \infty). \tag{0.0.1}$$

Ademais, para η a normal unitária exterior à $\partial\Omega_o$, temos que ξ e v estão relacionados pelo seguinte sistema:

$$\begin{cases} div\left\{\dfrac{1}{1+x_1^2+x_2^2}\begin{bmatrix} 1+x_2^2 & -x_1x_2 \\ -x_1x_2 & 1+x_1^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{bmatrix}\right\} = \xi \quad \text{em} \quad \Omega_o \times [0,\infty), \\ div\, v = 0 \quad \text{em} \quad \Omega_o \times [0,\infty), \\ v.\eta = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega_o \times [0,\infty). \end{cases} \tag{0.0.2}$$

Em suma, (0.0.1)-(0.0.2) é a redução por simetria da equação da vorticidade para Euler helicoidal sem rodopio.

O sistema acima é semelhante ao caso bidimensional (veja seção 1.1 do primeiro capítulo deste trabalho). A diferença está na primeira igualdade de (0.0.2). Enquanto no bidimensional a expressão é $\partial_{x_1}v_2 - \partial_{x_2}v_1 = \xi$, aqui temos uma espécie de rotacional torcido.

Uma questão que naturalmente surge é saber se os resultados bem estabelecidos de Euler bidimensional podem ser estendidos para o caso helicoidal sem rodopio. Como uma primeira resposta no sentido positivo, temos que se Ω_o é aberto, limitado e suave, em [27] é estabelecido existência e unicidade de soluções para dados iniciais $\xi_0 \in L^\infty(\Omega_o)$. A demonstração da unicidade segue as ideias do Teorema de Yudovich ([52]).

Neste trabalho, estendemos o teorema de existência de soluções acima para dados iniciais em $\xi_0 \in L^p(\Omega_o)$, com $p > \dfrac{4}{3}$. Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Teorema 0.1. *Sejam $p > \dfrac{4}{3}$, $\Omega_o \subset \mathbb{R}^2$ aberto, limitado, suave e simplesmente conexo e $\xi_0 \in L^p(\Omega_o)$. Então, existe uma $\xi \in L^\infty([0,\infty), L^p(\Omega_o))$ solução fraca de (0.0.1)-(0.0.2) com dado inicial ξ_0.*

No teorema acima, a unicidade de soluções não é demonstrada. Este resultado está em concordância com o caso bidimensinal, que igualmente tem a questão da unicidade em L^p, com $p < \infty$, como um problema em aberto (veja seção 1.1 do primeiro capítulo deste trabalho).

Além disso, investigamos também a existência de vorticidades estacionárias e estáveis. Em [51], Wan e Pulvirenti demonstraram a estabilidade L^1 do *vortex patch* circular para Euler bidimensional. Neste trabalho, mostramos que há uma vorticidade estacionária helicoidal que é igualmente L^1 estável. Com efeito, considerando o sistema reduzido acima e a notação de função característica de um conjunto $\Delta_o \subset \mathbb{R}^n$ por $\mathcal{X}_{\Delta_o}$, temos o seguinte teorema:

Teorema 0.2. *Sejam $R > 1$ e $\Omega_o = B_{\mathbb{R}^2}(0, R)$. Então, $\xi_0 = \mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,1)}$ é uma solução estacionária de (0.0.1)-(0.0.2) e L^1-estável sob a perturbação de outros dados iniciais que são funções características. Mais precisamente, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\Delta_0 \subset \Omega_o$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\xi(0) = \lambda\mathcal{X}_{\Delta_0}$, $\|\xi(0) - \mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,1)}\|_{L^1(\Omega_o)} < \delta$ e $\xi \in L^\infty([0,\infty), L^\infty(\Omega_o))$ é a solução do sistema (0.0.1)-(0.0.2) com condição inicial $\xi(0)$, então $\|\xi(t) - \mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,1)}\|_{L^1(\Omega_o)} < \epsilon$, para todo $t \geq 0$.*

Como (0.0.1)-(0.0.2) é a redução por simetria da equação da vorticidade, o resultado acima pode ser visto como a estabilidade $L^1_{per\,x_3}$ da vorticidade estacionária $\omega = (x_2, -x_1, 1)\mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,1)\times\mathbb{R}}$ para Euler helicoidal sem rodopio. A esta vorticidade chamamos *vortex patch* helicoidal.

Para o próximo resultado, precisamos da seguinte noção de energia associada ao sistema (0.0.1)-(0.0.2): fixado $p > \dfrac{4}{3}$ e $\xi \in L^p(\Omega_o)$, mostramos que existe única $G[\xi] \in W^{2,p}(\Omega_o) \cap W_0^{1,p}(\Omega_o)$ tal que $v = \nabla^\perp G[\xi]$ é a solução de (0.0.2), para $\nabla^\perp = (\partial_{x_2}, -\partial_{x_1})$. Então, definimos a energia como a quantidade

$$\mathcal{E}[\xi] = \frac{1}{2}\int_{\Omega_o} \xi(x)G[\xi](x)dx. \tag{0.0.3}$$

Em [15], [16] e [17], Burton desenvolveu uma teoria sobre rearranjos de funções e aplicou os resultados ao funcional energia para obter soluções estacionárias e estáveis das equações de Euler bidimensionais. Usamos esta teoria de rearranjos de funções para obtermos a seguinte extensão do Teorema de Burton:

Teorema 0.3. *Sejam $\dfrac{4}{3} < p < \infty$, $\Omega_o \subset \mathbb{R}^2$ aberto, limitado, suave e simplesmente conexo, $f \in L^p(\Omega_o)$ e $\mathbf{R}$ o conjunto de todos os rearranjos de f em Ω_o. Munimos $\mathbf{R}$ com a topologia induzida de $L^p(\Omega_o)$. Então, são verdadeiras as seguintes afirmações:*

1. *O funcional energia restrito à $\mathbf{R}$ (isto é, $\mathcal{E} : \mathbf{R} \longmapsto \mathbb{R}$) atinge o supremo. Além disso, se $\xi_0 \in \mathbf{R}$ é um ponto de máximo, então ξ_0 é uma solução estacionária do sistema (0.0.1)-(0.0.2);*

2. *Se $\xi_0 \in \mathbf{R}$ é um ponto de máximo local de $\mathcal{E} : \mathbf{R} \longmapsto \mathbb{R}$, então ξ_0 é uma solução estacionária do sistema (0.0.1)-(0.0.2);*

3. *Se $2 \leq p < \infty$ e ξ_0 é um ponto de máximo estrito de $\mathcal{E} : \mathbf{R} \longmapsto \mathbb{R}$, então ξ_0 é uma solução estacionária e L^p-estável. Mais precisamente, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que se $\xi(0) \in L^p(\Omega_o)$, $\|\xi(0) - \xi_0\|_{L^p(\Omega_0)} < \delta$ e $\xi \in L^\infty([0,\infty), L^p(\Omega_o))$ é a solução do sistema (0.0.1)-(0.0.2) dada pelo Teorema 0.1 e com condição inicial $\xi(0)$, então temos que $\|\xi(t) - \xi_0\|_{L^p(\Omega_0)} < \epsilon$, para todo $t \geq 0$.*

Novamente, como (0.0.1)-(0.0.2) é a redução por simetria da equação da vorticidade, o resultado acima pode ser visto como a estabilidade $L^p_{per\,x_3}$ da vorticidade estacionária $\omega = (x_2, -x_1, 1)\omega_3$ associada à ξ_0, para Euler 3-D helicoidal e sem rodopio.

Além do teorema acima, temos também o seguinte resultado:

Teorema 0.4. *Sejam* $2 \leq p < \infty$, $R > 1$, $\Omega_o = B_{\mathbb{R}^2}(0, R)$, $g \in L^p(0, R^2)$ *monótona e* $\xi_0 = g(|\,.\,|^2)$. *Então,* ξ_0 *é uma solução estacionária e* L^p*-estável. Mais precisamente, para cada* $\epsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$, *tal que se* $\xi(0) \in L^p(\Omega_o)$, $\|g(|\,.\,|^2) - \xi(0)\|_{L^p(\Omega_o)} \leq \delta$ *e* ξ *é a solução do sistema (0.0.1)-(0.0.2) dada pelo Teorema 0.1 com condição inicial* $\xi(0)$, *então temos que* $\|g(|\,.\,|^2) - \xi(t)\|_{L^p(\Omega_o)} \leq \epsilon$, *para todo* $t \geq 0$.

Na segunda parte deste trabalho, consideramos as equações de Euler 2-D no domínio $\mathbb{R}^2$ e lidamos com propriedades para dados iniciais que não decaem no infinito.

Com efeito, pelo clássico Teorema de Yudovich, temos garantida a existência e unicidade de soluções para Euler bidimensional com vorticidade $\omega \in L^\infty([0, T]; L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$ (veja [45] e [52]). Devido à integrabilidade, os dados iniciais abrangidas por este resultado, em certo sentido, decaem no infinito. Além deste, outros teoremas de existência de soluções para condições iniciais $\omega_0 \in L^p(\mathbb{R}^2)$ podem ser encontrados em [7], [8], [31] e [45].

Por outro lado, do ponto de vista físico, as vorticidades em escoamentos pouco viscosos tendem a ser geradas perto da fronteira (veja [2] e [41] para maiores detalhes). Levando em conta que os modelos com o domínio $\mathbb{R}^2$ podem ser vistos como aproximações para fluxos longe da margem delimitadora, temos que dados iniciais que não decaem no infinito são fisicamente relevantes. Nesta direção, Serfati em [48] demonstrou a boa colocação das equações de Euler bidimensionais no espaço $\mathcal{S} = \{u \in (L^\infty(\mathbb{R}^2))^2;\ div\, u = 0 \text{ e } \omega = rot\, u \in L^\infty(\mathbb{R}^2)\}$ (veja [2] e [49] para melhorias e extensões do resultado).

Uma questão interessante e ainda pouco explorada neste tema é caracterizar os dados iniciais abrangidos pelo Teorema de Serfati. Neste trabalho, mostramos a seguinte propriedade para os *vortex patches* de $\mathcal{S}$, isto é, para os elementos de $\mathcal{S}$ cujo ω são funções características:

Teorema 0.5. *Sejam* $u \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ *e* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *tal que*

$$\begin{cases} div\, u &=& 0, \\ rot\, u &=& \mathcal{X}_\Omega. \end{cases}$$

Então, para todo $x \in \mathbb{R}^2$ *e* $r > 2^6 \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$, *temos que*

$$|B(x, r) \cap \Omega^c| > 0,$$

para $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2\, |x - y| < r\}$, $\Omega^c = \mathbb{R}^2 / \Omega$ *e* $|\ .\ |$ *a medida de Lebesgue em* $\mathbb{R}^2$.

Como consequência do teorema acima, temos que uma condição necessária para $\mathcal{X}_\Omega$ ser uma vorticidade em $\mathcal{S}$ é que Ω não pode conter bolas arbitrariamente grandes. Portanto, muitos *vortex patches* iniciais não são abrangidos pelo Teorema de Serfati. Citamos $\mathcal{X}_{\mathbb{R}^2}$ e $\mathcal{X}_{\Omega_a}$, para $\Omega_a = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 > 0 \text{ e } x_2 > 0\}$.

Além desta questão, ainda não são conhecidos exemplos explícitos de vorticidades iniciais em $\mathcal{S}$ que não estão em $L^p(\mathbb{R}^2)$ e não são periódicos. Neste trabalho, obtemos o seguinte *vortex patch* inicial em $\mathcal{S}$ com área infinita:

Exemplo 0.1. *Sejam* $\Omega_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times (-1, 1)\}$ *e* $u = (u_1, 0)$ *dado por*

$$u_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 2 & se & x_2 \leq -1, \\ 1 - x_2 & se & -1 < x_2 < 1, \\ 0 & se & x_2 \geq 1. \end{cases}$$

Então, $u \in \mathcal{S}$ *e* $\omega = \mathcal{X}_{\Omega_1}$.

Dado $\mathcal{X}_\Omega$ uma vorticidade inicial de Serfati, uma indagação que naturalmente surge é saber se para todo $\Omega^* \subset \Omega$, $\mathcal{X}_{\Omega^*}$ também é de Serfati. Com o exemplo anterior e o seguinte, temos que a resposta é negativa.

Exemplo 0.2. *Seja* $\Omega_0 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2) \in (0, \infty) \times (-1, 1)\}$. *Então, não existe* $u \in \mathcal{S}$ *tal que* $\omega = \mathcal{X}_{\Omega_0}$.

Durante o desenvolvimento da tese, procuramos por uma família de exemplos de *vortex patches* iniciais em $\mathcal{S}$ com área infinita. Conjecturamos que $\mathcal{X}_{\Omega_\beta}$, para $-1 \leq \beta < 0$ e $\Omega_\beta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 1 \text{ e } 0 < y < x^\beta\}$, poderia ser esta família. Porém, não conseguimos comprovar esta conjectura e nem a refutar. Apesar disto, mostramos que há um decaimento suficiente em $\mathcal{X}_{\Omega_\beta}$ para a lei de Biot-Savart estar bem definida. Portanto, demonstramos que estes *vortex patches* são condições iniciais abrangidas pelo Teorema de Existência de Soluções de Brunelli (veja [14]).

Este trabalho está organizado da seguinte forma: No capítulo 1, fazemos uma introdução às equações de Euler, incluindo a dedução do modelo e o enunciado de alguns teoremas de existência de soluções e estabilidade não-linear conhecidos na literatura. Além disso, fazemos uma introdução à teoria de rearranjos de funções, com os enunciados do resultados que são usados neste trabalho. No capítulo 2, demonstramos um teorema de existência de soluções para as equações de Euler helicoidais sem rodopio. Na primeira seção, apresentamos a definição de simetria helicoidal, suas propriedades e a relação com as equações de Euler. Além disso, reescrevemos a equação da vorticidade para Euler helicoidal sem rodopio na forma (0.0.1)-(0.0.2). Na segunda seção, demonstramos o Teorema 0.1. No capítulo 3, apresentamos algumas soluções estacionárias e estáveis (no sentido não-linear) para as equações de Euler helicoidais sem rodopio. Mais especificamente, demostramos os Teoremas 0.2, 0.3 e 0.4. No capítulo 4, consideramos as equações de Euler bidimensionais no domínio $\mathbb{R}^2$ e sem hipóteses de decaimento no infinito. Na primeira seção, definimos soluções de Brunelli e demonstramos que os *vortex patches* $\mathcal{X}_{\Omega_\beta}$ como acima são dados iniciais de Brunelli com área infinita. Na segunda seção, definimos soluções de Serfati, apresentamos os Exemplos 0.1 e 0.2 e demonstramos o Teorema 0.5

Capítulo 1

Preliminares

Nosso objetivo neste capítulo é facilitar a leitura do texto, incluindo notações e pré-requisitos de teoria matemática da dinâmica dos fluidos e de equações diferenciais parciais, assim como também situar este trabalho, de uma forma mais clara, dentro do estado da arte do tema. Na primeira seção, versamos sobre as equações de Euler. Começamos pela dedução do modelo e vamos até resultados sobre existência de soluções e estabilidade não-linear. Na segunda seção, introduzimos a teoria de rearranjos de funções, fixando notações e resultados relevantes para o desenvolvimento deste trabalho.

1.1 Introdução às equações de Euler

Nesta seção, fazemos uma introdução à teoria das equações de Euler incompressíveis. Na primeira subseção, enunciamos as hipóteses físicas do modelo e, em seguida, deduzimos as equações de Euler em termos da velocidade. Na segunda subseção, enunciamos resultados sobre existência de soluções e formação de singularidades. Além disso, introduzimos a noção de simetria bidimensional e apresentamos teoremas de existência de soluções globais (clássicas e fracas) para as equações de Euler bidimensionais. Na terceira subseção, expomos resultados sobre estabilidade não-linear de soluções.

1.1.1 Dedução das equações de Euler incompressíveis

Nesta subseção, seguimos [18] e [41] e deduzimos as equações de Euler que modelam um escoamento incompressível não-viscoso. Essas equações são obtidas a partir dos princípios físicos da conservação da massa e do balanço do momento, juntamente com a hipótese do contínuo. Primeiro, assumimos o princípio da conservação da massa e usamos a descrição Euleriana para deduzirmos a equação da continuidade (ou equação da conservação da massa). Após isto, supomos que o escoamento é não-viscoso (ideal), assumimos o princípio do balanço do momento (segunda lei de Newton) e usamos a descrição Lagrangiana para deduzirmos a equação do momento. Finalmente, impomos as hipóteses adicionais e restritivas de escoamentos homogêneos e incompressíveis para obtermos as equações de Euler incompressíveis.

Conservação da massa

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ uma região limitada, suave e preenchida com um fluido que esteja em um determinado regime de escoamento. Supomos que seja válida a hipótese do contínuo (veja [41] para detalhes). Diante disto, consideramos $\rho : \Omega \times [0, \infty) \longmapsto \mathbb{R}$ a função densidade e $u : \Omega \times [0, \infty) \longmapsto \mathbb{R}^3$ o campo vetorial de velocidades para este escoamento. Supomos também que as funções ρ e u, assim como as demais variáveis que surgirem, são suficientemente suaves para justificar as passagens que seguem.

Se $W \subset \Omega$ é mensurável, a massa do fluido em W no tempo t é definida por

$$m(W,t) = \int_W \rho(x,t)dx.$$

Considerando o princípio da conservação da massa (massa não pode ser criada e nem destruída), temos que a taxa de crescimento de massa em W é igual à taxa de massa que atravessa ∂W na direção do interior de W, isto é, para η a normal unitária exterior à ∂W, temos

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_W \rho(x,t)dx = -\int_{\partial W} \rho(x,t)u(x,t).n(x)dS(x).$$

Aplicando o Teorema da Divergência de Gauss na equação acima, temos que

$$\int_W \left(\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) + div\left(\rho(x,t)u(x,t)\right)\right)dx = 0. \tag{1.1.1}$$

Pela arbitrariedade de W, temos que (1.1.1) é equivalente à equação

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + div\left(\rho u\right) = 0. \tag{1.1.2}$$

Estas são chamadas equação da continuidade ou equação da conservação da massa (na formulação integral e diferencial respectivamente).

Balanço do momento

Para qualquer meio contínuo, as forças atuando em um pedaço de material são de dois tipos. O primeiro é a tensão, que são forças atuando através das superfícies devido à propriedades mecânicas do meio. O segundo são as forças à distância, como, por exemplo, gravidade e campo magnético.

Um escoamento é chamado ideal (não-viscoso) se existe uma função $p = p(x,t)$ (chamada pressão) tal que se S é uma superfície no fluido com uma dada normal unitária η, então a tensão exercida através da superfície S por unidade de área no ponto $x \in S$ e no tempo t é dada por $p(x,t)\eta(x)$. Para escoamentos viscosos (não-ideais), tem-se que a tensão é do tipo $p(x,t)\eta(x) + \sigma(x,t)\eta(x)$, para σ um tensor adequado.

Viscosidade é a propriedade associada à resistência que o fluido oferece à deformações por cisalhamento. Esta resistência corresponde ao atrito interno do fluido devido basicamente à interações intermoleculares. O escoamento de fluidos com valores baixos de viscosidade é bem aproximado por modelos de escoamentos invíscidos, exceto perto da fronteira, onde a camada limite (camada de fluido nas imediações de uma superfície delimitadora) desempenha um papel importante nos efeitos difusivos e na dissipação da energia mecânica (veja [41] para maiores detalhes).

Definimos $X : \Omega \times [0, \infty) \longmapsto \Omega$ como a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X(x,t) & = & u(X(x,t),t), \\ X(x,0) & = & x. \end{cases} \tag{1.1.3}$$

Esta aplicação é chamada mapa Lagrangeano e $X(x,.)$ pode ser interpretado como a evolução de uma "partícula de fluido" que no instante inicial encontrava-se no ponto x.

Dado $W \subset \Omega$ mensurável, definimos o domínio material referente à W por

$$W_t = X(W,t).$$

Para um domínio material W_t, definimos o vetor momento por

$$P(W_t) = \int_{W_t} \rho(x,t)u(x,t)dx.$$

Considerando o princípio do balanço do momento (segunda lei de Newton), temos que a taxa de variação do momento em um domínio material é igual à força resultante agindo sobre este domínio. Supondo que o fluido seja ideal, que $b(x,t)$ seja a força à distância por unidade de massa e que $\eta(x,t)$ seja a normal unitária exterior à ∂W_t no ponto x, temos

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} \rho(x,t)u(x,t)dx = -\int_{\partial W_t} p(x,t)\eta(x,t)dS(x) + \int_{W_t} \rho(x,t)b(x,t)dx. \tag{1.1.4}$$

Usaremos o Teorema do Transporte para reescrevermos o lado esquerdo da igualdade acima. Porém, necessitamos antes do seguinte Lema:

Lema 1.1. *Seja $X : \Omega \times [0, \infty) \longmapsto \Omega$ o mapa Lagrangeano de um escoamento. Então, temos que*

$$\frac{d}{dt}|\nabla X(x,t)| = |\nabla X(x,t)| \, (div\, u)|_{(X(x,t),t)}. \tag{1.1.5}$$

A demonstração deste Lema pode ser encontrada em [18].

Teorema 1.2 (Teorema do Transporte)**.** *Seja $f : \Omega \times [0, \infty) \longmapsto \mathbb{R}$ uma função escalar suave. Então, para todo domínio material W_t, temos que*

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} f(x,t)dx = \int_{W_t} \left(\frac{}{dt}f(x,t) + div(u(x,t)f(x,t))\right) dx. \tag{1.1.6}$$

Demonstração do Teorema 1.2.

Usando o Teorema da Mudança de Variável e o Lema 1.1, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{W_t} f(x,t)dx &= \frac{d}{dt}\int_{W} f(X(x,t),t)\left|\nabla X(x,t)\right| dx \\
&= \int_W \left(\frac{\partial f}{\partial t}(X(x,t),t) + (\nabla f)(X(x,t),t)\frac{d}{dt}X(x,t)\right)\left|\nabla X(x,t)\right| dx \\
&+ \int_W f(X(x,t),t)\frac{d}{dt}\left|\nabla X(x,t)\right| dx \\
&= \int_W \left(\frac{\partial f}{\partial t}(X(x,t),t) + (\nabla f)(X(x,t),t)u(X(x,t),t)\right)\left|\nabla X(x,t)\right| dx \\
&+ \int_W f(X(x,t),t)(div\, u)(X(x,t),t)\left|\nabla X(x,t)\right| dx \\
&= \int_{W_t}\left(\frac{d}{dt}f(x,t) + div(u(x,t)f(x,t))\right) dx.
\end{aligned}$$

■

Voltemos à dedução da equação do momento. Com efeito, aplicando o Teorema do Transporte e o Teorema da Divergência de Gauss em (1.1.4), obtemos as seguintes equações:

$$\int_{W_t}\left(\frac{d}{dt}\left(\rho(x,t)u_i(x,t)\right) + div\ \left(u(x,t)\rho(x,t)u_i(x,t)\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}p(x,t) - \rho(x,t)b_i(x,t)\right) dx = 0,$$

para $i = 1,2,3$. Pela arbitrariedade de W e pelo fato que $X(.,t) : \Omega \longmapsto \Omega$ é uma bijeção, temos que

$$\frac{d}{dt}(\rho u_i) + div\,(u\rho u_i) = -\frac{\partial}{\partial x_i}p + \rho b_i,$$

para $i = 1,2,3$. Usando a equação da continuidade (1.1.2), obtemos

$$\rho\left(\frac{d}{dt}u + (u.\nabla)\,u\right) = -\nabla p + \rho b. \qquad (1.1.7)$$

Esta é chamada equação do momento.

Escoamentos incompressíveis e as equações de Euler

Dizemos que um escoamento é incompressível se o volume de todo domínio material permanece constante no tempo. Temos o seguinte Lema que caracteriza escoamentos incompressíveis:

Lema 1.3. *São equivalentes as seguintes afirmações:*

1. *O escoamento é incompressível;*

2. $div\, u = 0$*;*

3. $|\nabla X(x,t)|= 1.$

Demonstração do Lema 1.3.

Como $X(x,0) = x$ (veja igualdade (1.1.3)), temos que $|\nabla X(x,0)|= 1$. Portanto, usando a equação (1.1.5), isto é,

$$\frac{d}{dt}|\nabla X(x,t)|= |\nabla X(x,t)|(div\, u)(X(x,t),t),$$

temos que 2 e 3 são equivalentes. Por outro lado, usando o Teorema do Transporte, temos que

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} dx = \int_{W_t} div\, u(x,t)\, dx.$$

Pela arbitrariedade de W e pelo fato que $X(.,t) : \Omega \longmapsto \Omega$ é uma bijeção, temos que 1 e 2 são equivalentes.

$\blacksquare$

Dizemos que um escoamento é homogêneo se, para cada instante de tempo, a densidade ρ é constante no espaço, isto é, se $\rho(x,t) = \rho(t)$. Usando a equação da continuidade (1.1.2), temos que um escoamento homogêneo satisfaz

$$\frac{d}{dt}\rho + \rho\, div\, u = 0.$$

Consideremos um escoamento homogêneo. Então, pela caracterização de escoamentos incompressíveis dada pelo item 2 do Lema 1.3 acima (isto é, $div\, u = 0$), temos que o escoamento é incompressível se, e somente se, a densidade ρ é constante no espaco e no tempo. Portanto, para um escoamento ideal, homogêneo e incompressível (com $\rho \equiv 1$), temos as chamadas equações de Euler incompressíveis

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}u + (u.\nabla)u &=& -\nabla p + b, \\ div\, u &=& 0. \end{array} \right. \tag{1.1.8}$$

Se a força à distância b for um campo potencial (isto é, se b é gradiente), então podemos incorporá-la ao termo da pressão.

Para um escoamento com o campo de velocidades u, definimos a derivada material $\frac{D}{Dt}$ como o operador dado por

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{df}{dt} + (u.\nabla)f.$$

Portanto, supondo que a força à distância é potencial e usando a derivada material, podemos escrever as equações de Euler incompressíveis na forma

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{Du}{Dt} &=& -\nabla p, \\ div\, u &=& 0. \end{array} \right. \tag{1.1.9}$$

Para as condições de contorno destas equações, supomos que a fronteira é um corpo rígido, o qual forma uma barreira estacionária que determina o domínio do escoamento. Neste caso, uma condição de contorno natural é a de não-penetração, isto é, para $\eta(x)$ a normal unitária exterior à x em $\partial\Omega$, temos a seguinte restrição:

$$u(x,t).\eta(x) = 0, \, \forall \, x \in \partial\Omega. \tag{1.1.10}$$

Intuitivamente, esta condição de fronteira de não-penetração permite que o fluido deslize livremente nos pontos de contato com o corpo rígido que delimita o domínio, não havendo interações tangenciais entre o escoamento e esta fronteira (veja [42]).

Para domínios ilimitados, pode-se mostrar que as equações de Euler permanecem válidas (veja [47]). No entanto, além das condições de fronteira, é preciso especificar o comportamento da velocidade $u(x)$ quando $|x| \rightarrow \infty$. Condições de periodicidade podem ser consideradas.

Para além destes domínios, as equações de Euler também têm sido estudadas sobre variedades Riemannianas (veja [26]).

1.1.2 Existência de soluções e estabilidade não-linear

Nesta subseção, enunciamos alguns resultados da literatura sobre existência de soluções e estabilidade não-linear para as equações de Euler. Primeiro, tratamos a existência de soluções locais clássicas e a conexão entre a formação de singularidades e estimativas para a vorticidade. Em seguida, abordamos as equações de Euler com simetria bidimensional e seus teoremas de existência de soluções globais. Finalmente, lidamos com a estabilidade não-linear para as equações de Euler bidimensionais. Nesta parte, enunciamos o Teorema de Estabilidade de Arnold para soluções estacionárias e suaves, o Teorema de Estabilidade Wan e Pulvirenti para o *vortex patch* circular e o Teorema de Estabilidade de Burton para pontos de máximos estritos do funcional energia restrito à superfícies isovorticais.

Observamos que estes dois últimos resultados de estabilidade não-linear são estendidos no capítulo 3 para as equações de Euler helicoidais sem rodopio.

Soluções clássicas locais

Em escoamentos incompressíveis, o termo de pressão ∇p está completamente determinado pelo campo de velocidades u. Com efeito, se H^m denota o espaço de Sobolev usual (como em Evans [29]), temos o seguinte resultado de decomposição:

Proposição 1.4 (Decomposição de Hodge)**.** *Seja $(\mathcal{M}, \partial\mathcal{M})$ uma variedade Riemanniana de dimensão n, suave e compacta. Para $m \in \mathbb{N}$ e $m \geq 1$, definimos os conjuntos*

$$\begin{cases} H_m(\mathcal{M}) & = & \{w \in (H^m(\mathcal{M}))^n; \, div\, w = 0 \text{ e } w \text{ é pararelo à } \partial\mathcal{M}\}, \\ G_m(\mathcal{M}) & = & \{\nabla q; \, q \in H^{m+1}(\mathcal{M})\}. \end{cases}$$

Então, temos a seguinte decomposição:

$$(H^m(\mathcal{M}))^n = H_m(\mathcal{M}) \oplus G_m(\mathcal{M}).$$

A demonstração desta Proposição pode ser encontrada em [26].

Definição 1.5 (Projetor de Leray)**.** *Definimos o projetor de Leray* $\mathbb{P} : (H^m(\mathcal{M}))^n \longmapsto H_m(\mathcal{M})$ *por*

$$\mathbb{P}[v] = w,$$

para $v = w + \nabla q$ *a decomposição de Hodge de* v*.*

Em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado e regular, o resultado acima pode também ser encontrado em [11]. Além disso, para η a norma unitária exterior à $\partial\Omega$, temos que são válidas as seguintes afirmações:

$$\begin{cases} \mathbb{P}[v] = v & \text{se, e somente se,} \quad div\, v = 0 \text{ e } v.\eta|_{\partial\Omega} = 0, \\ \mathbb{P}[v] = 0 & \text{se, e somente se,} \quad v \text{ é gradiente.} \end{cases}$$

Se aplicarmos o projetor de Leray em (1.1.9) e usarmos a condição de contorno (1.1.10), obtemos a seguinte formulação para as equações de Euler sem o termo de pressão:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u + \mathbb{P}[(u.\nabla)u] &= 0, \\ \mathbb{P}[u] &= u. \end{cases} \tag{1.1.11}$$

Usando técnicas de geometria Riemanniana, Ebin e Marsden em [26] demonstraram o seguinte teorema de existência e unicidade de soluções suaves e locais no tempo:

Teorema 1.6 (Ebin e Marsden 1970)**.** *Seja* $(\mathcal{M}, \partial\mathcal{M})$ *uma variedade Riemanniana n-dimensional, suave e compacta. Sejam* $m > \dfrac{n}{2} + 1$ *e* $u_0 \in H_m(\mathcal{M})$*. Então, existe* $T > 0$ *e uma única* $u \in C((-T,T), H_m(\mathcal{M}))$ *e* C^1 *como função de* (x,t)*, solução clássica para as equações (1.1.11) e com dado inicial* $u(0) = u_0$*. Além disso, se* $u_0 \in C^\infty(\mathcal{M})$*, então* $u \in C^\infty(\mathcal{M} \times (-T,T))$*. Finalmente, a solução é globalmente definida no tempo se, e somente se,* $\forall\, 0 < T < \infty$*, temos que* $\sup\limits_{-T<t<T} \|u(t)\|_{H^m} < \infty$*.*

Em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado e regular, demonstrações alternativas podem ser encontradas em [11], [25], [38] e [50]. Em particular, Kato e Lai em [38] demonstraram o resultado usando o método de Galerkin.

