UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
IMECC - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
APLICADA

Dissertação de Mestrado

Alguns Resultados em Partições Planas

Elen Viviani Pereira da Silva

Orientador: José Plínio de Oliveira Santos

elenvps@gmail.com

Campinas 2010

ALGUNS RESULTADOS EM PARTIÇÕES PLANAS

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Elen Viviani Pereira da Silva e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 21 de Junho de 2010

Prof. Dr:. José Plínio de Oliveira Santos
Orientador

Banca Examinadora:

1 Prof. Dr:. José Plínio de Oliveira Santos
2 Prof. Dr:. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke
3 Prof. Dr:. Sueli Irene Rodrigues Costa

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em MATEMÁTICA APLICADA.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Silva, Elen Viviani Pereira da
Si38a Alguns resultados em partições planas/Elen Viviani Pereira da Silva-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2010.

Orientador : José Plínio de Oliveira Santos
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Partições (Matemática). 2.Funções geradoras. 3.Análise combinatória. 4.Séries hipergeométricas . I. Santos, J. Plínio O. (José Plínio de Oliveira). II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Some results in plane partitions

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Partitions, Mathematics. 2. Generating functions. 3. Combinatorial analysis. 4. Hypergeometric series.

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

Banca examinadora: Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos (IMECC – UNICAMP)
Profa. Dra. Sueli Irene Rodrigues Costa (IMECC – UNICAMP)
Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke (UFRGS)

Data da defesa: 14/05/2010

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática Aplicada

Dissertação de Mestrado defendida em 14 de maio de 2010 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA SANTOS

Prof. (a). Dr (a). SUELI IRENE RODRIGUES COSTA

Eduardo Brietzke

Prof. (a). Dr (a). EDUARDO HENRIQUE DE MATTOS BRIETZKE

Agradecimentos

À Deus, por tudo em minha vida.

À toda minha enorme família; que me deu todo o apoio necessário.

À todos os professores do IMECC, especialmente ao meu orientador Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos, por tudo que me ensinou nesse tempo que trabalhamos juntos.

Aos professores do Departamento de Matemática da UNESP de Ilha Solteira, que participaram da construção da minha base matemática. Em especial ao Prof. Dr. Jaime E. A. Rodrigues, meu amigo eterno.

À Capes pelo apoio financeiro.

À todos os meus velhos e novos amigos, em particular a Franciele, o Bruno, o Luciano, o Vitor e o Rodrigo.

E ao Marcos que sempre esteve ao meu lado.

Sumário

Agradecimentos **iv**

Resumo **vi**

Abstract **vii**

Introdução **1**

1 Conceitos Básicos **4**

1.1 Definições 4

1.2 Identidades Básicas 8

2 Partições Planas **13**

2.1 Função geradora para partições planas 24

3 Partições Planas Simétricas **25**

3.1 Lemas 25

3.2 Conjectura de MacMahon 83

4 Referências **85**

Resumo

Neste trabalho vamos abordar dois resultados em partições planas. O primeiro, chamado Teorema Fundamental de MacMahon, nos dá uma fórmula da função geradora de partições planas de um número natural n; cuja versão da demonstração que será apresentada neste trabalho foi a prova dada por L. Carlitz em 1967. O segundo, chamado Conjectura de MacMahon, nos dá uma fórmula para a função geradora de partições planas simétricas de um número natural n, com até s níveis e com cada parte menor do que ou igual a j, este, provado por George Andrews em 1979 com um elegante argumento combinatório. Para a demonstração desses resultados usaremos identidades combinatórias e alguns resultados sobre determinantes.

Abstract

In this paper we approach two results on plane partitions. The first, the MacMahon's Fundamental Theorem, gives us a formula for the generating function of plane partitions of a natural number n, whose version of the demonstration will be presented here was the proof given by L. Carlitz in 1967. The second, MacMahon's Conjecture, gives us a formula for the generating function for symmetric plane partitions of a natural number n with at most s rows and with each part at most j, this, as proven by George Andrews in 1979 with an elegant combinatorial argument. For the demonstration of these results we will use combinatorial identities and some results on determinants.

Introdução

Em partições planas existem funções geradoras associadas de uma simplicidade fabulosa.

O maior estudioso na área de partições e a quem se deve o crédito de grande parte dos resultados na teoria das partições planas é o Major Percy A. MacMahon. MacMahon começou seus estudos na matemática no século dezenove, em Teoria dos Invariantes, um dos tópicos mais quentes na época. Seu interesse em partições e partições planas aconteceu justamente pois alguns problemas da Teoria dos Invariantes recaiam em problemas de contagem do número de partições; enumeradas na época usando os diagramas de Ferrers.

Em 1897, MacMahon conjecturou uma fórmula da função geradora para o número de partições planas. Para sua surpresa, provar esse teorema tornou-se um desafio que levou vinte anos, sendo publicado somente em 1916 [5]. No entanto, neste trabalho apresentaremos a demonstração feita por L. Carlitz em 1967, cuja ideia é demonstrar um refinamento da fórmula de MacMahon.

Em 1898, MacMahon [4] apresentou seu primeiro estudo sobre partições n-dimensionais simétricas. Uma das partes interessantes desse artigo é a conjectura sobre a função geradora para $M(j, s; n)$, o número de partições planas simétricas com até s linhas ou níveis e com cada parte menor do que ou igual a j.

Em meados de 1960, B. Gordon [6], [7] provou a *Conjectura de MacMahon* para partições planas simétricas quando $s = \infty$. Gordon [7] observou que a bijeção de Sylvester entre partições auto-conjugadas e partições em partes ímpares distintas poderia ser diretamente estendida para partições planas mostrando que $M(j, s, n)$ poderia ser visto como o número de partições planas de n estritamente decrescente ao longo das linhas onde cada parte é ímpar e menor do que ou igual a $2s-1$, e com até j linhas. Ainda em meados de 1960, E. A. Bender e D. E. Knuth [10] desenvolveram um método combinatório para o tratamento de muitos problemas em partições planas, estendendo o trabalho de Gordon[6], [7], e de Gordon e L. Houten [8],[9]. Eles mostraram que se

$$g_j(q) = \sum_{n\geq 0} M(j, s; n)q^n$$

então

$$g_{2n} = det(C_{i-j} + C_{i+j-1})_{n\times n},$$

$$g_{2n+1}(q) = \left[\prod_{i=1}^{m}(1 + q^{2i-1})\right] det(C_{i-j} - C_{i+j})_{n\times n},$$

com $C_k = q^{k^2}\begin{pmatrix} 2m \\ m+k \end{pmatrix}_{q^2}$, onde $\begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix}_{q^r}$ é o *polinômio de Gauss (ou coeficiente q-binomial).*

Usando esses resultados, em 1979, G. Andrews apresentou uma elegante demonstração combinatorial para a *Conjectura de MacMahon*.

Neste trabalho, o objetivo é apresentar a demonstração das duas conjecturas acima citadas, a primeira diz respeito à função geradora para partições planas, e a segunda se refere à função geradora para partições planas simétricas restritas. Para tanto, no primeiro capítulo vamos apresentar as definições, notações e duas identidades importantes: o somatório de *Chu-Vandermonde* e uma recorrência do *polinômio de Gauss.*

No segundo capítulo apresentaremos a versão da demonstração da fórmula para a função geradora de partições planas, feita por L. Carlitz, derivada como um corolário de uma série de lemas e teoremas sobre partições planas com restrições sobre os níveis, as colunas e cada parte.

No terceiro capítulo apresentaremos a demonstração da *Conjectura de MacMahon*: uma fórmula para a função geradora de partições planas simétricas com restrições sobre os níveis e cada parte, feita por G. Andrews. Para tanto, na primeira seção desse capítulo abordaremos alguns resultados de séries hipergeométricas básicas, identidades combinatórias e alguns resultados sobre determinantes. Na segunda seção, apresentaremos a demonstração da conjectura, que segue diretamente da aplicação dos lemas abordados na primeira seção do terceiro capítulo.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Neste capítulo apresentaremos as definições, as notações adotadas e alguns resultados combinatórios básicos que iremos utilizar na demonstração dos lemas e teoremas nos próximos capítulos.

1.1 Definições

Nesta seção introduziremos definições e a notação que vamos adotar ao longo do trabalho.

Definição 1.1.1. *Definimos uma partição plana de n como sendo uma representação*

$$n = \sum_{i,k \geq 1} n_{i,k} \tag{1.1}$$

tal que

(i) $n_{i,k} \in \mathbb{N}$

(ii) $n_{i,k} \geq n_{i,k+1}$

(iii) $n_{i,k} \geq n_{i+1,k}$.

Definição 1.1.2. *$p_{k,r}(n, m)$ é o número de partições planas de m com até r colunas, com até k níveis, e cada parte menor do que ou igual a n.*

Definição 1.1.3. *Partição Plana Simétrica de n com até s níveis e com cada parte menor do que ou igual a j é uma partição plana tal que*

(i) $n_{i,k} = n_{k,i}$

(ii) $n_{i,k} = 0$ *se* $i > s$

(iii) $n_{11} \leq j$.

Definição 1.1.4. *$M(j, s; n)$ é o número de partições planas simétricas de n com até s linhas ou níveis e com cada parte menor do que ou igual a j.*

O conhecimento sobre partições e funções geradoras permite que façamos uma generalização dos números binomiais. Na linguagem combinatória, $\binom{n}{k}$ é definido como o número de maneiras de escolher k elementos em um conjunto contendo n elementos, e portanto obtemos que para $n \geq j > 0$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{j(n-j)!}.$$

Os números binomiais estão usualmente presentes no *Triângulo de Pascal*, pelo qual vemos que os números da $n-$ésima linha são os coeficientes de $(1+z)^n$.

Desta forma podemos introduzir o *Teorema binomial*, usualmente escrito como

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) x^{n-k} y^k.$$

Agora consideremos os caminhos possíveis no primeiro quadrante, partindo da origem $(0,0)$ até o ponto $(n-k,k)$ através de n traços unitários verticais ou horizontais,[11]. Observe o caso para $n=2$ e $k=1$.

Na primeira figura não temos nenhuma área abaixo do caminho, no entanto, na segunda a área é igual á 1. Podemos expressar $\binom{n}{k}$ caminhos de acordo com a área abaixo da curva, descrevendo o caminho com x se andamos na horizontal e y se andamos na vertical. Uma vez que

$$(x+y)^2 = xx + xy + yx + yy,$$

observamos que podemos expressar a área reescrevendo cada termo com x em primeiro lugar e adicionando um elemento de área para trocar yx por xy. Usaremos o parâmetro q para fazer essa contagem, o seja, queremos que

$$yx = qxy,$$

e assumimos

$$yq = qy,$$

$$xq = qx.$$

Desta forma temos

$$(x+y)^2 = x^2 + (1+q)xy + y^2.$$

Com um argumento combinatório, podemos estender a propriedade do *Triângulo de Pascal* para os coeficientes binomiais:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1},$$

e determinar uma expressão para o coeficiente $q-$binomial, que definimos:

Definição 1.1.5. *Definimos os coeficientes $q-$binomiais $\binom{n}{k}_q$ por*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q x^{n-k} y^k$$

quando $yq = qy, xq = qx, yx = qxy$.

Uma vez que $(x+y)^{n+1} = (x+y)^n(x+y)$ temos

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k}_q x^{n+1-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q x^{n-k} y^k (x+y).$$

Mas como $y^k x = q^k x y^k$ obtemos

$$\binom{n+1}{k}_q = \binom{n}{k}_q q^k + \binom{n}{k-1}_q. \tag{1.2}$$

Pelo mesmo argumento, usando que $(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n$, obtemos

$$\binom{n+1}{k}_q = \binom{n}{k}_q + q^{n+1-k} \binom{n}{k-1}_q. \tag{1.3}$$

Combinando 1.2 e 1.3 temos

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(1-q)...(1-q^n)}{(1-q)...(1-q^k)(1-q)...(1-q^{n-k})},$$

e assim podemos definir:

Definição 1.1.6. $\left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array}\right)_{q^r}$ *é o polinômio de Gauss ou coeficiente q-binomial definido por:*

$$\left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array}\right)_{q^r} = \begin{cases} \frac{(1-q^{nr})(1-q^{(n-1)r})\cdots(1-q^{(n-m+1)r})}{(1-q^{mr})(1-q^{(m-1)r})\cdots(1-q^r)}, & 0 < m \leq n \\ 1, & m = 0 \\ 0, & m < 0, m > n \end{cases} \tag{1.4}$$

Definição 1.1.7. $(q)_n = (1-q)(1-q^2)...(1-q^n)$.

Definição 1.1.8. $(A, q)_n = (1-A)(1-Aq)...(1-Aq^{n-1})$.

Definição 1.1.9. $\pi_r(n_1, n_2, ..., n_k, q)$ *denota a função geradora para partições planas com até r colunas, até k linhas ou níveis e com n_i blocos na primeira entrada no i-ésimo nível.*

Definição 1.1.10. $\pi_{r,k}(n, q)$ *denota a função geradora para partições planas com até k níveis, com até r colunas e com cada parte menor do que ou igual a n.*

1.2 Identidades Básicas

Nesta seção apresentaremos algumas identidades combinatórias básicas.

Teorema 1.2.1. *Seja V_n um espaço vetorial de dimensão finita n sobre $GF(q)$, um corpo finito de q elementos. Então existem exatamente*

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)_q = \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-k+1})}{(1-q^k)(1-q^{k-1})\cdots(1-q)}, \tag{1.5}$$

subespaços de V_n de dimensão k.

Demonstração:

Primeiramente, precisamos determinar o número de k-uplas de vetores linearmente dependentes $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ existentes em V_n. Para tomar v_1 temos $q^n - 1$ escolhas. Como $v_2 \notin span\{v_1\}$ então temos $q^n - q$ maneiras de escolher v_2. Em geral $v_i \notin span\{v_1, ...v_{i-1}\}$ então existem $q^n - q^{i-1}$ maneiras de escolher v_i. Logo, o número de k-uplas de vetores linearmente independente é

$$(q^n - 1)(q^n - q)....(q^n - q^{k-1}).$$

No entanto, diferentes k-uplas podem gerar o mesmo subespaço. De fato o número de k-uplas que geram o mesmo subespaço é o número de k-uplas linearmente independentes que existem em um espaço k-dimensional: $(q^k - 1)...(q^k - q^{k-1})$, logo o número de subespaços k-dimensionais de V_n é

$$\frac{(q^n-1)...(q^n-q^{k-1})}{(q^k-1)...(q^k-q^{k-1})}$$

$$= \frac{q^{k(k-1)/2}(-1)^k(1-q^n)(1-q^{n-1})...(1-q^{n-k+1})}{q^{k(k-1)/2}(-1)^k(1-q^k)(1-q^{k-1})...(1-q)}$$

$$= \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-m+1})}{(1-q^m)(1-q^{m-1})\cdots(1-q)} = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)_q.$$

□

Teorema 1.2.2. *(Somatório de Chu-Vandermonde) Para inteiros m, n e h*

$$\sum_{l=0}^{h} \begin{pmatrix} n \\ l \end{pmatrix}_q \begin{pmatrix} m \\ h-l \end{pmatrix}_q q^{l(m-h+l)} = \begin{pmatrix} m+n \\ h \end{pmatrix}_q . \tag{1.6}$$

Demonstração:

Considere V_{m+n} um espaço vetorial finito de dimensão $m+n$ sobre $GF(q)$, um corpo finito contendo q elementos, e V_m um subespaço de dimensão m fixado.

Sendo $GF(q)$ um corpo finito contendo q elementos, q é potência de um número primo, e portanto, pode assumir uma infinidade de valores. Tanto o lado esquerdo, quanto o lado direito da igualdade 1.6 são polinômios em q, logo, se mostrarmos que eles coincidem para uma infinidade de valores, eles serão idênticos.

Sabemos que $\binom{m+n}{h}_q$ é o número de subespaços de V_{m+n} de dimensão h.

Seja T_l o número de subespaços h-dimensionais de V_{m+n} que interceptam V_m em um subespaço l-dimensional. Para contar esses subespaços temos que determinar o número de h-uplas linearmente independentes $\{x_1, ..., x_l, y_1, ..., y_{h-l}\}$ tais que $x_i \in V_m$ e $y_j \notin V_m$. Podemos escolher os $x_i's$ de $(q^m - 1)...(q^m - q^{l-1})$ maneiras, e os $y_j's$ podem ser escolhidos em $(q^{m+n} - q^m)...(q^{m+n} - q^{m+(h-l)-1})$ maneiras. Assim, o número de h-uplas do tipo $\{x_1, ..., x_l, y_1, ..., y_{h-l}\}$ é

$$(q^m - 1)...(q^m - q^{l-1})(q^{m+n} - q^m)...(q^{m+n} - q^{m+(h-l)-1}). \tag{1.7}$$

No entanto pode ser que diferentes h-uplas gerem o mesmo espaço, ou seja, alguma dessas h-uplas pertencem ao mesmo V_h com as primeiras l entradas em V_l e o restante fora de V_l. Assim, para obter T_l temos que dividir 1.7 por

$$(q^l-1)...(q^l-q^{l-1})(q^h-q^l)...(q^h-q^{l+(h-l)-1})$$

logo, temos

$$T_l = \frac{(q^m-1)(q^m-q)...(q^m-q^{l-1})(q^{m+n}-q^m)...(q^{m+n}-q^{m+h-l-1})}{(q^l-1)(q^l-q)...(q^l-q^{l-1})(q^h-q^l)...(q^h-q^{h-1})}.$$

E colocando q^m e q^l em evidência, obtemos:

$$= \frac{(q^m-1)q(q^{m-1}-1)..q^{l-1}(q^{m-(l-1)}-1)(q^m)^{h-l}[(q^n-1)...(q^n-q^{h-l-1})]}{(q^l-1)q(q^{l-1}-1)...q^{l-1}(q-1)(q^l)^{h-l}[(q^{h-l}-1)...(q^{h-l}-q^{h-l-1})]}$$

$$= \begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix}_q \begin{pmatrix} n \\ h-l \end{pmatrix}_q q^{(m-l)(h-l)}$$

portanto

$$\begin{pmatrix} m+n \\ h \end{pmatrix}_q = \sum_{l=0}^{h} T_l = \sum_{l=0}^{h} \begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix}_q \begin{pmatrix} n \\ h-l \end{pmatrix}_q q^{(m-l)(h-l)}.$$

Trocando $l = h-l$ temos

$$= \sum_{l=0}^{h} \begin{pmatrix} m \\ h-l \end{pmatrix}_q \begin{pmatrix} n \\ l \end{pmatrix}_q q^{(m-h+l)l}.$$

$\square$

Lema 1.2.3.

$$\binom{m+n+1}{m+1}_q = \sum_{j=0}^{n} q^j \binom{m+j}{m}_q,$$

para todo $m, n \geq 0$.

Demonstração: *A prova é feita por indução sobre* n. *Para* $n = 0$ *nada temos a fazer. Assuma o resultado válido para* n *e provemos que vale para* $n+1$. *Como*

$$\binom{n}{m}_q = \binom{n-1}{m-1}_q + q^m \binom{n-1}{m}_q$$

segue que

$$\begin{aligned}\binom{n+m+2}{m+1}_q &= \binom{n+m+1}{m+1}_q + q^{n+1}\binom{n+m+1}{m}_q \\ &= \sum_{j=0}^{s} \binom{m+j}{m}_q + q^{n+1}\binom{n+m+1}{m}_q \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} q^j \binom{m+j}{m}_q.\end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Partições Planas

Neste capítulo apresentaremos a demonstração feita por L. Carlitz, sobre a função geradora para partições planas.

Lema 2.0.4. *$\pi_r(n_1, n_2, ..., n_k, q)$ é determinada pela relação de recorrência e condição inicial:*

$$\pi_{r+1}(n_1, n_2, ..., n_k, q) = q^{n_1+n_2+...+n_k}$$

$$\times \sum_{m_k=0}^{n_k} \sum_{m_{k-1}=m_k}^{n_{k-1}} ... \sum_{m_1=m_2}^{n_1} \pi_r(m_1, ..., m_k, q), \tag{2.1}$$

$$\pi_1(n_1, n_2, ..., n_k, q) = q^{n_1+n_2+...+n_k}. \tag{2.2}$$

A equação 2.2 é óbvia. O caso geral 2.1 com até $r+1$ colunas é facilmente verificado retirando a coluna inicial $(n_1, n_2, ...n_k)$ e examinando os arranjos de até r colunas.

