

**MIGRAÇÃO, DEMIGRAÇÃO E IMAGEAMENTO  
EM 2.5D  
COM INCLUSÃO DE ALGUNS CASOS ANALÍTICOS**

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por *João Luiz Martins* e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 24 de maio de 2001.

  
Prof. Dr. Martin Tygel  
Orientador

  
Prof. Dr. Joerg Schleicher  
Co-orientador

Banca examinadora:

1. Prof. Dr. Martin Tygel
2. Prof. Dr. Lúcio Tunes dos Santos
3. Prof. Dr. Jesse Carvalho Costa
4. Prof. Dr. João dos Santos Protázio
5. Profa.Dra. Maria Cristina de Castro Cunha.

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Matemática Aplicada.

|              |                                     |
|--------------|-------------------------------------|
| UNIDADE      | B.C.                                |
| N.º CHAMADA: | T/UNICAMP                           |
|              | M 366m                              |
| V.           | Ex.                                 |
| TOMBO BC/    | 46239                               |
| PROC.        | 16-392101                           |
| C            | <input type="checkbox"/>            |
| D            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| PREÇO        | R\$ 11,00                           |
| DATA         | 13/09/01                            |
| N.º CPD      |                                     |

CM00159642-8

### FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Martins, João Luiz

M366m Migração, demigração e imageamento em 2.5D. Inclusão de alguns casos analíticos / João Luiz Martins -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2001.

Orientadores: Martin Tygel; Joerg Schleicher

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Migração. I. Tygel, Martin. II. Schleicher, Joerg. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

**Tese de Doutorado defendida em 18 de outubro de 2000**

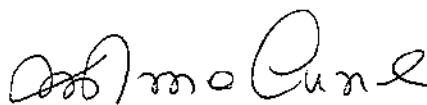
**e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



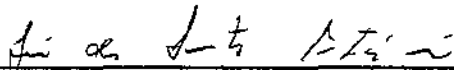
**Prof (a). Dr (a). MARTIN TYGEL**



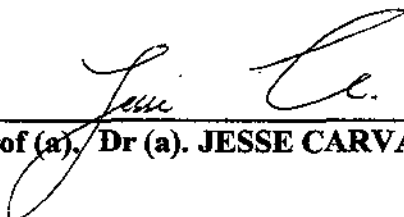
**Prof (a). Dr (a). LUCIO TUNES DOS SANTOS**



**Prof (a). Dr (a). MARIA CRISTINA DE CASTRO CUNHA**



**Prof (a). Dr (a). JOÃO DOS SANTOS PROTÁZIO**



**Prof (a). Dr (a). JESSE CARVALHO COSTA**

---

## AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Prof. Dr. Martin Tygel pela definição do tema desta tese e pela sua coordenação no desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Joerg Schleicher pela co -orientação do presente trabalho, pelas sugestões, observações, dedicação e paciência durante a organização dos resultados aqui presentes.

A minha esposa Silvia, meus filhos, Ednardo, Helena e João Vitor pelo incentivo e compreensão durante a realização desta tese.

Ao Prof. Dr. Lúcio Tunes dos Santos pelas relevantes sugestões dadas ao texto deste trabalho.

Aos membros da banca examinadora Professores, Dr. João dos Santos Protázio, Prof. Dr. Jesse Carvalho Costa e Prof<sup>a</sup>. Dra. Maria Cristina de Castro Cunha pelas sugestões e também pela colaboração nos ajustes finais das notações apresentadas nesta tese.

Aos meus colegas do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto pela confiança e investimento.

Aos meus pais, irmãos e amigos pelo incentivo.

# Abstract

Kirchhoff migration and demigration are not only two of the most important tools for seismic processing, but also form the basis for the solution of various other imaging problems. However, when applied in three dimensions, they are exceedingly expensive processes in laterally inhomogeneous media due to the intense numerics required. This fact motivated us to investigate the operations of Kirchhoff-type migration and demigration for simpler types of media with the aim of obtaining fast and inexpensive results that can be used as an approximation in more realistic media. A useful situation for the realization of these processes with less computational effort is the so-called 2.5D medium. In such a medium, the describing parameters vary only in 2D. All propagation effects, in particular the geometrical spreading along the rays, maintain their 3D character, being computed, however, using 2D modeling procedures as, for example, ray tracing. In this way, one can establish the complete 3D true-amplitude migration and demigration operations, as well as other image transformations, using only a 2D description and, consequently, 2D computational costs. In media where the parameters depend only on the depth coordinate (1D situation), the imaging operations require only the solution of certain integrals of a semi-analytic character, which can be implemented in a fast and precise way. For some specific velocity distributions, analytic expressions are derived for the stacking lines and weight functions of migration and demigration. For these models, the performance of the different imaging algorithms are computationally very efficient. In this way, we have elaborated a set of cases that are of great value not only for the approximate, fast application in realistic media but also for the validation of implementations in more complex situations. In this work, we study several of these models, thus obtaining explicit or semi-analytic expressions for the corresponding migration and demigration algorithms and their combinations, namely the configuration transform and remigration.

# Resumo

A migração e demigração de Kirchhoff são, não apenas duas das mais importantes ferramentas para o processamento sísmico, mas formam, também, a base para a solução de vários outros problemas de imageamento. Em 3D, o uso destas ferramentas em meios não homogêneos torna-se dispendioso devido aos requisitos numéricos e computacionais exigidos para a sua aplicação. Este fato motivou-nos a investigar as operações de migração e demigração de Kirchhoff para meios mais simples visando com isto obtermos resultados rápidos que possam ser utilizados como aproximação em meios mais realistas. Um meio bastante conveniente para obtenção de resultados com baixo esforço computacional é o chamado meio 2.5D. Neste meio, a propagação de ondas é 3D, mas os parâmetros que o descrevem são 2D. Nesta situação, o traçamento de raios em 2D é suficiente para a descrição dos efeitos da propagação em 3D, em particular do espalhamento geométrico. Isto possibilita o completo estabelecimento das operações de migração, demigração, bem como de outras transformações de imagens em verdadeira amplitude. Num meio em que os parâmetros dependem apenas da coordenada em profundidade (situação 1D), as operações de imageamento necessitam apenas da solução de certas integrais de caráter semi-analítico, as quais podem ser implementadas de maneira rápida e precisa. Para certos casos particulares de distribuições de velocidades, fórmulas analíticas são obtidas para as curvas de empilhamento e funções peso para a migração e demigração. Para estes modelos, os diversos algoritmos de imageamento apresentam desempenho computacional bem eficiente. Desta forma, pode ser estabelecido um conjunto de casos de que são úteis na validação da implementação em situações mais complicadas. Neste trabalho estudamos vários destes modelos, obtendo expressões explícitas ou semi-analíticas para os correspondentes algoritmos de migração e demigração, bem como para combinações destes, a saber transformação de configuração e remigração.

# Sumário

|          |                                                           |           |
|----------|-----------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO</b>                                         | <b>4</b>  |
| <b>2</b> | <b>CONSIDERAÇÕES BÁSICAS</b>                              | <b>8</b>  |
| 2.1      | Considerações em 3D . . . . .                             | 8         |
| 2.2      | Considerações em 2.5D . . . . .                           | 10        |
| 2.2.1    | Introdução . . . . .                                      | 10        |
| 2.2.2    | Raios em 2.5D . . . . .                                   | 11        |
| 2.2.3    | Fórmula de Decomposição . . . . .                         | 12        |
| 2.2.4    | Fator Especial . . . . .                                  | 14        |
| 2.3      | Meio Verticalmente Não Homogêneo . . . . .                | 14        |
| 2.3.1    | Expressões Analíticas . . . . .                           | 15        |
| 2.4      | Casos Analíticos . . . . .                                | 18        |
| 2.4.1    | Velocidade Constante . . . . .                            | 19        |
| 2.4.2    | Velocidade com Gradiente Constante . . . . .              | 20        |
| 2.4.3    | Vagariosidade Quadrada com Gradiente Constante . . . . .  | 21        |
| 2.4.4    | Logaritmo da Velocidade com Gradiente Constante . . . . . | 21        |
| <b>3</b> | <b>INTEGRAL DE KIRCHHOFF-HELMHOLTZ</b>                    | <b>23</b> |
| 3.1      | Introdução . . . . .                                      | 23        |
| 3.2      | Forma Compacta . . . . .                                  | 23        |
| 3.3      | Avaliação Assintótica - Fora do Plano . . . . .           | 26        |
| 3.4      | Avaliação Assintótica - Dentro do plano . . . . .         | 29        |
| 3.5      | Meio Verticalmente Não Homogêneo . . . . .                | 34        |
| 3.6      | Casos Analíticos . . . . .                                | 35        |
| 3.6.1    | Velocidade Constante . . . . .                            | 35        |
| 3.6.2    | Velocidade com Gradiente Constante . . . . .              | 35        |
| 3.6.3    | Vagariosidade Quadrada com Gradiente Constante . . . . .  | 35        |
| 3.6.4    | Logaritmo da Velocidade com Gradiente Constante . . . . . | 35        |
| 3.7      | Resumo . . . . .                                          | 36        |
| <b>4</b> | <b>INTEGRAIS DE MIGRAÇÃO DE KIRCHHOFF</b>                 | <b>37</b> |
| 4.1      | Introdução . . . . .                                      | 37        |
| 4.2      | Forma Compacta . . . . .                                  | 37        |
| 4.3      | Avaliação Assintótica - Fora do Plano . . . . .           | 39        |
| 4.4      | Avaliação Assintótica - Dentro do Plano . . . . .         | 41        |

|          |                                                           |           |
|----------|-----------------------------------------------------------|-----------|
| 4.5      | Meio Verticalmente Não Homogêneo . . . . .                | 42        |
| 4.6      | Casos Analíticos . . . . .                                | 42        |
| 4.6.1    | Velocidade Constante . . . . .                            | 42        |
| 4.6.2    | Velocidade com Gradiente Constante . . . . .              | 44        |
| 4.6.3    | Vagariosidade Quadrada com Gradiente Constante . . . . .  | 46        |
| 4.6.4    | Logarítmo da Velocidade com Gradiente Constante . . . . . | 47        |
| 4.7      | Resumo . . . . .                                          | 49        |
| <b>5</b> | <b>INTEGRAIS DE DEMIGRAÇÃO DE KIRCHHOFF</b>               | <b>50</b> |
| 5.1      | Introdução . . . . .                                      | 50        |
| 5.2      | Forma Compacta . . . . .                                  | 50        |
| 5.3      | Avaliação Assintótica - Fora do Plano . . . . .           | 51        |
| 5.4      | Avaliação Assintótica - Dentro do Plano . . . . .         | 54        |
| 5.5      | Meio Verticalmente Não Homogêneo . . . . .                | 55        |
| 5.6      | Casos Analíticos . . . . .                                | 55        |
| 5.6.1    | Velocidade Constante . . . . .                            | 55        |
| 5.6.2    | Velocidade com Gradiente Constante . . . . .              | 57        |
| 5.6.3    | Vagariosidade Quadrada com Gradiente Constante . . . . .  | 58        |
| 5.6.4    | Logarítmo da Velocidade com Gradiente Constante . . . . . | 59        |
| 5.7      | Resumo . . . . .                                          | 61        |
| <b>6</b> | <b>TRANSFORMADA DE CONFIGURAÇÃO</b>                       | <b>62</b> |
| 6.1      | Introdução . . . . .                                      | 62        |
| 6.2      | Solução Cascata em 3D . . . . .                           | 64        |
| 6.3      | Solução Cascata em 2.5D . . . . .                         | 65        |
| 6.4      | Solução Simples em 2.5D . . . . .                         | 66        |
| 6.5      | Meio Verticalmente Não Homogêneo . . . . .                | 69        |
| 6.6      | Casos Analíticos . . . . .                                | 70        |
| 6.6.1    | Velocidade Constante . . . . .                            | 70        |
| 6.6.2    | Velocidade com Gradiente Constante . . . . .              | 71        |
| 6.6.3    | Vagariosidade Quadrada com Gradiente Constante . . . . .  | 72        |
| 6.6.4    | Logarítmo da Velocidade com Gradiente Constante . . . . . | 72        |
| 6.7      | Exemplos Numéricos . . . . .                              | 74        |
| 6.7.1    | Continuação do Afastamento . . . . .                      | 74        |
| 6.7.2    | Migração para Afastamento Nulo . . . . .                  | 79        |
| 6.7.3    | Observações Gerais . . . . .                              | 84        |
| 6.8      | Resumo . . . . .                                          | 85        |
| <b>7</b> | <b>REMIGRAÇÃO</b>                                         | <b>86</b> |
| 7.1      | Introdução . . . . .                                      | 86        |
| 7.2      | Solução Cascata em 3D . . . . .                           | 88        |
| 7.3      | Solução Cascata em 2.5D . . . . .                         | 89        |
| 7.4      | Solução Simples em 2.5D . . . . .                         | 90        |
| 7.5      | Meio Verticalmente Não Homogêneo . . . . .                | 93        |
| 7.6      | Casos Analíticos . . . . .                                | 93        |

|          |                                                           |            |
|----------|-----------------------------------------------------------|------------|
| 7.6.1    | Velocidade Constante . . . . .                            | 93         |
| 7.6.2    | Velocidade com Gradiente Constante . . . . .              | 94         |
| 7.6.3    | Vagarosidade Quadrada com Gradiente Constante . . . . .   | 95         |
| 7.6.4    | Logarítmo da Velocidade com Gradiente Constante . . . . . | 96         |
| 7.7      | Resumo . . . . .                                          | 96         |
| <b>8</b> | <b>CONCLUSÕES</b>                                         | <b>97</b>  |
| <b>A</b> | <b>COMPARAÇÃO DE SISMOGRAMAS</b>                          | <b>101</b> |
| <b>B</b> | <b>MATRIZ HESSIANA - TRANSFORMADA DE CONFIGURAÇÃO</b>     | <b>104</b> |
| <b>C</b> | <b>MATRIZ HESSIANA - REMIGRAÇÃO</b>                       | <b>106</b> |

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por finalidade descrever uma classe de operadores integrais conhecidos em Geofísica como integrais de tipo Kirchhoff. Os operadores incluem as chamadas migração e demigração de Kirchhoff, bem como outras transformações delas derivadas. Estas operações integrais têm aplicação em variados problemas de construção de imagens da subsuperfície através do processamento de dados sísmicos.

Para a prospecção e monitoramento de reservatórios de hidrocarbonetos, equipes interdisciplinares envolvendo geofísicos, geólogos e engenheiros de reservatório baseiam-se em informações adquiridas de levantamentos sísmicos realizados na superfície da terra ou no mar. Para a obtenção destes dados, geram-se ondas mecânicas que se propagam no interior da terra, sendo refletidas em interfaces de descontinuidades dos parâmetros geológicos. O movimento de vibração do solo (ou, na água, a pressão) resultante destas ondas refletidas, é registrado como função do tempo por um sistema de *geofones* (ou hidrofones).

A tarefa da Geofísica no processo consiste na reconstrução de uma imagem do subsolo a partir destes *dados sísmicos*. Para tal, usa-se um conjunto altamente desenvolvido de métodos de *processamento sísmico* (veja, por exemplo, Yilmaz, 1987). Um dos processos (ou passos da sequência de processamento sísmico) a serem aplicados consiste na chamada *migração* (veja, por exemplo, Stolt e Benson, 1986). Já determinado por processos anteriores um modelo inicial (denominado macro-modelo) das velocidades sísmicas no subsolo, a migração tem a finalidade de transformar (migrar) os dados sísmicos em uma imagem da região da subsuperfície de interesse. Assim sendo, a migração é uma das mais importantes operações do *imageamento sísmico*.

A *demigração* é a operação inversa da migração e tem por objetivo reconstruir os dados originais no domínio do tempo a partir dos dados migrados. Ambas, migração e demigração, constituem a base para a determinação de soluções para outros problemas de transformações de imagens como, por exemplo, a transformada de configuração e a remigração (Hubral et al., 1996, Tygel et al., 1996).

Para todos estes processos de imageamento existem operadores integral. Na literatura geofísica atribui-se o nome de Kirchhoff<sup>1</sup> a estas operações integrais. A razão desta nomenclatura é o fato de que elas possuem uma relação com a chamada *integral de Kirchhoff* (Sommerfeld, 1964) que descreve (ou *modela*) a propagação de ondas. É através desta relação que Schneider (1978) estabeleceu o operador integral para a *migração de Kirchhoff*.

---

<sup>1</sup>Gustav Kirchhoff (1824–1887), físico alemão

Somente depois observou-se que este esquema de migração é equivalente ao método do *empilhamento de difração* anteriormente proposto por Rockwell (1971) utilizando as *superfícies de convexidade máxima* de Hagedoorn (1954), hoje em dia conhecidas como *superfícies de difração* ou *superfícies de Huygens*<sup>2</sup>.

Assim, ambos os trabalhos de Rockwell (1971) e de Schneider (1978) relatam que empilhando os dados ao longo das superfícies de Huygens e colocando o resultado obtido dentro do correspondente ponto em profundidade é possível produzir uma imagem em profundidade da subsuperfície, mediante o conhecimento de um modelo de velocidade e de uma configuração de fonte-receptor. Em Bleistein (1987) e Schleicher et al. (1993) são apresentadas funções pesos para a operação de migração, com vistas a fornecer uma imagem *seção migrada* cujas amplitudes tenham sido compensadas do fator de espalhamento geométrico. Os pesos podem ser calculados usando o traçamento dinâmica de raios no modelo de velocidade (Červený e Castro, 1991).

A operação integral inversa, chamada demigração de Kirchhoff, foi investigada por Hubral et al. (1996) e Tygel et al. (1996), tanto cinematica quanto dinamicamente. Nestes trabalhos também foi sugerido o encadeamento destas duas integrais com a finalidade de resolver outros problemas de imageamento através de operações integrais também de tipo Kirchhoff.

Devido ao alto custo computacional que a aplicação destes métodos de Kirchhoff apresenta, procuraram-se, na prática, representações simplificadas (veja, por exemplo, Dellinger et al., 2000). Neste contexto, de posse das discussões apresentadas sobre meios com certas restrições como a situação 2.5D e um meio verticalmente não homogêneo (Bleistein, 1986), perspectivas de novas investigações começaram a ficar evidentes. Ou seja, de que esses problemas em tais meios teriam mais chances de produzir num menor tempo e com menor custo, um desempenho aproximado para essas operações, devido é claro, às suas características especiais. Para estes meios, os termos que aparecem nos integrandos das transformações de Kirchhoff admitem fórmulas analíticas ou semi-analíticas, facilitando sobremaneira a sua implementação.

O propósito deste trabalho consiste em estabelecer as representações integrais de Kirchhoff correspondentes a essas operações em várias destas situações, saber (a) o caso 2.5D, onde a propagação de ondas é 3D, mas os parâmetros do meio são 2D (veja Bleistein, 1986; Portugal, 1999), (b) em meios verticalmente não homogêneos e, em particular, (c) para os casos de distribuições de velocidade verticais simples (constante, gradiente constante, vagarosidade quadrada com gradiente constante, logaritmo da velocidade com gradiente constante).

A primeira integral do a ser estudada é a integral de Kirchhoff. Aplicada a problemas ligados ao espalhamento de ondas em alta frequência, ela é denominada *integral de Kirchhoff-Helmholtz* (Bleistein, 1984). Esta integral resolve o conhecido problema direto, uma vez conhecidas a localização da fonte e do receptor, um modelo de velocidade e a localização do(s) refletor(es). No trabalho, especificamos as fórmulas analíticas correspondentes a todas as situações descritas acima.

O que torna a investigação do problema acima bastante atraente é a rapidez e economia de esforço computacional, com resultados genuinamente tridimensionais, embora em modelos mais restritivos. Na situação 2.5D, as realizações numéricas das representações integrais para o modelamento, a migração, demigração e as transformações de imagens são mais

---

<sup>2</sup>Christian Huygens (1629-1695), matemático holandês

econômicas, necessitando apenas do traçamento de raios em 2D ao invés de 3D.

Já para o caso dos meios verticalmente não homogêneos, os resultados são equacionados de uma forma ainda melhor, particularmente pelo fato de que o traçamento numérico de raios e a determinação dos termos integrantes das correspondentes representações integrais, ficam reduzidos a uma resolução de algumas integrais em profundidade relativamente simples.

Isto pode ser melhor explorado ainda quando consideramos distribuições de velocidades verticais elementares (constante, gradiente constante, vagarosidade quadrada com gradiente constante, logarítmo da velocidade com gradiente constante). Nesses casos, é possível resolver analiticamente as integrais mencionadas acima. A partir destas soluções, podem-se estabelecer fórmulas analíticas tanto para as quantidades da integral de Kirchhoff-Helmholtz quanto para as curvas de empilhamento e as funções pesos de migração e demigração. Desta forma, o esforço computacional é reduzido ao mínimo.

Neste trabalho, mostramos como obter as diversas representações integrais em meios 2.5D a partir das correspondentes representações de Kirchhoff em modelos gerais 3D. Primeiros resultados nesta direção foram publicados em Martins et al. (1997).

O desenvolvimento deste trabalho se dá em oito capítulos, que serão arranjados de tal maneira que o leitor possa obter as informações necessárias sobre as representações integrais de Kirchhoff-Helmholtz, migração, demigração e sobre os problemas de transformadas de configuração e remigração em 2.5D, num meio verticalmente não homogêneo e também para os modelos de velocidades mencionados acima.

No Capítulo 2 apresentamos uma breve introdução sobre os resultados abordados no desenvolvimento desse trabalho e estabelecemos algumas considerações básicas a respeito do meio 3D, situação 2.5D, para um meio verticalmente não homogêneo e para os casos analíticos, a fim de facilitar a construção dos resultados sobre os problemas da transformada de configuração e da remigração.

Para as mesmas situações, utilizando os resultados do Capítulo 2, apresentamos no Capítulo 3 as correspondentes representações da integral de Kirchhoff-Helmholtz (Tygel et al., 1994a), a qual resolve o conhecido problema direto, bem como as expressões simplificadas para a sua função peso. Mediante esta integral são estabelecidas fórmulas de decomposição para o fator de espalhamento geométrico.

Os Capítulos 4 e 5 são destinados às descrições das integrais de migração e demigração do tipo Kirchhoff, as quais permitem imagear o refletor em profundidade e recuperar dados em tempo, respectivamente. Nestes capítulos são especificadas expressões simplificadas para as funções pesos e curvas de empilhamento, tanto para a situação 2.5D, quanto para os modelos de distribuições de velocidades verticais, bem como as fórmulas analíticas para os casos elementares. No final das seções são apresentados alguns exemplos numéricos básicos usando estas fórmulas.

Os Capítulos 6 e 7, são reservados ao estabelecimento das soluções em cascata (duas integrais) e compacta (uma integral), referentes aos problemas de transformadas de configuração e remigração. Estas transformações desempenham papel importante em problemas de tratamento de amplitude (recuperação de coeficientes de reflexão) e atualização de imagens correspondentes a atualizações dos modelos de velocidade, respectivamente.

Estes problemas serão tratados nestes capítulos para as mesmas situações especiais mencionadas anteriormente. Após o desenvolvimento desses sete capítulos, apresentamos no capítulo 8 as conclusões.

Três Apêndices fazem parte do trabalho, os quais têm a finalidade de tratar os aspectos mais técnicos da obtenção das diversas expressões que aparecem no texto. A separação em apêndices tem por objetivo facilitar o fluxo de exposição do trabalho.

## Capítulo 2

# CONSIDERAÇÕES BÁSICAS

Este capítulo tem por objetivo apresentar a solução aproximada para a equação de Helmholtz (Bleistein, 1984) em 3D. Algumas preliminares são estabelecidas a respeito do raio, das fórmulas de decomposição para o fator de espalhamento para a situação 2.5D. Uma breve descrição das fórmulas analíticas para um meio verticalmente não homogêneo, bem como para os modelos especiais de velocidades verticais.

### 2.1 Considerações em 3D

Considere a equação de Helmholtz para ondas espalhadas  $\Phi_s$ , ou seja, a equação de onda acústica com densidade constante no domínio da frequência (Bleistein, 1984)

$$\nabla^2 \Phi_s(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{x})} \Phi_s(\mathbf{x}, \omega) = F(\mathbf{x}, \omega), \quad (2.1)$$

sendo  $F$  uma fonte (suporte compacto),  $c(\mathbf{x})$  a velocidade do meio,  $\mathbf{x} = (x, y, z)^t \in R^3$ . Se  $\Phi_s(\mathbf{x}, \omega)$  é solução desta equação sob uma dada superfície  $E_0$  que engloba o ponto de observação  $\mathbf{g}$  (localização do receptor) e admitindo que  $\Phi_s(\mathbf{x}, \omega)$ , para  $\omega$  suficientemente grande, satisfaça as condições de radiação de Sommerfeld,

$$\Phi_s(\mathbf{x}, \omega) = O(1/r) \quad \text{para} \quad |\mathbf{x}| = r \rightarrow \infty \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \Phi_s(\mathbf{x}, \omega)}{\partial r} - \frac{i\omega}{c(\mathbf{x})} \Phi_s(\mathbf{x}, \omega) = o(1/r) \quad \text{para} \quad |\mathbf{x}| = r \rightarrow \infty \quad (2.3)$$

então a solução  $\Phi_s$  é única (Bleistein, 1984) e, além disso, vale,

$$\Phi_s(\mathbf{g}, \omega) = \frac{-1}{4\pi} \int_E \left( \Phi_s(\mathbf{x}, \omega) \frac{\partial \mathcal{G}(\mathbf{g}, \mathbf{x}, \omega)}{\partial n} - \mathcal{G}(\mathbf{g}, \mathbf{x}, \omega) \frac{\partial \Phi_s(\mathbf{x}, \omega)}{\partial n} \right) dE(\mathbf{x}). \quad (2.4)$$

Aqui  $\Phi_s(\mathbf{g}, \omega)$  é o campo de ondas escalares harmônicas no tempo registrado num ponto de observação  $\mathbf{g}$ ;  $\Phi_s(\mathbf{x}, \omega)$  e  $\frac{\partial \Phi_s(\mathbf{x}, \omega)}{\partial n}$  são o campo de ondas e sua derivada normal, respectivamente, os quais são conhecidos em todos os pontos  $\mathbf{x}$  sobre  $E$  (espalhador ou interface

de reflexão, parte iluminada da superfície  $E_0$ ) e  $\mathcal{G}(\mathbf{g}, \mathbf{x}, \omega)$  é a função de Green, solução da equação:

$$\nabla^2 \mathcal{G}(\mathbf{g}, \mathbf{x}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{x})} \mathcal{G}(\mathbf{g}, \mathbf{x}, \omega) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{g}) \quad (2.5)$$

com  $\frac{\partial \mathcal{G}(\mathbf{g}, \mathbf{x}, \omega)}{\partial n}$  sua derivada normal calculada nos pontos sobre  $E$  e  $\frac{\partial}{\partial n} = \hat{n} \cdot \nabla$ , com  $\hat{n}$  o vetor normal apontando para fora da superfície  $E$ .

Daqui para frente vamos supor que a fonte  $\mathbf{s}$  e o receptor  $\mathbf{g}$  estejam numa superfície de medida  $E_m$  de tal forma que cada fonte  $\mathbf{s}$  corresponda um receptor  $\mathbf{g}$ . Portanto,  $\mathbf{s}$  e  $\mathbf{g}$  poderão ser expressos numa forma parametrizada por um parâmetro bidimensional  $\xi$ ; isto é, identificamos  $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\xi)$  e  $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\xi)$  e  $\mathcal{G}(\mathbf{g}, \mathbf{x}, \omega) = \mathcal{G}^s(\xi, \mathbf{x}, \omega)$ .

Consideramos a equação (2.5) para a função de Green  $\mathcal{G}^s(\xi, \mathbf{x}, \omega)$ , agora para o ramo do raio que une a fonte  $\mathbf{s}$  a um ponto  $\mathbf{m}$  em  $E$ ,

$$\left[ \nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{x})} \right] \mathcal{G}^s(\xi, \mathbf{x}, \omega) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (2.6)$$

onde  $\mathbf{x}_0$  é a posição da fonte.

Para resolver este problema pelo método do raio, procedemos da seguinte forma. Assumimos que a função de Green seja aproximada por

$$\mathcal{G}^s(\xi, \mathbf{x}, \omega) \simeq G_0^s(\xi, \mathbf{x}) \exp[-i\omega\tau_s(\xi, \mathbf{x})], \quad (2.7)$$

sendo  $\tau_s$  a solução da equação eikonal

$$|\nabla\tau_s(\xi, \mathbf{x})|^2 = \frac{1}{c^2(\mathbf{x})}, \quad (2.8)$$

e a amplitude  $G_0^s(\xi, \mathbf{x})$  a solução da equação do transporte

$$\nabla G_0^s(\xi, \mathbf{x}) \cdot \nabla\tau_s(\xi, \mathbf{x}) + G_0^s(\xi, \mathbf{x}) \nabla^2\tau_s(\xi, \mathbf{x}) = 0. \quad (2.9)$$

As condições iniciais para estas equações são, respectivamente

$$\tau_s(\xi, \mathbf{x}_0) = 0 \quad \text{e} \quad G_0^s(\xi, \mathbf{x}) \rightarrow \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \quad \text{quando} \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0. \quad (2.10)$$

Portanto, a equação (2.8) com as condições (2.10) fornecem o seguinte sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(\sigma) = \mathbf{p}, \quad \mathbf{p} = \nabla\tau, \quad |\mathbf{p}|^2 = \frac{1}{c^2(\mathbf{x})}, \quad (2.11)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{2} \nabla \left( \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \right), \quad \dot{\tau} = \frac{1}{c^2(\mathbf{x})}, \quad \cdot = \frac{d}{d\sigma} \quad (2.12)$$

onde  $|\mathbf{p}| = |(p_1, p_2, p_3)| = \left( \sum_{j=1}^3 p_j^2 \right)^{1/2}$  e  $\sigma$  é o parâmetro ao longo do raio.

A situação desejada é conhecida como a solução conoidal, pois, os raios são emanados do ponto  $\mathbf{x}_0$ . O vetor vagarosidade,  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$  não é determinado inicialmente (Bleistein, 1986). Apenas sua magnitude  $p = |\mathbf{p}|$  é dada pela última equação em (2.11).

Desta forma, escolhemos dois parâmetros arbitrários  $\beta_0$  e  $\alpha_0$  de tal maneira a descrever a direção inicial do vetor  $\mathbf{p}$  (Figura 2.1).

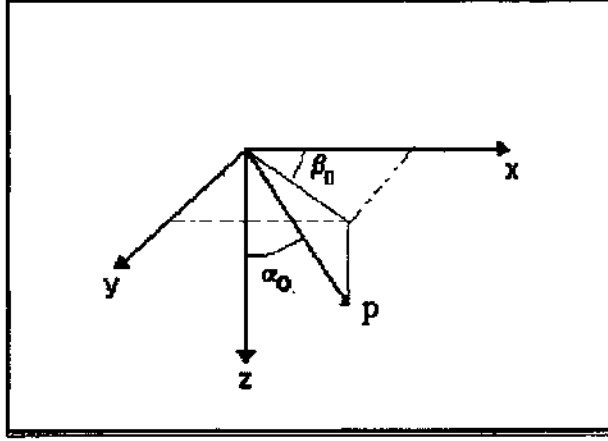


Figura 2.1: Ilustração do vetor  $\mathbf{p}$ , do ângulo  $\alpha_0$  que o vetor faz com a profundidade  $z$  e do ângulo polar  $\beta_0$ .

Tomando os dados iniciais como

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{p}(0) &= \frac{1}{c(\mathbf{x}_0)} (\sin \alpha_0 \cos \beta_0, \sin \alpha_0 \sin \beta_0, \cos \alpha_0), \\ \tau(0) &= 0, \end{aligned} \tag{2.13}$$

o sistema de EDOs apresentado em (2.11) e (2.12) nos fornece uma família de raios com um parâmetro  $\sigma$ , a qual são perfeitamente distinguidos mediante a escolha de  $\alpha_0$  e  $\beta_0$ .

Em síntese, obtida a solução de (2.8), a mesma é substituída em (2.9) a fim de especificar a amplitude. Quando estes resultados são colocados em (2.7), a solução aproximada de (2.6) é estabelecida.

## 2.2 Considerações em 2.5D

### 2.2.1 Introdução

Esta seção tem a finalidade de discutir algumas características a respeito da propagação de ondas na situação 2.5D e as principais consequências que isto trará para as integrais do tipo Kirchhoff.

A situação 2.5D é caracterizada essencialmente pelo fato de termos propagação de ondas em 3D, mas os parâmetros do meio nesta situação não variam em uma das direções

transversais, permitindo que qualquer par de fonte receptor ( $\mathbf{s}(\xi_1, \xi_2), \mathbf{g}(\xi_1, \xi_2)$ ) da configuração sísmica adotada permaneça dentro do plano de dependência dos parâmetros.

Assumindo que as coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  sejam parametrizadas da seguinte forma:

$$\mathbf{s}(\xi_1, \xi_2) = (x_s(\xi_1), y_s = \xi_2), \quad \mathbf{g}(\xi_1, \xi_2) = (x_g(\xi_1), y_g = \xi_2)$$

onde  $y$  define a direção fora do plano.

Na verdade, a configuração sísmica dentro do plano é descrita por intermédio de duas funções  $x_s(\xi_1)$  e  $x_g(\xi_1)$ , isto é, apenas pelo parâmetro  $\xi_1$ . A segunda coordenada  $\xi_2$  simplesmente seleciona o que chamamos de plano de simetria onde ambos, fontes e receptores, deverão estar definidos. Além disso, por conveniência identificamos  $\xi_2 = y$ .

## 2.2.2 Raios em 2.5D

Nesta seção iremos estudar o comportamento dos raios na situação 2.5D.

Vamos agora resolver o problema (2.6) com as condições iniciais (2.13) supondo que a velocidade  $c(\mathbf{x})$  não dependa de  $y$ . Ou seja, fazendo uso das expressões (2.11) até (2.13) segue que

$$\dot{p}_2^s = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \right) = 0. \quad (2.14)$$

Isto é,  $p_2^s$  é constante sobre cada raio, e, portanto,

$$p_2^s = \frac{1}{c(\mathbf{x}_0)} \sin \alpha_0^s \sin \beta_0^s. \quad (2.15)$$

Assim, um raio que começa dentro do plano  $y = 0$ , isto é, com  $\beta_0^s = 0$ , permanece dentro do plano sempre ( $p_2^s = 0$ ).

Além disso, da equação (2.15), podemos concluir que a equação para  $y$  em (2.11) e (2.12) torna-se

$$y = \frac{\sigma_s}{c(\mathbf{x}_0)} \sin \alpha_0^s \sin \beta_0^s = p_2^s \sigma_s. \quad (2.16)$$

Cabe aqui observar que os resultados acima são análogas para o ramo do raio que une  $\mathbf{m}$  ao receptor  $\mathbf{g}$ .

Portanto, qualquer que sejam os pontos  $\mathbf{s}$  e  $\mathbf{g}$  dentro do plano, cada raio que conecta estes dois pontos permanece dentro do plano de dependência dos parâmetros. Isto significa que todas as reflexões na situação 2.5D ocorrem em pontos dentro do plano de simetria definido pela linha sísmica  $\xi_2 = y$ . Assim sendo, se  $\mathbf{m}$  é um ponto sobre o refletor então ele pertence ao mesmo plano de simetria do par de fonte-receptor  $(\mathbf{s}, \mathbf{g})$ .

Sem perda de generalidade, podemos tomar  $y = 0$  ou  $\xi_2 = 0$  e  $\mathbf{m}$  na forma  $(x, 0, z)$ .

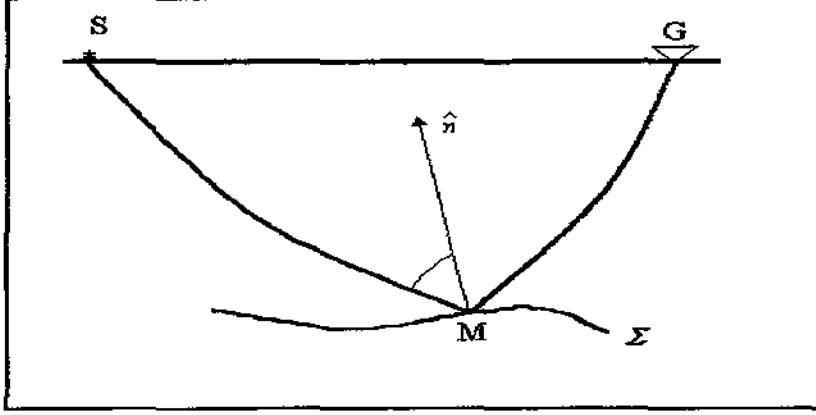


Figura 2.2: Os ramos do raio, **sm** e **mg**, onde **s**, **g**, **m** e  $\hat{n}$  simbolizam a fonte, o receptor, um ponto sobre a superfície  $\Sigma$  e a normal à superfície, respectivamente.

### 2.2.3 Fórmula de Decomposição

Esta seção tem a finalidade de discutir a amplitude dada por (2.7) e como consequência direta veremos que, no desenvolvimento desta análise, surge uma decomposição natural para o fator de espalhamento geométrico.

Inicialmente, sabemos que a amplitude da equação do transporte (2.9) pode ser obtida como solução de uma EDO no parâmetro  $\sigma$  (Bleistein, 1984), cujo resultado para o ramo do raio **sm**, após algumas manipulações algébricas, é dado por

$$G_0^s(\xi, \mathbf{x}) = \frac{A_s(\xi) \sqrt{\sin \alpha_0^s}}{\sqrt{c(\mathbf{x}_0) J(\sigma_s, \alpha_0^s, \beta_0^s)}}, \quad (2.17)$$

sendo  $A_s(\xi)$  o fator de perda de amplitude devido aos obstáculos do meio e  $J$ , o Jacobiano da mudança da variável  $\mathbf{x}$  para  $(\sigma_s, \alpha_0^s, \beta_0^s)$  via equação do raio, isto é,

$$J(\sigma_s, \alpha_0^s, \beta_0^s) = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\sigma_s, \alpha_0^s, \beta_0^s)} \right|. \quad (2.18)$$

Entretanto, usando as particularidades do meio, sabemos que escrever  $y = 0$  é equivalente a escrever  $\beta_0^s = 0$ .

Agora vamos escrever a amplitude (2.17) quando  $\beta_0^s = 0$ . Com este propósito, inicialmente calculamos os elementos da segunda linha da matriz associada ao determinante (2.18), o

resultado (Bleistein, 1986) é

$$\frac{\partial y}{\partial \sigma} = \frac{1}{c(\mathbf{x}_0)} \sin \alpha_0^s \sin \beta_0^s = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \beta_0^s} = \frac{\sigma_s}{c(\mathbf{x}_0)} \cos \beta_0^s \sin \alpha_0^s = \frac{\sigma_s}{c(\mathbf{x}_0)} \sin \alpha_0^s, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha_0^s} = \frac{\sigma}{c(\mathbf{x}_0)} \sin \beta_0^s \cos \alpha_0^s = 0. \quad (2.21)$$

Isto significa que o Jacobiano (2.18) é reduzido a

$$J(\sigma, \alpha_0^s, \beta_0^s) = \frac{\sigma_s}{c(\mathbf{x}_0)} \sin \alpha_0^s \left| \frac{\partial(x, z)}{\partial(\sigma_s, \alpha_0^s)} \right|. \quad (2.22)$$

Definindo o Jacobiano em 2D como

$$K_s = \left| \frac{\partial(x, z)}{\partial(\sigma_s, \alpha_0^s)} \right|, \quad (2.23)$$

podemos concluir que a amplitude desejada é dada por

$$G_0^s(\xi, \mathbf{x}) = \frac{A_s(\xi)}{\sqrt{\sigma_s K_s}}. \quad (2.24)$$

Portanto, para cada um dos ramos do raio, podemos escrever

$$G_0^s(\xi, \mathbf{x}) = \frac{A_s(\xi)}{\sqrt{\sigma_s K_s}} \quad (2.25)$$

e

$$G_0^g(\xi, \mathbf{x}) = \frac{A_g(\xi)}{\sqrt{\sigma_g K_g}}, \quad (2.26)$$

sendo  $A_s(\xi)$  e  $A_g(\xi)$  os fatores de perda de amplitudes devido aos obstáculos ou interfaces, que os dois segmentos do raio encontram em seus trânsitos.

A amplitude da função de Green em 2.5D pode ser escrita como

$$G_0^i(\xi, \mathbf{x}) = \frac{A_i(\xi)}{L_i^{(2.5D)}}, \quad (i = s, g). \quad (2.27)$$

denotando o fator de espalhamento geométrico em 2D por

$$L_i^{(2D)} = \sqrt{K_i}, \quad (i = s, g), \quad (2.28)$$

segue que

$$L_i^{(2.5D)} = L_i^{(2D)} \sqrt{\sigma_i}, \quad (i = s, g). \quad (2.29)$$

Portanto, o fator de espalhamento geométrico em 2.5D,  $L_i^{(2.5D)}$ , é expresso pelo produto de dois fatores:  $L_i^{(2D)}$  e  $\sqrt{\sigma_i}$ . O primeiro constitui o fator de espalhamento geométrico 2D (contribuição dentro do plano de dependência dos parâmetros) e o segundo é o que descreve os efeitos do espalhamento fora do plano.

### 2.2.4 Fator Especial

Consideramos agora a seguinte função fase

$$\Phi_1(\xi, \mathbf{x}) = -[\tau_s(\xi, \mathbf{x}) + \tau_g(\xi, \mathbf{x})]. \quad (2.30)$$

Seja  $y = y^* = 0$  um ponto estacionário para a função  $\Phi_1$ , então

$$\left. \frac{\partial \Phi_1(\xi, \mathbf{x})}{\partial y} \right|_{y=0} = -[p_2^s(\xi, \mathbf{x}) + p_2^g(\xi, \mathbf{x})]|_{y=0} = 0. \quad (2.31)$$

Isto significa que a soma das duas contribuições individuais para  $p_2$ , isto é,  $p_2^s(\xi, \mathbf{x})$  e  $p_2^g(\xi, \mathbf{x})$  devem ser opostos (i.e.,  $\beta_0^s = -\beta_0^g$  lei de Snell).