Em [36], Kato demonstrou existência e unicidade de soluções locais no tempo para dados iniciais em $H_m(\mathbb{R}^3) = \{u \in H^m(\mathbb{R}^3)^3;\, div\, u = 0\}$.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto, regular e tal que $\Omega = \Omega + 2\pi e_3$ e $\Omega \cap \{0 \leq x_3 \leq 2\pi\}$ é limitado. Para este domínio, consideramos as equações de Euler com a condição de periodicidade em x_3, isto é, consideramos o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u + (u.\nabla)u &= -\nabla p & \text{em} & \Omega \times [0,T), \\ div\, u &= 0 & \text{em} & \Omega \times [0,T), \\ u.\eta &= 0 & \text{em} & \partial\Omega \times [0,T), \\ u(x,t) &= u(x + 2\pi e_3, t) & \text{em} & \Omega \times [0,T), \\ p(x,t) &= p(x + 2\pi e_3, t) & \text{em} & \Omega \times [0,T). \end{cases} \tag{1.1.12}$$

Aplicando uma compactificação adequada em $\Omega \cap \{0 \leq x_3 \leq 2\pi\}$, o sistema acima pode ser visto como as equações de Euler sobre uma variedade compacta.

Portanto, usando o Teorema 1.6, temos que se $u_0 \in (C^m(\overline{\Omega}))^3$ é um campo periódico no eixo x_3 com $div\, u_0 = 0$ e $u_0.\eta|_{\partial\Omega}= 0$, obtemos existência e unicidade de soluções clássicas e locais no tempo para (1.1.12) e com dado inicial u_0.

Formação de singularidades

A questão sobre a existência de soluções clássicas e globais no tempo para dados iniciais suaves é um assunto ainda mal compreendido. De fato, até o momento, não sabemos se sempre é possível construir soluções clássicas em todo o tempo ou se em algum caso há formação de singularidades em tempo finito (veja [5], [19] e [45] para maiores detalhes).

Uma quantidade conectada com a existência de soluções globais é a vorticidade. Para qualquer campo de velocidades u, definimos a vorticidade como

$$\omega = rot\, u. \tag{1.1.13}$$

Este é um campo que mede a rotação infinitesimal do escoamento e aponta na direção do eixo de rotação do fluido (veja [47]). A conexão entre a vorticidade e a formação de singularidades é obtida através do seguinte resultado:

Teorema 1.7 (Beale, Kato e Majda 1984, Ferrari 1992)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado, regular e simplesmente conexo e $m \geq 3$. Se $u \in C([0,T), H_m(\Omega))$ é uma solução clássica para as equações de Euler com T maximal e $T < \infty$, então temos que*

$$\lim_{t \nearrow T} \int_0^t \|\omega(s)\|_{L^\infty(\Omega)} ds = \infty. \tag{1.1.14}$$

Este teorema foi originalmente obtido por Beale, Kato e Majda em [6] no contexto de $H_m(\mathbb{R}^3)$. Posteriormente, Ferrari em [30] estendeu o resultado para domínios limitados como enunciamos acima. Além disso, em [13], [24] e [27], ele é aplicado ao sistema periódico (1.1.12). A demonstração da validade do resultado no contexto de periodicidade, segundo os autores de [27], segue a mesma linha de demonstração dos casos já estabelecidos.

A seguir apresentamos a estratégia básica para a demonstração do Teorema 1.7. Os detalhes são encontrados em [30]. Com efeito, o resultado segue de duas estimativas para o campo de velocidades. A primeira é uma desigualdade do tipo energia e tem a seguinte forma (veja [30] para a dedução):

$$ln(\|u(t)\|_{H^m(\Omega)}+e) \leq ln(\|u_0\|_{H^m(\Omega)}+e) + C\int_0^t \|u(s)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} ds. \tag{1.1.15}$$

A segunda é um estimativa elíptica para o acoplamento entre vorticidade e a velocidade. De fato, a vorticidade e a velocidade estão conectadas via o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} rot\, u &=& \omega \text{ em } \Omega, \\ div\, u &=& 0 \text{ em } \Omega, \\ u.\eta|_{\partial\Omega} &=& 0. \end{array} \right. \tag{1.1.16}$$

Neste caso, é possível demonstrar que existe uma matriz de funções K_Ω e uma constante $C > 0$, independentes de ω, tal que a única solução do sistema (1.1.16) em $H^1(\Omega)$ satisfaz

$$u(x) = \int_\Omega K_\Omega(x,y)\omega(y)dy, \tag{1.1.17}$$

e é verdadeira a propriedade $|D_x^\beta K_\Omega(x,y)|\leq C|x-y|^{-2-\beta}$, para todo β multi-índice. Usando (1.1.17), em [30] é demonstrado a seguinte estimativa:

$$\|u(t)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\leq C\left[\|\omega(t)\|_{L^\infty(\Omega)}ln(\|u(t)\|_{H^m(\Omega)}+e)+1\right]. \tag{1.1.18}$$

Agora, supomos, por contradição, que o limite em (1.1.14) é finito para $T < \infty$ maximal. Então, combinando as desigualdades (1.1.15) e (1.1.18) juntamente com o Lema de Gronwall, obtemos uma limitação uniforme para $\|u(t)\|_{H^m(\Omega)}$ em $[0,T)$. Este fato contraria a hipótese de maximalidade de T. Logo, temos (1.1.14).

Como uma consequência do Teorema de Ferrari, a questão sobre a existência global de soluções clássicas pode ser vista com uma questão sobre estimativas para a norma $L_t^1 L_x^\infty$ da vorticidade. Por outro lado, a dificuldade de estimar a vorticidade pode ser melhor entendida considerando sua dinâmica dada pela equação da vorticidade:

$$\frac{d}{dt}\omega + (u.\nabla)\omega - (\omega.\nabla)u \;=\; 0. \tag{1.1.19}$$

Para a dedução desta equação, aplicamos *rot* na primeira igualdade de (1.1.9) e usamos a condição de incompressibilidade $div\, u = 0$.

O termo $(\omega.\nabla)u$, chamado termo de estiramento, é fundamental nas estimativas para a vorticidade. De fato, considerando o mapa Lagrangeano (1.1.3), facilmente verificamos que

$$\frac{d}{dt}\omega(X(x,t),t) \;=\; [(\omega.\nabla)u]|_{(X(x,t),t)}\,.$$

Logo, vemos que o termo de estiramento influencia de maneira decisiva o comportamento da vorticidade.

Lembremos que a vorticidade e a velocidade estão conectadas pela fórmula (1.1.17) (chamada lei de Biot-Savart). Como (1.1.17) é um operador linear não-local, podemos dizer que o termo de estiramento tem uma estrutura quadrática não-local. Se considerarmos como analogia a equação de Ricatti $\frac{d}{dt}y = y^2$, que explode em tempo finito, podemos conjecturar a formação de singularidades em tempo finito para as equações de Euler (veja [41] para detalhes). Porém, a determinação de que se isto de fato ocorre ou não ainda é um problema em aberto.

Simetria bidimensional

Casos particulares em que são possíveis melhores estimativas para a vorticidade são os escoamentos com simetria. Uma simetria bastante considerada na literatura é a bidimensional. Nela, o campo de velocidades é paralelo ao plano $x_3 = 0$ e independente de x_3. Mais precisamente, a velocidade é do tipo

$$u = (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2), 0).$$

Neste caso, a vorticidade é normal ao plano $x_3 = 0$ e tem a forma

$$\omega = rot\, u = (0, 0, \frac{\partial}{\partial x_1} u_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} u_1).$$

Portanto, o termo de estiramento é nulo. De fato, temos

$$(\omega.\nabla)u = ((0, 0, \omega_3).\nabla)(u_1, u_2, 0) = 0.$$

Para este tipo de simetria, usamos o abuso de notação $u = u(x) = (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2))$, $\omega = \omega(x) = \omega_3(x_1, x_2)$ e $rot\, u = \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1$. Então, a equação da vorticidade é reduzida à seguinte equação de transporte escalar:

$$\frac{d}{dt}\omega + (u.\nabla)\omega \;=\; 0. \tag{1.1.20}$$

Considerando o mapa Lagrangeano como feito anteriormente, temos que a igualdade acima implica na conservação da norma L^∞ da vorticidade. Portanto, as soluções bidimensionais são globalmente definidas no tempo:

Teorema 1.8. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto, limitado, regular e simplesmente conexo. Se $u_0 \in H_m(\Omega)$, então existe única $u \in C([0, \infty), H_m(\Omega))$ solução clássica para as equações de Euler bidimensionais e com condição inicial $u(0) = u_0$.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [37].

Soluções fracas bidimensionais

Como escoamentos incompressíveis têm divergente nulo, em um domínio bidimensional simplesmente conexo, podemos considerar uma função escalar Ψ tal que $u = \nabla^\perp \Psi$, para $\nabla^\perp = (\partial_{x_2}, -\partial_{x_1})^T$. Aplicando o rotacional bidimensional, obtemos $-\Delta\Psi = \omega$. Além disso, se usarmos a condição de contorno de não-penetração para o campo de velocidades, temos que, na fronteira do domínio, $\nabla\Psi$ é um campo paralelo à normal exterior. Portanto, podemos escolher Ψ tal que seja nula nesta fronteira.

Mais precisamente, seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto, limitado, regular e simplesmente conexo. Consideramos $G : L^p(\Omega) \longmapsto W^{2,p}(\Omega)$ o operador definido da seguinte forma: Para cada $\omega \in L^p(\Omega)$, $G[\omega] \in W_0^{1,p}(\Omega) \bigcap W^{2,p}(\Omega)$ é a única solução do sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta G[\omega] & = & \omega \text{ em } \Omega, \\ G[\omega]|_{\partial\Omega} & = & 0. \end{array} \right. \tag{1.1.21}$$

Então, a lei de Biot-Savart é dada por

$$u = \nabla^\perp G[\omega]. \tag{1.1.22}$$

Diante disto, temos a seguinte definição de solução fraca para a equação da vorticidade bidimensional:

Definição 1.9 (Soluções fracas). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto, limitado, regular e simplesmente conexo, $\frac{4}{3} < p \leq \infty$ e $\omega_0 \in L^p(\Omega)$. Dizemos que uma função $\omega \in L^\infty((0,\infty), L^p(\Omega))$ é uma solução fraca para a equação da vorticidade bidimensional (1.1.20) com condição inicial ω_0 se*

$$\int_\Omega \phi(x,0)\omega_0(x)dx + \int_0^\infty \int_\Omega \omega(x,t)(u(x,t).\nabla)\phi(x,t)dxdt + \int_0^\infty \int_\Omega \omega(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\phi(x,t)dxdt = 0,$$

para toda $\phi \in C_c^\infty([0,\infty) \times \Omega)$, para u e ω relacionadas pela lei de Biot-Savart (1.1.22).

Como $\frac{4}{3} < p \leq \infty$, usando as imersões de Sobolev, temos que $u \in (L^{p'}(\Omega))^2$. Portanto, as integrais acima são finitas.

Yudovich em [52] demonstrou o seguinte teorema de existência e unicidade de soluções:

Teorema 1.10 (Yudovich 1963). *Dado $\omega_0 \in L^\infty(\Omega)$, existe uma única solução fraca para as equação da vorticidade com condição inicial ω_0.*

Para estas soluções de Yudovich, é possível demonstrar que está bem definido o mapa Lagrangeano (1.1.3) e que a dinâmica de vorticidade é da forma (veja [47]):

$$\omega(X(x,t),t) = \omega_0(x). \tag{1.1.23}$$

O resultado acima é igualmente válido no contexto do domínio $\mathbb{R}^2$ (veja [45]). Além disso, outros teoremas de existência de soluções globais com vorticidades bidimensionais iniciais em L^p podem ser encontrados em [7], [17], [22] e [31]. Porém, nestes casos, a questão de unicidade permanece em aberto. Resultados de existência também podem ser obtidos em domínios periódicos (veja [47]).

Observamos que no capítulo 2, estendemos o teorema de existência de soluções fracas com vorticidades iniciais em $L^p(\Omega)$ para as equações de Euler helicoidais sem rodopio.

Vortex patch

Vortex patches são escoamentos bidimensionais cujas vorticidades iniciais são funções características de conjuntos, isto é,

$$\omega_0 = \mathcal{X}_{D_0},$$

para algum $D_0 \subset \mathbb{R}^2$. Usando (1.1.23), temos que um *vortex patch* permanece como uma função característica no decorrer do tempo. Mais precisamente, para cada instante de tempo t, existe um conjunto $D_t \subset \mathbb{R}^2$ (com a medida de Lebesgue $|D_t| = |D_0|$) e tal que

$$\omega(t) = \mathcal{X}_{D_t}.$$

Um caso particular importante é o *vortex patch* circular, isto é, $D_0 = B_{\mathbb{R}^2}(0,1)$. Se o domínio Ω for da forma $B_{\mathbb{R}^2}(0,R)$, para algum $R > 1$, então

$$\omega = \mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,1)}$$

é uma solução estacionária para a equação da vorticidade bidimensional e com a velocidade dada por

$$u(x) = -\frac{x^{\perp}}{|x|^2}\int_0^{|x|} s\mathcal{X}_{(0,1)}(s)ds, \text{ para } x^{\perp} = (x_2, -x_1).$$

Observamos que no capítulo 3, mostramos que $\omega = (x_2, -x_1, 1)\mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,1)\times\mathbb{R}}$, chamado *vortex patch* helicoidal, é uma vorticidade estacionária para as equações de Euler helicoidais sem rodopio em domínios $B_{\mathbb{R}^2}(0, R) \times \mathbb{R}$.

Estabilidade não-linear de soluções

O estudo de estabilidade surge a partir da seguinte questão: dada uma equação de evolução, queremos saber se pequenas perturbações dos dados iniciais produzem efeitos de perturbações uniformemente pequenos no tempo. Notemos que a continuidade de soluções com respeito às condições iniciais assegura pequenos efeitos de perturbações apenas para tempo finito.

Para as equações de Euler bidimensionais, alguns resultados de estabilidade têm sido obtidos usando técnicas não-lineares. Mais precisamente, considerando as soluções das equações de Euler como um sistema dinâmico, é possível demonstrar estabilidade para algumas soluções no seguinte sentido:

Definição 1.11 (Estabilidade)**.** *Sejam (B, d) uma espaço métrico e $h : B \times [0, \infty) \longmapsto B$ um sistema dinâmico. Supomos que $x_0 \in B$ seja um ponto estacionário, isto é, $h(x_0, t) = x_0$, para todo $t \geq 0$. Dizemos que x_0 é d-estável se, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que se $x \in B$ e*

$$d(x, x_0) \leq \delta,$$

então, temos que

$$d(h(x, t), x_0) \leq \epsilon, \forall\, t \geq 0.$$

Um resultado pioneiro nesta direção é o Teorema de Estabilidade de Arnold ([3] e [4]):

Teorema 1.12 (Arnold 1965)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto, limitado, regular e simplesmente conexo. Suponha $u^* \in (C^3(\Omega))^2$ uma velocidade suave e estacionária para as equações de Euler bidimensionais e ω^* a respectiva vorticidade. Se existem constantes c_1, $c_2 > 0$ tais que*

$$c_1 \leq -\frac{u^*}{\nabla^{\perp}\omega*} \leq c_2, \tag{1.1.24}$$

então, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\omega \in L^{\infty}([0, \infty), L^{\infty}(\Omega))$ é uma solução dada pelo Teorema 1.10 e

$$\|u(0) - u^*\|_{L^2(\Omega)} + \|\omega(0) - \omega^*\|_{L^2(\Omega)} < \delta,$$

temos que

$$\|u(t) - u^*\|_{L^2(\Omega)} + \|\omega(t) - \omega^*\|_{L^2(\Omega)} < \epsilon, \forall\, t \geq 0.$$

Notemos que se u^* é uma solução estacionária, então $(u^*.\nabla)\omega^* = 0$. Portanto, u^* e $\nabla^\perp\omega^*$ são colineares e o quociente (1.1.24) está bem definido.

Para o *vortex patch* circular, usando a conservação do momento de inércia $\int_{\mathbb{R}^2}|x|^2\omega(x)dx$, Wan e Pulvirenti em [51] demonstraram seguinte teorema de estabilidade:

Teorema 1.13 (Wan e Pulvirenti 1985)**.** *Sejam $\Omega = B_{\mathbb{R}^2}(0,R)$ e $\epsilon > 0$. Então, existe $\delta > 0$ tal que, se $\mathcal{X}_{D_t}$ é um vortex patch com dado inicial $\mathcal{X}_{D_0}$ e $\|\mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,1)} - \mathcal{X}_{D_0}\|_{L^1(\Omega)} < \delta$, temos que*

$$\|\mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,1)} - \mathcal{X}_{D_t}\|_{L^1(\Omega)} < \epsilon, \forall\, t > 0.$$

Este resultado é estendido no capítulo 3 para as equações de Euler helicoidais sem rodopio e para o *vortex patch* helicoidal $(x_2, -x_1, 1)\mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,1)\times\mathbb{R}}$.

A seguir, enunciamos o Teorema de Estabilidade de Burton. Porém, primeiro fixamos a seguinte definição de energia para uma vorticidade $\omega \in L^p(\Omega)$ (veja definição de G em (1.1.21)):

$$\mathcal{E}[\omega] = \frac{1}{2}\int_\Omega \omega(x)G[\omega](x)dx. \tag{1.1.25}$$

Além disso, dado $f \in L^p(\Omega)$, dizemos que uma função $g \in L^p(\Omega)$ é um rearranjo de f se $|f^{-1}[\beta,\infty)| = |g^{-1}[\beta,\infty)|$, $\forall\, \beta \in \mathbb{R}$. Por superfície isovortical de f entendemos como o conjunto de todos os rearranjos de f.

Usando teoria de rearranjos de funções, Burton em [17] demonstrou o seguinte teorema de existência de vorticidades estacionárias e estáveis:

Teorema 1.14 (Burton 2005)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto, limitado, suave e simplemente conexo, $2 \le p < \infty$ e $f \in L^p(\Omega)$. Se ω_0 é um ponto de máximo estrito para o funcional energia $\mathcal{E}$ restrito à superfície isovortical de f, então ω_0 é uma vorticidade estacionária e para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\omega \in C([0,\infty), L^p(\Omega))$ é uma solução fraca para a equação da vorticidade bidimensional (1.1.20) com*

$$\|\omega(0) - \omega_0\|_{L^p(\Omega)} < \delta,$$

temos que

$$\|\omega(t) - \omega_0\|_{L^p(\Omega)} < \epsilon, \forall\, t \ge 0.$$

Este resultado é estendido no capítulo 3 para as equações de Euler helicoidais sem rodopio.

1.2 Rearranjos de funções

Nesta seção, apresentamos uma teoria de otimização de funcionais convexos sobre classes de rearranjos que foi desenvolvidas por Burton em [15] e [16] e utilizada na demonstração do Teorema 1.14. No capítulo 3, usamos estas ferramentas para estendermos o Teorema de Estabilidade de Burton para as equações de Euler helicoidais sem rodopio. Nosso objetivo aqui é apresentar estes resultados, bem como fixar as notações.

Esta seção está organizada da seguinte forma: primeiro, definimos a noção de rearranjos de uma função Lebesgue mensurável e demonstramos alguns resultados básicos. Em seguida, enunciamos propriedades de otimização para funcionais lineares contínuos sobre classes de rearranjos. Finalmente, obtemos propriedades de otimização para funcionais convexos.

Alguns teoremas, cujas demonstrações exigem estimativas delicadas, são apenas enunciados. No entanto, para tornar o conceito mais compreensível, demonstramos as propriedades mais imediatas. Os resultados desta seção podem ser encontrados em [15], [16] e [23].

Definição 1.15 (Rearranjo)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado e Lebesgue mensurável e $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ uma função Lebesgue mensurável. Dizemos que uma função Lebesgue mensurável $g : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ é um rearranjo de f em Ω se*

$$|f^{-1}[\beta, \infty)| = |g^{-1}[\beta, \infty)|, \ \forall \beta \in \mathbb{R}.$$

Proposição 1.16. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado e Lebesgue mensurável e $f, g : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ funções Lebesgue mensuráveis tais que uma é um rearranjo da outra. Então, são verdadeiras as seguintes afirmações:*

1. *Se $B \subset \mathbb{R}$ é um conjunto Borel mensurável, então $|f^{-1}(B)| = |g^{-1}(B)|$;*
2. *Se $\phi : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ é uma função Borel mensurável, então $\phi(f)$ é um rearranjo de $\phi(g)$;*
3. *Se $f \in L^1(\Omega)$, então $g \in L^1(\Omega)$ e*
$$\int_\Omega f(x)dx = \int_\Omega g(x)dx;$$
4. *Se $1 \le p \le \infty$ e $f \in L^p(\Omega)$, então $g \in L^p(\Omega)$ e $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|g\|_{L^p(\Omega)}$.*

Demonstração da Proposição 1.16.

Notemos que o subconjunto $\mathcal{B}$ da σ-álgebra de Borel na reta que satisfaz $|f^{-1}(B)| = |g^{-1}(B)|$, $\forall B \in \mathcal{B}$, é fechado por complemento e união disjunta contável. Como os intervalos estão contidos em $\mathcal{B}$, então $\mathcal{B}$ é igual a σ-álgebra de Borel. Logo, demonstramos o item 1.

Se $\beta \in \mathbb{R}$, então $(\phi \circ f)^{-1}[\beta, \infty) = f^{-1}(\phi^{-1}[\beta, \infty))$ e $\phi^{-1}[\beta, \infty)$ é Borel mensurável. Portanto, pelo item 1, obtemos o item 2.

Suponha que $f \in L^1(\Omega)$. Para $s \ge 0$, definimos os conjuntos $F_1(s) = \{x \in \Omega;\ f(x) \ge s\}$, $F_2(s) = \{x \in \Omega;\ f(x) \le -s\}$, $G_1(s) = \{x \in \Omega;\ g(x) \ge s\}$ e $G_2(s) = \{x \in \Omega;\ g(x) \le -s\}$. Usando o Teorema de Fubini, temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(x)dx &= \int_\Omega \max\{f(x), 0\}dx - \int_\Omega \max\{-f(x), 0\}dx \\
&= \int_\Omega \int_0^{\max\{f(x),0\}} dsdx - \int_\Omega \int_0^{\max\{-f(x),0\}} dsdx \\
&= \int_0^\infty \int_{F_1(s)} dxds - \int_0^\infty \int_{F_2(s)} dxds \\
&= \int_0^\infty |F_1(s)|ds - \int_0^\infty |F_2(s)|ds \\
&= \int_0^\infty |G_1(s)|ds - \int_0^\infty |G_2(s)|ds = \int_\Omega g(x)dx.
\end{aligned}$$

Portanto, temos o item 3.

Se $1 \leq p < \infty$, então o item 4 segue dos itens 2 e 3 para a escolha $\phi(t) = |t|^p$. Se $p = \infty$, então o item 4 segue de imediato da definição.

■

Proposição 1.17 (Caracterização de rearranjo)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado e Lebesgue mensurável, $1 \leq p < \infty$ e $f,\, g \in L^p(\Omega)$. Então, f é um rearranjo de g se, e somente se, para cada $h \in C_0^1(\mathbb{R})$, temos que*

$$\int_\Omega h(f(x))\, dx = \int_\Omega h(g(x))\, dx. \tag{1.2.1}$$

Demonstração da Proposição 1.17.

Supomos que f é um rearranjo de g. Logo, se $h : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ é uma função simples, então (1.2.1) é obviamente verdadeiro. Seja $h \in C_0^1(\mathbb{R})$. Consideramos sequências $(\phi_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\phi_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções simples tais que $0 \leq \phi_n^i \leq \phi_{n+1}^i$, para $i = 1,\, 2$, $\phi_n^1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} h^+ = \max\{h, 0\}$ e $\phi_n^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} h^- = \max\{-h, 0\}$ pontualmente. Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega h(f(x))dx &= \int_\Omega h^+(f(x))dx - \int_\Omega h^-(f(x))dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \phi_n^1(f(x))dx - \int_\Omega \phi_n^2(f(x))dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \phi_n^1(g(x))dx - \int_\Omega \phi_n^2(g(x))dx = \int_\Omega h^+(g(x))dx - \int_\Omega h^-(g(x))dx \\
&= \int_\Omega h(g(x))dx.
\end{aligned}$$

Portanto, concluimos (1.2.1).

Supomos agora que a igualdade (1.2.1) seja válida para toda $h \in C_0^1(\mathbb{R})$. Seja $\beta \in \mathbb{R}$. Consideramos uma sequência $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $C_0^1(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \sigma_n \leq 1$ e $\sigma_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{X}_{[\beta,\infty)}$ pontualmente. Logo,

$$\begin{aligned}
|f^{-1}[\beta,\infty)| &= \int_\Omega \mathcal{X}_{[\beta,\infty)}(f(x))dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \sigma_n(f(x))dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \sigma_n(g(x))dx = \int_\Omega \mathcal{X}_{[\beta,\infty)}(g(x))dx \\
&= |g^{-1}[\beta,\infty)|.
\end{aligned}$$

Portanto, f é um rearranjo de g.

■

Corolário 1.18. *Se $1 \leq p < \infty$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de rearranjos de uma função $f \in L^p(\Omega)$ e $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$ em $L^p(\Omega)$, então g é um rearranjo de f.*

Demonstração do Corolário 1.18 :

Seja $h \in C_0^1(\mathbb{R})$. Então, temos que

$$\left|\int_\Omega \{h(f(x)) - h(g(x))\}dx\right| = \left|\int_\Omega \{h(f_n(x)) - h(g(x))\}dx\right| \leq C|\Omega|^{p'}\|f_n - g\|_{L^p(\Omega)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Portanto, pela proposição anterior, obtemos que g é um rearranjo de f.

∎

Como consequência do corolário acima, se **R** é a classe dos rearranjos de uma função $f \in L^p(\Omega)$, então **R** é fechado e limitado em $L^p(\Omega)$.

Adaptando a demonstração da proposição anterior, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.19. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado, $1 \leq p < \infty$ e $f \in L^\infty((0,T), L^p(\Omega))$. Supomos que para cada $h \in C_0^1(\mathbb{R})$ e $\vartheta \in C_0^\infty(0,T)$, temos que*

$$\int_0^T \partial_t\vartheta(t) \int_\Omega h(f(x,t))dxdt = 0. \tag{1.2.2}$$

Então, f é um rearranjo no tempo q.s. em $(0,T)$, isto é, $f(\,.\,,t_1)$ é um rearranjo de $f(\,.\,,t_2)$, para quase todo t_1, $t_2 \in (0,T)$

Demonstração da Proposição 1.19.

Supomos que a igualdade (1.2.2) seja válida para toda $h \in C_0^1(\mathbb{R})$ e $\vartheta \in C_0^\infty(0,T)$. Seja $\beta \in \mathbb{Q}$. Consideramos uma sequência $(\sigma_n^\beta)_{n\in\mathbb{N}}$ em $C_0^1(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \sigma_n^\beta \leq 1$ e $\sigma_n^\beta \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{X}_{[\beta,\infty)}$ pontualmente. Usando (1.2.2), facilmente vemos que existe um conjunto de medida nula $\mathbb{I} \subset (0,T)$ tal que

$$\int_\Omega \sigma_n^\beta(f(x,t_2))dx = \int_\Omega \sigma_n^\beta(f(x,t_1))dx, \forall\, t_1,\ t_2 \in (0,T)/\mathbb{I},\ n \in \mathbb{N} \text{ e } \beta \in \mathbb{Q}.$$

Como na demonstração da Proposição 1.17, temos que $|\{f(\,.\,,t_1)\}^{-1}[\beta,\infty)| = |\{f(\,.\,,t_2)\}^{-1}[\beta,\infty)|$, para todo t_1, $t_2 \in (0,T)/\mathbb{I}$ e $\beta \in \mathbb{Q}$. Usando a continuidade da medida, temos que o resultado é válido para todo $\beta \in \mathbb{R}$. Portanto, obtemos que f é um rearranjo no tempo q.s. em $(0,T)$.

∎

Mostramos no capítulo 2 que as vorticidades helicoidais safisfazem (1.2.2), e portanto são rearranjos no tempo. Isto implica que a dinâmica de uma vorticidade helicoidal ocorre dentro do conjunto dos rearranjos do dado inicial.

A seguir, definimos a noção de rearranjo decrescente.

Definição 1.20 (Rearranjo decrescente)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado e $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ um função Lebesgue mensurável. A função $f^\sharp : (0, |\Omega|) \longmapsto \mathbb{R}$ definida por*

$$f^\sharp(t) = \max\{\alpha;\ \lambda_f(\alpha) \geq t\}, \ \ \textit{para}\ \ \lambda_f(\alpha) = |\{x \in \Omega;\ f(x) \geq \alpha\}|,$$

é chamada rearranjo decrescente de f.

Acima cometemos um abuso de notação ao chamar $f^\sharp$ rearranjo decrescente de f. De fato, $f^\sharp$ não é um rearranjo de f como na definição utilizada neste trabalho, mas sim num sentido mais amplo (veja [16] para maiores detalhes).

Em [16], temos o seguinte resultado de otimização de funcionais lineares contínuos sobre conjuntos de rearranjos:

Teorema 1.21 (Burton 1987)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, limitado e Lebesgue mensurável, $1 < p < \infty$, p' o expoente conjugado de p, $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p'}(\Omega)$. Então, para $\mathbf{R}$ o conjunto dos rearranjos de f, temos que o funcional*

$$f^o \in \mathbf{R} \longmapsto \int_\Omega f^o(x)g(x)dx \tag{1.2.3}$$

atinge o supremo. Além disso, se $f^o \in \mathbf{R}$ é um ponto de máximo para este funcional, então

$$\int_\Omega f^o(x)g(x)dx = \int_0^{|\Omega|} f^\sharp(s)g^\sharp(s)ds.$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [16].

Corolário 1.22. *Sejam $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$ e $\mathbf{R}$ o conjunto dos rearranjos de f. Supomos que exista uma função $\phi : \mathbb{R} \longmapsto \bar{\mathbb{R}}$ monótona crescente tal que $\phi(g) \in \mathbf{R}$. Então $\phi(g)$ é um ponto de máximo para o funcional (1.2.3).*

Demonstração do Corolário 1.22.

Primeiro observamos que, com uma demonstração análoga ao item 3 da Proposição 1.16, temos a seguinte propriedade:

$$\int_\Omega h(x)dx = \int_0^{|\Omega|} h^\sharp(s)ds, \ \forall\, h \in L^1(\Omega).$$

Seja $\psi(s) = s\phi(s)$. Novamente, de forma similar à demonstração da Proposição 1.16, temos que $\psi(g^\sharp)$ é um rearranjo de $\psi(g)^\sharp$. Além disso, como ϕ é monótona crescente, $\phi(g^\sharp)$ é o rearranjo decrescente de $\phi(g)$. Então, para $f^o = \phi(g) \in \mathbf{R}$, temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega f^o(x)g(x)dx &= \int_\Omega \phi(g(x))g(x)dx = \int_\Omega \psi(g(x))dx = \int_0^\Omega \psi(g^\sharp(s))ds = \int_0^\Omega \phi(g^\sharp(s))g^\sharp(s)ds \\ &= \int_0^\Omega \phi(g)^\sharp(s)g^\sharp(s)ds = \int_0^\Omega (f^o)^\sharp(s)g^\sharp(s)ds. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 1.21, obtemos o resultado.