Nós agora podemos facilmente calcular $\pi_r(n_1, n_2, ..., n_k, q)$ usando 2.1 e 2.2. Por exemplo:

Exemplos 2.0.5. $\pi_2(n,m,q) = q^{m+n} \sum_{m_1=0}^{m} \sum_{n_1=m_1}^{n} q^{n_1+m_1}$

$$= q^{m+n} \sum_{m_1=0}^{m} \left(q^{m_1} (\sum_{n_1=m_1}^{n} q^{n_1}) \right)$$
$$= q^{m+n} \sum_{m_1=0}^{m} q^{m_1} \left(\frac{q^{m_1}(q^{n-(m_1-1)} - 1)}{q-1} \right)$$
$$= q^{m+n} \sum_{m_1=0}^{m} q^{m_1} \left(\frac{q^{n+1} - q^{m_1}}{q-1} \right)$$
$$= q^{m+n} \sum_{m_1=0}^{m} q^{m_1} \left(\frac{q^{m_1} - q^{n+1}}{1-q} \right).$$

Mas,

$$\sum_{m_1=0}^{m} q^{m_1} \left(q^{m_1} - q^{n+1} \right)$$
$$= \sum_{k=0}^{m} q^{2k} - \sum_{j=1}^{m+1} q^{n+j}$$
$$= \frac{q^0(q^{2(m+1)}-1)}{q^2-1} - \frac{q^{n+1}(q^{m+1}-1)}{q-1}$$
$$= \frac{1-q^{2m+2}}{1-q^2} - \frac{q^{n+1}(1-q^{m+1})}{1-q}.$$

Logo,

$$\pi_2(n,m,q) = q^{m+n} \left(\frac{1-q^{2m+2}}{1-q^2} - \frac{q^{n+1}(1-q^{m+1})}{1-q} \right) (1-q)^{-1}$$
$$= \frac{q^{m+n}}{(1-q)} \left(\frac{(1-q^{m+1})(1-q^{m+1})}{(1-q^2)} - \frac{q^{n+1}(1-q^{m+1})}{(1-q)} \right)$$
$$= \frac{q^{m+n}(1-q^{m+1})}{(1-q)(1-q^2)} \left[(1+q^{m+1}) - q^{n+1}(1+q) \right]$$
$$= \frac{q^{m+n}(1-q^{m+1})}{(1-q)(1-q^2)} \left[(1-q^{n+1})(1+q) - q(1-q^m) \right]$$
$$= q^{m+n} \left[\frac{(1-q^{n+1})(1-q^{m+1})}{1-q^2} - \frac{q(1-q^m)(1-q^{m+1})}{(1-q)(1-q^2)} \right]$$

$$= q^{m+n}\left\{\begin{pmatrix} n+1 \\ 1 \end{pmatrix}_q \begin{pmatrix} m+1 \\ 1 \end{pmatrix}_q - q\begin{pmatrix} m+1 \\ 2 \end{pmatrix}_q\right\}. \tag{2.3}$$

Lema 2.0.6. $\pi_r(n,m,q) = q^{n+m}\left\{\begin{pmatrix} n+r-1 \\ r-1 \end{pmatrix}_q \begin{pmatrix} m+r-1 \\ r-1 \end{pmatrix}_q + \right.$

$$\left. -q\begin{pmatrix} m+r-1 \\ r \end{pmatrix}_q \begin{pmatrix} n+r-1 \\ r-2 \end{pmatrix}_q\right\}.$$

Demonstração: *A prova será por indução sobre* r*. Para* $r = 1, 2$ *o resultado é válido. Suponha válido para* r *e mostremos que o resultado é válido para* $r+1$*. De fato,*

$$\begin{aligned}
\pi_{r+1}(h,j,q) &= q^{h+j}\sum_{m=0}^{j}\sum_{n=m}^{h}\pi_r(n,m,q) \\
&= q^{h+j}\sum_{m=0}^{j}\sum_{n=m}^{h} q^{m+n}\left\{\begin{pmatrix} n+r-1 \\ r-1 \end{pmatrix}_q \begin{pmatrix} m+r-1 \\ r-1 \end{pmatrix}_q + \right. \\
&\qquad\left. -q\begin{pmatrix} m+r-1 \\ r \end{pmatrix}_q \begin{pmatrix} n+r-1 \\ r-2 \end{pmatrix}_q\right\} \\
&= q^{h+j}\sum_{m=0}^{j} q^{m}\begin{pmatrix} m+r-1 \\ r-1 \end{pmatrix}_q \sum_{n=m}^{h} q^{n}\begin{pmatrix} n+r-1 \\ r-1 \end{pmatrix}_q + \\
&\qquad -\sum_{m=0}^{j} q^{m}\begin{pmatrix} m+r-1 \\ r \end{pmatrix}_q q\sum_{n=m}^{h} q^{n}\begin{pmatrix} n+r-1 \\ r-2 \end{pmatrix}_q \\
&= q^{h+j}\sum_{m=0}^{j} q^{m}\begin{pmatrix} m+r-1 \\ r-1 \end{pmatrix}_q \sum_{n=m}^{h} q^{n}\begin{pmatrix} n+r-1 \\ r-1 \end{pmatrix}_q + \\
&\qquad -\sum_{m=0}^{j} q^{m}\begin{pmatrix} m+r-1 \\ r \end{pmatrix}_q \sum_{n=m}^{h} q^{n+1}\begin{pmatrix} n+r-1 \\ r-2 \end{pmatrix}_q .
\end{aligned}$$

Mas

$$\sum_{n=m}^{h} q^n \begin{pmatrix} n+r-1 \\ r-1 \end{pmatrix}_q = \sum_{n=0}^{h} q^n \begin{pmatrix} n+r-1 \\ r-1 \end{pmatrix}_q - \sum_{n=0}^{m-1} q^n \begin{pmatrix} n+r-1 \\ r-1 \end{pmatrix}_q$$
$$= \begin{pmatrix} r+h \\ h \end{pmatrix}_q - \begin{pmatrix} r+m-1 \\ r \end{pmatrix}_q$$

e

$$\sum_{n=m}^{h} q^{n+1} \begin{pmatrix} n+r-1 \\ r-2 \end{pmatrix}_q = \sum_{n+1=m+1}^{h+1} q^{n+1} \begin{pmatrix} n+r-1 \\ r-2 \end{pmatrix}_q$$
$$= \sum_{n+1=m+1}^{h+1} q^{n+1} \begin{pmatrix} n+1+r-2 \\ r-2 \end{pmatrix}_q$$
$$= \sum_{n+1=0}^{h+1} q^{n+1} \begin{pmatrix} n+1+r-2 \\ r-2 \end{pmatrix}_q - \sum_{n+1=0}^{m} q^{n+1} \begin{pmatrix} n+1+r-2 \\ r-2 \end{pmatrix}_q$$
$$= \begin{pmatrix} h+r \\ r-1 \end{pmatrix}_q - \begin{pmatrix} m+r-1 \\ r-1 \end{pmatrix}_q .$$

Assim

$$\pi_{r+1}(h,j,q) = q^{h+j} \sum_{m=0}^{j} q^m \begin{pmatrix} m+r-1 \\ r-1 \end{pmatrix}_q \left\{ \begin{pmatrix} r+h \\ h \end{pmatrix}_q - \begin{pmatrix} r+m-1 \\ r \end{pmatrix}_q \right\} +$$
$$- \sum_{m=0}^{j} q^m \begin{pmatrix} m+r-1 \\ r \end{pmatrix}_q \left\{ \begin{pmatrix} h+r \\ r-1 \end{pmatrix}_q - \begin{pmatrix} m+r-1 \\ r-1 \end{pmatrix}_q \right\}$$
$$= q^{h+j} \begin{pmatrix} r+h \\ h \end{pmatrix}_q \sum_{m=0}^{j} q^m \begin{pmatrix} m+r-1 \\ r-1 \end{pmatrix}_q - \begin{pmatrix} h+r \\ r-1 \end{pmatrix}_q \sum_{m=0}^{j} q^m \begin{pmatrix} m+r-1 \\ r \end{pmatrix}_q .$$

No entanto

$$\sum_{m=1}^{j} q^m \begin{pmatrix} m+r-1 \\ r \end{pmatrix}_q = q\sum_{m=1}^{j-1} q^{m-1} \begin{pmatrix} m+r-1 \\ r \end{pmatrix}_q$$

$$= q \begin{pmatrix} r+j \\ r+1 \end{pmatrix}_q ,$$

$$\sum_{m=0}^{j} q^m \begin{pmatrix} m+r-1 \\ r-1 \end{pmatrix}_q = \begin{pmatrix} r+j \\ r \end{pmatrix}_q ,$$

portanto

$$\pi_{r+1}(h,j,q) = q^{h+j} \left\{ \begin{pmatrix} r+h \\ h \end{pmatrix}_q \begin{pmatrix} r+j \\ r \end{pmatrix}_q - q \begin{pmatrix} h+r \\ r-1 \end{pmatrix}_q \begin{pmatrix} r+j \\ r+1 \end{pmatrix}_q \right\}.$$

$\square$

Teorema 2.0.7.

$$\pi_r(n_1, n_2, ..., n_k, q) = q^{n_1+n_2+...+n_k} det \left[q^{\frac{1}{2}(i-j)(i-j-1)} \begin{pmatrix} n_j+r-1 \\ r-i+j-1 \end{pmatrix}_q \right]_{1\leq i,j\leq k} \tag{2.4}$$

Demonstração: *Considere a matriz* $A = \left[q^{\frac{1}{2}(i-j)(i-j-1)} \begin{pmatrix} n_j+r-1 \\ r-i+j-1 \end{pmatrix}_q \right]_{1\leq i,j\leq k}$.
A prova será feita por indução sobre r. Quando $r=1$, *a matriz A é triangular superior com* $1's$ *na diagonal. E portanto, para* $r=1$ *é trivial. Usando 2.1 temos*

$$q^{-n_1-...-n_k}\pi_{r+1}(n_1, ...n_k, q)$$

$$= \sum_{m_k=0}^{n_k} \sum_{m_{k-1}=m_k}^{n_{k-1}} ... \sum_{m_1=m_2}^{n_1} q^{m_1+m_2+...+m_k}$$

$$\times det\left[q^{\frac{1}{2}(i-j)(i-j-1)}\begin{pmatrix} m_j+r-1 \\ r-i+j-1 \end{pmatrix}_q\right]_{1\le i,j\le k}.$$

Podemos calcular a soma interna

$$\sum_{m_1=m_2}^{n_1} q^{m_1} det\left[q^{\frac{1}{2}(i-j)(i-j-1)}\begin{pmatrix} m_j+r-1 \\ r-i+j-1 \end{pmatrix}_q\right]_{1\le i,j\le k}$$

$$=\sum_{m_1=m_2}^{n_1} q^{m_1}\left\{\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}q^{\frac{1}{2}(i-1)(i-2)}\begin{pmatrix} m_1+r-1 \\ r-i \end{pmatrix}_q det(A_{i1})\right\}$$

onde A_{ij} *é a matriz obtida de* A *retirando a linha* i *e a coluna* j*. Note que* $det(A_{i1})$ *não depende de* m_i*. Logo,*

$$=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}q^{\frac{1}{2}(i-1)(i-2)}\left\{\sum_{m_1=m_2}^{n_1} q^{m_1}\begin{pmatrix} m_1+r-1 \\ r-i \end{pmatrix}_q\right\}det(A_{i1})$$

$$=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}q^{\frac{1}{2}(i-1)(i-2)}q^{-i+1}\left\{\sum_{m_1=m_2}^{n_1} q^{m_1+i-1}\begin{pmatrix} m_1+r-1 \\ r-i \end{pmatrix}_q\right\}det(A_{i1}).$$

Usando a igualdade 1.2 temos

$$=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}q^{\frac{1}{2}(i-1)(i-4)}\left\{\sum_{m_1=m_2}^{n_1}\begin{pmatrix} m_1+r \\ m_1+i-1 \end{pmatrix}_q-\begin{pmatrix} m_1+r-1 \\ m_1+i-2 \end{pmatrix}_q\right\}det(A_{i1})$$

$$=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}q^{\frac{1}{2}(i-1)(i-4)}\left\{\sum_{m_1=m_2}^{n_1}\begin{pmatrix} m_1+r \\ r-i+1 \end{pmatrix}_q-\begin{pmatrix} m_1+r-1 \\ r-i+1 \end{pmatrix}_q\right\}det(A_{i1})$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} q^{\frac{1}{2}(i-1)(i-4)} \left\{ \begin{pmatrix} n_1 + r \\ r - i + 1 \end{pmatrix}_q - \begin{pmatrix} m_2 + r - 1 \\ r - i + 1 \end{pmatrix}_q \right\} det(A_{i1}).$$

Agora a i-ésima inalterada entrada da segunda coluna é

$$q^{\frac{1}{2}(i-2)(i-3)} \begin{pmatrix} m_2 + r - 1 \\ r - i + 1 \end{pmatrix}_q ,$$

então se nós multiplicarmos a segunda coluna por q^{-1} *e adicionarmos o resultado a primeira coluna, obtemos a i-ésima entrada da transformada primeira coluna dada por*

$$q^{\frac{1}{2}(i-1)(i-4)} \begin{pmatrix} n_1 + r \\ r - i + 1 \end{pmatrix}_q .$$

Assim temos um $(k-1)-$*somatório com o determinante de uma matriz semelhante a* A, A_1, *cuja i-ésima entrada da primeira coluna é*

$$q^{\frac{1}{2}(i-1)(i-4)} \begin{pmatrix} n_1 + r \\ r - i + 1 \end{pmatrix}_q$$

e as demais colunas permanecem inalteradas.

Agora tome a soma respectiva a m_2.

$$\sum_{m_2=m_3}^{n_2} q^{m_2} det(A_1)$$

$$= \sum_{m_2=m_3}^{n_2} q^{m_2} \left\{ \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} q^{\frac{1}{2}(i-2)(i-3)} \begin{pmatrix} m_2 + r - 1 \\ r - i + 1 \end{pmatrix}_q det(A_{1_{i2}}) \right\},$$

onde $A_{1_{i2}}$ *é a matriz obtida de* A_1 *retirando a linha* i *e a segunda coluna. Observe que* $det(A_{1_{i2}})$ *não depende de* m_2, *assim*

$$= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}q^{\frac{1}{2}(i-2)(i-3)}\left\{\sum_{m_2=m_3}^{n_2} q^{m_2}\begin{pmatrix} m_2+r-1 \\ r-i+2 \end{pmatrix}_q\right\} det(A_{1_{i2}})$$

$$= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}q^{\frac{1}{2}(i-2)(i-3)}\left\{\sum_{m_2=m_3}^{n_2} \begin{pmatrix} m_2+r \\ r-i+2 \end{pmatrix}_q - \begin{pmatrix} m_2+r-1 \\ r-i+2 \end{pmatrix}_q\right\} det(A_{1_{i2}})$$

$$= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}q^{\frac{1}{2}(i-2)(i-3)}\left\{\begin{pmatrix} n_2+r \\ r-i+2 \end{pmatrix}_q - \begin{pmatrix} m_3+r-1 \\ r-i+2 \end{pmatrix}_q\right\} det(A_{1_{i2}}).$$

Agora multiplicamos a terceira coluna por q^{-2} *e adicionamos o resultado com a segunda coluna, cuja i-ésima entrada se torna*

$$q^{\frac{1}{2}(i-1)(i-5)}\begin{pmatrix} n_2+r \\ r-i+2 \end{pmatrix}_q .$$

No j-ésimo somatório com respeito a m_j, *multiplicamos a (j+1)-ésima coluna por* q^{-j} *e adicionamos o resultado a j-ésima coluna, cuja entrada vai se tornar*

$$q^{\frac{1}{2}(i-j)(i-j-3)}\begin{pmatrix} n_j+r \\ r-i+j \end{pmatrix}_q .$$

Após efetuar todas as k *somas, obtemos*

$$q^{-n_1-n_2-...-n_k}\pi_{r+1}(n_1, n_2, ..., n_k, q)$$

$$= det \left[q^{\frac{1}{2}(i-j)(i-j-3)} \begin{pmatrix} n_j + r \\ r - i + j \end{pmatrix}_q \right]. \tag{2.5}$$

Se multiplicarmos a i-ésima linha do determinante em 2.5 por q^{i-1} e dividirmos a j-ésima coluna por q^{j-1}, obtemos

$$\frac{\prod_{i=1}^{k} q^{i-1}}{\prod_{j=1}^{k} q^{j-1}} det \left[q^{\frac{1}{2}(i-j)(i-j-3)+(i-j)} \begin{pmatrix} n_j + r \\ r - i + j \end{pmatrix}_q \right]$$

$$= det \left[q^{\frac{1}{2}(i-j)(i-j-1)} \begin{pmatrix} n_j + r \\ r - i + j \end{pmatrix}_q \right]$$

e, portanto,

$$\pi_{r+1}(n_1, n_2, ..., n_k, q) = q^{n_1+n_2+...+n_k} det \left[q^{\frac{1}{2}(i-j)(i-j-1)} \begin{pmatrix} n_j + r \\ r - i + j \end{pmatrix}_q \right]_{1 \leq i,j \leq k}$$

como queríamos. $\square$

Como, pelas definições 1.12 e 1.110 temos

$$\pi_{k,r}(n, q) = \sum_{m=0}^{\infty} p_{k,r}(m, n) q^n,$$

notamos, por 2.1, que

$$\pi_{k,r}(n, q) = \sum_{n_k \leq ... \leq n_1 \leq n} \pi_r(n_1, ..., n_k; q) = q^{-kn} \pi_{r+1}(n, ..., n; q) \tag{2.6}$$

e por 2.4 segue que

$$\pi_{k,r}(n; q) = det \left[q^{\frac{1}{2}(i-j)(i-j-1)} \begin{pmatrix} n + r \\ r - i + j \end{pmatrix}_q \right]_{1 \leq i,j \leq k}, \tag{2.7}$$

ou seja, é possível representar o polinômio $\pi_{k,r}(n,q)$ como um simples quociente de produtos de expressões $(q)_j$.

Teorema 2.0.8.

$$\pi_{k,r}(n,q) = \frac{(q)_1(q)_2\cdots(q)_{k-1}}{(q)_r(q)_{r+1}\cdots(q)_{r+k-1}}\frac{(q)_{n+r}(q)_{n+r+1}\cdots(q)_{n+r+k-1}}{(q)_n(q)_{n+1}\cdots(q)_{n+k-1}} \tag{2.8}$$

Demonstração:

Seja $W(k,r) = det\left[q^{ri+\frac{1}{2}i(i-1)}\begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix}_q\right]_{0\leq i,j\leq k-1}$ *então, como determinante é uma função multiplicativa,*

$$\pi_{k,r}(n;q)W(k,r) = det(c_{i,j})_{0\leq i,j\leq k-1},$$

onde

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= \sum_{s=0}^{j} q^{\frac{1}{2}s(s-1)}\begin{pmatrix} j \\ s \end{pmatrix}_q q^{rs+\frac{1}{2}(i-s)(i-s-1)}\begin{pmatrix} n+r \\ n+i-s \end{pmatrix}_q \\ &= q^{\frac{1}{2}i(i-1)}\sum_{s=0}^{j} q^{s(s-i+r)}\begin{pmatrix} n+r \\ n+i-s \end{pmatrix}_q \\ &= q^{\frac{1}{2}i(i-1)}\begin{pmatrix} n+r+j \\ n+i \end{pmatrix}_q, \end{aligned}$$

pelo Lema 1.2.3.

Logo, temos que

$$\pi_{k,r}(n;q)W(k,r) = det\left[q^{\frac{1}{2}i(i-1)}\begin{pmatrix} n+r+j \\ n+i \end{pmatrix}_q\right]$$

$$= \frac{(q)_{n+r}(q)_{n+r+1}\cdots(q)_{n+r+k-1}}{(q)_n(q)_{n+1}\cdots(q)_{n+k-1}} det\left(\frac{q^{\frac{1}{2}l(l-1)}}{(q)_{r-l+j}}\right)$$

$$= \frac{(q)_{n+r}(q)_{n+r+1}\cdots(q)_{n+r+k-1}}{(q)_n(q)_{n+1}...(q)_{n+k-1}} C(k,r). \tag{2.9}$$

Como $W(k,r)$ e $C(k,r)$ não dependem de n e a matriz do determinante $W(k,r)$ é triangular superior com diagonal diferente de zero, ou seja, $W(k,r) = \prod_{i=0}^{k-1} q^{ri+\frac{1}{2}i(i-1)} \neq 0$, podemos determinar $\frac{C(k,r)}{W(k,r)}$ fazendo $n = 0$ em 2.9. Logo temos

$$\frac{C(k,r)}{W(k,r)} = \frac{(q)_1(q)_2\cdots(q)_{k-1}}{(q)_r(q)_{r+1}\cdots(q)_{r+k-1}} \tag{2.10}$$

e então

$$\pi_{k,r}(n,q) = \frac{(q)_1(q)_2\cdots(q)_{k-1}(q)_{n+r}(q)_{n+r+1}\cdots(q)_{n+r+k-1}}{(q)_r(q)_{r+1}\cdots(q)_{r+k-1}(q)_n(q)_{n+1}\cdots(q)_{n+k-1}}.$$

□

O Teorema 2.0.8 implica diretamente a fórmula de MacMahon para a função geradora para partições planas com até k colunas $\pi_{k,\infty}(\infty; q)$:

Corolário 2.0.9. *Para $|q| < 1$,*

$$\sum_{m=0} p_{k,\infty}(m,\infty)q^m = \prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)^{-min(k,j)}. \tag{2.11}$$

Demonstração: *A demonstração da identidade 2.11 segue do Teorema* 2.0.8 *quando temos r e n tendendo ao infinito.* □

2.1 Função geradora para partições planas

Corolário 2.1.1. ***(Fórmula de MacMahon para partições planas:)*** *A função geradora para o número de partições planas é*

$$\sum_{m=0} p_{\infty,\infty}(m,\infty)q^m = \prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)^{-j} \tag{2.12}$$

para $|q| < 1$.

Demonstração: *A igualdade 2.12 segue do Corolário* 2.0.9 *fazendo em 2.11,* k *tendendo ao infinito.* □

Capítulo 3

Partições Planas Simétricas

Neste capítulo apresentaremos a demonstração feita por George Andrews sobre uma fórmula, conjecturada por MacMahon, para a função geradora de partições planas simétricas com restrições sobre os níveis e sobre cada parte.

3.1 Lemas

Nesta seção apresentaremos lemas preliminares que são resultados de séries hipergeométricas básicas e alguns resultados envolvendo determinantes.

