

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA,  
ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

A ÁLGEBRA DO ESPAÇO-TEMPO,  
O SPINOR DE DIRAC-HESTENES  
E A TEORIA DO ELÉTRON

Jayme Vaz Jr.

*m.t.*  
Vaz Junior, Jayme

Tese apresentada ao Instituto de Matemática,  
Estatística e Ciência da Computação da  
Universidade Estadual de Campinas como  
requisito parcial para a obtenção do Título de  
Doutor em Ciências em Matemática Aplicada  
área: Física-Matemática

Orientador: Prof. Dr. Waldyr A. Rodrigues Jr. /

Rodrigues Junior, Waldyr Alves

Campinas

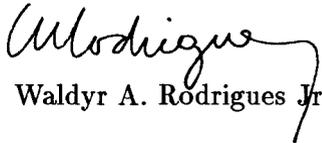
1993



**A ÁLGEBRA DO ESPAÇO-TEMPO,  
O SPINOR DE DIRAC-HESTENES  
E A TEORIA DO ELÉTRON**

Este exemplar corresponde à redação  
final da tese devidamente corrigida e  
defendida pelo Sr. Jayme Vaz Jr.  
e aprovada pela Comissão Julgadora

Campinas, 16 de dezembro de 1993

  
Prof. Dr. Waldyr A. Rodrigues Jr.

Tese apresentada ao Instituto de Matemática,  
Estatística e Ciência da Computação da  
Universidade Estadual de Campinas como  
requisito parcial para a obtenção do Título de  
Doutor em Ciências em Matemática Aplicada

## RESUMO

A relação entre a teoria do elétron e o eletromagnetismo é discutida com base no uso da álgebra do espaço-tempo e do spinor de Dirac-Hestenes. Desta relação surge uma equação não-linear como uma alternativa, a princípio mais satisfatória, à equação de Dirac. Este estudo é possível uma vez formulada a teoria do spinor de Dirac-Hestenes como uma classe de equivalência de elementos da sub-álgebra par da álgebra do espaço-tempo.

## ABSTRACT

The relationship between the theory of electron and electromagnetism is discussed by using the spacetime algebra and the Dirac-Hestenes spinor. From this relationship it emerges a non-linear equation which seems to be more satisfactory than Dirac equation. This study is possible once it is formulated the theory of Dirac-Hestenes spinor as an equivalence class of elements of the even subalgebra of the spacetime algebra.

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar a minha gratidão ao Prof. Dr. Waldyr Alves Rodrigues Jr. pela sua orientação, pelo incentivo ao trabalho e à liberdade de pensamento e ação, e pela amizade. Agradeço também a todos os companheiros e professores do grupo de Física-Matemática pelo excelente ambiente de trabalho e pelas importantes discussões; em particular gostaria de mencionar o Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira, Prof. Dr. Erasmo Recami, Prof. Dr. Márcio Antonio de Faria-Rosa, Prof. Dr. Quintino Augusto Gomes de Souza, Alexandre Luís Trovon de Carvalho, José Emílio Majorino e José Fernando Trevisan Giglio. Gostaria também de agradecer ao Prof. Dr. Pertti Lounesto (Helsinki University) pelas discussões durante o período de redação final desta tese. Agradeço ainda às secretárias do DMA, Benê e Fátima, e à Lourdes, do SDE. Finalmente, agradeço à CAPES e à FAEP-UNICAMP pelo apoio financeiro.

Jayme Vaz Jr.

# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares Matemáticos</b>	<b>5</b>
1.1 Álgebra de Clifford . . . . .	5
1.2 Exemplos . . . . .	12
1.2.1 Álgebra de Pauli . . . . .	12
1.2.2 Álgebra do Espaço-Tempo . . . . .	14
1.2.3 Álgebra de Dirac . . . . .	18
1.3 O Fibrado de Clifford do Espaço-Tempo . . . . .	20
<b>2 Formalismos Lagrangeano e Hamiltoniano com Álgebras de Clifford</b>	<b>29</b>
2.1 Formalismo Lagrangeano . . . . .	29
2.2 Formalismo Hamiltoniano . . . . .	35
<b>3 Campos Spinoriais de Dirac-Hestenes</b>	<b>38</b>
3.1 O Spinor de Dirac-Hestenes . . . . .	38
3.2 Campos Spinoriais de Dirac-Hestenes e Derivação Covariante . . . . .	41
3.3 A Relação entre Spinores de Dirac-Hestenes e Spinores Algébricos e Covariantes . . . . .	44
<b>4 A Teoria de Dirac e a Álgebra do Espaço-Tempo</b>	<b>48</b>
4.1 A Equação de Dirac-Hestenes . . . . .	48
4.2 Alguns Aspectos da Teoria de Dirac . . . . .	51
4.3 A Equação de Dirac-Hestenes em Espaços de Riemann-Cartan . . . . .	58
4.4 Zitterbewegung e a Interpretação da Mecânica Quântica . . . . .	61
4.5 Limite Clássico: O Modelo de Barut-Zanghi . . . . .	65
<b>5 Sobre a Relação entre Eletromagnetismo e Mecânica Quântica</b>	<b>70</b>
5.1 Representação Spinorial das Equações de Maxwell . . . . .	70
5.2 Sobre a Relação entre as Equações de Maxwell e de Dirac . . . . .	76
5.3 Um Modelo “Eletromagnético” dos Léptons . . . . .	80
<b>Observações Finais</b>	<b>85</b>

# Introdução

A linguagem impõe uma limitação natural no modo de expressarmos nossas idéias. Podemos distinguir as linguagens em ordinárias e formais, onde as linguagens formais são o resultado de uma “matematização” coerente de certos conceitos. As linguagens formais constituem-se na base da metodologia científica moderna, e graças ao uso da matemática foram possíveis inúmeros avanços e descobertas na física. É claro que estas linguagens formais também apresentam uma limitação, e a questão que precisa ser colocada refere-se à adequação ou não de uma particular linguagem para expressarmos e formularmos uma teoria física. Em outras palavras, uma teoria física pode ser formulada naturalmente em termos de uma estrutura matemática e não de outra, e o uso de uma estrutura matemática adequada permite não apenas formularmos naturalmente uma teoria física, como também sugerir e permitir generalizações desta teoria.

O fato das álgebras de Clifford terem sido “reinventadas” várias vezes na física moderna sugere que elas sejam uma linguagem natural para a física. Como exemplo do uso de álgebras de Clifford na física moderna podemos citar as teorias de Pauli e de Dirac, formuladas em termos de álgebras de matrizes complexas  $2 \times 2$  e  $4 \times 4$ , respectivamente, ou ainda a álgebra dos operadores de criação e aniquilação de férmions. Outro fato que sugere a “naturalidade” das álgebras de Clifford é a quantidade de nomes associados independentemente à sua invenção (Parra 1993); além de Clifford, podemos citar os trabalhos de Euler, Rodrigues, Hamilton, Grassmann e Lipschitz.

Uma das razões de tantos nomes envolvidos por trás das álgebras de Clifford é a sua estreita relação com a geometria. De fato, a denominação original de Clifford (1878) para estas estruturas era álgebras geométricas. Os elementos de uma álgebra de Clifford e as operações algébricas possuem uma interpretação natural como elementos geométricos e operações geométricas, o que mostra a sua importância tanto do ponto de vista matemático como físico. Esse fato, entretanto, passou despercebido na física, salvo algumas exceções (Keller 1992), até o trabalho de Hestenes (1966).

As álgebras de Clifford aparecem tradicionalmente dentro da física como álgebras de matrizes, e não há qualquer significado geométrico aparente por trás de uma matriz. Por outro lado, estas estruturas algébricas aparecem muitas vezes em problemas envolvendo spinores, e a definição abstrata usualmente empregada dentro da física para estes objetos também não sugere qualquer interpretação geométrica. Por outro lado, estudando a teoria das álgebras de Clifford vemos que elas são isomorfas a certas álgebras de matrizes, de modo que estas matrizes são *representações* de elementos algébricos com um significado geométrico bem definido dentro de uma álgebra de Clifford. Uma vez compreendido isto, Hestenes (1966) mostrou no livro “Space-Time Algebra” que muitos aspectos abstratos da física moderna possuem uma interpretação geométrica clara e

simples, antes escondida nas matrizes.

Os trabalhos posteriores de Hestenes mostraram o quanto o cálculo desvinculado de matrizes, além de interpretável geometricamente, é muito mais eficiente que o cálculo tensorial e spinorial usual – em certos casos, páginas de cálculo com matrizes reduzem-se a linhas. Dentre muitas contribuições importantes, talvez a maior seja a noção de spinores operatoriais introduzida por Hestenes em 1967. Estes spinores operatoriais foram introduzidos em substituição à noção usual de spinores, o que permitiu, por exemplo, uma completa reformulação da teoria de Dirac, e sua consequente reinterpretção em termos geométricos (Hestenes 1992), com o chamado spinor de Dirac - Hestenes (SDH) – que é um exemplo de spinor operatorial – substituindo o spinor de Dirac. O fato mais notável em relação ao SDH, que pode ser representado por um biquatérnio, é que ele possui uma decomposição que generaliza a decomposição polar de um número complexo, decomposição esta através de termos com uma interpretação geométrica clara.

A introdução do SDH nos parece um dos fatos mais importantes dos últimos anos em física-matemática. Apesar disso, não se encontra até hoje na literatura uma teoria completa do SDH. Nesse sentido temos dois problemas fundamentais. O primeiro problema, na verdade, remonta aos trabalhos do final da década de 20 de Ivanenko, Landau e Fock (Keller 1992) e posteriormente de Kähler (1960). Ocorre que o SDH pode ser representado como uma soma de multiformas não-homogêneas ou uma soma de multivetores não-homogêneos. Entretanto, o grupo Spin age sobre estes elementos através da ação adjunta, enquanto sobre spinores o grupo Spin age através da multiplicação pela esquerda. O primeiro problema, portanto, refere-se a como obter a correta lei de transformação do SDH dado que ele pode ser representado como soma de multiformas ou multivetores. O segundo problema, cuja solução depende da solução do primeiro, refere-se à definição de campos spinoriais DH (CSDH). Nesse caso é preciso identificarmos o fibrado do qual o CSDH será uma secção. Estes são os dois principais problemas do ponto de vista matemático que pretendemos estudar.

Uma vez resolvidos os problemas acima teremos em mãos um instrumento que, em função do seu significado geométrico, apresenta grande interesse em física não apenas dentro da mecânica quântica. Nesse ponto, se reformularmos a teoria de Dirac em termos do SDH teremos uma interpretação geométrica desta teoria, e consequentemente a possibilidade de explorarmos outras idéias envolvidas com os fundamentos da mecânica quântica, em particular a relação entre mecânica quântica e eletromagnetismo. Este é o principal problema do ponto de vista físico que pretendemos estudar.

O trabalho que apresentaremos está organizado em 5 capítulos. No capítulo 1 apresentaremos alguns preliminares matemáticos onde discutiremos conceitos que usaremos neste trabalho. Não é nossa intenção, entretanto, discutir em detalhes esses conceitos e os resultados relacionados. O objetivo deste capítulo é apresentar as ferramentas que serão utilizadas no restante deste trabalho. Na seção 1.1 definiremos álgebra de Clifford. Existem várias definições diferentes de álgebra de Clifford, e a que usaremos é a mais imediata. Definiremos álgebras de Clifford reais, embora seja trivial a sua generalização para os complexos ou quaternions. Para outros corpos, uma atenção especial deve ser reservada para os casos onde a característica do corpo é igual a dois – a este respeito e sobre outras definições de álgebra de Clifford, assim como para uma breve introdução histórica sobre o seu estudo, veja Lounesto (1993). Nossa definição de álgebra de Clifford corresponde à das chamadas álgebras universais de Clifford, mas não é necessário discutirmos questões acerca da universalidade de uma álgebra de Clifford – a este respeito veja

Porteous (1969). De fato, todas as estruturas matemáticas que utilizaremos serão supostas “bem comportadas”, uma vez que acreditamos que esta seja uma das características das estruturas físicas que estudaremos. Mais ainda, nossa definição de álgebra de Clifford corresponde à de uma álgebra de Clifford ortogonal, em distinção às álgebras de Clifford simpléticas (que também não serão consideradas) – a este respeito veja Crumeyrole (1990). Na seção 1.2 apresentaremos os principais exemplos de álgebras de Clifford utilizados em física-matemática, a saber: álgebra de Pauli, álgebra do espaço-tempo (AET) e álgebra de Dirac – destas, a AET será largamente utilizada. Finalmente, na seção 1.3 definiremos o fibrado de Clifford, e em particular o fibrado de Clifford do espaço-tempo. Em particular, mostraremos como definir a derivação covariante de números de Clifford usando o fato que o fibrado de Clifford pode ser visto como um fibrado associado ao fibrado principal dos referenciais ortonormais e introduziremos o chamado operador de Dirac, que é de importância fundamental.

No capítulo 2 iremos desenvolver os formalismos lagrangeano (seção 2.1) e hamiltoniano (seção 2.2), os quais utilizaremos posteriormente neste trabalho. Uma das vantagens da formulação lagrangeana que apresentaremos (para partículas e campos) é que os campos que consideraremos são campos multivetoriais quaisquer, não necessariamente campos escalares – e para lidarmos com estes campos usaremos o conceito de derivada multivetorial. Como veremos, a equação de Euler-Lagrange assume uma forma muito elegante nesta formulação. Como exemplo, exibiremos as equações de Maxwell no fibrado de Clifford, onde elas são escritas na forma de uma única equação. Apresentaremos também uma formulação generalizada do teorema de Noether, no sentido em que as transformações que consideraremos poderão apresentar uma parametrização multivetorial. A seguir faremos a transição para o formalismo hamiltoniano, e mostraremos como definir uma estrutura simplética no espaço de fase usando álgebras de Clifford. Consideraremos, entretanto, apenas o formalismo hamiltoniano para partículas, pois é este o caso que estudaremos adiante. A consideração de campos envolve complicações desnecessárias e sem interesse para este trabalho. É importante mencionarmos dois fatos em relação à formulação lagrangeana: primeiro, uma formulação, embora não tão geral como a que apresentaremos, foi construída independentemente por Lasenby et al. (1993); segundo, os rudimentos de uma formulação lagrangeana da teoria de campos com possíveis generalizações com álgebras de Clifford aparecem originalmente em Faria-Rosa et al. (1986), onde usa-se uma lagrangeana multivetorial para descrever o eletromagnetismo generalizado (incluindo monopólos magnéticos).

No capítulo 3 iremos estudar o CSDH, procurando responder às duas perguntas que formulamos anteriormente. A resposta da primeira pergunta aparecerá naturalmente da definição que dermos do SDH. Definiremos (seção 3.1) o SDH não como uma soma de multivetores de graduação par (isto é, um elemento da sub-álgebra par da AET), como usualmente ocorre na literatura, mas como uma *classe de equivalência* destes multivetores. Veremos que os elementos desta classe de equivalência transformam-se de acordo com a regra usual para spinors. Deste modo, um SDH *não* é uma soma de multivetores (ou de multiformas) pares, embora possa ser *representado* por esta soma. Desta definição do SDH seguirá como consequência imediata o chamado teorema de Geroch (1968) acerca da existência de estruturas spinoriais em uma variedade, como veremos na seção 3.2. Nesta mesma seção definiremos um CSDH como uma seção do fibrado Spin-Clifford, que é o fibrado quociente do fibrado de Clifford pela relação de equivalência à qual nos referimos acima. Este fibrado Spin-Clifford também pode ser visto como

um fibrado associado ao fibrado principal dos referenciais ortonormais, e à partir da teoria das conexões em um fibrado principal e derivação covariante em um fibrado associado mostraremos como definir a derivada covariante de um CSDH. Na seção 3.3 mostraremos que a nossa teoria do SDH é equivalente à teoria usual do spinor de Dirac, a diferença, insistimos, sendo que o SDH possui uma clara interpretação geométrica. Nosso procedimento nesse caso, entretanto, é bem diferente do apresentado por Lounesto (1993); iremos partir do spinor de Dirac e construir alguns isomorfismos de modo a concluir pela equivalência das noções de spinor de Dirac e SDH, e para isso usaremos em uma primeira instância representações matriciais da AET e da álgebra de Dirac (discutidas na seção 1.2) uma vez que a grande maioria dos físicos e matemáticos estão acostumados a trabalhar com estas representações.

Uma vez formulada a teoria do SDH, no capítulo 4 reformularemos e discutiremos a teoria de Dirac em termos da AET. Na seção 4.1 escreveremos a equação DH (EDH), que é a representante da equação de Dirac neste formalismo, e para isso traduziremos a lagrangeana de Dirac para a AET e usaremos a equação de Euler-Lagrange obtida na seção 2.1 para deduzirmos a EDH. Vários aspectos da teoria de Dirac serão então reformulados na seção 4.2. Uma vez que o nosso interesse neste trabalho por esta reformulação visa o conteúdo do capítulo 5, não discutiremos todos os aspectos desta teoria, sendo que outros detalhes podem ser encontrados em Hestenes (1992). Na seção 4.3 mostraremos como generalizar a EDH para um espaço-tempo de Riemann-Cartan, o que é importante para as chamadas teorias  $U_4$  ou de Einstein-Cartan da gravitação. Na seção 4.4 mostraremos como esta reformulação da teoria de Dirac permite reinterpretarmos certos aspectos da mecânica quântica, e alguns destes aspectos que serão repensados encontram respaldo em um modelo clássico da teoria de Dirac que é o modelo de Barut-Zanghi, devidamente reformulado em termos da AET na seção 4.5. O problema mais delicado e polêmico envolve a questão da natureza da massa, e o resultado que discutiremos é fundamental dentro do capítulo 5.

Finalmente, no capítulo 5 discutiremos a relação entre eletromagnetismo e mecânica quântica. Primeiro, exibiremos na seção 5.1 uma representação spinorial das equações de Maxwell em termos do SDH. Depois mostraremos, usando uma hipótese acerca da origem da massa (hipótese esta válida dentro da teoria de Dirac), que a referida representação spinorial das equações de Maxwell livres reduz-se à equação de Dirac (igualmente livre). Na verdade, a equação que obteremos é uma equação não-linear, mas que apresenta as mesmas soluções e propriedades da equação de Dirac para as soluções do tipo partícula. Esta equação não-linear foi proposta por Daviau (1993), porém através de um raciocínio completamente diferente do nosso. As diferentes propriedades desta equação não-linear aparecem em relação às soluções do tipo anti-partícula. Estas diferenças são, entretanto, desejáveis. De fato, as soluções do tipo anti-partícula apresentam energia positiva dentro da teoria da equação não-linear, ao contrário do que ocorre na teoria de Dirac onde elas possuem energia negativa. Além disso, dentro da teoria não-linear temos uma regra de super-seleção: o princípio de superposição permanece válido mas apenas para partículas ou anti-partículas em separado. Outro fato notável, que discutiremos na seção 5.3, é que usando apenas mais uma hipótese, esta mesma equação é capaz de descrever o múon, prevendo para ele uma massa em bom acordo com os resultados experimentais. Discutiremos também como obter o espectro de massa dos léptons.

# Capítulo 1

## Preliminares Matemáticos

### 1.1 Álgebra de Clifford

Seja  $V$  um espaço vetorial real e  $V^*$  o seu dual. Denotemos o produto cartesiano  $V \times \cdots \times V$  de  $q$  cópias de  $V$  por  $V^q$  e o produto cartesiano  $V^* \times \cdots \times V^*$  de  $p$  cópias de  $V^*$  por  $(V^*)^p$ . Seja o espaço vetorial dos tensores do tipo  $(p, q)$  (ou  $q$ -covariante,  $p$ -contravariante), ou seja

$$T^{p,q}(V) = \{T : (V^*)^p \times V^q \rightarrow \mathbf{R} \mid T \text{ é } (p+q) \text{-linear}\}$$

Note que  $T^{0,1}(V) = V^*$  e  $T^{1,0} = V$ . Agora, com a multiplicação usual de tensores podemos definir uma estrutura algébrica. Em particular, estamos interessados na álgebra dos tensores contravariantes  $T(V)$  (ou na álgebra dos tensores covariantes  $T^*(V)$ , cuja definição é análoga à que se segue).

Chamamos álgebra dos tensores contravariantes (ou álgebra tensorial de  $V$ ) ao par

$$T(V) = \left( \bigoplus_{p=0}^{\infty} T^{p,0}(V), \otimes \right)$$

onde  $\bigoplus_{p=0}^{\infty} T^{p,0}(V)$  denota o espaço vetorial constituído da soma direta fraca dos espaços  $T^{p,0}(V)$  ( $p \geq 0$ ) e  $\otimes : T(V) \times T(V) \rightarrow T(V)$  denota a extensão linear do produto tensorial  $\otimes : T^{p,0} \times T^{q,0} \rightarrow T^{p+q,0}(V)$  ( $p, q \geq 0$ ) ao espaço  $\bigoplus_{p=0}^{\infty} T^{p,0}(V)$ . Por soma direta fraca entendemos que cada elemento do espaço  $\bigoplus_{p=0}^{\infty} T^{p,0}(V)$  tem projeção não-nula somente em um número finito de subespaços  $T^{p,0}(V)$ . Daí um elemento genérico de  $\bigoplus_{p=0}^{\infty} T^{p,0}(V)$  é da forma  $A = A_0 + A_1 + \cdots + A_r$  onde  $A_p \in T^{p,0}(V)$ , ( $p = 0, 1, \dots, r$ ).

Denotaremos por  $\hat{\cdot} : T(V) \rightarrow T(V)$  e chamaremos automorfismo principal ou involução graduada a aplicação linear caracterizada por

$$(A \otimes B)^{\hat{\cdot}} = \hat{A} \otimes \hat{B}, \quad \forall A, B \in T(V)$$

com

$$\hat{A} = A, \quad \text{se } A \in \mathbf{R},$$

$$\hat{A} = -A, \quad \text{se } A \in V.$$

Denotaremos por  $\tilde{\cdot} : T(V) \rightarrow T(V)$  e chamaremos antiautomorfismo principal ou reversão a aplicação linear caracterizada por

$$(A \otimes B)\tilde{\cdot} = \tilde{B} \otimes \tilde{A}, \quad \forall A, B \in T(V)$$

com

$$\tilde{\tilde{A}} = A, \quad \text{se } A \in \mathbf{R},$$

$$\tilde{\tilde{A}} = A, \quad \text{se } A \in V.$$

Denotaremos por  $\bar{\cdot} : T(V) \rightarrow T(V)$  e chamaremos conjugação a aplicação composta das aplicações definidas acima, ou seja,

$$\bar{A} = (\hat{A})\tilde{\cdot} = (\tilde{A})\hat{\cdot}.$$

Chamamos de ideal à esquerda de uma álgebra  $A$  qualquer sub-álgebra  $I_E \subset A$  tal que

$$i \in I_E \Rightarrow xi \in I_E, \forall x \in A,$$

e analogamente para um ideal à direita. Um ideal bilateral (ou simplesmente ideal) é uma sub-álgebra que é um ideal à esquerda e à direita.

**Álgebra Exterior :** Seja  $I \subset T(V)$  o ideal bilateral gerado pelos elementos da forma  $a \otimes b + b \otimes a$ ,  $a, b \in V \subset T(V)$ . A álgebra exterior de  $V$  é a álgebra quociente

$$\bigwedge(V) = T(V)/I.$$

Os elementos de  $\bigwedge(V)$  são chamados multivetores.<sup>1</sup>

Se  $j_e : T(V) \rightarrow \bigwedge(V)$  denota a projeção canônica, temos que  $j_e(a \otimes b + b \otimes a) = 0$ , ou seja:  $j_e(a \otimes b) = -j_e(b \otimes a)$ . Esta multiplicação em  $\bigwedge(V)$  é denotada por  $\wedge : \bigwedge(V) \rightarrow \bigwedge(V)$  e é chamada produto exterior ou produto de Grassmann ou produto cunha:

$$a \wedge b = j_e(a \otimes b), \tag{1.1}$$

$$a \wedge b = -b \wedge a. \tag{1.2}$$

Pode-se mostrar que, se  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é uma base para  $V$ , então 1 e os produtos  $j_e(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}) = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$  ( $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ ) constituem uma base para  $\bigwedge(V)$ , que é portanto um espaço vetorial de dimensão  $2^n$ . Cada sub-espaço de  $\bigwedge(V)$  expandido pelos  $\binom{n}{k}$  elementos linearmente independentes  $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$  será denotado por  $\bigwedge^k(V) = T^{k,0}(V)/I$ . Os elementos de  $\bigwedge^k(V)$  são chamados  $k$ -vetores. Segue que  $\bigwedge(V) = \bigoplus_{k=0}^n \bigwedge^k(V)$ , e como  $\dim \bigwedge^k(V) = \binom{n}{k}$  então  $\dim \bigwedge(V) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ .

Note que, da definição do produto exterior, se  $A \in \bigwedge^r(V)$  e  $B \in \bigwedge^s(V)$  então

$$A \wedge B = (-1)^{rs} B \wedge A. \tag{1.3}$$

**Álgebra de Grassmann :** Seja  $\bigwedge(V)$  a álgebra exterior,  $g : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$  uma métrica de assinatura  $(p, q)$  em  $V$ . Podemos construir um produto escalar  $(\cdot, \cdot) : \bigwedge(V) \times \bigwedge(V) \rightarrow \mathbf{R}$  sobre  $\bigwedge(V)$

<sup>1</sup>No caso de trabalharmos com  $T^*(V)$  esses elementos são chamados multiformas.

definindo

(i) Se  $A \in \Lambda^r(V)$ ,  $B \in \Lambda^s(V)$  com  $r \neq s$  então

$$(A, B) = 0;$$

(ii) Se  $A, B \in \Lambda^r(V)$ ,  $A = e_1 \wedge \cdots \wedge e_r$ ,  $B = f_1 \wedge \cdots \wedge f_r$ , então

$$(A, B) = \det(g(e_i, f_j)).$$

Esse produto é estendido a todos  $A, B \in \Lambda(V)$  por linearidade. A álgebra exterior munida deste produto interno é chamada álgebra de Grassmann.

Se o espaço vetorial  $V$  também está munido de uma orientação, isto é, um  $n$ -vetor volume  $\tau \in \Lambda^n(V)$  tal que  $(\tau, \tau) = (-1)^q$ , então podemos introduzir um isomorfismo natural entre  $\Lambda^r(V)$  e  $\Lambda^{n-r}(V)$  chamado operador de dualidade de Hodge (ou operador estrela de Hodge), denotado por  $\star : \Lambda^r(V) \rightarrow \Lambda^{n-r}(V)$ , e definido por

$$A \wedge \star B = (A, B)\tau \quad (1.4)$$

quaisquer que sejam  $A, B \in \Lambda^r(V)$ . Este operador é naturalmente estendido a um isomorfismo  $\star : \Lambda(V) \rightarrow \Lambda(V)$  por linearidade.

**Álgebra de Clifford** : Seja  $J \subset T(V)$  o ideal bilateral gerado pelos elementos da forma  $a \otimes b + b \otimes a - 2g(a, b)$ , onde  $a, b \in V$  e  $g : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$  é uma métrica de assinatura  $(p, q)$  em  $V$ . A álgebra de Clifford  $\mathcal{C}(V, g)$  é a álgebra quociente

$$\mathcal{C}(V, g) = T(V)/J.$$

Os elementos de  $\mathcal{C}(V, g)$  são chamados números de Clifford.

Se  $j_c : T(V) \rightarrow \mathcal{C}(V, g)$  denota a projeção canônica, temos que  $j_c(a \otimes b + b \otimes a - 2g(a, b)) = 0$ , ou seja:  $2g(a, b) = j_c(a \otimes b) + j_c(b \otimes a)$ . Esta multiplicação em  $\mathcal{C}(V, g)$  é denotada por justaposição<sup>2</sup> e é chamada produto de Clifford ou produto geométrico:

$$ab = j_c(a \otimes b). \quad (1.5)$$

Temos então que

$$g(a, b) = \frac{1}{2}(ab + ba). \quad (1.6)$$

Lembremos que no caso  $\Lambda(V) = T(V)/I$  o ideal  $I$  é gerado pelos elementos da forma  $a \otimes b + b \otimes a$ , enquanto no caso  $\mathcal{C}(V, g) = T(V)/J$  o ideal  $J$  é o gerado pelos elementos da forma  $a \otimes b + b \otimes a - 2g(a, b) = (a \otimes b - g(a, b)) + (b \otimes a - g(b, a))$ . Daí a projeção de  $a \otimes b - g(a, b)$  em  $\mathcal{C}(V, g)$  corresponde em  $\Lambda(V)$  ao produto exterior  $a \wedge b$ , de onde definimos:

$$a \wedge b = j_c(a \otimes b - g(a, b)) = ab - g(a, b), \quad (1.7)$$

---

<sup>2</sup>No caso de trabalharmos com  $T^*(V)$  este produto é às vezes denotado por  $\vee$  e a álgebra analogamente definida é chamada álgebra de Kähler-Atiyah (Graf 1978). Veja Lounesto (1993a).

ou, em função da expressão (1.6),

$$a \wedge b = \frac{1}{2}(ab - ba). \quad (1.8)$$

Se definirmos o produto interior  $\cdot : \mathcal{C}(V, g) \times \mathcal{C}(V, g) \rightarrow \mathcal{C}(V, g)$  por

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba) \quad (1.9)$$

de modo que  $a \cdot b = g(a, b)$ , então podemos escrever para o produto de Clifford:

$$ab = a \cdot b + a \wedge b. \quad (1.10)$$

Pode-se mostrar que, se  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é uma base para  $V$ , então  $1$  e os produtos  $j_c(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}) = e_{i_1} \dots e_{i_k}$  ( $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ ) constituem uma base para  $\mathcal{C}(V, g)$ , que é um espaço vetorial de dimensão  $2^n$ . Se  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é uma base ortogonal então da eq.(1.10) temos que  $e_{i_1} \dots e_{i_n} = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$ . Segue daí que  $\mathcal{C}(V, g)$  e  $\wedge(V)$  são isomorfos como espaços vetoriais. Podemos portanto fazer a identificação  $\mathcal{C}(V, g) = \sum_{r=0}^n \wedge^r(V)$ , de modo que um elemento genérico  $A \in \mathcal{C}(V, g)$  tem a forma

$$A = A_0 + A_1 + \dots + A_n, \quad (1.11)$$

onde  $A_r \in \wedge^r(V) \subset \mathcal{C}(V, g)$  ( $r = 0, 1, \dots, n$ ). Dizemos que  $A_r$  é a parte  $r$ -vetor de  $A$ . Se  $A = A_r$  para algum  $r$  dizemos que o multivetor é homogêneo de grau  $r$  ou um  $r$ -vetor (e não-homogêneo caso contrário). É conveniente definirmos a projecção  $\langle \rangle_r$  de  $A$  em  $\wedge^r(V) \subset \mathcal{C}(V, g)$ :

$$\langle A \rangle_r = A_r. \quad (1.12)$$

Vamos agora procurar uma generalização dos produtos interior e exterior e uma expressão geral para o produto de Clifford. Olhando a expressão (1.3) vemos que  $a \wedge B = (-1)^r B \wedge a$  para  $B \in \wedge^r(V)$ ; daí generalizamos as expressões (1.8 - 1.9) para os produtos exterior e interior:

$$a \wedge B = \frac{1}{2}(aB + (-1)^r Ba) = \frac{1}{2}(aB + \hat{B}a), \quad (1.13)$$

$$a \cdot B = \frac{1}{2}(aB - (-1)^r Ba) = \frac{1}{2}(aB - \hat{B}a), \quad (1.14)$$

para  $a \in V, B \in \wedge^r(V)$ , de modo que

$$aB = a \cdot B + a \wedge B. \quad (1.15)$$

Estas definições de produto exterior e interior podem ser generalizadas para multivetores arbitrários (Hestenes e Sobczyk 1984). Definimos o produto exterior

$$A_r \wedge B_s = \langle A_r B_s \rangle_{r+s}, \quad (1.16)$$

e o estendemos para  $\mathcal{C}(V, g)$  por linearidade. O produto interior é definido por

$$A_r \cdot B_s = \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|}, \quad (\text{se } r, s > 0) \quad (1.17)$$

$$A_r \cdot B_s = 0, \text{ (se } r = 0 \text{ ou } s = 0), \quad (1.18)$$

e o estendemos a  $\mathcal{C}(V, g)$  por linearidade.

Para o produto de Clifford temos a seguinte formula fundamental (Hestenes e Sobczyk 1984):

$$\begin{aligned} A_r B_s &= \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|} + \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|+2} + \cdots + \langle A_r B_s \rangle_{r+s} = \\ &= \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(r+s-|r-s|)} \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|+2k}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

É importante observarmos que, enquanto o produto de Clifford e o produto exterior são associativos, o produto interior não é associativo. Nesse caso valem as identidades

$$A_r \cdot (B_s \cdot C_t) = (A_r \wedge B_s) \cdot C_t, \text{ (para } r + s \leq t, r, s > 0), \quad (1.20)$$

$$A_r \cdot (B_s \cdot C_t) = (A_r \cdot B_s) \cdot C_t, \text{ (para } r + t \leq s). \quad (1.21)$$

Iremos convencionar, para simplificar a notação, que o produto exterior tem preferência sobre o produto interior e estes sobre o produto de Clifford, ou seja:  $A \wedge BC = (A \wedge B)C$ ,  $A \cdot BC = (A \cdot B)C$ ,  $A \cdot B \wedge C = A \cdot (B \wedge C)$ .

Notemos que os morfismos  $\tilde{\phantom{A}}, \hat{\phantom{A}}$  e  $\bar{\phantom{A}}$  definidos em  $T(V)$  são tais que  $\tilde{J} = J$  e  $\hat{J} = J$ , e portanto passam ao quociente em  $T(V)/J$  induzindo morfismos em  $\mathcal{C}(V, g)$  que serão representados pelos mesmos símbolos. Temos a reversão (antiautomorfismo principal)

$$(AB)\tilde{\phantom{A}} = \tilde{B}\tilde{A}, \quad \forall A, B \in \mathcal{C}(V, g) \quad (1.22)$$

com

$$\tilde{A} = A, \text{ se } A \in \mathbf{R},$$

$$\tilde{A} = -A, \text{ se } A \in V,$$

e o automorfismo principal

$$(AB)\hat{\phantom{A}} = \hat{A}\hat{B}, \quad \forall A, B \in \mathcal{C}(V, g) \quad (1.23)$$

com

$$\hat{A} = A, \text{ se } A \in \mathbf{R},$$

$$\hat{A} = -A, \text{ se } A \in V,$$

além da composição  $\bar{A} = (\hat{A})\tilde{\phantom{A}} = (\tilde{A})\hat{\phantom{A}}$ .

Notemos também que o ideal  $J$  é não-homogêneo de grau par em  $T(V)$ , o que induz uma graduação  $Z_2$  em  $\mathcal{C}(V, g)$ . Temos

$$\mathcal{C}(V, g) = \mathcal{C}^+(V, g) \oplus \mathcal{C}^-(V, g)$$

onde  $\mathcal{C}^+(V, g) = j_c \left( \sum_{k=0}^{\infty} T^{2k,0}(V) \right)$  e  $\mathcal{C}^-(V, g) = j_c \left( \sum_{k=0}^{\infty} T^{2k+1,0}(V) \right)$ . Os elementos de  $\mathcal{C}^+(V, g)$  são os elementos pares de  $\mathcal{C}(V, g)$  e formam uma sub-álgebra chamada sub-álgebra par; por outro lado, os elementos de  $\mathcal{C}^-(V, g)$  (elementos ímpares) não formam uma sub-álgebra. Note que  $(\mathcal{C}^+(V, g))\tilde{\phantom{A}} = \mathcal{C}^+(V, g)$ .

A seguir apresentaremos algumas importantes identidades que serão utilizadas ao longo deste trabalho; elas são válidas para quaisquer  $a, a_1, \dots, a_r \in V \subset \mathcal{C}(V, g)$ ,  $A_r \in \wedge^r(V) \subset \mathcal{C}(V, g)$ ,  $B_s \in \wedge^s(V) \subset \mathcal{C}(V, g)$ ,  $r, s > 0$ :

$$\begin{aligned}
\langle \hat{A} \rangle_r &= \langle A \rangle_r \hat{\phantom{A}} = (-1)^r \langle A \rangle_r \\
\langle \tilde{A} \rangle_r &= \langle A \rangle_r \tilde{\phantom{A}} = (-1)^{r(r-1)/2} \langle A \rangle_r \\
A_r \cdot B_s &= (-1)^{r(s-1)} B_s \cdot A_r, \quad (r \leq s) \\
A_r \wedge B_s &= (-1)^{rs} B_s \wedge A_r \\
a \cdot (A_r B_s) &= (a \cdot A_r) B_s + (-1)^r A_r (a \cdot B_s) = (a \wedge A_r) B_s - (-1)^r A_r (a \wedge B_s) \\
a \wedge (A_r B_s) &= (a \wedge A_r) B_s - (-1)^r A_r (a \cdot B_s) = (a \cdot A_r) B_s + (-1)^r A_r (a \wedge B_s) \\
a \cdot (a_1 \cdots a_r) &= \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} (a \cdot a_k) (a_1 \cdots a_{k-1} a_{k+1} \cdots a_r) \\
a \cdot (a_1 \wedge \cdots \wedge a_r) &= \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} (a \cdot a_k) (a_1 \wedge \cdots \wedge a_{k-1} \wedge a_{k+1} \wedge \cdots \wedge a_r) \\
\star \langle A \rangle_r &= \langle A \rangle_r \tilde{\tau} = \langle \tilde{A} \rangle_r \tau
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Outro produto que utilizaremos é o produto escalar  $\star : \mathcal{C}(V, g) \times \mathcal{C}(V, g) \rightarrow \mathbf{R} \subset \mathcal{C}(V, g)$ , definido por

$$A \star B = \langle AB \rangle_0. \tag{1.25}$$

Note que  $A_r \star B_s = 0$ , ( $r \neq s$ ) e que  $A_r \star B_r = B_r \star A_r$ , e que o produto escalar da álgebra de Grassmann pode ser escrito como  $(A, B) = \tilde{A} \star B$ .

Outro produto que também utilizaremos é o comutador  $[ \ , \ ] : \mathcal{C}(V, g) \times \mathcal{C}(V, g) \rightarrow \mathcal{C}(V, g)$  definido por

$$[A, B] = AB - BA. \tag{1.26}$$

Note que  $a \wedge A_r = \frac{1}{2}[a, A_r]$  para  $r$  par e  $a \cdot A_r = \frac{1}{2}[a, A_r]$  para  $r$  ímpar. Um fato muito importante é que o comutador de um 2-vetor (bivetor) com um elemento arbitrário de  $\mathcal{C}(V, g)$  preserva a graduação deste elemento, ou seja:

$$[B, A_r] = \langle [B, A_r] \rangle_r \quad (B \in \wedge^2(V)). \tag{1.27}$$

Temos ainda as seguintes identidades:

$$[B, A \cdot C] = [B, A] \cdot C + A \cdot [B, C], \tag{1.28}$$

$$[B, A \wedge C] = [B, A] \wedge C + A \wedge [B, C]. \tag{1.29}$$

Além disso, o produto de Clifford de dois bivectores  $A, B \in \wedge^2(V) \subset \mathcal{C}(V, g)$  pode ser escrito como

$$AB = A \cdot B + \frac{1}{2}[A, B] + A \wedge B. \tag{1.30}$$

Para finalizarmos esta seção, façamos uma breve discussão (para detalhes veja Porteous (1969)) do seguinte fato: todas as álgebras de Clifford reais possuem uma representação explícita como álgebra de matrizes sobre o corpo dos reais  $\mathbf{R}$ , complexos  $\mathcal{C}$  ou quaternions  $\mathbf{H}$ . Seja  $\mathbf{R}^{p,q}$

o espaço vetorial de dimensão  $p + q = n$  equipado com métrica  $g : \mathbf{R}^{p,q} \times \mathbf{R}^{p,q} \rightarrow \mathbf{R}$ , e seja  $\{e_i\}$  a base canônica de  $\mathbf{R}^{p,q}$  tal que

$$g(e_i, e_j) = g_{ij} = g(e_j, e_i) = g_{ji} = \begin{cases} +1 & i = j = 1, 2, \dots, p \\ -1 & i = j = p + 1, \dots, p + q = n \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Denotemos  $\mathbf{R}_{p,q} = \mathcal{C}(\mathbf{R}^{p,q}, g)$ . A representação das álgebras de Clifford reais  $\mathbf{R}_{p,q}$  como álgebras de matrizes se faz de acordo com a seguinte tabela ( $[n/2]$  denota a parte inteira de  $n/2$ ):

$p - q \pmod{8}$	0	1	2	3
$\mathbf{R}_{p,q}$	$\mathbf{R}(2^{[n/2]})$	$\mathbf{R}(2^{[n/2]}) \oplus \mathbf{R}(2^{[n/2]})$	$\mathbf{R}(2^{[n/2]})$	$\mathcal{C}(2^{[n/2]})$
$p - q \pmod{8}$	4	5	6	7
$\mathbf{R}_{p,q}$	$\mathbf{H}(2^{[n/2]-1})$	$\mathbf{H}(2^{[n/2]-1}) \oplus \mathbf{H}(2^{[n/2]-1})$	$\mathbf{H}(2^{[n/2]-1})$	$\mathcal{C}(2^{[n/2]})$

Agora, para acharmos a representação matricial dos elementos de  $\mathbf{R}_{p,q}$  são necessários alguns outros resultados. Antes, porém, vamos definir alguns conceitos. Um ideal é dito minimal se ele não contém nenhum outro ideal exceto si próprio e o zero. Um elemento  $e \neq 0$  é dito um idempotente se  $e^2 = e$ . Um idempotente é primitivo se ele não puder ser escrito como a soma de dois idempotentes ortogonais não-nulos, ou seja, se  $e \neq e' + e''$  onde  $(e')^2 = e'$ ,  $(e'')^2 = e''$  e  $e'e'' = e''e' = 0$ . Os números de Radon-Hurwitz  $r_i$  são os números definidos pela formula de recorrência  $r_{i+8} = r_i + 4$  e pela seguinte tabela:

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7
$r_i$	0	1	2	2	3	3	3	3

Os resultados que precisamos são (Porteous 1969, Lounesto e Wene 1987):

*Teorema:* Um ideal minimal à esquerda  $I_{p,q}$  de  $\mathbf{R}_{p,q}$  é da forma  $I_{p,q} = \mathbf{R}_{p,q}e_{pq}$ , onde  $e_{pq} = \frac{1}{2}(1 + e_{\alpha_1}) \cdots \frac{1}{2}(1 + e_{\alpha_k})$  é um idempotente primitivo de  $\mathbf{R}_{p,q}$  e onde  $e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_k}$  é um conjunto de elementos da base canônica de  $\mathbf{R}^{p,q}$  que comutam tais que  $(e_{\alpha_i})^2 = 1$  ( $i = 1, \dots, k$ ), que geram um grupo de ordem  $2^k$ ,  $k = q - r_{q-p}$ , onde  $r_i$  são os números de Radon-Hurwitz.

*Teorema:* Se  $p + q = n$  é par ou ímpar com  $p - q = 1 \pmod{4}$ , então

$$\mathbf{R}_{p,q} \simeq \text{End}_F(I_{p,q}) \simeq F(m)$$

onde  $F = \mathbf{R}$  ou  $\mathcal{C}$  ou  $\mathbf{H}$ ,  $\text{End}_F(I_{p,q})$  é a álgebra das transformações lineares em  $I_{p,q}$  sobre o corpo  $F$ ,  $m = \dim_F(I_{p,q})$  e  $F \simeq eF(m)e$ , onde  $e$  é a representação de  $e_{pq}$  em  $F(m)$ . Se  $p + q = n$  é ímpar com  $p - q = 1 \pmod{4}$  então  $\mathbf{R}_{p,q} \simeq \text{End}_F(I_{p,q}) \simeq F(m) \oplus F(m)$  e  $e_{pq}\mathbf{R}_{p,q}e_{pq} \simeq \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{H} \oplus \mathbf{H}$ .

