

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

**BIFURCAÇÃO DE CODIMENSÃO 3 DE CAMPOS DE
VETORES NO PLANO**

Orientador: *Marco Antonio Teixeira* †

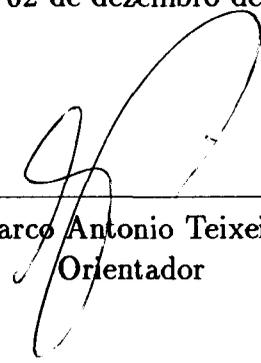
Orientado: *Ronan Antonio dos Reis*

**BIFURCAÇÃO DE CODIMENSÃO 3 DE CAMPOS
DE VETORES NO PLANO**

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Ronan Antonio dos Reis e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 02 de dezembro de 1993

Prof. Dr. _____


Marco Antonio Teixeira
Orientador

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Aos
meus queridos pais:
Jeronimo e Wilsa;
e irmãos:
Roseli
Roselaine
Ruan
Ronaldo
Ramon

Agradecimentos

Ao Professor Dr. Marco Antônio Teixeira pela orientação firme, incentivo e amizade.

Ao meu orientador de Iniciação Científica Professor Dr. Júlio César Canille Martins pelo estímulo, amizade e experiência transmitida.

A minha família pelo carinho, compreensão, dedicação e muito amor recebidos.

Ao CNPq e a FAEP pelo apoio financeiro em meus estudos de Pós-Graduação.

As minhas tias: Luiza, Lola, Nina e Elisa pelo carinho, apoio e ajuda durante o transcorrer de minha vida.

Aos meus parentes pelo apoio e compreensão adquiridos.

A Elisa pelo afeto e companhia.

Aos meus amigos e colegas da Pós-Graduação do IMECC (Campinas-SP), de Icem-SP, Rio Preto-SP, enfim a todos os amigos e colegas pela amizade e companheirismo.

A Lourdes pela paciência que teve em todos os momentos na digitação desse trabalho.

E sobre tudo,

Agradeço a Deus por esse momento da minha vida.

ÍNDICE

Introdução	i
Capítulo 0. Preliminares	1
0.1. Introdução	1
0.2. Definições e Notações	1
0.3. Método das Constantes de Lyapunov	3
0.4. Forma Normal de um Campo Vetorial com dois Autovalores Nulos ...	12
Capítulo 1. Bifurcações de Hopf e Bogdanov Takens	13
1.1. Introdução	13
1.2. Bifurcações de Hopf	13
1.3. O Diagrama de Bifurcação para a Bifurcação tipo Bogdanov-Takens .	19
1.4. Sistema Hamiltoniano Perturbado	23
1.5. A Dinâmica do Campo Hamiltoniano (1.4.3)	24
1.6. Método de Melnikov e Alguns Resultados	31
1.7. Integrais Elípticas	34
Capítulo 2. Aplicação P	39
2.1. Introdução	39
2.2. Uma Equação Diferencial para $P(h)$	39
2.3. Um Estudo da Aplicação P	67
Capítulo 3. Diagramas de Bifurcação	68
3.1. Introdução	68
3.2. A Bifurcação Laço Homoclínico Simétrico de Ordem 2	68
3.3. Diagrama de Bifurcação de (0.4.16) para os casos $\varepsilon_1 > 0$ (resp. $\varepsilon_1 = 0$; $\varepsilon_1 < 0$)	79
3.4. Diagrama de Bifurcação de (0.4.16)	101
Bibliografia	114

Introdução

O objetivo principal deste trabalho é estudar uma família (local) a três parâmetros de campos vetoriais dada por

$$(1) \quad X_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)}(x, y) = (y, \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y + \varepsilon_3 x^2 y + \eta x^3 - x^4 y + y o(|x, y|^5) \quad (\eta^2 = 1)$$

a qual é o desdobramento universal do campo $X_{(0,0,0)}$. Note ainda que (1) é uma família de campos de vetores simétricos, os quais são invariantes sob rotação de π .

Observe que o campo $X_{(0,0,0)}$ apresenta uma singularidade de codimensão 3 na origem, e pretendemos descrevê-la qualitativamente através do conjunto de bifurcação de (1).

Em nosso estudo focalizaremos nossa atenção ao surgimento dos ciclos limites, onde nos restringiremos ao caso $\eta = -1$. O trabalho está ordenado da seguinte maneira:

No capítulo 0, apresentaremos algumas definições e alguns resultados básicos envolvendo o desdobramento universal do campo X_0 , os quais não demonstraremos aqui, e que serão usadas no decorrer da dissertação.

No capítulo 1, faremos um estudo preliminar de bifurcações do tipo Hopf de ordem 1 e 2 que ocorrem para (1). Em seguida, exibiremos o diagrama de bifurcação para (1) com bloco de Jordan de ordem 1 nilpotente, a qual corresponde quando $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ e $\varepsilon_3 \neq 0$. (Singularidade de Bogdanov-Takens na origem) (Ver [J,H]).

Apresentaremos o Método de Melnikov juntamente com alguns resultados envolvendo o surgimento dos ciclos limites para o sistema (1), o qual será estudado através de perturbações de um sistema Hamiltoniano; e logo após, introduziremos as integrais elípticas onde veremos algumas relações existentes entre elas.

No capítulo 2, estudaremos o comportamento de uma aplicação P associada a um sistema Hamiltoniano perturbado. Tal estudo será desenvolvido através de uma conveniente equação diferencial de Riccati para o caso $\varepsilon_1 > 0$, dentro de uma vizinhança de $\varepsilon_1 = 0$.

No capítulo 3, analisaremos: o diagrama de bifurcação tipo duplo laço homoclínico simétrico de ordem 2 numa vizinhança do laço; o diagrama de bifurcação para (1), de cada um dos seguintes casos $\varepsilon_1 > 0$; $\varepsilon_1 = 0$; $\varepsilon_1 < 0$; e finalizando ilustraremos o diagrama de bifurcação para (1).

Capítulo 0

Preliminares

0.1. Introdução

Este capítulo tem por objetivo principal, introduzir a notação que será usada neste trabalho, bem como a apresentação de alguns resultados básicos na teoria.

0.2. Definições e Notações

(0.2.1) Uma *família de campos vetoriais* X_μ sobre \mathbb{R}^n , a k parâmetros, onde $\mu \in \mathbb{R}^k$ denota o parâmetro, é definido por

$$X_\mu = p(m, \mu) \frac{\partial}{\partial x} + q(m, \mu) \frac{\partial}{\partial y} ; \quad m \in \mathbb{R}^n$$

onde as funções coeficientes p e q são C^∞ com respeito a $(m, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$.

(0.2.2) Dentro do conjunto de todos os campos vetoriais sobre \mathbb{R}^n de classe C^r (para algum $1 \leq r < \infty$ fixo), denotado por $\mathcal{X}_r(\mathbb{R}^n)$, consideraremos a *topologia C^s* , ou seja, diremos que dois campos vetoriais X e Y estão próximos se para qualquer conjunto compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$, todas as derivadas até ordem s de X e Y estão uniformemente próximas, ou dito de outra maneira, isto é,

$\forall X \in \mathcal{X}_r(\mathbb{R}^n)$, $\forall K \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $\forall \varepsilon > 0$ definimos

$$U_{K,\varepsilon}^s(X) = \{Y \in \mathcal{X}_r(\mathbb{R}^n) / |\partial^j X(p) - \partial^j Y(p)| < \varepsilon ,$$

$$\forall 0 \leq j = \sum_{i=1}^n j_i \leq s ; 0 \leq j_i \in \mathbb{N} , \forall p \in K\}$$

$$\text{onde} \quad \partial^j X(p) = \frac{\partial^j X(p)}{\partial^{j_1} x_1 \dots \partial^{j_n} x_n} \quad \text{para} \quad j = \sum_{i=1}^n j_i .$$

A coleção de todas $U_{K,\varepsilon}^s(X)$, K compacto e $\varepsilon > 0$, forma uma base para a topologia C^s em $\mathcal{X}_r(\mathbb{R}^n)$.

(0.2.3) No conjunto de todos os campos vetoriais sobre \mathbb{R}^n , introduzimos a noção *equivalência topológica* ou C^0 . Dizemos que dois campos X e Y em $\mathcal{X}_r(\mathbb{R}^n)$ são C^0 equivalente se existe um homeomorfismo h sobre \mathbb{R}^n levando órbitas de X sobre órbitas de Y preservando a orientação.

(0.2.4) De (0.2.3) decorre a definição de campos *estruturalmente estáveis* em $\mathcal{X}_r(\mathbb{R}^n)$.

(0.2.5) Denotemos por Σ_0 o conjunto dos campos estruturalmente estáveis em $\mathcal{X}_r(\mathbb{R}^n)$.

O conjunto de *bifurcação* será dado por $\mathcal{X}_r(\mathbb{R}^n) - \Sigma_0$.

(0.2.6) Consideremos $X : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ campo vetorial de classe C^r ($r \geq 0$). Um *desdobramento* X_ε de classe C^r ($r \geq 0$) de X com $\varepsilon \in \mathbb{R}^k$ tal que $X_\varepsilon|_{\varepsilon=0} = X$, é um *desdobramento universal* de X se e somente se, dado qualquer perturbação Y_μ de classe C^r com $\mu \in \mathbb{R}^m$ tal que $Y_\mu|_{\mu=0} = X$, tem-se:

i) Existem vizinhanças U de O em \mathbb{R}^k , V de O em \mathbb{R}^m , W de O em \mathbb{R}^n ;

ii) Existe uma função $\phi : V \rightarrow U$;

iii) Existe uma aplicação $H : W \times V \rightarrow W$ tal que para μ fixo, $H_\mu = H(-, \mu)$ é um homeomorfismo, e além disso, para cada μ , Y_μ é topologicamente equivalente a $X_{\phi(\mu)}$ através de H_μ .

(0.2.6.1) Obs. No desdobramento universal o número k é unicamente definido.

(0.2.7) A constante k é a *codimensão* (ou *ordem*) de uma singularidade.

(0.2.8) Seja $\varphi : U \rightarrow U$ difeomorfismo definido em U aberto de \mathbb{R}^n , e $v : U \rightarrow U$ campo vetorial. Dizemos que φ é uma *simetria* de v se $d\varphi_x v(x) = v\varphi(x) \quad \forall x \in U$.

(0.2.8.1) Obs. É imediato da definição que se $x(t)$ é uma solução da equação $\dot{x} = v(x)$ e φ é uma simetria, então $\varphi(x(t))$ também é uma solução.

(0.2.9) Por uma *forma normal* de um campo vetorial X, C^∞ , local em $0 \in \mathbb{R}^n$ dizemos ser alguma forma mais simplificada do campo vetorial X , a qual será obtida por apropriada

mudança de coordenadas C^∞ . Mais informações podem ser encontradas em [G, H]; [Re2]; [Ta1].

Alguns Resultados

0.3. Método das Constantes de Lyapunov

(0.3.0) Consideremos uma família genérica a k -parâmetros de campos de vetores ($k \geq 1$). Uma *bifurcação de Hopf de ordem k* é um desdobramento de uma singularidade cuja parte linear tem um par de autovalores imaginários, e cuja componente radial da forma normal em coordenadas polares começa com termos de ordem $2k + 1$.

Considere o sistema:

$$(0.3.1) \quad \begin{cases} \dot{x} = \lambda x - y + P(x, y) \\ \dot{y} = x + \lambda y + Q(x, y) \end{cases} \quad \left(\cdot = \frac{d}{dt} \right)$$

onde

$$P(x, y) = \sum_{k=2}^n X_k(x, y) \quad ; \quad X_k(x, y) = \sum_{i=0}^k a_{ki} x^{k-i} y^i$$

$$Q(x, y) = \sum_{k=2}^n Y_k(x, y) \quad ; \quad Y_k(x, y) = \sum_{i=0}^k b_{ki} x^{k-i} y^i$$

Assim sendo, o *Método das constantes de Lyapunov* diz o seguinte:

(0.3.2) (Lema de Lyapunov). Se $\lambda = 0$ então existe uma série de potências

$$F(x, y) = \sum_{p=2}^{\infty} F_p \quad \text{onde} \quad F_2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2);$$

$$F_p = \sum_{i=0}^p f_{pi} x^{p-i} y^i \quad (p > 2)$$

$$\text{tal que} \quad \dot{F} = \sum_{i=0}^{\infty} -V_i (x^2 + y^2)^{i+1} \quad (p > 2)$$

(0.3.2.1) **Obs.** Os coeficientes V_i são chamados de *coeficientes de Lyapunov* do sistema (0.3.1).

Para maiores detalhes o leitor poderá consultar [S].

A seguir daremos uma relação entre os coeficientes de Lyapunov e as bifurcações de Hopf que ocorrem no sistema (0.3.1).

Consideremos o sistema (0.3.1). Assim, temos o resultado:

(0.3.3) **Proposição.** i) O sistema (0.3.1) tem uma bifurcação de Hopf de ordem $k \Leftrightarrow \lambda = V_1 = \dots = V_{k-1} = 0$ e $V_k \neq 0$.

ii) Além disso, podemos escolher perturbações arbitrariamente pequenas do sistema (0.3.1) com k ciclos limites, quando produzimos V_1, \dots, V_k com sinais alternados e de modo que $|V_1| \ll |V_2| \ll \dots \ll |V_k|$. (Consultar [B,L]).

0.4. Forma Normal de um campo vetorial com dois autovalores nulos.

Alguns exemplos

1) De início, em se estudando a dinâmica linear do sistema

$$(0.4.1) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

é fácil verificar que o seu retrato de fase é dado pela Figura 0.4.1. Podemos observar ainda que o sistema (0.4.1) apresenta infinitas singularidades.

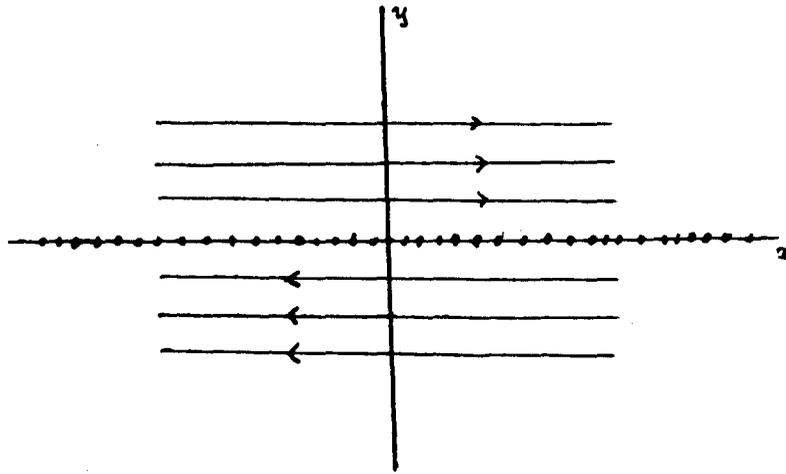


Figura 0.4.1: Retrato de fase do sistema (0.4.1)

2) Consideremos agora o campo

$$(0.4.2) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2 \end{cases} .$$

Observemos que a única singularidade de (0.4.2) é a origem, a qual pode-se verificar ser uma cúspide.

Neste exemplo, o campo dado em (0.4.2) é Hamiltoniano, cuja integral primeira é dada por $H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^3}{3}$.

O retrato de fase de (0.4.2) é dada pela Figura 0.4.2, o qual vemos apresentar uma cúspide na origem

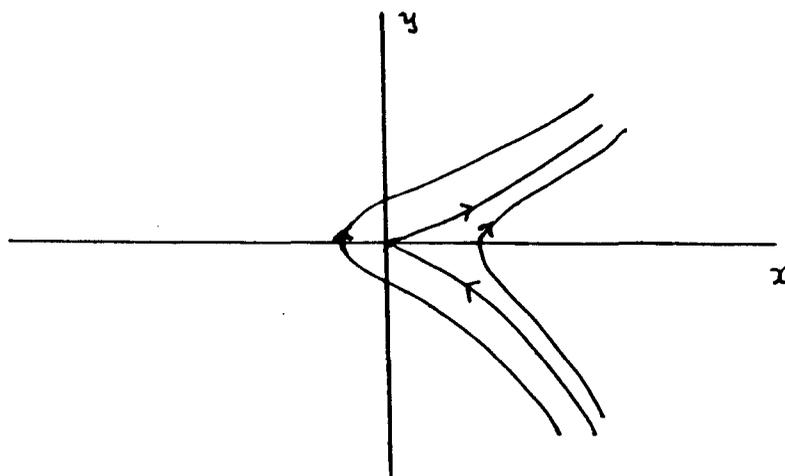


Figura 0.4.2: Retrato de fase do sistema (0.4.2)

3) Considerando o campo

$$(0.4.3) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^3 \end{cases}.$$

podemos observar ser um campo Hamiltoniano, cuja função de Hamilton H é dada por $H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^4}{4}$. Temos ainda que a origem é uma dupla cúspide do sistema (0.4.3). (Ver Figura 0.4.3).

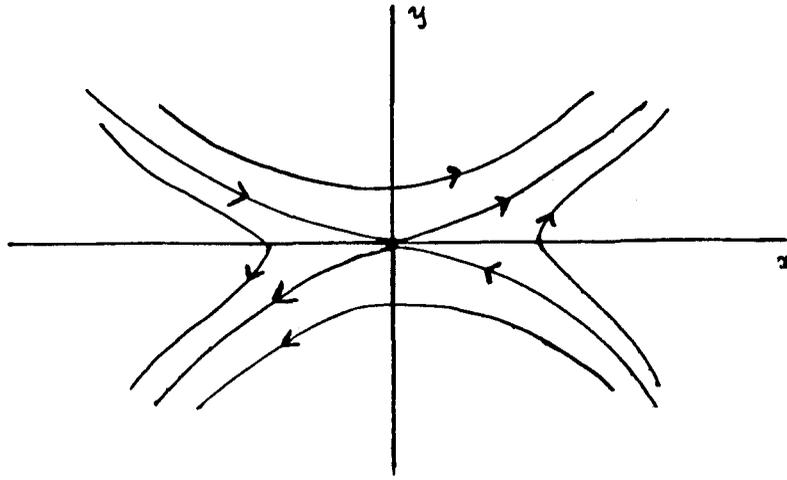


Figura 0.4.3: Retrato de fase do sistema (0.4.3)

4) Em se finalizando o quadro de nossos exemplos, temos um campo Hamiltoniano dado por

$$(0.4.4) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x^3, \end{cases}$$

cuja função de Hamilton é dada por $H(x, y) = \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2}$. A origem é uma singularidade do tipo centro para (0.4.4). (Ver Figura 0.4.4).

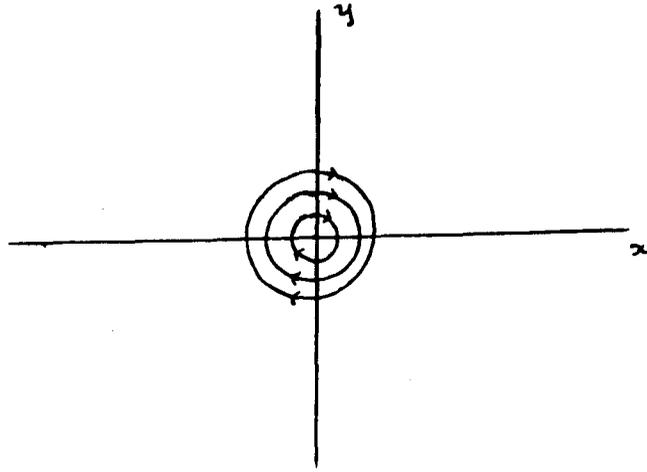


Figura 0.4.4. O conjunto das órbitas para o sistema (0.4.4).

(0.4.4.1) **Obs.** Vimos anteriormente exemplos de quatro campos que apresentam singularidades não *hiperbólicas* (isto é, a matriz da derivada dos respectivos campos apresenta autovalores sobre o eixo imaginário), os quais podem ser interpretados como uma perturbação do sistema (0.4.1) em torno da origem.

(0.4.4.2) **Obs.** Pretendemos estudar a dinâmica em torno da origem de um campo X tal que sua parte linear seja nilpotente, isto é, seja dada por $DX_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

A motivação em se estudar a dinâmica de um tal campo nasceu em se querer estudar a dinâmica de uma família local de difeomorfismos f_μ em \mathbb{R}^2 cuja parte linear seja dada por $Df_0(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Neste caso, tomando f_μ^2 vemos que sua parte linear é dada por $Df_0^2(0) \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id + N$ onde

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{matriz nilpotente})$$

Em [Ta1], Takens provou que a aplicação f_μ^2 pode ser mergulhado em fluxo no tempo 1 de um campo simétrico (com uma simetria de π) cuja parte linear é dada por N .

Consideremos assim todas as perturbações invariantes por uma simetria de π do campo $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$, ou seja, consideremos o campo vetorial escrito por

$$(0.4.5) \quad \begin{cases} \dot{x} = y + o(|x, y|) \\ \dot{y} = 0 + o(|x, y|) \end{cases}.$$

Apresentamos a seguir uma forma mais simples para (0.4.5), da qual considerando o seu desdobramento universal, e mediante uso de idéias e técnicas contidas em [R,L] foi desenvolvido o nosso trabalho.

Forma normal do sistema simétrico (0.4.5)

Estamos considerando que o sistema (0.4.5) seja invariante por

$$R_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(0.4.5.1) **Obs.** Notemos agora que a simetria por π a qual temos para (0.4.5) nos diz que somente os monômios de grau ímpar $x^{2k+1}y$ contribuem para o estudo da sua dinâmica.

Para isso, consideremos a equação

$$\dot{p} = f_\varepsilon(p) \quad ; \quad p = (x, y) \quad ; \quad \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$$

tal que o campo f tem a simetria dada por $R_\pi(x, y) = (-x, -y)$.

Escrevendo $f_\varepsilon(p) = a_\varepsilon(p) \frac{\partial}{\partial x} + b_\varepsilon(p) \frac{\partial}{\partial y}$ segue do uso da simetria de f que

$$(*) \quad \begin{cases} a_\varepsilon(p) = -a_\varepsilon(-p) \\ b_\varepsilon(p) = -b_\varepsilon(-p) \end{cases}$$

Através da expansão de uma série de potências das funções $a_\varepsilon, b_\varepsilon$ em torno da origem, ou seja, escrevendo

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(x, y) &= a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots \\ b_\varepsilon(x, y) &= b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + \dots \end{aligned}$$

segue de (*) que

$$\begin{cases} a_{20} = a_{11} = a_{02} = \dots = a_{2k0} = \dots = a_{02k} = 0 = \dots \\ b_{20} = b_{11} = b_{02} = \dots = b_{2k0} = \dots = b_{02k} = 0 = \dots \end{cases}$$

o que conclui nossa observação.

Agora, usando a forma normal dada por Takens a um campo cuja parte linear é dada por $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (Ver [Ta1]), juntamente com a Obs. (0.4.5.1) segue que forma normal para (0.4.5) é dada por

$$(0.4.6) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = a_1x^3 + a_2x^5 + \dots + b_1x^2y + b_2x^4y + o(|x, y|^6) \end{cases} \quad \text{com } a_1 \neq 0.$$

(0.4.7) **Obs.** Sem perda de generalidade consideraremos $a_1 > 0$.

Com o objetivo de colocar (0.4.6) numa forma ainda mais simples, façamos a seguinte mudança de coordenadas (0.4.8), a qual foi inspirada em [Ra1].

$$(0.4.8) \quad a_1 \frac{X^4}{4} = a_1 \frac{x^4}{4} + a_2 \frac{x^6}{6} + a_3 \frac{x^8}{8} + \dots$$

Agora derivando (0.4.9) ambos os lados ao longo das órbitas de (0.4.6) com respeito ao tempo seguirá

$$(0.4.9) \quad a_1 X^3 \cdot \dot{X} = (a_1 x^3 + a_2 x^5 + a_3 x^7 + \dots) \dot{x}.$$

Usando que $\dot{x} = y$ em (0.4.9) teremos que

$$(0.4.10) \quad a_1 X^3 \cdot \dot{X} = x^3 \varphi(x) y$$

onde $\varphi(x) = a_1 + a_2 x^2 + a_3 x^4 + \dots$ é uma função positiva e simétrica ($\varphi(x) = \varphi(-x)$).

Logo por continuidade de φ , existe uma vizinhança V da origem tal que $\varphi(x) \neq 0 \quad \forall x \in V$.

Dividindo ambos os lados de (0.4.10) pela função φ , ficaremos com

$$(0.4.11) \quad \left(\frac{a_1 X^3}{\varphi(x)} \right) \cdot \dot{X} = x^3 \cdot y \quad \forall x \in V.$$

É de fácil verificação que $\frac{a_1 X^3}{\varphi(x)}$ e x^3 tem a mesma ordem na vizinhança V da

origem, isto é, $\frac{\left(\frac{a_1 X^3}{\varphi(x)} \right)}{x^3} \rightarrow 1$ quando $x \rightarrow 0$.

Portanto $\dot{X} = y$.

Agora de (0.4.8) segue que as funções X e x tem a mesma ordem numa vizinhança de 0.

Assim sendo, voltando a segunda equação de (0.4.6) obtemos

$$(0.4.12) \quad \dot{y} = a_1 X^3 + c_1 X^2 y + c_2 X^4 y + y o(|X, y|^5)$$

Logo, vemos que em torno da origem o sistema (0.4.6) é topologicamente equivalente ao sistema

$$(0.4.13) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = a_1 X^3 + c_1 X^2 y + c_2 X^4 y + y o(|X, y|^5) \end{cases}$$

Agora observemos que o conjunto

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix}; \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ y^5 \end{pmatrix} \right\}$$

é uma base para o espaço de vetores em \mathbb{R}^2 que são invariantes por R_π , e cujas funções coordenadas são polinômios homogêneos de grau ≤ 5 . Denotemos tal espaço por S_2^5 .

Daí, em se considerando

$$\begin{aligned} N &\subset S_2^5 \quad \text{onde} \\ N &= \{X \in S_2^5 / DX_{(0)} \text{ é nilpotente}\} \end{aligned}$$

pode-se verificar através de (0.4.13) que a singularidade na origem tem codimensão $2 = \text{cod } N$ (resp. codimensão $3 = \text{cod } N$) se $c_1 \neq 0$ (resp. $c_1 = 0; c_2 \neq 0$).

Sob novo reescalonamento, no caso $c_1 = 0, \eta^2 = 1$ obtemos para $c_2 = -1; X = x$ o seguinte sistema:

$$(0.4.14) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \eta x^3 - x^4 y + y o(|X, y|^5) \end{cases}, \quad \eta^2 = 1,$$

cujo desdobramento universal é dado por

$$(0.4.15) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y + \varepsilon_3 x^2 y + \eta x^3 - x^4 y + y o(|x, y|^5) \end{cases} \text{ com } \eta^2 = 1. \quad \blacksquare$$

Seja $X_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)} = (y, \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y + \varepsilon_3 x^2 y + \eta x^3 - x^4 y + y o(|x, y|^5))$.

(0.4.15.1) **Obs.** Notemos que iremos estudar uma família de campos de vetores os quais são invariantes sob a rotação dada por R_π , ou seja, estudaremos a família X_ε com $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ a qual tem uma simetria dada pelo difeomorfismo

$$R_\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \rightarrow (-x, -y) .$$

Como já dissemos inicialmente, só nos interessará o caso $\eta = -1$. O caso $\eta = 1$ é mais simples, e as idéias usadas para este são as mesmas usadas por [D, R, S].

Capítulo 1

Bifurcações de Hopf e Bogdanov-Takens

1.1. Introdução

Neste capítulo, faremos um estudo preliminar das bifurcações do tipo Hopf de ordem 1 e 2 que ocorrem nos pontos críticos do sistema (0.4.16). Em seguida, exibiremos o diagrama de bifurcação para a bifurcação Bogdanov-Takens, ou seja, para quando temos $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0; \varepsilon_3 \neq 0$.

Por meio de uma mudança de escala estudaremos o sistema (0.4.16) através das perturbações de um sistema Hamiltoniano.

Apresentaremos o Método de Melnikov juntamente com alguns resultados, e logo após introduziremos as integrais elípticas, onde veremos algumas relações existentes entre elas.

1.2. Bifurcação de Hopf

Notemos que as singularidades associadas ao campo (0.4.16) são dadas por:

$$\begin{cases} y = 0 \\ \varepsilon_1 x - x^3 = 0 \end{cases}, \quad \text{ou seja, são dadas por:}$$

a) $(0, 0); (\pm\sqrt{\varepsilon_1}, 0)$ no caso $\varepsilon_1 > 0$.
b) $(0, 0)$ no caso $\varepsilon_1 \leq 0$.

Façamos inicialmente uma análise da natureza das singularidades do campo (0.4.16):

Pode-se verificar que

$$DX_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)}(x, y) = \begin{bmatrix} & 0 & & 1 \\ \varepsilon_1 + 2\varepsilon_3 xy - 3x^2 - 4x^3 y + y o(|x, y|^4) & & \varepsilon_2 + \varepsilon_3 x^2 - x^4 + o(|x, y|^5) & \end{bmatrix}$$

(1.2.1)

Primeiramente, estudaremos a natureza do ponto $(0, 0)$.

Assim sendo, de (1.2.1) segue que

$$(1.2.2) \quad A = DX_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)}(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

Agora, a equação dos autovalores de A é dada por

$$\lambda^2 - \varepsilon_2\lambda - \varepsilon_1 = 0$$

donde segue que $\lambda = \frac{\varepsilon_2 \pm \sqrt{\varepsilon_2^2 + 4\varepsilon_1}}{2}$

Assim, podemos ver que:

1) No caso $\varepsilon_1 > 0$, a origem é uma sela, uma vez que o produto dos autovalores é negativo.

2) Para $\varepsilon_1 < 0$ a origem será um nó ou um foco, uma vez que o produto dos autovalores será positivo; sendo que a sua natureza (poço ou fonte) dependerá somente do sinal do $\text{tr } A$.

Desta forma, note que por (1.2.2) segue que $\text{tr } A = \varepsilon_2$; logo a origem será estável se $\varepsilon_2 < 0$ e será instável se $\varepsilon_2 > 0$.

Quando $\text{tr } A = 0$ faremos um estudo dado posteriormente em (1.2.6.a).

Passemos a estudar agora os pontos $(\pm\sqrt{\varepsilon_1}, 0)$ quanto à sua natureza (quando $\varepsilon_1 > 0$).

Por (1.2.1) segue que

$$(1.2.3) \quad B = DX_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)}(\pm\sqrt{\varepsilon_1}, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon_2 & \varepsilon_2 + \varepsilon_3\varepsilon_1 - \varepsilon_1^2 + o(\varepsilon_1^2) \end{bmatrix}$$

Assim sendo, obtemos os autovalores de B a partir da equação

$$\alpha^2 - \text{tr } B\alpha + \det B = 0.$$

Logo, pode-se verificar que:

1) o ponto $(\pm\sqrt{\varepsilon_1}, 0)$ será um nó ou foco uma vez que o produto dos dois autovalores de B será positivo, os quais serão poço ou fonte dependendo do sinal do $\text{tr } B$ (> 0 ou < 0).

Assim, note que de (1.2.3) segue que

$$\text{tr } B = \varepsilon_2 + \varepsilon_3\varepsilon_1 - \varepsilon_1^2 + o(\varepsilon_1^2).$$

Portanto, os pontos $(\pm\sqrt{\varepsilon_1}, 0)$ serão instáveis caso $\text{tr } B > 0$; e serão estáveis caso $\text{tr } B < 0$.

Agora, quando $\text{tr } B = 0$, posteriormente o estudaremos em (1.2.6.b).

(1.2.4) **Obs.** Assim concluímos que teremos:

a) três singularidades do campo (0.4.16) sendo que a origem é uma sela e as outras duas, ou seja, $(\pm\sqrt{\varepsilon_1}, 0)$, serão nós ou focos (quando $\varepsilon_1 > 0$).

b) uma única singularidade (a origem) quando $\varepsilon_1 \leq 0$, a qual será um nó ou um foco.

(1.2.5) **Obs.** Notemos por (1.2.4) que ao passarmos da região $\varepsilon_1 > 0$ para a região $\varepsilon_1 < 0$, ocorre uma colisão das três singularidades em uma única (a origem) no plano $\varepsilon_1 = 0$ (*Bifurcação* do tipo *Pitchfork* (*P*)).

Para a bifurcação tipo (*P*) consultar [H, G].

Localização da Bifurcação de Hopf de Ordem 1 e 2 para o Sistema (0.4.16)

(1.2.6) Temos que ocorre uma bifurcação de Hopf:

a) na origem do tipo:

i) (*H*) quando $\varepsilon_2 = 0; \varepsilon_1 < 0; \varepsilon_3 \neq 0$;

ii) (*H*₂) quando $\varepsilon_2 = 0; \varepsilon_1 < 0; \varepsilon_3 = 0$;

b) nos pontos $(\pm\sqrt{\varepsilon_1}, 0)$ do tipo:

i) (*H*) quando $(\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_1^2 + o(\varepsilon_1^2)) = 0; \varepsilon_1 > 0; \varepsilon_3 \neq 0$;

ii) (*H*₂) quando $(\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_1^2 + o(\varepsilon_1^2)) = 0; \varepsilon_1 > 0; \varepsilon_3 = 0$.

Prova de (1.2.6.a.i).

Note que para $\varepsilon_2 = 0$; $\varepsilon_3 \neq 0$, o sistema (0.4.16) tornar-se-á

$$(1.2.7) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \varepsilon_1 x + \varepsilon_3 x^2 y - x^3 - x^4 y + y o(|x, y|^5) \end{cases}$$

Podemos considerar o sistema truncado

$$(1.2.8) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \varepsilon_1 x + \varepsilon_3 x^2 y - x^3 - x^4 y, \end{cases}$$

uma vez que

$$\frac{o(|x, y|^5)}{|(x, y)|} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad |(x, y)| \rightarrow 0.$$

Agora, usando o Método das Constantes de Lyapunov dado em (0.3) pode-se verificar que o primeiro coeficiente de Lyapunov V_1 é dado por

$$V_1 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{3 - 2\varepsilon_1 + 3\varepsilon_1^2}.$$

$$\text{Note que } 3 - 2\varepsilon_1 + 3\varepsilon_1^2 = \left(\sqrt{3}\varepsilon_1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \right)^2 + \frac{5}{3} > 0.$$

Assim sendo, se $\varepsilon_3 \neq 0; \varepsilon_1 < 0 \Rightarrow V_1 \neq 0$ donde por (0.3.3) segue o que queríamos. ■

Prova de (1.2.6.a.ii).

Agora, novamente usando o Método das constantes de Lyapunov ao sistema que resulta de (0.4.16) quando fazemos $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0; \varepsilon_1 < 0$, obteremos que

$$V_1 = 0; \quad V_2 = \frac{-\varepsilon_1}{3\varepsilon_1^2 - 28\varepsilon_1 + 5}.$$

Note que $3\varepsilon_1^2 - 28\varepsilon_1 + 5 > 0$ se $\varepsilon_1 < 0$.

Logo se $\varepsilon_1 < 0; \varepsilon_2 = 0 = \varepsilon_3 \Rightarrow V_2 \neq 0$, donde por (0.3.3) resulta o que queríamos. ■

Prova de (1.2.6.b.i).