Lema 3.1.1. *Para inteiros $m \geq 0$, $i \geq 0$, $l \geq 1$*

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} 2m \\ m+i-j \end{pmatrix}_{q^2} q^{(i-j)^2} \begin{pmatrix} 2l-1 \\ l-j \end{pmatrix}_{q^2} (q^{(j-l)(j-l-2m)} + q^{(j+l-1)(j+l+2m-1)})$$

$$= \begin{pmatrix} 2m+2l-1 \\ m+i+l-1 \end{pmatrix}_{q^2} q^{(i-l)^2} (1 + q^{(2i-1)(2l-1)}).$$

Demonstração:

Vamos dividir a demonstração em duas partes:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\begin{array}{c} 2m \\ m+i-j \end{array} \right)_{q^2} q^{(i-j)^2} \left(\begin{array}{c} 2l-1 \\ l-j \end{array} \right)_{q^2} q^{(j-l)(j-l-2m)}$$

$$= \sum_{j=1-l}^{l} \left(\begin{array}{c} 2m \\ m+i-j \end{array} \right)_{q^2} q^{(i-j)^2} \left(\begin{array}{c} 2l-1 \\ l-j \end{array} \right)_{q^2} q^{(j-l)(j-l-2m)},$$

uma vez que

$$\left(\begin{array}{c} 2l-1 \\ l-j \end{array} \right)_{q^2} = 0 \Leftrightarrow l < j < 1-l.$$

Substituindo j por $l-j$ temos

$$\sum_{j=1-l}^{l} \left(\begin{array}{c} 2m \\ m+i-j \end{array} \right)_{q^2} q^{(i-j)^2} \left(\begin{array}{c} 2l-1 \\ l-j \end{array} \right)_{q^2} q^{(j-l)(j-l-2m)} =$$

$$\sum_{j=0}^{2l-1} \left(\begin{array}{c} 2m \\ m+i-l+j \end{array} \right)_{q^2} q^{(i-l+j)^2} \left(\begin{array}{c} 2l-1 \\ j \end{array} \right)_{q^2} q^{(j)(j+2m)} =$$

$$q^{(i-l)^2} \sum_{j=0}^{2l-1} \left(\begin{array}{c} 2m \\ m+i-l+j \end{array} \right)_{q^2} \left(\begin{array}{c} 2l-1 \\ j \end{array} \right)_{q^2} q^{(2j)(j+i-l+m)} =$$

$$q^{(i-l)^2} \left(\begin{array}{c} 2m+2l-1 \\ m+i+l-1 \end{array} \right)_{q^2},$$

pelo *Somatório de Chu-Vandermonde,* Teorema (1.2.2). Por outro lado,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\begin{array}{c} 2m \\ m+i-j \end{array} \right)_{q^2} q^{(i-j)^2} \left(\begin{array}{c} 2l-1 \\ l-j \end{array} \right)_{q^2} q^{(j+l-1)(j+l-1+2m)} =$$

$$\sum_{j=1-l}^{l} \left(\begin{array}{c} 2m \\ m+i-j \end{array} \right)_{q^2} q^{(i-j)^2} \left(\begin{array}{c} 2l-1 \\ l-j \end{array} \right)_{q^2} q^{(j+l-1)(j+l-1+2m)}.$$

De modo análogo, substituindo j por $j-l+1$ temos

$$\sum_{j=1-l}^{l} \begin{pmatrix} 2m \\ m+i-j \end{pmatrix}_{q^2} q^{(i-j)^2} \begin{pmatrix} 2l-1 \\ l-j \end{pmatrix}_{q^2} q^{(j+l-1)(j+l-1+2m)} =$$

$$\sum_{j=0}^{2l-1} \begin{pmatrix} 2m \\ m-i-j+l-1 \end{pmatrix}_{q^2} q^{(i-j+l-1)^2} \begin{pmatrix} 2l-1 \\ 2l-1-j \end{pmatrix}_{q^2} q^{(j)(j+2m)} =$$

$$q^{(i+l-1)^2} \sum_{j=0}^{2l-1} \begin{pmatrix} 2m \\ m-i-j+l-1 \end{pmatrix}_{q^2} \begin{pmatrix} 2l-1 \\ j \end{pmatrix}_{q^2} q^{(2j)(j+m-i-l+1)} =$$

$$q^{(i+l-1)^2} \begin{pmatrix} 2m+2l-1 \\ m+i+l-1 \end{pmatrix}_{q^2},$$

por (1.2.2).

□

Considere as matrizes

$$\alpha_n = \left(q^{(i-j)^2} \begin{pmatrix} 2m \\ m+i-j \end{pmatrix}_{q^2} + q^{(i+j-1)^2} \begin{pmatrix} 2m \\ m+i+j-1 \end{pmatrix}_{q^2} \right)_{n\times n}$$

$$\beta_n = \left[\begin{pmatrix} 2m+2j+1 \\ m+i+j-1 \end{pmatrix}_{q^2} \frac{q^{(i-j)^2}(1+q^{(2i-1)(2j-1)})}{1+q^{(2m+2j-1)(2j-1)}} \right]_{n\times n}$$

Lema 3.1.2. *Seja* $\delta_n = \left[\begin{pmatrix} 2j-1 \\ j-i \end{pmatrix}_{q^2} \frac{q^{(i-j)(i-j-2m)}+q^{(i+j-1)(i+j+2m-1)}}{1+q^{(2j-1)(2j+2m-1)}} \right]_{n\times n}$. *Então* $det\delta_n = 1$ *e* $\alpha_n\delta_n = \beta_n$.

Demonstração:

De fato, note que δ_n é triangular superior com 1's na diagonal:

se $i = j$

$$(\delta_n)_{i,i} = \left[\binom{2i-1}{0}_{q^2} \frac{q^{(0)(-2m)} + q^{(2i-1)(2i+2m-1)}}{1 + q^{(2i-1)(2i+2m-1)}} \right] = 1;$$

se $i > j \implies j - i < 0 \implies \binom{2j-1}{j-i}_{q^2} = 0 \implies (\delta_n)_{i,j} = 0$. Assim, $det \delta_n = 1$.

Agora denote por $c_n = \alpha_n \delta_n$. Então

$$(c_n)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_n)_{ik} (\delta_n)_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(q^{(i-k)^2} \binom{2m}{m+i-k}_{q^2} + q^{(i+k-1)^2} \binom{2m}{m+i+k-1}_{q^2} \right) \times$$

$$\times \left[\binom{2j-1}{j-k}_{q^2} \frac{q^{(i-k)(i-k-2m)} + q^{(i+k-1)(i+k+2m-1)}}{1 + q^{(2j-1)(2j+2m-1)}} \right].$$

Uma vez que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \binom{2m}{m+i-k}_{q^2} q^{(i-k)^2} \binom{2j-1}{j-k}_{q^2} \frac{\left(q^{(k-j)(k-j-2m)} + q^{(k+j-1)(k+j+2m-1)}\right)}{1 + q^{(2j-1)(2j+2m-1)}} =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} \binom{2m}{m+i-k}_{q^2} q^{(i-k)^2} \binom{2j-1}{j-k}_{q^2} \frac{\left(q^{(k-j)(k-j-2m)} + q^{(k+j-1)(k+j+2m-1)}\right)}{1 + q^{(2j-1)(2j+2m-1)}} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2m}{m+i-k}_{q^2} q^{(i-k)^2} \binom{2j-1}{j-k}_{q^2} \frac{\left(q^{(k-j)(k-j-2m)} + q^{(k+j-1)(k+j+2m-1)}\right)}{1 + q^{(2j-1)(2j+2m-1)}}.$$

Fazendo as mudanças $k=-k$ e $k=k-1$ no primeiro somatório da equação anterior temos

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\begin{array}{c}2m\\ m+i+k\end{array}\right)_{q^2} q^{(i+k)^2}\left(\begin{array}{c}2j-1\\ j+k\end{array}\right)_{q^2}\frac{\left(q^{(k+j)(k+j+2m)}+q^{(k-j+1)(k-j-2m+1)}\right)}{1+q^{(2j-1)(2j+2m-1)}}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c}2m\\ m+i-k\end{array}\right)_{q^2} q^{(i-k)^2}\left(\begin{array}{c}2j-1\\ j-k\end{array}\right)_{q^2}\frac{\left(q^{(k-j)(k-j-2m)}+q^{(k+j-1)(k+j+2m-1)}\right)}{1+q^{(2j-1)(2j+2m-1)}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c}2m\\ m+i+k-1\end{array}\right)_{q^2} q^{(i+k-1)^2}\left(\begin{array}{c}2j-1\\ j+k-1\end{array}\right)_{q^2}\frac{\left(q^{(k+j-1)(k+j+2m-1)}+q^{(k-j)(k-j-2m)}\right)}{1+q^{(2j-1)(2j+2m-1)}}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c}2m\\ m+i-k\end{array}\right)_{q^2} q^{(i-k)^2}\left(\begin{array}{c}2j-1\\ j-k\end{array}\right)_{q^2}\frac{\left(q^{(k-j)(k-j-2m)}+q^{(k+j-1)(k+j+2m-1)}\right)}{1+q^{(2j-1)(2j+2m-1)}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(q^{(i-k)^2}\left(\begin{array}{c}2m\\ m+i-k\end{array}\right)_{q^2}+q^{(i+k-1)^2}\left(\begin{array}{c}2m\\ m+i+k-1\end{array}\right)_{q^2}\right)\times$$

$$\times\left[\left(\begin{array}{c}2j-1\\ j-k\end{array}\right)_{q^2}\frac{\left(q^{(k+j-1)(k+j+2m-1)}+q^{(k-j)(k-j-2m)}\right)}{1+q^{(2j-1)(2j+2m-1)}}\right].$$

Portanto,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(q^{(i-k)^2}\left(\begin{array}{c}2m\\ m+i-k\end{array}\right)_{q^2}+q^{(i+k-1)^2}\left(\begin{array}{c}2m\\ m+i+k-1\end{array}\right)_{q^2}\right)\times$$

$$\times \left[\begin{pmatrix} 2j-1 \\ j-k \end{pmatrix}_{q^2} \frac{q^{(i-k)(i-k-2m)} + q^{(i+k-1)(i+k+2m-1)}}{1+q^{(2j-1)(2j+2m-1)}} \right]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} 2m \\ m+i-k \end{pmatrix}_{q^2} q^{(i-k)^2} \begin{pmatrix} 2j-1 \\ j-k \end{pmatrix}_{q^2} \frac{\left(q^{(k-j)(k-j-2m)} + q^{(k+j-1)(k+j+2m-1)}\right)}{1+q^{(2j-1)(2j+2m-1)}} =$$

$$\begin{pmatrix} 2m+2j-1 \\ m+i+j-1 \end{pmatrix}_{q^2} \frac{q^{(i-j)^2}(1+q^{(2i-1)(2j-1)})}{1+q^{(2j-1)(2j+2m-1)}} = (\beta_n)_{i,j}$$

pelo Lema 3.1.1

$\square$

Lema 3.1.3. *Para inteiros $m \geq 0$, $i \geq 0$, $l \geq 0$,*

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} 2m \\ m+i-j \end{pmatrix}_{q^2} q^{(i-j)^2} \begin{pmatrix} 2l \\ l+j \end{pmatrix}_{q^2} \left(q^{(j-l)(j-l-2m)} - q^{(j+l)(j+l+2m)}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 2m+2l \\ m+i+l \end{pmatrix}_{q^2} \left(q^{(i-l)^2} - q^{(i+l)^2}\right).$$

Demonstração:

De modo análogo à demonstração do Lema 3.1.1, vamos dividir a prova em duas etapas:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} 2m \\ m+i-j \end{pmatrix}_{q^2} q^{(i-j)^2} \begin{pmatrix} 2l \\ l+j \end{pmatrix}_{q^2} q^{(j-l)(j-l-2m)} =$$

$$= \sum_{j=-l}^{l} \begin{pmatrix} 2m \\ m+i-j \end{pmatrix}_{q^2} q^{(i-j)^2} \begin{pmatrix} 2l \\ l+j \end{pmatrix}_{q^2} q^{(j-l)(j-l-2m)}$$

Fazendo a substituição de j por $l-j$ tem-se

$$= \sum_{j=-l}^{l} \begin{pmatrix} 2m \\ m+i-j \end{pmatrix}_{q^2} q^{(i-j)^2} \begin{pmatrix} 2l \\ l+j \end{pmatrix}_{q^2} q^{(j-l)(j-l-2m)} =$$

$$= \sum_{j=0}^{2l} \begin{pmatrix} 2m \\ m+i-l+j \end{pmatrix}_{q^2} q^{(i-l+j)^2} \begin{pmatrix} 2l \\ 2l-j \end{pmatrix}_{q^2} q^{(j)(j+2m)} =$$

$$= q^{(i-l)^2} \sum_{j=0}^{2l} \begin{pmatrix} 2m \\ m+i-l+j \end{pmatrix}_{q^2} \begin{pmatrix} 2l \\ j \end{pmatrix}_{q^2} q^{(2j)(j+m+i-l)} =$$

$$= q^{(i-l)^2} \begin{pmatrix} 2m+2l \\ m+i-l \end{pmatrix}_{q^2},$$

pelo Teorema do *Somatório de Chu-Vandermonde* (1.2.2). Analogamente,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} 2m \\ m+i-j \end{pmatrix}_{q^2} q^{(i-j)^2} \begin{pmatrix} 2l \\ l+j \end{pmatrix}_{q^2} q^{(j+l)(j+l+2m)} =$$

$$\sum_{j=-l}^{l} \begin{pmatrix} 2m \\ m+i-j \end{pmatrix}_{q^2} q^{(i-j)^2} \begin{pmatrix} 2l \\ l+j \end{pmatrix}_{q^2} q^{(j+l)(j+l+2m)}.$$

Fazendo a troca de j por $j-l$, obtemos

$$\sum_{j=0}^{2l} \begin{pmatrix} 2m \\ m+i-j+l \end{pmatrix}_{q^2} q^{(i-j+l)^2} \begin{pmatrix} 2l \\ j \end{pmatrix}_{q^2} q^{(j)(j+2m)} =$$

$$= q^{(i+l)^2} \sum_{j=0}^{2l} \left(\begin{array}{c} 2m \\ m+i-j+l \end{array} \right)_{q^2} \left(\begin{array}{c} 2l \\ j \end{array} \right)_{q^2} q^{(2j)(j+m-i-l)} =$$

$$= q^{(i+l)^2} \left(\begin{array}{c} 2m+2l \\ m+i+l \end{array} \right)_{q^2}$$

$\square$

Considere as matrizes

$$\alpha'_n = \left(q^{(i-j)^2} \left(\begin{array}{c} 2m \\ m+i-j \end{array} \right)_{q^2} - q^{(i+j)^2} \left(\begin{array}{c} 2m \\ m+i+j \end{array} \right)_{q^2} \right)_{n\times n},$$

$$\beta'_n = \left[\left(\begin{array}{c} 2m+2j \\ m+i+j \end{array} \right)_{q^2} \frac{q^{(i-j)^2}(1-q^{4ij})}{1-q^{4j(m+j)}} \right]_{n\times n}.$$

Lema 3.1.4. *Seja*

$$\delta'_n = \left(\left(\begin{array}{c} 2j \\ j+i \end{array} \right)_{q^2} \frac{(q^{(i-j)(i-j-2m)}) - q^{(i+j)(i+j+2m)}}{(1-q^{4j(j+m)})} \right)_{n\times n}$$

Então $det \delta'_n = 1$ *e* $\alpha'_n \delta'_n = \beta'_n$.

Demonstração:

Observemos que a matriz δ'_n *é triangular superior com* $1's$ *na diagonal. De fato, quando* $i = j$ *temos*

$$(\delta'_n)_{ii} = \left(\begin{array}{c} 2i \\ 2i \end{array} \right)_{q^2} \frac{1-q^{(2i)(2i+2m)}}{(1-q^{4i(i+m)})} = 1$$

e quando $i > j$ *então* $\begin{pmatrix} 2j \\ i+j \end{pmatrix}_{q^2} = 0.$

A $(i,j)-$*ésima entrada em* $c_n = \alpha_n^{'}\delta_n^{'}$ *é dada por*

$$(c_n)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_n^{'})_{ik}(\delta_n^{'})_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(q^{(i-k)^2} \begin{pmatrix} 2m \\ m+i-k \end{pmatrix}_{q^2} - q^{(i+k)^2} \begin{pmatrix} 2m \\ m+i+k \end{pmatrix}_{q^2} \right)$$

$$\times \begin{pmatrix} 2j \\ j+k \end{pmatrix}_{q^2} \left(\frac{(q^{(k-j)(k-j-2m)}) - q^{(k+j)(k+j+2m)}}{(1-q^{4j(j+m)})} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[q^{(i-k)^2} \begin{pmatrix} 2m \\ m+i-k \end{pmatrix}_{q^2} \begin{pmatrix} 2j \\ j+k \end{pmatrix}_{q^2} \left(\frac{(q^{(k-j)(k-j-2m)}) - q^{(k+j)(k+j+2m)}}{(1-q^{4j(j+m)})} \right) \right.$$

$$\left. -q^{(i+k)^2} \begin{pmatrix} 2m \\ m+i+k \end{pmatrix}_{q^2} \begin{pmatrix} 2j \\ j+k \end{pmatrix}_{q^2} \left(\frac{(q^{(k-j)(k-j-2m)}) - q^{(k+j)(k+j+2m)}}{(1-q^{4j(j+m)})} \right) \right]$$

Uma vez que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} 2m \\ m+i-k \end{pmatrix}_{q^2} \begin{pmatrix} 2j \\ j+k \end{pmatrix}_{q^2} \frac{q^{(k-j)(k-j-2m)} - q^{(k+j)(k+j+2m)}}{1-q^{4j(j+m)}}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1} \begin{pmatrix} 2m \\ m+i-k \end{pmatrix}_{q^2} \begin{pmatrix} 2j \\ j+k \end{pmatrix}_{q^2} \frac{q^{(k-j)(k-j-2m)} - q^{(k+j)(k+j+2m)}}{1-q^{4j(j+m)}}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}2m\\ m+i-k\end{pmatrix}_{q^2}\begin{pmatrix}2j\\ j+k\end{pmatrix}_{q^2}\frac{q^{(k-j)(k-j-2m)}-q^{(k+j)(k+j+2m)}}{1-q^{4j(j+m)}}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\begin{pmatrix}2m\\ m+i+k\end{pmatrix}_{q^2}\begin{pmatrix}2j\\ j-k\end{pmatrix}_{q^2}\frac{q^{(k+j)(k+j+2m)}-q^{(k-j)(k-j-2m)}}{1-q^{4j(j+m)}}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\begin{pmatrix}2m\\ m+i-k\end{pmatrix}_{q^2}\begin{pmatrix}2j\\ j+k\end{pmatrix}_{q^2}\frac{q^{(k-j)(k-j-2m)}-q^{(k+j)(k+j+2m)}}{1-q^{4j(j+m)}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[q^{(i-k)^2}\begin{pmatrix}2m\\ m+i-k\end{pmatrix}_{q^2}\begin{pmatrix}2j\\ j+k\end{pmatrix}_{q^2}\left(\frac{(q^{(k-j)(k-j-2m)})-q^{(k+j)(k+j+2m)}}{(1-q^{4j(j+m)})}\right)\right.$$

$$\left.-q^{(i+k)^2}\begin{pmatrix}2m\\ m+i+k\end{pmatrix}_{q^2}\begin{pmatrix}2j\\ j+k\end{pmatrix}_{q^2}\left(\frac{(q^{(k-j)(k-j-2m)})-q^{(k+j)(k+j+2m)}}{(1-q^{4j(j+m)})}\right)\right]$$

então temos pelo Lema 3.1.3 que

$$(c_n)_{ij}=\begin{pmatrix}2m+2j\\ m+i+j\end{pmatrix}_{q^2}\frac{q^{(i-j)^2}(1-q^{4ij})}{1-q^{4j(m+j)}}=(\beta_n')_{ij}.$$

$\square$

Lema 3.1.5. *Para inteiros $s\geq j\geq 1$, $i\geq 1$, $m\geq 1$, se*

$$a_i(r,s)=\frac{(-1)^{r+s}(q^2,q^2)_{m+r+s-1}(q^2,q^2)_{m+s-r}(q^{2i-2s},q^2)_s(q^{2i},q^2)_s}{(q^2,q^2)_{m+i+s-1}(q^2,q^2)_{m-i+s}(1-q^{2i-2r})(1-q^{2i+2r-2})}\times$$

$$\times \frac{(1+q^{2i-1})(1-q^{4r-2})q^{(i-s)^2+(s-r)}}{(1+q^{2r-1})(q^2,q^2)_{s-1}(q^{2r},q^2)_s} \begin{pmatrix} s-1 \\ r-1 \end{pmatrix}_{q^2},$$

então

$$\sum_{r=1}^{s} a_i(r,s) \begin{pmatrix} 2m+2j-1 \\ m+r+j-1 \end{pmatrix}_{q^2} q^{(r-j)^2}(1+q^{(2r-1)(2j-1)})$$

$$= \begin{pmatrix} 2m+2j-1 \\ m+i+j-1 \end{pmatrix}_{q^2} q^{(i-j)^2}(1+q^{(2i-1)(2j-1)}), \tag{3.1}$$

e

$$\sum_{r=1}^{s} a_i(r,s) \left[\begin{pmatrix} 2m+2s+1 \\ m+r+s \end{pmatrix}_{q^2} q^{(r-s-1)^2} \frac{(1+q^{(2r-1)(2s+1)})}{(1+q^{(2m+2s+1)(2s+1)})} \right.$$

$$\left. - \begin{pmatrix} 2m+2r+1 \\ m+r+s \end{pmatrix}_{q^2} q^{(r-1)^2-2ms-s^2} \frac{(1+q^{2r-1})}{(1+q^{2m+2s+1})} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 2m+2s+1 \\ m+i+s \end{pmatrix}_{q^2} q^{(i-s-1)^2} \frac{(1+q^{(2i-1)(2s+1)})}{(1+q^{(2m+2s-1)(2s+1)})}$$

$$- \begin{pmatrix} 2m+2s+1 \\ m+i+s \end{pmatrix}_{q^2} q^{(i-1)^2-2ms-s^2} \frac{(1+q^{2i-1})}{(1+q^{2m+2s+1})}. \tag{3.2}$$

Demonstração:

Façamos a demonstração da identidade (3.1). *Note que* $1/(q^2,q^2)_{-n} = 0$ *para todo* n *inteiro positivo. Assim se* $i > m+s$ *ou* $i \leq -m-s$ *então*

$1/(q^2,q^2)_{m-i+s}=0$ ou $(q^2,q^2)_{m+r+s-1}=0$ respectivamente. Logo $a_i(r,s)=0$, e portanto o lado esquerdo da identidade (3.1) é zero.

Por outro lado, se $i>m+s$, por $s\geq j\geq 1$ temos $i>m+j$ e portanto $m+i+j-1>2m+2j-1$, seguindo que $\begin{pmatrix} 2m+2j-1 \\ m+i+j-1 \end{pmatrix}_{q^2}=0$

Analogamente, se $i\leq -m-s$ temos $i\leq -m-j$, o que implica $i+m+j-1<0$ e portanto $\begin{pmatrix} 2m+2j-1 \\ m+i+j-1 \end{pmatrix}_{q^2}=0$. Logo, o lado esquerdo da identidade (3.1) também é zero.

