

Introdução Elementar às Álgebras de Clifford Cl_2 e Cl_3

Adriana Souza Resende
Dissertação de Mestrado

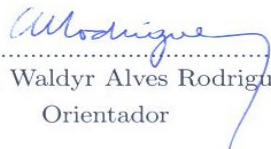
Orientador: Prof. Dr. Waldyr Alves Rodrigues Jr.

Maio de 2010
Campinas - SP

Introdução Elementar às Álgebras de Clifford Cl_2 e Cl_3

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Adriana Souza Resende** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, Maio de 2010


.....
Prof. Dr. Waldyr Alves Rodrigues Jr
Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Waldyr Alves Rodrigues Jr.....(IMECC-UNICAMP)

Prof.^a Dr.^a Vera Lúcia Xavier Figueiredo.....(IMECC-UNICAMP)

Prof. Dr. Roldão da Rocha Júnior.....(UF-ABC)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica, **UNICAMP**
como requisito parcial para obtenção do título de
Mestre em Matemática

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Resende, Adriana Souza

R311i Introdução elementar às álgebras de Clifford $Cl(2)$ e $Cl(3)$ /Adriana
Souza Resende-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2010.

Orientador : Waldyr Alves Rodrigues Jr.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual de
Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Cálculo vetorial. 2. Clifford, Álgebra de. 3. Álgebra não-
comutativa. 4. Álgebras associativas. 5. Álgebra vetorial. 6. Quatérnios.
7. Spinor-Analise. I. Rodrigues Júnior, Waldyr Alves. II. Universidade
Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: An elementary introduction to Clifford algebras $Cl(2)$ and $Cl(3)$

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Vector analysis. 2. Clifford algebras.
3. Noncommutative algebras. 4. Associative algebras. 5. Vector algebra. 6. Quaternions.
Spinor analysis.

Área de concentração: Algebra

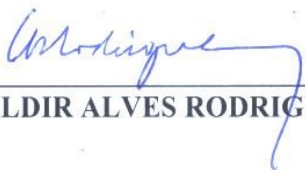
Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Waldyr Alves Rodrigues Jr. (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Roldão da Rocha Júnior (UF - ABC)
Profª. Drª. Vera Lúcia Xavier Figueiredo (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 26/05/2010

Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática

**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 26 de maio de 2010 e
aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



Prof. (a). Dr (a). WALDIR ALVES RODRIGUES JUNIOR



Prof. (a). Dr (a). ROLDÃO DA ROCHA JUNIOR



Prof. (a). Dr (a). VERA LÚCIA XAVIER FIGUEIREDO

Dedicatória

Dedico este trabalho ao meu esposo Emivan, aos meus filhos, Melissa, Ivan Gabriel e Yasmin, aos meus pais e às minhas irmãs.

Agradecimentos

Agradeço:

A Deus.

A meu esposo *Emivan* pela paciência, por me ajudar com todas as adversidades que surgiram durante essa caminhada, pela compreensão e amor e aos meus amados filhos, *Melissa*, *Ivan Gabriel* e *Yasmin*, por existirem.

À minha mãe *Maria*, que me incentivou e não mediu esforços para me apoiar, inclusive, financeiramente.

À minha irmã *Elaine*, por ter me incentivado e me dado abrigo nas idas a São Paulo.

Ao Prof. Dr. *Waldyr A. Rodrigues Jr.*, que foi o melhor orientador que eu poderia ter tido, paciente, enérgico, detalhista, enfim sua contribuição para minha formação é incomensurável.

A todos os professores e coordenadores do Programa.

Aos colegas, que em muitos momentos nos deram ânimo.

*...O hoje é apenas um furo no futuro
por onde o passado começa a jorrar...
Raul Seixas*

Introdução Elementar às Álgebras de Clifford Cl_2 e Cl_3

Autor: Adriana Souza Resende

Orientador: Prof. Dr. Waldyr A. Rodrigues Jr.

Resumo

O presente trabalho tem a intenção de apresentar por intermédio de uma *linguagem* unificada alguns conceitos de cálculo vetorial, álgebra linear (matrizes e transformações lineares) e também algumas idéias elementares sobre os grupos de rotações em duas e três dimensões e seus grupos de recobrimento, que geralmente são tratados como “fragmentos” em várias modalidades de cursos no ensino superior. Acreditamos portanto que nosso texto possa ser útil para alunos dos cursos de graduação em Engenharia, Física, Matemática e interessados em Matemática em geral.

A linguagem unificada à que nos referimos acima é obtida com a introdução do conceito das álgebras geométricas (ou de Clifford) onde, como veremos, é possível fornecer uma formulação algébrica elegante aos conceitos de vetores, planos e volumes orientados e definir para tais objetos o produto escalar, os *produtos contruídos à esquerda e à direita*, o *produto exterior* (associado, como veremos, em casos particulares ao *produto vetorial*) e finalmente o *produto geométrico* (*Clifford*), o que permite o uso desses conceitos para a solução de inúmeros problemas de geometria analítica no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$. Procuramos ilustrar todos estes conceitos com vários exemplos e exercícios com graus variáveis de dificuldades. Nossa apresentação é bem próxima àquela do livro de Lounesto, e de fato muitas seções são traduções (eventualmente seguidas de comentários) de seções daquele livro. Contudo, em muitos lugares, acreditamos que nossa apresentação esclarece e completa as correspondentes do livro de Lounesto.

Palavras-chave: Cálculo vetorial, produto exterior, produto geométrico, álgebras geométricas, quatérnions e spinores.

Introdução Elementar às Álgebras de Clifford Cl_2 e Cl_3

Author: Adriana Souza Resende

Adviser: Prof. Dr. Waldyr A. Rodrigues Jr.

Abstract

This paper aims to present using an unified language a few concepts of vector calculus, linear algebra (matrices and linear transformations) and also some basic ideas about the groups of rotations in two and three dimensions and their covering groups, which generally are treated as “fragments” in various types of courses in higher education. We believe therefore that our text should be useful to students of undergraduate courses in Engineering, Physics, Mathematics and people interested in Mathematics in general.

The unified language that we refer to above is obtained by introducing the concept of geometric (or Clifford) algebra where, as we shall see, it is possible to give an elegant algebraic formulation to the concepts of vectors, oriented planes and oriented volumes, and to define to those objects the scalar product, the *right and left contracted products*, the *exterior product* (associated, as we shall see, in particular cases to the vector product) and finally the *geometric (Clifford) product*, and moreover, to use those concepts to solve many problems of analytic geometry in $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$. We illustrated all those concepts with several examples and exercises with variable degrees of difficulties. Our presentation is nearly the one in Lounesto's book, and in fact some sections are no more than translations (eventually with commentaries) from sections of that book. However, in many places, we believe that our presentation clarify and complement the corresponding ones in Lounesto's book.

Key-words: Vector calculus, exterior product, product geometry, geometric algebra, quaternions and spinors.

Sumário

Dedicatória	iii
Agradecimentos	iv
Resumo	v
Abstract	vi
Introdução	1
1 Notas Históricas	3
2 Vetores, Espaços Lineares e $\mathcal{Cl}(2)$	9
2.1 Vetores e escalares	9
2.1.1 Multiplicação por Escalar	10
2.2 Bases e Coordenadas	10
2.3 Espaços Lineares e Funções Lineares	11
2.3.1 Subespaços Vetoriais	12
2.4 Espaços Afins	12
2.5 Vetores Livres e Tangentes de um Espaço Afim (X, V, θ)	13
2.6 Independência Linear, Dimensão de V	14
2.6.1 Estruturas Quadráticas e Álgebras	14
2.7 Produto Escalar	15
2.7.1 Espaços Vetorial e Afim Euclidianos	16
2.8 Produto de Clifford para Vetores e bivectores	16
2.9 A Álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_2$	18
2.9.1 Produto Exterior = Parte Bivector do Produto de Clifford	19
2.9.2 Projeções Perpendiculares e Reflexões	22
2.10 Representação Matricial de $\mathcal{Cl}_2$	24

3	Números Complexos	33
3.1	Preliminares	33
3.1.1	Função Exponencial	35
3.2	O Corpo $\mathbb{C}$ e a Álgebra Real $\mathbb{C}$	37
3.2.1	$\mathbb{C}$ Contém Infinitos Subcorpos Isomorfos à $\mathbb{R}$	38
3.3	O Duplo-Anel ${}^2\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$	40
3.4	Representação dos Elementos de $\mathbb{C}$ em $\text{Mat}(2, \mathbb{R})$	46
3.5	$\mathbb{C}$ como a Subálgebra Par da Álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_2$	47
3.5.1	Interpretação Geométrica de $i = \sqrt{-1}$	47
3.6	Unidade Imaginária = A Unidade Bivector	49
3.7	Sobre as Partes Par e Ímpar de $\mathcal{Cl}_2$	52
3.8	Involução e Norma	53
3.9	Vetores Multiplicados por Números Complexos	55
3.10	O Grupo $\text{Spin}(2)$	57
4	Bivetores e a Álgebra Exterior	63
4.1	Bivetores Como Segmentos Planos Orientados.	64
4.1.1	Adição de Bivetores	66
4.1.2	Base do Espaço dos Bivetores	67
4.2	O Elemento de Volume Orientado	69
4.3	O Produto Vetorial	71
4.4	A Dualidade de Hodge	73
4.5	A Álgebra Exterior $\bigwedge \mathbb{R}^3$ e a Álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_3$	74
4.6	Produto de Clifford em $\mathcal{Cl}_3$	75
4.7	O Produto de Clifford de Dois Vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$	76
4.8	As Partes Par e Parte Ímpar de $\mathcal{Cl}_3$	77
4.9	O Centro	78
4.10	Estrutura Multivetorial e Graduação	79
4.11	Produto de Vetores e Bivetores	81
4.12	As Contrações $\lrcorner$ e $\lrcorner$	81
4.12.1	Contrações e Derivações	82
4.13	A Álgebra de Clifford Versus a Álgebra Exterior	85
5	As Matrizes Spin de Pauli e Spinors	91
5.1	Vetores Unitários Ortogonais e Base Ortonormal	92
5.2	Representação de $\mathcal{Cl}_3$ em $\text{Mat}(2, \mathbb{C})$	93
5.3	O Centro de $\mathcal{Cl}_3$	94
5.4	A Subálgebra Par $\mathcal{Cl}_3^+$	95

SUMÁRIO

5.5	Involuções em $\mathcal{Cl}_3$	96
5.6	Reflexões e Rotações	100
5.7	O grupo $\text{Spin}(3)$	106
5.7.1	$\text{Spin}(3) \simeq \text{SU}(2)$	106
5.8	Spinors de Pauli	107
5.8.1	Spinors de Pauli Covariantes	107
5.8.2	Spinors de Pauli Algébricos	108
5.8.3	Spinors de Pauli Operatoriais e Rotações	110
6	Quatérnions	115
6.1	Quatérnions Como Números Hipercomplexos	115
6.2	Parte Pura de um Quatérnion e o Produto Vetorial	116
6.3	Quatérnion Conjugado, Norma e Inverso.	117
6.3.1	O Centro de $\mathbb{H}$	120
6.4	Rotações em Três Dimensões	120
6.5	Fórmula de Rodrigues	122
6.6	Representação em $\text{Mat}(4, \mathbb{R})$ para a Multiplicação de Quatérnions	123
6.7	Alguns Exercícios	125
7	Conclusão	133
	Índice Remissivo	137

Introdução

*A geometria sem álgebra é cega,
a álgebra sem geometria é muda.
(autor desconhecido)*

As álgebras geométricas de que tratamos neste trabalho, são apresentadas de modo simples e didático. O texto traz vários exemplos e exercícios resolvidos. Dividimos o trabalho em seis capítulos:

1º capítulo: percorremos a história para entender como surgiu a álgebra geométrica, e as álgebras que deram origem a ela.

2º capítulo: introduz conceitos elementares, como escalares, vetores, operações entre vetores, espaços lineares e funções lineares entre outros, e define o produto de Clifford em $\mathbb{R}^2$, para então definir as primeiras propriedades da álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_2$.

3º capítulo: aborda os números complexos, como álgebra e como corpo, suas propriedades e o isomorfismo entre $\mathbb{C}$ e a parte positiva da álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_2$, além de aprofundar o dissecamento da álgebra $\mathcal{Cl}_2$.

4º capítulo: desbrava as propriedades geométricas dos bivectores, define a dualidade de Hodge e aborda a álgebra exterior $\bigwedge \mathbb{R}^3$, traçando um paralelo entre esta e a álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_3$, mostrando o isomorfismo entre os espaços vetoriais das duas álgebras e apresentando o produto entre vetores e bivectores, e as contrações à direita e à esquerda entre multivetores.

5º capítulo: apresenta as matrizes spin de Pauli e os spinores, o isomorfismo entre os quatérnions $\mathbb{H}$ e a álgebra par $\mathcal{Cl}_3^+$, as rotações e reflexões no espaço.

6º capítulo: apresenta uma breve introdução à álgebra dos quatérnions $\mathbb{H}$ de Hamilton, as rotações em $\mathbb{R}^3$ os grupos de rotações $SO(3)$ e $SU(2)$, a

representação matricial dos quatérnions e como nos outros capítulos, alguns exercícios de aplicação.

Capítulo 1

Notas Históricas

Faremos a seguir uma retrospectiva histórica, citando alguns dos personagens que contribuíram, diretamente, com a construção da álgebra geométrica e fatos curiosos relacionados as suas descobertas.

Euclides de Alexandria e a Geometria Grega (~ 300 A.C.)

Sua formulação sistemática da Geometria Grega, foi a primeira teoria abrangente do mundo físico. Euclides mostrou que a partir de hipóteses simples sobre a natureza dos objetos físicos, uma grande variedade de notáveis relações poderiam ser deduzidas. Tão expressivas foram as idéias da geometria grega que elas forneceram uma fundamentação para todos os avanços subseqüentes na Física. A Matemática grega, sofreu reformulações e ampliações ao longo do tempo, porém não mudou sua essência. O brilhante florescimento da ciência e da Matemática na Grécia antiga, foi seguida por um longo período de estagnação científica, que teve fim no século *XVII* com o surgimento de grandes cientistas como Kepler, Galileo e Newton.

Jerome Cardan (1501 – 1576)

Em 1545, Jerome Cardan publicou um documento, *Ars Magna*, que é tido como uma das primeiras publicações com a idéia de números complexos.

René Descartes (1596 – 1650)

Descartes uniu álgebra e geometria por correspondência da aritmética para escalares com um tipo de aritmética de segmento linha, para ele, escrevendo na terminologia moderna, todo escalar positivo designa uma classe de equivalência de segmentos linha congruentes.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716)

Por volta de 1679 Leibniz pesquisou um sistema elementar em álgebra, similar a análise vetorial.

Isaac Newton (1643 – 1727)

Em 1687, publicou seu *Principia Mathematica*. Neste trabalho ele não usou a idéia de um vetor, entretanto, algumas de suas idéias aproximam-se desse conceito, haja visto que o tema explorado eram forças, e estes objetos possuem “magnitude” e direção e podem ser combinadas, ou adicionadas, produzindo uma nova força.

Caspar Wessel (1745 – 1818)

Em 1799, publicou um trabalho em que se estabeleceu pela primeira vez uma representação geométrica dos números complexos. Sua meta não era apenas apresentar os números complexos, mas também investigar ‘como podemos representar direções analiticamente’. Wessel, além de ter sido o primeiro a publicar o novo padrão geométrico de interpretação dos números complexos, como entidades que podem ser adicionadas, subtraídas, multiplicadas e divididas, também procurou desenvolver um método comparável para a análise do espaço 3-dimensional e nisso ele não teve sucesso.

Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)

Por volta de 1799, Gauss trabalhou na interpretação de quantidades complexas, seus resultados só foram publicados em 1831. Assim como Wessel, Gauss também estudou entidades comparáveis aos números complexos que pudessem ser usadas no espaço 3-dimensional. Ironicamente, Gauss não aceitou a justificativa geométrica do número imaginário como plenamente satisfatória. Felix Klein argumentou em 1898 que Gauss antecedeu Hamilton na descoberta dos quatérnions.

William Rowan Hamilton (1805 – 1865)

Em 1837, Hamilton publicou um longo artigo onde interpretava números complexos como pares ordenados, nesse mesmo artigo ele mencionou sua esperança em publicar a “Theory of Triplets”, isto é, um sistema que deveria fazer pela análise do espaço tri-dimensional o que os números imaginários faziam pelo espaço bi-dimensional.