■

Para o fecho fraco de $\mathbf{R}$ em $L^p(\Omega)$, temos as seguintes propriedades:

Proposição 1.23. *Seja $1 < p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado, $f \in L^p(\Omega)$ e $\mathbf{M}$ o fecho fraco em $L^p(\Omega)$ de $\mathbf{R}$. Então, são verdadeiras as seguintes afirmações:*

1. $\mathbf{M}$ *é convexo;*

2. $\mathbf{M}$ *é metrizável e sequencialmente compacto com a topologia fraca de* $L^p(\Omega)$*.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [15].

Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $\mathbf{M}$ como acima. Então, para $g \in L^{p'}(\Omega)$, aplicando a Proposição 1.23 e argumentos de densidade, temos que o funcional

$$f^o \in \mathbf{M} \longmapsto \int_\Omega f^o(x)g(x)dx, \tag{1.2.4}$$

atinge o supremo em algum elemento $f^o \in \mathbf{R}$.

Para a questão de unicidade do ponto de máximo, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.24 (Burton 1987)**.** *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto aberto, limitado e Lebesgue mensurável,* $1 < p < \infty$*,* p' *o expoente conjugado de* p*,* $f \in L^p(\Omega)$*,* $g \in L^{p'}(\Omega)$ *e* $\mathbf{R}$ *o conjunto dos rearranjos de* f*. Então,* $f^o \in \mathbf{R}$ *é um ponto de máximo estrito para o funcional (1.2.4) (isto é,* f^o *é o único ponto de máximo do funcional em* $\mathbf{M}$*) se, e somente se, se existe uma função* $\phi : \mathbb{R} \longmapsto \bar{\mathbb{R}}$ *monótona crescente tal que* $f^o = \phi(g)$*.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [16].

Usando as propriedades acima, em [16] é obtido resultados de otimização para funcionais convexos sobre conjuntos de rearranjos. A seguir, apresentamos um caso particular que é usado neste trabalho. Para isto, precisamos da definicão de operador simétrico e positivo.

Definição 1.25 (Operador simétrico e positivo)**.** *Sejam* $1 \leq p, \leq \infty$*,* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto limitado e Lebesgue mensurável e* $G : L^p(\Omega) \longmapsto L^{p'}(\Omega)$ *um operador linear e limitado. Dizemos que* G *é simétrico se*

$$\int_\Omega f(x)G[g](x)dx = \int_\Omega g(x)G[f](x)dx, \, \forall \, f, \, g \in L^p(\Omega).$$

Dizemos que G *é positivo se*

$$\int_\Omega f(x)G[f](x)dx \geq 0, \, \forall \, f \in L^p(\Omega). \tag{1.2.5}$$

Dizemos que G *é estritamente positivo se a desigualdade em (1.2.5) é estrita,* $\forall \, f \neq 0$*.*

Teorema 1.26. *Sejam* $1 < p < \infty$*,* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto aberto e limitado e* $G : L^p(\Omega) \longmapsto L^{p'}(\Omega)$ *um operador linear, compacto, simétrico e estritamente positivo. Para* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $\mathbf{R}$ *o conjunto dos rearranjos de* f*, definimos o funcional* $\Psi : L^p(\Omega) \longmapsto \mathbb{R}$ *por*

$$\Psi[g] = \frac{1}{2}\int_\Omega g(x)G[g](x)dx. \tag{1.2.6}$$

Então, existe $f^* \in \mathbf{R}$ *tal que*

$$\Psi[g] \leq \Psi[f^*], \, \forall \, g \in \mathbf{M}. \tag{1.2.7}$$

Além disso, se $f^* \in \mathbf{R}$ *e satisfaz (1.2.7), então existe um função monótona crescente* $\phi : \mathbb{R} \longmapsto \bar{\mathbb{R}}$ *tal que* $f^* = \phi(G[f^*])$*.*

Demonstração do Teorema 1.26.

Como G é compacto, o funcional Ψ é fracamente sequencialmente contínuo em $L^p(\Omega)$. Por outro lado, usando a Proposição 1.23, temos que $\mathbf{M}$ é fracamente sequencialmente compacto. Portanto, existe $f_1 \in \mathbf{M}$ que é máximo de $\Psi|_{\mathbf{M}}$.

Usando o Teorema 1.21, temos que existe $f^* \in \mathbf{R}$ tal que

$$\int_\Omega f^{**}(x)G[f_1](x)dx \leq \int_\Omega f^*(x)G[f_1](x)dx, \, \forall f^{**} \in \mathbf{M}.$$

Então, pela simetria e positividade de G, obtemos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}\Psi[f^*] &= \Psi[f_1] + \int_\Omega (f^*(x) - f_1(x))G[f_1](x)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (f^*(x) - f_1(x))G[f^* - f_1](x)dx \\ &\geq \Psi[f_1].\end{aligned}$$

Portanto, $f^* \in \mathbf{R}$ e satisfaz (1.2.7).

Agora, supomos que $f^* \in \mathbf{R}$ é qualquer que satisfaz (1.2.7). Seja $g \in \mathbf{M}$, com $g \neq f^*$. Então, usando a positividade estrita de G, temos que

$$\begin{aligned}\Psi[f^*] &\geq \Psi[g] = \Psi[f^*] + \int_\Omega (g(x) - f^*(x))G[f^*](x)dx \\ &+ \frac{1}{2}\int_\Omega (g(x) - f^*(x))G[g - f^*](x)dx \\ &> \Psi[f^*] + \int_\Omega (g(x) - f^*(x))G[f^*](x)dx.\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_\Omega g(x)G[f^*](x)dx < \int_\Omega f^*(x)G[f^*](x)dx, \, \forall\, g \in \mathbf{M} \text{ com } g \neq f^*.$$

Aplicando o Teorema 1.24, obtemos que existe uma função monótona crescente $\phi : \mathbb{R} \longmapsto \bar{\mathbb{R}}$ tal que $f^* = \phi(G[f^*])$.

$\blacksquare$

Capítulo 2

Soluções fracas para as equações de Euler helicoidais sem rodopio

Neste capítulo, temos como objetivo principal a demonstração de um novo teorema de existência de soluções fracas e globais no tempo para as equações de Euler com dados iniciais helicoidais e sem rodopio e cujas vorticidades são p-integráveis. Mais especificamente, consideramos a redução por simetria proposta em [27] para reescrevermos formalmente a equação da vorticidade como uma equação do transporte escalar bidimensional. Então, adaptamos as técnicas conhecidas do caso Euler bidimensional e obtemos existência de soluções globais no tempo para este sistema reduzido e no contexto L^p, com $p > \frac{4}{3}$. Este resultado pode ser visto como uma extensão de [27], que demonstra existência e unicidade de soluções em L^∞.

Neste trabalho, consideramos domínios helicoidais Ω tais que $\Omega \cap \{x_3 = 0\}$ são limitados. Em [13], um resultado similar de existência de soluções é obtido para o domínio $\mathbb{R}^3$. Lá, é considerada uma formulação periódica e é usado transformada de Fourier para obter a fórmula explicita da lei de Biot-Savart. Já aqui, seguindo [27], obtemos a lei de Biot-Savart via um teorema abstrato de existência de soluções para equações elípticas em domínios limitados.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: Na primeira seção, reproduzimos a redução por simetria feita em [27]. Na segunda seção, demonstramos um novo teorema de existência de soluções com vorticidades iniciais reduzidas em L^p.

2.1 Simetria helicoidal e as equações de Euler

Nesta seção, tratamos a simetria helicoidal e suas relações com as equações de Euler como conhecidas na literatura. Primeiro, enunciamos o conceito da simetria e suas propriedades. Em seguida, mostramos que as equações de Euler são invariantes por esta simetria. Depois, apresentamos um teorema de existência de soluções clássicas e globais no tempo demonstrado por Dutrifoy em [24] e para dados iniciais suaves, helicoidais e sem rodopio. Finalmente, seguindo [27], usamos redução por simetria e uma transformação no campo de velocidades para reescrevermos a equação da vorticidade numa forma adequada. Observamos que os resultados desta seção não são novos e podem ser encontrados em [24] e [27]. No entanto, para tornar os conceitos mais compreensíveis e o trabalho mais completo, as demonstrações são apresentadas.

2.1.1 Simetria helicoidal e suas propriedades

Fixado $x \in \mathbb{R}^3$, consideramos

$$S_\rho(x) = \begin{pmatrix} cos\,\rho & sen\,\rho & 0 \\ -sen\,\rho & cos\,\rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{pmatrix} \tag{2.1.1}$$

e $\rho \in \mathbb{R} \longmapsto S_\rho(x) \in \mathbb{R}^3$ a parametrização de uma hélice vertical de período 2π que passa por x. Então, fixamos as definições que seguem.

Definição 2.1 (Domínio helicoidal)**.** *Um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é dito helicoidal (de período 2π) se,*

$$S_\rho(x) \in \Omega,\ \forall\, x \in \Omega,\ \forall\, \rho \in \mathbb{R}.$$

Segue da definição acima que Ω é helicoidal se, e somente se, $S_\rho(\Omega) = \Omega$, $\forall\, \rho \in \mathbb{R}$.

Definição 2.2 (Função helicoidal)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio helicoidal. Uma função escalar $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ é dita helicoidal se*

$$f(S_\rho(x)) = f(x),\ \forall\, x \in \Omega,\ \forall\, \rho \in \mathbb{R}. \tag{2.1.2}$$

Analogamente, uma função vetorial $F : \Omega \longmapsto \mathbb{R}^3$ é dita helicoidal se

$$F(S_\rho(x)) = R_\rho(F(x)),\ \forall\, x \in \Omega,\ \forall\, \rho \in \mathbb{R}, \tag{2.1.3}$$

para

$$R_\rho(x) = \begin{pmatrix} cos\,\rho & sen\,\rho & 0 \\ -sen\,\rho & cos\,\rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x. \tag{2.1.4}$$

Se uma função escalar é helicoidal, então ela é constante sobre as hélices verticais parametrizadas por S_ρ.

Por outro lado, seja F um campo vetorial helicoidal. Se reescrevermos F em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) e escolhermos $\rho = -z$ na igualdade (2.1.3), vemos que as componentes de F dependem apenas da combinação $(r, \theta + z)$. Mais especificamente, funções vetoriais helicoidais, em coordenadas cilíndricas, são da forma

$$F = F^r(r, \theta + z)e^r + F^\theta(r, \theta + z)e^\theta + F^z(r, \theta + z)e^z,$$

para $e^r = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$, $e^\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$ e $e^1 = (0, 0, 1)$. Como $\theta + z = cte$ é também uma parametrização da hélice vertical, então as componentes de uma função vetorial helicoidal, em coordenadas cilíndricas, são constantes sobre as hélices.

A próxima proposição caracteriza estas funções:

Proposição 2.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto e helicoidal. Então, são verdadeiras as seguintes afirmações:*

1. *Uma função escalar $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ continuamente diferenciável é helicoidal se, e somente se,*
$$x_2 \partial_{x_1} f - x_1 \partial_{x_2} f + \partial_{x_3} f = 0, \, \forall \, x \in \Omega; \tag{2.1.5}$$
2. *Uma função vetorial $F : \Omega \longmapsto \mathbb{R}^3$ continuamente diferenciável é helicoidal se, e somente se, $\forall \, x \in \Omega$,*
$$\begin{cases} x_2 \partial_{x_1} F_1 - x_1 \partial_{x_2} F_1 + \partial_{x_3} F_1 & = & F_2, \\ \\ x_2 \partial_{x_1} F_2 - x_1 \partial_{x_2} F_2 + \partial_{x_3} F_2 & = & -F_1, \\ \\ x_2 \partial_{x_1} F_3 - x_1 \partial_{x_2} F_3 + \partial_{x_3} F_3 & = & 0. \end{cases} \tag{2.1.6}$$

Demonstração da Proposição 2.3.

Vamos demonstrar apenas o item 2. O item 1 segue de forma análoga. Com efeito, supomos $F : \Omega \longmapsto \mathbb{R}^3$ diferenciável e helicoidal. Então, para $\rho \in \mathbb{R}$ e $x \in \Omega$, temos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -sen\,\rho & cos\,\rho & 0 \\ -cos\,\rho & -sen\,\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} F(x) &= \frac{d}{d\rho} R_\rho F(x) = \frac{d}{d\rho} F(S_\rho x) = (\nabla_x F)|_{(S_\rho x)} . \frac{d}{d\rho} S_\rho x \\ &= (\nabla_x F)|_{(S_\rho x)} . \left(\begin{pmatrix} -sen\,\rho & cos\,\rho & 0 \\ -cos\,\rho & -sen\,\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Escolhendo $\rho = 0$, obtemos (2.1.6). Agora, supomos $F : \Omega \longmapsto \mathbb{R}^3$ continuamente diferenciável e tal que verifica (2.1.6). Seja $G : \Omega \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^3$ definida por $G(x, \rho) = R_{-\rho} F(S_\rho x)$. Então, usando (2.1.6) e efetuando cálculos algébricos, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} G(x, \rho) &= \frac{\partial}{\partial \rho} R_{-\rho} F(S_\rho x) = \begin{pmatrix} -sen\,\rho & -cos\,\rho & 0 \\ cos\,\rho & -sen\,\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} F(S_\rho x) \\ &+ R_{-\rho} (\nabla_x F)|_{(S_\rho x)} \left(\begin{pmatrix} -sen\,\rho & cos\,\rho & 0 \\ -cos\,\rho & -sen\,\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, para cada $x \in \Omega$ fixo, temos que $G(x, .) : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável e satisfaz a EDO

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\rho} G(x, \rho) & = & 0, \\ G(x, 0) & = & F(x). \end{cases}$$

Logo, $R_{-\rho} F(S_\rho x) = G(x, \rho) = G(x, 0) = F(x)$, $\forall \rho \in \mathbb{R}$ e $x \in \Omega$. Portanto, F é uma função vetorial helicoidal.

$\blacksquare$

Fixado $x \in \Omega$, vemos que $\frac{d}{d\rho} S_\rho(x)|_{\rho=0} = (x_2, -x_1, 1)$. Então, temos a seguinte definição:

Definição 2.4 (Ortogonalidade às hélices)**.** *Uma função vetorial $F : \Omega \longmapsto \mathbb{R}^3$ helicoidal é dita ortogonal às hélices se*

$$x_2 F_1 - x_1 F_2 + F_3 = 0, \, \forall \, x \in \Omega.$$

A seguir, apresentamos algumas propriedades para funções helicoidais e ortogonais às hélices.

Proposição 2.5. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio helicoidal. Então, são verdadeiras as seguintes propriedades:*

1. *Se uma função vetorial $F : \Omega \longmapsto \mathbb{R}^3$ é helicoidal, então F_3 é uma função escalar helicoidal;*

2. *Uma função escalar $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ é helicoidal se, e somente se, a função vetorial definida por*
$$F = (x_2, -x_1, 1) f$$
é helicoidal;

3. *Se uma função vetorial $F : \Omega \longmapsto \mathbb{R}^3$ é de classe C^2, helicoidal e ortogonal às hélices, então*
$$rot\, F = (x_2, -x_1, 1) g, \tag{2.1.7}$$
para $g = \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}$. Além disso, g é uma função escalar helicoidal.

Demonstração da Proposição 2.5.

Se F é uma função vetorial helicoidal, então, analisando a terceira componente da igualdade $R_\rho F(x) = F(S_\rho x)$, temos que $F_3(x) = F_3(S_\rho(x))$. Portanto, F_3 é uma função escalar helicoidal. Logo, temos o item 1.

Se um função vetorial $F = (x_2, -x_1, 1) f$ é helicoidal, então, pelo item 1, temos que f é uma função escalar helicoidal. Seja f uma função escalar helicoidal e $F = (x_2, -x_1, 1) f$. Então,

$$\begin{array}{rcl} R_{-\rho} F(S_\rho x) & = & R_{-\rho} f(S_\rho x)(-x_1 sen\, \rho + x_2 cos\, \rho, -x_1 cos\, \rho - x_2 sen\, \rho, 1) \\ & = & (x_2, -x_1, 1) f(x) = F(x). \end{array}$$

Portanto, F é uma função vetorial helicoidal. Logo, temos o item 2.

Seja $F = (F_1, F_2, F_3)$ uma função vetorial helicoidal e ortogonal às hélices. Então, usando as relações (2.1.6), temos

$$
\begin{aligned}
rot\,F &= (\partial_{x_2}F_3 - \partial_{x_3}F_2, \partial_{x_3}F_1 - \partial_{x_1}F_3, \partial_{x_1}F_2 - \partial_{x_2}F_1) \\
&= (\partial_{x_2}F_3 - (-x_2\partial_{x_1}F_2 + x_1\partial_{x_2}F_2 - F_1)\,, \\
&\quad (-x_2\partial_{x_1}F_1 + x_1\partial_{x_2}F_1 + F_2) - \partial_{x_1}F_3, \partial_{x_1}F_2 - \partial_{x_2}F_1) \\
&= (x_2, -x_1, 1)\,(\partial_{x_1}F_2 - \partial_{x_2}F_1) \\
&+ (\partial_{x_2}F_3 - x_1\partial_{x_2}F_2 + F_1 + x_2\partial_{x_2}F_1, -x_2\partial_{x_2}F_1 + F_2 - \partial_{x_1}F_3 + x_1\partial_{x_1}F_2, 0) \\
&= (x_2, -x_1, 1)\,(\partial_{x_1}F_2 - \partial_{x_2}F_1)\,.
\end{aligned}
$$

Logo, temos (2.1.7). Além disso, aplicando div em (2.1.7), obtemos que

$$0 = div\,(x_2, -x_1, 1)g = x_2\frac{\partial g}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial g}{\partial x_2} + \frac{\partial g}{\partial x_3}.$$

Usando a Proposição 2.3, temos que g é uma função escalar helicoidal. Portanto, temos o item 3.

■

Supomos $u : \Omega \times [0, \infty) \longmapsto \mathbb{R}^3$ um campo de velocidades suaves tal que $u(., t)$ é helicoidal e ortogonal às hélices, $\forall\, t \geq 0$. Então, usando a proposição acima, temos que a vorticidade ω tem a seguinte forma:

$$\omega = rot\,u = (x_2, -x_1, 1)\omega_3. \tag{2.1.8}$$

Além disso, ω_3 é uma função escalar helicoidal. Portanto, esta vorticidade está completamente definida pela terceira componente ω_3. Mais adiante, mostramos que, sob estas condições, a terceira componente do termo de estiramento é nula. Como consequência, assim como no caso bidimensional, obtemos que a terceira componente da equação da vorticidade é uma equação do transporte escalar.

2.1.2 Equações de Euler helicoidais

Nesta subseção, mostramos primeiro que as equações de Euler são invariantes por simetria helicoidal. Em seguida, apresentamos um teorema de existência de soluções clássicas e globais no tempo demonstrado por Dutrifoy em [24] e para dados iniciais suaves, helicoidais e sem rodopio. Finalmente, usamos propriedades da simetria e aplicamos uma transformação no campo de velocidades para reduzirmos formalmente a terceira componente da equação da vorticidade a uma equação do transporte escalar bidimensional. Como já mencionamos, na seção 2.2 demonstraremos para esta formulação reduzida um novo teorema de existência de soluções fracas com vorticidades iniciais reduzidas em L^p. Adiantamos que, na demonstração deste novo resultado, o Teorema de Dutrifoy é usado durante o processo de aproximação por soluções suaves.

Invariância das equações de Euler por simetria helicoidal

Fixamos a seguinte definição de soluções helicoidais:

Definição 2.6 (Soluções helicoidais e sem rodopio)**.** *Seja (u,p) uma solução suave para as equações de Euler 3-D (1.1.9). Dizemos que esta solução é helicoidal se $u(.,t)$ é uma função vetorial helicoidal e $p(.,t)$ é uma função escalar helicoidal, para todo t. Além disso, se, para todo t, $u(.,t)$ é ortogonal às hélices, dizemos que a solução é helicoidal sem rodopio.*

Temos o seguinte resultado de invariância das equações de Euler pela simetria helicoidal:

Lema 2.7. *Seja (u,p) uma solução suave para as equações de Euler em um domínio helicoidal. Para $v_\rho(x,t) = R_{-\rho}u(S_\rho(x),t)$ e $q_\rho(x,t) = p(S_\rho(x),t)$, temos que (v_ρ, q_ρ) é solução suave para as equações de Euler, $\forall\, \rho \in \mathbb{R}$. Além disso, para $\zeta = x_2u_1 - x_1u_2 + u_3$, temos que*

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + (u.\nabla)\zeta = x_2\frac{\partial p}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_3}. \tag{2.1.9}$$

Demonstração do Lema 2.7.

Seja $v_\rho(x,t)$ e $q_\rho(x,t)$ como no enunciado do Lema. Então, aplicando a regra da cadeia e efetuando cálculos algébricos, temos que $div\, v_\rho = (div\, u)|_{(S_\rho(x),t)} = 0$ e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}v_\rho + (v_\rho.\nabla)v_\rho &= R_{-\rho}\frac{\partial}{\partial t}u|_{(S_\rho(x),t)} + \{R_{-\rho}u|_{(S_\rho(x),t)}.\nabla\}R_{-\rho}u(S_\rho(x),t)\\
&= R_{-\rho}\frac{\partial}{\partial t}u|_{(S_\rho(x),t)} + R_{-\rho}(u.\nabla)u|_{(S_\rho(x),t)}\\
&= R_{-\rho}\nabla p|_{(S_\rho(x),t)} = \nabla q_\rho.
\end{aligned}$$

Portanto, (v_ρ, q_ρ) é solução clássica para as equações de Euler, $\forall\, \rho \in \mathbb{R}$. Novamente, como u é uma solução para as equações de Euler, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}u_1 + (u.\nabla)u_1 = \frac{\partial p}{\partial x_1}, \tag{2.1.10}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}u_2 + (u.\nabla)u_2 = \frac{\partial p}{\partial x_2}, \tag{2.1.11}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}u_3 + (u.\nabla)u_3 = \frac{\partial p}{\partial x_3}. \tag{2.1.12}$$

Somando (2.1.12), (2.1.10) multiplicado por x_2 e (2.1.11) multiplicado por $-x_1$, temos

$$\begin{aligned}
x_2\frac{\partial p}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_3} &= x_2\frac{\partial}{\partial t}u_1 - x_1\frac{\partial}{\partial t}u_2 + \frac{\partial}{\partial t}u_3 + x_2(u.\nabla)u_1 - x_1(u.\nabla)u_2 + (u.\nabla)u_3 \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\zeta + x_2\left(u_1\frac{\partial}{\partial x_1}u_1 + u_2\frac{\partial}{\partial x_2}u_1 + u_3\frac{\partial}{\partial x_3}u_1\right) \\
&- x_1\left(u_1\frac{\partial}{\partial x_1}u_2 + u_2\frac{\partial}{\partial x_2}u_2 + u_3\frac{\partial}{\partial x_3}u_2\right) \\
&+ \left(u_1\frac{\partial}{\partial x_1}u_3 + u_2\frac{\partial}{\partial x_2}u_3 + u_3\frac{\partial}{\partial x_3}u_3\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\zeta + (u.\nabla)\zeta.
\end{aligned}$$

Logo, obtemos (2.1.9).

■

Usamos o lema acima para mostrar que as equações de Euler satisfazem a seguinte propriedade em um domínio conexo: seja u_0 um dado inicial suave helicoidal e sem rodopio. Se existir uma única solução suave u para este dado inicial, então o par (u, p) é solução helicoidal sem rodopio como na Definição 2.6. Com efeito, aplicando o Lema 2.7, temos que o par $((R_{-\rho}u(S_\rho), p(S_\rho))$ é solução para o dado inicial $R_{-\rho}u_0(S_\rho)$. Como $u_0 = R_{-\rho}u_0(S_\rho)$ (pois u_0 é helicoidal) e temos unicidade de soluções, então $u = R_{-\rho}u(S_\rho)$, $\forall\, \rho \in \mathbb{R}$. Portanto, u é um campo vetorial helicoidal.

Além disso, temos a igualdade $\nabla p = \nabla p(S_\rho)$, $\forall\, \rho \in \mathbb{R}$. Como o domínio é conexo e dispomos da propriedade $S_{\rho+\rho'} = S_\rho S_{\rho'}$, podemos verificar que existe uma constante C tal que $p = p(S_\rho) + \rho C$, $\forall\, \rho \in \mathbb{R}$. Usando que a pressão p é limitada, temos que $C = 0$. Então, p é uma função escalar helicoidal. Portanto, (u, p) é uma solução helicoidal como na Definição 2.6.

Finalmente, pela caracterização de funções escalares helicoidais dada na Proposição 2.3, temos que o lado direito da equação (2.1.9) é nulo. Então, como o dado inicial é sem rodopio, temos que $\zeta = x_2u_1 - x_1u_2 + u_3$ satisfaz uma equação do transporte com a condição inicial $\zeta(0) = 0$. Logo, $x_2u_1 - x_1u_2 + u_3 = 0$ em todo o instante de tempo. Portanto, (u, p) é solução helicoidal sem rodopio como na Definição 2.6.

A seguir, obtemos a forma da equação da vorticidade para as equações de Euler helicoidais sem rodopio.

Lema 2.8 (Vorticidade para Euler helicoidais sem rodopio)**.** *Seja (u, p) uma solução clássica, helicoidal e sem rodopio para as equações de Euler. Então, $\omega = (x_2, -x_1, 1)\omega_3$ e*

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial t} + (u.\nabla)\omega_3 = 0. \tag{2.1.13}$$

Demonstração do Lema 2.8.

Já vimos que $\omega = (x_2, -x_1, 1)\omega_3$. Agora, usando a Proposição 2.3, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t}\omega + (u.\nabla)\omega - (\omega.\nabla)u = \frac{\partial}{\partial t}\omega + (u.\nabla)\omega - \omega_3((x_2, -x_1, 1).\nabla)u \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\omega + (u.\nabla)\omega - \omega_3(u_2, -u_1, 0)^T = (x_2, -x_1, 1)^T \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial t} + (u.\nabla)\omega_3\right). \end{aligned}$$

Considerando a terceira componente da equação acima, temos o lema.

∎

De forma análoga, verificamos a recíproca do lema acima, isto é, ω_3 satisfaz (2.1.13) se, e somente se, $\omega = (x_2, -x_1, 1)\omega_3$ é solução da equação da vorticidade.

Existência de soluções suaves e globais para Euler helicoidal sem rodopio

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, helicoidal, regular, simplesmente conexo e com $\Omega \cap \{x_3 = 0\}$ limitado. Como dados iniciais helicoidais são periódicos no eixo x_3, consideramos o sistema periódico (1.1.12). Então, pelo que foi visto no capítulo 1, temos existência e unicidade de soluções suaves e locais no tempo para dados iniciais suaves e helicoidais. Usando este fato e o Teorema de Beale-Kato-Majda, Dutrifoy em [24] demonstrou o seguinte resultado de existência e unicidade de soluções suaves e globais no tempo para dados iniciais suaves helicoidais e sem rodopio:

Teorema 2.9 (Dutrifoy 1999)**.** *Seja Ω aberto, helicoidal, suave, simplesmente conexo e tal que $\Omega \cap \{x_3 = 0\}$ é um conjunto limitado. Seja $u_0 \in (C^\infty(\overline{\Omega}))^3$ tal que $div\, u_0 = 0$, $u_0.\eta|_{\partial\Omega} = 0$ e u_0 é helicoidal e sem rodopio. Então, existe única $u \in C^\infty([0,\infty) \times \overline{\Omega})$ solução suave, helicoidal e sem rodopio para as equações de Euler com dado inicial u_0.*

Demonstração do Teorema 2.9.

Usando as observações acima, existe $T > 0$ maximal e uma única $u \in C^\infty([0,T) \times \overline{\Omega})$ solução suave e periódica para as equações de Euler. Como o dado inicial é helicoidal e sem rodopio, usamos as observações feitas após o Lema 2.7 e concluimos que (u,p) é uma solução helicoidal e sem rodopio. Aplicando o Lema 2.8, temos que a vorticidade é da forma $\omega = (x_2, -x_1, 1)\omega_3$ e ω_3 satisfaz a seguinte equação do transporte escalar:

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial t} + (u.\nabla)\omega_3 = 0.$$

Então, temos que $\omega_3(X(x,t),t) = \omega_3(x,0)$, para X o mapa Lagrangeano como definido em (1.1.3). Portanto, a norma L^∞ de ω_3 é conservada no tempo. Como Ω é helicoidal e $\Omega \cap \{x_3 = 0\}$ é limitado, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\omega(s)\|_{L^\infty(\Omega)} ds &= \int_0^T \|(x_2, -x_1, 1)\omega_3(s)\|_{L^\infty(\Omega)} ds \le C_1 \int_0^T \|(x_2, -x_1, 1)\|_{L^\infty(\Omega)} ds \\ &\le TC_2. \end{aligned}$$

Portanto, usando o Teorema de Beale-Kato-Majda, temos que a solução é global no tempo, isto é, $u \in C^\infty([0,\infty) \times \overline{\Omega})$.

■

Caracterização de funções helicoidais

A seguir, mostramos que funções helicoidais estão completamente definidas pelo seus valores no conjunto $\Omega \cap \{x_3 = 0\}$. Em seguida, usamos esta propriedade e aplicamos uma transformação no campo de velocidades para reescrevermos a equação da vorticidade helicoidal sem rodopio (2.1.13) como uma equação do transporte bidimensional.

Para $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio helicoidal, definimos $\Omega_o = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3;\ (x_1, x_2, 0) \in \Omega\}$. Usando a igualdade

$$\bigcup_{\rho \in \mathbb{R}} S_\rho(\Omega_o) = \Omega,$$

temos que Ω está completamente definido por Ω_o. De forma análoga, para $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ uma função escalar helicoidal e $F : \Omega \longmapsto \mathbb{R}^3$ uma função vetorial helicoidal, temos que

$$\begin{cases} f(x) &= f(S_{-x_3}(x)), & \forall\, x \in \Omega, \\ F(x) &= R_{x_3} F(S_{-x_3}(x)), & \forall\, x \in \Omega, \end{cases}$$

e $S_{-x_3} x \in \Omega_o$. Portanto, f e F estão completamente definidas pelos seus valores em Ω_o. Além disso, se F é ortogonal às hélices, como

$$x_2 F_1 - x_1 F_2 + F_3 = 0,$$

temos que F está definida pelos valores de suas duas primeiras componentes em Ω_o. Neste sentido, funções helicoidais podem ser vistas como funções bidimensionais.

Formulação para as equações de Euler helicoidais sem rodopio como uma equação escalar bidimensional

Vamos usar as caracterizações acima e uma transformação no campo de velocidades para reescrevermos a equação da vorticidade. O resultado é o sistema (2.1.21) (que está mais adiante). Esse sistema é obtido através das proposições que seguem:

Proposição 2.10 (Equações de Euler helicoidais restritas ao plano)**.** *Seja Ω aberto, helicoidal, suave, simplesmente conexo e tal que $\Omega \cap \{x_3 = 0\}$ é limitado. Supomos u solução helicoidal e sem rodopio para equações de Euler:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\omega_3 + (u.\nabla)\omega_3 &= 0 \ \ em\ \Omega, \\ div\, u &= 0 \ \ em\ \Omega, \\ u.\eta\big|_{\partial\Omega} &= 0. \end{cases} \tag{2.1.14}$$

Consideramos as reduções $\Omega_o = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ (x_1, x_2, 0) \in \Omega\}$, $\xi : \Omega_o \longmapsto \mathbb{R}$ e $v : \Omega_o \longmapsto \mathbb{R}^2$ dadas por

$$\begin{cases} \xi(x_1, x_2) &= \omega_3(x_1, x_2, 0), \\ \\ v(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} 1 + x_2^2 & -x_1 x_2 \\ -x_1 x_2 & 1 + x_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(x_1, x_2, 0) \\ u_2(x_1, x_2, 0) \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{2.1.15}$$

Além disto, seja η^o a normal unitária exterior à $\partial\Omega_o$. Então, temos que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial}{\partial t}\xi + (v.\nabla)\xi & = & 0 \ \ em \ \ \Omega_o, \\ div\, v & = & 0 \ \ em \ \ \Omega_o, \\ v.\eta^o|_{\partial\Omega_o} & = & 0. \end{array}\right. \tag{2.1.16}$$

Demonstração da Proposição 2.10.