Agora assumimos $-m-s<i\leq m+s$. Multiplicando ambos os lados da identidade (3.1) por

$$q^{-(i-s)^2}(q^2,q^2)_{m+i+s-1}(q^2,q^2)_{m-i+s}(q^2,q^2)^{-1}_{2m+2j-1}(1+q^{2i-1})^{-1}$$

obtemos

$$\sum_{r=1}^{s}\frac{(-1)^{r+s}(q^2,q^2)_{m+r+s-1}(q^2,q^2)_{m+s-r}(q^{2i-2s},q^2)_s(q^{2i},q^2)_s}{(q^2,q^2)_{m+i+s-1}(q^2,q^2)_{m-i+s}(1-q^{2i-2r})(1-q^{2i+2r-2})}$$

$$\times\frac{(1+q^{2i-1})(1-q^{4r-2})q^{(i-s)^2+(s-r)}}{(1+q^{2r-1})(q^2,q^2)_{s-1}(q^{2r},q^2)_s}\begin{pmatrix} s-1 \\ r-1 \end{pmatrix}_{q^2}$$

$$\times\begin{pmatrix} 2m+2j-1 \\ m+r+j-1 \end{pmatrix}_{q^2} q^{(r-j)^2}(1+q^{(2r-1)(2j-1)})$$

$$\times q^{-(i-s)^2}(q^2,q^2)_{m+i+s-1}(q^2,q^2)_{m-i+s}(q^2,q^2)^{-1}_{2m+2j-1}(1+q^{2i-1})^{-1}.$$

$$=\begin{pmatrix} 2m+2j-1 \\ m+i+j-1 \end{pmatrix}_{q^2} q^{(i-j)^2}(1+q^{(2i-1)(2j-1)})$$

$$\times q^{-(i-s)^2}(q^2,q^2)_{m+i+s-1}(q^2,q^2)_{m-i+s}(q^2,q^2)^{-1}_{2m+2j-1}(1+q^{2i-1})^{-1}.$$

$$\sum_{r=1}^{s}(-1)^{r+s}(q^{2m+2r+2j},q^2)_{s-j}(q^{2m-2r+2j+2},q^2)_{s-j}q^{(s-r)+(r-j)^2}$$

$$\times\frac{(1+q^{(2r-1)(2j-1)})(q^{2i-2s},q^2)_s(q^{2i},q^2)_s(1-q^{4r-2})}{(1+q^{2r-1})(1-q^{2i-2r})(1-q^{2i+2r-2})(q^2,q^2)_{s-1}(q^{2r},q^2)_s}\begin{pmatrix} s-1 \\ r-1 \end{pmatrix}_{q^2}$$

$$=q^{(2i-j-s)(s-j)}\frac{(1+q^{(2i-1)(2j-1)})}{(1+q^{2i-1})}(q^{2m+2i+2j},q^2)_{s-j}(q^{2m+2j-2i+2},q^2)_{s-j}$$

Uma vez que

$$(q^{2m+2r+2j},q^2)_{s-j}(q^{2m+2j-2r+2},q^2)_{s-j}=\begin{pmatrix} 2m+2j-1 \\ m+r+j-1 \end{pmatrix}_{q^2}\frac{(q^2,q^2)_{m+r+s+1}(q^2,q^2)_{m+s-r}}{(q^2,q^2)_{2m+2j-1}},$$

para $1\leq r\leq s$.

De fato

$$\begin{pmatrix} 2m+2j-1 \\ m+r+j-1 \end{pmatrix}_{q^2}\frac{(q^2,q^2)_{m+r+s+1}(q^2,q^2)_{m+s-r}}{(q^2,q^2)_{2m+2j-1}}$$

$$=\frac{(1-q^{4m+4j-2})(1-q^{4m+4j-4})...(1-q^{2m+2j-2r+2})(1-q^2)(1-q^4)...(1-q^{2m+2r+2s-2})}{(1-q^{2m+2r+2j-2})(1-q^{2m+2r+2j-4})...(1-q^4)(1-q^2)}$$

$$\times\frac{(1-q^2)(1-q^4)...(1-q^{2m+2s-2r})}{(1-q^2)(1-q^4)...(1-q^{4m+4j-2})}$$

$$= \frac{(1-q^{4m+4j-2})(1-q^{4m+4j-4})...(1-q^{2m+2j-2r+2})(1-q^2)(1-q^4)...(1-q^{2m+2r+2s-2})}{(1-q^{4m+4j-2})(1-q^{4m+4j-4})...(1-q^{2m+2j-2r+2})(1-q^{2m+2j-2r})...(1-q^2)}$$

$$\times \frac{(1-q^2)(1-q^4)...(1-q^{2m+2s-2r})}{(1-q^{2m+2r+2j-2})(1-q^{2m+2r+2j-4})...(1-q^4)(1-q^2)}$$

$$= \frac{(1-q^2)(1-q^4)...(1-q^{2m+2r+2j-2})(1-q^{2m+2r+2j})...(1-q^{2m+2r+2s-2})}{(1-q^2)(1-q^4)...(1-q^{2m+2r+2j-4})(1-q^{2m+2r+2j-2})}$$

$$\frac{(1-q^2)(1-q^4)...(1-q^{2m-2r+2j})(1-q^{2m-2r+2j+2})...(1-q^{2m+2s-2r})}{(1-q^2)(1-q^4)...(1-q^{2m+2j-2r})}$$

$$= (1-q^{2m+2r+2j})...(1-q^{2m+2r+2s-2})(1-q^{2m-2r+2j+2})...(1-q^{2m+2s-2r})$$

$$= (q^{2m+2r+2j}, q^2)_{s-j}(q^{2m+2j-2r+2}, q^2)_{s-j}.$$

Assim obtemos a identidade equivalente abaixo:

$$\sum_{r=1}^{s}(-1)^{r+s}(q^{2m+2r+2j}, q^2)_{s-j}(q^{2m+2j-2r+2}, q^2)_{s-j}q^{(s-r)+(r-j)^2}$$

$$\times \frac{(1+q^{(2r-1)(2j-1)})(q^{2i-2s}, q^2)_s(q^{2i}, q^2)_s(1-q^{4r-2})}{(1+q^{2r-1})(1-q^{2i-2r})(1-q^{2i+2r-2})(q^2, q^2)_{s-1}(q^{2r}, q^2)_s}\begin{pmatrix} s-1 \\ r-1 \end{pmatrix}_{q^2}$$

$$= q^{(2i-j-s)(s-j)}\frac{(1+q^{(2i-1)(2j-1)})}{(1+q^{2i-1})}(q^{2m+2i+2j}, q^2)_{s-j}(q^{2m+2j-2i+2}, q^2)_{s-j} \quad (3.3)$$

A identidade acima (3.3) pode ser vista como uma identidade polinomial em q^{2i}, onde tanto o lado esquerdo da igualdade quanto o direito tem grau menor do que ou igual a $2s-2$. Assim, se provarmos que os dois lados da identidade são iguais para até $2s-1$ valores de q^{2i}, a identidade fica válida para todo i.

Primeiramente façamos $i = t$ e $1 \leq t \leq s$. Então cada termo do lado direito da identidade (3.3) é zero uma vez que $2t - 2s < 0$ logo o fator $(q^{2i-2s}, q^2)_s = 0$, com exceção de $r = t$. Neste caso temos

$$(-1)^{t+s}(q^{2m+2t+2j}, q^2)_{s-j}(q^{2m+2t-2j+2}, q^2)_{s-j}q^{(s-t)+(t-j)^2}$$

$$\times \frac{(1+q^{(2r-1)(2j-1)})\overline{(q^{2t-2s}, q^2)_s}(q^{2t}, q^2)_s(1-q^{4t-2})}{(1+q^{2t-1})(1-q^{2t+2t-2})(q^2, q^2)_{s-1}(q^{2t}, q^2)_s} \begin{pmatrix} s-1 \\ t-1 \end{pmatrix}_{q^2}$$

$$= (-1)^{t+s}(q^{2m+2t+2j}, q^2)_{s-j}(q^{2m+2t-2j+2}, q^2)_{s-j}q^{(s-t)+(t-j)^2}$$

$$\times \frac{(1+q^{(2r-1)(2j-1)})\overline{(q^{2t-2s}, q^2)_s}}{(1+q^{2t-1})(q^2, q^2)_{s-1}} \begin{pmatrix} s-1 \\ t-1 \end{pmatrix}_{q^2},$$

onde $\overline{(q^{2t-2s}, q^2)_s} = (1-q^{2t-2s})(1-q^{2t-2s+2})\ldots(1-q^{2t-2s+2(s-t)-2})(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2t-2})$.

Note que

$$\frac{\overline{(q^{2t-2s}, q^2)_s}}{(q^2, q^2)_{s-1}} \begin{pmatrix} s-1 \\ t-1 \end{pmatrix}_{q^2} =$$

$$= \frac{(1-q^{2t-2s})(1-q^{2t-2s+2})\ldots(1-q^{2t-2s+2(s-t)-2})(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2t-2})}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2s-2t})\ldots(1-q^{2s-4})(1-q^{2s-2})}$$

$$\times \frac{(1-q^{2s-2})(1-q^{2s-4})...(1-q^{2s-2t+2})}{(1-q^{2t-2})(1-q^{2t-4})...(1-q^{2})}$$

$$= \frac{(1-q^{2t-2s})(1-q^{2t-2s+2})\dots(1-q^{-2})}{(1-q^{2})(1-q^{4})...(1-q^{2s-2t})}$$

$$= (-1)^{s-t}\frac{(q^{2t-2s}-1)(q^{2t-2s+2}-1)\dots(q^{-2}-1)}{(1-q^{2})(1-q^{4})...(1-q^{2s-2t})}$$

$$= (-1)^{s-t}q^{(2t-2s)^{s-t}}\frac{(1-q^{2s-2t})(q^{2}-q^{2s-2t})\dots(q^{-2+2s-2t}-q^{2s-2t})}{(1-q^{2})(1-q^{4})...(1-q^{2s-2t})}$$

$$= (-1)^{s-t}q^{(2t-2s)(s-t)}\frac{(1-q^{2s-2t})q^{2}(1-q^{2s-2t-2})\dots q^{-2+2s-2t}(1-q^{2})}{(1-q^{2})(1-q^{4})...(1-q^{2s-2t})}$$

$$= (-1)^{s-t}q^{(2t-2s)(s-t)}q^{2(1+2+...+(s-t-1))}$$

$$= (-1)^{s-t}q^{(2t-2s+s-t-1)(s-t)} = (-1)^{s-t}q^{(t-s-1)}.$$

Logo,

$$(-1)^{t+s}(-1)^{s-t}q^{(s-t)+(t-j)^{2}}\frac{\overline{(q^{2t-2s},q^{2})_{s}}}{(q^{2},q^{2})_{s-1}}\left(\begin{array}{c} s-1 \\ t-1 \end{array}\right)_{q^{2}} =$$

$$= q^{-(s-t)^{2}+(t-j)^{2}},$$

o que implica que se $r = t$ *o polinômio é igual a*

$$q^{-(s-t)^2+(t-j)^2}\frac{(1+q^{(2i-1)(2j-1)})}{(1+q^{2i-1})}(q^{2m+2t-2j},q^2)_{s-j}(q^{2m+2j-2t+2},q^2)_{s-j}$$

Igual ao polinômio do lado direito com $i=t$. De fato, quando $i=t$ temos

$$q^{(2t-j-s)(s-j)}\frac{(1+q^{(2t-1)(2j-1)})}{(1+q^{2t-1})}(q^{2m+2t-2j},q^2)_{s-j}(q^{2m+2r-2t+2},q^2)_{s-j}$$

$$=q^{(t-j+t-s)(s-t+t-j)}\frac{(1+q^{(2t-1)(2j-1)})}{(1+q^{2t-1})}(q^{2m+2t-2j},q^2)_{s-j}(q^{2m+2r-2t+2},q^2)_{s-j}$$

$$=q^{(t-j)^2-(s-t)^2}\frac{(1+q^{(2t-1)(2j-1)})}{(1+q^{2t-1})}(q^{2m+2t-2j},q^2)_{s-j}(q^{2m+2r-2t+2},q^2)_{s-j}$$

De modo análogo, se $i=-t$ com $0\leq t\leq s-1$, cada termo do polinômio (3.3) do lado direito da igualdade é zero com exceção de $r=t+1$, que neste caso temos

$$(-1)^{t+1+s}(q^{2m+2t+2j},q^2)_{s-j}(q^{2m+2j-2t+2},q^2)_{s-j}q^{(s-t-1)+(t+1-j)^2}$$

$$\times\frac{(1+q^{(2t+1)(2j-1)})(q^{-2t-2s},q^2)_s\overline{(q^{-2t},q^2)_s}(1-q^{4t+2})}{(1+q^{2t+1})(1-q^{-4t-2})(q^2,q^2)_{s-1}(q^{2t+2},q^2)_s}\left(\begin{array}{c} s-1 \\ t \end{array}\right)_{q^2}$$

onde $\overline{(q^{-2t},q^2)_s}=(1-q^{-2t})(1-q^{-2t+2})...(1-q^{-2})(1-q^2)...(1-q^{2s-2-2t})$

Uma vez que

$$\frac{(q^{-2t-2s},q^2)_s\overline{(q^{-2t},q^2)_s}(1-q^{4t+2})}{(1-q^{-4t-2})(q^2,q^2)_{s-1}(q^{2t+2},q^2)_s}\left(\begin{array}{c} s-1 \\ t \end{array}\right)_{q^2} =$$

$$= \frac{(1-q^{-2t-2s})(1-q^{-2t-2s+2})...(1-q^{-2t-2})(1-q^{-2t})(1-q^{-2t+2})...(1-q^{-2})}{(1-q^{-4t-2})(1-q^2)(1-q^4)...(1-q^{2s-2})(1-q^{2t+2})(1-q^{2t+4})...(1-q^{2t+2s})}$$

$$\times\frac{(1-q^2)...(1-q^{-2s-2-2t})(1-q^{4t+2})(1-q^{2s-2})(1-q^{2s-4})...(1-q^{2s-2t})}{(1-q^{2t})(1-q^{2t-2})...(1-q^2)}$$

$$= \frac{(1-q^{-2t-2s})(1-q^{-2t-2s+2})...(1-q^{-2t-2})(1-q^{-2t})(1-q^{-2t+2})...(1-q^{-2})}{(1-q^{-4t-2})(1-q^{2t+2})...(1-q^{4t+2})(1-q^{4t+4})...(1-q^{2t+2s})}$$

$$\times\frac{(1-q^2)...(1-q^{2s-2-2t})(1-q^{4t+2})(1-q^{2s-2})(1-q^{2s-4})...(1-q^{2s-2t})}{(1-q^2)(1-q^4)...(1-q^{2s-2t})...(1-q^{2s-4})(1-q^{2s-2})(1-q^{2t})(1-q^{2t-2})...(1-q^2)}$$

$$= \frac{(1-q^{-2t-2s})(1-q^{-2t-2s+2})...(1-q^{-2t-2s+(2s-2t-2)})...(1-q^{-2t-2})}{(1-q^{-4t-2})(1-q^{2t+2})...(1-q^{4t+2})(1-q^{4t+4})...(1-q^{2t+2s})}$$

$$\times\frac{(1-q^2)...(1-q^{2s-2-2t})(1-q^{-2t})(1-q^{-2t+2})...(1-q^{-2})}{(1-q^2)(1-q^4)...(1-q^{2s-2t-2})(1-q^{2t})(1-q^{2t-2})...(1-q^2)}$$

$$= \frac{(1-q^{-2t-2s})(1-q^{-2t-2s+2})...(1-q^{-4t})(1-q^{-4t-4})...(1-q^{-2t-2})}{(1-q^{2t+2})...(1-q^{4t})(1-q^{4t+4})...(1-q^{2t+2s})}$$

$$\times\frac{(1-q^{-2t})(1-q^{-2t+2})...(1-q^{-2})}{(1-q^{2t})(1-q^{2t-2})...(1-q^2)}$$

$$= (-1)^{s-1}\frac{(q^{-2t-2s}-1)(q^{-2t-2s+2}-1)...(q^{-4t}-1)(q^{-4t-4}-1)...(q^{-2t-2}-1)}{(1-q^{2t+2})...(1-q^{4t})(1-q^{4t+4})...(1-q^{2t+2s})}$$

$$\times(-1)^{t-1}\frac{(q^{-2t}-1)(q^{-2t+2}-1)...(q^{-2})-1}{(1-q^{2t})(1-q^{2t-2})...(1-q^{2})}$$

$$= (-1)^{s-1}\frac{q^{(-2t-2s)^{s-1}}(1-q^{2t+2s})q^{-2t-2s+2}(1-q^{2t+2s-2})...q^{-2t-2}(1-q^{2t+2})}{(1-q^{2t+2})...(1-q^{4t})(1-q^{4t+4})...(1-q^{2t+2s})}$$

$$\times(-1)^{t-1}\frac{q^{(-2t)^{t}}(1+q^{2t})q^{2}(1+q^{2t-2})...q^{-2}(1-q^{2})}{(1-q^{2t})(1-q^{2t-2})...(1-q^{2})}$$

$$= (-1)^{s-1}q^{(-2t-2s)^{s-1}}q^{s(s-1)-2s+2t+2}(-1)^{t}q^{-t(t+1)}.$$

Assim,

$$(-1)^{t+s+1}q^{(s-t-1)+(t-1-j)^2}\frac{(q^{-2t-2s},q^2)_s\overline{(q^{-2t},q^2)_s}(1-q^{4t+2})}{(1-q^{-4t-2})(q^2,q^2)_{s-1}(q^{2t+2},q^2)_s}\left(\begin{array}{c} s-1 \\ t \end{array}\right)_{q^2} =$$

$$= (-1)^{t+s+1}q^{(s-t-1)+(t-1-j)^2}(-1)^{s-1}q^{(-2t-2s)^{s-1}}q^{s(s-1)-2s+2t+2}(-1)^{t}q^{-t(t+1)}$$

$$= q^{-(t+s)^2+4t-2j+(j-t)^2+2}$$

e, portanto, o polinômio (3.3) *do lado esquerdo da igualdade para* $r = t+1$ *é igual a*

$$(q^{2m+2t+2j+2,q^2})_{s-j}(q^{2m-2t+2j,q^2})_{s-j}\frac{(1+q^{(2t+1)(2j-1)})}{(1+q^{2t+1})}q^{(j-t)^2-(s+t)^2-4t-2j+2}.$$

Igualmente ao polinômio do lado direito da igualdade com $i=-t$. De fato

$$q^{(-2t-j-s)(s-j)}\frac{(1+q^{(-2t-1)(2j-1)})}{(1+q^{-2t-1})})(q^{2m-2t+2j},q^2)_{s-j}(q^{2m+2r+2t+2},q^2)_{s-j}$$

$$=q^{(-t-s-t-j)(s+t-j-t)}\frac{q^{-(2t+1)^{2j-1}}(1+q^{(2t+1)(2j-1)})}{q^{-(2t+1)}(1+q^{2t+1})})(q^{2m-2t+2j},q^2)_{s-j}(q^{2m+2r+2t+2},q^2)_{s-j}$$

$$=q^{-(s+t)^2+(t+j)^2+(-2t-1)(2j-2)}\frac{(1+q^{(2t+1)(2j-1)})}{(1+q^{2t+1})})(q^{2m-2t+2j},q^2)_{s-j}(q^{2m+2r+2t+2},q^2)_{s-j}$$

$$=(q^{2m+2t+2j+2,q^2})_{s-j}(q^{2m-2t+2j,q^2})_{s-j}\frac{(1+q^{(2t+1)(2j-1)})}{(1+q^{2t-1})}q^{(j-t)^2-(s+t)^2-4t-2j+2}.$$

Assim, como provamos que a identidade é válida para $2s-1$ valores, ela é válida em geral, e portanto, vale a identidade (3.1).

Agora passemos para a demonstração da segunda identidade (3.2)*:*

$$\sum_{r=1}^{s}a_i(r,s)\left[\begin{pmatrix}2m+2s+1\\ m+r+s\end{pmatrix}_{q^2}q^{(r-s-1)^2}\frac{(1+q^{(2r-1)(2s+1)})}{(1+q^{(2m+2s+1)(2s+1)})}\right.$$
$$\left.-\begin{pmatrix}2m+2s+1\\ m+r+s\end{pmatrix}_{q^2}q^{(r-1)^2-2ms-s^2}\frac{(1+q^{2r-1})}{(1+q^{2m+2s+1})}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} 2m+2s+1 \\ m+i+s \end{pmatrix}_{q^2} q^{(i-s-1)^2} \frac{(1+q^{(2i-1)(2s+1)})}{(1+q^{(2m+2s-1)(2s+1)})}$$

$$- \begin{pmatrix} 2m+2s+1 \\ m+i+s \end{pmatrix}_{q^2} q^{(i-1)^2-2ms-s^2} \frac{(1+q^{2i-1})}{(1+q^{2m+2s+1})}$$

Analogamente, observe que se $i > m+s+1$ *ou* $i < -m-s$ *então a identidade* (3.2) *é trivial pois ambos os lados são nulos. Agora multiplicando ambos os lados por*

$$q^{2i-(i-s)^2}(q^2,q^2)_{m+i+s}(q^2,q^2)_{m-i+s+1}(q^2,q^2)^{-1}_{2m+2s+1}(1+q^{2i-1})^{-1}$$

temos

$$\sum_{r=1}^{s} \frac{(-1)^{r+s}(q^2,q^2)_{m+r+s-1}(q^2,q^2)_{m+s-r}(q^{2i-2s},q^2)_s(q^{2i},q^2)_s}{(q^2,q^2)_{m+i+s-1}(q^2,q^2)_{m-i+s}(1-q^{2i-2r})(1-q^{2i+2r-2})} \times$$

$$\times \frac{(1+q^{2i-1})(1-q^{4r-2})q^{(i-s)^2+(s-r)}}{(1+q^{2r-1})(q^2,q^2)_{s-1}(q^{2r},q^2)_s} \begin{pmatrix} s-1 \\ r-1 \end{pmatrix}_{q^2}$$

$$\times \left[\begin{pmatrix} 2m+2s+1 \\ m+r+s \end{pmatrix}_{q^2} q^{(r-s-1)^2} \frac{(1+q^{(2r-1)(2s+1)})}{(1+q^{(2m+2s+1)(2s+1)})} \right.$$

$$\left. - \begin{pmatrix} 2m+2s+1 \\ m+r+s \end{pmatrix}_{q^2} q^{(r-1)^2-2ms-s^2} \frac{(1+q^{2r-1})}{(1+q^{2m+2s+1})} \right]$$

$$\times q^{2i-(i-s)^2}(q^2,q^2)_{m+i+s}(q^2,q^2)_{m-i+s+1}(q^2,q^2)^{-1}_{2m+2s+1}(1+q^{2i-1})^{-1}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 2m+2s+1 \\ m+i+s \end{pmatrix}_{q^2} q^{(i-s-1)^2} \frac{(1+q^{(2i-1)(2s+1)})}{(1+q^{(2m+2s-1)(2s+1)})} \right.$$

$$\left. - \begin{pmatrix} 2m+2s+1 \\ m+i+s \end{pmatrix}_{q^2} q^{(i-1)^2-2ms-s^2} \frac{(1+q^{2i-1})}{(1+q^{2m+2s+1})} \right]$$

$$\times q^{2i-(i-s)^2} (q^2,q^2)_{m+i+s} (q^2,q^2)_{m-i+s+1} (q^2,q^2)^{-1}_{2m+2s+1} (1+q^{2i-1})^{-1}$$

$$\sum_{r=1}^{s} \frac{(-1)^{r+s} (q^2,q^2)_{m+r+s-1} (q^2,q^2)_{m+s-r} (q^{2i-2s},q^2)_s (q^{2i},q^2)_s}{(q^2,q^2)_{m+i+s-1} (q^2,q^2)_{m-i+s} (1-q^{2i-2r})(1-q^{2i+2r-2})} \times$$

$$\times \frac{(1-q^{4r-2}) q^{(s-r)}}{(1+q^{2r-1})(q^2,q^2)_{s-1} (q^{2r},q^2)_s} \begin{pmatrix} s-1 \\ r-1 \end{pmatrix}_{q^2}$$

$$\times q^{2i} (q^2,q^2)_{m+i+s} (q^2,q^2)_{m-i+s+1} (q^2,q^2)^{-1}_{2m+2s+1}$$

$$\times \left[\begin{pmatrix} 2m+2s+1 \\ m+r+s \end{pmatrix}_{q^2} q^{(r-s-1)^2} \frac{(1+q^{(2r-1)(2s+1)})}{(1+q^{(2m+2s+1)(2s+1)})} \right.$$

$$\left. - \begin{pmatrix} 2m+2r+1 \\ m+r+s \end{pmatrix}_{q^2} q^{(r-1)^2-2ms-s^2} \frac{(1+q^{2r-1})}{(1+q^{2m+2s+1})} \right]$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 2m+2s+1 \\ m+i+s \end{pmatrix}_{q^2} q^{(i-s-1)^2} \frac{(1+q^{(2i-1)(2s+1)})}{(1+q^{(2m+2s-1)(2s+1)})} \right.$$

$$\left. - \begin{pmatrix} 2m+2s+1 \\ m+i+s \end{pmatrix}_{q^2} q^{(i-1)^2-2ms-s^2} \frac{(1+q^{2i-1})}{(1+q^{2m+2s+1})} \right]$$

$$\times q^{2i-(i-s)^2}(q^2,q^2)_{m+i+s}(q^2,q^2)_{m-i+s+1}(q^2,q^2)^{-1}_{2m+2s+1}(1+q^{2i-1})^{-1}$$