Em 1843, depois de ter pesquisado os tripletos por trinta anos, Hamilton descobriu os quatérnions, um dos principais sistemas da análise vetorial.

Hamilton devotou sua vida ao estudo dos quatérnions, morreu em 1865 e deixou um discípulo, o matemático escocês Peter Guthrie Tait.

Hamilton não foi o único a criar um sistema vetorial. Na verdade, nesse mesmo período, seis outros pesquisadores também desenvolveram sistemas que eram mais ou menos caracterizados como sistemas vetoriais. Essas pessoas foram, August Ferdinand Möbius, Matthew O' Brien, Giusto Bellavitis, Comte de Saint-Venant, Augustin Cauchy e Hermann G. Grassmann.

Benjamin Olinde Rodrigues (1795 – 1851)

Rodrigues descobriu a estrutura algébrica dos quatérnions em seus estudos sobre rotações de vetores no $\mathbb{R}^3$ algum tempo antes de Hamilton. Para detalhes históricos sobre as contribuições de Rodrigues o leitor deve consultar [1]

Hermann Günther Grassmann (1809 – 1877)

Grassmann foi professor de escola secundária por toda a sua vida, estudioso, em 1840 apresentou sua obra sobre *Teoria do fluxo e refluxo*, trabalho esse que tratava da teoria das marés e que continha seu primeiro sistema de análise espacial com vetores, entre outros assuntos, esse trabalho também continha a adição e subtração de segmentos e o numericamente equivalente ao produto vetorial moderno, com a diferença que, enquanto o produto de dois vetores é outro vetor no sistema moderno, no sistema de Grassmann o resultado é uma entidade geométrica, a área orientada do paralelogramo dado pelos dois segmentos ou vetores..

Em 1844, Grassmann publicou a exposição completa de seu sistema na obra *Die Lineale Ausdehnungslehre* (Teoria de extensão linear), que englobava um sistema muito mais amplo, onde estendia a idéia de quatérnions para o espaço n-dimensional, introduzindo o conceito de números hipercomplexos e os produtos interno e externo em espaços arbitrários..

O trabalho de Grassmann não foi bem aceito por seus contemporâneos por conter idéias que estavam além dos parâmetros da época.

Peter Guthrie Tait (1831 – 1901)

Seguidor de Hamilton, Tait deu continuidade a sua obra. Em 1859, Tait escreveu o primeiro de seus setenta artigos sobre os *quatérnions*. Uma notável característica da obra de Tait, foi a extensiva atenção que ele deu as aplicações físicas.

James Clerke Maxwell (1831 – 1879)

Em 1873, publicou *Treatise on Electricity and Magnetism*, indiscutivelmente o mais importante tratamento da ciência física dominante no século dezenove, nesse trabalho apesar de ressaltar a importância dos quatérnions,

Maxwell não fez uso extensivo da álgebra quaterniônica, usando separadamente as partes “vetores” e “escalares” daqueles objetos. Em um artigo apresentado em 1871, intitulado *On the Mathematical Classifications of Physical Quantities*, Maxwell declarou: “A invenção do cálculo quaterniônico é um passo em direção ao conhecimento de quantidades relacionadas ao espaço, que só podem ser comparadas por sua importância, a invenção das coordenadas triplas por Descartes. As idéias desse cálculo, bem como seus símbolos e operações, são adaptáveis para uso em vários campos científicos” (tradução livre ver [4]). Alguns entenderam esta afirmação como uma confirmação da utilidade dos quatérnions como um método matemático; mas na verdade, o que Maxwell estava dizendo (na opinião de Crowe), era que os métodos vetoriais proporcionavam uma maneira valiosa de pensar, mas que na prática, o uso dos quaténions não era satisfatório.

William Kingdon Clifford (1845 – 1879)

Clifford foi um brilhante matemático inglês, professor da Universidade de Londres, foi um dos poucos matemáticos de seu tempo que conheceu e trabalhou em ambos os sistemas, Grassmanniano e Hamiltoniano.

Publicou seu *Elements of Dynamic*, uma obra elementar sobre mecânica, em 1877. Nesse trabalho ele uniu os sistemas de Grassmann e Hamilton. Na sessão intitulada “Produto de dois vetores”, ele introduziu dois produtos, um que ele chamou de produto vetorial, que é o produto vetorial padrão empregado por Hamilton e por Grassmann bem como na moderna análise vetorial e o outro produto ele chamou de produto escalar, descrevia quantidades, mas deixava a questão do sinal indefinida. Esse produto para os Grassmannianos era positivo, enquanto que para os Hamiltonianos era negativo. Quase cem páginas adiante, ele retorna a essa questão e define o produto escalar como: “a soma negativa dos produtos de suas componentes ao longo dos eixos”, ou seja, de maneira quaterniônica.

Clifford pode ter sido a primeira pessoa a encontrar significado no fato que duas diferentes interpretações de números, podem ser distinguidas, a quantitativa e a operacional.

Na quantitativa: i representa uma medida de de área direcionada.

Na operacional: i especifica uma rotação no i -plano.

Clifford observou que Grassmann desenvolveu a idéia de número direcionado do ponto de vista quantitativo, enquanto, Hamilton enfatizou a interpretação operacional.

Clifford morreu dois anos após publicar *Elements of Dynamic*, deixando

seu trabalho incompleto.

Josiah Willard Gibbs (1839 – 1903), **Oliver Heaviside** (1850 – 1925)

Influenciado pelo *Tratado* de Maxwell e pela álgebra de extensão de Grassmann, Josiah Willard Gibbs publicou em 1881 um trabalho com título *Elementos de Análise Vetorial* e o enviou por conta própria para alguns especialistas. Seu trabalho arrebatou simpatizantes, como Oliver Heaviside que em outra oportunidade desenvolveu um sistema vetorial análogo e em dissonância como o sistema desenvolvido por Peter Tait.

A álgebra vetorial inventada por Gibbs e Heaviside que tentou unificar os sistemas de Grassmann e Hamilton, se estabeleceu, mesmo tendo provocado fervorosos debates, e é esta álgebra que é ensinada nos cursos de hoje.

Como diz Vaz [15] "...*Se estudarmos os trabalhos de Hamilton e de Grassmann, e daí o de Gibbs, veremos que a álgebra vetorial de Gibbs nada mais é do que um apanhado de conceitos disfarçado sobre o manto de uma notação falaciosa...*"

Podemos dizer que sistema de Gibbs e Heaviside ‘unificou’ os sistemas de Hamilton e Grassmann, mas não de maneira completamente satisfatória, um de seus defeitos é que tal sistema não permite a definição do produto vetorial em qualquer dimensão. Ademais o produto vetorial não é associativo.

Em 1878 surge a Álgebra de Clifford que sintetiza em um único esquema as boas propriedades das estruturas de Hamilton e Grassmann.

A ‘ligação’ entre os dois sistemas vem da adição de um análogo do produto quaterniônico na estrutura da álgebra de Grassmann, obtendo-se assim um sistema adaptado à descrição algébrica dos entes geométricos (pontos, segmentos orientados, planos orientados, etc.) “habitantes” de um espaço afim arbitrário $\mathcal{A}^n$ (com espaço vetorial $\mathbb{R}^n$).

Capítulo 2

Vetores, Espaços Lineares e $\mathcal{Cl}(2)$

Cursos elementares de cálculo vetorial iniciam sua doutrinação dizendo que o conceito de vetor formaliza a noção de direção, e que portanto tal conceito possui grande utilidade para uma descrição matemática de diversas facetas do mundo físico. A doutrinação continua com uma apresentação que se pode considerar longe de satisfatória e que é mais ou menos como segue.

2.1 Vetores e escalares

Em Geometria e Física e suas aplicações à Engenharia, usam-se dois tipos de quantidades: “Define-se” primeiramente um escalar como uma quantidade que é determinada por sua dimensão, medido em unidades de uma escala adequada. Por exemplo: massa, temperatura e voltagem.

Vetores são introduzidos como entes geométricos (segmentos orientados) que possuem “comprimento”. Em seguida representa-se tais objetos por suas componentes, introduzindo-se os conceitos de bases e coordenadas. O comprimento de um vetor $\mathbf{v}$ é denotado por $|\mathbf{v}|$. Dois vetores são ditos iguais se eles possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido. Os autores de textos elementares dizem que se dois vetores possuem a mesma direção, eles são ditos *paralelos*. Mas tais autores se esquecem de dizer o que se entende por paralelo, por omitirem a definição de espaço afim. A doutrinação continua dizendo que um vetor $\mathbf{v}$ e seu oposto $-\mathbf{v}$ tem mesmo comprimento e são paralelos, mas tem orientações *opostas*.

Observação 1 *É fato que a maioria de tais apresentações, em geral, não distinguem as noções de espaços vetoriais e espaços afins e ademais não deixam claro a diferença crucial entre os conceitos de vetores livres e vetores tangentes enquanto habitantes de um espaço afim.*

Depois de apresentada as noções de escalares e vetores, os textos elementares introduzem:

2.1.1 Multiplicação por Escalar

Ao invés de se escrever $\mathbf{a} + \mathbf{a}$ escreve-se $2\mathbf{a}$, e concorda-se que $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$ seja o oposto de $\mathbf{a}$. Desta observação propõe-se a seguinte definição para a multiplicação do vetor $\mathbf{a}$ por um número real $\lambda \in \mathbb{R}$: o vetor $\lambda\mathbf{a}$ tem a mesma *direção* de $\mathbf{a}$, tem comprimento $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda| |\mathbf{a}|$ e *sentido* dado por

$$\begin{array}{l} \lambda\mathbf{a} \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \mathbf{a} \text{ se } \lambda > 0 \\ \lambda\mathbf{a} \quad \uparrow \quad \downarrow \quad \mathbf{a} \text{ se } \lambda < 0 \end{array}$$

para $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

Multiplicação por escalar, satisfaz a distributividade, $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$, associatividade, $(\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a})$, e $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$, para todo número real λ, μ e vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

2.2 Bases e Coordenadas

Sem distinguir entre os conceitos de espaços afins e espaços vetoriais¹ a maioria dos textos elementares prossegue sua doutrinação dizendo que, num *plano* quaisquer dois vetores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, não paralelos, formam uma “base”, se um vetor arbitrário do plano puder ser escrito, unicamente, como uma combinação linear deles, i.e., $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$. Os números a_1, a_2 são chamados coordenadas ou componentes do vetor $\mathbf{a}$ com respeito a base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

Quando uma base é escolhida, afirma-se que seus elementos podem ser representados como as matrizes linhas:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1),$$

¹Veja as definições precisas desses conceitos abaixo.

e um vetor $\mathbf{a}$ do plano como a matriz linha

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2).$$

2.3 Espaços Lineares e Funções Lineares

Naturalmente existe uma distância muito grande entre a apresentação “informal” acima dos conceitos de escalares e vetores e uma apresentação desses conceitos que possa satisfazer a um estudante de ciências matemáticas ou de qualquer estudante de outras disciplinas que tenha como um de seus objetivos a compreensão de conceitos que farão parte daqueles conhecimentos básicos que serão usados em diversas disciplinas do seu currículo e em problemas reais de sua profissão.

De fato, abstratamente, vetores são elementos de um objeto matemático chamado *espaço vetorial* ou *espaço linear* (cuja definição recordaremos a seguir) e este conceito abstrato, possui diversos modelos².

Definição 2 [11] *Um espaço vetorial V sobre um corpo³ $\mathbb{F}$ é um conjunto, cujos elementos são chamados vetores e onde são definidas as operações:*

$$+ : V \times V \rightarrow V, \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w}, \quad (2.1)$$

e

$$\begin{aligned} \odot & : \mathbb{F} \times V \rightarrow V, \quad \alpha \odot \mathbf{v} = \mathbf{w}, \\ \odot & : V \times \mathbb{F} \rightarrow V, \quad \mathbf{v} \odot \alpha = \mathbf{w}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

A aplicação interna definida pela Eq.(2.1) é dita *soma* de vetores e a aplicação $\odot$ é dita multiplicação de escalar por vetor. Tal aplicação é tal que para $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e $\alpha \in \mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (os corpos que usaremos no que se segue) tem-se⁴

$$\alpha \odot \mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{v} \odot \alpha.$$

²Em particular em sua “materialização” como um segmento orientado (em um espaço afim), como ocorre na apresentação informal de tal objeto.

³ $\mathbb{F}$ é *corpo* (os escalares), neste trabalho, especificamente, poderá ser $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ou $\mathbb{H}$, respectivamente, os corpos dos reais, complexos e quatérnions.

⁴No caso de espaços vetoriais sobre o corpo dos quatérnions $\mathbb{H}$, é necessário distinguir-se entre espaços vetoriais à direita e à esquerda. Detalhes podem ser encontrados em [14].

No que se segue escreveremos como usual, $\alpha \odot \mathbf{v} = \alpha \mathbf{v} = \mathbf{v} \odot \alpha = \mathbf{v} \alpha$.

As aplicações $+$ e $\odot$ devem satisfazer, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, os seguintes axiomas:

Comutatividade: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$;

Associatividade: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ e $(\alpha\beta)\mathbf{v} = \alpha(\beta\mathbf{v})$;

Vetor Nulo: existe um vetor $\mathbf{0} \in V$, chamado vetor nulo, ou vetor zero, tal que $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$;

Inverso aditivo: para cada $\mathbf{v} \in V$ existe $-\mathbf{v} \in V$, chamado inverso aditivo, ou o simétrico de $\mathbf{v}$, tal que $-\mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{v} = (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$;

Distributividade: $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$ e $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$;

Multiplicação por 1 $\in \mathbb{F}$: $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

2.3.1 Subespaços Vetoriais

Um subconjunto U de um espaço linear (vetorial) V é chamado *subespaço linear* de V , se é fechado para as operações de espaço linear:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &\in U, \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in U, \\ \lambda \mathbf{a} &\in U, \forall \lambda \in \mathbb{F}, \forall \mathbf{a} \in U. \end{aligned}$$

Exemplo 3 $\mathbb{R}^2$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Definição 4 Sejam V e W dois espaços vetoriais (sobre $\mathbb{F}$). Uma transformação linear (função linear ou aplicação linear) é uma aplicação de V em W , $F : V \longrightarrow W$, que satisfaz as seguintes condições [2]:

(i) Quaisquer que sejam $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$,

$$F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v}),$$

(ii) Quaisquer que sejam $k \in \mathbb{F}$ e $\mathbf{v} \in V$,

$$F(k\mathbf{v}) = kF(\mathbf{v}).$$

2.4 Espaços Afins

Definição 5 [14] Seja X um conjunto não vazio e V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$. Uma estrutura afim para X com espaço vetorial V é uma aplicação $\theta : X \times X \rightarrow V; (x, a) \mapsto x - a$ tal que:

2.5. VETORES LIVRES E TANGENTES DE UM ESPAÇO AFIM (X, V, θ) 13

(i) Para todo $a \in X$ fixo, a aplicação $\theta_a : X \rightarrow V; x \mapsto x \dot{-} a$ é bijetora.

(ii) Para todo $a, b, x \in X, (x \dot{-} b) + (b \dot{-} a) = (x \dot{-} a)$

O axioma (ii) é chamado, o axioma do triângulo.

Fazendo $a = b = x$ em (ii) temos

(iii) para todo $x \in X, x \dot{-} x = 0$.

Fazendo $x = a$ em (ii), temos,

(iv) para todo $a, b \in X, b \dot{-} a = -(a \dot{-} b)$

A aplicação θ é chamada subtração (os elementos de V são, naturalmente, chamados de vetores. O vetor $(b \dot{-} a)$ é dito diferença do par $(a, b) \in X \times X$ ou ainda de segmento orientado de a para b .

Um espaço afim (X, V, θ) é uma dupla (X, V) onde X é um conjunto não vazio e V é um espaço vetorial, dotado de uma estrutura θ afim fixa. Quando o contexto o permitir, (X, V, θ) será frequentemente abreviado para X .

Observação 6 Usaremos no que segue e como usual o símbolo $-$ em lugar de $\dot{-}$. Observamos também que outras definições equivalentes de espaços afins podem ser dadas (veja, por exemplo, [3]).

2.5 Vetores Livres e Tangentes de um Espaço Afim (X, V, θ)

Da Definição (5) segue que a aplicação $X \times \{a\} \rightarrow V; (x, a) \mapsto x \dot{-} a$ também é bijetora para qualquer escolha de $a \in X$, e induz uma estrutura linear sobre $X \times \{a\}$, com (a, a) como origem. O espaço linear induzido é chamado de *espaço tangente* a X em a e denotado por TX_a . Seus elementos são chamados de *vetores tangentes* a X em a .