Linearizando o campo (0.4.16) em $(-\sqrt{\varepsilon_1}, 0)$, e em seguida fazendo a seguinte mudança de coordenadas $X = x + \sqrt{\varepsilon_1}$ veremos que o mesmo tornar-se-á em:

$$(1.2.9) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \varepsilon_1(X - \sqrt{\varepsilon_1}) + \varepsilon_2 y + \varepsilon_3(X - \sqrt{\varepsilon_1})^2 y - (X - \sqrt{\varepsilon_1})^3 + \\ -(X - \sqrt{\varepsilon_1})^4 y + y o(|X, y|^5). \end{cases}$$

Assim, por alguns cálculos efetuados em (1.2.9), teremos o seguinte sistema:

$$(1.2.10) \quad \begin{cases} \dot{X} = y \\ \dot{y} = -2\varepsilon_1 X + (\varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 - \varepsilon_1^2 + o(\varepsilon_1^2))y + \\ + (-2\varepsilon_3 \sqrt{\varepsilon_1} + 4\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_1})Xy + 3\sqrt{\varepsilon_1}X^2 + (\varepsilon_3 - 6\varepsilon_1)X^2y + \\ -X^3 - X^4y + 4\sqrt{\varepsilon_1}X^3y + y o(|X, y|^5) . \end{cases}$$

(1.2.11) **Obs.** Para o estudo do campo (0.4.16) em torno dos pontos $(\sqrt{\varepsilon_1}, 0); (-\sqrt{\varepsilon_1}, 0)$ são análogos.

Agora, com a finalidade de aplicar o Método das constantes de Lyapunov dada em (0.3), façamos $y = -\sqrt{2\varepsilon_1}Y$, e daí, após alguns cálculos veremos que (1.2.10) tornar-se-á no sistema:

$$(1.2.12) \quad \begin{cases} \dot{X} = -\sqrt{\varepsilon_1}Y \\ \dot{Y} = \sqrt{2\varepsilon_1}X + (\text{tr } B)Y + (-2\varepsilon_3 \sqrt{\varepsilon_1} + 4\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_1})XY - \frac{3\sqrt{2}}{2}X^2 + \\ (\varepsilon_3 - 6\varepsilon_1)X^2Y + \frac{X^3}{\sqrt{2\varepsilon_1}} - X^4Y + 4\sqrt{\varepsilon_1}X^3Y + Y o(|X, Y|^5) , \end{cases}$$

onde

$$\text{tr } B = (\varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 - \varepsilon_1^2 + o(\varepsilon_1^2)) .$$

Logo, o sistema (0.4.16) é topologicamente equivalente ao sistema (1.2.12).

Agora, fazendo $\text{tr } B = 0; \varepsilon_1 > 0; \varepsilon_3 \neq 0$ em (1.2.12) obteremos o sistema:

$$(1.2.13) \quad \begin{cases} \dot{X} = -\sqrt{2\varepsilon_1}Y \\ \dot{Y} = \sqrt{2\varepsilon_1}X + (\text{tr } B \cdot Y + (-2\varepsilon_3 \sqrt{\varepsilon_1} + 4\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_1})XY - \frac{3\sqrt{2}}{2}X^2 + \\ + (\varepsilon_3 - 6\varepsilon_1)X^2Y + \frac{X^3}{\sqrt{2\varepsilon_1}} - X^4Y + 4\sqrt{\varepsilon_1}X^3Y + Y o(|X, Y|^5) , \end{cases}$$

onde

$$\text{tr } B = (\varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 - \varepsilon_1^2 + o(\varepsilon_1^2))$$

Logo, o sistema (0.4.16) é topologicamente equivalente ao sistema (1.2.13).
Agora, fazendo $\text{tr } B = 0$; $\varepsilon_1 > 0$; $\varepsilon_3 \neq 0$ em (1.2.13) obteremos o sistema:

$$(1.2.14) \quad \begin{cases} \dot{X} = -\sqrt{2\varepsilon_1}Y \\ \dot{Y} = \sqrt{2\varepsilon_1}X + (-2\varepsilon_3\sqrt{\varepsilon_1} + 4\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_1})XY - \frac{3\sqrt{2}}{2}X^2 + \\ + (\varepsilon_3 - 6\varepsilon_1)X^2Y + \frac{X^3}{\sqrt{2\varepsilon_1}} - X^4Y + 4\sqrt{\varepsilon_1}X^3Y + Y \ o(|X, Y|^5) , \end{cases}$$

onde

$$\text{tr } B = (\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_1^2 + o(\varepsilon_1^2))$$

donde segue por (0.3.1) que o primeiro coeficiente de Lyapunov será dado por

$$V_1 = \frac{2\varepsilon_1}{5 + 3\sqrt{2\varepsilon_1}} .$$

Como $\varepsilon_1 > 0 \Rightarrow V_1 \neq 0$ donde por (0.3.3) resulta o que queríamos. ■

Prova de (1.2.6.b.ii).

Agora, novamente usando o Método das Constantes de Lyapunov ao sistema que resulta de (0.4.16) quando fazemos $\text{tr } B = 0$; $\varepsilon_3 = 0$; $\varepsilon_1 > 0$, obteremos

$$V_1 = 0 \quad ; \quad V_2 = \frac{\sqrt{2} - \frac{5}{4} - H(\varepsilon_1)}{16}$$

onde $H(\varepsilon_1)$ é uma função contínua em ε_1 tal que $H(\varepsilon_1) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon_1 \rightarrow 0$.

Assim notemos que $V_2 \rightarrow \sqrt{2} - \frac{5}{4} > 0$ quando $\varepsilon_1 > 0$ donde segue por continuidade de V_2 que $V_2(\varepsilon_1) = \sqrt{2} - \frac{5}{4} + o(\varepsilon_1) > 0 \ \forall \varepsilon_1 > 0$, com ε_1 próximo de zero.

Logo por (0.3.3) segue o que queríamos. ■

(1.2.15) **Obs. a)** Pode-se verificar que na região $\varepsilon_2 > 0$ surgirá um ciclo limite atrator e que na região $\varepsilon_2 < 0$; $\varepsilon_3 > 0$ surgirá dois ciclos limites, sendo o mais interno atrator e o outro repulsor.

b) Ainda pode-se verificar que na região $\text{tr } B < 0$; (resp. $\text{tr } B > 0$; $\varepsilon_3 > 0$) surge um ciclo limite (resp. 2 ciclos limites).

A seguir exibiremos a diagrama de bifurcação para (0.4.16) quando $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0; \varepsilon_3 \neq 0$.

1.3. O diagrama de bifurcação para a bifurcação tipo Bogdanov-Takens

Consideremos (0.4.16) com parte linear dada por $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$, além disso $\varepsilon_3 \neq 0$.

Como já observamos na Introdução, a bifurcação Bogdanov-Takens (B.T.) encontra (1) quando temos os valores parâmetros $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0; \varepsilon_3 \neq 0$. O seu estudo é feito por meio de perturbações de um sistema Hamiltoniano, o qual é obtido quando introduzimos em (1) os parâmetros $\bar{\mu}_0, \bar{\mu}_1$, as variáveis de escala \bar{u}, \bar{v} e um novo tempo \bar{t} , ou seja, quando introduzimos a seguinte relação:

$$(1.3.a) \quad \bar{\mu}_1 = |\varepsilon_1 \alpha^{-1}|^{1/2}; \quad \varepsilon_2 = |\alpha|^{1/2} \bar{\mu}_0 \bar{\mu}_1; \quad x = \bar{\mu}_1 \bar{u}$$

$$y = \bar{\mu}_1^2 |\alpha|^{1/2} \bar{v}; \quad t = |\alpha|^{-1/2} \bar{\mu}_1^{-1} \bar{t}$$

$$\text{onde } \alpha = \frac{\partial^3}{\partial x^3} f_2(0,0), \quad (f_2 \text{ segunda componente do campo (0.4.16)}).$$

Obtemos o sistema

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}}{d\bar{t}} = \bar{v} \\ \frac{d\bar{v}}{d\bar{t}} = \text{sign}(\varepsilon_1) \bar{u} + \bar{\mu}_0 \bar{v} - \bar{u}^3 + \bar{\mu}_1 \gamma \bar{u}^2 \bar{v} + \bar{\mu}_0^2 g(\bar{\mu}_0, \bar{\mu}_1, \bar{v}), \end{cases}$$

onde $\gamma = \beta |\alpha|^{-1/2}$ com $\beta = \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} f_2(0,0)$; e $g(\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \bar{v}) = -\bar{\mu}_1 \alpha^{-1} \bar{u}^4 \bar{v} + \alpha^{-1} \bar{\mu}_1^4 \bar{v}$, o qual estudamos como uma perturbação do sistema Hamiltoniano

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}}{d\bar{t}} = \bar{v} \\ \frac{d\bar{v}}{d\bar{t}} = \text{sign}(\varepsilon_1) \bar{u} + \bar{\mu}_0 \bar{v} - \bar{u}^3, \end{cases}$$

com função de Hamilton dada por

$$H(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{\mu}_0 \frac{\bar{v}^2}{2} - \text{sinal}(\varepsilon_1) \frac{\bar{u}^2}{2} + \frac{\bar{u}^4}{4} .$$

O estudo da bifurcação (B.T.) consiste do uso sistemático de mudança de escalas e do teorema da função implícita. Um detalhado estudo dessa bifurcação pode ser encontrado em [Ta2]; [C].

No que segue daremos as ilustrações do diagrama de bifurcação para a bifurcação tipo (B. T.).

(1.3.1) Temos dois casos a considerar:

- i) $\varepsilon_3 < 0$ (ver Figura 1.3.1)
- ii) $\varepsilon_3 > 0$ (ver Figura 1.3.2).

Caso 1.3.1 i:) Quando $\varepsilon_3 < 0$:

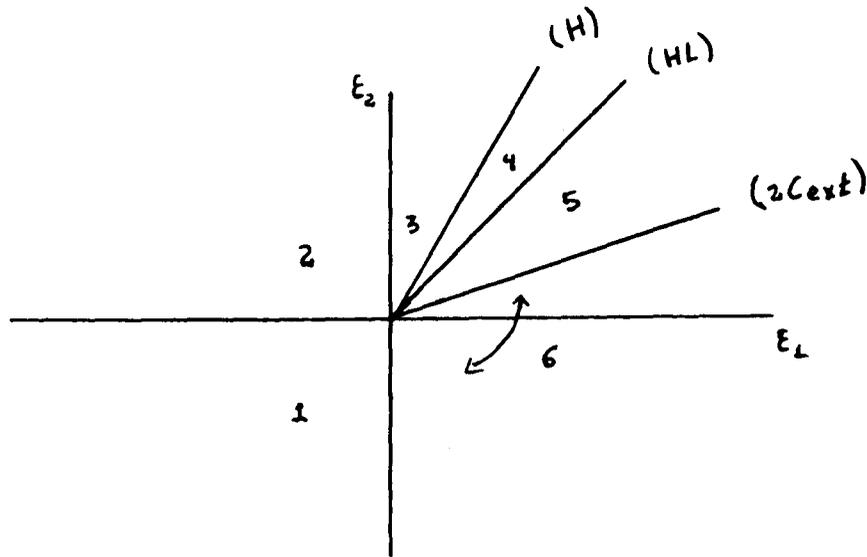


Figura 1.3.1. Diagrama de bifurcação quando $\varepsilon_3 < 0$ e $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ próximos numa pequena vizinhança de origem.

Caso 1.3.1 ii:) Quando $\varepsilon_3 > 0$:

É de fácil verificação que o conjunto de bifurcação para o caso $\varepsilon_3 > 0$ é obtido através do uso da mudança de variáveis

$$y \rightarrow -y, \quad \varepsilon_2 \rightarrow -\varepsilon_2 \quad \text{e} \quad t \rightarrow -t,$$

donde poder-se-á concluir a Figura 1.3.2.

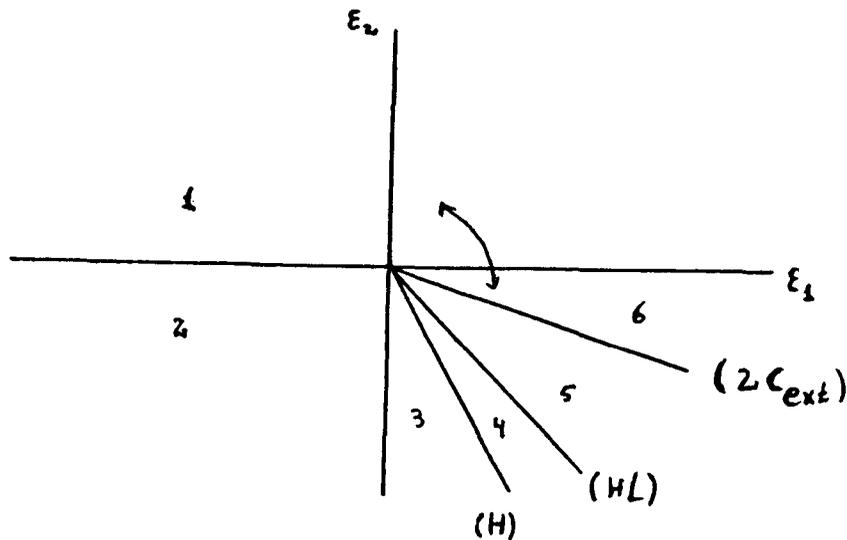


Figura 1.3.2. Diagrama de bifurcação para o sistema (0.4.16), quando $\varepsilon_3 > 0$ e $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ próximos da origem.

(1.3.1.1) Obs. O diagrama de bifurcação para o caso $\varepsilon_3 > 0$ apresenta as mesmas características quanto ao diagrama de bifurcação para o caso $\varepsilon_3 < 0$, exceto o sentido movimento das órbitas.

(1.3.1.2) Obs. Se $\gamma(t)$ é a curva solução de um campo $F \Rightarrow \gamma(-t)$ é curva solução do campo $-F$.

No que segue ilustraremos as respectivas linhas e regiões citadas em 1.3.1. Observemos que para o caso $\varepsilon_3 > 0$ tem-se a mesma estrutura quanto ao caso $\varepsilon_3 < 0$, o que muda é apenas o sentido de movimentação das órbitas.

Consideremos as Figuras associadas a (1.3.1).

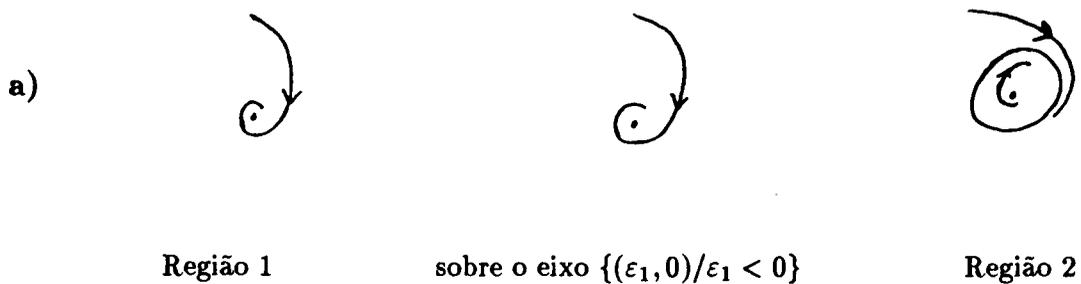


Figura 1.3.3. Bifurcação do tipo Hopf de ordem 1

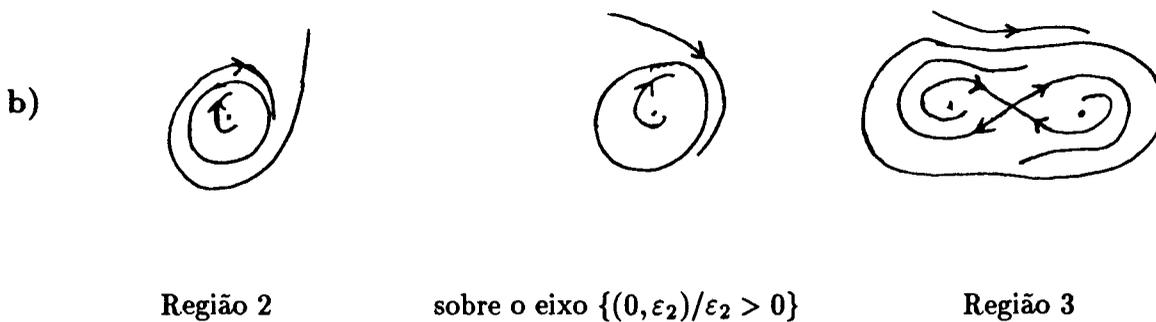


Figura 1.3.4. Bifurcação do tipo Pitchfork

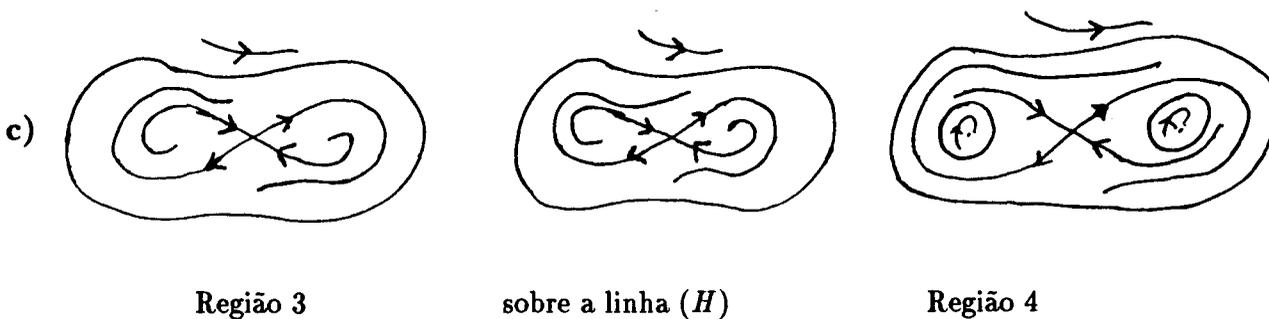


Figura 1.3.5. Bifurcação do tipo Hopf de ordem 1

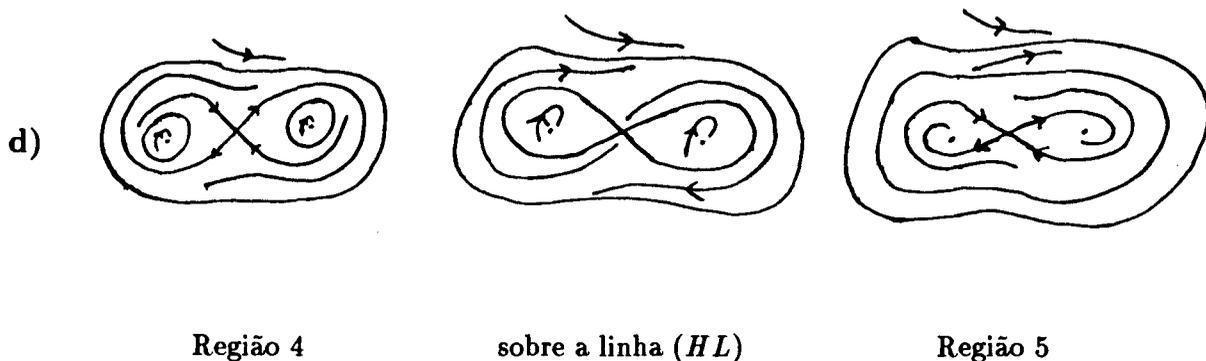


Figura 1.3.6. Bifurcação do tipo duplo laço homoclínica simétrica

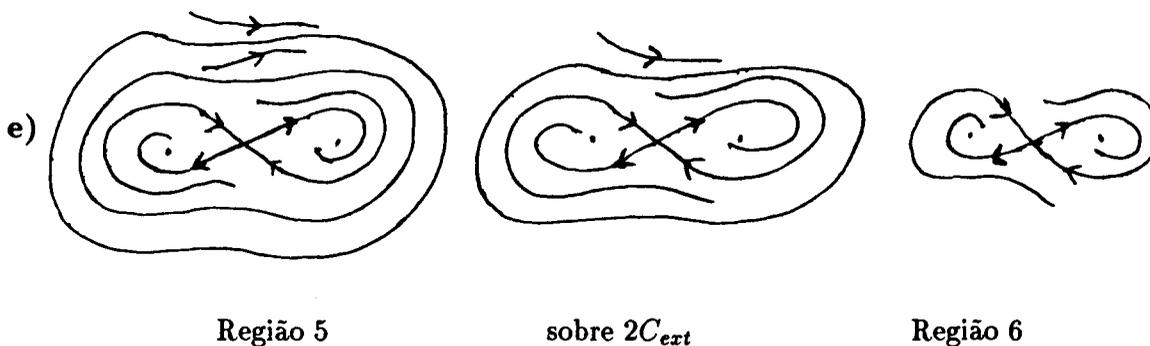


Figura 1.3.7. Bifurcação do tipo duplo ciclo limite externo

1.4. Sistema Hamiltoniano Perturbado

Considere a mudança de coordenadas, de parâmetros e do tempo em (0.4.16)

$$(1.4.1) \quad \begin{cases} x = \delta u & \varepsilon_1 = \delta^2 \mu_0 \\ y = \delta v & \varepsilon_2 = \delta^4 \mu_1 \\ \tau = \delta t & \varepsilon_3 = \delta^2 \mu_2 . \end{cases}$$

Agora, usando (1.4.1) e o sistema (0.4.16) obtemos que:

$$\frac{du}{dt} = \delta v \quad \text{e} \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\delta} ,$$

donde segue que

$$\frac{du}{d\tau} = v \quad \text{uma vez} \quad \frac{du}{d\tau} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau}.$$

Novamente, usando (1.4.1) e o sistema (0.4.16) resulta que

$$\frac{dv}{dt} = u_0 \delta u - \delta u^3 + \delta^4 (\mu_1 v + \mu_2 u^2 v - u^4 v) + o(\delta^5)$$

$$\text{e } \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\delta} \quad \text{donde segue que}$$

$$\frac{dv}{d\tau} = \mu_0 u - u^3 + \delta^3 (\mu_1 v + \mu_2 u^2 v - u^4 v) + o(\delta^4).$$

Logo, o sistema (0.4.16) é equivalente ao sistema

$$(1.4.2) \quad \begin{cases} u' = v \\ v' = \mu_0 u - u^3 + \delta^3 (\mu_1 v + \mu_2 u^2 v - u^4 v) + o(\delta^4) \end{cases}$$

onde ' denota a derivada com respeito a τ .

Observe que para $\delta = 0$ temos um sistema Hamiltoniano:

$$(1.4.3) \quad \begin{cases} u' = v \\ v' = \mu_0 u - u^3 \end{cases}$$

com a função Hamiltoniana dada por

$$H(u, v) = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu_0}{2} u^2 + \frac{u^4}{4}.$$

1.5. A dinâmica do campo Hamiltoniano (1.4.3)

Estudaremos o sistema (1.4.3) em cada um dos seguintes casos:

- i) $\mu_0 > 0$ (ver Figura 1.5.1) e
- ii) $\mu_0 \leq 0$ (ver Figura 1.5.2).

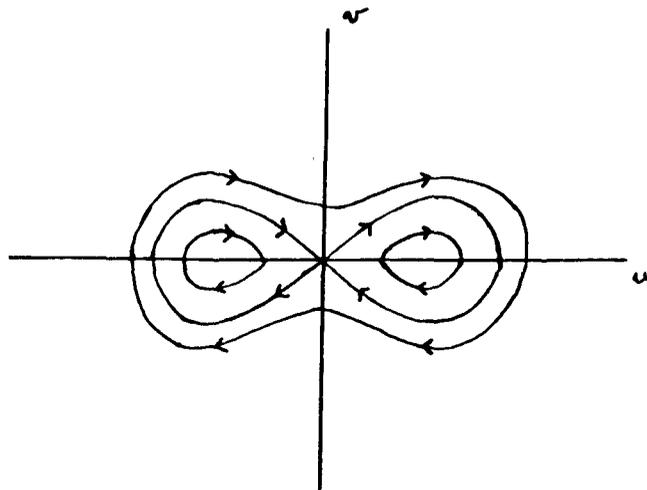


Figura 1.5.1. Retrato de fase do campo (1.4.3) quando $\mu_0 = 1$

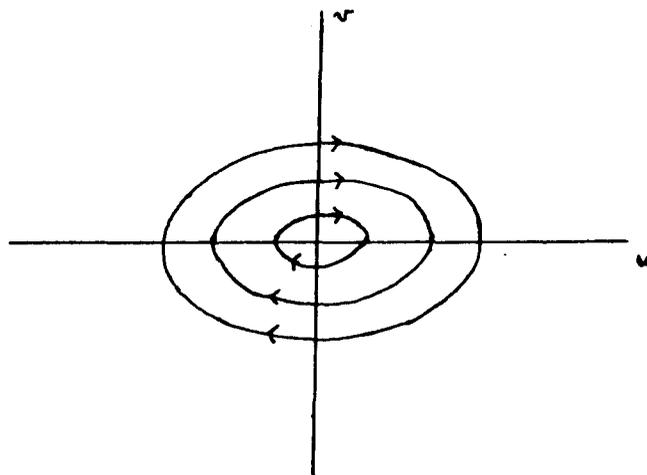


Figura 1.5.2. Retrato de fase do campo (1.4.3) quando $\mu_0 = 0$

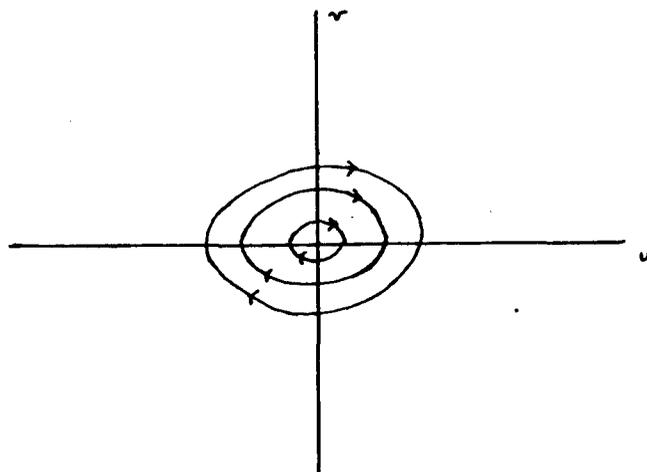


Figura 1.5.3. Retrato de fase do campo (1.4.3) quando $\mu_0 = -1$

1.5.i) Caso $\mu_0 > 0$

Podemos supor $\mu_0 = 1$.

Assim sendo, segue de (1.4.3) o sistema

$$(1.5.1) \quad \begin{cases} u' = v \\ v' = u - u^3 \end{cases} \quad \text{com} \quad H(u, v) = \frac{v^2}{2} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4}.$$

Daremos agora o espaço de fase para o sistema (1.5.1), o qual será feito através do estudo das curvas de níveis de H .

Por um simples cálculo pode-se verificar que os pontos singulares de (1.5.1) são dados por $(0,0)$; $(\pm 1, 0)$, os quais tem os seguintes tipos de estabilidade

$$\begin{aligned} (u, v) = (\pm 1, 0) & \quad \text{— centros,} \\ (u, v) = (0, 0) & \quad \text{— sela.} \end{aligned}$$

Observemos que se pensarmos $\frac{v^2}{2} \equiv K(v)$ sendo a energia cinética e $-\frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4} \equiv V(u)$ a energia potencial, o nível $H = h$ pode ser pensado como a energia total do sistema (1.5.1). Portanto, do estudo das curvas de níveis V resultará a estrutura global do espaço de fase para (1.5.1).

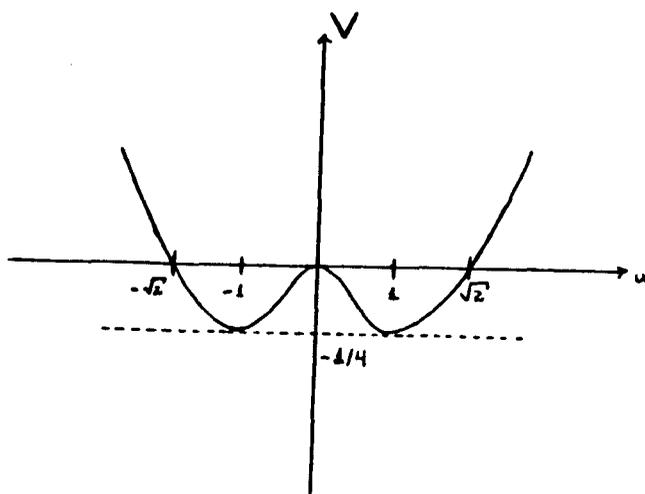


Figura 1.5.4. Gráfico de $V(u)$

Primeiramente observemos a Figura 1.5.4.

Agora podemos olhar a função Hamiltoniana H como sendo

$$h = \frac{v}{2} + V(u) \quad \text{donde segue}$$

$$v = \pm \sqrt{2} \sqrt{h - V(u)} .$$

Imaginemos que estamos posicionado no ponto $(0,0)$ com h fixo no plano (u, V) . Agora em se movimentando para a direção direita (isto é, no sentido de crescimento de u) e observando a Figura 1.5.4 vemos que o gráfico de V começa a decrescer.

Por um momento, estudando $v = \sqrt{2} \sqrt{h - V(u)}$ com h fixo, observemos que v deverá crescer até o ponto de mínimo da função V ser atingido, e em seguida v deverá decrescer até a fronteira $h = V$ ser atingida. (Ver Figura 1.5.4).

Lembramos agora que ainda temos o estudo para $v = -\sqrt{2} \sqrt{h - V(u)}$, o qual é simétrico com respeito ao eixo u . Logo podemos concluir a Figura 1.5.5.

Observemos agora que por simetria (Ver Figura 1.5.3) existem outras órbitas do lado esquerdo como na Figura 1.5.5, ou seja, conforme mostra a Figura 1.5.1.

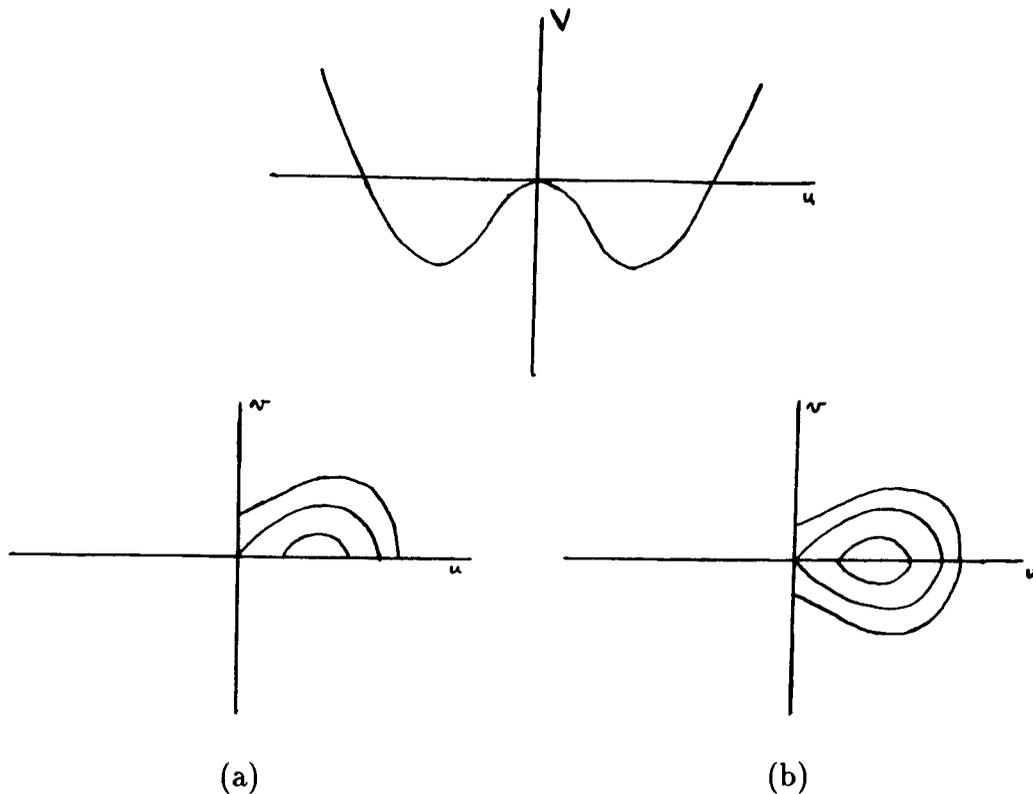


Figura 1.5.5. Movimento local das órbitas de (1.5.1)

Logo segue de nossa análise anterior que:

(1.5.2) O nível $h = -\frac{1}{4}$ contém somente os pontos $(\pm 1, 0)$. (Ver Figura 1.5.6.a).

(1.5.3) O nível $h = 0$ contém o duplo laço homoclínico simétrico. (Ver Figura 1.5.6.b).

(1.5.4) Para $h \in]-\frac{1}{4}, 0[$, o nível h contém um par de curvas fechadas, cada uma ao redor dos pontos $(\pm 1, 0)$. (Ver Figura 1.5.6.c),

(1.5.5) Para $h \in]0, +\infty[$ o nível h contém uma curva fechada ao redor dos três pontos

singulares. (Ver Figura 1.5.6.d).

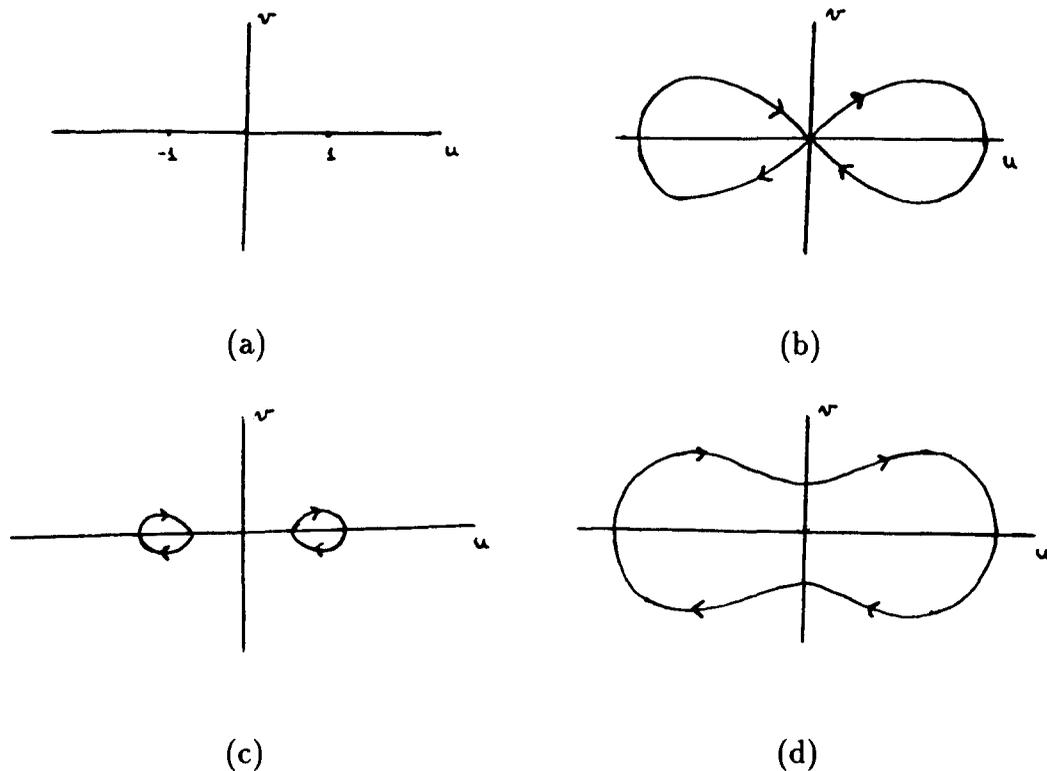


Figura 1.5.6. Tipos diferentes das curvas de níveis de H

Logo podemos concluir a Figura 1.5.1.

Agora vejamos o segundo caso, ou seja,

ii) Caso $\mu_0 \leq 0$

Uma análise análoga ao caso anterior $\mu_0 = 1$ pode ser feita para o estudo do retrato de fase de (1.4.3) quando $\mu_0 = 0$ ou $\mu_0 < 0$.