Note que os isomorfismos acima permitem identificar os ideais minimais à esquerda com as matrizes coluna de  $F(m)$ , ou melhor, com as matrizes de  $F(m)$  com uma coluna não nula e as demais nulas. Para acharmos a representação matricial dos elementos de  $\mathbf{R}_{p,q}$  usamos o isomorfismo  $\mathbf{R}_{p,q} \simeq \text{End}_F(I_{p,q})$  definido por  $\varphi : \mathbf{R}_{p,q} \ni x \mapsto \varphi(x) = L_x \in \text{End}_F(I_{p,q})$ , sendo  $L_x : I_{p,q} \rightarrow I_{p,q}$  a restrição à  $I_{p,q}$  de  $L_x : \mathbf{R}_{p,q} \rightarrow \mathbf{R}_{p,q}$  definida por  $L_x(y) = xy, \forall x, y \in \mathbf{R}_{p,q}$ . Daí, para acharmos a representação matricial de  $x$ , tomamos uma base  $\{E_A\}$  do ideal  $I_{p,q}$  e estudamos a ação de  $x$  sobre esta base, ou seja,  $x E_A = \sum_B x_{AB} E_B$ , e  $\{x_{AB}\}$  é a matriz que representa  $x$ . Note que a representação depende do idempotente escolhido. Na próxima seção veremos exemplos específicos sobre a questão da representação matricial.

O fato das álgebras de Clifford reais  $\mathbf{R}_{p,q}$  poderem ser representadas por álgebras de matrizes nos permite concluir que todas as álgebras de Clifford reais são álgebras semi-simples. Primeiro, as álgebras de matrizes são álgebras simples (uma álgebra é simples se ela não possui ideais bilaterais, exceto ela própria e o zero). Se olharmos para a tabela de classificação de  $\mathbf{R}_{p,q}$  vemos que: (i) se  $p+q$  é par,  $\mathbf{R}_{p,q}$  é simples; (ii) se  $p+q$  é ímpar,  $p-q \not\equiv 1 \pmod{4}$ ,  $\mathbf{R}_{p,q}$  é simples; (iii) se  $p+q$  é ímpar,  $p-q \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $\mathbf{R}_{p,q}$  é a soma-direta de álgebras simples (ou seja, é semi-simples, o que significa que ela não contém ideais bilaterais nilpotentes (um ideal é nilpotente se  $I^n = 0$  para algum  $n$ , exceto o zero). Logo,  $\mathbf{R}_{p,q}$  ou é simples ou é semi-simples, e no primeiro caso vale o seguinte teorema (Graf 1978):

*Teorema (Noether-Skolen):* Quando  $\mathbf{R}_{p,q}$  é simples, os automorfismos algébricos são dados por seus automorfismos internos  $x \mapsto uxu^{-1}$ ,  $x \in \mathbf{R}_{p,q}$  e  $u \in \Gamma(p,q) = \{u \in \mathbf{R}_{p,q} \mid uu^{-1} = u^{-1}u = 1 \text{ e } \text{Ad}_u(\mathbf{R}^{p,q}) = \mathbf{R}^{p,q}, \text{Ad}_u v = uvu^{-1}, v \in \mathbf{R}^{p,q}\}$  (denominado grupo de Clifford-Lipschitz).

## 1.2 Exemplos

### 1.2.1 Álgebra de Pauli

A álgebra de Pauli é a álgebra  $\mathbf{R}_{3,0}$ , que é isomorfa a  $\mathcal{C}(2)$  (álgebra das matrizes complexas  $2 \times 2$ ). O interesse na álgebra de Pauli se deve ao fato de que  $\mathbf{R}^{3,0}$  pode ser identificado com o espaço euclidiano tridimensional.

Seja  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$  uma base ortonormal de  $\mathbf{R}^{3,0}$ , ou seja:

$$\sigma_i \cdot \sigma_j = \frac{1}{2}(\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i) = \delta_{ij}, \quad (1.31)$$

onde  $\delta_{ij} = 1$  se  $i = j$  e  $\delta_{ij} = 0$  se  $i \neq j$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ). Um elemento arbitrário  $x \in \mathbf{R}_{3,0}$  é da forma

$$\mathbf{R}_{3,0} \ni x = a_0 + a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + a_3 \sigma_3 + a_{12} \sigma_1 \sigma_2 + a_{13} \sigma_1 \sigma_3 + a_{23} \sigma_2 \sigma_3 + a_{123} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \quad (1.32)$$

Em outras palavras,  $\mathbf{R}_{3,0}$  é gerada por  $\{1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ . Note que  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_i \wedge \sigma_j$  ( $i \neq j$ ). Denotando o elemento de volume por  $i$ , ou seja:

$$i = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 \quad (1.33)$$

temos

$$i^2 = -1. \quad (1.34)$$

A notação  $i$  para o 3-vetor (elemento de volume) é sugestiva: além de termos  $i^2 = -1$  temos que  $i$  comuta com todos os elementos de  $\mathbf{R}_{3,0}$ , o que segue de  $\sigma_j i = i \sigma_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Note que  $\sigma_i \sigma_j = i \sigma_k$  ( $i, j, k$  cíclicos). É comum nos referirmos dentro da álgebra de Pauli ao 3-vetor como pseudo-escalar e a um 2-vetor como um pseudo-vetor.

Vamos agora procurar uma representação matricial explícita para os vetores  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Para isso, note que  $e = \frac{1}{2}(1 + \sigma_3)$  é um idempotente primitivo de  $\mathbf{R}_{3,0}$ . Um elemento arbitrário do ideal  $I_{3,0} = \mathbf{R}_{3,0}e$  é da forma

$$I_{3,0} \ni \chi = e(b_1 + ib_2) + \sigma_1 e(b_3 + ib_4), \quad (1.35)$$

onde estes  $b$ 's estão relacionados com os  $a$ 's na eq.(1.32) por  $b_1 = a_0 + a_3$ ,  $b_2 = a_{12} + a_{123}$ ,  $b_3 = a_1 + a_{13}$ ,  $b_4 = a_2 + a_{23}$ . Note que  $\mathbf{R}_{3,0}e \simeq \mathbf{R}_{3,0}^+e$ , onde  $\mathbf{R}_{3,0}^+$  é a sub-álgebra par de  $\mathbf{R}_{3,0}$ .

Da eq.(1.35) vemos que  $e\{1, \sigma_1\}$  formam uma base para o ideal  $I_{3,0}$ , e que  $eI_{3,0}e \simeq \mathcal{C}$  com base  $e\{1, i\}$ . Denotemos

$$|1\rangle = e, \quad (1.36)$$

$$|2\rangle = \sigma_1 e. \quad (1.37)$$

Definindo a base recíproca  $\langle A|$  por  $\langle A| = (|A\rangle)^\dagger$ , ou seja:

$$\langle 1| = e, \quad (1.38)$$

$$\langle 2| = e\sigma_1, \quad (1.39)$$

temos

$$\langle A|B\rangle = \delta_{AB}e, \quad (A, B = 1, 2). \quad (1.40)$$

A representação matricial de  $\sigma_i$  é dada pelos números  $(\sigma_i)_{AB}$  definidos por  $\langle A|\sigma_i|B\rangle = (\sigma_i)_{AB}e$ . Por exemplo: para  $\sigma_1$  temos  $\langle 1|\sigma_1|1\rangle = 0$ ,  $\langle 1|\sigma_1|2\rangle = e$ ,  $\langle 2|\sigma_1|1\rangle = e$ ,  $\langle 2|\sigma_1|2\rangle = 0$ , e analogamente para  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ . Os resultados são:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.41)$$

que são as matrizes de Pauli.<sup>3</sup> Note que

$$|1\rangle = e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, |2\rangle = \sigma_1 e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.42)$$

e para  $x \in \mathbf{R}_{3,0}$  e  $\chi \in I_{3,0}$ :

$$x = \begin{pmatrix} (a_0 + a_3) + i(a_{12} + a_{123}) & (a_1 - a_{13}) + i(-a_2 + a_{23}) \\ (a_1 + a_{13}) + i(a_2 + a_{23}) & (a_0 - a_3) + i(-a_{12} + a_{123}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}, \quad (1.43)$$

$$\chi = \begin{pmatrix} b_1 + ib_2 & 0 \\ b_3 + ib_4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ z_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.44)$$

---

<sup>3</sup>Note que estamos incorrendo em um abuso de notação ao denotarmos a representação matricial de  $\sigma_i$  pelo mesmo símbolo; poderíamos usar um símbolo como  $\underline{\sigma}_i$  nesse caso, mas a diferença é óbvia e não causa confusão.

Como observação final, é fácil ver que a reversão  $\tilde{\phantom{x}}$  corresponde em  $\mathcal{C}(2)$  à conjugação hermitiana. De fato:

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} (a_0 + a_3) + i(-a_{12} - a_{123}) & (a_1 + a_{13}) + i(-a_2 - a_{23}) \\ (a_1 - a_{13}) + i(a_2 - a_{23}) & (a_0 - a_3) + i(a_{12} - a_{123}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^* & z_2^* \\ z_3^* & z_4^* \end{pmatrix}. \quad (1.45)$$

### 1.2.2 Álgebra do Espaço-Tempo

A Álgebra do Espaço-Tempo (AET) é a álgebra  $\mathbf{R}_{1,3}$ , que é isomorfa a  $\mathbf{H}(2)$  (álgebra das matrizes quaterniônicas  $2 \times 2$ ). O interesse pela AET se deve ao fato de que  $\mathbf{R}^{1,3}$  pode ser identificado com o espaço de Minkowski; como veremos, a AET é naturalmente adequada à formulação das teorias físicas relativistas. Essa adequação se deve a vários motivos os quais veremos ao longo deste trabalho, mas de início podemos adiantar que o formalismo da AET é inteiramente covariante por não fazer referência específica às coordenadas.

Seja  $\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$  uma base ortonormal de  $\mathbf{R}^{1,3}$ , ou seja  $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$ :

$$\gamma_\mu \cdot \gamma_\nu = \frac{1}{2}(\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu) = \eta_{\mu\nu}, \quad (1.46)$$

onde  $\eta_{00} = -\eta_{11} = -\eta_{22} = -\eta_{33} = 1$ ,  $\eta_{\mu\nu} = 0$  para  $\mu \neq \nu$ . Um elemento arbitrário  $X \in \mathbf{R}_{1,3}$  é da forma

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{1,3} \ni X = & a + a_0\gamma_0 + a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3 + a_{01}\gamma_{01} + a_{02}\gamma_{02} + a_{03}\gamma_{03} + a_{12}\gamma_{12} + a_{13}\gamma_{13} + \\ & + a_{23}\gamma_{23} + a_{012}\gamma_{012} + a_{013}\gamma_{013} + a_{023}\gamma_{023} + a_{123}\gamma_{123} + a_{0123}\gamma_{0123}, \end{aligned} \quad (1.47)$$

onde usamos a notação  $\gamma_{\mu\nu} = \gamma_\mu \gamma_\nu$  ( $\mu \neq \nu$ ), ou seja,  $\gamma_{01} = \gamma_0 \gamma_1$ ,  $\gamma_{012} = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2$ , etc. Note que podemos escrever  $\gamma_{\mu\nu} = \gamma_\mu \gamma_\nu = \gamma_\mu \wedge \gamma_\nu$ , ( $\mu \neq \nu$ ). O 4-vetor (elemento de volume) é usualmente denotado por  $\gamma_5$ , ou seja:

$$\gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \gamma_0 \wedge \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \gamma_3 \quad (1.48)$$

e tal que

$$(\gamma_5)^2 = -1 \quad (1.49)$$

e anti-comuta com vetores, isto é,  $\gamma_\mu \gamma_5 = -\gamma_5 \gamma_\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ). Segue daí que  $\gamma_5$  comuta com os elementos pares e anti-comuta com os elementos ímpares de  $\mathbf{R}_{1,3}$ . Note também que  $(\gamma_{01})^2 = (\gamma_{02})^2 = (\gamma_{03})^2 = 1$  e  $(\gamma_{12})^2 = (\gamma_{13})^2 = (\gamma_{23})^2 = -1$ . É comum nos referirmos a um 3-vetor da AET como pseudo-vetor uma vez que, por exemplo,  $\gamma_{012} = \gamma_3 \gamma_5 = -\gamma_5 \gamma_3$ , enquanto nos referimos ao elemento de volume como pseudo-escalar.

Vamos agora procurar uma representação matricial explícita para os vetores  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ . Observe que  $\frac{1}{2}(1 + \gamma_0)$ ,  $\frac{1}{2}(1 + \gamma_{30})$  e  $\frac{1}{2}(1 + \gamma_{123})$  são idempotentes primitivos de  $\mathbf{R}_{1,3}$ . Iremos considerar, por motivos que ficarão claros depois, o idempotente  $\frac{1}{2}(1 + \gamma_0)$ . O idempotente  $\frac{1}{2}(1 + \gamma_{30})$  é particularmente interessante (veja Figueiredo et al. 1990), mas o seu estudo nada acrescenta a este trabalho. Um elemento arbitrário do ideal  $I_{1,3} = \mathbf{R}_{1,3}e$ , onde

$$e = \frac{1}{2}(1 + \gamma_0), \quad (1.50)$$

é da forma

$$I_{1,3} \ni \Phi = e(b_1 + b_2\gamma_{23} + b_3\gamma_{31} + b_4\gamma_{12}) + \gamma_5 e(b_5 + b_6\gamma_{23} + b_7\gamma_{31} + b_8\gamma_{12}), \quad (1.51)$$

onde os  $b$ 's estão relacionados com os  $a$ 's da eq.(1.47) por

$$\begin{aligned} b_1 &= a + a_0, & b_2 &= a_{23} + a_{023}, \\ b_3 &= -a_{13} - a_{013}, & b_4 &= a_{12} + a_{012}, \\ b_5 &= -a_{123} + a_{0123}, & b_6 &= a_1 - a_{01}, \\ b_7 &= a_2 - a_{02}, & b_8 &= a_3 - a_{03}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Note que  $\mathbf{R}_{1,3}e \simeq \mathbf{R}_{1,3}^+e$ , onde  $\mathbf{R}_{1,3}^+$  é a sub-álgebra par de  $\mathbf{R}_{1,3}$  - tal que  $\mathbf{R}_{1,3}^+ \simeq \mathbf{R}_{3,0}$  em função da correspondência  $\sigma_i = -\gamma_{0i} = \gamma_{i0}$ ,  $\sigma_i\sigma_j = -\gamma_{ij}$  e  $i = \gamma_5$ .

Da eq.(1.51) vemos que  $\{1, \gamma_5\}e$  formam uma base para o ideal  $I_{1,3}$ , e que  $eI_{1,3}e \simeq \mathbf{H}$  com base  $e\{1, \gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{12}\}$ . De fato, se denotarmos

$$\mathbf{i} = \gamma_{23}, \mathbf{j} = \gamma_{31}, \mathbf{k} = \gamma_{12}, \quad (1.53)$$

tais que  $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{jk} = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{ki} = \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$ , podemos escrever

$$I_{1,3} \ni \Phi = e(b_1 + b_2\mathbf{i} + b_3\mathbf{j} + b_4\mathbf{k}) + \gamma_5 e(b_5 + b_6\mathbf{i} + b_7\mathbf{j} + b_8\mathbf{k}), \quad (1.54)$$

onde fica claro que  $eI_{1,3}e \simeq \mathbf{H}$  com base  $e\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ . Denotemos

$$|1\rangle = e, \quad (1.55)$$

$$|2\rangle = \gamma_5 e, \quad (1.56)$$

e vamos definir a base recíproca  $\langle A |$  por  $\langle A | = (\gamma_0 | A)\tilde{\gamma} = |\tilde{A}\rangle\gamma_0$ , ou seja (lembramos que  $\gamma_0 e = e$ ):

$$\langle 1 | = e, \quad (1.57)$$

$$\langle 2 | = e\gamma_5\gamma_0 = -e\gamma_5, \quad (1.58)$$

de modo que

$$\langle A | B \rangle = \delta_{AB}e, \quad (A, B = 1, 2). \quad (1.59)$$

Calculando  $\langle A | \gamma_\mu | B \rangle = (\gamma_\mu)_{AB}e$  obtemos como representação matricial dos vetores  $\gamma_\mu$ :

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{j} \\ \mathbf{j} & 0 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{k} \\ \mathbf{k} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.60)$$

Usando

$$|1\rangle = e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, |2\rangle = \gamma_5 e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.61)$$

obtemos para  $X \in \mathbf{R}_{1,3}$  e  $\Phi \in I_{1,3}$ :

$$X = \begin{pmatrix} (a + a_0) + (a_{23} + a_{023})\mathbf{i} + & (-a_{123} - a_{0123}) + (a_1 + a_{01})\mathbf{i} + \\ (-a_{13} - a_{013})\mathbf{j} + (a_{12} + a_{012})\mathbf{k} & (a_2 + a_{02})\mathbf{j} + (a_3 + a_{03})\mathbf{k} \\ (-a_{123} + a_{0123}) + (a_1 - a_{01})\mathbf{i} + & (a - a_0) + (a_{23} - a_{023})\mathbf{i} + \\ (a_2 - a_{02})\mathbf{j} + (a_3 - a_{03})\mathbf{k} & (-a_{13} + a_{013})\mathbf{j} + (a_{12} - a_{012})\mathbf{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{pmatrix}. \quad (1.62)$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} b_1 + b_2i + b_3j + b_4k & 0 \\ b_5 + b_6i + b_7j + b_8k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ q_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.63)$$

Finalmente, uma vez que a reversão  $\sim$  em  $\mathbf{R}_{1,3}$  troca o sinal de 2-vetores e de 3-vetores, mas mantém inalterado o sinal dos demais, temos que a reversão em termos de  $\mathbf{H}(2)$  corresponde a:

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} (a + a_0) - (a_{23} + a_{023})i - & (a_{123} - a_{0123}) + (a_1 - a_{01})i + \\ (-a_{13} - a_{013})j - (a_{12} + a_{012})k & (a_2 - a_{02})j + (a_3 - a_{03})k \\ (a_{123} + a_{0123}) + (a_1 + a_{01})i + & (a - a_0) - (a_{23} - a_{023})i - \\ (a_2 + a_{02})j + (a_3 + a_{03})k & (-a_{13} + a_{013})j - (a_{12} - a_{012})k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1^* & -q_3^* \\ -q_2^* & q_4^* \end{pmatrix}. \quad (1.64)$$

onde  $*$  denota conjugação quaterniônica.

O uso da AET permite escrever uma expressão particularmente conveniente para uma transformação de Lorentz. Uma transformação de Lorentz  $\mathcal{L}$  mantém invariante a norma de um vetor  $v \in \mathbf{R}^{1,3} \subset \mathbf{R}_{1,3}$ , ou seja,  $(v')^2 = v' \cdot v' = v \cdot v = v^2$ , onde  $v' = \mathcal{L}(v)$ . Isto significa do ponto de vista algébrico que  $\mathcal{L}$  é um automorfismo desta álgebra, e uma vez que  $\mathbf{R}_{1,3}$  é simples, então vale o teorema de Noether-Skolen, ou seja:

$$\mathcal{L}(v) = LvL^{-1}, \quad (1.65)$$

onde  $L \in \Gamma(1,3)$ , que é o grupo de Clifford-Lipschitz  $\Gamma(1,3) = \{L \in \mathbf{R}_{1,3} \mid LL^{-1} = L^{-1}L = 1, \text{Ad}_L(\mathbf{R}^{1,3}) = \mathbf{R}^{1,3}\}$ . Uma vez que  $\mathcal{L}(v)$  é um vetor, devemos ter  $\tilde{v}' = v'$  e  $\hat{v}' = -v'$ . A primeira condição implica que

$$\tilde{L} = \pm L^{-1}, \quad (1.66)$$

enquanto a segunda condição implica em

$$\hat{L} = \pm L. \quad (1.67)$$

Definindo

$$\mathcal{N}(x) = \tilde{x} * x = (x, x), \quad \forall x \in \mathbf{R}_{1,3}, \quad (1.68)$$

vemos que a primeira condição implica em

$$\mathcal{N}(L) = \pm 1. \quad (1.69)$$

Em função disso, definimos (Figueiredo et al. 1990):

$$\text{Pin}(1,3) = \{L \in \Gamma(1,3) \mid \mathcal{N}(L) = \pm 1\}, \quad (1.70)$$

$$\text{Pin}_+(1,3) = \{L \in \Gamma(1,3) \mid \mathcal{N}(L) = +1\}. \quad (1.71)$$

Por outro lado, a segunda condição implica que

$$\hat{L} = L \iff L \in \mathbf{R}_{1,3}^+, \quad (1.72)$$

$$\hat{L} = -L \iff L \in \mathbf{R}_{1,3}^-. \quad (1.73)$$

Quando  $\hat{L} = L$  a transformação descrita por  $L$  é uma rotação<sup>4</sup>, ao passo que se  $\hat{L} = -L$  a transformação descrita por  $L$  é uma reflexão (Hestenes 1966). Em função disso, definimos os grupos<sup>5</sup>

$$\text{Spin}(1, 3) = \{L \in \Gamma^+(1, 3) \mid \mathcal{N}(L) = \pm 1\}, \quad (1.74)$$

$$\text{Spin}_+(1, 3) = \{L \in \Gamma^+(1, 3) \mid \mathcal{N}(L) = 1\}. \quad (1.75)$$

Note que  $\text{Spin}(1, 3) = \text{Pin}(1, 3) \cap \Gamma^+(1, 3)$ . Pode-se mostrar (Figueiredo et al. 1990) que os grupos  $\text{Pin}(1, 3)$  e  $\text{Spin}(1, 3)$  são os grupos de recobrimento duplo dos grupos ortogonal  $O(1, 3)$  e ortogonal especial  $SO(1, 3)$ , ou seja:

$$\text{Pin}(1, 3)/\{\pm 1\} \simeq O(1, 3), \quad (1.76)$$

$$\text{Spin}(1, 3)/\{\pm 1\} \simeq SO(1, 3). \quad (1.77)$$

Segue que a componente conexa à identidade  $SO_+(1, 3)$  de  $O(1, 3)$  é recoberta por  $\text{Spin}_+(1, 3)$ , ou seja:

$$\text{Spin}_+(1, 3)/\{\pm 1\} \simeq SO_+(1, 3). \quad (1.78)$$

O grupo  $SO_+(1, 3)$  é o chamado grupo próprio ortocrono de Lorentz, ou grupo restrito de Lorentz.

Vemos portanto que uma rotação de Lorentz é descrita por  $R \in \text{Spin}_+(1, 3)$ , ou seja,  $R$  satisfaz  $\tilde{R} = R^{-1}$ ,  $\hat{R} = R$ . Pode-se mostrar (Hestenes 1966) que todo  $R \in \text{Spin}_+(1, 3)$  pode ser escrito na forma

$$R = \pm e^B, \quad (B \in \bigwedge^2(\mathbf{R}^{1,3}) \subset \mathbf{R}_{1,3}), \quad (1.79)$$

onde  $B$  é um bivector, e  $B$  pode ser escolhido de modo que o sinal na expressão acima seja positivo exceto no caso particular em que  $B^2 = 0$  e  $R = -e^B$ . Se  $B$  é um bivector espacial ( $B^2 = -1$ ) então  $R$  descreve uma rotação espacial, enquanto se  $B$  é um bivector temporal ( $B^2 = 1$ ) então  $R$  descreve uma rotação temporal, ou seja, um boost. Como sabemos (Zeni e Rodrigues 1992), sempre podemos decompor  $R$  em um produto de uma rotação (espacial) e um boost:

$$R = \mathcal{R}B, \quad (1.80)$$

onde podemos escrever, por exemplo,

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\theta, \varphi, \chi) = e^{\gamma_{12}\varphi/2} e^{\gamma_{31}\theta/2} e^{\gamma_{12}\chi/2}, \quad (1.81)$$

onde  $(\theta, \varphi, \chi)$  são os ângulos de Euler, e

$$B = \mathcal{B}(u) = e^{u/2}, \quad (u = u_1\gamma_{01} + u_2\gamma_{02} + u_3\gamma_{03}), \quad (1.82)$$

sendo a velocidade dada por  $v = e^u\gamma_0$  (Zeni e Rodrigues 1992).

Existem outros aspectos específicos da AET que precisaremos considerar; entretanto, para não nos desviarmos demais do assunto deste capítulo, os discutiremos apenas quando necessitarmos.

---

<sup>4</sup>O termo rotação é empregado nesse caso no sentido de rotação no espaço-tempo e não rotação espacial. De qualquer forma, não há perigo de confusão.

<sup>5</sup>Note que o conjunto dos  $L$  que satisfaz (1.73) não forma um grupo.

### 1.2.3 Álgebra de Dirac

A álgebra de Dirac é a álgebra  $\mathbf{R}_{4,1}$ , que é isomorfa a  $\mathcal{C}(4)$  (álgebra das matrizes complexas  $4 \times 4$ ). O interesse pela álgebra de Dirac ficará claro adiante, mas já nessa seção ficarão claros os motivos deste interesse.

Seja  $\{E_0, E_1, E_2, E_3, E_4\}$  uma base de  $\mathbf{R}^{4,1}$  ordenada de tal maneira que  $(a, b = 0, 1, 2, 3, 4)$ :

$$E_a \cdot E_b = \frac{1}{2}(E_a E_b + E_b E_a) = \zeta_{ab}, \quad (1.83)$$

onde  $-\zeta_{00} = \zeta_{11} = \zeta_{22} = \zeta_{33} = \zeta_{44} = 1$ ,  $\zeta_{ab} = 0$  ( $a \neq b$ ). Note que ordenamos a base de modo que  $E_0^2 = -1$  e  $E_1^2 = E_2^2 = E_3^2 = E_4^2 = 1$ . Um elemento arbitrário  $Z \in \mathbf{R}_{4,1}$  é da forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{4,1} \ni Z = & A + A_0 E_0 + \cdots + A_4 E_4 + A_{01} E_{01} + \cdots + A_{34} E_{34} + A_{012} E_{012} + \cdots \\ & + A_{234} E_{234} + A_{0123} E_{0123} + \cdots + A_{1234} E_{1234} + A_{01234} E_{01234}, \end{aligned} \quad (1.84)$$

onde usamos a mesma notação do caso anterior, ou seja,  $E_{01} = E_0 E_1 = E_0 \wedge E_1$ , etc.

Consideremos o elemento de volume, que denotaremos por  $i$ , ou seja:

$$i = E_0 E_1 E_2 E_3 E_4 = E_0 \wedge E_1 \wedge E_2 \wedge E_3 \wedge E_4. \quad (1.85)$$

Note que

$$i^2 = -1, \quad (1.86)$$

mas, ao contrário do que ocorre com o elemento de volume  $\gamma_5$  na AET (comuta com os elementos pares e anti-comuta com os elementos ímpares da AET), o elemento de volume (pseudo-escalar)  $i$  comuta com todos os elementos de  $\mathbf{R}_{4,1}$ , ou seja:

$$E_a i = i E_a, \quad (a = 0, 1, 2, 3, 4). \quad (1.87)$$

Uma vez que  $i$  comuta com todos os elementos desta álgebra e  $i^2 = -1$ , então  $i$  faz o papel da unidade imaginária.

De fato, se definirmos

$$\gamma_\mu = E_\mu E_4, \quad (\mu = 0, 1, 2, 3), \quad (1.88)$$

de modo que  $\gamma_0^2 = 1$ ,  $\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = -1$ , obtemos após algumas manipulações usando identidades do tipo  $E_0 = -i\gamma_{123}, \dots, E_{01} = -\gamma_{01}$ , etc., que

$$\begin{aligned} Z = & B + B_0 \gamma_0 + B_1 \gamma_1 + B_2 \gamma_2 + B_3 \gamma_3 + B_{01} \gamma_{01} + B_{02} \gamma_{02} + B_{03} \gamma_{03} + B_{12} \gamma_{12} + B_{13} \gamma_{13} + \\ & + B_{23} \gamma_{23} + B_{012} \gamma_{012} + B_{013} \gamma_{013} + B_{023} \gamma_{023} + B_{123} \gamma_{123} + B_{0123} \gamma_{0123}, \end{aligned} \quad (1.89)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} B &= A + iA_{01234}, & B_0 &= A_{04} - iA_{123}, \\ B_1 &= A_{14} - iA_{023}, & B_2 &= A_{24} + iA_{013}, \\ B_3 &= A_{34} - iA_{012}, & B_{01} &= -A_{01} - iA_{234}, \\ B_{02} &= -A_{02} + iA_{134}, & B_{03} &= -A_{03} - iA_{124}, \\ B_{12} &= -A_{12} + iA_{034}, & B_{13} &= -A_{13} - iA_{024}, \\ B_{23} &= -A_{23} + iA_{014}, & B_{012} &= -A_{0124} - iA_3, \\ B_{013} &= -A_{0134} + iA_2, & B_{023} &= -A_{0234} - iA_1, \\ B_{123} &= -A_{1234} - iA_0, & B_{0123} &= A_{0123} - iA_4, \end{aligned} \quad (1.90)$$

de modo que  $\mathbf{R}_{4,1}$  é isomorfa a  $\mathbf{R}_{1,3}$  complexificada:

$$\mathbf{R}_{4,1} \simeq \mathcal{C} \otimes \mathbf{R}_{1,3}. \quad (1.91)$$

Notemos agora que o idempotente

$$f = \frac{1}{4}(1 + E_{04})(1 - iE_{12}) = \frac{1}{4}(1 + \gamma_0)(1 + i\gamma_{12}) \quad (1.92)$$

é primitivo em  $\mathbf{R}_{4,1} \simeq \mathcal{C} \otimes \mathbf{R}_{1,3}$ . Uma vez que

$$\gamma_0 f = f, \quad \gamma_{21} f = i f, \quad (1.93)$$

vemos que  $\gamma_{21}$  faz o papel de  $i$  em  $\mathbf{R}_{1,3}$ . Um elemento arbitrário do ideal  $I_{4,1} = \mathbf{R}_{4,1} f \simeq (\mathcal{C} \otimes \mathbf{R}_{1,3}) f$  é da forma

$$I_{4,1} \ni \Psi = f C_1 + \gamma_{31} f C_2 + \gamma_{30} f C_3 + \gamma_{10} f C_4, \quad (1.94)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} C_1 &= C_1^+ + C_1^-, & C_2 &= C_2^+ + C_2^-, \\ C_3 &= C_3^+ + C_3^-, & C_4 &= C_4^+ + C_4^-, \end{aligned} \quad (1.95)$$

sendo

$$\begin{aligned} C_1^+ &= B - iB_{12}, & C_1^- &= B_0 - iB_{012}, \\ C_2^+ &= -B_{13} - iB_{23}, & C_2^- &= -B_{013} - iB_{023}, \\ C_3^+ &= -B_{03} + iB_{0123}, & C_3^- &= B_3 - iB_{123}, \\ C_4^+ &= -B_{01} - iB_{02}, & C_4^- &= B_1 + iB_2. \end{aligned} \quad (1.96)$$

Vemos da eq.(1.94) que  $\{1, \gamma_{31}, \gamma_3, \gamma_1\} f$  formam uma base para o ideal  $I_{4,1}$ , e que  $eI_{4,1}e \simeq \mathcal{C}$  com base  $f\{1, i\}$ . Denotando

$$|1\rangle = f, \quad |2\rangle = \gamma_{31} f, \quad |3\rangle = \gamma_{30} f, \quad |4\rangle = \gamma_{10} f, \quad (1.97)$$

e definindo a base recíproca  $\langle A| = (\gamma_0 |A\rangle)^* = |\tilde{A}\rangle^* \gamma_0$ , ( $A = 1, 2, 3, 4$ ), onde  $*$  denota conjugação complexa:

$$\langle 1| = f, \quad \langle 2| = f\gamma_{13}, \quad \langle 3| = f\gamma_{30}, \quad \langle 4| = f\gamma_{10}, \quad (1.98)$$

de modo que

$$\langle A|B\rangle = \delta_{AB} f, \quad (A, B = 1, 2, 3, 4), \quad (1.99)$$

então após calcularmos  $\langle A|\gamma_\mu|B\rangle = (\gamma_\mu)_{AB} f$  obtemos como representação matricial dos vetores  $\gamma_\mu$ :

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \gamma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.100)$$

ou em termos das matrizes de Pauli

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.101)$$

Estas são as matrizes de Dirac na chamada representação padrão.

Nesta representação temos para  $Z \in \mathbf{R}_{4,1} \simeq (\mathbb{C} \otimes \mathbf{R}_{1,3})$  e  $\Psi \in I_{4,1} = \mathbf{R}_{4,1}f$ :

$$Z = \begin{pmatrix} C_1^+ + C_1^- & -C_2^{+*} - C_2^{-*} & C_3^+ - C_3^- & C_4^{+*} - C_4^{-*} \\ C_2^+ + C_2^- & C_1^{+*} + C_1^{-*} & C_4^+ - C_4^- & -C_3^{+*} + C_3^{-*} \\ C_3^+ + C_3^- & C_4^{+*} + C_4^{-*} & C_1^+ - C_1^- & -C_2^{+*} + C_2^{-*} \\ C_4^+ + C_4^- & -C_3^{+*} - C_3^{-*} & C_2^+ - C_2^- & C_1^{+*} - C_1^{-*} \end{pmatrix} \quad (1.102)$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} C_1^+ + C_1^- & 0 & 0 & 0 \\ C_2^+ + C_2^- & 0 & 0 & 0 \\ C_3^+ + C_3^- & 0 & 0 & 0 \\ C_4^+ + C_4^- & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.103)$$

### 1.3 O Fibrado de Clifford do Espaço-Tempo

Antes de definirmos o que denominaremos fibrado de Clifford do espaço-tempo (FCET), em termos dos quais formularemos os nossos resultados, vamos primeiro recordar, com objetivos unicamente didáticos, as definições de fibrado, fibrado principal e fibrado associado (para detalhes veja Choquet-Bruhat et al. 1982, von Westenholz 1978). Depois definiremos fibrados de Clifford para daí particularizarmos este conceito para o FCET. Usando o FCET definiremos os conceitos de derivada vetorial e derivada multivetorial, que são essenciais para os próximos capítulos.

Seja  $E$  uma variedade diferenciável de classe  $C^\infty$  e  $R$  uma relação de equivalência em  $E$  tal que: (i) o espaço quociente  $M = E/R$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ ; (ii) a projeção canônica  $\pi : E \rightarrow M = E/R$  é uma aplicação diferenciável de classe  $C^\infty$  e posto  $n$ . Seja  $F$  uma variedade diferenciável de classe  $C^\infty$  e  $G$  um grupo de Lie que age diferenciavelmente e efetivamente (isto é, para  $g \in G$  temos que se  $gx = x, \forall x \in F$  então  $g = e$ , onde  $e$  é a identidade de  $G$ ) em  $F$ . O grupo  $G$  é identificado com um grupo de difeomorfismos de  $F$ , ou seja,  $G \subset \text{Diff}(F)$ .

Uma estrutura de fibrado diferenciável em  $E$  é uma sextupla  $(E, \pi, M, F, \psi, G)$  onde  $\psi = (\psi_\alpha)_{\alpha \in I}$  é uma família de difeomorfismos satisfazendo os seguintes axiomas:

(i) Se  $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$  é uma cobertura aberta de  $M$  então  $\forall x \in M, \exists U_\alpha(x), \exists \psi_\alpha \in \psi$  tal que  $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$  e  $\pi \circ \psi_\alpha^{-1}(x, y) = x$  para qualquer par  $(x, y) \in U_\alpha \times F$ .

(ii) Dado  $F_x = \{y \in E \mid \pi(y) = x\}$  e  $\psi_\alpha(y) = (\pi(y), \check{\psi}_\alpha(y))$  temos que  $\check{\psi}_{\alpha,x} = \check{\psi}_\alpha|_{F_x} : F_x \rightarrow F$  é uma bijeção para qualquer  $y \in F_x$  e  $x \in U_\alpha$ . Em particular, se  $x \in U_\alpha \cap U_\beta$  o difeomorfismo  $\check{\psi}_{\beta,x} \circ \check{\psi}_{\alpha,x}^{-1} : F \rightarrow F$  coincide com a ação  $\rho_g : F \rightarrow F$  de um elemento  $g \in G$ .

O par  $(U_\alpha, \psi_\alpha)$  é chamado uma representação coordenada ou uma trivialização local para  $E$ .  $M$  é o espaço de base,  $F$  é a fibra típica,  $F_x$  é a fibra sobre  $x$ ,  $G$  é o grupo estrutural e  $\psi$  é a família de difeomorfismos locais que definem a estrutura fibrada. Note que podemos pensar em um fibrado como uma união disjunta de fibras.

Uma secção local do fibrado  $E$  é uma aplicação diferenciável de classe  $C^\infty$   $\sigma : U \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ \sigma(x) = x, \forall x \in U \subset M$ . Se  $U = M$  então  $\sigma : M \rightarrow E$  é uma secção global.

Vamos definir também um fibrado principal. Seja  $M$  uma variedade diferenciável e  $G$  um grupo de Lie. Um fibrado principal diferenciável sobre  $M$  com grupo  $G$  consiste de uma variedade diferenciável  $P$  e uma ação de  $G$  em  $P$  tal que:

- (i)  $G$  age diferenciavelmente em  $P$  pela direita sem ponto fixo (ou seja, livremente):  $(p, g) \in P \times G \mapsto pg = R_g p \in P, (pg = p \Rightarrow g = e)$ ;
- (ii)  $M$  é o espaço quociente de  $P$  pela relação de equivalência induzida por  $G$ , ou seja,  $R = \{(p_1, p_2) \in P \times P \mid \exists g : p_1 g = p_2\}$ . A projeção canônica  $\pi : P \rightarrow M = P/G$  é diferenciável e  $\pi^{-1}(x) = \{pg \mid g \in G, \pi(p) = x\}$  é a fibra sobre  $x \in M$ ;
- (iii)  $P$  é localmente trivial sobre  $M$ , ou seja,  $\forall x \in M$  possui uma vizinhança  $U$  e um difeomorfismo  $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G; p \mapsto \psi(p) = (\pi(p), \check{\psi}(p))$  tal que  $\check{\psi}(pg) = \check{\psi}(p)g$  para todo  $g \in G, \check{\psi}(p) \in G$ .

Dado um fibrado principal  $P(M, G)$  e uma variedade diferenciável  $F$  na qual  $G$  age diferenciavelmente pela esquerda, ou seja,  $\rho_g : F \rightarrow F, f \mapsto f' = \rho_g(f) = \rho(g, f)$ , nós podemos construir um fibrado associado com  $P(M, G)$  com fibra típica  $F$ . Considere a ação pela direita de  $G$  na variedade produto  $P \times F$  definida por  $\psi : (P \times F) \times G \rightarrow P \times F, (p, f)g = (pg, \rho_{g^{-1}}f)$ . Uma vez que  $G$  age diferenciavelmente em  $F$  e diferenciavelmente e livremente em  $P$ ,  $G$  também age diferenciavelmente e livremente em  $P \times F$ ; logo  $G$  é o grupo de estrutura de  $P \times F$ . Agora tomamos o espaço quociente de  $P \times F$  pela relação de equivalência  $R$  induzida por  $G$ , ou seja,  $R = \{((p_1, f_1), (p_2, f_2)) \in (P \times F) \times (P \times F) \mid \exists g \in G : (p_1, f_1)g = (p_2, f_2)\}$ . O espaço quociente assim construído é um fibrado sobre  $M$  com fibra típica  $F$  e grupo estrutural  $G$ , chamado fibrado associado a  $P(M, G)$  e denotado por  $E = P \times_G F$ .

Vamos passar agora à definição de fibrado de Clifford. Seja  $M$  uma variedade diferenciável de classe  $C^\infty$  de dimensão  $n$  e seja  $T_x M$  o espaço tangente a  $x \in M$ . Suponha que  $M$  está munido de uma métrica  $g$ , ou seja,  $g_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbf{R}$ , de assinatura  $(p, q)$ . Logo  $T_x M \simeq \mathbf{R}^{p, q}$ . Segue que em cada ponto  $x \in M$  podemos definir uma álgebra de Clifford  $\mathcal{C}(T_x M, g_x) \simeq \mathcal{C}(\mathbf{R}^{p, q}, g_x) = \mathbf{R}_{p, q}$ . A união disjunta destas álgebras de Clifford locais constitui-se no chamado fibrado de Clifford  $\mathcal{C}(M)$ ,

$$\mathcal{C}(M) = \bigcup_{x \in M} \mathcal{C}(T_x M, g_x). \quad (1.104)$$

Identificamos portanto  $M$  como espaço de base, a álgebra de Clifford  $\mathbf{R}_{p, q}$  como fibra típica e o grupo  $\text{Spin}_+(p, q)$  como grupo estrutural, que age na fibra típica através da representação adjunta.

Um campo de Clifford é uma secção do fibrado de Clifford, ou seja,  $A : U \rightarrow \mathcal{C}(M), x \mapsto A(x)$  é um campo de Clifford se  $\pi \circ A(x) = x, \forall x \in U \subset M$ , onde  $\pi : \mathcal{C}(M) \rightarrow M$  é a projeção canônica. Se  $U = M$  temos um campo de Clifford global. Denotaremos o conjunto das secções de  $\mathcal{C}(M)$  por  $\text{sec } \mathcal{C}(M)$ .

Vamos definir agora o fibrado de Clifford do espaço-tempo (FCET). Seja  $M$  a variedade espaço-tempo, ou seja,  $M$  é uma variedade de dimensão 4 que é Hausdorff, para-compacta, classe  $C^\infty$ , conexa, orientada por um elemento de volume  $\tau \in \wedge^n(TM)$  e com orientação temporal, e seja  $g \in T^{0,2}(M)$  uma métrica de assinatura  $(1,3)$ . Nesse caso  $T_x M \simeq \mathbf{R}^{1,3}$  e  $\mathcal{C}(T_x M, g_x) \simeq$

$\mathcal{C}(\mathbf{R}^{1,3}, g_x) = \mathbf{R}_{1,3}$ , que é a AET. O FCET é o fibrado

$$\mathcal{C}_{ET}(M) = \bigcup_{x \in M} \mathcal{C}(T_x M, g_x) \simeq \bigcup_{x \in M} \mathcal{C}(\mathbf{R}^{1,3}, g_x). \quad (1.105)$$

Note que a AET é a fibra típica do FCET e o seu grupo estrutural é  $\text{Spin}_+(1,3)$ . Restringiremos nossa atenção daqui em diante sobre o FCET, embora os resultados que apresentaremos, particularmente os desta seção, possam ser generalizados para um fibrado de Clifford qualquer.

Seja agora  $P_{\text{SO}_+(1,3)}$  o fibrado principal dos referenciais ortonormais (tetradas). Pode-se mostrar (Rodrigues e Figueiredo 1990) que  $\mathcal{C}_{ET}(M)$  pode ser identificado com o seguinte fibrado associado:

$$\mathcal{C}_{ET}(M) = P_{\text{SO}_+(1,3)} \times_{\text{Ad}'} \mathbf{R}_{1,3}, \quad (1.106)$$

onde  $\text{Ad}' : \text{SO}_+(1,3) \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{R}_{1,3})$  é a representação que descende de  $\text{Ad} : \text{Spin}_+(1,3) \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{R}_{1,3})$  em função do homomorfismo  $\varsigma : \text{Spin}_+(1,3) \rightarrow \text{SO}_+(1,3)$ , e  $u \mapsto \text{Ad}_u$  com  $\text{Ad}_u(X) = uXu^{-1}, \forall X \in \mathbf{R}_{1,3}$ .