Começamos demonstrando a segunda igualdade de (2.1.16). Com efeito, aplicando v em (x_1, x_2) e u em $(x_1, x_2, 0)$, obtemos

$$\begin{array}{rcl} div\, v & = & \dfrac{\partial}{\partial x_1}v_1 + \dfrac{\partial}{\partial x_2}v_2 \\ & = & \dfrac{\partial}{\partial x_1}((1+x_2^2)u_1 - x_1x_2u_2) + \dfrac{\partial}{\partial x_2}((1+x_1^2)u_2 - x_1x_2u_1) \\ & = & \dfrac{\partial}{\partial x_1}u_1 + \dfrac{\partial}{\partial x_2}u_2 + x_2\dfrac{\partial}{\partial x_1}(x_2u_1 - x_1u_2) + x_1\dfrac{\partial}{\partial x_2}(x_1u_2 - x_2u_1). \end{array}$$

Como u é helicoidal e ortogonal às hélices, temos $x_2\partial_{x_1}u_3 - x_1\partial_{x_2}u_3 + \partial_{x_3}u_3 = 0$ e $x_2u_1 - x_1u_2 + u_3 = 0$. Usando estas e a segunda igualdade de (2.1.14), obtemos

$$\begin{array}{rcl} div\, v & = & \dfrac{\partial}{\partial x_1}u_1 + \dfrac{\partial}{\partial x_2}u_2 + x_2\dfrac{\partial}{\partial x_1}(-u_3) + x_1\dfrac{\partial}{\partial x_2}(u_3) = \dfrac{\partial}{\partial x_1}u_1 + \dfrac{\partial}{\partial x_2}u_2 + \dfrac{\partial}{\partial x_3}u_3 \\ & = & div\, u = 0. \end{array}$$

Portanto, demonstramos a segunda igualdade de (2.1.16). Analogamente,

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial}{\partial t}\xi + (v.\nabla)\xi & = & \dfrac{\partial}{\partial t}\omega_3 + ((1+x_2^2)u_1 - x_1x_2u_2)\dfrac{\partial}{\partial x_1}\omega_3 + ((1+x_1^2)u_2 - x_1x_2u_1)\dfrac{\partial}{\partial x_2}\omega_3 \\ & = & \dfrac{\partial}{\partial t}\omega_3 + u_1\dfrac{\partial}{\partial x_1}\omega_3 + u_2\dfrac{\partial}{\partial x_2}\omega_3 + x_2(x_2u_1 - x_1u_2)\dfrac{\partial}{\partial x_1}\omega_3 \\ & + & x_1(x_1u_2 - x_2u_1)\dfrac{\partial}{\partial x_2}\omega_3. \end{array}$$

Novamente, como u é helicoidal e ortogonal às hélices, temos que ω_3 é helicoidal e satisfaz $x_2\partial_{x_1}\omega_3 - x_1\partial_{x_2}\omega_3 + \partial_{x_3}\omega_3 = 0$. Então, usando a primeira igualdade de (2.1.14), temos

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial}{\partial t}\xi + (v.\nabla)\xi & = & \dfrac{\partial}{\partial t}\omega_3 + u_1\dfrac{\partial}{\partial x_1}\omega_3 + u_2\dfrac{\partial}{\partial x_2}\omega_3 + u_3\left(-x_2\dfrac{\partial}{\partial x_1}\omega_3 + x_1\dfrac{\partial}{\partial x_2}\omega_3\right) \\ & = & \dfrac{\partial}{\partial t}\omega_3 + u_1\dfrac{\partial}{\partial x_1}\omega_3 + u_2\dfrac{\partial}{\partial x_2}\omega_3 + u_3\dfrac{\partial}{\partial x_3}\omega_3 \\ & = & \dfrac{\partial}{\partial t}\omega_3 + (u.\nabla)\omega_3 = 0. \end{array}$$

Logo, demonstramos a primeira igualdade de (2.1.16). Vamos demonstrar a terceira igualdade de (2.1.16). Começamos verificando que

$$\eta(x).(x_2, -x_1, 1) = 0, \forall\, x \in \partial\Omega. \tag{2.1.17}$$

De fato, se $x \in \partial\Omega$, então $S_\rho(x) \in \partial\Omega$, $\forall\, \rho \in \mathbb{R}$. Como $\left.\dfrac{d}{d\rho}S_\rho(x)\right|_{\rho=0} = (x_2, -x_1, 1)$ e $\eta(x)$ é normal ao plano tangente de $\partial\Omega$ em x, obtemos (2.1.17). Agora, usando (2.1.17), temos que

$$\eta = (\eta_1, \eta_2, x_1\eta_2 - x_2\eta_1)\,, \forall\, x \in \partial\Omega.$$

Então, pela igualdade acima e pela condição de ortogonalidade às hélices para u, temos a seguinte sequência de igualdades:

$$\begin{aligned} u.\eta &= u_1\eta_1 + u_2\eta_2 + u_3(-x_2\eta_1 + x_1\eta_2) \\ &= u_1\eta_1 + u_2\eta_2 + x_2(x_2u_1 - x_1u_2)\eta_1 + x_1(x_1u_2 - x_2u_1)\eta_2 \\ &= ((1+x_2^2)u_1 - x_1x_2u_2)\eta_1 + ((1+x_1^2)u_2 - x_1x_2u_1)\eta_2, \forall\, x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

Por outro lado, como $\partial\Omega_o \times \{0\} \subset \partial\Omega$, então $\eta^o(x')$ e $(\eta_1(x', 0), \eta_2(x', 0))$ são vetores paralelos, $\forall\, x' \in \partial\Omega_o$. Logo, usando o fato acima e (2.1.18), temos as seguintes igualdades (para algum $\lambda \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} v.\eta^o &= v_1(\eta^o)_1 + v_2(\eta^o)_2 = ((1+x_2^2)u_1 - x_1x_2u_2)\lambda\eta_1 + ((1+x_1^2)u_2 - x_1x_2u_1)\lambda\eta_2 \\ &= \lambda(u.\eta) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos a proposição.

■

De forma análoga, verificamos a recíproca da proposição acima, isto é, se o par (v, ξ) satisfaz (2.1.16) em Ω_o e se aplicarmos ao processo inverso para obtermos as extensões helicoidais, então o par (u, ω_3) satisfaz (2.1.14) em Ω.

Para fecharmos o sistema (2.1.16) acima, temos a seguinte relação entre v e ξ:

Proposição 2.11 (Relação entre v e ξ)**.** *Sejam v e ξ como na Proposição 2.10. Então,*

$$\mathcal{L}[v^\perp] \;=\; \xi, \tag{2.1.19}$$

para

$$\begin{cases} \mathcal{L}[\,.\,] &= div\,\{K(x_1, x_2)[\,.\,]\}, \\ K(x_1, x_2) &= \dfrac{1}{1+x_1^2+x_2^2}\begin{bmatrix} 1+x_2^2 & -x_1x_2 \\ -x_1x_2 & 1+x_1^2 \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{2.1.20}$$

Demonstração da Proposição 2.11.

Invertendo (2.1.15), temos

$$\begin{pmatrix} u_1(x_1,x_2,0) \\ u_2(x_1,x_2,0) \end{pmatrix} = \frac{1}{1+x_1^2+x_2^2} \begin{pmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 \\ x_1x_2 & 1+x_2^2 \end{pmatrix} v(x_1,x_2).$$

Logo, obtemos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \xi &= \omega_3 = \frac{\partial}{\partial x_1}u_2 - \frac{\partial}{\partial x_2}u_1 \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{1+x_1^2+x_2^2}((1+x_2^2)v_2 + x_1x_2v_1)\right) \\ &- \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{1+x_1^2+x_2^2}((1+x_1^2)v_1 + x_1x_2v_2)\right) \\ &= \mathcal{L}[v^\perp]. \end{aligned}$$

■

Usando as condições de incompressibilidade e de contorno, podemos considerar uma função escalar ψ tal que $v = -\nabla^\perp\psi$ em Ω_o e $\psi|_{\partial\Omega_o} = 0$. Adiante usaremos esta função corrente para obtermos a lei de Biot-Savart.

Desta forma, temos a seguinte formulação para as equações de Euler helicoidais sem rodopio no domínio $\Omega_o = \{x' \in \mathbb{R}^2;\ (x',0) \in \Omega\}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dfrac{\partial}{\partial t}\xi + (v.\nabla)\xi &=& 0 & \text{em} \quad \Omega_o, \\ v^\perp &=& \nabla\psi & \text{em} \quad \Omega_o, \\ \xi &=& \mathcal{L}[\nabla\psi] & \text{em} \quad \Omega_o, \\ \psi &=& 0 & \text{em} \quad \partial\Omega_o, \end{array} \right. \tag{2.1.21}$$

para $\mathcal{L}$ o operador (2.1.20) e $v^\perp = (v_2, -v_1)$.

2.2 Soluções fracas

Nesta seção, demonstramos um novo teorema de existência de soluções para o sistema (2.1.21) com condições iniciais $\xi_0 \in L^p(\Omega_o)$, para $p > \dfrac{4}{3}$. Este resultado pode ser visto como uma extensão de [27], que demonstra existência e unicidade de soluções em $L^\infty(\Omega_o)$.

Esta seção está organizada da seguinte forma: Na primeira subseção, obtemos a lei de Biot-Savart para o sistema. Em seguida, definimos a noção de solução fraca e enunciamos o Teorema de Existência de Soluções a ser demonstrado. Na segunda subseção, apresentamos resultados auxiliares para a demonstração do teorema. Na terceira subseção, demonstramos o teorema enunciado.

2.2.1 Formulação do problema e enunciado do Teorema de Existência de Soluções

Adiante, usamos sucessivas vezes algumas propriedades bem conhecidas na literatura para espaços de Sobolev e para convergência fraca. Com o objetivo de facilitar a leitura do texto, enunciamos estes resultados a seguir:

Lema 2.12. *Seja $(X, \|\,.\,\|)$ um espaço de Banach, X' dual topológico, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X'$ sequências. Então, são verdadeiras as seguintes afirmações:*

1. *Se $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ na topologia fraca de X, então $\|x\| \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$;*

2. *Se $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ na topologia fraca de X e se $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ na topologia de X', então $\langle f_n, x_n\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle f, x\rangle$;*

3. *Se $(X, \|\,.\,\|)$ é uniformemente convexo, $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ na topologia fraca de X e $\limsup\limits_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \|x\|$, então $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ na topologia de X.*

Lema 2.13. *Seja $1 < p < \infty$. Então, L^p é uniformemente convexo.*

Proposição 2.14 (Imersões de Sobolev)**.** *Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, limitado e de classe C^1. Então, temos as seguintes inclusões contínuas:*

1. *Se $1 \leq p < 2$, então $W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^{p^*}(U)$, para $p^* = \dfrac{2p}{2-p}$;*

2. *Se $p = 2$, então $W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^q(U)$, para $2 \leq q < \infty$;*

3. *Se $p > 2$, então $W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^\infty(U)$.*

Proposição 2.15 (Imersões de Rellich-Kondrakov)**.** *Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, limitado e de classe C^1. Então, temos as seguintes inclusões compactas:*

1. *Se $1 \leq p < 2$, então $W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^q(U)$, para $q < \dfrac{2p}{2-p}$;*

2. *Se $p = 2$, então $W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^q(U)$, para $2 \leq q < \infty$;*

3. *Se $p > 2$, então $W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^\infty(U)$.*

Proposição 2.16 (Banach-Alaoglu)**.** *Seja $(X, \|\,.\,\|)$ um espaço de Banach reflexivo. Então, conjuntos fechados e limitados são compactos com a topologia fraca.*

As demonstrações dos resultados acima podem ser encontradas em [33] e [39]. Precisamos também do seguinte teorema de existência e regularidade de soluções para equações elípticas em domínios limitados:

Teorema 2.17 (Regularidade elíptica). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto, limitado e de classe C^2. Supomos L um operador diferencial parcial linear, de segunda ordem, uniformemente elíptico (como em [29]) e com coeficientes Hölder contínuos. Fixamos $p > 1$. Se existe $m > 0$ tal que L satisfaz a desigualdade*

$$\int_U uL[u]dx \geq m\|u\|^2_{W^{1,2}(U)}, \forall\, u \in W^{2,p}(U) \cap W_0^{1,p}(U), \tag{2.2.1}$$

então, $\forall\, f \in L^p(U)$, existe $g \in W^{2,p}(U)$ solução do sistema

$$\begin{cases} L[g] &= f \text{ em } U, \\ g|_{\partial U} &= 0. \end{cases}$$

Além disso, existe uma constante $C > 0$, independente de f, tal que

$$\|g\|_{W^{2,p}(U)} \leq Cp\|f\|_{L^p(U)}. \tag{2.2.2}$$

O teorema acima pode ser encontrado em [52]. A seguir, aplicamos este resultado no operador $\mathcal{L}$ definido em (2.1.20):

Proposição 2.18 (Função corrente). *Sejam $\Omega_o \subset \mathbb{R}^2$ aberto, limitado e suave, $p > 1$ e $\xi \in L^p(\Omega_o)$. Então, existe única $\psi \in W^{2,p}(\Omega_o)$ tal que*

$$\begin{cases} -\mathcal{L}[\nabla\psi] &= \xi \text{ em } \Omega_0, \\ \psi|_{\partial\Omega_o} &= 0. \end{cases} \tag{2.2.3}$$

Além disso, existe uma constante $C > 0$, independente de ξ, tal que

$$\|\psi\|_{W^{2,p}(\Omega_o)} \leq Cp\|\xi\|_{L^p(\Omega_o)}. \tag{2.2.4}$$

Demonstração da Proposição 2.18.

Se $x \in \Omega_o$, a matriz $K(x_1, x_2)$ dada em (2.1.20) é positiva definida. Com efeito, seja $R > 0$ tal que $\Omega_o \subset B_{\mathbb{R}^2}(0, R)$. Então, temos as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} \varsigma^t K(x_1, x_2)\varsigma &= \frac{1}{1 + x_1^2 + x_2^2}\Big((1 + x_2^2)\varsigma_1^2 + (1 + x_1^2)\varsigma_2^2 - 2x_1x_2\varsigma_1\varsigma_2\Big) \\ &\geq \frac{1}{1 + R^2}\Big(|\varsigma|^2 + (\varsigma_1 x_2 - \varsigma_1 x_1)^2\Big) \\ &\geq \frac{1}{1 + R^2}|\varsigma|^2, \forall\, \varsigma \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Logo, o operador $-\mathcal{L}[\nabla(\,.\,)] = -div\,\{K(x_1, x_2)\nabla[\,.\,]\}$ é uniformemente elíptico. Agora, vamos demonstrar a desigualdade (2.2.1). Com efeito, seja $f \in W^{2,p}(U) \cap W_0^{1,p}(U)$. Então, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_o} (-\mathcal{L}[\nabla f])f dx &= -\int_{\Omega_o} div\,\{K(x_1, x_2)\nabla[f(x)]\}.f(x)dx \\ &= \int_{\Omega_o} \{K(x_1, x_2)\nabla f(x)\}.\nabla f(x)dx \\ &\geq \frac{1}{1 + R^2}\int_{\Omega_o} \nabla f(x).\nabla f(x)dx. \end{aligned}$$

Como estamos no domínio limitado Ω_o, usando a desigualdade de Poincaré (veja [29]), existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_{\Omega_o} (-\mathcal{L}[\nabla f]) f dx \geq C \|f\|^2_{H^1_0(\Omega_o)}.$$

Portanto, usando o Teorema 2.17, obtemos a proposição.

■

Definição 2.19 (Funcional energia)**.** *Sejam $\frac{4}{3} < p \leq \infty$ e $\mathcal{L}$ como em (2.1.20). Definimos a função*

$$G : L^p(\Omega_o) \longmapsto W^{2,p}(\Omega_o) \tag{2.2.5}$$

como o operador linear solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} -\mathcal{L}[\nabla G[f]] &= f \;\; em \;\; \Omega_o, \\ G[f]|_{\partial\Omega_o} &= 0. \end{cases} \tag{2.2.6}$$

Além disso, definimos o funcional energia

$$\mathcal{E} : L^p(\Omega_o) \longmapsto \mathbb{R}, \tag{2.2.7}$$

por

$$\mathcal{E}[f] = \frac{1}{2} \int_{\Omega_o} f(x) G[f](x) dx. \tag{2.2.8}$$

Usando a desigualdade (2.2.4), as imersões de Rellich-Kondrakov e o fato que $p > \frac{4}{3}$, temos que o operador

$$G : L^p(\Omega_o) \longmapsto W^{1,p'}(\Omega_o) \tag{2.2.9}$$

é linear e compacto, para p' o expoente conjugado de p. Além disso, o funcional energia é sequencialmente contínuo com a topologia fraca de $L^p(\Omega_o)$ e uniformemente contínuo com a topologia forte sobre conjuntos limitados de $L^p(\Omega_o)$.

O funcional energia desempenha um papel importante nos resultados obtidos sobre estabilidade. De fato, no capítulo 3 demonstramos que pontos de máximos de $\mathcal{E}$ (com o domínio restrito a uma classe de rearranjos) são soluções estacionárias para o sistema (2.1.21). Além disso, mostramos que, se um ponto de máximo for estrito, então a solução é estável.

A seguir, apresentamos a definição de solução fraca:

Definição 2.20 (Solução fraca)**.** *Sejam $\frac{4}{3} < p \leq \infty$ e $\xi_0 \in L^p(\Omega_o)$. Dizemos que uma função $\xi \in L^\infty_{Loc}([0,\infty), L^p(\Omega_o))$ é uma solução do sistema (2.1.21) com dado inicial ξ_0, se, para $v = \nabla^\perp G[\xi]$, temos*

$$\int_0^\infty \int_{\Omega_o} \xi(x,t)\phi_t(x,t) dx dt + \int_0^\infty \int_{\Omega_o} \xi(x,t) v(x,t) \nabla\phi(x,t) dx dt = -\int_{\Omega_o} \xi_0(x)\phi(x,0) dx, \tag{2.2.10}$$

para toda $\phi \in C_0^\infty([0,\infty) \times \Omega_o)$.

Pelas observações feitas anteriormente, obtemos que a lei de Biot-Savart

$$\xi \in L^p(\Omega_o) \longmapsto v \in L^{p'}(\Omega_o) \tag{2.2.11}$$

é linear e compacta, para p' o expoente conjugado de p. Portanto, as integrais em (2.2.10) são finitas.

Temos que $p = \dfrac{4}{3}$ é o caso limite no sentido que, para valores $p < \dfrac{4}{3}$, as integrais acima podem não ser finitas.

Para o próximo teorema, usamos a seguinte definição: Dizemos que uma função está em $C_w([0,\infty), L^p(\Omega_o))$ se ela é sequencialmente contínua no tempo com a topologia fraca em $L^p(\Omega_o)$.

Como resultado principal deste capítulo, temos o seguinte teorema de existência de soluções globais:

Teorema 2.21 (Existência de soluções em L^p)**.** *Sejam $p > \dfrac{4}{3}$, $\Omega_o \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, limitado, suave e simplesmente conexo e $\xi_0 \in L^p(\Omega_o)$. Então, existe $\xi \in L^\infty([0,\infty), L^p(\Omega_o))$, com $\xi \in C_w([0,\infty), L^p(\Omega_o))$, solução fraca do sistema (2.1.21) com dado inicial ξ_0. Além disso, para o funcional energia $\mathcal{E}$ definido em (2.2.8), temos que $\mathcal{E}[\xi(t)] = \mathcal{E}[\xi_0]$, $\forall\, t \geq 0$. Se $p \geq 2$, então, para quase todo $t \in [0,\infty)$, temos que $\xi(t)$ é um rearranjo de ξ_0.*

Neste trabalho, não demonstramos unicidade de soluções. A unicidade para o caso $p = \infty$ é demonstrada em [27] e segue as idéais de Yudovich para Euler bidimensional (veja [52]). Como observamos no capítulo 1, a unicidade para Euler bidimensional com $\dfrac{4}{3} < p < \infty$ também é um problema em aberto (veja [7], [17] e [31]).

Se $p \geq 2$, então, pela última afirmação do teorema acima, temos que a dinâmica da solução ao longo do tempo ocorre dentro do conjunto dos rearranjos do dado inicial. Como veremos na subseção 2.2.2, a restrição $p \geq 2$ aparece basicamente devido às condições técnicas advindas da teoria de Diperna-Lions para a equação do transporte (veja [10] e [21] para maiores detalhes).

A demonstração do Teorema 2.21 é feita na subseção 2.2.3. Porém, a seguir, apresentamos a estratégia básica para a sua demonstração: primeiro, aproximamos o dado inicial ξ_0 por uma sequência de funções suave $(\xi_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $L^p(\Omega_o)$. Então, usamos o Teorema de Dutrifoy (Teorema 2.9) para obtermos existência de soluções globais no tempo e suaves $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ para o sistema (2.1.21) e para estes dados iniciais $(\xi_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Em seguida, obtemos estimativas para estas soluções e, usando compacidade do tipo Aubin-Lions, extraímos uma subsequência convergente para uma candidata à solução. Finalmente, aplicamos limites fracos e mostramos que esta candidata é de fato uma solução e tem as propriedades desejadas.

2.2.2 Resultados auxiliares

Nesta subseção, por questões didáticas, apresentamos separadamente alguns resultados e estimativas auxiliares para a demonstração do teorema acima. Estes estão organizados da seguinte forma: Primeiro, mostramos a conservação da energia para soluções suaves do sistema (2.1.21). Em seguida, apresentamos alguns lemas sobre convergência e imersões. Finalmente, obtemos propriedades de rearranjos para as soluções das equações do transporte escalar.

Soluções globais e suaves

Como consequência do Teorema de Dutrifoy (Teorema 2.9) e dos resultados da seção anterior que reduzem as equações de Euler helicoidais sem rodopio ao sistema (2.1.21), temos a seguinte proposição:

Proposição 2.22. *Sejam $\Omega_o \subset \mathbb{R}^2$ aberto, limitado, suave e simplesmente conexo e $\xi_0 \in C^\infty(\overline{\Omega}_o)$. Então, existe $\xi \in C^\infty([0,\infty) \times \Omega_o)$ solução suave para o sistema (2.1.21) e com dado inicial ξ_0.*

Seja $(\xi_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções suaves que aproximam ξ_0 em $L^p(\Omega_o)$. Pela proposição acima, obtemos existência de soluções globais e suaves $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ para o sistema (2.1.21) e com dados iniciais $\xi^n(0) = \xi_0^n$. A seguir, mostramos que estas soluções aproximadas conservam a energia ao longo do tempo.

Lema 2.23 (Conservação da energia e da norma L^p)**.** *Sejam Ω_o e $\xi \in C^\infty([0,\infty) \times \Omega_o)$ uma solução de (2.1.21) dada pela Proposição 2.22. Então, a energia $\mathcal{E}[\xi(t)]$ é conservada ao longo do tempo. Além disso, se $1 < p < \infty$, então $\|\xi(t)\|_{L^p(\Omega_o)}$ é igualmente conservada ao longo do tempo.*

Demonstração do Lema 2.23.

Seja Ω o domínio helicoidal associado à Ω_o, isto é, $\Omega = \bigcup_{\rho\in\mathbb{R}} S_\rho(\Omega_o \times \{0\})$. Consideramos u o campo suave de velocidades helicoidais sem rodopio que é solução para as equações de Euler 3-D em Ω e é associado à vorticidade inicial reduzida ξ_0. Então, são válidas as relações $rot\, u = \omega$, $\omega = (x_2, -x_1, 1)\omega_3$ e $\xi(x_1, x_2) = \omega_3(x_1, x_2, 0)$.

Para $\Omega(\pi) = \Omega \cap (-\pi < x_3 < \pi)$, temos as seguintes igualdades:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega(\pi)} |u|^2 dx \;=\; \int_{\Omega(\pi)} u.\frac{\partial}{\partial t} u\, dx = -\int_{\Omega(\pi)} u.\{(u.\nabla)u\} dx - \int_{\Omega(\pi)} u.\nabla p\, dx.$$

Como $div\, u = 0$, $u.\eta|_{\partial\Omega} = 0$ e u e p são periódicas (período 2π) no eixo x_3, usamos integração por partes nas igualdades acima para obtermos

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega(\pi)} u.\nabla p\, dx &= 0, \\ \displaystyle\int_{\Omega(\pi)} u.\{(u.\nabla)u\} dx &= -\displaystyle\int_{\Omega(\pi)} u.\{(u.\nabla)u\} dx. \end{cases}$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega(\pi)} |u|^2 dx = 0. \tag{2.2.12}$$

Por outro lado, sejam $\Omega_{x_3} = \{(x_1, x_2); (x_1, x_2, x_3) \in \Omega\}$, $x' = (x_1, x_2)$ e S e R as matrizes (2.1.1) e (2.1.4) respectivamente. Então, usando a simetria helicoidal para u, temos também as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(\pi)} |u(x)|^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{\Omega_{x_3}} |u(x', x_3)|^2 dx' dx_3 = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{\Omega_{x_3}} |R_{x_3} u(S_{-x_3}(x', x_3))|^2 dx' dx_3 \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{\Omega_{x_3}} |u(R_{-x_3}(x', 0))|^2 dx' dx_3 = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{R_{-x_3}(\Omega_{x_3})} |u(x', 0)|^2 dx' dx_3 \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{\Omega_o} |u(x', 0)|^2 dx' dx_3 = 2\pi \int_{\Omega_o} |u(x', 0)|^2 dx'. \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

Logo, usando (2.2.12) e (2.2.13), temos que

$$\int_{\Omega_o} |u((x',0),t)|^2 dx' \tag{2.2.14}$$

é conservado ao longo do tempo.

Agora, usando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}[\xi] &= \frac{1}{2}\int_{\Omega_o} \xi(x)G[\xi](x)dx = \frac{1}{2}\int_{\Omega_o}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}u_2(x,0) - \frac{\partial}{\partial x_2}u_1(x,0)\right)G[\xi](x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\Omega_o}(u_1(x,0),u_2(x,0)).\nabla^{\perp}(G[\xi])(x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\Omega_o}(u_1(x,0),u_2(x,0)).(v_1(x),v_2(x))dx.
\end{aligned}$$

Finalmente, pela a definição de v em (2.1.15), temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}[\xi] &= \frac{1}{2}\int_{\Omega_o}(u_1(x,0),u_2(x,0)).(v_1(x),v_2(x))dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\Omega_o} u_1(x,0)\left\{(1+x_2^2)u_1(x,0) - x_1x_2u_2(x,0)\right\} \\
&+ u_2(x,0)\left\{(1+x_1^2)u_2(x,0) - x_1x_2u_1(x,0)\right\}dx.
\end{aligned}$$

Como u é ortogonal às hélices, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}[\xi] &= \frac{1}{2}\int_{\Omega_o} u_1^2(x,0) + u_2^2(x,0) + x_2u_1(x,0)\left\{-u_3(x,0)\right\} + x_1u_2(x,0)\left\{u_3(x,0)\right\}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\Omega_o}|u(x,0)|^2dx.
\end{aligned}$$

Usando a igualdade acima juntamente com a convervação no tempo de (2.2.14), obtemos a conservação de $\mathcal{E}[\xi(t)]$ no tempo.

Agora, vamos demonstrar a conservação no tempo das normas $L^p(\Omega_o)$ de ξ. Com efeito, multiplicando ambos os lados da primeira igualdade de (2.1.21) por $p\xi|\xi|^{p-2}$, temos

$$\frac{\partial}{\partial t}|\xi|^p + (v.\nabla)|\xi|^p = 0.$$

Integrando a igualdade acima em Ω_o, usando integração por partes e os fatos que $div\, v = 0$ e $v.\eta^o|_{\partial\Omega_o} = 0$, obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_o}|\xi(x)|^p dx = -\int_{\Omega_o}(v(x).\nabla)|\xi(x)|^p dx = 0.$$

Portanto, demonstramos o lema.

■

Convergência e imersões

Seja $1 < s < \infty$, s' o expoente conjugado de s e $W^{-1,s}(U)$ o dual de $W_0^{1,s'}(U)$. Então, usamos o Teorema de Rellich-Kondrakov para demonstrarmos a seguinte imersão compacta:

Lema 2.24. *Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto, limitado e de classe C^1. Supomos que o par (p, s) satisfaz uma das alternativas:*

- $1 < p < 2$ *e* $1 < s < \dfrac{2p}{2-p}$;
- $2 \leq p < \infty$ *e* $1 < s < \infty$.

Então, temos a seguinte inclusão compacta:

$$L^p(U) \hookrightarrow W^{-1,s}(U). \tag{2.2.15}$$

Demonstração do Lema 2.24.

Sejam p' e s' os expoentes conjugados de p e s respectivamente. Vamos primeiro demonstrar que a seguinte inclusão é compacta:

$$W_0^{1,s'}(U) \hookrightarrow L^{p'}(U). \tag{2.2.16}$$

Com efeito, se o par (p, s) satisfaz $2 \leq p < \infty$ e $1 < s < \infty$ ou se satisfaz $1 < p < 2$ e $1 < s \leq 2$, então o Teorema de Rellich-Kondrakov pode ser aplicado de imediato. Portanto, nestes casos, obtemos que (2.2.16) é uma inclusão compacta. Seja (p, s) tal que $1 < p < 2$ e $2 < s < \dfrac{2p}{2-p}$. Para aplicarmos Rellich-Kondrakov, devemos mostrar que $p' < \dfrac{2s'}{2-s'}$. Temos que

$$\begin{aligned} p' < \frac{2s'}{2-s'} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{p}{p-1} \leq \frac{2\frac{s}{s-1}}{2-\frac{s}{s-1}} \Longleftrightarrow \frac{p}{p-1} \leq 2\frac{s}{s-2} \Longleftrightarrow 1 - \frac{2}{s} < 2 - \frac{2}{p} \Longleftrightarrow \frac{2-p}{p} < \frac{2}{s} \\ &\Longleftrightarrow \quad s < \frac{2p}{2-p}. \end{aligned}$$

Logo, obtemos que (2.2.16) é uma inclusão compacta em todos os casos considerados. Agora, como o operador adjunto herda a compacidade (veja [40]), temos que (2.2.15) é compacto para todos os casos considerados. Além disso, usando densidade, temos (2.2.15) que é uma inclusão. Portanto, demonstramos o lema.

■

Corolário 2.25. *Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto, limitado e de classe C^1. Supomos que o par (p, s) satisfaz as hipóteses do Lema 2.24. Além disso, consideramos $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $L^p(U)$ e tal que $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ em $W^{-1,s}(U)$. Então, $f \in L^p(U)$ e $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ fraco em $L^p(U)$.*

Demonstração do Corolário 2.25.

Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^p(U)$, usando o Teorema de Banach-Alaoglu, temos que existe uma subsequência que converge fraco em $L^p(U)$. Pela imersão compacta (2.2.15), este limite deve necessariamente ser f. Portanto, $f \in L^p(U)$. Agora, supomos por contradição que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge fracamente para f em $L^p(U)$. Então, existe uma função $g \in L^{p'}(U)$, uma constante $C > 0$ e uma subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tais que

$$\left|\int_U f_{n_k}(x)g(x)dx - \int_U f(x)g(x)dx\right| > C, \ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, seguindo a primeira etapa acima, podemos extrair uma subsequência de $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge fraco para f em $L^p(U)$. Logo, isto contradiz a desigualdade acima. Portanto, $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ fraco em $L^p(U)$.

∎

Adiante, utilizamos o seguinte critério de compacidade para obtermos uma subsequência convergente da sequência das soluções suaves aproximadas:

Teorema 2.26 (Aubin-Lions)**.** *Sejam $X \hookrightarrow B \hookrightarrow Y$ três espaços de Banach, com a inclusão $X \hookrightarrow B$ compacta. Consideremos $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $W^{1,\infty}((T_1,T_2),Y)$ e limitada em $L^\infty((T_1,T_2),X)$. Então, $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é pré-compacta em $C([T_1,T_2],B)$.*

A demonstração do teorema acima pode ser encontrada em [12]. Fazemos uso do Lema 2.24 e usamos o Teorema de Aubin-Lions na seguinte forma:

Proposição 2.27. *Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto e limitado de classe C^1. Consideramos (p,s) um par que satisfaz $1 < p < 2$ e $1 < s < \dfrac{2p}{2-p}$ ou satisfaz $2 \le p < \infty$ e $1 < s < \infty$. Seja $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções que está contida e é limitada em $L^\infty((T_1,T_2),L^p(U))$ e tal que $(\partial_t f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ está contida e é limitada em $L^\infty((T_1,T_2),W^{-1,s}(U))$. Então, $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é pré-compacto em $C([T_1,T_2],W^{-1,s}(U))$.*

Aplicamos a proposição acima na sequência das soluções suaves aproximadas $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ consideradas anteriormente. Com efeito, pelo Lema 2.23, estas soluções conservam a norma $L^p(\Omega_o)$. Então, uma simples estimativa para os dados iniciais aproximados mostra que $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty((T_1,T_2),L^p(U))$. Já para estimar $(\partial_t\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $L^\infty((T_1,T_2),W^{-1,s}(U))$, utilizamos o seguinte lema:

Lema 2.28. *Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto, limitado, suave e simplesmente conexo. Suponha $\dfrac{4}{3} < p < \infty$ e ξ e φ funções em $L^p(U)$. Então, para $v = \nabla^\perp G[\xi]$, são verdadeiras as seguintes afirmações:*

1. *Se $\dfrac{4}{3} < p < 2$ e $s = \dfrac{2p}{4-p}$, então*

$$\|div\,(\varphi v)\|_{W^{-1,s}(U)} \le \|\nabla G\|\|\varphi\|_{L^p(U)}\|\xi\|_{L^p(U)},$$

para $\|\nabla G\|$ a norma do operador $\xi \in L^p(U) \longmapsto \nabla G[\xi] \in L^k(U)$ e $k = \dfrac{2p}{2-p}$.

2. Se $p \geq 2$ e $1 < s < p$, então

$$\|div\,(\varphi v)\|_{W^{-1,s}(U)} \leq \|\nabla G\|\|\varphi\|_{L^p(U)}\|\xi\|_{L^p(U)},$$

para $\|\nabla G\|$ a norma do operador $\xi \in L^p(U) \longmapsto \nabla G[\xi] \in L^k(U)$ e $k = \dfrac{ps}{p-s}$.

Demonstração do Lema 2.28.

Sabemos que a aplicação

$$G : L^p(\Omega_o) \longmapsto W^{2,p}(\Omega_o),$$

é contínua. Então, usando as imersões de Sobolev, temos que o operador $\xi \in L^p(\Omega_o) \longmapsto \nabla G(\xi) \in L^k(\Omega_o)$ está bem definido e é contínuo em ambos os casos 1 e 2 acima.

Seja $\dfrac{4}{3} < p < 2$. Então, para $a = \dfrac{p}{s}$, $b = \dfrac{2p}{(2-p)s}$ e $k = \dfrac{2p}{2-p}$, usando a desigualdade de Hölder, obtemos que

$$\int_U |\varphi v|^s dx \leq \|\varphi^s\|_{L^a(U)}\||v|^s\|_{L^b(U)} = \|\varphi\|^s_{L^p(U)}\||v|\|^s_{L^k(U)}.$$

Agora, seja $p \geq 2$. Então, para $a = \dfrac{p}{s}$, $b = \dfrac{p}{p-s}$ e $k = \dfrac{ps}{p-s}$, usando novamente a desigualdade de Hölder, obtemos que

$$\int_U |\varphi v|^s dx \leq \|\varphi^s\|_{L^a(U)}\||v|^s\|_{L^b(U)} = \|\varphi\|^s_{L^p(U)}\||v|\|^s_{L^k(U)}.$$

Seja $\zeta \in C_0^\infty(U)$. Então, para s' o expoente conjugado de s, temos

$$\begin{aligned} \left|\int_U \varphi v \nabla\zeta dx\right| &\leq \||\varphi v|\|_{L^s(U)}\||\nabla\zeta|\|_{L^{s'}(U)} \leq \|\varphi\|_{L^p(U)}\||v|\|_{L^k(U)}\|\zeta\|_{W_0^{1,s'}(U)} \\ &\leq \|\varphi\|_{L^p(U)}\|\nabla G\|\|\xi\|_{L^p(U)}\|\zeta\|_{W_0^{1,s'}(U)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\left|\int_{\Omega_o} div\,(\varphi v)\zeta dx\right| \leq \|\varphi\|_{L^p(U)}\|\nabla G\|\|\xi\|_{L^p(U)}\|\zeta\|_{W_0^{1,s'}(U)},\ \forall\, \zeta \in C_0^\infty(U).$$

Usando dualidade e densidade, obtemos o lema.

■

Aplicando a lema acima para $\varphi = \xi^n$, com $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de soluções suaves aproximadas como considerada anteriormente, e para s tal que (p,s) satisfaz a hipótese do lema, temos que

$$\|\partial_t \xi^n\|_{W^{-1,s}(U)} = \|div\,(v^n\xi^n)\|_{W^{-1,s}(U)} \leq C\|\xi^n\|^2_{L^p(U)}, \tag{2.2.17}$$

com $C > 0$ uma constante independente de $(\xi^n)_{\in\mathbb{N}}$. Em particular, estamos sob as hipóteses do Teorema de Aubin-Lions.

Rearranjos de funções e a equação do transporte

A seguir, mostramos que se $p \geq 2$, então qualquer solução do sistema (2.1.21) no conjunto $L^{\infty}_{loc}([0,\infty); L^p(\Omega_o))$ é um rearranjo no tempo q.s.. Em [17], um resultado análogo é obtido para as equações de Euler bidimensionais. Seguindo essencialmente a mesma demonstração de [17], temos a seguinte proposição que abrange estes dois casos:

Proposição 2.29. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, limitado e suave, $2 \leq p < \infty$, $f \in L^{\infty}_{Loc}([0,\infty), W^{2,p}(U) \cap W^{1,p}_0(U))$ e $\varsigma \in L^{\infty}_{Loc}([0,\infty), L^p(U))$. Supomos que, para $\boldsymbol{F} = \nabla^{\perp} f$, é verdadeira a seguinte igualdade:*

$$\partial_t \varsigma + div\,(\boldsymbol{F}\varsigma) = 0 \text{ em } D'(U \times (0,\infty)).$$

Então, ς é um rearranjo no tempo q.s..

Para demonstrarmos a proposição acima, usamos os seguintes lemas auxiliares:

Lema 2.30 (Diperna e Lions 1989, Bouchut 2001)**.** *Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto e limitado, $1 < p < \infty$ e p' o expoente conjugado de p. Supomos que $\varsigma \in L^{\infty}((0,T), L^p(U))$, $\boldsymbol{F} \in L^1((0,T), (W^{1,p'}(U))^2)$, $div\,\boldsymbol{F} = 0$ e é verdadeira a seguinte igualdade:*

$$\partial_t \varsigma + div\,(\boldsymbol{F}\varsigma) = 0 \text{ em } D'(U \times (0,\infty)).$$

Então, $\forall\, g \in C^1_0(\mathbb{R})$, temos

$$\partial_t g(\varsigma) + div\,(\boldsymbol{F} g(\varsigma)) = 0 \text{ em } D'(U \times (0,\infty)).$$

A demonstração do lema acima é encontrada em [10]. Este lema pode ser visto como uma extensão de um caso particular da teoria de Diperna-Lions de [21] para domínios limitados. Como veremos, a aplicação deste resultado em nosso contexto somente é possível com a restrição $p \geq 2$.

Lema 2.31. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto, limitado e suave, $1 < p < \infty$, p' o expoente conjugado de p, $f \in L^{\infty}_{Loc}([0,\infty), W^{2,p}(U) \cap W^{1,p}_0(U))$, $\boldsymbol{F} = \nabla^{\perp} f$, $d(x) = dist(x, \partial U)$, $\epsilon > 0$ e $\sigma_{\epsilon}(x) = min\{1, \epsilon^{-1} d(x)\}$. Então, existem constantes $\epsilon_o > 0$ e $C > 0$, dependendo apenas de U e p, tais que se $0 < \epsilon < \epsilon_o$, então $\sigma_{\epsilon} \in W^{1,p'}_0(U)$ e é verdadeira a seguinte desigualdade:*

$$\int_U |\boldsymbol{F}(x,t).\nabla \sigma_{\epsilon}(x)| dx \leq C \epsilon^{\frac{1}{p'}} \|f\|_{L^{\infty}((0,T), W^{2,p}(U))}, \ \forall\, 0 \leq t \leq T.$$

A demonstração do lema acima pode ser encontrada em [17].

Demonstração da Proposição 2.29.

Como estamos no caso $p \geq 2$, temos que $p' \leq p$. Além disso, como U é limitado, temos a desigualdade

$$\|\mathbf{F}\|_{W^{1,p'}(U)} \leq C \|\mathbf{F}\|_{W^{1,p}(U)} = C \|\nabla^{\perp} f\|_{W^{1,p}(U)}.$$

Portanto, podemos aplicar o Lema 2.30. Então, para $g \in C_0^1(\mathbb{R})$ qualquer, temos que

$$\partial_t g(\varsigma) + div\,(\mathbf{F} g(\varsigma)) = 0 \text{ em } D'(U \times (0,\infty)).$$

Sejam $\sigma_\epsilon(x)$ como no Lema 2.31 e $(\sigma_\epsilon^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(U)$ uma sequência aproximante para $\sigma_\epsilon(x)$ em $W_0^{1,p'}(U)$. Então, para $\tau \in C_0^\infty(0,T)$, temos

$$\int_0^\infty \int_U \partial_t \tau(t) \sigma_\epsilon^n(x) g(\varsigma(x,t)) dxdt + \int_0^\infty \int_U \mathbf{F}(x,t) g(\varsigma(x,t)) \tau(t) \nabla \sigma_\epsilon^n(x) dxdt = 0.$$

Vamos aplicar o limite em n tendendo para infinito na equação acima. Com efeito, notamos que $\mathbf{F} \in L^\infty_{Loc}([0,\infty), L^p(U))$ e $g(\varsigma)$ é limitada. Então, por dualidade, temos as seguintes convergências:

$$\begin{cases} \int_U \sigma_\epsilon^n(x) g(\varsigma(x,t)) dx & \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} & \int_U \sigma_\epsilon(x) g(\varsigma(x,t)) dx, & \forall\, t > 0 \text{ q.s.}, \\ \int_U \mathbf{F}(x,t) g(\varsigma(x,t)) \nabla \sigma_\epsilon^n(x) dx & \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} & \int_U \mathbf{F}(x,t) g(\varsigma(x,t)) \nabla \sigma_\epsilon(x) dx, & \forall\, t > 0 \text{ q.s.}. \end{cases}$$

Além disso, existem constantes $C_i > 0$ tais que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $0 \le t \le T$, temos

$$\begin{cases} \left| \int_U \sigma_\epsilon^n(x) g(\varsigma(x,t)) dx \right| & \le & C_1 \|\sigma_\epsilon^n\|_{L^{p'}(\Omega_o)} < C_2, \\ \left| \int_U \mathbf{F}(x,t) g(\varsigma(x,t)) \nabla \sigma_\epsilon^n(x) dx \right| & \le & C_3 \|\nabla \sigma_\epsilon^n(x)\|_{L^{p'}(U)} \|\mathbf{F}(x,t)\|_{L^p(U)} < C_4, \end{cases}$$

Então, aplicando o Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$\int_0^\infty \int_U \partial_t \tau(t) \sigma_\epsilon(x) g(\varsigma(x,t)) dxdt + \int_0^\infty \int_U \mathbf{F}(x,t) g(\varsigma(x,t)) \tau(t) \nabla \sigma_\epsilon(x) dxdt = 0. \tag{2.2.18}$$

Agora, aplicando o Lema 2.31, temos que

$$\left| \int_0^\infty \tau(t) \int_U \mathbf{F}(x,t) g(\varsigma(x,t)) \nabla \sigma_\epsilon(x) dxdt \right| \le \int_0^T |\tau(t)| C_5 \epsilon^{\frac{1}{p'}} \|f\|_{L^\infty((0,T),W^{2,p}(\Omega_o))} dt \le C_6 \epsilon^{\frac{1}{p'}}.$$

Portanto, usando (2.2.18), obtemos a seguinte estimativa:

$$\left| \int_0^\infty \int_U \partial_t \tau(t) \sigma_\epsilon(x) g(\varsigma(x,t)) dxdt \right| \le C_6 \epsilon^{\frac{1}{p'}},$$

Como $\sigma_\epsilon \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \mathcal{X}_U$ ponto a ponto, então, usando novamente o Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\int_0^\infty \int_U \partial_t \tau(t) g(\varsigma(x,t)) dxdt = 0.$$

Observamos que $g \in C_0^1(\mathbb{R})$ e $\tau \in C_0^\infty(0,\infty)$ são escolhidas arbitrariamente no início da demonstração. Portanto, temos que a igualdade acima é verdadeira para quaisquer funções $g \in C_0^1(\mathbb{R})$ e $\tau \in C_0^\infty(0,\infty)$. Então, aplicando a Proposição 1.19, temos que ς é um rearranjo no tempo q.s..

■

2.2.3 Demonstração do Teorema de Existência de Soluções

Fixamos $\frac{4}{3} < p < \infty$ e $\xi_0 \in L^p(\Omega_o)$. Vamos demonstrar a existência de soluções para este dado inicial. Com efeito, usando molificadores, podemos considerar uma família de aproximação $(\xi_0^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\overline{\Omega}_o)$ tal que satisfaz as seguintes propriedades (veja [1]):

$$\begin{cases} \xi_0^n & \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} & \xi_0 \text{ em } L^p(\Omega_o), \\ \|\xi_0^n\|_{L^p(\Omega_o)} & \leq & \|\xi_0\|_{L^p(\Omega_o)}, \, \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Sejam $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty([0,\infty)\times\Omega_o)$ as soluções suaves para dados iniciais $\xi^n(0) = \xi_0^n$ como obtidas na Proposição 2.22. Pelo Lema 2.23, temos que $\|\xi^n(t)\|_{L^p(\Omega_o)} = \|\xi_0^n\|_{L^p(\Omega_o)}$. Logo, $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^\infty([0,\infty), L^p(\Omega_o))$. Agora, consideramos s tal que o par (p,s) satisfaz as hipóteses do Lema 2.28. Então, temos que

$$\|\partial_t \xi^n\|_{W^{-1,s}(\Omega_o)} = \|div\,(v^n\xi^n)\|_{W^{-1,s}(\Omega_o)} \leq \|\nabla G\| \|\xi^n\|^2_{L^p(\Omega_o)}.$$

Portanto, $(\partial_t\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty([0,\infty), W^{-1,s}(\Omega_o))$.

Aplicando o Teorema de Aubin-Lions, temos que a sequência $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é pré-compacta em $C([0,T], W^{-1,s}(\Omega_o))$, $\forall\, T > 0$. Portanto, usando o processo de diagonalização de Cantor, extraindo subsequências e reenumerando os índices se necessário, existe $\xi \in C([0,\infty), W^{-1,s}(\Omega_o))$ tal que

$$\xi^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi \text{ em } C([0,T], W^{-1,s}(\Omega_o)).$$

Como $(\xi^n)_{n\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $L^\infty([0,\infty), L^p(\Omega_o))$, pelo Corolário 2.25, temos que

$$\xi^n(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi(t) \text{ fraco em } L^p(\Omega_o), \ \forall\, t \geq 0. \tag{2.2.19}$$

Além disso, considerando também a compacidade da aplicação (2.2.11), obtemos

$$v^n(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} v(t) \text{ em } L^{p'}(\Omega_o), \ \forall\, t \geq 0. \tag{2.2.20}$$

Com as propriedades de convergência acima, vamos demonstrar que a função limite $\xi \in L^\infty([0,\infty), L^p(\Omega_o)) \bigcap C_w([0,\infty), L^p(\Omega_o))$ é uma solução do sistema (2.1.21) para a condição inicial ξ_0. De fato, seja $\phi \in C_0^\infty([0,\infty)\times\Omega_o)$. Pela suavidade da solução ξ^n, temos que

$$\int_{\Omega_o} \xi_0^n(x)\phi(x,0)dx + \int_0^\infty \int_{\Omega_o} \xi^n(x,t)\phi_t(x,t)dxdt + \int_0^\infty \int_{\Omega_o} \xi^n(x,t)v^n(x,t)\nabla\phi(x,t)dxdt = 0.$$

Vamos aplicar o limite na igualdade acima. Primeiro, usando dualidade, obtemos

$$\begin{cases} \int_{\Omega_o} \xi_0^n(x)\phi(x,0)dx & \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} & \int_{\Omega_o} \xi_0(x)\phi(x,0)dx, \\ \int_{\Omega_o} \xi^n(x,t)\phi_t(x,t)dx & \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} & \int_{\Omega_o} \xi(x,t)\phi_t(x,t)dx, \, \forall\, t \geq 0, \\ \int_{\Omega_o} \xi^n(x,t)v^n(x,t)\nabla\phi(x,t)dx & \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} & \int_{\Omega_o} \xi(x,t)v(x,t)\nabla\phi(x,t)dx, \, \forall\, t \geq 0. \end{cases}$$

Por outro lado, usando a imersão contínua (2.2.11), temos que

$$\|v^n\|_{L^{p'}(\Omega_o)} \leq C\|\xi^n\|_{L^p(\Omega_o)} \leq C\|\xi_0\|_{L^p(\Omega_o)}.$$

Então, aplicando o Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$\int_{\Omega_o} \xi_0(x)\phi(x,0)dx + \int_0^\infty \int_{\Omega_o} \xi(x,t)\phi_t(x,t)dxdt + \int_0^\infty \int_{\Omega_o} \xi(x,t)v(x,t)\nabla\phi(x,t)dxdt = 0.$$

Portanto, ξ é uma solução do sistema (2.1.21) com condição inicial ξ_0.

Agora, vamos demonstrar a conservação de $\mathcal{E}[\xi(t)]$ no tempo. De fato, usando a aplicação compacta (2.2.9) e a convergência $\xi^n(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi(t)$ fraca em $L^p(\Omega_o)$, temos que $G[\xi^n(t)] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} G[\xi(t)]$ forte em $L^{p'}(\Omega_o)$. Logo, por dualidade, temos

$$\mathcal{E}[\xi^n] = \frac{1}{2}\int_{\Omega_o} \xi^n(x)G[\xi^n](x)dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\int_{\Omega_o} \xi(x)G[\xi](x)dx = \mathcal{E}[\xi].$$

Usando a conservação de $\mathcal{E}[\xi^n]$ dada pelo Lema 2.23, temos a conservação de $\mathcal{E}[\xi]$ ao longo do tempo.

Seja $p \geq 2$. Usando a Proposição 2.29, temos que ξ é um rearranjo no tempo q.s.. Logo, existe um conjunto $\mathcal{I} \subset (0,\infty)$ com medida nula e tal que se t_1, $t_2 \in (0,\infty)/\mathcal{I}$, então $\xi(t_1)$ é um rearranjo de $\xi(t_2)$. Devemos mostrar que se $t \in (0,\infty)/\mathcal{I}$, então $\xi(t)$ é um rearranjo de ξ_0. Com efeito, seja $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)/\mathcal{I}$ tal que $t_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Como $\xi \in C_w([0,\infty), L^p(\Omega_o))$, temos que $\xi(t_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \xi_0$ fraco em $L^p(\Omega_o)$. Além disso, usando a convergência (2.2.19) e o item 1 do Lema 2.12, obtemos a seguinte estimativa:

$$\|\xi(t_k)\|_{L^p(\Omega_o)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|\xi^n(t_k)\|_{L^p(\Omega_o)} = \liminf_{n\to\infty} \|\xi_0^n\|_{L^p(\Omega_o)} \leq \|\xi_0\|_{L^p(\Omega_o)}.$$

Então, pelo o item 3 do Lema 2.12, temos que $\xi(t_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \xi_0$ em $L^p(\Omega_o)$. Portanto, usando o Corolário 1.18, temos que para todo $t \in (0,\infty)/\mathcal{I}$, $\xi(t)$ é um rearranjo de ξ_0.

∎

Capítulo 3

Soluções estacionárias e estabilidade não-linear para as equações de Euler helicoidais sem rodopio

Neste capítulo, temos como resultado principal a obtenção de algumas soluções estacionárias e estáveis (no sentido não-linear) para as equações de Euler helicoidais sem rodopio.

Como vimos no capítulo anterior, se um campo de velocidades em um domínio Ω é helicoidal e sem rodopio, então a vorticidade tem a forma $\omega = (x_2, -x_1, 1)\omega_3$. Além disso, como ω_3 é uma função escalar helicoidal, ela está completamente definida pela sua restrição ξ ao conjunto $\Omega_o = \Omega \cap \{x_3 = 0\}$. Ademais, ξ é solução do sistema (2.1.21). Portanto, temos que a estabilidade não-linear de ω no espaço periódico $L^p_{per\, x_3}(\Omega)$ e sob a perturbação de outras soluções helicoidais e sem rodopio para as equações de Euler, pode ser vista como a estabilidade não-linear de ξ em $L^p(\Omega_o)$ para o sistema (2.1.21). Utilizamos esta última formulação e obtemos existência de soluções estacionária e estáveis para (2.1.21).

Mais especificamente, neste capítulo temos os seguintes resultados: Para um domínio circular $\Omega_o = B_{\mathbb{R}^2}(0, R)$, mostramos que a função $\xi = \mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,1)}$ é uma solução estacionária de (2.1.21) e $L^1(\Omega_o)$-estável sob a perturbação de outros dados iniciais que igualmente são funções características. Ainda sob a condição de domínio circular, mostramos que dada $g \in L^p(0, R^2)$ monótona, a função definida por $\xi = g(|x|^2)$ é uma solução estacionária e $L^p(\Omega_o)$-estável. Para o caso de um domínio mais geral Ω_o aberto, limitado, suave e simplesmente conexo, mostramos que dada $f \in L^p(\Omega_o)$, o funcional energia $\mathcal{E}$ restrito à classe de rearranjos $\mathbf{R}$ de f (isto é, $\mathcal{E}|_{\mathbf{R}}$) atinge o supremo. Além disso, se uma função em $\mathbf{R}$ é um ponto de máximo deste funcional, então é também uma solução estacionária do sistema (2.1.21). Finalmente, se o supremo é atingido em um único ponto de $\mathbf{R}$, então esta solução estacionária é $L^p(\Omega_o)$-estável.

Estes resultados podem ser vistos como extensões dos Teoremas de Estabilidade de Wan e Pulvirenti ([51]) e de Burton ([17]), onde há afirmações semelhantes para o caso Euler bidimensional.

3.1 Soluções estacionárias para as equações de Euler helicoidais sem rodopio

Nesta seção, apresentamos um teorema de existência de soluções estacionárias para o sistema (2.1.21). A estabilidade destas soluções são estudadas nas próximas seções.

3.1.1 Enunciado do Teorema de Existência de Soluções Estacionárias

Temos como resultado principal desta seção o seguinte teorema:

Teorema 3.1 (Soluções estacionárias). *Let* $\frac{4}{3} < p < \infty$, $\Omega_o \subset \mathbb{R}^2$ *aberto, limitado, suave e simplesmente conexo,* $f \in L^p(\Omega_o)$ *e* $\mathbf{R}$ *o conjunto de todos os rearranjos de* f *em* Ω_o. *Munimos* $\mathbf{R}$ *com a topologia induzida de* $L^p(\Omega_o)$. *Então, são verdadeiras as seguintes afirmações:*

1. *O funcional energia (2.2.8) restrito à* $\mathbf{R}$ *(isto é,* $\mathcal{E} : \mathbf{R} \longmapsto \mathbb{R}$*) atinge o supremo. Além disso, se* $\xi \in \mathbf{R}$ *é um ponto de máximo, então* ξ *é uma solução estacionária do sistema (2.1.21);*

2. *Se* $\xi \in \mathbf{R}$ *é um ponto de máximo local de* $\mathcal{E} : \mathbf{R} \longmapsto \mathbb{R}$, *então* ξ *é uma solução estacionária do sistema (2.1.21);*

3. *Sejam* $R > 1$, $\Omega_o = B_{\mathbb{R}^2}(0, R)$ *e* $g \in L^p(0, R^2)$ *monótona. Então, para* $\xi = g(|\,.\,|^2)$, *temos que* $\xi \in L^p(\Omega_o)$ *e é uma solução estacionária do sistema (2.1.21).*

Seja ξ uma solução estacionária como em um dos itens do teorema acima. Lembremos que as extensões helicoidais de Ω_o e ξ são respectivamente $\Omega = \bigcup_{\rho \in \mathbb{R}} S_\rho(\Omega_o)$ e $\omega = (x_2, -x_1, 1)\omega_3$, com $\omega_3(x) = \xi(S_{-x_3}(x))$ e S dado em (2.1.1). Então, como vimos no capítulo anterior, ω é uma vorticidade estacionária para as equações de Euler no domínio helicoidal Ω. Em particular, decorre do item 3 que a função $\omega = (x_2, -x_1, 1)\mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,1) \times \mathbb{R}}$ é uma vorticidade estacionária para as equações de Euler no domínio $B_{\mathbb{R}^2}(0, R) \times \mathbb{R}$. A esta última chamamos de *vortex patch* helicoidal.

A demonstração do Teorema 3.1 é feita na subseção 3.1.3.

3.1.2 Resultados auxiliares

Nesta subseção, enunciamos alguns resultados auxiliares para a demonstração do Teorema 3.1. Começamos com o seguinte critério para obtermos soluções estacionárias:

Proposição 3.2. *Sejam* $\Omega_o \subset \mathbb{R}^2$ *aberto, limitado, suave e simplesmente conexo,* $\frac{4}{3} < p < \infty$, $\xi \in L^p(\Omega_o)$ *e* $\phi : \mathbb{R} \longmapsto \bar{\mathbb{R}}$ *monótona tais que* $\xi = \phi(G[\xi])$, *para* G *definido em (2.2.5). Então, para* $v = \nabla^\perp G[\xi]$, *temos que*

$$div\,(v\xi) = 0 \;\; em \;\; D'(\Omega_o).$$

Para a demonstração da proposição acima, usamos o seguinte lema:

Lema 3.3. *Se $f \in W^{1,1}_{loc}(U)$, então $\nabla f = 0$ q.s. em qualquer subconjunto de U tal que f é constante.*

A demonstração do lema acima pode ser encontrada em [32].

Demonstração da Proposição 3.2.

Usando truncamento e molificadores, podemos considerar uma sequência $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{R})$ que satisfaz as seguintes propriedades: (i) $|\phi_n(x)| \leq |\phi(x)|$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$; (ii) $\phi_n(s) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi(s)$ em todos os pontos s onde ϕ é contínua. Além disso, podemos supor também que $\phi_n(s) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi(s)$ em todos os pontos s tais que $\phi(s) = 0$. Com efeito, como ϕ é monótona, então $\phi^{-1}(0)$ é um intervalo. Seja $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções suaves tais que $0 \leq g_n \leq 1$, $g_n(s) = 0$ se $s \in \phi^{-1}(0)$ e n grande e $g_n(s) = 1$ se $s \notin \phi^{-1}(0)$ e n grande. Então, substituindo ϕ_n por $\phi_n g_n$ e renomeando as funções, obtemos esta última propriedade.

Como $div\, v = 0$ e ϕ_n é suave, usando as regras do produto e da cadeia (veja [29]), temos que

$$\begin{aligned} div\,\{v\phi_n(G[\xi])\} &= (div\, v)\phi_n(G[\xi]) + (v.\nabla)\phi_n(G[\xi]) \\ &= v.\{\phi_n'(G[\xi])\nabla G[\xi]\} = \nabla^\perp G[\xi].\{\phi_n'(G[\xi])\nabla G[\xi]\} \\ &= 0 \;\text{ em }\; D'(\Omega_o). \end{aligned}$$

Logo, obtemos a seguinte igualdade:

$$\int_{\Omega_o} \{v(x)\phi_n(G[\xi](x))\}.\nabla\rho(x)dx = 0,\; \forall\, \rho \in C_0^\infty(\Omega_o). \tag{3.1.1}$$

Vamos aplicar o limite em n na equação acima. Para isto, devemos verificar que estamos sob as hipóteses do Teorema da Convergência Dominada. De fato, usando a propriedade (i) para ϕ_n, temos que $|\phi_n(G[\xi])v| \leq |\phi(G[\xi])||v| = |\xi||v|$ q.s. em Ω_o. Além disso, como $v \in L^{p'}(\Omega_o)$ e $\xi \in L^p(\Omega_o)$, temos que $|\xi||v|$ é integrável.

Por outro lado, usando as outras propriedades listadas para ϕ_n e definindo o conjunto $A = \{s \in \mathbb{R};\, \phi \text{ não é contínua em s e } \phi(s) \neq 0\}$, temos que $\phi_n(G[\xi]) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi(G[\xi]) = \xi$ q.s. em $\Omega_o/(G[\xi])^{-1}(A)$. Precisamos mostrar que $(G[\xi])^{-1}(A)$ possui medida nula. Com efeito, como ϕ é monótona, temos primeiramente que A é contável.

Se $s \in A$, usando o Lema 3.3, temos a seguinte igualdade em $(G[\xi])^{-1}(s)$:

$$0 \neq \phi(G[\xi]) = \xi = -\mathcal{L}[\nabla G[\xi]] = 0 \;\text{ q.s. em }\; (G[\xi])^{-1}(s).$$

Logo, $(G[\xi])^{-1}(s)$ possui medida nula. Portanto, $(G[\xi])^{-1}(A)$ tem medida nula. Então, usando o Teorema da Convergência Dominada em (3.1.1), demonstramos o lema.

■

Precisamos também das seguintes propriedades para o operador G:

Lema 3.4. *Se $\frac{4}{3} < p < \infty$, então $G : L^p(\Omega_o) \longmapsto L^{p'}(\Omega_o)$ (definido em (2.2.5)) é um operador linear compacto, simétrico e estritamente positivo.*

Demonstração do Lema 3.4.