É de simples verificação que a origem é a única singularidade de (1.4.3) para $\mu_0 = 0$ ou $\mu_0 < 0$.

Observemos que para $\mu_0 = 0$,

$$H(u, v) = K_1(v) + V_1(u) \quad \text{onde}$$

$$K_1(v) = \frac{v^2}{2} \quad \text{e} \quad V_1(u) = \frac{u^4}{4}.$$

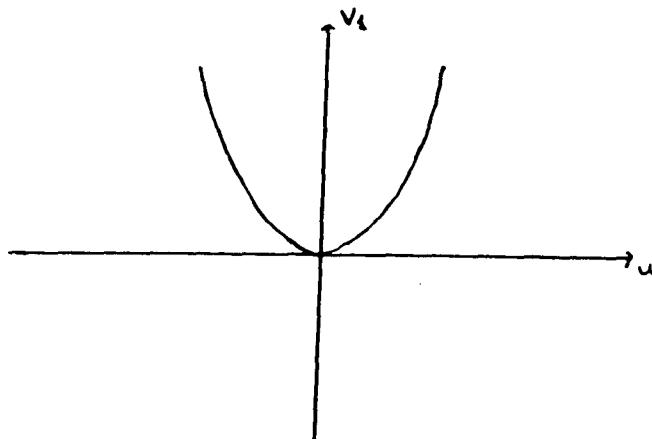


Figura 1.5.7. Gráfico de $V_1(u)$

(1.5.6) **Obs.** As curvas de níveis de V_1 fornecem a estrutura global das órbitas para (1.4.3) quando temos $\mu_0 = 0$.

Por (1.5.6) é de fácil verificação que cada nível $h > 0$ contém uma curva fechada. Donde segue a Figura 1.5.2.

Agora com as mesmas considerações acima temos para $\mu_0 = -1$ que

$$H(u, v) = K_2(v) + V_2(u) \quad \text{onde} \quad K_2(v) = \frac{v^2}{2} \quad \text{e} \quad V_2(u) = \frac{v^2}{2} + \frac{u^4}{4}.$$

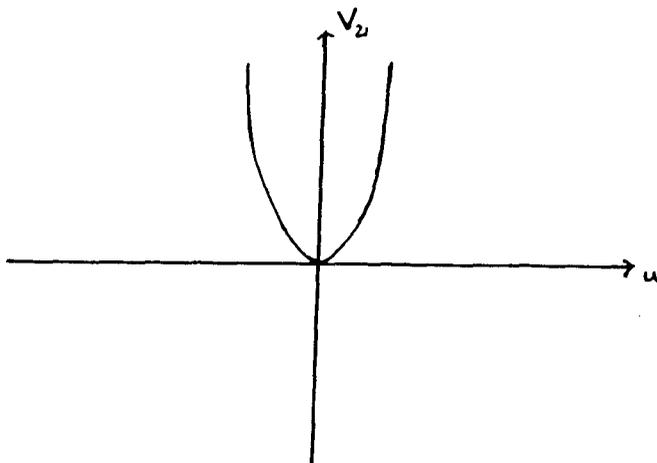


Figura 1.5.8. Gráfico de $V_2(u)$

(1.5.7) **Obs.** As curvas de níveis de V_2 fornecem a estrutura global das órbitas para (1.4.3) quando temos $\mu_0 < 0$.

Observemos ainda que por (1.5.7) pode-se verificar que cada nível $h > 0$ contém uma curva fechada.

Donde obtemos a Figura 1.5.3.

A seguir apresentaremos o Método de Melnikov, juntamente com alguns resultados, os quais serão importantes para o desenvolvimento de nosso trabalho.

1.6. Método de Melnikov e Alguns Resultados

A função de Melnikov é usada para aproximar os valores dos parâmetros para os quais uma perturbação de um sistema Hamiltoniano tem um laço homoclínico. Isto é mais geral ainda, uma vez que para cada laço fechado do sistema Hamiltoniano somos informados sobre os valores de parâmetros para os quais este laço fechado é preservado na perturbação do sistema.

Consideremos um sistema da forma

$$(1.6.1) \quad \begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} + \varepsilon f(x, y) \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \varepsilon g(x, y) \end{cases} \quad \text{onde}$$

$H : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 ; U aberto de \mathbb{R}^2 ; f, g funções reais, $\varepsilon > 0$ pequeno, tal que (1.6.1) possa ter ou não laço homoclínico (heteroclínico).

Consideremos ainda em (1.6.1) (para $\varepsilon > 0$ pequeno), a aplicação de Poincaré P_ε sobre uma seção Σ transversal as curvas de níveis $H = h$ ou também chamadas de órbitas γ_h (inclusive quando tivermos laço homoclínico ou heteroclínico).

Observemos que quando ocorre uma bifurcação tipo laço homoclínica, dependendo da posição das separatrizes, pode acontecer que a aplicação de Poincaré no sentido positivo do fluxo não esteja definida, e neste caso devemos considerar a aplicação inversa. Para maiores detalhes (Ver Proposição 3.2.A).

Assim sendo, pode-se verificar que

$$(1.6.2) \quad P_\varepsilon(h) - h = \varepsilon \int_{\gamma_h} g dx - f dy + o(\varepsilon) \quad (\text{Ver [D, R, S]; [D, R, S, Z]; [Ra2]})$$

$$(1.6.3) \quad \text{chamando de } M(h) = \int_{\gamma_h} g dx - f dy ,$$

segue de (1.6.2) uma relação entre a aplicação de Poincaré (P_ε) e a função de Melnikov (M) dada por

$$(1.6.4) \quad P_\varepsilon(h) - h = \varepsilon M(h) + o(\varepsilon) .$$

(1.6.5) **Obs. 1)** Estudar os pontos fixos da aplicação de Poincaré $P_\varepsilon(h)$ equivale a estudar as raízes de $M(h)$ (função de Melnikov) pois note que:

$$\begin{aligned} o = P_\varepsilon(h) - h = \varepsilon M(h) + o(\varepsilon) &\Leftrightarrow o = \frac{P_\varepsilon(h) - h}{\varepsilon} = M(h) + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow o = M(h) + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} &\Leftrightarrow M(h) = 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Suponhamos que γ_h seja órbita periódica de (1.6.1).

Dizemos que ocorre uma *bifurcação* tipo *k-ciclo limite* ($k \geq 2$) se $M(h) = \dots = M^{(k-1)}(h) = 0$.

A equação do conjunto de bifurcação do tipo *k-ciclo limite* é dada por

$$M(h) = \dots = M^{k-1}(h) = 0, \quad M^k(h) \neq 0$$

Assim sendo, os conjuntos de bifurcações serão caracterizados utilizando o Método de Melnikov, como veremos a seguir.

(1.6.6) **Alguns resultados envolvendo a função de Melnikov**

1) **Bifurcação do tipo:** i) *duplo ciclo (triplo ciclo, ...)*

ii) *duplo ciclo limite externo ou interno (resp. triplo ciclo limite externo ou interno, ...).*

(1.6.6.1) **Observações:**

i) Quando o campo $X_{\bar{\mu}}$ apresentar apenas uma singularidade diremos que ocorre uma *bifurcação* tipo *duplo ciclo* (resp. *triplo ciclo, ...*) se $k = 2$ (resp. se $k = 3, \dots$);

i1) Iremos denotar as curvas ou superfícies de bifurcação (no espaço de parâmetros) tipo duplo ciclo (triplo ciclo,...) por $(2C)$ (resp. $(3C)$, ...).

ii) E quando temos três singularidades (2 pontos singulares tipo centro, os quais separam uma sela) conforme o caso (i), visto em (1.5.1); diremos neste caso que ocorre uma *bifurcação duplo ciclo limite externo* (resp. *interno*) se $k = 2$ com $\bar{h} > 0$ (resp. $\bar{h} < 0$); *triplo ciclo limite externo* (resp. *interno*) se $k = 3$ com $\bar{h} > 0$ (resp. $\bar{h} < 0$); ...).

ii2) Por $(2C_{ext})$ (resp $(3C_{ext})$, ...) denotaremos as curvas ou superfícies de bifurcação (no espaço de parâmetros) tipo duplo ciclo limite externo (triplo ciclo limite externo, ...).

ii3) Ainda, denotaremos por $(2C_{int})$ (resp $(3C_{int})$, ...) as curvas ou superfícies de bifurcação (no espaço de parâmetros) tipo duplo ciclo limite interno (triplo ciclo limite interno, ...).

2) Bifurcação do tipo Hopf

Suponhamos que $X_{\bar{\mu}}$ tem um ponto singular não hiperbólico \bar{p} (isto é, os autovalores da matriz derivada do campo $X_{\bar{\mu}}$ em \bar{p} ($DX_{\mu}(\bar{p})$) estão sobre o eixo imaginário); e que a aplicação retorno $P(h, \mu)$ esteja definida próximo de $\gamma_{\bar{h}} = \Sigma \cap \{\bar{p}\} = \{\bar{p}\}$.

Dizemos que ocorre uma *bifurcação tipo Hopf de ordem k* em \bar{p} se

$$M(\bar{h}) = M'(\bar{h}) = \dots = M^{(k-1)}(\bar{h}) = 0; \quad M^{(k)}(\bar{h}) \neq 0 .$$

Logo a equação do conjunto de bifurcação do tipo Hopf de ordem k é dado por $M(\bar{h}) = \dots = M^{(k-1)}(\bar{h}) = 0$.

(1.6.6.2.1) Iremos denotar por (H) (resp. $(H_2), \dots$) as curvas ou superfícies de bifurcação (no espaço de parâmetros) tipo Hopf de ordem 1 (resp. 2, ...).

3) Bifurcação tipo duplo laço homoclínica

No caso onde γ_h é um duplo laço homoclínico simétrico, pode-se verificar que temos uma *bifurcação tipo duplo laço homoclínico simétrico de ordem*:

i) $2k - 1$, se $M(h) = M'(h) = \dots = M^{(k-1)}(h) = 0$, e $M^{(k)}(h) = \pm\infty$.

ii) $2k$, se $M(h) = M'(h) = \dots = M^{(k-1)}(h) = 0$, e $M^{(k)}(h) \neq 0$, com $M^{(k)}(h)$ finito.

(1.6.6.3) Observações:

i1) Denotaremos as curvas ou superfície de bifurcação (no espaço de parâmetros) tipo duplo laço homoclínico de codimensão 1 (resp. 2, ...) por (HL) ; (resp. $(HL_2), \dots$).

i2) Quando necessário iremos escrever S_B para superfícies de bifurcações, onde B é uma determinada curva de bifurcação de codimensão 2.

Tais bifurcações serão estudadas no capítulo 3. Mais informações sobre tipos de bifurcações apresentados em (1.6.6) e a função de Melnikov $M(h)$ poderão ser encontradas em [Ra2]; [D, R, S]; [D, R, S, Z].

A seguir introduziremos as integrais elípticas, as quais são ferramentas importantes para o desenvolvimento do nosso trabalho (Ver [D, R, S, Z]), e em seguida algumas relações existentes entre elas através das Proposições (1.7.A); (1.7.B).

1.7. Integrais Elípticas

(1.7.1) **Definição.** Considere o sistema Hamiltoniano dado por (1.4.3) com $H(u, v) = \frac{v^2}{2} - \mu_0 \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4}$. Definamos $I_i(h) = \int_{\gamma_h} u^{2i} v du$ para $i \geq 0$ a integral de uma 1-forma $w_i = u^{2i} v$ ao longo de uma órbita γ_h do sistema Hamiltoniano associado.

(1.7.2) **Obs.** A integral $I_i(h)$ está bem definida uma vez que a órbita γ_h é compacta. Uma tal integral $I_i(h)$ é chamada integral *elíptica* (Ver [P]). Estaremos integrando ao

longo de γ_h , tomando como orientação positiva o sentido horário.

Iremos agora dar uma relação entre as integrais $I_i(h)$; a qual nos diz que para conhecermos qualquer $I_i(h)$, basta que conheçamos I_0 e I_1 .

(1.7.A) **Proposição.**

- i) $I_n = -4\mu_0 I_{n-1} + 4h(2n-3)I_{n-2}, n \geq 2.$
- ii) Em particular $I_2 = \frac{8}{7}\mu_0 I_1 + \frac{4}{7}hI_0.$

Dem. de (1.7.A.i).

Seja $\gamma_h^+ = \{(u, v) \in \gamma_h \mid v \geq 0\}$ o semi-círculo, o qual corta o eixo u nos pontos $c_1(h) \leq c_2(h)$, raízes ≤ 1 da equação $4c = -2\mu_0 u^2 + u^4$.

1.7.3) Note que da função Hamiltoniana dada em (1.4.2) segue que $v = \sqrt{2h + \mu_0 u^2 - \frac{u^4}{2}}$ com $v(c_1) = v(c_2) = 0$.

(1.7.4) Seja $J_i(h) = \int_{\gamma_h^+} u^{2i} v du = \frac{I_i(h)}{4}$ (note que $I_i(h) = 4 \int_{\gamma_h^+} u^{2i} v du$)
Assim sendo podemos escrever

$$\begin{aligned} J_n &= \int_{\gamma_h^+} u^{2n} v du = \int_{\gamma_h^+} u^{2n} v du - \mu_0 J_{n-1} + \mu_0 J_{n-1} \\ &= \int_{\gamma_h^+} (u^{2n} - \mu_0 u^{2n-2}) v du + \mu_0 J_{n-1} . \end{aligned}$$

Usando a primeira equação de (1.4.2) ficamos com

$$(1.7.5) \quad J_n = \int_{\gamma_h^+} u^{2n-3} (u^3 - \mu_0 u) v^2 d\tau + \mu_0 J_{n-1} .$$

Voltando novamente em (1.4.2), donde através do uso da segunda equação em (1.7.5) obteremos:

$$(1.7.6) \quad J_n = - \int_{\gamma_h^+} u^{2n-3} v^2 dv + \mu_0 J_{n-1} .$$

A seguir calculemos

$$(1.7.7) \quad \int_{\gamma_h^+} u^{2n-3} v^2 dv .$$

Integrando por partes (1.7.7) segue que

$$(1.7.8) \quad \int_{\gamma_h^+} u^{2n-3} v^2 dv = (u^{2n-3} v^3) \Big|_{c_1(h)}^{c_2(h)} + \frac{(2n-3)}{3} \int_{\gamma_h^+} u^{2n-4} v^3 du$$

$$\begin{cases} x = -u^{2n-3} \Rightarrow dx = -(2n-3)u^{2n-4} du \\ dy = v^2 du \Rightarrow y = \frac{v^3}{3} . \end{cases}$$

Mas por (1.7.3) temos $v(c_1) = v(c_2) = 0$, logo segue de (1.7.8) que

$$(1.7.9) \quad \int_{\gamma_h^+} u^{2n-3} v^2 dv = \frac{(2n-3)}{3} \int_{\gamma_h^+} u^{2n-4} v^3 du .$$

Logo substituindo (1.7.9) em (1.7.6) segue que

$$(1.7.10) \quad J_n = \frac{(2n-3)}{3} \int_{\gamma_h^+} u^{2n-4} v^3 du + \mu_0 J_{n-1} .$$

Notemos que por (1.7.3) vemos que $v^2 = 2h + \mu_0 u^2 - \frac{u^4}{2}$, o qual usando em (1.7.10) segue que

$$(1.7.11) \quad J_n = \frac{(2n-3)}{3} \int_{\gamma_h^+} u^{2n-4} (2h + \mu_0 u^2 - \frac{u^4}{2}) v du ,$$

e logo após mais alguns cálculos efetuados em (1.7.11), e juntamente como o uso de (1.7.4) resultará que $J_n = -4\mu_0 J_{n-1} + 4h(2n-3)J_{n-2}$, $n \geq 2$.

Ainda recordando por (1.7.4) vemos que $J_i(h) = \frac{I_i(h)}{4}$, donde segue (1.7.A.i).

Dem. de (1.7.A.ii).

Isto é imediato do caso i).

(1.7.B) **Proposição.** I_0 e I_1 satisfazem as igualdades:

$$i) \quad I_0 = \frac{4}{3} h I_0' + \frac{\mu_0}{3} I_1' .$$

$$\left(' = \frac{d}{dh} \right)$$

$$ii) \quad I_1 = \frac{4}{15} \mu_0 I_0' + \frac{(4\mu_0^2 + 12h)}{15} I_1' .$$

Dem. de (1.7.B.i)

Usando as mesmas notações que na Proposição (1.7.A), temos que

$$(1.7.12) \quad J_i(h) = \int_{c_1}^{c_2} w^{2i} R(h, w) dw \quad \text{onde } R = R(h, w) = \left(2h + \mu_0 w^2 - \frac{w^4}{2}\right)^{1/2}$$

com $R(c_1) = R(c_2) = 0$.

Derivando (1.7.12) com respeito a h temos que

$$(1.7.13) \quad J'_i(h) = \int_{c_1}^{c_2} \frac{w^{2i}}{R} \quad \text{com } w \in [c_1(h), c_2(h)].$$

Agora integrando por partes, calculemos J_0 .

Assim sendo,

$$J_0(h) = \int_{c_1(h)}^{c_2(h)} R(w) dw = wR(w) \Big|_{c_1}^{c_2} + \int_{c_1}^{c_2} \frac{w^2}{R(w)} (w^2 - \mu_0) dw,$$

ou seja, teremos que

$$(1.7.14) \quad J_0(h) = \int_{c_1}^{c_2} \frac{w^2}{R} (w^2 - \mu_0) dw.$$

Usando (1.7.13) segue de (1.7.14) que

$$(1.7.15) \quad J_0(h) = -\mu_0 J'_1 + J'_2.$$

Mas por outro lado, temos que

$$(1.7.16) \quad J_0(h) = \int_{\gamma_h^+} R dw = \int_{\gamma_h^+} \left(\frac{1}{R}\right) R^2 dw = \int_{\gamma_h^+} \frac{(2h - \frac{w^4}{2} + \mu_0 w^2)}{R} dw.$$

Por um momento recordando de (1.7.12) que $R = R(h, w) = \left(2h + \mu_0 w^2 - \frac{w^4}{2}\right)^{1/2}$, e usando em (1.7.16) segue

$$(1.7.17) \quad J_0(h) = 2hJ'_0 - \frac{1}{2}J'_2 + \mu_0 J'_1.$$

Donde, comparando as igualdades (1.7.15) e de (1.7.17) segue que $J_0(h) = \frac{4}{3}hJ'_0 + \frac{\mu_0}{3}J'_1$.

Lembrando agora por (1.7.4) que $J_i(h) = \frac{I_i(h)}{4}$, logo segue (1.7.B.i). ■

Dem. de (1.7.B.ii).

$$(1.7.18) \quad \text{Temos } J_1(h) = \int_{c_1(h)}^{c_2(h)} w^2 R(w) dw.$$

Integrando por partes J_1 obteremos

$$(1.7.19) \quad J_1(h) = \frac{1}{3} \int \frac{w^6}{R} dw - \frac{\mu_0}{3} \int \frac{w^4}{R} dw .$$

Usando (1.7.13) em (1.7.19) ficamos com

$$(1.7.20) \quad J_1(h) = \frac{1}{3} J_3' - \frac{1}{3} \mu_0 J_2' ;$$

mas por outro lado temos que

$$(1.7.21) \quad \begin{aligned} J_1(h) &= \int_{c_1(h)}^{c_2(h)} w^2 R(w) dw = \int_{c_1(h)}^{c_2(h)} \frac{w^2}{R} R^2 dw \\ &= \int \frac{w^2}{R} \left(2h - \frac{w^4}{2} + \mu_0 w^2 \right)^{1/2} dw . \end{aligned}$$

Agora, logo após alguns cálculos juntamente com o uso de (1.7.13) em (1.7.21) podemos ver que

$$(1.7.22) \quad J_1 = 2hJ_1' - \frac{J_3'}{2} + \mu_0 J_2' .$$

Seguindo por meio do uso das igualdades (1.7.20) e (1.7.22) podemos eliminar J_3' , ficando com uma igualdade envolvendo J_1 e J_2' , a saber:

$$(1.7.23) \quad \frac{5}{2} J_1 = 2hJ_1' + \frac{\mu_0}{2} J_2' .$$

Basta agora conhecermos J_2' . Note que podemos obter J_2' derivando a igualdade (1.7.A.ii). Logo segue de (1.7.23) que

$$J_1 = \frac{4}{15} h \mu_0 J_0' + \frac{(12h + 4\mu_0^2)}{15} J_1' ,$$

mas lembrando por (1.7.4) que $J_i = \frac{I_i}{4}$, donde segue (1.7.B.ii). ■

Capítulo 2

Aplicação P

2.1. Introdução

Neste capítulo, introduziremos uma aplicação P a qual será útil na determinação do número de ciclos limites de (1.4.2). Em seguida veremos que $P(h)$ satisfaz uma equação diferencial de Ricatti, e logo após estudaremos o seu comportamento em cada um dos seguintes casos: $\varepsilon_1 > 0$; $\varepsilon_1 = 0$; $\varepsilon_1 < 0$.

2.2. Uma equação diferencial para $P(h)$

Observemos que por (1.6.3) a função de Melnikov associada ao sistema (1.4.2) é dada por

$$M(h) = \int_{\gamma_h} (u, v + \mu_2 u^2 v - u^4 v) du$$

Por (1.7.1) temos que $M(h) = \mu_1 I_0(h) + I_1(h) - I_2(h)$; e ainda pela Proposição (1.7.A.ii) segue que:

$$(2.2.1) \quad M(h) = \left(\mu_1 - \frac{4}{7}h\right)I_0(h) + \left(\mu_2 - \frac{8}{7}\mu_0\right)I_1(h)$$

Agora, por (1.6.5) vimos que os ciclos limites são estudados como raízes de M .

Daí podemos notar que estudar as raízes de M equivale a estudar as raízes de $\bar{M}(h) = \frac{M(h)}{I_0(h)}$, ou seja, equivale a estudar as raízes de $\bar{M}(h) = \left(\mu_1 - \frac{4}{7}h\right)I_0(h) + \left(\mu_2 - \frac{8}{7}\mu_0\right)I_1(h)$, onde $P(h) = \frac{I_1(h)}{I_0(h)}$.

A seguir iremos estudar propriedades para $P(h)$, as quais serão úteis no capítulo 3 para completar a caracterização do diagrama de bifurcação de (0.4.16).

Proposição (2.2.C) A aplicação P satisfaz uma equação diferencial de Ricatti, dada por:

$$(2.2.2) \quad 4h(4h + \mu_0^2)P' = 5\mu_0 P^2 + 8hP - 4\mu_0^2 P - 4\mu_0 h.$$

De fato, recordando da proposição (1.7.B) temos que

$$(2.2.3) \quad \begin{cases} I_0 = \frac{4}{3}hI_0' + \frac{\mu_0}{3}I_1' \\ I_1 = \frac{4}{15}\mu_0 I_0' + \frac{(4\mu_0^2 + 12h)}{15}I_1' . \end{cases}$$

Usando o sistema (2.2.3), após vários cálculos obtemos que

$$(2.2.3) \quad \begin{cases} I_0' = \frac{(-3\mu_0^2 I_0 - 12hI_0 - \mu_0^2 I_0 + 5\mu_0 I_1)}{4h(-\mu_0^2 - 4h)} \\ I_1' = \frac{(\mu_0 I_0 - 5I_1)}{-\mu_0^2 - 4h} \end{cases}.$$

Agora, temos que

$$(2.2.4) \quad P'(h) = \frac{I_1'(h)I_0(h) - I_1(h)I_0'(h)}{I_0^2(h)}.$$

Logo, usando (2.2.4) em (2.2.5) segue a proposição (2.2.C).

(2.2.5.1) **Obs.** Note que se $P = P(h)$; $h = h(t)$ e $P = P(t)$, logo $P(t) = P(h(t))$ donde segue que $P'(h) = \frac{\dot{P}}{\dot{h}}$.

Assim sendo, podemos considerar $P = P(h)$ como curva solução do sistema

$$(2.2.5) \quad \begin{cases} \dot{h} = -4h(\mu_0^2 + 4h) \\ \dot{P} = -5\mu_0 P^2 - 8hP + 4\mu_0 h + 4\mu_0^2 P \end{cases}$$

cujo campo vetorial associado é dado por

$$(2.2.6) \quad Z(h, P) = (-4h(\mu_0^2 + 4h), -5\mu_0 P^2 - 8hP + 4\mu_0 h + 4\mu_0^2 P)$$

(2.2.8) **Obs.** Desta forma, estaremos estudando P como sendo uma aplicação cujo gráfico é uma particular linha do fluxo do campo (2.2.7).

(2.2.9) **Obs.** Por (1.5) segue o domínio da aplicação P uma vez que P está definida ao longo dos níveis ou órbitas Hamiltonianas (Ver 2.2.1). Logo de (1.5.i) segue que $\text{Dom}(P) = \{h/h \geq -\frac{1}{4}\}$ quando $\mu_0 > 0$; e por (1.5.ii) segue que $\text{Dom}(P) = \{h/h \geq 0\}$ quando $\mu_0 \leq 0$.

A seguir, estudaremos o comportamento de P para o qual é estabelecida a seguinte estratégia:

- i) Caracterização do Retrato de fase do campo (2.2.7).
- ii) Estudo das Propriedades de P .

iii) Esboço do gráfico de P .

2.3. Um Estudo da aplicação P

Um tal estudo será feito em cada um dos seguintes casos:

- i) $\mu_0 > 0$
- ii) $\mu_0 = 0$
- iii) $\mu_0 < 0$

Assim sendo, iniciemos estudando a dinâmica do campo (2.2.7) para $\mu_0 > 0$.

Proposição (2.3.D) O retrato de fase do campo (2.2.7) quando temos $\mu_0 > 0$ é dado pela Figura 2.3.1.

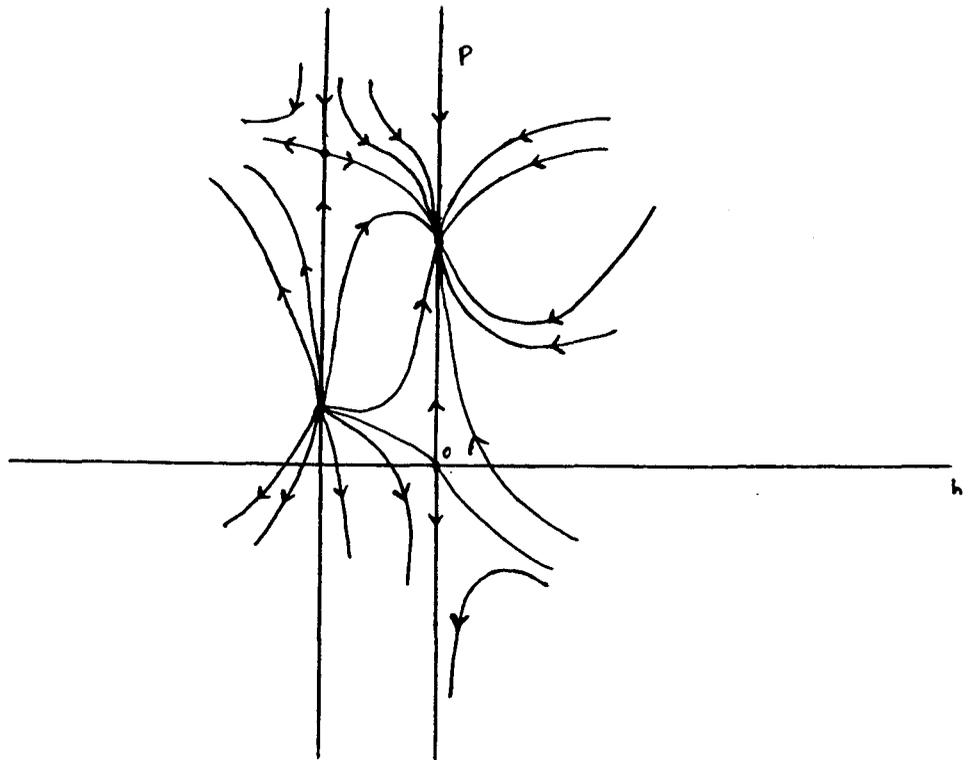


Figura 2.3.1. Retrato de fase do campo (2.2.7) (caso $\mu_0 > 0$)

Podemos supor $\mu_0 = 1$

(2.3.1) É de fácil verificação as seguintes observações:

a) As singularidades do campo Z são dadas por: $\alpha_0 = (0, 0)$; $\alpha_1 = (0, \frac{4}{5})$; $\alpha_2 = (-\frac{1}{4}, 1)$; $\alpha_3 = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{5})$

b) São singularidades do tipo sela: α_0 e α_2 .

Notemos que calculando $DZ(h, p)$, obtemos que:

$$DZ(h, P) = \begin{bmatrix} -4 - 32h & 0 \\ -8P + 4 & -10P - 8h + 4 \end{bmatrix}$$

Agora, estudando os autovalores da matriz $DZ(\alpha_0)$ (resp. $DZ(\alpha_1)$) encontramos que são dados por $-4, 4$ (resp. $-4, 4$).

Logo α_0 (resp. α_1) são pontos do tipo sela uma vez que o produto dos autovalores da matriz $DZ(\alpha_0)$ (resp. $DZ(\alpha_2)$) é negativo.

c) Os subespaços estáveis e instáveis associados a α_0 (resp. α_2) são dados por $E_{\alpha_0}^s = [(-2, 1)]$ e $E_{\alpha_0}^u = [(0, 1)]$ (resp. $E_{\alpha_2}^u = [(0, 1)]$ e $E_{\alpha_2}^s = [(-2, 1)]$).

d) A singularidade α_1 (resp. α_3) é um nó estável (resp. nó instável).

Notemos que um cálculo direto dos autovalores da matriz $DZ(\alpha_1)$ (resp. $DZ(\alpha_3)$) nos dão: autovalor duplo = -4 (resp. autovalor duplo = 4).

e) O subespaço invariante estável (resp. instável) associado a α_1 (resp. α_3) é dado por $E_{\alpha_1}^s = [(0, 1)]$ (resp. $E_{\alpha_3}^u = [(0, 1)]$), onde as soluções

$$\tilde{\gamma}(t) = (a(t), b(t)) = (c_1 e^{-t}, c_2 t + c_3 t e^{-t}) \text{ (resp.}$$

$$\tilde{\beta}(t) = (c(t), d(t)) = (d_1 e^t, d_2 t + d_3 t e^t) \text{)}$$

é tal que $\frac{b(t)}{a(t)} \rightarrow \mp\infty$ (resp. $\frac{d(t)}{c(t)} \rightarrow \pm\infty$), ou seja, as soluções entrarão tangenciando $E_{\alpha_1}^s$ com tangente $\mp\infty$ (resp. $E_{\alpha_3}^u$ com tangente $\pm\infty$).

f) Das observações a) até e) segue a Figura 2.3.2.

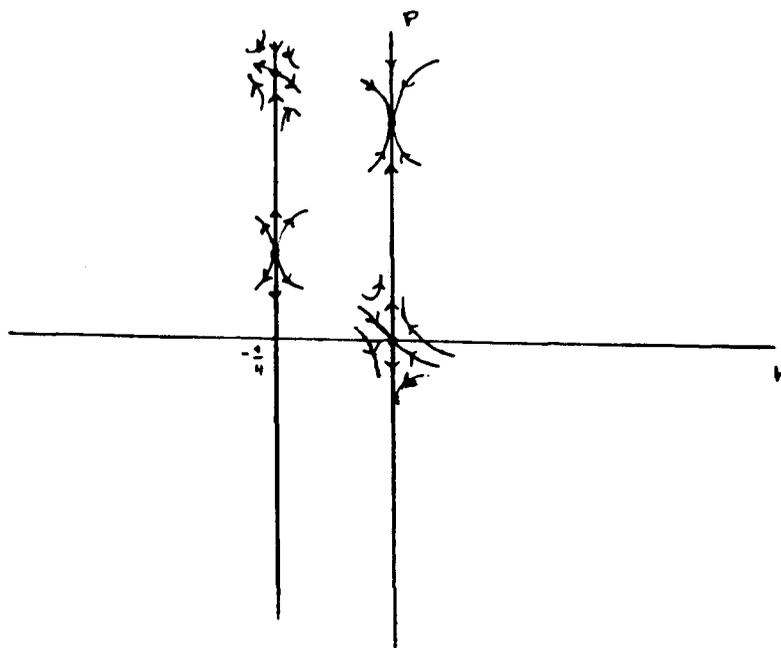


Figura 2.3.2. Esboço local das órbitas de $Z : \mu_0 = 1$

No que foi visto, ou seja, nas observações de (a) até (e) estamos sempre nos referindo ao campo do qual provém de (2.2.7) quando temos $\mu_0 = 1$, o qual estamos e continuaremos a chamar de Z até quando mencionarmos o contrário.

Ainda observemos que:

g) As linhas $L_1 = \{(-\frac{1}{4}, P)/P \in \mathbb{R}\}$ (resp. $L_2 = \{(0, P)/P \in \mathbb{R}\}$) é invariante pelo fluxo do campo Z , uma vez que segue da equação (2.2.6) que $\dot{h}|_{h=-\frac{1}{4}} = 0$ (resp. $\dot{h}|_{h=0} = 0$).

h) A segunda componente do campo Z aponta para baixo (resp. para cima) em $P = \infty$ (resp. em $P = \frac{1}{2}$) uma vez que segue da equação (2.2.6) que $\dot{P}|_{P=\infty} = -\infty$ (resp. $\dot{P}|_{P=\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$).

i) Temos que $P(h) > \frac{1}{2} \quad \forall h \in]-\frac{1}{4}, 0[$. Note que já observamos em (2.3.1.h) que $\dot{P}|_{P=\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} > 0$, donde segue (2.3.1.i).

(2.3.2) Agora, notemos que a separatriz instável não sai da faixa B . Isto segue do uso das observações (2.3.1.g; h; i) (Ver Figura 2.3.3) ■

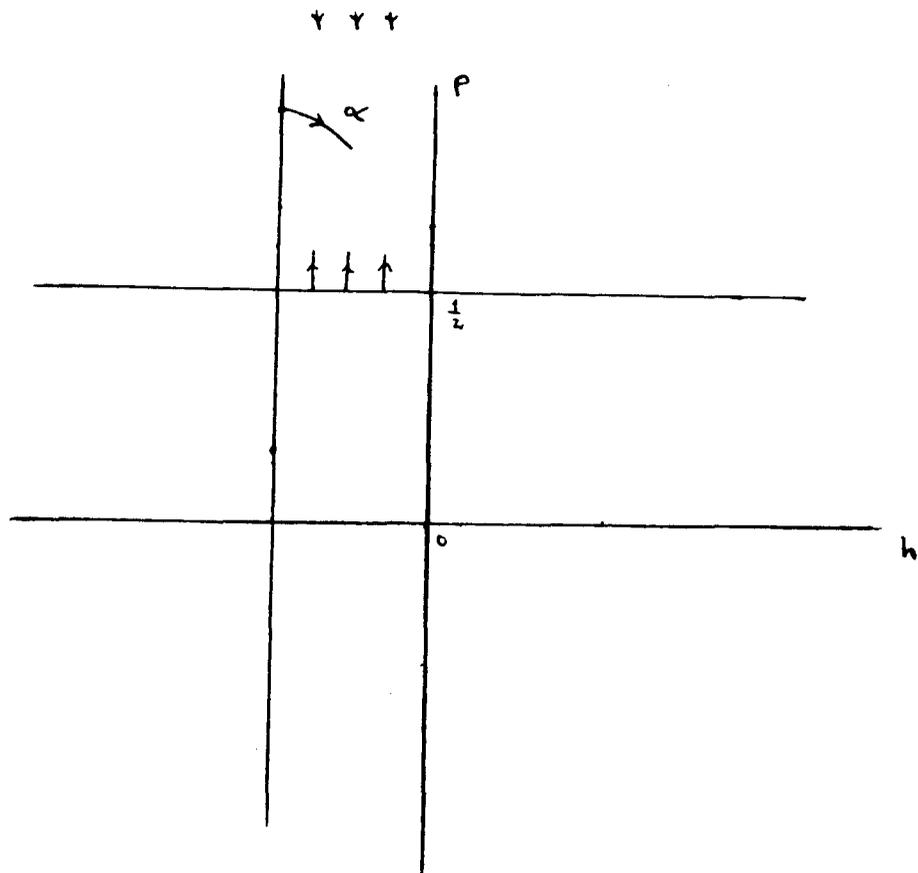


Figura 2.3.3. Uma visão geométrica da separatriz instável (α) dentro da faixa B

(2.3.3) **Obs.** Logo concluímos que em particular existe uma órbita do campo Z saindo do ponto $(-\frac{1}{4}, 0)$, a qual não sai da faixa B ; além disso, é a única órbita que sai desse ponto uma vez que o ponto $(-\frac{1}{4}, 0)$ é um ponto de sela.