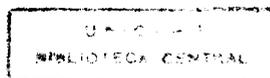
O uso do conceito de fibrado nos permite distinguir de uma maneira clara os conceitos de transformação ativa e passiva. Considere  $A \in \text{sec } \mathcal{C}_{ET}(M)$  e uma transformação  $T$  sobre a fibra sobre  $x \in M$ , ou seja,  $T : \pi^{-1}(x) \rightarrow \pi^{-1}(x), A(x) \mapsto T(A(x))$ . Considere as imagens de  $A(x)$  e de  $T(A(x))$  na fibra típica associadas com a trivialização local  $(U_\alpha, \psi_\alpha)$ , ou seja,  $A_\alpha = \check{\psi}_{\alpha,x}(A(x))$  e  $T(A)_\alpha = \check{\psi}_{\alpha,x}(T(A(x)))$ , respectivamente. Podemos considerar uma outra trivialização local tal que  $\check{\psi}_{\beta,x}(A(x)) = \check{\psi}_{\alpha,x}(T(A(x)))$ , ou seja, tal que a imagem de  $A(x)$  através desta segunda trivialização coincida com a imagem de  $T(A(x))$  através da primeira trivialização. O ponto de vista ativo corresponde a olharmos para  $\check{\psi}_{\beta,x}(A(x))$  e  $\check{\psi}_{\alpha,x}(T(A(x)))$  como originando de diferentes pontos da fibra sobre  $x$ , enquanto o ponto de vista passivo corresponde a olharmos para  $\check{\psi}_{\alpha,x}(A(x))$  e  $\check{\psi}_{\beta,x}(A(x))$  como duas trivializações diferentes do mesmo ponto da fibra sobre  $x$ . Em outras palavras, uma transformação na fibra sobre  $x$  é uma transformação ativa, enquanto uma transformação na fibra típica é uma transformação passiva. Daí, a transformação de Lorentz  $A(x) \mapsto A'(x) = R(x)A(x)R^{-1}(x)$  deve ser interpretada no sentido ativo.

Um conceito fundamental que precisaremos introduzir é o de derivação covariante de números de Clifford. Para isso é necessário introduzir a noção de conexão em um fibrado de Clifford. Uma vez que um fibrado de Clifford possui uma estrutura de fibrado vetorial, podemos introduzir uma conexão neste fibrado à partir da teoria geral das conexões em fibrados vetoriais (Hermann 1970). Entretanto, um outro procedimento possível, o qual adotaremos neste trabalho, é o apresentado em Choquet-Bruhat et al. (1982), no qual define-se derivação covariante em um fibrado vetorial associado a um fibrado principal no qual está definida uma conexão. Podemos aplicar este procedimento ao FCET  $\mathcal{C}_{ET}(M)$  uma vez que  $\mathcal{C}_{ET}(M) = P_{\text{SO}_+(1,3)} \times_{\text{Ad}'} \mathbf{R}_{1,3}$ .

Considere um fibrado principal  $P(M, G)$  e uma curva  $C : \mathbf{R} \supset I \rightarrow M, t \mapsto C(t)$ . Nosso problema consiste em definir uma regra (a conexão) que nos permita comparar pontos em fibras diferentes ao longo da curva  $C$  em  $M$ , para daí podermos definir a noção de transporte paralelo ao longo desta curva. Essa noção de transporte paralelo, é claro, deve ser compatível com a natureza da estrutura do fibrado principal.

**Definição:** Uma conexão<sup>6</sup> em um fibrado principal  $P(M, G)$  é uma aplicação  $\Gamma_p : T_x M \rightarrow T_p P, x = \pi(p)$  para cada  $p \in P$  tal que

<sup>6</sup> Esta definição de conexão corresponde à chamada conexão no sentido de Ehresmann. Existem outras definições



- (i)  $\Gamma_p$  é linear;
- (ii)  $d\pi \circ \Gamma_p = \text{Id}_{T_x M}$ , onde  $\text{Id}_{T_x M}$  é a aplicação identidade em  $T_x M$  e  $d\pi$  é a diferencial da projeção canônica  $\pi$ ;
- (iii) A aplicação  $p \mapsto \Gamma_p$  é diferenciável;
- (iv)  $\Gamma_{R_g p} = dR_g \Gamma_p$ ,  $g \in G$ .

Considere a curva  $C : \mathbf{R} \supset I \rightarrow M$ ,  $t \mapsto C(t)$ , com  $x_0 = C(0) \in M$  e  $p_0 \in P$  tal que  $x_0 = \pi(p_0)$ . O transporte paralelo de  $p_0$  ao longo de  $C$  é dado pela curva  $\hat{C} : \mathbf{R} \supset I \rightarrow P(M, G)$ ,  $t \mapsto \hat{C}(t)$  definida por

$$\frac{d\hat{C}(t)}{dt} = \Gamma_p \frac{dC(t)}{dt}, \quad (1.107)$$

com  $\hat{C}(0) = p_0$ ,  $\hat{C}(t) = p_{||}$ ,  $\pi(p_{||}) = x = C(t)$ .

Considere agora o fibrado vetorial  $E = P \times_{\rho(G)} F$  associado ao fibrado principal  $P(M, G)$  através da representação  $\rho$  do grupo  $G$  no espaço vetorial  $F$ . Considere a trivialização local  $\psi_\alpha : \pi_0^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G$  de  $P(M, G)$ ,  $\psi_\alpha(p) = (\pi_0(p), \check{\psi}_\alpha(p))$  com  $\check{\psi}_\alpha(p) = \check{\psi}_{\alpha,x}(p) : \pi_0^{-1}(x) \rightarrow G$ ,  $x \in U_\alpha \subset M$  e a trivialização local  $\Psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$  do fibrado vetorial associado  $E = P \times_{\rho(G)} F$ ,  $\Psi_\alpha(y) = (\pi(y), \check{\Psi}_\alpha(y))$  com  $\check{\Psi}_\alpha(y) = \check{\Psi}_{\alpha,x}(y) : \pi^{-1}(x) \rightarrow F$ . Nesse caso devemos ter  $\check{\Psi}_{\beta,x} \circ \check{\Psi}_{\alpha,x}^{-1} = \rho(\check{\psi}_{\beta,x} \circ \check{\psi}_{\alpha,x}^{-1})$ . Em função disso definimos o transporte paralelo de  $v_0 \in E$ ,  $\pi(v_0) = x_0$  ao longo da curva  $C$  como o elemento  $v_{||} \in E$ ,  $\pi(v_{||}) = x$  tal que  $\check{\Psi}_{\alpha,x}(v_{||}) = \rho(\check{\psi}_{\alpha,x}(p_{||}) \circ \check{\psi}_{\alpha,x_0}^{-1}(p_0)) \check{\Psi}_{\alpha,x_0}(v_0)$  onde  $p_{||}$  é o transporte paralelo de  $p_0 \in P$ ,  $\pi(p_{||}) = x = C(t)$ , ao longo da curva  $C$ .

Agora é possível definirmos a derivada covariante de um número de Clifford. Seja  $A \in \text{sec } \mathcal{C}_{ET}(M)$  e  $u \in T_{x_0} M \subset \mathcal{C}(T_{x_0} M, g_{x_0})$  um vetor tangente à curva  $C : t \rightarrow x = x(t) = C(t)$  no ponto  $x_0 = C(0) \in M$ . A derivada covariante do número de Clifford  $A$  na direção  $u$  no ponto  $x_0$  é por definição

$$(\nabla_u A)(x_0) = (\nabla_u A)_{x_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{A_{||}(x(t)) - A(x_0)}{t}, \quad (1.108)$$

onde  $A_{||}(x(t))$  é o número de Clifford  $A(x(t))$  transportado paralelamente ao longo da curva  $C$  do ponto  $x(t) = C(t)$  até o ponto  $x_0$ . É claro que a definição que demos de transporte paralelo de um vetor aplica-se sem modificações no caso de um número de Clifford uma vez que estamos explorando apenas a estrutura vetorial de um fibrado de Clifford.

Consideremos agora uma trivialização  $(U_\alpha, \psi_\alpha)$  do fibrado principal dos referenciais ortonormais  $P_{\text{SO}_+(1,3)}$  e a trivialização  $(U_\alpha, \Psi_\alpha)$  de  $\mathcal{C}_{ET}(M) = P_{\text{SO}_+(1,3)} \times_{\text{Ad}'} \mathbf{R}_{1,3}$ . Os representantes de  $A(x_0)$  e  $A_{||}(x(t))$  na fibra típica  $\mathbf{R}_{1,3}$  são, respectivamente,  $A_0 = \check{\Psi}_{\alpha,x_0}(A(x_0))$  e  $A_{t,||} = \check{\Psi}_{\alpha,x_0}(A_{||}(x(t)))$ . Mas, da definição de transporte paralelo, temos que  $A_{t,||} = \rho(g(0)g^{-1}(t))A_t$ , onde  $A_t = \check{\Psi}_{\alpha,x(t)}(A(x(t)))$ ,  $g(0) = \check{\psi}_{\alpha,x_0}(p_0)$  e  $g(t) = \check{\psi}_{\alpha,x(t)}(p_{t,||})$  são os elementos de  $G = \text{Spin}_+(1,3)$  que são os representantes de  $p_0 \in G_{x_0}$  e  $p_{t,||} \in G_{x(t)}$  transportado paralelamente ao longo de  $C$  do ponto  $x_0$  até o ponto  $x(t)$ , e  $\rho$  é a representação de  $\text{Spin}_+(1,3)$  em  $\mathbf{R}_{1,3}$ , ou seja,  $\rho = \text{Ad}$ . Vamos escolher  $g(0) = 1$  por simplicidade; logo  $A_{t,||} = \rho(g^{-1}(t))A_t = \text{Ad}(g^{-1}(t))A_t =$

equivalentes de conexão no sentido de Ehresmann, assim como de conexão em outros sentidos (Koszul, Cartan). A este respeito veja Choquet-Bruhat et al. (1982) e von Westenholtz (1978).

$g^{-1}(t)A_tg(t)$ , o que fornece

$$(\nabla_u A)(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g^{-1}(t)A_tg(t) - A_0}{t}. \quad (1.109)$$

Escrevendo

$$g(t) = g(0) + tg'(0) + \dots = 1 - \frac{1}{2}t\omega + \dots, \quad (1.110)$$

onde definimos<sup>7</sup>  $\omega = -2g'(t)g^{-1}(t)|_{t=0}$  e usamos a escolha  $g(0) = 1$ , obtemos

$$\begin{aligned} (\nabla_u A)(x_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{(1 + \frac{1}{2}t\omega + \dots)A_t(1 - \frac{1}{2}t\omega + \dots) - A_0}{t} \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{A_t - A_0}{t} \right) + \frac{1}{2}(\omega A_t - A_t \omega) + \dots \right] = \\ &= \left( \frac{dA_t}{dt} + \frac{1}{2}[\omega, A_t] \right)_{t=0}. \end{aligned} \quad (1.111)$$

Consideremos agora uma base  $\{\gamma_\mu\}$  de  $T_{x_0}M \simeq \mathbf{R}^{1,3}$ , de modo que  $u = u^\mu \gamma_\mu$ . Uma vez que devemos ter  $\nabla_u A = \nabla_{u^\mu \gamma_\mu} A = u^\mu \nabla_{\gamma_\mu} A = u^\mu \nabla_\mu A$ , segue da expressão (1.111) que

$$(\nabla_\mu A)(x_0) = \partial_\mu A + \frac{1}{2}[\omega_\mu, A], \quad (1.112)$$

onde<sup>8</sup>  $\partial_\mu A = \frac{\partial A}{\partial x^\mu}$ ,  $\nabla_\mu = \nabla_{\gamma_\mu}$  e  $\nabla_u A = u^\mu \nabla_\mu A$ . Note que, de  $\omega_\mu = -2(\partial_\mu g)g^{-1} = 2g(\partial_\mu g^{-1})$  e usando o fato que  $\tilde{g} = g^{-1}$  e  $\hat{g} = g$  para  $g \in \text{Spin}_+(1, 3)$ , conclui-se que

$$\tilde{\omega}_\mu = -\omega_\mu, \quad \hat{\omega}_\mu = \omega_\mu. \quad (1.113)$$

Entretanto, os únicos elementos de  $\mathbf{R}_{1,3}$  que satisfazem as condições (1.113) são os bivectores,<sup>9</sup> de modo que

$$\omega_\mu \in \sec \bigwedge^2(M) \subset \sec \mathcal{C}_{ET}(M). \quad (1.114)$$

Note, como era de se esperar, que a nossa definição de derivada covariante preserva a graduação de um número de Clifford, uma vez que esta é uma das propriedades do comutador de um número de Clifford com um bivector.

Consideremos agora o caso particular em que o número de Clifford considerado é um vetor. Para  $\{\gamma_\alpha\}$  ( $\alpha = 0, 1, 2, 3$ ) uma base de  $\mathbf{R}^{1,3}$  obtemos, usando o fato que  $\frac{1}{2}[\omega_\mu, \gamma_\alpha] = \omega_\mu \cdot \gamma_\alpha = -\gamma_\alpha \cdot \omega_\mu$ , que

$$\nabla_\mu \gamma_\alpha = \omega_{\mu\alpha}^\beta \gamma_\beta, \quad (1.115)$$

onde os números  $\omega_\mu^{\alpha\beta}$ , chamados coeficientes de conexão (na base  $\{\gamma_\alpha\}$ ), são definidos por

$$\omega_\mu = \frac{1}{2}\omega_\mu^{\alpha\beta}(\gamma_\alpha \wedge \gamma_\beta). \quad (1.116)$$

<sup>7</sup>O sinal negativo na definição de  $\omega$  se deve apenas a uma questão de conveniência, de modo a obtermos resultados em concordância com as convenções usuais.

<sup>8</sup>No caso de trabalharmos com uma base que não seja coordenada devemos usar a derivada de Pfaff no lugar da derivada parcial. Veja Choquet-Bruhat et al. (1982)

<sup>9</sup>No caso geral são 2-vetores (mod 4).

Segue que, para  $v = v^\mu \gamma_\mu$ , obtemos

$$\nabla_\mu v^\alpha = \partial_\mu v^\alpha + \omega_{\mu\beta}^\alpha v^\beta. \quad (1.117)$$

Expressões análogas a (1.115) podem ser escritas para outros números de Clifford. Por exemplo, no caso de um bivetor  $\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_\alpha \wedge \gamma_\beta$  obtemos

$$\nabla_\mu \gamma_{\alpha\beta} = \omega_{\mu\alpha}^\nu \gamma_{\nu\beta} + \omega_{\mu\beta}^\nu \gamma_{\alpha\nu}. \quad (1.118)$$

Já para a base recíproca  $\{\gamma^\alpha\}$ , em função de  $\gamma^\alpha \cdot \gamma_\beta = \delta_\beta^\alpha$ , obtemos

$$\nabla_\mu \gamma^\alpha = -\omega_{\mu\beta}^\alpha \gamma^\beta, \quad (1.119)$$

com expressões análogas para outros elementos escritos em termos da base recíproca.

Definimos as operações de torção  $\tau(u \wedge v)$  e de curvatura  $\rho(u \wedge v)$  por:

$$\tau(u \wedge v) = \nabla_u v - \nabla_v u - \llbracket u, v \rrbracket, \quad (1.120)$$

$$\rho(u \wedge v) = \nabla_u \omega_v - \nabla_v \omega_u - \frac{1}{2}[\omega_u, \omega_v] - \omega_{\llbracket u, v \rrbracket}, \quad (1.121)$$

onde  $\llbracket u, v \rrbracket$  denota o colchete de Lie dado por  $\llbracket u, v \rrbracket = u \cdot \partial v - v \cdot \partial u$  com  $\partial = \gamma^\mu \partial_\mu$ , enquanto os tensores de torção  $T(z, u, v)$  e curvatura  $R(t, z, u, v)$  são dados por

$$T(z, u, v) = z \cdot \tau(u \wedge v), \quad (1.122)$$

$$R(t, z, u, v) = (t \wedge z) \cdot \rho(u \wedge v), \quad (1.123)$$

onde  $u, v, z, t$  são vetores. Vamos mostrar que estas definições correspondem de fato às definições usuais dos tensores de torção e de curvatura. Primeiro, notemos que a contração de uma 1-forma  $f^j$  com um vetor  $e_i$ , ou seja,  $e_i \rfloor f^j = f^j(e_i) = \delta_i^j$  pode ser escrita em termos do produto interior do vetor  $e_i$  com o seu recíproco  $e^j = f^j$ , ou seja,  $e^j \cdot e_i = \delta_i^j$ , de modo que<sup>10</sup> o produto interior  $\cdot$  faz o papel da contração  $\rfloor$ . Com esta observação segue imediatamente que a expressão (1.122) corresponde à definição usual do tensor de torção (Choquet-Bruhat et al. 1982). Tomando  $u = u^\alpha \gamma_\alpha$ ,  $v = v^\beta \gamma_\beta$  e  $z = z_\mu \gamma^\mu$  temos

$$T(z, u, v) = z_\mu u^\alpha v^\beta T(\gamma^\mu, \gamma_\alpha, \gamma_\beta) = z_\mu u^\alpha v^\beta T_{\alpha\beta}^\mu, \quad (1.124)$$

onde  $T_{\alpha\beta}^\mu$  é dado por

$$T_{\alpha\beta}^\mu = \omega_{\alpha\beta}^\mu - \omega_{\beta\alpha}^\mu - c_{\alpha\beta}^\mu, \quad (1.125)$$

onde definimos os coeficientes de estrutura  $c_{\alpha\beta}^\mu$  da base  $\{\gamma_\alpha\}$  por

$$\llbracket \gamma_\alpha, \gamma_\beta \rrbracket = c_{\alpha\beta}^\mu \gamma_\mu. \quad (1.126)$$

Para vermos que a definição (1.123) corresponde à definição usual do tensor de curvatura precisamos da relação

$$(a \wedge b) \cdot (c \wedge d) = a \cdot [b \cdot (c \wedge d)]. \quad (1.127)$$

<sup>10</sup>Uma discussão detalhada acerca desta relação entre multiformas e multivetores é feita em Hestenes e Sobczyk (1984).

Com isso podemos escrever (1.123) como

$$R(t, z, u, v) = -z \cdot [t \cdot \rho(u \wedge v)] = z \cdot \left( \frac{1}{2} [\rho(u \wedge v), t] \right). \quad (1.128)$$

Usando a definição de  $\rho(u \wedge v)$  mais a identidade de Jacobi

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0 \quad (1.129)$$

podemos escrever o comutador em (1.128) como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\rho(u \wedge v), t] &= \frac{1}{2} \left[ [\nabla_u \omega_v, t] + \frac{1}{2} [\omega_v, [\omega_u, t]] - [\nabla_v \omega_u, t] - \frac{1}{2} [\omega_u, [\omega_v, t]] - [\omega_{[u, v]}, t] \right] = \\ &= \nabla_u \nabla_v t - \nabla_v \nabla_u t - \nabla_{[u, v]} t, \end{aligned} \quad (1.130)$$

onde usamos  $\nabla_u t = \frac{1}{2} [\omega_u, t]$ , etc., e que é justamente a definição usual da operação de curvatura (Choquet-Bruhat et al. 1982). Tomando  $u = u^\alpha \gamma_\alpha$ ,  $v = v^\beta \gamma_\beta$ ,  $z = z_\mu \gamma^\mu$  e  $t = t^\nu \gamma_\nu$  temos

$$R(t, z, u, v) = t^\nu z_\mu u^\alpha v^\beta R(\gamma_\nu, \gamma^\mu, \gamma_\alpha, \gamma_\beta) = t^\nu z_\mu u^\alpha v^\beta R_{\nu\alpha\beta}^\mu, \quad (1.131)$$

onde  $R_{\nu\alpha\beta}^\mu$  é dado por

$$R_{\nu\alpha\beta}^\mu = \partial_\alpha \omega_{\beta\nu}^\mu - \partial_\beta \omega_{\alpha\nu}^\mu + \omega_{\alpha\sigma}^\mu \omega_{\beta\nu}^\sigma - \omega_{\beta\sigma}^\mu \omega_{\alpha\nu}^\sigma - c_{\alpha\beta}^\sigma \omega_{\sigma\nu}^\mu. \quad (1.132)$$

Novamente observamos que no caso da base  $\{\gamma_\alpha\}$  não ser coordenada (o que implica  $c_{\alpha\beta}^\sigma \neq 0$ ) a derivada parcial deve ser substituída pela derivada de Pfaff (Choquet-Bruhat et al. 1982). Do ponto de vista didático deveríamos usar índices diferentes nos diferentes casos, mas por enquanto tal distinção não se faz necessária. Entretanto, quando for necessário fazer uma distinção para evitar confusões, usaremos índices gregos para nos referirmos à uma base coordenada e índices latinos para nos referirmos à uma base não-coordenada.

Outra quantidade que interessa é o tensor de ametricidade, definido por

$$Q(z, u, v) = -\nabla_z g(u, v), \quad (1.133)$$

onde  $g$  é o tensor métrico. Segue daí que

$$Q(z, u, v) = -z^\mu u^\alpha v^\beta \nabla_\mu g(\gamma_\alpha, \gamma_\beta) = -z^\mu u^\alpha v^\beta \nabla_\mu g_{\alpha\beta} = z^\mu u^\alpha v^\beta Q_{\mu\alpha\beta}, \quad (1.134)$$

onde  $Q_{\mu\alpha\beta}$  é dado por

$$Q_{\mu\alpha\beta} = -\partial_\mu g_{\alpha\beta} + \omega_{\mu\alpha}^\sigma g_{\sigma\beta} + \omega_{\mu\beta}^\sigma g_{\alpha\sigma}. \quad (1.135)$$

Na expressão acima usamos a definição da derivada covariante de um campo tensorial, ou seja,

$$(\nabla_\mu T)(a, b, \dots) = \nabla_\mu (T(a, b, \dots)) - T(\nabla_\mu a, b, \dots) - T(a, \nabla_\mu b, \dots) - \dots \quad (1.136)$$

ou, em termos de componentes,

$$(\nabla_\mu T)_{\alpha\beta\dots}^{\sigma\rho\dots} = \partial_\mu T_{\alpha\beta\dots}^{\sigma\rho\dots} - \omega_{\mu\alpha}^\xi T_{\xi\beta\dots}^{\sigma\rho\dots} - \omega_{\mu\beta}^\xi T_{\alpha\xi\dots}^{\sigma\rho\dots} - \dots + \omega_{\mu\xi}^\sigma T_{\alpha\beta\dots}^{\xi\rho\dots} + \omega_{\mu\xi}^\rho T_{\alpha\beta\dots}^{\sigma\xi\dots} + \dots \quad (1.137)$$

Dizemos que uma conexão é compatível com a métrica se a ametricidade é nula, ou seja,  $\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0$ . Se a conexão é compatível com a métrica e a torção é nula, esta conexão é chamada Levi-Civita. Espaços com conexão Levi-Civita e curvatura não-nula são chamados riemannianos; nesse caso, se a métrica apresenta assinatura  $(p, q)$  com  $p \neq 0$  ou  $p \neq n$  é usual chamá-los pseudo-riemannianos, enquanto que se  $p = 1$  ou  $p = n - 1$  é usual chamá-los lorentzianos. No caso da conexão ser Levi-Civita e a torção nula, e a curvatura também nula, o espaço é dito euclidiano; também nesse caso, se a métrica apresenta assinatura  $(p, q)$  com  $p \neq 0$  ou  $p \neq n$  é usual chamá-los pseudo-euclidianos. O espaço pseudo-euclidiano de assinatura  $(1, 3)$  é o chamado espaço de Minkowski. Por outro lado, se a torção não é nula, o espaço é chamado espaço de Riemann-Cartan, e se além disso a conexão não for compatível com a métrica, o espaço é chamado espaço de Riemann-Cartan-Weyl.

Um operador que desenvolverá um papel fundamental neste trabalho é o chamado operador de Dirac. Definimos o operador de Dirac  $\nabla$  tal que

$$\gamma_\mu \cdot \nabla = \nabla_\mu. \quad (1.138)$$

A rigor deveríamos usar a notação  $\nabla_x$  onde  $x = x^\mu \gamma_\mu$ , mas convencionaremos que sempre que o índice  $x$  for omitido estaremos nos referindo a  $\nabla_x$ .

Uma vez que o operador  $\nabla_\mu$  é um operador escalar, o operador  $\nabla$  possui as propriedades algébricas de um vetor. Podemos, portanto, escrever

$$\nabla = \gamma^\mu \nabla_\mu = \gamma^\mu (\partial_\mu + \frac{1}{2}[\omega_\mu, \ ]), \quad (1.139)$$

e usando a expressão (1.15) para o produto de Clifford, escrevemos

$$\nabla A = \nabla \cdot A + \nabla \wedge A. \quad (1.140)$$

Se  $A = A(x) \in \wedge^r(M) \subset \mathcal{C}_{ET}(M)$ , então  $\nabla \cdot A \in \wedge^{r-1}(M) \subset \mathcal{C}_{ET}(M)$  e  $\nabla \wedge A \in \wedge^{r+1}(M) \subset \mathcal{C}_{ET}(M)$ . Se  $A$  é um escalar, em função de (1.18) temos  $\nabla \cdot \varphi = 0$ , ou seja  $\nabla \varphi = \nabla \wedge \varphi$  para  $\varphi \in \wedge^0(M) \subset \mathcal{C}_{ET}(M)$ . Denominamos  $\nabla \varphi = \nabla \wedge \varphi$  o gradiente de  $\varphi$ . No caso de um vetor temos  $\nabla v = \nabla \cdot v + \nabla \wedge v$ , onde  $\nabla \cdot v$  é o divergente de  $v$  e  $\nabla \wedge v$  é o rotacional de  $v$ .

Uma vez que a maioria dos casos que consideraremos neste trabalho referem-se ao espaço de Minkowski e que os casos em que o espaço não for Minkowski terão uma importância fundamental, iremos denotar o operador de Dirac no espaço de Minkowski por  $\partial$ , ou seja,

$$\partial = \gamma^\mu \partial_\mu, \quad (1.141)$$

reservando deste modo a notação  $\nabla$  para o operador de Dirac em espaços de Riemann-Cartan.

Até agora estávamos interessados na derivada em relação a pontos  $x \in M$ . Outra situação de interesse envolve a derivada de funções multivetoriais, ou seja,  $F : \text{sec } \mathcal{C}_{ET}(M) \supset \text{sec } \wedge^r(M) \rightarrow \text{sec } \wedge^s(M) \subset \text{sec } \mathcal{C}_{ET}(M)$ ,  $X \mapsto F(X)$ . Nesse caso, a generalização do conceito de derivada envolve a noção da derivada de  $F(X)$  na direção do  $r$ -vetor  $A$ , que deve ter a mesma graduação de  $X$ . Definimos (Hestenes e Sobczyk 1984)

$$A * \partial_X F(X) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(X + tA) - F(X)}{t}, \quad (1.142)$$

onde  $A \in \sec \wedge^r(M) \subset \sec \mathcal{C}_{ET}(M)$ ,  $F : \sec \mathcal{C}_{ET}(M) \supset \sec \wedge^r(M) \rightarrow \sec \wedge^s(M) \subset \sec \mathcal{C}_{ET}(M)$ . Note que, por definição, o operador  $A * \partial_X$  é um operador escalar,

$$A * \partial_X \langle F(X) \rangle_s = \langle A * \partial_X F(X) \rangle_s, \quad (1.143)$$

daí o uso do produto escalar  $*$ . Isso implica que o operador  $\partial_X$  possui as propriedades algébricas de um  $r$ -vetor. Da formula fundamental (1.19) para o produto de Clifford de multivetores arbitrários temos que

$$\begin{aligned} \partial_X \langle F(X) \rangle_s &= \langle \partial_X F(X) \rangle_{|r-s|} + \langle \partial_X F(X) \rangle_{|r-s|+2} + \cdots + \langle \partial_X F(X) \rangle_{r+s} = \\ &= \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(r+s-|r-s|)} \langle \partial_X F(X) \rangle_{|r-s|+2k}. \end{aligned} \quad (1.144)$$

A expressão de  $\partial_X$  em uma base  $\{\gamma_{\mu_1 \dots \mu_r}\}$  de  $\wedge^r(M) \subset \mathcal{C}_{ET}(M)$  é

$$\partial_X = \gamma^{\mu_1 \dots \mu_r} \partial_{\mu_1 \dots \mu_r} = \gamma^{\mu_1 \dots \mu_r} \frac{\partial}{\partial X^{\mu_1 \dots \mu_r}}, \quad (1.145)$$

onde  $X = X^{\mu_1 \dots \mu_r} \gamma_{\mu_1 \dots \mu_r}$  e usamos a notação  $\gamma_{\mu_1 \dots \mu_r} = \gamma_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \gamma_{\mu_r}$ . Notemos ainda que, se  $A = \sum_r \langle A \rangle_r$ ,  $X = \sum_r \langle X \rangle_r$ , então para  $F(X) = F(\langle x \rangle_0, \langle X \rangle_1, \dots, \langle X \rangle_k, \dots)$  temos

$$A * \partial_X F(X) = \sum_r \left( \langle A \rangle_r * \partial_{\langle X \rangle_r} \right) F(X), \quad (1.146)$$

ou seja, temos que  $A * \partial_X = \sum_r \left( \langle A \rangle_r * \partial_{\langle X \rangle_r} \right)$ , como era de se esperar em função das propriedades do produto escalar.

Um caso particular muito importante é quando  $F(X)$  é escalar, ou seja,  $F : \sec \mathcal{C}_{ET}(M) \rightarrow \mathbf{R} \subset \sec \mathcal{C}_{ET}(M)$ . Nesse caso  $\partial_X \langle F(X) \rangle_0 = \sum_r \partial_{\langle X \rangle_r} \langle F(X) \rangle_0$  onde  $\partial_{\langle X \rangle_r} \langle F(X) \rangle_0 \in \sec \wedge^r(M) \subset \sec \mathcal{C}_{ET}(M)$ , ou seja, a derivada  $r$ -vetorial de uma função com valores escalares é um  $r$ -vetor.

A derivada multivetorial é particularmente útil para definirmos uma função adjunta. Se  $X \in \sec \wedge^r(M)$  e  $F(X) \in \sec \wedge^s(M)$ , então tomando  $Y \in \sec \wedge^s(M)$  podemos definir a função adjunta  $F^{\text{ad}}(Y)$ , no caso  $F^{\text{ad}}(Y) \in \sec \wedge^r(M)$ , à partir de

$$F(X) * Y = X * F^{\text{ad}}(Y). \quad (1.147)$$

Tomando a derivada multivetorial em relação a  $X$  obtemos a seguinte expressão para a função adjunta:

$$F^{\text{ad}}(Y) = \partial_X [F(X) * Y]. \quad (1.148)$$

## Capítulo 2

# Formalismos Lagrangeano e Hamiltoniano com Álgebras de Clifford

### 2.1 Formalismo Lagrangeano

Vamos inicialmente considerar uma partícula descrita por um multivetor  $X = X(\tau)$ , onde  $\tau$  é um parâmetro que a princípio identificaremos com o tempo próprio. Seja  $L = L(X, \dot{X})$  uma lagrangeana, onde  $\dot{X} = dX/d\tau$ , e seja

$$S[X] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(X, \dot{X}) d\tau \quad (2.1)$$

o funcional de ação. O princípio de mínima ação requer que  $X$  seja estacionário em relação a  $L$ , ou seja:

$$\left. \frac{dS[X + tA]}{dt} \right|_{t=0} = 0, \quad (2.2)$$

ou em termos da definição de derivada multivetorial,

$$A * \partial_X S[X] = 0. \quad (2.3)$$

Segue daí que

$$\begin{aligned} A * \partial_X S[X] &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} [A * \partial_X L(X, \dot{X}) + \dot{A} * \partial_{\dot{X}} L(X, \dot{X})] d\tau = \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} A * \left[ \partial_X L(X, \dot{X}) - \frac{d}{d\tau} (\partial_{\dot{X}} L(X, \dot{X})) \right] d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d}{d\tau} [A * \partial_{\dot{X}} L(X, \dot{X})] d\tau = 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

e supondo como usual que  $A(\tau_1) = A(\tau_2) = 0$ , segue da arbitrariedade de  $A$  que  $X = X(\tau)$  deve satisfazer a equação multivetorial de Euler-Lagrange (Doran et al. 1992):

$$\partial_X L - \partial_\tau (\partial_{\dot{X}} L) = 0. \quad (2.5)$$

Para  $X = \langle X \rangle_r$  um  $r$ -vetor, as eq.(2.5) constituem-se em um conjunto de  $\binom{n}{r}$  equações, ou seja, para  $X = X^{\mu_1 \dots \mu_r} \gamma_{\mu_1 \dots \mu_r}$  temos

$$\partial_{X^{\mu_1 \dots \mu_r}} L - \partial_\tau (\partial_{\dot{X}^{\mu_1 \dots \mu_r}} L) = 0. \quad (2.6)$$

É obvio também que no caso de  $k$  multivetores teremos

$$\partial_{X_i} L - \partial_\tau (\partial_{\dot{X}_i} L) = 0, \quad (i = 1, \dots, k), \quad (2.7)$$

que constituem-se em um conjunto de  $D = \sum_{i=1}^k \binom{n}{r_i} = \sum_{i=1}^k d_i$  (onde  $r_i$  é a graduação de  $X_i$ ) equações de Euler-Lagrange.

Um conceito que é conveniente recordarmos é o conceito de espaço de configuração. Note que, uma vez que  $\dim \wedge^r = \binom{n}{r} = d$ , as eq.(2.5) podem ser reescritas em termos de  $\mathbf{R}^d$ . De fato, se  $\{\gamma_I\}$  é uma base de  $\wedge^r$ , onde  $I = (\mu_1, \dots, \mu_r)$ , ordenada de tal modo que a cada  $I$  associamos um  $a \in \mathbf{N}$  com  $a = 1, 2, \dots, d$ , temos um isomorfismo  $\wedge^r \simeq \mathbf{R}^d$ , ou seja,

$$\bigwedge^r \ni X = X^I \gamma_I \longleftrightarrow \underline{x} = \sum_a X_a e_a \in \mathbf{R}^d \quad (2.8)$$

onde  $\{e_a\}$  é uma base ortonormal de  $\mathbf{R}^d$  com  $e_a \cdot e_b = \delta_{ab}$  e os escalares  $X_a$  são os mesmos  $X^I$  para  $a \longleftrightarrow I$ . Esse espaço  $\mathbf{R}^d$  é o chamado espaço de configuração. No caso de  $k$  multivetores  $X_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) de graduação  $r_i$ , temos  $d_i = \binom{n}{r_i}$  e o espaço de configurações é  $\mathbf{R}^{d_1} \oplus \mathbf{R}^{d_2} \oplus \dots \oplus \mathbf{R}^{d_k} = \mathbf{R}^D$ .

Vejamos agora uma versão multivetorial do teorema de Noether. Seja uma transformação  $X \mapsto X' = X'(X, M)$ , parametrizada por um multivetor arbitrário  $M$ . Definindo a lagrangeana  $L'$  por  $L'(X, \dot{X}) = L(X', \dot{X}')$  obtemos para a derivada multivetorial de  $L'$  em relação a  $M$ :

$$\begin{aligned} A * \partial_M L'(X, \dot{X}) &= A * \partial_M L(X'(X, M), \dot{X}'(X, M)) = \\ &= [(A * \partial_M) X'(X, M)] * [\partial_{X'} L(X', \dot{X}') - \partial_\tau (\partial_{\dot{X}'} L(X', \dot{X}'))] + \\ &+ \partial_\tau [(A * \partial_M X'(X, M)) * \partial_{\dot{X}'} L(X', \dot{X}')]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Supondo que  $X'$  satisfaz a equação multivetorial de Euler-Lagrange, segue, após eliminarmos  $A$  através de uma derivação multivetorial, que

$$\partial_M L(X', \dot{X}') = \partial_\tau [(\partial_M X' * \partial_{\dot{X}'} L(X', \dot{X}'))]. \quad (2.10)$$

Se  $\partial_M L(X', \dot{X}') = 0$  obtemos

$$\partial_\tau [(\partial_M X' * \partial_{\dot{X}'} L(X', \dot{X}'))] = 0, \quad (2.11)$$

ou seja, a quantidade  $(\partial_M X' * \partial_{\dot{X}'} L(X', \dot{X}')) |_{M=0}$  é conservada – que é o teorema de Noether. No caso em que  $M = \tau$  segue diretamente que

$$\partial_\tau [\dot{X} * \partial_{\dot{X}} L(X, \dot{X}) - L(X, \dot{X})] = 0, \quad (2.12)$$

que é a conservação da função de Hamilton (energia)  $H(X, \dot{X}) = \dot{X} * \partial_{\dot{X}} L(X, \dot{X}) - L(X, \dot{X})$ .

Consideremos agora campos de Clifford  $\phi \in \text{sec } \mathcal{C}_{ET}(M)$ . Uma dada fibra sobre  $x \in M$  tem coordenadas locais  $(x, \phi(x))$ , ou, como  $\phi(x) = \langle \phi(x) \rangle_0 + \langle \phi(x) \rangle_1 + \dots + \langle \phi(x) \rangle_n$ , podemos tomar como coordenadas locais  $(x, \langle \phi(x) \rangle_0, \langle \phi(x) \rangle_1, \dots, \langle \phi(x) \rangle_n)$ . Em particular, esta secção pode ser uma soma de um campo  $\varphi$  e de  $\partial \wedge \varphi$  e de  $\partial \cdot \varphi$ , uma vez que dentro de uma álgebra de Clifford podemos somar estas quantidades (e daí não é necessário usarmos o “jet bundle” nesta formulação). Podemos, é claro, ser ainda mais gerais e tomar esta secção como uma soma de funções multivetoriais de  $\varphi$ ,  $\partial \wedge \varphi$  e de  $\partial \cdot \varphi$ . Então, voltando à notação anterior, a secção local pode ser tal que tenhamos  $(x; \phi(x), \partial \wedge \phi(x), \partial \cdot \phi(x))$  em termos das coordenadas locais da fibra sobre  $x \in M$ , sendo que usamos a notação  $(x; \phi(x), \partial \wedge \phi(x), \partial \cdot \phi(x)) = (x, f(\phi(x)) + g(\partial \wedge \phi(x)) + h(\partial \cdot \phi(x)))$ . Definiremos uma densidade lagrangeana  $\mathcal{L}$  como  $\mathcal{L} : \mathcal{C}_{ET}(M) \rightarrow \wedge^n(M)$  tal que

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x; \phi(x), \partial \wedge \phi(x), \partial \cdot \phi(x)), \quad (2.13)$$

que escreveremos simplesmente  $\mathcal{L}(\phi, \partial \wedge \phi, \partial \cdot \phi)$ . Em termos do elemento de volume (pseudo-escalar)  $\tau \in \text{sec } \wedge^n(M) \subset \text{sec } \mathcal{C}_{ET}(M)$  podemos escrever

$$\mathcal{L}(\phi, \partial \wedge \phi, \partial \cdot \phi) = L(\phi, \partial \wedge \phi, \partial \cdot \phi)\tau, \quad (2.14)$$

onde  $L(\phi, \partial \wedge \phi, \partial \cdot \phi) = \langle L(\phi, \partial \wedge \phi, \partial \cdot \phi) \rangle_0$  é um escalar, sendo a função  $L$  chamada lagrangeana. Definimos o funcional de ação do campo  $\phi$  como

$$S_U[\phi] = \int_U \mathcal{L}(\phi, \partial \wedge \phi, \partial \cdot \phi) = \int_U L(\phi, \partial \wedge \phi, \partial \cdot \phi)\tau, \quad (2.15)$$

onde  $U \subset M$ . O princípio de mínima ação requer que  $\phi$  seja estacionário em relação a  $\mathcal{L}$ , ou seja:

$$\frac{d}{dt} S_U[\phi + t\eta] = 0. \quad (2.16)$$

Note que, se  $\phi \in \text{sec } \wedge^r(M) \subset \text{sec } \mathcal{C}_{ET}(M)$  então devemos ter  $\eta \in \text{sec } \wedge^r(M) \subset \text{sec } \mathcal{C}_{ET}(M)$ . Em termos da derivada multivetorial a condição de  $\phi$  ser estacionário escreve-se

$$\eta * \partial_\phi S_U[\phi] = 0. \quad (2.17)$$

Por outro lado, da definição de derivada multivetorial segue que

$$(\eta * \partial_\phi)F(\partial \wedge \phi) = [(\partial \wedge \eta) * \partial_{\partial \wedge \phi}]F(\partial \wedge \phi), \quad (2.18)$$

$$(\eta * \partial_\phi)F(\partial \cdot \phi) = [(\partial \cdot \eta) * \partial_{\partial \cdot \phi}]F(\partial \cdot \phi). \quad (2.19)$$

Usando eq.(2.18,2.19) e supondo que a variação  $\phi \mapsto \phi + t\eta$  não envolva uma variação do elemento de volume, obtemos da condição (2.17) que

$$\int_U \{(\eta * \partial_\phi)L(\phi, \partial \wedge \phi, \partial \cdot \phi) + [(\partial \wedge \eta) * \partial_{\partial \wedge \phi}]L(\phi, \partial \wedge \phi, \partial \cdot \phi) + [(\partial \cdot \eta) * \partial_{\partial \cdot \phi}]L(\phi, \partial \wedge \phi, \partial \cdot \phi)\}\tau = 0, \quad (2.20)$$

onde derivadas multivetoriais como  $(\eta * \partial_\phi)L(\phi, \partial \wedge \phi, \partial \cdot \phi)$  são entendidas como derivadas multivetoriais em relação ao primeiro argumento de  $L$ , etc. Calculemos agora em separado cada

um dos termos da eq.(2.20). Iremos supor que  $\phi, \eta \in \sec \wedge^r(M) \subset \sec \mathcal{C}_{ET}(M)$  e omitiremos os argumentos de  $L$  para evitar uma notação sobrecarregada, enquanto sempre que for conveniente explicitaremos a graduação de um número de Clifford.

$$\eta * \partial_\phi L = \eta * \partial_\phi \langle L \rangle_0 = \langle \eta \partial_\phi L \rangle_0 = (\eta)_r \cdot (\partial_\phi L)_r = \eta \cdot (\partial_\phi L); \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} [(\partial \wedge \eta) * \partial_{\partial \wedge \phi}] L &= [(\partial \wedge \eta) * \partial_{\partial \wedge \phi}] \langle L \rangle_0 = \langle (\partial \wedge \eta) \partial_{\partial \wedge \phi} L \rangle_0 = \\ &= \frac{1}{2} \{ [\gamma^\mu \partial_\mu (\eta)_r + (-1)^r \partial_\mu (\eta)_r \gamma^\mu] (\partial_{\partial \wedge \phi} L)_{r+1} \}_0 = \\ &= \frac{1}{2} \{ \langle \gamma^\mu \partial_\mu [(\eta)_r (\partial_{\partial \wedge \phi} L)_{r+1}] \rangle_0 - \langle \gamma^\mu (\eta)_r \partial_\mu (\partial_{\partial \wedge \phi} L)_{r+1} \rangle_0 + \\ &+ (-1)^r \langle \gamma^\mu \partial_\mu [(\partial_{\partial \wedge \phi} L)_{r+1} (\eta)_r] \rangle_0 - (-1)^r \langle \gamma^\mu \partial_\mu (\partial_{\partial \wedge \phi} L)_{r+1} (\eta)_r \rangle_0 \} = \\ &= \frac{1}{2} [(\gamma^\mu \partial_\mu) \cdot \langle (\eta)_r (\partial_{\partial \wedge \phi} L)_{r+1} + (-1)^r (\partial_{\partial \wedge \phi} L)_{r+1} (\eta)_r \rangle_1 - \\ &- (-1)^r \frac{1}{2} [(\eta)_r \cdot \langle \gamma^\mu \partial_\mu (\partial_{\partial \wedge \phi} L)_{r+1} + (-1)^r \partial_\mu (\partial_{\partial \wedge \phi} L)_{r+1} \gamma^\mu \rangle_r] = \\ &= \partial \cdot [(\eta)_r \cdot (\partial_{\partial \wedge \phi} L)_{r+1}] - (-1)^r (\eta)_r \cdot [\partial \cdot (\partial_{\partial \wedge \phi} L)_{r+1}]_r = \\ &= \partial \cdot [(\eta) \cdot (\partial_{\partial \wedge \phi} L)] - (-1)^r (\eta) \cdot [\partial \cdot (\partial_{\partial \wedge \phi} L)]; \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} [(\partial \cdot \eta) * \partial_{\partial \cdot \phi}] L &= [(\partial \cdot \eta) * \partial_{\partial \cdot \phi}] \langle L \rangle_0 = \langle (\partial \cdot \eta) \partial_{\partial \cdot \phi} L \rangle_0 = \\ &= \frac{1}{2} \{ [\gamma^\mu \partial_\mu (\eta)_r - (-1)^r \partial_\mu (\eta)_r \gamma^\mu] (\partial_{\partial \cdot \phi} L)_{r-1} \}_0 = \\ &= \frac{1}{2} \{ \langle \gamma^\mu \partial_\mu [(\eta)_r (\partial_{\partial \cdot \phi} L)_{r-1}] \rangle_0 - \langle \gamma^\mu (\eta)_r \partial_\mu (\partial_{\partial \cdot \phi} L)_{r-1} \rangle_0 - \\ &- (-1)^r \langle \gamma^\mu \partial_\mu [(\partial_{\partial \cdot \phi} L)_{r-1} (\eta)_r] \rangle_0 + (-1)^r \langle \gamma^\mu \partial_\mu (\partial_{\partial \cdot \phi} L)_{r-1} (\eta)_r \rangle_0 \} = \\ &= \frac{1}{2} [(\gamma^\mu \partial_\mu) \cdot \langle (\eta)_r (\partial_{\partial \cdot \phi} L)_{r-1} - (-1)^r (\partial_{\partial \cdot \phi} L)_{r-1} (\eta)_r \rangle_1 + \\ &+ (-1)^r \frac{1}{2} [(\eta)_r \cdot \langle \gamma^\mu \partial_\mu (\partial_{\partial \cdot \phi} L)_{r-1} + (-1)^{r-1} \partial_\mu (\partial_{\partial \cdot \phi} L)_{r-1} \gamma^\mu \rangle_r] = \\ &= \partial \cdot [(\eta)_r \cdot (\partial_{\partial \cdot \phi} L)_{r-1}] + (-1)^r (\eta)_r \cdot [\partial \wedge (\partial_{\partial \cdot \phi} L)_{r-1}]_r = \\ &= \partial \cdot [(\eta) \cdot (\partial_{\partial \cdot \phi} L)] + (-1)^r (\eta) \cdot [\partial \wedge (\partial_{\partial \cdot \phi} L)]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Usando as expressões (2.21-2.23) a eq.(2.20) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} &\int_U \{ \eta \cdot [\partial_\phi L - (-1)^r \partial \cdot (\partial_{\partial \wedge \phi} L) + (-1)^r \partial \wedge (\partial_{\partial \cdot \phi} L)] \} \tau + \\ &+ \int_U \partial \cdot [\eta \cdot (\partial_{\partial \wedge \phi} L + \partial_{\partial \cdot \phi} L)] \tau = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Usando a versão multivetorial do teorema de Stokes – o chamado “teorema da fronteira” [Boundary Theorem] (Hestenes 1966, Hestenes e Sobczyk 1984) – temos para a última integral:

$$\int_U \partial \cdot [\eta \cdot (\partial_{\partial \wedge \phi} L + \partial_{\partial \cdot \phi} L)] \tau = \int_{\partial U} [\eta \cdot (\partial_{\partial \wedge \phi} L + \partial_{\partial \cdot \phi} L)] \sigma = 0, \quad (2.25)$$

onde  $\sigma$  é o elemento de superfície e  $\partial U$  é a fronteira de  $U$ , e onde supomos  $\eta|_{\partial U} = 0$ , como usual. Segue da eq.(2.24), usando (2.25) e lembrando que  $\eta$  é arbitrário:

$$\partial_\phi L - (-1)^r \partial \cdot (\partial_{\partial \wedge \phi} L) + (-1)^r \partial \wedge (\partial_{\partial \cdot \phi} L) = 0, \quad (2.26)$$

que é a equação multivetorial de Euler-Lagrange para campos. Note que omitimos o índice  $r$ , uma vez que a graduação r-vetor desta equação é óbvia em função de  $L$  ser escalar e  $\phi$  ser por hipótese um r-vetor.