A aplicação $\theta : X \times X \rightarrow V$ é sobrejetora, pelo axioma (i) da Definição (5) e assim a aplicação $\theta_{inj} : \theta(X \times X) \rightarrow V$ é bijetora, induzindo uma estrutura linear sobre $\theta(X \times X)$, o conjunto de segmentos (orientados) da estrutura afim θ . O espaço linear induzido é chamado de *espaço dos vetores livres* sobre X , e seus elementos são chamados de vetores livres sobre X .

Os vetores tangentes $(x', a') \in X \times \{a'\}$ e $(x, a) \in X \times \{a\}$ são ditos equivalentes (ou *paralelos*) se são representados pelo mesmo vetor livre, e escrevemos $(x', a') \parallel (x, a)$. Claramente [14]

$$(x', a') \parallel (x, a) \iff x' - a' = x - a. \quad (2.3)$$

2.6 Independência Linear, Dimensão de V

Um vetor $\mathbf{b} \in V$ é dito uma combinação linear dos vetores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_k$ se puder ser escrito como a soma de múltiplos dos vetores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_k$, i.e.,

$$\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k, \quad (2.4)$$

onde $\lambda_i \in \mathbb{F}$, e $i = 1, 2, 3, \dots, k$.

As combinações lineares de $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_k\} \subset V$ formam um subespaço de V e dizemos que este subespaço é gerado por $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_k\}$.

O conjunto $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_k\}$ é dito linearmente independente, se nenhum desses vetores puder ser escrito como combinação linear dos outros. Em outras palavras, o conjunto $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_k\}$ é linearmente independente se $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$, implica que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_k = 0$.

Neste caso, o conjunto linearmente independente $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_k\} \subset V$ é uma *base* para V e os números λ_i na Eq.(2.4) são únicos e são chamados as componentes (ou coordenadas) de $\mathbf{b}$ com relação a base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_k\}$.

Pode-se mostrar sem dificuldades que toda base de V tem exatamente o mesmo número de elementos e tal número é chamado a *dimensão* de V , que será denotado $\dim V = k$.

2.6.1 Estruturas Quadráticas e Álgebras

Os conceitos de distância e o de ângulos não se encontram naturalmente definidos quando se fornece uma dada estrutura afim (X, V, θ) . Por exemplo, não tem sentido dizer que duas linhas no *espaço afim*⁵ $(\mathbb{R}^2, V = \mathbb{R}^2, \theta)$ se encontram em um ângulo reto, ou que há uma base com vetores de mesmo comprimento no *espaço vetorial* $\mathbb{R}^2$. Uma estrutura afim permite no máximo uma comparação de comprimentos de vetores paralelos, mas não possibilita a comparação do comprimento de vetores não-paralelos. Para tanto, necessitamos introduzir no espaço vetorial que entra na definição do espaço afim em consideração, uma nova estrutura, chamada de *métrica* ou *estrutura quadrática*.

Veremos que uma estrutura quadrática sobre o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, permite a construção de uma álgebra que torna possível um cálculo com os

⁵É comum nos referirmos ao espaço n -dimensional $(\mathbb{R}^n)$ dotado com as operações de adição, multiplicação por escalar e o produto interno euclidiano como o espaço euclidiano n -dimensional.

objetos geométricos deste espaço e outros a ele associados, de maneira muito intuitiva.

No restante desse capítulo estudaremos tal *álgebra geométrica* associada a $\mathbb{R}^2$ (enquanto espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$). Para algumas de nossas considerações também usaremos o fato de que $\mathbb{R}^2$, quando considerado como *parte* da estrutura do plano euclidiano 2-dimensional (veja abaixo) é uma estrutura *afim* que permite definir o paralelismo de segmentos orientados (vetores livres).

2.7 Produto Escalar

Definição 7 *O produto escalar (ou produto interno) em V^n (um espaço vetorial n -dimensional sobre $\mathbb{R}$) é uma aplicação $\cdot : V^n \times V^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ as propriedades*

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \text{ linearidade no primeiro fator} \\ \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \text{ linearidade no segundo fator} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \text{ simetria} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0, \mathbf{a} \neq 0 \text{ produto positivo definido} \end{array} \right.$$

Note que as três primeiras propriedades implicam na bilinearidade do produto escalar, isto é, ele é linear para ambos os fatores.

No restante do capítulo tomaremos $V^n = \mathbb{R}^2$. Se introduzimos uma base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ em $\mathbb{R}^2$, tal que

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij},$$

$$\text{onde } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases},$$

o produto escalar de dois vetores $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2$ é o número real definido como

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2.$$

Define-se o ângulo ϕ ($0 \leq \phi \leq \pi$) entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ pela equação:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \phi.$$

O *comprimento* (ou *magnitude*) de um vetor $\mathbf{a}$ é definido por:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Dois vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são ditos *ortogonais*, se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Um vetor de comprimento $|\mathbf{a}| = 1$ é chamado de vetor *unitário*. Por exemplo, os vetores da base canônica $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ são vetores unitários e ortogonais, formando juntos uma base *ortonormal* de $\mathbb{R}^2$.

2.7.1 Espaços Vetorial e Afim Euclidianos

O espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ dotado do produto escalar acima definido, é chamado *espaço vetorial euclidiano*. Quando $\mathbb{R}^2$ é considerado como espaço afim, tal estrutura sendo dotada do produto escalar na sua subestrutura vetorial é chamado *espaço euclidiano bidimensional* ou *plano euclidiano*. Nestas condições podemos definir a distância entre pontos do espaço afim $(X = \mathbb{R}^2, V = \mathbb{R}^2, \theta)$ de maneira óbvia, qual seja: dados $x, y \in X = \mathbb{R}^2$ a distância entre estes pontos é a aplicação

$$\begin{aligned} d & : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \\ d(x, y) & = |x - y| \end{aligned}$$

Observação 8 A forma quadrática $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 \mapsto |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ nos permite comparar comprimentos de segmentos orientados não paralelos no espaço afim $(X = \mathbb{R}^2, V = \mathbb{R}^2, \theta)$. Como já mencionamos, a estrutura afim de $\mathbb{R}^2$ só nos permite a comparação de segmentos orientados paralelos.

2.8 Produto de Clifford para Vetores e bivetores

Em dimensões $n \geq 2$ é impossível uma definição para a multiplicação de vetores que tenha como requisito a preservação da norma na multiplicação, $|\mathbf{ab}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$, que satisfaça os mesmos axiomas que aqueles que definem a multiplicação de números reais — associatividade, comutatividade e distributividade. Em particular veremos que o produto de Clifford de vetores que introduziremos a seguir, não respeita o axioma da comutatividade. Contudo veremos que a falta de comutatividade do produto de Clifford está associada a um significado geométrico profundo.

Seja o espaço afim $(X = \mathbb{R}^2, V = \mathbb{R}^2, \theta)$. Tome dois vetores unitários ortogonais $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in T_o\mathbb{R}^2$, $o \in X = \mathbb{R}^2$. O comprimento do vetor $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$

é $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. ‘Inventamos’ agora uma multiplicação entre vetores tal que, se o vetor $\mathbf{r}$ é multiplicado por ele mesmo, o que denotaremos pela *justaposição* de símbolos, i.e., escreveremos, $\mathbf{r}\mathbf{r} = \mathbf{r}^2$, teremos como resultado do ‘novo’ produto, o quadrado do comprimento de $\mathbf{r}$, i.e.,

$$\mathbf{r}^2 = |\mathbf{r}|^2. \quad (2.5)$$

Usando as coordenadas dos vetores, escrevemos a Eq.(2.5) como

$$(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2)^2 = x^2 + y^2$$

Supondo que o produto de Clifford satisfaça o axioma da distributividade, sem assumir a *comutatividade*, obtemos:

$$\begin{aligned} (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2)^2 &= (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2)(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) \\ &= x^2\mathbf{e}_1^2 + y^2\mathbf{e}_2^2 + xy(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) = x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Tal condição somente pode ser satisfeita se os vetores $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ são tais que:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1^2 &= \mathbf{e}_2^2 = 1, \\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 &= -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

e portanto como deve ser, temos

$$\begin{aligned} |\mathbf{e}_1| &= |\mathbf{e}_2| = 1, \\ \mathbf{e}_1 &\perp \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Supondo que o produto de Clifford é associativo, temos que:

$$(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 = -1.$$

Visto que o quadrado de $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ é *negativo*, segue que $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ não pode ser um escalar (i.e, um elemento de $\mathbb{R}$) e nem um vetor, uma vez que o quadrado de um vetor (vide Eq.(2.5)) é um número real. O produto destes objetos é um novo tipo de ente matemático, que será dito um *bivector*, e que representa geometricamente a área plana orientada do quadrado definido por $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$.

Notação 9 $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_{12}$

Definição 10 Definimos o produto de Clifford para dois vetores $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2$ por:

$$\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_{12} \quad (2.6)$$

isto é, a soma de um escalar com um bivector.

2.9 A Álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_2$

Os quatro elementos :

1 escalar
 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ vetores
 $\mathbf{e}_{12}$ bivector

formam uma base para o espaço linear da álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_2$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, onde um elemento arbitrário $u \in \mathcal{Cl}_2$ é escrito como uma combinação linear (com coeficientes reais) do escalar u_0 , do vetor $u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$ e do bivector $u_{12}\mathbf{e}_{12}$, i.e.

$$u = u_0 + u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_{12}\mathbf{e}_{12}. \quad (2.7)$$

Observação 11 Antes de prosseguirmos, uma observação quanto a nomenclatura que utilizaremos se faz necessária. A álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_n$ de $\mathbb{R}^n$ contém 0-vetores (i.e., os escalares), 1-vetores (ou simplesmente os vetores), 2-vetores, ..., n -vetores. Os agregados dos k -vetores fornecem ao espaço linear $\mathcal{Cl}_n$ uma estrutura multivetorial que se denota por

$$\mathcal{Cl}_n = \bigwedge^0 \mathbb{R}^n \oplus \bigwedge^1 \mathbb{R}^n \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^n \oplus \dots \oplus \bigwedge^n \mathbb{R}^n.$$

Os subespaços $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ são ditos os espaços dos k -vetores e temos a identificação $\bigwedge^0 \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}$ e $\bigwedge^1 \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n$.

Precisamos agora introduzir o produto de Clifford entre elementos arbitrários de $\mathcal{Cl}_2$. Faremos tal, estudando os resultados do exemplo que se segue.

Exemplo 12 Seja $\mathbf{a} = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_{12}$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{c} = 1 + \mathbf{e}_2$. Calcule $\mathbf{ab}$, $\mathbf{ac}$ e $\mathbf{ba}$

Solução: Aplicando a distributividade tem-se:

$$\begin{aligned}\mathbf{ab} &= (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_{12})(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_{12}\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_{12}\mathbf{e}_2 \\ &= -\mathbf{e}_{12} + 1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 = 1 - \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_{12}, \\ \mathbf{ac} &= (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_{12})(1 + \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 + 1 - \mathbf{e}_{12} - \mathbf{e}_1 = 1 - \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_{12} \\ \mathbf{ba} &= (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_{12}) = \mathbf{e}_{12} - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_{12} + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_{12} \\ &= \mathbf{e}_{12} - \mathbf{e}_2 + 1 + \mathbf{e}_1 = 1 + \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_{12}.\end{aligned}$$

Estes resultados mostram preliminarmente que $\mathbf{ab} = \mathbf{ac}$ com $\mathbf{b} \neq \mathbf{c}$ e $\mathbf{ab} \neq \mathbf{ba}$.

Resumidamente, uma tabela para a multiplicação dos elementos da base do espaço linear da álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_2$, é :

	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_{12}$
$\mathbf{e}_1$	1	$\mathbf{e}_{12}$	$\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_{12}$	1	$-\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_{12}$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	-1

(2.8)

2.9.1 Produto Exterior = Parte Bivector do Produto de Clifford

Extraindo a parte escalar e bivector do produto de Clifford em (2.6), temos:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a_1b_1 + a_2b_2 && \text{o produto escalar de } \mathbf{a} \text{ por } \mathbf{b}. \\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_{12} && \text{o produto exterior (ou cunha) de } \mathbf{a} \text{ por } \mathbf{b}.\end{aligned}$$

O bivector⁶ $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ representa a orientação do segmento plano do paralelogramo de lados $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. A área deste paralelogramo é $|a_1b_2 - a_2b_1|$ e denotaremos esta área por

$$|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |a_1b_2 - a_2b_1|$$

e diremos que ela é a magnitude do bivector $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

⁶O bivector calculado através do produto exterior $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_{12}$ representa como aqui descrito, a área orientada de um segmento plano determinado pelos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, nesta ordem, e não deve ser confundido com o vetor calculado através do produto vetorial (a ser também definido oportunamente) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3$, e que representa um segmento orientado.

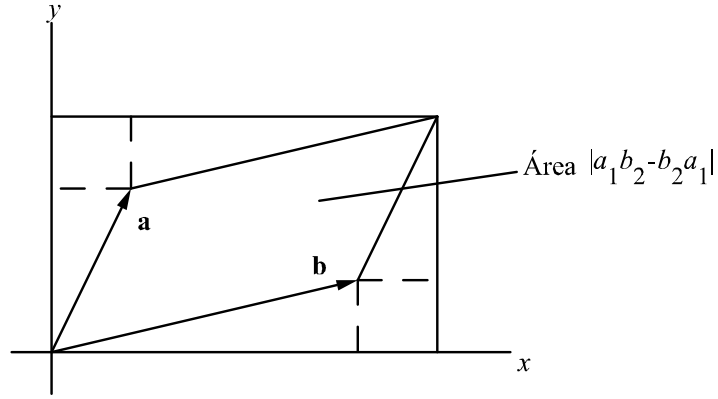


Figura 1

Vemos portanto que um paralelogramo definido por $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, uma figura geométrica no espaço afim $(X = \mathbb{R}^2, V = \mathbb{R}^2, \theta)$, pode ser algebricamente representado como um tipo de *produto geométrico* dos seus lados.

Os bivectores $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ e $\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$ tem mesma magnitude, mas são objetos de orientação opostas. Tal fato se expressa como segue:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}. \quad (2.9)$$

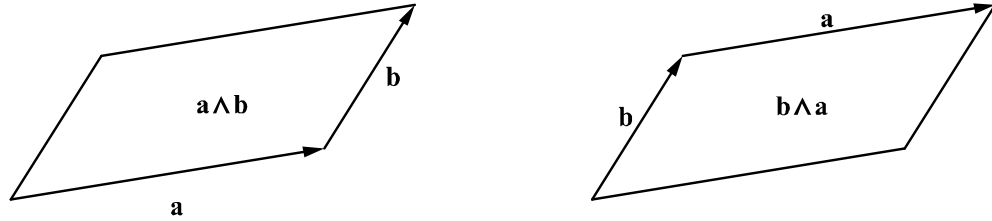


Figura 2

Voltando na equação $\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_{12}$, podemos reescrevê-la como:

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}. \quad (2.10)$$

Também,

$$\mathbf{ba} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}. \quad (2.11)$$

Adicionando e subtraindo (2.10) e (2.11), obtemos:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}), \quad (2.12)$$

e

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba}). \quad (2.13)$$

Os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são paralelos se $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$, isto é $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0$ e são ortogonais se $\mathbf{ab} = -\mathbf{ba}$. Em resumo, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{ab} = \mathbf{ba} &\iff \mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \iff \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0 \iff \mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \\ \mathbf{ab} = -\mathbf{ba} &\iff \mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \iff \mathbf{ab} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Exemplo 13 Consideremos a decomposição de um vetor $\mathbf{r}$ em duas componentes, uma paralela ao vetor $\mathbf{a}$ e a outra paralela ao vetor $\mathbf{b}$, onde $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$. Este procedimento significa determinar os coeficientes α e β na decomposição $\mathbf{r} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$. O coeficiente α pode ser obtido através do produto exterior $\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = (\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) \wedge \mathbf{b}$ e usando que $\mathbf{b} \wedge \mathbf{b} = 0$, tem-se $\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$. Analogamente, $\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = \beta(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$. Nas duas últimas equações ambos os lados são múltiplos de $\mathbf{e}_{12}$ e podemos escrever simbolicamente⁷

$$\alpha = \frac{\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}},$$

$$\beta = \frac{\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}}.$$

Os coeficientes α e β podem ser obtidos visualmente comparando as áreas orientadas (ao invés de comprimentos) na seguinte figura:

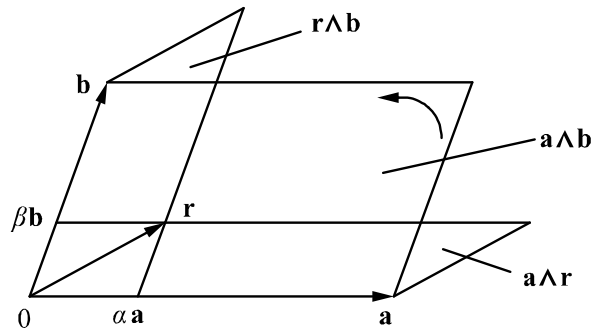


Figura 3

⁷Como um elemento da álgebra exterior $\bigwedge \mathbb{R}^2$ o bivector $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_{12}$ não possui inverso. Como um elemento da álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_2$ o bivector não nulo $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ possui inverso.