Continuando, vejamos a seguinte afirmação:

(2.3.4) A separatriz instável do ponto de sela $(-\frac{1}{4}, 0)$ conecta-se ao ponto $(0, \frac{4}{5})$.

De fato:

Seja γ a curva solução do campo Z tal que γ contém a separatriz instável do ponto de sela $(-\frac{1}{4}, 1)$. Por (2.3.1.h) observamos que $\dot{P}|_{P=\infty} = -\infty$, donde segue que a separatriz γ não pode ir para o infinito, e juntando ainda (2.3.3), vemos que existirá um compacto $K \subset B \subset \mathbb{R}^2$ tal que γ está presa dentro de K .

Logo, segue pelo Teorema de Poincaré-Bendixson que w -limite de γ , o qual denotaremos por $w(\gamma)$ será uma singularidade ou uma órbita periódica.

É fácil ver que $w(\gamma)$ não pode ser α_2 , já que α_2 é uma singularidade do tipo sela.

Também vemos que o $w(\gamma)$ não pode ser uma órbita periódica, pois se isto acontecesse, implicaria na existência de uma singularidade no interior da faixa, o que é uma contradição, uma vez que o campo Z tem somente 4 singularidades.

Assim sendo, segue que o $w(\gamma)$ será a singularidade $(0, \frac{4}{5})$.

Logo, existirá uma única órbita γ de Z , situada no interior da faixa B tal que γ une os pontos α_2 e α_1 , donde segue o que queríamos.

(2.3.5) **Obs.** Sabemos que o gráfico da aplicação de Poincaré (ou $Gr(P)$) é uma linha do fluxo do campo Z , cuja dinâmica pode ser vista na Figura 2.3.1. A seguir iremos estudar o comportamento de uma “tal linha” do fluxo, de onde podemos verificar que o $Gr(P)$ neste caso ($\mu_0 = 1$) é dado pela Figura 2.3.4.

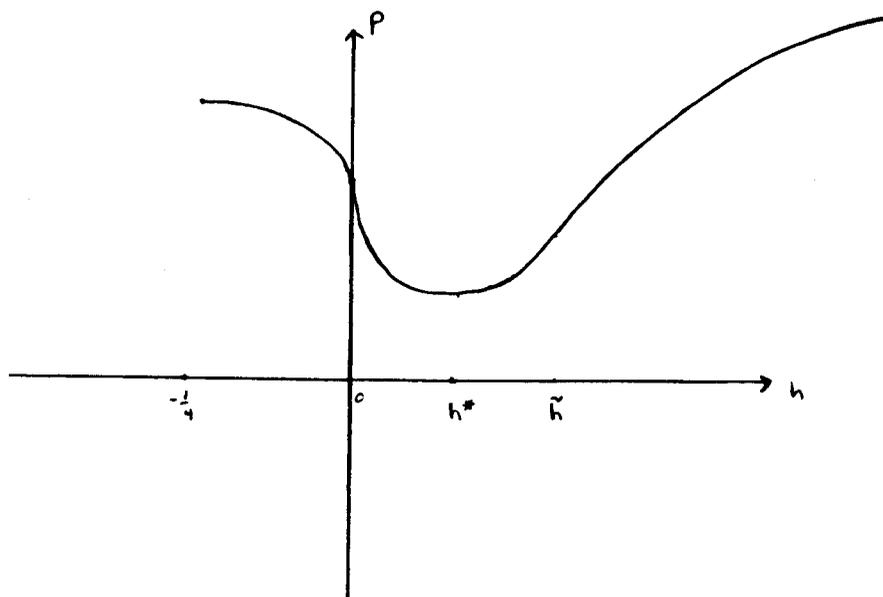


Figura 2.3.4. Gráfico da aplicação P para o caso $\mu_0 = 1$

Proposição (2.3.E.) Quando $\mu_0 = 1$ temos:

- i) $P(-\frac{1}{4}) = 1$.
- ii) O gráfico da aplicação P é uma curva solução γ do campo Z .
- iii) a) $P(0) = \frac{4}{5}$; b) $P'(-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{2}$ c) $P'(0) = -\infty$.
- iv) A imagem de $[-\frac{1}{4}, 0]$ por P está contida em $[\frac{4}{5}, 1]$, isto é, $P[-\frac{1}{4}, 0] \subset [\frac{4}{5}, 1]$.
- v) P é estritamente decrescente em $[-\frac{1}{4}, 0]$.
- vi) $P(h) > \frac{1}{2} \quad \forall h > 0$.

vii) $P(h) \rightarrow +\infty$ quando $h \rightarrow +\infty$.

viii) Quando $h \rightarrow +\infty$ temos $P(h) \simeq k\sqrt{h}$, onde $k = \text{cte} > 0$.

ix) $P'(h) \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow +\infty$.

x) P é estritamente decrescente em $]0, h^*];$ estritamente crescente em $h > h^*$, para um único $h^* > 0$.

xi) P é convexa em $] -\frac{1}{4}, 0[$.

xii) $P''(h) > 0$ quando $h > 0$ e $P'(h) \leq 0$.

xiii) $\exists \tilde{h} > h^*$ tal que $P'''(\tilde{h}) = 0$; $P'''(h) > 0$ se $0 < h < \tilde{h}$ e $P'''(h) < 0$ se $h > \tilde{h}$.

Vejamos a prova da Proposição (2.3.E).

Estaremos considerando as mesmas notações; e as mesmas conveniências como foi feito na proposição (1.6.A).

Prova de 2.3.E.i.

(2.3.6) Temos que $I_0(h) = 4 \int_0^c \sqrt{u^2 - \frac{u^4}{2} + 2h} du > 0$ já que $\sqrt{u^2 - \frac{u^4}{2} + 2h}$ é uma função contínua e positiva.

(2.3.7) Segue ainda por (1.5.4) que $u \rightarrow \pm 1$ quando $h \rightarrow -\frac{1}{4} \Rightarrow u^2 \rightarrow 1$ quando $h \rightarrow -\frac{1}{4}$.

(2.3.8) Também temos que $v(u) = \sqrt{u^2 - \frac{u^4}{2} + 2h}$ não muda de sinal e é contínua em $u \in I = \left[-\sqrt{\frac{2 - \sqrt{4 + 8h}}{2}}, \sqrt{\frac{2 + \sqrt{4 + 8h}}{2}}\right]$, donde segue que $\int_{\gamma_h} u^2 v du = 4 \int_0^c u^2 v(u) du = 4(u^2)^* \int_0^c v(u) du$ para algum $(u^2)^* \in \left[0, \frac{2 + \sqrt{4 + 8h}}{2}\right]$.

(2.3.9) Podemos concluir que $(u^2)^* \rightarrow 1$ quando $h \rightarrow -\frac{1}{4}$.

Logo pelas observações dadas por (2.3.6); (2.3.7); (2.3.8); (2.3.9) segue que

$$P(-\frac{1}{4}) = \lim_{h \rightarrow -\frac{1}{4}} P(h) = \lim_{h \rightarrow -\frac{1}{4}} \frac{I_1(h)}{I_0(h)} = \lim_{h \rightarrow -\frac{1}{4}} \frac{\int_{\gamma_h} u^2 v du}{\int_{\gamma_h} v du} =$$

$$\lim_{h \rightarrow -\frac{1}{4}} \frac{(u^2)^* \int_0^c v(u) du}{\int_0^c v(u) du} = \lim_{h \rightarrow -\frac{1}{4}} (u^2)^* = 1 \quad \blacksquare$$

Prova de 2.3.E.ii.

Por (2.3.E.i) temos $P(-\frac{1}{4}) = 1$ e pela Obs. (2.3.4) segue que o gráfico de P coincide com a órbita γ . ■

Prova de 2.3.E.iii.

Notemos que:

(2.3.10) o item (a) é imediato de (2.3.E.ii) pois o w -limite de γ é igual a $(0, \frac{4}{5})$.

(2.3.11) o item (b) segue de (2.3.1.c) ao observar que $E_{\alpha_2}^u = [(-2, 1)]$.

(2.3.12) o item (c) é concluído a partir de de (2.3.1.e) ao notar também que α_1 é atrator.

■

Prova de 2.3.E.iv.

(2.3.13) Isto segue de (2.2.6) uma vez que $\dot{P}|_{P=\frac{4}{5}} = -\frac{12}{5}h > 0$ e $\dot{P}|_{P=1} = -1 - 4h < 0$; se $-\frac{1}{4} < h < 0$, ou seja, em $P = \frac{4}{5}$ a componente vertical do campo Z aponta para cima e em $P = 1$ a componente vertical do campo Z aponta para baixo.

Note que por (2.3.11) temos $P'(-\frac{1}{4}) < 0$ donde segue (pela continuidade de P') que $P'(h) < 0$ numa vizinhança V de $-\frac{1}{4}$, ou seja, P é estritamente decrescente em V .

Logo a curva solução $\gamma \equiv Gr(P)$ de (2.2.6), localmente está abaixo da linha $P = 1$.

Agora por (2.3.13), segue que γ não pode cortar a linha $P = \frac{4}{5}$ e nem a linha $P = 1$ para $-\frac{1}{4} < h < 0$.

Logo o gráfico de P fica abaixo da linha $P = 1$, e notando ainda que $P'(0) = -\infty$ (Ver 2.3.12) segue que o gráfico de P deverá ficar acima da linha $P = \frac{4}{5}$, tendo tangente com coeficiente angular igual a $-\infty$ em $(0, P(0))$. Logo segue (2.3.E.iv). ■

Prova de 2.3.E.v.

Provemos que $P' < 0 \quad \forall h \in]-\frac{1}{4}, 0[$.

Consideremos a equação $\dot{P} = 0$, isto é, a equação $-5P^2 - 8hP + 4h + 4P = 0$ a qual descreve os pontos onde o campo Z é horizontal.

Da equação $\dot{P} = 0$, por alguns cálculos diretos encontraremos

$$P_1(h) = \frac{-4h + 2 + \sqrt{16h^2 + 4h + 4}}{5}$$

$$P_2(h) = \frac{-4h + 2 - \sqrt{16h^2 + 4h + 4}}{5},$$

tais que $P_1(h) > \frac{1}{2}$ e $P_2(h) < \frac{1}{2} \quad \forall h \in]-\frac{1}{4}, 0[$.

É fácil ver que parte do gráfico de P_1 está contida na faixa B , ou seja, é um arco S o qual visto h em termos de P (ao longo de S) teremos que $h = \frac{4P - 5P^2}{8P - 4}$.

(2.3.14) Por (2.2.7) segue que $\dot{h} = -4h(1 + 4h) > 0 \quad \forall h \in]-\frac{1}{4}, 0[$, donde segue que a primeira componente do campo Z é horizontal para à direita.

(2.3.15) Observe que o campo Z é transversal sobre S uma vez que

$$P'_1(h) = -\frac{4}{5} + \frac{(2 + 16h)}{5\sqrt{16h^2 + 4h + 4}} < 0 \quad \forall h \in]-\frac{1}{4}, 0[.$$

Notemos ainda que $P'_1(-\frac{1}{4}) = -1$. Por outro lado $P'(-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{2} > P'_1(-\frac{1}{4}) = -1$, donde vemos que a reta tangente a S no ponto α_2 tem inclinação igual a -1 , cujo valor é inferior a inclinação da reta tangente a órbita $\gamma \equiv Gr(P)$, a qual é igual a $-\frac{1}{2}$.

Logo (por continuidade de P') segue que $Gr(P)$ numa vizinhança W de α_2 está acima da curva S em W .

(2.3.16) Como o campo Z é horizontal, direcionado para a direita em S (Ver 2.3.14) e transversal a S (Ver 2.3.15) segue que γ não pode cortar o arco S quando $t \rightarrow +\infty$, e portanto, γ está inteiramente contida na faixa B , situada acima de S (Ver Figura 2.3.5).

Por outro lado temos que $P'(-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{2} < 0$, donde segue (pela continuidade de P') que $P'(h) < 0$ numa vizinhança \tilde{V} de $h = -\frac{1}{4}$.

(2.3.17) Logo para $h > -\frac{1}{4}$, com $h \in \tilde{V}$ teremos que $\dot{P} < 0$ pois $\dot{P} = \frac{P'}{\dot{h}}$ (Ver Obs. 2.2.5.1) e $P' < 0$.

Agora em (2.3.16) vemos que a órbita γ está acima de S ; e portanto por (2.3.17) em algum ponto sobre o $Gr(P)$ temos $\dot{P} < 0$.

Logo, por continuidade de \dot{P} temos que $\dot{P} < 0$ na região acima de S , e em particular sobre $Gr(P)$.

Portanto, temos $\dot{P} < 0$ e $\dot{h} > 0$ sobre o $Gr(P)$; mas como $\dot{P} = \frac{P'}{\dot{h}}$, então segue que $P'(h) < 0 \ \forall h \in]-\frac{1}{4}, 0[$, donde segue o que queríamos. ■

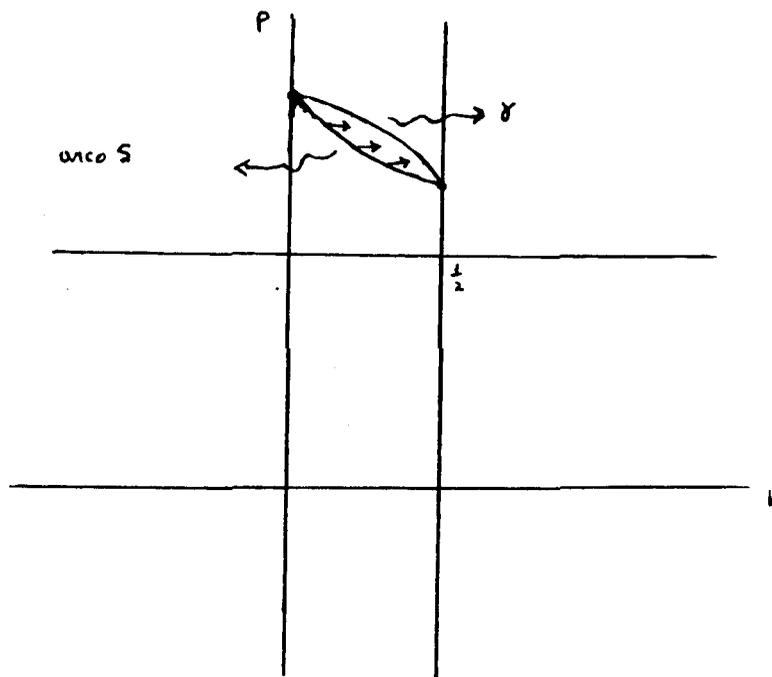


Figura 2.3.5. Uma parte do $Gr(P)$ acima da curva S

Prova de 2.3.E.vi.

Podemos observar por (2.2.6) que $\dot{P}|_{P=\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} > 0 \quad \forall h > 0$, ou seja, a segunda componente do campo Z em $P = \frac{1}{2}$, aponta para cima; donde segue que o $Gr(P)$ fica acima da linha $P = \frac{1}{2}$. ■

Prova de 2.3.E.vii.

Temos que $J_0(h)P(h) = I_1(h)$ onde

$$(2.3.18) \quad J_i(h) = \int_0^c w^{2i} \left(w^2 - \frac{w^4}{2} + 2h \right)^{1/2} dw$$

com c satisfazendo a equação $4h = c^4 - 2c^2$ (Ver item (i) da Prop. (1.7.A).)

Fazendo a substituição $w = cz$ em (1) e usando que $2h = \frac{c^4}{2} - c^2$ segue que:

$$\begin{aligned} J_i(h) &= \int_0^c c^{2i+1} z^{2i} \left(c^2 z^2 - \frac{c^4}{2} z^4 + 2h \right)^{1/2} dz = \\ &= c^2 \int_0^1 (cz)^{2i} \left((z^2 - 1) - \frac{c^2}{2} z^4 + \frac{c^2}{2} - 1 \right)^{1/2} dz, \end{aligned}$$

ou seja,

$$(2.3.19) \quad J_i(h) = c^2 \int_0^1 (cz)^{2i} g(z) \quad \text{onde} \quad g(z) = \left((z^2 - 1) - \frac{c^2}{2}(1 - z^4) \right)^{1/2}$$

Por um instante vejamos as seguintes afirmações:

- (2.3.20) a) Existe $D_1 > 0$ tal que $J_0(h) \leq D_1 c^3$
 b) Existe $D_2 > 0$ tal que $\frac{J_1(h)}{c^5} \geq D_2$.

Prova de (2.3.20.a). É de fácil verificação que $g(z) \leq \frac{c}{\sqrt{2}} \quad \forall 0 \leq z \leq 1$.

Logo

$$J_0(h) = c^2 \int_0^1 g(z) dz \leq c^2 \int_0^1 \frac{c}{\sqrt{2}} dz = \frac{c^3}{\sqrt{2}} = D_1 c^3 \quad \text{onde} \quad D_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad \blacksquare$$

Prova de (2.3.20.b).

Observemos que $J_1(h) = c^4 \int_0^1 z^2 g(z) dz$ (por 2.3.19).

Donde segue que

$$\frac{J_1(h)}{c^5} = \int_0^1 \frac{z^2 g(z)}{c} dz = \int_0^1 z^2 \left(\frac{z^2 - 1}{c^2} + \frac{(1 - z^4)}{2} \right)^{1/2} dz$$

ou seja,

$$\frac{J_1(h)}{c^5} = \int_0^1 z^2 \left(\frac{z^2 - 1}{c^2} + \frac{(1 - z^4)}{2} \right)^{1/2} dz.$$

Agora, notemos que $\lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{J_1(h)}{c^5} = \int_0^1 z^2 \left(\frac{(1 - z^4)}{2} \right)^{1/2} dz$.

De fato:

Consideremos $f_c(z) = 4z^2 \left(\frac{z^2 - 1}{c^2} + \frac{(1 - z^4)}{2} \right)^{1/2}$ e notemos que:

$$(2.3.20.1) \quad \lim_{c \rightarrow +\infty} f_c(z) = z^2 \left(\frac{1-z^4}{2} \right)^{1/2} = f(z) \quad \forall 0 \leq z \leq 1.$$

$$(2.3.20.2) \quad |f_c(z)| \leq z^2 \left(\frac{z^2-1}{2} + \frac{1-z^4}{2} \right)^{1/2} = g(z)$$

(2.3.20.3) g é integrável em $[0,1]$ pois g é contínua em $[0,1]$.

Logo, segue como consequência do Teorema da Convergência Dominada (Ver [F]) que

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int f_c(z) dz = \int_0^1 f(z) dz, \quad \text{ou seja,}$$

$$(2.3.20.4) \quad \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{J_1(h)}{c^5} = \int_0^1 f(z) dz = A > 0. \quad \blacksquare$$

(2.3.20.5) Agora, usando (2.3.20.a) e (2.3.20.b) obteremos que $P(h) = \frac{J_1(h)}{J_0(h)} \geq \frac{c^5 D_2}{c^3 D_1} = c^2 D$; $D > 0$.

Logo, fazendo $c \rightarrow +\infty \Rightarrow c^2 D \rightarrow +\infty \Rightarrow P(h) \rightarrow +\infty$, ou seja, segue o que queríamos.

Voltando em (2.3.18) vemos que fazendo $h \rightarrow +\infty \Rightarrow c \rightarrow +\infty$ pois $c \sim h^{1/4}$ quando $h \rightarrow +\infty$ (Ver em 2.3.18 a equação que c satisfaz), donde segue por (2.3.20.5) que $P(h) \rightarrow +\infty$. Portanto, segue o que queríamos.

Prova de 2.3.E.viii.

Veremos uma aproximação para P quando $h \rightarrow +\infty$.

Temos que $I_i(h) = 4J_i(h)$ onde

$$J_i(h) = \int_0^c w^{2i} \left(w^2 - \frac{w^4}{2} + 2h \right)^{1/2} dw \quad \text{com} \quad 4h = c^4 - 2c^2.$$

Analogamente ao que foi feito em (2.3.E.vii), fazendo a substituição $w = cz$ e usando que $2h = \frac{c^4}{2} - c^2$ obteremos que

$$I_i(h) = 4J_i(h) = 4c^{2i+3} \int_0^1 z^{2i} \sqrt{\frac{1-z^4}{2} + \frac{z^2-1}{c^2-1}} dz.$$

E novamente da equação $2h = \frac{c^4}{2} - c^2$ segue que $c \sim h^{1/4}$ quando $h \rightarrow +\infty$. Logo quando $h \rightarrow +\infty \Rightarrow c \rightarrow +\infty$.

Agora,

$$P(h) = \frac{J_1(h)}{J_0(h)} = c^2 \frac{\int_0^1 z^2 \sqrt{\frac{1-z^4}{2} + \frac{z^2-1}{c^2-1}} dz}{\int_0^1 \sqrt{\frac{1-z^4}{2} + \frac{z^2-1}{c^2-1}} dz}$$

ou seja,

$$\frac{P(h)}{c^2} = \frac{\int_0^1 z^2 \sqrt{\frac{1-z^4}{2} + \frac{z^2-1}{c^2-1}} dz}{\int_0^1 \sqrt{\frac{1-z^4}{2} + \frac{z^2-1}{c^2-1}} dz} .$$

Já sabemos que $c^2 \sim h^{1/2}$ uma vez que $c \sim h^{1/4}$.

Donde segue usando o Teorema da Convergência Dominada como vimos em 2.3.E.vii que

$$P(h) \sim k\sqrt{h} \quad \text{quando } h \rightarrow +\infty \text{ onde}$$

$$k = \frac{\int_0^1 z^2 \sqrt{\frac{1-z^4}{2}} dz}{\int_0^1 z^2 \sqrt{\frac{1-z^4}{2}} dz} . \quad \blacksquare$$

Prova de 2.3.E.ix

Segue de (2.3.E.vii) juntamente com a propriedade de P ser convexa e estritamente crescente para $h > \tilde{h}$, a qual será vista posteriormente em (2.3.E.x) e (2.3.E.xiii).

Prova de 2.3.E.x

Veremos agora que $\exists! h^* > 0$ tal que $P'(h^*) = 0$, $P'(h) < 0 \quad \forall h < h^*$ e $P'(h) > 0 \quad \forall h > h^*$.

Por 2.3.E.vii e por 2.3.E.ix segue que $\exists b_1 > 0$ tal que $P'(b_1) = 0$. Assim sendo basta mostrarmos que b_1 é um ponto de mínimo, isto é, $P''(b_1) > 0$.

De (1.7.15) e (1.7.17) segue as equações

$$(2.3.21) \quad \begin{cases} J_0 = -J'_1 + J'_2 \\ J_0 = -2hJ_0 - \frac{J'_2}{2} + J'_1 \end{cases}$$

e de (1.7.20) e (1.7.22) obtemos

$$(2.3.22) \quad \begin{cases} J_1 = \frac{J'_3}{3} - \frac{J'_2}{3} \\ J_1 = 2hJ_1 - \frac{J'_3}{2} + J'_2 \end{cases}$$

Agora, usando (2.3.21) e (2.3.22) temos as seguintes equações:

$$(2.3.23) \quad \begin{cases} 3J_0 = 4hJ'_0 + J'_1 \\ 15J_1 = (4 + 12h)J'_1 + 4hJ'_0 \end{cases}$$

(2.3.24) Por um momento vejamos a seguinte afirmação:

$$\text{Se } P'(h_1) = 0 \Rightarrow J_0(h_1)P''(h_1) = \frac{(P^2(h_2) + 8h_1P(h_1) - 4h_1)}{4h_1(1 + 4h_1)} J'_0(h_1) .$$

De fato:

(2.3.24.1) Inicialmente, observemos ser de fácil verificação que:

$$\text{se } P'(h_1) = 0 \Rightarrow J_0(h_1)P''(h_1) = I''_1(h_1) - P(h_1)J''_0(h_1) .$$

Agora, derivando 2 vezes de ambos os lados das equações (2.3.23), obteremos

$$(2.3.24.2) \quad \begin{cases} 4hJ'' + J''_1 = -J''_0 \\ 3J_1 - 4J'_0 = 4hJ''_0 + (4 + 12h)J''_1 \end{cases}$$

De (2.3.23) (resp. de (2.3.24.2)) segue que

$$(2.3.24.3) \quad \begin{cases} J'_0 = \frac{(4 + 12h)J_0 - 5J_1}{4h(1 + 4h)} \\ J'_1 = \frac{(-J_0 + 5J_1)}{4h(1 + 4h)} \end{cases}$$

$$(2.3.24.4) \quad \left(\text{resp.} \begin{cases} J''_0 = \frac{-(J'_1 + 4hJ'_0)}{4h(1 + 4h)} \\ J''_1 = \frac{(-4hJ'_0 + 4hJ'_1)}{4h(1 + 4h)} \end{cases} \right)$$

Agora, calculando a derivada de ordem 2 da igualdade $J_0P = J_1$, obteremos que

$$(2.3.24.5) \quad J_0P'' = \frac{(J''_1J_0 - J_1J''_0)}{J_0} - 2 \frac{(J'_1J_0 - J_1J'_0)}{J_0^2}.$$

(2.3.24.6) Ainda pode-se verificar que se $P'(h_1) = 0 \Rightarrow I'_0(h_1) P(h_1) = I'_1(h_1)$.

Logo, usando (2.3.24.6) em (2.3.24.5) obteremos que:

$$(2.3.24.7) \quad \begin{cases} J''_0(h_1) = -\frac{(J'_0(h_1)P(h_1) + 4h_1J'_0(h_1))}{4h_1(1 + 4h_1)} \\ J''_1(h_1) = \frac{-4h_1J'_0(h_1) + 4h_1P(h_1)J'_0(h_1)}{4h_1(1 + 4h_1)}. \end{cases}$$

Logo usando (2.3.24.3); (2.3.24.6); (2.3.24.7) obteremos que

$$(2.3.24.8) \quad J_0(h_1)P''(h_1) = \frac{(-4h_1 + 8h_1P(h_1) + P^2(h_1))}{4h_1(1 + 4h_1)} J'_0(h_1).$$

Voltando agora em (2.3.24.1) e comparando com (2.3.24.8) segue (2.3.24).

Seguindo agora com o uso de (2.3.24) podemos ver que

(2.3.24.9) $P''(h_1)$ tem o mesmo sinal que $P^2(h_1) + 8h_1P(h_1) - 4h_1$, uma vez que $J_0(h_1) > 0$;

$$\frac{J'_0(h_1)}{4h_1(1 + 4h_1)} > 0 \quad \text{para} \quad h_1 > 0,$$

e através do uso de (2.3.24.5) e (2.3.24.6) resultará a equação

$$(2.3.24.10) \quad 5P^2(h_1) + 8h_1P(h_1) - 4P(h_1) - 4h_1 = 0 \quad \text{com} \quad P(h_1) > \frac{1}{2}$$

(Ver Prop. (2.3.E.vi)), da qual resulta que

$$h_1 = \frac{-5P^2(h_1) + 4P(h_1)}{8P(h_1) - 4}.$$

Mas $h_1 > 0$ com $P(h_1) > \frac{1}{2}$ segue que $\frac{1}{2} < P(h_1) < \frac{4}{5}$.
Ainda de (2.3.24.9) obteremos a equação

$$(2.3.24.11) \quad P^2(h_1) + 8h_1P(h_1) - 4h_1 = 4(P(h_1) - P^2(h_1)),$$

a qual comparada com $P^2(h_1) + 8h_1P(h_1) - 4h_1$ (Ver (2.3.24.9)); podemos ver que $P''(h_1)$ tem o mesmo sinal que $P(h_1) - P^2(h_1)$.

Como o sinal de $P(h_1) - P^2(h_1)$ é positivo uma vez que $0 < P(h_1) < 1$ (Ver 2.3.24.10), então segue que $P''(h_1) > 0$.

Agora, quanto a unicidade de h , isto segue pelo fato de que se $P'(h) = 0$ para $h > 0 \Rightarrow P''(h) > 0$. ■

Prova de 2.3.E.xi

Mostraremos que $P'''(h) < 0 \quad \forall h \in] -\frac{1}{4}, 0[$.

Observemos que de (2.2.2) segue (2.3.25) e (2.3.26), isto é,

$$(2.3.25) \quad 2h(4h + 1)P'' = P'(5P - 12h - 4) + 4P - 2$$

$$(2.3.26) \quad 2h(4h + 1)P''' = P''(5P - 28h - 6) + P'(5P' - 8)$$

$$(2.3.27) \quad \text{Usando (2.3.25) e os itens (2.3.E.i); (2.3.E.ii) podemos verificar que } P'''(-\frac{1}{4}) = -\frac{7}{8}.$$

Daí, $P'''(-\frac{1}{4}) < 0 \Rightarrow$ pela continuidade de P''' que $P'''(h) < 0$ numa vizinhança de $h = -\frac{1}{4}$.

(2.3.28) Em direção ao que queremos, suponhamos que $\exists \hat{h} \in]-\frac{1}{4}, 0[$ tal que $P''(\hat{h}) = 0$ e que $P''(h) < 0$ para $-\frac{1}{4} < h < \hat{h}$.

Fazendo $h = \hat{h}$ em (2.3.26) obtemos:

$$2\hat{h}(4\hat{h} + 1)P'''(\hat{h}) = P'(\hat{h})(5P'(\hat{h}) - 8)$$

donde segue que

$$P'''(\hat{h}) = \frac{5P'(\hat{h}) - 8}{2\hat{h}(4\hat{h} + 1)}.$$

Note $P'''(\hat{h}) < 0$, uma vez que $P'(\hat{h}) < 0 < \frac{8}{5}$ (Ver 2.3.E.v); e que $2\hat{h}(4\hat{h} + 1) < 0$ para $\frac{1}{4} < \hat{h} < 0$.

Assim sendo, isto é, $P'''(\hat{h}) < 0 \Rightarrow P''$ é estritamente decrescente numa vizinhança \hat{V} de \hat{h} .

Logo se $\bar{h} < \hat{h}$ em $\hat{V} \Rightarrow P''(\bar{h}) > P''(\hat{h}) = 0$, ou seja, $\exists \bar{h} \in \hat{V}; P''(\bar{h}) > 0$.

Por outro lado sabemos que $P''(-\frac{1}{4}) < 0$, então segue pela continuidade de P'' que $\exists h' \in (-\frac{1}{4}, \hat{h})$ tal que $P''(h') = 0$, o que é uma contradição pois por hipótese temos $P''(h) < 0$ para $-\frac{1}{4} < h < \hat{h}$ (Ver 2.3.28).

Portanto $P''(h) \neq 0 \quad \forall h \in]-\frac{1}{4}, 0[$. Mas por outro lado $P''(-\frac{1}{4}) < 0$; o que logo (pela continuidade de P'') temos que $P''(h) < 0 \quad \forall h \in]-\frac{1}{4}, 0[$. ■

Prova de 2.3.E. xii

Por (2.3.E.x) $\exists! h^* > 0$ tal que $P'(h) < 0$ quando $0 < h < h^*$ e $P'(h^*) = 0$. Então segue que P é estritamente decrescente em $]0, h^*[$, donde obtemos que $P(h) < \frac{4}{5}$ em $]0, h^*[$, ou seja que $5P - 4 < 0$.

Recordando por 2.3.E.vi temos $P(h) > \frac{1}{2} \forall h > 0$. Assim sendo, temos $P''(h) > 0 \forall h > 0$ e $P'(h) \leq 0$, uma vez que por (2.3.25) temos que

$$P'' = \frac{P'(5P - 4 - 12h) + 4P - 2}{2h(1 + 4h)}. \quad \blacksquare$$

Prova de 2.3.E. xiii

Como P'' é contínua, segue por (2.3.E.viii) e (2.3.E.xii) e pela continuidade de P'' que $\exists h > 0$ tal que $P''(h) = 0$ com $h > h^*$.

Unicidade de \tilde{h} .

Seja \tilde{h} o primeiro tal h . Portanto $\tilde{h} > h^*$.

Assim sendo, necessariamente devemos ter $P'''(\tilde{h}) \leq 0$.

De fato:

(2.3.29) Suponha que $P'''(\tilde{h}) > 0 \Rightarrow P''(h)$ é est. crescente numa vizinhança $\bar{V} =]\tilde{h} - \varepsilon, \tilde{h} + \varepsilon[$.

(2.3.30) Mas por hipótese $P''(h) > 0$ para $h \in]\tilde{h} - \varepsilon, \tilde{h}[$

Agora, com maior razão, segue de (2.3.29) e (2.3.30) que $P''(h) > 0$ em $]\tilde{h} - \varepsilon, \tilde{h} + \varepsilon[$, o que é um absurdo!, pois \tilde{h} é um ponto de inflexão!

Ainda, observemos que $P'''(\tilde{h}) = 0$ não poderá acontecer.

Façamos a prova disso por contradição.

Suponhamos que temos $P'''(\tilde{h}) = 0$. Sabemos que $P''(\tilde{h}) = 0$, donde segue de (2.3.26) que $P'(\tilde{h}) = \frac{8}{5}$.

Derivando ambos os lados da igualdade dada em (2.3.26), e usando que $P'(\tilde{h}) = \frac{8}{5}$; $P''(\tilde{h}) = P'''(\tilde{h}) = 0$, obtemos que $P^{(4)}(\tilde{h}) = 0$.

Logo, tomando as derivadas sucessivas calculadas em $h = \tilde{h}$, e através de (2.3.26) podemos verificar que $P^{(5)}(\tilde{h}) = P^{(6)}(\tilde{h}) = \dots = P^{(n)}(\tilde{h}) = \dots = 0 = \dots$.

Assim, podemos concluir que P é um polinômio, pois em torno de \tilde{h} temos:

$$P(h) = P(\tilde{h}) + P'(\tilde{h})(h - \tilde{h}), \quad \text{ou seja,}$$

$$P(h) = P(\tilde{h}) + \frac{8}{5}(h - \tilde{h}),$$

o que é um absurdo!, pois P é analítica mas não é um polinômio, uma vez que $P'(0) = -\infty$ (Ver 2.3.E.iii).

Logo devemos ter $P'''(\tilde{h}) < 0$.

Agora, por um momento vejamos as seguintes observações:

Obs. (2.3.31) Os zeros de $P'(h)$ ocorrem com $P''(h) > 0$. Isto segue de (2.3.25).

Obs. (2.3.32) $P'(\tilde{h}) < \frac{8}{5}$.

Usando (2.3.26) do item (xi) quando $h = \tilde{h}$ ficaremos com

$$(2.3.32.1) \quad 2\tilde{h}(4\tilde{h} + 1)P'''(\tilde{h}) = P'(\tilde{h})(5P'(\tilde{h}) - 8)$$

Por outro lado, temos que $2\tilde{h}(4\tilde{h} + 1) > 0$; $P'''(\tilde{h}) < 0$ e $P'(\tilde{h}) > 0$ pois $\tilde{h} > h^*$ (Ver 2.3.E.x), donde segue (2.3.32).