Uma vez que  $\partial_{(\sum_r \langle X \rangle_r)} \langle F(X) \rangle_0 = \sum_r \langle \partial_{\langle X \rangle_r} F(X) \rangle_0$ , então se  $\phi = \sum_r \langle \phi \rangle_r$ , generalizamos a eq.(2.26) como

$$\sum_r \left[ \partial_{\langle \phi \rangle_r} L - (-1)^r \partial \cdot (\partial_{\partial \wedge \langle \phi \rangle_r} L) + (-1)^r \partial \wedge (\partial_{\partial \cdot \langle \phi \rangle_r} L) \right] = 0, \quad (2.27)$$

que implica para cada uma das graduações de  $\phi$ :

$$\partial_{\langle \phi \rangle_r} L - (-1)^r \partial \cdot (\partial_{\partial \wedge \langle \phi \rangle_r} L) + (-1)^r \partial \wedge (\partial_{\partial \cdot \langle \phi \rangle_r} L) = 0. \quad (2.28)$$

Há uma forma mais condensada e elegante de escrevermos as equações multivetoriais de Euler-Lagrange. Usando as propriedades dos produtos interior e exterior podemos escrever

$$\partial \cdot (\partial_{\partial \wedge \phi} L) = \partial \cdot (\partial_{\partial \wedge \phi} L)_{r+1} = (-1)^r (\partial_{\partial \wedge \phi} L)_{r+1} \cdot \overleftarrow{\partial} = (-1)^r (\partial_{\partial \wedge \phi} L) \cdot \overleftarrow{\partial}, \quad (2.29)$$

$$\partial \wedge (\partial_{\partial \cdot \phi} L) = \partial \wedge (\partial_{\partial \cdot \phi} L)_{r-1} = -(-1)^r (\partial_{\partial \cdot \phi} L)_{r-1} \wedge \overleftarrow{\partial} = -(-1)^r (\partial_{\partial \cdot \phi} L) \wedge \overleftarrow{\partial}, \quad (2.30)$$

onde definimos

$$X \cdot \overleftarrow{\partial} = (\partial_\mu X) \cdot \gamma^\mu, \quad X \wedge \overleftarrow{\partial} = (\partial_\mu X) \wedge \gamma^\mu. \quad (2.31)$$

Logo, a equação de Euler-Lagrange pode ser escrita como

$$\partial_\phi L - (\partial_{\partial \wedge \phi} L) \cdot \overleftarrow{\partial} - (\partial_{\partial \cdot \phi} L) \wedge \overleftarrow{\partial} = 0. \quad (2.32)$$

Notemos ainda que, no caso particular em que temos

$$L(\phi, \partial \wedge \phi, \partial \cdot \phi) = L(\phi, \partial \wedge \phi + \partial \cdot \phi) = L(\phi, \partial \phi), \quad (2.33)$$

e como por definição

$$\partial_{\partial \cdot \phi} L(\phi, \partial \phi) = \langle \partial_{\partial \cdot \phi} L(\partial \phi) \rangle_{r-1}, \quad (2.34)$$

$$\partial_{\partial \wedge \phi} L(\phi, \partial \phi) = \langle \partial_{\partial \wedge \phi} L(\partial \phi) \rangle_{r+1}, \quad (2.35)$$

então, a partir da eq.(2.32):

$$\begin{aligned} & \partial_\phi L - \langle \partial_{\partial \cdot \phi} L \rangle_{r+1} \cdot \overleftarrow{\partial} - \langle \partial_{\partial \wedge \phi} L \rangle_{r-1} \wedge \overleftarrow{\partial} = \\ & = \langle \partial_\phi L - (\partial_{\partial \cdot \phi} L) \cdot \overleftarrow{\partial} - (\partial_{\partial \wedge \phi} L) \wedge \overleftarrow{\partial} \rangle_r = 0, \end{aligned} \quad (2.36)$$

ou ainda, usando a definição do produto de Clifford e omitindo o índice  $r$ ,

$$\partial_\phi L - (\partial_{\partial \cdot \phi} L) \cdot \overleftarrow{\partial} = 0. \quad (2.37)$$

Esta expressão, obviamente um caso particular da eq.(2.32), foi também obtida por Lasenby et al. (1993).

Note que, se tivéssemos trabalhado com a densidade lagrangeana  $\mathcal{L}$ , que tem valores pseudo-escalares, em função das identidades (Hestenes e Sobczyk 1984):

$$(C_r \cdot B_s)\tau = C_r \wedge (B_s\tau), \quad (r \leq s), \quad (2.38)$$

$$(C_r \wedge B_s)\tau = C_r \cdot (B_s\tau), \quad (r \leq |s - n|), \quad (2.39)$$

obteríamos a seguinte equação de Euler-Lagrange:

$$\partial_\phi \mathcal{L} - (-1)^r \partial \wedge (\partial_{\partial \wedge \phi} \mathcal{L}) + (-1)^r \partial \cdot (\partial_{\partial \cdot \phi} \mathcal{L}) = 0. \quad (2.40)$$

No caso de  $\mathcal{L}$  não depender de  $\partial \cdot \phi$  temos

$$\partial_\phi \mathcal{L} - (-1)^r \partial \wedge (\partial_{\partial \wedge \phi} \mathcal{L}) = 0, \quad (2.41)$$

para  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial \wedge \phi) \in \Lambda^n(M)$ .

Como exemplo, exibiremos as equações de Maxwell em  $\mathcal{C}_{ET}(M)$  usando a formulação lagrangeana desenvolvida. Considere a lagrangeana

$$L = \langle -\frac{1}{2}(\partial \wedge A)^2 + AJ \rangle_0, \quad (2.42)$$

onde  $A, J \in \sec \Lambda^1(M)$  são o potencial eletromagnético e a corrente elétrica, respectivamente, e

$$F = \partial \wedge A \quad (2.43)$$

é o campo eletromagnético ( $F \in \sec \Lambda^2(M)$ ). Uma vez que

$$\partial_{\partial \wedge A} L = -\partial \wedge A, \quad \partial_A L = J, \quad (2.44)$$

a equação de Euler-Lagrange (2.32) fornece

$$J + (\partial \wedge A) \cdot \overleftarrow{\partial} = 0, \quad (2.45)$$

ou, uma vez que  $(\partial \wedge A) \cdot \overleftarrow{\partial} = -\partial \cdot (\partial \wedge A) = -\partial \cdot F$ ,

$$\partial \cdot F = J. \quad (2.46)$$

Da definição de  $F$  segue que

$$\partial \wedge F = 0. \quad (2.47)$$

Agora, usando o produto de Clifford, podemos escrever as eq.(2.46,2.47) na forma de uma única equação, a saber:

$$\partial F = J, \quad (2.48)$$

que é a equação de Maxwell em  $\mathcal{C}_{ET}(M)$ . Esta forma das equações de Maxwell é devida a Juvet e Schidlof (1932) e Mercier (1935), e redescoberta por Riesz (1958).

Finalmente, vamos considerar uma transformação  $\phi \mapsto \phi' = \phi'(\phi, \chi)$  parametrizada por um campo multivetorial arbitrário  $\chi$ . Definindo a lagrangeana  $L'$  por  $L'(\phi, \partial \wedge \phi, \partial \cdot \phi) = L(\phi', \partial \wedge \phi', \partial \cdot \phi')$  obtemos para a derivada multivetorial de  $L'$  em relação a  $\chi$ :

$$\begin{aligned} (\xi * \partial_\chi)L' &= (\xi * \partial_\chi)L(\phi'(\phi, \chi), \partial \wedge \phi'(\phi, \chi), \partial \cdot \phi'(\phi, \chi)) = \\ &= \{[\xi * \partial_\chi \phi'] * \partial_{\phi'}\}L' + \{[\partial \wedge (\xi * \partial_\chi \phi')] * \partial_{\partial \wedge \phi'}\}L' + \{[\partial \cdot (\xi * \partial_\chi \phi')] * \partial_{\partial \cdot \phi'}\}L'. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Uma vez que  $\xi * \partial_\chi$  é um operador escalar,  $\xi * \partial_\chi \phi'$  possui a mesma graduação de  $\phi'$ ; segue daí que podemos aplicar os resultados (2.21-2.23) com  $\xi * \partial_\chi \phi'$  no lugar de  $\eta$  para calcularmos a expressão acima. Logo:

$$\begin{aligned} (\xi * \partial_\chi)L' &= (\xi * \partial_\chi \phi') \cdot [\partial_{\phi'}L' - (-1)^r \partial \cdot (\partial_{\partial \wedge \phi'}L') + (-1)^r \partial \wedge (\partial_{\partial \cdot \phi'}L')] + \\ &+ \partial \cdot \{((\xi * \partial_\chi \phi')(\partial_{\partial \wedge \phi'}L' + \partial_{\partial \cdot \phi^\wedge}L'))_1\}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Supondo que  $\phi'$  satisfaz a equação multivetorial de Euler-Lagrange (2.26) temos que

$$(\xi * \partial_\chi)L' = \partial \cdot ((\xi * \partial_\chi \phi')(\partial_{\partial \wedge \phi'}L' + \partial_{\partial \cdot \phi^\wedge}L'))_1, \quad (2.51)$$

ou ainda:

$$\partial_\chi L' = \partial_\xi [\partial \cdot ((\xi * \partial_\chi \phi')(\partial_{\partial \wedge \phi'}L' + \partial_{\partial \cdot \phi^\wedge}L'))_1]. \quad (2.52)$$

Se  $\chi$  é um escalar, que denotaremos por  $\epsilon$ , segue que

$$\partial_\epsilon L' = \partial \cdot ((\partial_\epsilon \phi')(\partial_{\partial \wedge \phi'}L' + \partial_{\partial \cdot \phi^\wedge}L'))_1. \quad (2.53)$$

Se  $\partial_\epsilon L' = 0$ , então temos a conservação da corrente de Noether  $J$ :

$$\partial \cdot J = 0, \quad J = ((\partial_\epsilon \phi')(\partial_{\partial \wedge \phi'}L' + \partial_{\partial \cdot \phi^\wedge}L'))_1 |_{\epsilon=0}, \quad (2.54)$$

que é o teorema de Noether. No caso em que  $L = L(\phi, \partial \phi)$  temos (Lasenby et al. 1993):

$$\partial \cdot J = 0, \quad J = ((\partial_\epsilon \phi')(\partial_{\partial \phi'}L'))_1 |_{\epsilon=0}, \quad (2.55)$$

Note que, mesmo que  $\partial_\epsilon L' \neq 0$ , podemos obter importantes conclusões à partir de

$$\partial_\epsilon L' |_{\epsilon=0} = \partial \cdot ((\partial_\epsilon \phi')(\partial_{\partial \wedge \phi'}L' + \partial_{\partial \cdot \phi^\wedge}L'))_1 |_{\epsilon=0}. \quad (2.56)$$

ou de

$$\partial_\epsilon L' |_{\epsilon=0} = \partial \cdot ((\partial_\epsilon \phi')(\partial_{\partial \phi'}L'))_1 |_{\epsilon=0}. \quad (2.57)$$

## 2.2 Formalismo Hamiltoniano

Consideremos, como na seção anterior, uma partícula descrita pelo multivetor  $X = X(\tau)$ . Dada uma lagrangeana  $L(X, \dot{X})$  definimos o momentum canonicamente conjugado a  $X$  por

$$P = \partial_{\dot{X}}L(X, \dot{X}). \quad (2.58)$$

Uma vez que  $L(X, \dot{X})$  é um escalar, o momentum  $P$  possui a mesma graduação de  $X$ . A eq.(2.58) fornece  $P = P(X, \dot{X})$ , e se a lagrangeana é padrão (ou sem vínculos - Sudarshan e Mukunda 1974) (ou seja,  $\partial_{\dot{X}}^2 L(X, \dot{X}) = \partial_{\dot{X}} P \neq 0$ ) então podemos inverter  $P = P(X, \dot{X})$  para obter

$$\dot{X} = \dot{X}(X, P). \quad (2.59)$$

Definimos o hamiltoniano  $H = H(X, P)$  como

$$H = (\dot{X} * \partial_{\dot{X}} L - L)|_{\dot{X}=\dot{X}(X,P)}. \quad (2.60)$$

Note que  $H(X, P)$  é um escalar pois  $\dot{X} * \partial_{\dot{X}}$  preserva graduação. Calculemos agora  $\partial_X H$  e  $\partial_P H$ ; temos:

$$\begin{aligned} \eta * \partial_X H &= (\eta * \partial_X)[\dot{X}(X, P) * P - L(X, \dot{X}(X, P))] = \\ &= [(\eta * \partial_X)\dot{X}(X, P)] * P - \eta * \partial_X L(X, \dot{X}) - [(\eta * \partial_X)\dot{X}(X, P)] * \partial_{\dot{X}} L(X, \dot{X}) = \\ &= -\eta * [\partial_X(\partial_{\dot{X}} L(X, \dot{X}))] = -\eta * \dot{P}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

ou seja,

$$\dot{P} = -\partial_X H. \quad (2.62)$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} (\eta * \partial_P)H &= (\eta * \partial_P)[\dot{X}(X, P) * P - L(X, \dot{X}(X, P))] = \\ &= [\eta * \partial_P \dot{X}(X, P)] * P + \eta * \dot{X} - [\eta * \partial_P \dot{X}(X, P)] * \partial_{\dot{X}} L(X, \dot{X}) = \\ &= \eta * \dot{X}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

ou seja,

$$\dot{X} = \partial_P H. \quad (2.64)$$

As equações multivetoriais

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \partial_P H, \\ \dot{P} &= -\partial_X H, \end{aligned} \quad (2.65)$$

são as equações de Hamilton. Para  $X \in \wedge^r(M)$  temos um conjunto de  $2d$  equações, onde  $d = \binom{n}{r}$ , ou seja:

$$\begin{aligned} \dot{X}_{\mu_1 \dots \mu_r} &= \partial_{P^{\mu_1 \dots \mu_r}} H, \\ \dot{P}_{\mu_1 \dots \mu_r} &= -\partial_{X^{\mu_1 \dots \mu_r}} H, \end{aligned} \quad (2.66)$$

Por um procedimento análogo ao feito na seção anterior, podemos definir o chamado espaço de momenta. É claro que este espaço é  $\mathbf{R}^d$  no caso em que  $P \in \wedge^r(M)$ . Tomemos uma base ortonormal  $\{e'_a\}$  de  $\mathbf{R}^d$  com  $e'_a \cdot e'_b = \delta_{ab}$  ( $a, b = 1, \dots, d$ ), de modo que, em analogia ao isomorfismo (2.8) temos o seguinte isomorfismo:

$$\bigwedge^r \ni P = P^I \gamma_I \longleftrightarrow \underline{p}' = \sum_a P_a e'_a \in \mathbf{R}^d, \quad (2.67)$$

onde os  $P_a$  são os escalares  $P^I$  dentro da correspondência  $a \longleftrightarrow I$ .

Tomemos agora o espaço  $\mathbf{R}^{2d} = \mathbf{R}^d \oplus \mathbf{R}^d$ , chamado espaço de fases, dado pela soma direta dos espaços de configurações e de momenta, com base  $\{e_a, e'_b\}$  satisfazendo

$$e_a \cdot e_b = \delta_{ab}, \quad e'_a \cdot e'_b = \delta_{ab}, \quad e_a \cdot e'_b = 0, \quad (a, b = 1, \dots, d). \quad (2.68)$$

A estrutura simplética do espaço de fases é definida introduzindo o bivector simplético (Hestenes 1992a)

$$J = \sum_a J_a = \sum_a e_a \wedge e'_a. \quad (2.69)$$

Note que

$$e'_a = e_a \cdot J = -J \cdot e_a, \quad (2.70)$$

$$e_a = -e'_a \cdot J = J \cdot e'_a, \quad (2.71)$$

e que

$$J_a^2 = -1. \quad (2.72)$$

Um estado físico é descrito por um ponto no espaço de fases de acordo com

$$q = x' + p = \sum_a (X_a e'_a + P_a e_a), \quad (2.73)$$

ou ainda

$$q' = -x + p' = \sum_a (-X_a e_a + P_a e'_a), \quad (2.74)$$

onde  $q' = -J \cdot q$  e onde usamos  $(e'_a)' = -e_a$ . Analogamente, definimos

$$\partial_q = \partial_{x'} + \partial_p = \partial'_x + \partial_p, \quad (2.75)$$

ou ainda

$$\partial'_q = -\partial_x + \partial_{p'} = -\partial_x + \partial'_p, \quad (2.76)$$

onde  $\partial' = -J \cdot \partial_q$ . No espaço de fases as equações de Hamilton (2.65) escrevem-se

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \partial_p H, \\ \dot{p} &= -\partial_x H, \end{aligned} \quad (2.77)$$

que podem ser escritas como

$$\dot{q} = \partial'_q H. \quad (2.78)$$

Antes de definirmos o colchete de Poisson, notemos que usando o bivector simplético  $J$  podemos definir uma forma bilinear anti-simétrica por

$$z' \cdot t = -t' \cdot z = J \cdot (t \wedge z). \quad (2.79)$$

Agora, dadas duas funções  $F(x, p) = F(q)$  e  $G(x, p) = G(q)$ , definimos o colchete de Poisson por

$$\{F, G\} = (\partial'_q F) \cdot (\partial_q G) = J \cdot (\partial_q G \wedge \partial_q F). \quad (2.80)$$

Finalmente, as equações de Hamilton podem ser reescritas em termos do colchete de Poisson como

$$\dot{q} = \{H, q\}. \quad (2.81)$$

## Capítulo 3

# Campos Spinoriais de Dirac-Hestenes

### 3.1 O Spinor de Dirac-Hestenes

Considere a AET  $\mathbf{R}_{1,3}$  e um vetor  $v \in \mathbf{R}^{1,3} \subset \mathbf{R}_{1,3}$ , que iremos supor inicialmente tal que  $v^2 = 1$ . A rotação de Lorentz  $v \mapsto RvR^{-1} = Rv\tilde{R} = w$  define um novo vetor  $w$  tal que  $w^2 = 1$ . Podemos, portanto, pensar em fixar um vetor  $v$  e obter todos os demais vetores unitários tipo tempo através da aplicação bilinear  $v \mapsto Rv\tilde{R}$ . Esse mesmo procedimento pode, entretanto, ser generalizado de modo a obtermos qualquer vetor tipo tempo à partir de um vetor unitário tipo tempo  $v$  fixado, ou seja, podemos pensar em definir uma aplicação bilinear  $v \mapsto \psi v \tilde{\psi} = z$  tal que  $z^2 = \rho^2 > 0$ . Uma vez que  $z$  pode ser escrito como  $z = \rho Rv\tilde{R}$  onde  $\rho > 0$ , devemos ter

$$\psi v \tilde{\psi} = z = \rho Rv\tilde{R}, \quad (3.1)$$

Isso implica que  $Mv\tilde{M} = v$  para  $M = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\tilde{R}\psi$ , e a solução mais geral é  $M = e^{\gamma_5\beta/2}$ . Segue então que  $\psi$  é da forma

$$\psi = \sqrt{\rho}e^{\gamma_5\beta/2}R. \quad (3.2)$$

O objeto  $\psi$  consiste, portanto, de uma rotação de Lorentz  $R$ , uma dilatação  $\sqrt{\rho}$  e uma transformação  $e^{\gamma_5\beta/2}$  chamada transformação de dualidade pelo ângulo  $\beta$ , chamado ângulo de Takabayasi (1957), por motivos que ficarão claros depois quando considerarmos a teoria de Dirac da mecânica quântica relativística. Note que

$$\psi \tilde{\psi} = \rho e^{\gamma_5\beta} = \sigma + \gamma_5\omega, \quad (3.3)$$

onde

$$\sigma = \rho \cos \beta, \quad \omega = \rho \sin \beta, \quad (3.4)$$

e que  $\psi \tilde{\psi} \neq 0$ , caso em que vale a expressão (3.2). Isso garante que o vetor  $z$  é da mesma natureza de  $v$ , ou seja, se  $v$  é do tipo tempo então  $z$  também o é (o mesmo valendo, é claro, se  $v$  for tipo luz ou tipo espaço).

Por outro lado, uma vez que  $R \in \text{Spin}_+(1,3)$ , que é o conjunto dos elementos inversíveis da sub-álgebra par  $\mathbf{R}_{1,3}^+$  com norma unitária, então  $\psi$  dado pela expressão (3.2) pertence ao

conjunto dos elementos inversíveis da sub-álgebra par  $\mathbf{R}_{1,3}^+$ , isto é,  $\Gamma^+(1,3)$ , sendo  $\psi^{-1}$  dado por  $\psi^{-1} = (\psi\tilde{\psi})^{-1}\tilde{\psi}$ . Entretanto,  $\Gamma^+(1,3)$  é um grupo mas não uma álgebra de Clifford. Para termos uma álgebra de Clifford é preciso incluímos os  $\psi$  tais que  $\psi\tilde{\psi} = 0$ . Nesse caso a aplicação  $v \mapsto \psi v\tilde{\psi}$  determina um vetor tipo luz, e não vale mais a expressão (3.2) para  $\psi$ . Daí, se tomarmos  $\psi \in \mathbf{R}_{1,3}^+$ , então dado  $v$  tal que  $v^2 = 1$  [ $v^2 = -1$ ] a aplicação  $v \mapsto \psi v\tilde{\psi} = z$  determina um vetor  $z$  tal que  $z^2 \geq 0$  [ $z^2 \leq 0$ ], enquanto que se  $v^2 = 0$  o vetor  $z$  é tal que  $z^2 = 0$ . Logo, se tomarmos uma base ortonormal<sup>1</sup>  $\{\gamma_a\}$  ( $a = 0, 1, 2, 3$ ) para  $\mathbf{R}^{1,3} \subset \mathbf{R}_{1,3}$ , a aplicação  $\gamma_a \mapsto \psi\gamma_a\tilde{\psi} = z_a$  determina uma nova base  $\{z_a\}$  no caso em que  $\psi$  é não-singular ( $\psi\tilde{\psi} \neq 0$ ), enquanto para  $\psi$  singular teremos vetores  $z_a$  tipo-luz. De um modo geral, temos que dada uma base  $\{\gamma_a\}$  o objeto  $\psi \in \mathbf{R}_{1,3}^+$  determina novos vetores  $z_a$  através da aplicação  $\gamma_a \mapsto \psi\gamma_a\tilde{\psi} = z_a$ .

Nesse ponto é importante introduzirmos uma notação mais cuidadosa. Vamos denotar  $\Sigma = \{\gamma_a\}$  e escrever a relação acima como  $z_a = \psi_\Sigma \gamma_a \tilde{\psi}_\Sigma$  para indicar claramente que os vetores  $z_a$  são determinados pela ação de  $\psi$  na base  $\Sigma$ , sendo esta ação que define  $\psi$ , daí a notação  $\psi_\Sigma$ . Consideremos agora uma outra base ortonormal  $\Sigma' = \{\gamma'_a\}$ , sendo  $\gamma'_a = R\gamma_a\tilde{R}$ . Podemos, de acordo com a prescrição acima, tomar um outro elemento de  $\mathbf{R}_{1,3}^+$  e definir um outro conjunto de vetores, digamos  $z'_a$ , à partir da base  $\Sigma'$ , ou seja,  $z'_a = \psi_{\Sigma'} \gamma'_a \tilde{\psi}_{\Sigma'}$ . Vamos exigir, entretanto, que  $z'_a = z_a$ . Isso dá, por assim dizer, um “significado absoluto” aos vetores determinados pela prescrição acima, e podemos pensar que estes vetores descrevem propriedades físicas bem definidas de certos objetos físicos, enquanto as bases  $\Sigma$  e  $\Sigma'$  definem um ou outro sistema de laboratório. Logo, queremos que

$$\psi_\Sigma \gamma_a \tilde{\psi}_\Sigma = \psi_{\Sigma'} \gamma'_a \tilde{\psi}_{\Sigma'} \quad (3.5)$$

e, uma vez que  $\gamma'_a = R\gamma_a\tilde{R}$ , segue que

$$\psi_{\Sigma'} = \psi_\Sigma \tilde{R}. \quad (3.6)$$

Desse modo, uma vez que os objetos  $\psi_\Sigma$  e  $\psi_{\Sigma'}$  determinam os mesmos vetores à partir das diferentes bases ortonormais  $\Sigma$  e  $\Sigma'$ , é natural pensarmos em  $\psi_\Sigma$  e  $\psi_{\Sigma'}$  como diferentes representações de um objeto  $\psi$ . Esse objeto  $\psi$  é o que chamaremos spinor de Dirac-Hestenes. Vamos agora estabelecer a sua definição de uma maneira rigorosa.

*Definição:* Duas bases ortonormais  $\Sigma = \{\gamma_a\}$  e  $\Sigma' = \{\gamma'_a\}$  são geometricamente equivalentes se existe  $R \in \text{Spin}_+(1,3)$  tal que  $\gamma'_a = R\gamma_a\tilde{R}$ . Em outras palavras, temos a seguinte relação de equivalência:

$$\mathcal{R}_g : \Sigma \sim \Sigma' \iff \gamma'_a = R\gamma_a\tilde{R}, \quad (R \in \text{Spin}_+(1,3)). \quad (3.7)$$

Se  $\{\Sigma\}$  denota o conjunto de todas as bases ortonormais, então o conjunto quociente  $\Sigma = \{\Sigma\}/\mathcal{R}_g$  é o conjunto das bases ortonormais geometricamente equivalentes.

*Definição:* Dadas duas bases ortonormais geometricamente equivalentes  $\Sigma$  e  $\Sigma'$  com  $\gamma'_a = R\gamma_a\tilde{R}$ , diremos que  $\psi_\Sigma$  e  $\psi_{\Sigma'} \in \mathbf{R}_{1,3}^+$  são equivalentes se  $\psi_\Sigma \gamma_a \tilde{\psi}_\Sigma = \psi_{\Sigma'} \gamma'_a \tilde{\psi}_{\Sigma'}$ . Em outras palavras, temos

---

<sup>1</sup> Usaremos índices latinos para nos referirmos à uma base ortonormal e índices gregos para nos referirmos à uma base coordenada. É claro que, em geral, uma base ortonormal não é uma base coordenada. Trabalharemos a seguir com bases ortonormais de modo que nossa discussão seja válida para espaços arbitrários (salvo algumas condições que estudaremos).

a seguinte relação de equivalência:

$$\mathcal{R} : \psi_\Sigma \sim \psi_{\Sigma'} \iff \psi_{\Sigma'} = \psi_\Sigma \tilde{R}, \quad \text{para } \Sigma \sim \Sigma'. \quad (3.8)$$

Segue dessa definição que  $\psi_\Sigma$  e  $\psi_{\Sigma'}$  são projetados em um mesmo elemento de  $\mathbf{R}_{1,3}^+/\mathcal{R}$ , que denotaremos por  $\psi$ .

*Definição:* Um spinor de Dirac-Hestenes (SDH) é uma classe de equivalência de tripletos  $(\Sigma, R, \psi_\Sigma)$ , onde  $\Sigma$  é uma base ortonormal para  $\mathbf{R}^{1,3}$ ,  $R \in \text{Spin}_+(1, 3)$ ,  $\psi_\Sigma \in \mathbf{R}_{1,3}^+$ , e

$$(\Sigma, R, \psi_\Sigma) \sim (\Sigma_0, R_0, \psi_{\Sigma_0}) \iff \psi_\Sigma = \psi_{\Sigma_0} R_0 \tilde{R}, \quad \varsigma(R_0 \tilde{R}) = \Lambda, \quad \Sigma = \Lambda \Sigma_0, \quad (3.9)$$

onde  $\varsigma : \text{Spin}_+(1, 3) \rightarrow \text{SO}_+(1, 3)$ . Em outras palavras,

$$(\Sigma, R, \psi_\Sigma) \sim (\Sigma_0, R_0, \psi_{\Sigma_0}) \iff \Sigma \sim \Sigma_0, \quad \psi_\Sigma \sim \psi_{\Sigma_0} \quad \text{para } R \tilde{R}_0 \in \text{Spin}_+(1, 3). \quad (3.10)$$

O par  $(\Sigma, R)$  é chamado referencial spinorial. Note que a definição do SDH depende da escolha de um referencial spinorial  $(\Sigma_0, R_0)$ . Por simplicidade tomaremos  $R_0 = 1$ . A escolha de  $\Sigma_0$ , que chamaremos base fiducial, permite representarmos  $\psi \in \mathbf{R}_{1,3}^+/\mathcal{R}$  por um elemento  $\psi_{\Sigma_0} \in \mathbf{R}_{1,3}^+$ . Observemos que, embora o SDH consiste do tripleto  $(\Sigma, R, \psi_\Sigma)$ , por abuso de linguagem iremos nos referir ao objeto  $\psi$  como o SDH, enquanto  $\psi_\Sigma$  é o seu representante na base  $\Sigma$  escolhida.

Vamos agora discutir a questão da lei de transformação de um SDH. Dado que  $z_a = \psi_\Sigma \gamma_a \tilde{\psi}_\Sigma$ , para uma transformação ativa  $z_a \mapsto z'_a = R z_a \tilde{R}$  temos

$$z'_a = R \psi_\Sigma \gamma_a \tilde{\psi}_\Sigma \tilde{R} = \psi'_\Sigma \gamma_a \tilde{\psi}'_\Sigma = R \psi_\Sigma \gamma'_a \tilde{\psi}'_\Sigma \tilde{R} = \psi'_\Sigma \gamma'_a \tilde{\psi}'_\Sigma, \quad (3.11)$$

donde concluímos que

$$\psi'_\Sigma = R \psi_\Sigma, \quad (3.12)$$

que é a lei de transformação para um SDH em termos de seu representante na base  $\Sigma$ . Segue que, para o SDH, a lei de transformação é:

$$\psi \mapsto \psi' = R \psi. \quad (3.13)$$

Note que, se quisermos trabalhar com o representante de  $\psi$  na base transformada  $\Sigma'$ , teremos

$$\psi'_{\Sigma'} = R \psi_\Sigma \tilde{R}. \quad (3.14)$$

Note ainda que, em função da expressão (3.2) para o representante do SDH, que reescreveremos como

$$\psi_\Sigma = \sqrt{\rho} e^{\gamma_5 \beta / 2} R_0, \quad (3.15)$$

a transformação  $\psi_\Sigma \mapsto \psi'_\Sigma = R \psi_\Sigma$  corresponde a uma composição de rotações de Lorentz, ou seja,

$$\psi'_\Sigma = \sqrt{\rho} e^{\gamma_5 \beta / 2} R', \quad \text{onde } R' = R R_0. \quad (3.16)$$

Esta expressão para o representante do SDH (não-singular) será denominada decomposição canônica do SDH.<sup>2</sup>

Para finalizar, vamos exibir uma representação matricial para  $\psi$ . Usando os resultados do cap.1, em particular a eq.(1.62), e uma vez que  $\psi$  é da forma geral

$$\psi = a + a_{01}\gamma_{01} + \cdots + a_{23}\gamma_{23} + a_{0123}\gamma_5, \quad (3.17)$$

obtemos para a representação matricial de  $\psi$ :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\psi_2 \\ \psi_2 & \psi_1 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

onde

$$\psi_1 = a + a_{23}\mathbf{i} - a_{13}\mathbf{j} + a_{12}\mathbf{k} = (a + a_{12}\mathbf{k}) + \mathbf{j}(-a_{13} + a_{23}\mathbf{k}), \quad (3.19)$$

$$\psi_2 = a_{0123} - a_{01}\mathbf{i} - a_{02}\mathbf{j} - a_{03}\mathbf{k} = (a_{0123} - a_{02}\mathbf{k}) + \mathbf{j}(-a_{02} - a_{01}\mathbf{k}). \quad (3.20)$$

### 3.2 Campos Spinoriais de Dirac-Hestenes e Derivação Covariante

Nosso objetivo nesta seção é definir um campo spinorial DH (CSDH)  $\psi : x \mapsto \psi(x)$ ,  $x \in M$ . Para isso precisamos definir um fibrado do qual este campo spinorial será uma particular secção. Da discussão da seção anterior, nós concluímos que um SDH pertence a  $\mathbf{R}_{1,3}/\mathcal{R}$ , onde  $\mathcal{R}$  é a relação de equivalência definida por (3.8). Sendo assim, como  $\mathbf{R}_{1,3}$  é a fibra típica do FCET  $\mathcal{C}_{ET}(M)$ , então se tomarmos o fibrado quociente  $\mathcal{C}_{ET}(M)/\mathcal{R}$  um CSDH será uma secção par deste fibrado. Uma vez que  $\mathcal{C}_{ET}(M)$  sempre existe, a existência do fibrado  $\mathcal{C}_{ET}(M)/\mathcal{R}$  depende da possibilidade de definirmos a relação de equivalência  $\mathcal{R}$  globalmente, ou seja, para todo  $x \in M$ .

A relação de equivalência  $\mathcal{R}$  foi definida como  $\psi \sim \psi' \iff \psi_{\Sigma'} = \psi_{\Sigma}\tilde{R}$  para  $\Sigma \sim \Sigma'$ , sendo esta última relação de equivalência definida por  $\Sigma \sim \Sigma' \iff \gamma'_a = R\gamma_a\tilde{R}$  ( $R \in \text{Spin}_+(1,3)$ ). Ora, uma vez que  $\psi_{\Sigma}$  e  $\psi_{\Sigma'}$  são diferentes representantes de  $\psi$ , e por isso  $\psi_{\Sigma}, \psi_{\Sigma'} \in \mathbf{R}_{1,3}^+$ , assim como  $R$ , segue que podemos definir a relação de equivalência  $\psi_{\Sigma} \sim \psi_{\Sigma'}$  globalmente desde que a relação de equivalência  $\Sigma \sim \Sigma'$  possa ser definida globalmente. Por outro lado, para definirmos  $\Sigma \sim \Sigma'$  globalmente, é preciso que as bases ortonormais (tetradas)  $\{\gamma_a\}$  e  $\{\gamma'_a\}$  estejam definidas globalmente. Isso, por sua vez, implica que o fibrado principal dos referenciais ortonormais  $P_{\text{SO}_+(1,3)}$  deve possuir uma secção global.<sup>3</sup> Note que esta afirmação decorre apenas de definições, sendo, portanto, uma condição necessária para a existência de CSDH. É óbvio, seguindo o raciocínio contrário, que é também uma condição suficiente. Diremos que a variedade espaço-tempo  $M$  admite uma estrutura spinorial se for possível definir um CSDH para todo  $x \in M$ . Segue, portanto, o seguinte teorema:

<sup>2</sup>Sempre que não houver risco de confusão iremos nos referir a  $\psi_{\Sigma}$  apenas como SDH, assim como omitiremos sempre que possível a referência à base ortonormal, ou seja,  $\psi\gamma_a\tilde{\psi}$  deve ser entendido como  $\psi_{\Sigma}\gamma_a\tilde{\psi}_{\Sigma}$ .

<sup>3</sup>Uma afirmação equivalente a esta é que a variedade espaço-tempo  $M$  é paralelizável. Recordemos que uma variedade  $M$  de dimensão  $n$  é paralelizável se existem campos vetoriais  $C^\infty$   $X_1, \dots, X_n$  definidos para todo  $x \in M$  tal que  $\{X_1(x), \dots, X_n(x)\}$  é uma base para  $T_x M$  (Bishop and Goldberg 1980).

*Teorema:* Seja  $M$  a variedade espaço-tempo. Então a condição necessária e suficiente para que  $M$  admita uma estrutura spinorial DH é que o fibrado principal dos referenciais ortonormais  $P_{\text{SO}_+(1,3)}$  possua uma secção global.

Esse resultado, aliás, é tão trivial que sequer merece ser chamado de teorema. Esse, entretanto, é o famoso teorema de Geroch (1968) acerca da existência de estruturas spinoriais em variedades espaço-tempo. Existe, porém, uma diferença: a estrutura spinorial à qual se refere o teorema de Geroch é uma estrutura spinorial covariante (veja adiante); mas, veremos na próxima seção que o SDH e o usual spinor de Dirac são equivalentes (contém a mesma informação), de modo que esta diferença é apenas aparente. A prova original de Geroch (1968) usa todo um maquinário de conceitos topológicos, tornando-a desnecessariamente complicada. Uma outra prova, já do ponto de vista algébrico, e mais simples que a de Geroch é feita por Rodrigues e Figueiredo (1990); mesmo esta, entretanto, não é tão simples como a nossa.

Desse modo, dado um campo global de tetradas  $\gamma_a : x \mapsto \gamma_a(x)$  podemos definir um CSDH exigindo que  $\psi_\Sigma(x)\gamma_a(x)\tilde{\psi}_\Sigma(x) = \psi_{\Sigma'}(x)\gamma'_a(x)\tilde{\psi}_{\Sigma'}(x)$ , etc., como discutido na seção anterior. Segue, portanto:

*Definição:* Um CSDH é uma secção par do fibrado  $\mathcal{C}_{ET}(M)/\mathcal{R} = \mathcal{C}_{ET}^{spin}(M)$  – chamado fibrado Spin-Clifford do espaço-tempo – ou seja, uma secção do fibrado  $\mathcal{C}_{ET}^+(\mathcal{M})/\mathcal{R} = \mathcal{C}_{ET}^{+spin}(\mathcal{M})$ .