Exercício 14 Seja $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_{12}$, $\mathbf{r} = 5\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$. Calcule α, β na decomposição $\mathbf{r} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$.

Solução: Temos que $\mathbf{b} - \mathbf{a} = 3\mathbf{e}_2$ isso implica que $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{3}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$. Por outro lado observamos que $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} = 3\mathbf{e}_1$, isto é, $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$.

Daí substituindo os valores encontrados para $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$, na equação de $\mathbf{r}$, obtemos: $\mathbf{r} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$. Portanto, $\alpha = 2, \beta = 3$.

2.9.2 Projeções Perpendiculares e Reflexões

Calculemos a componente de $\mathbf{a}$ na direção de $\mathbf{b}$ quando dois vetores divergem por um ângulo φ , $0 < \varphi < \pi$. A componente paralela $\mathbf{a}_{\parallel}$ é um escalar múltiplo do vetor unitário $\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$:

$$\mathbf{a}_{\parallel} = |\mathbf{a}| \cos \varphi \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} \quad (2.14)$$

Em outras palavras, a componente paralela $\mathbf{a}_{\parallel}$ é o produto escalar

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi,$$

multiplicado pelo vetor $\mathbf{b}^{-1} = \mathbf{b} / |\mathbf{b}|^2$, chamado o inverso⁵ do vetor $\mathbf{b}$. Assim,

$$\mathbf{a}_{\parallel} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b}^{-1}. \quad (2.15)$$

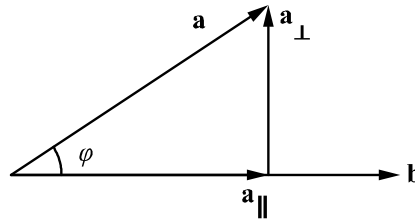


Figura 4

A última fórmula (2.15) nos diz que na projeção de $\mathbf{a}$ na direção do vetor $\mathbf{b}$, o comprimento do vetor $\mathbf{b}$ não é importante.

⁵O inverso $\mathbf{b}^{-1}$ do vetor não-nulo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2 \subset \mathcal{Cl}_2$ satisfaz $\mathbf{b}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{b} \mathbf{b}^{-1} = 1$ na álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_2$. Um vetor e seu inverso são vetores paralelos.

A componente perpendicular $\mathbf{a}_\perp$ é dada pela diferença:

$$\mathbf{a}_\perp = \mathbf{a} - \mathbf{a}_\parallel = \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}^{-1} = (\mathbf{a}\mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}^{-1} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\mathbf{b}^{-1}. \quad (2.16)$$

Note que o bivetor $\mathbf{e}_{12}$ anti-comuta com todos os vetores do plano $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, assim

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\mathbf{b}^{-1} = -\mathbf{b}^{-1}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{b}^{-1}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}) = -(\mathbf{b} \wedge \mathbf{a})\mathbf{b}^{-1}. \quad (2.17)$$

A área do paralelogramo com lados $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ é dada por:

$$|\mathbf{a}_\perp \mathbf{b}| = |\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \varphi, \text{ onde } 0 < \varphi < \pi. \quad (2.18)$$

A reflexão de um vetor $\mathbf{r}$ através do vetor $\mathbf{a}$ resulta no vetor $\mathbf{r}'$. Se, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\parallel + \mathbf{r}_\perp$ e $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_\parallel - \mathbf{r}_\perp$, por (2.15) e (2.16) podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r}_\parallel - \mathbf{r}_\perp = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}^{-1} - (\mathbf{r} \wedge \mathbf{a})\mathbf{a}^{-1} \\ &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{r} \wedge \mathbf{a})\mathbf{a}^{-1} \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{r})\mathbf{a}^{-1} \\ &= \mathbf{a}\mathbf{r}\mathbf{a}^{-1}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Por outro lado de (2.12), podemos escrever:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= (2\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{r}\mathbf{a})\mathbf{a}^{-1} \\ &= 2\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{\mathbf{a}^2}\mathbf{a} - \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

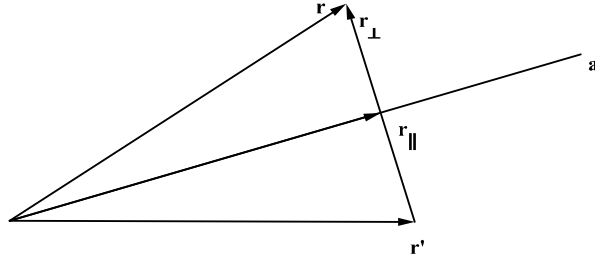


Figura 5

A fórmula $\mathbf{r}' = \mathbf{a}\mathbf{r}\mathbf{a}^{-1}$ pode ser obtida diretamente, usando-se as propriedades do produto de Clifford ⁸: decompondo $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\parallel + \mathbf{r}_\perp$, onde $\mathbf{a}\mathbf{r}_\parallel\mathbf{a}^{-1} = \mathbf{r}_\parallel\mathbf{a}\mathbf{a}^{-1} = \mathbf{r}_\parallel$, enquanto $\mathbf{a}\mathbf{r}_\perp\mathbf{a}^{-1} = -\mathbf{r}_\perp\mathbf{a}\mathbf{a}^{-1} = -\mathbf{r}_\perp$.

⁸Como $\mathbf{a}$ é paralelo a $\mathbf{r}_\parallel$, então $\mathbf{a}\mathbf{r}_\parallel = \mathbf{r}_\parallel\mathbf{a}$. e como $\mathbf{a}$ é perpendicular a $\mathbf{r}_\perp$ então $\mathbf{a}\mathbf{r}_\perp = -\mathbf{r}_\perp\mathbf{a}$.

A composição de duas reflexões, primeiro através de $\mathbf{a}$ e depois através de $\mathbf{b}$, é dada por

$$\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}' = \mathbf{a}\mathbf{r}\mathbf{a}^{-1} \mapsto \mathbf{r}'' = \mathbf{b}\mathbf{r}'\mathbf{b}^{-1} = \mathbf{b}(\mathbf{a}\mathbf{r}\mathbf{a}^{-1})\mathbf{b}^{-1} = (\mathbf{b}\mathbf{a})\mathbf{r}(\mathbf{b}\mathbf{a})^{-1}.$$

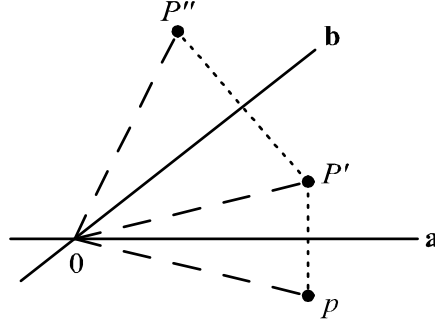


Figura 6

A composição dessas duas reflexões é (como se vê facilmente) uma *rotação* por um ângulo que é *duas* vezes o valor do ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

2.10 Representação Matricial de $\mathcal{Cl}_2$

Introduzimos acima, de maneira bastante informal, a álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_2$ associada ao espaço vetorial $\mathbb{R}^2$. Tal álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_2$ é uma álgebra de dimensão 4 sobre $\mathbb{R}$. Como uma álgebra associativa, ela é isomorfa a álgebra das matrizes 2×2 com entradas reais, que denotaremos por $\text{Mat}(2, \mathbb{R})$. Temos a seguinte correspondência (como se pode verificar sem dificuldades):

$$1 \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_1 \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 \simeq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

No entanto, a álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_2$ possui mais estrutura do que a álgebra das matrizes $\text{Mat}(2, \mathbb{R})$. De fato, na álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_2$, destacamos, *por definição*, um subespaço privilegiado, o subespaço dos vetores (ou 1-vetores) $\mathbb{R}^2 \subset \mathcal{Cl}_2$. Nenhum subespaço semelhante é privilegiado na álgebra matricial $\text{Mat}(2, \mathbb{R})$.

Para elementos arbitrários $u \in \mathcal{Cl}_2$, temos a seguinte correspondência com as matrizes de $\text{Mat}(2, \mathbb{R})$,

$$u = u_0 + u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_{12} e_{12} \simeq u_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + u_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + u_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

ou

$$u \simeq \begin{bmatrix} u_0 + u_1 & u_2 + u_{12} \\ u_2 - u_{12} & u_0 - u_1 \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Também dado $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{Mat}(2, \mathbb{R})$ temos

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

o que implica

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \simeq \frac{1}{2}[(a+d) + (a-d)\mathbf{e}_1 + (b+c)\mathbf{e}_2 + (b-c)\mathbf{e}_{12}],$$

Nessa representação, a *transposta* da matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{Mat}(2, \mathbb{R})$ que representa um certo $u \in \mathcal{Cl}_2$, i.e.,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

corresponde ao elemento $\tilde{u} \in \mathcal{Cl}_2$, dito o *reverso* de $u \in \mathcal{Cl}_2$. A operação de reversão em $\mathcal{Cl}_2$ é definida por:

$$\begin{aligned} \sim & : \mathcal{Cl}_2 \rightarrow \mathcal{Cl}_2, \\ u & \mapsto \tilde{u} \end{aligned}$$

tal que se escrevemos $u = u_0 + u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_{12} \mathbf{e}_{12}$ então

$$\tilde{u} = u_0 + u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 - u_{12} \mathbf{e}_{12}.$$

Vamos agora verificar que nossa identificação é de fato correta. Para tanto,

escrevemos:

$$\begin{bmatrix} u_0 + u_1 & u_2 + u_{12} \\ u_2 - u_{12} & u_0 - u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Tem-se que:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 + u_1 & u_2 - u_{12} \\ u_2 + u_{12} & u_0 - u_1 \end{bmatrix} \\ &= u_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + u_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + u_{12} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= u_0 + u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 - u_{12} \mathbf{e}_{12}. \end{aligned}$$

Também, temos o seguinte resultado. A matriz adjunta de $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{Mat}(2, \mathbb{R})$, que representa um certo $u \in \mathcal{Cl}_2$, i.e.,

$$(ad - bc) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

corresponde ao elemento $\bar{u} \in \mathcal{Cl}_2$, dito o *Clifford-conjugado* (ou simplesmente *conjugado*) de $u \in \mathcal{Cl}_2$. A operação de conjugação em $\mathcal{Cl}_2$ é definida por:

$$\begin{aligned} - & : \mathcal{Cl}_2 \rightarrow \mathcal{Cl}_2, \\ u & \mapsto \bar{u} \end{aligned}$$

tal que, se escrevemos $u = u_0 + u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_{12} \mathbf{e}_{12}$, o elemento $\bar{u} \in \mathcal{Cl}_2$ é então

$$\bar{u} = u_0 - u_1 \mathbf{e}_1 - u_2 \mathbf{e}_2 - u_{12} \mathbf{e}_{12}.$$

Verifiquemos que de fato nossa identificação está correta. Temos:

$$\begin{aligned} \bar{u} &\simeq (ad - bc) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 - u_1 & -u_2 - u_{12} \\ -u_2 + u_{12} & u_0 + u_1 \end{bmatrix} \\ &= u_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + u_1 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + u_{12} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &\simeq u_0 - u_1 \mathbf{e}_1 - u_2 \mathbf{e}_2 - u_{12} \mathbf{e}_{12}. \end{aligned}$$

A *reversão* e a *Clifford-conjugado* são anti-involuções (anti-automorfismos). Tais conceitos se definem como se segue.

Definição 15 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra e denote por $*$ o produto em $\mathcal{A}$. Uma aplicação bijetora:*

$$f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \quad (2.23)$$

tal que

$$f(a * b) = f(a) * f(b), \forall a, b \in \mathcal{A}, \quad (2.24)$$

é dita um automorfismo.

Uma aplicação bijetora

$$l : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \quad (2.25)$$

tal que

$$l(a * b) = l(b) * l(a), \forall a, b \in \mathcal{A}, \quad (2.26)$$

é dita um anti-automorfismo.

Definição 16 *Uma aplicação*

$$i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \quad (2.27)$$

é dito uma involução se, e somente se,

$$i^2(a) := i \circ i(a) = a, \forall a \in \mathcal{A} \quad (2.28)$$

Exercício 17 *Verifique que as operações $\hat{\cdot}$, $\tilde{\cdot}$, $\bar{\cdot}$ e $\hat{\cdot}^6$ são involuções e que $\hat{\cdot}$ é um automorfismo e que $\tilde{\cdot}$ e $\bar{\cdot}$ são antiautomorfismos.*

Solução: Dado $u = u_0 + u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_{12}\mathbf{e}_{12}$ temos:

- 1) $\hat{\cdot} : u \mapsto \hat{u} = u_0 - u_1\mathbf{e}_1 - u_2\mathbf{e}_2 + u_{12}\mathbf{e}_{12}$
- 2) $\sim : u \mapsto \tilde{u} = u_0 + u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 - u_{12}\mathbf{e}_{12}$
- 3) $- : u \mapsto \bar{u} = u_0 - u_1\mathbf{e}_1 - u_2\mathbf{e}_2 - u_{12}\mathbf{e}_{12}$

⁶ $\hat{u} = u_0 - u_1\mathbf{e}_1 - u_2\mathbf{e}_2 + u_{12}\mathbf{e}_{12}$ é chamada de *involução graduada*, a composição das operações entre a *involução graduada* e a *reversão*, nos fornece a *Clifford-conjugado*.

Mostraremos somente as propriedades de $\hat{\cdot}$. De fato, pela definição acima,

$$\begin{aligned}\hat{\cdot} \circ \hat{\cdot}(u) &= \hat{\cdot}(\hat{u}) = \hat{\cdot}(u_0 - u_1\mathbf{e}_1 - u_2\mathbf{e}_2 + u_{12}\mathbf{e}_{12}) \\ &= \hat{\cdot}(u_0) - \hat{\cdot}(u_1\mathbf{e}_1) - \hat{\cdot}(u_2\mathbf{e}_2) + \hat{\cdot}(u_{12}\mathbf{e}_{12}) \\ &= u_0 + u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_{12}\mathbf{e}_{12} = u,\end{aligned}$$

i.e., $\hat{u}$ é involução.