Agora observe que $(r-s-1)^2 = (r-1)^2 - 2rs + 2s + s^2$. *Assim,*

$$(r-1)^2-2ms-s^2+2rs-2rs+2s-2s+s^2-s^2 = (r-s-1)^2-2s+2rs-2ms-2s^2$$

Logo, podemos pôr $\begin{pmatrix} 2m+2s+1 \\ m+r+s \end{pmatrix}_{q^2} q^{(r-s-1)^2}$ *em evidência do lado esquerdo da igualdade e de modo análogo colocar* $\begin{pmatrix} 2m+2r+1 \\ m+i+s \end{pmatrix}_{q^2} q^{(i-s-1)^2}$ *em evidência do lado direito da igualdade. Do lado esquerdo obtemos*

$$q^{2i}\sum_{r=1}^{s}\frac{(-1)^{r+s}(q^{2i-2s},q^2)_s(q^{2i},q^2)_s}{(1-q^{2i-2r})(1-q^{2i+2r-2})}\times$$

$$\times\frac{(1-q^{4r-2})q^{(s-r)+(r-s-1)^2}}{(1+q^{2r-1})(q^2,q^2)_{s-1}(q^{2r},q^2)_s}\begin{pmatrix} s-1 \\ r-1 \end{pmatrix}_{q^2}$$

$$\times\frac{(q^2,q^2)_{m+r+s-1}(q^2,q^2)_{m+s-r}(q^2,q^2)_{m+i+s}(q^2,q^2)_{m-i+s+1}}{(q^2,q^2)_{2m+2s+1}(q^2,q^2)_{m+i+s-1}(q^2,q^2)_{m-i+s}}$$

$$\times\begin{pmatrix} 2m+2s+1 \\ m+r+s \end{pmatrix}_{q^2}\left[\frac{(1+q^{(2r-1)(2s+1)})}{(1+q^{(2m+2s+1)(2s+1)})} - q^{-2s+2rs-2ms-2s^2}\frac{(1+q^{2r-1})}{(1+q^{2m+2s+1})}\right].$$

Uma vez que

$$\frac{(q^2,q^2)_{m+i+s}(q^2,q^2)_{m-i-s+1}}{(q^2,q^2)_{m+i+s-1}(q^2,q^2)_{m-i+s}} = (1-q^{2m+2i+2s})(1-q^{2m-2i+2s+2}),$$

basta provarmos que

$$\begin{pmatrix} 2m+2s+1 \\ m+r+s \end{pmatrix}_{q^2} \frac{(q^2,q^2)_{m+r+s-1}(q^2,q^2)_{m+s-r}}{(q^2,q^2)_{2m+2s+1}} = \frac{1}{(1-q^{2m+2r+2s})(1-q^{2m+2s-2r+2})}.$$

De fato

$$\begin{pmatrix} 2m+2s+1 \\ m+r+s \end{pmatrix}_{q^2} \frac{(q^2,q^2)_{m+r+s-1}(q^2,q^2)_{m+s-r}}{(q^2,q^2)_{2m+2s+1}}$$

$$= \frac{(1-q^2)...(1-q^{2m+2r+2s-2})(1-q^2)...(1-q^{2m+2s-2r})(1-q^{4m+4s+2})...(1-q^{2m+2s-2r+4})}{(1-q^2)...(1-q^{4m+4s+2})(1-q^{2m+2s+2r})...(1-q^2)}$$

$$= \frac{(1-q^2)...(1-q^{2m+2s-2r})(1-q^{4m+4s+2})...(1-q^{2m+2s-2r+4})}{(1-q^{2m+2s+2r})(1-q^2)...(1-q^{4m+4s+2})}$$

$$= \frac{1}{(1-q^{2m+2r+2s})(1-q^{2m+2s-2r+2})}.$$

Assim, temos

$$q^{2i}(1-q^{2m+2i+2s})(1-q^{2m-2i+2s+2}) \sum_{r=1}^{s} \frac{(-1)^{r+s}(q^{2i-2s},q^2)_s(q^{2i},q^2)_s}{(1-q^{2i-2r})(1-q^{2i+2r-2})}$$

$$\times \frac{(1-q^{4r-2})q^{(s-r)+(r-s-1)^2}}{(1-q^{2m+2r+2s})(1-q^{2m+2s-2r+2})(1+q^{2r-1})(q^2,q^2)_{s-1}(q^{2r},q^2)_s} \begin{pmatrix} s-1 \\ r-1 \end{pmatrix}_{q^2}$$

$$\times \left[\frac{(1+q^{(2r-1)(2s+1)})}{(1+q^{(2m+2s+1)(2s+1)})} - q^{-2s+2rs-2ms-2s^2} \frac{(1+q^{2r-1})}{(1+q^{2m+2s+1})} \right].$$

Agora, do lado direito da igualdade obtemos

$$\begin{pmatrix} 2m+2s+1 \\ m+i+s \end{pmatrix}_{q^2} q^{(i-s-1)^2}\left[\frac{(1+q^{(2i-1)(2s+1)})}{(1+q^{(2m+2s-1)(2s+1)})}\right.$$

$$\left.-q^{2s(i-m-s-1)}\frac{(1+q^{2i-1})}{(1+q^{2m+2s+1})}\right]$$

$$\times q^{2i-(i-s)^2}(q^2,q^2)_{m+i+s}(q^2,q^2)_{m-i+s+1}(q^2,q^2)^{-1}_{2m+2s+1}(1+q^{2i-1})^{-1}$$

$$=\frac{q^{2s+1}}{(1+q^{(2m+2s+1)(2s+1)})}$$

$$\times\left[\frac{(1+q^{(2i-1)(2s+1)})}{(1+q^{2i-1})}-q^{2s(i-m-s-1)}\frac{(1+q^{(2m+2s+1)(2s+1)})}{(1+q^{2m+2s+1})}\right],$$

pois

$$\begin{pmatrix} 2m+2s+1 \\ m+i+s \end{pmatrix}_{q^2}(q^2,q^2)_{m+i+s}(q^2,q^2)_{m-i+s+1}(q^2,q^2)^{-1}_{2m+2s+1}=1.$$

Segue, então, a identidade equivalente abaixo

$$q^{2i}(1-q^{2m+2i+2s})(1-q^{2m-2i+2s+2})\sum_{r=1}^{s}\frac{(-1)^{r+s}(q^{2i-2s},q^2)_s(q^{2i},q^2)_s}{(1-q^{2i-2r})(1-q^{2i+2r-2})}$$

$$\times\frac{(1-q^{4r-2})q^{(s-r)+(r-s-1)^2}}{(1-q^{2m+2r+2s})(1-q^{2m+2s-2r+2})(1+q^{2r-1})(q^2,q^2)_{s-1}(q^{2r},q^2)_s}\begin{pmatrix} s-1 \\ r-1 \end{pmatrix}_{q^2}$$

$$\times \left[\frac{(1+q^{(2r-1)(2s+1)})}{(1+q^{(2m+2s+1)(2s+1)})} - q^{-2s+2rs-2ms-2s^2}\frac{(1+q^{2r-1})}{(1+q^{2m+2s+1})}\right]$$

$$= \frac{q^{2s+1}}{(1+q^{(2m+2s+1)(2s+1)})}$$

$$\times \left[\frac{(1+q^{(2i-1)(2s+1)})}{(1+q^{2i-1})} - q^{2s(i-m-s-1)}\frac{(1+q^{(2m+2s+1)(2s+1)})}{(1+q^{2m+2s+1})}\right]. \tag{3.4}$$

A identidade acima (3.4) *pode ser vista como uma identidade polinomial em* q^{2i}*, onde os polinômios têm grau menor do que ou igual a* $2s$*. Assim, se pudermos mostrar que os polinômios coincidem em* $2s-1$ *valores a identidade é válida. Primeiramente note que se* $i = m+s+1$ *então ambos os lados da identidade são nulos.*

Considere $i = t$*, com* $1 \leq t \leq s$*. Então cada termo do polinômio do lado direito da igualdade* (3.4) *é nulo com exceção de* $r = t$ *e, neste caso, obtemos*

$$q^{2t}(1-q^{2m+2t+2s})(1-q^{2m-2t+2s+2})\sum_{r=1}^{s}\frac{(-1)^{r+s}\overline{(q^{2t-2s},q^2)_s}(q^{2t},q^2)_s}{(1-q^{4t-2})}$$

$$\times \frac{(1-q^{4t-2})q^{(s-t)+(t-s-1)^2}}{(1-q^{2m+2t+2s})(1-q^{2m+2s-2t+2})(1+q^{2t-1})(q^2,q^2)_{s-1}(q^{2t},q^2)_s}\left(\begin{array}{c} s-1 \\ t-1 \end{array}\right)_{q^2}$$

$$\times \left[\frac{(1+q^{(2t-1)(2s+1)})}{(1+q^{(2m+2s+1)(2s+1)})} - q^{-2s+2ts-2ms-2s^2}\frac{(1+q^{2t-1})}{(1+q^{2m+2s+1})}\right].$$

Como,

$$\frac{\overline{(q^{2t-2s},q^2)_s}}{(q^2,q^2)_{s-1}}\left(\begin{array}{c} s-1 \\ t-1 \end{array}\right)_{q^2} = (-1)^{s-t}q^{(s-t)(t-s-1)}$$

então,

$$(-1)^{(t+s)+(s-t)}q^{2t}q^{(s-t)+(t-s-1)^2}q^{(s-t)(t-s-1)} = q^{2s-1}$$

o que implica que, para $r=t$, temos

$$\frac{q^{2s+1}}{(1+q^{(2m+2s+1)(2s+1)})}$$

$$\times\left[\frac{(1+q^{(2t-1)(2s+1)})}{(1+q^{2t-1})} - \frac{q^{2s(t-m-s-1)}(1+q^{(2m+2s+1)(2s+1)})}{(1+q^{2m+2s+1})}\right]$$

que é exatamente o polinômio da esquerda com $i=t$.

Agora, seja $i=-t$ com $0\leq t\leq s-1$. De modo análogo, com exceção de $r=t+1$,cada termo do polinômio do lado direito (3.4) é zero e, neste caso, temos

$$q^{-2t}(-1)^{t+1+s}q^{(s-t-1)+(t-s)^2}(q^{-2t-2s},q^2)_s\overline{(q^{-2t},q^2)_s}$$

$$\times\frac{(1-q^{4t+2})}{(1+q^{2t+1})(q^2,q^2)_{s-1}(q^{2t+2},q^2)_s(1-q^{-4t-2})}\left(\begin{array}{c} s-1 \\ t \end{array}\right)_{q^2}$$

$$\times\left[\frac{(1+q^{(2t+1)(2s+1)})}{(1+q^{(2m+2s+1)(2s+1)})} - q^{2ts-2ms-2s^2}\frac{(1+q^{2t+1})}{(1+q^{2m+2s+1})}\right],$$

onde $\overline{(q^{-2t},q^2)_s} = (1-q^{-2t})(1-q^{-2t+2})...(1-q^{-2})(1-q^2)...(1-q^{2s-2t-2})$.

Uma vez que

$$\frac{(q^{-2t-2s},q^2)_s\overline{(q^{-2t},q^2)_s}(1-q^{4t+2})}{(q^2,q^2)_{s-1}(q^{2t+2},q^2)_s(1-q^{-4t-2})}\begin{pmatrix} s-1 \\ t \end{pmatrix}_{q^2}$$

$$= q^{(-2t-2s)^{s-1}+2(1+\ldots+s-1)-2s+2s+2}(-1)^t q^{(-2t)^t}q^{(t-1)t}$$

temos

$$\frac{q^{-1-4ts}}{(1+q^{(2m+2s+1)(2s+1)})}\left[\frac{(1+q^{(2t+1)(2s+1)})}{(1+q^{(2m+2s+1)(2s+1)})}-q^{2ts-2ms-2s^2}\frac{(1+q^{(2m+2s+1)(2s+1)})}{(1+q^{2m+2s+1})}\right]$$

$$=\frac{q^{2s-1}}{(1+q^{(2m+2s+1)(2s+1)})}\left[\frac{q^{-2s(2t+1)}(1+q^{(2t+1)(2s+1)})}{(1+q^{(2t+1)})}\right.$$

$$\left.-q^{-2s(t+m+s+1)}\frac{(1+q^{(2m+2s+1)(2s+1)})}{(1+q^{2m+2s+1})}\right].$$

Igual ao lado esquerdo do polinômio (3.4) *para* $i=-t$. *De fato,*

$$\frac{q^{2s-1}}{(1+q^{(2m+2s+1)(2s+1)})}$$

$$\times\left[\frac{(1+q^{(-2t-1)(2s+1)})}{(1+q^{-2t-1})}-q^{2s(-t-m-s-1)}\frac{(1+q^{(2m+2s+1)(2s+1)})}{(1+q^{2m+2s+1})}\right]$$

$$=\frac{q^{2s-1}}{(1+q^{(2m+2s+1)(2s+1)})}$$

$$\times\left[\frac{q^{-2s(2t+1)}(1+q^{(2t+1)(2s+1)})}{(1+q^{2t-1})}-q^{-2s(t+m+s+1)}\frac{(1+q^{(2m+2s+1)(2s+1)})}{(1+q^{2m+2s+1})}\right].$$

Como os polinômios são idênticos para $i = m + s + 1$ e $-s + 1 \leq i \leq s$, a identidade (3.2) é válida.

$\square$

Lema 3.1.6. *Para inteiros $s \geq j \geq 1$, $i \geq 1$, $m \geq 1$, seja*

$$b_i(r,s) = \frac{(-1)^{r+s}(q^2,q^2)_{m+r+s}(q^2,q^2)_{m+s-r}(q^{2i-2s},q^2)_s(q^{2i+2},q^2)_s}{(q^2,q^2)_{m+i+s}(q^2,q^2)_{m-i+s}(1-q^{2i-2r})(1-q^{2i+2r})}$$

$$\times \frac{(1-q^{4i})q^{(i-s)^2+(s-r)}}{(q^2,q^2)_{s-1}(q^{2r+2},q^2)_s} \begin{pmatrix} s-1 \\ r-1 \end{pmatrix}_{q^2}.$$

Então,

$$\sum_{r=1}^{s} b_i(r,s) \begin{pmatrix} 2m+2j \\ m+r+j \end{pmatrix}_{q^2} q^{(r-j)^2}(1-q^{4rj})$$

$$= \begin{pmatrix} 2m+2j \\ m+i+j \end{pmatrix}_{q^2} q^{(i-j)^2}(1-q^{4ij}), \tag{3.5}$$

e

$$\sum_{r=1}^{s} b_i(r,s) \left[\begin{pmatrix} 2m+2s+2 \\ m+r+s+1 \end{pmatrix}_{q^2} q^{(r-s-1)^2} \frac{(1-q^{4r(s+1)})}{(1-q^{4(s+1)(s+m-1)})} \right.$$

$$\left. - \begin{pmatrix} 2m+2s+2 \\ m+r+s+1 \end{pmatrix}_{q^2} \frac{q^{(r-1)^2-2ms-s^2}(1-q^{4r})}{(1-q^{4m+4s+4})} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 2m+2s+2 \\ m+i+s+1 \end{pmatrix}_{q^2} q^{(i-s-1)^2} \frac{(1-q^{4i(s+1)})}{(1-q^{4(s+1)(s+m+1)})}$$

$$- \begin{pmatrix} 2m+2s+2 \\ m+i+s+1 \end{pmatrix}_{q^2} \frac{q^{(i-1)^2-2ms-s^2}(1-q^{4i})}{(1-q^{4m+4s+4})}. \tag{3.6}$$

Demonstração:

Comecemos com a demonstração da identidade (3.5). *Se* $i > m+s$, $i < -m-s$ *ou* $i = 0$ *então a identidade é trivial pois ambos os lados são nulos. De fato:*

$i > m+s$ *ou* $i < -m-s \Longrightarrow i > m+j$ *ou* $i < -m-j \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2m+2j \\ m+i+j \end{pmatrix}_{q^2} = 0.$

Por outro lado se $i > m+s$ *então* $\frac{1}{(q^2,q^2)_{m-i+s}} = 0$. *Se* $i < -m-s$ *então* $\frac{1}{(q^2,q^2)_{m+i+s}} = 0$. *Logo em ambos os casos* $b_i(r,s) = 0$. *Agora se* $i = 0$ *então* $(1-q^{4i})$ *e* $(1-q^{4ij})$ *são iguais a zero e portanto ambos os lados são nulos.*

Multipliquemos ambos os lados de (3.5) *por*

$$q^{-(i-s)^2}(q^2,q^2)_{m+i+s}(q^2,q^2)_{m-i+s}(q^2,q^2)^{-1}_{2m+2j}(1-q^{4i})^{-1}.$$

Agora assumimos que $-m-s \leq i \leq m+s$ *e* $i \neq 0$. *Deste modo, obtemos*

$$\sum_{r=1}^{s} \frac{(-1)^{r+s}(q^2,q^2)_{m+r+s}(q^2,q^2)_{m+s-r}(q^{2i-2s},q^2)_s(q^{2i+2},q^2)_s}{(q^2,q^2)_{m+i+s}(q^2,q^2)_{m-i+s}(1-q^{2i-2r})(1-q^{2i+2r})}$$

$$\times \frac{(1-q^{4i})q^{(i-s)^2+(s-r)}}{(q^2,q^2)_{s-1}(q^{2r+2},q^2)_s} \begin{pmatrix} s-1 \\ r-1 \end{pmatrix}_{q^2}$$

$$\times \begin{pmatrix} 2m+2j \\ m+r+j \end{pmatrix}_{q^2} q^{(r-j)^2}(1-q^{4rj})q^{-(i-s)^2}(q^2,q^2)_{m+i+s}(q^2,q^2)_{m-i+s}(q^2,q^2)^{-1}_{2m+2j}(1-q^{4i})^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2m+2j \\ m+i+j \end{pmatrix}_{q^2} q^{(i-j)^2}(1-q^{4ij})q^{-(i-s)^2}(q^2,q^2)_{m+i+s}(q^2,q^2)_{m-i+s}(q^2,q^2)^{-1}_{2m+2j}(1-q^{4i})^{-1}$$

$$\sum_{r=1}^{s} \frac{(-1)^{r+s}(q^2,q^2)_{m+r+s}(q^2,q^2)_{m+s-r}(q^{2i-2s},q^2)_s(q^{2i+2},q^2)_s}{(q^2,q^2)_{2m+2j}(1-q^{2i-2r})(1-q^{2i+2r})}$$

$$\times \frac{q^{(s-r)}}{(q^2,q^2)_{s-1}(q^{2r+2},q^2)_s} \begin{pmatrix} s-1 \\ r-1 \end{pmatrix}_{q^2}$$

$$\times \begin{pmatrix} 2m+2j \\ m+r+j \end{pmatrix}_{q^2} q^{(r-j)^2}(1-q^{4rj})$$

$$= \begin{pmatrix} 2m+2j \\ m+i+j \end{pmatrix}_{q^2} q^{(i-j)^2}(1-q^{4ij})q^{-(i-s)^2}(q^2,q^2)_{m+i+s}(q^2,q^2)_{m-i+s}(q^2,q^2)^{-1}_{2m+2j}(1-q^{4i})^{-1}.$$