Em função da relação de equivalência  $\mathcal{R}$ , a lei de transformação ativa de  $\psi$  é  $\psi \mapsto R\psi$ , como vimos. Segue que a ação do grupo  $\text{Spin}_+(1,3)$  na fibra típica  $\mathbf{R}_{1,3}$  do fibrado  $\mathcal{C}_{ET}^{spin}(M)$  deve se fazer através da multiplicação pela esquerda, ou seja, dado  $U \in \text{Spin}_+(1,3)$  e  $X \in \mathbf{R}_{1,3}$ , e como  $\mathbf{R}_{1,3}$  pode ser vista como um módulo sobre ela mesma, então definimos  $l_U \in \text{End}(\mathbf{R}_{1,3})$  por  $l_U(X) = UX, \forall X \in \mathbf{R}_{1,3}$ . Temos assim uma representação  $l : \text{Spin}_+(1,3) \rightarrow \text{End}(\mathbf{R}_{1,3})$ ,  $U \mapsto l_U$ . Logo, podemos escrever  $\mathcal{C}_{ET}^{spin}(M)$  como o fibrado associado

$$\mathcal{C}_{ET}^{spin}(M) = P_{\text{Spin}_+(1,3)} \times_l \mathbf{R}_{1,3}. \quad (3.21)$$

Note que este é um fibrado associado ao fibrado principal  $P_{\text{Spin}_+(1,3)}$ , e não ao fibrado principal  $P_{\text{SO}_+(1,3)}$  como no caso de  $\mathcal{C}_{ET}(M) = P_{\text{SO}_+(1,3)} \times_{\text{Ad}'} \mathbf{R}_{1,3}$ . Para vermos a diferença entre estes fibrados, lembremos primeiro que para definirmos um CSDH é preciso que  $P_{\text{SO}_+(1,3)}$  admita uma secção global. Nesse caso podemos definir uma estrutura spinorial covariante (Choquet-Bruhat et al. 1982, Rodrigues e Figueiredo 1990). Uma estrutura spinorial covariante para  $P_{\text{SO}_+(1,3)}$  consiste de um fibrado principal  $P_{\text{Spin}_+(1,3)}$  e de uma aplicação  $\rho : P_{\text{Spin}_+(1,3)} \rightarrow P_{\text{SO}_+(1,3)}$  satisfazendo, para  $\pi_s : P_{\text{Spin}_+(1,3)} \rightarrow M, \pi : P_{\text{SO}_+(1,3)} \rightarrow M$ , as seguintes condições: (i)  $\pi(\rho(p)) = \pi_s(p), \forall p \in P_{\text{Spin}_+(1,3)}$ ; (ii)  $\rho(pu) = \rho(p)\varsigma(u), \forall p \in P_{\text{Spin}_+(1,3)}$  e  $\varsigma : \text{Spin}_+(1,3) \rightarrow \text{SO}_+(1,3)$  é o recobrimento duplo de  $\text{SO}_+(1,3)$ . Se essa estrutura spinorial existe, então  $P_{\text{SO}_+(1,3)} \times_{\text{Ad}'} \mathbf{R}_{1,3} = P_{\text{Spin}_+(1,3)} \times_{\text{Ad}} \mathbf{R}_{1,3}$ , de modo que

$$\mathcal{C}_{ET}(M) = P_{\text{Spin}_+(1,3)} \times_{\text{Ad}} \mathbf{R}_{1,3}. \quad (3.22)$$

Vamos agora definir a derivada covariante de um CSDH  $\psi$  na direção  $u$  no ponto  $x_0$ . Como  $\mathcal{C}_{ET}^{spin}(M)$  é um fibrado associado a um fibrado principal, podemos repetir toda a construção feita na seção 1.3. Definimos

$$(\nabla_u^S \psi)(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi_{\parallel}(x(t)) - \psi(x_0)}{t}, \quad (3.23)$$

onde  $\psi : x \mapsto \psi(x)$  é um CSDH e  $\psi_{||}(x(t))$  é o SDH  $\psi(x(t))$  transportado paralelamente ao longo de uma curva  $C : t \rightarrow x = x(t)$  do ponto  $x(t)$  até o ponto  $x_0$ . Se  $\psi_0$  e  $\psi_{t,||}$  são os representantes de  $\psi(x_0)$  e  $\psi_{||}(x(t))$ , respectivamente, na fibra típica  $\mathbf{R}_{1,3}$ , então da definição de transporte paralelo temos  $\psi_{t,||} = \rho(g(0)g^{-1}(t))\psi_t$ , onde  $\psi_t$  é o representante de  $\psi(x(t))$  e  $g(0)$  e  $g(t)$  são elementos de  $G = \text{Spin}_+(1, 3)$  que são os representantes de  $p_0 \in G_{x_0}$  e  $p_{t,||} \in G_{x(t)}$  transportado paralelamente ao longo de  $C$ , sendo  $G_x$  a fibra sobre  $x$  em  $P_{\text{Spin}_+(1,3)}$ , e  $\rho$  é a representação de  $\text{Spin}_+(1, 3)$  em  $\mathbf{R}_{1,3}$ , e para  $\mathcal{C}_{ET}^{spin}(M)$  temos  $\rho = l$ . Tomando  $g(0) = 1$  por simplicidade, temos  $\psi_{t,||} = \rho(g^{-1}(t))\psi_t = l(g^{-1}(t))\psi_t = g^{-1}(t)\psi_t$ , e

$$(\nabla_u^S \psi)(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g^{-1}\psi_t - \psi_0}{t}. \quad (3.24)$$

Escrevendo, como no caso em que consideramos  $\mathcal{C}_{ET}(M)$ ,  $g(t) = g(0) + tg'(0) + \dots = 1 - \frac{1}{2}t\omega + \dots$ , onde usamos  $g(0) = 1$  e definimos  $\omega = -2g'(t)g^{-1}(t)|_{t=0}$ , obtemos

$$\begin{aligned} (\nabla_u^S \psi)(x_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{(1 + \frac{1}{2}t\omega + \dots)\psi_t - \psi_0}{t} \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{\psi_t - \psi_0}{t} \right) + \frac{1}{2}\omega\psi_t + \dots \right] = \\ &= \left( \frac{d\psi_t}{dt} + \frac{1}{2}\omega\psi_t \right)_{t=0}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Consideremos agora uma base  $\{\gamma_\mu\}$  de  $T_{x_0}(M) \simeq \mathbf{R}_{1,3}$ , de modo que  $u = u^\mu \gamma_\mu$ . Uma vez que  $\nabla_u^S \psi = u^\mu \nabla_\mu^S \psi$ , segue da expressão acima que

$$(\nabla_\mu^S \psi)(x_0) = \partial_\mu \psi + \frac{1}{2}\omega_\mu \psi. \quad (3.26)$$

Novamente observamos que, se trabalharmos com uma base que não seja coordenada, devemos substituir a derivada parcial na expressão acima pela derivada de Pfaff. Observamos também que, para simplificar a notação, passaremos a escrever as expressões acima como

$$(\nabla_\mu \psi)(x_0) = \partial_\mu \psi + \frac{1}{2}\omega_\mu \psi. \quad (3.27)$$

Para  $\tilde{\psi}$ , uma vez que sua transformação ativa escreve-se  $\tilde{\psi} \mapsto \tilde{\psi}\tilde{R}$ , temos  $\tilde{\psi} \in \tilde{\mathcal{C}}_{ET}^{spin}(M) = P_{\text{Spin}_+(1,3)} \times_r \mathbf{R}_{1,3}$ , onde  $r$  é a ação à direita de  $\text{Spin}_+(1, 3)$  (o que é possível uma vez que  $\mathbf{R}_{1,3}$  é modulo sobre si mesma tanto por multiplicações à esquerda como pela direita). Segue daí que

$$\nabla_\mu \tilde{\psi} = \partial_\mu \tilde{\psi} - \frac{1}{2}\tilde{\psi}\omega. \quad (3.28)$$

Note que

$$\nabla_\mu \tilde{\psi} = (\nabla_\mu \psi)\tilde{\cdot}. \quad (3.29)$$

Nesse ponto é importante que façamos uma observação. Dado um CSDH  $\psi(x)$  temos o seu representante  $\psi_\Sigma(x)$ , que é um elemento de  $\mathcal{C}_{ET}(M)$ . Daí,

$$\nabla_\mu \psi_\Sigma = \partial_\mu \psi_\Sigma + \frac{1}{2}[\omega_\mu, \psi_\Sigma], \quad (3.30)$$

que não é, entretanto, a expressão para a derivada covariante de  $\psi$ . O representante da derivada covariante de  $\psi$  é

$$(\nabla_\mu \psi)_\Sigma = \partial_\mu \psi_\Sigma + \frac{1}{2} \omega_\mu \psi_\Sigma, \quad (3.31)$$

e, obviamente,

$$(\nabla_\mu \psi)_\Sigma \neq \nabla_\mu (\psi_\Sigma). \quad (3.32)$$

Por outro lado, uma vez que não queremos sobrecarregar a notação, escreveremos simplesmente  $(\nabla_\mu \psi)_\Sigma = \nabla_\mu \psi_\Sigma$ , mas entenderemos que a expressão a ser usada é (3.31) e não (3.30).

Por fim, no próximo capítulo precisaremos considerar o conjunto  $\Sigma = \{\Sigma\}/\mathcal{R}_g$ , que é o conjunto das bases ortonormais (tetradas) geometricamente equivalentes. Dado um campo de tetradas  $\gamma_a : x \mapsto \gamma_a(x)$  ( $a = 0, 1, 2, 3$ ) podemos definir um campo de tetradas geometricamente equivalentes  $\Sigma : x \mapsto \Sigma(x) = \{\Sigma(x)\}/\mathcal{R}_g$ . Dado um campo vetorial  $\gamma_a$ , podemos construir um conjunto de campos vetoriais geometricamente equivalentes  $\gamma_a$ , com  $\gamma_a \in \Sigma$ . É claro que o campo  $\gamma_a : x \mapsto \gamma_a(x)$  é constante, pois os vetores  $\gamma_a(x)$  geometricamente equivalentes para  $x \in M$  são projetados no mesmo elemento através de  $\mathcal{R}_g$ . Podemos daí identificar  $\gamma_a$  com uma secção constante do fibrado trivial  $M \times \mathbf{R}_{1,3}$ . Se essa secção for denotada por<sup>4</sup>  $\gamma_a$ , então em  $M \times \mathbf{R}_{1,3}$  temos  $\nabla_\mu \gamma_a = \partial_\mu \gamma_a = 0$ , pois  $\gamma_a(x)$  é constante. Definindo

$$\nabla_\mu \gamma_a = \nabla_\mu \gamma_a \quad (3.33)$$

segue que

$$\nabla_\mu \gamma_a = 0. \quad (3.34)$$

É claro que nestas seções não construímos uma teoria completa do spinor DH do ponto de vista matemático. Esta, porém, também não era a nossa intenção. O que temos em mente é desenvolvermos uma quantidade suficiente de material para utilizarmos posteriormente. Estudos mais detalhados podem ser encontrados em Rodrigues et al.(1993).

### 3.3 A Relação entre Spinores de Dirac-Hestenes e Spinores Algébricos e Covariantes

Já adiantamos na seção anterior, quando discutimos o teorema de Geroch, que o SDH e o spinor covariante de Dirac (SCD) contém a mesma informação, sendo, portanto, equivalentes. Nessa seção daremos uma breve justificativa dessa afirmação.

Recordemos que um SCD  $|\Psi\rangle$  é um elemento de  $\mathcal{C}^4$ , ou seja,

$$\mathcal{C}^4 \ni |\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\beta_1 \\ \alpha_2 + i\beta_2 \\ \alpha_3 + i\beta_3 \\ \alpha_4 + i\beta_4 \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

onde  $i = \sqrt{-1}$ .

---

<sup>4</sup>Note que usamos o mesmo símbolo para denotar um campo vetorial  $\gamma_a$  como secção de  $\mathcal{C}_{ET}(M)$  e para denotar a secção constante  $\gamma_a$  de  $M \times \mathbf{R}_{1,3}$ , o que não deve causar confusão. Essa notação é de fato sugestiva, como veremos depois.

Por outro lado, podemos tomar a seguinte matriz:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 & 0 & 0 & 0 \\ \Psi_2 & 0 & 0 & 0 \\ \Psi_3 & 0 & 0 & 0 \\ \Psi_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

como uma expressão equivalente para o SCD uma vez que

$$|\Psi\rangle \simeq \Psi. \quad (3.37)$$

Uma vez que o conjunto de matrizes da forma (3.36) é um ideal à esquerda de uma álgebra de matrizes, e uma vez que toda álgebra de Clifford possui uma representação em termos de uma álgebra de matrizes, então podemos definir um spinor como sendo um elemento de um ideal lateral de uma particular álgebra de Clifford. Esse ideal pode ser minimal ou não, mas para o caso que estudaremos este ideal é minimal.<sup>5</sup> Definiremos um spinor algébrico como um elemento de um ideal lateral de uma dada álgebra de Clifford.

Nós vimos que um ideal à esquerda minimal  $I_{p,q}$  é da forma  $I_{p,q} = \mathbf{R}_{p,q}e_{p,q}$ , onde  $e_{p,q}$  é um idempotente primitivo de  $\mathbf{R}_{p,q}$ . Considere a álgebra de Dirac  $\mathbf{R}_{4,1} \simeq \mathcal{C}(4)$  discutida na seção 1.2.3. Vimos que o idempotente  $f = \frac{1}{4}(1 + E_{04})(1 - iE_{12}) = \frac{1}{4}(1 + \gamma_0)(1 + i\gamma_{12})$  é primitivo em  $\mathbf{R}_{4,1} \simeq \mathcal{C} \otimes \mathbf{R}_{1,3}$ , onde  $i = E_{01234}$  faz o papel da unidade imaginária. Mostramos naquela ocasião que  $\Psi \in I_{4,1} = \mathbf{R}_{4,1}f \simeq (\mathcal{C} \otimes \mathbf{R}_{1,3})f$  é da forma

$$I_{4,1} \ni \Psi = fC_1 + \gamma_{31}fC_2 + \gamma_{30}fC_3 + \gamma_{10}fC_4 \simeq \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & 0 & 0 & 0 \\ C_3 & 0 & 0 & 0 \\ C_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

onde  $C_1, C_2, C_3, C_4$  são dados, após usarmos a eq.(1.90) em (1.96), e por sua vez em (1.95), por:

$$\begin{aligned} C_1 &= (A - A_3 + A_{04} + A_{034}) + i(A_{12} - A_{123} + A_{0124} + A_{01234}), \\ C_2 &= (-A_1 + A_{13} + A_{014} + A_{0134}) + i(-A_2 + A_{23} + A_{024} + A_{0234}), \\ C_3 &= (-A_0 + A_4 + A_{03} + A_{34}) + i(-A_{012} + A_{124} + A_{1234} + A_{0123}), \\ C_4 &= (A_{01} + A_{14} - A_{013} + A_{134}) + i(A_{02} + A_{24} - A_{023} + A_{234}). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Da expressão acima vemos que os ideais  $I_{4,1} = \mathbf{R}_{4,1}f$  e  $I_{4,1}^+ = \mathbf{R}_{4,1}^+f$  são isomorfos; de fato, para  $\varphi \in I_{4,1}^+$  temos

$$I_{4,1}^+ \ni \varphi = fD_1 + \gamma_{31}fD_2 + \gamma_{30}fD_3 + \gamma_{10}fD_4 \simeq \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 & 0 \\ D_2 & 0 & 0 & 0 \\ D_3 & 0 & 0 & 0 \\ D_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

---

<sup>5</sup>Em Figueiredo et al. (1990) mostra-se que a representação dos spinores covariantes de Dirac e Weyl em  $\mathbf{R}_{3,1} \simeq \mathbf{R}(4)$ , que é a álgebra de Majorana, se faz em termos de ideais laterais não-minimais. Os elementos de um ideal lateral minimal de  $\mathbf{R}_{3,1}$  são os spinores de Majorana.

onde

$$\begin{aligned}
D_1 &= (A + A_{04}) + i(A_{12} + A_{0124}), \\
D_2 &= (A_{13} + A_{0134}) + i(A_{23} + A_{0234}), \\
D_3 &= (A_{03} + A_{34}) + i(A_{1234} + A_{0123}), \\
D_4 &= (A_{01} + A_{14}) + i(A_{02} + A_{24}),
\end{aligned} \tag{3.41}$$

ou seja, estes  $D$ 's consistem dos elementos pares dos  $C$ 's acima definidos.

O spinor algébrico de Dirac (SAD)  $\Psi$  é definido como um elemento do ideal à esquerda minimal  $I_{4,1} = \mathbf{R}_{4,1}f \simeq (\mathcal{C} \otimes \mathbf{R}_{1,3})f$  da álgebra de Dirac  $\mathbf{R}_{4,1}$ ; mas, em função do que vimos acima, ou seja, do isomorfismo  $I_{4,1} \simeq I_{4,1}^+$ , podemos defini-lo como um elemento do ideal à esquerda minimal  $I_{4,1}^+ = \mathbf{R}_{4,1}^+f$ . Porém, um elemento  $X \in \mathbf{R}_{4,1}^+$  é da forma

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{4,1}^+ \ni X &= A + A_{04}\gamma_0 + A_{14}\gamma_1 + A_{24}\gamma_2 + A_{34}\gamma_3 - A_{01}\gamma_{01} - A_{02}\gamma_{02} - A_{03}\gamma_{03} - A_{12}\gamma_{12} - \\
&- A_{13}\gamma_{13} - A_{23}\gamma_{23} - A_{0124}\gamma_{012} - A_{0134}\gamma_{013} - A_{0234}\gamma_{023} - A_{1234}\gamma_{123} + A_{0123}\gamma_5,
\end{aligned} \tag{3.42}$$

ou seja,

$$\mathbf{R}_{4,1}^+ \simeq \mathbf{R}_{1,3}. \tag{3.43}$$

Em função desse isomorfismo, identificamos, para

$$\mathbf{R}_{1,3} \ni X = a + a_0\gamma_0 + \cdots + a_{123}\gamma_{123} + a_{0123}\gamma_5 \tag{3.44}$$

os termos  $a = A$ ,  $a_0 = A_{04}$ ,  $a_1 = A_{14}$ ,  $\dots$ ,  $a_{123} = -A_{1234}$ ,  $a_{0123} = A_{0123}$ .

Lembrando que  $\gamma_0 f = f$  e  $\gamma_{21} f = if$ , podemos escrever, à partir de (3.40) e (3.44), para  $\phi \in \mathbf{R}_{1,3}f$ :

$$\mathbf{R}_{1,3}f \ni \phi = M_1 f + M_2(\gamma_{31}f) + M_3(\gamma_{30}f) + M_4(\gamma_{10}f) \tag{3.45}$$

onde

$$\begin{aligned}
M_1 &= (a - a_0) + \gamma_{21}(-a_{12} - a_{012}), \\
M_2 &= (-a_{13} - a_{013}) - \gamma_{21}(-a_{23} - a_{023}), \\
M_3 &= (-a_{03} + a_3) + \gamma_{21}(-a_{123} + a_{0123}), \\
M_4 &= (-a_{01} + a_1) - \gamma_{21}(-a_{02} + a_2).
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Daí, concluímos que  $\Psi \simeq \phi$ , de modo que podemos definir um SAD  $\Psi$  como um elemento do ideal  $\mathbf{R}_{1,3}f$ . Note que  $f$  não é um idempotente primitivo de  $\mathbf{R}_{1,3}$  mas sim de  $\mathbf{R}_{4,1}$ . Por sua vez,

$$e = \frac{1}{2}(1 + \gamma_0) \tag{3.47}$$

é um idempotente primitivo de  $\mathbf{R}_{1,3}$ , onde  $f = e\frac{1}{2}(1 + i\gamma_{12})$ .

Podemos notar ainda que

$$\mathbf{R}_{1,3}f \simeq \mathbf{R}_{1,3}^+f. \tag{3.48}$$

De fato, um elemento  $\psi \in \mathbf{R}_{1,3}^+$  é da forma

$$\mathbf{R}_{1,3}^+ \ni \psi = a + a_{01}\gamma_{01} + \cdots + a_{23}\gamma_{23} + a_{0123}\gamma_5, \tag{3.49}$$

de modo que

$$\mathbf{R}_{1,3}^+f \ni \phi = N_1 f + N_2(\gamma_{31}f) + N_3(\gamma_{30}f) + N_4(\gamma_{10}f), \tag{3.50}$$

onde

$$\begin{aligned}
N_1 &= a - \gamma_{21}a_{12}, \\
N_2 &= -a_{13} + \gamma_{21}a_{23}, \\
N_3 &= -a_{03} + \gamma_{21}a_{0123}, \\
N_4 &= -a_{01} + \gamma_{21}a_{02},
\end{aligned} \tag{3.51}$$

ou seja, estes  $N$ 's consistem dos elementos pares dos  $M$ 's definidos acima.

Concluimos, portanto, que um SAD  $\Psi$  pode ser definido como um elemento do ideal à esquerda minimal  $\mathbf{R}_{1,3}^+ f$ . Como  $f = e\frac{1}{2}(1 + i\gamma_{12})$ , temos que

$$\Psi = \Phi \frac{1}{2}(1 + i\gamma_{12}) \tag{3.52}$$

onde

$$\Phi = \psi \frac{1}{2}(1 + \gamma_0), \quad \psi \in \mathbf{R}_{1,3}^+. \tag{3.53}$$

Note que tanto  $\psi$  como  $\Phi$  e  $\Psi$  contém a mesma informação, pois temos os isomorfismos  $\mathbf{R}_{4,1}f \simeq \mathbf{R}_{1,3}f \simeq \mathbf{R}_{1,3}^+ f$ . Lembremos nesse caso que  $\mathbf{R}_{1,3}^+ \simeq \mathbf{R}_{3,0}$ . Além disso, como  $\mathcal{C}^4 \simeq \mathcal{C}(4)f$ , podemos trabalhar com o SCD  $|\Psi\rangle$  ou com o SAD  $\Psi$  ou com o spinor  $\Phi$ , ou ainda com  $\psi \in \mathbf{R}_{1,3}^+$ . Ora, este  $\psi$  é justamente o representante do SDH na base  $\{\gamma_a\}$  escolhida, e toda a teoria de spinores construída em termos da definição usual (covariante) destes aparece como simples consequência da definição que demos do SDH. Entretanto, embora todos estes objetos sejam equivalentes, temos, digamos, diferenças “operacionais” entre eles; de fato, é muito mais simples trabalharmos com um SDH pois este possui um inverso, enquanto um SCD ou um SAD não possuem, obviamente, inversos. O mais grave, porém, é que toda a informação e significado geométricos contidos no SDH desaparecem quando consideramos o SAD ou o SCD. Resumindo, portanto, temos a seguinte relação entre um SCD  $|\Psi\rangle$  e um SDH  $\psi$ :

$$|\Psi\rangle = \psi \frac{1}{2}(1 + \gamma_0) \frac{1}{2}(1 + i\gamma_{12}). \tag{3.54}$$

Para finalizar, é importante notarmos que, em função de  $if = \gamma_{21}f$ , quem faz o papel de  $i = \sqrt{-1}$  em  $\mathbf{R}_{1,3}$  é o bivector  $\gamma_{21}$ . Essa observação é fundamental para o restante deste trabalho.

## Capítulo 4

# A Teoria de Dirac e a Álgebra do Espaço-Tempo

### 4.1 A Equação de Dirac-Hestenes

Seja  $|\Psi\rangle : x \mapsto |\Psi(x)\rangle$  um campo spinorial de Dirac, onde  $|\Psi(x)\rangle \in \mathcal{C}^4$ ,  $x \in M$ , onde  $M$  é o espaço de Minkowski. A equação de Dirac, na presença de um campo eletromagnético, é:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu |\Psi(x)\rangle = \frac{mc}{\hbar} |\Psi(x)\rangle + \frac{e}{\hbar c} A_\mu(x) \gamma^\mu |\Psi(x)\rangle. \quad (4.1)$$

Nesta equação  $\gamma^\mu$  são as matrizes de Dirac,  $i = \sqrt{-1}$  e  $A_\mu(x)$  são as componentes do potencial eletromagnético. A equação de Dirac pode ser obtida à partir da lagrangeana

$$\begin{aligned} L_{Dirac} &= \frac{i}{2} [\langle \Psi(x) | \gamma^\mu \partial_\mu | \Psi(x) \rangle - \partial_\mu \langle \Psi(x) | \gamma^\mu | \Psi(x) \rangle] - \\ &\quad - \frac{e}{\hbar c} A_\mu(x) \langle \Psi(x) | \gamma^\mu | \Psi(x) \rangle - \frac{mc}{\hbar} \langle \Psi(x) | \Psi(x) \rangle, \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde definimos o spinor adjunto de Dirac por

$$\langle \Psi(x) | = | \Psi(x) \rangle^\dagger = | \Psi(x) \rangle^* \gamma_0, \quad (4.3)$$

onde  $*$  denota conjugação hermitiana.

Nosso objetivo nesta seção é escrever a equação de Dirac em termos da AET. Essa equação será uma equação para o SDH  $\psi(x) \in \mathbf{R}_{1,3}^+$ , onde

$$| \Psi(x) \rangle \simeq \Psi(x) = \psi(x) \frac{1}{2} (1 + \gamma_0) \frac{1}{2} (1 + i\gamma_{12}), \quad (4.4)$$

e  $\Psi(x)$  é a matriz

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x) & 0 & 0 & 0 \\ \Psi_2(x) & 0 & 0 & 0 \\ \Psi_3(x) & 0 & 0 & 0 \\ \Psi_4(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Esperamos com isso obter uma compreensão melhor da teoria de Dirac, uma vez que o uso do SDH possui grandes vantagens sobre o SCD, principalmente no sentido de interpretação geométrica.

Usando os resultados da seção 1.2.3, podemos mostrar usando a representação matricial de  $Z \in \mathbf{R}_{4,1}$  dada pela eq.(1.102) que

$$\text{Tr}Z = 4\langle Z \rangle_0, \quad (4.6)$$

$$Z^* = \gamma_0 \tilde{Z} \gamma_0. \quad (4.7)$$

É importante observarmos que nas equações acima o lado esquerdo refere-se a matrizes  $Z \in \mathcal{C}(4)$ , enquanto o lado direito refere-se a  $Z \in \mathbf{R}_{4,1}$ , que possui a referida matriz como sua representação matricial. Além disso, podemos mostrar que a reversão em  $\mathbf{R}_{4,1}$  corresponde à reversão mais a conjugação complexa em  $\mathcal{C} \otimes \mathbf{R}_{1,3}$ . Segue daí que

$$\begin{aligned} \Psi(x)\Psi^\dagger(x) &= \Psi(x)\Psi^*(x)\gamma_0 = \psi(x)\frac{1}{4}(1 + \gamma_0)(1 + i\gamma_{12})\gamma_0\frac{1}{4}(1 + \gamma_0)(1 + i\gamma_{12})\tilde{\Psi}(x) = \\ &= \psi(x)\frac{1}{4}(1 + \gamma_0)(1 + i\gamma_{12})\tilde{\psi}(x). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Logo:

$$\text{Tr}(\Psi\Psi^\dagger) = \langle \psi(1 + \gamma_0)(1 + i\gamma_{12})\tilde{\psi} \rangle_0 = \langle \psi\tilde{\psi} \rangle_0, \quad (4.9)$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu\Psi\Psi^\dagger) = \langle \gamma^\mu\psi\gamma_0\tilde{\psi} \rangle_0, \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}\left[\frac{i}{2}(\gamma^\mu\partial_\mu\Psi\psi^\dagger - \gamma^\mu\Psi\partial_\mu\Psi^\dagger)\right] &= \left\langle \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu\partial_\mu\psi(1 + \gamma_0)(1 + i\gamma_{12})\tilde{\psi} - \gamma^\mu\psi(1 + \gamma_0)(1 + i\gamma_{12})\partial_\mu\tilde{\psi}\right] \right\rangle_0 = \\ &= \left\langle -\frac{1}{2}\left[\gamma^\mu\partial_\mu\psi\gamma_{012}\tilde{\psi} - \gamma^\mu\psi\gamma_{012}\partial_\mu\tilde{\psi}\right] \right\rangle_0 = -\langle \gamma^\mu\partial_\mu\psi\gamma_{012}\tilde{\psi} \rangle_0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

A lagrangeana  $L_{Dirac}$  (4.2) pode ser escrita como

$$L_{Dirac} = \text{Tr}\left\{\frac{i}{2}\left[\Psi^\dagger(x)\gamma^\mu\partial_\mu\Psi(x) - \partial_\mu\Psi^\dagger(x)\gamma^\mu\Psi(x)\right] - \frac{e}{\hbar c}A_\mu(x)\Psi^\dagger(x)\gamma^\mu\Psi(x) - \frac{mc}{\hbar}\Psi^\dagger(x)\Psi(x)\right\}, \quad (4.12)$$

e em função dos resultados acima, temos

$$\begin{aligned} L_{Dirac} &= \text{Tr}\left\{\frac{i}{2}\left[\gamma^\mu\partial_\mu\Psi(x)\Psi^\dagger(x) - \gamma^\mu\Psi(x)\partial_\mu\Psi^\dagger(x)\right] - \frac{e}{\hbar c}A_\mu(x)\gamma^\mu\Psi(x)\Psi^\dagger(x) - \frac{mc}{\hbar}\Psi(x)\Psi^\dagger(x)\right\} = \\ &= -\langle \gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)\gamma_{012}\tilde{\psi}(x) \rangle_0 - \frac{e}{\hbar c}A_\mu(x)\langle \gamma^\mu\psi(x)\gamma_0\tilde{\psi}(x) \rangle_0 - \frac{mc}{\hbar}\langle \psi(x)\tilde{\psi}(x) \rangle_0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

ou seja,

$$L_{Dirac} = \left\langle \left( \partial\psi(x)\gamma_{21} - \frac{e}{\hbar c}A(x)\psi(x) - \frac{mc}{\hbar}\psi(x)\gamma_0 \right) \gamma_0\tilde{\psi}(x) \right\rangle_0, \quad (4.14)$$

onde  $\partial = \gamma^\mu\partial_\mu$ ,  $A(x) = A_\mu\gamma^\mu$ . Note que nesta expressão os  $\gamma^\mu$  são interpretados como vetores do fibrado tangente  $TM$ , enquanto em (4.2) ou (4.12) os  $\gamma^\mu$  são matrizes. Desse modo, através da expressão (4.14) eliminamos qualquer referência a uma particular representação dos  $\gamma^\mu$ ; todas as quantidades algébricas presentes na eq.(4.14) possuem agora um significado geométrico bem definido, antes ocultado nas eq.(4.2,4.12) em função do uso de uma representação matricial.

Observamos também que o SDH  $\psi(x)$  na eq.(4.14) é justamente  $\psi_\Sigma(x)$ , onde  $\Sigma = \{\gamma^\mu\}$ , ou seja, é o representante do SDH na base  $\Sigma$ . Logo  $\psi(x) \in \mathcal{C}_{ET}(M)$ , e o formalismo lagrangeano desenvolvido na seção anterior aplica-se sem ressalvas à lagrangeana  $L_{Dirac}$ .

Usando  $L_{Dirac}$  dada pela eq.(4.14) temos

$$\partial_\psi L_{Dirac} = -\frac{e}{\hbar c} \gamma_0 \tilde{\psi}(x) A(x) - \frac{mc}{\hbar} \tilde{\psi}(x), \quad \partial_{\partial\psi} L_{Dirac} = \gamma_{210} \tilde{\psi}(x), \quad (4.15)$$

e a equação de Euler-Lagrange

$$\partial_\psi L_{Dirac} - (\partial_{\partial\psi} L_{Dirac}) \overleftarrow{\partial} = 0 \quad (4.16)$$

fornece

$$-\frac{e}{\hbar c} \gamma_0 \tilde{\psi}(x) A(x) - \frac{mc}{\hbar} \tilde{\psi}(x) - \gamma_{210} \tilde{\psi}(x) \overleftarrow{\partial} = 0, \quad (4.17)$$

ou, tomando o reverso desta equação e multiplicando-a pela direita por  $\gamma_0$ :

$$\partial\psi(x)\gamma_{21} = \frac{mc}{\hbar} \psi(x)\gamma_0 + \frac{e}{\hbar c} A(x)\psi(x). \quad (4.18)$$

Esta é a equação de Dirac em termos da AET, tendo sido obtida originalmente por Hestenes (1967), daí denominá-la equação DH (EDH). Note que, uma vez que  $\Psi(x) = \psi(x)f$ , onde  $f = \frac{1}{2}(1 + \gamma_0)\frac{1}{2}(1 + i\gamma_{12})$ , e usando  $\gamma_0 f = f$  e  $if = \gamma_{21}f$ , podemos obter a EDH diretamente da equação de Dirac para  $\Psi(x)$  “fatorando” o idempotente  $f$  – esse procedimento, é claro, só funciona pois a equação de Dirac é linear. Segue, obviamente, que se multiplicarmos a EDH (4.18) pelo idempotente  $f$  obtemos novamente a equação de Dirac. Note, comparando as equações (4.1) e (4.18), que a quantidade geométrica que faz o papel de  $i = \sqrt{-1}$  é o bivector  $\gamma_{21}$ , observação esta, aliás, já feita no capítulo anterior.

Em função do que discutimos no capítulo anterior, devemos entender a EDH como uma equação para o representante  $\psi_\Sigma(x)$  do SDH  $\psi(x)$ , ou seja,

$$\partial\psi_\Sigma(x)\gamma_{21} = \frac{mc}{\hbar} \psi_\Sigma(x)\gamma_0 + \frac{e}{\hbar c} A(x)\psi_\Sigma(x). \quad (4.19)$$

Para uma outra base  $\Sigma' = \{\gamma'_\mu\}$ , onde  $\gamma'_\mu = R\gamma_\mu\tilde{R}$ , segue de  $\partial' = \partial$ ,  $R\tilde{R} = \tilde{R}R = 1$  e multiplicando a eq.(4.19) pela direita por  $\tilde{R}$ :

$$\partial\psi_\Sigma(x)\tilde{R}R\gamma_{21}\tilde{R} = \frac{mc}{\hbar} \psi_\Sigma(x)\tilde{R}R\gamma_0\tilde{R} + \frac{e}{\hbar c} A(x)\psi_\Sigma(x)\tilde{R}, \quad (4.20)$$

ou seja,

$$\partial\psi_{\Sigma'}(x)\gamma'_{21} = \frac{mc}{\hbar} \psi_{\Sigma'}(x)\gamma'_0 + \frac{e}{\hbar c} A(x)\psi_{\Sigma'}(x), \quad (4.21)$$

o que demonstra a covariância da EDH.<sup>1</sup>

Finalmente, exigindo que a EDH seja invariante perante transformações de gauge eletromagnéticas

$$A(x) \mapsto A'(x) = A(x) + \partial\varphi(x) \quad (4.22)$$

devemos ter

$$\psi(x) \mapsto \psi'(x) = \psi(x)e^{\gamma_{12}e\varphi(x)/\hbar c}. \quad (4.23)$$

<sup>1</sup>A teoria que apresentamos do SDH permite que possamos concluir que a EDH é de fato covariante, respondendo assim às críticas de Parra (1992) acerca da covariância da EDH.

## 4.2 Alguns Aspectos da Teoria de Dirac

Vamos iniciar este estudo da teoria de Dirac usando AET considerando os seus bilineares covariantes. É bem sabido que dentro da teoria de Dirac temos 16 formas bilineares covariantes, a saber<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}\sigma &= \langle \Psi | \Psi \rangle, \quad J_\mu = \langle \Psi | \gamma_\mu | \Psi \rangle, \\ \Sigma_{\mu\nu} &= -\Sigma_{\nu\mu} = \langle \Psi | i\gamma_{\mu\nu} | \Psi \rangle, \\ K_\mu &= \langle \Psi | i\gamma_5 \gamma_\mu | \Psi \rangle, \quad \omega = -\langle \Psi | \gamma_5 | \Psi \rangle,\end{aligned}\tag{4.24}$$

onde interpreta-se  $J_\mu$  como as componentes do vetor densidade de corrente de probabilidade,  $j_\mu = eJ_\mu$  como as componentes do vetor densidade de corrente elétrica,  $\frac{\hbar}{2m}\Sigma_{\mu\nu}$  como as componentes do tensor anti-simétrico densidade de magnetização e  $\frac{\hbar}{2}K_\mu$  como as componentes do vetor densidade de spin. Se, ao invés do SCD  $|\Psi\rangle$  utilizarmos o SAD  $\Psi$ , estas formas bilineares escrevem-se

$$\begin{aligned}\sigma &= \text{Tr}(\Psi^\dagger \Psi), \quad J_\mu = \text{Tr}(\Psi^\dagger \gamma_\mu \Psi), \\ \Sigma_{\mu\nu} &= -\Sigma_{\nu\mu} = \text{Tr}(\Psi^\dagger i\gamma_{\mu\nu} \Psi), \\ K_\mu &= \text{Tr}(\Psi^\dagger i\gamma_5 \gamma_\mu \Psi), \quad \omega = -\text{Tr}(\Psi^\dagger \gamma_5 \Psi).\end{aligned}\tag{4.25}$$

Agora, utilizando o mesmo procedimento da seção anterior, utilizado para escrevermos  $L_{Dirac}$  em termos da AET, podemos escrever a expressão destas formas bilineares em termos da AET. Por exemplo:

$$J_\mu = \text{Tr}(\gamma_\mu \Psi \Psi^\dagger) = \langle \gamma_\mu \psi \gamma_0 \tilde{\psi} \rangle_0 = \gamma_\mu \cdot (\psi \gamma_0 \tilde{\psi}),\tag{4.26}$$

ou seja, o vetor densidade de probabilidade  $J = J_\mu \gamma^\mu$  é dado por

$$J = \psi \gamma_0 \tilde{\psi}.\tag{4.27}$$

Do mesmo modo, obtemos para  $\Sigma = \frac{1}{2}\Sigma_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}$  e  $K = K_\mu\gamma^\mu$ :

$$\Sigma = \psi \gamma_{21} \tilde{\psi},\tag{4.28}$$

$$K = \psi \gamma_3 \tilde{\psi}.\tag{4.29}$$

Supondo  $\psi$  não-singular, podemos expressá-lo na forma canônica

$$\psi = \sqrt{\rho} e^{\gamma_5 \beta/2} R,\tag{4.30}$$

de onde obtemos

$$J = \rho e_0,\tag{4.31}$$

$$\Sigma = \rho e^{\gamma_5 \beta} e_{21},\tag{4.32}$$

$$K = \rho e_3,\tag{4.33}$$

---

<sup>2</sup>Note que definimos  $\gamma_5 = \gamma_{0123}$ , enquanto alguns textos de teoria quântica definem  $\gamma_5 = i\gamma_{0123}$ .

onde

$$e_\mu = R\gamma_\mu\tilde{R}. \quad (4.34)$$

Além disso,

$$\sigma = \rho \cos \beta, \quad (4.35)$$

$$\omega = \rho \sin \beta. \quad (4.36)$$

Note que apenas um bivetor sente o efeito da transformação de dualidade  $e^{\gamma_5\beta}$ . Se definirmos o bivetor de spin  $S$ :

$$S = \frac{\hbar}{2}e_{21} = \frac{\hbar}{2}R\gamma_{21}\tilde{R} \quad (4.37)$$

e tomarmos

$$v = e_0 \quad (4.38)$$

$$s = \frac{\hbar}{2}e_3 \quad (4.39)$$

onde  $s$  é o vetor de spin, segue que

$$S = \gamma_5(s \wedge v) = \gamma_5sv. \quad (4.40)$$

As formas bilineares covariantes não são todas independentes, e satisfazem certas equações quadráticas chamadas identidades de Fierz. No caso de um SDH não-singular, as identidades de Fierz são<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} J^2 &= \sigma^2 + \omega^2, & K^2 &= -J^2, \\ J \cdot K &= 0, & J \wedge K &= -(\omega + \gamma_5\sigma)\Sigma. \end{aligned} \quad (4.41)$$

É possível, à partir dos bilineares covariantes, reconstruímos o spinor original (Crawford 1985). Em termos do SDH temos, à parte de um fator de fase  $e^{\gamma_{21}\phi}$ , a expressão (Doran et al. 1993)

$$\psi = \sqrt{\rho}e^{\gamma_5\beta/2}Q(Q\tilde{Q})^{-1/2}, \quad (4.42)$$

onde

$$Q = \frac{1}{4}(\sigma + \gamma_5\omega + J\gamma_0 + \Sigma\gamma_{12} + K\gamma_3). \quad (4.43)$$

É possível, à partir de uma análise da EDH, deduzirmos várias propriedades relacionadas à teoria de Dirac (Hestenes 1973). Em particular, podemos deduzir a conservação da densidade de corrente de probabilidade  $J = \psi\gamma_0\tilde{\psi}$ , ou seja,  $\partial \cdot J = 0$ . É mais interessante, porém, deduzirmos estas leis de transformação à partir do teorema de Noether. Vejamos alguns exemplos.

Consideremos a seguinte transformação:

$$\psi(x) \mapsto \psi'(x) = \psi(x)e^{\alpha M(x)}, \quad (4.44)$$

onde  $M(x)$  é um multivetor arbitrário. Exemplos destas transformações são a transformação de gauge

$$\psi(x) \mapsto \psi'(x) = \psi(x)e^{\gamma_{12}e\varphi(x)/\hbar c} \quad (4.45)$$

---

<sup>3</sup>No caso de um SDH singular  $\psi\tilde{\psi} = \sigma + \gamma_5\omega = 0$ , ou seja,  $\sigma = 0$ ,  $\omega = 0$ , estas identidades devem ser modificadas. Veja Crawford (1985) e Lounesto (1993).

e a transformação de dualidade

$$\psi(x) \mapsto \psi'(x) = \psi(x)e^{\gamma_5 \alpha} \quad (4.46)$$

No caso de uma transformação de gauge temos invariância de  $L_{Dirac}$ , de modo que a corrente

$$J = \langle (\partial_\epsilon \psi') (\partial_{\partial \psi'} L') \rangle_1 |_{\epsilon=0} \quad (4.47)$$

é conservada. Uma vez que

$$\partial_{(e\varphi/\hbar c)} \psi' = \psi' \gamma_{12}, \quad \partial_{\partial \psi'} L'_{Dirac} = \gamma_{210} \tilde{\psi}', \quad (4.48)$$

então, tomando  $\epsilon = 0$ , temos

$$\partial \cdot J = 0, \quad J = \psi(x) \gamma_0 \tilde{\psi}(x), \quad (4.49)$$

ou seja, a conservação da densidade de corrente de probabilidade está associada à invariância de  $L_{Dirac}$  em relação às transformações de gauge eletromagnéticas.

Por outro lado,  $L_{Dirac}$  não é invariante por transformações de dualidade. Temos

$$\partial_\alpha L'_{Dirac} = \left\langle -\frac{2mc}{\hbar} \gamma_5 e^{2\gamma_5 \alpha} \psi \tilde{\psi} \right\rangle_0 \quad (4.50)$$

e usando (2.60) mais  $\psi \tilde{\psi} = \rho e^{\gamma_5 \beta}$  obtemos

$$-mc\rho \sin \beta = \partial \cdot \left( \frac{\hbar}{2} \psi \gamma_3 \tilde{\psi} \right) = \partial \cdot (\rho s). \quad (4.51)$$

Note que  $\partial \cdot (\rho s) = 0$  quando  $\beta = 0$  ou  $\beta = \pi$ , que, conforme veremos adiante, correspondem aos casos de soluções de energia positiva e energia negativa, respectivamente, da EDH livre ( $A(x) = 0$ ).

Consideremos agora transformações espaço-temporais. Para uma translação

$$x \mapsto x' = x + \alpha n \quad (4.52)$$

e tomando

$$\psi'(x) = \psi(x'), \quad (4.53)$$

obtemos, usando (2.70),

$$n \cdot \partial L = \partial \cdot \langle n \cdot \partial \psi \partial_{\partial \psi} L \rangle_1. \quad (4.54)$$

No caso de  $L = L_{Dirac}$  temos para  $\psi$  satisfazendo a EDH que  $L_{Dirac} = 0$ , de modo que, após usarmos  $\partial_{\partial \psi} L_{Dirac} = \gamma_{210} \psi$ , obtemos

$$\partial \cdot T^{ad}(n) = 0 \quad (4.55)$$

onde

$$T^{ad}(n) = \langle n \cdot \partial \psi(x) \gamma_{210} \tilde{\psi}(x) \rangle_1. \quad (4.56)$$

Note que definimos esta função como a adjunta de uma função  $T(n)$ , no caso

$$T(n) = \langle \partial\psi(x)\gamma_{210}\tilde{\psi}(x)n \rangle_1 \quad (4.57)$$

onde usamos (??). Escrevendo  $n = n^\mu\gamma_\mu$  temos  $T(n) = n^\mu T(\gamma_\mu) = n^\mu T_\mu$ , onde

$$T_\mu = \langle \partial\psi(x)\gamma_{210}\tilde{\psi}(x)\gamma_\mu \rangle_1, \quad (4.58)$$

ou ainda

$$T_\mu^{\text{ad}} = \langle \partial_\mu\psi(x)\gamma_{210}\tilde{\psi}(x) \rangle_1. \quad (4.59)$$

Temos nesse caso  $T_\mu = T_{\mu\nu}\gamma^\nu$ , ou ainda  $T_\mu^{\text{ad}} = T_{\nu\mu}\gamma^\nu$ , onde

$$T_{\mu\nu} = \langle \partial_\mu\psi(x)\gamma_{210}\tilde{\psi}(x)\gamma_\nu \rangle_0. \quad (4.60)$$

Na forma matricial podemos escrever (2.73) como

$$T_{\mu\nu} = \frac{i}{2} \left[ \Psi^\dagger(x)\gamma_\nu\partial_\mu\Psi(x) - \partial_\mu\Psi^\dagger(x)\gamma_\nu\Psi(x) \right]. \quad (4.61)$$

Exceto pela constante  $\hbar$  este é o tensor de Tetrode, ou seja, o tensor energia-momentum para uma partícula de Dirac. Esta é, porém, a expressão para a energia-momentum de uma partícula livre. Para levarmos em consideração a interação da partícula com o campo eletromagnético precisaríamos incluir a lagrangeana do campo eletromagnético. É óbvio, entretanto, em função da invariância de gauge, que a expressão para  $T_\mu$  é:

$$\begin{aligned} T_\mu &= \langle \partial\psi(x)\gamma_{210}\tilde{\psi}(x)\gamma_\mu \rangle_1 - eJ_\mu(x)A(x) = \\ &= \langle \partial\psi(x)\gamma_{210}\tilde{\psi}(x)\gamma_\mu \rangle_1 - eA_\mu(x)J(x). \end{aligned} \quad (4.62)$$

É importante observarmos que  $T_{\mu\nu}$  não é simétrico. A contribuição anti-simétrica é dada por

$$T_A(n) = \frac{1}{2}[T(n) - T^{\text{ad}}(n)] = \frac{1}{2}n \cdot [-\gamma_5\partial \wedge (\rho s)], \quad (4.63)$$

que podemos escrever ainda como

$$\gamma^\mu \wedge T_\mu = \frac{1}{2}[T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}]\gamma^{\mu\nu} = \gamma^\mu \wedge (T_A)_\mu = -\partial \cdot (\gamma_5\rho s). \quad (4.64)$$

Considerando agora rotações

$$x \mapsto x' = e^{-\alpha B/2}x e^{\alpha B/2}, \quad (4.65)$$

onde esta transformação é interpretada no sentido ativo, e tomando

$$\psi(x) = \psi_\Sigma(x) \mapsto \psi'(x) = \psi_{\Sigma'}(x) = e^{-\alpha B/2}\psi_\Sigma(x') \quad (4.66)$$

em função do fato da rotação ser interpretada no sentido ativo, obtemos, de maneira análoga ao caso das translações, que

$$\partial \cdot J(B) = 0, \quad (4.67)$$

onde definimos

$$J(B) = -\langle (x \cdot B) \cdot \partial\psi(x)\gamma_{210}\tilde{\psi}(x) - \frac{1}{2}B\psi(x)\gamma_{210}\tilde{\psi}(x) \rangle_1. \quad (4.68)$$

Tomando a função adjunta  $\mathcal{J}(n)$ , ou seja,  $J(B) * n = B * \mathcal{J}(n)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(n) &= x \wedge \langle \partial\psi(x)\gamma_{210}\tilde{\psi}(x)n \rangle_1 + \gamma_5\rho s \wedge n = \\ &= x \wedge T(n) + S(n), \end{aligned} \quad (4.69)$$

que é, obviamente, o momentum angular. Nesta expressão  $s$  é dado por eq.(4.39), de modo que  $S(v) = \rho S$ , sendo  $S$  o bivector de spin definido pela eq.(4.37). Note que, assim como no caso da energia-momentum, esta é a expressão para o momentum angular de uma partícula livre. No caso de interação com um campo eletromagnético devemos tomar a eq.(4.62) na parte da energia-momentum na eq.(4.69).