A compacidade já foi verificada no capítulo 2 usando as imersões de Rellich-Kondrakov. Temos que a matriz K dada em (2.1.20) é simétrica. Além disso, se $R > 0$ tal que $\Omega_o \subset B(0,R)$, então vimos também que

$$\frac{1}{1+R^2}|\iota|^2 \leq \iota^T K(x,y)\iota,\ \forall\, \iota \in \mathbb{R}^2,\ x,\ y \in \Omega_o.$$

Portanto, se $f,\ g \in L^p(\Omega_o)$ e $\langle .,. \rangle$ é o produto interno em $L^2(\Omega_o)$, usando integração por partes, temos

$$\begin{aligned}
\langle f, G[g] \rangle &= \langle -\mathcal{L}[\nabla G[f]], G[g] \rangle = \langle -div\,\{K\nabla G[f]\}, G[g] \rangle \\
&= \langle \nabla G[f], K\nabla G[g] \rangle = -\,\langle G[f], div\,\{K\nabla G[g]\} \rangle \\
&= \langle G[f], -\mathcal{L}(G[g]) \rangle = \langle G[f], g \rangle\,.
\end{aligned}$$

Logo, G é simétrico. Além disso, pela desigualdades de Sobolev e Poincaré (veja [29]), temos

$$\begin{aligned}
\langle g, G[g] \rangle &= \langle \nabla G[g], K\nabla G[g] \rangle \geq \frac{1}{1+R^2}\|\nabla G[g]\|^2_{L^2(\Omega_o)} \\
&\geq C\|G[g]\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega_o)} \geq C_1\|G[g]\|^2_{L^{p'}(\Omega_o)},
\end{aligned}$$

Então, $\langle g, G[g]) \rangle \geq 0$ e $\langle g, G[g] \rangle = 0$ se, e somente se, $g = 0$. Portanto, G é estritamente positivo.

■

Para a demonstração do item 3 do Teorema 3.1, precisamos do seguinte resultado:

Lema 3.5. *Se $\psi = \psi(|x|)$ é uma função escalar e $\mathcal{L}$ é o operador (2.1.20), então temos a seguinte fórmula em coordenadas polares:*

$$\mathcal{L}[\nabla\psi] = \partial_r\left(\frac{\partial_r\psi}{1+r^2}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial_r\psi}{1+r^2}\right). \tag{3.1.2}$$

Demonstração do Lema 3.5.

Seja $x_1 = r\cos\theta$ e $x_2 = r\sin\theta$. Então, temos que

$$\nabla\psi = \partial_r\psi(r)(\partial_{x_1}r, \partial_{x_2}r)^t = \partial_r\psi(r)(\cos\theta, \sin\theta)^t.$$

Por outro lado, em coordenadas polares, a matriz (2.1.20) tem a forma

$$K(\theta, r) \;=\; \frac{1}{1+r^2}\begin{bmatrix} 1+r^2\sin^2\theta & -r^2\cos\theta\sin\theta \\ -r^2\cos\theta\sin\theta & 1+r^2\cos^2\theta \end{bmatrix}.$$

Portanto, $K.\nabla\psi = \left(\dfrac{\partial_r\psi}{1+r^2}\right)(\cos\theta, \sin\theta)^t$. Então,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\nabla\psi] &= div\left\{K(\nabla\psi)\right\} = \partial_{x_1}\left(\frac{\partial_r\psi}{1+r^2}\cos\theta\right) + \partial_{x_2}\left(\frac{\partial_r\psi}{1+r^2}\sin\theta\right) \\
&= \partial_r\left(\frac{\partial_r\psi}{1+r^2}\right)((\partial_{x_1}r)\cos\theta + (\partial_{x_2}r)\sin\theta) + \left(\frac{\partial_r\psi}{1+r^2}\right)(\partial_{x_1}\cos\theta + \partial_{x_2}\sin\theta) \\
&= \partial_r\left(\frac{\partial_r\psi}{1+r^2}\right)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \left(\frac{\partial_r\psi}{1+r^2}\right)\left(\partial_{x_1}\left(\frac{x_1}{r}\right) + \partial_{x_2}\left(\frac{x_2}{r}\right)\right) \\
&= \partial_r\left(\frac{\partial_r\psi}{1+r^2}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial_r\psi}{1+r^2}\right).
\end{aligned}$$

Logo, obtemos o lema.

■

3.1.3 Demonstração do Teorema de Existência de Soluções Estacionárias

Seja $f \in L^p(\Omega_o)$ e $\mathbf{R}$ o conjunto de todos os rearranjos de f em Ω_o. Munimos $\mathbf{R}$ com a topologia induzida de $L^p(\Omega_o)$. Vamos demonstrar o item 1. Com efeito, usando as propriedades obtidas no Lema 3.4 para o operador G, temos que o funcional energia está sob as hipóteses do Teorema 1.26. Pontanto, $\mathcal{E} : \mathbf{R} \longmapsto \mathbb{R}$ atinge o supremo. Além disso, ainda como consequência do Teorema 1.26, se $\xi \in \mathbf{R}$ é um ponto de máximo, então $\xi = \phi(G[\xi])$ q.s., para alguma função ϕ monótona crescente. Usando a Proposição 3.2, obtemos que ξ é uma solução estacionária do sistema (2.1.21). Portanto, demonstramos o item 1.

De forma análoga, vamos demonstrar o item 2. Supomos que $\xi \in \mathbf{R}$ é um ponto de máximo local para $\mathcal{E} : \mathbf{R} \longmapsto \mathbb{R}$. Vamos demonstrar que $\xi = \phi(G[\xi])$ q.s., para alguma função ϕ monótona crescente.

Como $\xi \in \mathbf{R}$ é um ponto de máximo local para $\mathcal{E} : \mathbf{R} \longmapsto \mathbb{R}$, existe um conjunto aberto B de $L^p(\Omega_o)$ tal que ξ é um ponto de máximo do funcional energia em $\mathbf{R} \cap B$. Como $\mathbf{R}$ é metrizável com a topologia fraca (veja Proposição 1.23), L^p é uniformemente convexo e a norma $L^p(\Omega_o)$ das funções em $\mathbf{R}$ são constantes, temos que a topologia forte e fraca em $\mathbf{R}$ coincidem (veja Lema 2.12). Portanto, podemos considerar um aberto fraco U de $L^p(\Omega_o)$ tal que $U \cap \mathbf{R} = B \cap \mathbf{R}$.

Seja $\mathbf{M}$ o fecho fraco de $\mathbf{R}$ em $L^p(\Omega_o)$. Vamos mostrar primeiro que ξ é um ponto de máximo do funcional energia restrito ao domínio $U \cap \mathbf{M}$. De fato, seja $g \in U \cap \mathbf{M}$. Então, podemos considerar uma sequência $(g^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{R}$ tal que $g^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$ fraco em $L^p(\Omega_o)$. Como $\mathcal{E}$ é fracamente sequencialmente contínuo, $g^n \in U \cap \mathbf{R}$ para n grande e ξ é maximo de $\mathcal{E}$ em $U \cap \mathbf{R}$, temos que $\mathcal{E}[g] \leq \mathcal{E}[\xi]$. Portanto, ξ é máximo para $\mathcal{E}$ em $U \cap \mathbf{M}$.

Agora, como uma segunda etapa, vamos mostrar que ξ é um máximo estrito para o funcional

$$h \in \mathbf{M} \longmapsto \int_{\Omega_o} h(x)G[\xi](x)dx. \tag{3.1.3}$$

De fato, seja $h \in \mathbf{M}$ com $h \neq \xi$. Como $\mathbf{M}$ é convexo (veja Proposição 1.23), se $\lambda \in (0,1)$ é suficientemente pequeno, temos que $(1-\lambda)\xi + \lambda h \in U \cap \mathbf{M}$ e é verdadeira a desigualdade (usamos aqui que G é simétrico e estritamente positivo)

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}[\xi] &\geq \mathcal{E}[(1-\lambda)\xi + \lambda h] = \mathcal{E}[\xi] + \lambda \int_{\Omega_o} (h(x) - \xi(x)) G[\xi](x) dx + \lambda^2 \mathcal{E}[h - \xi] \\
&> \mathcal{E}[\xi] + \lambda \int_{\Omega_o} (h(x) - \xi(x)) G[\xi](x) dx.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\Omega_o} (h(x) - \xi(x)) G[\xi](x) dx < 0.$$

Logo, obtemos que ξ é um máximo estrito para o funcional (3.1.3).

Finalmente, aplicando o Teorema 1.24, temos que $\xi = \phi(G[\xi])$ q.s., para alguma função ϕ monótona crescente. Como antes, usando a Proposição 3.2, obtemos que ξ é uma solução estacionária do sistema (2.1.21). Portanto, demonstramos o item 2.

Vamos demonstrar o item 3. Sejam $\Omega_o = B_{\mathbb{R}^2}(0, R)$, $g \in L^p(0, R^2)$ monótona e $\xi \in L^p(\Omega_o)$ definida por $\xi = g(|x|^2)$. Vamos demonstrar primeiro que a velocidade $v = \nabla^{\perp} G[\xi]$ tem a seguinte forma:

$$v = -\frac{x^{\perp}(1 + |x|^2)}{2|x|^2} \int_0^{|x|^2} g(s) ds. \tag{3.1.4}$$

Usando coordenadas polares e o Lema 3.5, temos que se uma função escalar $\psi = \psi(r)$ satisfaz

$$\mathcal{L}[\nabla \psi(r)] = g(r^2),$$

então também satisfaz

$$\partial_r \left(r \frac{\partial_r \psi}{1 + r^2} \right) = r g(r^2).$$

Integrando a igualdade acima em r, obtemos

$$\partial_r \psi = \frac{1 + r^2}{r} \int_0^r s g(s^2) ds.$$

Como $\nabla G[\xi] = -\nabla \psi$, obtemos (3.1.4).

Agora, vamos mostrar que

$$div\,(v\xi) = 0 \text{ em } D'(B_{\mathbb{R}^2}(0, R)). \tag{3.1.5}$$

Consideramos $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ tal que $|g_n(x)| \leq |g(x)|$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, e $g_n(s) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(s)$ em todos os pontos s onde g é contínua. Como $div\, v = 0$, aplicando as regras do produto e da cadeia, temos

$$\begin{aligned}
div\,(v g_n(|x|^2)) &= (div\, v) g_n(|x|^2) + (v.\nabla) g_n(|x|^2) = (v.\nabla) g_n(|x|^2) \\
&= v.\{g_n'(|x|^2) \nabla\, |x|^2\} = 0 \text{ em } D'(\Omega_o).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\Omega_o} \{v(x)g_n(|x|^2)\}.\nabla\rho(x)dx = 0,\ \forall\, \rho \in C_0^\infty(\Omega_o).$$

Como $|g_n(|x|^2)v|\leq |g(|x|^2)||v|= |\xi||v|$ q.s. em Ω_o, $|\xi||v|$ é integrável (pois $v \in L^{p'}(\Omega_o)$ e $\xi \in L^{p'}(\Omega_o)$) e $g_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$ q.s., aplicando o Teorema da Convergência Dominada, obtemos que

$$\int_{\Omega_o} \{v(x)\xi(x)\}.\nabla\rho(x)dx = 0,\ \forall\, \rho \in C_0^\infty(\Omega_o).$$

Portanto, temos que ξ é uma solução estacionária do sistema (2.1.21).

■

3.2 Estabilidade L^1 para o *vortex patch* helicoidal

Nesta seção, mostramos que em um domínio circular, $\xi = \mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,1)}$ é uma solução $L^1(\Omega_o)$-estável de (2.1.21) sob a perturbação de outros dados iniciais que igualmente são funções características.

Este resultado pode ser visto como uma extensão do Teorema de Estabilidade de Wan e Pulvirenti para as equações de Euler helicoidais sem rodopio.

3.2.1 Enunciado do Teorema de Estabilidade

Temos como resultado principal desta seção o seguinte teorema:

Teorema 3.6 (Estabilidade para o *vortex patch* helicoidal)**.** *Sejam $R > 1$ e Ω_o o domínio $\Omega_o = B_{\mathbb{R}^2}(0,R)$. Então, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\Delta_0 \subset \Omega_o$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\xi_0 = \lambda\mathcal{X}_{\Delta_0}$, $\|\xi_0 - \mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,1)}\|_{L^1(\Omega_o)}< \delta$ e $\xi \in L^\infty([0,\infty), L^\infty(\Omega_o))$ é a solução do sistema (2.1.21) com condição inicial ξ_0, então $\|\xi(t) - \mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,1)}\|_{L^1(\Omega_o)}< \epsilon$, para todo $t \geq 0$.*

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio helicoidal e ω_3 uma função escalar helicoidal definida em Ω. Então, para ξ a redução por simetria de ω_3 ao conjunto $\Omega_o = \Omega \cap \{x_3 = 0\}$, procedendo como em (2.2.13), facilmente verificamos que

$$\|\omega_3\|_{L^p_{per\, x_3}(\Omega)}= (2\pi)^{\frac{1}{p}}\|\xi\|_{L^p(\Omega_o)}. \tag{3.2.1}$$

Então, para $\Omega = B_{\mathbb{R}^2}(0,R)\times\mathbb{R}$ o cilindro infinito, decorre do teorema acima que o *vortex patch* helicoidal $(x_2,-x_1,1)\mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,1)\times\mathbb{R}}$ é $L^1_{per\, x_3}(\Omega)$-estável para as equações de Euler sob a perturbação de outras vorticidades iniciais da forma $\lambda(x_2,-x_1,1)\mathcal{X}_\Delta$, com $\Delta \subset \Omega$ um conjunto helicoidal.

A demonstração do Teorema 3.6 é feita na subseção 3.2.3.

3.2.2 Resultados auxiliares

Para a demonstração do teorema anterior, precisamos de algumas integrais primeiras. A seguir, mostramos que as soluções do sistema (2.1.21) dadas pelo Teorema 2.21 conservam a massa e o momento de inércia ao longo do tempo:

Lema 3.7 (Conservação da massa e do momento de inércia). *Sejam $R > 1$, Ω_o o domínio $\Omega_o = B_{\mathbb{R}^2}(0, R)$, $p \geq 2$, $\xi_0 \in L^p(\Omega_o)$ e $\xi \in L^\infty([0, \infty), L^p(\Omega_o))$ a solução do sistema (2.1.21) dada pelo Teorema 2.21 com condição inicial ξ_0. Então, temos que*

$$\int_{B_{\mathbb{R}^2}(0,R)} \xi(x,t)dx \;=\; \int_{B_{\mathbb{R}^2}(0,R)} \xi_0(x)dx, \;\forall\, t \geq 0, \;\; q.s., \tag{3.2.2}$$

$$\int_{B_{\mathbb{R}^2}(0,R)} |x|^2\xi(x,t)dx \;=\; \int_{B_{\mathbb{R}^2}(0,R)} |x|^2\xi_0(x)dx, \;\forall\, t \geq 0 \;\; q.s.. \tag{3.2.3}$$

Demonstração do Lema 3.7.

Como as soluções do Teorema 2.21 são rearranjos no tempo da condição inicial q.s., temos que (3.2.2) segue de imediato da Proposição 1.16.

Vamos demonstrar (3.2.3). Lembremos que as soluções do Teorema 2.21 são obtidas como limite de sequências de soluções suaves. Mais precisamente, existe uma sequência de soluções suaves $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\xi^n(t) \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \xi(t)$ fraco em $L^p(\Omega_o)$. Portanto, aplicando o limite fraco, vemos que é suficiente demonstrarmos (3.2.3) para as soluções suaves.

Seja ξ uma solução suave para o sistema (2.1.21) e com condição inicial ξ_0. Definimos $\Omega = B_{\mathbb{R}^2}(0, R) \times \mathbb{R}$ o cilindro infinito. Consideramos u o campo suave de velocidades helicoidais sem rodopio que é solução para as equações de Euler 3-D em Ω e associado à vorticidade inicial reduzida ξ_0. Então são válidas as relações $rot\, u = \omega$, $\omega = (x_2, -x_1, 1)\omega_3$ e $\xi(x_1, x_2) = \omega_3(x_1, x_2, 0)$.

Para $\Omega(\pi) = \Omega \cap \{-\pi < x_3 < \pi\}$ e $x' = (x_1, x_2)$ e procedendo como em (2.2.13), temos a igualdade

$$\int_{\Omega(\pi)} |x'|^2\omega_3(x)dx \;=\; 2\pi \int_{\Omega_o} |x'|^2\xi(x')dx'. \tag{3.2.4}$$

Portanto, para obtermos (3.2.3), é suficiente demonstrarmos a seguinte propriedade:

$$\int_{\Omega(\pi)} |x'|^2\omega_3(x,t)dx = \int_{\Omega(\pi)} |x'|^2\omega_3(x,0)dx, \;\forall\, t \geq 0. \tag{3.2.5}$$

Vamos demonstrar a igualdade acima. Usando a equação (2.1.13), integração por parte e as propriedades de u, obtemos

$$\begin{aligned}
\partial_t \int_{\Omega(\pi)} |x'|^2\omega_3(x)dx \;&=\; -\int_{\Omega(\pi)} |x'|^2(u.\nabla)\omega_3 dx = 2\int_{\Omega(\pi)} (x_1u_1 + x_2u_2)\omega_3 dx \\
&=\; 2\int_{\Omega(\pi)} (x_1u_1 + x_2u_2)\left(\partial_{x_1}u_2 - \partial_{x_2}u_1\right) dx \\
&=\; 2\int_{\Omega(\pi)} \left(x_2u_2\partial_{x_1}u_2 - x_1u_1\partial_{x_2}u_1\right) dx \\
&+\; 2\int_{\Omega(\pi)} \left(x_1u_1\partial_{x_1}u_2 - x_2u_2\partial_{x_2}u_1\right) dx.
\end{aligned}$$

Definimos I_1 e I_2 como a penúltima e última integral acima respectivamente. Então, para $S = \{x \in \mathbb{R}^3;\ |x'|= R\} \cap \{-\pi < x_3 < \pi\}$, temos

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_S \left(x_2(u_2)^2 \frac{x_1}{|x'|} - x_1(u_1)^2 \frac{x_2}{|x'|} \right) dS(x), \\ I_2 &= 2\int_S \left(u_1 \frac{(x_1)^2}{|x'|} u_2 - u_2 \frac{(x_2)^2}{|x'|} u_1 \right) dS(x) + 2\int_{\Omega(\pi)} (-x_1 u_2 \partial_{x_1} u_1 + x_2 u_1 \partial_{x_2} u_2)\, dx. \end{aligned}$$

Seja J_2 a última integral acima. Então, usando a incompressibilidade para u, temos que

$$\begin{aligned} J_2 &= 2\int_{\Omega(\pi)} \{x_1 u_2 \left(\partial_{x_2} u_2 + \partial_{x_3} u_3\right) - x_2 u_1 (\partial_{x_1} u_1 + \partial_{x_3} u_3)\}\, dx \\ &= \int_S \left(x_1(u_2)^2 \frac{x_2}{|x'|} - x_2(u_1)^2 \frac{x_1}{|x'|} \right) dS(x) + 2\int_{\Omega(\pi)} (x_1 u_2 - x_2 u_1)\partial_{x_3} u_3 dx. \end{aligned}$$

Como u é periódica em x_3 e $u_3 = -x_2 u_1 + x_1 u_2$ (devido a ortogonalidade às hélices), obtemos que a última integral acima é nula.

Agora, usando os cálculos acima e a condição de contorno para u, temos

$$\partial_t \int_{\Omega(\pi)} |x'|^2 \omega_3(x,t) dx \;=\; 2\int_S \frac{1}{|x'|} (x_1 u_2 - x_2 u_1)(x_1 u_1 + x_2 u_2) dS(x) = 0.$$

Logo, (3.2.5) está demonstrado.

■

Aplicando a conservação da massa (3.2.2) e o fato que as soluções são rearranjos no tempo, temos que se $\Delta_0 \subset \Omega_o$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\xi_0 = \lambda \mathcal{X}_{\Delta_0}$ e $\xi \in L^\infty([0,\infty), L^\infty(\Omega_o))$ é a solução do sistema (2.1.21) com condição inicial ξ_0, então, para cada instante de tempo t, existe $\Delta_t \subset \Omega_o$ tal que $|\Delta_0|= |\Delta_t|$ e $\xi(t) = \lambda \mathcal{X}_{\Delta_t}$.

A seguir, temos uma estimativa para o momento de inércia de funções características. Esta desigualdade foi demonstrada originalmente em [51]. Para tornar o trabalho mais completo, apresentamos a sua demonstração.

Lema 3.8. *Sejam $R > 1$, Ω_o o domínio $\Omega_o = B_{\mathbb{R}^2}(0,R)$ e $\Delta_o \subset \Omega_o$ mensurável. Então, para $r \geq 0$ tal que $|B_{\mathbb{R}^2}(0,r)|= |\Delta_o|$, temos que*

$$\frac{1}{4\pi} \|\mathcal{X}_{\Delta_o} - \mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,r)}\|^2_{L^1(\Omega_o)} \leq \int_{\Delta_o} |x|^2 dx - \int_{B_{\mathbb{R}^2}(0,r)} |x|^2 dx \leq R^2 \|\mathcal{X}_{\Delta_o} - \mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,r)}\|_{L^1(\Omega_o)}.$$

Demonstração do Lema 3.8.

A estimativa do lado direito segue de imediato do fato de estarmos no domínio $\Omega_o = B_{\mathbb{R}^2}(0,R)$. Vamos demonstrar a estimativa do lado esquerdo. Com efeito, sejam $k \geq r$ números tais que

$|B_{\mathbb{R}^2}(0,k)/B_{\mathbb{R}^2}(0,r)|= |\Delta_o/B_{\mathbb{R}^2}(0,r)|$ e $0 \leq s \leq r$ tal que $|B_{\mathbb{R}^2}(0,r)/B_{\mathbb{R}^2}(0,s)|= |B_{\mathbb{R}^2}(0,r)/\Delta_o|$. Então, como $|\,.\,|^2$ é uma função circularmente simétrica e crescente com o raio, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta_o}|x|^2dx - \int_{B_{\mathbb{R}^2}(0,r)}|x|^2dx &= \int_{\Delta_o/B_{\mathbb{R}^2}(0,r)}|x|^2dx - \int_{B_{\mathbb{R}^2}(0,r)/\Delta_o}|x|^2dx \\
&\geq \int_{B_{\mathbb{R}^2}(0,k)/B_{\mathbb{R}^2}(0,r)}|x|^2dx - \int_{B_{\mathbb{R}^2}(0,r)/B_{\mathbb{R}^2}(0,s)}|x|^2dx \\
&= \frac{\pi}{2}(k^4+s^4-2r^4).
\end{aligned}$$

Por outro lado, como $|\Delta_o|= \pi r^2 = |B_{\mathbb{R}^2}(0,r)|$, temos que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{X}_{\Delta_o} - \mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,r)}\|_{L^1(\Omega_o)} &= \|\mathcal{X}_{\Delta_o/B_{\mathbb{R}^2}(0,r)}\|_{L^1(\Omega_o)} + \|\mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,r)/\Delta_o}\|_{L^1(\Omega_o)} \\
&= 2|\Delta_o/B_{\mathbb{R}^2}(0,r)|= 2|B_{\mathbb{R}^2}(0,r)/\Delta_o|.
\end{aligned}$$

Portando, usando a definição de k e s acima, facilmente verificamos que

$$k^4+s^4-2r^4 = \frac{1}{2\pi^2}\|\mathcal{X}_{\Delta_o} - \mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,r)}\|^2_{L^1(\Omega_o)}.$$

Logo, demonstramos o lema.

■

3.2.3 Demonstração do Teorema de Estabilidade

Fixamos $\epsilon > 0$ e consideramos $R > 0$ como no enunciado do teorema, isto é, $\Omega_o = B_{\mathbb{R}^2}(0,R)$. Então, escolhemos $0 < \delta < \pi$ pequeno suficiente para satisfazer a desigualdade

$$4R\sqrt{\pi\delta} + \delta < \epsilon. \tag{3.2.6}$$

Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\Delta_0 \subset \Omega_o$ tais que, para $\xi_0 = \lambda\mathcal{X}_{\Delta_0}$, temos

$$\|\xi_0 - \mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,1)}\|_{L^1(\Omega_o)} < \delta. \tag{3.2.7}$$

Seja $\xi \in L^\infty([0,\infty), L^\infty(\Omega_o))$ a solução do sistema (2.1.21) com a condição inicial ξ_0. Como vimos anteriormente, para cada instante de tempo t, existe um conjunto $\Delta_t \subset \Omega_o$ que satisfaz $|\Delta_0|= |\Delta_t|$ e $\xi(t) = \lambda\mathcal{X}_{\Delta_t}$.

Consideramos $r > 0$ tal que $|B_{\mathbb{R}^2}(0,r)|= |\Delta_0|$. Vamos obter a estabilidade via estimativas para os termos do lado direito da seguinte desigualdade:

$$\|\xi(t) - \mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,1)}\|_{L^1(\Omega_o)} \leq \|\xi(t) - \lambda\mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,r)}\|_{L^1(\Omega_o)} + \|\lambda\mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,r)} - \mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,1)}\|_{L^1(\Omega_o)}. \tag{3.2.8}$$

Começamos com a última norma acima. Com efeito, interpretando a integral como a noção volume e usando a igualdade $|B_{\mathbb{R}^2}(0,r)|= |\Delta_0|$, vemos facilmente que

$$\|\lambda\mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,r)} - \mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,1)}\|_{L^1(\Omega_o)} \leq \|\lambda\mathcal{X}_{\Delta_0} - \mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,1)}\|_{L^1(\Omega_o)}.$$

Portanto, pela hipótese (3.2.7) sobre a condição inicial $\xi_0 = \lambda \mathcal{X}_{\Delta_0}$, temos

$$\|\lambda \mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,r)} - \mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,1)}\|_{L^1(\Omega_o)} < \delta. \tag{3.2.9}$$

Além disso, como $\delta < \pi$, a desigualdade acima implica na restrição $0 < \lambda \leq 2$.

Agora, vamos estimar a penúltima norma de (3.2.8). De fato, usando o Lema 3.8, é verdadeira a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} \|\xi(t) - \lambda \mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,r)}\|^2_{L^1(\Omega_o)} &= \|\lambda \mathcal{X}_{\Delta_t} - \lambda \mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,r)}\|^2_{L^1(\Omega_o)} \\ &\leq 4\pi\lambda^2 \left(\int_{\Delta_t} |x|^2 dx - \int_{B_{\mathbb{R}^2}(0,r)} |x|^2 dx \right). \end{aligned}$$

Como as soluções conservam o momento de inércia ao longo do tempo (veja Lema 3.7), temos que

$$\int_{\Delta_t} |x|^2 dx = \int_{\Delta_0} |x|^2 dx, \ \forall\, t \geq 0.$$

Então, usando novamente o Lema 3.8, obtemos

$$\begin{aligned} \|\xi(t) - \lambda \mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,r)}\|^2_{L^1(\Omega_o)} &\leq 4\pi\lambda^2 \left(\int_{\Delta_0} |x|^2 dx - \int_{B_{\mathbb{R}^2}(0,r)} |x|^2 dx \right) \\ &\leq 4\pi\lambda^2 R^2 \|\mathcal{X}_{\Delta_0} - \mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,r)}\|_{L^1(\Omega_o)} \\ &\leq 8\pi R^2 \|\xi_0 - \lambda \mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,r)}\|_{L^1(\Omega_o)}. \end{aligned}$$

Finalmente, pelas estimativas (3.2.7) e (3.2.9), temos que

$$\begin{aligned} \|\xi_0 - \lambda \mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,r)}\|_{L^1(\Omega_o)} &\leq \|\xi_0 - \mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,1)}\|_{L^1(\Omega_o)} + \|\mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,1)} - \lambda \mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,r)}\|_{L^1(\Omega_o)} \\ &\leq 2\delta. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\xi(t) - \lambda \mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,r)}\|_{L^1(\Omega_o)} \leq 4R\sqrt{\pi\delta}. \tag{3.2.10}$$

Juntando as estimativas (3.2.6), (3.2.8), (3.2.9) e (3.2.10), obtemos

$$\|\xi(t) - \mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,1)}\|_{L^1(\Omega_o)} \leq 4R\sqrt{\pi\delta} + \delta < \epsilon, \ \forall\, t \geq 0.$$

Logo, concluimos a estabilidade como enunciado no teorema.

■

3.3 Estabilidade L^p para vorticidades helicoidais da forma $f(|x|^2)$

Nesta seção, mostramos que em um domínio circular $\Omega_o = B_{\mathbb{R}^2}(0, R)$, funções da forma $f(|x|^2)$, com $f \in L^p(0, R^2)$ e monótona, são soluções estáveis para o sistema (2.1.21).

3.3.1 Enunciado do Teorema de Estabilidade

Temos como resultado principal desta seção o seguinte teorema:

Teorema 3.9 (Estabilidade L^p para vorticidades helicoidais $f(|x|^2)$)**.** *Sejam $R > 1$, $\Omega_o = B_{\mathbb{R}^2}(0,R)$, $2 \leq p < \infty$ e $f \in L^p(0,R^2)$ monótona. Então, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que se $\xi(0) \in L^p(\Omega_o)$, $\|f(|\,.\,|^2) - \xi(0)\|_{L^p(\Omega_o)} \leq \delta$ e $\xi \in L^\infty([0,\infty), L^p(\Omega_o))$ é a solução do sistema (2.1.21) dada pelo Teorema 2.21 com condição inicial $\xi(0)$, temos que $\|f(|\,.\,|^2) - \xi(t)\|_{L^p(\Omega_o)} \leq \epsilon$, para todo $t \geq 0$.*

De forma análoga às observações feitas após o enunciado do Teorema 3.6 e para $\Omega = B_{\mathbb{R}^2}(0,R) \times \mathbb{R}$, podemos interpretar este resultado como a $L^p_{per\, x_3}(\Omega)$-estabilidade da vorticidade estacionária $(x_2, -x_1, 1) f(|x'|^2)$ sob a perturbação de outras vorticidades helicoidais.

Se escolhermos a função $f = \mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,1)}$, obtemos a $L^p(\Omega)$-estabilidade do *vortex patch* helicoidal $(x_2, -x_1, 1)\mathcal{X}_{B_{\mathbb{R}^2}(0,1)\times\mathbb{R}}$.

O Teorema 3.9 não é demonstrado para os casos $p = \infty$ e $\frac{4}{2} < p < 2$. O primeiro é devido a falta da convexidade uniforme para L^∞ e o segundo é devido a restrição técnica da teoria de Diperna-Lions que impede a verificação de que as soluções do Teorema 2.21 são rearranjos ao longo do tempo da condição inicial.

A demonstração do teorema acima é feita na subseção 3.3.3.

3.3.2 Resultados auxiliares

Na demonstração do Teorema 3.9, precisamos transportar a solução estacionária ao longo do campo de velocidades associado à perturbação. Neste caso, de forma semelhante ao Teorema 2.21, temos o seguinte resultado de existência de soluções:

Proposição 3.10. *Sejam $\Omega_o \subset \mathbb{R}^2$ aberto, limitado, suave e simplesmente conexo, $2 \leq p < \infty$ e $\xi \in L^\infty([0,\infty), L^p(\Omega_o))$ uma solução de (2.1.21) dada pelo Teorema 2.21. Então, para $v = \nabla^\perp G[\xi]$ e $\varsigma_0 \in L^p(\Omega_o)$, existe $\varsigma \in L^\infty([0,\infty), L^p(\Omega_o)) \bigcap C_w([0,\infty), L^p(\Omega_o))$ solução fraca do seguinte sistema:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\varsigma + div\,(v\varsigma) &= 0, \\ \varsigma(0) &= \varsigma_0. \end{cases} \tag{3.3.1}$$

Além disso, ς é um rearranjo no tempo q.s. de ς_0 e satisfaz a seguinte desigualdade:

$$\|\xi(t) - \varsigma(t)\|_{L^p(\Omega_o)} \leq \|\xi(0) - \varsigma_0\|_{L^p(\Omega_o)}, \ \forall\, t \geq 0. \tag{3.3.2}$$

Demonstração da Proposição 3.10.