Agora diferenciando a expressão (2.16) em relação ao parâmetro  $y$ , obtemos

$$1 = \frac{\partial p_2^s(\xi, \mathbf{x})}{\partial y} \sigma_s + p_2^s(\xi, \mathbf{x}) \frac{\partial \sigma_s}{\partial y}. \quad (2.32)$$

Avaliando (2.32) em  $y = 0$ , temos

$$\left. \frac{\partial p_2^s(\xi, \mathbf{x})}{\partial y} \right|_{y^*=0} = \frac{1}{\sigma_s} \quad (2.33)$$

e conseqüentemente,

$$\left. \frac{\partial p_2^g(\xi, \mathbf{x})}{\partial y} \right|_{y^*=0} = \frac{1}{\sigma_g}. \quad (2.34)$$

Como

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi_1(\xi, \mathbf{x})}{\partial y^2} \right|_{y^*=0} = - \left[ \left. \frac{\partial p_2^s(\xi, \mathbf{x})}{\partial y} \right|_{y^*=0} + \left. \frac{\partial p_2^g(\xi, \mathbf{x})}{\partial y} \right|_{y^*=0} \right], \quad (2.35)$$

segue que,

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi_1(\xi, \mathbf{x})}{\partial y^2} \right|_{y^*=0} = - \left( \frac{1}{\sigma_s} + \frac{1}{\sigma_g} \right) = -\frac{1}{\sigma_F}. \quad (2.36)$$

A importância da representação (2.36) será justificada pela sua frequente utilização nos resultados que deverão ser estabelecidos ao longo deste trabalho. Convém observar que a equação (2.36) define o fator  $\sigma_F$ , que fará o papel da contribuição fora do plano do espalhamento geométrico de Fresnel.

## 2.3 Meio Verticalmente Não Homogêneo

Esta seção tem a finalidade de apresentar expressões analíticas para a posição  $x$ , isto é, distância horizontal entre fontes receptores, para o parâmetro do raio, para o fator de espalhamento geométrico em 2D e para o tempo de trânsito.

### 2.3.1 Expressões Analíticas

Nosso objetivo agora consiste em resolver o problema (2.5), admitindo agora que a velocidade da onda seja uma função somente da profundidade, isto é,  $c = c(z)$ . Neste caso as equações características para o ramo do raio **sm** podem ser escritas da seguinte forma:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{p_1}{p_3}, \quad x(z_s) = x_s, \quad (2.37)$$

$$\frac{dp_1}{dz} = 0, \quad p_1(x_s) = \frac{\sin \alpha_0^s}{c(z_s)}, \quad (2.38)$$

$$\frac{dp_3}{dz} = \frac{1}{2p_3} \frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{c^2(z)} \right], \quad p_3(z_s) = \frac{\cos \alpha_0^s}{c(z_s)}, \quad (2.39)$$

$$\frac{d\tau}{dz} = \frac{1}{p_3} \frac{1}{c^2(z)}, \quad \tau(z_s) = 0, \quad (2.40)$$

$$\frac{d\sigma}{dz} = \frac{1}{p_3}, \quad \sigma(z_s) = 0. \quad (2.41)$$

Agora fazendo uso destas equações, obtemos

$$p_1 = \frac{1}{c(z_s)} \sin \alpha_0^s \quad (2.42)$$

o que significa que  $p_1$  é constante ao longo do raio. Podemos escrever então:

$$p_1 = \frac{\sin \alpha_0^s}{c(z_s)} = \frac{\sin \alpha_0^m}{c(z_m)}, \quad (2.43)$$

$$p_2 = 0 \quad (2.44)$$

e

$$p_3 = \pm \sqrt{\frac{1}{c^2(z)} - \frac{\sin^2 \alpha_0^s}{c^2(z_s)}}. \quad (2.45)$$

obtida da relação  $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \frac{1}{c^2(z)}$ .

Evidentemente, escolheremos a raiz com sinal positivo, pois estamos interessados em raios que estejam direcionados para baixo. Observa-se que em  $z = z_s$ , a raiz quadrada é positiva para todo  $\alpha_0^s$ . Portanto, considerando  $z_s = 0$  (fonte em  $\mathbf{x}_0 = (x_s, 0, 0)$ ) e  $|\alpha_0^s| < \pi/2$ , concluímos que a raiz quadrada permanece real em alguma vizinhança da origem, permitindo a resolução das equações acima nesta vizinhança, isto é,

$$x - x_s = \frac{\sin \alpha_0^s}{c(0)} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\frac{1}{c^2(z')} - \frac{\sin^2 \alpha_0^s}{c^2(0)}}}, \quad (2.46)$$

$$\tau_s = \int_0^z \frac{dz'}{c^2(z') \sqrt{\frac{1}{c^2(z')} - \frac{\sin^2 \alpha_0^s}{c^2(0)}}}, \quad (2.47)$$

$$\sigma_s = \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\frac{1}{c^2(z')} - \frac{\sin^2 \alpha_0^s}{c^2(0)}}}. \quad (2.48)$$

Entretanto, reescrevendo estas equações em termos do índice de refração, isto é,

$$n(z) = c(0)/c(z) \quad (2.49)$$

obtemos, agora para ambos os ramos do raio,

$$x - x_i = \sin \alpha_0^i \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{n^2(z') - \sin^2 \alpha_0^i}}, \quad (i = s, g), \quad (2.50)$$

$$\tau_i = \frac{1}{c(0)} \int_0^z \frac{n^2(z') dz'}{\sqrt{n^2(z') - \sin^2 \alpha_0^i}}, \quad (i = s, g), \quad (2.51)$$

$$\sigma_i = c(0) \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{n^2(z') - \sin^2 \alpha_0^i}}, \quad (i = s, g). \quad (2.52)$$

Observamos ainda que para qualquer meio com este tipo de velocidade, a combinação das expressões (2.50) e (2.52), nos fornece

$$\sigma_i = \frac{c_0(x - x_i)}{\sin \alpha_0^i}. \quad (2.53)$$

As fórmulas (2.50), (2.51) e (2.52) são as expressões analíticas para a posição  $x$ , isto é, distância horizontal entre fontes receptores, o tempo de trânsito  $\tau$  e o parâmetro do raio  $\sigma$ , respectivamente. Por outro lado, aplicando a regra da cadeia ao Jacobiano expresso pela expressão (2.18), o fator de espalhamento geométrico em 2D pode ser dado por

$$K_s = \left| \frac{\partial(x, z)}{\partial(\sigma_s, \alpha_0^s)} \right| = \left| \frac{\partial(x, z)}{\partial(\alpha_0^s, z)} \frac{\partial(z, \alpha_0^s)}{\partial(\sigma_s, \alpha_0^s)} \right| = \left| \frac{\partial x}{\partial \alpha_0^s} \frac{\partial z}{\partial \sigma_s} \right|. \quad (2.54)$$

Usando as expressões (2.41) e (2.50) em (2.54), obtemos, agora para  $i = s, g$ ,

$$L_i^{(2D)} = \sqrt{K_i} = \left[ \frac{\cos \alpha_0^i \sqrt{n^2(z) - \sin^2 \alpha_0^i}}{c(0)} \int_0^z \frac{n^2(z') dz'}{(n^2(z') - \sin^2 \alpha_0^i)^{3/2}} \right]^{1/2}. \quad (2.55)$$

Por outro lado, a expressão que especifica o tempo de trânsito pode ser escrita como,

$$\begin{aligned} \tau_D &= \tau_s(\xi, \mathbf{x}) + \tau_g(\xi, \mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{c(0)} \left[ \int_0^z \frac{n^2(z') dz'}{(n^2(z') - \sin^2 \alpha_0^s)^{1/2}} + \int_0^z \frac{n^2(z') dz'}{(n^2(z') - \sin^2 \alpha_0^g)^{1/2}} \right] \end{aligned} \quad (2.56)$$

onde  $\alpha_0^s$  ( $\alpha_0^g$ ) é o ângulo que o raio que une a fonte  $s$  (receptor  $g$ ) ao ponto  $\mathbf{m}_R$  sobre o refletor faz com o eixo  $z$ , isto é, com a componente vertical  $z$ .

### Determinante de Beylkin

O determinante de Beylkin (1985) é dado por,

$$h_B = \det \left| \begin{pmatrix} \nabla \tau_D(\xi, \mathbf{m}) \\ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \nabla \tau_D(\xi, \mathbf{m}) \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \nabla \tau_D(\xi, \mathbf{m}) \end{pmatrix} \right|, \quad (2.57)$$

onde todas as derivadas são avaliadas para as fontes-receptores com localização  $\xi$  e  $\mathbf{m}$  é um ponto escolhido arbitrariamente em profundidade. Entretanto, como

$$\left. \frac{\partial^2 \tau_D(\xi, \mathbf{m})}{\partial \xi_1 \partial y} \right|_{y^*=0} = \left( \frac{\partial^2 \tau_D(\xi, \mathbf{m})}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial y} \right) \Big|_{y^*=0}. \quad (2.58)$$

Então usando a expressão (2.33) e o fato de que na mudança de coordenadas, temos  $y = \xi_2$ , podemos escrever,

$$\left. \frac{\partial^2 \tau_D(\xi, \mathbf{m})}{\partial \xi_1 \partial y} \right|_{y^*=0} = 0, \quad (2.59)$$

cujas substituição das expressões (2.33) e (2.36) em (2.57), possibilitam escrever

$$h_B = \bar{h}_B \left( \frac{1}{\sigma_s} + \frac{1}{\sigma_g} \right) \quad (2.60)$$

com  $\sigma_s$  e  $\sigma_g$  calculados ao longo dos segmentos de raios  $\mathbf{sm}$  e  $\mathbf{mg}$ , respectivamente. Aqui,

$$\bar{h}_B = \det \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_D(\xi, \mathbf{m})}{\partial x} & \frac{\partial \tau_D(\xi, \mathbf{m})}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 \tau_D(\xi, \mathbf{m})}{\partial \xi_1 \partial x} & \frac{\partial^2 \tau_D(\xi, \mathbf{m})}{\partial \xi_1 \partial z} \end{pmatrix} \right| \quad (2.61)$$

é o determinante de Beylkin em 2D.

Finalmente como a velocidade da onda é função apenas da profundidade, isto é  $c = c(z)$ , significa então que o determinante de Beylkin pode ser simplificado, ou seja, mediante o uso das fórmulas em 2.5D apresentadas por Castro e Červený (1991). O resultado é

$$\bar{h}_B = \frac{2 \cos^2 \alpha_m}{c(\mathbf{m})} \left[ \Gamma_s \frac{\cos \alpha_m^s}{\sigma_s} + \Gamma_g \frac{\cos \alpha_m^g}{\sigma_g} \right]. \quad (2.62)$$

onde  $\Gamma_s$  e  $\Gamma_g$  representam as contribuições correspondentes as configurações de fonte-receptores e aqui serão consideradas ambas iguais a unidade (configuração de fontes-receptores com afastamento comum).

Como conclusão podemos especificar o seguinte roteiro: dadas as posições fonte e receptor nós determinamos  $\alpha_0^i$  usando a equação (2.50), este resultado é substituído nas expressões (2.51) e (2.52) para obter  $\sigma_i$  e  $\tau_i$ , depois, substituímos os resultados dentro da expressão (2.55), quando todos estes resultados são substituídos em (2.7),  $\mathcal{G}$  é especificada.

## 2.4 Casos Analíticos

Esta seção tem por finalidade apresentar as expressões analíticas para a posição  $x$ , isto é, distância horizontal entre os pontos  $s$  ou  $g$  e  $m$ , para o parâmetro do raio  $\sigma$ , para o tempo de trânsito  $\tau$  e para o fator de espalhamento geométrico  $K$  correspondentes aos quatro modelos de distribuições de velocidades ilustradas na Figura 2.3.

No decorrer deste trabalho serão estudadas, além da velocidade constante, três distribuições de velocidades verticais. Estas foram escolhidas de maneira que a velocidade, a vagarosidade quadrada e o logaritmo da velocidade tenham gradiente vertical constante.

A escolha dessas distribuições de velocidades se deve ao fato de que elas permitem a obtenção de fórmulas analíticas para as quantidades envolvidas no traçamento dos raios (Bleistein, 1986). Assim, elas também possibilitam um traçamento analítico das operações de imageamentos.

Baseado neste fato, apresentamos fórmulas analíticas correspondentes as funções pesos e curvas de empilhamentos para os processos de imageamentos discutidos a seguir.

Para as ilustrações numéricas usamos os modelos de velocidades bem semelhantes para as quatro distribuições de velocidades. Ou seja, uma velocidade de 3.5 km/s no caso da velocidade constante e nos casos dos gradientes verticais constantes, velocidades coincidentes em  $z = 0$  (velocidade de 3 km/s) e em  $z = 1$  km (velocidade de 4 km/s).

Convém observar que estes modelos foram escolhidos com estas características para serem semelhantes. Portanto, esperamos que as implementações numéricas para as fórmulas analíticas relativas as funções pesos e curvas de empilhamento sejam também semelhantes. Desta forma, este tipo de situação permite que no desenvolvimento desta tese, detectássemos eventuais erros nos cálculos do desenvolvimento das fórmulas e nas suas implementações numéricas através da comparação dos resultados para esses quatro casos especiais.

Evidentemente, em outros modelos, os valores numéricos dessas fórmulas analíticas podem apresentar diferenças significativas, como por exemplo, se considerarmos velocidades que tenham o mesmo gradiente vertical no início do intervalo, mas, que divirjam cada vez mais com a profundidade.

A importância do estudo desses casos especiais está na possibilidade do seu uso na aproximação de uma distribuição de velocidade mais complexa. O fato de que as respectivas fórmulas analíticas sejam conhecidas, o que permite cálculos mais rápidos das quantidades correspondentes ao traçamento da teoria dos raios, fazem com que as aproximações deste tipo sejam usadas frequentemente na prática, principalmente, quando necessitamos obter resultados com mais rapidez e com menor custo.

Nestas circunstâncias, o uso dessas distribuições de velocidades fornece muitas vezes resultados bem satisfatórios. O mesmo espera-se dos métodos de imageamentos em amplitude verdadeira tratados no decorrer deste trabalho.

É relevante observar ainda que as fórmulas analíticas obtidas, também servem para minimizar o custo no tratamento de situações mais complicadas, tornando suficiente representar qualquer distribuição de velocidade por um conjunto de camadas ou células, nas quais se encontre presente uma dessas distribuições. Assim, ajustando-se as condições de fronteira para permitir a conexão destas camadas ou células, é possível criar um traçamento de raios para determinar as quantidades desejadas, célula por célula, através do uso das fórmulas analíticas conhecidas. Deste modo minimiza-se o tempo e o custo para a obtenção dos

resultados dos mais diversos métodos de imageamentos.

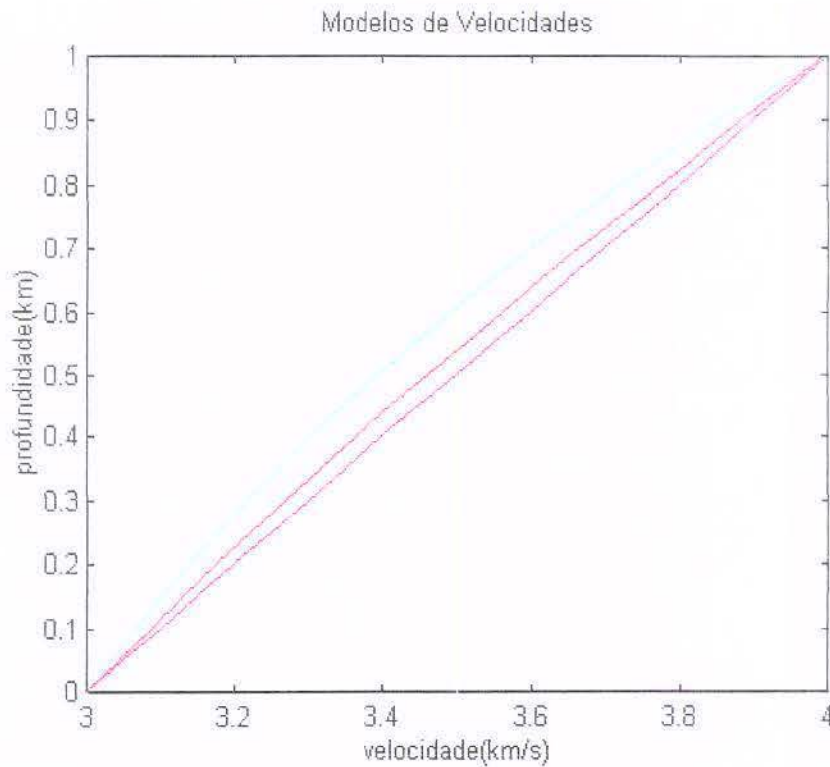


Figura 2.3: Exemplos de quatro distribuições de velocidades: constante (linha amarela), com gradiente constante (linha roxa), vagarosidade quadrada com gradiente constante (linha azul) e logaritmo da velocidade com gradiente constante (linha vermelha).

### 2.4.1 Velocidade Constante

Substituindo  $c(z) = c_0$  e  $n(z) = 1$  nas expressões (2.52) e (2.55), obtemos respectivamente,

$$\sigma_i = c_0 \int_0^z \frac{dz'}{(1 - \sin^2 \alpha_0^i)^{1/2}} = \frac{c_0 z}{\cos \alpha_0^i} \quad (i = s, g) \quad (2.63)$$

e

$$L_i^{(2D)} = \sqrt{K_i} = \sqrt{\frac{(1 - \sin^2 \alpha_0^i)^{1/2} \cos \alpha_0^i}{c_0} \int_0^z \frac{dz'}{(1 - \sin^2 \alpha_0^i)^{3/2}}} = \sqrt{\frac{z}{c_0 \cos \alpha_0^i}} \quad (i = s, g). \quad (2.64)$$

Além disso, substituindo  $c(z) = c_0$  em (2.50), obtemos,

$$x - x_i = \sin \alpha_0^i \int_0^z \frac{dz'}{\cos \alpha_0^i} \quad (i = s, g), \quad (2.65)$$

que resulta em

$$(x - x_i) \cotg \alpha_0^i = z \quad (i = s, g). \quad (2.66)$$

Portanto, substituindo a expressão (2.53) em (2.64) e (2.65), obtemos a seguinte fórmula para o fator de espalhamento geométrico 2D

$$L_i^{(2D)} = \sqrt{\frac{(x - x_i)}{c_0 \sin \alpha_0^i}}, \quad (i = s, g). \quad (2.67)$$

Combinando os resultados (2.63) e (2.64) com (2.65) podemos escrever

$$\sigma_i = c_0 \ell_i \quad \text{com} \quad \ell_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + z^2}, \quad (i = s, g), \quad (2.68)$$

e

$$L_i^{(2D)} = \sqrt{\frac{\ell_i}{c_0}}, \quad (i = s, g). \quad (2.69)$$

As expressões (2.68) e (2.69) serão utilizadas nos próximos capítulos com a finalidade de especificar a função peso e a linha de empilhamento correspondentes as operações de migração e demigração de Kirchhoff para um meio homogêneo.

## 2.4.2 Velocidade com Gradiente Constante

Agora vamos utilizar o modelo de velocidade

$$c(z) = gz + c_0 \quad (2.70)$$

em (2.50). O resultado da integração pode ser escrito como

$$x - x_i = \frac{c_0}{g \sin \alpha_0^i} [\cos \alpha_0^i - \cos \alpha_m^i] \quad (i = s, g). \quad (2.71)$$

Substituindo (2.70) dentro de (2.52) e (2.55) e fazendo uso da expressão (2.71), os resultados para ambos os ramos do raio podem ser dados por

$$\sigma_i = \frac{\ell_i}{2} \sqrt{g^2 \ell_i^2 + 4c(z)c_0} \quad \text{e} \quad L_i^{(2D)} = \sqrt{K_i} = \sqrt{\frac{1}{cc_0}} \sigma_i \quad (i = s, g). \quad (2.72)$$

Observamos que  $\sigma_i$  é obtido eliminando-se  $\sin \alpha_0$  da expressão (2.53) utilizando (2.71). As expressões (2.72) formam a base para o estabelecimento da função peso para as integrais do tipo Kirchhoff que serão especificadas nos próximos capítulos, levando-se em conta o modelo de distribuição de velocidade descrito acima.

### 2.4.3 Vagariosidade Quadrada com Gradiente Constante

n essa seção as quantidades análogas ao desenvolvimento da seção anterior são obtidas utilizando o modelo de velocidade

$$\frac{1}{c^2(z)} = \frac{1}{c_0^2} + gz \quad (2.73)$$

inicialmente em (2.50), que combinado com (2.46), fornece

$$\begin{aligned} x - x_i &= \frac{2 \sin \alpha_0^i}{gc_0} \left[ \frac{1}{c(z)} \cos \alpha_m^i - \frac{1}{c_0} \cos \alpha_0^i \right] \\ &= \frac{2}{gc_0 c(z)} \sin(\alpha_0^i - \alpha_m^i) \quad (i = s, g). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Em seguida usamos (2.73) em (2.52). O resultado após a combinação com a expressão (2.74) é

$$\sigma_i = \frac{4c_0 \ell_i}{\sqrt{4 + 2gc_0^2(z + \ell_i)} + \sqrt{4 + 2gc_0^2(z - \ell_i)}}, \quad (i = s, g), \quad (2.75)$$

onde  $\ell_i$ , ( $i = s, g$ ), são estabelecidos pela fórmula (2.68). A solução da integral (2.55) mediante a substituição do modelo (2.73) produz

$$L_i^{(2D)} = \sqrt{\frac{\sigma_i C_i}{cc_0}}, \quad (i = s, g), \quad (2.76)$$

onde as quantidades  $C_i$  ( $i = s, g$ ), tem o seguinte significado geométrico

$$C_i = \cos(\alpha_m^i - \alpha_0^i). \quad (2.77)$$

Com o auxílio da expressão (2.74) a quantidade apresentada em (2.77) pode ser expressa em termos de quantidades conhecidas por

$$C_i = \sqrt{1 - \left( \frac{g c(z) c_0 (x - x_i)}{2} \right)^2} \quad (i = s, g), \quad (2.78)$$

onde (2.74), (2.75) e (2.76) constituem a base da derivação da função peso e linha de empilhamento para as operações de imageamento que deverão ser tratadas nos próximos capítulos.

### 2.4.4 Logarítmo da Velocidade com Gradiente Constante

Substituindo o modelo de velocidade

$$\ln c(z) = \ln c_0 + gz \quad \text{ou} \quad c(z) = c_0 e^{gz}, \quad (2.79)$$

na integral (2.50), obtemos,

$$x - x_i = \frac{1}{g} \left[ \arcsin(e^{gz} \sin \alpha_0^i) - \alpha_0^i \right] \quad (i = s, g). \quad (2.80)$$

Agora isolando o termo  $\sin \alpha_0^i$  com o auxílio da expressão (2.53), a substituição do modelo (2.79) na integral (2.52) permite escrever,

$$\sigma_i = \frac{c_0(x - x_i)}{\sin g(x - x_i)} \left[ e^{2gz} - 2e^{gz} \cos g(x - x_i) + 1 \right]^{1/2}, \quad (2.81)$$

bem como substituindo também (2.79) em (2.55), obtemos

$$L_i^{(2D)} = \sqrt{\frac{\sqrt{c^2(z) + c_0^2 - 2c(z)c_0 \cos g(x - x_i)}}{gc_0c(z)}} = \sqrt{\frac{\sigma_i Y_i}{c_0c(z)}} \quad (i = \mathbf{s}, \mathbf{g}), \quad (2.82)$$

onde

$$Y_i = \frac{\sin g(x - x_i)}{g(x - x_i)} \quad (i = \mathbf{s}, \mathbf{g}). \quad (2.83)$$

Estas seções foram destinadas à descrições das fórmulas analíticas para o parâmetro do raio ( $\sigma$ ), o fator de espalhamento geométrico ( $L^{(2D)}$ ), a distância horizontal entre a fonte  $\mathbf{s}$  (ou receptor  $\mathbf{g}$ ) e  $\mathbf{m}$ , o tempo de trânsito ( $\tau$ ), para quatro modelos de distribuições de velocidades (constante, gradiente constante, vagarosidade quadrada com gradiente constante, logarítmo da velocidade gradiente constante).

## Capítulo 3

# INTEGRAL DE KIRCHHOFF-HELMHOLTZ

### 3.1 Introdução

Esse capítulo tem a finalidade de apresentar a representação integral de Kirchhoff-Helmholtz, a qual é proveniente dos problemas ligados a espalhamento de ondas (Bleistein, 1984). Esta representação integral resolve o conhecido problema direto, que em sua forma final permite obter a resposta sísmica em um receptor, conhecidos a localização da fonte e do receptor, um modelo de velocidade e um refletor.

### 3.2 Forma Compacta

O objetivo desta seção consiste em apresentar uma representação compacta para a integral de Kirchhoff-Helmholtz. Consideramos inicialmente as seguintes condições conhecidas como aproximação de Kirchhoff-Helmholtz:

(A) O campo de ondas espalhado em cada ponto  $\mathbf{x} \in E$  é trocado por seu campo refletido especular, isto é, o refletor é trocado localmente por seu plano tangente em  $\mathbf{x}$  e correspondentemente o campo de ondas incidente pelo campo de ondas planas.

Desta forma, o campo de ondas refletidas é então dado pelo campo de ondas incidente  $\Phi_I$  (trocada a direção de propagação, ou seja, trocado o vetor vagarosidade de acordo com a lei de Snell), o que significa que este campo de ondas pode agora ser descrito pelo produto do campo de ondas planas incidente  $\Phi_I$  pelos correspondentes coeficientes de reflexões  $R_c$ , (Veja, Figura 3.1.)

Simbolicamente,

$$\Phi_s(s, \mathbf{m}_R, \omega) = R_c(s, \mathbf{m}_R) \Phi_I(s, \mathbf{m}_R, \omega), \quad \mathbf{m}_R \in E \quad (A).$$

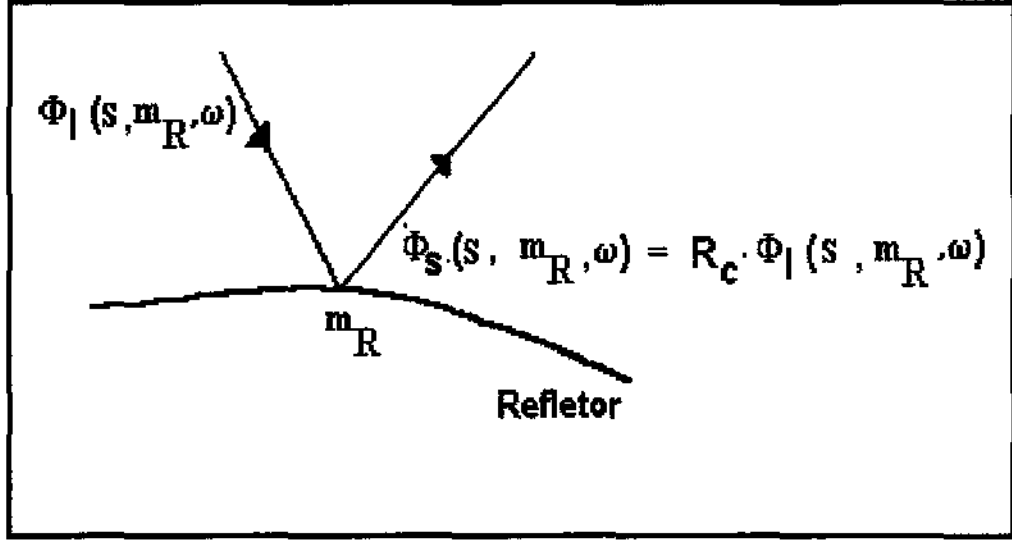


Figura 3.1:  $\Phi_s(s, \mathbf{m}_R, \omega)$  é o campo de ondas espalhadas medido em  $\mathbf{m}_R$  devida uma fonte  $s$ ,  $R_c(s, \mathbf{m}_R)$  é o coeficiente de reflexão de onda plana computado em  $\mathbf{m}_R$  e  $\Phi_I(s, \mathbf{m}_R, \omega)$  o campo de ondas incidente medido em  $\mathbf{m}_R$  devido a ação da fonte  $s$ .

(B) A derivada do campo de ondas é trocada pela derivada normal do campo de ondas refletidas obtido acima no mesmo ponto  $\mathbf{x} \in E$ . Neste caso, o campo de ondas refletidas especular tem o mesmo sinal das ondas incidentes, mas sua derivada normal tem sinal oposto, pois, a componente normal do gradiente da fase da onda refletida tem sinal oposto a componente normal da onda incidente, isto é, as direções das ondas incidentes e refletidas são opostas em  $E$ . Simbolicamente,

$$\frac{\partial \Phi_s(s, \mathbf{m}_R, \omega)}{\partial n} = -R_c(s, \mathbf{m}_R) \frac{\partial \Phi_I(s, \mathbf{m}_R, \omega)}{\partial n} \quad \mathbf{m}_R \in E \quad (B).$$

Inserindo as condições (A) e (B) na representação (2.4) e assumindo que o campo de ondas incidentes seja gerada por uma fonte pontual  $s$ , ou seja, dada pela função de Green, levando a forma da onda ou pulso da fonte pontual em conta (i.e.,  $\Phi_s(\mathbf{x}, \omega) = F(\omega) \mathcal{G}^s(\xi, \mathbf{x}, \omega)$ ) e adotando a notação adequada  $U_s(s, \mathbf{g}, \omega) = U_s(\xi, \omega)$ , para caracterizar o campo de ondas

refletidas devido uma fonte pontual  $\mathbf{s}$  e medida num receptor  $\mathbf{g}$ , a representação de Kirchhoff Helmholtz pode ser reescrita como

$$U_s(\mathbf{s}, \mathbf{g}, \omega) = -\frac{F(\omega)}{4\pi} \int \int_E dE(\mathbf{x}) R_c(\xi, \mathbf{x}) \quad (3.1)$$

$$\times \left( \mathcal{G}^s(\xi, \mathbf{x}, \omega) \frac{\partial \mathcal{G}^s(\xi, \mathbf{x}, \omega)}{\partial n} + \mathcal{G}^g(\xi, \mathbf{x}, \omega) \frac{\partial \mathcal{G}^g(\xi, \mathbf{x}, \omega)}{\partial n} \right).$$

com  $\mathbf{x} \in E$ .

Agora consideramos as aproximações de ordem zero do raio para as funções de Green  $\mathcal{G}^s(\xi, \mathbf{x}, \omega)$  e  $\mathcal{G}^g(\xi, \mathbf{x}, \omega)$  correspondentes a equação (2.7). Além disso, aproximamos a derivada normal de  $\mathbf{g}$  pelo termo líder em alta frequência, isto é,

$$\frac{\partial \mathcal{G}^s(\xi, \mathbf{x}, \omega)}{\partial n} \simeq -i\omega \frac{\partial \tau_s(\xi, \mathbf{x})}{\partial n} G_0^s(\xi, \mathbf{x}) \exp[-i\omega \tau_s(\xi, \mathbf{x})] \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}^g(\xi, \mathbf{x}, \omega)}{\partial n} \simeq -i\omega \frac{\partial \tau_g(\xi, \mathbf{x})}{\partial n} G_0^g(\xi, \mathbf{x}) \exp[-i\omega \tau_g(\xi, \mathbf{x})]. \quad (3.3)$$

Substituindo as aproximações (3.2) e (3.3) na representação integral (3.1), obtemos

$$U_s(\xi, \omega) \simeq \frac{i\omega F(\omega)}{4\pi} \int \int_E dE(\mathbf{x}) R_c(\xi, \mathbf{x}) G_0^s(\xi, \mathbf{x}) G_0^g(\xi, \mathbf{x}) \quad (3.4)$$

$$\times \left[ \frac{\partial \tau_s(\xi, \mathbf{x})}{\partial n} + \frac{\partial \tau_g(\xi, \mathbf{x})}{\partial n} \right] \exp[-i\omega \tau_D(\xi, \mathbf{x})]$$

onde

$$\tau_D(\xi, \mathbf{x}) = \tau_s(\xi, \mathbf{x}) + \tau_g(\xi, \mathbf{x}). \quad (3.5)$$

Definindo

$$W_{KH}(\xi, \mathbf{x}) = G_0^s(\xi, \mathbf{x}) G_0^g(\xi, \mathbf{x}) \vartheta_{KH}(\xi, \mathbf{x}) \quad (3.6)$$

sendo

$$\vartheta_{KH}(\xi, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial n} [\tau_s(\xi, \mathbf{x}) + \tau_g(\xi, \mathbf{x})] \quad (3.7)$$

o conhecido fator de obliquidade, temos então que a representação integral (3.4) pode ser dada por:

$$U_s(\xi, \omega) \simeq \frac{i\omega F(\omega)}{2\pi} \int \int_E dE(\mathbf{x}) R_c(\xi, \mathbf{x}) W_{KH}(\xi, \mathbf{x}) \quad (3.8)$$

$$\times \exp[-i\omega \tau_D(\xi, \mathbf{x})].$$

Portanto, aplicando a transformada de Fourier inversa em (3.8) e levando em conta que

$$u(\xi, \mathbf{x}, t) = R_c(\xi, \mathbf{x}) f(t). \quad (3.9)$$

segue que

$$u_s(\xi, t) \simeq \frac{1}{2\pi} \int \int_E W_{KH}(\xi, \mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial t} u(\xi, \mathbf{x}, t - \tau_D(\xi, \mathbf{x})) dE(\mathbf{x}) \quad (3.10)$$

que é uma forma compacta da representação integral de Kirchhoff-Helmholtz.

A representação integral (3.10) possibilita a determinação da resposta sísmica em um receptor  $\mathbf{g}$ , correspondente a uma fonte pontual  $\mathbf{s}$ , sempre que sejam dadas a localização fonte-receptor, um modelo de velocidade e um refletor.

Além disso, do ponto de vista físico, usualmente dizemos que o campo de ondas registrado num receptor  $\mathbf{g}$  é construído por superposições de contribuições de fontes secundárias de Huygens que são originadas ao longo do refletor imediatamente após o contato do campo de ondas incidentes com a superfície de reflexão.

Por outro lado ainda inseridas na função peso  $W_{KH}$  estão os efeitos do “overburden”, isto é, as contribuições provocadas pela propagação no meio compreendido entre a superfície de aquisição de dados e a superfície de reflexão e em  $u$  estão as informações ou atributos ligados ao refletor.

### 3.3 Avaliação Assintótica - Fora do Plano

Para efetuar a avaliação assintótica fora do plano de dependência dos parâmetros da representação integral (3.10), inicialmente consideramos que  $E$  é um refletor suave descrito pela mesma curva  $C$  em todos os planos paralelos ao plano  $xz$  (observe a Figura 3.2).

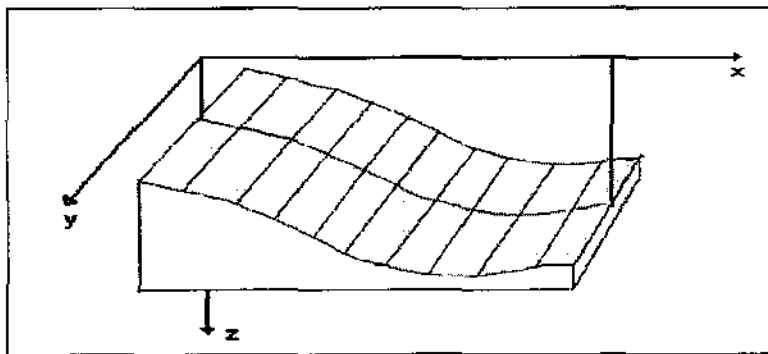


Figura 3.2: Situação 2.5D. O plano  $xz$  é o plano de dependência dos parâmetros do meio.

$$C : \quad x = x(\eta_1) \quad \text{e} \quad z = z(\eta_1) \quad (3.11)$$

onde  $\eta_1$  caracteriza o comprimento de arco ao longo da curva  $C$ .

Assim sendo, o refletor  $E$  é uma superfície gerada por retas paralelas ao eixo  $y$ , como sabemos a reta paralela móvel (as retas paralelas) é conhecida como a geratriz da superfície cilíndrica e a curva plana  $C$  a diretriz desta superfície.

A superfície é descrita mediante a utilização do parâmetro bidimensional  $\eta = (\eta_1, \eta_2)$  no sentido da definição (3.11) e do fato de que  $y = \eta_2$ . Portanto, a representação integral (3.8) pode ser reescrita como

$$U_s(\xi, \omega) \simeq \frac{i\omega F(\omega)}{2\pi} \int_C dc \int_{-\infty}^{\infty} dy R_c(\xi, (x(\eta_1), y, z(\eta_1))) W_{KH}(\xi, (x(\eta_1), y, z(\eta_1))) \\ \times \exp[-i\omega\tau_D(\xi, (x(\eta_1), y, z(\eta_1)))]. \quad (3.12)$$

Para evitar exagero de subíndices, vamos sem perda de generalidades, utilizar  $(\xi, \eta, y)$  ao invés de  $(\xi, (x(\eta_1), y, z(\eta_1)))$  na expressão (3.12), para aplicar o método da fase estacionária para a integral acima. Inicialmente escrevemos (3.12) da seguinte forma:

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dy R_c(\xi, \eta, y) W_{KH}(\xi, \eta, y) \exp[-i\omega\tau_D(\xi, \eta, y)]. \quad (3.13)$$

De início definimos

$$\Phi_1(\xi, \eta, y) = -\tau_D(\xi, \eta, y) = -[\tau_s(\xi, \eta, y) + \tau_g(\xi, \eta, y)]. \quad (3.14)$$

Então,

$$\frac{\partial \Phi_1(\xi, \eta, y)}{\partial y} = - \left[ \frac{\partial \tau_s(\xi, \eta, y)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_g(\xi, \eta, y)}{\partial y} \right]. \quad (3.15)$$

Doravante, como a integral acima tem um integrando oscilante significa que a sua contribuição deverá ser dada apenas no ponto estacionário, caso contrário ela será nula.

Assim, avaliando (3.15) no suposto ponto estacionário  $y = y^* = 0$ , temos

$$\left. \frac{\partial \Phi_1(\xi, \eta, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad \text{para todo } \eta \quad (3.16)$$

implicando em

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi_1(\xi, \eta, y)}{\partial y \partial \eta} \right|_{y=0} = 0. \quad (3.17)$$

Portanto, aplicando a fórmula da fase estacionária (Bleistein, 1984) à integral dada em (3.13), temos

$$I(\omega) \simeq \frac{(2\pi)^{1/2} \exp(-i\mu_2\pi/4) \exp[-i\omega\tau_D(\xi, \eta, 0)] W_{KH}(\xi, \eta, 0) R_c(\xi, \eta, 0)}{|\omega|^{1/2} \left( \left| \frac{\partial^2 \tau_D(\xi, \eta, y)}{\partial y^2} \right|_{y=0} \right)^{1/2}}. \quad (3.18)$$

onde

$$\mu_2 = \text{sinal} \left( \left. \frac{\partial^2 \tau_D(\xi, \eta, y)}{\partial y^2} \right|_{y=0} \right) = \text{sinal} \left( \frac{1}{\sigma_s} + \frac{1}{\sigma_g} \right) = 1. \quad (3.19)$$

Assumindo que todos os termos integrantes da avaliação assintótica (3.18) com o argumento  $(\xi, \eta, 0)$  possam, sem perda de generalidade ser dados simplesmente com o argumento  $(\xi, \eta)$  e definindo

$$W_{KH}^{(2.5D)}(\xi, \eta) = \sqrt{\sigma_F} W_{KH}(\xi, \eta, 0) \quad (3.20)$$

segue então que

$$\begin{aligned} U_s(\xi, \omega) &\simeq \frac{\sqrt{(i\omega)F(\omega)}}{(2\pi)^{1/2}} \int_C dC R_c(\xi, \eta) W_{KH}^{(2.5D)}(\xi, \eta) \\ &\times \exp[-i\omega\tau_D(\xi, \eta)]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Utilizando a propriedade

$$\mathcal{F} \left[ \frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}} f(t) \right] = \sqrt{i\omega} F(\omega) \quad (3.22)$$

conhecida como transformada de Fourier da derivada temporal de ordem  $n = 1/2$  (Oldham, et al., 1974), onde  $\sqrt{i\omega}$  é entendida como

$$\sqrt{i\omega} = |\omega|^{1/2} \exp[i\pi/4].$$

Substituindo (4.9) em (3.21) e utilizando (3.9) temos

$$\begin{aligned} U_s(\xi, t) &\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_C dC R_c(\xi, \eta) W_{KH}^{(2.5D)}(\xi, \eta) \frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}} f[t - \tau_D(\xi, \eta)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_C dC W_{KH}^{(2.5D)}(\xi, \eta) \frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}} u(\xi, \eta, t) \Big|_{t=\tau_D(\xi, \eta)}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

A representação integral (3.23) é o que chamamos de representação integral de Kirchhoff-Helmholtz em 2.5D. Convém observar que esta integral é reduzida a uma operação 2D, que descreve a propagação de ondas em 3D.

### Função Peso

Essa seção tem a finalidade de especificar a função peso  $W_{KH}^{(2.5D)}$  correspondente a representação (3.23).

Inicialmente, de (3.7) podemos escrever,

$$\vartheta_{KH}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} [\nabla \tau_s(\xi, \eta) \cdot \hat{n} + \nabla \tau_g(\xi, \eta) \cdot \hat{n}] \quad (3.24)$$

ou seja,

$$\vartheta_{KH}(\xi, \eta) = \frac{\cos \alpha_m + \cos \theta}{2c_0} \quad (3.25)$$

Os termos integrantes da expressão (3.25) são ilustrados pela Figura 3.3 abaixo:

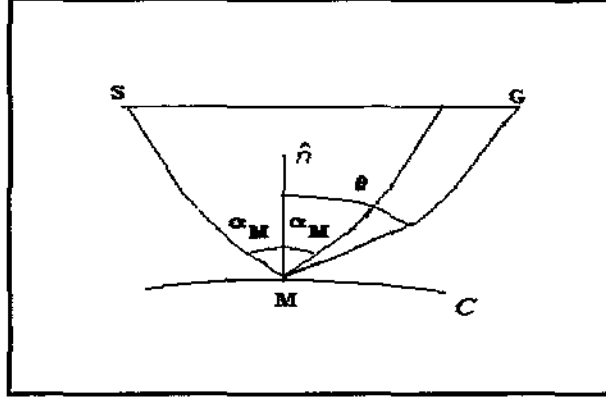


Figura 3.3:  $\alpha_m$  denota o ângulo que o raio refletido faz com o vetor normal  $\hat{n}$  em  $m$  sobre  $C$  e  $\theta$  é o ângulo que o raio  $mg$  faz com a normal  $\hat{n}$  em  $m$  sobre  $C$ .