É claro que, quando tivermos interação com um campo eletromagnético, não devemos mais esperar que haja conservação da energia-momentum e do momentum angular de uma partícula de Dirac, ou seja, devemos ter  $\partial_\mu T^\mu \neq 0$  e  $\partial_\mu \mathcal{J}^\mu \neq 0$ . Vamos calcular estes termos.

Primeiro, vamos calcular  $\partial_\mu T^\mu$ . Note que  $\partial_\mu T^\mu = \partial_\mu (T^{\text{ad}})^\mu$  uma vez que a diferença entre  $T^\mu$  e  $(T^{\text{ad}})^\mu$ , dada pela eq.(4.63), é tal que  $\partial_\mu [\gamma^\mu \cdot (\gamma_5 \partial \wedge (\rho s))] = \partial \cdot [\gamma_5 \partial \wedge (\rho s)] = -\gamma_5 \partial \wedge \partial \wedge (\rho s) = 0$ . Logo:

$$\partial_\mu T^\mu = \partial_\mu \langle \partial^\mu \psi \gamma_{210} \tilde{\psi} - e J A^\mu \rangle_1 = \langle \square \psi \gamma_{210} \tilde{\psi} \rangle_1 - e \partial_\mu (\rho v A^\mu), \quad (4.70)$$

onde usamos  $\langle \partial^\mu \psi \gamma_{210} \tilde{\psi} \rangle_1 = \frac{1}{2} [\partial^\mu \gamma_{210} \tilde{\psi} - \psi \gamma_{210} \partial^\mu \tilde{\psi}]$  e definimos  $\square = \partial^2$ . Da EDH segue que ( $\hbar = 1$ )

$$\begin{aligned} \square \psi \gamma_{210} \tilde{\psi} &= m(\partial\psi)\tilde{\psi} + e(\partial A\psi)\gamma_0\tilde{\psi} = \\ &= (e^2 A^2 - m^2)\gamma_5\rho s + e(\partial A)\rho v + 2e(A \cdot \partial\psi)\gamma_0\tilde{\psi}, \end{aligned} \quad (4.71)$$

que implica em

$$\begin{aligned} \langle \square \psi \gamma_{210} \tilde{\psi} \rangle_1 &= \rho e(\partial \wedge A) \cdot v + e\rho v \partial \cdot A + eA \cdot \partial(\rho v) = \\ &= \rho e F \cdot v + e\partial_\mu (\rho v A^\mu), \end{aligned} \quad (4.72)$$

onde explicitamos o campo eletromagnético  $F = \partial \wedge A$ . Logo, usando a eq.(4.72), obtemos

$$\partial_\mu T^\mu = \rho e F \cdot v = \rho f, \quad (4.73)$$

onde  $f$  é a força de Lorentz. Tomando a densidade de energia-momentum própria  $\rho p$  definida por

$$\rho p = T(v) = v_\mu T^\mu, \quad (4.74)$$

de modo que podemos decompor  $T_\mu$  como

$$T_\mu = \rho v_\mu p + N_\mu, \quad (4.75)$$

com a parcela  $N_\mu$  tal que  $v^\mu N_\mu = 0$  representando o fluxo de energia-momentum normal às linhas integrais da velocidade – cuja existência segue de  $\partial \cdot J = \partial \cdot (\rho v) = 0$  – então temos, da eq.(4.72):

$$\rho \dot{p} + \partial_\mu N^\mu = \rho f, \quad (4.76)$$

onde tomamos a derivada em relação ao tempo próprio, ou seja,

$$\dot{p} = (v \cdot \partial)p = v^\mu \partial_\mu p. \quad (4.77)$$

Note que, exceto pelo termo  $\partial_\mu N^\mu$ , teríamos a expressão clássica  $\dot{p} = f = eF \cdot v$ .

Agora, para calcularmos  $\partial_\mu \mathcal{J}^\mu$  basta usarmos a eq.(4.64) e a eq.(4.73) e lembrar que  $\partial_\mu x = \gamma_\mu$ . De fato

$$\partial_\mu (x \wedge T^\mu) = \gamma_\mu \wedge T^\mu + x \wedge (\rho f) = -\partial \cdot (\gamma_5 \rho s) + x \wedge (\rho f), \quad (4.78)$$

e, como  $\partial \cdot (\gamma_5 \rho s) = \partial_\mu (\gamma_5 \rho s \wedge \gamma^\mu) = \partial_\mu S^\mu$ , segue que

$$\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = \partial_\mu (x \wedge T^\mu + S^\mu) = x \wedge (\rho f), \quad (4.79)$$

onde identificamos  $x \wedge f$  como o torque da força de Lorentz. Tomando a densidade de momentum angular própria  $\rho j$  definida por

$$\rho j = \mathcal{J}(v) = v_\mu \mathcal{J}^\mu, \quad (4.80)$$

segue que

$$\rho j = \mathcal{J}(v) = \rho(x \wedge p + S), \quad (4.81)$$

onde

$$S = \rho^{-1} v_\mu S^\mu = \gamma_5 s \wedge v, \quad (4.82)$$

que é justamente o bivector de spin. Agora, da expressão para  $S^\mu$  temos

$$S^\mu = \rho(S \wedge v) \cdot \gamma^\mu = \rho v^\mu S + M^\mu, \quad (4.83)$$

onde definimos  $M^\mu = \rho(S \cdot \gamma^\mu)v$ . Uma vez que  $v_\mu M^\mu = 0$ , então  $M^\mu$  descreve o fluxo de momentum angular normal às linhas integrais da velocidade. Finalmente, usando as eqs.(4.76,4.83) na eq.(4.64) segue que

$$\rho(\dot{S} + v \wedge p) = N_\mu \wedge \gamma^\mu - \partial_\mu M^\mu. \quad (4.84)$$

Para finalizarmos esta seção, vamos exibir as soluções da EDH livre. As soluções tipo onda plana, no sistema de repouso, escritas em termos da AET são:

$$\begin{aligned} \psi_{\uparrow}^{(+)} &= \sqrt{\rho} e^{-\gamma_{21} mc^2 t / \hbar}, \\ \psi_{\downarrow}^{(+)} &= \sqrt{\rho} \gamma_{31} e^{-\gamma_{21} mc^2 t / \hbar}, \\ \psi_{\uparrow}^{(-)} &= \sqrt{\rho} \gamma_5 (\gamma_{12} e^{\gamma_{21} mc^2 t / \hbar}), \\ \psi_{\downarrow}^{(-)} &= \sqrt{\rho} \gamma_5 \gamma_{31} (\gamma_{12} e^{\gamma_{21} mc^2 t / \hbar}). \end{aligned} \quad (4.85)$$

É fácil ver que estas soluções correspondem às usuais. Multiplicando as eqs.(4.85) pelo idempotente  $f$  segue que

$$\begin{aligned} \Psi_{\uparrow}^{(+)} &= \sqrt{\rho} e^{-imc^2 t / \hbar} |1\rangle, \\ \Psi_{\downarrow}^{(+)} &= \sqrt{\rho} e^{-imc^2 t / \hbar} |2\rangle, \\ \Psi_{\uparrow}^{(-)} &= \sqrt{\rho} e^{imc^2 t / \hbar} |3\rangle, \\ \Psi_{\downarrow}^{(-)} &= \sqrt{\rho} e^{imc^2 t / \hbar} |4\rangle. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Note que para as soluções (+) temos  $\beta = 0$ , enquanto para as soluções (-) temos  $\beta = \pi$  :

$$\left. \begin{array}{l} \psi_{\uparrow}^{(+)} \\ \psi_{\downarrow}^{(+)} \end{array} \right\} \Rightarrow \beta = 0, \quad (4.87)$$

$$\left. \begin{array}{l} \psi_{\uparrow}^{(-)} \\ \psi_{\downarrow}^{(-)} \end{array} \right\} \Rightarrow \beta = \pi. \quad (4.88)$$

As soluções com índice (+) são as soluções de energia positiva [(-) indica energia negativa], enquanto o índice  $\uparrow$  indica “spin-up” [ $\downarrow$  indica “spin-down”]. Para vermos isto, basta tomarmos o operador de projeção de energia  $\Lambda_{\pm}$ :

$$\Lambda_{\pm}(\psi) = \frac{1}{2}[\psi \pm \gamma_0 \psi \gamma_0] \quad (4.89)$$

e o operador de projeção de spin  $\Sigma_{\pm}$ :

$$\Sigma_{\pm}(\psi) = \frac{1}{2}[\psi \pm \gamma_{12} \psi \gamma_{21}] \quad (4.90)$$

É fácil ver que  $\Lambda_{\pm}\Lambda_{\pm} = \Lambda_{\pm}$ ,  $\Lambda_{\pm}\Lambda_{\mp} = 0$ ,  $\Lambda_{+} + \Lambda_{-} = 1$  e que  $\Sigma_{\pm}\Sigma_{\pm} = \Sigma_{\pm}$ ,  $\Sigma_{\pm}\Sigma_{\mp} = 0$ ,  $\Sigma_{+} + \Sigma_{-} = 1$ , com  $\Lambda_{\pm}\Sigma_{\pm} = \Sigma_{\pm}\Lambda_{\pm}$ . Segue que

$$\Lambda_{+} \left\{ \begin{array}{l} \psi_{\uparrow}^{(+)} \\ \psi_{\downarrow}^{(+)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \psi_{\uparrow}^{(+)} \\ \psi_{\downarrow}^{(+)} \end{array} \right\}, \quad \Lambda_{-} \left\{ \begin{array}{l} \psi_{\uparrow}^{(-)} \\ \psi_{\downarrow}^{(-)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \psi_{\uparrow}^{(-)} \\ \psi_{\downarrow}^{(-)} \end{array} \right\}, \quad (4.91)$$

$$\Sigma_{+} \left\{ \begin{array}{l} \psi_{\uparrow}^{(+)} \\ \psi_{\downarrow}^{(-)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \psi_{\uparrow}^{(+)} \\ \psi_{\downarrow}^{(-)} \end{array} \right\}, \quad \Sigma_{-} \left\{ \begin{array}{l} \psi_{\uparrow}^{(+)} \\ \psi_{\downarrow}^{(-)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \psi_{\uparrow}^{(+)} \\ \psi_{\downarrow}^{(-)} \end{array} \right\}, \quad (4.92)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \Lambda_{+}\Sigma_{+}\psi_{\uparrow}^{(+)} &= \Sigma_{+}\Lambda_{+}\psi_{\uparrow}^{(+)} = \psi_{\uparrow}^{(+)}, \\ \Lambda_{+}\Sigma_{-}\psi_{\downarrow}^{(+)} &= \Sigma_{-}\Lambda_{+}\psi_{\downarrow}^{(+)} = \psi_{\downarrow}^{(+)}, \\ \Lambda_{-}\Sigma_{+}\psi_{\uparrow}^{(-)} &= \Sigma_{+}\Lambda_{-}\psi_{\uparrow}^{(-)} = \psi_{\uparrow}^{(-)}, \\ \Lambda_{-}\Sigma_{-}\psi_{\downarrow}^{(-)} &= \Sigma_{-}\Lambda_{-}\psi_{\downarrow}^{(-)} = \psi_{\downarrow}^{(-)}. \end{aligned} \quad (4.93)$$

O fato de termos  $\beta = 0$  ou  $\beta = \pi$  para estas soluções é extremamente interessante e misterioso. Veremos adiante como surge o ângulo de Takabayasi dentro do nosso estudo acerca da relação entre mecânica quântica relativística e eletromagnetismo. Aliás, o resultado que apresentaremos torna o significado de  $\beta$  ainda mais misterioso.

Por outro lado, para as soluções do átomo de Hidrogênio – as chamadas soluções de Darwin – temos um ângulo de Takabayasi  $\beta$  variável, ou seja,  $\beta = \beta(x)$  (Quilichini 1971). Porém, mais misterioso ainda, é que Krüger (1991) encontrou soluções do átomo de Hidrogênio para as quais temos  $\beta = 0$  ou  $\beta = \pi$ . O fato é que o significado do ângulo de Takabayasi dentro da mecânica quântica permanece ainda obscuro – veja Boudet (1991).

### 4.3 A Equação de Dirac-Hestenes em Espaços de Riemann-Cartan

Nosso objetivo nesta seção é generalizar a EDH escrita anteriormente no espaço de Minkowski para espaços de Riemann-Cartan (RC). Para isso, o primeiro passo consiste em tomarmos uma base ortonormal  $\{e_a\}$  ( $a = 0, 1, 2, 3$ ), ou seja,

$$e_a \cdot e_b = \eta_{ab}, \quad (4.94)$$

onde  $\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ , de modo que, escrevendo

$$e_a = h_a^\mu \gamma_\mu \quad (4.95)$$

temos

$$\eta_{ab} = h_a^\mu h_b^\nu g_{\mu\nu} \quad (4.96)$$

onde  $g_{\mu\nu} = g(\gamma_\mu, \gamma_\nu) = \gamma_\mu \cdot \gamma_\nu$ . Note que usaremos sempre índices latinos para nos referirmos à uma base ortonormal. Lembremos ainda que a derivada covariante de um CSDH é dada por

$$\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{1}{2} \omega_\mu \psi \quad (4.97)$$

onde

$$\omega_\mu = \frac{1}{2} \omega_\mu^{ab} e_a \wedge e_b. \quad (4.98)$$

É óbvio que, se tomarmos um outro campo vetorial que não  $\partial_\mu$ , teremos, por exemplo, para a derivada covariante na direção de  $e_a$ :

$$\nabla_a \psi = \nabla_{e_a} \psi = \partial_a \psi + \frac{1}{2} \omega_a \psi, \quad (4.99)$$

onde  $\partial_a = h_a^\mu \partial_\mu$  denota a derivada de Pfaff. Notemos ainda que

$$\nabla = \gamma^\mu \nabla_\mu = e^a \nabla_a. \quad (4.100)$$

Consideremos agora a densidade lagrangeana  $\mathcal{L}_{Dirac} = L_{Dirac} \gamma^5$ , onde  $\gamma^5 = \gamma^{0123}$  é o elemento de volume e  $L_{Dirac}$  é dada pela eq.(4.14). Vamos nos restringir apenas ao caso livre ( $A = 0$ ) pois este será o caso que nos interessará posteriormente. Note que  $\mathcal{L}_{Dirac}$  pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \left\langle \frac{1}{2} \left( \partial \psi \gamma_{210} \tilde{\psi} - \psi \gamma_{210} \tilde{\psi} \overleftarrow{\partial} \right) - \frac{mc}{\hbar} \psi \tilde{\psi} \right\rangle_0 \gamma^5. \quad (4.101)$$

A generalização desta expressão para espaços arbitrários envolve as substituições

$$\partial \mapsto \nabla, \quad \gamma^\mu \mapsto e^a, \quad (4.102)$$

de modo que

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \left\langle \frac{1}{2} \left( \nabla \psi e_{210} \tilde{\psi} - \psi e_{210} \tilde{\psi} \overleftarrow{\nabla} \right) - \frac{mc}{\hbar} \psi \tilde{\psi} \right\rangle_0 e^5. \quad (4.103)$$

onde  $\nabla\psi = e^a\nabla_a\psi = \gamma^\mu\nabla_\mu\psi$ ,  $\tilde{\psi}\overleftarrow{\nabla} = \nabla_a\tilde{\psi}e^a = \nabla_\mu\tilde{\psi}\gamma^\mu$ . Além disso, se denotarmos  $h = \text{deth}_a^\mu$ , onde  $h_a^\mu = e_a \cdot \gamma^\mu$  de acordo com a eq.(4.95), temos

$$h = \text{deth}_a^\mu = (\gamma^0 \wedge \gamma^1 \wedge \gamma^2 \wedge \gamma^3) \cdot (e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) = \gamma^{0123} \cdot e_{0123}, \quad (4.104)$$

de modo que

$$e^{0123} = (e^{0123} \cdot \gamma_{0123})\gamma^{0123} = (\text{deth}_a^\mu)\gamma^{0123} = (\text{deth}_a^\mu)^{-1}\gamma^{0123} = h^{-1}\gamma^{0123}. \quad (4.105)$$

Segue, portanto, a seguinte expressão para a lagrangeana  $L_{Dirac}$ :

$$L_{Dirac} = h^{-1} \left\langle \frac{1}{2} \left( \nabla\psi e_{210}\tilde{\psi} - \psi e_{210}\tilde{\psi}\overleftarrow{\nabla} \right) - \frac{mc}{\hbar} \psi\tilde{\psi} \right\rangle_0. \quad (4.106)$$

Agora, a equação de Euler-Lagrange envolve o termos  $(\partial_{\partial\psi}L)\overleftarrow{\partial} = \partial_\mu(\partial_{\partial_\mu\psi}L)$ , enquanto na lagrangeana acima temos termos envolvendo  $e_a$  e não  $\gamma_\mu$ . Daí devemos expressar o termo  $(\partial_{\partial\psi}L)\overleftarrow{\partial}$  em termos da derivada de Pfaff. Notemos que

$$\partial_{\partial_\mu\psi}L = (\partial_{\partial_a\psi}L)(\partial_{\partial_\mu\psi}\partial_a\psi) = h_a^\mu\partial_{\partial_a\psi}L, \quad (4.107)$$

onde usamos  $\partial_{\partial_\mu\psi}\partial_a\psi = h_a^\mu$ . Logo, a equação de Euler-Lagrange escreve-se

$$\partial_\psi - \partial_\mu(h_a^\mu\partial_{\partial_a\psi}L) = 0, \quad (4.108)$$

ou ainda

$$\partial_\psi L - (\partial_\mu h_a^\mu)\partial_{\partial_a\psi}L - \partial_a(\partial_{\partial_a\psi}L) = 0, \quad (4.109)$$

onde usamos  $\partial_a = h_a^\mu\partial_\mu$ . Falta calcularmos  $\partial_\mu h_a^\mu$ . Lembrando que

$$h = \text{deth}_a^\mu = \gamma^{0123} \cdot e_{0123} = h_0^{\mu_0} h_1^{\mu_1} h_2^{\mu_2} h_3^{\mu_3} \gamma^{0123} \cdot \gamma_{\mu_0\mu_1\mu_2\mu_3} \quad (4.110)$$

segue que

$$\begin{aligned} \partial_\alpha h &= [(\partial_\alpha h_0^{\mu_0})h_1^{\mu_1}h_2^{\mu_2}h_3^{\mu_3} + \dots + h_0^{\mu_0}h_1^{\mu_1}h_2^{\mu_2}(\partial_\alpha h_3^{\mu_3})]\gamma^{0123} \cdot \gamma_{\mu_0\mu_1\mu_2\mu_3} = \\ &= [(\partial_\alpha h_0^{\mu_0})h_0^{\mu_0}h_1^{\mu_1}h_2^{\mu_2}h_3^{\mu_3} + \dots \\ &\quad \dots + (\partial_\alpha h_3^{\mu_3})h_0^{\mu_0}h_1^{\mu_1}h_2^{\mu_2}h_3^{\mu_3}] \gamma^{0123} \cdot \gamma_{\mu_0\mu_1\mu_2\mu_3} = \\ &= [(\partial_\alpha h_0^\sigma)h_\sigma^b]\gamma^{0123} \cdot e_{b123} + \dots + [(\partial_\alpha h_3^\sigma)h_\sigma^b]\gamma^{0123} \cdot e_{012b} = \\ &= [(\partial_\alpha h_0^\sigma)h_\sigma^0 + \dots + (\partial_\alpha h_3^\sigma)h_\sigma^3] \gamma^{0123} \cdot e_{0123} = \\ &= h_\sigma^a \partial_\alpha h_a^\sigma \gamma^{0123} \cdot e_{0123} = h_\sigma^a \partial_\alpha h_a^\sigma, \end{aligned} \quad (4.111)$$

ou seja,

$$\frac{\partial_\alpha h}{h} = h_\sigma^a \partial_\alpha h_a^\sigma. \quad (4.112)$$

Consideremos agora os coeficientes de estrutura da base  $\{e_a\}$ , definidos através de  $[e_a, e_b] = c_{ab}^c e_c$ . Temos:

$$\begin{aligned} [e_a, e_b] &= e_a(e_b) - e_b(e_a) = h_a^\mu \partial_\mu (h_b^\nu \partial_\nu) - h_b^\nu \partial_\nu (h_a^\mu \partial_\mu) = \\ &= (h_a^\nu \partial_b h_\nu^c - h_b^\nu \partial_a h_\nu^c) e_c = c_{ab}^c e_c, \end{aligned} \quad (4.113)$$

de onde segue que

$$c_{ab}^b = h_\mu^b \partial_a h_b^\mu - \partial_\mu h_a^\mu. \quad (4.114)$$

Mas, da eq.(4.112),

$$h_\mu^b \partial_a h_b^\mu = \frac{\partial_a h}{h}, \quad (4.115)$$

de modo que obtemos

$$\partial_\mu h_a^\mu = -c_{ab}^b + \frac{\partial_a h}{h}. \quad (4.116)$$

Finalmente, a equação de Euler-Lagrange pode ser escrita como

$$\partial_\psi L - \left[ \partial_a + \frac{\partial_a h}{h} - c_{ab}^b \right] \partial_{\partial_a \psi} L = 0. \quad (4.117)$$

Agora, à partir da lagrangeana  $L_{Dirac}$  obtemos

$$\partial_{\tilde{\psi}} L_{Dirac} = h^{-1} \left[ \frac{1}{2} e^a \nabla_a \psi e_{210} + \frac{1}{4} \omega_a e^a \psi e_{210} - \frac{mc}{\hbar} \psi \right], \quad (4.118)$$

$$\partial_{\partial_a \tilde{\psi}} L_{Dirac} = h^{-1} \left[ -\frac{1}{2} e^a \psi e_{210} \right]. \quad (4.119)$$

Segue que

$$\partial_a \left( \partial_{\partial_a \tilde{\psi}} L_{Dirac} \right) = -\frac{\partial_a h}{h} \partial_{\partial_a \tilde{\psi}} L_{Dirac} - h^{-1} \frac{1}{2} e^a \partial_a \psi e_{210}. \quad (4.120)$$

Usando estes resultados na equação de Euler-Lagrange obtemos

$$\frac{1}{2} \nabla \psi e_{210} + \frac{1}{4} \omega_a e^a \psi e_{210} - \frac{mc}{\hbar} \psi + \frac{1}{2} e^a \partial_a \psi e_{210} - \frac{1}{2} c_{ab}^b e^a \psi e_{210} = 0, \quad (4.121)$$

ou ainda

$$\nabla \psi e_{210} - \frac{1}{2} (e^a \cdot \omega_a) \psi e_{210} - \frac{1}{2} c_{ab}^b e^a \psi e_{210} - \frac{mc}{\hbar} \psi = 0. \quad (4.122)$$

Por outro lado

$$e^a \cdot \omega_a = \frac{1}{2} \omega_a^{bc} e^a \cdot (e_b \wedge e_c) = \omega_b^{ba} e_a = (\omega_{ba}^b - \omega_{ab}^b) e^a, \quad (4.123)$$

onde na última igualdade usamos o fato que  $\omega_{ab}^b = 0$  em função de  $\omega_a^{bc} = -\omega_a^{cb}$ . Lembrando a definição de torção, ou seja,

$$T_{ab}^c = \omega_{ab}^c - \omega_{ba}^c - c_{ab}^c, \quad (4.124)$$

temos, após usarmos a eq.(4.123) na eq.(4.122), que

$$\nabla \psi e_{210} + \frac{1}{2} T_{ab}^b e^a \psi e_{210} - \frac{mc}{\hbar} \psi = 0. \quad (4.125)$$

Definindo o vetor de torção

$$T = T_a e^a = T_{ab}^b e^a \quad (4.126)$$

segue finalmente que

$$\left( \nabla \psi + \frac{1}{2} T \psi \right) e_{21} = \frac{mc}{\hbar} \psi e_0. \quad (4.127)$$

Esta é a EDH em espaços RC. Em termos do SCD  $|\Psi\rangle$  a equação acima escreve-se

$$i \left( \nabla |\Psi\rangle + \frac{1}{2} T |\Psi\rangle \right) = \frac{mc}{\hbar} |\Psi\rangle, \quad (4.128)$$

em conformidade com o resultado de Hehl et al. (1976).

É interessante notar que a EDH para um SDH não-singular de norma arbitrária pode ser interpretada também como uma EDH para um SDH unimodular em espaços RC. De fato, usando a decomposição canônica de  $\psi$  para calcularmos o termo  $\partial\psi$ , a EDH escreve-se

$$\left[ \partial R + \frac{1}{2} \partial \ln \rho R \right] \gamma_{21} - \frac{1}{2} \gamma_5 \partial \beta R \gamma_{21} = \frac{m \cos \beta c}{\hbar} R \gamma_0 + \gamma_5 \frac{m \sin \beta c}{\hbar} R \gamma_0. \quad (4.129)$$

Se  $\beta = 0$  ou  $\beta = \pi$ , e definindo  $M = \pm m$  em cada caso, temos

$$\left[ \partial R + \frac{1}{2} \partial \ln \rho R \right] \gamma_{21} = \frac{Mc}{\hbar} R \gamma_0, \quad (4.130)$$

que é a EDH para o SDH unimodular  $R$  em um espaço RC onde o vetor de torção  $T$  é identificado com  $\partial \ln \rho$ , ou seja,

$$T = \partial \ln \rho = \frac{\partial \rho}{\rho}. \quad (4.131)$$

Note que este é um termo do tipo potencial quântico pois a transformação  $\rho \mapsto C\rho$  ( $C$  constante) não o altera. Por outro lado, notemos também que na eq.(4.130) temos  $\partial R$  no lugar da derivada covariante  $\nabla R$ , o que significa que em termos da base  $\{\gamma_a\}$  os coeficientes da conexão são nulos. Obviamente, a curvatura é nula, mas o mesmo não acontece com a torção, que é dada pelos coeficientes de estrutura desta base. Uma possível explicação para isso consiste na seguinte (Rapoport et al. 1992): no espaço-tempo livre (vácuo) temos vetores tangentes  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right\}$  que definem uma “rede cósmica” (Kleinert 1989), e a presença de matéria induz dislocações [dislocations] nessa rede cósmica de modo que os vetores tangentes agora são  $\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi^\mu} \right\}$  e tal que a transformação  $x^\mu \mapsto \xi^\mu = \xi^\mu(x)$  é singular.

## 4.4 Zitterbewegung e a Interpretação da Mecânica Quântica

Como é bem sabido, as teorias de Schrödinger e de Pauli são casos particulares da teoria de Dirac. Entretanto, via de regra, as discussões acerca da interpretação da mecânica quântica (MQ) são feitas com base nas teorias de Schrödinger e/ou de Pauli. Esse fato, é claro, soa paradoxal. Uma interpretação da MQ necessita ser coerente com a teoria de Dirac, reduzindo-se a casos particulares quando as aproximações das teorias de Schrödinger e de Pauli forem razoáveis.

É justamente nesse ponto que a reformulação da teoria de Dirac em termos da AET mostra-se promissora. De fato, o objeto matemático que descreve uma partícula de Dirac com a AET não é mais um elemento abstrato sem significado físico claro, como é o caso de um SCD, mas sim um objeto com uma interpretação geométrica bem definida que é o SDH – o que se verifica claramente através de sua decomposição canônica. Além disso, aos observáveis não estão relacionados operadores agindo em espaços abstratos mas sim elementos geométricos bem definidos. Esses fatos abrem a possibilidade de procurarmos por uma outra interpretação da MQ. Iremos

discutir brevemente uma possibilidade neste sentido, denominada Interpretação Zitterbewegung (ZBW) da MQ (Hestenes 1990, 1991).

Consideremos o conjunto de vetores  $\{e_\mu\}$  definidos pela eq.(4.34), ou seja,

$$e_\mu = R\gamma_\mu\tilde{R}. \quad (4.132)$$

Segue que podemos escrever

$$\partial_\mu e_\nu = \Omega_\mu \cdot e_\nu = \frac{1}{2}[\Omega_\mu, e_\nu], \quad (4.133)$$

onde definimos o bivector  $\Omega_\mu$  por

$$\Omega_\mu = 2(\partial_\mu R)\tilde{R}. \quad (4.134)$$

Este bivector descreve a rotação infinitesimal da base  $\{e_\mu\}$  ao longo de um deslocamento infinitesimal na direção  $\gamma_\mu$ , ou seja, é o bivector velocidade angular (na direção  $\gamma_\mu$ ). O bivector velocidade angular  $\Omega$  dado por

$$\Omega = v^\mu \Omega_\mu, \quad (4.135)$$

chamado bivector de Darboux, é tal que

$$\dot{e}_\mu = \Omega \cdot e_\mu = \frac{1}{2}[\Omega, e_\mu], \quad (4.136)$$

onde  $v^\mu = \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ ,  $\dot{e}_\mu = \frac{de_\mu}{d\tau}$ , sendo  $e_\mu = e_\mu(\tau)$  um referencial móvel ao longo da curva  $x = x(\tau)$ . Notemos também que para qualquer multivetor  $A$  vale

$$\partial_\mu A = \frac{1}{2}[\Omega_\mu, A]. \quad (4.137)$$

Calculemos agora o produto  $\Omega_\mu S$ , onde  $S = \frac{\hbar}{2}R\gamma_{21}\tilde{R}$  é o bivector de spin. Temos

$$\Omega_\mu S = p_\mu + \partial_\mu S + \gamma_5 q_\mu, \quad (4.138)$$

onde

$$p_\mu = \Omega_\mu \cdot S, \quad (4.139)$$

$$\partial_\mu S = \frac{1}{2}[\Omega_\mu, S], \quad (4.140)$$

$$q_\mu = -\Omega_\mu \cdot (\gamma_5 S). \quad (4.141)$$

Note que a quantidade  $p_\mu$  mede a componente da velocidade angular no plano de spin, enquanto  $q_\mu$  mede a componente da velocidade angular no plano ortogonal ao plano de spin;  $\partial_\mu S$  é a taxa de variação da direção do plano de spin ao longo de um deslocamento na direção  $\gamma_\mu$ . Agora, em função da decomposição canônica de um SDH  $\psi$ , podemos escrever

$$\partial_\mu \psi = \frac{1}{2}[\partial_\mu \ln \rho e^{\gamma_5 \beta} + \Omega_\mu] \psi, \quad (4.142)$$

de modo que ( $\hbar = 1$ )

$$\partial_\mu \psi \gamma_{210} \tilde{\psi} = [\partial_\mu \ln \rho e^{\gamma_5 \beta} + \Omega_\mu] \rho S v = \rho [p_\mu + W_\mu + \gamma_5 q_\mu] v, \quad (4.143)$$

onde usamos a eq.(4.138) e definimos

$$W_\mu = [\partial_\mu \ln \rho + \gamma_5 \partial_\mu \beta] S + \partial_\mu S. \quad (4.144)$$

Lembrando a definição da energia-momentum, eq.(4.58,4.59), temos

$$T_\mu^{\text{ad}} = T_{\nu\mu} \gamma^\nu = \rho p_\mu v + \rho W_\mu \cdot v, \quad (4.145)$$

ou seja,

$$T_{\nu\mu} = \rho [p_\mu v_\nu + (v \wedge \gamma_\nu) \cdot W_\mu], \quad (4.146)$$

onde usamos  $\gamma_\nu \cdot (v \cdot W_\mu) = (\gamma_\nu \wedge v) \cdot W_\mu$ . Logo,

$$T_\nu = T_{\nu\mu} \gamma^\mu = \rho [p v_\nu + ((v \wedge \gamma_\nu) \cdot W_\mu) \gamma^\mu]. \quad (4.147)$$

Comparando esta expressão com a eq.(4.75) segue que

$$N_\mu = [(v \wedge \gamma_\mu) \cdot W_\nu] \gamma^\nu \quad (4.148)$$

representa o fluxo de energia-momentum normal às linhas integrais de velocidade e que  $p$  é a energia-momentum própria. Desse modo, temos para as componentes  $p_\mu$  da energia-momentum

$$p_\mu = \Omega_\mu \cdot S. \quad (4.149)$$

Segue portanto que

$$mc = p \cdot v = \Omega \cdot S, \quad (4.150)$$

o que sugere que interpretemos a massa como energia cinética de rotação. Entretanto, para que essa interpretação seja plausível é preciso responder: o que está rodando? Vamos procurar, agora, uma possível resposta para esta questão.

Primeiro, notemos que para as soluções de partícula livre dadas pela eq.(4.85)  $v = e_0$  e  $s = \frac{1}{2} e_3$  são constantes do movimento, mas o mesmo não ocorre para  $e_1$  e  $e_2$ . Tomando, por exemplo, a solução  $\psi_1^+$  temos

$$e_1(t) = e_1(0) \cos \omega t + e_2(0) \sin \omega t, \quad (4.151)$$

$$e_2(t) = e_2(0) \cos \omega t - e_1(0) \sin \omega t, \quad (4.152)$$

o que mostra que  $e_1$  e  $e_2$  rodam no plano de spin com frequência  $\omega = 2mc^2/\hbar$ . Por outro lado, o plano de spin mantém fixa a sua direção, ou seja,

$$e_{12}(t) = e_1(t) \wedge e_2(t) = e_1(0) \wedge e_2(0) = e_{12}(0). \quad (4.153)$$

Esta frequência com a qual os vetores  $e_1$  e  $e_2$  rodam é a frequência de zitterbewegung (ZBW)  $\omega_{zbw}$ :

$$\omega = \omega_{zbw} = \frac{2mc^2}{\hbar}. \quad (4.154)$$

Uma vez que há rotação no plano de spin podemos supor que a massa esteja ligada à energia cinética desta rotação. Para isso, entretanto, é necessário que haja uma componente não-nula

da velocidade da partícula no plano de spin. Uma vez que  $v = e_0$  esta quantidade não pode ser tomada como esta velocidade. A sugestão de Hestenes (1990, 1991) é que esta velocidade seja identificada com o vetor tipo luz

$$u = e_0 - e_2. \quad (4.155)$$

Isso implica que a partícula move-se com a velocidade da luz, o que concorda com a concepção original de Schrödinger (1930) acerca do ZBW. Note que a média da velocidade  $u$  ao longo de um período de ZBW é justamente  $v$ ,

$$\langle u \rangle_{z\text{bw}} = v = e_0. \quad (4.156)$$

Tomando a dependência temporal (4.152) para  $e_2(t)$  e  $u = \frac{1}{c} \frac{dx}{dt}$  segue para a linha de universo  $x = x(t)$  da partícula

$$x = ct e_0 + \frac{c}{\omega} [e_2(0) \sin \omega t + e_1(0) \cos \omega t] + x_0, \quad (4.157)$$

que é justamente a equação de uma hélice cilíndrica de diâmetro  $d$  igual ao comprimento de onda Compton, ou seja,

$$d = \frac{\hbar}{mc}. \quad (4.158)$$

Uma vez que o raio desta hélice é descrito por

$$r = \frac{c}{\omega} [e_2(0) \sin \omega t + e_1(0) \cos \omega t], \quad (4.159)$$

obtemos

$$r \wedge (m\dot{r}) = \frac{mc^2}{\omega} = \frac{\hbar}{2} e_{12} = S, \quad (4.160)$$

o que sugere interpretarmos o spin como o momentum angular das flutuações de ZBW. Além disso, se definirmos o momentum eletromagnético como

$$M = r \wedge j \quad (4.161)$$

onde  $j = e\dot{r}$ , segue que

$$M = \frac{e}{mc} S \quad (4.162)$$

que é o momentum magnético do elétron com o fator giromagnético  $g$  correto, ou seja,  $g = 2$  onde  $M = g \frac{e}{2mc} S$ .

É interessante observarmos neste ponto que algum tipo de auto-interação deve existir à qual possamos atribuir a origem do ZBW. É claro que não estamos atribuindo o ZBW à interferência de soluções de energia positiva e negativa, de modo que é necessário supor a existência desta auto-interação dentro do modelo acima descrito. Essa auto-interação deve ser de origem magnética, e a possibilidade de sua existência é capaz de explicar, pelo menos qualitativamente, muitos dos aspectos peculiares da MQ (Hestenes 1985). Além disso, nesse caso é natural supor que o ZBW deve originar um campo elétrico do tipo coulombiano que oscile com frequência de ZBW – o que explicaria, por exemplo, o princípio de Pauli (Hestenes 1985). Com relação à este fato, pode-se mostrar (Vaz e Rodrigues 1993b) como derivar um campo oscilante do tipo coulombiano tal que

a sua média em um período de ZBW forneça justamente o campo coulombiano usual de uma partícula pontual.

É claro que nos encontramos ainda em um estágio muito especulativo no que toca a uma reinterpretação da MQ, mas o uso da AET abre possibilidades antes inimagináveis através da formulação usual. Veremos na próxima seção que muitas das especulações que discutimos encontram um “análogo clássico” dentro do modelo de Barut-Zanghi, o qual também possui uma formulação natural em termos da AET.

## 4.5 Limite Clássico: O Modelo de Barut-Zanghi

O desenvolvimento da MQ levou à crença que o spin é um grau de liberdade intrínseco de uma partícula. Em certos textos introdutórios à MQ encontra-se inclusive a afirmação de que este é um grau de liberdade sem análogo clássico. Entretanto, podemos encontrar na literatura várias discussões acerca de modelos clássicos de partículas com spin. Alguns exemplos são: Frenkel (1926), Mathisson (1937), Höhl e Papapetrou (1939), Bhabha e Corben (1941), Weysenhof e Raabe (1947), Pryce (1948), Gürsey (1957), Corben (1961), Jordan e Mukunda (1963), Fleming (1965, 1965a), Berezin e Marinov (1975), Casalbuoni (1976) e Pauri (1980). Nesta seção discutiremos o modelo de Barut-Zanghi (BZ) (1984), e veremos que existem razões suficientes para considerá-lo um modelo clássico de uma partícula de Dirac.

O modelo BZ considera que uma partícula clássica deve ser caracterizada, além do par de variáveis canonicamente conjugadas  $(x^\mu, p_\mu)$ , por um segundo par de variáveis spinoriais conjugadas  $(z, i\bar{z})$  representando graus de liberdade internos. O modelo consiste na lagrangeana

$$L_{BZ} = \frac{1}{2}i(\dot{\bar{z}}z - \bar{z}\dot{z}) + p_\mu(\dot{x}^\mu - \bar{z}\gamma^\mu z) + eA_\mu \bar{z}\gamma^\mu z, \quad (4.163)$$

onde  $z = z(\tau) \in \mathcal{C}^4$  é um SCD,  $\bar{z} = z^\dagger \gamma_0$  é seu adjunto de Dirac,  $\gamma^\mu$  são as matrizes de Dirac,  $\tau$  é um parâmetro de tempo invariante e  $A_\mu$  são as componentes do potencial eletromagnético. Barut e Duru (1984) mostraram que essa lagrangeana fornece uma ação clássica à partir da qual podemos escrever uma integral de trajetória que resulta no propagador de Dirac.

De maneira análoga ao caso da lagrangeana de Dirac, podemos mostrar que a lagrangeana BZ em termos da AET escreve-se (Gull 1991, Pavšič et al. 1992):

$$L_{BZ} = \left\langle \tilde{\psi} \dot{\psi} \gamma_{21} + p(\dot{x} - \psi \gamma_0 \tilde{\psi}) + eA \psi \gamma_0 \tilde{\psi} \right\rangle_0, \quad (4.164)$$

onde  $\psi = \psi(\tau)$  é um SDH. A interpretação geométrica do SDH mostra claramente o motivo da presença do SCD  $z$  na lagrangeana (4.163); de fato, uma partícula com spin deve ser descrita, além de  $(x, p)$ , por uma tetrada  $\{e_\mu\}$  definida pela eq.(4.132), que podemos reescrever como  $\rho e_\mu = \psi \gamma_\mu \tilde{\psi}$ . Note que o valor do ângulo de Takabayasi  $\beta$  é irrelevante no que toca à definição dos  $\{e_\mu\}$ ; tomaremos, no que se segue, por simplicidade,  $\beta = 0$ , que vimos corresponde às soluções de energia positiva da equação de Dirac.

Agora, olhando para a eq.(4.163,4.164), vemos que o momentum  $p$  é introduzido como um multiplicador de Lagrange em função do vínculo  $\dot{x} = \psi \gamma_0 \tilde{\psi}$ . Esse procedimento, entretanto, deixa em aberto a interpretação deste momentum como sendo o momentum cinético ou o momentum canônico. De fato, Lasenby et al. (1993) interpretaram a quantidade  $\pi = p - eA$  como momentum

canônico, enquanto Pavšič et al. (1992) interpretaram  $\pi$  como momentum cinético. Veremos adiante que a interpretação de Pavšič et al. (1992) é a correta uma vez que  $p$  é o momentum canônico – o que segue do fato que o modelo BZ é um sistema hamiltoniano. A prova de que o modelo BZ é hamiltoniano deve-se a Rawnsley (1992), e uma prova usando álgebras de Clifford encontra-se em Vaz e Rodrigues (1993), Rodrigues e Vaz (1993); abaixo veremos alguns detalhes.