(2.3.33) Vejamos agora através do uso de (2.3.31) e (2.3.32) que \tilde{h} é o único ponto de inflexão.

De fato:

Suponhamos que $\exists h_1 > \tilde{h}$ tal que $P''(h_1) = 0$.

Logo segue que $P'(h_1) < P'(\tilde{h}) < \frac{8}{5}$ (Ver 2.3.32). Por outro lado, usando (2.3.31) obtemos que $P'(h_1) > 0$.

Notemos ainda que segue de (2.3.26) $P'''(h_1) < 0$, uma vez que $P'(h_1) > 0$; $P''(h_1) = 0$ e $0 < P'(h_1) < \frac{8}{5}$.

Tendo $P'''(h_1) < 0$ então segue pela continuidade de P''' que \exists uma vizinhança W de h_1 tal que $P'''(h) < 0$ em W , ou seja, P'' é estritamente decrescente em W . Logo

pela continuidade de P'' segue que \exists um ponto $\xi_0 \in]\tilde{h}, h_1[$ tal que $P''(\xi_0) = 0$, o que é um absurdo!, uma vez que temos por hipótese $P''(h) \neq 0 \quad \forall h \in]\tilde{h}, h_1[$. ■

A seguir estudaremos o caso $\mu_0 = 0$, mostrando o retrato de fase e o gráfico da aplicação P associado ao campo Z nesse caso.

Primeiramente veremos que o retrato de fase do campo Z será dado pela Figura (2.3.6).

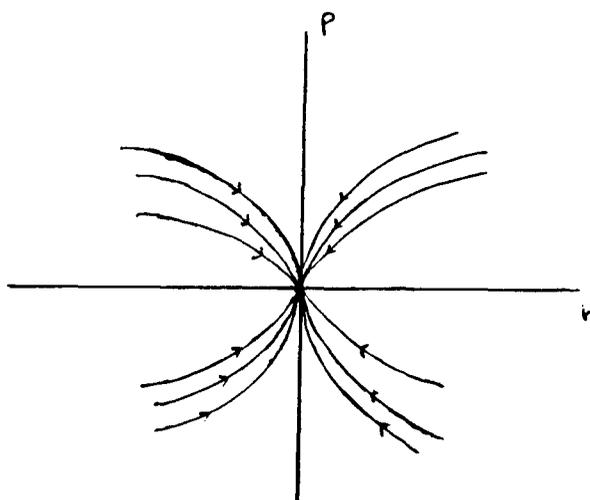


Figura 2.3.6. Retrato de fase do campo Z quando $\mu_0 = 0$

Proposição. (2.3.F) Quando $\mu_0 = 0$, o retrato de fase do campo (2.2.7) é dado pela Figura 2.3.6.

Prova: Segue de (2.2.6) que

$$(2.3.34) \quad \begin{cases} \dot{h} = -16h^2 \\ \dot{P} = -8hP \end{cases},$$

cujo sistema resolvendo diretamente obtém-se

$$h(t) = \frac{1}{16(t + c_1)} ; \quad P(t) = \frac{c_2}{|t + c_3|^{\frac{1}{2}}}$$

donde segue que $P(h) = \lambda\sqrt{|h|}$ com $\lambda = \text{cte}$.

(2.3.35) **Obs.** O campo $Z(h, P) = (-16h^2, -8hP)$ definido em (2.3.34) tem o eixo P como conjunto de singularidades, ou seja, tem infinitas singularidades.

Logo, concluímos que o retrato de fase do campo associado a (2.3.34) é dado pela Figura (2.3.6).

Vejamos agora que o $Gr(P)$ é dado pela Figura 2.3.7.

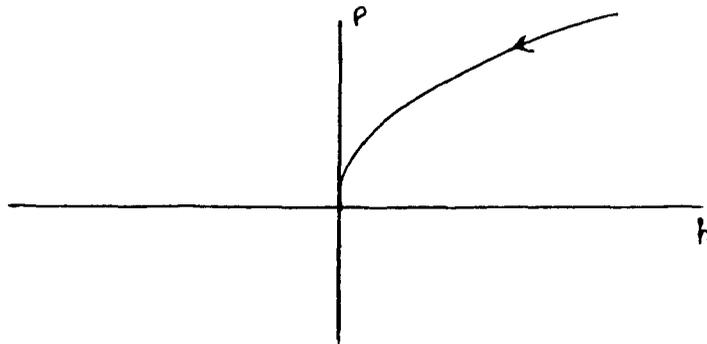


Figura 2.3.7. Gráfico da aplicação P quando $\mu_0 = 0$

Proposição. (2.3.G) Quando $\mu_0 = 0$, temos que $P(h) = k\sqrt{h} \quad \forall h > 0$, onde k é uma constante positiva dada no item viii) da Proposição 2.3.E (Ver Figura 2.3.7).

Prova. Temos pelo item (viii) da Proposição (2.3.E) que $P(h) \simeq k\sqrt{h}$ quando $h \rightarrow +\infty$, ou seja

$$|P(h) - k\sqrt{h}| \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad h \rightarrow +\infty.$$

Ainda pela Proposição (2.3.F) temos que $P(h) = \lambda\sqrt{|h|}$.

Agora,

$$|P(h) - k\sqrt{h}| = |\lambda\sqrt{h} - k\sqrt{h}| = |\lambda - k|\sqrt{h},$$

ou seja, $|\lambda - k|\sqrt{h} \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow +\infty$, donde segue que $|\lambda - k| \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow +\infty$.

Logo concluímos que $\lambda = k$. ■

(2.3.36) **Obs.** A aplicação P no caso $\mu_0 = 0$, está definida para valores de $h \geq 0$ (Ver 1.5.i).

A seguir, estudaremos o caso $\mu_0 = -1$, onde obteremos a Figura 2.3.8

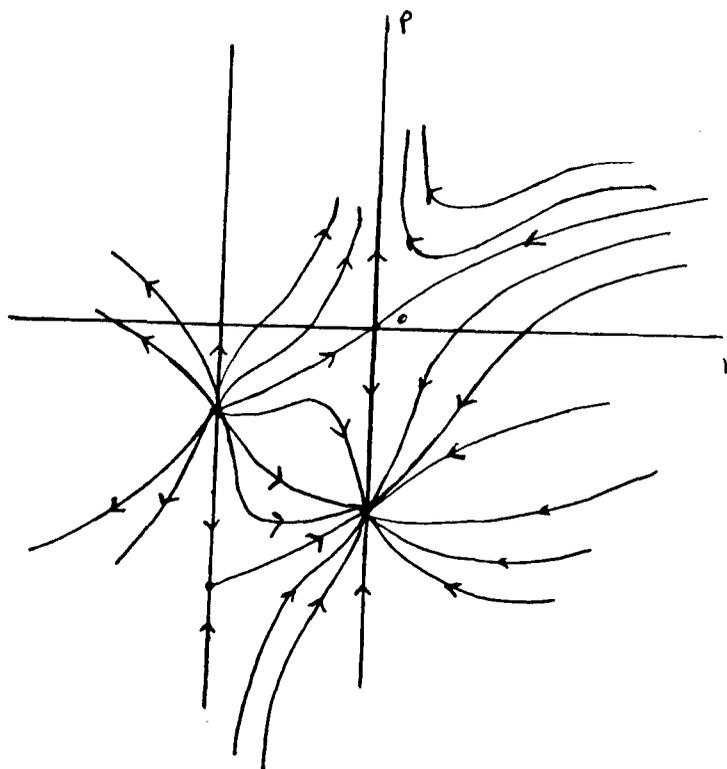


Figura 2.3.8. Retrato de fase do campo $Z : \mu_0 = -1$.

Proposição. (2.3.H) Para $\mu_0 = -1$, a dinâmica do campo (2.2.7) é dado pela Figura 2.3.8.

Temos aqui, uma analogia à Proposição (2.3.D). Assim sendo, segue de (2.2.7)

o sistema

$$(2.3.37) \quad \begin{cases} \dot{h} = -4h(1 + 4h) \\ \dot{P} = 5P^2 - 8hP - 4h + 4P \end{cases} ,$$

o qual define aqui (quando $\mu_0 = -1$) o campo Z dado por

$$Z(h, P) = (-4h(1 + 4h), 5P^2 - 8hP - 4h + 4P) .$$

Notamos ser de fácil verificação que:

(2.3.38) As singularidades do campo Z são dadas por $\beta_0 = (0, 0)$; $\beta_1 = (0, -\frac{4}{5})$; $\beta_2 = (-\frac{1}{4}, -1)$; $\beta_3 = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{5})$.

(2.3.39) As singularidades β_0, β_2 (resp. $\beta_1; \beta_3$) são do tipo sela (é um nó atrator; um nó repulsor).

(2.3.40) As retas $\mathcal{R}_1 = \{(-\frac{1}{4}, P) / P \in \mathbb{R}\}$ e $\mathcal{R}_2 = \{(0, P) / P \in \mathbb{R}\}$ são invariantes pelo fluxo do campo Z .

Logo, na mesma direção de estudo feito para $\mu_0 = 1$, podemos ver que o retrato de fase de Z (quando $\mu_0 = -1$) é dado pela Figura 2.3.8.

Vejamos agora que o $Gr(P)$ é dado pela Figura 2.3.9.

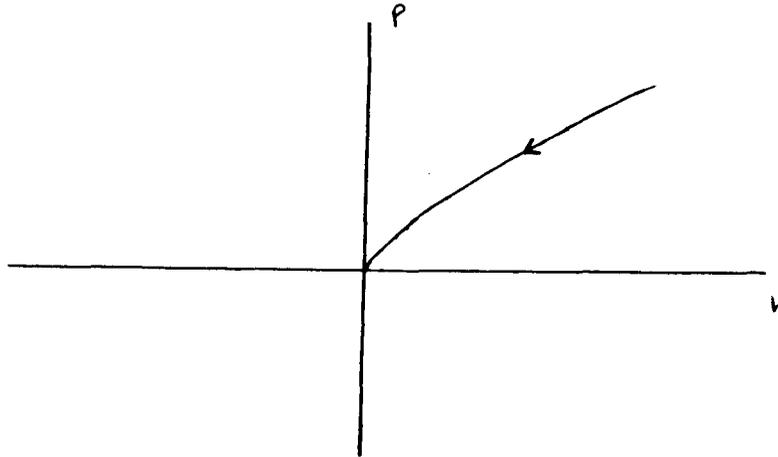


Figura 2.3.9. Gráfico da aplicação P quando $\mu_0 = -1$.

Proposição. (2.3.I) Para $\mu_0 = -1$ temos:

i) a) $P(0) = 0$; b) $P'(0) = \frac{1}{2}$ c) $P''(0) = -\frac{31}{24}$.

ii) O gráfico de $P(h)$ coincide com a separatriz estável do ponto de sela $\beta_0 = (0,0)$.

iii) $P'(h) > 0 \quad \forall h > 0$.

iv) $P''(h) < 0 \quad \forall h > 0$.

v) Quando $h \rightarrow +\infty$; $P(h) \simeq k\sqrt{h}$ com $k > 0$, onde k é dado na Proposição (2.3.E); item (viii) (Ver Figura 2.3.9).

Para a prova da Proposição (2.3.I) basta usar as mesmas idéias que foram usadas na Proposição (2.3.E), assim como faremos ligeiramente logo abaixo:

Prova de 2.3.I.i

Os itens a), b), c) são de fáceis verificação. ■

Prova de 2.3.I.ii

(2.3.41) Pode-se verificar que a linha R_2 é a variedade instável do ponto $\beta_0 = (0, 0)$. Logo existe uma única curva do campo Z , a qual chega nesse ponto e que está contida na região $\{(h, P)/h \geq 0 \text{ e } P \in \mathbb{R}\}$.

(2.3.42) Seja Γ uma “tal curva solução” dita em (2.3.41), tal que Γ contém a separatriz estável do ponto β_0 . Por 2.3.I.i temos que $P(0) = 0$. Assim sendo, segue-se que o gráfico de $P(h)$ coincide com a órbita Γ .

Prova de 2.3.I.iii

(2.3.43) Considerando a equação $\dot{P} = 0$, iremos encontrar por alguns cálculos diretos

$$\tilde{P}_1(h) = \frac{4h - 2 + 2\sqrt{16h^2 + h + 1}}{5} \quad \text{e} \quad \tilde{P}_2(h) = \frac{4h - 2 - 2\sqrt{16h^2 + h + 1}}{2} .$$

Pode-se verificar que \tilde{P}_2 não convém, uma vez que $\tilde{P}_2(0) = -\frac{4}{5}$. Assim iremos considerar \tilde{P}_1 .

Notemos agora ser de fácil verificação as seguintes observações envolvendo \tilde{P}_1 :

$$(2.3.44) \quad \tilde{P}_1(0) = 0 ; \tilde{P}_1(h) > 0 \quad \forall h > 0 .$$

(2.3.45) $\tilde{P}'_1(h) > 0 \quad \forall h > 0$, donde que o campo Z é transversal sobre o gráfico de $\tilde{P}_1(h)$.

(2.3.46) $\tilde{P}'_1(0) = 1$. Logo observando o item b) de (2.3.I.i), concluímos que a reta tangente ao gráfico de $\tilde{P}_1(h)$ no ponto $(0,0)$ tem inclinação superior a inclinação da reta tangente ao gráfico de $P(h)$; donde resulta pela continuidade \tilde{P}'_1 que o gráfico de $\tilde{P}_1(h)$ está acima do gráfico de $P(h)$, numa vizinhança \tilde{V} de 0.

(2.3.47) A órbita Γ não corta o gráfico de $\tilde{P}_1(h)$. Para isto, notemos que o campo Z é transversal sobre o gráfico de $\tilde{P}_1(h)$ (Ver 2.3.45), além disso, sendo horizontal apontando para à esquerda sobre o $Gr(\tilde{P}_1)$ pois temos $\dot{h} = -4h(1 + 4h) < 0$ e $\dot{P} = 0$.

(2.3.48) De (2.3.47) segue que a órbita Γ , ou seja, o gráfico de $P(h)$ fica abaixo do gráfico de $\tilde{P}_1(h)$.

(2.3.49) Em algum ponto do $Gr(P)$ temos $\dot{P} < 0$. Nesta direção, recordemos por (2.3.I.i) que $P'(0) = \frac{1}{2} > 0$, donde segue (pela continuidade de P') que $P'(h) > 0$ numa vizinhança $\tilde{W} \subset \tilde{V}$ de 0. Assim vemos que em algum ponto do gráfico de $P(h)$ temos $\dot{P}(t) < 0$ para algum instante t , pois observe que $\dot{P} = P'(h)\dot{h}$ com $P'(h) > 0$ em \tilde{W} e $\dot{h} < 0$.

Logo, por (2.3.48); (2.3.49); e também pela continuidade de $\dot{P} < 0$ e $\dot{h} < 0$ segue o que queríamos. ■

Prova de 2.3.I.iv

Pelo item i) da Proposição (2.3.I) temos que $P''(0) = -\frac{31}{24} < 0$, donde segue (por continuidade de P'') a existência de uma vizinhança W de 0 tal que $P''(h) < 0$ em W .

Agora, de (2.2.2) obtemos as igualdades abaixo (quando $\mu_0 = -1$):

$$(2.3.50) \quad 4h(4h + 1)P'' = -10PP' - 24hP' - 8P' + 8P + 4$$

$$(2.3.51) \quad 2h(4h + 1)P''' = P''(-5P - 28h - 6) + P'(-5P' - 8)$$

Logo temos que $P''(h) < 0 \ \forall h > 0$. (Isto resulta do uso de (2.3.50) e (2.3.51)), chegando numa contradição em supor que $\exists \hat{h} \in]0, +\infty[$ tal que $P''(\hat{h}) = 0$ e $P''(h) < 0 \ \forall 0 < h < \hat{h} < +\infty$ (Ver item (xi) da Prop. (2.3.E)).

Capítulo 3

Diagramas de Bifurcação

3.1. Introdução

Neste capítulo, estudaremos: a) o diagrama de bifurcação do sistema (0.4.16) relativo ao surgimento de duplo laço homoclínico simétrico de ordem 2; b) o diagrama de bifurcação para (0.4.16) quando $\varepsilon_1 > 0$ (resp. $\varepsilon_1 = 0; \varepsilon_1 < 0$) o que corresponde ao caso $\mu_0 = 1$ (resp. $\mu_0 = 0; \mu_0 = -1$) e finalizando c) análise qualitativa do diagrama de bifurcação de (0.4.16).

3.2. A bifurcação laço homoclínico simétrico de ordem 2

(3.2.A) **Proposição.** Se o sistema (0.4.16) tem uma bifurcação tipo duplo laço homoclínico simétrico de ordem 2 (HL_2), então o seu diagrama de bifurcação é dado pela Figura 3.2.1

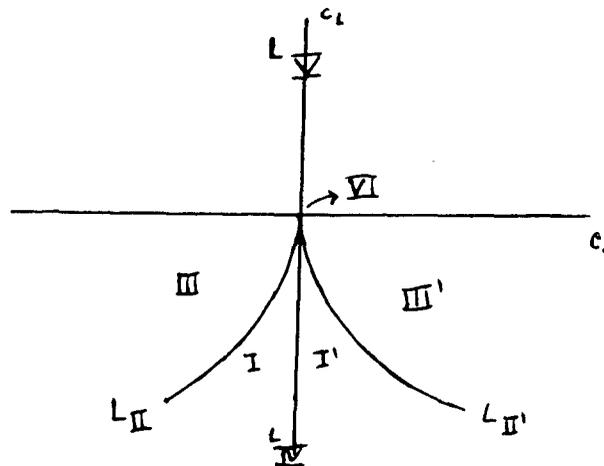
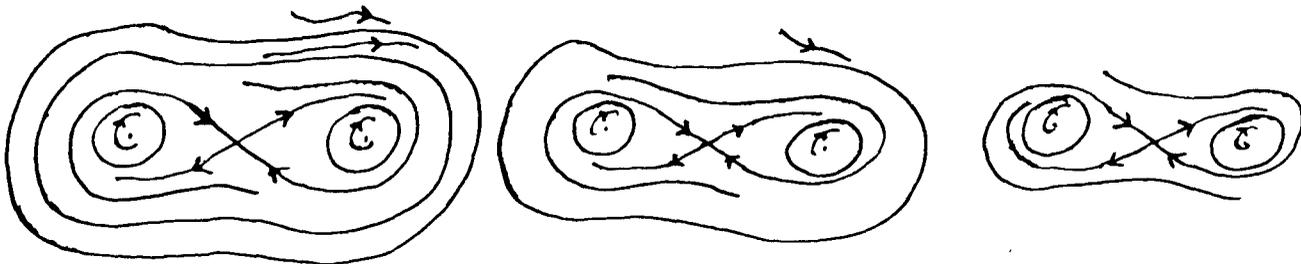


Figura 3.2.1. Diagrama de bifurcação tipo duplo laço homoclínica

Algumas Observações

Nas respectivas regiões da Figura 3.2.1 temos as seguintes configurações:

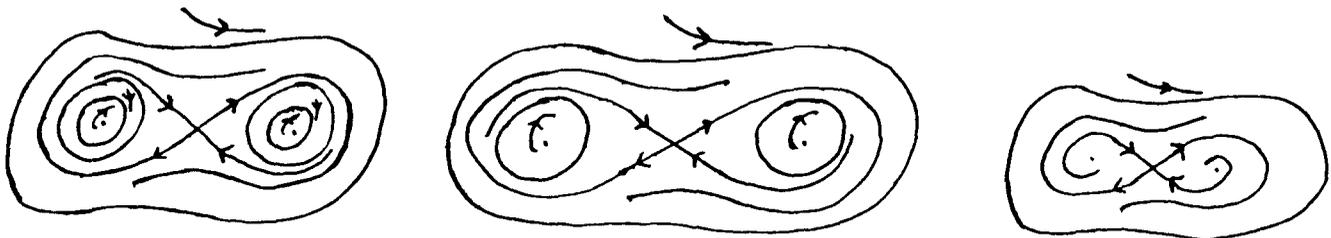


(a) Região I

(b) sobre a linha L_{II}

(c) Região III

Figura 3.2.2. Bifurcação ($2C_{ext}$) sobre a linha L_{II}

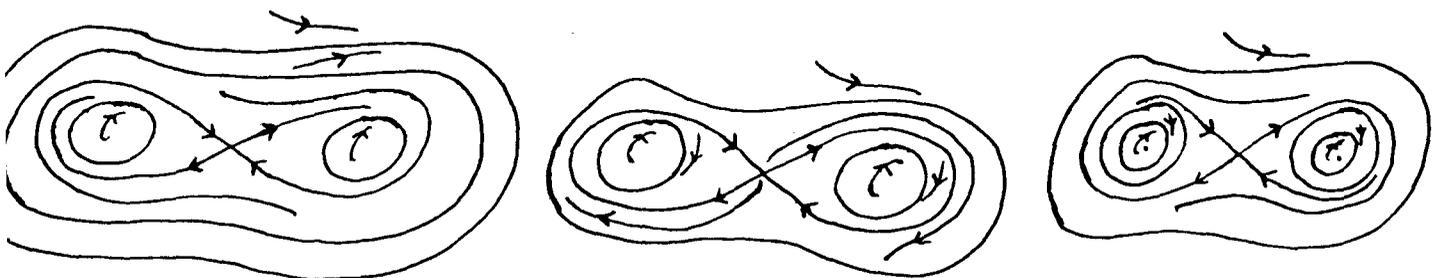


(d) Região I'

(e) sobre a linha L_{II}'

(f) Região III'

Figura 3.2.3. Bifurcação ($2C_{int}$) sobre a linha L_{II}'

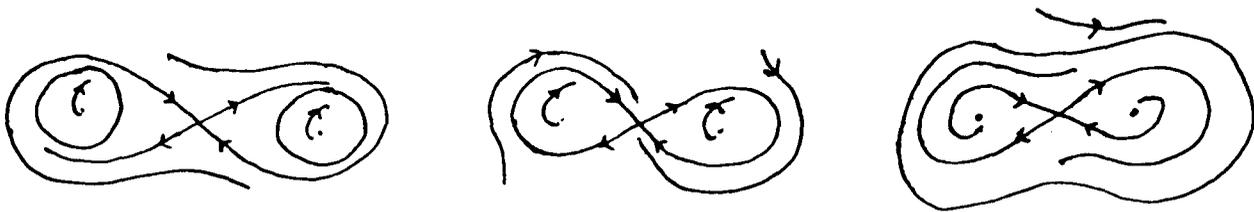


(g) Região I

(h) sobre linha L_{IV}

(i) Região I'

Figura 3.2.4. Bifurcação tipo (HL) sobre a linha L_{IV}

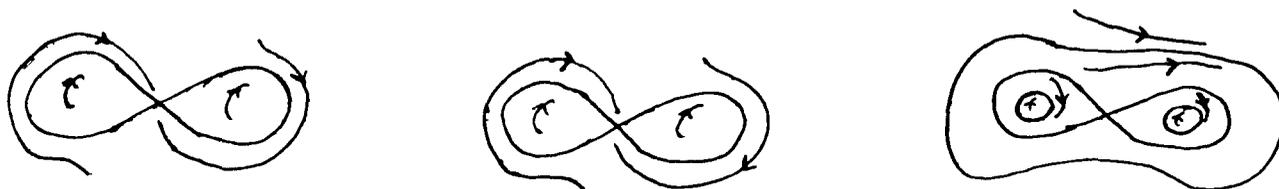


(j) Região III

(l) sobre a linha L_V

(m) Região III'

Figura 3.2.5. Bifurcação tipo (HL)



(n) sobre a linha L_V

(o) sobre a linha L_{VI}

(p) sobre a linha L_{IV}

Figura 3.2.6. Bifurcação tipo (HL_2) (Colapso de dois laços homoclínicos)

(3.2.1) **Obs.** Notemos que o duplo laço homoclínico simétrico surge quando $\varepsilon_1 > 0$ (Ver 1.5.i).

Consideremos a Figura 3.2.7.

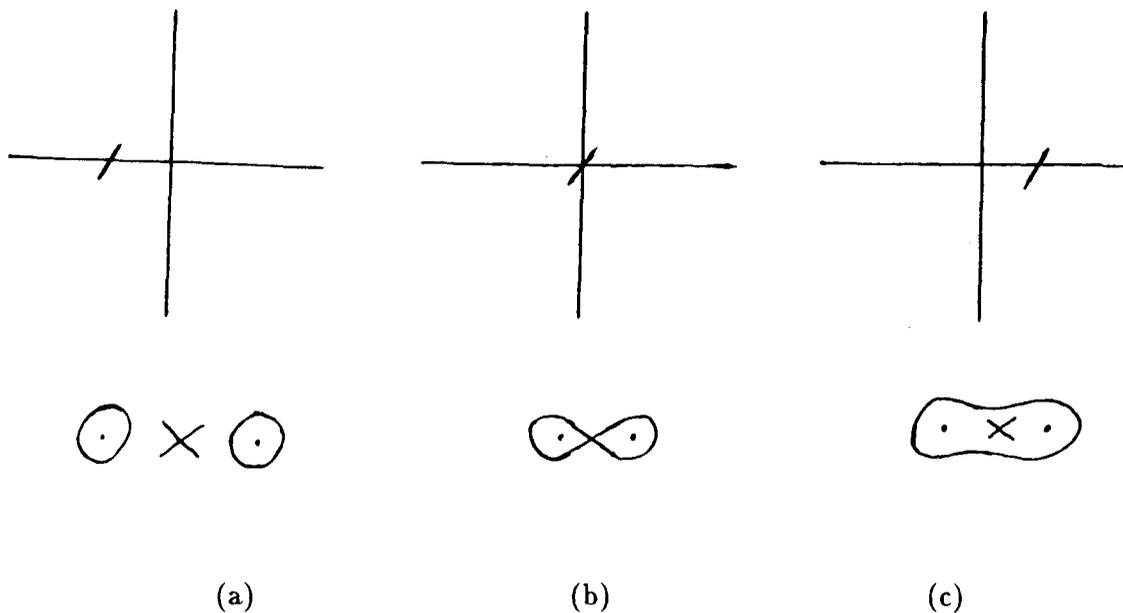


Figura 3.2.7. Ilustração dos zeros de $P_\varepsilon(h) - h$, juntamente com os correspondentes ciclos limites.

(3.3.2) Na Figura 3.2.7a temos um par de ciclos limites internos; em 3.2.7.b apresenta um duplo laço homoclínico simétrico; e na Figura 3.2.7.c temos um ciclo limite externo.

(3.2.3) **Obs.** Já foi observado em (1.4) que sob uma nova mudança de coordenadas (Ver 1.4.1) realizadas em (0.4.16), passamos a estudá-lo como uma perturbação de um sistema Hamiltoniano dado por (1.4.2).

Assim sendo, iremos dar o diagrama para a bifurcação tipo (HL_2) do sistema Hamiltoniano (1.4.3), quando este apresenta um tal tipo de bifurcação.

Observemos ainda que o duplo laço homoclínico simétrico ocorrendo para $\varepsilon_1 > 0$ (Ver 3.2.2), é estudado através de (1.4.3) quando temos $\mu_0 > 0$ (Ver 1.5; i).

Prova da Proposição (3.2.A).

A demonstração da Proposição (3.2.A) decorre dos seguintes passos: (3.2.4) até (3.2.15).

(3.2.4) Recordando por (1.5.9), temos que o nível $h = 0$ corresponde ao laço duplo homoclínico simétrico para o sistema (1.4.3) (ver Figura 3.2.3.b).

Vejamos que podemos definir a aplicação de Poincaré numa vizinhança do duplo laço homoclínico simétrico.

Consideremos a Figura 3.2.8.

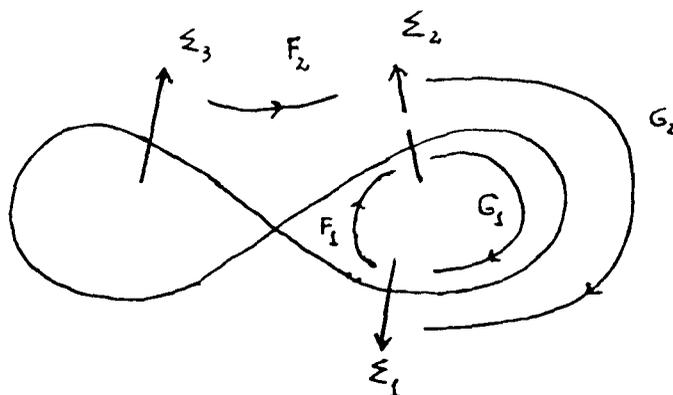


Figura 3.2.8. Aplicação de Poincaré numa vizinhança do laço duplo homoclínico simétrico

Consideremos as seções transversais como na Figura 3.2.8, onde as parametrizações: $\alpha_i : I_i \subset \mathbb{R} \rightarrow \Sigma_i$ ($i = 1, 2, 3$) são dadas pelo nível h , as quais são zero sobre o laço e crescente no sentido das selas.

Seja X_t o fluxo do campo (1.4.3) no tempo t e as aplicações F_2, G_2, F_1, G_1 como

mostra a Figura 3.2.8, onde

$$\begin{aligned} F_2 : \Sigma_3 \rightarrow \Sigma_2 & \quad ; \quad G_2 : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1 \\ p \rightarrow F_2(p) = X_{t_p}(p) & \quad ; \quad q \rightarrow G_2(q) = X_{t_q}(q) \\ \\ F_1 : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2 & \quad ; \quad G_1 : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1 \\ r \rightarrow F_1(r) = X_{t_r}(r) & \quad ; \quad s \rightarrow G_1(s) = X_{t_s}(s) \end{aligned}$$

com t_p (resp. t_q, t_r, t_s) sendo o tempo que o ponto p (resp. q, r, s) leva para chegar até Σ_2 (resp. $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_1$).

Pode-se verificar que a aplicação de Poincaré numa vizinhança do laço duplo homoclínico simétrico é dada por:

$$H(h) = \begin{cases} H_2(h) = G_2 \circ F_2(h) & \text{se } h > 0 \\ H_1(h) = G_1 \circ F_1(h) & \text{se } h \leq 0 \end{cases}$$

(3.2.5.) Assim sendo, notemos que um ponto fixo $h > 0$ (resp. $h < 0$) para a aplicação P , corresponde a um ciclo limite externo ao laço (resp. a um par de ciclos limites internos ao laço). (Observe a Figura 3.2.2.c (resp 3.3.3.a)), e para $h = 0$ corresponde ao laço duplo homoclínico simétrico. (Ver [Ra2]).

Obs: Por causa da simetria a aplicação retorno do lado externo ao duplo laço é dada por H_2^2 . Além disso, desde que H_2 é monótona, é de fácil verificação que H_2^2 tem um ponto fixo se e só se H_2 tem um ponto fixo.

Agora, a função de Melnikov associada ao sistema (1.4.2) é dada por

$$M(h) = \int_{\gamma_h} (\mu_1 v + \mu_2 u^2 v - u^4 v) du .$$

Logo, o número de ciclos limites é dado pelo número de raízes de $M(h)$ (Ver 1.6.5).

Assim, para a bifurcação tipo (HL_2) estamos interessados no número de raízes

da seguinte expansão assintótica:

$$(3.2.6) \quad M(h) = c_0 + c_1 h \ell n|h| + c_2 h + o(h) \quad (\text{Ver [D, R, S, Z]; [R, Z]; [Ra2]}).$$

Por (a) temos $M(0) = 0$, mas por outro lado, temos

$$(3.2.7) \quad M(0) = \lim_{h \rightarrow 0} (c_0 + c_1 h \ell n|h| + c_2 h + o(h)) \quad \text{donde segue} \quad M(0) = c_0 .$$

Portanto $c_0 = 0$.

Agora, $M'(h) = c_1(1 + \ell n|h|) + c_2 + \tilde{o}(h)$ e daí resulta que

$$\lim_{h \rightarrow 0} M'(h) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c_1 \neq 0 \\ c_2 & \text{se } c_1 = 0 . \end{cases}$$

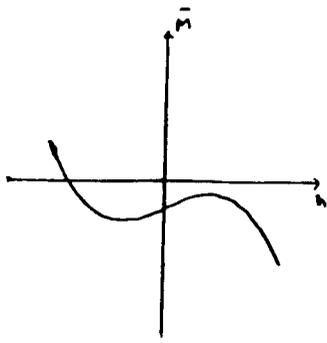
Usando o item (2) de (1.6.6) segue que devemos ter $c_1 = 0$, pois por hipótese, o sistema tem uma bifurcação tipo (HL_2) .

Logo, teremos uma bifurcação tipo (HL_2) quando $c_0 = c_1 = 0$.

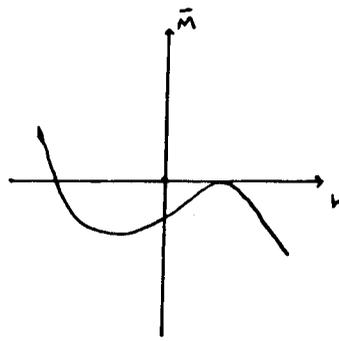
Ainda temos que $M'(h) = c_2$; e pelo item (2) de (1.6.6) segue que devemos ter $M'(h) \neq 0$, isto é, $c_2 \neq 0$, uma vez que nossa hipótese é satisfeita. (Ver 1.6.6).

Novamente, pelo item (2) de (1.6.6) segue que c_2 é finito pois se $c_2 = \pm\infty$, então deveríamos ter bifurcação tipo (HL_3) , o que é impossível pela nossa hipótese. Logo $c_2 \neq 0$ e finito.

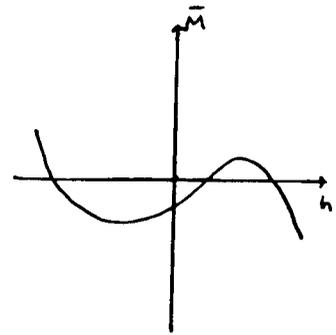
Consideremos a Figura 3.2.9.



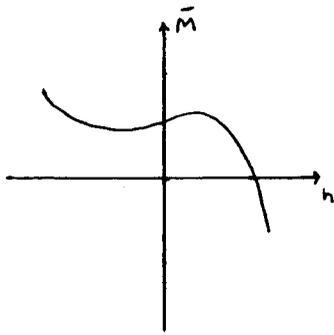
(a)



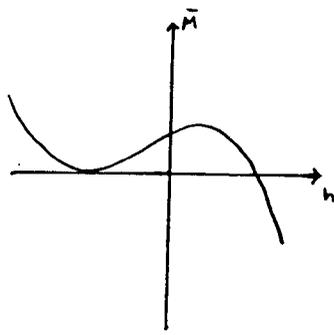
(b)



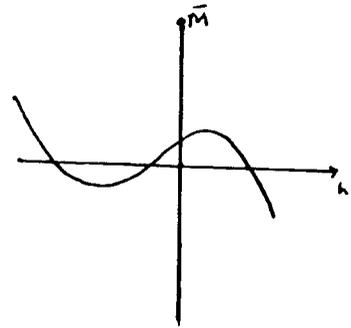
(c)



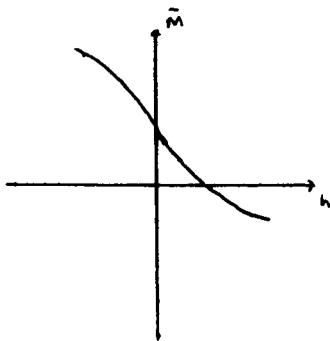
(d)



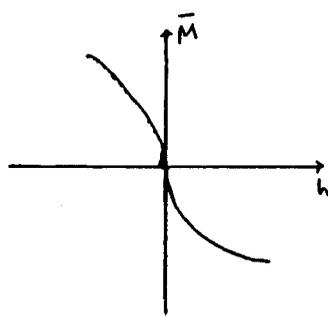
(e)



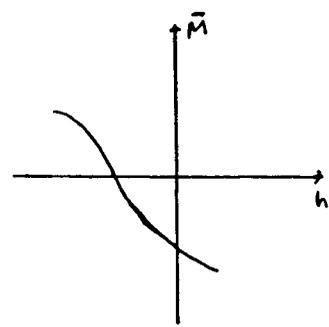
(f)



(g)



(h)



(i)

Figura 3.2.9. Alguns respectivos gráficos para a função $M(h)$ dada em (3.2.6).