Agora substituindo (2.25), (2.26) e (3.25) em (3.6) podemos escrever

$$W_{KH}(\xi, \eta) = \frac{[\cos \alpha_m + \cos \theta] A_s(\xi) A_g(\xi)}{2c(\eta) \sqrt{\sigma_s K_s \sigma_g K_g}}. \quad (3.26)$$

Finalmente, substituindo as expressões (2.36) e (3.26) em (3.20), obtemos

$$W_{KH}^{(2.5D)}(\xi, \eta) = \frac{A_s(\xi) A_g(\xi) [\cos \alpha_m + \cos \theta]}{2c(\eta) \sqrt{K_s K_g (\sigma_s + \sigma_g)}} \quad (3.27)$$

que é a função peso desejada a ser substituída na representação (3.23) a fim de especificar a integral de Kirchhoff-Helmholtz em 2.5D.

### 3.4 Avaliação Assintótica - Dentro do plano

Visando comparar os resultados assintóticos da seção anterior com o resultado apresentado em (Tygel et al., 1994a), vamos avaliar assintoticamente a integral (3.23) usando o método da fase estacionária. Considere

$$J(\omega) = \int_C dC R_c(\xi, \eta) W_{KH}^{(2.5D)}(\xi, \eta) \exp[-i\omega \tau_D(\xi, \eta)], \quad (3.28)$$

sendo

$$\Phi_2(\xi, \eta) = -\tau_D(\xi, \eta). \quad (3.29)$$

Assim

$$\frac{\partial \Phi_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} = -\frac{\partial \tau_D(\xi, \eta)}{\partial \eta}. \quad (3.30)$$

Suponhamos que exista um único ponto estacionário  $\eta = \eta^*$  em  $C$ , tal que

$$\left. \frac{\partial \Phi_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=\eta^*} = 0. \quad (3.31)$$

De posse disto, aplicando à integral (3.28) os mesmos procedimentos empregados à expressão (3.13), obtemos

$$\begin{aligned} J(\omega) &\simeq \sqrt{2\pi} R_c(\xi, \eta^*) W_{KH}^{(2.5D)}(\xi, \eta^*) e^{[-i\mu_1\pi/4]} \\ &\times \frac{\exp[-i\omega\tau_D(\xi, \eta^*)]}{|\omega|^{1/2} \left| \frac{\partial^2 \tau_D(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \right|_{\eta=\eta^*}^{1/2}} \end{aligned} \quad (3.32)$$

com

$$\mu_1 = \text{sign} \left( \left. \frac{\partial^2 \tau_D(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \right|_{\eta=\eta^*} \right). \quad (3.33)$$

e conseqüentemente,

$$U_s(\xi, \omega) \simeq F(\omega) R_c(\xi, \eta^*) \Gamma_{KH}^{(2.5D)}(\xi, \eta^*) \exp[-i\omega\tau_D(\xi, \eta^*)] \quad (3.34)$$

onde

$$\Gamma_{KH}^{(2.5D)}(\xi, \eta^*) = \frac{W_{KH}^{(2.5D)}(\xi, \eta^*) \exp[i\frac{\pi}{4}] \exp[\frac{-i\pi\mu_1}{4}]}{\left( \left| \frac{\partial^2 \tau_D(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \right|_{\eta=\eta^*} \right)^{1/2}} \quad (3.35)$$

## Comparação de Sismogramas

Sabemos que o campo de ondas no receptor (Tygel et al, 1994a) é dado por

$$U_s(\xi, \omega) \simeq \Gamma_{KH}(\xi, \eta^*) R_c(\xi, \eta^*) F(\omega) \exp[-i\omega\tau_D(\xi, \eta^*)] \quad (3.36)$$

onde

$$\Gamma_{KH}(\xi, \eta^*) = \frac{W_{KH}(\xi, \eta^*) \exp[i\pi/2] \exp[-i\text{Sgn}(H_{ref}(\xi))\pi/4]}{|\det H_{ref}(\xi)|^{1/2}} \quad (3.37)$$

e

$$H_{ref}(\xi) = \left( \frac{\partial^2 \tau_D(\xi, \eta)}{\partial \eta_i \partial \eta_j} \right) \bigg|_{\eta=\eta^*} \quad i, j = 1, 2. \quad (3.38)$$

Comparando as expressões (3.34) com (3.36), observamos que resta-nos mostrar então que  $\Gamma_{KH}(\xi, \eta)$  sob a hipótese do meio apresentar independência em relação a variável  $\eta_2 = y$ , coincide com  $\Gamma_{KH}^{(2.5D)}(\xi, \eta)$ . Iniciamos com o termo integrante do sismograma (Tygel et al., 1994a), ou seja,  $\Gamma_{KH}(\xi, \eta)$  avaliado em  $\eta = \eta^*$ :

$$\Gamma_{KH}(\xi, (\eta^*)) = \frac{W_{KH}(\xi, (\eta^*)) \exp[i\pi/2] \exp[-i\text{Sgn}(H_{ref}(\xi))\pi/4]}{|\det H_{ref}(\xi)|^{1/2}}. \quad (3.39)$$

Mas, da expressão (3.20), vem que

$$W_{KH}(\xi, (\eta^*)) = W_{KH}^{(2.5D)}(\xi, (\eta^*)) \left( \left| \frac{\partial^2 \tau_D(\xi, \eta)}{\partial y^2} \right|_{y^*=0} \right)^{1/2} \quad (3.40)$$

permitindo escrever então,

$$\begin{aligned} \Gamma_{KH}(\xi, (\eta^*)) &= W_{KH}^{(2.5D)}(\xi, (\eta^*)) \left( \left| \frac{\partial^2 \tau_D(\xi, \eta)}{\partial y^2} \right|_{y^*=0} \right)^{1/2} \\ &\times \frac{\exp[i\pi/2] \exp[-i\text{Sgn}(H_{ref}(\xi))\pi/4]}{|\det H_{ref}(\xi)|^{1/2}}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Agora, usando os resultados (3.17) em (3.38), segue que,

$$H_{ref}(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \tau_D(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \Big|_{\eta=\eta^*} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 \tau_D(\xi, \eta)}{\partial y^2} \Big|_{\eta=\eta^*} \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

e portanto, imediatamente obtemos,

$$\begin{aligned} \text{sinal}[H_{ref}(\xi)] &= \text{sinal} \left( \frac{\partial^2 \tau_D(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \Big|_{\eta=\eta^*} \right) + \text{sinal} \left( \frac{\partial^2 \tau_D(\xi, \eta)}{\partial y^2} \Big|_{\eta=\eta^*} \right) \\ &= \mu_1 + \mu_2 = \mu_1 + 1 \end{aligned} \quad (3.43)$$

e

$$\det[H_{ref}(\xi)] = \left( \frac{\partial^2 \tau_D(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \Big|_{\eta=\eta^*} \right) \cdot \left( \frac{\partial^2 \tau_D(\xi, \eta)}{\partial y^2} \Big|_{\eta=\eta^*} \right). \quad (3.44)$$

Finalmente, substituindo (3.43) e (3.44) em (3.41) concluímos que,

$$\begin{aligned} \Gamma_{KH}(\xi, (\eta^*)) &= \frac{W_{KH}^{(2.5D)}(\xi, \eta^*) \exp[i\pi/2] \exp[-i\mu_1\pi/4] \exp[-i\pi/4]}{\sqrt{\left| \frac{\partial^2 \tau_D(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \Big|_{\eta=\eta^*} \right|}} \\ &= \Gamma_{KH}^{(2.5D)}(\xi, \eta^*). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Logo, concluímos que o campo de onda em  $3D$  representado pela expressão (3.36) coincide com o campo de onda em  $2.5D$  dado pela expressão (3.34), quando o meio apresenta independência em relação a componente  $y = \eta_2$ .

### Fórmulas de Decomposição

Esta seção tem objetivo de apresentar fórmulas de decomposição para o fator de espalhamento geométrico (fator responsável em corrigir a amplitude a fim de estabelecer a verdadeira amplitude- atributo responsável em imagear corretamente amplitudes de uma domínio em outro). A seguir veremos que este fator de espalhamento geométrico incorpora efeitos ou contribuições de fora do plano de dependência dos parâmetros.

Inicialmente, vamos utilizar a expressão (3.34) no domínio do tempo, isto é,

$$u(\xi, t) \simeq R_c(\xi, \eta^*) \Gamma_{KH}^{(2.5D)}(\xi, \eta^*) f[t - \tau_R(\xi)] \quad (3.46)$$

Em contrapartida, pela Teoria dos Raios, sabemos que

$$u(\xi, t) \simeq u_0(\xi) f[t - \tau_R(\xi)] \quad (3.47)$$

onde o fator de amplitude é dado por

$$u_0(\xi) = R_c(\xi, \eta^*) \frac{A(\xi)}{L^{(2.5D)}(\xi)}. \quad (3.48)$$

com  $A(\xi)$ ,  $L^{(2.5D)}(\xi)$  e  $R_c(\xi, \eta^*)$  expressando a perda de amplitude através de transmissões decorrente da propagação de onda entre a superfície e o refletor, o fator de espalhamento geométrico e o coeficiente de reflexão da onda plana, respectivamente.

Entretanto, como as soluções (3.46) e (3.47) coincidem, pois, são ambas de mesma ordem em  $\omega$  (ordem zero), igualando (3.46) a (3.47) e usando (3.48), temos

$$\Gamma_{KH}^{(2.5D)}(\xi, \eta^*) = \frac{A(\xi)}{L^{(2.5D)}(\xi)}. \quad (3.49)$$

Agora, a finalidade é estabelecer a expressão em  $2.5D$  para o fator de espalhamento geométrico de Fresnel (Tygel et al., 1995). O resultado é especificado combinando (3.49) com (3.36).

Neste sentido, sejam

$$G_0^s(\xi, \eta) = \frac{A_s(\xi)}{L_s^{(2.5D)}(\xi)} \quad (3.50)$$

e

$$G_0^g(\xi, \eta) = \frac{A_g(\xi)}{L_g^{(2.5D)}(\xi)}. \quad (3.51)$$

Substituindo as expressões (2.36), (3.20), (3.43) e (3.44) em (3.45), obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{KH}^{(2.5D)}(\xi, \eta^*) &= G_0^s(\xi, \eta^*) G_0^g(\xi, \eta^*) \vartheta_{KH}(\xi, \eta^*) \\ &\times \frac{\exp[\frac{i\pi}{2}(1 - (\mu_1 + 1)/2)]}{|\det H_{ref}(\xi)|^{1/2}}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

onde  $\mu_1$  é apresentado pela expressão (3.33). Além disso, levando em conta a decomposição de  $A(\xi) = A_s(\xi)A_g(\xi)$ , segue da substituição de (3.50) e (3.51) na razão expressa pelo lado direito de (3.49) que

$$\frac{A(\xi)}{L^{(2.5D)}(\xi)} = \frac{L_s^{(2.5D)}(\xi)L_g^{(2.5D)}(\xi)G_0^s(\xi,\eta^*)G_0^g(\xi,\eta^*)}{L^{(2.5D)}(\xi)}. \quad (3.53)$$

Substituindo as expressões (3.52) e (3.53) em (3.49), obtemos

$$L^{(2.5D)}(\xi) = L_s^{(2.5D)}(\xi)[L_F^{(2.5D)}(\xi)]^{-1}L_g^{(2.5D)}(\xi) \quad (3.54)$$

onde

$$L_F^{(2.5D)}(\xi) = \frac{\vartheta_{KH}(\xi,\eta^*)\exp[\frac{i\pi}{4}(1-\mu_1)]}{|\det H_{ref}(\xi)|^{1/2}}. \quad (3.55)$$

Agora, utilizando as expressões (2.36), (3.25) e (3.44), podemos escrever, respectivamente,

$$\vartheta_{KH}(\xi,\eta^*) = \frac{\cos \alpha_R}{2}, \quad (3.56)$$

pois, neste caso,  $\cos \theta = \cos \alpha_m = \cos \alpha_R$  e

$$|\det H_{ref}(\xi)|^{1/2} = (H_{11}\sigma_F^{-1})^{1/2} \quad (3.57)$$

onde  $H_{11}$  é o primeiro elemento da matriz  $H_{ref}(\xi)$  dada por (3.43). Portanto, substituindo as expressões (3.56) e (3.57) em (3.55), temos

$$L_F^{(2.5D)}(\xi) = \frac{[\cos \alpha_R]\exp[\frac{i\pi}{4}(1-\mu_1)]}{2[H_{11}\sigma_F^{-1}]^{1/2}}. \quad (3.58)$$

Para completar esta parte dos resultados, comparando as expressões (2.27) e (2.29) com (3.50) e (3.51) podemos escrever

$$L_i^{(2.5D)}(\xi) = \sqrt{\sigma_i K_i} = L_i^{(2D)}\sqrt{\sigma_i} \quad (i = s, g), \quad (3.59)$$

onde  $L_i^{(2D)}$  com  $i = s, g$  é o fator de espalhamento geométrico  $2D$ .

Por outro lado, substituindo as expressões (3.59) em (3.54), obtemos

$$L^{(2.5D)}(\xi) = \sqrt{\sigma_{sg} K_{sg}} = \sqrt{\sigma_s K_s} [L_F^{(2.5D)}(\xi)]^{-1} \sqrt{\sigma_g K_g}. \quad (3.60)$$

Como das equações (2.11) e (2.12), temos podemos escrever,

$$\sigma_{sg} = \sigma_s + \sigma_g \quad (3.61)$$

e da substituição de (3.61) em (3.60) que

$$\sqrt{(\sigma_s + \sigma_g) K_{sg}} = \sqrt{\sigma_s \sigma_g K_s K_g} [L_F^{(2.5D)}(\xi)]^{-1} \quad (3.62)$$

isto é,

$$L_F^{(2.5D)}(\xi) = \sqrt{\frac{\sigma_s \sigma_g K_s K_g}{(\sigma_s + \sigma_g) K_{sg}}}. \quad (3.63)$$

Então, finalmente, de (2.36) vem que

$$L_F^{(2.5D)}(\xi) = \sqrt{\sigma_F \frac{K_s K_g}{K_{sg}}}. \quad (3.64)$$

Portanto, definindo

$$K_F = \frac{K_s K_g}{K_{sg}} \quad (3.65)$$

podemos escrever que

$$L_F^{(2.5D)}(\xi) = \sqrt{\sigma_F K_F}. \quad (3.66)$$

Assim sendo, substituindo a expressão (3.58) em (3.66)

$$K_F = \frac{[\cos \alpha_R]^2 \exp\left[\frac{i\pi}{2}(1 - \mu_1)\right]}{c^2(\eta^*) H_{11}}, \quad (3.67)$$

e, desta forma, o fator de espalhamento geométrico de Fresnel em 2.5D, pode ser escrito como

$$L_F^{(2.5D)}(\xi) = \sqrt{\sigma_F K_F} = L_F^{(2D)} \sqrt{\sigma_F}, \quad (3.68)$$

onde

$$L_F^{(2D)} = \frac{[\cos \alpha_R] \exp\left[i\frac{\pi}{4}(1 - \mu_1)\right]}{c(\eta^*) H_{11}^{1/2}} = \sqrt{K_F} \quad (3.69)$$

é o fator de espalhamento geométrico de Fresnel em 2D.

Conclui-se então que o fator de espalhamento geométrico de Fresnel em 2.5D é composto pelo produto de duas contribuições; uma de fora do plano de dependência, dada através de  $\sigma_F^{1/2}$  e a outra de dentro do plano de dependência, especificada pelo fator  $L_F^{(2D)}$ , que é o fator de espalhamento geométrico de Fresnel em 2D.

## 3.5 Meio Verticalmente Não Homogêneo

### Função Peso

A função peso da representação de Kichhoff Helmholtz num meio verticalmente não homogêneo pode ser especificado mediante a substituição da equação (2.57) em (3.27). O resultado é dado por

$$W_{KH}^{(2.5D)}(\xi, \eta) = \frac{\cos \alpha_m + \cos \theta}{2c(\eta) L_s^{(2D)} L_g^{(2D)} \sqrt{(\sigma_s + \sigma_g)}}. \quad (3.70)$$

## 3.6 Casos Analíticos

### 3.6.1 Velocidade Constante

A função peso da representação de Kirchhoff-Helmholtz para um meio homogêneo é estabelecida substituindo as expressões (2.68) e (2.69) dentro de (3.27). O resultado é dado por

$$W_{KH}^{(2.5D)}(\xi, \eta) = \frac{\cos \theta + \cos \alpha_{\mathbf{m}}}{\ell_s \ell_g \sqrt{c_0 \ell_F}}, \quad (3.71)$$

onde

$$\ell_F = \frac{1}{\ell_s} + \frac{1}{\ell_g}, \quad (3.72)$$

com  $\ell_i$  ( $i = s, g$ ) dado por (2.68). Além disso, em (3.71),  $\alpha_{\mathbf{m}}$  é o ângulo que o segmento do raio  $\mathbf{sm}$  faz com a normal no ponto  $\mathbf{m}$  e  $\theta$  o ângulo que o outro segmento do raio  $\mathbf{gm}$  faz com a vertical  $z$ .

### 3.6.2 Velocidade com Gradiente Constante

O estabelecimento da função peso correspondente ao modelo de velocidade com gradiente constante é especificada mediante a substituição das expressões apresentadas em (2.76) na expressão (3.27). O resultado é

$$W_{KH}^{(2.5D)}(\xi, \eta) = \frac{c_0 [\cos \theta + \cos \alpha_{\mathbf{m}}]}{(\sigma_s \sigma_g) \sqrt{\sigma_F^{-1}}}, \quad (3.73)$$

onde  $\sigma_F$  é dado por (2.36).

### 3.6.3 Vagariosidade Quadrada com Gradiente Constante

Para este modelo de velocidade a função peso é especificada mediante a substituindo (2.75) até (2.78) em (3.27). O resultado pode ser escrito como

$$W_{KH}^{(2.5D)}(\xi, \eta) = \frac{c_0^2 [\cos \theta + \cos \alpha_{\mathbf{m}}]}{2c(\eta) \sigma_s \sigma_g \sqrt{\sigma_F^{-1} C_s C_g}}, \quad (3.74)$$

onde  $\sigma_i$  e  $C_i$  ( $i = s, g$ ) são dados por (2.76) e (2.79), respectivamente.

### 3.6.4 Logarítmo da Velocidade com Gradiente Constante

Para finalizar, a função peso da representação de Kirchhoff-Helmholtz para o modelo logarítmo da velocidade com gradiente constante é estabelecida utilizando (2.82) e (2.84) em (3.27). O resultado é por

$$W_{KH}^{(2.5D)}(\xi, \eta) = \frac{c_0 [\cos \alpha_{\mathbf{m}} + \cos \theta]}{2\sigma_s \sigma_g \sqrt{Y_s Y_g \sigma_F^{-1}}}, \quad (3.75)$$

onde  $\sigma_i$  e  $Y_i$  ( $i = s, g$ ) são dados por (2.82) e (2.84), respectivamente.

## 3.7 Resumo

Este capítulo foi destinado ao estabelecimento da integral de Kirchhoff-Helmholtz em  $2.5D$ , a uma descrição completa das fórmulas analíticas para o parâmetro do raio  $\sigma$ , o fator de espalhamento geométrico  $L^{(2D)}$ , a distância horizontal entre a fonte  $\mathbf{s}$  (ou receptor  $\mathbf{g}$ ) e  $\mathbf{m}$ , o tempo de trânsito  $\tau$ , num meio verticalmente não homogêneo. Além disso, apresentamos as expressões específicas desses parâmetros para quatro modelos de velocidades (constante, gradiente constante, vagarosidade quadrada com gradiente constante, logarítmo da velocidade com gradiente constante) que serviram como ferramentas para o estabelecimento das funções pesos correspondentes a cada uma dessas situações.

## Capítulo 4

# INTEGRAIS DE MIGRAÇÃO DE KIRCHHOFF

### 4.1 Introdução

Este capítulo tem a finalidade de estabelecer a representação conhecida na literatura por integral de migração de Kirchhoff (ou integral de empilhamento de difrações) (Schleicher et al., 1993) correspondente a cada tipo de situação mencionadas nas considerações básicas deste trabalho.

O desenvolvimento desta operação se dá de forma totalmente análoga ao desenvolvimento do capítulo anterior sobre a integral de Kirchhoff-Helmholtz, isto é, faremos uso das expressões estabelecidas, no capítulo das considerações básicas para os parâmetros do meio no sentido de especificar a integral de migração de Kirchhoff para a situação 2.5D, para o meio verticalmente não homogêneo e para os modelos de distribuições de velocidades verticais.

A seção, a seguir, é reservada aos aspectos gerais em 3D que deverão motivar a construção da integral de migração de Kirchhoff, bem como a apresentação de sua forma compacta.

Nós assumimos no desenvolvimento deste e dos próximos capítulos que o registro sísmico seja constituído de traços sísmicos analíticos (analítico no sentido de que ele é formado do registro real (sinal da fonte) mais sua transformada de Hilbert como parte imaginária). Estes traços são superposições de eventos de reflexões primárias especificados por  $U(\xi, t) = U(s(\xi), g(\xi), t)$  e comumente bem descritos pela Teoria de ordem zero do raio.

### 4.2 Forma Compacta

A elaboração desta representação se dá mediante uma grande soma de objetos definidos dentro de um conjunto designado conjunto de abertura (domínio constituído dos parâmetros correspondentes as fontes e receptores). Esses objetos são decompostos num produto de dois fatores; o primeiro, uma função peso e o segundo, eventos de reflexões sísmicas elementares, onde temos inseridas amplitudes que estão distribuídas numa seção sísmica ao longo da superfície de tempo de trânsito de difração (ou superfície de Huygens) (Schleicher et al., 1993).

Com o intuito de explicar a forma compacta da integral de migração de Kirchhoff, consideramos inicialmente a representação (Tygel et al., 1994a).

$$V(\mathbf{m}) = -\frac{1}{2\pi} \int \int_A d^2\xi W_{DS}(\xi, \mathbf{m}) \left. \frac{\partial U(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=\tau_D(\xi, \mathbf{m})}, \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{m} = (x, z)$  denota um ponto fixo em profundidade onde a migração  $V(\mathbf{m})$  deverá ser descrita e  $\frac{\partial U(\xi, t)}{\partial t}$  é a derivada no tempo do traço sísmico  $U(\xi, t) = U(\mathbf{s}(\xi), \mathbf{g}(\xi), t)$  registrado no geofone (receptor)  $\mathbf{g}(\xi)$ , correspondente a uma fonte pontual  $\mathbf{s}(\xi)$ .

O conjunto de todos os pares de fontes-receptores pertencentes à configuração escolhida é descrito por um parâmetro bidimensional  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ , que varia no conjunto de abertura  $A$  para a migração. Todos os dados da amplitude encontrados ao longo da linha de empilhamento  $t = \tau_D(\xi, \mathbf{m})$  são multiplicados por uma função peso  $W_{DS}(\xi, \mathbf{m})$  e então somados.

Esta descrição é referente a um ponto  $\mathbf{m}$  fixo. Realizamos esta operação para uma malha (rede) de pontos  $\mathbf{m}$  na região de interesse (Figura 4.1) e então selecionamos apenas aqueles pontos cujas amplitudes assinaladas representam uma contribuição significativa. Estas contribuições servirão para localizar a imagem em profundidade e ao mesmo tempo estabelecer as amplitudes. Convém observar ainda que a amplitude assinalada é conhecida como amplitude verdadeira pelo fato de que elas aparecem corrigidas do efeito do fator de espalhamento geométrico.

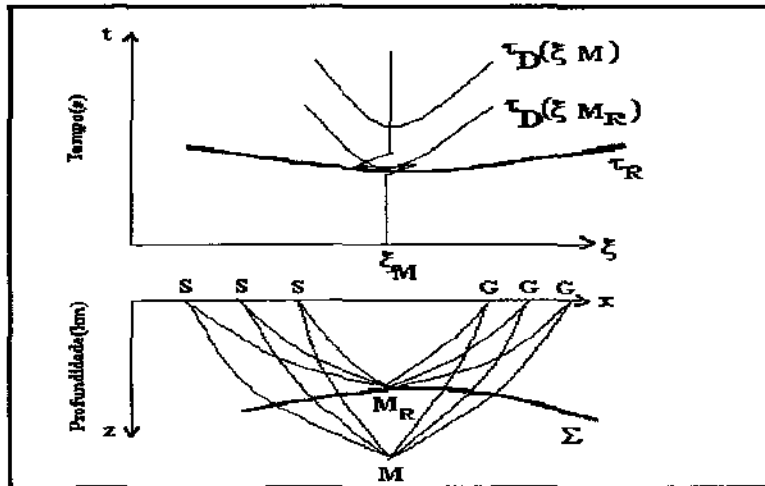


Figura 4.1: Ilustração da integral de empilhamento de difrações. Os dados de amplitudes encontrados ao longo da linha de empilhamento  $t = \tau_D(\xi, \mathbf{m}_R)$  quando multiplicados pelo peso  $W_{DS}(\xi, \mathbf{m}_R)$  e depois somados possibilitam uma contribuição que será assinalada em  $V(\mathbf{m}_R)$ . Os dados de amplitudes encontrados ao longo da linha  $t = \tau_D(\xi, \mathbf{m})$ , quando multiplicados por  $W_{DS}(\xi, \mathbf{m})$ , depois, somados, não deverão apresentar contribuição para o processamento. A razão desta diferença consiste no fato de que  $\mathbf{m}_R$  é um ponto situado na interface de reflexão e  $\mathbf{m}$  é um ponto arbitrário, porém, situado abaixo desta interface.

Suponhamos agora que a reflexão primária seja bem descrita por

$$U(\xi, t) = u_0(\xi) f(t - \tau_R(\xi)), \quad (4.2)$$

onde  $f$  é o pulso analítico e

$$u_0(\xi) = R_c(\xi, \eta) \frac{A(\xi)}{L(\xi)} \quad (4.3)$$

com as quantidades dadas por  $\tau_R(\xi)$ ,  $A(\xi)$ ,  $L(\xi)$  e  $R_c(\xi, \eta)$ , representando o tempo de trânsito de reflexão, o fator de perda de amplitude, o fator de espalhamento geométrico e o coeficiente de reflexão da onda plana, respectivamente. Com a finalidade de avaliar assintoticamente a integral de empilhamento de migração (4.1) vamos escrevê-la da seguinte forma:

$$V(\mathbf{m}, t) \simeq -\frac{1}{2\pi} \int \int_A d^2\xi W_{DS}(\xi, \mathbf{m}) u_0(\xi) \frac{\partial}{\partial t} f[t + \tau_D(\xi, \mathbf{m}) - \tau_R(\xi)], \quad (4.4)$$

para ser entendida como  $V(\mathbf{m}, t)|_{t=0} = V(\mathbf{m})$ . A representação integral (4.4) é a forma compacta da integral de empilhamento de migração (Tygel et al., 1994a).

### 4.3 Avaliação Assintótica - Fora do Plano

Esta seção tem por finalidade estabelecer a integral de migração de Kirchhoff em  $2.5D$ . Assumimos que os pares de fontes-receptores ( $\mathbf{s}(\xi_1, \xi_2)$ ,  $\mathbf{g}(\xi_1, \xi_2)$ ) estejam dentro do plano de dependência e possam ser identificados como

$$\mathbf{s}(\xi_1, \xi_2) = (x_s(\xi_1), \xi_2) \quad \text{e} \quad \mathbf{g}(\xi_1, \xi_2) = (x_g(\xi_1), \xi_2).$$

Neste caso, o conjunto de abertura  $A$  da migração é estabelecido utilizando-se a coordenada  $\xi_1$  que varia num intervalo da forma  $[a_1, a_2]$  para especificar as funções  $x_s(\xi_1)$  e  $x_g(\xi_1)$  dentro do plano de dependência dos parâmetros. Já a coordenada  $\xi_2$  apenas deverá selecionar o plano de simetria que os pares de fontes-receptores deverão pertencer. Diante disto, substituindo o conjunto,

$$A = \{\xi = (\xi_1, \xi_2) \mid \xi_1 \in [a_1, a_2] \quad \text{e} \quad \xi_2 \in \mathbf{R}\}, \quad (4.5)$$

na representação (4.4) e aplicando a transformada de Fourier, obtemos

$$\begin{aligned} V(\mathbf{m}, \omega) &\simeq -\frac{i\omega F(\omega)}{2\pi} \int_{a_1}^{a_2} d\xi_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_2 W_{DS}(\xi, \mathbf{m}) u_0(\xi) \\ &\times \exp\{i\omega[\tau_D(\xi, \mathbf{m}) - \tau_R(\xi)]\}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Aplicando o método da fase estacionária (Bleistein, 1984) na representação integral (4.6), temos

$$\begin{aligned} V(\mathbf{m}, \omega) &\simeq \frac{(-i\omega)^{1/2} F(\omega)}{(2\pi)^{1/2}} \int_{a_1}^{a_2} d\xi_1 W_{DS}^{(2.5D)}(\xi_1, \mathbf{m}) u_0(\xi_1) \\ &\times \exp\{i\omega[\tau_D(\xi_1, \mathbf{m}) - \tau_R(\xi_1)]\}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

De forma análoga ao desenvolvimento da integral de Kirchhoff-Helmholtz, agora são as fontes e os receptores que dependem da variação de apenas um parâmetro,  $\xi_1$ , já que iremos escolher

o plano de simetria  $\xi_2 = 0$ . Portanto, vamos utilizar simplesmente  $\xi$  nos argumentos das funções ao invés de  $(\xi_1, \xi_2 = 0)$ . As funções que aparecem na representação (4.7) podem então ser identificadas da seguinte forma

$$\begin{aligned} W_{DS}^{(2.5D)}(\xi, \mathbf{m}) &= W_{DS}^{(2.5D)}(\xi_1, 0, \mathbf{m}), \quad \tau_D(\xi, \mathbf{m}) = \tau_D(\xi_1, 0, \mathbf{m}), \quad u_0(\xi) = u_0(\xi_1, 0), \\ \tau_R(\xi) &= \tau_R(\xi_1, 0) \quad \text{e} \quad W_{DS}^{(2.5D)}(\xi, \mathbf{m}) = \sigma_F^{1/2} W_{DS}(\xi_1, 0, \mathbf{m}). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Lembramos que  $\sigma_F$  é expresso pela equação (2.36) e  $W_{DS}$  é a função peso dada em Tygel et al. (1996), que deverá ser apresentado na próxima seção.

De volta ao domínio do tempo, nossa representação (4.7), após a aplicação da propriedade

$$\mathcal{F} \left[ \frac{d^{1/2}}{d(-t)^{1/2}} f(t) \right] = \sqrt{-i\omega} F(\omega) \quad (4.9)$$

conhecida como transformada de Fourier da derivada (na variável  $-t$ ) de ordem  $n = 1/2$  (Oldham, et al., 1974), pode ser escrita como

$$\begin{aligned} V(\mathbf{m}, t) &\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a_1}^{a_2} d\xi_1 W_{DS}^{(2.5D)}(\xi_1, \mathbf{m}) u_0(\xi_1) \\ &\times \frac{d^{1/2}}{d(-t)^{1/2}} f[t + (\tau_D(\xi_1, \mathbf{m}) - \tau_R(\xi_1))], \end{aligned} \quad (4.10)$$

a qual é denominada integral de migração de Kirchhoff em 2.5D.

### Função Peso

Agora, vamos especificar os termos integrantes da função peso (4.8), inicialmente fazendo uso da expressão (Tygel et al., 1996 e Jaramillo et al., 1998)

$$W_{DS}(\xi, \mathbf{m}) = \frac{c^2(\mathbf{m}) h_B}{2 \cos^2 \alpha_{\mathbf{m}}} L_s L_g, \quad (4.11)$$

onde  $L_s$  e  $L_g$  são os fatores de espalhamento geométrico ao longo dos segmentos dos raios  $\mathbf{sm}$  e  $\mathbf{mg}$ ,  $h_B$  o determinante de Beylkin em 3D e  $\alpha_{\mathbf{m}}$  o ângulo que o raio faz com a componente em profundidade, respectivamente. A utilização das equações (2.29), (2.61) em (4.11), nos permite escrever

$$W_{DS}(\xi, \mathbf{m}) = \frac{c^2(\mathbf{m}) \bar{h}_B L_s^{(2D)} L_g^{(2D)} (\sigma_s + \sigma_g)}{2 \cos^2 \alpha_{\mathbf{m}} \sqrt{\sigma_s \sigma_g}}, \quad (4.12)$$

onde aqui  $\bar{h}_B$  é o determinante de Beylkin em 2D. Substituindo a função peso (4.12) em (4.8), segue que

$$W_{DS}^{(2.5D)}(\xi, \mathbf{m}) = \frac{c^2(\mathbf{m}) \bar{h}_B L_s^{(2D)} L_g^{(2D)}}{2 \cos^2 \alpha_{\mathbf{m}}} \sqrt{\sigma_s + \sigma_g}, \quad (4.13)$$

que é a função peso a ser usada na representação (4.10), a fim de obter a integral de migração de Kirchhoff com verdadeira amplitude em 2.5D.

## 4.4 Avaliação Assintótica - Dentro do Plano

Vamos apresentar a avaliação assintótica da representação (4.7) com a finalidade de estabelecer o sismograma em 2.5D e depois comparar com o sismograma (Tygel et al., 1996 e Jaramillo et al., 1998). Com este propósito, consideramos a integral

$$J(\omega) = \int_{a_1}^{a_2} d\xi W_{DS}^{(2.5D)}(\xi, \mathbf{m}) U_0(\xi) \times \exp[i\omega(\tau_D(\xi, \mathbf{m}) - \tau_R(\xi))]. \quad (4.14)$$

O uso da fórmula da fase estacionária permite escrever

$$J(\omega) \simeq \sqrt{2\pi} W_{DS}^{(2.5D)}(\xi^*, \mathbf{m}) u_0(\xi^*) \exp[i\delta_1 \pi/4] \times \frac{\exp[i\omega(\tau_D(\xi^*, \mathbf{m}) - \tau_R(\xi^*))]}{|\omega|^{1/2} \left| \frac{\partial^2 [\tau_D(\xi, \mathbf{m}) - \tau_R(\xi)]}{\partial \xi^2} \right|_{\xi=\xi^*}^{1/2}}, \quad (4.15)$$

onde

$$\delta_1 = \text{sinal} \left( \frac{\partial^2 [\tau_D(\xi, \mathbf{m}) - \tau_R(\xi)]}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=\xi^*} \right) \quad (4.16)$$

com  $\xi = \xi^*$  o ponto estacionário de  $\tau_D(\xi, \mathbf{m}) - \tau_R(\xi)$ . Logo, substituindo a expressão (4.15) em (4.7), obtemos

$$V(\mathbf{m}, \omega) \simeq F(\omega) \Gamma_{DS}^{(2.5D)}(\xi^*, \mathbf{m}) U_0(\xi^*) \exp[i\omega(\tau_D(\xi^*, \mathbf{m}) - \tau_R(\xi^*))], \quad (4.17)$$

sendo

$$\Gamma_{DS}^{(2.5D)}(\xi^*, \mathbf{m}) = \frac{W_{DS}^{(2.5D)}(\xi^*, \mathbf{m}) \exp[-i\frac{\pi}{2}(1 - (\delta_1 + 1)/2)]}{\left| \frac{\partial^2 (\tau_D(\xi, \mathbf{m}) - \tau_R(\xi))}{\partial \xi^2} \right|_{\xi=\xi^*}^{1/2}}. \quad (4.18)$$

Definindo a matriz hessiana para esta situação de forma análoga a matriz  $H_{ref}$  expressa em (3.42) para a integral Kirchhoff-Helmholtz, temos

$$A_{ref}(\mathbf{m}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \tau_D(\xi, \mathbf{m})}{\partial \xi^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 \tau_D(\xi, \mathbf{m})}{\partial y^2} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

segue que

$$\det A_{ref} = \left( \frac{\partial^2 \tau_D(\xi, \mathbf{m})}{\partial \xi^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \tau_D(\xi, \mathbf{m})}{\partial y^2} \right). \quad (4.20)$$

Portanto, substituindo as expressões (4.8) e (4.20) em (4.18), após algumas simplificações é possível concluir que o traço migrado apresentado em (4.17) coincide com o sismograma em 3D obtido em Tygel et al. (1996), com correções em Jaramillo et al. (1998), quando avaliado em  $(\xi_1, 0, \mathbf{m}) = (\xi^*, \mathbf{m})$  sob a simetria cilíndrica do meio.

## 4.5 Meio Verticalmente Não Homogêneo

Para este tipo de meio apresentaremos a função peso e a linha de empilhamento.

### Função Peso

Substituindo (2.62) em (4.13), obtemos

$$W_{DS}^{(2.5D)}(\xi, \mathbf{m}) = c(\mathbf{m}) L_s^{(2D)} L_g^{(2D)} \sqrt{(\sigma_s + \sigma_g)} \left[ \frac{\cos \alpha_m^s}{\sigma_s} + \frac{\cos \alpha_m^g}{\sigma_g} \right] \quad (4.21)$$

com  $c(\mathbf{m})$  representando a velocidade num conhecido ponto  $\mathbf{m}$  em profundidade e onde as quantidades  $\sigma_i$ ,  $\cos \alpha_m^i$ ,  $L_i^{(2D)}$  ( $i = s, g$ ) são dadas pelas expressões (2.52), (2.53) e (2.55), respectivamente.

### Linha de Empilhamento

A linha de empilhamento de migração para este caso é estabelecida mediante a utilização da expressão

$$\tau_D(\xi, \mathbf{m}) = \frac{1}{c_0} \left( \int_0^{z_m} \frac{n^2(z') dz'}{\sqrt{n^2(z') - \sin^2 \alpha_0^s}} + \int_0^{z_m} \frac{n^2(z') dz'}{\sqrt{n^2(z') - \sin^2 \alpha_0^g}} \right). \quad (4.22)$$

## 4.6 Casos Analíticos

Nesta seção serão obtidas expressões analíticas para as linhas de empilhamento e as funções pesos de migração para os quatro modelos de velocidades verticais apresentados na introdução deste trabalho.

### 4.6.1 Velocidade Constante

#### Função Peso

Substituindo as expressões (2.68) e (2.69) em (4.21), podemos escrever

$$W_{DS}^{(2.5D)}(\xi, \mathbf{m}) = z \left( \frac{\ell_s}{\ell_g} + \frac{\ell_g}{\ell_s} \right) \sqrt{\frac{1}{c_0} \left( \frac{1}{\ell_s} + \frac{1}{\ell_g} \right)} \quad (4.23)$$

onde as quantidades  $\ell_i$  ( $i = s, g$ ) são dadas em (2.72). A função peso (4.23) pode ser vista na Figura 4.2(b).

#### Linha de Empilhamento

Substituindo o modelo de velocidade  $c = c_0$  na equação (2.56), obtemos

$$\tau_D(\xi, \mathbf{m}) = \frac{1}{c_0} \left[ \sqrt{(x - x_s)^2 + z^2} + \sqrt{(x - x_g)^2 + z^2} \right] = \frac{\ell_s + \ell_g}{c_0} \quad (4.24)$$

que é a linha de empilhamento para o modelo de velocidade  $c = c_0$ . Esta relevante equação é conhecida como **equação da raiz quadrada dupla** (veja Figura 4.2(a)).

#### Ilustrações Numéricas

As situações apresentadas pela Figura 4.2, ilustram num meio homogêneo com velocidade 3.5km/s, em (a) a linha de empilhamento de migração de Kirchhoff e em (b) a função peso

da integral de migração de Kirchhoff. Estas ilustrações são correspondentes aos pontos  $\mathbf{m}_1(0, 0.5)$ ,  $\mathbf{m}_2(0, 0.7)$  e  $\mathbf{m}_3(0, 1)$  em profundidade, levando-se em conta uma configuração de fontes receptores com afastamento comum.

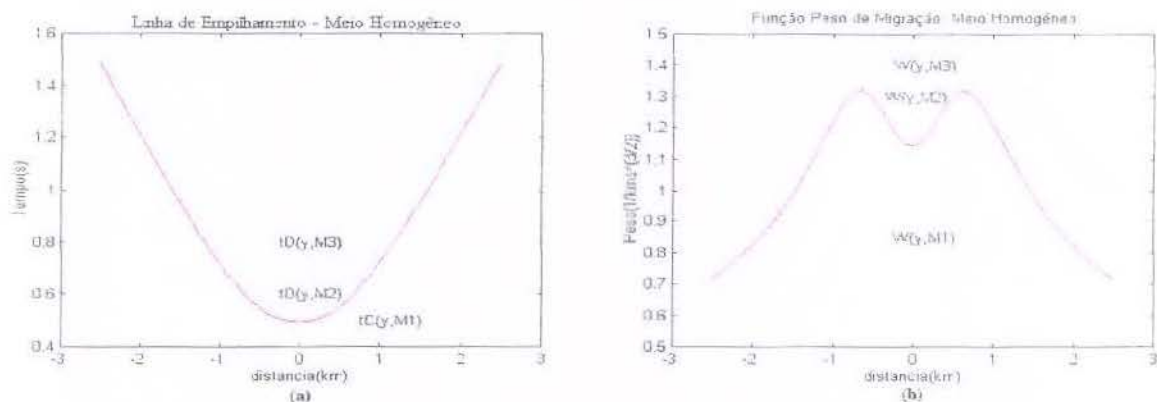


Figura 4.2: (a) Linha de empilhamento de migração. (b) Função peso de migração. Ambas são correspondentes a um meio homogêneo, ilustradas levando-se em conta um modelo de velocidade constante de 3.5 km/s e os pontos  $\mathbf{m}(0, 0.5)$ ,  $\mathbf{m}(0, 0.7)$  e  $\mathbf{m}(0, 1)$  em profundidade, respectivamente.