Primeiro, observando a lagrangeana  $L_{BZ}$  vemos que esta é uma lagrangeana de primeira ordem. Como é bem sabido (Sudarshan e Mukunda 1974), lagrangeanas não-padrão (ou com vínculos) exibem certos problemas para podermos definir um hamiltoniano correspondente. Entretanto, lagrangeanas de primeira ordem possuem uma estrutura hamiltoniana natural. De fato, da eq.(4.164) segue que

$$\langle (p - eA)\psi\gamma_0\tilde{\psi} \rangle_0 = \langle \bar{\psi}\dot{\psi} \rangle_0 + \langle p\dot{x} \rangle_0 - L_{BZ}, \quad (4.165)$$

onde definimos

$$\bar{\psi} = \gamma_{21}\tilde{\psi}. \quad (4.166)$$

Note que a eq.(4.165) corresponde a uma transformação de Legendre; temos  $p$  e  $\bar{\psi}$  como momentum canonicamente conjugados a  $x$  e  $\psi$ , respectivamente, e o hamiltoniano  $H_{BZ} = H_{BZ}(x, p, \psi, \bar{\psi})$  é

$$H_{BZ} = \langle (p - eA)\psi\gamma_0\tilde{\psi} \rangle_0 = \langle (p - eA)\psi\gamma_{012}\bar{\psi} \rangle_0. \quad (4.167)$$

Da discussão do capítulo 2 sabemos que as equações de Hamilton são:

$$\dot{x} = \partial_p H, \quad \dot{p} = -\partial_x H, \quad (4.168)$$

$$\dot{\psi} = \partial_{\bar{\psi}} H, \quad \dot{\bar{\psi}} = -\partial_{\psi} H. \quad (4.169)$$

Usando o hamiltoniano  $H_{BZ}$  seguem as seguintes equações:

$$\dot{\psi}\gamma_{12} + \pi\psi\gamma_0 = 0, \quad (4.170)$$

$$\dot{x} = \psi\gamma_0\tilde{\psi}, \quad (4.171)$$

$$\dot{\pi} = eF \cdot \dot{x}, \quad (4.172)$$

onde

$$\pi = p - eA \quad (4.173)$$

é o momentum cinético e  $F = \partial \wedge A$ . Estas são justamente as equações que resultam da lagrangeana  $L_{BZ}$ ; a diferença é que em  $L_{BZ}$  não há nenhuma outra interpretação imediata para  $p$  além de um multiplicador de Lagrange, enquanto em  $H_{BZ}$  é óbvio que  $p$  é o momentum canônico.

Vamos agora mostrar como definir uma estrutura simplética no espaço de fase do modelo BZ. Primeiro, tomamos uma base  $\{E_0, E_1, E_2, E_3\}$  de  $\mathbf{R}^4$  tal que  $E_a \cdot E_b = \delta_{ab}$  ( $a, b = 0, 1, 2, 3$ ) e definimos  $X = \sum_a x_a E_a$ ; tomamos uma outra cópia de  $\mathbf{R}^4$  e uma base  $\{E'_0, E'_1, E'_2, E'_3\}$  com  $E'_a \cdot E'_b = \delta_{ab}$  e definimos  $P' = \sum_a p_a E'_a$ . Finalmente, tomamos  $\mathbf{R}^4 \oplus \mathbf{R}^4$  com uma base  $\{E_0, E_1, E_2, E_3; E'_0, E'_1, E'_2, E'_3\}$  tal que  $E_a \cdot E'_b = 0$  ( $\forall a, b$ ). Definimos uma estrutura simplética em  $\mathbf{R}^4 \oplus \mathbf{R}^4$  através do bivector simplético  $J$  dado por

$$J = \sum_a J_a = \sum_a E_a \wedge E'_a. \quad (4.174)$$

Note que  $E'_a = E_a \cdot J = -J \cdot E_a$  e que  $E_a = -E'_a \cdot J = J \cdot E'_a$ . Então  $X' = X \cdot J = -J \cdot X$ ,  $P = J \cdot P' = -P' \cdot J$ , e podemos definir

$$Q = X' + P = X \cdot J + P, \quad (4.175)$$

$$\partial_Q = \partial'_X + \partial_P, \quad (4.176)$$

onde  $\partial'_X = \partial_{X'}$ . Logo, podemos escrever as equações de Hamilton (4.168) como

$$\dot{Q} = \partial'_Q H, \quad (4.177)$$

onde  $\partial'_Q = -J \cdot \partial_Q = \partial'_P - \partial_X$ .

Com relação às equações de Hamilton (4.169), o ponto chave é lembrarmos que  $\psi = \langle \psi \rangle_0 + \langle \psi \rangle_2 + \langle \psi \rangle_4$ , onde  $\langle \rangle_a$  indica a parte a-vetor. Daí, se tomarmos uma base  $\{F_0, F_1, \dots, F_7\}$  de  $\mathbf{R}^8$  tal que  $F_m \cdot F_n = \delta_{mn}$  ( $m, n = 0, 1, \dots, 7$ ) podemos definir

$$\Psi = \langle \psi \rangle_0 F_0 + (\langle \psi \rangle_2)_{01} F_1 + \dots + (\langle \psi \rangle_2)_{23} F_6 + \langle \psi \rangle_4 F_7. \quad (4.178)$$

Tomando uma outra cópia de  $\mathbf{R}^8$  com uma base  $\{F'_0, F'_1, \dots, F'_7\}$  tal que  $F'_m \cdot F'_n = \delta_{mn}$  podemos definir

$$\bar{\Psi}' = \langle \bar{\psi} \rangle_0 F'_0 + (\langle \bar{\psi} \rangle_2)_{01} F'_1 + \dots + (\langle \bar{\psi} \rangle_2)_{23} F'_6 + \langle \bar{\psi} \rangle_4 F'_7. \quad (4.179)$$

Tomando agora  $\mathbf{R}^8 \oplus \mathbf{R}^8$  com uma base  $\{F_0, \dots, F_7; F'_0, \dots, F'_7\}$  tal que  $F_m \cdot F'_n = 0$  ( $\forall m, n$ ). Definimos uma estrutura simplética em  $\mathbf{R}^8 \oplus \mathbf{R}^8$  através do bivetor simplético  $K$  dado por

$$K = \sum_m K_m = \sum_m F_m \wedge F'_m, \quad (4.180)$$

de modo que  $F'_m = F_m \cdot K$ , etc. Definindo

$$\Phi = \Psi' + \bar{\Psi} = \Psi \cdot K + \bar{\Psi}, \quad (4.181)$$

$$\partial_\Phi = \partial'_\Phi + \partial_{\bar{\Psi}}, \quad (4.182)$$

as equações de Hamilton (4.169) podem ser escritas como

$$\dot{\Phi} = \partial'_\Phi H, \quad (4.183)$$

onde  $\partial'_\Phi = -K \cdot \partial_\Phi = \partial'_{\bar{\Psi}} - \partial_\Psi$ .

Finalmente, tomamos o espaço  $(\mathbf{R}^4 \oplus \mathbf{R}^8) \oplus (\mathbf{R}^4 \oplus \mathbf{R}^8)$  com uma base  $\{E_0, \dots, E_3; F_0, \dots, F_7; E'_0, \dots, E'_3; F'_0, \dots, F'_7\}$  com  $E_a \cdot F_m = E_a \cdot F'_m = E'_a \cdot F_m = E'_a \cdot F'_m = 0$  ( $\forall a, m$ ). A estrutura simplética é definida pelo bivetor simplético  $\mathcal{J}$  dado por

$$\mathcal{J} = J + K = \sum_a E_a \wedge E'_a + \sum_m F_m \wedge F'_m. \quad (4.184)$$

Após definirmos

$$\Pi = Q + \Phi \quad (4.185)$$

podemos escrever as equações de Hamilton (4.177, 4.183) na forma

$$\dot{\Pi} = \partial'_\Pi H, \quad (4.186)$$

onde  $\partial'_\Pi = \partial'_Q + \partial'_\Phi$ . Em termos dos colchetes de Poisson podemos ainda escrever

$$\dot{\Pi} = \{H, \Pi\}. \quad (4.187)$$

Vamos agora estudar algumas propriedades do modelo BZ. Supondo  $\psi$  não-singular, de modo que vale a decomposição canônica  $\psi = \sqrt{\rho}R$  ( $\beta = 0$ ), obtemos, após separarmos a eq.(4.170) em suas partes escalar, bivetor e pseudo-escalar, as seguintes equações:

$$\dot{\rho} = 0, \quad (4.188)$$

$$\Omega = -4\pi \cdot (e_0 \wedge S), \quad (4.189)$$

$$\pi \wedge e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 = 0. \quad (4.190)$$

Da eq.(4.188) concluímos que  $\rho$  é uma constante, e tomamos  $\rho = 1$  quando  $\tau$  for identificado com tempo próprio. Nesse caso  $v = \dot{x} = e_0$ , e uma vez que a eq.(4.190) implica que  $\pi$  é uma combinação linear de  $\{e_0, e_1, e_2\}$ , concluímos que podemos ter soluções da eq.(4.170) para as quais  $v$  e  $\pi$  não são paralelos. A possibilidade da velocidade e do momentum não serem paralelos é uma característica importante da teoria de Dirac, fato este discutido, por exemplo, por Hestenes (1990, 1991).

Assim como na teoria de Dirac, no modelo BZ a massa pode ser identificada com energia cinética de rotação. De fato, à partir da eq.(4.189) segue que

$$\Omega \cdot S = \pi \cdot e_0 = mc, \quad (4.191)$$

que é justamente a eq.(4.150).

Outra conclusão interessante segue após multiplicarmos a eq.(4.170) pela direita por  $\tilde{\psi}$  e subtrairmos desta o reverso da eq.(4.170) multiplicada pela esquerda por  $\psi$ . O resultado é

$$\dot{S} + v \wedge \pi = 0, \quad (4.192)$$

onde  $S$  é o bivetor de spin. Desta expressão segue que

$$\frac{d}{d\tau}(S + x \wedge \pi) = ex \wedge (F \cdot v), \quad (4.193)$$

de modo que no caso livre temos conservação do momentum angular  $J = x \wedge p + S$ .

Agora, comparando a eq.(4.192) e a eq.(4.84) vemos que o resultado da teoria de Dirac reduz-se ao do modelo BZ quando  $N_\mu \wedge \gamma^\mu = \partial_\mu M^\mu$ . Por outro lado, comparando a eq.(4.172) com a eq.(4.76) concluímos<sup>4</sup> que este resultado da teoria de Dirac reduz-se ao do modelo BZ quando  $\partial_\mu N^\mu = 0$ . Logo, o modelo BZ é tal que

$$\partial_\mu N^\mu = 0, \quad N_\mu \wedge \gamma^\mu = \partial_\mu M^\mu. \quad (4.194)$$

Lembrando o significado destas quantidades concluímos que o fluxo líquido de energia-momentum e momentum angular através da superfície de um elemento de volume móvel ao longo das linhas integrais de velocidade é nulo. Essas condições caracterizam o chamado fluido de Weyssenhof

<sup>4</sup>Lembremos que  $\pi$  na eq.(4.172) tem o mesmo significado de  $p$  na eq.(4.76).

(Weyssenhof e Raabe 1947), donde concluimos que um fluido BZ é um exemplo de um fluido de Weyssenhof.

Para o caso de uma partícula livre é fácil resolver o sistema (4.170-4.172). Uma solução particularmente interessante é a fornecida originalmente por BZ, que em termos da AET escreve-se

$$\psi = \cos m\tau\psi(0) + \sin m\tau\gamma_0\psi(0)\gamma_{012}, \quad (4.195)$$

onde  $m$  é definido pela eq.(4.191). Note que podemos escrever a eq.(4.195) como

$$\psi = \psi_+(0)e^{\gamma_{12}m\tau} + \psi_-(0)e^{-\gamma_{12}m\tau}, \quad (4.196)$$

onde  $\psi_{\pm}(0) = \Lambda_{\pm}[\psi(0)]$ , sendo  $\Lambda_{\pm}$  os projetores de energia positiva e negativa. Essa solução fornece uma velocidade tipo tempo no caso em que  $\psi(0)$  é não-singular dada por

$$v = \frac{p}{m} + [v(0) - \frac{p}{m}] \cos 2m\tau + \frac{\dot{v}(0)}{2m} \sin 2m\tau, \quad (4.197)$$

cuja integração fornece uma linha de universo  $x = x(\tau)$  que é uma hélice cilíndrica. Entretanto, se tomarmos  $\psi(0)$  como um spinor singular, por exemplo  $\psi(0) = \frac{1}{2}(1 + \gamma_{10})$  – que é um spinor de Majorana, de acordo com Lounesto (1993) – então para a velocidade obtemos o vetor tipo luz dado por ( $p = mc\gamma_0$ )

$$v = \gamma_0 + \gamma_1 \cos 2m\tau + \gamma_2 \sin 2m\tau, \quad (4.198)$$

que após uma rotação conveniente pode ser escrito como

$$v = e_0 - e_2. \quad (4.199)$$

Neste caso a hélice  $x = x(\tau)$  possui diâmetro igual ao comprimento de onda Compton. Além disso, para  $J = x \wedge p + S$  obtemos  $J = \frac{1}{2}\gamma_{21}$ . É interessante notar que a eq.(4.199) corresponde justamente à conjectura de Hestenes (1990, 1991) acerca da velocidade do elétron dentro da interpretação ZBW da MQ (ver eq.(4.155) ).

## Capítulo 5

# Sobre a Relação entre Eletromagnetismo e Mecânica Quântica

### 5.1 Representação Spinorial das Equações de Maxwell

Existem na literatura várias formulações independentes das equações de Maxwell em forma spinorial. Como exemplo, podemos citar os trabalhos de Majorana (veja Recami, Mignani e Baldo 1974, Giannetto 1985), e mais recentemente, os de Sachs (1982), Sallhöfer (1986) e Srivastava (1985). Estes estudos, é claro, são importantes não apenas do ponto de vista matemático, mas também do ponto de vista físico pois podem sugerir a possibilidade de alguma relação entre eletromagnetismo (EM) e MQ.

As representações spinoriais das equações de Maxwell referidas acima são encontradas em termos de spinores covariantes. Por outro lado, vimos que o espaço vetorial ao qual pertence um particular spinor covariante é isomorfo a um ideal de uma particular algebra matricial que é, por sua vez, isomorfo ao ideal de uma particular álgebra de Clifford. Segue daí que aquelas representações spinoriais das equações de Maxwell podem ser reformuladas em termos de spinores algébricos. Se lembrarmos que um ideal à esquerda minimal  $I_{p,q}$  de  $\mathbf{R}_{p,q}$  é da forma  $I_{p,q} = \mathbf{R}_{p,q}e_{pq}$ , onde  $e_{pq}$  é um idempotente primitivo de  $\mathbf{R}_{p,q}$ , então segue que aquelas diferentes representações spinoriais das equações de Maxwell estão relacionadas com diferentes escolhas deste idempotente – o que foi mostrado em Rodrigues e de Oliveira (1990). De fato, as equações de Maxwell na AET  $\mathbf{R}_{1,3}$  escrevem-se

$$\partial F = J. \tag{5.1}$$

Por outro lado, considere os seguintes idempotentes primitivos de  $\mathbf{R}_{1,3}$ :<sup>1</sup>  $e = \frac{1}{2}(1 + \gamma_0)$  e  $e' = \frac{1}{2}(1 + \gamma_{30})$ . Se multiplicarmos a equação acima pela direita por um destes idempotentes temos  $\partial\varphi = \xi$ , onde  $\varphi = Fe$ ,  $\xi = Je$ , que é uma representação spinorial das equações de Maxwell. O uso do idempotente  $e = \frac{1}{2}(1 + \gamma_0)$  leva a uma representação em termos de um spinor de Dirac, enquanto o uso do idempotente  $e = \frac{1}{2}(1 + \gamma_{30})$  leva a uma representação em termos de spinores

---

<sup>1</sup>O idempotente  $\frac{1}{2}(1 + \gamma_{123})$  também é primitivo, mas a sua consideração não apresenta interesse.

de Weyl. O primeiro caso corresponde à representação obtida por Sallhöfer (1986) e o segundo à representação de Sachs (1982). Já o caso discutido por Srivastava (1985) envolve a álgebra de Majorana  $\mathbf{R}_{3,1}$ , mas esse fato, é claro, não muda o nosso raciocínio.

De qualquer maneira, não podemos dizer que estas são representações spinoriais “autênticas”. Primeiro, embora os idempotentes  $e = \frac{1}{2}(1 + \gamma_0)$  e  $e' = \frac{1}{2}(1 + \gamma_{30})$  não sejam geometricamente equivalentes – isto é, eles não estão relacionados por um elemento do grupo  $\text{Spin}_+(1, 3)$  – eles são entretanto algebricamente equivalentes – isto é, eles estão relacionados por um elemento do grupo dos elementos inversíveis de  $\mathbf{R}_{1,3}$ . Segue que aquelas duas diferentes representações são representações algebricamente equivalentes de uma mesma equação, que é  $\partial F = J$ . Ocorre que, embora  $F \in \sec \Lambda^2(M) \subset \sec \mathcal{C}_{ET}^+(M)$ , ou seja,  $F(x)$  é um bivector e daí um elemento da sub-álgebra par  $\mathbf{R}_{1,3}^+$ , ele não é um spinor. Recordemos que um spinor, embora possa ser representado por elementos de  $\mathbf{R}_{1,3}^+$ , deve ser definido através de uma classe de equivalência, e este não é o caso do campo EM. De fato, dadas duas bases  $\Sigma$  e  $\Sigma'$  geometricamente equivalentes, temos para os representantes  $\psi_\Sigma$  e  $\psi_{\Sigma'}$  do spinor  $\psi$  que  $\psi_{\Sigma'} = \psi_\Sigma \tilde{R}$ ; daí,  $\Psi_\Sigma = \psi_\Sigma e_\Sigma$  transforma-se ativamente como  $\Psi_\Sigma \mapsto \Psi'_{\Sigma} = R\Psi_\Sigma = R\psi_\Sigma e_\Sigma = \psi'_{\Sigma'} e_{\Sigma'} R = \Psi'_{\Sigma'} R$ , ou seja,  $\Psi'_{\Sigma'} = \Psi_\Sigma \tilde{R}$ . Por outro lado, o campo  $F$  transforma-se ativamente como  $F \mapsto F' = RF\tilde{R}$ , de modo que  $\varphi_\Sigma = Fe_\Sigma$  deve se transformar como  $\varphi_\Sigma \mapsto \varphi'_{\Sigma} = R\varphi_\Sigma \tilde{R} = F'e'_{\Sigma}$ . Se tomarmos  $\varphi_\Sigma \mapsto \varphi'_{\Sigma} = R\varphi_\Sigma$  teremos  $\varphi'_{\Sigma} = RFe_\Sigma = F'Re_\Sigma = F'e'_{\Sigma} R$ , de modo que não podemos pensar em  $\varphi$  como um spinor que representa o campo  $F$ .

Podemos agora nos perguntar se é possível encontrar uma representação spinorial “autêntica” para as equações de Maxwell. Nosso objetivo nesta seção é mostrar que isso é possível! Mais especificamente, para atingirmos o nosso objetivo devemos provar primeiramente o seguinte teorema:

*Teorema:* Todo campo eletromagnético  $F$  pode ser escrito na forma

$$F = \psi \gamma_{21} \tilde{\psi} \quad (5.2)$$

onde  $\psi$  é um CSDH.

Uma vez provado este teorema será simples encontrarmos uma representação spinorial para as equações de Maxwell.

Para provarmos este teorema iremos distinguir três casos: (I)  $F^2 \neq 0$ , (II)  $F^2 = 0$ ,  $F \neq 0$ , (III)  $F = 0$ .

(I)  $F^2 \neq 0$ . Para mostrarmos que todo campo  $F$  tal que  $F^2 \neq 0$  pode ser escrito na forma  $F = \psi \gamma_{21} \tilde{\psi}$  é preciso usarmos o seguinte teorema (Rainich 1925, Misner e Wheeler 1957), cuja demonstração exibiremos abaixo (Vaz e Rodrigues 1993):

*Teorema (Rainich-Misner-Wheeler):* Seja um campo extremal um campo EM tal que o campo elétrico [magnético] é zero e o campo magnético [elétrico] é paralelo à uma dada direção espacial. Então, em qualquer ponto do espaço-tempo, qualquer campo EM tal que  $F^2 \neq 0$  pode ser reduzido à um campo extremal através de uma rotação de Lorentz e uma transformação de dualidade.

Seja  $F = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu}$  um campo EM. Os invariantes de  $F$  são dados por  $F^2 = F \cdot F + F \wedge F$ . Em termos da álgebra de Pauli  $\mathbf{R}_{3,0} \simeq \mathbf{R}_{1,3}^+$  temos  $F = \mathbf{E} + i\mathbf{H}$ , onde  $\mathbf{E} = E^i \sigma_i$ ,  $\mathbf{H} = H^i \sigma_i$ ,

$\sigma_i = \gamma_{i0}$ ,  $i = \sigma_{123}$ , que implica em

$$F \cdot F = \mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2, \quad F \wedge F = i2\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}. \quad (5.3)$$

Considere uma transformação de dualidade do campo  $F$  por um ângulo  $\alpha$ , ou seja,

$$F \mapsto F' = e^{\gamma_5 \alpha} F = (\cos \alpha)F + \gamma_5(\sin \alpha)F. \quad (5.4)$$

Note que os invariantes de  $F$  mudam perante uma transformação de dualidade. De fato,

$$F^2 \mapsto (F')^2 = e^{2\gamma_5 \alpha} F^2, \quad (5.5)$$

de onde obtemos

$$F' \cdot F' = \cos 2\alpha(F \cdot F) + \gamma_5 \sin 2\alpha(F \wedge F), \quad (5.6)$$

$$F' \wedge F' = \cos 2\alpha(F \wedge F) + \gamma_5 \sin 2\alpha(F \cdot F). \quad (5.7)$$

Escolhendo  $\alpha$  tal que

$$F' \wedge F' = 0, \quad (5.8)$$

ou seja,  $\mathbf{E}' \cdot \mathbf{H}' = 0$ , temos

$$\tan 2\alpha = \frac{\gamma_5(F \wedge F)}{(F \cdot F)}, \quad (5.9)$$

o que implica em

$$F' \cdot F' = \pm \sqrt{(F \cdot F)^2 - (F \wedge F)^2}, \quad (5.10)$$

onde os diferentes sinais seguem do fato que ângulos  $\alpha$  e  $\alpha + \pi$  correspondem a  $(\mathbf{E}')^2 - (\mathbf{H}')^2 < 0$  e  $(\mathbf{E}')^2 - (\mathbf{H}')^2 > 0$  uma vez que  $e^{\gamma_5 \pi/2} = \gamma_5$  transforma um campo elétrico em um magnético e vice-versa.

Sabemos que uma rotação de Lorentz  $L$  pode ser decomposta em uma rotação espacial  $\mathcal{R}$  e um boost  $\mathcal{B}$ . Por outro lado, sabemos também (Dubrovine et al. 1987) que, se  $\mathbf{E}' \cdot \mathbf{H}' = 0$  então existe um boost  $\mathcal{B}$  tal que para  $F'' = \mathcal{B}F'\mathcal{B} = \mathbf{E}'' + i\mathbf{H}''$  temos (a)  $\mathbf{E}'' \neq 0$  e  $\mathbf{H}'' = 0$  se  $(\mathbf{E}')^2 - (\mathbf{H}')^2 > 0$ , (b)  $\mathbf{E}'' = 0$  e  $\mathbf{H}'' \neq 0$  se  $(\mathbf{E}')^2 - (\mathbf{H}')^2 < 0$ . Finalmente, através de uma rotação espacial  $\mathcal{R}$  fazemos com que  $\mathbf{E}''$  ou  $\mathbf{H}''$  em cada caso acima seja paralelo à uma particular direção considerada. Segue portanto que  $\mathcal{R}F''\tilde{\mathcal{R}}$  é um campo extremal  $F_{\text{ext}}$ .

Compondo as operações descritas acima temos

$$F_{\text{ext}} = e^{\gamma_5 \alpha} L F \tilde{L}, \quad (5.11)$$

onde  $L = \mathcal{R}\mathcal{B}$ . Definindo

$$\beta = -\alpha, \quad R = \tilde{L}, \quad (5.12)$$

e tomando o campo extremal como sendo um campo magnético de intensidade  $\rho$  na direção  $\sigma_3$ , ou seja,

$$F_{\text{ext}} = \rho \gamma_{21} \quad (5.13)$$

então segue da eq.(5.11) que

$$F = \psi \gamma_{21} \tilde{\psi}, \quad (5.14)$$

onde

$$\psi = \sqrt{\rho} e^{\gamma_5 \beta / 2} R, \quad (5.15)$$

que é justamente a decomposição canônica de um SDH. Desse modo, provamos que qualquer campo  $F$  tal que  $F^2 \neq 0$  pode ser escrito como  $F = \psi \gamma_{21} \tilde{\psi}$  onde  $\psi$  é um SDH não-singular.

(II)  $F^2 = 0$ ,  $F \neq 0$ . Nesse caso temos  $F \cdot F = 0$  e  $F \wedge F = 0$ , ou seja,  $\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2 = 0$  e  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0$ . É óbvio em função de  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0$  que podemos tomar uma rotação espacial  $\mathcal{R}$  tal que para  $F' = \mathcal{R} F \tilde{\mathcal{R}}$  temos  $(E')^1 = (F')^{01} = 0$  e  $(H')^1 = (F')^{23} = 0$ . Da condição  $\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2 = 0$  segue que podemos escrever  $(F')^{12} = \pm (F')^{02} = \eta_1$  e  $(F')^{13} = \pm (F')^{03} = \eta_2$ , de modo que para  $F' = \frac{1}{2} (F')^{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu}$  temos

$$F' = \frac{1}{2} [\pm \eta_1 \gamma_{02} \pm \eta_2 \gamma_{03} + \eta_1 \gamma_{12} + \eta_2 \gamma_{13}] = (\eta_1 + \gamma_5 \eta_2) \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_{01}) \gamma_{21}, \quad (5.16)$$

ou ainda

$$F = (\eta_1 + \gamma_5 \eta_2) R \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_{01}) \gamma_{21} \tilde{R}, \quad (5.17)$$

onde tomamos  $R = \tilde{R}$ . Lembrando que  $\frac{1}{2} (1 \pm \gamma_{01})$  é um idempotente e definindo

$$\eta_1 = \eta \cos \varphi, \quad \eta_2 = \eta \sin \varphi, \quad (5.18)$$

segue da eq.(5.17) que

$$F = \psi_M \gamma_{21} \tilde{\psi}_M, \quad (5.19)$$

onde

$$\psi_M = \sqrt{\eta} e^{\gamma_5 \varphi / 2} R \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_{01}) = \psi \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_{01}), \quad (5.20)$$

o que prova nosso teorema para este caso.

É fácil ver que a operação de conjugação de carga  $C$  corresponde na AET a

$$C(\psi) = \psi \gamma_{01}, \quad (5.21)$$

de modo que o SDH  $\psi_M$  pode ser escrito como

$$\psi_M = \frac{1}{2} [\psi \pm C(\psi)], \quad (5.22)$$

ou seja, este é um SDH do tipo Majorana (Lounesto 1993). Obviamente  $\psi_M$  é singular:

$$\psi_M \tilde{\psi}_M = \tilde{\psi}_M \psi_M = 0. \quad (5.23)$$

(III)  $F = 0$ . Neste caso queremos encontrar um  $\psi$  não-trivial tal que  $F = \psi \gamma_{21} \tilde{\psi} = 0$ . Logo

$$\psi \gamma_{21} \tilde{\psi} = -\psi \gamma_{21} \tilde{\psi} = \gamma_5 \psi \gamma_{21} \tilde{\psi} \gamma_5 = \gamma_5 \psi \gamma_{21} \gamma_{21} \gamma_{12} \tilde{\psi} \gamma_5, \quad (5.24)$$

que é satisfeita se

$$\psi = \pm \gamma_5 \psi \gamma_{21}. \quad (5.25)$$

Segue portanto que

$$F = \psi_W \gamma_{21} \tilde{\psi}_W = 0, \quad (5.26)$$

onde

$$\psi_W = \frac{1}{2} [\psi \pm \gamma_5 \psi \gamma_{21}] \quad (5.27)$$

é um SDH do tipo Weyl (Lounesto 1993). O operador  $\Xi_{\pm}$  definido por

$$\Xi_{\pm}(\psi) = \frac{1}{2} [\psi \pm \gamma_5 \psi \gamma_{21}] \quad (5.28)$$

é o operador de quiralidade [chirality]. Obviamente  $\psi_W$  é singular:

$$\psi_W \tilde{\psi}_W = \tilde{\psi}_W \psi_W = 0. \quad (5.29)$$

Logo, com estes resultados provamos que qualquer campo EM pode ser escrito na forma  $F = \psi \gamma_{21} \tilde{\psi}$  onde  $\psi$  é um SDH. Com isto podemos representar um campo  $F$  através deste spinor  $\psi$ , e usando esta representação podemos escrever uma equação para  $\psi$  simplesmente substituindo  $F = \psi \gamma_{21} \tilde{\psi}$  na equação de Maxwell  $\partial F = J$ . A equação resultante é, obviamente, uma representação spinorial das equações de Maxwell. Fazendo esta substituição obtemos

$$\gamma^\mu [\partial_\mu \psi \gamma_{21} \tilde{\psi} + \psi \gamma_{21} \partial_\mu \tilde{\psi}] = J. \quad (5.30)$$

Mas  $\psi \gamma_{21} \partial_\mu \tilde{\psi} = -(\partial_\mu \psi \gamma_{21} \tilde{\psi})$ , e como a reversão não altera escalares e pseudo-escalares, podemos reescrever a equação acima como

$$\underline{\partial} \langle \underline{\psi} \gamma_{21} \tilde{\psi} \rangle_2 = \frac{1}{2} J, \quad (5.31)$$

onde usamos a notação sublinhada para indicar a ação de  $\partial_\mu$ , ou seja,

$$\underline{\partial} \langle \underline{\psi} \gamma_{21} \tilde{\psi} \rangle_2 = \gamma^\mu \langle \partial_\mu \psi \gamma_{21} \tilde{\psi} \rangle_2. \quad (5.32)$$

Note que podemos eliminar o fator  $\frac{1}{2}$  que multiplica  $J$  na eq.(5.31) simplesmente redefinindo  $\psi$ , mas como isso não é necessário continuaremos considerando este fator.

Uma outra maneira, aliás bem conveniente, de reecrearmos a eq.(5.31), consiste em notarmos que

$$\gamma^\mu \langle \partial_\mu \psi \gamma_{21} \tilde{\psi} \rangle_2 = \partial \psi \gamma_{21} \tilde{\psi} - \gamma^\mu \langle \partial_\mu \psi \gamma_{21} \tilde{\psi} \rangle_0 - \gamma^\mu \langle \partial_\mu \psi \gamma_{21} \tilde{\psi} \rangle_4, \quad (5.33)$$

de modo que definindo os vetores

$$\frac{1}{2} j = \langle \partial_\mu \psi \gamma_{21} \tilde{\psi} \rangle_0 \gamma^\mu, \quad (5.34)$$

$$\frac{1}{2} g = \langle \partial_\mu \psi \gamma_5 \gamma_{21} \tilde{\psi} \rangle_0 \gamma^\mu, \quad (5.35)$$

temos

$$\partial \psi \gamma_{21} \tilde{\psi} = \frac{1}{2} [J + (j + \gamma_5 g)], \quad (5.36)$$

que é a forma procurada. Note que, da definição dos vetores  $j$  e  $g$ , ou da própria eq.(5.36), temos

$$\frac{1}{2}\partial \cdot j = \langle \square \psi \gamma_{21} \tilde{\psi} \rangle_0, \quad (5.37)$$

$$\frac{1}{2}\partial \cdot g = \langle \square \psi \gamma_5 \gamma_{21} \tilde{\psi} \rangle_0. \quad (5.38)$$

Quando o SDH  $\psi$  é não-singular a eq.(5.36) pode ser reescrita como

$$\partial \psi \gamma_{21} = \frac{e^{\gamma_5 \beta}}{2\rho} [J + (j + \gamma_5 g)] \psi, \quad (5.39)$$

onde  $\rho$  e  $\beta$  são dados por

$$\rho = \sqrt{\langle \psi \tilde{\psi} \rangle_0^2 + \langle \psi \gamma_5 \tilde{\psi} \rangle_0^2}, \quad (5.40)$$

$$\tan \beta = -\frac{\langle \psi \gamma_5 \tilde{\psi} \rangle_0}{\langle \psi \tilde{\psi} \rangle_0} \quad (5.41)$$

Pode-se mostrar (Vaz e Rodrigues 1993) que esta representação spinorial das equações de Maxwell em termos do SDH é completamente equivalente à representação spinorial obtida por Campolattaro (1980) em termos do SCD. O detalhe é que os cálculos de Campolattaro, feitos com o cálculo spinorial e tensorial usual, envolvem várias páginas, enquanto os nossos cálculos envolvem poucas linhas!

Há ainda uma outra forma de escrevermos a eq.(5.39). Usando a decomposição canônica de  $\psi$  temos

$$\partial_\mu \psi = \frac{1}{2} \left[ \partial_\mu \ln \rho e^{\gamma_5 \beta} + \Omega_\mu \right] \psi, \quad (5.42)$$

onde  $\Omega_\mu = 2(\partial_\mu R) \tilde{R}$ , de modo que

$$\langle \partial_\mu \psi \gamma_{21} \tilde{\psi} \rangle_0 = \langle \Omega_\mu S \psi \tilde{\psi} \rangle_0 = \langle \Omega_\mu S \rangle_0 \rho \cos \beta + \langle \Omega_\mu \gamma_5 S \rangle_0 \rho \sin \beta, \quad (5.43)$$

$$\langle \partial_\mu \psi \gamma_5 \gamma_{21} \tilde{\psi} \rangle_0 = \langle \Omega_\mu \gamma_5 S \psi \tilde{\psi} \rangle_0 = \langle \Omega_\mu \gamma_5 S \rangle_0 \rho \cos \beta - \langle \Omega_\mu S \rangle_0 \rho \sin \beta, \quad (5.44)$$

onde  $S = \frac{1}{2} R \gamma_{21} \tilde{R}$  é o bivector de spin, de modo que

$$\frac{1}{2}(j + \gamma_5 g) = \gamma^\mu (\Omega_\mu \cdot S) (\psi \tilde{\psi}) + \gamma_5 \gamma^\mu (\Omega_\mu \cdot (\gamma_5 S)) (\psi \tilde{\psi}). \quad (5.45)$$

Usando a eq.(5.45) na eq.(5.39) obtemos

$$\partial \psi \gamma_{21} = \gamma^\mu (\Omega_\mu \cdot S) \psi + \gamma_5 \gamma^\mu (\Omega_\mu \cdot (\gamma_5 S)) \psi + \frac{e^{\gamma_5 \beta}}{2\rho} J \psi. \quad (5.46)$$

## 5.2 Sobre a Relação entre as Equações de Maxwell e de Dirac

Consideremos a representação spinorial das equações de Maxwell livres ( $J = 0$ ), ou seja:

$$\partial\psi\gamma_{21} = \gamma^\mu(\Omega_\mu \cdot S)\psi + \gamma_5\gamma^\mu(\Omega_\mu \cdot (\gamma_5 S))\psi. \quad (5.47)$$

Vamos procurar agora por uma interpretação do lado direito desta equação.

Se lembrarmos da discussão feita no capítulo anterior, podemos interpretar o termo  $\Omega_\mu \cdot S$  como medindo a componente da velocidade angular no plano de spin, enquanto o termo  $\Omega_\mu \cdot (\gamma_5 S)$  mede a componente da velocidade angular no plano ortogonal ao plano de spin. Por outro lado, no capítulo anterior vimos também que  $p_\mu = \Omega_\mu \cdot S$  são as componentes do vetor energia-momentum, de modo que  $mc = \Omega \cdot S = p \cdot v$ . É claro que estes foram resultados obtidos dentro da teoria de Dirac, mas podemos pensá-los como conjecturas às quais a teoria de Dirac satisfaz. A questão aqui, é claro, refere-se à origem da massa. A idéia é, assim como no modelo BZ, definir  $m$  à partir de  $mc = \Omega \cdot S$ , e a hipótese consiste em supor  $m$  definido desta maneira como constante.

Desse modo, iremos definir  $m$ , que iremos supor constante, tal que

$$mc = \Omega \cdot S, \quad (5.48)$$

onde  $\Omega = v^\mu \Omega_\mu$ , de modo que

$$p = mc v = \gamma^\mu(\Omega_\mu \cdot S). \quad (5.49)$$

De maneira análoga, definimos  $n$ , cuja interpretação daremos depois, e que também iremos supor constante, tal que

$$nc = \Omega \cdot (\gamma_5 S), \quad (5.50)$$

de modo que

$$q = nc v = \gamma^\mu(\Omega_\mu \cdot (\gamma_5 S)). \quad (5.51)$$

Usando  $v = R\gamma_0\tilde{R} = \rho^{-1}\psi\gamma_0\tilde{\psi}$  temos

$$\gamma^\mu(\Omega_\mu \cdot S)\psi = mc\rho^{-1}\psi\gamma_0\tilde{\psi}\psi = mc\psi\gamma_0e^{\gamma_5\beta}, \quad (5.52)$$

$$\gamma^\mu(\Omega_\mu \cdot (\gamma_5 S))\psi = nc\rho^{-1}\psi\gamma_0\tilde{\psi}\psi = nc\psi\gamma_0e^{\gamma_5\beta}, \quad (5.53)$$

de modo que, usando estes resultados e explicitando a constante  $\hbar$  à partir da definição de  $S$ , a eq.(5.47) pode ser escrita como

$$\partial\psi\gamma_{21} = \frac{mc}{\hbar}\psi\gamma_0e^{\gamma_5\beta} + \gamma_5\frac{nc}{\hbar}\psi\gamma_0e^{\gamma_5\beta}. \quad (5.54)$$

Passaremos agora a estudar esta equação.

Suponhamos inicialmente que

$$n = 0, \quad (5.55)$$

o que significa que o bivector velocidade angular possui componentes apenas no plano de spin. Esta hipótese, é importante notar, é satisfeita para as soluções partícula livre na teoria de Dirac, onde além disto temos  $\Omega \cdot S$  constante. Nesse caso, a eq.(5.54) reduz-se a

$$\partial\psi\gamma_{21} = \frac{mc}{\hbar}\psi\gamma_0e^{\gamma_5\beta}, \quad (5.56)$$

que é uma equação não-linear do tipo Dirac. De fato, exceto pelo termo  $e^{\gamma_5\beta}$  que introduz uma não-linearidade nesta equação, ela reduziria-se à equação de Dirac. Se  $\beta = 0$  a eq.(5.56) reduz-se, obviamente, à EDH, caso este estudado em Vaz e Rodrigues (1993d), Vaz e Rodrigues (1993e), Rodrigues e Vaz (1993a) e Rodrigues, Vaz e Recami (1992). A eq.(5.56) foi proposta por Daviau (1993) como uma alternativa à equação de Dirac. Faremos abaixo uma discussão mostrando que em certos termos a eq.(5.56) é mais satisfatória que a equação de Dirac.

Primeiro, notemos que o operador energia-momentum  $\hat{\mathbf{p}}$  é dado por

$$\frac{\hat{\mathbf{p}}}{\hbar} = \partial\psi\gamma_{21}. \quad (5.57)$$

De fato, lembrando que  $\gamma_{21}$  faz o papel de  $i = \sqrt{-1}$  na AET e que (Hestenes 1966)  $\gamma_0\partial = \partial_0 + \nabla$ ,  $\gamma_0\mathbf{p} = p_0 - \mathbf{p}$ , segue da eq.(5.57) que

$$\hat{E}\psi = i\hbar\partial_0\psi, \quad \hat{\mathbf{p}}\psi = -i\hbar\nabla\psi, \quad (5.58)$$

que são as definições usuais dos operadores energia  $\hat{E}$  e momentum  $\hat{\mathbf{p}}$ . Podemos reescrever, portanto, a eq.(4.56) como

$$\hat{\mathbf{p}}\psi = mc\psi\gamma_0e^{\gamma_5\beta}, \quad (5.59)$$

de modo que, se  $\psi$  é um auto-spinor de  $\hat{\mathbf{p}}$  então a eq.(5.59) implica, após multiplicação pela direita por  $\psi^{-1} = \tilde{\psi}(\psi\tilde{\psi})^{-1}$  em

$$\mathbf{p} = mc\mathbf{v}. \quad (5.60)$$

Por outro lado, reescrevendo a EDH como

$$\hat{\mathbf{p}}\psi = mc\psi\gamma_0, \quad (5.61)$$

no caso de  $\psi$  ser auto-spinor de  $\hat{\mathbf{p}}$  temos

$$\mathbf{p} = e^{\gamma_5\beta}mc\mathbf{v}. \quad (5.62)$$

Como  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores, a eq.(5.62) implica que  $\beta = 0$  ou  $\beta = \pi$ , e nesse caso

$$\mathbf{p} = \pm mc\mathbf{v}, \quad (5.63)$$

onde o caso  $\beta = \pi$  introduz um sinal negativo sem significado físico aparente. Como vemos, a EDH requer, para fazer sentido, que  $\beta = 0$  ou  $\beta = \pi$ , e nesse último caso surge o problema de interpretarmos o sinal negativo – que é o problema da interpretação das soluções de energia negativa, que vimos correspondem a  $\beta = \pi$ . Já a equação não-linear (5.56) não apresenta estes problemas pois a relação  $\mathbf{p} = mc\mathbf{v}$  é válida para qualquer  $\beta$ .

Outro fato interessante em relação à equação não-linear (5.56) é que o princípio de superposição permanece válido desde que as soluções que queremos superpor apresentem o *mesmo*  $\beta$ . Para entendermos o que isto significa vamos procurar pelas soluções desta equação. Escrevendo  $\psi = e^{\gamma_5\beta/2}\phi$  segue da eq.(5.56), supondo  $\beta$  constante, que

$$\partial\phi\gamma_{21} = \frac{mc}{\hbar}\phi\gamma_0, \quad (5.64)$$

que é a EDH para  $\phi = \sqrt{\rho}R$ , de modo que estas soluções  $\phi$  são idênticas às soluções da EDH com  $\beta = 0$ . Logo, temos as seguintes soluções:

$$\psi_{\uparrow} = \sqrt{\rho}e^{\gamma_5\beta/2}e^{-\gamma_{21}mc^2t/\hbar}, \quad (5.65)$$

$$\psi_{\downarrow} = \sqrt{\rho}e^{\gamma_5\beta/2}\gamma_{31}e^{-\gamma_{21}mc^2t/\hbar}, \quad (5.66)$$

onde o ângulo  $\beta$  é qualquer. Uma vez que  $\gamma_5$  comuta com  $\gamma_{21}$ , é imediato que estas soluções são auto-spinores do operador de projeção de spin  $\Sigma_{\pm}$ , assim como as correspondentes soluções da EDH, fato este que indicamos pelos índices  $\uparrow$  e  $\downarrow$ . Por outro lado, o mesmo não ocorre em relação aos operadores de projeção  $\Lambda_{\pm}$ . Nesse caso

$$\Lambda_{+}(\psi_{\uparrow\downarrow}) = [\cos^2\frac{\beta}{2} - \gamma_5\frac{1}{2}\sin\beta]\psi_{\uparrow\downarrow}, \quad (5.67)$$

$$\Lambda_{-}(\psi_{\uparrow\downarrow}) = [\gamma_5\frac{1}{2}\sin\beta + \sin^2\frac{\beta}{2}]\psi_{\uparrow\downarrow}, \quad (5.68)$$

de modo que  $\psi_{\uparrow\downarrow}$  é auto-spinor de  $\Lambda_{\pm}$  apenas quando  $\beta = 0$  ou  $\beta = \pi$ , casos estes em que

$$\Lambda_{+}(\psi_{\uparrow\downarrow}) = \begin{cases} \psi_{\uparrow\downarrow}, & (\beta = 0) \\ 0, & (\beta = \pi) \end{cases}, \quad (5.69)$$

$$\Lambda_{-}(\psi_{\uparrow\downarrow}) = \begin{cases} 0, & (\beta = 0) \\ \psi_{\uparrow\downarrow}, & (\beta = \pi) \end{cases}, \quad (5.70)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \psi_{\uparrow}^{(+)} &= \sqrt{\rho}e^{-\gamma_{21}mc^2t/\hbar}, \\ \psi_{\downarrow}^{(+)} &= \sqrt{\rho}\gamma_{31}e^{-\gamma_{21}mc^2t/\hbar}, \\ \psi_{\uparrow}^{(-)} &= \sqrt{\rho}\gamma_5e^{-\gamma_{21}mc^2t/\hbar}, \\ \psi_{\downarrow}^{(-)} &= \sqrt{\rho}\gamma_5\gamma_{31}e^{-\gamma_{21}mc^2t/\hbar}. \end{aligned} \quad (5.71)$$

O fato interessante em relação a estas soluções é que agora a interpretação dos operadores  $\Lambda_{\pm}$  como projetores de energia positiva e negativa não faz mais sentido. De fato, lembrando a expressão para o tensor de Tetrode (energia-momentum)

$$T_{\mu} = \langle \partial\psi\gamma_{210}\tilde{\psi}\gamma_{\mu} \rangle_1 \quad (5.72)$$

temos para todas as soluções (5.71) que o traço  $T = T_{\mu}^{\mu} = T_{\mu} \cdot \gamma^{\mu} > 0$ . De fato,

$$T = \langle \partial\psi\gamma_{210}\tilde{\psi} \rangle_0, \quad (5.73)$$

e usando a eq.(5.56),

$$T = mc \langle \psi\tilde{\psi}e^{-\gamma_5\beta} \rangle_0 = mc\rho. \quad (5.74)$$

Por outro lado, no caso da teoria de Dirac, o traço do tensor de Tetrode é

$$T_{Dirac} = mc \langle \psi\tilde{\psi} \rangle_0 = mc\rho \cos\beta, \quad (5.75)$$

de modo que

$$T_{Dirac} = T \cos \beta. \quad (5.76)$$

Desse modo, *todas* as soluções (5.71) apresentam energia positiva, e não faz sentido interpretarmos  $\Lambda_-$  como operador de energia negativa. Podemos pensar, é claro, que a energia-momentum da teoria não-linear possui uma outra definição diferente daquela do tensor de Tetrode, mas esse não é o caso. De fato, escrevendo  $\psi = e^{\gamma_5 \beta / 2} \phi$  vimos que  $\phi$  satisfaz a EDH, que pode ser obtida da lagrangeana  $L_{Dirac}$ , que por sua vez implica no tensor de Tetrode  $T_\mu = \langle \partial \phi \gamma_{210} \tilde{\phi} \gamma_\mu \rangle_1 = \langle \partial \psi \gamma_{210} \tilde{\psi} \gamma_\mu \rangle_1$ . Além disso, perderíamos uma interessante interpretação que discutiremos agora.