Mostramos agora que $\hat{\cdot}$ é um automorfismo. Seja $v = v_0 + v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_{12}\mathbf{e}_{12}$. Temos

$$\begin{aligned}\hat{\cdot}(uv) &= \hat{\cdot}[(u_0 + u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_{12}\mathbf{e}_{12})(v_0 + v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_{12}\mathbf{e}_{12})] \\ &= \hat{\cdot}(u_0v_0 + u_0v_1\mathbf{e}_1 + u_0v_2\mathbf{e}_2 + u_0v_{12}\mathbf{e}_{12} + u_1\mathbf{e}_1v_0 + u_1\mathbf{e}_1v_1\mathbf{e}_1 \\ &\quad + u_1\mathbf{e}_1v_2\mathbf{e}_2 + u_1\mathbf{e}_1v_{12}\mathbf{e}_{12} + u_2\mathbf{e}_2v_0 + u_2\mathbf{e}_2v_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2v_2\mathbf{e}_2 \\ &\quad + u_2\mathbf{e}_2v_{12}\mathbf{e}_{12} + u_{12}\mathbf{e}_{12}v_0 + u_{12}\mathbf{e}_{12}v_1\mathbf{e}_1 + u_{12}\mathbf{e}_{12}v_2\mathbf{e}_2 + u_{12}\mathbf{e}_{12}v_{12}\mathbf{e}_{12}) \\ &= (u_0v_0 + u_1v_1 + u_2v_2 - u_{12}v_{12}) \\ &\quad - (u_0v_1\mathbf{e}_1 + u_0v_2\mathbf{e}_2 + u_1\mathbf{e}_1v_0 + u_1v_{12}\mathbf{e}_2 + u_2\mathbf{e}_2v_0 - u_2v_{12}\mathbf{e}_1 \\ &\quad - u_{12}v_1\mathbf{e}_2 + u_{12}\mathbf{e}_1v_2) \\ &\quad + (u_0v_{12}\mathbf{e}_{12} + u_1\mathbf{e}_{12}v_2 + u_2\mathbf{e}_{21}v_1 + u_{12}\mathbf{e}_{12}v_0).\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}\hat{u}\hat{v} &= (u_0 - u_1\mathbf{e}_1 - u_2\mathbf{e}_2 + u_{12}\mathbf{e}_{12})(v_0 - v_1\mathbf{e}_1 - v_2\mathbf{e}_2 + v_{12}\mathbf{e}_{12}) \\ &= (u_0v_0 + u_1v_1 + u_2v_2 - u_{12}v_{12}) - (u_0v_1\mathbf{e}_1 + u_0v_2\mathbf{e}_2 + u_1\mathbf{e}_1v_0 + u_1v_{12}\mathbf{e}_2) \\ &\quad - (u_2\mathbf{e}_2v_0 - u_2v_{12}\mathbf{e}_1 - u_{12}v_1\mathbf{e}_2 + u_{12}\mathbf{e}_1v_2) \\ &\quad + (u_0v_{12}\mathbf{e}_{12} + u_1\mathbf{e}_{12}v_2 + u_2\mathbf{e}_{21}v_1 + u_{12}\mathbf{e}_{12}v_0)\end{aligned}$$

e provamos que

$$\hat{\cdot}(uv) = \hat{u}\hat{v}.$$

Da mesma forma, mostra-se que a reversão ($\sim$) e a Clifford-conjugado ($\overline{\cdot}$) são involuções, i.e.,

$$2) \quad \sim \circ \sim(u) = \widetilde{\widetilde{u}} = (u_0 + u_1e_1 + u_2e_2 - u_{12}e_{12}) = u_0 + u_1e_1 + u_2e_2 + u_{12}e_{12} = u,$$

$$3) \quad \circ(u) = \overline{\overline{u}} = \overline{(u_0 - u_1e_1 - u_2e_2 - u_{12}e_{12})} = u_0 + u_1e_1 + u_2e_2 + u_{12}e_{12} = u.$$

Exercício 18 Considere as quatro anti-involuções de $\text{Mat}(2, \mathbb{R})$ que aplicam

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

respectivamente em

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & -c \\ -b & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d & b \\ c & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Defina que dois anti-automorfismos α e β são semelhantes, se houver um automorfismo de entrelaçamento γ tal que, $\alpha\gamma = \gamma\beta$. Determine quais das quatro anti-involuções são semelhantes ou não.

Solução:

(i) Sabemos que $\mathcal{Cl}_2 \simeq \text{Mat}(2, \mathbb{R})$. No que segue indicaremos um elemento geral de $\mathcal{Cl}_2$ por u e o elemento correspondente em $\text{Mat}(2, \mathbb{R})$ por $\mathbf{U}$. Dado

$$u = u_0 + u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_{12}\mathbf{e}_{12} \quad (2.29)$$

o elemento $\tilde{u}$ obtido de u pela involução

$$\begin{aligned} \sim: u &\mapsto \tilde{u}, \\ \tilde{u} &= u_0 + u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 - u_{12}\mathbf{e}_{12} \end{aligned} \quad (2.30)$$

corresponde a matriz $\mathbf{U}^T$. Assim temos

$$\begin{aligned} u = u_0 + u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_{12}\mathbf{e}_{12} &\simeq \begin{pmatrix} u_0 + u_1 & u_2 + u_{12} \\ u_2 - u_{12} & u_0 - u_1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}, \\ \tilde{u} = u_0 + u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 - u_{12}\mathbf{e}_{12} &= \begin{pmatrix} u_0 + u_1 & u_2 - u_{12} \\ u_2 + u_{12} & u_0 - u_1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}^T \end{aligned} \quad (2.31)$$

Chame agora

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_0 + u_1 & u_2 + u_{12} \\ u_2 - u_{12} & u_0 - u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

(ii) Fica então óbvio que a matriz

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T = \mathbf{U}^T \quad (2.33)$$

(iii) Por outro lado a conjugação de Clifford

$$\begin{aligned} - : u &\mapsto \bar{u} \\ \bar{u} &= u_0 - u_1 \mathbf{e}_1 - u_2 \mathbf{e}_2 - u_{12} \mathbf{e}_{12} \end{aligned} \quad (2.34)$$

corresponde em $\text{Mat}(2, \mathbb{R})$ a matriz adjunta de $\mathbf{U}$ (denotada no que se segue por $\text{adj}\mathbf{U}$), i.e., usando-se as representações de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_{12}$ em $\text{Mat}(2, \mathbb{R})$ temos:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u_0 - u_1 \mathbf{e}_1 - u_2 \mathbf{e}_2 - u_{12} \mathbf{e}_{12} \\ &\simeq u_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - u_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - u_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - u_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_0 - u_1 & -u_2 - u_{12} \\ -u_2 + u_{12} & u_0 + u_1 \end{pmatrix} = \text{adj}\mathbf{U}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

e usando o segundo membro da Eq.(2.32) temos imediatamente que

$$\text{adj}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 - u_1 & -u_2 - u_{12} \\ -u_2 + u_{12} & u_0 + u_1 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

(iv) Chame agora α e β os operadores tais que

$$\begin{aligned} \alpha\mathbf{U} &= \mathbf{U}^T, \\ \beta\mathbf{U} &= \text{adj}\mathbf{U} \end{aligned} \quad (2.37)$$

O exercício pergunta : Será que existe um operador (dito *automorfismo de entrelaçamento*)

$$\gamma : \mathbf{U} \mapsto \mathbf{X}\mathbf{U}\mathbf{X}^{-1}, \quad (2.38)$$

com $\mathbf{X} \in \text{Mat}(2, \mathbb{R})$ tal que

$$\alpha\gamma\mathbf{U} \stackrel{?}{=} \gamma\beta\mathbf{U} \quad (2.39)$$

Se tal operador existir, uma vez que:

$$\begin{aligned} \alpha\gamma\mathbf{U} &= \alpha(\mathbf{X}\mathbf{U}\mathbf{X}^{-1}) = \mathbf{X}^{-1T}\mathbf{U}^T\mathbf{X}^T, \\ \gamma\beta\mathbf{U} &= \gamma(\text{adj}\mathbf{U}) = \mathbf{X}\text{adj}\mathbf{U}\mathbf{X}^{-1} \end{aligned} \quad (2.40)$$

devemos ter:

$$\mathbf{X}^{-1T}\mathbf{U}^T\mathbf{X}^T = \mathbf{X}\text{adj}\mathbf{U}\mathbf{X}^{-1} \quad (2.41)$$

(v) Escreva

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^T &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \\ \mathbf{X}^{-1} &= \frac{1}{\det \mathbf{X}} \begin{pmatrix} x_4 & -x_3 \\ -x_2 & x_1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{X}^{-1T} &= \frac{1}{\det \mathbf{X}} \begin{pmatrix} x_4 & -x_2 \\ -x_3 & x_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

e a Eq.(2.41) é portanto equivalente a:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} x_1x_4a - x_1x_2b + x_3x_4c - x_3x_2d & x_2x_4a - x_2^2b + x_4^2c - x_4x_2d \\ -(x_1x_3a - x_1^2b + x_3^2c - x_3x_1d) & -(x_2x_3a - x_1x_2b + x_3x_4c - x_4x_1d) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(x_2x_3a - x_1x_2b + x_3x_4c - x_4x_1d) & x_1x_3a - x_1^2b + x_3^2c - x_3x_1d \\ -(x_2x_4a - x_2^2b + x_4^2c - x_4x_2d) & x_1x_4a - x_1x_2b + x_3x_4c - x_3x_2d \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

ou seja:

$$\begin{cases} x_1x_4a - x_1x_2b + x_3x_4c - x_3x_2d = -(x_2x_3a - x_1x_2b + x_3x_4c - x_4x_1d) \\ x_2x_4a - x_2^2b + x_4^2c - x_4x_2d = x_1x_3a - x_1^2b + x_3^2c - x_3x_1d \\ -(x_1x_3a - x_1^2b + x_3^2c - x_3x_1d) = -(x_2x_4a - x_2^2b + x_4^2c - x_4x_2d) \\ -(x_2x_3a - x_1x_2b + x_3x_4c - x_4x_1d) = x_1x_4a - x_1x_2b + x_3x_4c - x_3x_2d \end{cases}$$

Como a, b, c, d são arbitrários devemos ter, por exemplo,

$$\begin{cases} x_1x_4 = -x_2x_3 \\ -x_1x_2 = +x_1x_2, \\ x_3x_4 = -x_3x_4 \\ x_3x_2 = x_1x_4 \end{cases}$$

Então $x_1x_2 = 0$ e $x_1x_4 = 0$ e $x_3x_2 = 0$. Suponhamos $x_2 = 0$. Resulta que podemos ter $x_1 \neq 0$ e $x_3 \neq 0$ mas $x_4 = 0$. Nestas condições a matriz $\mathbf{X}$ teria a forma

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

e não seria inversível e portanto o automorfismo γ não existiria.

Finalmente, procedendo exatamente como acima podemos mostrar (vide detalhes no Capítulo 1 de [12]), que se denotarmos

$$\alpha'\mathbf{U} = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}, \quad \beta'\mathbf{U} = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

então existe

$$\gamma'\mathbf{U} = \mathbf{X}\mathbf{U}\mathbf{X}^{-1} \quad (2.47)$$

com

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

tal que

$$\alpha'\gamma' = \gamma'\beta'. \quad (2.49)$$

Capítulo 3

Números Complexos

3.1 Preliminares

Em 1799 o agrimensor norueguês Caspar Wessel, publicou um artigo onde pela primeira vez os números complexos foram representados geometricamente. Sua meta não era apenas justificar o uso de números complexos mas também investigar como representar uma direção (no plano) analiticamente. Wessel também foi responsável pela criação do novo padrão de interpretação geométrica dos números complexos como entidades, que podem ser adicionadas, subtraídas, multiplicadas e divididas. Ele também buscou (sem sucesso) o desenvolvimento de um método que pudesse ser generalizado para o espaço tri-dimensional. Nesse mesmo período, Carl Friedrich Gauss também propôs (independentemente de Wessel) uma interpretação geométrica para os números complexos. Mais detalhes históricos podem ser encontrados em [4].

O conjunto dos números complexos se distingue do conjunto dos números reais pelo fato não trivial de conter entre seus elementos a raiz quadrada de -1 , chamada de unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$. Um número complexo z qualquer, pode ser representado como:

$$z = x + iy \tag{3.1}$$

onde $x, y \in \mathbb{R}$ e i satisfaz $i^2 = -1$. Os números reais x, y são chamados respectivamente, a *parte real* $x = \text{Re}(z)$ e *parte imaginária* $y = \text{Im}(z)$ de z . Para cada par ordenado de números reais (x, y) existe um único número complexo associado $x + iy$.

Um número complexo $x + iy$ pode ser representado graficamente como um ponto com coordenadas retangulares (x, y) . O plano (xy) , onde os complexos são representados, é chamado de *plano complexo* $\mathbb{C}$, e onde o eixo x é dito *eixo real* e o eixo y é dito *eixo imaginário*.

O oposto de um número complexo $z = x + iy$ é $-z = -x - iy$ e o seu complexo conjugado é $\bar{z} = x - iy$.

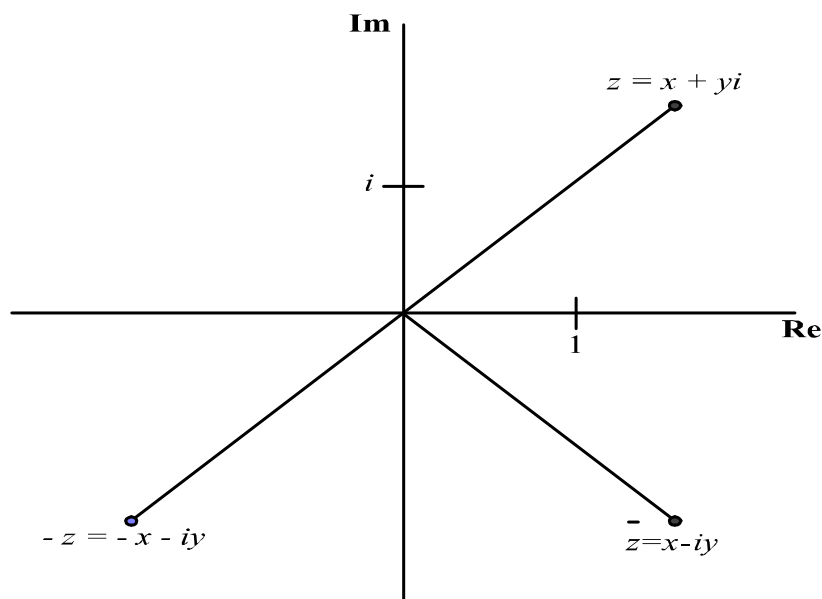


Figura 7

A soma de dois números complexos é calculada adicionando-se separadamente a parte real e a parte imaginária.

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \quad (3.2)$$

e portanto podemos escrever:

$$x = \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}; \quad y = \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \quad (3.3)$$

A lei dos paralelogramos para vetores, ilustra a adição de números complexos.

O *produto* de dois números complexos (denotado por justaposição de símbolos) é definido por:

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2) \quad (3.4)$$

O produto de um número complexo $z = x+iy$ por seu conjugado $\bar{z} = x-iy$ é um número real, $z\bar{z} = x^2 + y^2$. Para $z \neq 0$, seu inverso é dado por:

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} \quad (3.5)$$

ou, usando as ‘coordenadas’ de tais números,

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \quad (3.6)$$

Se introduzirmos as coordenadas polares r, θ no plano complexo, definindo $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, então o número complexo $z = x+iy$ pode ser escrito como

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad (3.7)$$

dito a *forma polar* de z . A distância $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ de z a 0 é denotada por $|z|$ e chamada de *norma* de z . Assim

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}. \quad (3.8)$$

O número real θ é chamado *argumento* de z , e só pode ser definido para $z \neq 0$.

Na multiplicação de dois números complexos $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$, usamos a regra da soma de dois arcos, para seno e cosseno, e chegamos a forma polar:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \quad (3.9)$$

onde o produto de dois números complexos é o número cuja a norma é o produto das normas dos fatores $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ e cujo argumento é a soma dos argumentos dos fatores (mod 2π).