A seguir apresentaremos algumas ilustrações à respeito da aplicação da integral de migração de Kirchhoff (4.10), para obtenção de imagens migradas. Na Figura 4.3 observamos em (a) a seção sísmica correspondente a um impulso em  $x = 0$  km e  $t = 1$  s num meio com velocidade de 3.5 km/s, variação da linha de tempo de 0.1 s até 2.1 s, coordenadas do ponto médio variando de  $-2.5$  km até  $2.5$  km e levando-se em conta uma configuração de fontes-receptores com afastamento comum. Em (b) sua correspondente imagem migrada (resposta de um impulso) em profundidade.

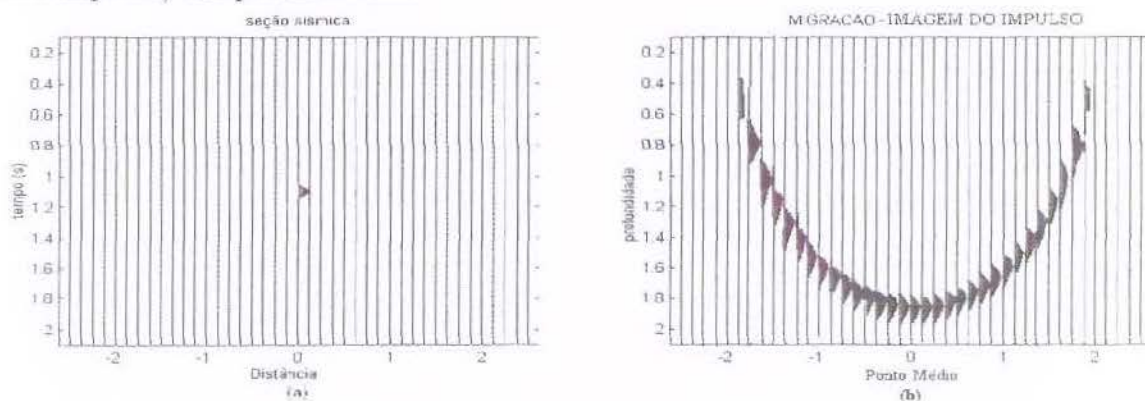


Figura 4.3: (a) Seção sísmica de um impulso em  $x = 0$  km e  $t = 1$  s. (b) Imagem migrada em profundidade de um impulso (resposta do impulso).

Na Figura 4.4, observamos a imagem migrada relativa a um refletor curvo num meio homogêneo com velocidade de 2 km/s, variação da linha do tempo de 0.3 s até 0.81 s.

coordenadas do ponto médio variando de  $-0.5$  km a  $0.5$  km e levando-se em conta uma configuração de fontes-receptores com afastamento comum.

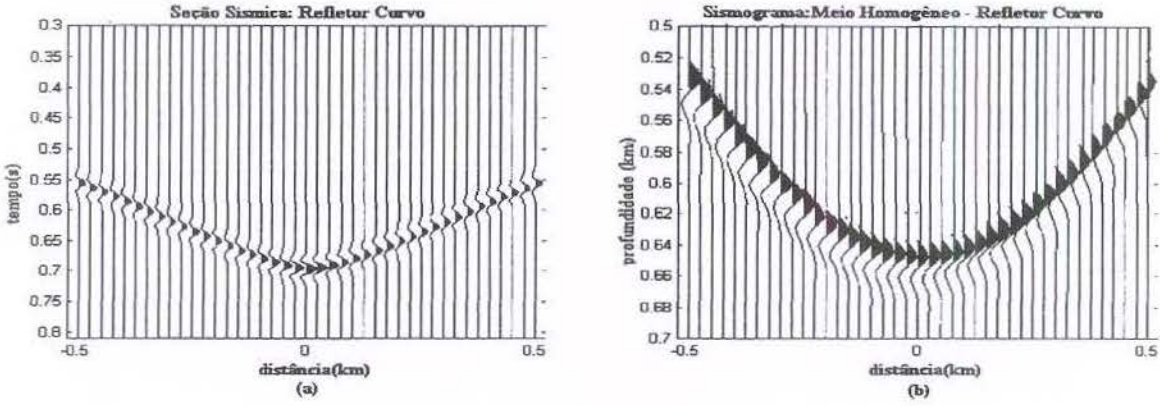


Figura 4.4: (a) Seção Sísmica. (b) Imagem migrada.

## 4.6.2 Velocidade com Gradiente Constante

### Função Peso

A função peso para este tipo de situação é estabelecida mediante a substituição das expressões contidas em (2.72) na equação (4.21). O resultado após algumas simplificações algébricas, pode ser escrito como

$$W_{DS}^{(2.5D)}(\xi, \mathbf{m}) = \frac{(\sigma_s \cos \alpha_m^g + \sigma_g \cos \alpha_m^s)}{c_0} \sqrt{\frac{1}{\sigma_s} + \frac{1}{\sigma_g}}, \quad (4.25)$$

onde  $\sigma_i$  ( $i = s, g$ ) é especificado pela fórmula (2.76).

A função peso (4.25) é ilustrada para alguns pontos em profundidade na Figura 4.5(b).

### Linha de Empilhamento

A linha de empilhamento, para este tipo de situação é estabelecida resolvendo a integral (4.22) para o modelo de velocidade com gradiente constante,  $c(z) = c_0 + gz$ . O resultado é dado por:

$$\tau_D(\xi, x, z) = \frac{1}{g} \ln(B_s B_g), \quad (4.26)$$

onde

$$B_i = 1 + \frac{g^2 \ell_i^2 + 2g\sigma_i}{2c_0 c(z)}, \quad (i = s, g), \quad (4.27)$$

com  $\ell_i$  e  $\sigma_i$  dados em (2.68) e (2.76), respectivamente.

A expressão (4.26) é a linha de empilhamento para um meio com modelo de velocidade com gradiente constante e é ilustrada para alguns pontos em profundidade na Figura 4.5(a).

## Ilustrações Numéricas

Na Figura 4.5 observamos em (a) a linha de empilhamento de migração e em (b) a função peso de migração. Ambas correspondem a um meio com modelo de velocidade com gradiente constante, as quais são ilustradas para  $c = 3 + z$ .

Tanto a função peso quanto a linha de empilhamento são construídas considerando os pontos  $m_1(0, 0.5)$ ,  $m_2(0, 0.7)$  e  $m_3(0, 1)$  em profundidade e levando-se em conta uma configuração de fontes-receptores com afastamento comum.

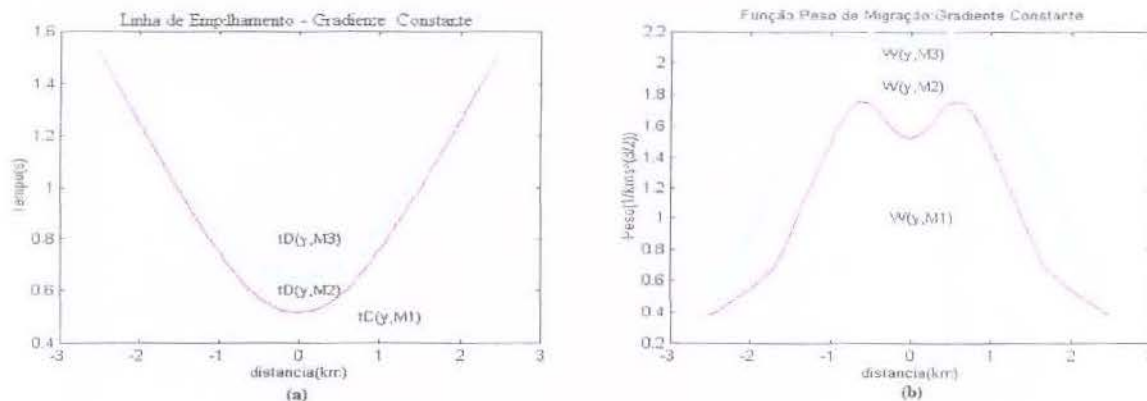


Figura 4.5: (a) Linha de empilhamento de migração. (b) A função peso de migração.

Na Figura 4.6 observa-se a imagem migrada de um impulso em  $x = 0$  km e  $t = 0.8$  s. O modelo consiste de um meio com velocidade com gradiente constante expresso por  $c = 3 + z$ , variação da linha de tempo de 0.1 s até 1 s, coordenadas do ponto médio variando de  $-2.5$  km até  $2.5$  km e uma configuração de fontes-receptores com afastamento comum. A correspondente imagem migrada é obtida em profundidade na região cujas coordenadas horizontais variam de  $-1.5$  km até  $1.5$  km e profundidade variando de  $0.4$  km até  $1$  km.

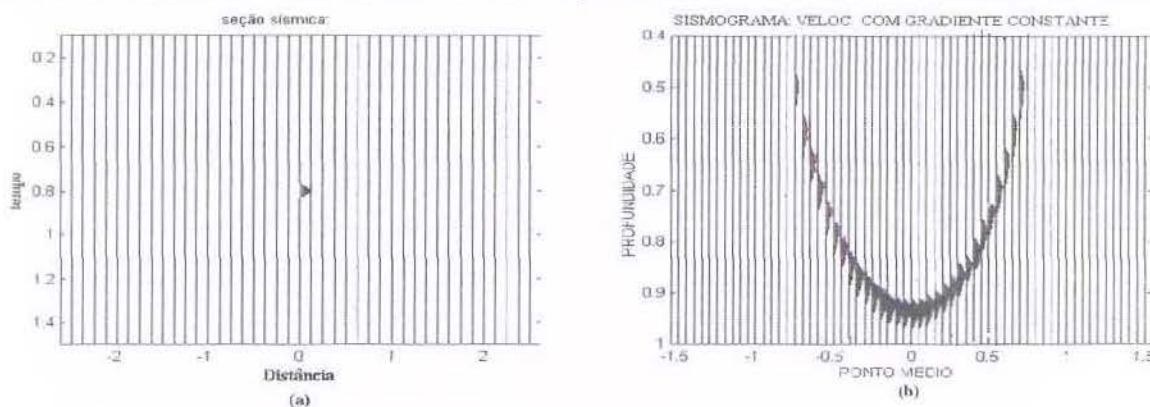


Figura 4.6: (a) Seção sísmica de um impulso em  $x = 0$  km e  $t = 0.8$ s. (b) Imagem migrada (Resposta do Impulso).

### 4.6.3 Vagarosidade Quadrada com Gradiente Constante

#### Função Peso

A substituição de (2.75), (2.76) e (2.77) dentro da expressão (4.21), possibilita escrever

$$W_{DS}^{(2.5D)}(\xi, \mathbf{m}) = \frac{1}{c_0} [\sigma_s \cos \alpha_{\mathbf{m}}^s + \sigma_g \cos \alpha_{\mathbf{m}}^g] \sqrt{C_s C_g} \sqrt{\frac{1}{\sigma_s} + \frac{1}{\sigma_g}} \quad (4.28)$$

onde as quantidades  $\sigma_i$  e  $C_i$  ( $i = s, g$ ) são dadas em (2.79) e (2.82), respectivamente.

A expressão (4.28) é a função peso para este tipo de situação e é ilustrada para alguns pontos em profundidade na Figura 4.7(b).

#### Linha de Empilhamento

A resolução da integral (4.22) mediante o uso do modelo de vagarosidade quadrada com gradiente constante possibilita escrever

$$\tau_D(\xi, \mathbf{m}) = \frac{2}{3} \left( \frac{\ell_s^2}{\sigma_s} + \frac{\ell_g^2}{\sigma_g} \right) + \frac{(\sigma_s + \sigma_g)}{6} \left( \frac{1}{c^2(z)} + \frac{1}{c_0^2} \right) \quad (4.29)$$

onde as quantidades  $\ell_i$  e  $\sigma_i$  ( $i = s, g$ ) são dados pelas expressões (2.68) e (2.75), respectivamente.

Portanto, a expressão (4.29) é a linha de empilhamento desejada para este tipo de situação e está ilustrada na Figura 4.7(a).

#### Ilustrações Numéricas

Na figura 4.7, temos em (a) a ilustração da linha de empilhamento de migração e em (b) a função peso de migração. Ambas são correspondentes a um meio com modelo de vagarosidade quadrada com gradiente constante, as quais são ilustradas levando-se em conta uma velocidade inicial de 3 km/s, onde neste caso o gradiente  $g = -0.0486 \text{ s}^{-1}$ . Tanto a função peso quanto a linha de empilhamento são construídas considerando-se os pontos  $\mathbf{m}_1(0, 0.5)$ ,  $\mathbf{m}_2(0, 0.7)$  e  $\mathbf{m}_3(0, 1)$  em profundidade e uma configuração de fontes-receptores com afastamento comum.

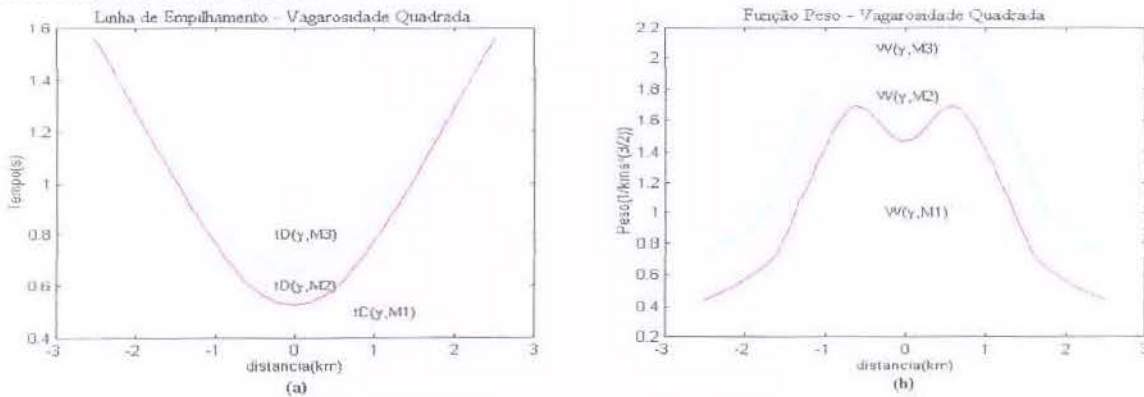


Figura 4.7: (a) Linha de empilhamento de migração. (b) A função peso de migração.

Na Figura 4.8, observamos a imagem migrada de um impulso em  $x = 0 \text{ km}$  e  $t = 0.5 \text{ s}$ . O modelo consiste de um meio com vagarosidade quadrada  $\frac{1}{c(z)^2} = \frac{1}{3^2} + gz$  com um gradiente  $g = -0.0486 \text{ s}^{-1}$ , variação da linha de tempo de 0.1 s até 1 s, coordenadas do ponto médio

variando de  $-2.5$  km até  $2.5$  km e levando-se em conta uma configuração de fontes-receptores com afastamento comum. A correspondente imagem migrada é obtida em profundidade na região cujas coordenadas horizontais variam de  $-1.5$  km até  $1.5$  km e profundidade variando de  $0.4$  km até  $1$  km.

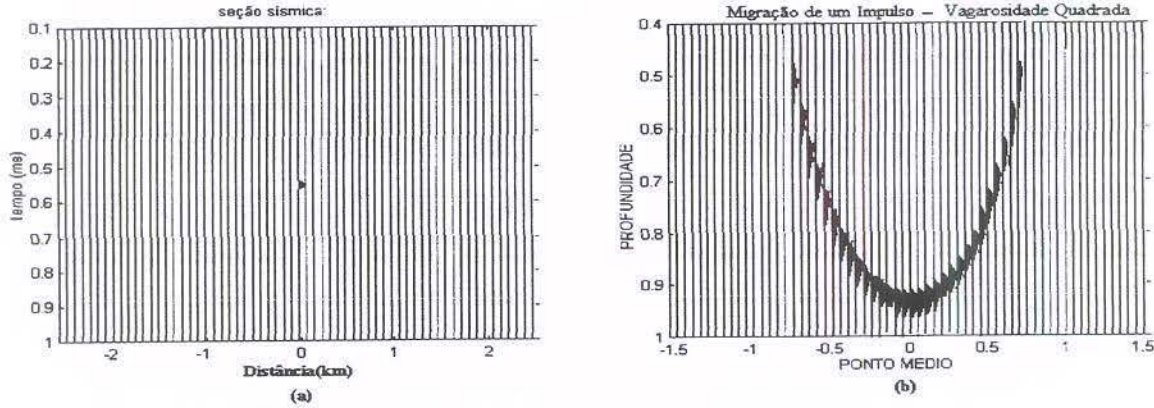


Figura 4.8: (a) Seção Sísmica de um impulso em  $x = 0$  km e  $t = 0.5$ s. (b) Imagem migrada (Resposta do impulso).

#### 4.6.4 Logarítmo da Velocidade com Gradiente Constante

##### Função Peso

A função peso correspondente a este tipo de situação é estabelecida colocando (2.81) e (2.82) dentro da expressão (4.21) mediante a combinação dos resultados apresentados em (2.84) e (2.87). O resultado após algumas simplificações é dado por

$$W_{DS}^{(2.5D)}(\xi, \mathbf{m}) = \frac{1}{c_0} [\sigma_s \cos \alpha_m^g + \sigma_g \cos \alpha_m^s] \sqrt{Y_s Y_g} \sqrt{\frac{1}{\sigma_s} + \frac{1}{\sigma_g}} \quad (4.30)$$

onde as quantidades  $\sigma_i$ ,  $Y_i$  ( $i = s, g$ ) são dadas por (2.85) e (2.87).

A expressão (4.30) é a função peso para a integral de migração de Kirchhoff, para um meio com este modelo de velocidade acima. A função peso (4.30) está ilustrada na Figura 4.9(b).

##### Linha de Empilhamento

A linha de empilhamento é estabelecida resolvendo a integral (4.22) para o modelo de logarítmo da velocidade com gradiente constante. O resultado é dado por

$$\tau_D(\xi, x, z) = \frac{1}{c_0 c} [\sigma_s Y_s + \sigma_g Y_g] \quad (4.31)$$

onde  $Y_i$  para ( $i = s, g$ ) é dada por (2.83).

A expressão (4.31) pode ser vista ilustrada na Figura 4.9(a) para alguns pontos em profundidade.

##### Ilustrações Numéricas

Na Figura 4.9, observamos em (a) a linha de empilhamento de migração e em (b) a função

peso de migração. Ambas são correspondentes a um meio onde modelo de logaritmo da velocidade é dado por  $\ln c(z) = \ln 3 + gz$  com gradiente neste caso  $g = 0.286 \text{ km}^{-1}$ . Tanto a função peso quanto a linha de empilhamento são construídas considerando-se os pontos  $\mathbf{m}_1(0, 0.5)$ ,  $\mathbf{m}_2(0, 0.7)$  e  $\mathbf{m}_3(0, 1)$  em profundidade e uma configuração de fontes-receptores com afastamento comum.

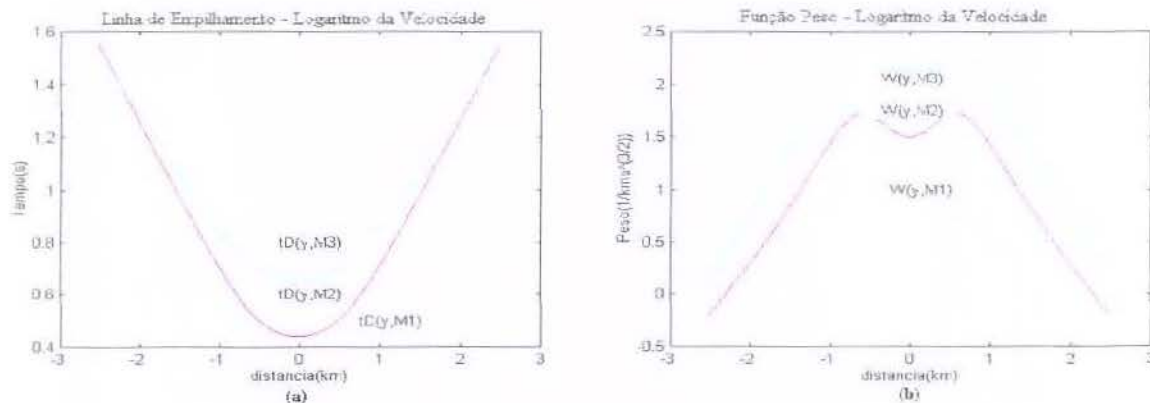


Figura 4.9: (a) Linha de empilhamento de migração. (b) Função Peso de migração.

Na Figura 4.10 observamos a imagem migrada de um impulso em  $x = 0 \text{ km}$  e  $t = 0.9 \text{ s}$ . O modelo neste caso consiste do logaritmo da velocidade  $\ln c(z) = \ln 3 + gz$ , com gradiente  $g = 0.286 \text{ km}^{-1}$ , linha de tempo variando de  $0.1 \text{ s}$  até  $1.5 \text{ s}$ , variação da posição média de  $-2.5 \text{ km}$  até  $2.5 \text{ km}$  e levando-se em conta uma configuração de fontes-receptores com afastamento comum. A correspondente imagem migrada em profundidade é obtida na região cuja linha horizontal varia de  $-2.5 \text{ km}$  até  $2.5 \text{ km}$  com profundidade variando  $0.1 \text{ km}$  até  $2.1 \text{ km}$ .

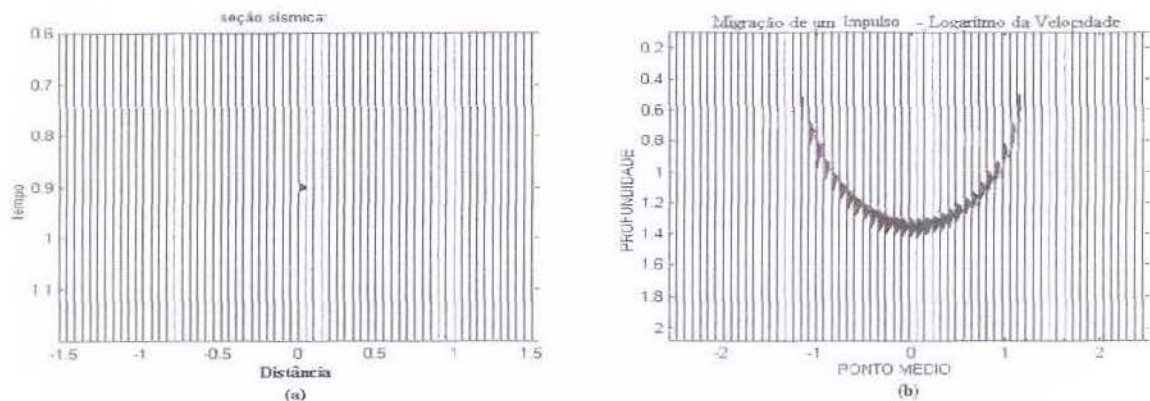


Figura 4.10: (a) Seção sísmica de um impulso em  $x = 0 \text{ km}$  e  $t = 0.9 \text{ s}$ . (b) Imagem migrada (Resposta do Impulso).

## 4.7 Resumo

O presente capítulo apresenta a integral de migração do tipo Kirchhoff para as situações em 2.5D e para um meio verticalmente não homogêneo. Além disso, fornece fórmulas analíticas para as linhas de empilhamento e para as correspondentes funções pesos para os quatro modelos de distribuições de velocidades (constante, gradiente constante, vagarosidade quadrada com gradiente constante e logaritmo da velocidade com gradiente constante).

Convém observar que apesar das expressões que representam as funções pesos e linhas de empilhamento não apresentarem semelhanças em suas formas analíticas, as ilustrações numéricas exprimem o quanto elas são semelhantes. Isto ressalta o aspecto discutido na introdução de que se um meio puder ser bem descrito por um destes modelos de velocidades então as informações à respeito do meio serão bem aproximadas.

## Capítulo 5

# INTEGRAIS DE DEMIGRAÇÃO DE KIRCHHOFF

### 5.1 Introdução

Apresentaremos neste capítulo a representação de demigração correspondente a cada tipo de distribuição de velocidade citada no desenvolvimento das considerações básicas.

A integral de demigração de Kirchhoff tem por objetivo a recuperação (ou reconstrução) dos dados originais mediante o uso de dados migrados (imagem em profundidade) produzidos por exemplo por uma operação de migração do tipo Kirchhoff.

Na primeira parte deste capítulo estabeleceremos a sua forma compacta. Depois, procedemos a avaliação assintótica fora do plano de dependência dos parâmetros, a especificação da correspondente função peso, a avaliação assintótica dentro do plano de dependência e a apresentação dos resultados referentes a função peso e a linha de empilhamento para os diversos modelos de velocidades verticais mencionados na introdução deste trabalho. Por fim, apresentaremos algumas ilustrações numéricas tanto para a função peso quanto para a linha de empilhamento.

### 5.2 Forma Compacta

Esta seção tem a finalidade de apresentar uma forma compacta para a integral de demigração de Kirchhoff.

Com o intuito de facilitar o entendimento dos aspectos que deverão nortear nosso desenvolvimento citamos dois domínios que constituem objetos de considerável importância para os nossos objetivos: o primeiro conhecido como espaço de registro (ou dados) e representado por  $(\xi, t)$ , no qual registramos os tempos de trânsito ou tempos de chegadas e o segundo, estabelecido em profundidade e descrito por  $(\mathbf{x}, z)$ .

A integral de migração de Kirchhoff, transforma eventos, em particular, do domínio  $(\xi, t)$  em eventos em profundidade, isto é, em  $(\mathbf{x}, z)$ . Suponhamos que estes eventos em profundidade sejam descritos por  $\Phi(\mathbf{x}, z)$  (i.e., a imagem migrada seja descrita por esta função). Ou mesmo que esta imagem seja produzida, por exemplo, através de uma operação de migração. Assumimos também que esta imagem esteja definida para uma malha de pontos

$\mathbf{m} = (\mathbf{x}, z)$ .

Assim, de posse destes comentários definimos para um ponto fixo  $\mathbf{n} = (\xi, t)$  com  $\xi$  no conjunto de abertura  $E$ , a integral de demigração, pela seguinte expressão matemática, (Tygel et al., 1996),

$$\Psi(\mathbf{n}) = \frac{1}{2\pi} \int \int_E d\mathbf{x} W_{IS}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \frac{\partial \Phi}{\partial z}(\mathbf{x}, z) \Big|_{z=\zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n})} \quad (5.1)$$

onde  $\mathbf{n} = (\xi, t)$  é um ponto fixo no domínio do tempo, cujo resultado da demigração  $\Psi(\mathbf{n})$  deverá ser assinalado,  $\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, z)}{\partial z}$  é a derivada parcial em relação a profundidade (vertical  $z$ ) calculada ao longo da linha de empilhamento (isócrona)  $z = \zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  dentro do conjunto de abertura da demigração  $E$  e  $W_{IS}$  é a função peso (Tygel et al., 1996 e Jaramillo et al., 1998), dada por

$$W_{IS}(\mathbf{x}, \mathbf{n}(\xi, t)) = \frac{1}{2L_{sm_I}(\xi)L_{m_{Ig}}(\xi)\cos^2\beta}. \quad (5.2)$$

Aqui  $z = \zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  é a superfície definida como o conjunto de todos os pontos da forma  $\mathbf{m}_I(\mathbf{x}, \zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n}))$ , para os quais a soma do tempo de trânsito  $\tau_D(\xi, \mathbf{m}_I)$  ao longo dos segmentos do raio seja constante e igual ao tempo fixo  $t$ ,  $\beta$  é o ângulo em  $\mathbf{m}_I$  de mergulho relativo a isócrona  $\zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ . No caso em que o refletor é tangente à superfície isócrona, então este ângulo de mergulho  $\beta$  é também do refletor. Finalmente tanto  $L_{sm_I}$  quanto  $L_{m_{Ig}}$  tem o mesmo significado como mencionado anteriormente nas considerações básicas.

Considere a imagem migrada dada por

$$\Phi(\mathbf{x}, z) = \Phi_0(\mathbf{x}) f[m_D(\mathbf{x})(z - \zeta_R(\mathbf{x}))], \quad (5.3)$$

sendo  $z = \zeta_R(\mathbf{x})$  a superfície de reflexão em profundidade e

$$m_D(\mathbf{x}) = \frac{\partial \tau_D(\xi, \mathbf{m})}{\partial z} \Big|_{z=\zeta_R(\mathbf{x})} = \frac{2 \cos \alpha_{\mathbf{m}} \cos \beta_{\mathbf{m}}}{c(\mathbf{m})} \quad (5.4)$$

o fator de estiramento vertical da imagem migrada em profundidade, em que  $\alpha_{\mathbf{m}}$  é o ângulo que o raio  $bfsm(\mathbf{mg})$  faz com a normal em  $\mathbf{m}$ ,  $\beta_{\mathbf{m}}$  o ângulo que a normal faz com o eixo vertical (profundidade) e  $c$  é a velocidade. Agora, substituindo (5.3) na representação (5.1), segue que,

$$\Psi(\mathbf{n}) = \frac{1}{2\pi} \int \int_E d\mathbf{x} W_{IS}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \Phi_0(\mathbf{x}) m_D(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial t} f[m_D(\mathbf{x})(z - \zeta_R(\mathbf{x}))] \Big|_{z=\zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n})} \quad (5.5)$$

que é uma forma compacta para a integral de demigração de Kirchhoff.

### 5.3 Avaliação Assintótica - Fora do Plano

Para apresentar a representação integral conveniente em 2.5D, vamos inicialmente especificar o conjunto de abertura, isto é, da mesma forma como procedemos nos capítulos anteriores, as particularidades do meio nos permite escrever

$$E = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad x_1 \in [\epsilon_1, \epsilon_2] \quad \text{e} \quad x_2 \in \mathbf{R}\}. \quad (5.6)$$

onde os extremos  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  são os limites do conjunto de abertura da demigração.

Visando efetuar a avaliação assintótica de (5.5), vamos usar (5.6) em (5.5) reescrita como

$$\begin{aligned}\Psi_1(\mathbf{n}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 W_{IS}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \Phi_0(\mathbf{x}) m_D(\mathbf{x}) \\ &\times \frac{\partial}{\partial t} f[t + m_D(\mathbf{x})(\zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n}) - \zeta_R(\mathbf{x}))]\end{aligned}\quad (5.7)$$

para ser compreendida como  $\Psi_1(\mathbf{n}, t)|_{t=0} = \Psi(\mathbf{n})$ .

Aplicando transformada de Fourier em (5.7), obtemos

$$\begin{aligned}\Psi_1(\mathbf{n}, \omega) &= \frac{i\omega F(\omega)}{2\pi} \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 W_{IS}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \Phi_0(\mathbf{x}) m_D(\mathbf{x}) \\ &\times \exp[i\omega m_D(\mathbf{x})(\zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n}) - \zeta_R(\mathbf{x}))].\end{aligned}\quad (5.8)$$

Considere a integral

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 W_{IS}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \Phi_0(\mathbf{x}) m_D(\mathbf{x}) \exp[i\omega m_D(\mathbf{x})(\zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n}) - \zeta_R(\mathbf{x}))]. \quad (5.9)$$

Para efetuar a avaliação assintótica de (5.9), definimos

$$T_1(\mathbf{x}, \mathbf{n}(\xi, t)) = m_D(\mathbf{x})(\zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n}) - \zeta_R(\mathbf{x})). \quad (5.10)$$

Da mesma forma como no desenvolvimento da integral de migração suponhamos que exista  $x_2 = x_2^*$  tal que

$$\left. \frac{\partial T_1(\mathbf{x}, \mathbf{n}(\xi, t))}{\partial x_2} \right|_{x_2=x_2^*} = 0. \quad (5.11)$$

Então, fazendo uso da fórmula da fase estacionária na representação integral (5.9), e selecionando  $x_2^* = 0$ , temos

$$\begin{aligned}I(\omega) &\simeq \sqrt{2\pi} W_{IS}((x_1, 0), \mathbf{n}) \Phi_0(x_1, 0) m_D(x_1, 0) \exp[-i\pi/4] \\ &\times \frac{\exp[i\omega m_D(x_1, 0)(\zeta_I((x_1, 0), \mathbf{n}) - \zeta_R(x_1, 0))]}{|\omega|^{1/2} \left| \frac{\partial^2 [m_D(\zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n}) - \zeta_R(\mathbf{x}))]}{\partial x_2^2} \right|_{x_2^*=0}}^{1/2}\end{aligned}\quad (5.12)$$

onde

$$\left| \frac{\partial^2 [m_D(\zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n}) - \zeta_R(\mathbf{x}))]}{\partial x_2^2} \right|_{x_2^*=0}^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{\sigma_s} + \frac{1}{\sigma_g}} \quad (5.13)$$

com

$$\rho_2 = \text{senal} \left( \frac{\partial^2 [m_D(\mathbf{x})(\zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n}) - \zeta_R(\mathbf{x}))]}{\partial x_2^2} \right) \Big|_{x_2^*=0} = 1. \quad (5.14)$$

conforme equação (A.20) apresentada no desenvolvimento do Apêndice A.

Agora, escrevendo os argumentos das funções envolvidas em (5.12) com  $x$  ao invés de  $(x_1, 0)$ , a substituição de (5.12) em (5.9) e posteriormente em (5.8) nos permite escrever

$$\begin{aligned}\Psi_1(\mathbf{n}, \omega) &\simeq \frac{(i\omega)^{1/2} F(\omega)}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} dx P_{IS}^{(2.5D)}(x, \mathbf{n}) \Phi_0(x) \\ &\times \exp[i\omega m_D(x)(\zeta_I(x, \mathbf{n}) - \zeta(x))]\end{aligned}\quad (5.15)$$

onde, neste caso,

$$P_{IS}^{(2.5D)}(x, \mathbf{n}) = \frac{W_{IS}(x, \mathbf{n}) m_D(x)}{\left| \frac{\partial^2 [m_D(x)(\zeta_I(x, \mathbf{n}) - \zeta_R(x))]}{\partial x_2^2} \right|_{x_2^* = 0}}^{1/2}. \quad (5.16)$$

Finalmente, vamos estabelecer a contrapartida no tempo da representação (5.15). Aplicando a transformada de Fourier à (5.15) (Bleistein, 1986) e usando a propriedade (3.23) da derivada temporal  $t$  de ordem  $n = \frac{1}{2}$ , obtemos

$$\Psi(\mathbf{n}) = \Psi(\mathbf{n}, t)|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} dx P_{IS}^{(2.5D)}(x, \mathbf{n}) \Phi_0(x) \frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}} f[m_D(x)(\zeta_I(x, \mathbf{n}) - \zeta(x))]. \quad (5.17)$$

que após o uso da propriedade (Oldham et al., 1974)

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} f(ax) = \sqrt{a} \frac{d^{1/2}}{[d(ax)]^{1/2}} f(ax) \quad (5.18)$$

nos permite obter

$$\Psi(\mathbf{n}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} dx_1 P_{IS}^{(2.5D)}(x, \mathbf{n}) \Phi_0(x) \frac{1}{\sqrt{m_D(x)}} \frac{d^{1/2}}{dz^{1/2}} f[m_D(x)(z - \zeta(x))]\Big|_{z=\zeta_I(x, \mathbf{n})}. \quad (5.19)$$

Portanto, a representação no domínio do tempo é dada por

$$\Psi(\mathbf{n}) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} dx W_{IS}^{(2.5D)}(x, \mathbf{n}) \frac{\partial^{1/2}}{\partial z^{1/2}} \Phi(x, z)\Big|_{z=\zeta_I(x, \mathbf{n})}, \quad (5.20)$$

onde

$$W_{IS}^{(2.5D)}(x, \mathbf{n}) = \frac{W_{IS}(x, \mathbf{n}) \sqrt{m_D(x)}}{\left| \frac{\partial^2 [m_D(x)(\zeta_I(x, \mathbf{n}) - \zeta_R(x))]}{\partial x_2^2} \right|_{x_2^* = 0}}^{1/2}. \quad (5.21)$$

Substituindo as expressões (2.29) em (5.2) e posteriormente em (5.21) temos

$$W_{IS}^{(2.5D)}(x, \mathbf{n}(\xi, t)) = \frac{\sqrt{m_D(x)}}{2L_s^{(2D)} L_g^{(2D)} \cos^2 \beta \sqrt{(\sigma_s + \sigma_g)}}, \quad (5.22)$$

que é a função peso desejada para a integral de demigração de Kirchhoff em 2.5D estabelecida pela expressão (5.20).

## 5.4 Avaliação Assintótica - Dentro do Plano

Esta seção tem a finalidade de verificar se os dados migrados são recuperados pela integral de demigração (sismograma em 2.5D).

Com este fim, vamos considerar

$$\Psi_1(\mathbf{n}, \omega) \simeq \frac{(i\omega)^{1/2} F(\omega)}{(2\pi)^{1/2}} J_x(\omega) \quad (5.23)$$

onde

$$\begin{aligned} J_x(\omega) &= \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} dx W_{IS}^{(2.5D)}(x, \mathbf{n}) \Phi_0(x) \\ &\times \exp[i\omega m_D(x)(\zeta_I(x, \mathbf{n}) - \zeta_R(x))]. \end{aligned} \quad (5.24)$$

De forma análoga ao desenvolvimento da avaliação assintótica fora do plano de dependência para a integral de migração de Kirchhoff, definimos

$$T_2(x, \mathbf{n}) = m_D(x)(\zeta_I(x, \mathbf{n}) - \zeta_R(x)). \quad (5.25)$$

Suponhamos que exista um único ponto estacionário  $x = x^*$  tal que

$$\left. \frac{\partial T_2(x, \mathbf{n})}{\partial x} \right|_{x=x^*} = 0. \quad (5.26)$$

Então, aplicando o método da fase estacionária na integral (5.24), obtemos

$$\begin{aligned} J(\omega) &\simeq \sqrt{2\pi} W_{IS}^{(2.5D)}(x^*, \mathbf{n}) \Phi_0(x^*) \exp[i\rho_1 \pi/4] \\ &\times \frac{\exp[i\omega m_D(x^*)(\zeta_I(x^*, \mathbf{n}) - \zeta_R(x^*))]}{|\omega|^{1/2} \left| \frac{\partial^2 [m_D(x)(\zeta_I(x, \mathbf{n}) - \zeta_R(x))]}{\partial x^2} \right|_{x=x^*}^{1/2}} \end{aligned} \quad (5.27)$$

onde

$$\rho_1 = \text{sign} \left( \left. \frac{\partial^2 [m_D(x)(\zeta_I(x, \mathbf{n}) - \zeta_R(x))]}{\partial x^2} \right|_{x=x^*} \right). \quad (5.28)$$

Assim, substituindo a expressão (5.27) em (5.23), segue que

$$\begin{aligned} \Psi_1(\mathbf{n}, \omega) &\simeq F(\omega) \Gamma_{IS}^{(2.5D)}(x^*, \mathbf{n}) \Phi_0(x^*) \\ &\times \exp[i\omega m_D(x^*)(\zeta_I(x^*, \mathbf{n}) - \zeta_R(x^*))] \end{aligned} \quad (5.29)$$

onde

$$\Gamma_{IS}^{(2.5D)}(x^*, \mathbf{n}) = \frac{W_{IS}^{(2.5D)}(x^*, \mathbf{n}) \exp[i\frac{\pi}{2}(1 + (\rho_1 - 1)/2)]}{\left| \frac{\partial^2 [m_D(x)(\zeta_I(x, \mathbf{n}) - \zeta_R(x))]}{\partial x^2} \right|_{x=x^*}^{1/2}}. \quad (5.30)$$

Portanto, a expressão (5.30) é o sismograma em 2.5D. Este sismograma coincide com os dados não migrados apresentado em (Tygel et al., 1996, Jaramillo et al., 1998), para maior detalhes veja o desenvolvimento do Apêndice A.

## 5.5 Meio Verticalmente Não Homogêneo

### Função Peso

A função para este tipo de situação é obtida substituindo-se o modelo de velocidade  $c = c(z)$  dentro de (2.53) e (2.56) a fim de encontrar inicialmente as quantidades  $\sigma_i$  e  $L_i^{(2D)}$ , ( $i = s, g$ ), que posteriormente colocadas na expressão (5.21) deverá produzir a função peso desejada.

### Linha de Empilhamento

A linha de empilhamento para a demigração é dada implicitamente pela equação (4.22), isto é,  $\tau_D(\xi, \mathbf{m}) = t$ , com  $\xi$  que define fontes e receptores fixos e  $(x, z)$  variáveis.

## 5.6 Casos Analíticos

As seções a seguir tem por finalidade apresentar a função peso e a linha de empilhamento para os modelos de velocidades verticais (constante, gradiente constante, vagarosidade quadrada com gradiente constante e logaritmo da velocidade com gradiente constante).

### 5.6.1 Velocidade Constante

#### Função Peso

Substituindo (2.68) e (2.69) em (5.21), obtemos

$$W_{IS}^{(2.5D)}(x, \mathbf{n}) = \frac{c_0 \sqrt{m_D(x)}}{2 \cos^2 \beta (\ell_s + \ell_g)} \sqrt{\frac{1}{c_0} \left( \frac{1}{\ell_s} + \frac{1}{\ell_g} \right)} \quad (5.31)$$

onde as quantidades  $\ell_i$  ( $i = s, g$ ) e  $m_D(x)$  são apresentadas pelas expressões (2.68) e (5.4), respectivamente. A expressão (5.31) é a função peso correspondente a integral de demigração de Kirchhoff para o modelo de velocidade constante. (Veja Figura 5.1(b)).