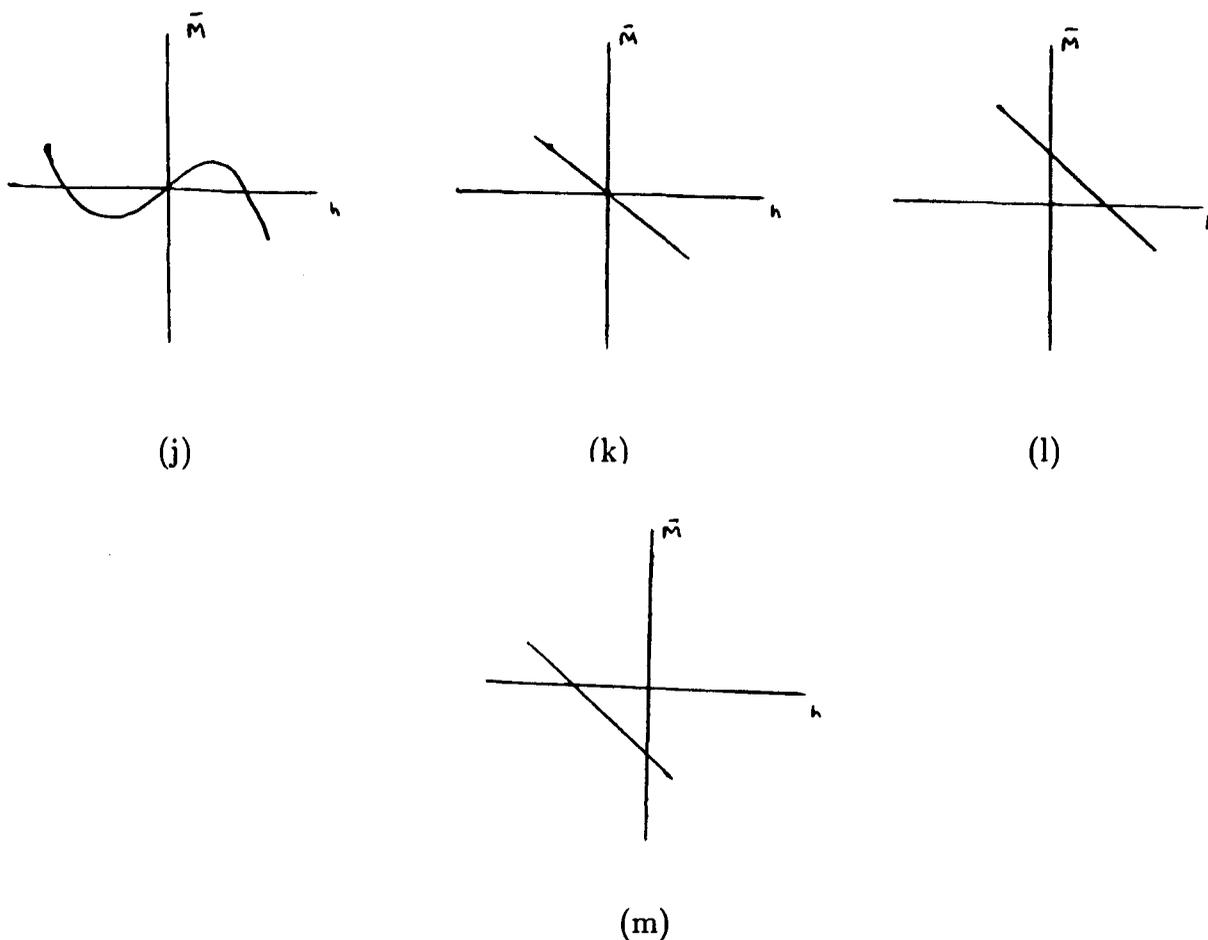


Figura 3.2.9. Alguns respectivos gráficos para a função $M(h)$ dada em (3.2.6).

(3.2.8) Obs. A seguir, por uma questão de orientação das seções locais em torno do laço, podemos escolher $c_2 < 0$.

Assim sendo, podemos supor $c_2 = -1$ e determinar o diagrama de bifurcação para a bifurcação tipo (HL) , a qual será descrita no espaço de parâmetros (c_0, c_1) , onde obteremos a Figura 3.2.9.

Logo, estudando o comportamento aproximado para o gráfico de $M(h) = 0$ (Ver Figura 3.2.9) pode-se observar que:

(3.2.8.1) Para $c_0 < 0; c_1 < 0$ ocorrerá sempre uma raiz negativa para M ; (Ver Figuras 3.2.9.a); b); c).

(3.2.8.2) Para $c_0 > 0; c_1 < 0$ temos sempre uma raiz positiva para M ; (Ver Figuras 3.2.9.d); e); f).

(3.2.8.3) Na região $c_0 < 0; c_1 < 0$ ocorrem duas raízes positivas para $|c_0| \ll |c_1| \ll |c_2|$, e desaparecem quando $|c_0|$ e $|c_1|$ crescem (Ver Figuras 3.2.9.a); b); c).

(3.2.8.4) Na região $c_0 > 0; c_1 < 0$ temos que ocorre duas raízes negativas para $|c_0| \ll |c_1| \ll |c_2|$, e desaparecem quando $|c_0|$ e $|c_1|$ crescem (Ver Figuras 3.2.9.d); e); f).

(3.2.8.5) Na linha $c_0 = 0; c_1 > 0$ temos uma única raiz $h = 0$ (Ver Figura 3.2.9.h).

(3.2.8.6) Na linha $c_0 = 0; c_1 < 0$ temos três raízes: uma positiva; igual a zero e a outra negativa (Ver Figura 3.2.9.j).

(3.2.8.7) No ponto $c_0 = c_1 = 0$ temos uma única raiz $h = 0$ (Ver Figura 3.2.9.k).

(3.2.8.8) Na região $c_0 > 0; c_1 > 0$ para valores próximos de zero, temos uma única raiz positiva (Ver Figura 3.2.9.g).

(3.2.8.9) Na região $c_0 < 0; c_1 > 0$ para valores próximos de zero, temos uma única raiz negativa (Ver Figura 3.2.9.i).

(3.2.8.10) Para $c_0 > 0; c_1 = 0$ temos uma única raiz positiva (Ver Figura 3.2.9.l).

(3.2.8.11) Para $c_0 < 0; c_1 = 0$ temos uma única raiz negativa (Ver Figura 3.2.9.m).

Para o que segue, usamos (3.2.4) e (3.2.5).

(3.2.9) Observações:

(3.2.9.1) Segue de (3.2.8.1) (resp. de (3.2.8.2)) que teremos sempre um par de ciclos limi-

tes internos (resp. um ciclo limite externo) quando $c_0 < 0; c_1 < 0$ (resp. $c_0 > 0; c_1 < 0$). Ver Figura 3.2.2 (resp. Figura 3.2.3).

(3.2.9.2) Resulta de (3.2.8.3) (resp. de (3.2.8.4)) que dois ciclos limites externos aparecem e desaparecem (resp. 2 pares de ciclos limites internos aparecem e desaparecem) na região $c_0 < 0; c_1 < 0$ (resp. $c_0 > 0; c_1 < 0$) quando $|c_0| \ll |c_1| \ll |c_2|$ (resp. $|c_0| \ll |c_1| \ll |c_2|$). Ver Figura 3.2.2 (resp. Figura 3.2.3).

Agora, usando o item (1) de (1.6.6) obteremos uma curva α (resp. β) de ciclos limites com multiplicidade 2, aparecendo na região $c_0 < 0; c_1 < 0$ (resp. $c_0 > 0, c_1 < 0$) a qual é definida por $M(h_2) = M'(h_2) = 0; M''(h_2) \neq 0$ (resp. $M(h_1) = M'(h_1) = 0; M''(h_1) \neq 0$).

Assim sendo pode-se verificar que o traço α (resp. β) é dado pelo gráfico da função $c_0(c_1) = c_1 e^{\frac{1-c_1}{c_1}}$ (resp. $c_0(c_1) = -c_1 e^{\frac{1-c_1}{c_1}}$ quando $|c_0| \ll |c_1| \ll |c_2|$ (resp. $|c_0| \ll |c_1| \ll |c_2|$).

(3.2.10) **Obs.** A curva de α (resp. β) é representada pela linha $L_{II} := (2C_{ext})$ (resp. $L_{II'} := (2C_{int})$) dada na Figura 3.2.1.

(3.2.11) **Obs.** Note que se temos uma bifurcação tipo (HL) , então ela deverá ocorrer em $c_0 = 0; c_1 \neq 0$.

Vejamos isto. Recordemos por (3.2.4); (3.2.7) que $M(0) = 0; M'(0) = c_0$, respectivamente; donde segue que $c_0 = 0$.

Usando a expressão assintótica para M apresentada em (3.2.6), para $c_0 = 0$ teremos que

$$M'(0) = \begin{cases} 0 & \text{se } c_1 = 0 \\ -\infty & \text{se } c_1 \neq 0. \end{cases}$$

Logo, usando a hipótese, segue pelo item (2) de (1.6.6) que $c_1 \neq 0$, uma vez que devemos ter $M'(0) = \pm\infty$.

(3.2.12) **Obs.** Segue de (3.2.8.5) (resp. de (3.2.8.6)) que para $c_0 = 0; c_1 > 0$ (resp. $c_0 = 0; c_1 < 0$) temos um duplo laço homoclínico simétrico (resp. um ciclo limite externo, um duplo laço homoclínico simétrico; um par de ciclos limites internos). Ver Figura 3.2.5.1

(resp. Figura 3.2.4.h).

(3.2.13) **Obs.** Resulta de (3.2.8.7) um único duplo laço homoclínico simétrico no ponto $c_0 = c_1 = 0$. Ver Figura 3.2.6.o.

(3.2.14) **Obs.** Segue de (3.2.8.8) (resp. de (3.2.8.9)) que na região $c_0 > 0; c_1 > 0$ (resp. $c_0 < 0; c_1 > 0$) temos um único ciclo limite externo (resp. um único par de ciclos limites internos). Ver Figura 3.2.2.c (resp. Figura 3.2.3.f).

(3.2.15) Resulta de (3.2.8.10) (resp. de (3.2.8.11)) um único ciclo limite externo (resp. um único par de ciclos limites internos), quando $c_0 > 0; c_1 = 0$ (resp. $c_0 < 0; c_1 = 0$) para valores próximos de zero. Ver Figura 3.2.2.c (resp. Figura 3.2.3.f).

Logo, concluímos o que queríamos. ■

3.3. Diagrama de bifurcação de (0.4.16) para os casos $\varepsilon_1 > 0$ (resp. $\varepsilon_1 = 0; \varepsilon_1 < 0$)

Consideremos as Figuras (3.3.1); (3.3.2) e (3.3.3). Na Figura (3.3.1) representamos somente os ciclos limites e omitimos as separatrizes de selas.

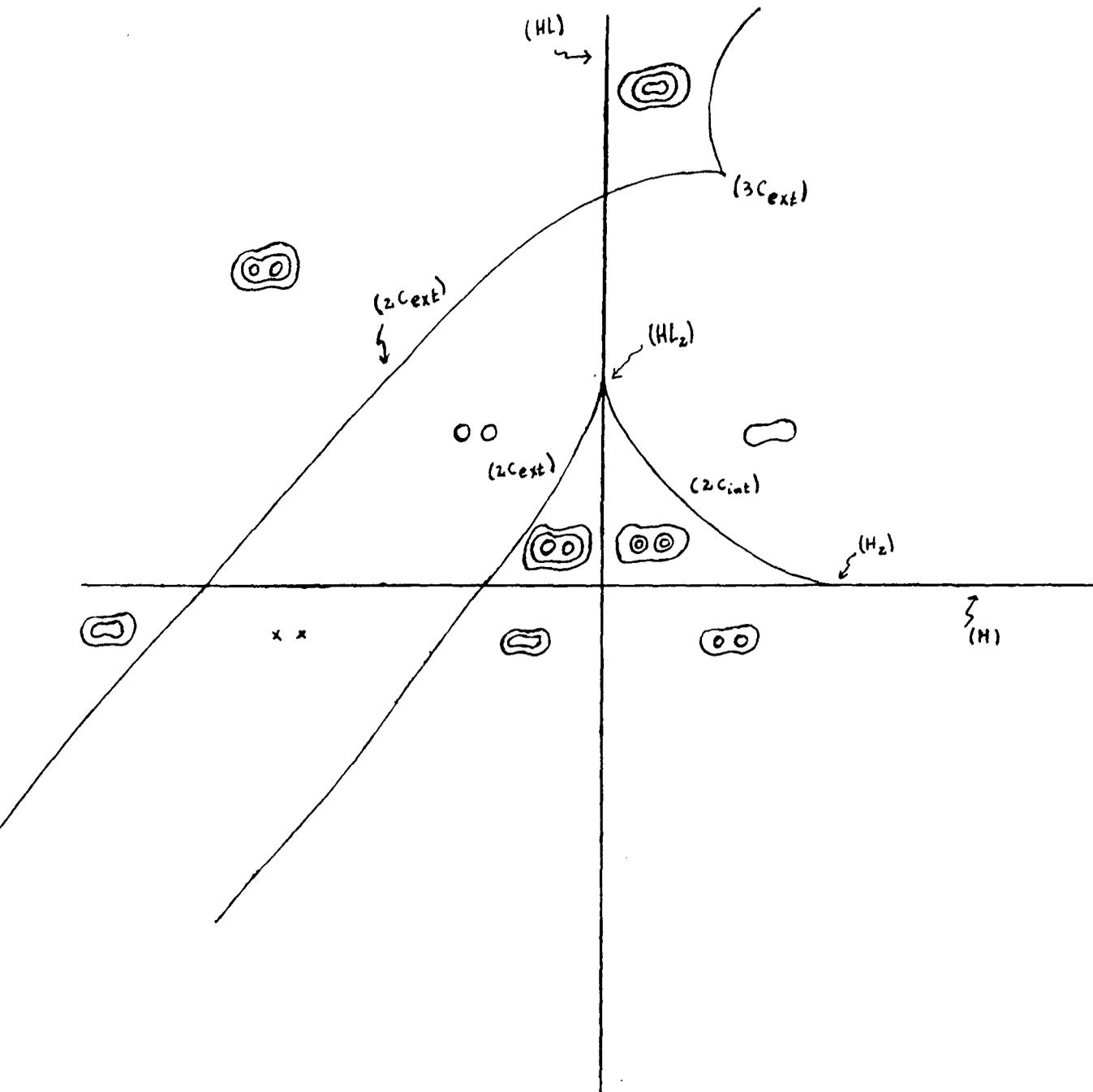


Figura 3.3.1. Diagrama de bifurcação para (1.4.2) quando $\mu_0 = 1$.

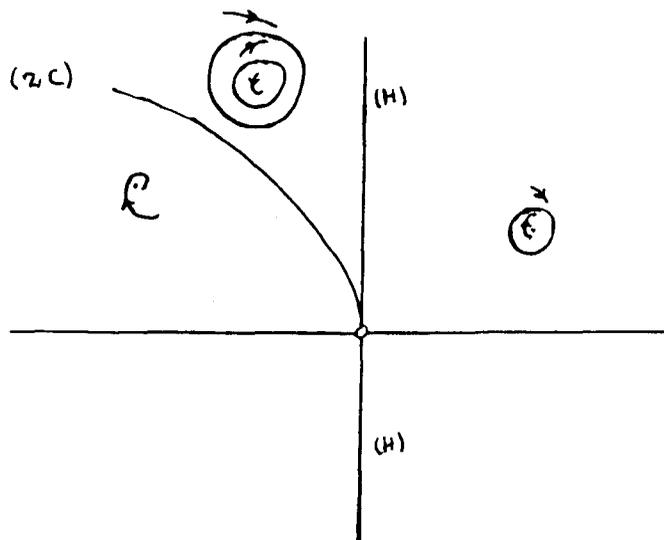


Figura 3.3.2. Diagrama de bifurcação para (1.4.2) quando $\mu_0 = 0$.

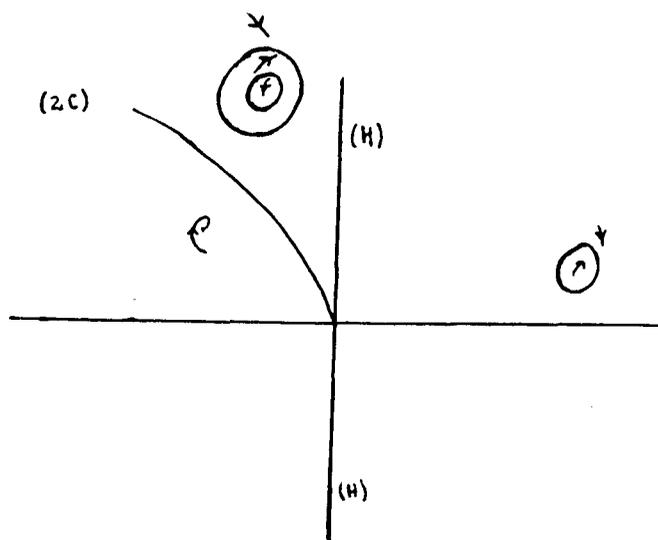


Figura 3.3.3. Diagrama de bifurcação para (1.4.2) quando $\mu_0 = -1$.

A seguir, faremos uma análise global dos ciclos limites para o sistema (1.4.2), onde veremos os seguintes resultados:

(3.3.A) **Teorema.** O diagrama de bifurcação do sistema (1.4.2) para $\mu_0 = 1$ e δ suficientemente pequeno, é dado pela Figura 3.3.1.

(3.3.B) **Teorema.** O diagrama de bifurcação do sistema (1.4.2) para $\mu_0 = 0$ e δ suficientemente pequeno, é dado pela Figura 3.3.2.

(3.3.C) **Teorema.** O diagrama de bifurcação do sistema (1.4.2) para $\mu_0 = -1$ e δ suficientemente pequeno, é dado pela Figura 3.3.3.

Prova do Teorema (3.3.A)

A demonstração do Teorema (3.3.A) obedece os seguintes passos (3.3.1) até (3.3.16).

Por (1.6.5), vemos que basta dar o diagrama de bifurcação das raízes de $M(h)$.

Segue de (2.2.1) que a função de Melnikov associada ao sistema (1.4.2) (no caso $\mu_0 = 1$) é dada por:

$$(3.3.1) \quad M(h) = \left(\mu_1 - \frac{4}{7}h\right)I_0(h) + \left(\mu_2 - \frac{8}{7}\right)I_1(h)$$

Podemos observar que estudar as raízes de $M(h)$, equivale a estudar as raízes de $\bar{M}(h) = \frac{M(h)}{I_0(h)}$. Logo, iremos estudar as raízes de

$$(3.3.2) \quad \bar{M}(h) = \left(\mu_1 - \frac{4}{7}h\right) + \left(\mu_2 - \frac{8}{7}\right)P(h)$$

$$(3.3.3) \quad \text{Obs. } I_0(h) > 0 \quad \forall h > -\frac{1}{4}$$

(3.3.4) **Obs.** As raízes de $\bar{M}(h)$ são interpretadas como sendo os pontos de intersecções de $P(h)$ com a reta $\bar{M}(h) = 0$.

(3.3.5) No que segue, daremos algumas posições respectivas de $P(h)$ e $\bar{M}(h) = 0$, as quais ilustrarão a dinâmica de (1.4.2) quando $\mu_0 = 1$ e δ suficientemente pequeno através da Figura 3.3.4. A linha pontilhada representa a reta $\bar{M}(h) = 0$.

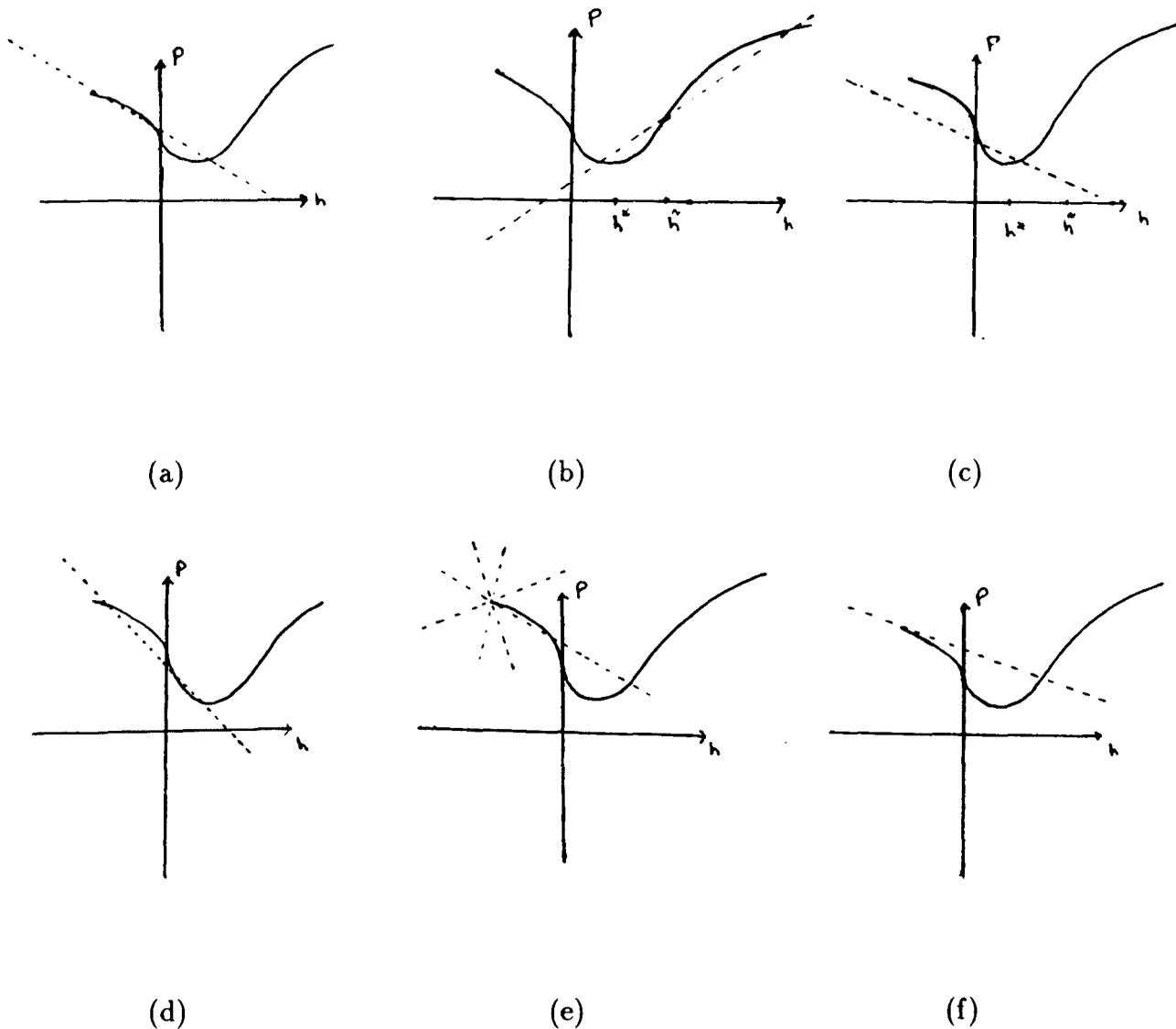


Figura 3.3.4. Algumas posições respectivas de $\bar{M}(h) = 0$ (dado pela linha pontilhada) e $P(h)$, dando posições diferentes de ciclos limites ($\mu_0 = 1$).

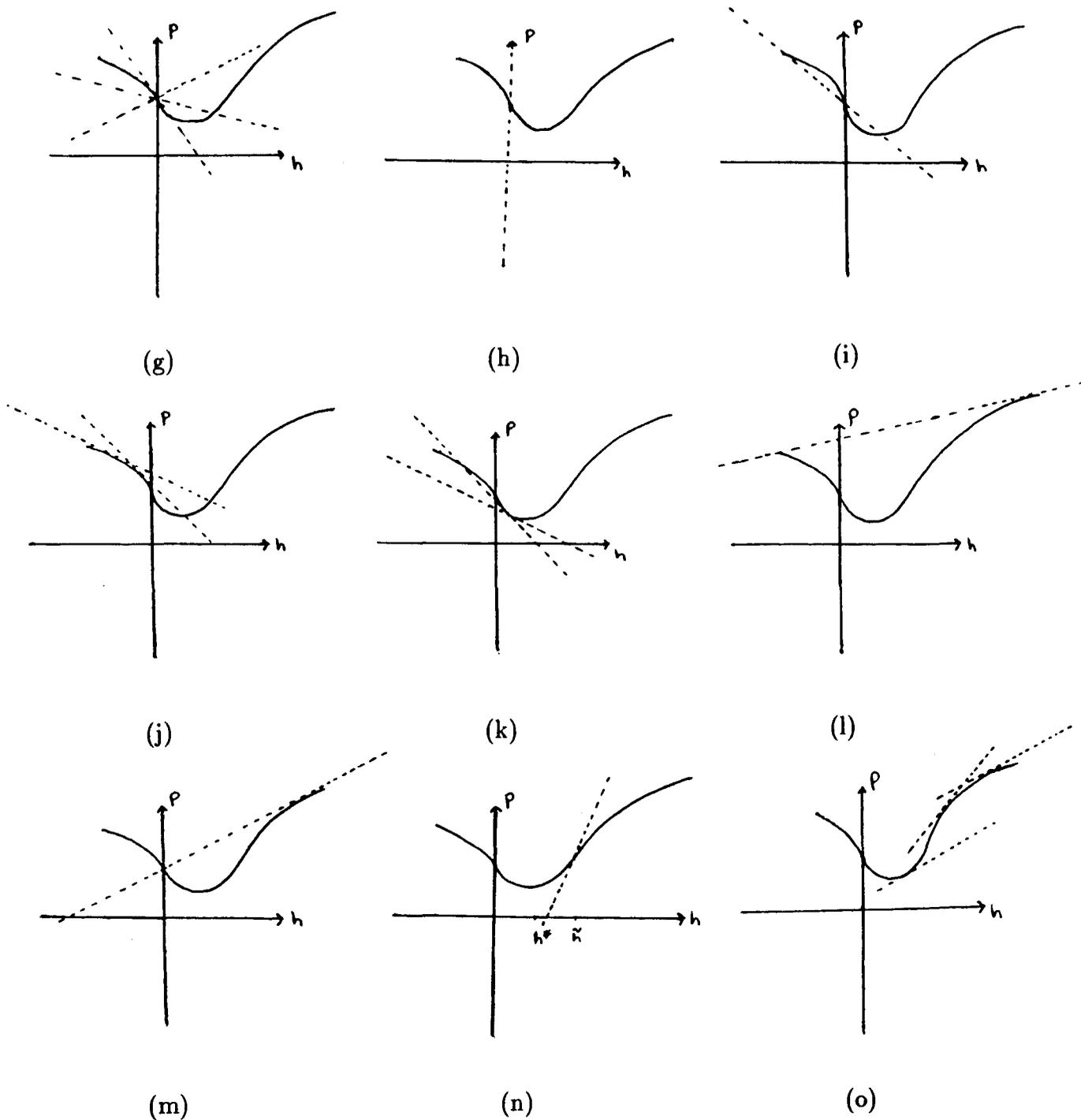


Figura 3.3.4. Algumas posições respectivas de $\bar{M}(h) = 0$ (dado pela linha pontilhada) e $P(h)$, dando posições diferentes de ciclos limites ($\mu_0 = 1$).

A seguir estabeleceremos uma estratégia para concluir a Figura 3.3.1.

Relativo ao diagrama de bifurcação do sistema (1.4.2) (caso $\mu_0 = 1$) podemos afirmar através do uso da Figura 2.3.4 que:

(3.3.6) Existe um número máximo de dois pares de ciclos limites internos (Ver Figura 3.3.4.a).

Note que da concavidade de P em $[-\frac{1}{4}, 0]$ (ver Proposição 2.3.E; item xi) e da interpretação geométrica dada em (3.3.4), isto segue diretamente usando a Figura 2.3.4.

(3.3.6.1) A intersecção da reta $\bar{M}(h) = 0$ com o $Gr(P)$ são dois pontos com abscissas negativas (Ver Figura 3.3.4.a), as quais correspondem a dois pares de ciclos limites internos.

(3.3.7) Existe um número máximo de três ciclos limites externos.
(Ver Figura 3.3.4.b).

Observe que da concavidade de P quando $h > 0$. e $P' < 0$ (ver Proposição 2.3.E, item xii); da convexidade de P em $h > \tilde{h}$ (ver Proposição 2.3.E, item xiii); e da interpretação geométrica vista em Obs. (3.3.4), obteremos diretamente (3.3.7).

(3.3.7.1) A intersecção da reta $\bar{M}(h) = 0$ com o $Gr(P)$ se realiza em três pontos de abscissas positivas (Ver Figura 3.3.4.b) as quais nos fornecem três ciclos limites externos.

(3.3.8) No caso de dois pares de ciclos limites internos, necessariamente temos um ciclo limite externo ao mesmo tempo (Ver Figura 3.3.4.a).

Isto segue de (3.3.8.1).

(3.3.8.1) Temos dois pontos com abscissas negativas aparecendo na intersecção da reta $\bar{M}(h) = 0$ com o $Gr(P)$, juntamente com um ponto de abscissa positiva (Ver Figura 3.3.4.a). Correspondentemente, temos 2 pares de ciclos limites internos acompanhados de um ciclo limite externo.

(3.3.9) No caso em que temos dois ciclos limites externos, necessariamente teremos um

ou nenhum par de ciclos limites internos. Isto segue de (3.3.9.1) e (3.3.9.2) (Ver Figura 3.3.4.c; d).

(3.3.9.1) Temos dois pontos de abscissas positivas na intersecção do $Gr(P)$ com a reta $\bar{M}(h) = 0$ (Ver Figura 3.3.4.c).

(3.3.9.2) A reta $\bar{M}(h) = 0$ intercepta o $Gr(P)$ em um ponto de abscissa negativa, e dois abscissas positivas (Ver Figura 3.3.4.d).

(3.3.10) No caso de três ciclos limites externos, necessariamente não temos nenhum ciclo limite interno (Ver Figura 3.3.4.b).

(3.3.10.1) Notemos que a reta $\bar{M}(h) = 0$ intercepta o $Gr(P)$ em apenas três pontos com abscissas positivas (Ver Figura 3.3.4.b), donde segue (3.3.10).

(3.3.11) Uma curva de bifurcação do tipo:

i) (H) no espaço de parâmetros (μ_1, μ_2) é dado pela reta $\mu_1 + \mu_2 = 1$, exceto para o ponto $(\mu_1, \mu_2) = (1, 0)$ (Ver Figura 3.3.4.e).

ii) (H_2) no espaço (μ_1, μ_2) é dada pelo ponto $(1, 0)$ (Ver Figura 3.3.4.f).

Prova de 3.3.11.i) Por (1.5.4) recordemos que a órbita $\gamma_{-\frac{1}{4}}$ do sistema (1.4.3) é dada pelos pontos $(\pm 1, 0)$. Assim sendo, por (2) de (1.6.6), teremos uma bifurcação do tipo (H) quando $\bar{M}(-\frac{1}{4}) = 0$ e $\bar{M}'(-\frac{1}{4}) \neq 0$ onde $\bar{M}(h) = (\mu_1 - \frac{4}{7}h) + (\mu_2 - \frac{8}{7})P(h)$ (Ver 3.3.2).

Logo de $\bar{M}(-\frac{1}{4}) = 0$ e $\bar{M}'(-\frac{1}{4}) \neq 0$ segue

$$\begin{cases} (\mu_1 + \frac{1}{7}) + (\mu_2 - \frac{8}{7})P(-\frac{1}{4}) = 0 \\ -\frac{4}{7} + (\mu_2 - \frac{8}{7})P'(-\frac{1}{4}) \neq 0 \end{cases}, \text{ do qual}$$

usando que $P(-\frac{1}{4}) = 1$ (Ver Proposição (2.3.E), item i); $P'(-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{2}$ (Ver Proposição

(2.3.E), item iii) segue (3.3.11.i). ■

Prova de 3.3.11.ii) Temos definido uma bifurcação tipo (H_2) em $(-\frac{1}{4}, 0)$ quando $\bar{M}(-\frac{1}{4}) = 0$; $\bar{M}'(-\frac{1}{4}) = 0$; $\bar{M}''(-\frac{1}{4}) \neq 0$; donde é fácil verificar a afirmação (3.3.11.ii). ■

Observemos de (3.3.11) que:

(3.3.11.1) A Figura 3.3.4.e nos mostra uma ilustração geométrica no plano (h, P) , de quando temos uma bifurcação tipo (H) no espaço de parâmetros (μ_1, μ_2) .

Assim vemos que a bifurcação tipo (H) se faz corresponder a quase todas as retas passando por $(-\frac{1}{4}, 1)$, com exceção da reta tangente ao $Gr(P)$ neste ponto.

(3.3.11.2) Analogamente a (3.3.11.1), a Figura 3.3.4.f ilustra quando temos uma bifurcação tipo (H_2) , a qual se faz corresponder a reta tangente ao $Gr(P)$ (com coeficiente angular igual a $-\frac{1}{2}$) no ponto $(-\frac{1}{4}, 1)$.

(3.3.11.3) Como a órbita $\gamma_{-\frac{1}{4}}$ é dada pelos pontos $(\pm 1, 0)$, logo tem sentido pesquisar os tipos de bifurcações de Hopf que ocorre sobre esses pontos.

Passemos a analisar agora, os surgimentos das bifurcações tipo (HL) e (HL_2) .

(3.3.12) Uma bifurcação tipo:

i) (HL) ocorre nos pontos da reta $\mu_1 + \frac{4}{5}\mu_2 = \frac{32}{35}$, com exceção do ponto $(0, \frac{8}{7})$ (Ver Figura 3.3.4.g).

ii) (HL_2) ocorre no ponto $(0, \frac{8}{7})$ (Ver Figura 3.3.4.h).

Prova de 3.3.12.i) Recordemos por (1.5.9) que a órbita γ_0 corresponde ao duplo laço homoclínico simétrico. Logo por (3) de (1.6.6) temos definido uma bifurcação tipo (HL) quando $\bar{M}(0) = 0$; $\bar{M}'(0) = \pm\infty$, donde segue nossa afirmação. ■

Prova de 3.3.12.ii) Pelo item (3) de (1.6.6) temos definido uma bifurcação tipo (HL_2) quando $\bar{M}(0) = 0$; $\bar{M}'(0) \neq 0$ com $\bar{M}''(0)$ finito. Agora a conclusão é trivial. ■

(3.3.12.1) Do ponto de vista geométrico quando ocorre uma bifurcação tipo (HL) , temos no plano (h, P) quase todas as retas $\bar{M}(h) = 0$ (com exceção da reta tangente ao $Gr(P)$ no ponto $(0, \frac{4}{5})$, com coeficiente angular igual a $-\infty$) interceptando transversalmente o $Gr(P)$ no ponto $(0, \frac{4}{5})$. (Ver Figura 3.3.4.g).

(3.3.12.2) Analogamente a (3.3.12.1), quando ocorre uma bifurcação tipo (HL_2) , podemos ver que no plano (h, P) , corresponde a reta tangente $\bar{M}(0) = 0$ (com coeficiente angular igual a $-\infty$) ao $Gr(P)$ no ponto $(0, \frac{4}{5})$. (Ver Figura 3.3.4.h).