3.1.1 Função Exponencial

A função exponencial é definida para qualquer $z \in \mathbb{C}$, por

$$\exp(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots + \frac{z^k}{k!} + \dots \quad (3.10)$$

Escrevemos também $e^z = \exp(z)$. A expansão em série de potências da função trigonométrica, resulta na *fórmula de Euler*

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (3.11)$$

que nos permite abreviar $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ como

$$z = re^{i\theta}. \quad (3.12)$$

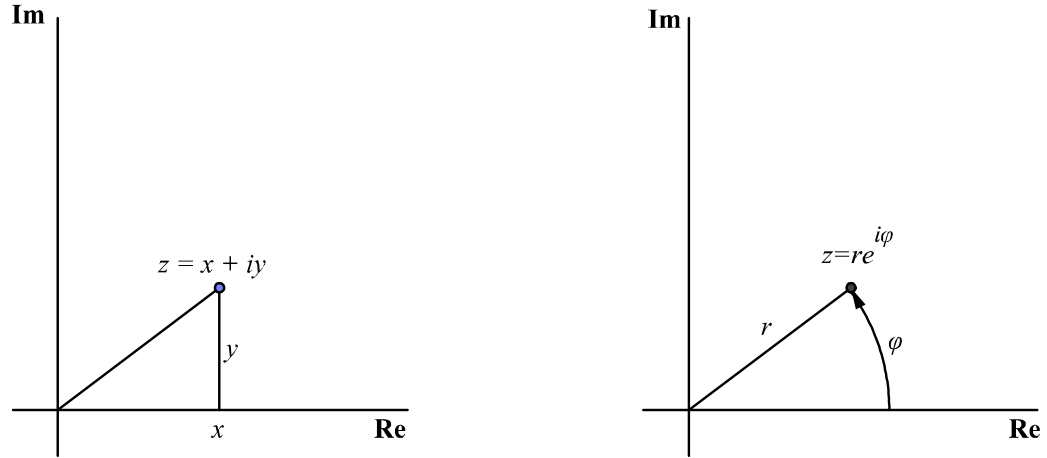


Figura 8

A forma exponencial da multiplicação é :

$$(r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = (r_1 r_2) e^{i(\theta_1 + \theta_2)}. \quad (3.13)$$

Potências e raízes são calculadas como:

$$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} \quad (3.14)$$

$$\sqrt[n]{re^{i\theta}} = \sqrt[n]{r} e^{i(\theta + 2\pi k)/n}, k \in \mathbb{Z}_n. \text{ ou } \quad (3.15)$$

$$\sqrt[n]{re^{i\theta}} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), k \in \mathbb{Z}_n \quad (3.16)$$

Exemplo 19 a) $(1 + i)^{-1} = \frac{1}{(1+i)} \frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{(1-i)}{2};$

b) $\sqrt{i}$. As raízes de $\sqrt{i}$ são obtidas como as soluções da equação $\sqrt{i} = z$.
Pondo

$$i = z^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

e utilizando-se o conceito de igualdade de complexos, temos imediatamente

$$\begin{aligned}
a^2 - b^2 &= 0 \Leftrightarrow a = b, \\
2ab &= 1 \Rightarrow 2a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
\sqrt{i} &= z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i).
\end{aligned}$$

3.2 O Corpo $\mathbb{C}$ e a Álgebra Real $\mathbb{C}$

Os números complexos são elementos de uma estrutura algébrica dita *corpo dos complexos* (Proposição 20). Na estrutura de corpo, seus elementos, ditos números podem ser adicionados e multiplicados. Se $\mathbb{F}$ é um corpo e $a, b, c \in \mathbb{F}$, os seguintes axiomas devem ser satisfeitos.

$$\begin{array}{ll}
a + b = b + a & \text{comutatividade da adição} \\
(a + b) + c = a + (b + c) & \text{associatividade para a adição} \\
a + 0 = a & \text{existência do elemento neutro para a adição} \\
a + (-a) = 0 & \text{existência do simétrico aditivo} \\
(a + b)c = ac + bc & \text{distributividade à direita} \\
a(b + c) = ab + ac & \text{distributividade à esquerda} \\
(ab)c = a(bc) & \text{associatividade para a multiplicação} \\
1a = a & \text{existência da unidade} \\
aa^{-1} = 1 & \text{existência de simétrico multiplicativo} \\
ab = ba & \text{comutatividade da multiplicação.}
\end{array}$$

Proposição 20 $\mathbb{C}$ é um corpo.

Prova: [7] A associatividade e a comutatividade da adição são óbvias. O elemento neutro da adição é $(0, 0)$, pois para todo $(a, b) \in \mathbb{C}$, tem-se

$$(a, b) + (0, 0) = (a, b)$$

O simétrico aditivo de (a, b) é $(-a, -b)$ pois,

$$(a, b) + (-a, -b) = (a - a, b - b) = (0, 0)$$

A associatividade, comutatividade da multiplicação e a distributividade da multiplicação com relação à adição são de verificação direta. A unidade da multiplicação é $(1, 0)$ pois para todo $(a, b) \in \mathbb{C}$

$$(1, 0)(a, b) = (a, b)$$

O simétrico multiplicativo de $0 \neq (a, b) \in \mathbb{C}$ é $(a, b)^{-1} = (\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2})$ pois

$$(a, b)(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}) = (1, 0). \blacksquare$$

3.2.1 $\mathbb{C}$ Contém Infinitos Subcorpos Isomorfos à $\mathbb{R}$

É tentador considerar $\mathbb{R}$ como um *único* subcorpo de $\mathbb{C}$. Porém, $\mathbb{C}$ contém *infinitos* subcorpos isomorfos a $\mathbb{R}$; escolher um, significa introduzir uma *estrutura linear real* particular sobre $\mathbb{C}$, obtida restringindo-se a no produto $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $(a, b) \mapsto ab$ como sendo um número real, i.e., $a \in \mathbb{R}$. Tal permite dotar o corpo $\mathbb{C}$ com uma estrutura de álgebra (que continuaremos denotando por $\mathbb{C}$). De fato recordemos que:

Definição 21 Uma álgebra A sobre um corpo $\mathbb{F}$ consiste de um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ (aqui $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) equipado com um produto¹, $\Omega : A \times A \rightarrow A$, $(a, b) \mapsto ab$,² que é bilinear.³

Para distinguir o corpo $\mathbb{C}$ da álgebra $\mathbb{C}$, vamos construir os complexos como o conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de todos os pares de números reais $z = (x, y)$ com adição e multiplicação definidas por

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (3.17)$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \quad (3.18)$$

O conjunto $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ munido com a adição e multiplicação definidas acima, constitui o corpo $\mathbb{C}$. A unidade imaginária $i = (0, 1)$ satisfaz

$$i^2 = (0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0) = -(1, 0) = -1.$$

¹Que denotaremos por justaposição de símbolos.

²Note que não supomos a associatividade.

³Dizer que o produto é bilinear, significa dizer que $\Omega(a, b) = ab$ é linear em cada uma das duas variáveis $a, b \in A$.

Visto que $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$ e $(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1x_2, 0)$, o corpo real $\mathbb{R}$ está *imerso* em $\mathbb{C}$ como um subcorpo por $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto (x, 0)$. A expressão $x \mapsto (x, 0)$ agora tem um significado muito mais preciso; operar em $\mathbb{C}$ com $(x, 0)$ conduz aos mesmos resultados que aplicar a mesma operação em $\mathbb{R}$, sobre a variável x .

Observação 22 *A visão geométrica dos números complexos está conectada com a estrutura de $\mathbb{C}$ como uma álgebra real, e não à estrutura de corpo de $\mathbb{C}$.*

A construção dos números complexos como acima introduzida, i.e., como um espaço linear real $\mathbb{R}^2$ dotado de um produto, possui mais estrutura do que apenas a estrutura de corpo: faz de $\mathbb{C}$ uma álgebra sobre $\mathbb{R}$.⁴ Frequentemente identificamos $\mathbb{R}$ com o subcorpo $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{C}$, e denotamos a base canônica de $\mathbb{R}^2$ por $1 = (1, 0)$, $i = (0, 1)$ em $\mathbb{C}$.

A aplicação $\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é um *automorfismo do corpo* $\mathbb{C}$ se preserva a adição e a multiplicação (de números complexos), i.e.,

$$\begin{aligned}\alpha(z_1 + z_2) &= \alpha(z_1) + \alpha(z_2), \\ \alpha(z_1 z_2) &= \alpha(z_1)\alpha(z_2), \\ \alpha(1) &= 1,\end{aligned}\tag{3.19}$$

Uma aplicação $\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é um *automorfismo da álgebra real* $\mathbb{C}$ se ela preserva a estrutura linear real e a multiplicação (de números complexos),

$$\alpha(z_1 + z_2) = \alpha(z_1) + \alpha(z_2),\tag{3.20}$$

$$\alpha(\lambda z) = \lambda \alpha(z), \lambda \in \mathbb{R},\tag{3.21}$$

$$\alpha(z_1 z_2) = \alpha(z_1)\alpha(z_2)\tag{3.22}$$

e ademais satisfaz:

$$\alpha(1) = 1.\tag{.38}$$

Observação 23 *O corpo $\mathbb{C}$ tem infinitos automorfismos. Em contrapartida, a álgebra real $\mathbb{C}$ tem como automorfismos apenas a identidade e a conjugação complexa.*

⁴Na construção acima, introduzimos uma estrutura de corpo no espaço linear real $\mathbb{R}^2$ e chegamos em uma álgebra $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$, ou equivalentemente a um corpo $\mathbb{C}$ com um subcorpo distinto $\mathbb{R}$.

Proposição 24 *A conjugação complexa é o único automorfismo do corpo $\mathbb{C}$, que é diferente da identidade, mas preserva um subcorpo fixo $\mathbb{R}$.*

Prova: Notamos primeiramente que, para algum automorfismo $\alpha : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\alpha(i)^2 = \alpha(i)\alpha(i) = \alpha(i^2) = \alpha(-1) = -1$ por (3.22) e (3.21) logo $\alpha(i) = \pm i$. Se α é um automorfismo tal que $\alpha(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, então $\alpha(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, porque o único automorfismo do corpo dos reais $\mathbb{R}$, é a identidade. Disso segue que, para todo $x + iy$ com $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(x + iy) = \alpha(x) + \alpha(i)\alpha(y) = x + \alpha(i)y$$

onde $\alpha(i) = \pm i$. O caso $\alpha(i) = i$ nos dá o automorfismo identidade, e o caso em que $\alpha(i) = -i$ nos dá a conjugação complexa. ■

Os demais automorfismos do corpo $\mathbb{C}$ enviam um subcorpo real $\mathbb{R}$ em uma cópia isomorfa de $\mathbb{R}$, que é necessariamente diferente do subcorpo original. No entanto, qualquer automorfismo do corpo $\mathbb{C}$ fixa pontos discretos no subcorpo $\mathbb{C} \supset \mathbb{Q}$ (os racionais) [12].

Nosso interesse no conjunto dos números complexos, no que se segue, vai se resumir ao estudo de $\mathbb{C}$ como *álgebra* e não como corpo. De fato veremos que $\mathbb{C}$ é uma particular álgebra de Clifford.

3.3 O Duplo-Anel ${}^2\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$

Há mais que um produto bilinear (ou estrutura de álgebra) interessante no espaço linear real $\mathbb{R}^2$. Por exemplo, a multiplicação definida por

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2) \quad (3.23)$$

resulta no duplo-anel ${}^2\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$. Os únicos automorfismos da álgebra real ${}^2\mathbb{R}$ são a identidade e a aplicação

$$\text{troc} : {}^2\mathbb{R} \rightarrow {}^2\mathbb{R}, (\lambda, \mu) \mapsto \text{troc}(\lambda, \mu) = (\mu, \lambda) \quad (3.24)$$

A aplicação troc atua como a conjugação complexa de $\mathbb{C}$, haja visto que

$$\text{troc}[a(1, 1) + b(1, -1)] = a(1, 1) - b(1, -1)$$

A unidade multiplicativa $1 = (1, 1)$ e o elemento refletido $j = (1, -1)$ estão relacionados por

$$j^2 = (1, -1)(1, -1) = (1 \cdot 1, -1 \cdot (-1)) = (1, 1) = 1.$$

Alternativamente e equivalentemente podemos considerar o par de números reais $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, ditos *números de Study*⁵ como

$$s = a + jb, \quad j^2 = 1, \quad j \neq 1 \quad (3.25)$$

Os *números de Study* possuem um *conjugado de Study* dado por

$$(a + jb)^- = a - jb,$$

e uma *norma de Lorentz*⁶, i.e.,

$$(a + jb)(a - jb) = a^2 - b^2.$$

Ademais, os *números de Study* possuem uma *forma polar hiperbólica* muito interessante. De fato, quando $a^2 - b^2 \geq 0$, podemos escrever

$$(a + jb) = \rho(\cosh \varkappa + j \sinh \varkappa).$$

Em um produto de *números de Study* a *norma de Lorentz* é preservada, e os ângulos hiperbólicos são adicionados. Finalmente mencionamos que podemos mostrar sem grandes dificuldades que os *números de Study* possuem a seguinte representação matricial:

$$a + jb \simeq \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

De fato, seja $c + jd$ um *número de Study*, realizando o produto

$$(a + jb)(c + jd) = (ac + bd) + j(ad + bc)$$

e escrevendo na forma matricial, temos:

$$\begin{pmatrix} ac + bd \\ ad + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

⁵Eduard Study (1862-1930), foi um matemático alemão conhecido por trabalhar em *teoria invariante das formas ternárias* e no estudo de *trigonometria esférica*. Também produziu diversas contribuições para a compreensão do *espaço geométrico* e de *números hipercomplexos*.

⁶Hendrik Lorentz (1853-1928), foi um físico holandês que compartilhou em 1902 o prêmio Nobel de física com Pieter Zeeman. Descobriu uma aproximação em segunda ordem de um conjunto de transformações para as coordenadas de espaço e tempo, que posteriormente foram utilizadas por Henri Poincaré (que as denominou, transformações de Lorentz) e também por Albert Einstein para a formulação da teoria da relatividade especial.

Exercício 25 *Dois automorfismos α, β de uma álgebra, são semelhantes se existe um automorfismo de entrelaçamento γ , tal que $\alpha\gamma = \gamma\beta$. O automorfismo identidade é semelhante apenas a ele mesmo.*

a) *Mostre que as duas involuções da álgebra real $\mathbb{C}$ não são semelhantes, e que as duas involuções da álgebra real ${}^2\mathbb{R}$ também não são semelhantes.*

b) *Mostre que as duas involuções $\alpha(\lambda, \mu) = (\mu, \lambda)$ e $\beta(\lambda, \mu) = (\bar{\mu}, \bar{\lambda})$ são involuções semelhantes na álgebra real ou na álgebra complexa ${}^2\mathbb{C}$ (isto é, encontre um automorfismo de entrelaçamento γ de ${}^2\mathbb{C}$ tal que $\alpha\gamma = \gamma\beta$).*

Solução: Parte a)

(i) Sejam α, β os automorfismos da álgebra real $\mathbb{C}$, tais que, para qualquer $z \in \mathbb{C}; z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e não nulos, temos:

$$\begin{aligned}\alpha &: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \alpha(z) = z \\ \beta &: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \alpha(z) = \bar{z}\end{aligned}$$

Agora, α, β são involuções, pois

$$\alpha \circ \alpha(z) = \alpha(\alpha(z)) = \alpha(z) = z,$$

e

$$\beta \circ \beta(z) = \beta(\beta(z)) = \beta(\bar{z}) = z.$$

Queremos mostrar que α, β não são semelhantes. Suponhamos, por contradição, que sejam, isto é, que exista um automorfismo de entrelaçamento γ , tal que $(\alpha\gamma)(z) = (\gamma\beta)(z)$. Neste caso devemos ter:

$$\begin{aligned}\alpha(z)\gamma(z) &= \gamma(z)\beta(z), \\ z\gamma(z) &= \gamma(z)\bar{z}.\end{aligned}$$

e como $\gamma(z) \neq 0$ então $z = \bar{z}$, que é um absurdo.

(ii) Da mesma forma, mostraremos que as duas involuções da álgebra real ${}^2\mathbb{R}$ não são semelhantes.

Os automorfismos de ${}^2\mathbb{R}$, são involuções

$$\begin{aligned}I &: {}^2\mathbb{R} \longrightarrow {}^2\mathbb{R}, (\lambda, \mu) \mapsto (\lambda, \mu), \\ \text{troc} &: {}^2\mathbb{R} \longrightarrow {}^2\mathbb{R}, (\lambda, \mu) \mapsto (\mu, \lambda).\end{aligned}$$

De fato:

$$\begin{aligned}\text{troc} \circ \text{troc}(\lambda, \mu) &= \text{troc}(\text{troc}(\lambda, \mu)) \\ &= \text{troc}((\mu, \lambda)) = (\lambda, \mu),\end{aligned}$$

i.e., troc é involução assim como I .

Suponhamos agora, por contradição que I e troc são semelhantes, ou seja, existe um automorfismo de entrelaçamento γ , tal que

$$\begin{aligned} I\gamma(\lambda, \mu) &= \gamma\text{troc}(\lambda, \mu) \rightarrow \\ I(\lambda, \mu)\gamma(\lambda, \mu) &= \gamma(\lambda, \mu)\text{troc}(\lambda, \mu) \rightarrow \\ (\lambda, \mu)\gamma(\lambda, \mu) &= \gamma(\lambda, \mu)(\mu, \lambda), \end{aligned}$$

se tomarmos $\gamma(\lambda, \mu) = (a, b)$, vem que $(\lambda, \mu)(a, b) = (a, b)(\mu, \lambda)$ logo $\lambda = \mu$, então $\text{troc} = I$, absurdo.