#### Linha de Empilhamento

Para um ponto fixo  $\mathbf{n} = (\xi, t)$  no domínio do tempo e variando  $\mathbf{m} = (x, z)$  a equação  $\tau_D(\xi, x, \zeta_I(x, \xi, t)) = t$  define implicitamente a linha de empilhamento de demigração (isócrona)  $z = \zeta_I(x; \xi, t)$ . Portanto, resolvendo a equação (4.22) para  $z$ , obtemos

$$\zeta_I(x; \xi, t) = b \sqrt{1 - (x - x_{\mathbf{m}}(\xi))^2 / a^2} \quad (5.32)$$

onde

$$a = \frac{c_0 t}{2}, \quad b = \sqrt{a^2 - \left( \frac{x_s - x_g}{2} \right)^2} \quad (5.33)$$

e a coordenada do ponto médio expressa por

$$x_{\mathbf{m}}(\xi) = \frac{x_s(\xi) + x_g(\xi)}{2}. \quad (5.34)$$

A expressão (5.32) é a linha de empilhamento de demigração para o modelo de velocidade constante Figura 5.1(a).

## Ilustrações Numéricas

Na Figura 5.1, observamos em (a) a linha de empilhamento de demigração e em (b) a função peso. Ambas, correspondem a um meio homogêneo e são computadas para os pontos no domínio do tempo  $n_1(0, 0.5)$ ,  $n_2(0, 0.7)$  e  $n_3(0, 1)$  com uma velocidade  $c_0 = 3.5 \text{ km/s}$ .

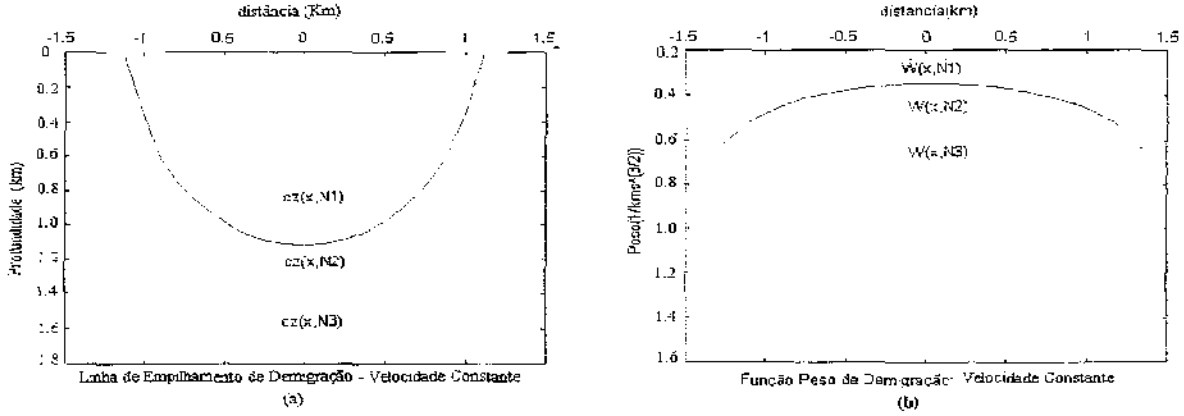


Figura 5.1: (a) Linha de empilhamento de demigração. (b) A função peso de demigração.

## Demigração da Imagem Migrada de um Impulso

Na Figura 5.2, observamos a reconstrução do impulso obtido pela demigração da imagem migrada de um impulso localizado em  $x = 0 \text{ km}$  e  $t = 1 \text{ s}$  num meio com velocidade de  $3.5 \text{ km/s}$ , variação da linha de tempo de  $0.1 \text{ s}$  até  $2.1 \text{ s}$  e coordenadas do ponto médio variando de  $-2.5 \text{ km}$  até  $2.5 \text{ km}$  e afastamento comum entre fontes e receptores.

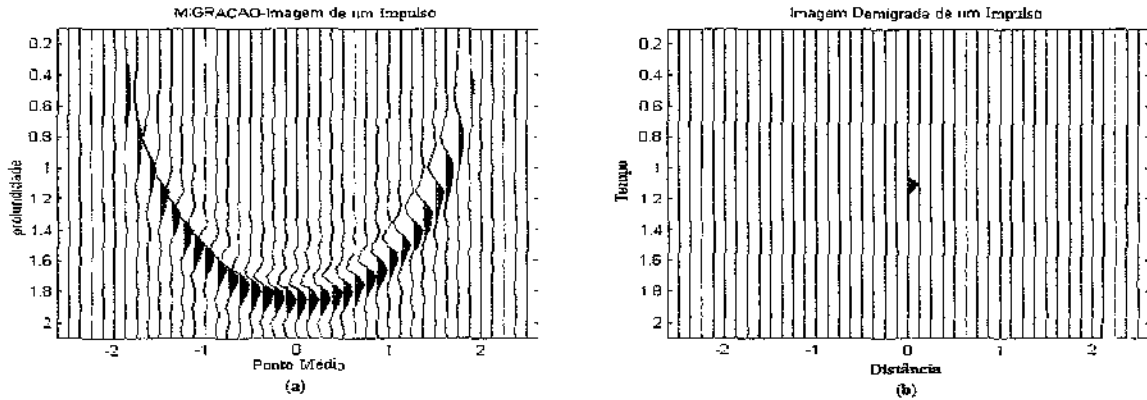


Figura 5.2: (a) Imagem Migrada. (b) Imagem demigrada (recuperação do impulso).

# Demigração da Imagem Migrada de um Refletor Curvo

Na Figura 5.3, observamos a reconstrução da imagem obtida pela demigração da imagem migrada de um refletor curvo num meio cuja velocidade é de 2 km/s, linha horizontal variando de -0.5 km até 0.5 km, a variação em profundidade de 0.5 km até 0.7 km e com afastamento comum entre fontes e receptores. Esta imagem é estabelecido na região cuja linha de tempo varia de 0.3 s até 0.81 s com coordenadas do ponto médio variando de = -0.5 km até 0.5 km.

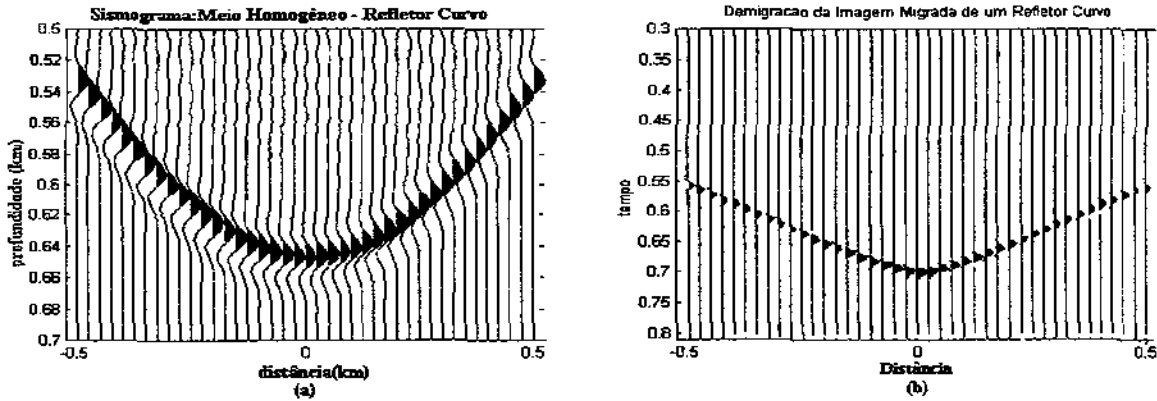


Figura 5.3: (a) Imagem Migrada. (b) Imagem demigrada.

Como sabemos (Tygel et al., 1996) os veículos responsáveis pela migração e demigração em altas frequências constituem um par de transformadas, no sentido de que os dados de saída da migração na verdade são os dados de entrada para a demigração e vice-versa.

Este fato é ilustrado pela Figura 4.3 em correspondência com a Figura 5.2 e pela Figura 4.4 em correspondência com Figura 5.3.

## 5.6.2 Velocidade com Gradiente Constante

### Função Peso

A função peso para o modelo de velocidade com gradiente constante é estabelecida mediante a substituição das quantidades dadas em (2.76) em (5.21). O resultado após algumas simplificações pode ser escrito como

$$W_{IS}^{(2.5D)}(x, \mathbf{n}) = \frac{cc_0 \sqrt{m_D(x)}}{2 \cos^2 \beta (\sigma_s + \sigma_g)} \sqrt{\frac{1}{\sigma_s} + \frac{1}{\sigma_g}} \quad (5.35)$$

onde as quantidades  $\sigma_i$  ( $i = s, g$ ) são estabelecidas pela fórmula (2.76). A função peso (5.35) é ilustrada na Figura 5.4(b).

### Linha de Empilhamento

neste caso, a correspondente isócrona  $z = \zeta_I(x; \xi, t)$  é dada implicitamente pela equação (4.26) com  $\tau_D(\xi, \mathbf{m}) = t$  para  $x_s(\xi)$  e  $x_g(\xi)$  fixos e variando-se  $(x, z)$ . A sua obtenção como fórmula analítica não é possível. Sua ilustração numérica está apresentada na Figura 5.4(a).

### Ilustrações Numéricas

Na Figura 5.4, apresentamos em (a) a linha de empilhamento de demigração e em (b) a função peso de demigração para o modelo de velocidade com gradiente constante.

Neste caso, tanto a linha de empilhamento quanto a função peso são construídas correspondentemente aos pontos  $\mathbf{n}_1(0, 0.5)$ ,  $\mathbf{n}_2(0, 0.7)$  e  $\mathbf{n}_3(0, 1)$  no domínio do tempo, com uma velocidade inicial de  $c_0 = 3$  km/s e um gradiente  $g = 1$  s<sup>-1</sup>.

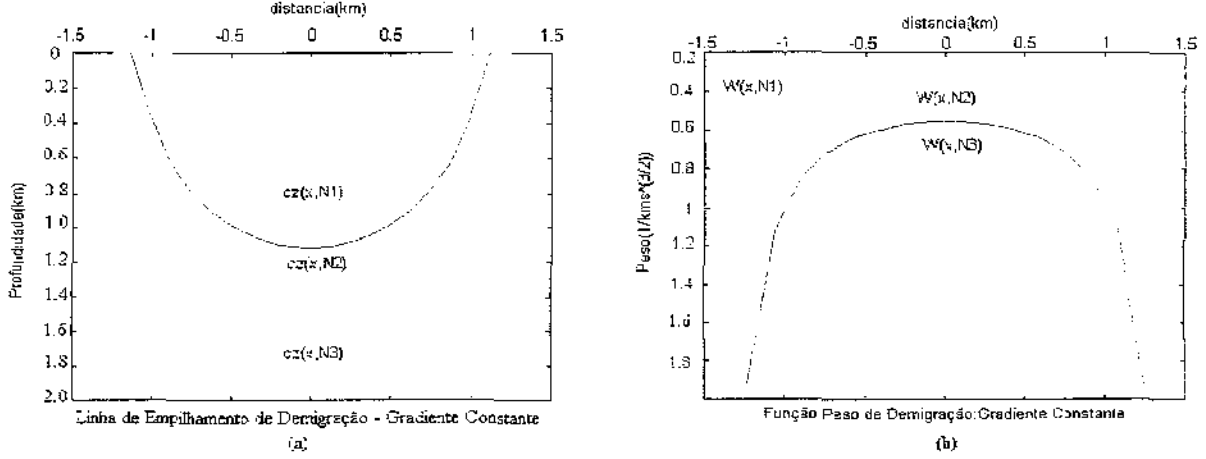


Figura 5.4: (a) A Linha de empilhamento de demigração. (b) A função peso de demigração.

### 5.6.3 Vagariosidade Quadrada com Gradiente Constante

#### Função Peso

A substituição de (2.76) dentro da expressão (5.21) permite escrever

$$W_{IS}^{(2.5D)}(x, \mathbf{n}) = \frac{cc_0 \sqrt{m_D(x)}}{2 \cos^2 \beta (\sigma_s + \sigma_g) \sqrt{C_s C_g}} \sqrt{\frac{1}{\sigma_s} + \frac{1}{\sigma_g}}. \quad (5.36)$$

onde  $\sigma_i$  e  $C_i$  ( $i = s, g$ ) são dadas por (2.75) e (2.78), respectivamente.

A expressão (5.36) é a função peso para a integral de demigração para o modelo de vagariosidade quadrada com gradiente constante Figura 5.5(b).

#### Linha de Empilhamento

Para este modelo de velocidade a correspondente isócrona  $z = \zeta_I(x; \xi, t)$  é dada implicitamente pela equação (4.29) com  $\tau_D(\xi, \mathbf{m}) = t = \text{constante}$  para  $x_s(\xi)$  e  $x_g(\xi)$  fixos e variando-se  $(x, z)$ .

A obtenção como fórmula analítica não é possível. Sua ilustração numérica é apresentada na Figura 5.5(a).

### Ilustrações Numéricas

Na Figura 5.5, observa-se em (a) a linha de empilhamento de demigração e em (b) a função peso de demigração para o modelo de vagarosidade quadrada com gradiente constante.  $\mathbf{n}$  estas ilustrações fazemos uso dos pontos  $\mathbf{n}_1(0, 0.5)$ ,  $\mathbf{n}_2(0, 0.7)$  e  $\mathbf{n}_3(0, 1)$  no domínio do tempo, com uma velocidade inicial de  $c_0 = 3\text{km/s}$  e um gradiente  $g = -0.486 \text{ s}^2/\text{Km}^3$ .

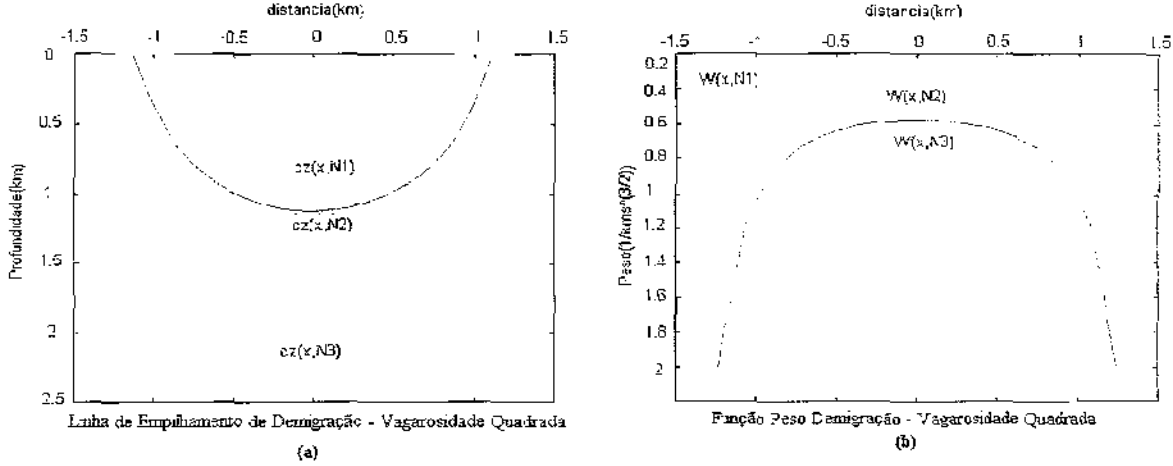


Figura 5.5: (a) A Linha de empilhamento de demigração. (b) A função peso de demigração.

### 5.6.4 Logaritmo da Velocidade com Gradiente Constante

#### Função Peso

Substituindo (2.86) dentro da expressão (5.21) podemos escrever

$$W_{IS}^{(2.5D)}(x, \mathbf{n}) = \frac{cc_0 \sqrt{m_D(x)}}{2 \cos^2 \beta(\sigma_s + \sigma_g)} \sqrt{Y_s Y_g} \sqrt{\frac{1}{\sigma_s} + \frac{1}{\sigma_g}} \quad (5.37)$$

com  $\sigma_i$  e  $Y_i$  ( $i = s, g$ ) são dadas pelas expressões (2.85) e (2.87), respectivamente.

A expressão (5.37) é a função peso de demigração para a distribuição logaritmo da velocidade com gradiente constante Figura 5.6(b).

#### Linha de Empilhamento

Para este modelo de velocidade a correspondente isócrona  $z = \zeta_I(x; \xi, t)$  é dada implicitamente pela equação (4.31) com  $\tau_D(\xi, \mathbf{m}) = t = \text{constante}$  para  $x_s(\xi)$  e  $x_g(\xi)$  fixos e variando-se  $(x, z)$ . O resultado após algumas manipulações algébricas pode ser escrita como

$$\zeta_I(x; \xi, t) = \frac{1}{g} \ln \left| \frac{TV_+ + \sqrt{T^2 V_+^2 - (T^2 - 1)(V_-^2 - 1)}}{(1 - T^2)} \right| \quad (5.38)$$

onde

$$V_{\pm} = \frac{\cos(g(x - x_s))}{2T} \pm \frac{\cos(g(x - x_g))}{2T} \quad \text{com} \quad T = \frac{tgc_0}{2} \quad (5.39)$$

Portanto, a expressão (5.38) é a linha de empilhamento de demigração para o modelo de logaritmo da velocidade com gradiente constante Figura 5.6(a).

### Ilustrações Numéricas

A Figura 5.6 apresenta em (a) a linha de empilhamento de demigração e em (b) a função peso de demigração para o modelo de logaritmo da velocidade com gradiente constante.

Em ambas, as ilustrações são correspondentes aos pontos  $\mathbf{n}_1(0, 0.5)$ ,  $\mathbf{n}_2(0, 0.7)$  e  $\mathbf{n}_3(0, 1)$  no domínio do tempo, com velocidade inicial de  $c_0 = 3\text{km/s}$  e um gradiente  $g = 0.286 \text{ Km}^{-1}$ .

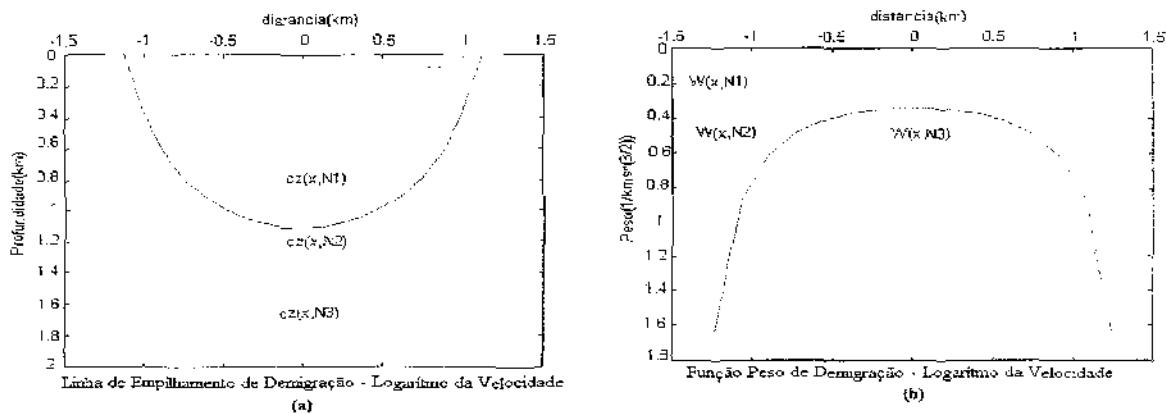


Figura 5.6: (a) A Linha de empilhamento de demigração.(b) A função peso de demigração para o modelo de logaritmo da velocidade com gradiente constante.

## Demigração da Imagem migrada de um Pulso

Na Figura 5.7, ilustramos a recuperação de um impulso obtido pela demigração da imagem migrada de um impulso localizado em  $x = 0 \text{ km}$  e  $t = 1 \text{ s}$  num meio com velocidade inicial de  $3 \text{ km/s}$ , um gradiente  $g = 0.286 \text{ km}^{-1}$ , variação da linha de tempo de  $0.1 \text{ s}$  até  $2.1 \text{ s}$  e coordenadas do ponto médio variando de  $-2.5 \text{ km}$  até  $2.5 \text{ km}$ .

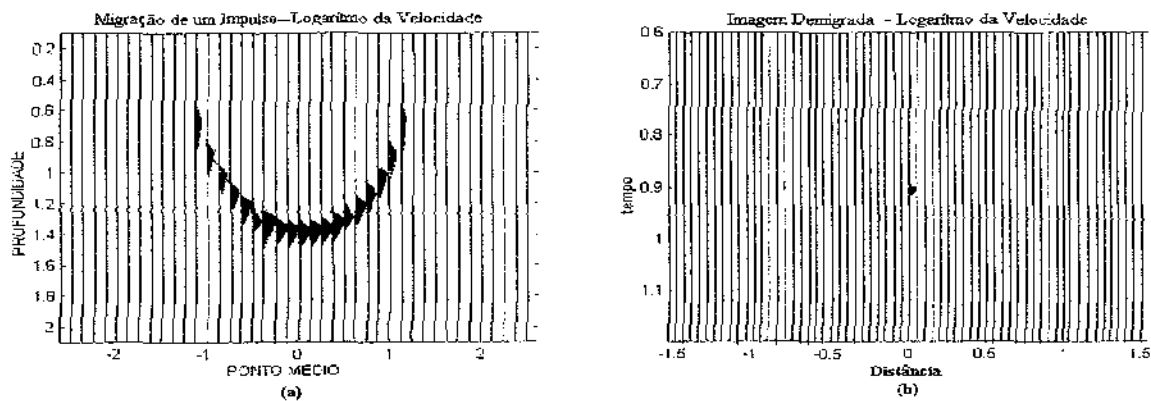


Figura 5.7: (a) Imagem Migrada. (b) Imagem demigrada (Recuperação de um Impulso).

A Figura 4.10 em correspondência com a Figura 5.7 ilustram a recuperação dos dados originais após a aplicação em sequência das integrais de migração e demigração para o modelo de velocidade logarítmica com gradiente constante.

## 5.7 Resumo

Neste capítulo apresentamos a integral de demigração do tipo Kirchhoff para a situação 2.5D e para o meio verticalmente não homogêneo. Além disso, fornecemos fórmulas analíticas para as linhas de empilhamento e funções pesos correspondentes aos quatro modelos de velocidades (com dependência da componente vertical  $z$ ) citados anteriormente.

Estas fórmulas analíticas obtidas nos dois últimos capítulos, além de permitir a realização da migração e da demigração de maneira mais rápida, também constituem a base da obtenção das soluções dos problemas de transformações de imagens, que serão discutidos nos capítulos seguintes.

Os dois próximos capítulos são reservados ao estudo de problemas de transformações de imagens, o primeiro conhecido como problema de Transformada de Configuração e o segundo como Remigração.

Os problemas de Transformadas de Configuração são motivados pelo fato de possibilitar a comparação de dados imageados com dados registrados. Em síntese tem como objetivo principal permitir ajustes de dados e modelos de velocidades.

Por outro lado, os problemas de Remigração são aqueles que possibilitam ajustar dados migrados a novas e melhores velocidades.

Os capítulos seguintes serão destinados à análise de vários problemas levando-se em conta os modelos analíticos de velocidades estudados anteriormente.

Reservados aos problemas de transformações de imagens estão várias situações que podem ser exploradas para uma nova investigação principalmente no que diz respeito a alternância de configurações, afastamento comum para afastamento nulo, um afastamento comum  $h_1$  para um outro afastamento comum  $h_2$ , continuação de um tiro comum, dentre outras situações.

Além disso, o conhecimento das expressões analíticas para os diversos modelos de velocidades verticais estudadas anteriormente deverão permitir a obtenção de vários resultados sobre remigração, bem como a constante busca de expressões analíticas para outros modelos de distribuições de velocidades poderão possibilitar outros novos resultados e a organização de outros trabalhos desta natureza.

Finalmente, convém observar que os programas de migração e demigração para os diversos modelos de distribuições de velocidades estudados no desenvolvimento dos capítulos 4 e 5 serviram para confirmar numericamente as fórmulas analíticas obtidas no decorrer deste trabalho.

Em sua forma final estes programas estão representados como "functions", que editados dentro do "software Matlab" realizam a migração e da demigração para os modelos de velocidades analíticos mencionados anteriormente.

## Capítulo 6

# TRANSFORMADA DE CONFIGURAÇÃO

### 6.1 Introdução

Considere dados no domínio  $(\xi, t)$ , que foram obtidos, por exemplo, através da integral de Kirchhoff-Helmholtz, mediante o uso de um modelo de macro-velocidade  $c(x, z)$ , uma configuração fonte-geofone  $C$  e uma superfície de reflexão.

De posse destes dados realizamos a migração, através da integral de migração de Kirchhoff, obtendo assim, os correspondentes dados migrados (imagem em profundidade). Com estes dados migrados, efetuamos a demigração através da integral de demigração de Kirchhoff com o mesmo modelo de macro-velocidade, mas, mediante o uso de uma nova configuração fontes-receptores  $\tilde{C}$ . O resultado desta operação será então uma nova imagem no domínio do tempo, com a qual é possível a comparação (dados imageados com os dados registrados) e com isto fornecendo uma razoável possibilidade quanto a validação do modelo de velocidade que está sendo usada para a dinâmica desta operação.

Esta complexa operação de transformação de imagem é conhecida como Transformada de Configuração (Tygel et al., 1996). A solução deste tipo de problema, na verdade, pode ser descrita de duas formas distintas: a solução cascata, cuja integralização se dá em duas etapas (através de duas operações, veja Figura 6.1) e a segunda, conhecida como solução simples (Tygel et al., 1996), usando uma única etapa (ou seja, através de uma única operação, veja Figura 6.2). Ambas, soluções, cascata e simples, fornecem uma nova imagem no domínio do tempo, que deverão auxiliar nos ajustes dos dados originais, como foi dito anteriormente, caso a distribuição de velocidade usada seja adequada.

Em Tygel et al. (1996) as soluções cascata e simples para o problema de Transformada de Configuração são descritas e estabelecidas para o meio em 3D.

As próximas seções são reservadas ao estabelecimento dos procedimentos matemáticos necessários às especificações destes tipos de soluções para a situação 2.5D, para um meio verticalmente não homogêneo e para os quatro casos analíticos mencionados anteriormente.

## Ilustrações das Soluções

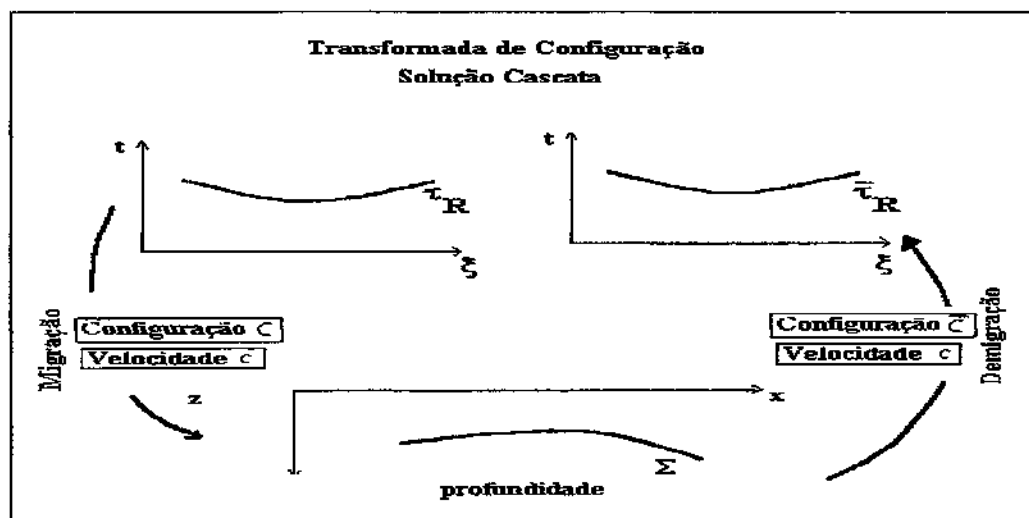


Figura 6.1: Solução Cascata é obtida da seguinte forma: Efetuamos a migração dos dados representados por  $(\tau_R)$  fornecendo uma imagem  $(\Sigma)$ . Em seguida a demigração realizada a partir desta imagem migrada fornece uma nova imagem no tempo  $(\bar{\tau}_R)$ . A migração é efetuada mediante a utilização de um modelo de velocidade  $c$  e levando-se em conta uma configuração de fontes-receptores  $C$  e a demigração com o mesmo modelo de velocidade  $c$ , porém, usando-se uma nova configuração de fontes-receptores  $\bar{C}$ .

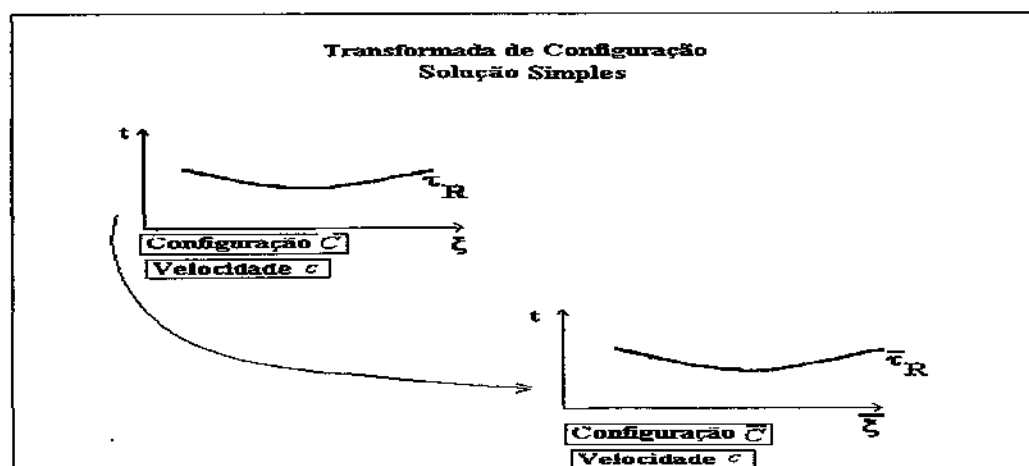


Figura 6.2: Solução Simples - Aplica-se a integral de demigração com uma velocidade  $c$  mediante o uso de uma configuração de fontes-receptores  $\bar{C}$  ao conjunto de dados migrados, gerado pela integral de migração levando-se em conta a mesma velocidade  $c$ , porém, com uma outra configuração de fontes-receptores  $C$ .

## 6.2 Solução Cascata em 3D

Consideramos inicialmente a representação matemática da solução cascata para o problema de transformada de configuração em 3D. Para a sua especificação considera-se um modelo de velocidade fixo, mas, duas diferentes configurações de fontes-receptores.

As quantidades apresentadas por uma barra sobre as letras, são as quantidades correspondentes a configuração de saída (domínio onde desejamos obter os resultados). O parâmetro  $\xi$  varia no conjunto  $A$  (conjunto de entrada) e  $\bar{\xi}$  no conjunto  $\bar{A}$  (conjunto de saída). Escrevemos também  $U(\xi, t)$  para os dados de entrada e  $\bar{U}(\bar{\xi}, \bar{t})$  para os dados de saída.

Assim consideramos a representação integral (Tygel et al., 1996) dada por

$$\bar{U}(\bar{\mathbf{n}}) = -\frac{1}{4\pi^2} \int \int_E d\mathbf{x}^2 \int \int_A d\xi^2 W_{CC}(\xi, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(\xi, t) \Big|_{t=\tau_{CC}(\xi, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}})} \quad (6.1)$$

onde

$$W_{CC}(\xi, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}}) = \bar{W}_{IS}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}}) W_{DS}(\xi, \mathbf{m}_I) m_D(\xi, \mathbf{m}_I) \quad (6.2)$$

e

$$\tau_{CC}(\xi, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}}) = \tau_D(\xi, \mathbf{m}_I). \quad (6.3)$$

Em (6.2) a expressão  $\bar{W}_{IS}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}})$  é a função peso correspondente a integral de demigração de Kirchhoff quando aplicada a uma imagem migrada  $V(\mathbf{m})$ . A função  $\bar{W}_{IS}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}})$  deve ser calculada usando-se a configuração de saída em profundidade e  $W_{DS}(\xi, \mathbf{m}_I)$  e  $\tau_D$ , a função peso da migração e a superfície de Huygens correspondentes a um ponto  $\mathbf{m}_I(\mathbf{x}, \bar{\xi}_I(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{n}}))$ , respectivamente, computadas com a configuração de entrada em profundidade.

Considere a solução do raio de ordem zero (Červený, 1995),

$$U(\xi, t) = u_0(\xi) f[t - \tau_R(\xi)]. \quad (6.4)$$

Substituindo a expressão (6.4) em (6.1), temos

$$\bar{U}(\bar{\mathbf{n}}, t) = \frac{-1}{4\pi^2} \int \int_E d\mathbf{x}^2 \int \int_A d\xi^2 W_{CC}(\xi, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}}) u_0(\xi) f''[t - \tau_R(\xi)] \Big|_{t=\tau_{CC}(\xi, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}})} \quad (6.5)$$

para ser entendida como  $\bar{U}(\bar{\mathbf{n}}, t) \Big|_{t=0} = \bar{U}(\bar{\mathbf{n}})$ . Usando as correspondentes definições dos conjuntos de aberturas da migração (4.5) e demigração (5.6), segue que,

$$\begin{aligned} \bar{U}(\bar{\mathbf{n}}, t) = & -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{a_1}^{a_2} d\xi_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_2 W_{CC}(\xi, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}}) u_0(\xi) \\ & \times f''[t - \tau_R(\xi)] \Big|_{t=\tau_{CC}(\xi, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}})} \end{aligned} \quad (6.6)$$

a qual é a solução do problema de transformada de configuração em 3D, que é escrita desta forma para possibilitar que seja usada na próxima seção a fim de obtermos sua contrapartida em 2.5D.

### 6.3 Solução Cascata em 2.5D

A obtenção da solução cascata em 2.5D se dá mediante a aplicação do método da fase estacionária na representação integral (6.6) no domínio da frequência, com a ordem de integração trocada, ou seja, a avaliação assintótica, primeiro em relação a  $\xi_2$  depois em  $x_2$ . Nós consideramos a contrapartida da integral em  $\xi_2$  no domínio da frequência,

$$L_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_2 W_{CC}(\xi, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}}) u_0(\xi) \exp[i\omega(\tau_{CC}(\xi, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}}) - \tau_R(\xi))]. \quad (6.7)$$

Definimos

$$\Psi_1(\xi, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}}) = \tau_{CC}(\xi, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}}) - \tau_R(\xi). \quad (6.8)$$

Seja  $\xi_2 = \xi_2^*$  o ponto estacionário de (6.8), isto significa que

$$\left. \frac{\partial \Psi_1(\xi, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}})}{\partial \xi_2} \right|_{\xi_2 = \xi_2^*} = 0, \quad (6.9)$$

onde o valor estacionário possibilita a determinação do ponto  $\mathbf{m}_I$  no qual as duas funções (isócronas), para ambas configurações (entrada e saída), são tangentes.

Agora, aplicando o método da fase estacionária a integral (6.7), usando os resultados (2.36) e (3.19) e selecionando  $\xi_2^* = 0$ , obtemos

$$L_\xi \simeq \sqrt{2\pi} u_0(\xi_1, 0) W_{CC}((\xi_1, 0), \mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}}) e^{[\frac{i\pi}{4}]} \sigma_F^{1/2} \times \frac{\exp[i\omega(\tau_{CC}((\xi_1, 0), \mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}}) - \tau_R(\xi_1, 0))]}{|\omega|^{1/2}}. \quad (6.10)$$

Substituindo (6.10) na representação integral (6.6), mas, escrita no domínio na frequência com os argumentos das quantidades envolvidas escritos com o parâmetro  $\xi$  ao invés de  $(\xi_1, 0)$ , temos

$$\bar{U}(\bar{\mathbf{n}}, \omega) = -\frac{\sqrt{2\pi} (i\omega)^{3/2} F(\omega)}{4\pi^2} \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} dx_1 \int_{a_1}^{a_2} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 P_{CC}^{(2.5D)}(\xi, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}}) u_0(\xi) \times \exp[i\omega(\tau_{CC}(\xi, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}}) - \tau_R(\xi))] \quad (6.11)$$

onde

$$P_{CC}^{(2.5D)}(\xi, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}}) = \sigma_F^{1/2} W_{CC}(\xi, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}}) \exp\left[\frac{i\pi}{2}\right] \quad (6.12)$$

com as quantidades  $W_{CC}(\xi, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}})$  dada por (6.2) e  $\sigma_F^{1/2}$  expressa por (2.36).

Dando continuidade a nossa proposta, isto é, para estabelecer a solução cascata em 2.5D, vamos aplicar o método da fase estacionária agora em

$$I_{\mathbf{x}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 u_0(\xi) P_{CC}^{(2.5D)}(\xi, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}}) \times \exp[i\omega(\tau_{CC}(\xi, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}}) - \tau_R(\xi))]. \quad (6.13)$$

O resultado selecionando o ponto estacionário  $x_2^* = 0$  é

$$I_{\mathbf{x}} \simeq \sqrt{2\pi} P_{CC}^{(2.5D)}(\xi, (x_1, 0), \bar{\mathbf{n}}) \times \frac{\exp[i\omega(\tau_{CC}(\xi_1, (x_1, 0), \bar{\mathbf{n}}) - \tau_R(\xi))]}{|H_{22}^{CT}|^{1/2}|\omega|^{1/2}}, \quad (6.14)$$

onde  $H_{22}^{CT}$  é apresentado pela expressão (B.13) do apêndice B.

Substituindo o resultado (6.14) em (6.11), e de volta ao domínio do tempo com os argumentos das funções envolvidas na avaliação assintótica escritos com  $x$  ao invés de  $(x_1, 0)$ , temos

$$\begin{aligned} \bar{U}(\bar{\mathbf{n}}, t) &\simeq -\frac{1}{2\pi} \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} dx \int_{a_1}^{a_2} d\xi u_0(\xi) W_{CC}^{(2.5D)}(\xi, x, \bar{\mathbf{n}}) \\ &\times \frac{\partial}{\partial t} f(t + \tau_{CC}(\xi, x, \bar{\mathbf{n}}) - \tau_R(\xi)) \end{aligned} \quad (6.15)$$

onde

$$W_{CC}^{(2.5D)}(\xi, x, \bar{\mathbf{n}}) = \frac{P_{CC}^{(2.5D)}(\xi, x, \bar{\mathbf{n}})}{|H_{22}^{CT}|^{1/2}} \quad (6.16)$$

com o peso  $P_{CC}^{(2.5D)}$  dado por (6.12).

A expressão (6.15) é a solução cascata para o problema de Transformada de Configuração em 2.5D. Convém observar que  $\tau_{CC}$  constitui a linha de empilhamento no espaço de saída, a qual é calculada relativamente aos pontos  $\mathbf{m}_I(x, \bar{\zeta}_I(x, \bar{\mathbf{n}}))$  sobre a isócrona  $z = \bar{\zeta}_I(x, \bar{\mathbf{n}})$  correspondente ao ponto  $\bar{\mathbf{n}}(\xi, \bar{t})$  com respeito a configuração do espaço de saída.

A substituição da expressão (6.2) dentro de (6.12) e posteriormente dentro de (6.16) produz uma expressão para a função peso apenas em termos de quantidades conhecidas e independentes do refletor.

## 6.4 Solução Simples em 2.5D

Nosso objetivo nesta seção consiste em estabelecer a solução simples para o problema de transformada de configuração em 2.5D.

Considere a solução cascata do problema de transformada de configuração em 2.5D, expressão (6.15), no domínio da frequência, reescrita da seguinte forma

$$\bar{U}(\bar{\mathbf{n}}, \omega) \simeq \frac{-(i\omega)F(\omega)}{2\pi} \int_{a_1}^{a_2} J_x(\xi, \bar{\mathbf{n}}, \omega) d\xi \quad (6.17)$$

onde a integral interna é dada por

$$J_x(\xi, \bar{\mathbf{n}}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dx W_{CC}^{(2.5)}(\xi, x, \bar{\mathbf{n}}) u_0(\xi) \exp[i\omega(\tau_{CC}(\xi, x, \bar{\mathbf{n}}) - \tau_R(\xi))]. \quad (6.18)$$

Vamos avaliar assintoticamente a integral (6.18) e depois colocar o resultado obtido na expressão (6.17). Nós assumimos que exista um único ponto estacionário  $x = x^*(\xi)$  tal que

$$\left. \frac{\partial[\tau_{CC}(\xi, x, \bar{\mathbf{n}}) - \tau_R(\xi)]}{\partial x} \right|_{x=x^*} = 0, \quad (6.19)$$

o qual determina o ponto  $\mathbf{m}_I(x^*, \bar{\zeta}_I(x^*, \bar{\mathbf{n}}))$  onde as duas funções (isócronas) com respeito as duas configurações são tangentes.

O resultado da avaliação assintótica da integral (6.17), mediante o uso do método da fase estacionária é dado por

$$J_x(\xi, \bar{\mathbf{n}}, \omega) \simeq \sqrt{2\pi} W_{CC}^{(2.5D)}(\xi, x^*, \bar{\mathbf{n}}) e^{i\frac{\kappa_1 \pi}{4}} \times \frac{\exp[i\omega(\tau_{CC}(\xi, x^*, \bar{\mathbf{n}}) - \tau_R(\xi))]}{|\omega|^{1/2} \left| \frac{\partial^2(\tau_{CC}(\xi, x^*, \bar{\mathbf{n}}) - \tau_R(\xi))}{\partial x^2} \right|_{x=x^*}^{1/2}} \quad (6.20)$$

onde

$$\zeta_1 = \text{sign} \left( \frac{\partial^2(\tau_{CC}(\xi, x^*, \bar{\mathbf{n}}) - \tau_R(\xi))}{\partial x^2} \right). \quad (6.21)$$

Assim, substituindo (6.20) na representação (6.17), vem

$$\bar{U}(\bar{\mathbf{n}}, \omega) \simeq \frac{(i\omega)^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{a_1}^{a_2} d\xi u_0(\xi) W_{CT}^{(2.5D)}(\xi, x^*, \bar{\mathbf{n}}) \exp[i\omega(\tau_{CC}(\xi, x^*, \bar{\mathbf{n}}) - \tau_R(\xi))] \quad (6.22)$$

onde

$$W_{CT}^{(2.5D)}(\xi, x^*, \bar{\mathbf{n}}) = \frac{W_{CC}^{(2.5D)}(\xi, x^*, \bar{\mathbf{n}}) \exp[i\frac{\pi}{4}(\zeta_1 + 1)]}{\left| \frac{\partial^2(\tau_{CC}(\xi, x^*, \bar{\mathbf{n}}) - \tau_R(\xi))}{\partial x^2} \right|_{x=x^*}^{1/2}}. \quad (6.23)$$

Aplicando transformada de Fourier na expressão (6.22) e utilizando a propriedade da derivada temporal  $(-t)$  de ordem  $n = \frac{1}{2}$ , a solução simples do problema de Transformada de Configuração em 2.5D pode ser escrita como,

$$\begin{aligned} \bar{U}(\bar{\mathbf{n}}, t) &\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a_1}^{a_2} d\xi u_0(\xi) W_{CT}^{(2.5D)}(\xi, x^*, \bar{\mathbf{n}}) \\ &\times \frac{d^{1/2}}{d(-t)^{1/2}} f[t + (\tau_{CC}(\xi, x^*, \bar{\mathbf{n}}) - \tau_R(\xi))] \\ &\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a_1}^{a_2} d\xi W_{CT}^{(2.5D)}(\xi, x^*, \bar{\mathbf{n}}) \frac{\partial^{1/2}}{\partial(-t)^{1/2}} U(\xi, t) \Big|_{t=\tau_{CT}(\xi; \bar{\mathbf{n}})}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

A substituição das expressões (6.2) em (6.12), depois, este resultado em (6.16) e posteriormente em (6.23) especifica a função peso para a solução simples do problema de transformada de configuração em 2.5D, apenas em função de quantidades conhecidas que não dependem do refletor. Além disso, a linha de empilhamento  $\tau_{CT}$  correspondente ao ponto  $\bar{\mathbf{n}}(\bar{\xi}, \bar{t})$  no espaço de saída é dada por

$$\tau_{CT}(\xi; \bar{\mathbf{n}}) = \tau_{CC}(\xi, x^*; \bar{\mathbf{n}}). \quad (6.25)$$

Esta linha expressa em (6.25) é uma linha no espaço de entrada correspondente a um ponto situado no espaço de saída. Na literatura ela é conhecida como “inplanat” e será identificada em nossa trabalho por IP.