Usando molificadores, podemos considerar uma família de aproximação $(\varsigma_0^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que satisfaz as seguintes propriedades: (i) $\varsigma_0^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varsigma_0$ em $L^p(\Omega_o)$; (ii) $\|\varsigma_0^n\|_{L^p(\Omega_o)} \leq \|\varsigma_0\|_{L^p(\Omega_o)}$.

Seja $\xi \in L^\infty([0,\infty), L^p(\Omega_o))$ uma solução do sistema (2.1.21) dada pelo Teorema 2.21. Então, como podemos observar na demonstração do Teorema 2.21, existe uma sequência $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de soluções suaves tais que $\xi^n(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi(t)$ fraco em $L^p(\Omega_o)$, $\|\xi^n(t)\|_{L^p(\Omega_o)} \leq \|\xi(0)\|_{L^p(\Omega_o)}$ e $v^n(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} v(t)$ em $L^{p'}(\Omega_o)$.

Consideramos o mapa Lagrangeano associado à v^n:

$$\begin{cases} \partial_t \sigma^n(x,t) &= v^n(\sigma^n(x,t),t), \\ \sigma^n(x,0) &= x. \end{cases}$$

Para cada $(x,t) \in \Omega_o \times [0,\infty)$, seja $y \in \Omega_o$ tal que $\sigma^n(y,t) = x$. Então, definimos a aplicação $\varsigma^n : \Omega_o \times [0,\infty) \longmapsto \mathbb{R}$ por $\varsigma^n(x,t) = \varsigma_0^n(y)$. Como $div\, v^n = 0$ e $\varsigma^n(\sigma^n(x,t),t) = \varsigma_0^n(x)$, obtemos que ς^n é uma solução suave para a seguinte equação:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\varsigma^n + div\,(v^n \varsigma^n) &= 0, \\ \varsigma^n(0) &= \varsigma_0^n. \end{cases} \tag{3.3.3}$$

Se procedermos exatamente como na demonstração do Teorema 2.21 para a sequência $(\varsigma^n)_{n\in\mathbb{N}}$, obtemos uma função $\varsigma \in L^\infty([0,\infty), L^p(\Omega_o)) \bigcap C_w([0,\infty), L^p(\Omega_o))$ tal que $\varsigma^n(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varsigma(t)$ fraco em $L^p(\Omega_o)$. Além disso, passando o limite na formulação fraca de (3.3.3), obtemos que ς é solução para o sistema (3.3.1). A demonstração de que ς é um rearranjo no tempo q.s. é novamente análoga a do Teorema 2.21.

Resta demonstrarmos a desigualdade (3.3.2). Com efeito, notemos que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\xi^n - \varsigma^n) + div\,\{v^n(\xi^n - \varsigma^n)\} &= 0, \\ \xi^n(0) - \varsigma^n(0) &= \xi_0^n - \varsigma_0^n. \end{cases}$$

Usando a suavidade e procedendo de forma análoga ao Lema 2.23, obtemos que $\|\xi^n(t) - \varsigma^n(t)\|_{L^p(\Omega_o)} = \|\xi_0^n - \varsigma_0^n\|_{L^p(\Omega_o)}$. Portanto, considerando as convergências fracas para $\xi^n(t)$ e $\varsigma^n(t)$ e as fortes para $\xi^n(0)$ e $\varsigma^n(0)$, podemos aplicar o limite neste igualdade e obtermos (3.3.2).

$\blacksquare$

Seja $\xi_0 \in L^p(\Omega_o)$ uma solução estacionária do sistema (2.1.21). Para uma perturbação $\xi \in L^\infty([0,\infty), L^p(\Omega_o))$ com condição inicial $\xi(0)$ e $v = \nabla^\perp G[\xi]$, consideramos a solução da equação

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\varsigma + div\,(v\varsigma) &= 0, \\ \varsigma(0) &= \xi_0. \end{cases} \tag{3.3.4}$$

Então, temos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} \|\xi(t) - \xi_0\|_{L^p(\Omega_o)} &\leq \|\xi(t) - \varsigma(t)\|_{L^p(\Omega_o)} + \|\varsigma(t) - \xi_0\|_{L^p(\Omega_o)} \\ &\leq \|\xi(0) - \xi_0\|_{L^p(\Omega_o)} + \|\varsigma(t) - \xi_0\|_{L^p(\Omega_o)}. \end{aligned}$$

Portanto, para obtermos estabilidade da solução estacionária ξ_0, é suficiente estimarmos o último termo da desigualdade acima.

No Teorema 3.9, consideramos a solução estacionária $\xi_0 = f(|\,.\,|^2)$. Então, a estratégia básica para a demonstração deste teorema consiste nas seguintes etapas: Primeiro, mostramos que ξ_0 é um ponto de máximo estrito do momento de inércia restrito ao fecho fraco em $L^p(\Omega_o)$ do conjunto dos rearranjos de ξ_0 em Ω_o. Em seguida, usando este fato e a conservação no tempo para o momento de inércia das soluções de (2.1.21), obtemos a estimativa desejada para o último termo da desigualdade acima.

Durante a segunda etapa, utilizamos o seguinte resultado, que também é utilizado por Burton em [17]:

Lema 3.11. *Sejam $\Omega_o \subset \mathbb{R}^n$, aberto e limitado, $1 < p < \infty$, $f \in L^p(\Omega_o)$, $\mathbf{R}$ o conjunto dos rearranjos de f e $\mathbf{M}$ o fecho fraco de $\mathbf{R}$ em $L^p(\Omega_o)$. Consideramos um funcional $J : \mathbf{M} \longmapsto \mathbb{R}$ fracamente sequencialmente contínuo em $L^p(\Omega_o)$. Supomos que existe $f^o \in \mathbf{R}$ ponto de máximo estrito deste funcional, isto é, supomos que*

$$J[g] < J[f^o], \ \forall\, g \in \mathbf{M} \text{ e } g \neq f^o.$$

Então, $\forall\, \delta > 0$, existe $\beta > 0$ tal que

$$sup\left\{J[g]\,;\ g \in \mathbf{M}\bigcap\left[B_{L^p(\Omega_o)}(f^o,\delta)\right]^c\right\} < J[f^o] - \beta. \tag{3.3.5}$$

Demonstração do Lema 3.11.

A demonstração deste resultado segue por contradição. Com efeito, supomos que não exista este β. Então, existe uma sequência de funções $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{M}\bigcap\left[B_{L^p(\Omega_o)}(f^o,\delta)\right]^c$ tal que $J[g_n] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} J[f^o]$. Usando o Teorema de Banach-Alaoglu e extraindo subsequência se necessário, podemos supor que existe $g^1 \in \mathbf{M}$ tal que $g_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g^1$ fraco em $L^p(\Omega_o)$.

Por outro lado, desde que J é um operador fracamente sequencialmente contínuo, temos que $J[g^1] = J[f^o]$. Como f^o é um ponto de máximo estrito para o funcional J, obtemos a igualdade $g^1 = f^o$.

Visto que $g_n \in \mathbf{M}$ e $f^o \in \mathbf{R}$, temos $\|g_n\|_{L^p(\Omega_o)} \leq \|f^o\|_{L^p(\Omega_o)} = \|g^1\|_{L^p(\Omega_o)}$. Portanto, usando a convexidade uniforme dos espaços $L^p(\Omega_o)$ e o Lema 2.12, temos que a convergência $g_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g^1$ é forte em $L^p(\Omega_o)$.

Como $\|g_n - g^1\|_{L^p(\Omega_o)} = \|g_n - f^o\|_{L^p(\Omega_o)} \geq \delta$, obtemos uma contradição. Logo, demonstramos a existência de β.

$\blacksquare$

3.3.3 Demonstração do Teorema de Estabilidade

Para facilitar a notação, definimos $\xi_0(x) = f(|x|^2)$ e $\Omega_o = B_{\mathbb{R}^2}(0,R)$. Seja $\mathbf{R}$ o conjunto dos rearranjos de ξ_0 e $\mathbf{M}$ o fecho fraco de $\mathbf{R}$ em $L^p(\Omega_o)$.

Se a função f é monótona crescente, consideramos o funcional $J : \mathbf{M} \longmapsto \mathbb{R}$ dado por

$$J[g] = \int_{\Omega_o} |x|^2 g(x) dx.$$

De forma análoga, se a função f é monótona decrescente, consideramos o funcional $J : \mathbf{M} \longmapsto \mathbb{R}$ dado por

$$J[g] = -\int_{\Omega_o} |x|^2 g(x) dx.$$

Aplicando o Teorema 1.24, temos que ξ_0 é um ponto máximo estrito para J em ambos os casos. Sejam $\epsilon > 0$ e $0 < \delta_1 < \frac{\epsilon}{2}$. Então, pelo Lema 3.11, existe $\beta > 0$ tal que

$$sup\left\{J[g]\,;\ g \in \mathbf{M}\bigcap\left[B_{L^p(\Omega_o)}(\xi_0, \delta_1)\right]^c\right\} < J[\varsigma_0] - \beta.$$

Como J é uniformemente contínuo, seja $0 < \delta < \delta_1$ tal que se $\|g_1 - g_2\|_{L^p(\Omega_o)} < \delta$, então $|J[g_1] - J[g_2]| < \frac{\beta}{2}$.

Seja $\xi \in L^\infty([0, \infty), L^p(\Omega_o))$ uma solução de (2.1.21) dada pelo Teorema 2.21 e tal que a condição inicial $\xi(0)$ satisfaz $\|\xi(0) - \xi_0\|_{L^p(\Omega_o)} < \delta$.

Para $v = \nabla^\perp G[\xi]$, usamos a Proposição 3.10 para considerar $\varsigma \in L^\infty([0, \infty), L^p(\Omega_o))$ solução da equação

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial}{\partial t}\varsigma + div\,(v\varsigma) & = & 0, \\ \varsigma(0) & = & \xi_0. \end{array}\right.$$

Então, temos a seguinte desigualdade:

$$\|\varsigma(t) - \xi(t)\|_{L^p(\Omega_o)} \leq \|\varsigma(0) - \xi(0)\|_{L^p(\Omega_o)} = \|\xi_0 - \xi(0)\|_{L^p(\Omega_o)} < \delta.$$

Desde que ξ é J-conservativo (veja Lema 3.7), usando a desigualdade acima e a continuidade uniforme de J, temos que

$$|J[\varsigma(t)] - J[\xi_0]| \leq |J[\varsigma(t)] - J[\xi(t)]| + |J[\xi(0)] - J[\xi_0]| \leq \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = \beta,\ \forall\, t \geq 0.$$

Logo,

$$J[\varsigma(t)] \geq J[\xi_0] - \beta,\ \forall\, t \geq 0.$$

Como $\varsigma(t) \in \mathbf{M}$, segue que $\varsigma(t) \notin \left[B_{L^p(\Omega_o)}(\xi_0, \delta_1)\right]^c$. Então, $\varsigma(t) \in B_{L^p(\Omega_o)}(\xi_0, \delta_1)$, $\forall\, t \geq 0$. Logo, concluimos que

$$\begin{array}{rcl} \|\xi(t) - \xi_0\|_{L^p(\Omega_o)} & \leq & \|\xi(t) - \varsigma(t)\|_{L^p(\Omega_o)} + \|\varsigma(t) - \xi_0\|_{L^p(\Omega_o)} \\ & \leq & \delta + \delta_1 \leq \epsilon,\ \forall\, t \geq 0. \end{array}$$

Portanto, obtemos a estabilidade.

■

3.4 Estabilidade L^p para pontos de máximo de energia sobre superfícies isovorticais helicoidais

Nesta seção, mostramos a L^p-estabilidade para pontos de máximo estrito do funcional energia sobre classes de rearranjos. Este resultado pode ser visto como uma extensão do Teorema de Estabilidade de Burton para as equações de Euler helicoidais sem rodopio.

3.4.1 Enunciado do Teorema de Estabilidade

Temos como resultado principal desta seção o seguinte teorema:

Teorema 3.12 (Soluções L^p-estáveis)**.** *Sejam $2 \leq p < \infty$, $\Omega_o \subset \mathbb{R}^2$ aberto, limitado, suave e simplesmente conexo, $f \in L^p(\Omega_o)$ e $\mathbf{R}$ o conjunto dos rearranjos de f em Ω_o. Se ξ_0 é um ponto de máximo estrito do funcional energia $\mathcal{E}$ definido em (2.2.8) e restrito à $\mathbf{R}$ (isto é, ponto de máximo estrito de $\mathcal{E}|_{\mathbf{R}}$), então ξ_0 é uma solução estacionária estável. Mais precisamente, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que se $\xi(0) \in L^p(\Omega_o)$, $\|\xi(0) - \xi_0\|_{L^p(\Omega_0)} < \delta$ e $\xi \in L^\infty([0,\infty), L^p(\Omega_o))$ é a solução do sistema (2.1.21) dada pelo Teorema 2.21 e com condição inicial $\xi(0)$, então temos que $\|\xi(t) - \xi_0\|_{L^p(\Omega_0)} < \epsilon$, para todo $t \geq 0$.*

De forma similar às observações feitas após o enunciado dos Teoremas 3.1 e 3.6, para $\Omega = \bigcup_{\rho\in\mathbb{R}} S_\rho(\Omega_o)$, $\omega_3 = \xi(S_{-x_3}x)$, $\omega = (x_2, -x_1, 1)\omega_3$ e S dado em (2.1.1), podemos interpretar este resultado como a $L^p_{per\, x_3}(\Omega)$-estabilidade da vorticidade ω sob a perturbação de outras vorticidades helicoidais.

3.4.2 Demonstração do Teorema de Estabilidade

Seja ξ_0 um ponto de máximo estrito de $\mathcal{E} : \mathbf{R} \longmapsto \mathbb{R}$. Definimos $\mathbf{M}$ como o fecho fraco de $\mathbf{R}$ em $L^p(\Omega_o)$. Primeiro, vamos mostrar que ξ_0 é um ponto de máximo estrito de $\mathcal{E} : \mathbf{M} \longmapsto \mathbb{R}$. Com efeito, como $\mathcal{E}$ é fracamente sequencialmente contínuo e $\mathbf{M}$ é fracamente sequencialmente compacto em $L^p(\Omega_o)$, temos que $\mathcal{E} : \mathbf{M} \longmapsto \mathbb{R}$ atinge o supremo. Seja $\xi_1 \in \mathbf{M}$ um ponto de máximo. Vamos mostrar que $\xi_1 = \xi_0$. Usando as observações feitas na seção 1.2, temos que existe $\xi_2 \in \mathbf{R}$ um ponto de máximo de

$$g \in \mathbf{M} \longmapsto \int_{\Omega_o} g(x)G[\xi_1](x)dx.$$

Supomos, por contradição, que $\xi_1 \notin \mathbf{R}$. Então, temos que $\xi_1 \neq \xi_2$. Logo, usando a simetria e a positividade estrita de G, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[\xi_2] &= \mathcal{E}[\xi_1] + \int_{\Omega_o} (\xi_2(x) - \xi_1(x))G[\xi_1](x)dx + \int_{\Omega_o} (\xi_2(x) - \xi_1(x))G[\xi_2 - \xi_1](x)dx \\ &> \mathcal{E}[\xi_1] + \int_{\Omega_o} (\xi_2(x) - \xi_1(x))G[\xi_1](x)dx \geq \mathcal{E}[\xi_0]. \end{aligned}$$

Como $\xi_2 \in \mathbf{R}$ e ξ_0 é um ponto de máximo estrito de $\mathcal{E}$ em $\mathbf{R}$, temos uma contradição. Então, $\xi_1 \in \mathbf{R}$ e consequentemente $\xi_1 = \xi_0$. Como conclusão, ξ_0 é ponto de máximo estrito de $\mathcal{E} : \mathbf{M} \longmapsto \mathbb{R}$.

Agora, vamos demonstrar a estabilidade de ξ_0. Sejam $\epsilon > 0$ e $0 < \delta_1 < \dfrac{\epsilon}{2}$. Então, pelo Lema 3.11, existe $\beta > 0$ tal que

$$sup\left\{\mathcal{E}[g]\,;\ g \in \mathbf{M}\bigcap\left[B_{L^p(\Omega_o)}(\xi_0,\delta_1)\right]^c\right\} < \mathcal{E}[\xi_0] - \beta.$$

Como $\mathcal{E}$ é uniformemente contínuo sobre conjuntos limitados, seja $0 < \delta < \min\{\delta_1, 1\}$ tal que se ξ_1, $\xi_2 \in B_{L^p(\Omega_o)}(0, \|\xi_0\|_{L^p(\Omega_o)}+1)$ e $\|\xi_1 - \xi_2\|_{L^p(\Omega_o)} < \delta$, então $|\mathcal{E}[\xi_1] - \mathcal{E}[\xi_2]| < \dfrac{\beta}{2}$.

Seja $\xi \in L^\infty([0,\infty), L^p(\Omega_o))$ uma solução de (2.1.21) dada pelo Teorema 2.21 e tal que $\|\xi(0) - \xi_0\|_{L^p(\Omega_o)} < \delta$.

Para $v = \nabla^\perp\xi$, usamos a Proposição 3.10 para considerar $\varsigma \in L^\infty([0,\infty), L^p(\Omega_o))$ a solução da equação

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial}{\partial t}\varsigma + div\,(v\varsigma) & = & 0, \\ \varsigma(0) & = & \xi_0. \end{array}\right.$$

Então, temos a seguinte desigualdade:

$$\|\varsigma(t) - \xi(t)\|_{L^p(\Omega_o)} \leq \|\varsigma(0) - \xi(0)\|_{L^p(\Omega_o)} = \|\xi_0 - \xi(0)\|_{L^p(\Omega_o)} < \delta.$$

Como ξ é $\mathcal{E}$-conservativo, usando a desigualdade acima juntamente com continuidade uniforme de $\mathcal{E}$ sobre conjuntos limitados e as estimativas $\|\varsigma(t)\|_{L^p(\Omega_o)} \leq \|\xi_0\|_{L^p(\Omega_o)}$, $\|\xi(t)\|_{L^p(\Omega_o)} \leq \|\xi(0)\|_{L^p(\Omega_o)} \leq \|\xi_0\|_{L^p(\Omega_o)}+1$, temos que

$$|\mathcal{E}[\varsigma(t)] - \mathcal{E}[\xi_0]| \leq |\mathcal{E}[\varsigma(t)] - \mathcal{E}[\xi(t)]| + |\mathcal{E}[\xi(0)] - \mathcal{E}[\xi_0]| \leq \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = \beta,\ \forall\, t \geq 0.$$

Logo,

$$\mathcal{E}[\varsigma(t)] \geq \mathcal{E}[\xi_0] - \beta,\ \forall\, t \geq 0.$$

Como $\varsigma(t) \in \mathbf{M}$, segue que $\varsigma(t) \notin \left[B_{L^p(\Omega_o)}(\xi_0,\delta_1)\right]^c$. Então, $\varsigma(t) \in B_{L^p(\Omega_o)}(\xi_0,\delta_1)$, $\forall\, t \geq 0$. Logo, concluimos que

$$\begin{array}{rcl} \|\xi(t) - \xi_0\|_{L^p(\Omega_o)} & \leq & \|\xi(t) - \varsigma(t)\|_{L^p(\Omega_o)} + \|\varsigma(t) - \xi_0\|_{L^p(\Omega_o)} \\ & \leq & \delta + \delta_1 \leq \epsilon,\ \forall\, t \geq 0. \end{array}$$

Portanto, obtemos a estabilidade.

$\blacksquare$

Capítulo 4

Soluções bidimensionais que não decaem no infinito

Neste capítulo, consideramos as equações de Euler 2-D no domínio $\mathbb{R}^2$ e lidamos com propriedades para dados iniciais que não decaem no infinito.

Devido à integrabilidade, os dados iniciais $\omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ abrangidos pelo clássico Teorema de Yudovich, em certo sentido, decaem no infinito. Vários outros teoremas de existência de soluções, como os encontrados em [7], [8], [31] e [45], também confinam as condições iniciais ω_0 em subconjuntos de $L^p(\mathbb{R}^2)$, para $p \neq \infty$. Estas restrições estão relacionadas com a lei de Biot-Savart, visto que a validade desta fórmula está condicionada à integrabilidade da vorticidade.

Por outro lado, soluções sem decaimento no infinito são fisicamente relevantes. Nesta direção, Serfati em [48] utilizou uma identidade alternativa para a lei de Biot-Savart e demonstrou a boa colocação das equações de Euler bidimensionais no espaço $\mathcal{S} = \{u \in (L^\infty(\mathbb{R}^2))^2;\ div\, u = 0 \text{ e } \omega \in L^\infty(\mathbb{R}^2)\}$.

Uma questão interessante e ainda pouco explorada neste tema é caracterizar os dados inicias abrangidos pelo Teorema de Serfati. Neste capítulo, mostramos que se $u \in \mathcal{S}$ e $\omega = \mathcal{X}_\Omega$, então Ω não pode conter bolas arbitrariamente grandes. Como consequência, temos que muitos *vortex patches* iniciais com área infinita não são contemplados pelo Teorema de Serfati.

Além disso, não são conhecidos exemplos explícitos de vorticidades iniciais em $\mathcal{S}$ que não estão em $L^p(\mathbb{R}^2)$ e não são periódicos. Neste capítulo, mostramos que, para $\Omega_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times (-1, 1)\}$, existe uma velocidade $u \in \mathcal{S}$ tal que $\omega = \mathcal{X}_{\Omega_1}$.

Dado $\mathcal{X}_\Omega$ uma vorticidade inicial de Serfati, uma questão que naturalmente surge é saber se para todo $\Omega^* \subset \Omega$, $\mathcal{X}_{\Omega^*}$ é também de Serfati. Afirmamos que a resposta é negativa usando o exemplo acima e demonstrando que, para $\Omega_0 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2) \in (0, \infty) \times (-1, 1)\}$, não existe uma velocidade u em $\mathcal{S}$ tal que $\omega = \mathcal{X}_{\Omega_0}$.

Durante o desenvolvimento deste trabalho, procuramos por uma família de *vortex patches* iniciais de Serfati com área infinita. Conjecturamos que, para $-1 \leq \beta < 0$ e $\Omega_\beta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 1 \text{ e } 0 < y < x^\beta\}$, $\mathcal{X}_{\Omega_\beta}$ poderia ser esta família. Porém, não conseguimos comprovar a conjectura e nem refutar. Apesar disto, mostramos que há um decaimento suficiente em $\mathcal{X}_{\Omega_\beta}$ para a lei de Biot-Savart estar bem definida. Portanto, demonstramos que estes *vortex patches* iniciais são abrangidos pelo Teorema de Existência de Brunelli.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: Na primeira seção, definimos soluções de Brunelli como em [14] e demonstramos que as funções características $\mathcal{X}_{\Omega_\beta}$ acima são dados iniciais de Brunelli com área infinita. Na segunda seção, definimos soluções de Serfati como em [2], demonstramos que $\mathcal{X}_{\Omega_1}$ é dado inicial de Serfati e que $\mathcal{X}_{\Omega_0}$ não é dado inicial de Serfati. Em seguida, mostramos que se $\mathcal{X}_{\Omega}$ é dado inicial de Serfati, então Ω não pode conter bolas arbitrariamente grandes.

4.1 Soluções de Brunelli

Nesta seção, tratamos as soluções de Brunelli para as equações de Euler bidimensionais. Mais especificamente, primeiro enunciamos alguns resultados que fornecem condições para lei de Biot-Savart estar bem definida. Em seguida, apresentamos o Teorema de Existência de Soluções de Brunelli. Finalmente, mostramos que se $-1 \leq \beta < 0$, então o *vortex patch* do conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 1 \text{ e } 0 < y < x^\beta\}$ é dado inicial de Brunelli com área infinita.

Soluções bidimensionais e a lei de Biot-Savart

Lembremos da subseção 1.1.2 que a formulação para as equações de Euler bidimensionais em termos da vorticidade é reduzida à seguinte equação do transporte escalar:

$$\frac{d}{dt}\omega + (u.\nabla)\omega \quad = \quad 0. \tag{4.1.1}$$

Além disso, com a notação $rot\, u = \dfrac{\partial}{\partial x_1}u_2 - \dfrac{\partial}{\partial x_2}u_1$, temos o acoplamento

$$\begin{cases} rot\, u & = & \omega, \\ div\, u & = & 0. \end{cases} \tag{4.1.2}$$

No caso em que ω e u decaem quando $|x|\to \infty$, temos o seguinte resultado de inversão do sistema acima:

Proposição 4.1 (Lei de Biot-Savart em $\mathbb{R}^2$)**.** *Sejam $1 < q < 2 < p < \infty$ tais que $q^{-1} = p^{-1} + 2^{-1}$ e $\omega \in L^q(\mathbb{R}^2)$. Definimos K e u por*

$$\begin{cases} K(x) & = & -\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{x^\perp}{|x|^2}, \\ \\ u(x) & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} K(x-y)\omega(y)dy. \end{cases} \tag{4.1.3}$$

Então, $u \in (L^p(\mathbb{R}^2))^2$ e é a única solução de (4.1.2) em $(L^p(\mathbb{R}^2))^2$. Além disso, temos a seguinte estimativa:

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C\|K\|_{L^{2,\infty}(\mathbb{R}^2)}\|\omega\|_{L^q(\mathbb{R}^2)},$$

para C uma constante positiva, independente de ω e u, e $\|K\|_{L^{2,\infty}(\mathbb{R}^2)} = \sup\limits_{\lambda>0} \lambda|\{x \in \mathbb{R}^2;\ |K(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{2}} < \infty$.

A demonstração da proposição acima pode ser encontrada em [31].

No Teorema de Yudovich é usado a lei de Biot-Savart (4.1.3) para demonstrar existência e unicidade de soluções globais no tempo da equação (4.1.1) e com vorticidade inicial $\omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ (veja [45] e [52]). Em [7], encontramos existência de soluções (sem unicidade) com vorticidade inicial $\omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^q(\mathbb{R}^2)$ e $2 < q < \infty$.

Se $1 < q < \dfrac{4}{3}$ e $\omega \in L^q(\mathbb{R}^2)$, então não temos garantia que ωu é localmente integrável. Portanto, a noção usual de soluções fracas para (4.1.1) não é aplicável. No entanto, Giga, Miyakawa e Osada em [31] usaram as equações da velocidade (1.1.9) e demostraram existência de soluções globais no tempo com vorticidade inicial $\omega_0 \in L^q(\mathbb{R}^2)$ e $1 < q < 2$.

Um questão natural que surge é saber quais as hipóteses mínimas para a lei de Biot-Savart permanecer válida. Em [14], é demonstrado o seguinte resultado:

Proposição 4.2. *Seja $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\omega(y)|}{|y|} dy < \infty. \tag{4.1.4}$$

Então, (4.1.3) está bem definida no sentido de convergência absoluta. Analogamente, se a integral (4.1.3) está bem definida no sentido de convergência absoluta, então a integral (4.1.4) é finita.

Soluções de Brunelli

Se aplicarmos o Lema 1.3 em um campo de velocidades suaves, obtemos que o mapa Lagrangeano

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} X(x,t) &=& u(X(x,t),t), \\ X(0,x) &=& x, \end{cases} \tag{4.1.5}$$

é um fluxo que preserva medida. Além disso, a vorticidade tem a seguinte dinâmica:

$$\omega(X(x,t),t) = \omega(x,0). \tag{4.1.6}$$

Podemos definir uma noção de solução como uma tripla (u, ω, X) que satisfaz (4.1.3), (4.1.5), (4.1.6) e tal que $X(.,t) : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ preserva a medida. Usando esta noção, em [14] temos o seguinte teorema de existência e unicidade de soluções:

Teorema 4.3 (Brunelli 2010)**.** *Seja $\omega_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que a integral (4.1.4) é finita. Então, existe uma única solução (u, ω, X) com condição inicial $\omega(0) = \omega_0$ e tal que*

$$\frac{u(\,.\,,t)}{1+|\,.\,|^{\frac{1}{2}}} \in L^\infty(\mathbb{R}^2) \quad e \quad \omega(t) \in L^\infty(\mathbb{R}^2), \forall\, t \geq 0.$$

Notemos que os resultados sobre existência de soluções enunciados anteriormente produzem algum tipo de decaimento sobre a velocidade quando $|x|$ tende ao infinito (pois $u \in L^p(\mathbb{R}^2)$). Já no teorema acima, a velocidade não tem necessariamente um decaimento no infinito.

Exemplos de dados iniciais de Brunelli

A seguir, apresentamos uma família de exemplos de *vortex patches* iniciais que satisfazem as hipóteses do Teorema de Existência de Brunelli, mas não satisfazem as hipóteses dos resultados de existência expostos anteriormente, isto é, estas vorticidades iniciais não estão contidas em $L^q(\mathbb{R}^2)$, para todo $1 \leq q < \infty$.

Proposição 4.4. *Sejam $-1 \leq \beta < 0$, $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_1 > 1 \text{ e } 0 < x_2 < x_1^\beta\}$ e $\omega_0 = \mathcal{X}_\Omega$. Então, temos que ω_0 satisfaz as hipóteses do Teorema 4.3, isto é*

$$\omega_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^2) \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\omega_0(y)|}{|y|} dy < \infty. \tag{4.1.7}$$

Por outro lado, temos que

$$\omega_0 \notin L^q(\mathbb{R}^2),\ \forall\, 1 \leq q < \infty. \tag{4.1.8}$$

Demonstração da Proposição 4.4.

Começamos calculando a integral em (4.1.7). Com efeito,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\omega_0(y)|}{|y|} dy &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\mathcal{X}_\Omega(y)|}{|y|} dy = \int_1^\infty \int_0^{y_1^\beta} \frac{1}{(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{1}{2}}} dy_2 dy_1 \\
&= \int_1^\infty \left\{ ln[y_2 + (y_1^2 + y_2^2)^{\frac{1}{2}}] \right\}_{y_2=0}^{y_2=y_1^\beta} dy_1 \\
&= \int_1^\infty \left\{ ln[y_1^\beta + (y_1^2 + y_1^{2\beta})^{\frac{1}{2}}] - ln[y_1] \right\} dy_1 \\
&= \int_1^\infty ln[y_1^{\beta-1} + (1 + y_1^{2(\beta-1)})^{\frac{1}{2}}] dy_1.
\end{aligned}$$

Vamos demonstrar que

$$ln[t + (1+t^2)^{\frac{1}{2}}] \leq 2t,\ \forall\, t \geq 0. \tag{4.1.9}$$

De fato, seja $f(t) = 2t - ln[t + (1+t^2)^{\frac{1}{2}}]$. Então, $f(0) = 0$ e

$$\frac{d}{dt} f(t) = 2 - \frac{1}{t + (1+t^2)^{\frac{1}{2}}} . \left(1 + \frac{t}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \geq 0,\ \forall\, t \geq 0.$$

Portanto, obtemos (4.1.9).