(3.3.12.3) É de fácil verificação que as curvas de bifurcação tipo $(H); (HL)$ dadas em (3.3.11.i); (3.3.12.i) respectivamente, interceptam transversalmente no ponto $(\frac{4}{7}, \frac{3}{7})$, aparecendo nesse momento um ciclo limite externo (Ver Figura 3.3.4.i).

(3.3.13) Temos:

Uma curva de bifurcação tipo $(2C_{int})$ tal que:

i) É dada por $\bar{\alpha}(h) = (\mu_{1h}, \mu_{2h}) = \left(\frac{4}{7} \left(h - \frac{P(h)}{P'(h)} \right), \frac{8}{7} \left(1 + \frac{1}{2P'(h)} \right) \right)$ com $\mu_{2h} < \frac{8}{7}$.

ii) É regular, convexa, ligando os pontos $(HL_2); (H_2)$ dados em (3.3.11.ii); (3.3.12.ii), respectivamente.

iii) E ainda, quando esta ao passar pelo ponto (HL_2) tangenciará a curva de bifurcação tipo (HL) .

Prova de 3.3.13.i) Recordando por (1.5.10) temos que γ_{h_0} , para $h_0 \in (-\frac{1}{4}, 0)$, corresponde a um par de ciclos limites internos.

Notemos ainda que $P'(h_0) < 0 \forall h_0 \in (-\frac{1}{4}, 0)$ (Ver Proposição (2.3.E), item v). Logo temos definido uma curva $(2C_{int})$ quando $\bar{M}(h_0) = \bar{M}'(h_0) = 0$; $\bar{M}''(h_0) \neq 0$ com $h_0 \in (-\frac{1}{4}, 0)$ (Ver 1.6.6.1), donde segue o que queríamos. ■

Prova de 3.3.13.ii)

(3.3.13.1) **Prova do item (a):** $\bar{\alpha}$ liga os pontos $(HL_2); (H_2)$, pois note que usando $P(0) = \frac{4}{5}$, $P'(0) = -\infty$ (Ver Proposição 2.3.E, item iii) no cálculo de

$$\alpha(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{4}{7}h - \frac{4}{7} \frac{P(h)}{P'(h)} \right), \frac{8}{7} + \frac{4}{7} \frac{1}{P'(h)}$$

veremos que $\bar{\alpha}(0) = (0, \frac{8}{7})$. Analogamente, pode-se ver que $\bar{\alpha}(-\frac{1}{4}) = (1, 0)$.

(3.3.13.2) **Prova do item (b):** $\bar{\alpha}$ é uma curva regular.

Notemos que $\frac{d\mu_{2h}}{dh} = -\frac{4}{7} \frac{P''(h)}{P'(h)^2}$ donde usando que $P'' < 0$ em $[-\frac{1}{4}, 0]$ (Ver Proposição (2.3.E), item xi) e $P' < 0$ em $[-\frac{1}{4}, 0]$ (Ver Proposição (2.3.E), item v) segue que $\frac{d\mu_{2h}}{dh} \neq 0$ em $[-\frac{1}{4}, 0]$.

(3.3.13.3) **Prova do item (c):** $\bar{\alpha}$ é uma curva convexa.

Notemos que de $\bar{M}(h) = 0$ segue que

$$\mu_2 = Q\mu_1 + R \text{ onde } Q = Q(h) = -\frac{1}{P(h)}; R = R(h) = \frac{4}{7} \left(2 + \frac{h}{P(h)} \right)$$

Iremos mostrar agora que $\mu_2 = \mu_2(\mu_1)$ é a transformação de Legendre da função $-R$.

(1) Observemos que Q é inversível sobre

$$\left[-\frac{5}{4}, -1 \right], \text{ pois } Q'(h) = \frac{P'(h)}{P^2(h)} < 0 \quad \forall h \in \left[-\frac{1}{4}, 0 \right].$$

Logo, podemos escolher os valores de $Q(h)$ como parâmetros de modo que a curva α fique parametrizada por suas inclinações $Q \in \left[-\frac{5}{4}, -1 \right]$.

Assim, seja $h(Q)$ a função inversa de $Q(h)$. Logo, a curva parametrizada por h dada por $\mu_2 = Q(h)\mu_1 + R(h)$ será equivalente a curva parametrizada por Q dada por

$$(2) \quad \mu_2 = Q + R(h(Q)) \quad , \quad \text{onde} \quad R(h(Q)) = \frac{4}{7}(2 - Qh(Q)) .$$

Verifiquemos que $-R(Q)$ é uma função convexa, ou seja,

$$\frac{d^2}{dQ^2}(-R) > 0 \quad \forall Q \in [-1, -\frac{4}{5}] .$$

Notemos que usando a Regra da Cadeia em (2) temos

$$\frac{dR}{dQ} = \frac{dR}{dh} \cdot \frac{dh}{dQ} = -\frac{4}{7} \left(h(Q) + Q \frac{dh}{dQ} \right) .$$

Mas por (3.3.13.3.1) segue que:

$$\frac{dh}{dQ}(Q) = \frac{1}{\frac{dQ}{dh}(h)} \quad \text{onde} \quad h = h(Q) \quad \text{e} \quad Q(h) = -\frac{1}{P(h)}$$

(3)

$$\text{Logo,} \quad \frac{dh}{dQ}(Q) = \frac{P^2(h)}{P'(h)} \quad \text{onde} \quad h = h(Q) .$$

Agora,

(4)

$$\frac{d^2 R}{dQ^2} = -\frac{4}{7} \left(2 \frac{dh}{dQ} + Q \frac{d^2 h}{dQ^2} \right) .$$

Observando que

$$\frac{d^2 h}{dQ^2} = \frac{d}{dQ} \left(\frac{dh}{dQ} \right) = \frac{d}{dQ} \left(\frac{1}{\frac{dQ}{dh}} \right)$$

pode-se verificar por uso de (3.3.13.3.1); (3.3.13.3.2) e (3.3.13.3.3) que

(5)

$$\frac{d^2 h}{dQ^2}(Q) = \frac{2P^3(h)(P'(h))^2 - P^4(h)P''(h)}{(P'(h))^3} \quad \text{com} \quad h = h(Q)$$

Daí, substituindo (3.3.13.3.5) em (3.3.13.3.4) obteremos que

$$\frac{d^2 R}{dQ^2} = -\frac{4}{7} \left(\frac{P^3(h)P''(h)}{(P'(h))^3} \right) \quad \text{com} \quad h = h(Q) .$$

Agora, usando que $P''(h) < 0$; $P'(h) < 0$ em $] -\frac{1}{4}, 0[$ (Ver Proposição (2.3.E), item (xi); (v), respectivamente) segue que

$$\frac{d^2 R}{dQ^2}(Q) < 0 \quad \forall Q \in] -\frac{5}{4}, -1[.$$

Portanto, $\frac{d^2}{dQ^2}(-R(Q)) > 0 \quad \forall Q \in] -\frac{5}{4}, -1[$, ou seja, $-R(Q)$ é uma função convexa de Q .

Logo, a curva $\bar{\alpha} : \mu_2 = \mu_1 Q - (-R(Q))$ parametrizada pelas suas inclinações Q , é sempre o gráfico de uma função convexa pois $\mu_2 = \mu(\mu_1)$ é a transformação de Legendre da função $-R$ (Ver [A1]). ■

Prova de 3.3.13.iii) Recordando por (3.3.12.i) a curva (HL) é dada por $\mu_2 = -\frac{5}{4}\mu_1 + \frac{8}{7}$, com $(\mu_1, \mu_2) \neq (0, \frac{8}{7})$. Assim sendo, pode-se verificar que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mu_2(h) - \mu_2(0)}{\mu_1(h) - \mu_1(0)} = -\frac{5}{4}$, donde segue a nossa afirmação. ■

(3.3.13.4) Notemos que geometricamente (3.3.13) nos diz que teremos retas tangentes $\bar{M}(h) = 0$ ao $Gr(P)$ no plano (h, P) , $\forall h \in] -\frac{1}{4}, 0[$ (Ver Figura 3.3.4.j).

A seguir estudaremos as curvas de bifurcação do tipo $(2C_{ext})$.

Observemos antes que teremos dois casos a estudar, isto é, quando:

a) $P'(h) < 0$ com $P''(h) > 0$ e $0 < h < h^*$, onde h^* é dado pela Proposição (2.3.E).

Neste caso denotaremos a curva obtida por $(2C_{ext-})$.

b) $P'(h) > 0$ quando $P''(h) > 0$ com $h^* < h < \tilde{h}$; $P'(h) > 0$ quando $P''(h) < 0$ com $h > \tilde{h}$, onde h^*, \tilde{h} são dados na Proposição (2.3.E).

Denotaremos a curva obtida neste caso por $(2C_{ext+})$.

(3.3.14) Temos que:

i) Surge uma curva de bifurcação do tipo $(2C_{ext-})$.

ii) Essa curva, isto é, a curva tipo $(2C_{ext-})$ é convexa, regular e se localiza abaixo da reta $\mu_2 = \frac{8}{7}$.

iii) Ainda, temos que $(\mu_1(h), \mu_2(h)) \rightarrow (+\infty, -\infty)$ quando $P'(h) \rightarrow 0_-$ com $h \in]0, h^*[$, $h \rightarrow h^*$, onde μ_1, μ_2 são coordenadas de uma curva $(2C_{ext-})$.

iv) Esta curva, ou seja, a curva $(2C_{ext-})$ intercepta transversalmente a curva (H) dada em (3.3.11.i) em um único ponto.

Prova de 3.3.14.i) Note que pelo item (1) de (1.6.6), a obtenção da curva $(2C_{ext-})$ segue de $\bar{M}(h) = \bar{M}'(h) = 0$; $\bar{M}''(h) \neq 0$ quando $0 < h < h^*$ ($P'(h) < 0$). ■

Prova de 3.3.14.ii)

(3.3.14.1) a) Provemos a convexidade da curva de bifurcação tipo $(2C_{ext-})$.

Observemos que podemos aproximar o $Gr(P)$ na região $\{(h, P) / -\frac{1}{4} < h < 0$ com $P' < 0\}$ por uma simetria local com relação ao $Gr(P)$ na região

$$\{h, P) / 0 < h < h^* \text{ e } P'(h) < 0\} .$$

Logo, usando que a curva de bifurcação do tipo $(2C_{int})$ dada em (3.3.13.ii), a qual é convexa, segue que a curva do tipo $(2C_{ext-})$ apresenta simetria local com a curva $(2C_{int})$.

Ainda, notemos que a curva $(2C_{ext-})$ está no semiplano $\mu_{2h} < \frac{8}{7}$, uma vez que $P'(h) < 0 \quad \forall h \in]0, h^*[$.

(3.3.14.2) b) Quanto a regularidade de $(2C_{ext-})$ é de fácil verificação que $\frac{d\mu_2}{dh} \neq 0$ uma vez que temos $P''(h) \neq 0$ em $0 < h < h^*$; e observando ainda que neste caso temos $P'(h) < 0$ para $h \in]0, h^*[$, donde segue a localização da curva $(2C_{ext-})$.

Logo, segue o que queríamos. ■

Prova de 3.3.14.iii) Notemos que quando $P'(h) \rightarrow 0_-$ com $h \rightarrow h^*$ segue que

$$\mu_2 = \frac{4}{7P'(h)} + \frac{8}{7} \rightarrow -\infty \quad \text{quando } h \rightarrow h^* .$$

e também que

$$\mu_1 = \frac{4}{7} h - \frac{4}{7} \frac{P}{P'(h)} \rightarrow +\infty \quad \text{quando } h \rightarrow h_-^* .$$

Prova de 3.3.14.iv) Basta observar os itens i); ii); iii) de 3.3.14. ■

(3.3.14.3) **Obs.** Observemos que (3.3.14) corresponde geometricamente às retas $\bar{M}(h) = 0$ no plano (h, P) tangenciando negativamente o $Gr(P)$ nos pontos $(h, P(h))$, com $0 < h < h^*$ (Ver Figura 3.3.4.k).

(3.3.15) Analogamente a (3.3.14) temos o surgimento de uma curva de bifurcação do tipo $(2C_{ext+})$, a qual é dada por $\ell(h) = (\mu_{1h}, \mu_{2h})$ tal que:

i) está no semiplano $\mu_{2h} > \frac{8}{7}$.

ii) intercepta a curva (HL) transversalmente em um único ponto $(h', P(h'))$ com $P'(h') > 0$ e $P''(h') > 0$.

iii) intercepta a curva (H) transversalmente em um único ponto $(h'', P(h''))$ com $P'(h'') > 0$ e $P''(h'') < 0$.

iv) não é uma curva regular no ponto $(\tilde{h}, P(\tilde{h}))$.

v) $\lim_{h \rightarrow \tilde{h}} \frac{\mu_2(h) - \mu_2(\tilde{h})}{\mu_1(h) - \mu_1(\tilde{h})} = -\frac{1}{P(\tilde{h})}$ onde μ_1, μ_2 são as coordenadas da curva ℓ .

vi) $\mu_1(h) \rightarrow -\infty$ (resp. $\mu_1(h) \rightarrow -\infty$) quando $h \rightarrow +\infty$ (resp. quando $h \rightarrow h_+^*$).

$\mu_2(h) \rightarrow +\infty$ (resp. $\mu_2(h) \rightarrow +\infty$) quando $h \rightarrow +\infty$ (resp. quando $h \rightarrow h_+^*$).
A prova de (3.3.15) segue através dos passos 3.3.15.1 a 3.3.15.5.

(3.3.15.1) A afirmação (3.3.15.i) é de fácil verificação.

(3.3.15.2) Para verificar (3.3.15.ii) basta resolvermos o sistema

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 = 1, (\mu_1, \mu_2) \neq (1, 0) & (\text{curva tipo } (H)) \\ \bar{M}(\bar{h}) = \bar{M}'(\bar{h}) = 0; \bar{M}''(\bar{h}) \neq 0, \text{ com} \\ P'(\bar{h}) > 0; P''(\bar{h}) < 0; \bar{h} > \tilde{h} & (\text{curva tipo } (2C_{ext+})). \end{cases}$$

do qual se obtém

$$\tilde{\mu}_1 = \frac{1}{7} \frac{(\bar{h} + P(\bar{h}))}{1 - P(\bar{h})} \quad \text{e} \quad \tilde{\mu}_2 = \frac{1 - \frac{8}{7}P(\bar{h}) - \frac{\bar{h}}{7}}{(1 - P(\bar{h}))} \quad (\text{com } P(\bar{h}) > 1).$$

(3.3.15.3) O item (3.3.15.iii) segue da resolução do sistema

$$\begin{cases} \mu_1 + \frac{4}{5}\mu_2 = \frac{32}{35}, (\mu_1, \mu_2) \neq (0, \frac{8}{7}) & (\text{curva tipo } (HL)) \\ \bar{M}(h_0) = \bar{M}'(h_0) = 0; \bar{M}''(h_0) \neq 0, \text{ com} \\ P'(h_0) > 0; P''(h_0) < 0, \text{ para algum } h_0 > \tilde{h} & (\text{curva tipo } (2C_{ext+})). \end{cases}$$

donde se obtém

$$\mu_{1h_0} = \frac{-16h_0}{35(P(h_0) - \frac{4}{5})} \quad ; \quad \mu_{2h_0} = \frac{\frac{4}{7}h_0 + \frac{8}{7}P(h_0) - \frac{32}{35}}{P(h_0) - \frac{4}{5}},$$

com $\mu_{1h_0} < 0$ e $\mu_{2h_0} > \frac{8}{7}$.

(3.3.15.4) Para verificar o item (3.3.15.iv) notemos que de $\bar{M}(h) = \bar{M}'(h) = 0; \bar{M}''(h) \neq 0$ com $P'(h) > 0$, segue que a curva tipo $(2C_{ext+})$ é dada por

$$\ell(h) = \left(\frac{4}{7}h - \frac{4}{7} \frac{P(h)}{P'(h)}, \frac{4}{7P'(h)} + \frac{8}{7} \right) \quad \text{com } P'(h) > 0 \quad \text{para } h > h^*.$$

Pode-se verificar que a curva diferenciável ℓ deixa de ser regular em um único ponto $h = \tilde{h}$, com \tilde{h} dado na Proposição (2.3.E); item xiii, ou seja, $\exists! h = \tilde{h}$ tal que $|\ell'(\tilde{h})| = 0$.

(3.3.15.5) Os itens (3.3.15.v) e (3.3.15.vi) são de fáceis verificações.

Observações

Relativo a (3.3.15) notemos que:

(3.3.15.6) O item (ii) de (3.3.15) nos diz as bifurcações tipo (H) e $(2C_{ext+})$ aparecem simultaneamente em um único ponto $(\mu_1(h'), \mu_2(h'))$. (Ver Figura 3.3.4.1).

(3.3.15.7) No item (iii) de (3.3.15) temos o aparecimento simultâneo das bifurcações tipo (HL) e $(2C_{ext+})$. (Ver Figura 3.3.4.m).

(3.3.15.8) Do ponto de vista geométrico a curva $(2C_{ext+})$ dada em (3.3.15) corresponde a todas retas tangentes $\bar{M}(h) = 0$ ao $Gr(P)$ no plano $(h, P) \forall h > h^*$. (Ver Figura 3.3.4.o).

(3.3.16) Existe um único ponto onde ocorre uma bifurcação tipo $(3C_{ext})$. (Ver Figura 3.3.4.n).

Prova de (3.3.16)

Isto segue das equações $\bar{M}(\tilde{h}) = \bar{M}'(\tilde{h}) = \bar{M}''(\tilde{h}) = 0; \bar{M}'''(\tilde{h}) \neq 0$ onde \tilde{h} é dado na Proposição (2.3.E); item xiii). ■

Assim sendo, de acordo com o que fizemos até aqui, podemos concluir a Figura 3.3.5, a qual sob um difeomorfismo segue a Figura (3.3.1).

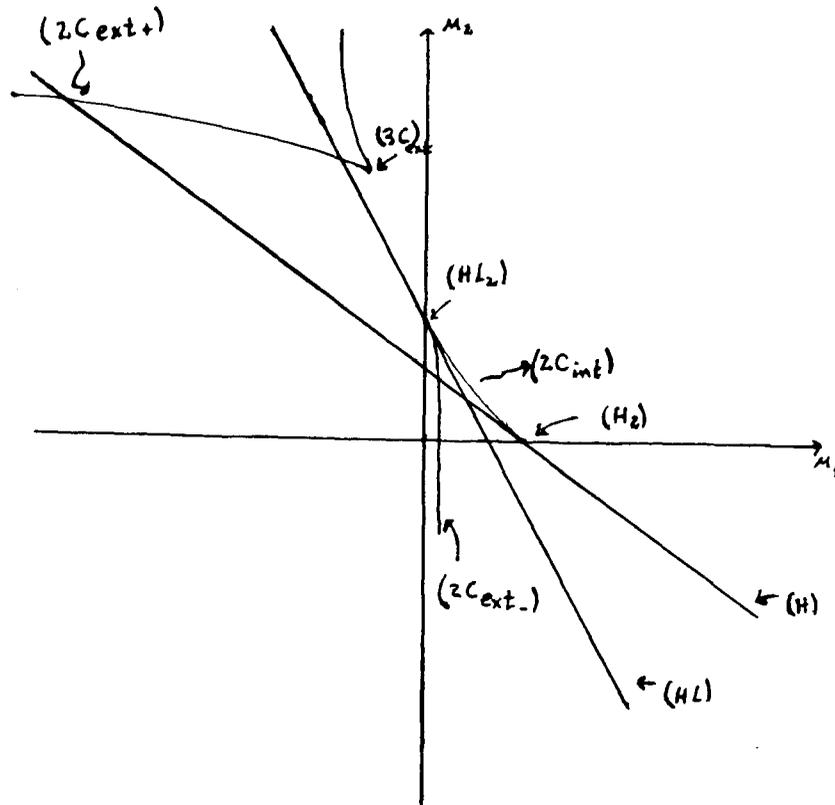


Figura 3.3.5. Diagrama de bifurcação para (0.4.16) quando $\mu_0 = 1$.

Prova do Teorema (3.3.B)

A demonstração do Teorema (3.3.B) obedece os seguintes passos: (3.3.17) até (3.3.18).

(3.3.17) Segue do diagrama de bifurcação das raízes de $\bar{M}(h) = (\mu_1 - \frac{4}{7}h) + \mu_2 P(h)$, onde \bar{M} provém de (3.3.1) fazendo $\mu_0 = 0$.

As observações que seguem são de fáceis verificações. Estas seguem da Proposição (2.3.G), da interpretação geométrica para $\bar{M}(h) = 0$ dada em (3.3.4), acompanhando de idéias análogas àquelas usadas no Teorema (3.3.A).

Consideremos a Figura 3.3.6.

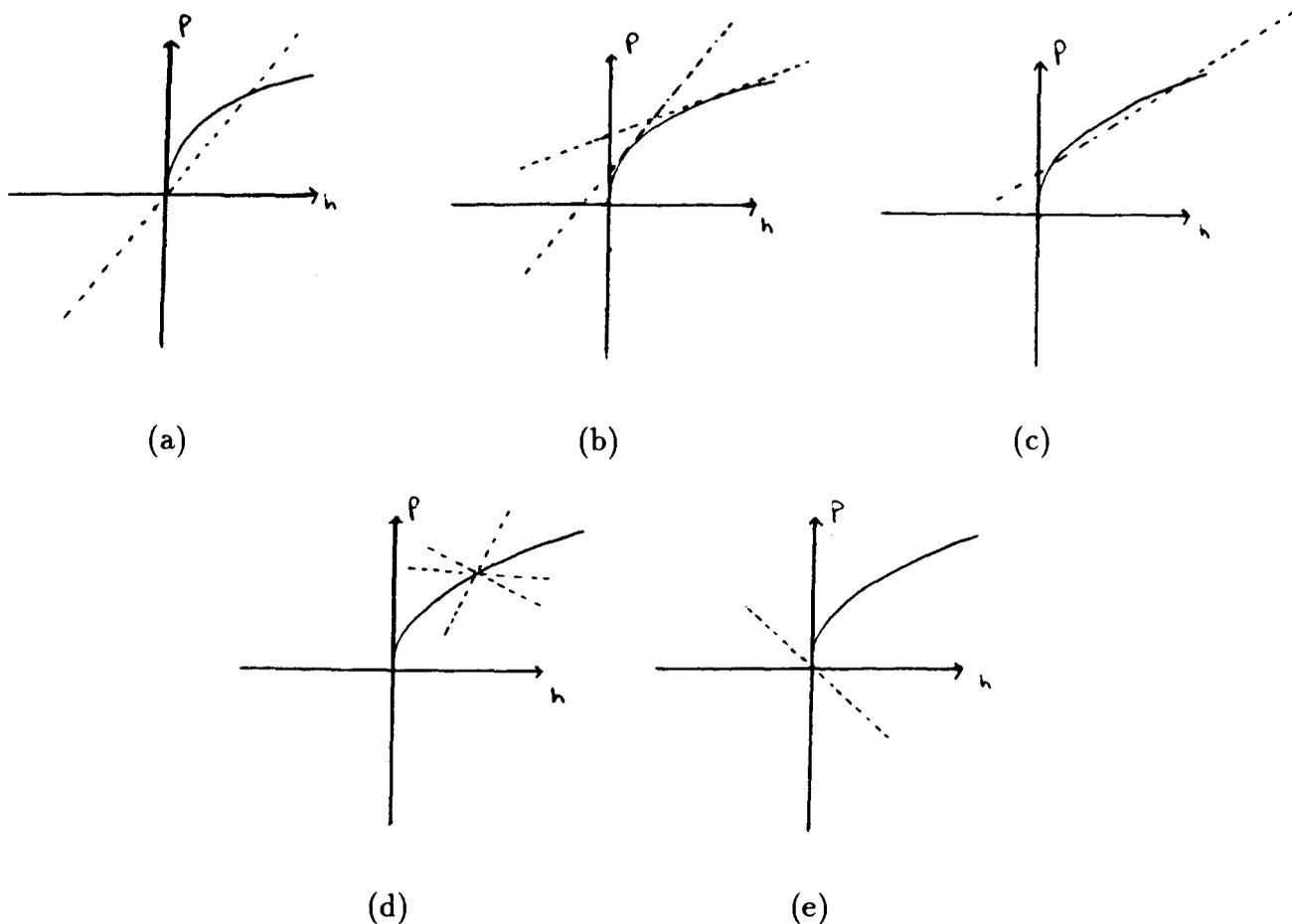


Figura 3.3.6. Algumas respectivas posições de $\bar{M}(h) = 0$ (dado pela linha pontilhada) e $P(h)$, dando diferentes posições para os ciclos limites ($\mu_0 = 0$).

Para concluir a Figura 3.3.2 estabelecemos o seguinte caminho dado por (3.3.18).

(3.3.18) Relativo ao diagrama de bifurcação do sistema (1.4.2) (caso $\mu_0 = 0$) podemos dizer que:

i) Existe um número máximo de dois ciclos limites (Ver Figura 3.3.6.c).

ii) Uma bifurcação tipo (H) é dada pelas retas secantes $\bar{M}(h) = 0$ ao $Gr(P)$ no ponto $(0,0)$, com inclinação diferente de $+\infty$ (Ver Figura 3.3.6.a), cuja curva correspon-

dente no espaço de parâmetros (μ_1, μ_2) é dado por $\{(\mu_1, \mu_2) / \mu_1 = 0 ; \mu_2 \neq 0\}$.

(3.3.18.1) **Obs.** Podemos ver que as retas $\bar{M}(h) = 0 \quad (\forall h > 0)$ transversais ao $Gr(P)$ que também passam pelo ponto $(0,0)$ cujas inclinações m são das por $0 < m < +\infty$ (resp. $-\infty < m < 0$), correspondem geometricamente ao aparecimento simultâneo da bifurcação tipo (H) com um único ciclo limite (Ver Figura 3.3.6.a) (resp. somente a bifurcação tipo H (Ver Figura 3.3.6.e)).

iii) Existe uma curva de bifurcação tipo $(2C)$ onde é dada pelo semi-arco da parábola $\frac{\mu_2^2}{\mu_1} = -\frac{16}{7k^2}$; com $\mu_2 > 0$; $\mu_1 < 0$ e $k = cte > 0$ dada na Proposição (2.3.E); item (viii). Uma tal curva tipo $(2C)$ segue de $\bar{M}(h) = \bar{M}'(h) = 0$; $\bar{M}''(h) \neq 0$ com $h > 0$. (Ver item (1) de 1.6.6).

Note que geometricamente vemos que a curva tipo $(2C)$ é dada pelas retas tangentes $\bar{M}(h) = 0$ ao $Gr(P)$ nos pontos $(h, P(h))$ com $h > 0$ (Ver Figura 3.3.6.b).

iv) Existe um único ciclo limite para os valores dos parâmetros (μ_1, μ_2) tais que $\frac{\mu_2^2}{\mu_1} \neq -\frac{16}{7k^2}$ com $\mu_2 > 0$; $\mu_1 > 0$; $k = cte > 0$.

Observe que geometricamente no plano (h, P) isto corresponde a retas $\bar{M}(h) = 0$ transversais ao $Gr(P)$ nos pontos $(h, P(h))$ com $h > 0$ (Ver Figura 3.3.6.d).

Assim, podemos concluir a Figura (3.3.2). ■

Prova do Teorema (3.3.C)

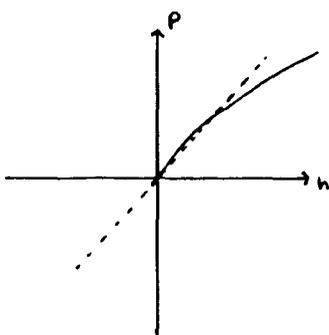
Analogamente ao Teorema (3.3.A); (3.3.B) a demonstração do Teorema (3.3.C) obedece os seguintes passos: (3.3.19) até (3.3.20)

(3.3.19) Novamente, segue do estudo do diagrama de bifurcação das raízes de $\bar{M}(h) = (\mu_1 - \frac{4}{7}h) + (\mu_2 + \frac{8}{7})P(h)$, cuja função \bar{M} provém de (3.3.1) fazendo $\mu_0 = -1$.

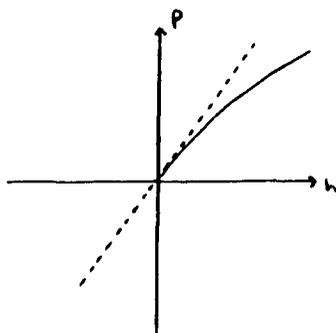
A seguir faremos algumas observações, as quais são simples de serem verificadas.

Tais observações seguem através do auxílio da Proposição (2.3.I); da interpretação geométrica para $\bar{M}(h) = 0$ (dada em (3.3.4)), juntamente com as mesmas idéias usadas nos Teorema (3.3.A); (3.3.B).

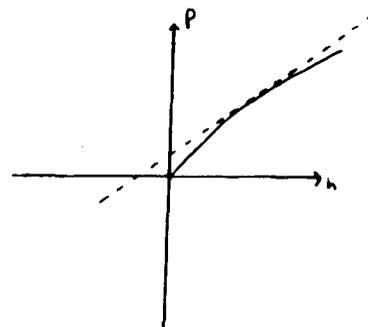
Agora, consideremos a Figura 3.3.7.



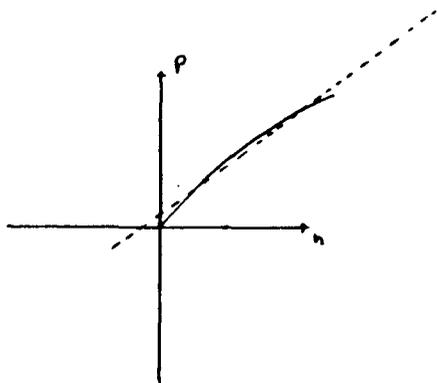
(a)



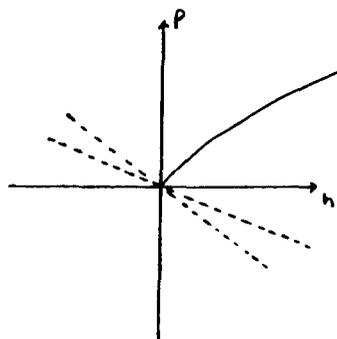
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 3.3.7. Algumas respectivas posições de $\bar{M}(h) = 0$ (dado pela linha pontilhada) e $P(h)$, dando diferentes posições para os ciclos limites ($\mu_0 = -1$)

Em (3.3.20) é estabelecido uma estratégia para concluirmos a Figura (3.3.3).

(3.3.20) Relativo ao diagrama de bifurcação do sistema (1.4.2) (caso $\mu_0 = -1$) podemos verificar que:

i) Existe um número máximo de dois ciclos limites ao redor da origem (Ver Figura 3.3.7.d).

ii) Uma curva de bifurcação do tipo (H) na origem é dada pela semi-reta $\{(\mu_1, \mu_2) / \mu_1 = 0 \text{ e } \mu_2 \neq 0\}$, a qual segue através das equações $\bar{M}(0) = 0, \bar{M}'(0) \neq 0$, o que corresponde às retas transversais ao $Gr(P)$ no ponto $(0,0)$ (Ver Figura 3.3.7.a).

iii) Ocorre uma bifurcação tipo (H_2) no ponto $(\mu_1, \mu_2) = (0,0)$, o qual geometricamente é dado pela reta tangente $\bar{M}(h) = 0$ ao $Gr(P)$ no ponto $(0,0)$, com inclinação igual a $\frac{1}{2}$ (Ver Figura 3.3.7.b). Isto segue do estudo das equações $\bar{M}(0) = \bar{M}'(0) = 0; \bar{M}''(0) \neq 0$.

iv) Temos uma curva de bifurcação tipo ($2C$) dada pelas retas tangentes $\bar{M}(h) = 0$ ao $Gr(P)$ nos pontos $(h, P(h)) \quad \forall h > 0$ (Ver Figura 3.3.7.c). Pode-se verificar que uma tal curva é definida por

$$\gamma(h) = (\mu_{1h}, \mu_{2h}) = \left(\frac{4}{7}h + \frac{4}{7} \frac{P}{P'}, \frac{4}{7P'} - \frac{8}{7} \right).$$

Logo pela continuidade da curva γ com relação ao parâmetro μ_0 , temos que γ será côncava (Ver 3.3.18.iii). Ainda mais, a curva γ interceptará a origem transversalmente, uma vez que não é difícil de ver que $\gamma'(0) = (a, b)$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

v) Temos para as retas secantes $\bar{M}(h) = 0$ ao $Gr(P)$ na origem (com inclinações m tais que $0 < m < \frac{1}{2}$), geometricamente corresponde ao aparecimento simultâneo da bifurcação tipo (H) (Ver 3.3.20.ii) com único ciclo limite (Ver Figura 3.3.7.a). É de fácil verificação vemos que isto ocorre na semi-reta $\{(\mu_1, \mu_2) / \mu_2 > 0; \mu_1 = 0\}$.

vi) Analogamente a (3.3.20.v), podemos observar que retas secantes ao $Gr(P)$ na origem (com inclinações m tais que $\frac{1}{2} < m < +\infty$ ou $-\infty < m < 0$), corresponde

somente a bifurcação tipo (H) na semi-reta $\{(\mu_1, \mu_2) / \mu_2 < 0; \mu_1 = 0\}$. (Ver Figura 3.3.7.e)

Logo, podemos concluir a Figura (3.3.3).

A seguir, iremos dar o diagrama de bifurcação Σ de (0.4.16).

3.4. Diagrama de bifurcação de (0.4.16)

Consideremos as Figuras 3.4.1; 3.4.2; 3.4.3.