Ela é na verdade o envelope de todas as curvas de Huygens no espaço de entrada correspondentes aos pontos  $\mathbf{m}_I$  situados sobre a superfície isócrona contruída de um ponto  $\bar{\mathbf{n}}$  localizado no espaço de saída.

Resumindo, inicialmente construímos a isócrona  $\bar{\zeta}_I(x, \bar{\mathbf{n}})$  em profundidade para um ponto  $\bar{\mathbf{n}}$  no espaço de saída, utilizando-se a nova configuração de fontes - receptores  $\bar{C}$ . Para cada ponto  $\mathbf{m}_I$  sobre esta isócrona construímos as correspondentes curvas de Huygens, utilizando-se a configuração original  $C$ . O envelope dessas curvas de Huygens estabelecido no espaço de entrada define a nossa  $\tau_{CT}$ , que é uma IP, relativa a um ponto  $\bar{\mathbf{n}}$  do espaço de saída.

Desta forma, para todos os pontos  $\mathbf{n}_R$  do espaço de saída que tem IPs tangentes a conhecida curva de tempo de reflexão deverão possibilitar a descrição da curva de tempo de reflexão no espaço de saída correspondente a nova configuração  $\bar{C}$ .

### Função Peso

Nesta etapa vamos especificar a função peso procurando escrevê-la com contribuições de dentro e fora do plano de dependência dos parâmetros. O resultado segue substituindo as equações (6.2), (6.12) e (6.16) na expressão (6.23) e posteriormente combinando os resultados (4.8), (4.11), (5.21) e (5.22). O resultado é

$$W_{CT}^{(2.5D)}(\xi, x, \bar{\mathbf{n}}) = \frac{c^2(\mathbf{m})m_D(\xi_1, \mathbf{m}_I)\bar{h}_B L_s^{(2D)} L_g^{(2D)}}{4\bar{L}_s^{(2D)}\bar{L}_g^{(2D)} \cos^2 \alpha_m \cos^2 \beta_m} \quad (6.26)$$

$$\times \frac{\exp[i\frac{\pi}{2}(1 + (\zeta_1 + 1)/2)]\sqrt{(\sigma_s + \sigma_g)}}{|H_{11}^{CT}|^{1/2}|H_{22}^{CT}|^{1/2}\sqrt{(\bar{\sigma}_s\bar{\sigma}_g)}}$$

onde as expressões  $H_{11}^{CT}$  e  $H_{22}^{CT}$ , desenvolvidas no Apêndice B, são apresentadas pelas equações (B.12) e (B.13).

A expressão (6.26) é a função peso para a solução simples do problema de Transformada de Configuração em 2.5D, aqui com seus termos integrantes bem mais especificados, haja vista que, esta função ainda pode ser entendida conforme a separação mediante as contribuições fora (F) e dentro (D) do plano de dependência dos parâmetros, como segue,

$$W_{CT}^{(2.5D)}(\xi, x, \bar{\mathbf{n}}) = W_{CT}^{(F)}(\xi, x, \bar{\mathbf{n}}) \cdot W_{CT}^{(D)}(\xi, x, \bar{\mathbf{n}}) \quad (6.27)$$

onde

$$W_{CT}^{(F)}(\xi, x, \bar{\mathbf{n}}) = \frac{c^2(\mathbf{m}) \exp[i\frac{3\pi}{4}\bar{\zeta}_I] \sqrt{(\sigma_s + \sigma_g)}}{|H_{22}^{CT}|^{1/2} \sqrt{\bar{\sigma}_s\bar{\sigma}_g}} \quad (6.28)$$

e

$$W_{CT}^{(D)}(\xi, x, \bar{\mathbf{n}}) = \frac{m_D(\xi, \mathbf{m}_I)\bar{h}_B L_s^{(2D)} L_g^{(2D)} e^{[i\pi\zeta_1/4]}}{4 \cos^2 \alpha_m \cos^2 \beta_m |H_{11}^{CT}|^{1/2} \bar{L}_s^{(2D)} \bar{L}_g^{(2D)}} \quad (6.29)$$

Desta forma então, a função peso (6.26) pode ser decomposta num produto de dois fatores  $W_{CT}^{(F)}$  e  $W_{CT}^{(D)}$ , onde o primeiro fator corresponde a contribuição fora do plano a ser obtido

analiticamente e o segundo fator corresponde a contribuição dentro do plano de dependência a ser calculado mediante o uso da dinâmica do raio em 2D.

Com relação as soluções em cascata e simples em 2.5D obtidas nas seções anteriores convém observar que ambas permitem uma significativa economia de tempo e custo em sua execução em comparação com as correspondentes operações em 3D. Isto se deve a redução da quantidade de dados a serem manipulados por ordem de magnitude.

A principal razão para esta redução está no fato de que essas soluções em 2.5D se reduzem de integrais de superfícies à integrais de linha ao longo da linha sísmica. Mais ainda, a simetria da referida situação 2.5D, neste caso, possibilita o uso de traçamentos de raios em 2D ao invés do traçamento 3D, no caso geral.

A solução em cascata se dá efetuando-se duas etapas (calculando-se duas integrais, ou seja, dois empilhamentos, um com uma função peso e outro sem). Já a solução simples ou compacta é obtida realizando-se uma única etapa (através do cálculo de uma única integral).

Levando-se em conta que a solução simples ou compacta é efetuada por uma única etapa e a solução em cascata por uma sequência de duas operações, pode-se esperar então que a primeira seja realizada de maneira mais rápida do que a segunda.

Porém, é importante salientar que a solução simples não pode ser aplicada quando o determinante de  $H^{CT}$ , que aparece no denominador da respectiva função peso, o qual consiste do produto das quantidades  $H_{11}^{CT}$  e  $H_{22}^{CT}$ , for nulo.

Na verdade, singularidades dessa natureza costumam ocorrer em situações onde as configurações de saída e entrada apresentam uma certa semelhança. A explicação está no fato de que esta semelhança produz curvaturas das respectivas superfícies de Huygens, fora ou dentro do plano, aproximadamente iguais. São as diferenças destas curvaturas que determinam os valores das quantidades  $H_{22}^{CT}$  e  $H_{11}^{CT}$ , respectivamente. Convém observar que no caso em que a quantidade  $H_{22}^{CT}$ , que depende das curvaturas fora do plano, for nula, a redução do problema 3D para a situação em 2.5D conforme realizada na Seção 6.3 não é válida.

Entretanto, é interessante observar que mesmo não valendo tal redução, o problema de determinar a função peso pode ser tratado a partir da forma geral da operação de transformada de configuração em 2.5D (solução em cascata). O problema da migração para afastamento nulo (MZO) foi resolvido desta maneira por Tygel et al. (1998).

Por outro lado, no caso de  $H_{11}^{CT} \simeq 0$ , é oportuno analisar se os dados originais antes da aplicação da sequência da transformada de configuração já não representam, sem aplicar uma operação de transformação, os dados desejados correspondentes à outra configuração, em uma aproximação de qualidade suficiente.

## 6.5 Meio Verticalmente Não Homogêneo

### Função Peso

A função peso correspondente ao problema de Transformada de Configuração para um meio verticalmente não homogêneo é estabelecida mediante a substituição da expressão (2.62) em (6.26). O resultado é dado por

$$W_{CT}^{(2.5D)}(\xi, x, \bar{\mathbf{n}}) = \frac{c(\mathbf{m})m_D(\xi, \mathbf{m}_I)L_s^{(2D)}L_g^{(2D)}}{2\bar{L}_s^{(2D)}\bar{L}_g^{(2D)}\cos^2\beta_m} \left( \frac{\cos\alpha_m^s}{\sigma_s} + \frac{\cos\alpha_m^g}{\sigma_g} \right) \quad (6.30)$$

$$\times \frac{\exp[i\frac{\pi}{2}(1 + (\zeta_1 + 1)/2)]\sqrt{(\sigma_s + \sigma_g)}}{|H_{11}^{CT}|^{1/2}|H_{22}^{CT}|^{1/2}\sqrt{(\bar{\sigma}_s\bar{\sigma}_g)}}$$

onde as quantidades  $\sigma_i$ ,  $L_i^{(2D)}$ ,  $m_D$ ,  $H_{11}^{CT}$  e  $H_{22}^{CT}$  são dadas pelas expressões (2.54), (2.55), (5.4), (B.12) e (B.13), respectivamente. Correspondentemente, as quantidades  $\bar{\sigma}_i$ ,  $\bar{L}_i^{(2D)}$  são calculadas pelas mesmas equações, porém, utilizando-se a nova configuração  $\bar{C}$ .

### Linha de Empilhamento

A linha de empilhamento para o problema de Transformada de Configuração para um meio verticalmente não homogêneo pode ser expresso da seguinte forma

$$\begin{aligned} \tau_{CT}(\xi, \bar{\mathbf{n}}) = \tau_{CC}(\xi, x^*, \bar{\mathbf{n}}) &= \tau_D(\xi, (x^*, \bar{\zeta}_I(x^*, \bar{\mathbf{n}}))) \\ &= \frac{1}{c_0} \left( \int_0^{\bar{\zeta}_I} \frac{n^2(z)dz}{\sqrt{n^2(z) - \sin^2 \alpha_0^s}} + \int_0^{\bar{\zeta}_I} \frac{n^2(z)dz}{\sqrt{n^2(z) - \sin^2 \alpha_0^g}} \right). \end{aligned} \quad (6.31)$$

A linha de empilhamento (6.31) é a conhecida como uma IP. Sua determinação segue o raciocínio apresentado na seção (7.4). Para maiores detalhes veja também Tygel et al. (1996).

## 6.6 Casos Analíticos

### 6.6.1 Velocidade Constante

#### Função Peso

A função peso para este caso é estabelecida mediante a utilização das expressões analíticas apresentadas pelas por (2.72) e (2.73) na equação (6.30). O resultado é dado por

$$\begin{aligned} W_{CT}^{(2.5D)}(\xi, x^*, \bar{\mathbf{n}}) &= \frac{z[\ell_s^2 + \ell_g^2]m_D(x^*)\bar{m}_D(x^*)\sqrt{c_0\ell_F}}{2\cos^2\beta_m\ell_s\ell_g\bar{\ell}_s\bar{\ell}_g} \\ &\times \frac{\exp[i\frac{\pi}{2}(1 + (\beta_1 + 1)/2)]}{[\bar{m}_D(x^*)\ell_F - m_D(x^*)\bar{\ell}_F]} \end{aligned} \quad (6.32)$$

onde  $\ell_i$  ( $i = s, g$ ),  $\ell_F$  e  $m_D$  são as quantidades apresentadas por (2.72), (3.72) e (5.4) respectivamente. Correspondentemente,  $\bar{\ell}_i$  ( $i = s, g$ ),  $\bar{\ell}_F$  e  $\bar{m}_D$  são calculadas pelas mesmas expressões, porém, utilizando-se a nova configuração  $\bar{C}$ .

A expressão (6.32) é a função peso para a solução simples do problema de Transformada de Configuração para um meio homogêneo.

### Linha de Empilhamento

Neste caso, a linha de empilhamento é dada por

$$\begin{aligned} \tau_{CT}(\xi; \bar{\mathbf{n}}) &= \tau_{CC}(\xi; x^*, \bar{\zeta}_I(x^*, \bar{\mathbf{n}})) \\ &= \frac{1}{c_0} \left[ \sqrt{(x^* - x_s)^2 + (\bar{\zeta}_I)^2} + \sqrt{(x^* - x_g)^2 + (\bar{\zeta}_I)^2} \right]. \end{aligned} \quad (6.33)$$

A linha (6.33) é entendida da seguinte maneira: para um ponto  $\bar{\mathbf{n}}$  no espaço de saída construímos a isócrona em profundidade  $\bar{\zeta}_I(x, \bar{\mathbf{n}})$ . Neste caso, esta isócrona é uma semi-elipse com focos em  $\bar{S}$  e  $\bar{G}$  e semi-eixos  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$  dados pela equação (5.34). Agora consideramos esta isócrona  $\bar{\zeta}_I$  como um refletor e calculamos no espaço de entrada as curvas de Huygens com a configuração de fontes receptores original  $C$  correspondentes a cada ponto sobre esta isócrona. O resultado é dado por

$$\tau_{CT}(\xi, \bar{\mathbf{n}}) = \tau_{CC}(\xi, \mathbf{m}_I^*) = \tau_D(\xi, x^*, \bar{\zeta}_I(x^*, \bar{\mathbf{n}})) \quad (6.34)$$

onde para cada  $\xi$ , a condição estacionária  $x^* = x^*(\xi)$  permite determinar o ponto  $\mathbf{m}_I^*(x^*, \bar{\zeta}_I(x^*, \bar{\mathbf{n}}))$  responsável pela reflexão especular sobre a isócrona  $\bar{\zeta}_I$ .  $\mathbf{n}$  neste caso, assumimos que  $\mathbf{m}_I^*$  é único e que o valor  $x^*$  fica determinado mediante a utilização da condição (6.19) para a equação (6.33). O resultado (7.33) pode ser dado por (Santos et al., 1997)

$$\tau_{CT}(\xi; \bar{\mathbf{n}}) = \bar{x}_{\mathbf{m}} \cdot \frac{b^2(\ell_s + \ell_g) + a^2(x_s \ell_g + x_g \ell_s)}{(\ell_s + \ell_g)(a^2 - b^2)} \quad (6.35)$$

onde neste caso, as quantidades  $\ell_i$  ( $i = s, g$ )  $a$  e  $b$  são dadas por (2.72) e (5.33), respectivamente. Além disso,  $\bar{x}_{\mathbf{m}}$  é dado correspondentemente por (5.34), porém, utilizando-se a nova configuração  $\bar{C}$ .

## 6.6.2 Velocidade com Gradiente Constante

### Função Peso

A função peso correspondente ao problema de Transformada de Configuração para o modelo de velocidade com gradiente constante é estabelecido mediante a substituição das quantidades apresentadas na equação (2.72) relativamente as configurações  $\bar{C}$  e  $C$  em (6.30). O resultado é dada por

$$\begin{aligned} W_{CT}^{(2.5D)}(\xi, \mathbf{m}) &= \frac{c(\mathbf{m}) m_D(x^*) \bar{m}_D(x^*) [\sigma_g \cos \alpha_{\mathbf{m}}^s + \sigma_s \cos \alpha_{\mathbf{m}}^g] \sqrt{\sigma_F^{-1}}}{2 \cos^2 \beta_{\mathbf{m}} \bar{\sigma}_s \bar{\sigma}_g} \\ &\times \frac{\exp[\frac{i\pi}{2}(1 + (\beta_1 + 1)/2)]}{[\sigma_F^{-1} \bar{m}_D(x^*) - \bar{\sigma}_F^{-1} m_D(x^*)]} \end{aligned} \quad (6.36)$$

onde as quantidades  $\ell_i$ ,  $\sigma_i$ , ( $i = s, g$ ),  $\sigma_F$  e  $m_D$  são dadas pelas expressões (2.72), (2.76), (2.38) e (5.4), respectivamente. Correspondentemente, as quantidades  $\bar{\ell}_i$ ,  $\bar{\sigma}_i$ , ( $i = s, g$ ),  $\bar{\sigma}_F$  e  $\bar{m}_D$ , são calculadas pelas mesmas expressões, porém, utilizando-se a nova configuração  $\bar{C}$ .

### Linha de Empilhamento

A linha de empilhamento para este tipo de problema é dada por

$$\begin{aligned} \tau_{CT}(\xi; \bar{\mathbf{n}}) &= \tau_{CC}(\xi, x^*, \bar{\mathbf{n}}) = \tau_D(\xi, x^*, \bar{\zeta}_I(x^*, \bar{\mathbf{n}})) \\ &= \frac{1}{g} \ln \left| \left( \frac{1 + g^2 \ell_s^2 + 2g\sigma_s}{2cc_0} \right) \left( \frac{1 + g^2 \ell_g^2 + 2g\sigma_g}{2cc_0} \right) \right| \end{aligned} \quad (6.37)$$

onde

$$\ell_i = \sqrt{(x^* - x_i)^2 + \bar{\zeta}_I^2} \quad \text{e} \quad \sigma_i = \frac{\ell_i}{2} \sqrt{g^2 \ell_i^2 + 4cc_0} \quad (i = s, g), \quad (6.38)$$

com  $\bar{\zeta}_I$  a linha de empilhamento de demigração dada implicitamente pela equação  $\bar{\tau}_D(\bar{\xi}, \mathbf{m}_I^*) = \bar{t}$  para  $\bar{x}_s$  e  $\bar{x}_g$  fixos e variando-se  $\mathbf{m}_I^*$ .

Para cada  $\xi$ ,  $\mathbf{m}_I^*(x, \bar{\zeta}_I(x^*, \bar{\mathbf{n}}))$  com  $x^* = x^*(\xi)$  é o ponto de reflexão especular sobre a isócrona  $\bar{\zeta}_I$ . Como a fórmula analítica que representa a isócrona  $\bar{\zeta}_I$  não foi especificada, isto significa que a determinação de  $x^*$  fica reduzida ao tratamento numérico.

### 6.6.3 Vagariosidade Quadrada com Gradiente Constante

#### Função Peso

A função peso para este caso é determinada substituindo as quantidades apresentadas pelas equações (2.75) e (2.76) relativas as duas configurações  $\bar{C}$  e  $C$  em (6.30). O resultado é dado por

$$W_{CT}^{(2.5D)}(\xi, \mathbf{m}) = \frac{c(\mathbf{m}) m_D(x^*) [\sigma_g \cos \alpha_m^s + \sigma_s \cos \alpha_m^g] \sqrt{C_s C_g}}{2(\bar{\sigma}_s \bar{\sigma}_g) \sigma_F^{1/2} \cos^2 \beta_m \sqrt{\bar{C}_s \bar{C}_g}} \times \frac{\exp[\frac{i\pi}{2}(1 + (\beta_1 + 1)/2)]}{|H_{11}^{CT}|^{1/2} |H_{22}^{CT}|^{1/2}} \quad (6.39)$$

onde as quantidades  $\sigma_i$ ,  $C_i$  ( $i = s, g$ ),  $m_D$ ,  $\sigma_F$ ,  $H_{11}^{CT}$  e  $H_{22}^{CT}$  são dadas por (2.75), (2.77), (5.4), (2.36), (B.12) e (B.13), respectivamente, com as últimas duas identidades apresentadas no desenvolvimento do Apêndice B. Correspondentemente, as quantidades  $\bar{\sigma}_i$ ,  $\bar{C}_i$  ( $i = s, g$ ),  $\bar{m}_D$ ,  $\bar{\sigma}_F$  são calculadas pelas mesmas equações, porém, utilizando-se a nova configuração  $\bar{C}$ .

#### Linha de Empilhamento

A linha de empilhamento para este modelo de velocidade é dada por

$$\begin{aligned} \tau_{CT}(\xi, \bar{\mathbf{n}}) &= \tau_{CC}(\xi, x^*, \bar{\mathbf{n}}) = \tau_D(\xi, x^*, \bar{\zeta}_I(x^*, \bar{\mathbf{n}})) \\ &= \frac{2}{3} \left( \frac{\ell_s^2}{\sigma_s} + \frac{\ell_g^2}{\sigma_g} \right) + \frac{\sigma_s + \sigma_g}{6} \left[ \frac{1}{c^2} + \frac{1}{c_0^2} \right] \end{aligned} \quad (6.40)$$

onde

$$\sigma_i = \frac{4c_0 \ell_i}{\sqrt{4 + 2gc_0^2(\bar{\zeta}_I + \ell_i)} + \sqrt{4 + 2gc_0^2(\bar{\zeta}_I - \ell_i)}} \quad \text{e} \quad \ell_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + \bar{\zeta}_I^2} \quad (6.41)$$

com  $\ell_i$  dada pela expressão (2.68) e  $\bar{\zeta}_I$  é a linha de empilhamento de demigração dada implicitamente pela equação

$\bar{\tau}_D(\bar{\xi}, x^*, \bar{\zeta}_I(x^*, \bar{\mathbf{n}})) = \bar{t}$  com  $\bar{x}_s$  e  $\bar{x}_g$  fixos e variando-se  $\mathbf{m}_I$ . A dificuldade para a obtenção de  $x^*$  é análoga ao caso da velocidade com gradiente constante.

### 6.6.4 Logarítmo da Velocidade com Gradiente Constante

#### Função Peso

A função peso fica determinada a partir da substituição das expressões (2.81) e (2.82) em

(6.30). O resultado é dado por

$$W_{CT}^{(2.5D)}(\xi, \mathbf{m}) = \frac{c(\mathbf{m}) m_D(x^*) \bar{m}_D(x^*) [\sigma_g \cos \alpha_m^s + \sigma_s \cos \alpha_m^g] (\sigma_s \sigma_g) \sqrt{\sigma_F^{-1}} \sqrt{Y_s Y_g}}{2 \cos^2 \beta_m (\bar{\sigma}_s \bar{\sigma}_g)^2 \sqrt{\bar{Y}_s \bar{Y}_g}} \times \frac{\exp[\frac{i\pi}{2}(1 + (\beta_1 + 1)/2)]}{[\bar{m}_D(x^*) \sigma_F^{-1} - m_D(x^*) \bar{\sigma}_F^{-1}]} \quad (6.42)$$

onde as quantidades  $\sigma_i$ ,  $Y_i$ , ( $i = s, g$ ) e  $m_D$  são determinadas pelas equações (2.81), (2.83), e (5.4), respectivamente. Correspondentemente as quantidades  $\bar{\sigma}_i$ ,  $\bar{Y}_i$ , ( $i = s, g$ ) e  $\bar{m}_D$  são calculadas pelas mesmas expressões acima, porém, utilizando-se a nova configuração  $\bar{C}$ .

### Linha de Empilhamento

A linha de empilhamento neste caso é dada por

$$\begin{aligned} \tau_{CT}(\xi, \bar{\mathbf{n}}) &= \tau_{CC}(\xi, x^*, \bar{\mathbf{n}}) = \tau_D(\xi, x^*, \bar{\zeta}_I(x^*, \bar{\mathbf{n}})) \\ &= \frac{1}{gc_0 c(\bar{\zeta}_I)} \left( \sqrt{c(\bar{\zeta}_I)^2 + c_0^2 - 2c_0 c(\bar{\zeta}_I) \cos g(x - x_s)} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{c(\bar{\zeta}_I)^2 + c_0^2 - 2c_0 c(\bar{\zeta}_I) \cos g(x - x_g)} \right). \end{aligned} \quad (6.43)$$

A isócrona  $\bar{\zeta}_I$  é expressa pela equação (5.39) correspondentemente a nova configuração. Além disso, para cada  $\xi$ , o ponto  $\mathbf{m}_I^*$  é o ponto de reflexão especular sobre a isócrona para os segmentos de raio que unem  $\mathbf{sm}_I^*$  e  $\mathbf{m}_I^* \mathbf{g}$  (configuração original). A aplicação da condição estacionária (6.19) em (6.43) nos permite encontrar  $x^* = x^*(\xi)$ .

## 6.7 Exemplos Numéricos

A finalidade principal desta seção é o de mostrar o funcionamento da transformada de configuração em 2.5D. Para este fim, apresentamos a reprodução de dois exemplos numéricos para dois tipos transformada de configuração. As figuras apresentadas nesta seção foram reproduzidas, com a permissão dos autores, dos trabalhos de Santos et al. (1997) e Tygel et al. (1998). Em ambos os exemplos a velocidade considerada é constante, pois, exemplos com outras distribuições de velocidades ainda não foram apresentados na literatura.

O primeiro exemplo mostra a continuação do afastamento (conhecido na literatura como OCO - sigla em inglês para "offset continuation"), isto é, um tipo de transformada de configuração que transforma uma seção de afastamento comum em uma outra seção simulada de afastamento comum correspondente a um outro valor do afastamento (Santos et al., 1997).

O segundo exemplo mostra a migração para afastamento nulo (conhecido na literatura como MZO - sigla em inglês para "migration to zero offset"), isto é, um tipo de transformada de configuração que transforma uma seção de afastamento comum em uma outra seção simulada de afastamento nulo (Tygel et al., 1998). Podemos observar que a MZO representa um caso especial da OCO, com o valor do afastamento comum na seção simulada igual a zero.

### 6.7.1 Continuação do Afastamento

O primeiro exemplo numérico a ser apresentado mostra o funcionamento da transformada de configuração em 2.5D no caso da continuação do afastamento (OCO). As figuras referentes a este exemplo foram reproduzidas com a permissão de Santos et al. (1997).

O modelo para este exemplo, apresentado na Figura 6.3, consiste de um refletor curvo suave, separando dois semi-espacos homogêneos com velocidades acústicas de  $v_1 = 2.0$  km/s e  $v_2 = 2.5$  km/s e densidades constantes e iguais.

Neste modelo, os autores realizaram experimentos numéricos de afastamento comum mediante o uso de uma implementação da integral de Kirchhoff em 2.5D para cinco afastamentos diferentes: 0, 500, 1000, 1500 e 2000 m. Em todos os modelamentos numéricos, as fontes e receptores foram localizados a cada 10 m e o intervalo de amostragem no tempo foi de 4 ms. A Figura 6.3 mostra a família de raios para o experimento com afastamento 1000 m.

Convém observar ainda que o pulso da fonte é um pulso de Ricker de fase zero e 72 ms de duração, (pico de frequência aproximadamente de 28 Hz). Foi usada, para fins da transformada de configuração, a forma analítica do pulso, i.e., acrescida de sua transformada de Hilbert como parte imaginária, conforme discutido na Seção 4.1.

A Figura 6.4 mostra a seção sintética de afastamento comum com afastamento 1000 m, modelada pela integral de Kirchhoff em 2.5D.

A continuação do afastamento (OCO) em 2.5D foi aplicada a cada uma das seções de afastamento 0, 500, 1500 e 2000 m para simular uma seção sísmica com afastamento 1000 m. As seções resultantes da OCO foram comparados com a correspondente seção modelada. Na Figura 6.5, observa-se a seção simulada com afastamento 1000 m a partir de uma seção modelada de afastamento 500 m. Comparando esta figura com o resultado do modelamento (Figura 6.4), é possível observar que a forma do pulso e as amplitudes foram bem reconstruídas (Santos et al., 1997).

## Modelo

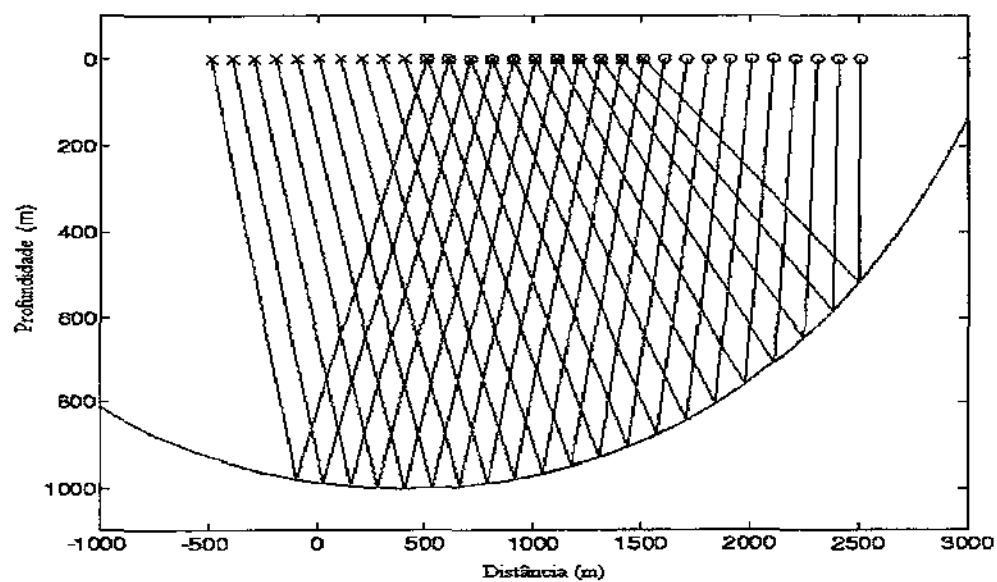


Figura 6.3: Modelo para o exemplo OCO.

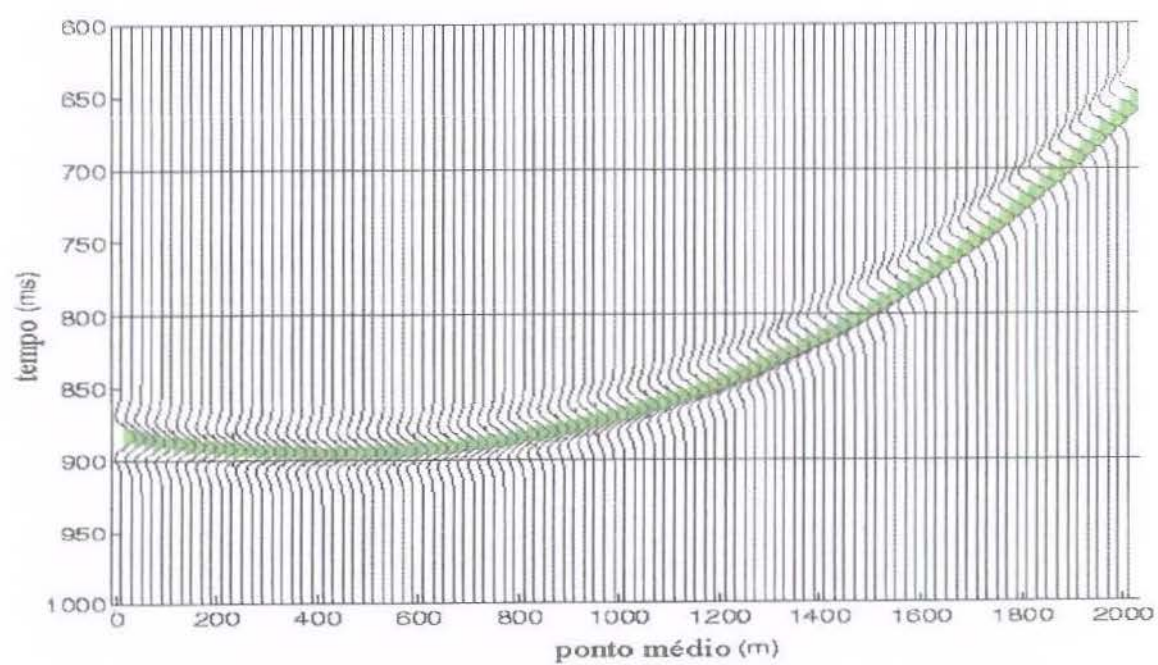


Figura 6.4: Seção sintética com afastamento comum 1000 m para o modelo apresentado na Figura 6.3. modelada pela integral de Kirchhoff em 2.5D.

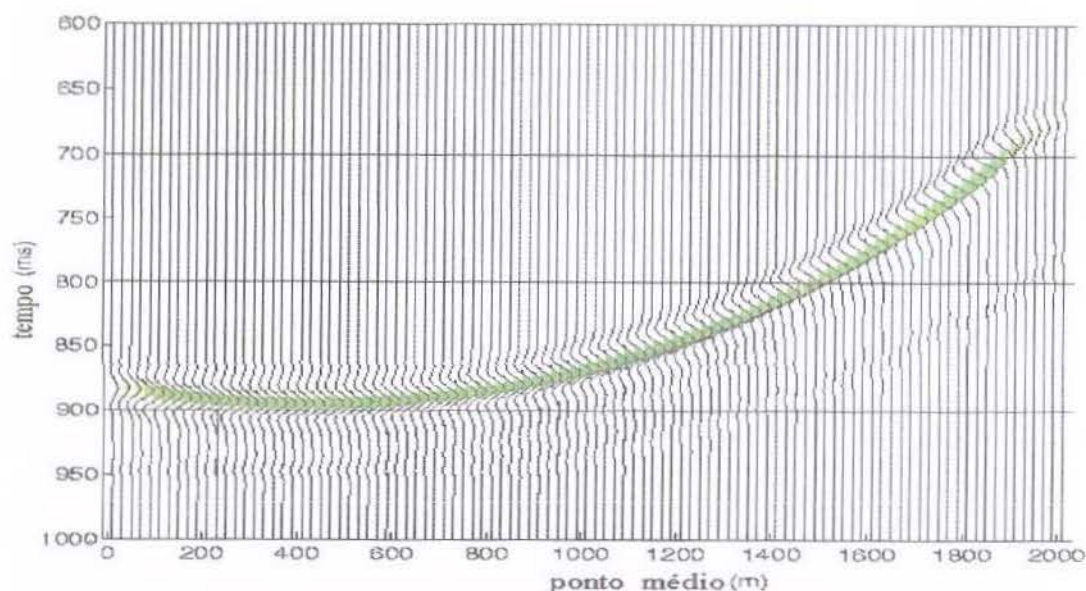


Figura 6.5: Seção com afastamento comum 1000 m simulada usando a continuação do afastamento em 2.5D (OCO) a partir de uma seção de afastamento comum 500 m.

Para melhor apreciação da qualidade da transformada de configuração, os autores compararam os valores das amplitudes de pico ao longo das reflexões de afastamento comum obtidos nas quatro diferentes seções simuladas, com os correspondentes valores do modelamento (Figura 6.6a). Para permitir esta comparação entre as amplitudes das seções simuladas e modelada de afastamento comum, os autores utilizaram coeficiente de reflexão constante e igual a unidade em todos os modelamentos. As curvas das amplitudes simuladas mediante a utilização da continuação do afastamento em 2.5D (OCO) (linhas tracejadas) assemelham-se bem à curva das amplitudes modeladas (linha contínua). Apenas nas fronteiras a reconstrução é incompleta devido aos chamados e bem conhecidos efeitos de fronteiras, que se devem à falta de dados fora da abertura do experimento.

A semelhança entre as amplitudes modeladas e simuladas é quantificada pelo erro relativo desta reconstrução de amplitudes, apresentado pela Figura 6.6b. Observa-se que todas as amplitudes simuladas apresentam mais ou menos os mesmos comportamentos, com o erro mantendo-se na faixa de dois por cento (Santos et al., 1997).

## Amplitudes e Erros

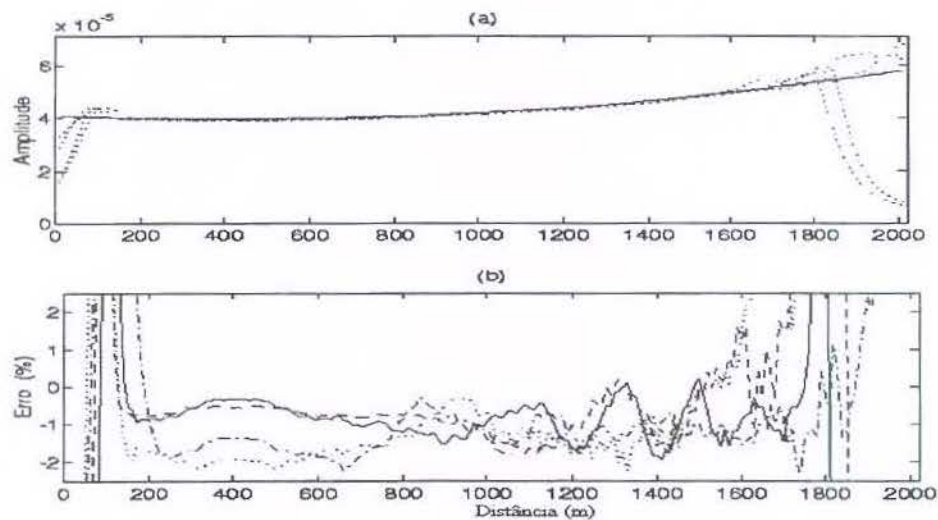


Figura 6.6: (a) Descrição dos picos de amplitudes modelada (linha contínua) e simuladas (linhas tracejadas) ao longo das reflexões com afastamento comum  $h=1000$  m. (b) Erro relativo das amplitudes simuladas ao longo de reflexões com afastamento comum calculadas pela transformada de configuração em 2.5D (OCO) para seções com afastamentos 0 m (linha sólida), 500 m (linhas tracejadas), 1500 m (linhas pontilhadas) e 2000 m (linhas traço-ponto).

### 6.7.2 Migração para Afastamento Nulo

Um outro exemplo de transformada de configuração é a migração para afastamento nulo (conhecida como MZO). Este tipo de transformação de imagem consiste na transformada de uma seção de afastamento comum em uma seção de afastamento nulo. Trata-se de uma transformação que faz parte do processamento convencional de dados sísmicos. Geralmente, a MZO é realizada em dois passos, sendo o primeiro a correção do “*normal moveout*” (NMO) e o segundo, realizado em seguida ou até anteriormente à NMO, a correção do “*dip moveout*” (DMO).

As figuras referentes ao exemplo numérico da MZO apresentado a seguir foram reproduzidas com a autorização de Tygel et al. (1998).

O modelo para este exemplo é uma estrutura sinclinal suave (Figura 6.7). Os demais parâmetros do modelo são os mesmos do modelo da seção anterior. A Figura 6.7 mostra

também uma família de raios especularmente refletidos de afastamento comum 1000 m. Com este modelo tem-se o propósito de confirmar a validade deste tipo de transformada de configuração em 2.5D (i.e., seção de afastamento comum em uma seção de afastamento nulo) mesmo na presença de uma cáustica (excluída no tratamento teórico).

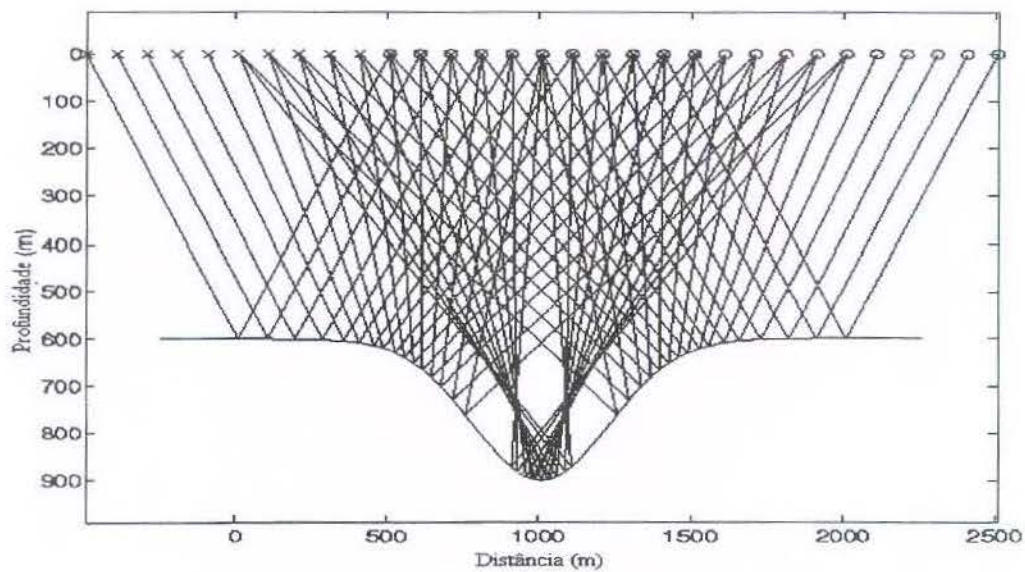


Figura 6.7: Modelo para o exemplo MZO.

A Figura 6.8 mostra a seção sintética de afastamento comum 500 m resultante do modelamento numérico mediante a integral de Kirchhoff em 2.5D. Esta seção sísmica representa os dados de entrada para a MZO.

A correspondente seção sintética de afastamento nulo, também modelada pela integral de Kirchhoff em 2.5D, está apresentada na Figura 6.9a e pode ser comparada com a Figura 6.9b, que mostra a seção simulada resultante da aplicação da MZO aos dados da Figura 6.7 (Tygel et al., 1998).