Uma vez que

$$\frac{(q^2,q^2)_{m+r+s}(q^2,q^2)_{m+s-r}}{(q^2,q^2)_{2m+2j}} \begin{pmatrix} 2m+2j \\ m+r+j \end{pmatrix}_{q^2}$$

$$= \frac{(1-q^2)(1-q^4)...(1-q^{2m+2r+2s})(1-q^2)...(1-q^{2m+2s-2r})(1-q^{4m+4j})...(1-q^{2m+2j-2r+2})}{(1-q^2)...(1-q^{4m+4j})(1-q^{2m+2r+2j})...(1-q^2)}$$

$$= \frac{(1-q^2)...(1-q^{2m+2s-2r})(1-q^2)(1-q^4)...(1-q^{2m+2r+2s})}{(1-q^2)...(1-q^{2m+2j-2r})(1-q^2)...(1-q^{2m+2r+2j})}$$

$$= (1 - q^{2m+2j-2r+2})...(1 - q^{2m+2s-2r})(1 - q^{2m+2r+2j+2})...(1 - q^{2m+2r+2s})$$

$$= (q^{2m+2j-2r+2}, q^2)_{s-j}(q^{2m+2r+2j+2}, q^2)_{s-j}.$$

e

$$\frac{(q^2, q^2)_{m+i+s}(q^2, q^2)_{m+s-i}}{(q^2, q^2)_{2m+2j}} \left(\begin{array}{c} 2m + 2j \\ m + i + j \end{array} \right)_{q^2}$$

$$= \frac{(1 - q^2)(1 - q^4)...(1 - q^{2m+2i+2s})(1 - q^2)...(1 - q^{2m+2s-2i})(1 - q^{4m+4j})...(1 - q^{2m+2j-2i+2})}{(1 - q^2)...(1 - q^{4m+4j})(1 - q^{2m+2i+2j})...(1 - q^2)}$$

$$= \frac{(1 - q^2)...(1 - q^{2m+2s-2i})(1 - q^2)(1 - q^4)...(1 - q^{2m+2i+2s})}{(1 - q^2)...(1 - q^{2m+2j-2i})(1 - q^2)...(1 - q^{2m+2i+2j})}$$

$$= (1 - q^{2m+2j-2i+2})...(1 - q^{2m+2s-2i})(1 - q^{2m+2i+2j+2})...(1 - q^{2m+2i+2s})$$

$$= (q^{2m+2j-2i+2}, q^2)_{s-j}(q^{2m+2i+2j+2}, q^2)_{s-j}.$$

Temos a identidade equivalente

$$\sum_{r=1}^{s} \frac{(-1)^{r+s}(q^{2m+2j-2r+2}, q^2)_{s-j}(q^{2m+2r+2j+2}, q^2)_{s-j}(q^{2i-2s}, q^2)_s(q^{2i+2}, q^2)_s}{(1 - q^{2i-2r})(1 - q^{2i+2r})}$$

$$\times \frac{(1-q^{4rj})q^{(s-r)+(r-j)^2}}{(q^2,q^2)_{s-1}(q^{2r+2},q^2)_s} \begin{pmatrix} s-1 \\ r-1 \end{pmatrix}_{q^2}$$

$$= q^{(2i-j-s)(s-j)} \frac{(1-q^{4ij})}{(1-q^{4i})}(q^{2m+2j-2i+2},q^2)_{s-j}(q^{2m+2i+2j+2},q^2)_{s-j}. \qquad (3.7)$$

Veja que a identidade (3.7) *acima pode ser vista como uma identidade polinomial em* q^{2i}, *onde tanto o polinômio do lado esquerdo como o do lado direito em relação ao sinal de igualdade têm grau menor do que ou igual a* $2s-2$. *Assim basta mostrarmos que os polinômios são iguais para até* $2s-3$ *valores para que a identidade seja válida.*

Sendo assim, considere $i = t$, *com* $1 \leq t \leq s$. *Com essa restrição cada termo do polinômio da esquerda em* (3.7) *é zero com exceção de* $r = t$, *pois* $2t - 2s < 0$ *e portanto*

$$(q^{2t-2s},q^2)_s = (1-q^{2t-2s})...(1-q^{-2})(1-q^0)(1-q^2)...(1-q^{2t+2}) = 0.$$

Assim, quando $r = t$ *temos*

$$(-1)^{t+s}(q^{2m+2t+2j+2},q^2)_{s-j}(q^{2m-2t+2j+2},q^2)_{s-j}q^{(s-t)+(t-j)^2}$$

$$\times \frac{(1-q^{4tj})\overline{(q^{2t-2s},q^2)_s}}{(1-q^{4t})(q^2,q^2)_{s-1}} \begin{pmatrix} s-1 \\ t-1 \end{pmatrix}_{q^2}$$

onde $\overline{(q^{2t-2s},q^2)_s} = (1-q^{2t-2s})...(1-q^{-2})(1-q^2)...(1-q^{2t+2})$.

Uma vez que

$$\frac{\overline{(q^{2t-2s},q^2)_s}}{(q^2,q^2)_{s-1}} \begin{pmatrix} s-1 \\ t-1 \end{pmatrix}_{q^2}$$

$$= \frac{(1-q^{2t-2s})...(1-q^{-2})(1-q^2)...(1-q^{2t+2})(1-q^{2s-2})...(1-q^{2s-2t+2})}{(1-q^2)...(1-q^{2s-2})(1-q^2)...(1-q^{2t+2})}$$

$$= \frac{(1-q^{2t-2s})...(1-q^{-2})}{(1-q^{2s-2t})...(1-q^2)} = (-1)^{s-t} q^{(2t-2s)(s-t)+(s-t-1)(s-t)}.$$

Temos

$$(-1)^{t+s}(q^{2m+2t+2j+2},q^2)_{s-j}(q^{2m-2t+2j+2},q^2)_{s-j}q^{(s-t)+(t-j)^2}$$

$$\times \frac{(1-q^{4tj})\overline{(q^{2t-2s},q^2)_s}}{(1-q^{4t})(q^2,q^2)_{s-1}} \left(\begin{array}{c} s-1 \\ t-1 \end{array} \right)_{q^2}$$

$$= (-1)^{t+s}(-1)^{s-t}(q^{2m+2t+2j+2},q^2)_{s-j}(q^{2m-2t+2j+2},q^2)_{s-j}q^{(s-t)+(t-j)^2}q^{(2t-2s)(s-t)+(s-t-1)(s-t)}$$

$$\times \frac{(1-q^{4tj})}{(1-q^{4t})}$$

$$= (q^{2m+2t+2j+2},q^2)_{s-j}(q^{2m-2t+2j+2},q^2)_{s-j}q^{(2t-j-s)(s-j)}\frac{(1-q^{4tj})}{(1-q^{4t})},$$

igual ao lado direito quando $i = t$.

Agora seja $i = -t$, com $1 \leq t \leq s$. Neste caso cada termo do polinômio do lado esquerdo da igualdade em (3.7) desaparece com exceção de $r = t$ pois

$$(q^{-2t+2},q^2)_s = (1-q^{-2t+2})...(1-q^{-2})(1-q^0)(1-q^2)...(1-q^{2s-2t}) = 0.$$

Assim, quando $i = -t$ e $r = t$ temos

$$(-1)^{t+s}(q^{2m+2j-2t+2},q^2)_{s-j}(q^{2m+2t+2j+2},q^2)_{s-j}(q^{-2t-2s},q^2)_s\overline{(q^{-2t+2},q^2)_s}$$

$$\times \frac{(1-q^{4tj})q^{(s-t)+(t-j)^2}}{(1-q^{-4t})(q^2,q^2)_{s-1}(q^{2t+2},q^2)_s} \left(\begin{array}{c} s-1 \\ t-1 \end{array} \right)_{q^2}$$

onde $\overline{(q^{-2t+2},q^2)_s} = (1-q^{-2t+2})...(1-q^{-2})(1-q^2)...(1-q^{2s-2t})$.

Uma vez que

$$\frac{(q^{-2t-2s},q^2)_s\overline{(q^{-2t+2},q^2)_s}}{(q^2,q^2)_{s-1}(q^{2t+2},q^2)_s} \left(\begin{array}{c} s-1 \\ t-1 \end{array} \right)_{q^2}$$

$$= \frac{(1-q^{-2t-2s})...(1-q^{-2t-2})(1-q^{-2t+2})...(1-q^{-2})(1-q^2)...(1-q^{2s-2t})}{(1-q^2)(1-q^4)...(1-q^{2s-2})(1-q^{2t+2})...(1-q^{2t+2s})}$$

$$\times \frac{(1-q^{2s-2})...(1-q^{2s-2t+2})}{(1-q^2)...(1-q^{2t-2})}$$

$$= \frac{(1-q^{-2t-2s})...(1-q^{-2t-2})(1-q^{-2t+2})...(1-q^{-2})}{(1-q^{2t+2s})...(1-q^{2t+2})(1-q^{2t-2})...(1-q^2)}$$

$$= (-1)^s q^{(-2t-2s)s+(s-1)s}(-1)^{t-1}q^{(-2t+2)(t-1)+(t-2)(t-1)}$$

$$= (-1)^{s+t-1}q^{s(-2t-s-1)+(t-1)(-t)}$$

$$= (-1)^{s+t-1}q^{-2ts-s^2-s-t^2+t},$$

obtemos

$$(-1)^{t+s}(-1)^{s+t-1}(q^{2m+2j-2t+2},q^2)_{s-j}(q^{2m+2t+2j+2},q^2)_{s-j}q^{-2ts-s^2-s-t^2+t+(s-t)+(t-j)^2}\frac{(1-q^{4tj})}{(1-q^{-4t})}$$

$$= (-1)^{t+s}(-1)^{s+t-1}(q^{2m+2j-2t+2}, q^2)_{s-j}(q^{2m+2t+2j+2}, q^2)_{s-j}q^{-2ts-s^2-s-t^2+t+(s-t)+(t-j)^2}$$

$$\times \frac{-q^{4tj}(1-q^{-4tj})}{(1-q^{-4t})}$$

$$= q^{(-2t-j-s)(s-j)}\frac{(1-q^{-4tj})}{(1-q^{-4t})}(q^{2m+2j-2t+2}, q^2)_{s-j}(q^{2m+2t+2j+2}, q^2)_{s-j},$$

igual ao lado esquerdo quando $i = -t$. *E assim terminamos a primeira parte da demonstração.*

Agora vamos à demonstração da identidade (3.6)*:*

$$\sum_{r=1}^{s} b_i(r,s)\left[\binom{2m+2s+2}{m+r+s+1}_{q^2} q^{(r-s-1)^2}\frac{(1-q^{4r(s+1)})}{(1-q^{4(s+1)(s+m-1)})}\right.$$

$$\left. - \binom{2m+2s+2}{m+r+s+1}_{q^2} \frac{q^{(r-1)^2-2ms-s^2}(1-q^{4r})}{(1-q^{4m+4s+4})}\right]$$

$$= \binom{2m+2s+2}{m+i+s+1}_{q^2} q^{(i-s-1)^2}\frac{(1-q^{4i(s+1)})}{(1-q^{4(s+1)(s+m+1)})}$$

$$- \binom{2m+2s+2}{m+i+s+1}_{q^2} \frac{q^{(i-1)^2-2ms-s^2}(1-q^{4i})}{(1-q^{4m+4s+4})}.$$

Se $i > m+s+1$, $i < -m-s-1$ *ou* $i = 0$, *então a identidade é trivial pois se* $i > m+s+1$ *ou* $i < -m-s-1$ *então* $b_i(r,s) = 0$ *e* $\binom{2m+2s+2}{m+i+s+1}_{q^2} = 0.$

E se $i=0$ *tanto* $(1-q^{4i(s+1)})$, *quanto* $(1-q^{4i})$, *são nulos e portanto ambos os lados são nulos.*

Suponhamos $-m-s-1\leq i\leq m+s+1$ *e* $i\neq 0$. *Multipliquemos ambos os lados de* (3.6) *por*

$$q^{2i-(i-s)^2}(q^2,q^2)_{m+i+s+1}(q^2,q^2)_{m-i+s+1}(q^2,q^2)^{-1}_{2m+2s+2}(1-q^{4i})^{-1}.$$

Temos

$$q^{2i-(i-s)^2}(q^2,q^2)_{m+i+s+1}(q^2,q^2)_{m-i+s+1}(q^2,q^2)^{-1}_{2m+2s+2}(1-q^{4i})^{-1}$$

$$\times\sum_{r=1}^{s}b_i(r,s)\left[\begin{pmatrix}2m+2s+2\\ m+r+s+1\end{pmatrix}_{q^2}q^{(r-s-1)^2}\frac{(1-q^{4r(s+1)})}{(1-q^{4(s+1)(s+m-1)})}\right.$$

$$\left.-\begin{pmatrix}2m+2s+2\\ m+r+s+1\end{pmatrix}_{q^2}\frac{q^{(r-1)^2-2ms-s^2}(1-q^{4r})}{(1-q^{4m+4s+4})}\right]$$

$$=\left[\begin{pmatrix}2m+2s+2\\ m+i+s+1\end{pmatrix}_{q^2}q^{(i-s-1)^2}\frac{(1-q^{4i(s+1)})}{(1-q^{4(s+1)(s+m+1)})}\right.$$

$$\left.-\begin{pmatrix}2m+2s+2\\ m+i+s+1\end{pmatrix}_{q^2}\frac{q^{(i-1)^2-2ms-s^2}(1-q^{4i})}{(1-q^{4m+4s+4})}\right]$$

$$\times q^{2i-(i-s)^2}(q^2,q^2)_{m+i+s+1}(q^2,q^2)_{m-i+s+1}(q^2,q^2)^{-1}_{2m+2s+2}(1-q^{4i})^{-1}$$

$$q^{2i}\sum_{r=1}^{s}\frac{(q^2,q^2)_{m+i+s+1}(q^2,q^2)_{m-i+s+1}(q^2,q^2)_{m+r+s}(q^2,q^2)_{m+s-r}}{(q^2,q^2)_{m+i+s}(q^2,q^2)_{m-i+s}(q^2,q^2)_{2m+2s+2}}$$

$$\times \frac{(q^{2i-2s},q^2)_s(q^{2i+2},q^2)_s q^{(s-r)}}{(1-q^{2i-2r})(1-q^{2i+2r})(q^2,q^2)_{s-1}(q^{2r+2},q^2)_s} \left(\begin{array}{c} 2m+2s+2 \\ m+r+s+1 \end{array} \right)_{q^2} \left(\begin{array}{c} s-1 \\ r-1 \end{array} \right)_{q^2}$$

$$\times \left[q^{(r-s-1)^2} \frac{(1-q^{4r(s+1)})}{(1-q^{4(s+1)(s+m+1)})} - \frac{q^{(r-1)^2-2ms-s^2}(1-q^{4r})}{(1-q^{4m+4s+4})} \right].$$

$$= \left(\begin{array}{c} 2m+2s+2 \\ m+i+s+1 \end{array} \right)_{q^2} \left[q^{(i-s-1)^2} \frac{(1-q^{4i(s+1)})}{(1-q^{4(s+1)(s+m+1)})} \right.$$

$$\left. - \frac{q^{(i-1)^2-2ms-s^2}(1-q^{4i})}{(1-q^{4m+4s+4})} \right]$$

$$\times q^{2i-(i-s)^2}(q^2,q^2)_{m+i+s+1}(q^2,q^2)_{m-i+s+1}(q^2,q^2)^{-1}_{2m+2s+2}(1-q^{4i})^{-1}.$$

Uma vez que

$$\frac{(q^2,q^2)_{m+i+s+1}(q^2,q^2)_{m-i+s+1}}{(q^2,q^2)_{m+i+s}(q^2,q^2)_{m-i+s}} = (1-q^{2+2m+2i+2s})(1-q^{2+2m-2i+2s})$$

e

$$\frac{(q^2,q^2)_{m+r+s}(q^2,q^2)_{m+s-r}}{(q^2,q^2)_{2m+2s+2}} \left(\begin{array}{c} 2m+2s+2 \\ m+r+s+1 \end{array} \right)_{q^2}$$

$$= \frac{(1-q^2)...(1-q^{2m+2s-2r})(1-q^2)...(1-q^{2m+2r+2s})(1-q^{4m+4s+4})...(1-q^{2m+2s+4-2r})}{(1-q^2)...(1-q^{4m+4s+4})(1-q^2)...(1-q^{2m+2r+2s+2})}$$

$$= \frac{1}{(1-q^{2m+2s-2r+2})(1-q^{2m+2r+2s+2})},$$

obtemos do lado esquerdo da identidade:

$$q^{2i}(1-q^{2+2m+2i+2s})(1-q^{2+2m-2i+2s})$$

$$\times\sum_{r=1}^{s}\frac{(-1)^{r+s}q^{(s-r)}(q^{2i-2s},q^2)_s(q^{2i+2},q^2)_s}{(1-q^{2m+2s-2r+2})(1-q^{2m+2r+2s+2})(1-q^{2i-2r})(1-q^{2i+2r})(q^2,q^2)_{s-1}(q^{2r+2},q^2)_s}\left(\begin{array}{c}s-1\\r-1\end{array}\right)_{q^2}$$

$$\times\left[q^{(r-s-1)^2}\frac{(1-q^{4r(s+1)})}{(1-q^{4(s+1)(s+m+1)})}-\frac{q^{(r-1)^2-2ms-s^2}(1-q^{4r})}{(1-q^{4m+4s+4})}\right].$$

Agora do lado direito da igualdade obtemos

$$q^{2i-(i-s)^2}(q^2,q^2)_{m+i+s+1}(q^2,q^2)_{m-i+s+1}(q^2,q^2)^{-1}_{2m+2s+2}(1-q^{4i})^{-1}$$

$$\times\left[\left(\begin{array}{c}2m+2s+2\\m+i+s+1\end{array}\right)_{q^2}q^{(i-s-1)^2}\frac{(1-q^{4i(s+1)})}{(1-q^{4(s+1)(s-m-1)})}\right.$$

$$\left.-\left(\begin{array}{c}2m+2s+2\\m+i+s+1\end{array}\right)_{q^2}\frac{q^{(i-1)^2-2ms-s^2}(1-q^{4i})}{(1-q^{4m+4s+4})}\right]$$

$$=\frac{q^{2s+1}}{(1-q^{4(s+1)(s+m+1)})}\left[\frac{(1-q^{4i(s-1)})}{(1-q^{4i})}-\frac{q^{2s(i-m-s-1)}(1-q^{4(s-1)(s+m+1)})}{(1-q^{4m+4s+4})}\right].$$

Uma vez que

$$\left(\begin{array}{c}2m+2s+2\\m+i+s+1\end{array}\right)_{q^2}\frac{(q^2,q^2)_{m+i+s+1}(q^2,q^2)_{m-i+s+1}}{(q^2,q^2)_{2m+2s+2}}=$$

$$= \frac{(1-q^2)...(1-q^{2m+2s-2i+2})(1-q^2)...(1-q^{2m+2i+2s+2})(1-q^{4m+4s+4})...(1-q^{2m+2s+4-2i})}{(1-q^2)...(1-q^{4m+4s+4})(1-q^2)...(1-q^{2m+2i+2s+2})}$$

$$= 1.$$

Assim temos a identidade equivalente

$$q^{2i}(1-q^{2+2m+2i+2s})(1-q^{2+2m-2i+2s})$$

$$\times \sum_{r=1}^{s} \frac{(-1)^{r+s} q^{(s-r)} (q^{2i-2s}, q^2)_s (q^{2i+2}, q^2)_s}{(1-q^{2m+2s-2r+2})(1-q^{2m+2r+2s+2})(1-q^{2i-2r})(1-q^{2i+2r})(q^2,q^2)_{s-1}(q^{2r+2},q^2)_s} \begin{pmatrix} s-1 \\ r-1 \end{pmatrix}_{q^2}$$

$$\times \left[q^{(r-s-1)^2} \frac{(1-q^{4r(s+1)})}{(1-q^{4(s+1)(s+m+1)})} - \frac{q^{(r-1)^2-2ms-s^2}(1-q^{4r})}{(1-q^{4m+4s+4})} \right].$$

$$= \frac{q^{2s+1}}{(1-q^{4(s+1)(s+m+1)})} \left[\frac{(1-q^{4i(s-1)})}{(1-q^{4i})} - \frac{q^{2s(i-m-s-1)}(1-q^{4(s-1)(s+m+1)})}{(1-q^{4m+4s+4})} \right] \quad (3.8)$$

A identidade acima (3.8) *pode ser vista como uma identidade polinomial em* q^{2i}*, onde os polinômios têm grau menor do que ou igual a* $2s$*. Basta, então, mostrarmos que temos igualdade para até* $2s-1$ *valores e a identidade vai ser válida.*

Se $i = m+s+1$ *então a identidade é trivial pois ambos os lados são nulos. Se* $i = t$ *com* $1 \leq t \leq s$ *então cada termo do lado esquerdo da igualdade* (3.8) *desaparece com exceção de* $r = t$*, pois*

$$(q^{2t-2s}, q^2)_s = (1-q^{2t-2s})...(1-q^{-2})(1-q^0)(1-q^2)...(1-q^{2t-2}) = 0.$$

Assim para $i = t = r$ obtemos

$$q^{2t}(1-q^{2+2m+2t+2s})(1-q^{2+2m-2t+2s})$$

$$\times\frac{(-1)^{t+s}q^{(s-t)}\overline{(q^{2t-2s},q^2)_s}(q^{2t+2},q^2)_s}{(1-q^{2m+2s-2t+2})(1-q^{2m+2t+2s+2})(1-q^{2t+2t})(q^2,q^2)_{s-1}(q^{2t+2},q^2)_s}\left(\begin{array}{c} s-1 \\ t-1 \end{array}\right)_{q^2}$$

$$\times\left[q^{(t-s-1)^2}\frac{(1-q^{4t(s+1)})}{(1-q^{4(s+1)(s+m+1)})}-\frac{q^{(t-1)^2-2ms-s^2}(1-q^{4t})}{(1-q^{4m+4s+4})}\right],$$

onde $\overline{(q^{2t-2s},q^2)_s}=(1-q^{2t-2s})...(1-q^{-2})(1-q^2)...(1-q^{2t-2})$

$$=\frac{q^{2t}(-1)^{t+s}q^{(s-t)}\overline{(q^{2t-2s},q^2)_s}}{(1-q^{4t})(q^2,q^2)_{s-1}}\left(\begin{array}{c} s-1 \\ t-1 \end{array}\right)_{q^2}$$

$$\times\left[q^{(t-s-1)^2}\frac{(1-q^{4t(s+1)})}{(1-q^{4(s+1)(s+m+1)})}-\frac{q^{(t-1)^2-2ms-s^2}(1-q^{4t})}{(1-q^{4m+4s+4})}\right].$$

Uma vez que

$$\frac{\overline{(q^{2t-2s},q^2)_s}}{(q^2,q^2)_{s-1}}\left(\begin{array}{c} s-1 \\ t-1 \end{array}\right)_{q^2}=$$

$$=\frac{(1-q^{2t-2s})...(1-q^{-2})(1-q^2)...(1-q^{2t-2})(1-q^{2s-2})...(1-q^{2s-2t+2})}{(1-q^2)...(1-q^{2s-2})(1-q^{2t-2})...(1-q^2)}$$

$$=\frac{(1-q^{2t-2s})...(1-q^{-2})}{(1-q^2)...(1-q^{2s-2t})}=(-1)^{s-t}q^{(2t-2s)(s-t)+(s-t-1)(s-t)}=(-1)^{s-t}q^{(t-s-1)(s-t)},$$

temos

$$\frac{(-1)^{s-t}(-1)^{t+s}q^{t+s}q^{(t-s-1)(s-t)}}{(1-q^{4t})}\left[q^{(t-s-1)^2}\frac{(1-q^{4t(s+1)})}{(1-q^{4(s+1)(s+m+1)})}-\frac{q^{(t-1)^2-2ms-s^2}(1-q^{4t})}{(1-q^{4m+4s+4})}\right].$$

$$=\frac{q^{2s+1}}{(1-q^{4(s+1)(s+m+1)})}\left[\frac{(1-q^{4t(s+1)})}{(1-q^{4t})}-\frac{q^{2s(t-m-s-1)}(1-q^{4(s+1)(s+m+1)})}{(1-q^{4m+4s+4})}\right],$$

igual ao polinômio do lado direito da igualdade (3.8) *para* $i=t$.