Parte b)

Seja $\gamma(\lambda, \mu) = (\bar{\lambda}, \mu)$, temos que γ é um automorfismo, pois

$$\begin{aligned} \gamma[(\lambda, \mu) + (\eta, \varepsilon)] &= \gamma(\lambda + \eta, \mu + \varepsilon) = (\overline{\lambda + \eta}, \mu + \varepsilon) = (\bar{\lambda} + \bar{\eta}, \mu + \varepsilon) = (\bar{\lambda}, \mu) + (\bar{\eta}, \varepsilon) \\ &= \gamma(\lambda, \mu) + \gamma(\eta, \varepsilon), \\ \gamma[(\lambda, \mu)(\eta, \varepsilon)] &= \gamma(\lambda\eta, \mu\varepsilon) = (\overline{\lambda\eta}, \mu\varepsilon) = (\bar{\lambda}\bar{\eta}, \mu\varepsilon) = (\bar{\lambda}, \mu) \cdot (\bar{\eta}, \varepsilon) = \gamma(\lambda, \mu)\gamma(\eta, \varepsilon), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \alpha\gamma(\lambda, \mu) &= \alpha(\gamma(\lambda, \mu)) = \alpha(\bar{\lambda}, \mu) = (\mu, \bar{\lambda}) \\ \gamma\beta(\lambda, \mu) &= \gamma(\beta(\lambda, \mu)) = \gamma(\bar{\mu}, \bar{\lambda}) = (\mu, \bar{\lambda}) \end{aligned}$$

conclui-se que $\alpha\gamma(\lambda, \mu) = \gamma\beta(\lambda, \mu)$.

Proposição 26 *Uma álgebra real bidimensional com unidade 1 é comutativa e associativa.*

Prova: Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra bidimensional com unidade **1**. A álgebra $\mathcal{A}$ é também um espaço vetorial *bidimensional*. Seja $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ e escreva

$$\mathbf{x} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Então a hipótese diz que existe **1** $\in \mathcal{A}$ tal que

$$\mathbf{1}\mathbf{x} = \mathbf{x}\mathbf{1} = \mathbf{x}, \quad (3.27)$$

$$\mathbf{1}\mathbf{1} = \mathbf{1}. \quad (3.28)$$

Escreva

$$\mathbf{1} = l\mathbf{e}_1 + s\mathbf{e}_2, \quad l, s \in \mathbb{R} \quad (3.29)$$

Então

$$\begin{aligned} (l\mathbf{e}_1 + s\mathbf{e}_2)(l\mathbf{e}_1 + s\mathbf{e}_2) &= l^2\mathbf{e}_1^2 + s^2\mathbf{e}_2^2 + ls(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) \\ &= l\mathbf{e}_1 + s\mathbf{e}_2, \end{aligned} \quad (3.30)$$

o que implica que devemos ter:

$$\begin{aligned} l^2 &= l, \quad s^2 = s, \\ \mathbf{e}_1^2 &= \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = 0, \end{aligned} \quad (3.31)$$

ou

$$\begin{aligned} l^2 &= l, \quad s = 0, \\ \mathbf{e}_1^2 &= \mathbf{e}_1, \quad \text{e } \mathbf{e}_2^2 \text{ indeterminado.} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Consideremos a escolha dada pela Eq.(3.31). Também devemos ter:

$$(l\mathbf{e}_1 + s\mathbf{e}_2)(a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2) = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2, \quad (3.33)$$

o que implica que

$$\begin{aligned} (l\mathbf{e}_1 + s\mathbf{e}_2)(a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2) &= la\mathbf{e}_1^2 + lb\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + sa\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + sb\mathbf{e}_2^2 \\ &= la\mathbf{e}_1 + (lb - sa)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + sb\mathbf{e}_2 \\ &= a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Note que como a, b são reais arbitrários não podemos ter

$$l = 1, \quad s = 1, \quad lb - sa = 0,$$

pois tal implicaria que $a = b$. Assim devemos escolher, por exemplo:

$$l = 1, \quad s = 0, \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2, \quad (3.35)$$

i.e., temos a identificação

$$\mathbf{1} = \mathbf{e}_1. \quad (3.36)$$

Portanto, chamando $\mathbf{e}_2 = \mathbf{a}$, temos que um elemento arbitrário $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ tem a forma

$$\mathbf{x} = x\mathbf{1} + y\mathbf{a}, \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (3.37)$$

Fica portanto trivial verificar que dados $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{A}$ temos

$$\begin{aligned} \mathbf{xy} &= \mathbf{yx}, \\ \mathbf{x(yz)} &= (\mathbf{xy})\mathbf{z}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

i.e., $\mathcal{A}$ é uma álgebra comutativa e associativa. ■

Proposição 27 *Uma álgebra real bidimensional com unidade 1 e sem divisores de zero ($ab = 0$ implica $a = 0$ ou $b = 0$) é isomorfa a $\mathbb{C}$.*

Prova: Uma álgebra $\mathcal{A}$ não possui divisores de 0 se dados $x, y \in \mathcal{A}$

$$xy = 0, \Rightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0. \quad (3.39)$$

Da proposição anterior temos que se $\mathcal{A}$ é bidimensional com unidade então $u \in \mathcal{A}$ pode ser escrito como

$$u = u_1\mathbf{1} + u_2\mathbf{a}, \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}. \quad (3.40)$$

Calculemos $u\bar{u}$ onde $\bar{u} = u_1\mathbf{1} - u_2\mathbf{a}$. Temos,

$$\begin{aligned} u\bar{u} &= (u_1\mathbf{1} + u_2\mathbf{a})(u_1\mathbf{1} - u_2\mathbf{a}) \\ &= u_1^2 - u_2^2\mathbf{a}^2. \end{aligned}$$

Suponhamos agora que $u\bar{u} = 0$. Se $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a}$ (a escolha da Eq.(3.31) temos, como deve ser) $u_1, u_2 = 0$, mas neste caso a álgebra $\mathcal{A}$ possui divisores de zero. De fato seja $u = u_2\mathbf{a}$ e $v = v_1\mathbf{1} - v_1\mathbf{a}$ com $u_2 \neq 0$ e $v_1 \neq 0$. Temos imediatamente

$$\begin{aligned} uv &= u_2\mathbf{a}(v_1\mathbf{1} - v_1\mathbf{a}) = u_2v_1\mathbf{a} - u_2v_1\mathbf{a}^2 \\ &= u_2v_1\mathbf{a} - u_2v_1\mathbf{a} = 0. \end{aligned}$$

Portanto devemos nos restringir a escolha fornecida pela Eq.(3.32) onde o valor de $\mathbf{a}^2$ fica indeterminado. Se

$$\mathbf{a}^2 = +1 \quad (3.41)$$

temos

$$0 = u\bar{u} = u_1^2 - u_2^2, \quad (3.42)$$

e $\mathcal{A}$ teria divisores de zero, o que é contra a hipótese da proposição. Assim devemos ter:

$$\mathbf{a}^2 = -1 \quad (3.43)$$

para que resulte $u_1, u_2 = 0$ e neste caso $\mathcal{A} \simeq \mathbb{C}$. ■

3.4 Representação dos Elementos de $\mathbb{C}$ em $\text{Mat}(2, \mathbb{R})$

Os números complexos foram introduzidos como pares ordenados de números reais (x, y) satisfazendo axiomas precisos. Assim podemos substituir

$$z = a + bi \text{ em } \mathbb{C} \text{ por } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ em } \mathbb{R}^2,$$

construindo explicitamente uma estrutura linear real em $\mathbb{C}$. O produto de dois números complexos $c = a + bi$ e z ,

$$cz = ax - by + i(bx + ay)$$

pode ser substituído por

$$\begin{bmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A fórmula acima nos sugere imediatamente considerar a representação dos complexos pelas matrizes de $\text{Mat}(2, \mathbb{R})$. Temos⁷:

$$\mathbb{C} \rightarrow \text{Mat}(2, \mathbb{R}), \quad a + bi \mapsto \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

A unidade multiplicativa 1 e a unidade imaginária i em $\mathbb{C}$ são representadas pelas matrizes

$$1 \mapsto \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i \mapsto \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

⁷Na representação matricial, o complexo conjugado de um número complexo torna-se a transposta da matriz e a norma ao quadrado torna-se o determinante. A norma é preservada sob transformações semelhantes, mas a ‘transposição = conjugado complexo’ só é preservada por matrizes semelhantes ortogonais.

3.5. $\mathbb{C}$ COMO A SUBÁLGEBRA PAR DA ÁLGEBRA DE CLIFFORD $\mathcal{Cl}_2$ 47

No entanto, esta não é a única representação linear de $\mathbb{C}$ em $\text{Mat}(2, \mathbb{R})$. Uma transformação de semelhança gerada por uma matriz inversível U , $\det U \neq 0$, envia o representante da unidade imaginária $\mathbf{J}$ em um outra ‘unidade imaginária’

$$\mathbf{J}' = U\mathbf{J}U^{-1}$$

em $\text{Mat}(2, \mathbb{R})$.

Exemplo 28 Escolhendo $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, temos que:

$$\mathbf{J}' = U\mathbf{J}U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

e a representação de $(x + iy)$ fica

$$x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} x + y & -2y \\ y & x - y \end{bmatrix}.$$

3.5 $\mathbb{C}$ como a Subálgebra Par da Álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_2$

3.5.1 Interpretação Geométrica de $i = \sqrt{-1}$

No restante deste capítulo, vamos interpretar os números complexos, como elementos da álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_2$ associada ao espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ equipado com o produto escalar euclidiano. Tal interpretação, como veremos fornece à unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$, vários significados. Veremos que i representa:

- i) a unidade de área orientada no plano $\mathbb{R}^2$.
- ii) um quarto de volta no plano $\mathbb{R}^2$, i.e., i é o gerador de rotações no plano.

Já introduzimos anteriormente em $\mathbb{R}^2$ a forma quadrática

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 \mapsto |\mathbf{r}|^2 = x^2 + y^2 \quad \text{ou} \quad |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.45)$$

Introduzimos também um produto de vetores associativo, tal que

$$\mathbf{r}^2 = |\mathbf{r}|^2,$$

ou

$$\begin{aligned}
 (xe_1 + ye_2)^2 &= (xe_1 + ye_2)(xe_1 + ye_2) \\
 &= x^2e_1^2 + y^2e_2^2 + xy e_1e_2 + yx e_2e_1 \\
 &= x^2 + y^2
 \end{aligned}$$

Usando a distributividade deste resultado no critério multiplicativo temos:

$$e_1^2 = e_2^2 = 1, \quad e_1e_2 = -e_2e_1,$$

e portanto e_1e_2 precisa satisfazer

$$(e_1e_2)^2 = -1,$$

o que significa, como já observamos anteriormente, que e_1e_2 não pode ser nem escalar e nem um vetor. Ele é um exemplo de *bivetor*, o *bivetor unitário* que denotamos acima por $e_{12} = e_1e_2$.

A álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_2$, é como já vimos, uma álgebra real de dimensão quatro, cujo espaço vetorial real associado possui como uma de suas bases $\{1, e_1, e_2, e_{12}\}$. Os elementos da base, obedecem a tábua de multiplicação

	e_1	e_2	e_{12}
e_1	1	e_{12}	e_2
e_2	$-e_{12}$	1	$-e_1$
e_{12}	$-e_2$	e_1	-1

Os elementos dessa base pertencem aos seguintes subespaços:

$$\begin{array}{lll}
 1 & \bigwedge^0 \mathbb{R} = \mathbb{R} & \text{escalar ou 0-vetor} \\
 e_1, e_2 & \bigwedge^1 \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 & \text{vetor ou 1-vetor} \\
 e_{12} & \bigwedge^2 \mathbb{R}^2 & \text{bivetor ou 2-vetor}
 \end{array}$$

Assim, a álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_2$ contém cópias de $\mathbb{R}$ e de $\mathbb{R}^2$, sendo a soma direta desses subespaços para os elementos de graduações 0, 1, 2, i.e.:

$$\mathcal{Cl}_2 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2 \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^2 \quad (3.46)$$

A álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_2$, também pode ser escrita como:

$$\mathcal{Cl}_2 = \mathcal{Cl}_2^+ \oplus \mathcal{Cl}_2^-$$

onde

$$\begin{aligned} \text{Parte par } \mathcal{C}\ell_2^+ &= \mathbb{R} \oplus \wedge^2 \mathbb{R}^2, \\ \text{Parte ímpar } \mathcal{C}\ell_2^- &= \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

A parte par não é apenas um subespaço, é também uma subálgebra⁸. Ela consiste de elementos da forma $x + y\mathbf{e}_{12}$ onde $x, y \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{e}_{12}^2 = -1$. O produto de Clifford entre dois elementos quaisquer de $\mathcal{C}\ell_2^+$ fornece

$$(x_1 + y_1\mathbf{e}_{12})(x_2 + y_2\mathbf{e}_{12}) = \underbrace{(x_1x_2 - y_1y_2)}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(x_1y_2 + x_2y_1)\mathbf{e}_{12}}_{\in \wedge^2 \mathbb{R}^2} \in \mathbb{R} \oplus \wedge^2 \mathbb{R}^2,$$

isto é $\mathcal{C}\ell_2^+$ é fechada em relação ao produto de Clifford de $\mathcal{C}\ell_2$. A subálgebra par é isomorfa a $\mathbb{C}$. O bivector unitário $\mathbf{e}_{12}$ é associado a $\mathbf{i}$ que é a raiz quadrada de -1 , e assim identificamos $\mathbf{i}$ com $\mathbf{e}_{12}$, mas para evitar qualquer confusão escreveremos oportunamente

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_{12}.$$

Deve-se notar que a ‘unidade imaginária’ $\mathbf{i} = \mathbf{e}_{12}$ anti-comuta com $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$, ou seja $\mathbf{e}_{12}$ anti-comuta com todos os vetores do plano $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ ⁹:

$$\mathbf{r}\mathbf{e}_{12} = -\mathbf{e}_{12}\mathbf{r} \text{ para } \mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 \text{ e } \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_{12}$$

3.6 Unidade Imaginária = A Unidade Bivector

Multiplicando o vetor $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ pelo bivector unitário $\mathbf{e}_{12}$, obtemos um outro vetor $\mathbf{r}\mathbf{e}_{12} = x\mathbf{e}_2 - y\mathbf{e}_1$ que é perpendicular a $\mathbf{r}$. A função $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}\mathbf{e}_{12}$ é uma rotação à esquerda, e o efeito de duas rotações à esquerda $[\mathbf{e}_{12}\mathbf{e}_{12}]$ é a direção oposta $[-1]$. A demonstração de que $\mathbf{e}_{12}^2 = -1$ é apenas um versão aritmética do fato geométrico óbvio que a soma de dois ângulos retos, $\pi + \pi$, é um ângulo raso, 2π . No plano $\mathbb{R}^2$ o sentido da rotação depende por qual lado do vetor $\mathbf{r}$ é multiplicado por $\mathbf{e}_{12}$. Assim, a rotação

$$\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}\mathbf{e}_{12} = -y\mathbf{e}_1 + x\mathbf{e}_2,$$

⁸Por outro lado $\mathcal{C}\ell_2^-$ não é uma subálgebra pois não é fechada para o produto, ao tomarmos dois elementos quaisquer $\mathcal{C}\ell_2^-$, no caso vetores, o produto deles nos dá um escalar que não é um elemento de $\mathcal{C}\ell_2^-$.

⁹Em um espaço linear complexo, ou em uma álgebra complexa, onde os escalares são números complexos, a unidade imaginária comuta com todos os vetores, i.e., $i\mathbf{r} = \mathbf{r}i$.

é no sentido anti-horário, e a rotação

$$\mathbf{r} \mapsto \mathbf{e}_{12}\mathbf{r} = y\mathbf{e}_1 - x\mathbf{e}_2,$$

é no sentido horário.