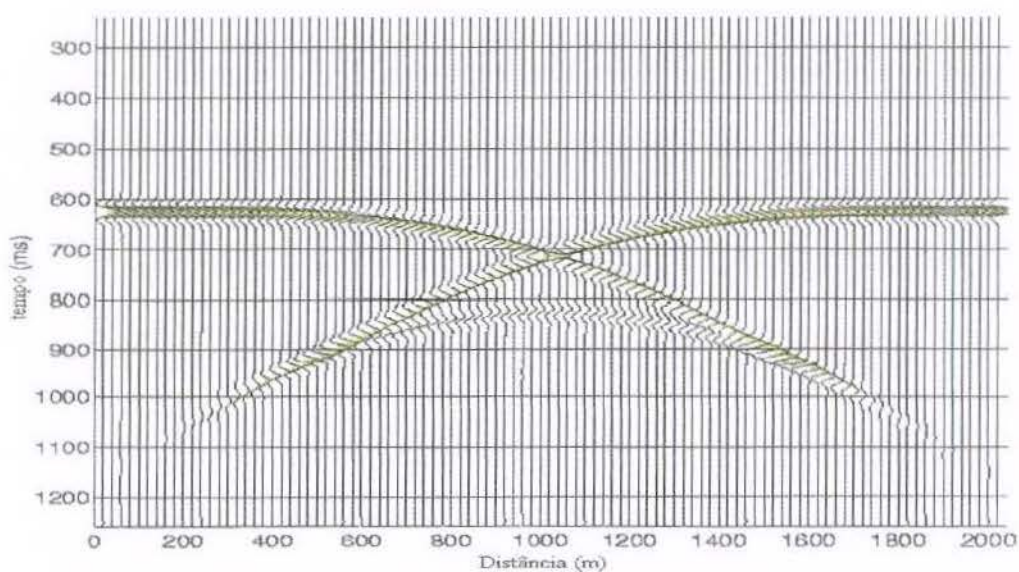


Figura 6.8: Seção sintética de afastamento comum para o modelo mostrado pela Figura 6.6, modelada pela Integral de Kirchhoff em 2.5D.

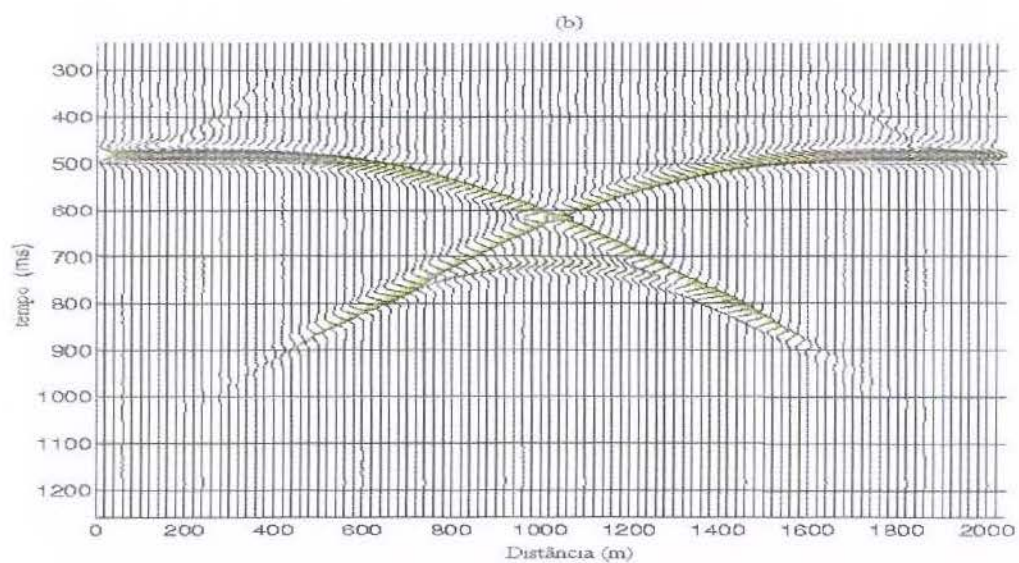
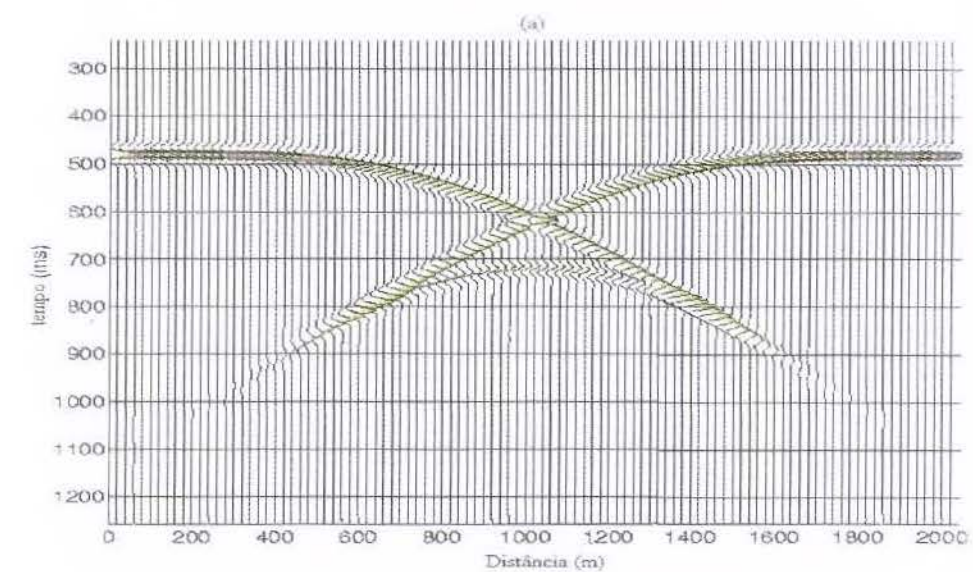


Figura 6.9: (a) Seção sintética de afastamento nulo para o modelo mostrado pela Figura 6.7, modelada pela Integral de Kirchhoff em 2.5D. (b) Resultados da MZO em verdadeira amplitude para o mesmo modelo.

Comparando as duas seções sísmicas de afastamento nulo na Figura 6.9, observamos qualitativamente que a MZO teve um bom desempenho. Fora das zonas de fronteiras as seções são razoavelmente semelhantes.

A qualidade da transformação das amplitudes foi investigada da mesma maneira como no exemplo anterior. A análise do pico de amplitude ao longo da primeira, segunda e terceira chegadas possibilitam uma melhor quantificação do problema. As Figuras 6.10a, 6.11a e 6.12a mostram os picos de amplitudes e as Figuras 6.10b, 6.11b e 6.12b os seus respectivos erros relativos (Tygel et al., 1998).

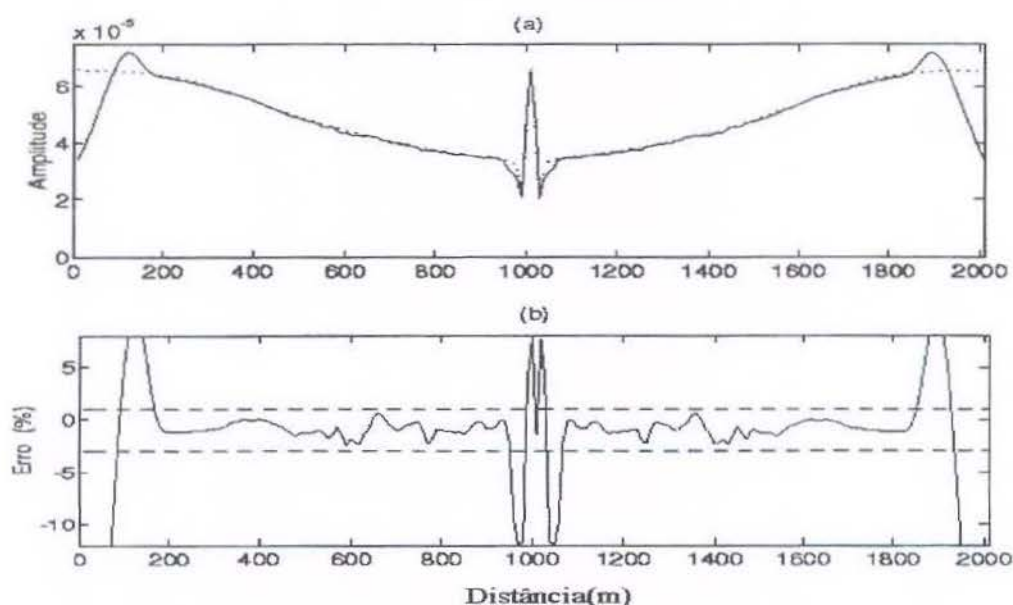


Figura 6.10: Primeira chegada (a) Descrição dos picos de amplitudes simulada (linha contínua) e modelada (linhas pontilhadas) para reflexões com afastamento nulo. (b) Erro relativo da amplitude simulada para reflexões com afastamento nulo.

## Amplitudes e Erros

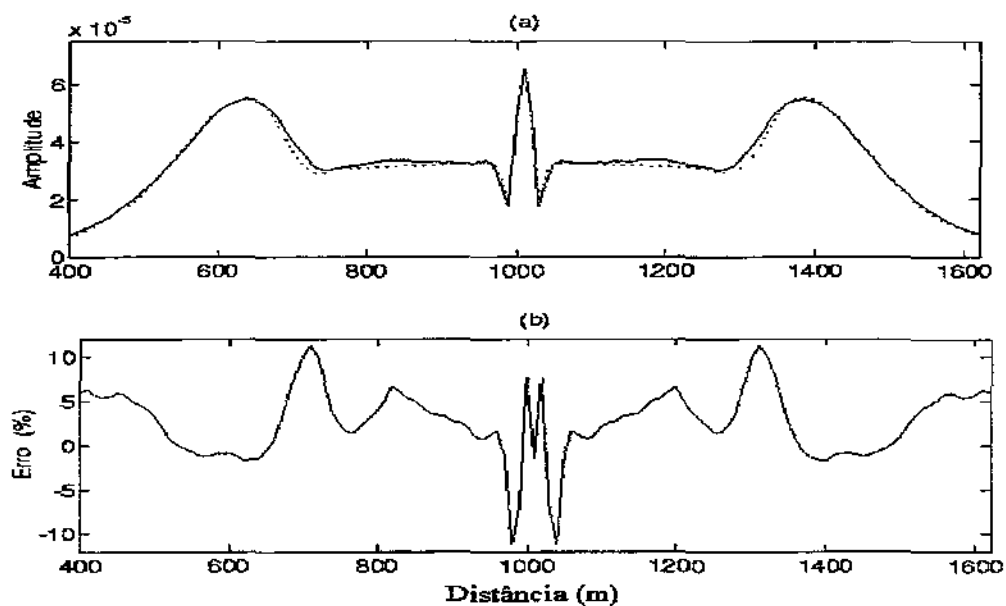


Figura 6.11: Segunda chegada (a) Descrição dos picos de amplitudes simulada (linha contínua) e modelada (linhas pontilhadas) para reflexões com afastamento nulo. (b) Erro relativo da amplitude simulada para reflexões com afastamento nulo.

## Amplitudes e Erros

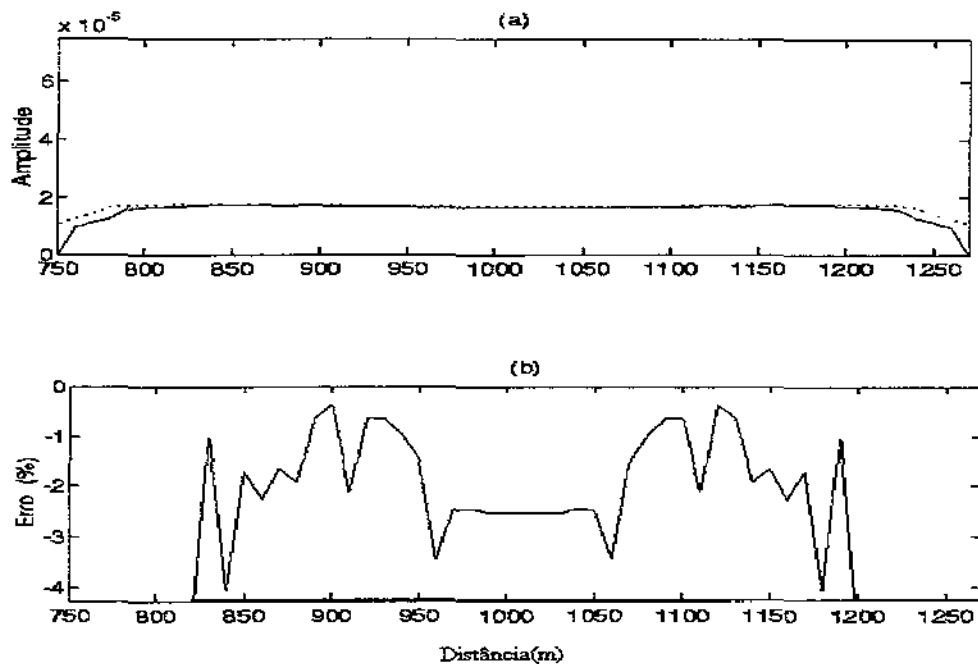


Figura 6.12: Terceira chegada (a) Descrição dos picos de amplitudes simulada (linha contínua) e modelada (linhas pontilhadas) para reflexões com afastamento nulo. (b) Erro relativo da amplitude simulada para reflexões com afastamento nulo.

Na Figura 6.10a, para a primeira chegada, observar-se uma boa reconstrução das amplitudes e na Figura 6.10b, que o erro se mantém flutuando em torno de dois por cento. Na Figura 6.11a, onde observa-se a amplitude da segunda chegada, também temos uma completa reconstrução da amplitude com o mesmo erro. Finalmente, na Figura 6.12a vemos que as amplitudes da terceira chegada são reconstruídas com a mesma qualidade como as das primeira e segunda chegadas, mantendo-se o erro na ordem de aproximadamente dois por cento. Este valor, que é o mesmo do exemplo OCO, pode ser atribuído ao erro numérico, o qual pode ser minimizado mediante a redução dos intervalos de amostragem no espaço e no tempo.

### 6.7.3 Observações Gerais

Apresentamos nesta seção dois exemplos numéricos para a transformada de configuração em 2.5D, que mostram o funcionamento da continuação do afastamento (OCO) e da migração

com afastamento nulo (MZO) em 2.5D para um modelo de velocidade constante.

Baseados no tratamento geral da transformada de configuração como operação da abordagem unificada ao imageamento sísmico (Hubral et al., 1996; Tygel et al., 1996), estes exemplos revelam, na verdade, não só a validade dessas operações específicas, mas também da transformada de configuração em 2.5D em geral. Outras transformadas de configuração em 2.5D, como a continuação de fonte comum, migração de fonte comum para afastamento nulo, etc., podem ser tratadas da mesma forma, conforme o desenvolvimento teórico desta tese.

## 6.8 Resumo

Este capítulo foi destinado ao estabelecimento das soluções cascata e simples do problema de Transformada de Configuração para a situação em 2.5D, para um meio verticalmente não homogêneo e para os casos analíticos mencionados anteriormente.

As funções pesos e linhas de empilhamentos para estas situações são estabelecidas em termos de fórmulas analíticas envolvendo quantidades conhecidas tanto do modelo de entrada quanto de saída. Uma das vantagens destas fórmulas fechadas está na perspectiva de resolver os problemas de Transformadas de Configurações de uma forma mais eficiente e muito mais rápida.

# Capítulo 7

## REMIGRAÇÃO

### 7.1 Introdução

Considere dados no domínio em profundidade, que foram obtidos, por exemplo, através de uma integral de migração de Kirchhoff, mediante o uso de um modelo de macro-velocidade  $c$  e uma configuração fontes-receptores  $C$ .

De posse destes dados realizamos a demigração, através da integral de demigração de Kirchhoff, obtendo assim, os correspondentes dados demigrados (imagem no tempo). Com estes dados demigrados efetuamos a migração através da integral de migração de Kirchhoff com a mesma configuração de fontes-receptores, mas, mediante o uso de uma nova distribuição de velocidade. O resultado desta operação será então uma nova imagem no domínio em profundidade, com a qual é possível um ajuste dos dados migrados a novos e melhores modelos de velocidades.

Esta complexa operação de transformação de imagem é conhecida como remigração (Tygel et al., 1996). A solução deste tipo de problema pode ser descrita de duas formas distintas: a solução cascata, cuja integralização se dá em duas etapas (através de duas operações, veja Figura 7.1) e a segunda, conhecida como solução simples (Tygel et al., 1996), usando uma única etapa (ou seja, através de uma única operação, Figura 7.2). Ambas, soluções, cascata e simples, fornecem uma nova imagem no domínio em profundidade, que deverão auxiliar nos ajustes, mediante a imagem obtida, a uma melhor e mais razoável distribuição de velocidade.

Em Tygel et al. (1996) tanto a solução cascata quanto a solução simples para o problema de remigração são descritas e estabelecidas para o meio em 3D.

As próximas seções são reservadas ao estabelecimento dos procedimentos matemáticos necessários às especificações destes tipos de soluções para a situação 2.5D, para um meio verticalmente homogêneo e também para os casos analíticos analisados anteriormente.

## Ilustrações das Soluções

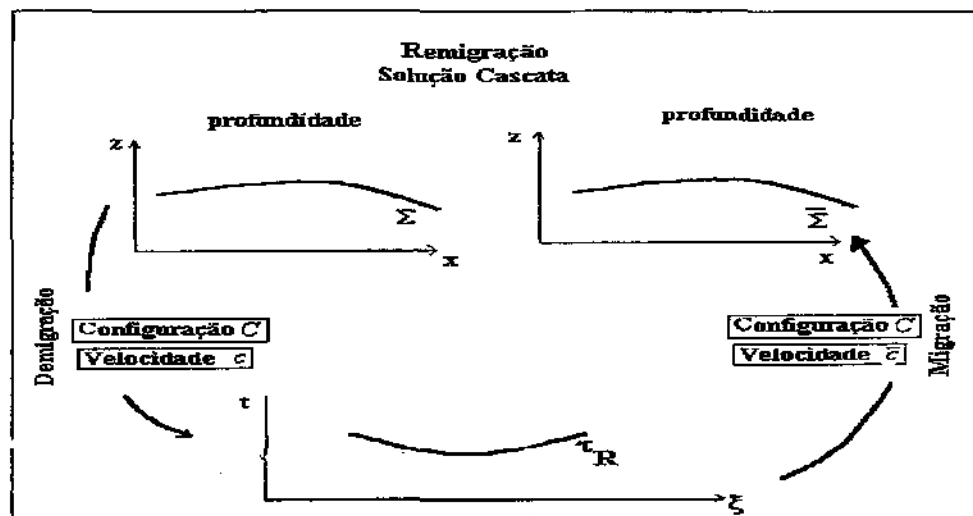


Figura 7.1: Solução Cascata. A Solução Cascata é obtida da seguinte forma: Efetuamos a demigração dos dados migrados fornecendo uma imagem ( $\tau_R$ ) no domínio do tempo. Em seguida efetuamos a migração a partir destes dados (imagem demigrada) obtendo uma nova imagem em profundidade ( $\bar{\Sigma}_R$ ). A demigração é realizada com a configuração de fontes-receptores  $C$  e com a velocidade  $c$  e a migração é executada com a mesma configuração  $C$ , porém, com um novo modelo de velocidade  $\bar{c}$ .

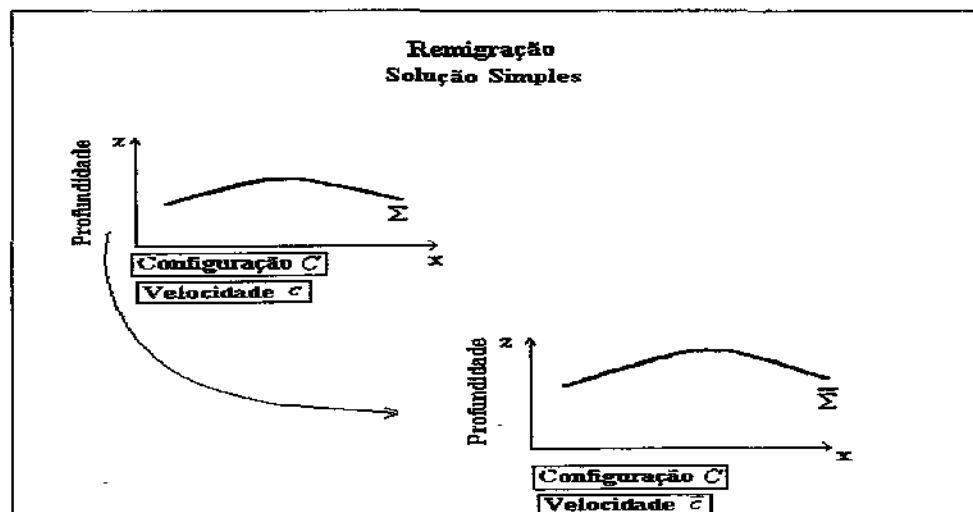


Figura 7.2: Solução Simples - Aplica-se a integral de migração com uma velocidade  $\bar{c}$  mediante uma configuração  $C$  ao conjunto de dados demigrados, gerado pela integral de demigração levando-se em conta a mesma configuração  $C$ , porém, com o novo modelo de distribuição de velocidade  $c$ .

## 7.2 Solução Cascata em 3D

Consideramos inicialmente a representação matemática da solução cascata para o problema de Remigração em 3D. Para a sua especificação considera-se uma configuração de fontes-receptores, mas, dois modelos de velocidades distintos.

As quantidades apresentadas por uma barra sobre as letras, são aquelas correspondentes ao modelo de saída (domínio onde desejamos obter os resultados). O parâmetro  $x$  varia no conjunto  $E$  (modelo de entrada) e o parâmetro  $\bar{x}$  em  $\bar{E}$  (modelo de saída). Escrevemos também  $\Phi(x, z)$  para o modelo de entrada e  $\bar{\Phi}(\bar{x}, \bar{z})$  para o modelo de saída.

Consideramos a representação integral (Tygel et al., 1996) dada por

$$\bar{\Phi}(\bar{\mathbf{m}}) = -\frac{1}{4\pi^2} \int \int_A d^2\xi \int \int_E d^2\mathbf{x} K_{CR}(\mathbf{x}, \xi, \bar{\mathbf{m}}) \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{x}, z)}{\partial z^2} \Big|_{z=\zeta_{CR}(\mathbf{x}, \xi, \bar{\mathbf{m}})} \quad (7.1)$$

onde

$$K_{CR}(\mathbf{x}, \xi, \bar{\mathbf{m}}) = \frac{\bar{W}_{DS}(\xi, \bar{\mathbf{m}}) W_{IS}(\mathbf{x}, \mathbf{n})}{m_D(\xi, \mathbf{m}_I)} \quad (7.2)$$

e

$$\zeta_{CR}(\mathbf{x}, \xi, \bar{\mathbf{m}}) = \zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n}). \quad (7.3)$$

A expressão  $W_{IS}$  em (7.2) é a função peso correspondente a integral de demigração (5.20) quando esta é aplicada a uma imagem migrada  $\Phi(x, z)$ . A função  $W_{IS}$  deve ser calculada usando-se o modelo de entrada,  $\bar{W}_{DS}$  e  $\zeta_I$  são a função peso de migração e a superfície isócrona correspondente a um ponto  $\mathbf{n}(\xi, t = \bar{\tau}_D(\xi, \bar{\mathbf{m}}))$ . Aqui  $\bar{\tau}_D$  é computada com o modelo de saída e  $\mathbf{n}$  é um ponto no modelo original dual do ponto em profundidade  $\mathbf{m}_I(x, \zeta_I(x, \mathbf{n}))$ .

Agora usando a imagem migrada apresentada pela equação (5.3) na representação (7.1), obtemos

$$\bar{\Phi}(\bar{\mathbf{m}}, t) = -\frac{1}{4\pi^2} \int \int_A d^2\xi \int \int_E d^2\mathbf{x} W_{CR}(\mathbf{x}, \xi, \bar{\mathbf{m}}) \Phi_0(\mathbf{x}) G'[t + \zeta_{CR}(\mathbf{x}, \xi, \bar{\mathbf{m}}) - \zeta_R(\mathbf{x})] \quad (7.4)$$

onde

$$W_{CR}(\mathbf{x}, \xi, \bar{\mathbf{m}}) = K_{CR}(\mathbf{x}, \xi, \bar{\mathbf{m}}) m_D(\mathbf{x}) \quad (7.5)$$

e

$$G(t) = f'(m_D(\mathbf{x})t) \quad (7.6)$$

com  $\bar{\Phi}(\bar{\mathbf{m}}, t)|_{t=0} = \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{m}})$ . Usando os conjuntos de abertura  $A$  e  $E$  apresentadas em (4.5) e (5.6), respectivamente, correspondentes a migração e demigração, segue que

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{m}}, t) = & -\frac{1}{4\pi^2} \int_{a_1}^{a_2} d\xi_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_2 \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 W_{CR}(\mathbf{x}, \xi, \bar{\mathbf{m}}) \Phi_0(\mathbf{x}) \\ & \times G'[t + (\zeta_{CR}(\mathbf{x}, \xi, \bar{\mathbf{m}}) - \zeta_R(\mathbf{x}))]|_{t=0} \end{aligned} \quad (7.7)$$

que é a solução cascata do problema de remigração em 3D, que deverá constituir a base para a especificação da solução cascata do problema de remigração em 2.5D, que será tratado na próxima seção.

### 7.3 Solução Cascata em 2.5D

Nesta seção vamos avaliar assintoticamente a representação (7.7) usando o método da fase estacionária em sequência, isto é, primeiro em relação a  $\xi_2$  e em seguida em relação a  $x_2$ . Inicialmente, obtemos a contrapartida da representação (7.7) no domínio da frequência, depois a escrevemos com uma mudança na ordem de integração. O resultado pode ser escrito como

$$\bar{\Phi}(\bar{\mathbf{m}}, \omega) = -\frac{(i\omega)G(\omega)}{2\pi} \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{a_1}^{a_2} d\xi_1 J_\xi(\mathbf{x}, \xi, \bar{\mathbf{m}}). \quad (7.8)$$

onde

$$J_\xi(\mathbf{x}, \xi, \bar{\mathbf{m}}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_2 W_{CR}(\mathbf{x}, \xi, \bar{\mathbf{m}}) \Phi_0(\mathbf{x}) \exp[i\omega(\zeta_{CR}(\mathbf{x}, \xi, \bar{\mathbf{m}}) - \zeta_R(\mathbf{x}))]. \quad (7.9)$$

Avaliando assintoticamente a representação (7.9), pelo método da fase estacionária, substituindo o resultado em (7.8) e selecionando  $\xi_2^* = 0$ , temos

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{m}}, \omega) &= -\frac{(i\omega)^{1/2}G(\omega)}{\sqrt{2\pi}} \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{a_1}^{a_2} d\xi_1 P_{CR}^{(2.5D)}(\mathbf{x}, (\xi_1, 0), \bar{\mathbf{m}}) \Phi_0(\mathbf{x}) \\ &\times \exp[i\omega(\zeta_{CR}(\mathbf{x}, (\xi_1, 0), \bar{\mathbf{m}}) - \zeta_R(\mathbf{x}))] \end{aligned} \quad (7.10)$$

onde

$$P_{CR}^{(2.5D)}(\mathbf{x}, (\xi_1, 0), \bar{\mathbf{m}}) = \frac{W_{CR}(\mathbf{x}, (\xi_1, 0), \bar{\mathbf{m}}) \exp[\frac{-i\pi}{4}]}{|H_{22}^{RM}|^{1/2}} \quad (7.11)$$

com  $W_{CR}$  dado por (7.5) e  $H_{22}^{RM}$  estabelecido pela fórmula (C.12), conforme o desenvolvimento do Apêndice C.

Por outro lado, para avaliar assintoticamente (7.10), agora em relação  $x_2$ , consideramos

$$\bar{\Phi}(\bar{\mathbf{m}}, \omega) = -\frac{(i\omega)^{1/2}G(\omega)}{\sqrt{2\pi}} \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} dx_1 \int_{a_1}^{a_2} d\xi_1 I_{\mathbf{x}}((\xi_1, 0), \bar{\mathbf{m}}) \quad (7.12)$$

onde

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{x}} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 P_{CR}^{(2.5D)}(\mathbf{x}, (\xi_1, 0), \bar{\mathbf{m}}) \Phi_0(\mathbf{x}) \\ &\times \exp[i\omega(\zeta_{CR}(\mathbf{x}, (\xi_1, 0), \bar{\mathbf{m}}) - \zeta_R(\mathbf{x}))]. \end{aligned} \quad (7.13)$$

O resultado da avaliação assintótica da representação (7.13) colocado em (7.12) e selecionando  $x_2^* = 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{m}}, \omega) &= \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} dx_1 \int_{a_1}^{a_2} d\xi_1 G(\omega) W_{CR}^{(2.5D)}((x_1, 0), (\xi_1, 0), \bar{\mathbf{m}}) \Phi_0(x_1, 0) \\ &\times \exp[i\omega(\zeta_{CR}((x_1, 0), (\xi_1, 0), \bar{\mathbf{m}}) - \zeta_R(x_1, 0))] \end{aligned} \quad (7.14)$$

onde

$$W_{CR}^{(2.5D)}((x_1, 0), (\xi_1, 0), \bar{\mathbf{m}}) = P_{CR}^{(2.5D)}((x_1, 0), (\xi_1, 0), \bar{\mathbf{m}}) \exp[\frac{-i\pi}{4}] \sigma_F^{-1/2} \quad (7.15)$$

com  $\sigma_F$  e  $P_{CR}^{(2.5D)}$  dados por (2.36) e (7.11), respectivamente.

De volta ao domínio do tempo, escrevendo os argumentos das funções envolvidas na representação (7.14) com  $\xi$  e  $x$  ao invés de  $(\xi_1, 0)$  e  $(x_1, 0)$ , respectivamente, temos então

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{m}}) = & \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} dx \int_{a_1}^{a_2} d\xi W_{CR}^{(2.5D)}(x, \xi, \bar{\mathbf{m}}) \Phi_0(\xi) \\ & \times \left. \frac{\partial}{\partial t} f[m_D(x)(z - \zeta_R(x))] \right|_{z=\zeta_{CR}(x, \xi, \bar{\mathbf{m}})} \end{aligned} \quad (7.16)$$

que é a solução cascata do problema de remigração em 2.5D.

Convém observar que a utilização das expressões (7.2), (7.5), (7.11) e (7.15) combinados com as quantidades dadas em (4.11) e (5.2) fornece a função peso com as quantidades envolvidas independentes dos atributos ligados ao refletor.

## 7.4 Solução Simples em 2.5D

Nosso objetivo nesta seção consiste em estabelecer a solução simples para o problema de remigração em 2.5D.

Considere a solução cascata do problema de remigração em 2.5D dada por (7.16) no domínio da frequência reescrita como

$$\bar{\Phi}(\bar{\mathbf{m}}, \omega) \simeq \frac{(i\omega)F(\omega)}{2\pi} \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} dx I_\xi(x, \xi, \bar{\mathbf{m}}) \quad (7.17)$$

onde a integral interna é dada por

$$\begin{aligned} I_\xi = & \int_{a_1}^{a_2} d\xi W_{CR}^{(2.5D)}(x, \xi, \bar{\mathbf{m}}) \Phi_0(\xi) \\ & \times \exp[i\omega m_D(x)(\zeta_{CR}(x, \xi, \bar{\mathbf{m}}) - \zeta_R(x))] \end{aligned} \quad (7.18)$$

Vamos avaliar assintoticamente a integral (7.18) e substituir o resultado em (7.17). Inicialmente considere que exista um único ponto estacionário  $\xi = \xi^*$  tal que

$$\left. \frac{m_D(x)(\zeta_{CR}(x, \xi, \bar{\mathbf{m}}) - \zeta_R(x))}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi^*} = 0 \quad (7.19)$$

onde neste caso,  $\xi = \xi^*(x)$  determina o ponto  $\mathbf{n}(\xi^*, t = \bar{\tau}_D(\xi^*, \bar{\mathbf{m}}))$  dual do ponto  $\mathbf{m}_I(x, \zeta_I(x, \mathbf{n}(\xi^*, t)))$  com respeito ao modelo original. Mais ainda, a curva de tempo de difração  $t = \bar{\tau}_D(\xi^*, \bar{\mathbf{m}})$  construída com o novo modelo e  $t = \tau_D(\xi, \mathbf{m}_I)$  relativa ao modelo original são tangentes em  $\mathbf{n}(\xi^*, t)$ .

O resultado da avaliação assintótica da expressão (7.18), mediante a utilização do método da fase estacionária (Bleistein, 1984) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} I_\xi \simeq & \sqrt{2\pi} W_{CR}^{(2.5D)}(\xi^*, x, \bar{\mathbf{m}}) e^{[i\gamma_1\pi/4]} \\ & \times \frac{\exp[i\omega m_D(x)(\zeta_{CR}(x, \xi^*, \bar{\mathbf{m}}) - \zeta_R(x))]}{|\omega|^{1/2} |H_{11}^{RM}|^{1/2}} \end{aligned}$$

onde

$$\gamma_1 = \text{sinal}(H_{11}^{RM}). \quad (7.20)$$

com a expressão  $H_{11}^{RM}$  dada por (C.11) conforme desenvolvimento do Apêndice C.

Portanto, de volta ao domínio do tempo, substituindo (7.20) na equação (7.18) e em seguida, o resultado em (7.17), temos

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{m}}) \simeq & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} dx \, W_{RM}^{(2.5D)}(\xi^*, x, \bar{\mathbf{m}}) \\ & \times \left. \frac{\partial^{1/2}}{\partial z^{1/2}} \Phi[m_D(x)(z - \zeta_R(x))] \right|_{z=\zeta_{RM}(x, \bar{\mathbf{m}})} \end{aligned} \quad (7.21)$$

onde

$$\zeta_{RM}(x, \bar{\mathbf{m}}) = \zeta_{CR}(x, \xi^*, \bar{\mathbf{m}}) = \zeta_I(x, \mathbf{n}(\xi^*, t)) \quad (7.22)$$

e

$$W_{RM}^{(2.5D)}(\xi^*, x, \bar{\mathbf{m}}) = \frac{W_{CR}^{(2.5D)}(\xi^*, x, \bar{\mathbf{m}}) \exp[i\gamma_1 \pi/4] \sqrt{m_D(x)}}{|H_{11}^{RM}|^{1/2}} \quad (7.23)$$

com  $W_{CR}^{(2.5D)}$  e  $\gamma_1$  dados por (7.15) e (7.20), respectivamente. A representação (7.21) é a solução simples do problema de Remigração em 2.5D. Esta representação produz numa única etapa uma nova imagem em profundidade.

Aqui a IP  $\zeta_{RM}$  apresentada pela equação (7.22) é uma curva migrada no espaço de entrada.

Desta forma, se  $\zeta_{RM}$  for vista como um refletor no modelo original então  $t = \tau_D(\xi^*, \bar{\mathbf{m}})$  deverá ser sua curva de tempo de trânsito.

Portanto, a IP  $\zeta_{RM}$  pode ser construída como o envelope de todas as isócronas  $\zeta_I(x, \mathbf{n}(\xi^*, t))$  correspondentes aos pontos  $\mathbf{n}(\xi^*, t)$  sobre a curva de Huygens do novo modelo.

### Função Peso

O objetivo desta seção consiste em especificar a função peso separando as contribuições de dentro (D) e de fora (F) do plano de dependência dos parâmetros.

Substituindo (7.2), (7.5), (7.12) em (7.23), levando-se em conta as equações (4.13), (5.22) e as expressões dadas por (C.11) e (C.12) apresentadas no Apêndice C, a função peso pode ser escrita como

$$\begin{aligned} W_{RM}^{(2.5D)}(\xi^*, x, \bar{\mathbf{m}}) = & \frac{\bar{c}^2 \bar{h}_B \bar{L}_s^{(2D)} \bar{L}_g^{(2D)} m_D(x) \sqrt{m_D(x)}}{4m_D(\xi^*, \mathbf{m}_I) \cos^2 \alpha_{\bar{\mathbf{m}}} \cos^2 \beta_{\bar{\mathbf{m}}} \bar{L}_s^{(2D)} \bar{L}_g^{(2D)} |H_{11}^{RM}|^{1/2}} \\ & \times \frac{(\bar{\sigma}_s + \bar{\sigma}_g) \exp\left[\frac{i\gamma_1 \pi}{4}\right]}{\sqrt{\bar{\sigma}_s + \bar{\sigma}_g} \sqrt{\bar{\sigma}_s \bar{\sigma}_g} |H_{22}^{RM}|^{1/2}}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Definimos

$$W_{RM}^{(2.5D)}(\xi^*, x, \bar{\mathbf{m}}) = W_{RM}^{(F)}(\xi^*, x, \bar{\mathbf{m}}) W_{RM}^{(D)}(\xi^*, x, \bar{\mathbf{m}}) \quad (7.25)$$

onde

$$W_{RM}^{(F)}(\xi^*, x, \bar{\mathbf{m}}) = \frac{\bar{c}^2 (\bar{\sigma}_s + \bar{\sigma}_g)}{4\sqrt{\bar{\sigma}_s \bar{\sigma}_g} \sqrt{\bar{\sigma}_s + \bar{\sigma}_g} |H_{22}^{RM}|^{1/2}} \quad (7.26)$$

$$W_{RM}^{(D)}(\xi^*, x, \bar{\mathbf{m}}) = \frac{\bar{h}_B \bar{L}_s^{(2D)} \bar{L}_g^{(2D)} \exp\left[\frac{i\gamma\pi}{4}\right] \sqrt{m_D(x)}}{\cos^2 \alpha_{\bar{\mathbf{m}}} \cos^2 \beta_{\bar{\mathbf{m}}} \bar{L}_s^{(2D)} \bar{L}_g^{(2D)} |H_{11}^{RM}|^{1/2} \sqrt{m_D(\xi^*, \mathbf{m}_I)}}. \quad (7.27)$$

Desta forma, a função peso (7.24) pode ser decomposta num produto de dois fatores,  $W_{RM}^{(F)}$  e  $W_{RM}^{(D)}$ , onde o primeiro fator corresponde a contribuição de fora do plano de dependência a ser obtida analiticamente e o segundo fator corresponde a contribuição de dentro do plano a ser calculado mediante o uso da dinâmica do raio em 2D.

As soluções em cascata e simples para o problema de remigração seguem o mesmo princípio de construção como no caso da transformada de configuração, resguardadas as devidas propriedades e diferenças dos dois problemas. Como naquele caso, a redução da integração bidimensional em 3D para unidimensional em 2.5D representa uma redução do custo por ordem de magnitude para ambas as soluções. Convém reiterar que a solução em cascata surge devido às operações matemáticas intermediárias ao estabelecimento da solução simples.

Porém, no caso da remigração, a solução em cascata não possui a mesma relevância prática como na transformada de configuração. O fato da solução cascata se realizar em duas etapas indica que ela não é melhor nem mais barata do que a repetição da migração dos dados originais. Assim, a migração repetida é preferida à solução cascata de remigração. Entretanto, a última desempenha um papel importante nas situações em que se possua uma antiga seção migrada, para a qual os dados originais não estão mais disponíveis. Neste caso, se for possível dispor de um melhor modelo de velocidade da região (por exemplo através de dados mais recentes da mesma região), poder-se-ia produzir uma imagem de melhor qualidade a partir dos dados migrados antigos.

Levando-se em conta que a solução simples (ou compacta) é efetuada por uma única etapa, espera-se que a remigração utilizando esta representação seja mais econômica, especialmente se a atualização do modelo de macro-velocidade se restringe a uma certa parte do modelo. Neste caso, o operador de empilhamento da remigração tem menor extensão do que o da migração, assim garantindo que a remigração necessite de menos operações de somação. Nesta situação, obtém-se uma boa perspectiva que o processo seja mais eficiente e menos custoso do que a migração repetida.

No entanto, a solução simples não pode ser aplicada quando o determinante de  $\mathbf{H}^{RM}$ , o qual aparece no denominador da respectiva função peso, e que consiste do produto das quantidades  $H_{11}^{RM}$  e  $H_{22}^{RM}$ , for nulo.

Situações como estas ocorrerão quando os modelos de velocidades de saída e entrada são muito próximos. O fato é que esta semelhança nas velocidades produz curvaturas das respectivas superfícies isócronas, fora e dentro do plano, aproximadamente iguais. São as diferenças destas curvaturas que determinam os valores das quantidades  $H_{11}^{RM}$  e  $H_{22}^{RM}$ , respectivamente.

No caso em que  $H_{22}^{RM}$  for nulo, a redução do problema 3D para a situação em 2.5D, conforme mostrada na Seção 7.3 não é válida. Convém observar que, se ambos os fatores

$H_{11}^{RM}$  e  $H_{22}^{RM}$  forem aproximadamente zero, pode-se esperar que a seção remigrada a ser obtida praticamente não diferiria da seção migrada original, assim eliminando a necessidade de se aplicar o processo da remigração.

Na verdade, problemas de Remigração com esta característica ainda não existem exemplos numéricos disponíveis na literatura.

## 7.5 Meio Verticalmente Não Homogêneo

As fórmulas que apresentaremos nas próximas seções são relativas aos problemas de Remigração levando-se em conta uma configuração de fontes-receptores e distintos modelos de distribuições de velocidades.

### Função Peso

A função peso correspondente a este caso é especificada mediante o uso da expressão (7.24)

$$W_{RM}^{(2.5D)}(\xi^*, x, \bar{\mathbf{m}}) = \frac{\bar{c} \bar{L}_s^{(2D)} \bar{L}_g^{(2D)} \sqrt{m_D(x)} (\bar{\sigma}_F)^{-1}}{2 \bar{L}_s^{(2D)} \bar{L}_g^{(2D)}} \quad (7.28)$$

$$\times \frac{(\bar{\sigma}_s \cos \alpha_{\bar{\mathbf{m}}}^s + \bar{\sigma}_g \cos \alpha_{\bar{\mathbf{m}}}^g) \exp\left[\frac{i\gamma\pi}{4}\right]}{\cos^2 \beta_{\bar{\mathbf{m}}} \sqrt{\bar{\sigma}_s} + \bar{\sigma}_g \sqrt{\bar{\sigma}_s \bar{\sigma}_g} [(\bar{\sigma}_F)^{-1} - (\sigma_F)^{-1}]}$$

onde as quantidades  $\sigma_i$ ,  $L_i$  ( $i = s, g$ ),  $\sigma_F$  e  $m_D(x_1)$  são dados pelas equações (2.52), (2.55), (2.36) e (5.4), respectivamente. Correspondentemente, as quantidades  $\bar{\sigma}_i$ ,  $\bar{L}_i$  ( $i = s, g$ ),  $\bar{\sigma}_F$  e  $m_D(x, \bar{\mathbf{m}})$  são dadas pelas mesma equações, porém, utilizando-se o novo modelo de velocidade  $\bar{c}$ .