Finalmente, quando $i=-t$ *com* $1\leq t\leq s$ *cada termo do lado esquerdo da igualdade* (3.8) *é zero com exceção de* $r=t$ *pois*

$$(q^{-2t+2},q^2)_s=(1-q^{-2t+2})...(1-q^{-2})(1-q^0)(1-q^2)...(1-q^{-2t+2s})=0.$$

E neste caso temos

$$q^{-2t}(1-q^{2+2m-2t+2s})(1-q^{2+2m+2t+2s})$$

$$\times\frac{(-1)^{t+s}q^{(s-t)}(q^{-2t-2s},q^2)_s\overline{(q^{-2t+2},q^2)_s}}{(1-q^{2m+2s-2t+2})(1-q^{2m+2t+2s+2})(1-q^{-4t})(q^2,q^2)_{s-1}(q^{2t+2},q^2)_s}\begin{pmatrix}s-1\\t-1\end{pmatrix}_{q^2}$$

$$\times\left[q^{(t-s-1)^2}\frac{(1-q^{4t(s+1)})}{(1-q^{4(s+1)(s+m+1)})}-\frac{q^{(t-1)^2-2ms-s^2}(1-q^{4t})}{(1-q^{4m+4s+4})}\right],$$

onde $\overline{(q^{-2t+2},q^2)_s}=(1-q^{-2t+2})...(1-q^{-2})(1-q^2)...(1-q^{-2t+2s})$

$$=\frac{q^{-2t}(-1)^{t+s}q^{(s-t)}(q^{-2t-2s},q^2)_s\overline{(q^{-2t+2},q^2)_s}}{(1-q^{-4t})(q^2,q^2)_{s-1}(q^{2t+2},q^2)_s}\begin{pmatrix}s-1\\t-1\end{pmatrix}_{q^2}$$

$$\times\left[q^{(t-s-1)^2}\frac{(1-q^{4t(s+1)})}{(1-q^{4(s+1)(s+m+1)})}-\frac{q^{(t-1)^2-2ms-s^2}(1-q^{4t})}{(1-q^{4m+4s+4})}\right].$$

Mas

$$\frac{q^{-2t-2s},q^2)_s\overline{(q^{-2t+2},q^2)_s}}{(q^2,q^2)_{s-1}(q^{2t+2},q^2)_s}\left(\begin{array}{c} s-1 \\ t-1 \end{array}\right)_{q^2}$$

$$=\frac{(1-q^{-2t-2s})...(1-q^{-2t-2})(1-q^{-2t+2})...(1-q^{-2})}{(1-q^{2t+2})...(1-q^{2t+2s})(1-q^{2t-2})...(1-q^2)}$$

$$\times\frac{(1-q^2)...(1-q^{2s-2t})(1-q^{2s-2})...(1-q^{2s-2t+2})}{(1-q^2)...(1-q^{2s-2})}$$

$$=\frac{(1-q^{-2t-2s})...(1-q^{-2t-2})(1-q^{-2t+2})...(1-q^{-2})}{(1-q^{2t+2})...(1-q^{2t+2s})(1-q^{2t-2})...(1-q^2)}$$

$$=(-1)^s q^{(s-1)s+(-2t-2s)s}(-1)^{t-1}q^{(t-2)(t-1)+(-2t+2)(t-1)}=(-1)^{t+s-1}q^{-s^2-2ts-s-t^2+t}$$

e

$$(1-q^{4t(s+1)})=-q^{4t(s+1)}(1-q^{-4t(s+1)}),$$

logo,

$$\frac{q^{-2t}(-1)^{t+s}q^{(s-t)}(-1)^{t+s-1}q^{-s^2-2ts-s-t^2+t}(-q^{4t(s+1)})}{(1-q^{-4t})}$$

$$\times\left[q^{(t-s-1)^2}\frac{(1-q^{-4t(s+1)})}{(1-q^{4(s+1)(s+m+1)})}-\frac{q^{(t-1)^2-2ms-s^2}(1-q^{4t})}{(1-q^{4m+4s+4})}\right].$$

$$=\frac{q^{2s+1}}{(1-q^{4(s+1)(s+m+1)})}\left[\frac{(1-q^{-4t(s+1)})}{(1-q^{-4t})}-\frac{q^{-2s(t+s+m+1)}(1-q^{4(s+1)(s+m+1)})}{(1-q^{4m+4s+4})}\right].$$

Igual ao polinômio do lado direito da igualdade (3.8) *com* $i = -t$. *Assim a identidade é valida para* $i = m + s + 1$, $1 \leq i \leq s$ *e* $-s \leq i \leq -1$ *o que implica que é válida para todo* i. $\square$

Lema 3.1.7. *Para inteiros* $n \geq k \geq 1, b = 0$ *ou* $1, i \geq 0, m \geq 0,$

$$\sum_{j=1}^{n} \begin{pmatrix} 2m+2j-b \\ m+i+j-b \end{pmatrix}_q \frac{(-1)^{j+k}(q^{2m+2j+1-b})_{2k-2j}q^{\frac{1}{2}j(j+1)-kj}}{(q^{m+j+k-b})_{k-j}(q^{m+j})_{k-j}}$$

$$\times \begin{pmatrix} k-1 \\ j-1 \end{pmatrix}_q$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}q^{1-k}(q)_{2m+2k-b}(q)_m(q^{1-i})_{k-1}(q^{b+1-i-k})_{k-1}(q)_{m+k-b}}{(q)_{m+2k-b-1}(q)_{m+k-1}(q)_{m+i-b-1}(q)_{m+k-i}(q^{b-i+m-k})_{k-1}} \tag{3.9}$$

Demonstração: *De fato, uma vez que*

$$\begin{pmatrix} 2m+2j-b \\ m+i+j-b \end{pmatrix}_q = \frac{(q)_{2m+2j-b}}{(q)_{m+i+j-b}(q)_{m+j-i}},$$

$$(q^{m+j+k-b})_{k-j} = \frac{(q)_{m+2k-b-1}}{(q)_{m+j+k-b-1}}$$

e

$$(q^{m+j})_{k-j} = \frac{(q)_{m+k-1}}{(q)_{m+j-1}}$$

temos que

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\begin{array}{c} 2m+2j-b \\ m+i+j-b \end{array} \right)_q \frac{(-1)^{j+k}(q^{2m+2j+1-b})_{2k-2j} q^{\frac{1}{2}j(j+1)-kj}}{(q^{m+j+k-b})_{k-j}(q^{m+j})_{k-j}}$$

$$\times \left(\begin{array}{c} k-1 \\ j-1 \end{array} \right)_q$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j+k} q^{\frac{1}{2}j(j+1)-kj}(q)_{2m+2j-b}(q^{2m+2j+1-b})_{2k-2j}}{(q)_{m+i+j-b}(q)_{m+j-i}(q)_{m+2k-b-1}(q)_{m+k-1}}$$

$$\times (q)_{m+j+k-b-1}(q)_{m+j-1} \left(\begin{array}{c} k-1 \\ j-1 \end{array} \right)_q .$$

Mas como

$(q)_{m+j+k-b-1} = (q)_{m+k-b}(q^{m+k-b+1})_j; (q)_{m+j-1} = (q)_m(q^{m+1})_j; (q)_{m+j-i} = (q)_{m-i+1}(q^{m-i+2})_j$ *e* $(q)_{m+i+j-b} = (q)_{m+i-b+1}(q^{m+i-b+2})_j$, *obtemos*

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j+k} q^{\frac{1}{2}j(j+1)-kj}(q)_{2m+2j-b}(q^{2m+2j+1-b})_{2k-2j}}{(q)_{m-i+1}(q^{m-i+2})_j(q)_{m+i-b+1}(q^{m+i-b+2})_j}$$

$$\times \frac{(q)_{m+k-b}(q^{m+k-b+1})_j(q)_m(q^{m+1})_j}{(q)_{m+2k-b-1}(q)_{m+k-1}} \left(\begin{array}{c} k-1 \\ j-1 \end{array} \right)_q$$

$$= \frac{(-1)^k (q)_{2m+2k-b}(q)_{m+k-b}(q)_m}{(q)_{m+2k-b-1}(q)_{m+k-1}(q)_{m+i-b+1}(q)_{m-i+1}}$$

$$\times \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j q^{\frac{1}{2}j(j+1)-kj}(q^{m+k-b+1})_j(q^{m+1})_j}{(q^{m+i-b+2})_j(q^{m-i+2})_j} \left(\begin{array}{c} k-1 \\ j-1 \end{array} \right)_q .$$

Uma vez que

$$(q^{-k+1})_j = (1-q^{-k+1})(1-q^{-k+2})...(1-q^{-k+j})$$

$$= \left(1-\frac{1}{q^{k-1}}\right)\left(1-\frac{1}{q^{k-2}}\right)...\left(1-\frac{1}{q^{k-j}}\right)$$

$$= (-1)^j q^{\frac{1}{2}j(j+1)-jk}(q^{k-j})_j,$$

temos que

$$= \frac{(-1)^{k+1}(q)_{2m+2k-b}(q)_{m+k-b}(q)_m}{(q)_{m+2k-b-1}(q)_{m+k-1}(q)_{m+i-b+1}(q)_{m-i+1}} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(q^{-k+1})_j(q^{m+k-b+1})_j(q^{m-1})_j q^j}{(q)_j(q^{m+i-b+2})_j(q^{m-i+2})_j}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}q^{1-k}(q)_{2m+2k-b}(q)_m(q^{1-i})_{k-1}(q^{b+1-i-k})_{k-1}(q)_{m+k-b}}{(q)_{m+2k-b-1}(q)_{m+k-1}(q)_{m+i-b+1}(q)_{m+k-i}(q^{b-i+m-k})_{k-1}}.$$

□

Considere as matrizes:

$$\gamma_n = \left[\begin{pmatrix} 2m+2j-1 \\ m+i+j-1 \end{pmatrix}_{q^2} \frac{q^{(i-1)^2-2m(j-1)-(j-1)^2}(1+q^{2i-1})}{(1+q^{2m+2j-1})}\right]_{n\times n},$$

$$\gamma_n^{'} = \left[\begin{pmatrix} 2m+2j \\ m+i+j \end{pmatrix}_{q^2} \frac{q^{(i-1)^2-2m(j-1)-(j-1)^2}(1+q^{4i})}{(1-q^{4m+4j})}\right]_{n\times n}.$$

Lema 3.1.8.

$$det\gamma_n = \prod_{i=1}^{m}\left[\frac{(1-q^{2n+2i-1})}{(1-q^{2i-1})}\prod_{h=i+1}^{m}\frac{(1-q^{2(2n-i+h-1)})}{(1-q^{2(i+h-1)})}\right].$$

Demonstração:

$$det\gamma_n = det\left[\left(\begin{array}{c} 2m+2j-1 \\ m+i+j-1 \end{array}\right)_{q^2} \frac{q^{(i-1)^2-2m(j-1)-(j-1)^2}(1+q^{2i-1})}{(1+q^{2m+2j-1})}\right]_{n\times n}$$

Note que se fixarmos $j=j_0$ então a coluna j_0 pode ser escrita como

$$\frac{q^{-2n(j_0-1)-(j_0-1)^2}}{(1-q^{2m+2j_0-1})}\left[\begin{array}{c} \overline{\gamma_{1,j_0}} \\ \vdots \\ \overline{\gamma_{n,j_0}} \end{array}\right]$$

onde $\overline{\gamma_{i,j_0}} = \left(\begin{array}{c} 2m+2j_0-1 \\ m+i+j_0-1 \end{array}\right)_{q^2} q^{(i-1)^2}(1+q^{2i-1})$, *para todo* $1 \leq i \leq n$.

Isto implica que

$$det\gamma_n = \frac{\prod_{j=1}^{n} q^{-2m(j-1)-(j-1)^2}}{(1-q^{2m+1})(1+q^{2m+3})...(1-q^{2m+2n-1})}$$
$$\times det\left[\left(\begin{array}{c} 2m+2j-1 \\ m+i+j-1 \end{array}\right)_{q^2} q^{(i-1)^2}(1+q^{2i-1})\right].$$

De modo análogo se fixarmos $i=i_0$ em

$$\overline{\gamma_n} = \left[\left(\begin{array}{c} 2m+2j-1 \\ m+i+j-1 \end{array}\right)_{q^2} q^{(i-1)^2}(1+q^{2i-1})\right]$$

e fizermos j variar temos que a linha j pode ser escrita como

$$\overline{(\gamma_{n_{i_o,j}})} = q^{(i_0-1)^2}(1+q^{2i_0-1})\left(\begin{array}{c} 2m+2j-1 \\ m+i_0+j-1 \end{array}\right)_{q^2}$$

para todo $1 \leq j \leq n$.

Assim, obtemos

$$det\gamma_n = \frac{\prod_{j=1}^{n} q^{-2m(j-1)-(j-1)^2}}{(1-q^{2m+1})(1+q^{2m+3})...(1-q^{2m+2n-1})} det\overline{\gamma_n}$$

$$= \frac{q^{-mn(n-1)}(-q;q^2)_n}{(-q^{2m+1},q^2)_n} det\left[\left(\begin{array}{c} 2m+2j-1 \\ m+i+j-1 \end{array}\right)_{q^2}\right]_{n\times n}.$$

Defina

$$\epsilon_n = \left(\frac{(-1)^{i+j}(q^{4m+4i},q^2)_{2j-2i}q^{i^2+i-2ij}}{(q^{2m+2i+2j-2},q^2)_{j-1}(q^{2m+2i},q^2)_{j-1}}\left(\begin{array}{c} j-1 \\ i-1 \end{array}\right)_{q^2}\right)_{n\times n}.$$

Observemos que se $i > j$, *então* $\left(\begin{array}{c} j-1 \\ i-1 \end{array}\right)_{q^2} = 0$, *portanto* ϵ_n *é triangular superior, cuja* $(j,j)-$*ésima entrada é dada por* q^{-j^2+j}. *Logo, temos que* $det\epsilon_n = \prod_{j=1}^{n} q^{j-j^2}$.

Considere a matriz

$$\gamma_n^* = \left[\left(\begin{array}{c} 2m+2j-1 \\ m+i+j-1 \end{array}\right)_{q^2}\right]_{n\times n}.$$

Então, usando o Lema 3.1.7 *com* $b=1$ *e trocando* q *por* q^2 *temos que a* $(i,j)-$*ésima entrada de* $\gamma_n^*\epsilon_n$ *é dada por*

$$\frac{(-1)^{j+1}q^{2-2j}(q^2,q^2)_{2m+2j-1}(q^2,q^2)_m(q^{2-2i},q^2)_{j-1}(q^{4-2i-2j},q^2)_{j-1}}{(q^2,q^2)_{m+2j-2}(q^2,q^2)_{m+i}(q^2,q^2)_{m+j-i}(q^{2-2i+2m-2j},q^2)_{j-1}}.$$

Uma vez que se $j > i$ então $(q^{2-2i}, q^2)_{j-1} = 0$, logo $\gamma_n^* \epsilon_n$ é triangular inferior. Consequentemente obtemos

$$det\gamma_n = \frac{q^{-mn(n-1)}(-q;q^2)_n}{(-q^{2m+1},q^2)_n}(det\gamma_n^*)$$

$$= \frac{q^{-mn(n-1)}(-q;q^2)_n}{(-q^{2m+1},q^2)_n det(\epsilon_n)}\prod_{j=1}^{n}$$

$$\times \frac{(-1)^{j+1}q^{2-2j}(q^2,q^2)_{2m+2j-1}(q^{2-2i},q^2)_{j-1}(q^{4-4i},q^2)_{j-1}}{(q^2,q^2)_{m+2j-2}(q^2,q^2)_{m+j}(q^{2+2m-4j},q^2)_{j-1}}$$

$$= \frac{(-q;q^2)_n}{(-q^{2m+1},q^2)_n}\prod_{j=1}^{n}\frac{(q^2,q^2)_{2m+2j-1}(q^2,q^2)_{j-1}(q^{2j},q^2)_{j-1}}{(q^2,q^2)_{m+2j+2}(q^2,q^2)_{m+j}(q^{2m+2j+2},q^2)_{j-1}}$$

$$= \frac{(-q;q^2)_n}{(-q^{2m+1},q^2)_n}\prod_{j=1}^{n}\frac{(q^2,q^2)_{2m+2j-1}(q^2,q^2)_{2j-2}}{(q^2,q^2)_{m+2j-2}(q^2,q^2)_{m+2j-1}}$$

$$= \frac{(q^{2n+1},q^2)_m}{(q,q^2)_m}\prod_{j=1}^{n}\frac{(q^2,q^2)_{2m+2j-2}(q^2,q^2)_{2j-1}}{(q^2,q^2)_{m+2j-2}(q^2,q^2)_{m+2j-1}}$$

$$= \frac{(q^{2n+1},q^2)_m\prod_{j=1}^{n}(q^{4j-2},q^2)_{2m}}{(q,q^2)_m\prod_{j=1}^{2n}(q^{2j},q^2)_m}$$

$$= \frac{(q^{2n+1},q^2)_m\prod_{j=1}^{2n}(q^{2j},q^2)_{2m}}{(q,q^2)_m(\prod_{j=1}^{2n}(q^{2j},q^2)_m)(\prod_{j=1}^{n}(q^{4j},q^2)_{2m})}$$

$$= \frac{(q^{2n+1},q^2)_m\prod_{j=1}^{2n}(q^{2j+2m},q^2)_m}{(q,q^2)_m\prod_{j=1}^{n}(q^{4j},q^2)_{2m}}$$

$$= \frac{(q^{2n+1}, q^2)_m \prod_{j=1}^{2n} (q^{2j+2m}, q^2)_m}{(q, q^2)_m \prod_{j=1}^{n} (q^{4j}, q^4)_m (q^{4j+2}, q^4)_m}$$

$$= \frac{(q^{2n+1}, q^2)_m}{(q, q^2)_m} \prod_{j=1}^{2n-1} \prod_{i=1}^{m} \frac{(1 - q^{2m+2j+2i})}{(1 - q^{2j+4i})}$$

$$= \frac{(q^{2n+1}, q^2)_m}{(q, q^2)_m} \prod_{i=1}^{m} \frac{(q^{2m+2i}, q^2)_{2n}}{(q^{4i}, q^2)_{2n}}$$

$$= \frac{(q^{2n+1}, q^2)_m}{(q, q^2)_m} \prod_{i=1}^{m} \frac{(q^2, q^2)_{2n+i+m-1} (q^2, q^2)_{2i-1}}{(q^2, q^2)_{m+i-1} (q^2, q^2)_{2n+2i-1}}$$

$$= \frac{(q^{2n+1}, q^2)_m}{(q, q^2)_m} \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=i+1}^{m} \frac{(1 - q^{2(2n+i+j-1)})}{(1 - q^{2i+2j-2})}$$

$$= \prod_{i=1}^{m} \left[\frac{(1 - q^{2n+2i-1})}{(1 - q^{2i-1})} \prod_{j=i+1}^{m} \frac{(1 - q^{2(2n-i+j-1)})}{(1 - q^{2(i+j-1)})} \right].$$

$\square$

Lema 3.1.9.

$$(-q, q^2)_m det\gamma_n^{'} = \prod_{i=1}^{m} \left[\frac{(1 - q^{2n+2i})}{(1 - q^{2i-1})} \prod_{h=i+1}^{m} \frac{(1 - q^{2(2n+i+h)})}{(1 - q^{2(i+h-1)})} \right].$$

Demonstração:

De modo análogo ao lema 3.1.8, *fixando a i-ésima linha e a j-ésima coluna temos que*

$$det\gamma_n^{'} = det \left[\begin{pmatrix} 2m + 2j \\ m + i + j \end{pmatrix}_{q^2} \frac{q^{(i-1)^2 - 2m(j-1) - (j-1)^2} (1 + q^{4i})}{(1 - q^{4m+4j})} \right]_{n \times n}$$

$$= \frac{q^{-mn(n-1)(q^4;q^4)_n}}{(q^{4m+n},q^4)_n} det \left[\left(\begin{array}{c} 2m+2j \\ m+i+j \end{array} \right)_{q^2} \right].$$

Defina a matriz

$$\epsilon_n^{'} = \left(\frac{(-1)^{i+j}(q^{4m+4i+2},q^2)_{2j-2i} q^{i^2+i-2ij}}{(q^{2m+2i+2j},q^2)_{j-i}(q^{2m-2i},q^2)_{j-i}} \left(\begin{array}{c} j-1 \\ i-1 \end{array} \right)_{q^2} \right)_{n\times n}.$$

Então $\epsilon_n^{'}$ *é triangular superior, cuja* $(j,j)-$*ésima entrada é* q^{-j^2+j}. *Assim,* $det\epsilon_n^{'} = \prod_{j=1}^{n} q^{j-j^2}$.