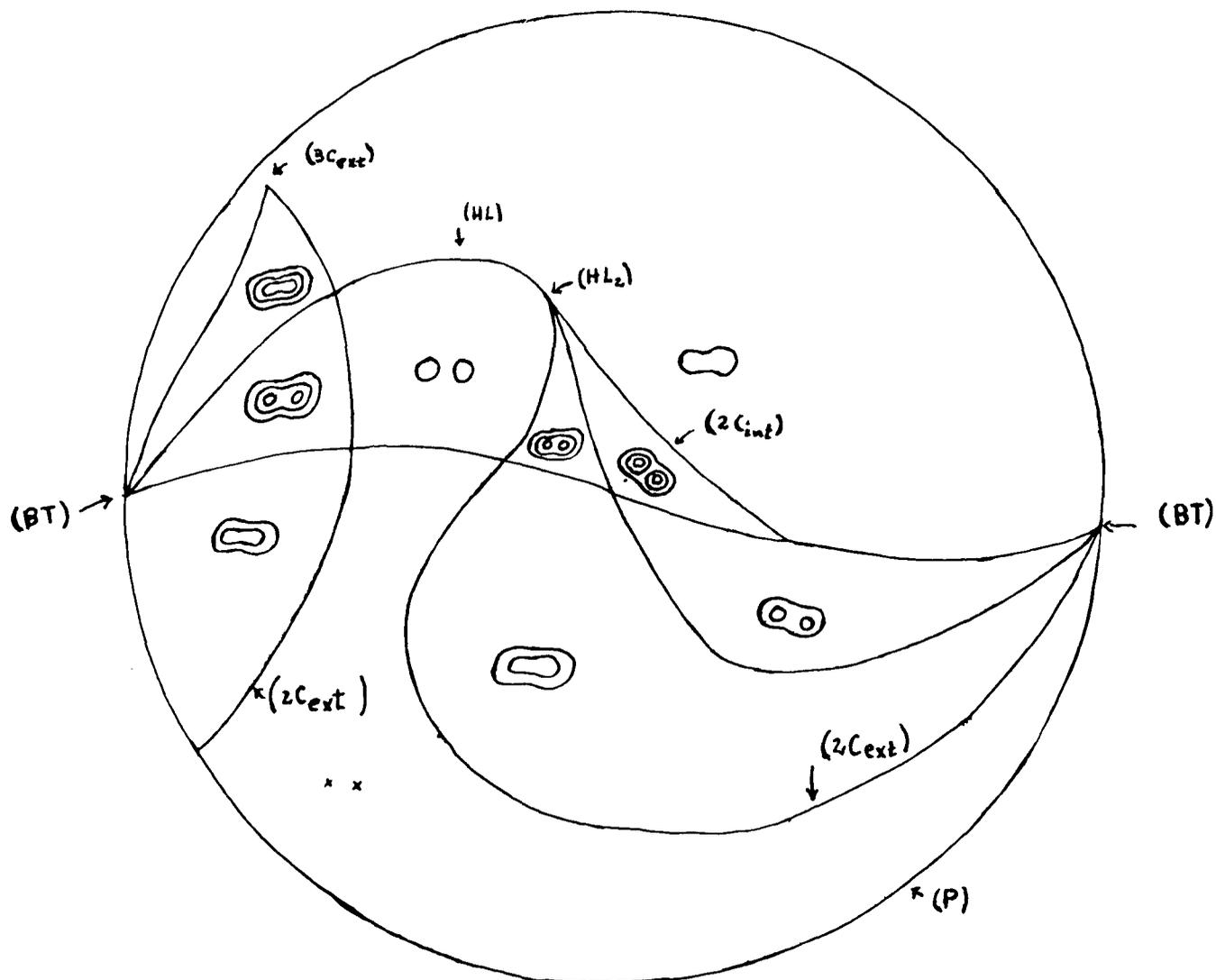


Figura 3.4.1. Intersecção do diagrama de bifurcação de (0.4.16) com a semi-esfera ao redor da origem, no semi-plano $\varepsilon_1 \geq 0$

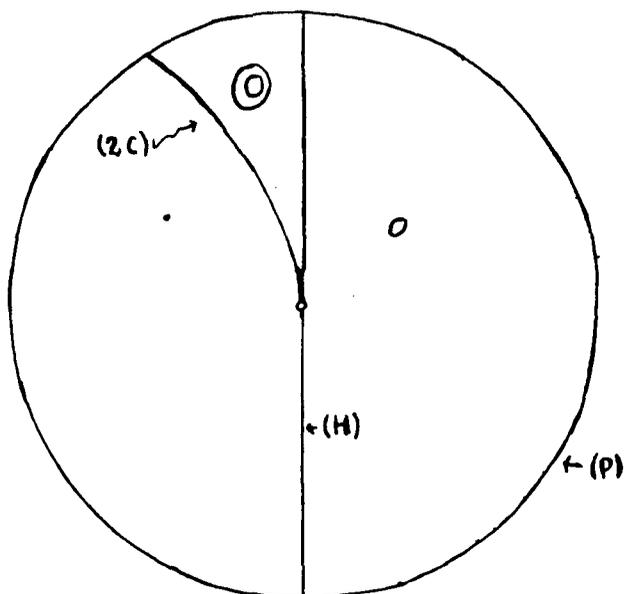


Figura 3.4.2. Intersecção do diagrama de bifurcação de (0.4.16) com a semi-esfera ao redor da origem, no semi-plano $\varepsilon_1 = 0$

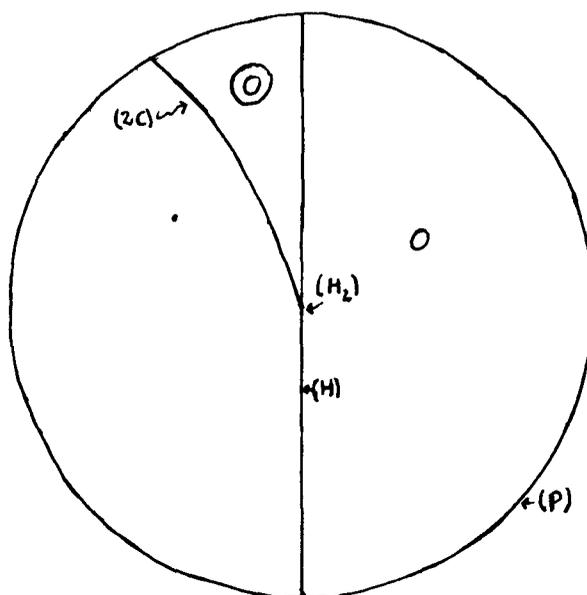


Figura 3.4.3. Intersecção do diagrama de bifurcação de (0.4.16) com a semi-esfera ao redor da origem, no semi-plano $\varepsilon_1 \leq 0$

Vejamos agora o seguinte resultado:

(3.4.D) Teorema.

- i) O diagrama de bifurcação de (0.4.16) é ilustrado pelas Figuras (3.4.1); (3.4.2); (3.4.3).
- ii) O diagrama de bifurcação é um “cone” através da origem.

A primeira parte do Teorema (3.4.D) consta em se dizer quais os tipos de bifurcações que consiste o diagrama de bifurcação (0.4.16) em cada um dos seguintes casos: $\varepsilon_1 > 0$; $\varepsilon_1 = 0$; $\varepsilon_1 < 0$. Na segunda parte do Teorema (3.4.D) nos preocupamos em dar o diagrama de bifurcação para (0.4.16) numa vizinhança $B_{\varepsilon_0} = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)/\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 \leq \varepsilon_0\}$ da origem (com ε_0 suficientemente pequeno).

Para uma visualização geométrica do diagrama de bifurcação (0.4.16), intersectâmo-lo com a fronteira da vizinhança B_{ε_0} (ou $\partial B_{\varepsilon_0}$), podendo assim mostrá-lo sobre as semi-esferas $\varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_1 \leq 0$ mediante identificações com uma bola fechada tendo $\partial B_{\varepsilon_0} = \{(\varepsilon_2, \varepsilon_3)/\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = \varepsilon_0\}$ ($\varepsilon_1 = 0$). (Ver Figuras 3.4.1; 3.4.2; 3.4.3).

Prova de (3.4.D.i):

(3.4.1) Caso $\varepsilon_1 > 0$

Para esse caso ($\varepsilon_1 > 0$) temos que o diagrama de bifurcação de (0.4.16) consiste de:

- a) Um cone C sobre o diagrama de bifurcação de (1.4.2) na região $\varepsilon_1 > 0$.
- b) Duas superfícies de bifurcação do tipo (H) , duas superfícies de bifurcação do tipo (HL) , e duas superfícies de bifurcação do tipo $(2C_{ext})$.

A prova de (3.4.1.a) será feita respeitando os seguintes passos: (3.4.1.1) até (3.4.1.3).

Consideremos as Figuras 3.4.4 e 3.4.5.

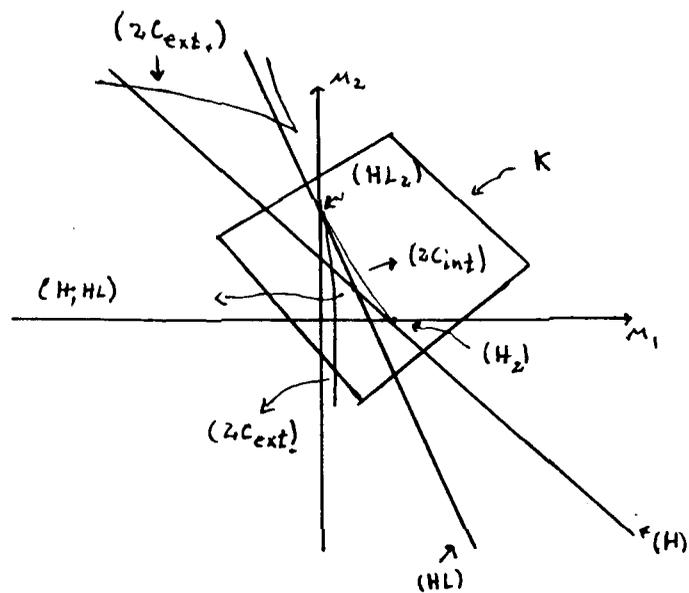


Figura 3.4.4. Vizinhança compacta K do triângulo curvado $(HL_2; (H; HL); H_2)$ no plano (μ_1, μ_2) (Ver Figura 3.3.5).

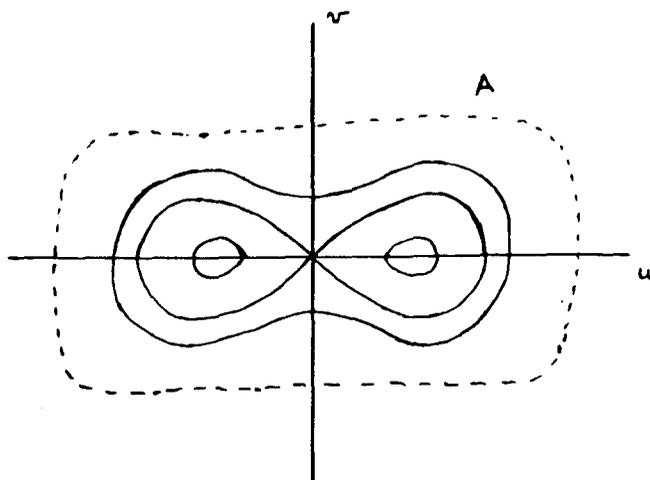


Figura 3.4.5. Vizinhança compacta A do disco singular $\{h \leq h_0, h_0 > 0\} \cap \{u \leq \sqrt{2}\}$

Para a construção do cone C seguiremos as mesmas idéias usadas por [D, R, S].

Assim sendo, construamos o cone C ao redor do eixo oe_1 a qual está sobre a vizinhança compacta K sobre o diagrama de bifurcação dado no Teorema (3.3.A). (Ver Figura 3.4.4)

(3.4.1.1) **Obs.** Fixado um compacto $K \subset \mathbb{R}^2$ conforme mostra a Figura 3.4.4, e tomando $(\mu_{1_0}, \mu_{2_0}) \in K$, fixado uma seção pequena Σ_0 sobre uma trajetória γ_0 do campo Hamiltoniano (1.4.3) (caso $\mu_0 = 1$), vemos que existe uma aplicação de Poincaré associado ao campo $X_{(\bar{\delta}, \mu_{1_0}, \mu_{2_0})}$, com $\bar{\delta}$ suficientemente pequeno.

Note que isto segue da variação contínua e diferenciável das soluções com respeito as condições iniciais. Logo $\forall (\mu_1, \mu_2) \in K$ temos que existe $\delta = \delta_{(\mu_1, \mu_2)}$ tal que está bem definida a aplicação de Poincaré associada a $X_{(\delta, \mu_1, \mu_2)}, \Sigma_0, \gamma_0$.

Logo sobre K , existirá $\bar{\delta} = \bar{\delta}(K) = \min\{\max \delta_{(\mu_1, \mu_2)}, (\mu_1, \mu_2) \in K\}$ tal que \exists a aplicação de Poincaré associada a $X_{(\bar{\delta}, \mu_1, \mu_2)}, \Sigma_0, \gamma_0$.

Logo $\exists \bar{\delta} = \bar{\delta}(K)$ tal que em

$$[0, \bar{\delta}] \times K = \{(\mu_1, \mu_2) / (\mu_1, \mu_2) \in K, \delta \in [0, \bar{\delta}]\}$$

o conjunto de bifurcação de X $\Big|_{(\delta, \mu_1, \mu_2)}^A$ pode ser descrito através do difeomorfismo dado por

$$F : [0, \bar{\delta}] \times K \rightarrow Im(F([0, \bar{\delta}] \times K))$$

$$(\delta', \mu_1, \mu_2) \rightarrow \begin{cases} \psi_{\delta}^{-1}(\delta', \mu_1, \mu_2) & \text{se } \delta \neq 0 \\ \text{identidade} & \text{se } \delta = 0 \end{cases}$$

com ψ_{δ} a mudança de parâmetros dada em (1.4.1).

(3.4.1.2) Assim sendo teremos:

i) Bifurcações de codimensão 1:

a) Uma superfície de bifurcação do tipo $(H) : S_H =]0, \bar{\delta}(K)[\times (H)$.

b) Uma superfície de bifurcação do tipo $(HL) : S_{HL} =]0, \bar{\delta}(K)[\times (HL)$.

c) Uma superfície de bifurcação do tipo $(2C_{int}) : S_{2C_{int}} =]0, \bar{\delta}(K)[\times (2C_{int})$.

d) Uma superfície de bifurcação do tipo $(2C_{ext_-}) : S_{2C_{ext_-}} =]0, \bar{\delta}(K)[\times (2C_{ext_-})$.

ii) Bifurcações de codimensão 2:

a) Uma curva de bifurcação tipo $(H_2) :]0, \bar{\delta}(K)[\times \{(H_2)\}$.

b) Uma curva de bifurcação tipo $(HL_2) :]0, \bar{\delta}(K)[\times \{(HL_2)\}$.

c) Uma curva de bifurcação do tipo $S_{2C_{ext_-}} \cap S_H$, onde temos simultaneamente as bifurcações do tipo $(2C_{ext_-})$ e (H) .

d) Uma curva de bifurcação do tipo $S_{2C_{int}} \cap HL$, onde temos simultaneamente as bifurcações do tipo $(2C_{int})$ e (HL) .

(3.4.1.2.1) **Obs.** Observe que a coleção das variedades acima definidas estratifica o “cone” de tal modo que as curvas (Bifurcação de codimensão 2) estão na fronteira da união das superfícies (definidas através das bifurcações de codimensão 1). Cada variedade exprime um tipo topológico da família em questão.

Agora, notemos que a imagem de $[0, \bar{\delta}(K)] \times K$ pela aplicação F (dada em (3.4.1.1) restringida a $\mu_0 = 1$) é um cone $C_{\varepsilon_1}(K)$ numa vizinhança do eixo $o\varepsilon_1$ para $\varepsilon_1 > 0$. Logo a superfície

$$Im(F([0, \bar{\delta}(K)] \times K)) = \{(\delta^2, \delta^4 \mu_1, \delta^2 \mu_2) / \delta \in]0, \bar{\delta}], \mu_1, \mu_2 \in K\}$$

é o cone produrado onde F leva o conjunto de bifurcação $X_{(\delta, \mu_1, \mu_2)}|_{\Lambda}$ (o qual está contido em $[0, \bar{\delta}(K)] \times K$ com coordenadas (δ, μ_1, μ_2)) sobre a $Im(F([0, \bar{\delta}(K)] \times K))$.

(3.4.1.2.2) **Obs.** O conjunto de bifurcação em $C_{\varepsilon_1}(K)$ são imagens por F das curvas e superfícies de bifurcação descritas em (3.4.1.2), e consequentemente homeomorfas a cones quando restringimos F as bifurcações do tipo (H) ; (H_2) ; (HL) ; (HL_2) ; $(2C_{ext-})$; $(2C_{ext+})$; $(2C_{int})$; $(2C_{ext-} \cap H)$; $(2C_{ext-} \cap HL)$ contidas em \mathbb{R}^2 (cones com curvas geradoras dadas por:

$$\delta \rightarrow (\delta^2, \mu_1 \delta^4, \mu_2 \delta^2),$$

ou dito de outra maneira, dada por

$$\varepsilon_1 \rightarrow (\varepsilon_1, \varepsilon_1^2 \mu_1, \varepsilon_2 \mu_2) \quad (\text{quando } \varepsilon_1 > 0).$$

c.q.d. ■

Agora, a prova de (3.4.1.b) segue através dos passos (3.4.1.2.3) até (3.4.1.2.5).

(3.4.1.2.3) **Obs.** Temos o diagrama de bifurcação para a bifurcação tipo (B.T.) para $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ numa vizinhança da origem e $\varepsilon_3 \neq 0$ (Ver Figuras (1.3.1); (1.3.2)). Note que deste diagrama ramifica-se (uma quando $\varepsilon_3 > 0$ e a outra quando $\varepsilon_3 < 0$) duas superfícies de bifurcação do tipo (H) ; duas superfícies de bifurcação do tipo (HL) e duas superfícies de bifurcação do tipo $(2C_{ext})$.

(3.4.1.2.4) **Obs.** Por (3.4.1.2.3) e do Teorema 3.3.A segue que a superfície de bifurcação tipo $(2C_{ext-})$ necessariamente pertence a fronteira da superfície de bifurcação tipo $(2C)$. Tal superfície de bifurcação $(2C)$ tem como fronteira uma curva de bifurcação de Hopf de ordem 2.

(3.4.1.2.5) **Obs.** Por (3.3.16) (Teorema 3.3.A) verifica-se a existência de um ponto de bifurcação do tipo $(3C_{ext})$. Podemos ver que uma ponta do ramo da curva do tipo $(2C_{ext+})$ dado no Teorema (3.3.A) irá morrer num dos ramos da bifurcação do tipo (BT) , e a outra ponta deverá atravessar à fronteira da esfera, a qual irá em direção a região $\varepsilon_1 < 0$, onde encontrará a fronteira da bifurcação do tipo (H_2) . Na região $\varepsilon_1 > 0$, a intersecção do diagrama de bifurcação de (0.4.16) com um plano paralelo ao plano $\pi : \{(0, \varepsilon_2, \varepsilon_3) / \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \mathbb{R}\}$ donde projetada nesse plano (π) , segue a Figura (3.4.1).

(3.4.2) Caso $\varepsilon_1 = 0$

Neste caso ($\varepsilon_1 = 0$), o diagrama de bifurcação de (0.4.16) consiste de uma bifurcação do tipo (P) (Ver 1.2.5); e as curvas de bifurcação do tipo $(2C)$ e (H) . Isto segue do Teorema (3.3.B) e (1.4.1).

(3.4.3) Caso $\varepsilon_1 < 0$

Temos para este caso ($\varepsilon_1 < 0$) uma superfície de bifurcação do tipo (H) em $\varepsilon_1 < 0; \varepsilon_2 = 0; \varepsilon_3 \neq 0$; (H_2) em $\varepsilon_1 < 0; \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$; e do tipo $(2C)$ dado em $\varepsilon_1 < 0; \varepsilon_2 < 0; \varepsilon_3 > 0$.

Isto segue do uso da mudança de parâmetros (1.4.1), e do Teorema (3.3.C). (Ver estudo posterior em (3.4.7)).

Agora, veremos o item (ii) do Teorema (3.4.D), ou seja, que o diagrama de bifurcação de (0.4.16) é dado como união de “cones”.

Para a construção de tais cones seguiremos a técnica usada por [R]; [D, R, S]; [D, R, S, Z]. Construiremos três cones: C_1, C_2, C_3 , onde o diagrama de bifurcação de (0.4.16) será dado pela união $C_1 \cup C_2 \cup C_3$.

Assim sendo vejamos:

Prova de (3.4.D.ii)

l) Construção do “cone” C_1

O cone C_1 é construído ao redor do eixo $o\varepsilon_1$ sobre um compacto K no espaço $\{\mu_1, \mu_2\}$, isto é, $C_1 = C_{\varepsilon_1} = \{\mu_0 = \pm 1; (\mu_1, \mu_2) \in K_{\varepsilon_1}$ compacto arbitrário de \mathbb{R}^2 e $\delta \in (0, \delta_{\varepsilon_1}]$, onde $\delta_{\varepsilon_1} = \delta_{\varepsilon_1}(K)$ o menor possível}. Para construção do “cone” C_1 estudaremos dois casos: $\mu_0 = 1$ e $\mu_0 = -1$.

i) Caso $\mu_0 = 1$.

Já construímos anteriormente (Ver Teorema 3.3.A) um cone C sobre o diagrama de bifurcação de (1.4.2) (caso $\mu_0 = 1$).

Agora, consideremos o mesmo compacto K no espaço $\{\mu_1, \mu_2\}$ tal como na Figura (3.4.4). Recordando do item i) do Teorema (3.4.D) vemos que os conjuntos de bifurcação de $X_{(\mu_1, \mu_2, \delta)|_A}$ (onde A é dado na Figura 3.4.5) está contido em $[0, \delta(K)] \times K$, o qual usando o difeomorfismo F dado em (3.4.1.1), vêmo-lo estar contido na $Im(F([0, \delta] \times K)) = a$ um “cone” no espaço $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

Assim sendo, usando o item (i) do Teorema (3.4.D) segue o “cone” $C_{\varepsilon_1}^+(K)$ (uma vez que o compacto K pode ser pego arbitrariamente grande), onde

$$C_{\varepsilon_1}^+(K) = \{(\delta^2, \delta^4 \mu_1, \delta^2 \mu_2) / (\mu_1, \mu_2) \in K, \delta \in]0, \delta_{\varepsilon_1}]\} \text{ se } \varepsilon_1 > 0.$$

ii) Caso $\mu_0 = -1$

Analogamente a construção do cone $C_{\varepsilon_1}^+(K)$, podemos obter o “cone” $C_{\varepsilon_1}^-(\tilde{K})$ para o caso $(\varepsilon_1 < 0)$ (Ver 3.3.3), ou seja, considerando o compacto \tilde{K} (resp. \tilde{A}) no espaço de parâmetros (resp. no espaço de fase) conforme mostra a Figura (3.4.6) (resp. Figura (3.4.7)).

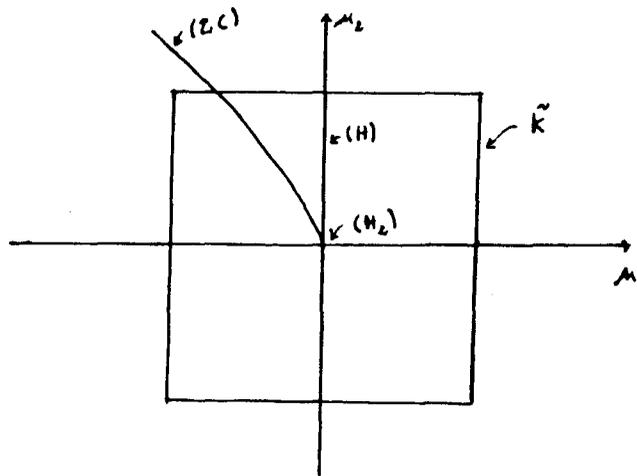


Figura 3.4.6. Vizinhança compacta \tilde{K} (\tilde{K} fixo) do ponto de bifurcação tipo (H_2)

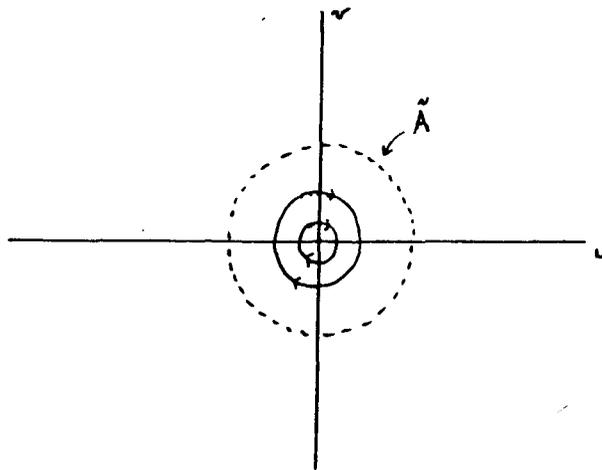


Figura 3.4.7. Vizinhança compacta \tilde{A} do ponto singular $(0,0)$

Logo o conjunto de bifurcação de

$$X_{(\mu_1, \mu_2, \delta)}|_{\tilde{A}} \text{ está contida em } [-\delta(\tilde{K}), 0] \times \tilde{K},$$

que por sua vez (através do difeomorfismo F (Ver 3.4.1.1)) está contido num cone (sobre \tilde{K}) dado por $Im(F([-\delta(\tilde{K}), 0] \times \tilde{K}))$.

Portanto, está caracterizado o cone $C_{e_1}^-(\tilde{K})$.

(3.4.4) Neste cone $C_{\varepsilon_1}^-(\tilde{K})$ estão contidas:

i) Bifurcações de codimensão 1:

a) Uma superfície de bifurcação do tipo $(2C) : S_{2C} =] - \delta(\tilde{K}), o[\times \{(2C)\}$.

b) Uma superfície de bifurcação do tipo $(H) : S_H =] - \delta(\tilde{K}), o[\times \{(H)\}$.

ii) Bifurcações de codimensão 2:

a) Uma curva de bifurcação do tipo $(H_2) :] - \delta(\tilde{K}), o[\times \{(H_2)\}$.

Analogamente ao que vimos em (3.4.2), temos que a imagem do conjunto de bifurcação em $C_{\varepsilon_1}^-$ são imagens por F das curvas e superfícies descritas em $] - \delta(\tilde{K}), o[\times \tilde{K}$, e conseqüentemente homeomorfas a cones sobre $(2C); (H_2); (H) \subset \mathbb{R}^2$ (cones cujas curvas geradoras são dadas por:

$$\delta \rightarrow (-\delta^2, \delta^4 \mu_1, \delta^2 \mu_2) ,$$

ou ainda, dadas por

$$\mu_0 \rightarrow (\mu_0, \mu_0^2 \mu_1, -\mu_0 \mu_2) \quad (\mu_0 < 0) .$$

Como o compacto \tilde{K} pode ser pego arbitrariamente grande, segue o cone

$$C_{\varepsilon_1}^-(\tilde{K}) = \{(-\delta^2, \delta^4 \mu_1, \delta^2 \mu_2) / (\mu_1, \mu_2) \in \tilde{K} , \quad \delta \in] - \delta(\tilde{K}), 0[\}$$

(3.4.4.1) Observemos que fora do conjunto de bifurcações (contido no “cone” C_{ε_1} , o campo vetorial $X_{(\mu_1, \mu_2, \delta)}$ possui somente elementos críticos hiperbólicos (pontos singulares ou ciclos limites) em A , o que conseqüentemente são campos vetoriais de tipo topológico localmente constante.

II) Construção do “cone” C_2

De maneira análoga ao “cone” C_1 , um “cone” C_2 é construído ao redor do eixo $o\varepsilon_2$, sobre um compacto arbitrário K_{ε_2} de o no espaço $\{\mu_2\}$ multiplicado por uma pequena vizinhança F_{ε_2} de o no espaço $\{\mu_0\}$, ou seja, é construído $C_2 = C_{\varepsilon_2} = \{\mu_1 = \pm 1; \mu_2 \in K_{\varepsilon_2}$ e $\mu_0 \in F_{\varepsilon_2}; \delta \in]o, \delta_{\varepsilon_2}[\}$.

(3.4.5) Para isto devemos estudar o sistema (0.4.16) no plano $\varepsilon_1 = 0$, ou equivalentemente no plano $\mu_0 = 0$.

No que segue iremos dar o diagrama de bifurcação numa vizinhança da origem dentro do plano $\varepsilon_1 = 0$.

Com o objetivo de obter o cone C_2 fazamos por simplicidade $\mu_1 = \pm 1$. Logo ficaremos com os parâmetros (δ, μ_2) .

(3.4.5.1) Tomando $\mu_2 \in K_{\varepsilon_2}$ temos que o sistema (1.4.2) ($\mu_0 = 0$) ou equivalentemente o sistema (0.4.16) ($\varepsilon_1 = 0$) tem um único ciclo limite na região $]0, \delta_{\varepsilon_2}] \times K_{\varepsilon_2}$ para $\mu_1 = 1$ (Ver Teorema (3.3.B); Figura 3.3.2).

(3.4.5.2) Seguindo, temos uma região de 0 ou 2 ciclos limites (quando $\mu_0 = 0$) para o sistema (1.4.2); e uma curva de duplos ciclos limites entre essas duas regiões (Ver Teorema (3.3.B); Figura (3.3.2)). Isto segue quando $\mu_1 = -1$.

Obs: As regiões ditas em (3.4.5.2) estão contidas em $[-\delta_{\varepsilon_2}, 0] \times K_{\varepsilon_2}$, onde δ_{ε_2} é o número positivo para qual o sistema (1.4.2) tem aplicação de Poincaré definida.

Neste plano (isto é, $\varepsilon_1 = 0$), podemos ver que o sistema (0.4.16) tem comportamento estruturalmente estável fora da origem, exceto sobre a curva $(2C)$; (H) ; e para o ponto tipo (H_2) (Ver Teorema 3.3.B).

Assim sendo, considerando o Teorema (3.3.B); (3.3.C), o comportamento que ocorre em (3.4.5.1); (3.4.5.2) será equivalente para μ_0 suficientemente pequeno com $\mu_0 \leq 0$.

Ainda para μ_0 suficientemente pequeno ($\mu_0 > 0$) o comportamento do sistema (0.4.16) será equivalente ao caso visto no Teorema (3.3.A).

Logo, usando a mudança de coordenadas dada em (1.4.1) segue a vizinhança cônica dada pelo cone $C_2 = C_{\varepsilon_2}^+ \cup C_{\varepsilon_2}^-$ onde

$$C_{\varepsilon_2}^+ = \{(0, \delta^4, \delta^2 \mu_2) / \mu_2 \in K_{\varepsilon_2}, \mu_0 \in F_{\varepsilon_2} \text{ e } \delta \in]0, \delta_{\varepsilon_2}]\}$$

e

$$C_{\varepsilon_2}^- = \{(0, -\delta^4, \delta^2 \mu_2) / \mu_2 \in K_{\varepsilon_2}, \mu_0 \in F_{\varepsilon_2} \text{ e } \delta \in]-\delta_{\varepsilon_2}, 0]\}$$

III) Construção do "Cone" C_3

O "cone" C_3 é construído ao redor do eixo ε_3 sobre uma pequena vizinhança compacta K_{ε_3} de o no espaço $\{(\mu_0, \mu_1)\}$, ou seja, é construído

$$C_3 = C_{\varepsilon_3} = \{\mu_2 = \pm 1; (\mu_0, \mu_1) \in K_{\varepsilon_3} \text{ e } \delta \in]0, \delta_{\varepsilon_3}]\}, \delta_{\varepsilon_3} \text{ o pequeno suficiente} .$$

(3.4.6) Assim sendo, com a finalidade de obter o “cone” C_3 , por simplicidade fixamos $\mu_2 = 1$ em (1.4.2), e assim ficamos com (δ, μ_0, μ_1) como sendo os parâmetros.

(3.4.6.1) Notemos que para cada $\delta \neq 0$ (positivo), temos uma família a dois parâmetros $X_{(\mu_0, \mu_1)}$, a qual encontra a bifurcação tipo (B.T.) em $\mu_0 = \mu_1 = 0$ e $\mu_2 \neq 0$ como já foi observado no início do trabalho. (Ver 1.3)

(3.4.6.2) Agora, observemos que se $\mu_0 = \mu_1 = 0$ e $\mu_2 \neq 0$, então segue de (3.3.1) que $\bar{M}(h) = -\frac{4}{7}h + \mu_2 P(h)$.

(3.4.6.3) Ainda, notemos que $\bar{M}(h) = 0$ é uma linha que passa através da origem com inclinação positiva se $\mu_2 = 2$ e com inclinação negativa se $\mu_2 = -2$.

Agora, pela Proposição (2.3.G) temos que $P(h) = k\sqrt{h}$, e é fácil verificar usando (3.4.6.2) e (3.4.6.3) que o sistema (1.4.2) tem um único (nenhum) ciclo limite para $\mu_2 = 2$ (resp. $\mu_2 = -2$) quando $\mu_0 = \mu_1 = 0$.

Logo, para μ_0, μ_1 suficientemente pequeno, $\mu_0, \mu_1 \in K_{\varepsilon_3}$ com $\mu_0 < 0$, $\mu_1 < 0$, o comportamento do sistema (1.4.2) será equivalente ao caso $\mu_2 = -2$) (como também para $\mu_2 = 2$. (Ver Figuras 1.3.1 e 1.3.2).

Logo, usando a mudança de coordenadas dada em (1.4.1) segue o cone C_3 .

Obs. Pequenas perturbações não “criam” ciclos limites ao redor dos pontos singulares $(\pm\sqrt{\varepsilon_1}, 0)$. Isto segue da universalidade do desdobramento da bifurcação do tipo Pitchfork (P).

Em $[D, R, S]$; $[D, R, S, Z]$; $[R]$ pode-se encontrar maiores detalhes sobre esses cones de bifurcação, ou seja, sobre os cones C_1, C_2, C_3 vistos anteriormente.

- [J] P. Joyal, The cusp of order n . *Journal of Differential Equations* 88 (1990), 1-14.
- [H, C] J. K. Hale, S.-N. Chow, *Methods of bifurcation theory*, Springer-Verlag, Berlin (1982).
- [L, R] Li Chengzhi and C. Rousseau, A system with three limit cycles appearing in a Hopf bifurcation and dying in a homoclinic bifurcation. The cusp of order 4, *J. of Differential Equations* 79 (1989), 132-167.
- [P] G. S. Pretov, Elliptic integrals and their nonoscillation, *Funct. Anal. Appl.* 20 (1986), 37-40.
- [Ra1] R. Roussarie, Déformations Generiques des Cusps. *Astérisque*, 150-151 (1987), 151-184.
- [Ra2] R. Roussarie, On the number of limite cicles which appear by perturbation of separatrix loop of planar vector fields, *Bol. Soc. Bras. Mat.*, 17 (1986), 67-101.
- [Re1] C. Rousseau, On the double homoclinic loop bifurcation of a symmetric system. Département de Mathématiques et de Statistique and Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal (Preprint).
- [Re2] C. Rousseau, Codimension 1 and 2 bifurcations of fixed points of diffeomorphisms and periodic solutions of vector fields. *The Canadian Mathematical Society. Ann. Sci. Math. Québec*.
- [R, Z] C. Rousseau and H. Zoladek, Zeroes of Complete Elliptic Integrals for 1:2 Resonance *Journal of Differential Equations* 94 (1991), 41-54.
- [S] Shi Songling, A method of constructing cycles without contact around a weak focus, *J. of Differential Equations* 41 (1981), 301-312.
- [Ta1] F. Takens, Singularities of vector fields, *Publ. Math.* 43 (1974), 47-100.
- [Ta2] _____, Forced oscillations and bifurcations, in *Applications of Global Analysis I. Comm. Math. Inst. Rsjksuniverasiteit, Utrecht* (1974), 1-59.
- [Ta3] _____, Unfoldings of certain singularities of vector fields. Generalized Hopf bifurcations, *Journal of Differential Equations* 14, (1973), 476-493.

BIBLIOGRAFIA

- [A1] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag: New York, Heidelberg, Berlin (1978).
- [A2] V. I. Arnold, Loss of stability of self-oscillations close to resonances and versal deformation of equivariant vector fields, *Funct. Anal. Appl.* 11 (1977), 1-10.
- [A3] V. I. Arnold, *Geometric methods in the theory of ordinary differential equations*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1982).
- [B] R. I. Bogdanov, Bifurcation of the Limit Cycle of a Family of Plane Vector Fields, *Selecta Math. Sov. I* (1981), 373-387.
- [B, L] G. Bonin et Josée Legault, Comparaison de la Méthode des constantes de Lyapunov et de la bifurcation de Hopf, *Canad. Math. Bull.* Vol. 31 (2), 1988, 200-209.
- [C] J. Car, Application of center manifolds, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1981).
- [D, R, S] F. Dumortier, R. Roussarie and J. Sotomayor, Generic 3-parameter families of vectors fields on the plane, unfolding a singularity with nilpotent part. The cusp case of codimension 3. *Ergodic theory and dynamical systems* 7 (1987), 375-413.
- [D, R, S, Z] F. Dumortier, R. Roussarie and J. Sotomayor, H. Zoladek, *Bifurcations of Planar Vector Fields: Nilpotent Singularities and Abelian Integrals*, 1480, Springer-Verlag (1991).
- [G, H] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcation of vectors fields*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1983).
- [F] P. J. Fernandez, *Medida e integração, Projeto Euclides*, Rio de Janeiro, IMPA (1976).