Fazendo $t = y_1^{\beta-1}$ e voltando na integral, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\omega_0(y)|}{|y|} dy &= \int_1^\infty ln[y_1^{\beta-1} + (1 + y_1^{2(\beta-1)})^{\frac{1}{2}}] dy_1 \leq \int_1^\infty 2 y_1^{\beta-1} dy_1 \\
&= \left\{ \frac{2}{\beta} y_1^\beta \right\}_{y_1=1}^{y_1=\infty} = -\frac{2}{\beta} < \infty.
\end{aligned}$$

Como claramente $\omega_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, obtemos (4.1.7).

Agora, para $-1 < \beta < 0$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\omega_0(y)|^p dy = \int_1^\infty \int_0^{y_1^\beta} dy_2 dy_1 = \int_1^\infty y_1^\beta dy_1 = \left\{ \frac{1}{\beta+1} y_1^{\beta+1} \right\}_{y_1=1}^{y_1=\infty} = \infty.$$

Analogamente, se $\beta = -1$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\omega_0(y)|^p dy = \int_1^\infty y_1^{-1} dy_1 = \{ln[y_1]\}_{y_1=1}^{y_1=\infty} = \infty.$$

Portanto, obtemos (4.1.8).

■

4.2 Soluções de Serfati

Nesta seção, tratamos as soluções de Serfati para as equações de Euler bidimensionais. Mais especificamente, primeiro enunciamos o Teorema de Existência e Unicidade de Soluções de Serfati. Em seguida, demonstramos algumas propriedades para os *vortex patches* iniciais abrangidos por este teorema. De fato, para $\Omega_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times (-1, 1)\}$ e $\Omega_0 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\, (x_1, x_2) \in (0, \infty) \times (-1, 1)\}$, mostramos que $\mathcal{X}_{\Omega_1}$ é dado inicial de Serfati e que $\mathcal{X}_{\Omega_0}$ não é dado inicial de Serfati. Além disso, demonstramos que se $\mathcal{X}_\Omega$ é dado inicial de Serfati, então Ω não pode conter bolas arbitrariamente grandes.

Identidade de Serfati

Nos teoremas de existência de soluções enunciados na seção anterior, é exigido condições de integrabilidade sobre a vorticidade inicial. Além disso, nas demonstrações destes resultados, a lei de Biot-Savart (4.1.3) é essencial para algumas estimativas (veja [41] e [45] para maiores detalhes).

Por outro lado, do ponto de vista físico, as vorticidades em escoamentos pouco viscosos tendem a ser geradas perto da fronteira (veja [2] e [41] para maiores detalhes). Levando em conta que os modelos com o domínio $\mathbb{R}^2$ podem ser vistos como aproximações para fluxos longe da margem delimitadora, temos que dados iniciais que não decaem no infinito são fisicamente relevantes.

Nesta direção, Serfati em [48] demonstrou a boa colocação das equações de Euler bidimensionais no espaço $\mathcal{S} = \{u \in (L^\infty(\mathbb{R}^2))^2;\ div\, u = 0\ \text{ e } \omega \in L^\infty(\mathbb{R}^2)\}$. Na demonstração, Serfati utilizou uma identidade alternativa para a lei de Biot-Savart.

A seguir, apresentamos esta identidade como feito [2]. De fato, seja $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $0 \le a \le 1$ e a é identicamente unitária numa vizinhança da origem. Então, para $a_\epsilon(\,.\,) = a\left(\frac{\cdot}{\epsilon}\right)$ e ω uma solução suave da equação da vorticidade, reescrevemos (4.1.3) na seguinte forma:

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^2} a_\epsilon(x-y) K(x-y) \omega(y) dy + \int_{\mathbb{R}^2} \{1 - a_\epsilon(x-y)\} K(x-y) \omega(y) dy. \tag{4.2.1}$$

A primeira integral acima é finita se $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$. No entanto, a segunda integral pode não estar bem definida neste caso. Portanto, necessitamos modificar a expressão. Derivando (4.2.1) no tempo, temos

$$\begin{aligned} \partial_t u_i(x) &= \partial_t \int_{\mathbb{R}^2} a_\epsilon(x-y) K_i(x-y)\omega(y)dy \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2} \{1 - a_\epsilon(x-y)\} K_i(x-y)\partial_t \omega(y)dy, \quad i = 1,\, 2. \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Por outro lado, usando integrações por partes e algebrismos, é possível obter a seguinte igualdade para o último termo acima (veja [2] para detalhes):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \{1 - a_\epsilon(x-y)\} K_i(x-y)\partial_t \omega \, dy &= -\int_{\mathbb{R}^2} \{1 - a_\epsilon(x-y)\} K_i(x-y)\{(u.\nabla)\omega\}dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (u.\nabla) \left\{\nabla^\perp \{[1 - a_\epsilon(x-y)] K_i(x-y)\}\right\}.u \, dy. \end{aligned}$$

Então, substituindo a expressão acima em (4.2.2) e integrando em t, temos a identidade de Serfati:

$$\begin{aligned} u_i(x,t) &= u_i(x,0) + \int_{\mathbb{R}^2} a_\epsilon(x-y) K_i(x-y) \{\omega(y,t) - \omega(y,0)\}\, dy \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} (u(y,s).\nabla) \left\{\nabla^\perp \{[1 - a_\epsilon(x-y)] K_i(x-y)\}\right\}.u(y,s)dyds. \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

O seguinte resultado garante que esta identidade está bem definida em $\mathcal{S}$:

Proposição 4.5. *Para $i = 1, 2$, temos que $\nabla\{\nabla^\perp \{[1 - a_\epsilon] K_i\}\}$, $a_\epsilon K_i \in L^1(\mathbb{R}^2)$ e existe uma constante $C > 0$, independente de ϵ, tal que são verdadeiras as seguintes desigualdades:*

$$\begin{aligned} \|\nabla\{\nabla^\perp \{[1 - a_\epsilon] K_i\}\}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} &\leq \frac{C}{\epsilon}, \\ \|a_\epsilon K_i\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} &\leq C\epsilon. \end{aligned}$$

A demonstração da proposição acima pode ser encontrada em [2].

Se usarmos a conservação da norma $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ para a vorticidade, a proposição acima e escolhermos $\epsilon = \left(\int_0^t \|u(s)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} ds\right)^{\frac{1}{2}}$, obtemos

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \|u(0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} + C \left(\int_0^t \|u(s)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Aplicando o Lema de Gronwall na desigualdade acima, temos a estimativa

$$\|u(t)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \|u(0)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \left(1 + Cte^{ct}\right). \tag{4.2.4}$$

Soluções de Serfati

A seguir, apresentamos a definição de uma solução de Serfati como em [2]:

Definição 4.6 (Soluções de Serfati)**.** *Sejam* $\mathcal{S} = \{u \in (L^\infty(\mathbb{R}^2))^2;\ div\, u = 0 \text{ e } \omega = rot\, u \in L^\infty(\mathbb{R}^2)\}$ *munido com a norma* $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} + \|\omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$ *e* $u^o \in \mathcal{S}$*. Dizemos que* $u \in L^\infty([0,T],\mathcal{S})$ *é uma solução de Serfati para as equações de Euler bidimensionais (1.1.9) e com dado inicial* u^o*, se temos as seguintes condições:*

1. $\forall\, \nu \in C_0^\infty((0,T);\mathcal{V})$*, temos que*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial}{\partial t}\nu.u + (u.\nabla\nu).u \right) dxdt = 0,$$

   para $\mathcal{V} = \{\nu \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2);\ div\, \nu = 0\}$*;*

2. *Para cada função de corte* $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ *radialmente simétrica, tal que* $0 \leq a \leq 1$ *e a é identicamente unitária numa vizinhança da origem,* $\omega = rot\, u$ *e* $\omega^o = rot\, u^o$*, temos*

$$\begin{aligned} u_i(x,t) &= u_i^o(x) + \int_{\mathbb{R}^2} a(x-y)K_i(x-y)\left(\omega(y,t) - \omega^o(y)\right) dy \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} (u(y,s).\nabla)\left\{\nabla^\perp\{[1-a(x-y)]K_i(x-y)\}\right\}.u(y,s)dyds, \end{aligned}$$

   com $i = 1,2$*;*

3. *Existe um fluxo* $X : \mathbb{R}^2 \times (0,T) \longmapsto \mathbb{R}^2$ *que preserva a medida e tal que*

$$\omega_3(X(x,t),t) = \omega^o(x).$$

Usando as estimativas obtidas pela identidade de Serfati, temos o seguinte resultado de existência e unicidade de soluções para as equações de Euler bidimensionais:

Teorema 4.7 (Serfati 1995)**.** *Seja* $u^o \in \mathcal{S}$*. Então, existe uma única solução de Serfati globalmente definida no tempo e com dado inicial* u^o*.*

Este teorema é feito originalmente em [48]. Ambrose *et al.* em [2] apresentaram uma demonstração mais completa e compreensível. Além disso, estenderam o teorema para domínios exteriores. Taniuchi em [49] melhorou o resultado de existência de soluções para dados iniciais em $\{u \in (L^\infty(\mathbb{R}^2))^2;\ div\, u = 0 \text{ e } \omega \in \mathbf{bmo}\}$.

Dados iniciais de Serfati

Uma questão interessante e em aberto é caracterizar as vorticidades iniciais de Serfati. Seja $1 \leq q < 2$ e $\omega_0 \in L^q(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Então, para u_0 dado pela lei de Biot-Savart (4.1.3), temos que

$u_0 \in \mathcal{S}$. De fato, usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} |u_0(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^2} K(x-y)\omega_0(y)dy\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{B(x,1)} \frac{1}{|x-y|}|\omega_0(y)|dy \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{B(x,1)^c} \frac{1}{|x-y|}|\omega_0(y)|dy \\ &\leq \|\omega_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{q'-2}\right)^{(q')^{-1}} \|\omega_0\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

Em particular, os dados iniciais abrangidos pelo Teorema de Yudovich também são abrangidos pelo Teorema de Serfati.

Ainda não são conhecidos exemplos explícitos de vorticidades iniciais em $\mathcal{S}$ que não estão em $L^p(\mathbb{R}^2)$ e não são periódicos. A seguir, apresentamos um exemplo de um *vortex patch* inicial de Serfati com área infinita:

Proposição 4.8. *Sejam* $\Omega_1 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}\times(-1,1)\}$ *e* $u = (u_1, 0)$ *dado por*

$$u_1(x_1,x_2) = \begin{cases} 2 & se \quad x_2 \leq -1, \\ 1 - x_2 & se \quad -1 < x_2 < 1, \\ 0 & se \quad x_2 \geq 1. \end{cases}$$

Então, $u \in \mathcal{S}$ *e* $\omega = \mathcal{X}_{\Omega_1}$.

Demonstração da Proposição 4.8.

Claramente temos que $div\, u = 0$, $rot\, u = \mathcal{X}_{\Omega_1}$ e $u \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Logo, obtemos a proposição.

■

Seja $\mathcal{X}_\Omega$ uma vorticidade inicial de Serfati. Uma questão que surge naturalmente é saber se para todo $\Omega^* \subset \Omega$, $\mathcal{X}_{\Omega^*}$ é também Serfati. Com o exemplo anterior e o seguinte, temos que a resposta é negativa.

Proposição 4.9. *Seja* $\Omega_0 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ (x_1,x_2) \in (0,\infty)\times(-1,1)\}$. *Então,* $\mathcal{X}_{\Omega_0}$ *não é dado inicial de Serfati, isto é, não existe* u *em* $\mathcal{S}$ *tal que* $\omega = \mathcal{X}_{\Omega_0}$.

Para a demonstração da proposição acima, usamos o seguinte resultado:

Lema 4.10. *Seja* $\omega \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ *e* u *dado pela lei de Biot-Savart (4.1.3). Então,* u *é uma função contínua.*

A demonstração deste lema pode ser encontrada em [45].

Demonstração da Proposição 4.9.

A demonstração deste resultado segue por contradição. Com efeito, supomos que exista uma velocidade $u \in (L^\infty(\mathbb{R}^2))^2$ tal que $div\, u = 0$ e $rot\, u = \mathcal{X}_{\Omega_0}$.

Consideramos os conjuntos $\Omega_0^i = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\, (x_1, x_2) \in (i, \infty) \times (-1, 1)\}$, $\forall\, i \in \mathbb{N}$. Então, vemos que $\mathcal{X}_{\Omega_0^i}$ é um dado inicial de Serfati com velocidade $u^i(x_1, x_2) = u(x_1 - i, x_2)$.

Consideramos também os conjuntos $B_0^i = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\, (x_1, x_2) \in (0, i] \times (-1, 1)\}$. Então, usando os resultados acima, temos que $\mathcal{X}_{B_0^i}$ é dado inicial de Serfati com velocidade $v^i = u - u^i$. Além disso, a sequência $(v^i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $L^\infty(\mathbb{R}^2)$, isto é, existe uma constante $d > 0$ tal que

$$\|v^i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq d,\, \forall\, i \in \mathbb{N}. \tag{4.2.5}$$

Por outro lado, usando a lei de Biot-Savart (4.1.3), temos que a função

$$z^i(x) = \int_{\mathbb{R}^2} K(x - y)\mathcal{X}_{B_0^i}(y)dy$$

é contínua, limitada, $div\, z^i = 0$ e $rot\, z^i = \mathcal{X}_{B_0^i}$. Como no caso bidimensional temos a identidade $\Delta = (\partial_{x_1} div - \partial_{x_2} rot, \partial_{x_2} div + \partial_{x_1} rot)$, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \Delta[z^i - v^i] &= 0, \\ z^i - v^i &\in L^\infty(\mathbb{R}^2). \end{cases}$$

Aplicando o Teorema de Liouville para funções harmônicas (veja [29]), temos que existem constantes C_1^i e C_2^i tais que

$$v^i = z^i + (C_1^i, C_2^i) \ \text{ q.s. em } \mathbb{R}^2. \tag{4.2.6}$$

Agora, vamos calcular explicitamente a segunda componente de z^i. De fato, temos a seguinte forma para as componentes de z^i:

$$\begin{aligned} z^i(x) &= \int_{\mathbb{R}^2} K(x - y)\mathcal{X}_{B_0^i}(y)dy = -\frac{1}{2\pi}\int_{B_0^i} \frac{1}{|x - y|^2}(x_2 - y_2, y_1 - x_1)dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{B_0^i} \frac{y_2 - x_2}{|x - y|^2}dy, \int_{B_0^i} \frac{x_1 - y_1}{|x - y|^2}dy\right). \end{aligned}$$

Então, para $x = \left(\frac{i}{2}, 0\right)$, temos a igualdade:

$$\begin{aligned} z_2^i\left(\frac{i}{2}, 0\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_0^i \frac{(\frac{i}{2} - y_1)}{(\frac{i}{2} - y_1)^2 + y_2^2}dy_1 dy_2 \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1} \left\{ln\left[y_2^2 + \left(\frac{i}{2} - y_1\right)^2\right]\right\}_{y_1=0}^{y_1=i} dy_2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, usando (4.2.5) e (4.2.6), juntamente com a continuidade de z^i, temos que

$$|C_2^i| \leq d,\ \forall\, i \in \mathbb{N}. \tag{4.2.7}$$

Por outro lado, para $x = (0,0)$ temos a igualdade

$$\begin{aligned}
z_2^i(0,0) &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_0^i \frac{y_1}{y_1^2+y_2^2}dy_1dy_2 \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}\left\{ln[y_2^2+y_1^2]\right\}_{y_1=0}^{y_1=i}dy_2 \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}\left\{ln[y_2^2+i^2]-ln[y_2^2]\right\}dy_2 \\
&= -\frac{1}{4\pi}\left\{y_2ln[i^2+y_2^2]-y_2ln[y_2^2]+2itg^{-1}\left[\frac{y_2}{i}\right]\right\}_{y_2=-1}^{y_2=1} \\
&= -\frac{1}{2\pi}ln[i^2+1]-\frac{i}{\pi}tg^{-1}\left[\frac{1}{i}\right]\overset{i\to\infty}{\longrightarrow}-\infty.
\end{aligned}$$

Portanto, novamente usando (4.2.5) e (4.2.6), juntamente com a continuidade de z^i, obtemos

$$|C_2^i|\overset{i\to\infty}{\longrightarrow}\infty. \tag{4.2.8}$$

Temos que (4.2.7) e (4.2.8) formam uma contradição. Logo, não existe um campo de velocidade u em $\mathcal{S}$ tal que $\omega = \mathcal{X}_{\Omega_0}$.

■

A seguir, mostramos uma condição necessária para um *vortex patch* ser dado inicial de Serfati. Mais especificamente, demonstramos que se uma vorticidade inicial $\mathcal{X}_\Omega$ está em $\mathcal{S}$, então Ω não pode conter bolas arbitrariamente grandes.

Teorema 4.11. *Sejam $u \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tal que*

$$\begin{cases} div\, u &= 0, \\ rot\, u &= \mathcal{X}_\Omega. \end{cases}$$

Então, para cada $x \in \mathbb{R}^2$ e $r > 2^6\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$, temos que

$$|B(x,r)\cap\Omega^c|> 0,$$

para $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^2\, |x-y|< r\}$, $\Omega^c = \mathbb{R}^2/\Omega$ e $|\ .\ |$ a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^2$.

Como consequência deste resultado, muitos *vortex patches* iniciais não são abrangidos pelo Teorema de Serfati. Citamos como exemplo $\mathcal{X}_{\mathbb{R}^2}$ e $\mathcal{X}_{\Omega_a}$, para $\Omega_a = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 > 0 \text{ e } x_2 > 0\}$.

Na demonstração do teorema acima, usamos a seguinte estimativa para funções harmônicas.

Lema 4.12. *Seja f harmônica sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Então, é verdadeira a seguinte desigualdade:*

$$|\partial_i f(x)|\le \frac{2^4}{s^3\pi}\|f\|_{L^1(B(x,s))},\ \forall\ B(x,s)\subset\subset\Omega,\ i=1,\,2.$$

A demonstração do lema acima pode ser encontrada em [29].

Demonstração do Teorema 4.11.

A demonstração deste resultado segue por contradição. Com efeito, supomos que existam $x \in \mathbb{R}^2$ e $r > 2^6\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$ tais que $|B(x,r) \cap \Omega^c| = 0$. Então, redefinindo Ω em um conjunto de medida nula se necessário, temos que $B(x,r) \subset \Omega$.

Por outro lado, pelas propriedades de u, temos que $div\, u \equiv 0$ e $rot\, u \equiv 1$ em $B(x,r)$. Então, usando a identidade $\Delta = (\partial_{x_1} div - \partial_{x_2} rot,\ \partial_{x_2} div + \partial_{x_1} rot)$, obtemos a seguinte igualdade:

$$\Delta u = 0 \text{ em } B(x,r).$$

Portanto, u é harmônica em $B(x,r)$. Usando o Lema 4.12 e a hipótese sobre r, obtemos a seguinte estimativa:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i} u_j(y)\right| \leq \frac{2^4}{\pi(\frac{r}{2})^3}\|u\|_{L^1(B(y,\frac{r}{2}))} \leq \frac{2^5}{r}\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} < \frac{1}{2} \text{ q.s. } y \in B\left(x, \frac{r}{3}\right).$$

Logo,

$$1 \equiv rot\, u < 1 \text{ q.s. em } B\left(x, \frac{r}{3}\right),$$

o que é uma contradição. Então, demonstramos o teorema.

■

Capítulo 5

Conclusões e considerações finais

Como visto neste trabalho, escoamentos sob o regime de simetria helicoidal têm, em certo sentido, características de escoamentos bidimensionais (veja [35], [43] e [44] para outros detalhes). Se, por um lado, pesquisas com fluxos bidimensionais podem ser abundantemente encontradas na literatura desde décadas passadas, em contrapartida, apenas recentemente alguns resultados com fluxos helicoidais têm sido apresentados na comunidade científica. Consequentemente, muitas questões bem conhecidas para o caso bidimensional ainda estão em aberto para o regime helicoidal.

Como um avanço nesta direção, mostramos na primeira parte desta tese que, em domínios limitados e sob a restrição geométrica de ser livre de rodopio, algumas técnicas de existência de soluções e também de estabilidade não-linear desenvolvidas no caso bidimensional podem ser adaptadas. De fato, para o sistema reduzido (0.0.2) (veja introdução), obtemos o Teorema 0.1, que garante existência de soluções com dados iniciais em L^p. Além disso, obtemos também os Teoremas 0.2, 0.3 e 0.4, que garantem a estabilidade de algumas soluções estacionárias. Estes últimos resultados comprovam que as técnicas desenvolvidas por Wan e Pulvirenti e por Burton podem ser estendidas para casos mais gerais. Nesta mesma direção, apresentamos a seguir alguns possíveis temas de pesquisas futuras envolvendo as equações de Euler helicoidais:

- Apesar do Teorema de Wan e Pulvirenti (Teorema 1.13 do capítulo 1) garantir a estabilidade L^1 do *vortex patch* circular, em [20] é mostrado numericamente que certas perturbações podem desenvolver longos e finos filamentos se movendo para relativamente longe da condição inicial. Isto indica uma instabilidade com relação à norma dada pela distância máxima entre os pontos das fronteiras dos *vortex patches*. Um estudo numérico semelhante pode ser investigado para Euler helicoidal.

- Em [34] e [46] é estimado a evolução no tempo do suporte de *vortex patches*. Nas demonstrações destes resultados é usada a lei de Biot-Savart para estimar a componente radial da velocidade. Uma investigação similar pode ser realizada no caso helicoidal. Uma dificuldade a ser superada é a diferença entre as leis de Biot-Savart bidimensional e helicoidal.

- A velocidade associada a um *vortex patch* $\mathcal{X}_{D_t}$ pode ser escrita como uma integral de fronteira sobre ∂D_t (veja [41] para maiores detalhes). Então, informações sobre a evolução de ∂D_t garantem propriedades de comportamento da solução $\mathcal{X}_{D_t}$. Em [9] é demonstrado que a fronteira de um *vortex patch* preserva a suavidade inicial. Um estudo na mesma direção também pode ser realizado para Euler helicoidal.

- A condição de ser livre de rodopio, apesar de fisicamente restritiva, garante que o termo de estiramento seja nulo. Ao não exigir esta restrição, um termo de estiramento ainda se faz presente. Uma questão relevante e mais realista é encontrar soluções estacionárias e estáveis para Euler helicoidal com rodopio. A dificuldade deste caso reside no fato que a equação da vorticidade não torna-se uma equação de transporte, necessitando portanto desenvolver uma técnica mais apurada.

Na segunda parte desta tese, fazemos um estudo sobre os *vortex patches* iniciais abrangidos pelo Teorema de Serfati. Mostramos no Teorema 0.5 que se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto tal que $\mathcal{X}_\Omega$ é um *vortex patch* inicial de Serfati, então Ω não pode conter bolas arbitrariamente grandes. Além disso, mostramos, via os exemplos 0.1 e 0.2, que dado $\mathcal{X}_\Omega$ uma condição inicial de Serfati, então não é necessariamente verdadeiro que para qualquer $\Omega^* \subset \Omega$, $\mathcal{X}_{\Omega^*}$ é condição inicial de Serfati.

Como mencionado, uma questão ainda em aberto é achar uma família de dados iniciais de Serfati cujas vorticidades não sejam L^p integrável. Vimos que a família $\mathcal{X}_{\Omega_\beta}$, para $-1 \leq \beta < 0$ e $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\, x_1 > 1 \text{ e } 0 < x_2 < x_1^\beta\}$, é abrangida pelo Teorema de Brunelli, porém a verificação de que se é de Serfati continua sendo um problema em aberto e poderá ser explorado em tópicos futuros de pesquisa.

Além disso, temos que para dados iniciais de Serfati, a lei de Biot-Savart (4.1.3) não é válida como convergência absoluta, no entanto, em alguns casos, ela possivelmente pode ser verdadeira num sentido de valor principal (veja [8]). Um estudo mais aprofundado nesta direção poderá também resultar em alguns outros exemplos de dados iniciais de Serfati.

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS R., *Sobolev space*, Academic Press, 1975.

[2] AMBROSE D., KELLIHER J., LOPES FILHO M.C., NUSSENZVEIG LOPES H.J., *Serfati solutions to the 2D Euler equations on the exterior domains*, In preparation.

[3] ARNOLD V., *Conditions for nonlinear stability of stationary plane curvilinear flows of an ideal fluid*, Dokl. Nat. Nauk 162, 773-777 (1965) .

[4] ARNOLD V., *On a priori estimate in the theory of hydrodynamical stability*, Amer. Math. Soc. Transl. 79, 267-269 (1969) .

[5] BARDOS C., TITI E., *Euler Equations of incompressible Ideal Fluids*, Bull. Amer. Math. Soc. 44, 603-621 (2007).

[6] BEALE T., KATO T., MAJDA A., *Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3D Euler equation*, Commun. Math. Phys. 94, 61-66 (1984).

[7] BEN-ARTZI M., *Global solutions of two-dimensional Navier-Stokes and Euler equations*, Arch. Anal. Rational Mech. 128, 329-358 (1994).

[8] BENEDETTO D., MARCHIORO C., PULVIRENT M., *On the Euler flow in* $\mathbb{R}^2$, Arch. Rational Anal. 123, 377-386 (1993).

[9] BERTOZZI A., CONSTANTIN P., *Global regularity for vortex patches*, 152, 19-28 (1993).

[10] BOUCHUT F., *Renormalized solutions to the Vlasov equation with coefficients of bounded variation*, Arch. Rational Mech. Anal 157, 75-90 (2001).

[11] BOURGUIGNON J., BREZIS H., *Remarks on the Euler Equation*, J. Func. Anal. 15, 341-363 (1974).

[12] BREZIS H., CAZENAVE T., *Nonlinear evolution equations*, Lecture Note at. I.M., UFRJ, Rio de Janeiro, 1994.

[13] BRONZI A., LOPES FILHO M.C., NUSSENZVEIG LOPES H.J., *Global existence of a weak solution of the incompressible Euler equations with helical symmetry and* L^p *vorticity*, To appear, Indiana U. Mat. J..

[14] Brunelli E., *On the Euler equation in the plane*, Communications in Partial Differential Equations 35, 480-495 (2010).

[15] Burton G. *Variatinonal problems on classes of rearrangements and multiple configurations for steady vortices*, Annales Ins. Henri Poincaré 6, 295-319 (1989).

[16] Burton G., *Rearrangements of functions, maximization of convex funcionals, and vortex rings*, Math Anal. 276. 225-253 (1987).

[17] Burton G., *Global nonlinear stability for steady ideal fluid flow in bounded planar domains*, Arch. Rat. Mech. Anal 176 149-163 (2005).

[18] Chorin A., Marsden J., *A mathematical introduction to fluid mechanics*, Spring-Verlag 1993.

[19] Constantin P., *On the Euler equations of incompressible fluids*, Bulletin of the American Mathematical Society 44, 603-621 (2007).

[20] Deem G., Zabusky N., *Vortex waves: Stationary V-states, interactions, recurrence, and breaking*, Phy. Rev. Letters 40, 859-862 (1978).

[21] Diperna R., Lions P., *Ordinary differential equation, transport theory and Sobolev space*, Invet. math. 98, 511-547 (1989).

[22] Diperna R., Madja A., *Concentrations in regularizations for 2-D incompressible flow*, Commun Pure Appl. Math. 40, 301-345 (1987).

[23] Douglas R., *Rearrangements of vector valued functions, with appliation at atmospheric and onceanic flow*, SIAM J. Math. Anal. 29, 891-902 (1998).

[24] Dutrifoy A., *Existence globale en temps de solutions hélicoïdales des équation d'Eler* C. R. Aca. Sci. Paris, 329, 653-656 (1999).

[25] Ebin D., *A concise presentation of the Euler equations of hydrodynamics*, Commun. Partial. Differ. Eq. 9 , 539-559 (1984).

[26] Ebin D., Marsden J., *Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid*, Ann. of Math. 92, 102-163 (1970).

[27] Ettinger B., Titi E., *Global existence and uniqueness of weak solutions of three-dimensional Euler equations with helical symmetry in the absence of vorticity streching*, Siam J. Math. Anal. 41, 269-296 (2009).

[28] Euler L., *Principes generaux du mouvement des fluides*, Mémoires de l'académie des sciences de Berlin 11, 274-315 (1757).

[29] Evans L., *Partial differential equations*, American Mathematical Society, 2002.

[30] Ferrari A., *On the blow-up of solutions of the 3-D Euler equation in bounded domain*, Commun. Math Phys. 155, 277-294 (1993).

[31] Giga Y., Miyakawa T., Osada H., *Two dimensional Navier-Stokes flow with measure as initial vorticity*, Archive for Rat. Mech. and Anal. 28, 223-250 (1988).

[32] Gilbarg D., Trudinger N., *Elliptic partial differential equations of second order*, Spring-Verlag, 1983.

[33] Gomes A., *Semigrupos não lineares e equações diferenciais nos espaços de Banach*, UFRJ, 2003.

[34] Iftimie D., Sideris T., Gamblin P., *On the evolution of compactly supported planar vorticity*, Comm. part. diff. eq. 24, 1709-1730 (1999).

[35] Jiu Q, Lopes Filho M.C., Nussenzveig Lopes H.J., Niu D., *Vanishing viscosity problem for 3-D Navier-Stokes Equations with helical symmetry in whole space*, In preparation.

[36] Kato T., *Non stationary flows of viscous and ideal fluids in* $\mathbb{R}^3$, J. Funct. Anal., 9 296-305 (1972).

[37] Kato T., *On classical solutions of the two-dimensional non-stationary Euler equation*, Arc. Rat. Mech. Anal., 14 188-200 (1967).

[38] Kato T., Lai C., *Nonlinear evolution equations and the Euler Flow*, J. Func. Anal., 56 15-28 (1984).

[39] kesavan S., *Topics in functional analysis and applications*, John Wiley e Sons, 1989.

[40] Kreyszig E., *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley e Sons, 1989.

[41] Lopes Filho M.C., Nussenzveig Lopes H.J., Zheng Y., *Weak solutions for the equations of incompressible and inviscid fluid dynamics*, 22º Colóquio Brasileiro de matemática 1999.

[42] Lopes Filho M.C. Nussenzveig Lopes H.J., Zheng Y., *Lectures on the mathematical analysis of incompressible fluid flow*, In preparation.

[43] Lopes Filho M.C., Mazzucato A., Niu D., Nussenzveig Lopes H.J., Titi E., *Planar limits of three-dimensional incompressible flow with helical symmetry*, Preprint.

[44] Mahalov A, Titi E., Leibovich S., *Invariant helical subspaces for the Navier-Stokes equations*, Arc. Rational Mech. Anal 112, 193-222 (1990).

[45] Majda A., Bertozzi A., *Vorticity and incompressible flow*, Cambridge University Press, 2002.

[46] Marchioro C., *Bounds on the growth of the support of a vortex patch*, Commun. Math. Phy. 164, 507-524 (1994).

[47] Marchioro C., Pulvirenti M., *Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids*, Spring-Verlag, 1991.

[48] Serfati P., *Solutions C^∞ en temps, n-log Lipchitz bornées en espace et équation d'Euler*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 320 série I, 555-558 (1995).

[49] Taniuchi Y., *Uniformily local L^p estimate for 2-D Vorticity equation and its application to Euler equation with inicial vorticity in bmo*, Commun. Math. Phys. 248, 169-186 (2004).

[50] Temam R., *On the Euler equations of incompressible perfect fluids*, J. Funct. Anal. 20, 32-43 (1975).

[51] Wan Y., Pulvirenti M., *Nonlinear stability of circular vortex patches*, Commun, Math. Phys. 99, 435-450 (1985).

[52] Yudovich V., *Non-stationary flow of an ideal incompressible liquid*, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 3, 1032-1066 (1963).