Consideremos então a matriz

$$\gamma_n^{*} = \left[\left(\begin{array}{c} 2m+2j \\ m+i+j \end{array} \right)_{q^2} \right]_{n\times n},$$

então, pelo Lema 3.1.7 *com* $b=0$ *e trocando* q *por* q^2, *a* $(i,j)-$*ésima entrada da matriz* $\gamma_n^{*}\epsilon_n^{'}$ *é*

$$\frac{(-1)^{j+1}q^{2-2j}(q^2,q^2)_{2m+2j}(q^2,q^2)_m(q^{2-2i},q^2)_{j-1}(q^{2-2i-2j},q^2)_{j-1}(1-q^{2m+2j})}{(q^2,q^2)_{m+2j-1}(q^2,q^2)_{m+i+1}(q^2,q^2)_{m+j-i}(q^{-2i-2m-2j},q^2)_{j-1}}.$$

Uma vez que se $j>i$ *então* $(q^{2-2i},q^2)_{j-1}=0$, *logo* $\gamma_n^{*}\epsilon_n^{'}$ *é triangular inferior. Consequentemente obtemos*

$$(-q,q^2)_m det\gamma_n^{'} = \frac{(-q,q^2)_m q^{-mn(n-1)(q^4;q^4)_n}}{(q^{4m+4},q^4)_n} det(\gamma_n^{*})$$

$$= \frac{(-q,q^2)_m q^{-mn(n-1)(q^4;q^4)_n}}{(q^{4m+4},q^4)_n det(\epsilon_n^{'})}$$

$$\times \prod_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j+1}q^{2-2j}(q^2,q^2)_{2m+2j}(q^2,q^2)_m(q^{2-2j},q^2)_{j-1}(q^{2-4j},q^2)_{j-1}(1-q^{2m+2j})}{(q^2,q^2)_{m+2j-1}(q^2,q^2)_{m+i+1}(q^2,q^2)_{m+j-i}(q^{-4j-2m},q^2)_{j-1}}$$

$$= \frac{(-q,q^2)_m(q^4;q^4)_n}{(-q^{2m+2},q^2)_n}\prod_{j=1}^{n}\frac{(q^2,q^2)_{2m+2j}(q^2,q^2)_{j-1}(q^{2j+2},q^2)_{j-1}}{(q^2,q^2)_{m+2j-1}(q^2,q^2)_{m+j+1}(q^{2m+2j+4},q^4)_{j-1}}$$

$$= \frac{(-q,q^2)_m(-q^2;q^2)_n}{(-q^{2m+2},q^2)_n}\prod_{j=1}^{n}\frac{(q^2,q^2)_{2m+2j}(q^2,q^2)_{2j-1}}{(q^2,q^2)_{m+2j-1}(q^2,q^2)_{m+2j}}$$

$$= \frac{(-q,q^2)_m(-q^2;q^2)_n\prod_{j=1}^{n}(q^{4j+2},q^2)_{2m}}{(-q^{2m+2},q^2)_n\prod_{j=1}^{2n}(q^{2j+2},q^2)_m}$$

$$= \frac{(-q,q^2)_m(-q^2;q^2)_n\prod_{j=1}^{2n}(q^{2j+2},q^2)_{2m}}{(-q^{2m+2},q^2)_n(\prod_{j=1}^{2n}(q^{2j+2},q^2)_m)(\prod_{j=1}^{n}(q^{4j},q^2)_{2m})}$$

$$= \frac{(-q,q^2)_m(-q^2;q^2)_n\prod_{j=1}^{2n}(q^{2j+2m+2},q^2)_{2m}}{(-q^{2m+2},q^2)_n\prod_{j=1}^{n}(q^{4j},q^2)_{2m}}$$

$$= \frac{(-q,q^2)_m(-q^2;q^2)_n\prod_{j=1}^{2n}(q^{2j+2m+2},q^2)_{2m}}{(-q^{2m+2},q^2)_n\prod_{j=1}^{n}(q^{4j},q^4)_m(q^{4j+2},q^4)_m}$$

$$= \frac{(-q,q^2)_m(-q^2;q^2)_n}{(-q^{2m+2},q^2)_n}\prod_{j=0}^{2n-1}\prod_{i=1}^{m}\frac{(1-q^{2m+2j+2i+2})}{(1-q^{2j+4i})}$$

$$= \frac{(-q,q^2)_m(-q^2;q^2)_n}{(-q^{2m+2},q^2)_n}\prod_{i=1}^{m}\frac{(q^{2m+2i+2},q^2)_{2n}}{(q^{4i},q^2)_{2n}}$$

$$= \frac{(-q,q^2)_m(-q^2;q^2)_n}{(-q^{2m+2},q^2)_n}\prod_{i=1}^{m}\frac{(q^2,q^2)_{2n+m+i}(q^2,q^2)_{2i-1}}{(q^2,q^2)_{2n+2i-1}(q^2,q^2)_{m+i}}$$

$$= \frac{(-q,q^2)_m(-q^2;q^2)_n}{(-q^{2m+2},q^2)_n}\prod_{i=1}^{m}\left[\frac{(1-q^{4n+4i})}{(1-q^{2m+2i})}\prod_{j=i+1}^{m}\frac{(1-q^{4n+2i+2j})}{(1-q^{2(i+j-1)})}\right]$$

$$= \frac{(-q,q^2)_m(-q^2;q^2)_n(q^{4n+4},q^4)_m}{(-q^{2m+2},q^2)_n(q^{2m+2},q^2)_m} \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=i+1}^{m} \frac{(1-q^{2(2n+i+j)})}{(1-q^{2(i+j-1)})}$$

$$= \frac{(-q,q^2)_m(q^4;q^4)_{m+n}(-q^2,q^2)_m(q^2,q^2)_m}{(q^2,q^2)_n(-q^2,q^2)_{n+m}(q^2,q^2)_{2m}} \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=i+1}^{m} \frac{(1-q^{2(2n+i+j)})}{(1-q^{2(i+j-1)})}$$

$$= \frac{(-q,q^2)_m(q^2;q^2)_{m+n}(q^4,q^4)_m}{(q^2,q^2)_n(q^2,q^4)_m(q^4,q^4)_m} \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=i+1}^{m} \frac{(1-q^{2(2n+i+j)})}{(1-q^{2(i+j-1)})}$$

$$= \frac{(q^{2n+2};q^2)_m}{(q,q^2)_m} \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=i+1}^{m} \frac{(1-q^{2(2n+i+j)})}{(1-q^{2(i+j-1)})}$$

$$\prod_{i=1}^{m}\left[\frac{(1-q^{2n+2i})}{(1-q^{2i-1})}\prod_{j=i+1}^{m}\frac{(1-q^{2(2n+i+j)})}{(1-q^{2(i+j-1)})}\right]$$

□

Lema 3.1.10. *Existe uma matriz $(c_{ij})_{n\times n}$ tal que $c_{ij} = 0$ se $i > j$, $c_{ii} = 1$, e para todo n*

$$\beta_n(c_{ij})_{n\times n} = \gamma_n.$$

Demonstração: *A prova será feita por indução sobre n. Caso $n = 1$ o resultado é trivial uma vez que β_1 e γ_1 são matrizes 1×1 cuja única entrada é dada por*

$$\left(\begin{array}{c} 2m+1 \\ m+1 \end{array}\right)_{q^2} \frac{(1+q)}{(1+q^{2m+1})}$$

Agora nós assumimos que $(c_{i,j})$ pode ser encontrada para $i < n$ e $j < n$. Nós podemos escolher $c_{nj} = 0$ para $j < n$, $c_{nn} = 1$ e para $1 \le h < n$

escolhemos c_{hn} de forma que o sistema abaixo seja válido:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\begin{array}{c} 2m+2j-1 \\ m+i+j-1 \end{array} \right)_{q^2} \frac{q^{(i-j)^2}(1-q^{(2i-1)(2j-1)})}{(1-q^{(2m+2j-1)(2j-1)})} c_{jn}$$

$$= \left(\begin{array}{c} 2m+2n-1 \\ m+i+n-1 \end{array} \right)_{q^2} \frac{q^{(i-1)^2-2m(n-1)-(n-1)^2}(1-q^{2i-1})}{(1-q^{2m+2n-1})} \qquad (3.10)$$

onde $1 \leq i \leq n-1$. Uma vez que $c_{nn} = 1$, temos um sistema com $(n-1)$ equações e $(n-1)$ incógnitas. Mas por hipótese segue que

$$det\beta_{n-1} = \frac{det\gamma_{n-1}}{det(c_{ij})_{n-1\times n-1}} = det\gamma_{n-1} \neq 0$$

pelo Lema 3.1.8. Logo, c_{hn} existe e é único.

Podemos afirmar que o sistema acima (3.10) é válido para todo $i \geq 1$. De fato, como pela primeira identidade (3.1) do Lema 3.1.5 com $s = n-1$, tem-se

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\begin{array}{c} 2m+2j-1 \\ m+i+j-1 \end{array} \right)_{q^2} \frac{q^{(i-j)^2}(1-q^{(2i-1)(2j-1)})}{(1-q^{(2m+2j-1)(2j-1)})} c_{jn}$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{r=1}^{n-1} a_i(r, n-1) \left(\begin{array}{c} 2m+2j-1 \\ m+r+j-1 \end{array} \right)_{q^2} \frac{q^{(r-j)^2(1+q^{(2r+1)(2j+1)})}}{(1+q^{(2m+2j-1)(2j-1)})} c_{jn}$$

e pela segunda identidade (3.2) do lema 3.1.5,

$$\left(\begin{array}{c} 2m+2n-1 \\ m+i+n-1 \end{array} \right)_{q^2} \frac{q^{(i-1)^2-2m(n-1)-(n-1)^2}(1-q^{2i-1})}{(1-q^{2m+2n-1})}$$

$$= \sum_{r=1}^{n-1} a_i(r, n-1) \left[\left(\begin{array}{c} 2m+2j-1 \\ m+r+j-1 \end{array} \right)_{q^2} \frac{q^{(r-n)^2}(1-q^{(2r-1)(2n-1)})}{(1+q^{(2m+2n-1)(2n-1)})} \right.$$

$$\left. - \left(\begin{array}{c} 2m+2n-1 \\ m+r+n-1 \end{array} \right)_{q^2} \frac{q^{(r-1)^2-2m(n-1)-n(n-1)^2}(1-q^{2r-1})}{(1-q^{2m+2n-1})} \right]$$

logo,

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\begin{array}{c} 2m+2j-1 \\ m+i+j-1 \end{array} \right)_{q^2} \frac{q^{(i-j)^2}(1-q^{(2i-1)(2j-1)})}{(1-q^{(2m+2j-1)(2j-1)})} c_{jn}$$

$$- \left(\begin{array}{c} 2m+2n-1 \\ m+i+n-1 \end{array} \right)_{q^2} \frac{q^{(i-1)^2-2m(n-1)-(n-1)^2}(1-q^{2i-1})}{(1-q^{2m+2n-1})}$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{r=1}^{n-1} a_i(r, n-1) \left(\begin{array}{c} 2m+2j-1 \\ m+r+j-1 \end{array} \right)_{q^2} \frac{q^{(r-j)^2}(1+q^{(2r+1)(2j+1)})}{(1+q^{(2m+2j-1)(2j-1)})} c_{jn}$$

$$+ \sum_{r=1}^{n-1} a_i(r, n-1) \left[\left(\begin{array}{c} 2m+2j-1 \\ m+r+j-1 \end{array} \right)_{q^2} \frac{q^{(r-n)^2}(1-q^{(2r-1)(2n-1)})}{(1+q^{(2m+2n-1)(2n-1)})} \right.$$

$$\left. - \left(\begin{array}{c} 2m+2n-1 \\ m+r+n-1 \end{array} \right)_{q^2} \frac{q^{(r-1)^2-2m(n-1)-n(n-1)^2}(1-q^{2r-1})}{(1-q^{2m+2n-1}} \right]$$

$$= \sum_{r=1}^{n-1} a_i(r, n-1) \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\begin{array}{c} 2m+2j-1 \\ m+r+j-1 \end{array} \right)_{q^2} \frac{q^{(r-j)^2}(1+q^{(2r+1)(2j+1)})}{(1+q^{(2m+2j-1)(2j-1)})} c_{jn} \right.$$

$$\left. - \left(\begin{array}{c} 2m+2n-1 \\ m+r+n-1 \end{array} \right)_{q^2} \frac{q^{(r-1)^2-2m(n-1)-n(n-1)^2}(1-q^{2r-1})}{(1-q^{2m+2n-1}} \right]$$

$= 0,$

uma vez que a soma interna é zero por (3.10) *para* $1 \leq r \leq n-1$. *Assim, vemos que pela hipótese de indução a (i,j)-ésima entrada da multiplicação de* β_n *e* $(c_{ij})_{n\times n}$ *é igual a (i,j)-ésima entrada de* γ_n *para todo* $j < n$ *e* $i < n$ *e se* $j = n$ *por* (3.10). *Assim obtemos*

$$\beta_n(c_{ij})_{n\times n} = \gamma_n.$$

□

Lema 3.1.11. *Existe a matriz* $(d_{ij})_{n\times n}$ *tal que* $d_{ij} = 0$ *se* $i > j$, $d_{ii} = 1$, *e para todo* n

$$\beta'_n(d_{ij})_{n\times n} = \gamma'_n.$$

Demonstração:

A prova será feita por indução sobre n. *Quando* $n = 1$ *caímos no caso trivial uma vez que* β'_1 *e* γ'_1 *são matrizes* 1×1 *cuja entrada é*

$$\begin{pmatrix} 2m+2 \\ m+2 \end{pmatrix}_{q^2} \frac{(1-q^4)}{(1-q^{4m+4})}$$

Agora assumimos que (d_{ij}) *pode ser encontrada para* $i < n$ *e* $j < n$. *Escolhemos* $d_{nj} = 0$ *para* $j < n$, $d_{nn} = 1$, *e para* $1 \leq h < n$, *escolhemos* d_{nn} *tal que o seguinte sistema seja válido:*

$$\sum_{j=1}^{n} \begin{pmatrix} 2m+2j \\ m+i+j \end{pmatrix}_{q^2} \frac{q^{(i-j)^2}(1-q^{4ij})}{(1-q^{4(m+j)})} d_{jn} =$$

$$= \left(\begin{array}{c} 2m+2n \\ m+i+n \end{array} \right)_{q^2} \frac{q^{(i-1)^2-2m(n-1)-(n-1)^2}(1-q^{4i})}{(1-q^{4m+4n})}, \qquad (3.11)$$

onde $1 \leq i \leq n-1$. *Desde que* $d_{nn} = 1$, (3.11) *é um sistema de* $(n-1)$ *equações com* $(n-1)$ *incógnitas. Temos que*

$$det(\beta'_{n-1}) = \frac{det(\gamma'_{n-1})}{det(d_{ij})_{n-1 \times n-1}} = det(\gamma'_{n-1}) \neq 0$$

pelo Lema 3.1.9. *Assim,* d_{jn} *existe e é único.*

Podemos afirmar que (3.11) *é válido para todo* $i \geq 1$. *De fato,*

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\begin{array}{c} 2m+2j \\ m+i+j \end{array} \right)_{q^2} \frac{q^{(i-j)^2}(1-q^{4ij})}{(1-q^{4(m+j)})} d_{jn}$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{r=1}^{n-1} b_i(r, n-1) \left(\begin{array}{c} 2m+2j \\ m+r+j \end{array} \right)_{q^2} \frac{q^{(r-j)^2}(1-q^{4rj})}{(1-q^{4j(m+j)})} d_{jn},$$

pelas identidades (3.5) *e* (3.6) *do Lema* 3.1.6 *segue que*

$$- \left(\begin{array}{c} 2m+2n \\ m+i+n \end{array} \right)_{q^2} \frac{q^{(i-1)^2-2m(n-1)-(n-1)^2}(1-q^{4i})}{(1-q^{4m+4n})}$$

$$= \sum_{r=1}^{n-1} b_i(r, n-1) \left[\left(\begin{array}{c} 2m+2n \\ m+r+n \end{array} \right)_{q^2} \frac{q^{(r-n)^2}(1-q^{4nr})}{(1-q^{4n(m+n)})} \right.$$

$$\left. - \left(\begin{array}{c} 2m+2n \\ m+r+n \end{array} \right)_{q^2} \frac{q^{(r-1)^2-2m(n-1)-(n-1)^2}(1-q^{4r})}{(1-q^{4m+4n})} \right].$$

Assim, temos que

$$\sum_{j=1}^{n} \begin{pmatrix} 2m+2j \\ m+i+j \end{pmatrix}_{q^2} \frac{q^{(i-j)^2}(1-q^{4ij})}{(1-q^{4(m+j)})} d_{jn}$$

$$- \begin{pmatrix} 2m+2n \\ m+i+n \end{pmatrix}_{q^2} \frac{q^{(i-1)^2-2m(n-1)-(n-1)^2}(1-q^{4i})}{(1-q^{4m+4n})}$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{r=1}^{n-1} b_i(r,n-1) \begin{pmatrix} 2m+2j \\ m+r+j \end{pmatrix}_{q^2} \frac{q^{(r-j)^2}(1-q^{4rj})}{(1-q^{4j(m+j)})} d_{jn}$$

$$+ \sum_{r=1}^{n-1} b_i(r,n-1) \left[\begin{pmatrix} 2m+2n \\ m+r+n \end{pmatrix}_{q^2} \frac{q^{(r-n)^2}(1-q^{4nr})}{(1-q^{4n(m+n)})} \right.$$

$$\left. - \begin{pmatrix} 2m+2n \\ m+r+n \end{pmatrix}_{q^2} \frac{q^{(r-1)^2-2m(n-1)-(n-1)^2}(1-q^{4r})}{(1-q^{4m+4n})} \right]$$

$$= \sum_{r=1}^{n-1} b_i(r,n-1) \left[\sum_{j=1}^{n} \begin{pmatrix} 2m+2j \\ m+r+j \end{pmatrix}_{q^2} \frac{q^{(r-j)^2}(1-q^{4rj})}{(1-q^{4j(m+j)})} d_{jn} + \right.$$

$$\left. - \begin{pmatrix} 2m+2n \\ m+r+n \end{pmatrix}_{q^2} \frac{q^{(r-1)^2-2m(n-1)-(n-1)^2}(1-q^{4r})}{(1-q^{4m+4n})} \right]$$

$$= 0,$$

uma vez que a expressão interna é zero por (3.11) *com* $1 \leq r \leq n-1$. *Portanto, multiplicando* $\beta_n^{'}$ *por* $(d_{ij})_{n\times n}$ *vemos que a* $(i,j)-$*ésima entrada é a* $(i,j)-$*ésima entrada de* $\gamma_n^{'}$ *se* $i < n$ *e* $j < n$*, por hipótese de indução e se* $j = n$ *por* (3.11). *Assim,*

$$\beta_n^{'}(d_{ij})_{n\times n} = \gamma_n^{'}.$$

$\square$

3.2 Conjectura de MacMahon

Nesta seção apresentaremos a demonstração para a *Conjectura de MacMahon.*

Teorema 3.2.1. *(Conjectura de MacMahon) A função geradora para partições planas simétricas com até m níveis e com cada parte menor do que ou igual a j é dada por:*

$$\sum_{N\geq 0} M(j,m,N)q^N = \prod_{i=1}^{m}\left[\frac{(1-q^{j+2i-1})}{(1-q^{2i-1})}\prod_{i+1}^{m}\frac{(1-q^{2(j+i-h-1)})}{(1-q^{2(i+h-1)})}\right] \tag{3.12}$$

Demonstração: *Primeiramente vejamos o caso $j = 2n$ par:*

$\sum_{N\geq 0} M(2n,m,N)q^N$

$= g_{2n}(q)$, *por [10]*

$= det\alpha_n$

$= det\beta_n$, *pelo lema* 3.1.2

$= det\gamma_n$, *pelo lema* 3.1.10

$= \prod_{i=1}^{m}\left[\frac{(1-q^{2n+2i-1})}{(1-q^{2i-1})}\prod_{i+1}^{m}\frac{1-q^{2(2n+i+h-1)}}{(1-q^{2(i+h-1)})}\right]$, *pelo lema* 3.1.9

e portanto (3.12) *é válido para n par.*

Agora vejamos o caso de n ímpar. Se $n = 1$ então por (3.12) *temos*

$$\prod_{i=1}^{m}\frac{(1-q^{2i})(1-q^{2i+2m})}{(1-q^{2i-1})(1-q^{4i})} = \frac{(q^2;q^2)_m(q^{2m+2};q^2)_m}{(q;q^2)_m(q^4,q^4)_m}$$

$$= \frac{(1-q^2)...(1-q^{2m})(1-q^{2m+2})...(1-q^{4m})}{(q;q^2)_m(q^4,q^4)_m}$$

$$= \frac{(q^2, q^2)_{2m}}{(q; q^2)_m (q^4, q^4)_m}$$

$$= \frac{(1-q^2)(1-q^6)...(1-q^{4m-2})(1-q^4)(1-q^8)...(1-q^{4m})}{(q; q^2)_m (q^4, q^4)_m}$$

$$= (-q, q^2)_m.$$

Por outro lado $M(1, m, N)$ pode ser visto como o número de partições planas com cada parte distinta ímpar menor do que ou igual a $2m-1$, por [7]. Ou seja

$$\sum_{N\geq 0} M(1, m, N) q^N = (1+q)(1+q^3)...(1+q^{2m-1}) = (-q, q^2)_m$$

assim (3.12) *é válida para $n = 1$. E para $j = 2n+1, n \geq 1$ temos*

$\sum_{N\geq 0} M(2n+1, m, N) q^N$

$= g_{2n+1}(q)$, *por [10]*

$= (-q, q^2)_m det\alpha_n^{'}$

$= (-q, q^2)_m det\beta_n^{'}$, *pelo lema* 3.1.4

$= (-q, q^2)_m det\gamma_n^{'}$, *pelo lema* 3.1.11

$= \prod_{i=1}^{m} \left[\frac{(1-q^{2n+2i})}{(1-q^{2i-1})} \prod_{i+1}^{m} \frac{(1-q^{2(2n+i+h)})}{(1+q^{2(i+h-1)})} \right]$, *pelo lema* 3.1.9

e portanto (3.12) *é válido para todo $n \geq 1$.* □

Capítulo 4

Referências

Referências Bibliográficas

[1] G. E. Andrews,*Plane partitions, I: The MacMahon conjecture*, Adv. in Math. Suppl. Studies 1:131-150 (1979)

[2] G. E. Andrews, K. Eriksson, *Integer Partitions*, Cambrigde University Press, London and New York, 2004.

[3] G. E. Andrews,*ENCYCLOPEDIA OF MATHEMATICS and Its Applications, Theory of Partitions* ,Vol. 02, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusets, 1976.

[4] P.A. MacMahon, *Combinatory Analisys*, Vol. 02,Cambrigde University Press, London and New York, 1916. (Reprint: Chelsea, Bronx, New York, 1960)

[5] P.A. MacMahon, *Partitions of numbers whose graphs possess symmetry*, Trans. Cambridge Phil. Soc. 17 (1898-1899), 149-170.

[6] B.Gordon, *Two new representations of partition functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), 869-873.

[7] B.Gordon, *Notes on plane partitions V*, J. Combinatorial Theory Ser. B. 11 (1971), 157-168.

[8] B. Gordon, L. Houten, *Notes on plane partitions I*, J. Combinatorial Theory Ser. B 4 (1968), 72-80.

[9] B. Gordon, L. Houten, *Notes on plane partitions II*, J. Combinatorial Theory Ser. B 4 (1968), 81-99.

[10] E. A. Bender,D. E. Knuth, *Enumeration of plane partitions*, J. Combinatorial Theory Ser. A. 13 (1972), 40-54.

[11] G.E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *ENCYCLOPEDIA OF MATHEMATICS and Its Applications, Special Functions,Vol. 71*,Cambrigde University Press,1999.