Vimos na seção anterior que todo campo  $F$  pode ser escrito como  $F = \psi \gamma_{21} \tilde{\psi}$ , e que no caso  $F^2 \neq 0$  isso devia-se ao fato de podermos sempre reduzir  $F$  à forma de um campo extremal  $F_{ext}$ . Desse modo, podemos pensar em  $\psi$  como sendo a “raiz quadrada extremal” de  $F$ . Além disso, para escrevermos  $F = \psi \gamma_{21} \tilde{\psi}$  tomamos  $F_{ext} = \rho \gamma_{21}$ . Mas, a energia-momentum do campo  $F$  é dada (Hestenes 1966) por  $S^\mu = -\frac{1}{2} F e^\mu F$ , ou  $S^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \langle F e^\mu F e^\nu \rangle_0$ , de modo que em termos de  $F_{ext}$  temos

$$S_{ext}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \langle F_{ext} \gamma^\mu F_{ext} \gamma^\nu \rangle_0 = -\frac{1}{2} \langle \gamma_{21} \rho \gamma^\mu \gamma_{21} \rho \gamma^\nu \rangle_0, \quad (5.77)$$

que podemos escrever como

$$S_{ext}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \langle \gamma_{21} T_{ext}^\mu \gamma_{21} T_{ext}^\nu \rangle_0, \quad (5.78)$$

onde

$$T_{ext}^\mu = \rho \gamma^\mu \quad (5.79)$$

pode ser interpretado como a “raiz quadrada extremal” de  $S^{\mu\nu}$ . Lembrando que  $\rho \cos \beta = \langle \psi \tilde{\psi} \rangle_0$  podemos escrever ( $\beta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ )

$$T_{ext}^\mu = \frac{\langle \psi \tilde{\psi} \gamma^\mu \rangle_1}{\cos \beta}. \quad (5.80)$$

Supondo que  $\psi$  satisfaz a EDH segue, a menos das constantes  $\frac{mc}{\hbar}$  que

$$T_{ext}^\mu = \frac{\langle \partial \psi \gamma_{210} \tilde{\psi} \gamma^\mu \rangle_1}{\cos \beta} = \frac{T^\mu}{\cos \beta}, \quad (5.81)$$

onde  $T^\mu$  é o tensor de Tetrode, enquanto supondo que  $\psi$  satisfaz a equação não-linear segue que

$$T_{ext}^\mu = \frac{\langle \partial \psi \gamma_{210} \tilde{\psi} \gamma^\mu e^{-\gamma_5 \beta} \rangle_1}{\cos \beta} = \langle \partial \psi \gamma_{210} \tilde{\psi} \gamma^\mu \rangle_1 - \langle \partial \psi \gamma_{210} \tilde{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \rangle_1 \tan \beta, \quad (5.82)$$

e, uma vez que  $\langle \partial \psi \gamma_{210} \tilde{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \rangle_1 = \langle \psi \tilde{\psi} e^{-\gamma_5 \beta} \gamma^\mu \gamma_5 \rangle_1 = \rho \langle \gamma^\mu \gamma_5 \rangle_1 = 0$ , temos

$$T_{ext}^\mu = \langle \partial \psi \gamma_{210} \tilde{\psi} \gamma^\mu \rangle_1 = T^\mu. \quad (5.83)$$

Desse modo, podemos interpretar o tensor de Tetrode como a “raiz quadrada extremal” do tensor energia-momentum eletromagnético. O detalhe é que no caso da teoria linear de Dirac é necessário um fator  $\cos \beta$  na eq.(5.81) tal que  $\cos \pi = -1$  para as soluções de energia negativa.

A possibilidade que nos resta para os operadores de projeção  $\Lambda_\pm$  na teoria não-linear é interpretá-los como operador de projeção do tipo partícula ( $\Lambda_+$ ) e operador de projeção do tipo

anti-partícula ( $\Lambda_-$ )<sup>2</sup>. Daí, o fato do princípio de superposição permanecer válido apenas quando as soluções apresentam o mesmo ângulo  $\beta$  significa que o princípio de superposição vale para *partículas* e *anti-partículas* em *separado*, onde o ângulo  $\beta = 0$  refere-se a partículas e o ângulo  $\beta = \pi$  refere-se a anti-partículas. Daí a transformação  $\beta \mapsto \beta + \pi$  pode ser interpretada como transformando partículas em anti-partículas e vice-versa.

O fato de nesta interpretação anti-partículas possuírem energia positiva resolve um antigo problema da MQ relativística, uma vez que mesmo anti-partículas devem obviamente possuir energia positiva. As soluções com energia negativa são as que apresentam uma fase oposta em relação às soluções (5.71) (ou seja,  $\gamma_{21} \mapsto -\gamma_{21}$  nas eqs.(5.71) ), e satisfazem as equações que resultam se, ao invés de supormos a eq.(5.48), tomarmos  $mc = -\Omega \cdot S$ , e nesse caso estas são as soluções que resultam da inversão temporal  $t \mapsto -t$ .

### 5.3 Um Modelo “Eletromagnético” dos Léptons

Como vimos, a equação não-linear (5.56) é sobre muitos aspectos mais satisfatória que a equação de Dirac. Dentre outros aspectos, é particularmente notável que enquanto a teoria de Dirac para uma partícula livre exige por consistência que  $\beta = 0$  ou  $\beta = \pi$ , na teoria não-linear não há tal restrição sobre  $\beta$ . A condição  $\beta = 0$  ou  $\beta = \pi$  surge dentro da teoria não-linear da exigência de  $\psi$  ser auto-spinor dos projetores  $\Lambda_{\pm}$ , que identificamos como operadores de projeção de partícula e anti-partícula. É claro que a equação não-linear descreve os diferentes léptons (elétron, muon, taon e correspondentes anti-partículas) em função de diferentes escolhas apropriadas de  $m$  (respectivamente  $m_e = 0.511$  MeV,  $m_{\mu} = 105.6$  MeV,  $m_{\tau} = 1784.1$  MeV), mas nesse caso temos uma equação para cada lépton. O que desejamos discutir agora é a possibilidade de descrevermos estes léptons como uma mesma equação, no caso a equação não-linear (5.56), explorando a liberdade que temos envolvendo o ângulo  $\beta$  na teoria não-linear.

De fato, como a condição  $\beta = 0$  ou  $\beta = \pi$  surge da exigência de  $\psi$  ser auto-spinor de  $\Lambda_{\pm}(\psi) = \frac{1}{2}(\psi \pm \gamma_0 \psi \gamma_0)$ , podemos pensar em procurar por um outro operador de projeção que implique em diferentes valores para  $\beta$ , e nesse caso este diferente valor estando associado a um diferente lépton. Este outro operador de projeção pode ser definido como

$$\Lambda_{\beta}(\psi) = \frac{1}{2}(\psi + e^{\gamma_5 \beta} \gamma_0 \psi \gamma_0), \quad (5.84)$$

de modo que

$$\Lambda_+ = \Lambda_{\beta=0}, \quad \Lambda_- = \Lambda_{\beta=\pi}. \quad (5.85)$$

É fácil vermos que  $\Lambda_{\beta}$  é um operador de projeção, ou seja,

$$\Lambda_{\beta}^2 = \Lambda_{\beta}, \quad (5.86)$$

$$\Lambda_{\beta} + \Lambda_{\beta+\pi} = 1, \quad (5.87)$$

$$\Lambda_{\beta} \Lambda_{\beta+\pi} = \Lambda_{\beta+\pi} \Lambda_{\beta} = 0. \quad (5.88)$$

---

<sup>2</sup>Estas denominações devem ser encaradas com cuidado; não devemos confundir estes operadores com os operadores de criação e aniquilação de partículas e anti-partículas das teorias de segunda quantização.

A idéia, agora, é que um elétron corresponda ao estado fundamental de um sistema, e que os demais léptons possam ser vistos como estados excitados deste sistema. No próximo capítulo faremos uma breve discussão acerca da natureza física deste sistema, mas adiantamos que esta é uma idéia defendida por autores como Barut (1980), Caldirola (1977,1983) e Sachs (1982).

Antes de apresentarmos nossas idéias, vamos redefinir as dimensões físicas de certas quantidades uma vez que o valor das constantes físicas será usado em nossas estimativas. Vamos estabelecer a seguinte notação:  $[X]$  indica a dimensão da grandeza  $X$ ,  $L$  indica unidade de comprimento,  $T$  unidade de tempo,  $M$  unidade de massa e  $Q$  unidade de carga. Como  $[F] = QL^{-2}$  então ao escrevermos  $F = \psi\gamma_{21}\tilde{\psi}$  estamos tomando  $[\psi] = (QL^{-2})^{1/2}$ . Por outro lado, temos usualmente  $[\psi] = L^{-3/2}$ . Mas  $[F] = QL^{-2} = (QL)L^{-3} = QL(MLT^{-1})(MLT^{-1})^{-1}L^{-3} = Q(ML^2T^{-1})M^{-1}(LT^{-1})^{-1}L^{-3}$ . Como  $[e] = Q$ ,  $[\hbar] = ML^2T^{-1}$ ,  $[m] = M$ ,  $[c] = LT^{-1}$ , então se tomarmos  $F = k\frac{e\hbar}{mc}\psi\gamma_{21}\tilde{\psi}$ , onde  $k$  é uma constante numérica, a unidade de  $\psi$  é  $L^{-3/2}$ . Vamos tomar<sup>3</sup>

$$F = 4\pi\frac{e\hbar}{2mc}\psi\gamma_{21}\tilde{\psi}. \quad (5.89)$$

Reescrevendo as equações de Maxwell em unidades gaussianas, ou seja,

$$\partial F = \frac{4\pi}{c}J, \quad (5.90)$$

temos, usando a eq.(5.89),

$$\partial(\psi\gamma_{21}\tilde{\psi}) = \frac{2m}{e\hbar}J. \quad (5.91)$$

A única diferença em relação ao nosso procedimento anterior é que em lugar de  $J$  temos agora  $\frac{6m}{e\hbar}J$ . Sendo assim, temos à partir da eq.(5.46) e usando as eq.(5.52,5.53),

$$\partial\psi\gamma_{21} = \frac{mc}{\hbar}\psi\gamma_0e^{\gamma_5\beta} + \gamma_5\frac{nc}{\hbar}\psi\gamma_0e^{\gamma_5\beta} + \frac{e^{\gamma_5\beta}}{\rho}\left(\frac{m}{e\hbar}\right)J\psi. \quad (5.92)$$

Procedendo de maneira análoga à seção anterior, vamos escrever

$$\psi = e^{\gamma_5\beta/2}\phi, \quad (5.93)$$

onde  $\phi = \sqrt{\rho}R$ . Supondo  $\beta$  constante, segue que

$$\partial\phi\gamma_{21} = \frac{mc}{\hbar}\phi\gamma_0 + \gamma_5\frac{nc}{\hbar}\phi\gamma_0 + \frac{e^{\gamma_5\beta}}{\rho}\left(\frac{m}{e\hbar}\right)J\phi, \quad (5.94)$$

e, ao contrário do caso livre, o fator  $e^{\gamma_5\beta}$  não é fatorado completamente. Supondo que  $J$  consiste de uma corrente elétrica  $J_e$  e de uma corrente magnética  $\star J_m = -\gamma_5 J_m$ , ou seja,

$$J = J_e - \gamma_5 J_m, \quad (5.95)$$

temos

$$e^{\gamma_5\beta}J = (\cos\beta J_e + \sin\beta J_m) + \gamma_5(\sin\beta J_e - \cos\beta J_m). \quad (5.96)$$

<sup>3</sup>Note que estamos interpretando a quantidade  $(e\hbar/2mc)\psi\gamma_{21}\tilde{\psi}$  como campo eletromagnético, ao invés de densidade de momento eletromagnético. A constante  $4\pi$  aparece por usarmos unidades gaussianas.

Se supusermos ainda que

$$J_e = cq_e\phi\gamma_0\tilde{\phi}, \quad (5.97)$$

$$J_m = cq_m\phi\gamma_0\tilde{\phi}, \quad (5.98)$$

onde  $q_e$  denota carga elétrica e  $q_m$  carga magnética (monopolar), então, após substituírmos as eq.(5.97,5.98) na eq.(5.96), obtemos

$$\partial\phi\gamma_{21} = \frac{Mc}{\hbar}\phi\gamma_0 + \gamma_5\frac{Nc}{\hbar}\phi\gamma_0, \quad (5.99)$$

que é uma equação análoga à eq.(5.54) ou eq.(5.64) para uma partícula de massa  $M$ , onde

$$M = m + \frac{m}{e}[q_e \cos \beta + q_m \sin \beta], \quad (5.100)$$

$$N = n + \frac{m}{e}[q_e \sin \beta - q_m \cos \beta]. \quad (5.101)$$

Por outro lado, vimos que para as soluções livres temos  $n = 0$  (não há projeção da velocidade angular  $\Omega$  no plano ortogonal ao plano de spin). A quantidade  $N$  relaciona-se com a projeção de uma nova velocidade angular  $\Omega'$  neste plano ortogonal ao plano de spin, e desejamos agora encontrar soluções tais que  $N = 0$ , de modo que a eq.(5.99) reduz-se a

$$\partial\phi\gamma_{21} = \frac{Mc}{\hbar}\phi\gamma_0, \quad (5.102)$$

que é a eq.(5.64) para uma partícula de massa  $M$ . Nesse caso teríamos que  $\phi$  satisfaz EDH com  $\beta = 0$  e as soluções  $\psi$  seriam da forma (5.65,5.66), com a diferença que agora  $\beta$  deve satisfazer a eq.(5.101) com  $N = 0$ . Se supormos que, além de  $N = 0$ , temos  $n = 0$  e  $q_e = 0$ , devemos ter

$$q_m \cos \beta = 0. \quad (5.103)$$

Se  $q_m = 0$  então  $\beta$  é qualquer, e caímos no caso estudado na seção anterior. Entretanto, se  $q_m \neq 0$ , devemos ter

$$\cos \beta = 0 \implies \beta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}. \quad (5.104)$$

Supondo

$$q_m = g \sin \beta, \quad (5.105)$$

onde  $g$  é a carga magnética monopolar, então substituindo a eq.(5.105) na eq.(5.100) com  $\beta = \frac{\pi}{2}$  ou  $\beta = \frac{3\pi}{2}$  temos

$$M = m + m\frac{g}{e}. \quad (5.106)$$

Agora, a condição de quantização de Dirac é

$$\frac{e'g}{\hbar c} = \frac{k}{2}, \quad (k \text{ inteiro}) \quad (5.107)$$

onde  $e'$  denota a carga elétrica elementar. Usualmente tomamos  $e' = e$ , onde  $e$  denota a carga do elétron. Entretanto, atualmente acredita-se que hajam cargas elétricas com valores que são

frações da carga do elétron, no caso as cargas elétricas dos quarks, e as frações no caso são 1/3 e 2/3. Sendo assim, a carga elétrica elementar deve ser tomada como

$$e' = \frac{1}{3}e, \quad (5.108)$$

que seria a carga elétrica dos quarks denominados down (d), strange (s) e bottom (b) (e respectivos anti-quarks). A condição de quantização de Dirac pode ser reescrita, portanto, como

$$g = \frac{3}{2\alpha}ek, \quad (k \text{ inteiro}), \quad (5.109)$$

onde  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$  é a constante de estrutura fina. Tomando  $k = 1$  temos

$$g = \frac{3}{2\alpha}e, \quad (5.110)$$

que introduzida na eq.(5.107) fornece

$$M = \left(1 + \frac{3}{2\alpha}\right)m, \quad (5.111)$$

ou, introduzindo valores numéricos  $1/\alpha = 137.036$ ,  $m = 0.51099$  MeV (Particle Data Group 1988),

$$M = 206.55m = 105.5\text{MeV}, \quad (5.112)$$

que é, com boa aproximação, o valor da massa do múon.

Sendo assim, com  $\beta = \frac{\pi}{2}$  ou  $\beta = \frac{3\pi}{2}$  temos as seguintes soluções:

$$\begin{aligned} \psi_{\uparrow}^{(+)} &= \sqrt{\rho}e^{\gamma_5 \pi/4}e^{-\gamma_{21}Mc^2t/\hbar}, \\ \psi_{\downarrow}^{(+)} &= \sqrt{\rho}e^{\gamma_5 \pi/4}\gamma_{31}e^{-\gamma_{21}Mc^2t/\hbar}, \\ \psi_{\uparrow}^{(-)} &= \sqrt{\rho}e^{\gamma_5 3\pi/4}e^{-\gamma_{21}Mc^2t/\hbar}, \\ \psi_{\downarrow}^{(-)} &= \sqrt{\rho}e^{\gamma_5 3\pi/4}\gamma_{31}e^{-\gamma_{21}Mc^2t/\hbar}, \end{aligned} \quad (5.113)$$

onde as soluções com índice (+) são auto-spinores de  $\Lambda_{\beta=\frac{\pi}{2}}$  e as soluções com índice (-) são auto-spinores de  $\Lambda_{\beta=\frac{3\pi}{2}}$ , ou seja,

$$\Lambda_{\beta=\frac{\pi}{2}}(\psi_{\uparrow\downarrow}^{(+)}) = \psi_{\uparrow\downarrow}^{(+)}, \quad (5.114)$$

$$\Lambda_{\beta=\frac{3\pi}{2}}(\psi_{\uparrow\downarrow}^{(-)}) = \psi_{\uparrow\downarrow}^{(-)}. \quad (5.115)$$

Desse modo, podemos tomar os projetores  $\Lambda_{\beta}$  com valores apropriados de  $\beta$  como projetores de elétron, pósitron, múon e anti-múon, ou seja,

$$\Lambda_{\beta=0} = \Lambda_{e^-}, \quad \Lambda_{\beta=\pi} = \Lambda_{e^+}, \quad (5.116)$$

$$\Lambda_{\beta=\frac{\pi}{2}} = \Lambda_{\mu^-}, \quad \Lambda_{\beta=\frac{3\pi}{2}} = \Lambda_{\mu^+}. \quad (5.117)$$

Nesse momento, a pergunta que naturalmente se coloca é se esse esquema é capaz de fornecer o espectro de massa dos demais léptons, ou seja, do táon e de outros talvez ainda desconhecidos.

Na verdade, isto é possível, mas através de hipóteses *ad hoc*, pelo menos no presente estágio. Das hipóteses possíveis, uma é capaz de reproduzir o espectro de massas de acordo com uma fórmula obtida por Barut (1980). Se reproduzirmos o esquema acima, mas agora considerando  $m$  dado por  $mc = \Omega \cdot S$  como a massa do múon ao invés do elétron, obteríamos a seguinte expressão para  $M$ , em analogia com a eq.(5.106):

$$M = \left(1 + \frac{3}{2\alpha}\right) m + m \frac{g}{e}, \quad (5.118)$$

e supondo na eq.(5.109) que  $k = 2^4 = 16$ , temos

$$M = \left(1 + \frac{3}{2\alpha}\right) m + \frac{3}{2\alpha} 2^4 m = \left(1 + 17 \frac{3}{2\alpha}\right) m = 3845m = 1785\text{MeV}, \quad (5.119)$$

que é uma boa aproximação para a massa do táon. A hipótese

$$k = p^4, \quad (p \text{ inteiro}), \quad (5.120)$$

repetindo o mesmo argumento, leva ao espectro

$$M_p = m + \frac{3}{2\alpha} m \sum_{l=0}^p l^4, \quad (5.121)$$

onde  $M_0 = m_e$ ,  $M_1 = m_\mu$ ,  $M_2 = m_\tau$ . A massa  $M_3 = 20090m = 10291\text{MeV}$  seria a massa de um possível lépton ainda desconhecido (mas não existem evidências até hoje de um lépton com esta massa).

# Observações Finais

Seria um tanto inapropriado, acreditamos, intitular “conclusões” ao que discutiremos agora. É claro que existem conclusões a serem apresentadas neste trabalho, mas nos parece que existem mais questões a serem estudadas à partir deste ponto do que questões fechadas, e estas questões em aberto constituem-se em um material para muitos estudos posteriores.

O que discutimos neste trabalho mostra o quão poderosa é a linguagem das álgebras de Clifford. O primeiro exemplo disto foi a formulação lagrangeana que apresentamos, particularmente em relação aos campos multivetoriais. Um exemplo da simplicidade do formalismo do fibrado de Clifford é que a construção do “jet bundle” (Hermann 1970) é completamente desnecessária, e toda a formulação lagrangeana pode ser desenvolvida inteiramente, e de maneira mais geral, no fibrado de Clifford. Nesse ponto a expressão para as equações de Euler-Lagrange é particularmente simples e elegante, inclusive podendo ser escrita em uma forma que independe da graduação dos multivetores. A generalidade deste formalismo é evidente, mesmo no caso de partículas, como mostra a sua aplicação à chamada mecânica pseudo-clássica (Lasenby et al. 1992). A formulação hamiltoniana é igualmente simples e elegante, e sua aplicação ao modelo BZ acreditamos que exemplifica isto muito bem – aliás, também neste caso não são necessárias construções adicionais. O melhor exemplo, entretanto, do poder de síntese das álgebras de Clifford, no caso a AET, encontra-se na expressão que as equações de Maxwell assumem neste formalismo, ou seja,  $\partial F = J$ . Não menos importante e simples é a formulação da teoria de Dirac na AET. No caso da teoria de Dirac, porém, o que mais nos chama a atenção é o seu aspecto geométrico, evidenciado através da AET e escondido na formulação usual. Neste ponto é importante observar que não apenas a teoria de Dirac tem seu aspecto geométrico revelado através da AET mas também o modelo de Weinberg-Salam, como mostrou Boudet (1993). No modelo de Boudet a parte  $SU(2)$  do grupo  $SU(2) \otimes U(1)$  é interpretado como o grupo de rotações de um espaço tridimensional efetivo ortogonal em cada ponto do espaço-tempo a um vetor tipo-tempo, enquanto a parte  $U(1)$  relaciona-se com as rotações de um plano espacial sobre ele mesmo, assim como na teoria de Dirac no qual este plano é o plano de spin.

Ainda em relação à teoria de Dirac, o uso da AET nos permitiu chegar ao intrigante resultado  $mc = \Omega \cdot S$ , o qual possui um papel central na nossa discussão sobre a relação entre EM e MQ. Lembrando que a expressão acima para a massa sugere sua origem relacionada à uma rotação e que o uso deste resultado com as equações de Maxwell do eletromagnetismo livre nos leva a uma equação similar à de Dirac, e a princípio mais satisfatória, é oportuno nesse momento citar Lorentz (1915), que em seu livro “The Theory of Electrons”, escreveu: *Something invisible is rotating when we have a magnetic field.*

Embora a relação entre eletromagnetismo e matéria tenha sido alvo de muitos estudos, não

é do nosso conhecimento nenhum trabalho que tenha exibido tão íntima relação entre eles como o nosso. De fato, o EM e a MQ aparecem como uma teoria já unificada [already unified theory]. De fato, no trabalho de Misner e Wheeler (1957) apresenta-se o EM e a gravitação como uma teoria já unificada, onde o campo eletromagnético extremal faz o papel de uma raiz quadrada “de Maxwell” do tensor de curvatura de Ricci. Nós mostramos neste trabalho que o SDH faz o papel de uma raiz quadrada “de Dirac” do campo eletromagnético. Do mesmo modo, o tensor de Tetrode é uma raiz quadrada “de Dirac” do tensor energia-momentum eletromagnético, e daí podemos introduzir a massa à partir da densidade de energia-momentum própria, ou seja,  $mc = p \cdot v = \Omega \cdot S$ , com  $\rho p = v_\mu T^{\mu\nu} \gamma_\nu$ , onde  $T^{\mu\nu}$  é o tensor de Tetrode. As teorias que aparecem já unificadas, entretanto, são as de Maxwell e a de Dirac não-linear, a qual coincide com a teoria linear quando o ângulo de Takabayasi é nulo. A teoria não-linear, porém, nos parece mais satisfatória. Por outro lado, é possível “linearizarmos” esta teoria tomando, ao invés de  $mc = \Omega \cdot S$ , a relação  $Mc = \Omega \cdot S$  com  $M = \frac{m}{\cos\beta}$ . Nesse caso a equação não-linear reduziria-se à de Dirac e por consistência deveríamos ter  $\beta = 0$  ou  $\beta = \pi$ . É interessante notar que a relação  $M = \frac{m}{\cos\beta}$  pode ser reescrita como  $M = m\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\sigma^2}}$  (fora um sinal negativo quando  $\beta$  estiver no segundo ou terceiro quadrantes), onde  $\sigma$  e  $\omega$  são os invariantes da teoria de Dirac. Esta última expressão para  $M$  é justamente a de de Broglie-Vigier para a massa variável  $M$  dentro da teoria de de Broglie (1960) da MQ. É interessante notarmos também que os nossos resultados mais os de Misner e Wheeler permitem interpretarmos a amplitude do SDH como a raiz quarta “de Dirac” da curvatura de Ricci.

Embora possamos deste modo estabelecer uma equivalência entre as equações de Maxwell e de Dirac – como estudado em Vaz e Rodrigues (1993d, 1993e), Rodrigues e Vaz (1993a), Rodrigues, Vaz e Recami (1992) – nos parece mais interessante estabelecer esta equivalência entre as equações de Maxwell e a não-linear de Dirac proposta originalmente por Daviau (1993). Como vimos, esta equação não-linear possui propriedades mais satisfatórias, mas além disto pudemos dentro deste esquema descrever tanto o elétron como o múon. Foi necessário, é claro, supor a existência de uma corrente magnética monopolar “interna”, mas é preciso lembrar que existem evidências (Akers 1990) de que os quarks devem carregar uma carga magnética. É verdade que não temos no presente uma justificativa para a origem desta corrente magnética, o que se deve ao fato de não termos um modelo para o múon. O modelo que parece se encaixar melhor no nosso esquema é tomar o múon como um estado excitado de um sistema  $e^-(e^+e^-)$ , como suposto por Sachs (1982). Barut (1980) supôs o múon, assim como os demais léptons, como estados excitados do sistema  $e^-(\nu\bar{\nu})$ , o que se encaixa no nosso modelo se pensarmos em um monopólo magnético como constituído de pares neutrino-antineutrino, como pensa Lochak (1985). O modelo de Sachs (excitação quadrupolar de pares elétron-pósitron) permite inclusive prever um tempo de vida médio para o múon em bom acordo com os dados experimentais. O fato concreto é que este é um problema completamente em aberto, o qual se fizer sentido é um problema realmente fundamental da física.

Outro problema importante que devemos considerar é como generalizar essa equivalência entre as equações de Maxwell e de Dirac para os casos com interações. Existem ao menos duas possibilidades neste sentido. A primeira é tomarmos não o eletromagnetismo de Maxwell mas sim o eletromagnetismo não-linear de Dirac (1951). De fato, à partir de uma generalização da eletrodinâmica não-linear de Dirac proposta por Rodrigues, Vaz e Recami (1993) pode-se

construir um modelo puramente eletromagnético do elétron, onde a massa tem origem eletromagnética como energia do campo e o spin é o momentum angular do campo eletromagnético. A equação da eletrodinâmica não-linear de Dirac é  $\partial F = \lambda A$ , que é uma equação do tipo Proca com a diferença que  $\lambda$  é um campo, ou seja,  $\lambda = \lambda(x)$ . Se tomarmos  $\lambda(x) = \frac{e^2}{3mc} \rho(x)$  é fácil ver que a representação spinorial de  $\partial F = J$  com  $J = \lambda A$  reduz-se, com as hipóteses já discutidas, à equação de Dirac com acoplamento minimal com o potencial eletromagnético  $A$ . Outra possibilidade é generalizar nossa teoria como uma teoria já unificada. Em outras palavras, se generalizarmos a teoria já unificada de Misner e Wheeler para casos com fontes podemos esperar que o nosso esquema possa também ser generalizado. Agora, Hammon (1990) mostrou que tal generalização é possível desde que utilizemos não o fibrado principal dos referenciais ortonormais [frame bundle] mas sim um fibrado onde os bivectores substituem os vetores, o “biframe bundle”.

Finalmente, a teoria que apresentamos do SDH também abre caminhos para novos estudos, além de resolver problemas que estavam em aberto por muito tempo. É bem provável que estes estudos tenham grande importância, por exemplo, em supersimetria.

O fato mais importante deste trabalho, porém, e que pode ser considerado uma conclusão, é que há muito ainda a ser feito nesta área de importância cada vez mais crescente.

## Referências

- Akers, D. (1990), *Int. J. Theor. Phys.* **29**, 1091.
- Barut, A. O. (1980), *Surv. High Energy Phys.* **1**, 113.
- Barut, A. O. e Duru, I. H. (1984), *Phys. Rev. Lett.* **53**, 2355.
- Barut, A. O. e Zanghi, N. (1984), *Phys. Rev. Lett.* **52**, 2009.
- Berezin, F. A. e Marinov, M. S. (1975), *JETP Lett.* **21**, 320.
- Bhabha, H. J. e Corben, H. C. (1941), *Proc. Roy. Soc. London A* **178**, 273.
- Bishop, R. L. e Goldberg, S. I. (1980), *Tensor Analysis on Manifolds*, Dover Publ., Inc.
- Boudet, R. (1991), “The Role of the Duality Rotation in the Dirac Theory”, em *The Electron*, Hestenes, D. e Weingartshofer, A. (eds.), Kluwer Acad. Publ.
- Boudet, R. (1993), “Non Abelian Gauge Fields in the Real Clifford Algebra of Space Time”, em publicação: *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics*, Proceedings of the Third International Conference, Delanghe, R., Brackx, F. e Serras, H. (eds.), Kluwer Acad. Publ.
- de Broglie, L. (1960), *Non-Linear Wave Mechanics – A Causal Interpretation*, Elviesier.
- Caldirola, P. (1977), *Lett. Nuovo Cimento* **18**, 465.
- Caldirola, P. (1983), *Lett. Nuovo Cimento* **36**, 343.
- Campolattaro, A. A. (1980), *Int. J. Theor. Phys.* **19**, 99.
- Casalbuoni, R. (1976), *Il Nuovo Cimento A* **33**, 389.
- Choquet-Bruhat, Y., de Witt-Morette, C. e Dillard-Bleick, M. (1982), *Analysis, Manifolds and Physics*, North-Holland Publ. Co.
- Clifford, W. K. (1878), *Amer. J. Math.* **1**, 350.
- Corben, H. C. (1961), *Phys. Rev.* **121**, 1833.
- Crawford, J. (1985), *J. Math. Phys.* **26**, 1439.
- Crumeyrole, A. (1990), *Orthogonal and Symplectic Clifford Algebras*, Kluwer Academic Publishers.

- Daviau, C. (1993), *Equation de Dirac Non Lineaire*, Thesis, Université de Nantes.
- Dirac, P. A. M. (1951), Proc. Roy. Soc. London **A 209**, 292.
- Doran, C., Lasenby, A. e Gull, S. (1992), “Grassmann Mechanics, Multivector Derivatives and Geometric Algebra”, pré-publicação (University of Cambridge), em publicação: Proceedings of the Second Max Born Symposium.
- Doran, C., Lasenby, A. e Gull, S. (1993), “States and Operators in the Spacetime Algebra”, pré-publicação (University of Cambridge), em publicação: Found. Phys.
- Doubrovine, B., Novikov, S. e Fomenko, A. (1987), *Géométrie Contemporaine*, vol. I, Éditions Mir.
- Faria-Rosa, M. A., Recami, E. e Rodrigues, Jr., W. A. (1986), Phys. Lett. **B 173**, 233.
- Figueiredo, V. L., Capelas de Oliveira, E. e Rodrigues, Jr., W. A. (1990), Int. J. Theor. Phys. **29**, 371.
- Fleming, G. N. (1965), Phys. Rev. **B 137**, 168.
- Fleming, G. N. (1965a), Phys. Rev. **B 139**, 963.
- Frenkel, J. (1926), Z. Phys. **37**, 243.
- Geroch, R. (1968), J. Math. Phys. **9**, 1739.
- Giannetto, E. (1985), Lett. Nuovo Cimento **44**, 145.
- Graf, W. (1978), Ann. Inst. Henri Poincaré **29**, 85.
- Gull, S. (1991), “Charged Particles at Potential Steps”, em *The Electron*, Hestenes, D. e Weingartshofer, A. (eds.), Kluwer Acad. Publ.
- Gürsey, F. (1957), Il Nuovo Cimento **5**, 784.
- Hammon, K. S. (1990), Int. J. Theor. Phys. **29**, 1127.
- Hehl, F. W., von der Heyde, P., Kerlick, G. D. e Nester, J. M. (1976), Rev. Mod. Phys. **48**, 393.
- Hermann, R. (1970), *Vector Bundles in Mathematical Physics*, W. A. Benjamim, Co.
- Hestenes, D. (1966), *Space Time Algebra*, Gordon and Breach.
- Hestenes, D. (1967), J. Math. Phys. **8**, 798.

- Hestenes, D. (1973), *J. Math. Phys.* **14**, 893.
- Hestenes, D. (1985), *Found. Phys.* **15**, 63.
- Hestenes, D. (1990), *Found. Phys.* **20**, 1213.
- Hestenes, D. (1991), “Zitterbewegung in Radiative Process”, em *The Electron*, Hestenes, D. e Weingartshofer, A. (eds.), Kluwer Acad. Publ.
- Hestenes, D. (1992), *Adv. Appl. Clif. Alg.* **2**, 215.
- Hestenes, D. (1992a), “Hamiltonian Mechanics with Geometric Algebra”, pré-publicação (Arizona State University).
- Hestenes, D. e Sobczyk, G. (1984), *Clifford Algebra to Geometric Calculus*, D. Reidel Publishing Company.
- Höhl, H. e Papapetrou, A. (1939), *Z. Phys.* **112**, 512.
- Jordan, T. F. e Mukunda, N. (1963), *Phys. Rev.* **132**, 1842.
- Juvet, G. e Schidlof, A. (1932), “Sur les nombres hypercomplexes de Clifford et leurs applications à l’analyse vectorielle ordinaire, à l’électromagnétisme de Minkowski et à la théorie de Dirac”, *Bull. Soc. Neuchâtel. sci. Nat.* **57**, 127.
- Keller, J. (1992), *Adv. Appl. Clif. Alg.* **2**, 195.
- Kleinert, H. (1989), *Gauge Fields in Condensed Matter*, vol. II, World Scientific Publ. Co.
- Krüger, H. (1991), “New Solutions of the Dirac Equation for Central Fields”, em *The Electron*, Hestenes, D. e Weingartshofer, A. (eds.), Kluwer Acad. Publ.
- Lasenby, A., Doran, C. e Gull, S. (1993), “A Multivector Derivative Approach to Lagrangian Field Theory”, pré-publicação (University of Cambridge), em publicação: *Found. Phys.*
- Lasenby, A., Doran, C. e Gull, S. (1992), “Grassmann Calculus, Pseudoclassical Mechanics and Geometric Algebra”, pré-publicação (University of Cambridge) DAMTP 92-75.
- Lochak, G. (1985), *Int. J. Theor. Phys.* **24**, 1019.
- Lorentz, H. A. (1915), *The Theory of Electron*, von Taub., Leipzig.
- Lounesto, P. (1993), *Found. Phys.* **23**, 1203.
- Lounesto, P. (1993a), “Crumeyrolle’s Strange Question: “What is a Bivector” ”, pré-publicação (Helsinki University of Technology).

- Lounesto, P. e Wene, G. P. (1987), *Acta Applic. Math.* **9**, 165.
- Mathisson, M. (1937), *Acta Phys. Polonica* **6**, 163.
- Mercier, A. (1935), *Expression des Équation de l'Électromagnétisme au moyen des Nombres de Clifford*, Thesis, Université de Genève.
- Misner, C. W. e Wheeler, J. A. (1957), *Ann. Physics* **2**, 525.
- Parra, J. M. (1992), “Relativistic Invariance of Dirac’s Equation Revisited”, em publicação: *Proceedings of the Relativity Meeting*, Bilbo, Spain, World Scientific Publ. Co.
- Parra, J. M. (1993), “Geometric Algebra versus Numerical Cartesianism. The Historical trend behind Clifford’s algebra”, em publicação: *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics*, Proceedings of the Third International Conference, Delanghe, R., Brackx, F. e Serras, H. (eds.), Kluwer Acad. Publ.
- Particle Data Group (1988), *Phys. Lett.* **B 204**, 1.
- Porteous, I. (1969), *Topological Geometry*, van Nostrand (2a. ed. Cambridge University Press (1981)).
- Pauri, M. (1980) “Canonical (possibly lagrangian) realizations of the Poincaré Group with increasing mass-spin trajectories”, em *Group Theoretical Methods in Physics*, Ehlers, J., Hepp, K., Kippenhahn, R., Weidenmüller, H. A. e Zittartz, J. (eds.), *Lecture Notes in Physics* **135**, Springer-Verlag.
- Pavšič, M., Recami, E., Rodrigues, Jr., W. A., Maccarrone, D., Raciti, F. e Salesi, G. (1992), “Spin and Electron Structure”, pré-publicação RP 45/92 IMECC-UNICAMP.
- Pryce, M. H. L. (1948), *Proc. Roy. Soc. London A* **195**, 6.
- Quilichini, P. (1971), *C. R. Acad. Sci. Paris B* **273**, 829.
- Rainich, G. (1925), *Trans. Am. Math. Soc.* **27**, 106.
- Rapoport, D. L., Rodrigues, Jr., W. A., Souza, Q. A. G. e Vaz, Jr., J. (1992), “The Riemann-Cartan-Weyl Geometry generated by a Dirac-Hestenes Spinor Field”, pré-publicação RP 57/92 IMECC-UNICAMP.
- Rawnsley, J. (1992), *Lett. Math. Phys.* **24**, 331.
- Recami, E., Mignani, R. e Baldo, M. (1974), *Lett. Nuovo Cimento* **11**, 568.
- Riesz, M. (1958), *Clifford Numbers and Spinors*, Lecture Notes No. 38, Institute for Fluid Mechanics and Applied Mathematics, University of Maryland; reprodução Kluwer (1993).

- Rodrigues, Jr., W. A. e Figueiredo, V. L. (1990), *Int. J. Theor. Phys.* **29**, 413.
- Rodrigues, Jr., W. A. e Oliveira, E. C. (1990), *Int. J. Theor. Phys.* **29**, 397.
- Rodrigues, Jr., W. A. e Vaz, Jr., J. (1993), “Zitterbewegung and Electron Structure”, em publicação: *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics*, Proceedings of the Third International Conference, Delanghe, R., Brackx, F. e Serras, H. (eds.), Kluwer Acad. Publ.
- Rodrigues, Jr., W. A. e Vaz, Jr., J. (1993a), “Nondispersive de Broglie Wave Packets from the Free Maxwell Equations”, em publicação: *Hadronic J.*
- Rodrigues, Jr., W. A., Vaz, Jr., J. e Recami, E. (1992), “Free Maxwell Equations, Dirac Equation and Nondispersive de Broglie Wave Packets”, em *Courants, Amers, Écueils em Microphysique*, G. & P. Lochak (eds.), Fondation Louis de Broglie.
- Rodrigues, Jr., W. A., Vaz, Jr., J. e Recami, E. (1993), *Found. Phys.* **23**, 469.
- Rodrigues, Jr., W. A., Souza, Q. A. G., Vaz, Jr., J. e Lounesto, P. (1993) “A Thoughtful Study of Dirac-Hestenes Spinor Fields, their Covariant Derivatives and the Dirac-Hestenes Equation on Riemann-Cartan Manifolds”, a ser publicado em *Clifford Algebras and Spinor Structures*, Ablamowicz, R. e Lounesto, P. (eds.), Cambridge University Press.
- Sachs, M. (1982), *General Relativity and Matter*, D. Reidel Publ. Co.
- Sallhöfer, H. (1986), *Zeits. für Naturforschung A* **41**, 468, 1087, 1335, 1431.
- Schrödinger, E. (1930), *Sitzungber. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl.* **24**, 418.
- Srivastava, P. P. (1985), *Supersymmetry, Superfields and Supergravity*, Adam Hilger.
- Sudarshan, E. C. G. e Mukunda, N. (1974), *Classical Dynamics: A Modern Perspective*, John Wiley & Sons, Inc.
- Takabayasi, T. (1957), *Suppl. Prog. Theor. Phys.* **4**, 1.
- Vaz, Jr., J. e Rodrigues, Jr., J. (1993), *Int. J. Theor. Phys.*, **32**, 945.
- Vaz, Jr., J. e Rodrigues, Jr., W. A. (1993a), “A Basis for Double Solution Theory”, em publicação: *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics*, Proceedings of the Third International Conference, Delanghe, R., Brackx, F. e Serras, H. (eds.), Kluwer Acad. Publ.
- Vaz, Jr., J. e Rodrigues, Jr., W. A. (1993b), “Zitterbewegung and the Eletromagnetic Field of the Electron”, pré-publicação RP 05/93 IMECC-UNICAMP, em publicação: *Phys. Lett. B.*

Vaz, Jr. J. e Rodrigues, Jr. W. A. (1993c), “Clifford Algebra Approach to the Barut-Zanghi Model as a Hamiltonian System”, pré-publicação RP 11/93 IMECC-UNICAMP.

Vaz, Jr., J. e Rodrigues, Jr., W. A. (1993d), “A Geometrical Interpretation of the Equivalence of Dirac and Maxwell Equations”, pré-publicação RP 06/93 IMECC-UNICAMP.

Vaz, Jr., J. e Rodrigues, Jr., W. A. (1993e), “A Spinor Representation of Maxwell Equations and its relationship with Dirac Equation”, em publicação: Hadronic J.

Zeni, J. R. R. e Rodrigues, Jr., W. A. (1992), Int. J. Mod. Phys. A **7**, 1793.

von Westenholz, C. (1978), *Differential Forms in Mathematical Physics*, North-Holland Publ. Co.

Weyssenhoff, J. e Raabe, A. (1947), Acta Phys. Polonica **9**, 7.