### Linha de Empilhamento

A linha de empilhamento para este caso é dada por

$$\zeta_{RM}(x, \bar{\mathbf{m}}) = \zeta_{CR}(x, \xi^*, \bar{\mathbf{m}}) = \zeta_I(x; \mathbf{n}(\xi^*, \bar{\tau}_D(\xi^*, \bar{\mathbf{m}}))) \quad (7.29)$$

onde neste caso

$$\bar{\tau}_D = \frac{1}{\bar{c}_0} \left[ \int_0^{\bar{z}} \frac{n^2(z) dz}{\sqrt{n^2(z) - \sin^2 \alpha_0^s}} + \int_0^{\bar{z}} \frac{n^2(z) dz}{\sqrt{n^2(z) - \sin^2 \alpha_0^g}} \right] \quad (7.30)$$

calculada com o novo modelo de velocidade  $\bar{c}$ . As idéias para a determinação desta linha de empilhamento segue o raciocínio apresentado na seção (6.5), para maiores detalhes veja também Tygel et al.(1996).

## 7.6 Casos Analíticos

### 7.6.1 Velocidade Constante

#### Função Peso

A função peso para este tipo de situação é estabelecida mediante o uso das expressões (2.72)

e (2.73) em (7.24). O resultado pode ser escrito como

$$W_{RM}^{(2.5D)}(\xi^*, x, \bar{\mathbf{m}}) = \frac{\bar{z} \bar{c}_0 \sqrt{c_0} \sqrt{m_D(x)}}{2(\bar{\ell}_s \bar{\ell}_g) \sqrt{(\ell_s + \ell_g)}} \quad (7.31)$$

$$\times \frac{[\bar{\ell}_s^2 + \bar{\ell}_g^2](\bar{\ell}_s + \bar{\ell}_g) \sqrt{(\ell_s \ell_g)} \exp\left[\frac{i\pi\gamma_2}{4}\right]}{\cos^2 \beta_m [c_0 \ell_s \ell_g (\bar{\ell}_s + \bar{\ell}_g) - \bar{c}_0 \bar{\ell}_s \bar{\ell}_g (\ell_s + \ell_g)]}$$

onde a quantidade  $\ell_i$  ( $i = s, g$ ) e seu correspondente em relação ao outro modelo são definidas pela equação (2.72).

### Linha de Empilhamento

A linha de empilhamento para este caso é dada por (Schleicher et al., 1997)

$$\zeta_{RM}(x, \bar{\mathbf{m}}) = \zeta_{CR}(x, \xi^*, \bar{\mathbf{m}}) = \zeta_I(x, (\xi^*, \bar{\tau}_D(\xi^*, \bar{\mathbf{m}})) \quad (7.32)$$

$$= \bar{b} \sqrt{1 - \left(\frac{(x - x_{\bar{\mathbf{m}}})}{\bar{a}}\right)^2} \quad (7.33)$$

onde

$$\bar{b} = \sqrt{\bar{a}^2 - h^2}, \quad \bar{a}^2 = \frac{(\bar{c}_0)^2 \bar{\tau}_D^2}{4} \quad \text{e} \quad h^2 = \frac{(x_s - x_g)^2}{4} \quad (7.34)$$

com

$$\bar{\tau}_D(\xi, \bar{\mathbf{m}}) = \frac{1}{\bar{c}_0} \left( \sqrt{(\bar{x} - x_s)^2 + \bar{z}^2} + \sqrt{(\bar{x} - x_g)^2 + \bar{z}^2} \right). \quad (7.35)$$

Para um dado ponto  $\bar{\mathbf{m}}(\bar{x}, \bar{z})$  no espaço de saída, a linha de empilhamento  $\tau_D(\xi, \bar{\mathbf{m}})$  usando o novo modelo de velocidade  $\bar{c}$  é a conhecida dupla raiz quadrada especificada por (4.24).

Já a IP  $\zeta_{RM}$  é a imagem migrada no espaço de entrada relativa a linha  $\bar{\tau}_D$ . Portanto, se  $\zeta_{RM}$  é o refletor no espaço de entrada então  $\bar{\tau}_D$  será a correspondente curva de tempo de trânsito.

Em síntese, para cada ponto sobre  $\bar{\tau}_D$ , calculamos com o modelo de velocidade  $c$ , no espaço entrada, as correspondentes isócronas. A IP fica especificada como o envelope dessas isócronas. O resultado é dado por (7.33). Observe que para cada  $x$  variando no intervalo de abertura  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$  o ponto  $\mathbf{n}(\xi^*, t)$  com  $\xi^* = \xi^*(x)$  é o ponto de tangência entre as curvas  $\bar{\tau}_D$  e  $\tau_D$ . A aplicação da condição estacionária (7.19) para a equação (7.33) permite especificar  $x^* = \xi^*(x)$ . O resultado é apresentado em Schleicher et al., (1997).

## 7.6.2 Velocidade com Gradiente Constante

### Função Peso

A função peso para este tipo de problema é dada por

$$W_{RM}^{(2.5D)}(x, \xi^*, \bar{\mathbf{m}}) = \frac{\sqrt{m_D(x)} [\bar{\sigma}_g \cos \alpha_{\bar{\mathbf{m}}}^s + \bar{\sigma}_s \cos \alpha_{\bar{\mathbf{m}}}^g]}{2 \cos^2 \beta_m [\bar{\sigma}_F^{-1} - \sigma_F^{-1}]} \quad (7.36)$$

$$\times \frac{c c_0 \bar{\sigma}_F^{-1} \exp\left[i\frac{\gamma_2\pi}{4}\right]}{2 \bar{c}_0 \sqrt{\sigma_s \sigma_g} \sqrt{\sigma_s + \sigma_g}}$$

onde as quantidades  $\sigma_i$ ,  $\sigma_F$  e  $m_D$  são dadas em (2.76), (2.38) e (5.4), respectivamente, bem como as correspondentes quantidades relativas ao novo modelo.

### Linha de Empilhamento

A linha de empilhamento pode ser dada por

$$\zeta_{RM}(x, \bar{\mathbf{m}}) = \zeta_{CR}(x, \xi^*, \bar{\mathbf{m}}) = \zeta_I(x, (\xi^*, \bar{\tau}_D(\xi^*, \bar{\mathbf{m}}))) \quad (7.37)$$

que é obtida implicitamente levando em conta que a expressão  $\bar{\tau}_D(\xi^*, \bar{\mathbf{m}}) = t$ , com  $x_s$  e  $x_g$  fixos e variando-se  $\bar{\mathbf{m}}_I$ . Este resultado deve ser calculado em

$$\bar{\tau}_D = \frac{1}{g} \ln(\bar{B}_s \bar{B}_g) \quad (7.38)$$

onde

$$\bar{B}_i = 1 + \frac{(\bar{g})^2 (\bar{\ell}_i)^2 + 2\bar{g}\bar{\sigma}_i}{2\bar{c}\bar{c}_0} \quad (7.39)$$

com as quantidades  $\bar{\ell}_i$  e  $\bar{\sigma}_i$  dadas por (2.68) e (2.76), respectivamente, levando-se em conta o novo modelo de velocidade  $\bar{c}$ . Como não conhecemos a fórmula analítica para a isócrona para o modelo de velocidade com gradiente constante, o valor  $\xi^* = \xi^*(x)$  pode apenas ser obtido numericamente.

## 7.6.3 Vagariosidade Quadrada com Gradiente Constante

### Função Peso

A função peso neste caso é estabelecida por

$$\begin{aligned} W_{RM}^{(2.5D)}(x, \xi^*, \bar{\mathbf{m}}) &= \frac{cc_0 \sqrt{m_D(x)} \bar{\sigma}_F^{-1}}{2\bar{c}_0 \cos^2 \beta_{\bar{\mathbf{m}}}} \\ &\times \frac{\exp[\frac{in\gamma_2}{4}][\bar{\sigma}_g \cos \alpha_{\bar{\mathbf{m}}}^g + \bar{\sigma}_s \cos \alpha_{\bar{\mathbf{m}}}^s] \sqrt{C_s C_g}}{[\bar{\sigma}_F^{-1} - \sigma_F^{-1}] \sqrt{\sigma_s \sigma_g (\sigma_s + \sigma_g)} \sqrt{C_s C_g}} \end{aligned} \quad (7.40)$$

onde as quantidades  $\sigma_i$ ,  $C_i$  ( $i = s, g$ ),  $\sigma_F$  e  $m_D$ , bem como suas correspondentes expressões relativas ao novo modelo são dadas pelas equações (2.79), (2.82), (2.38) e (5.4), respectivamente.

### Linha de Empilhamento

A linha de empilhamento é dada por

$$\zeta_{RM}(x, \bar{\mathbf{m}}) = \zeta_{CR}(x, \xi^*, \bar{\mathbf{m}}) = \zeta_I(x, \xi^*, \bar{\tau}_D(\xi^*, \bar{\mathbf{m}})) \quad (7.41)$$

que é obtida implicitamente levando-se em conta que  $\bar{\tau}_D(\xi^*, \bar{\mathbf{m}}) = t$ , com  $x_s$  e  $x_g$  fixos e variando-se  $\bar{\mathbf{m}}_I$ . Este resultado deve ser calculado em

$$\bar{\tau}_D = \frac{2}{3} \left( \frac{(\bar{\ell}_s)^2}{\bar{\sigma}_s} + \frac{(\bar{\ell}_g)^2}{\bar{\sigma}_g} \right) + \frac{(\bar{\sigma}_s + \bar{\sigma}_g)}{6} \left( \frac{1}{\bar{c}^2(z)} + \frac{1}{\bar{c}_0^2} \right) \quad (7.42)$$

onde  $\bar{\sigma}_i$  é dada pela expressão (2.79) utilizando-se o novo modelo de velocidade  $\bar{c}$ . O não conhecimento da fórmula analítica para a isócrona referente a este meio significa que o valor  $\xi^* = \xi^*(x)$  pode ser calculado apenas numericamente.

## 7.6.4 Logarítmo da Velocidade com Gradiente Constante

### Função Peso

Substituindo (2.86) em (7.23), temos

$$W_{RM}^{(2.5D)}(x, \xi^*, \bar{\mathbf{m}}) = \frac{cc_0 \sqrt{m_D(x)} [\bar{\sigma}_g \cos \alpha_{\bar{\mathbf{m}}}^g + \bar{\sigma}_s \cos \alpha_{\bar{\mathbf{m}}}^s]}{2\bar{c}_0 \cos^2 \beta_{\bar{\mathbf{m}}} \sqrt{\sigma_s \sigma_g (\sigma_s + \sigma_g)}} \times \frac{\exp\left[\frac{i\pi\gamma_2}{4}\right] \sigma_F^{-1} \sqrt{Y_s Y_g}}{[\bar{\sigma}_F^{-1} - \sigma_F^{-1}] \sqrt{Y_s Y_g}} \quad (7.43)$$

onde  $\sigma_i$ ,  $Y_i$ ,  $\sigma_F$  e  $m_D$ , bem como suas correspondentes quantidades relativas ao novo modelo são dadas pelas identidades (2.85), (2.87), (2.38) e (5.4), respectivamente.

### Linha de Empilhamento

A linha de empilhamento para este caso pode ser dada por

$$\begin{aligned} \zeta_{RM}(x, \bar{\mathbf{m}}) &= \zeta_{CR}(x, \xi^*, \bar{\mathbf{m}}) = \zeta_I(x, (\xi^*, \bar{\tau}_D(\xi^*, \bar{\mathbf{m}})) \\ &= \frac{1}{\bar{g}} \ln \left| \frac{\bar{T} \bar{V}_+ + \sqrt{(\bar{T})^2 (\bar{V}_+)^2 - ((\bar{T})^2 - 1)((\bar{V}_-)^2 - 1)}}{(1 - (\bar{T})^2)} \right| \end{aligned} \quad (7.44)$$

onde

$$\bar{V}_{\pm} = \frac{\cos(\bar{g} \Delta x_s)}{2\bar{T}} \pm \frac{\cos(\bar{g} \Delta x_g)}{2\bar{T}} \quad \text{e} \quad \bar{T} = \frac{\bar{g} \bar{c}_0 \bar{\tau}_D}{2} \quad (7.45)$$

é calculada em

$$\bar{\tau}_D = \frac{1}{\bar{c}_0 \bar{c}} [\bar{\sigma}_s \bar{Y}_s + \bar{\sigma}_g \bar{Y}_g]. \quad (7.46)$$

O ponto  $\xi^* = \xi^*(x)$  necessário ao estabelecimento da IP  $\zeta_{RM}$  pode ser determinado mediante a utilização da condição estacionária (7.19) para a equação (7.43).

## 7.7 Resumo

Este capítulo teve por finalidade o estabelecimento das soluções cascata e simples do problema de remigração para a situação em 2.5D, para um meio verticalmente não homogêneo e para os casos analíticos mencionados anteriormente.

As funções pesos e linhas de empilhamentos para estas situações são estabelecidas em termos de fórmulas analíticas envolvendo quantidades conhecidas do modelo relativo a entrada e saída, que deverão facilitar a determinação da solução destes problemas de uma forma mais eficiente e muito mais rápida.

## Capítulo 8

# CONCLUSÕES

Esta tese trata da teoria de várias operações integrais associadas ao nome de Kirchoff. Estas incluem as integrais de modelamento direto, migração, demigração e de várias transformações de imagens. Estas últimas são aqui representadas pelas integrais da transformada de configuração e da remigração.

A realização destas integrais, obtida na prática através da sua implementação numérica, mostra-se demorada e altamente dispendiosa por causa das dimensões do problema e da quantidade dos dados a serem manipulados. Além disso, inúmeros raios tem de ser traçados cinematica e dinamicamente para a obtenção das superfícies de empilhamento e dos pesos em amplitude verdadeira. Diante disso, tornam-se interessantes métodos para a determinação aproximativa destas quantidades que sejam mais rápidos de execução e assim menos dispendiosas.

Sob certas hipóteses sobre o meio sob investigação, as fórmulas para as superfícies de empilhamento e os pesos de amplitude verdadeira podem ser simplificadas, de modo que a sua computação seja mais rápida e eficiente. Estas podem então servir como aproximações para estas quantidades em meios mais realísticos. Derivamos nesta tese as correspondentes fórmulas para as operações integrais mencionadas acima para meios com vários graus de simetria.

O primeiro passo consistiu em simplificar as fórmulas gerais, que valem para meios 3D com uma distribuição de velocidade arbitrária para meios com simetria cilíndrica, i.e., meios cujos parâmetros não variam em na direção perpendicular à linha sísmica. Esta situação é conhecida na literatura geofísica como 2.5D. As particularidades desta situação permitem que a simplificação das fórmulas seja realizada através da utilização do método da fase estacionária de avaliação de integrais com integrandos oscilantes. Por causa da simetria do meio, é possível a avaliação assintótica das integrais ao longo do eixo perpendicular à linha sísmica. Para as operações da transformada de configuração e da remigração, consideramos o encadeamento das integrais de migração e demigração para obter a solução cascata e a solução compactada em 2.5D. Assim, as operações investigadas reduzem-se de integrais de superfície a integrais de linha ao longo da linha sísmica. Esta redução significa um enorme ganho econômico porque reduz a quantidade de dados a serem manipulados por ordens de magnitude. Além disso, necessita-se somente o traçamento dinâmico de raios em 2D dentro do plano vertical que contém a linha sísmica, ao invés do traçamento 3D no caso geral.

Uma maior redução de manipulações numéricas pode ser alcançado em meios cujos

parâmetros dependem somente da profundidade. Estes meios são chamados verticalmente não homogêneos porque não apresentam variações laterais. Nesta situação, o traçamento de raios é ainda mais simplificado. Necessita-se somente um traçamento cinemático de raios em 2D e a solução de algumas integrais de caráter semi-analítico ao longo destes raios para a determinação das funções peso.

Como passo final nesta direção, estudamos quatro funções da velocidade em dependência da profundidade, para as quais é possível determinar fórmulas analíticas para as superfícies de empilhamento e os pesos de amplitude verdadeira das operações integrais. Estas distribuições de velocidade são a velocidade constante, a velocidade com um gradiente vertical constante, a vagarosidade quadrada (um sobre o quadrado da velocidade) com um gradiente vertical constante e o logaritmo da velocidade com um gradiente vertical constante. As fórmulas analíticas determinadas permitem que as operações integrais sejam aplicadas diretamente aos dados sem necessidade de um traçamento de raios prévio. Desta forma, otimizam-se os benefícios alcançáveis por formulações teórico-analíticas.

Conclui-se portanto que, em casos nos quais a verdadeira distribuição da velocidade terrestre possa ser representado por um destes modelos mais simples, os requisitos exigidos para a aplicação dos processos integrais estudados (modelamento, migração, demigração, e transformações de imagens tipo Kirchhoff) serão menores e, assim sendo, estes processos poderão ser realizados de maneira mais eficiente no sentido do custo computacional e do tempo de processamento.

Esta propriedade os torna atraentes para servir como solução aproximada em meios mais realísticos. Uma outra utilidade das fórmulas simplificadas consiste no auxílio delas na interpretação e validação dos resultados da implementação dos métodos em situações mais complicadas, bem como no estudo e desenvolvimento de novos métodos de processamento e imageamento sísmico.

# Referências Bibliográficas

- [1] Aki, K., and Richards, P.G., 1980. *Quantitative seismology* W.H. Freeman and Co., San Francisco.
- [2] Beylkin, G., 1985. *Imaging of discontinuities in the inverse scattering problem by inversion of a causal generalized Radon Transform*. J.Math.Phys. 26, 99-108.
- [3] Bleistein, N., 1984. *Mathematical methods for wave phenomena* Academic Press, New York.
- [4] Bleistein, N., 1986. *Two-and-one-half dimensional in-plane wave propagation*. Geophysics Prospecting 34, 686-703.
- [5] Bleistein, N., Cohen, J.K., and Hagin, F. G., 1987. *Two-and-one-half dimensional Born inversion with an arbitrary reference*, Geophysics 52, 26-36.
- [6] Červený, V., 1985. *The application of ray tracing to the numerical modelling of seismic wave fields in complex structures*, in Dohr, G., Ed., Seismic Shear Waves, Part A: theory, Geophysical Press: Handbook of Geophysics Exploration, section I: Seismic 15, 1-124.
- [7] Červený, V., 1987. *Ray methods for three-dimensional seismic modelling*, Norwegian Institute for Technology: Petroleum Industry Course.
- [8] de Castro, M.A., and Červený, V., 1991. *3-D inversion of seismic reflection data using dynamic ray tracing*: 2nd Ann.Internat. Mtg., Brazil Geophys.Soc., Expanded Abstracts, 811-816.
- [9] Dellinger, J.A., and Gray, S.H., and Murphy, G.E., and Etgen, J.T., 2000. *Efficient 2.5-D True-Amplitude Migration*. Geophysics. 65. 943-950.
- [10] Dietrich, M., and Cohen, J.K., 1993. *Migration to zero offset (DMO) for a constant velocity gradient: an analytic formulation*, Geophysical Prospecting 41, 621-643.
- [11] Hagedoorn, J.G., 1954. *A process of seismic reflection interpretation*, Geophysics Prospecting 2, 85-127.
- [12] Hubral, P., 1983. *Computing true-amplitude reflections in a laterally inhomogeneous earth*, Geophysics 48, 1051-1062.
- [13] Hubral, P., Schleicher, J., and Tygel, M., 1992. *Three dimensional paraxial ray properties I, Basic Relations*, J. Seismic Exploration 1. 265-275.

- [14] Hubral, P., Schleicher, J., and Tygel, M., 1996. *A unified approach to 3-D seismic reflection imaging, Part I: Basic concepts*, Geophysics **3**, 265-275.
- [15] Hubral, P., Tygel, M., and Schleicher, J., 1996. *Seismic image waves*, Geophysics J.Int. **125**, 431-442.
- [16] Martins, J.M., Schleicher, J., Tygel, M., and Santos, L.T., 1997 *2.5D True-Amplitude Migration and Demigration*, Journal of Seismic Exploration **6** 159-180.
- [17] Oldham, K.O., and Spanier, J., 1974. *The Fractional Calculus*, Academic Press INC.
- [18] Portugal, R.S., 1998. *Análise de uma Equação da Onda Acústica para Meios com Simetria Cilíndrica (2.5D)*, Unicamp (Tese de Messtrado) 1998.
- [19] Rockwell, D.W., 1971, *Migration stack aids interpretation*: Oil and Gas Journal, **69**, 202-218.
- [20] Santos, L.T., Schleicher, J., and Tygel, M., 1997. *2.5D true-amplitude offset continuation*, J. Seismic Exploration **6**, 103-116.
- [21] Schleicher, J., Tygel, M., and Hubral, P., 1993. *3D true-amplitude finite-offset migration*, Geophysics **58**, 1112-1126.
- [22] Schleicher, J., Hubraç, P., Hoecht, G., and Liptow, F., 1997. *Seismic Constant-Velocity Remigration*, Geophysics **62**, 589-597.
- [23] Schneider, W. A., 1978. *Integral formulation for migration in two and three dimensions* Geophysics **43**, 49-76.
- [24] Stolt, R.H., *Migration by Fourier Transform*. Geophysics. **43**, 23-48.
- [25] Tygel, M., Schleicher, J., and Hubral, P., 1994a. *Kirchhoff-Helmholtz theory in modelling and migration*, J. Seismic Exploration **3**, 203-214.
- [26] Tygel, M., Schleicher, J., and Hubral, P., 1994b. *Pulse distortion in depth migration*, Geophysics **59**, 1561-1569.
- [27] Tygel, M., Schleicher, J., and Hubral, P., 1995. *Dualities between reflections and reflection-time surfaces*, J. Seismic Exploration **4**, 123-150.
- [28] Tygel, M., Schleicher, J., and Hubral, P., 1996. *A unified approach to 3D seismic reflection imaging - Part II: theory*, Geophysics **61**, 759-775.
- [29] Jaramillo, H., and Tygel, M., and Schleicher, J., 1998. *Discussion and Errata to: A unified approach to 3D seismic reflection imaging - Part II: theory*, Geophysics. **61**, 759-775, 1996. Geophysics **63**, 670-673.
- [30] Tygel, M., Schleicher, J., and Hubral, P., and Santos, L.T., 1998. *2.5D True-Amplitude Kirchhoff to Zero Offset in Laterally Inhomogeneous Media*. Geophysics **63**, 557-573.
- [31] Yilmaz, O. and Chambers., 1984. *Migration velocity anaylis by wave field extrapolation*. Geophysics. **49**, 1664-1674.

# Apêndice A

## COMPARAÇÃO DE SISMOGRAMAS

O objetivo deste Apêndice consiste em comparar o sismograma (5.29) com o sismograma em 3D( Tygel et al., 1996 e Jaramillo et al.,1998). Inicialmente simplificando os termos integrantes de (5.30).

Sendo assim, considere a seguinte identidade devido ao segundo teorema da dualidade (Tygel et al, 1995), isto é

$$m_D(\mathbf{x})(H_D(\xi) - H_R(\xi)) = -\Delta_{DR}(\xi, \mathbf{x})(Z_I(\mathbf{x}) - Z_R(\mathbf{x}))^{-1}(\Delta_{DR}(\xi, \mathbf{x}))^T \quad (\text{A.1})$$

onde

$$\Delta_{DR}(\xi, \mathbf{x}) = \left( \frac{\partial^2 \tau_{DR}(\xi, \mathbf{x})}{\partial x_i \partial \xi_j} \bigg|_{(\xi, \mathbf{x})=(\xi^*, \mathbf{x}^*)} \right) \quad (i, j = 1, 2), \quad (\text{A.2})$$

$$Z_I(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial^2 \zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n})}{\partial x_i \partial x_j} \bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \right) \quad (i, j = 1, 2), \quad (\text{A.3})$$

$$Z_R(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial^2 \zeta_R(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \right) \quad (i, j = 1, 2), \quad (\text{A.4})$$

$$H_D(\xi) = \left( \frac{\partial^2 \tau_D(\xi, M)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \bigg|_{\xi=\xi^*} \right) \quad (i, j = 1, 2), \quad (\text{A.5})$$

$$H_R(\xi) = \left( \frac{\partial^2 \tau_R(\xi)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \bigg|_{\xi=\xi^*} \right) \quad (i, j = 1, 2) \quad (\text{A.6})$$

e

$$\tau_{DR}(\xi, \mathbf{x}) = \tau_D(\xi, M_R) \quad (\text{A.7})$$

Entretanto, usando o desenvolvimento apresentado no Apêndice A de Tygel et al. (1996), segue que,

$$\Delta_{DR}(\xi, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & 0 \\ 0 & \sigma_F^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{h}_B & 0 \\ 0 & \sigma_F^{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

e

$$H_{DR}(\xi) = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & \sigma_F^{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

De posse da identidade (A.1) e da inversibilidade das matrizes (A.8) e (A.9), concluímos que

$$m_D(\mathbf{x})(Z_I(\mathbf{x}) - Z_R(\mathbf{x})) = -[\Delta_{DR}(\xi, \mathbf{x})]^T [H_{DR}(\xi)]^{-1} \Delta_{DR}(\xi, \mathbf{x}). \quad (\text{A.10})$$

Mais ainda, substituindo os resultados (A.8) e (A.9) na expressão (A.10), segue que

$$m_D(\mathbf{x})[Z_I(\mathbf{x}) - Z_R(\mathbf{x})] = - \begin{pmatrix} \frac{\Delta_{11}^2}{A_{11}} & 0 \\ 0 & \sigma_F^{-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

Por outro lado, seja

$$H_{IS}(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial^2 [m_D(\mathbf{x})(\zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n}) - \zeta_R(\mathbf{x}))]}{\partial x_i \partial x_j} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \quad (i = 1, 2). \quad (\text{A.12})$$

Afirmamos agora que

$$m_D(\mathbf{x})[Z_I(\mathbf{x}) - Z_R(\mathbf{x})] \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = H_{IS}(\mathbf{x}). \quad (\text{A.13})$$

Temos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 [m_D(\mathbf{x})(\zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n}) - \zeta_R(\mathbf{x}))]}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \tau_D(\xi, M)}{\partial x_2} \right) [\zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n}) - \zeta_R(\mathbf{x})] \Big|_{x_2^*=0} + m_D(\mathbf{x}) \frac{\partial [\zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n}) - \zeta(\mathbf{x})]}{\partial x_2} \Big|_{x_2^*=0} \right] \Big|_{x_1^*}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Analogamente, segue que

$$\frac{\partial^2 [m_D(\mathbf{x})(\zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n}) - \zeta_R(\mathbf{x}))]}{\partial x_2 \partial x_1} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = 0. \quad (\text{A.15})$$

Além disto, como

$$\frac{\partial m_D(\mathbf{x})}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial (\zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n}) - \zeta_R(\mathbf{x}))}{\partial x_i} \right] \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = 0 \quad \text{para } (i = 1, 2) \quad (\text{A.16})$$

pois,

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \tau_D(\xi, M)}{\partial x_i} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = 0 \quad \text{para } (i = 1, 2)$$

e

$$\frac{\partial^2 m_D(\mathbf{x})}{\partial x_i^2} [\zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n}) - \zeta_R(\mathbf{x})] \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = 0 \quad \text{para } (i = 1, 2) \quad (\text{A.17})$$

pois.

$$[\zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n}) - \zeta_R(\mathbf{x})]|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = 0.$$

Podemos concluir então que

$$\left. \frac{\partial^2 [m_D(\mathbf{x})(\zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n}) - \zeta_R(\mathbf{x}))]}{\partial x_i^2} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = m_D(\mathbf{x}) \left. \frac{\partial^2 [\zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n}) - \zeta_R(\mathbf{x})]}{\partial x_i^2} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \quad (\text{A.18})$$

com  $(i = 1, 2)$  e também

$$\frac{\partial^2 [\zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n}) - \zeta_R(\mathbf{x})]}{\partial x_2^2} = \sigma_F^{-1}. \quad (\text{A.19})$$

Portanto, a substituição dos resultados (A.14), (A.15), (A.18) e (A.19) em (A.12), concluímos que

$$H_{IS}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} m_D(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial^2 [\zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n}) - \zeta_R(\mathbf{x})]}{\partial x_i^2} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} & 0 \\ 0 & -\sigma_F^{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.20})$$

o que significa que

$$m_D(\mathbf{x}) [Z_I(\mathbf{x}) - Z_R(\mathbf{x})] = H_{IS}(\mathbf{x}). \quad (\text{A.21})$$

Mais ainda,

$$|\det H_{IS}(\mathbf{x})| = m_D^2(\mathbf{x}) \det[Z_I(\mathbf{x}) - Z_R(\mathbf{x})] = m_D^2(\mathbf{x}) \sigma_F^{-1} Z_{11} \quad (\text{A.22})$$

e

$$\text{Sgn} H_{IS}(\mathbf{x}) = \text{sgn}(Z_{11}) + \text{sgn}(Z_{22}) = \rho_1 + \rho_2 = \rho_1 - 1 \quad (\text{A.23})$$

onde

$$Z_{11} = \left( \frac{\partial^2 [\zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n}) - \zeta_R(\mathbf{x})]}{\partial x_1^2} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \quad (\text{A.24})$$

e

$$Z_{22} = \frac{-\sigma_F^{-1}}{m_D(\mathbf{x})} \quad (\text{A.25})$$

Substituindo (A.20) em (5.30) concluímos que este sismograma coincide com os dados não migraados apresentados em (Tygel et al, 1996).

## Apêndice B

# MATRIZ HESSIANA - TRANSFORMADA DE CONFIGURAÇÃO

n este apêndice vamos estabelecer os termos integrantes da matriz hessiana,

$$H^{CT}(\xi, ) = \left( \frac{\partial^2 \tau_{CC}(\xi, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}})}{\partial x_i \partial x_j} \right) \quad i, j = 1, 2 \quad (\text{B.1})$$

Com esta finalidade, a partir da equação (6.3), obtemos

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \tau_{CC}(\xi, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}})}{\partial x_2^2} \right|_{x_2^*=0} &= \left[ \frac{\partial \tau_D(\xi, \mathbf{x}, z)}{\partial z} \left( \frac{\partial \bar{\zeta}_I(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}})}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{2 \partial^2 \tau_D(\xi, \mathbf{x}, z)}{\partial z \partial x_2} \frac{\partial \bar{\zeta}_I(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}})}{\partial x_2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 \tau_D(\xi, \mathbf{x}, z)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial \tau_D(\xi, \mathbf{x}, z)}{\partial z} \frac{\partial^2 \bar{\zeta}_I(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}})}{\partial x_2^2} \right] \Big|_{x_2^*=0}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

utilizando a identidade (5.11), a equação (B.2) pode ser escrita como,

$$\left. \frac{\partial^2 \tau_{CC}(\xi, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}})}{\partial x_2^2} \right|_{x_2^*=0} = \left. \frac{\partial^2 \tau_D(\xi, \mathbf{x}, z)}{\partial x_2^2} \right|_{x_2^*=0} + \left( \frac{\partial \tau_D(\xi, \mathbf{x}, z)}{\partial z} \frac{\partial^2 \bar{\zeta}_I(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}})}{\partial x_2^2} \right) \Big|_{x_2^*=0} \quad (\text{B.3})$$

Entretanto, considere agora,  $z = \zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n}^*)$  com  $\mathbf{n}^* = \mathbf{n}^*(\xi, t^*)$  no "input", isto é, a superfície  $z = \zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n}^*)$  (outplanat) é formada pelo conjunto dos pontos  $M_I^*(\mathbf{x}, \zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n}^*))$ , tais que o tempo de trânsito  $\tau_D(\xi, \mathbf{x}, \zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n}^*))$  seja constante e igual a  $t^*$ , melhor ainda,

$$t^* = \tau_D(\xi, \mathbf{x}, z = \zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n}^*)). \quad (\text{B.4})$$

E então, de maneira análoga a obtenção da identidade (B.3), temos

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{\partial^2 t^*}{\partial x_2^2} \right|_{x_2=0} \\ &= \left[ \frac{\partial^2 \tau_D(\xi, \mathbf{x}, z)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial \tau_D(\xi, \mathbf{x}, z)}{\partial z} \frac{\partial^2 \zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n}^*)}{\partial x_2^2} \right] \Big|_{x_2^*=0}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Agora subtraindo a expressão (B.5) da expressão (B.3), obtemos

$$\left. \frac{\partial^2 \tau_{CC}(\xi, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}})}{\partial x_2^2} \right|_{x_2^*=0} = \left[ \frac{\partial \tau_D(\xi, \mathbf{x}, z)}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 \bar{\zeta}_I(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}})}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n}^*)}{\partial x_2^2} \right) \right] \Big|_{x_2^*=0}. \quad (\text{B.6})$$

De forma análoga, temos também

$$\left. \frac{\partial^2 \tau_{CC}(\xi, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}})}{\partial x_1^2} \right|_{x_1^*} = \left[ \frac{\partial \tau_D(\xi, \mathbf{x}, z)}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 \bar{\zeta}_I(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}})}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \zeta_I(\mathbf{x}, \mathbf{n}^*)}{\partial x_1^2} \right) \right] \Big|_{x_1=x_1^*}. \quad (\text{B.7})$$

bem como, após algumas manipulações algébricas, que

$$\left. \frac{\partial^2 \tau_{CC}(\xi, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}})}{\partial x_1 \partial x_2} \right|_{\mathbf{x}=(x_1^*, 0)} = 0. \quad (\text{B.8})$$

e

$$\left. \frac{\partial^2 \tau_{CC}(\xi, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}})}{\partial x_2 \partial x_1} \right|_{\mathbf{x}=(x_1^*, 0)} = 0. \quad (\text{B.9})$$

Mas, usando as identidades (B.6), (B.7), (A.20) e a equação (2.37), podemos escrever,

$$\frac{-\sigma_F^{-1}}{m_D(x_1)} = \left( \frac{\partial^2 \zeta_I(x_1, \mathbf{n}^*)}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \zeta_R(x_1)}{\partial x_2^2} \right) \quad (\text{B.10})$$

e

$$\frac{-\bar{\sigma}_F^{-1}}{\bar{m}_D(x_1)} = \left( \frac{\partial^2 \bar{\zeta}_I(x_1, \bar{\mathbf{n}})}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \bar{\zeta}_R(x_1)}{\partial x_2^2} \right) \quad (\text{B.11})$$

Subtraindo a identidade (B.10) de (B.11) e usando (5.11), obtemos

$$\frac{\partial^2 \tau_{CC}(\xi, x_1, \bar{\mathbf{n}})}{\partial x_1^2} = m_D(\xi, M_R) \left( \frac{\partial^2 \bar{\zeta}_I(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}})}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \zeta_I(x_1, \mathbf{n}^*)}{\partial x_1^2} \right) \Big|_{\mathbf{x}^*} \quad (\text{B.12})$$

e

$$\frac{\partial^2 \tau_{CC}(\xi, x_1, \bar{\mathbf{n}})}{\partial x_2^2} = m_D(\xi, M) \left( \frac{\sigma_F^{-1}}{m_D(x_1)} - \frac{\bar{\sigma}_F^{-1}}{\bar{m}_D(x_1)} \right). \quad (\text{B.13})$$

Portanto, a identidade (B.1) pode ser escrita como,

$$H^{CT}(\xi, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}}) = \begin{pmatrix} H_{11}^{CT} & 0 \\ 0 & H_{22}^{CT} \end{pmatrix} \quad (\text{B.14})$$

onde  $H_{11}^{CT}$  e  $H_{22}^{CT}$  são expressos pelas identidades (B.12) e (B.13), respectivamente.

Aqui  $M = M_I((x_1, 0), \bar{\zeta}_I((x_1, 0), \bar{\mathbf{n}}(\xi, t)))$  e  $M_R = M_I(\mathbf{x}^*, \bar{\zeta}_I(\mathbf{x}^*, \bar{\mathbf{n}}(\xi, t)))$

## Apêndice C

# MATRIZ HESSIANA - REMIGRAÇÃO

Neste apêndice vamos especificar os termos integrantes da matriz hessiana,

$$H^{(RM)} = \left( \frac{\partial^2 [m_D(\mathbf{x})(\zeta_{CR}(\mathbf{x}, \xi^*, \bar{M}) - \zeta_R(\mathbf{x}))]}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right) \quad (C.1)$$

Considere a superfície de Huygens  $t = \bar{\tau}_D(\xi, \bar{M})$  para  $\bar{M} = \bar{M}(\bar{x}, \bar{z})$  no ("output"). Para cada  $\mathbf{n}(\xi, \bar{\tau}_D(\xi, \bar{M}))$  sobre  $t = \bar{\tau}_D(\xi, \bar{M})$ , construímos a isócrona  $\zeta_I(x, \mathbf{n}) = \zeta_I(x, \xi, \bar{\tau}_D(\xi, \bar{M}))$  no espaço "input", o que significa que o conjunto de todas estas isócronas que são construídas para todos os pontos  $\mathbf{n}$  sobre  $t = \bar{\tau}_D(\xi, \bar{M})$  definem então no espaço "input" superfície  $z = \zeta_{CR}(x, \xi, \bar{M})$  com  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\xi, \bar{\tau}_D)$ .

Portanto, para cada  $x$  fixo e para qualquer  $\xi$  escrevemos,

$$\tau_D(\xi, x, \zeta_{CR}(x, \xi, \bar{M})) = \bar{\tau}_D(\xi, \bar{M}). \quad (C.2)$$

Derivando (C.2) em relação a  $\xi_2$ , obtemos

$$\frac{\partial \tau_D(\xi, \mathbf{x}, z)}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \tau_D(\xi, \mathbf{x}, z)}{\partial z} \frac{\partial \zeta_{CR}(\mathbf{x}, \xi, \bar{M})}{\partial \xi_2} = \frac{\partial \bar{\tau}_D(\xi, \bar{M})}{\partial \xi_2}. \quad (C.3)$$

Agora, derivando mais uma vez esta expressão em relação a  $\xi_2$ , avaliando o resultado no ponto estacionário  $\xi_2^* = 0$ , obtemos,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \bar{\tau}_D(\xi, \bar{M})}{\partial \xi_2^2} \right|_{\xi_2^*=0} &= \left. \frac{\partial^2 \tau_D(\xi, \mathbf{x}, z)}{\partial \xi_2^2} \right|_{\xi_2^*=0} \\ &+ \left( \frac{\partial \tau_D(\xi, \mathbf{x}, z)}{\partial z} \frac{\partial^2 \zeta_{CR}(\mathbf{x}, \xi, \bar{M})}{\partial \xi_2^2} \right)_{\xi_2^*=0}. \end{aligned} \quad (C.4)$$

pois,

$$\left. \frac{\partial \zeta_{CR}(\mathbf{x}, \xi, \bar{M})}{\partial \xi_2} \right|_{\xi_2^*=0} = 0 \quad (C.5)$$

Desta forma então, a expressão (C.4), pode ser escrita como,

$$\left. \frac{\partial^2 \zeta_{CR}(\mathbf{x}, \xi, \bar{M})}{\partial \xi_2^2} \right|_{\xi_2^*=0} = \frac{1}{m_D((\xi_1, 0), M)} \left( \left. \frac{\partial^2 \bar{\tau}_D(\xi, \bar{M})}{\partial \xi_2^2} \right|_{\xi_2^*=0} - \left. \frac{\partial^2 \tau_D(\xi, \mathbf{x}, z)}{\partial \xi_2^2} \right|_{\xi_2^*=0} \right). \quad (C.6)$$

Mas, usando o resultado (2.37), obtemos,

$$\left. \frac{\partial^2 [m_D(\mathbf{x})(\zeta_{CR}(\mathbf{x}, \xi, \bar{M}) - \zeta_R(\mathbf{x}))]}{\partial \xi_2^2} \right|_{\xi_2^*=0} = \frac{m_D(\mathbf{x})}{m_D((\xi_1, 0), M)} [\bar{\sigma}_F^{-1} - \sigma_F^{-1}] \quad (C.7)$$

e analogamente,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 m_D(\mathbf{x})(\zeta_{CR}(\mathbf{x}, \xi, \bar{M}) - \zeta_R(\mathbf{x}))}{\partial \xi_1^2} \right|_{\xi_1=\xi_1^*} &= \frac{m_D(\mathbf{x})}{m_D((\xi_1^*, 0), M_R)} \\ &\times \left[ \left. \frac{\partial^2 \bar{\tau}_D(\xi, \bar{M})}{\partial \xi_1^2} \right|_{\xi_1^*} - \left. \frac{\partial^2 \tau_D(\xi, M)}{\partial \xi_1^2} \right|_{\xi_1^*} \right] \end{aligned} \quad (C.8)$$

Além disso, derivando a expressão (C.2) em relação  $\xi_1$  depois em relação  $\xi_2$  e avaliando em  $\xi^* = (\xi_1^*, 0)$ , podemos concluir também que

$$\left. \frac{\partial^2 m_D(\mathbf{x})(\zeta_{CR}(\mathbf{x}, \xi, \bar{M}) - \zeta_R(\mathbf{x}))}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right|_{\xi=\xi^*} = 0 \quad \text{para } (i = j). \quad (C.9)$$

Finalmente, substituindo (C.7), (C.8) e (C.9) na identidade (C.1), obtemos

$$H^{RM}(x_1, \xi_1^*, \bar{M}) = \begin{pmatrix} H_{11}^{RM} & 0 \\ 0 & H_{22}^{RM} \end{pmatrix} \quad (C.10)$$

com

$$H_{11}^{(RM)} = \frac{m_D(x_1)}{m_D(\xi_1^*, M_R)} \left[ \left. \frac{\partial^2 \bar{\tau}_D(\xi, \bar{M})}{\partial \xi_1^2} \right|_{\xi=\xi_1^*} - \left. \frac{\partial^2 \tau_D(\xi, M)}{\partial \xi_1^2} \right|_{\xi=\xi_1^*} \right] \quad (C.11)$$

e

$$H_{22}^{RM} = \frac{m_D(x_1)}{m_D(\xi_1^*, M)} [\bar{\sigma}_F^{-1} - \sigma_F^{-1}]. \quad (C.12)$$

As expressões (C.11) e (C.12) são as identidades que deverão ser utilizadas na simplificação dos termos integrantes da função peso (7.23).