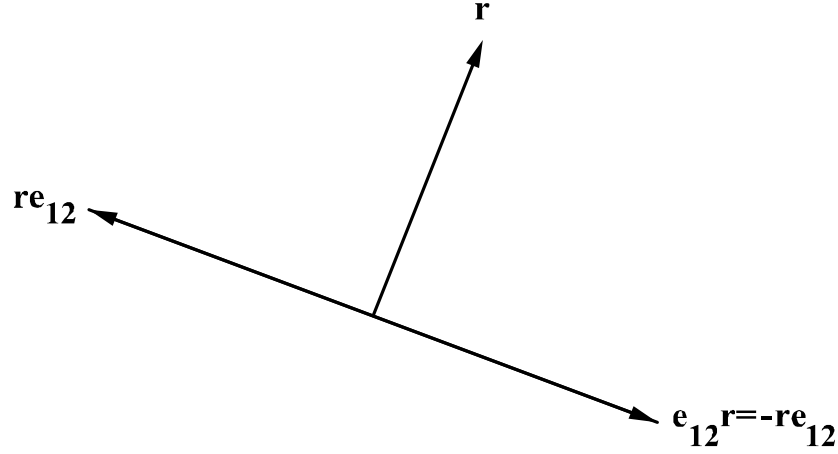


Figura 9

No plano complexo $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^2$, ambas as rotações que aplicam $z = x + y\mathbf{e}_{12}$ em $\mathbf{e}_{12}z$ e $z\mathbf{e}_{12}$ estão no sentido anti-horário. Multiplicando um número complexo $z = x + y\mathbf{e}_{12}$ pelo bivector unitário $\mathbf{e}_{12}$, resulta num giro à esquerda, $z\mathbf{e}_{12} = -y + x\mathbf{e}_{12}$, e o efeito de dois giros à esquerda $[\mathbf{e}_{12}\mathbf{e}_{12}] = [-1]$ é a direção oposta, que é uma meia volta no plano complexo $\mathbb{C}$:

$$\begin{array}{ccc} -z = z\mathbf{e}_{12}^2 & \longleftarrow & z\mathbf{e}_{12} \\ & & \uparrow \\ & \longrightarrow & z \end{array}$$

A raiz quadrada de -1 tem significados geométricos distintos em $\mathbb{R}^2$: ela é o gerador de rotações, $\mathbf{i} = \mathbf{e}_{12} \in \mathcal{Cl}_2^+$, e ela representa a unidade de área orientada no plano $\mathbf{e}_{12} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^2 \subset \mathcal{Cl}_2$.

Em conclusão, mostramos que um número complexo $z = x + iy$ pode ser identificado com $z = x + y\mathbf{e}_{12} \in \mathbb{R} \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^2$, i.e., a soma de um número real $x = \text{Re}(z)$ e um bivector $y\mathbf{e}_{12} = \mathbf{e}_{12} \text{Im}(z)$.

Exercício 29 Uma rotação é chamada racional se ela envia um vetor com coordenadas racionais em outro vetor com coordenadas racionais. Determine todas as rotações racionais de $\mathbb{R}^2$.

Solução: Seja $R \in SO(2)$ ¹⁰. Então

$$R = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

Considere a seguinte parametrização:

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} \\ \sin \varphi = \frac{2pq}{p^2 + q^2} \end{cases} \quad (3.48)$$

que permite escrever $R \in SO(2)$ na forma

$$R = \frac{1}{p^2 + q^2} \begin{pmatrix} p^2 - q^2 & -2pq \\ 2pq & p^2 - q^2 \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Agora, se levarmos em conta que devemos ter $\det R = 1$, vemos que é necessário termos

$$(p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 = (p^2 + q^2)^2. \quad (3.50)$$

Naturalmente se $p, q \in \mathbb{Z}$ a matriz R transforma um “vetor” $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ com $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ em

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} = R\mathbf{X} &= \frac{1}{p^2 + q^2} \begin{pmatrix} p^2 - q^2 & -2pq \\ 2pq & p^2 - q^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{p^2 + q^2} \begin{pmatrix} (p^2 - q^2)r_1 - 2pqr_2 \\ 2pqr_1 + (p^2 - q^2)r_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

que também possui coordenadas racionais uma vez que :

$$\begin{cases} \frac{(p^2 - q^2)r_1 - 2pqr_2}{p^2 + q^2} \in \mathbb{Q}, \\ \frac{2pqr_1 + (p^2 - q^2)r_2}{p^2 + q^2} \in \mathbb{Q}. \end{cases} \quad (3.52)$$

Assim a resposta ao problema é que as rotações racionais ocorrem para todos os ângulos $\varphi = \arccos \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}$ tais que os inteiros p e q satisfazem a Eq.(3.50), i.e., $(p^2 - q^2), (2pq)$ e $(p^2 + q^2)$ formam uma *tripla pitagórica*.

¹⁰ $SO(2) = \{R \in \text{Mat}(2, \mathbb{R}) \mid R^T R = I, \det R = 1\}$

3.7 Sobre as Partes Par e Ímpar de $\mathcal{C}\ell_2$

A álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_2$ de $\mathbb{R}^2$ contém tanto o plano complexo $\mathbb{C}$ quanto o plano vetorial $\mathbb{R}^2$, de modo que:

$\mathbb{R}^2$ é gerado por $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$,

$\mathbb{C}$ é gerado por 1 e $\mathbf{e}_{12}$.

O único ponto em comum nos dois planos é o zero 0. Os dois planos são ambas partes da mesma álgebra $\mathcal{C}\ell_2$. O plano vetorial $\mathbb{R}^2$ e o corpo dos complexos $\mathbb{C}$ são incorporados como subestruturas separadas na álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_2 = \mathcal{C}\ell_2^+ \oplus \mathcal{C}\ell_2^-$, de modo que o plano complexo $\mathbb{C}$ é a *parte par* $\mathcal{C}\ell_2^+$ e o plano vetorial $\mathbb{R}^2$ é a *parte ímpar* $\mathcal{C}\ell_2^-$.

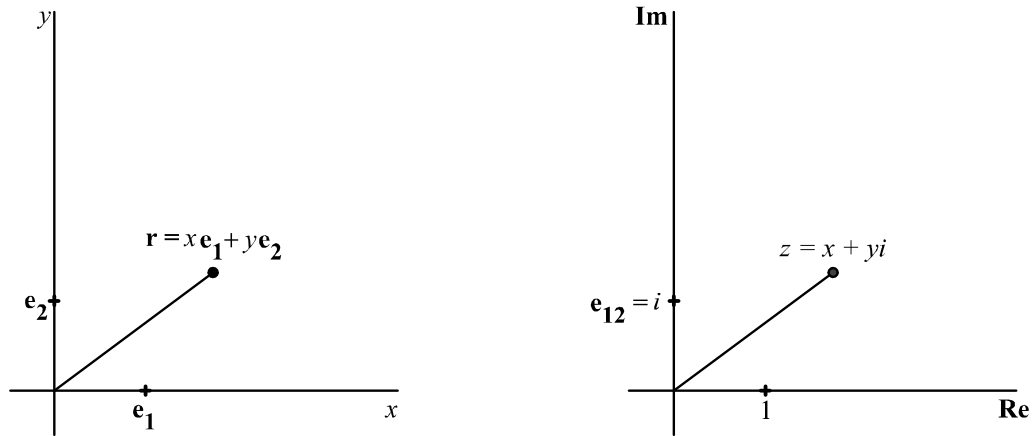


Figura 10

Os nomes *par* e *ímpar* (como já sabemos) significam que os elementos são produtos de um número par ou ímpar de vetores. As considerações acima sobre a paridade, mostram que:

- (i) número complexo vezes número complexo é um número complexo,
- (ii) vetor vezes número complexo é um vetor,
- (iii) número complexo vezes vetor é um vetor,
- (iv) vetor vezes um vetor é um número complexo.

Essas observações são convenientemente expressas pelas inclusões:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Cl}_2^+ \mathcal{Cl}_2^+ &\subset \mathcal{Cl}_2^+, & (3.53) \\
\mathcal{Cl}_2^- \mathcal{Cl}_2^+ &\subset \mathcal{Cl}_2^-, \\
\mathcal{Cl}_2^+ \mathcal{Cl}_2^- &\subset \mathcal{Cl}_2^-, \\
\mathcal{Cl}_2^- \mathcal{Cl}_2^- &\subset \mathcal{Cl}_2^+.
\end{aligned}$$

Alguns autores também usam a notação $\mathcal{Cl}_2^0 = (\mathcal{Cl}_2)_0 = \mathcal{Cl}_2^+$ e $(\mathcal{Cl}_2)_1 = \mathcal{Cl}_2^-$, que permite que se escreva: $(\mathcal{Cl}_2)_j (\mathcal{Cl}_2)_k \subset (\mathcal{Cl}_2)_{j+k}$ onde j, k são adicionados módulo 2. Essas observações são expressas assim, por que sabemos que a álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_2$ tem *graduação par-ímpar* ou que é ¹¹ $\mathbb{Z}_2$ -graduada ¹².

3.8 Involução e Norma

A álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_2$ possui três involuções semelhantes a conjugação complexa em $\mathbb{C}$. Para um elemento $u = \langle u \rangle_0 + \langle u \rangle_1 + \langle u \rangle_2 \in \mathcal{Cl}_2$, $\langle u \rangle_k \in \bigwedge^k \mathbb{R}^2$. Definimos:

$$\text{Involução graduada} \quad \hat{u} = \langle u \rangle_0 - \langle u \rangle_1 + \langle u \rangle_2, \quad (3.54)$$

$$\text{Reversão} \quad \tilde{u} = \langle u \rangle_0 + \langle u \rangle_1 - \langle u \rangle_2, \quad (3.55)$$

$$\text{Clifford-conjugado} \quad \bar{u} = \langle u \rangle_0 - \langle u \rangle_1 - \langle u \rangle_2. \quad (3.56)$$

A involução graduada é um automorfismo, $\widehat{\widehat{u}v} = \widehat{u}\widehat{v}$, enquanto a reversão e a Clifford-conjugado são anti-automorfismos, $\widetilde{\widetilde{u}v} = \widetilde{v}\widetilde{u}$, $\overline{\overline{u}v} = \overline{v}\overline{u}$. Ver exercício (17)

Para um número complexo $z = x + ye_{12}$ a conjugação complexa $z \mapsto \bar{z} = x - ye_{12}$ é uma restrição da *Clifford-conjugado* $u \mapsto \bar{u}$ em $\mathcal{Cl}_2$ e também da *reversão* $u \mapsto \tilde{u}$ em $\mathcal{Cl}_2$. Do mesmo modo, a norma $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ em $\mathbb{C}$, obtida da raiz quadrada de $z\bar{z} = x^2 + y^2$ é a restrição da norma $|u| = \sqrt{\langle u\tilde{u} \rangle_0}$ em $\mathcal{Cl}_2$.

Já notamos que os números complexos podem ser identificados com os elementos pares de $\mathcal{Cl}_2$, isto é, elementos (não homogêneos) pertencentes à

¹¹ $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$.

¹²A álgebra $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ com parte par $\mathbb{R} = \text{Re}(\mathbb{C})$ e a par ímpar $i\mathbb{R} = i\text{Im}(\mathbb{C})$ é $\mathbb{Z}_2$ -graduada.

$\bigwedge^0 \mathbb{R}^2 + \bigwedge^2 \mathbb{R}$. Os elementos pares de $\mathcal{C}\ell_2$ definem uma subálgebra de Clifford que como já dissemos se denota por $\mathcal{C}\ell_2^0$. Esta álgebra é isomorfa como álgebra à álgebra $\mathbb{C}$, e escrevemos

$$\mathcal{C}\ell_2^0 \simeq \mathbb{C}.$$

Seja

$$z = x + y\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = x + y\mathbf{e}_{12} \in \mathcal{C}\ell_2^0 \simeq \mathbb{C}. \quad (3.57)$$

Temos:

$$\bar{z} = x - y\mathbf{e}_{12}. \quad (3.58)$$

Assim,

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (x + y\mathbf{e}_{12})(x - y\mathbf{e}_{12}) \\ &= x^2 - xy\mathbf{e}_{12} + xy\mathbf{e}_{12} - y^2(\mathbf{e}_{12})^2 \\ &= x^2 - y^2\mathbf{e}_{12}\mathbf{e}_{12} \\ &= x^2 - y^2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \\ &= x^2 - (-1)y^2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 \\ &= x^2 + y^2(\mathbf{e}_1)^2(\mathbf{e}_2)^2 \\ &= x^2 + y^2, \end{aligned} \quad (3.59)$$

e

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (3.60)$$

Considere agora um elemento arbitrário $u \in \mathcal{C}\ell_2$ que escrevemos

$$u = x + v\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2. \quad (3.61)$$

Usando a definição da reversão temos:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= x + v\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 \\ &= x + v\mathbf{e}_1 - y\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Então

$$\begin{aligned} u\tilde{u} &= (x + v\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)(x + v\mathbf{e}_1 - y\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) \\ &= x^2 + xv\mathbf{e}_1 - xy\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \\ &\quad + vx\mathbf{e}_1 + v^2(\mathbf{e}_1)^2 - vy(\mathbf{e}_1)^2\mathbf{e}_2 \\ &\quad + xy\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + yv\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 - y^2(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 \\ &= (x^2 + y^2 + v^2) + 2xv\mathbf{e}_1 - 2vy\mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Portanto,

$$\langle u\tilde{u} \rangle = \langle u\tilde{u} \rangle_0 = (x^2 + y^2 + v^2). \quad (3.64)$$

Finalmente se $u = z$ temos imediatamente das Eqs. (3.59) e (3.64) que:

$$z\bar{z} = \langle z\tilde{z} \rangle, \quad (3.65)$$

Observação 30 *Um elemento homogêneo de graduação $r = 0, 1, 2, 3, \dots, k$ da álgebra exterior $\bigwedge \mathbb{R}^k$ é um elemento que só possui componente em $\bigwedge^r \mathbb{R}^k$. Nestas condições, se $X \in \bigwedge^r \mathbb{R}^k$. Então*

$$\langle X \rangle_{p \neq r} = 0. \quad (3.66)$$

3.9 Vetores Multiplicados por Números Complexos

O produto de um vetor $\mathbf{r} = xe_1 + ye_2$ e um número complexo $e^{i\varphi} = \cos \varphi + \mathbf{i} \sin \varphi$, onde $\mathbf{i} = e_{12}$, é outro vetor no plano ($\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$):

$$\mathbf{r} \cos \varphi + \mathbf{r}\mathbf{i} \sin \varphi = \mathbf{r}e^{i\varphi}. \quad (3.67)$$

O vetor $\mathbf{r}\mathbf{i} = xe_2 - ye_1$ é perpendicular a $\mathbf{r}$ de forma que uma rotação à esquerda por um ângulo $\frac{\pi}{2}$ leva $\mathbf{r}$ para $\mathbf{r}\mathbf{i}$.

Posto que o bivector unidade $\mathbf{i}$ anti-comuta com todo vetor $\mathbf{r}$ no plano ($\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$), a rotação do vetor também pode ser expressa como

$$\mathbf{r}e^{i\varphi} = \mathbf{r} \cos \varphi + \mathbf{r}\mathbf{i} \sin \varphi = \mathbf{r} \cos \varphi - \mathbf{i}\mathbf{r} \sin \varphi = e^{-i\varphi}\mathbf{r}. \quad (3.68)$$

Além disso, temos que $\cos \varphi + \mathbf{i} \sin \varphi = (\cos \frac{\varphi}{2} + \mathbf{i} \sin \frac{\varphi}{2})^2$ e então a rotação do vetor pode ser expressa na a forma

$$s^{-1}\mathbf{r}s,$$

onde

$$s = e^{\mathbf{i}\frac{\varphi}{2}}, \quad s^{-1} = e^{-\mathbf{i}\frac{\varphi}{2}}.$$

De fato

$$\begin{aligned} s^{-1}\mathbf{r}s &\stackrel{\text{Eq. (3.68)}}{=} e^{-\mathbf{i}\frac{\varphi}{2}}\mathbf{r}e^{\mathbf{i}\frac{\varphi}{2}} \\ &= \mathbf{r}e^{\mathbf{i}\frac{\varphi}{2}}e^{\mathbf{i}\frac{\varphi}{2}} \\ &= \mathbf{r}e^{\mathbf{i}\varphi} \end{aligned}$$

A rotação de $\mathbf{r}$ para a esquerda por um ângulo φ resultará então em

$$\mathbf{r}z = z^{-1}\mathbf{r} = s^{-1}\mathbf{r}s,$$

onde $z = e^{i\varphi}$, $z^{-1} = e^{-i\varphi}$ e $s^2 = z$. Há dois números complexos s e $-s$ que fornecem a mesma rotação $s^{-1}\mathbf{r}s = (-s)^{-1}\mathbf{r}(-s)$. Em outras palavras, há dois números complexos que produzem o mesmo resultado final via ações diferentes.

Observando que $e^{-i\pi} = e^{i\pi} = -1$, temos que

$$s = e^{i\frac{\varphi}{2}}$$

é uma rotação no sentido *anti-horário* por um ângulo $\frac{\varphi}{2}$ e

$$-s = e^{-i\pi}e^{i\frac{\varphi}{2}} = e^{-i(2\pi-\varphi)/2}$$

é rotação no sentido *horário* por um ângulo $\frac{2\pi-\varphi}{2}$.

Antes de prosseguirmos recordemos a

Definição 31 Um grupo $\mathbf{G}$ é um conjunto de elementos com uma lei de composição interna (multiplicação), que associa a cada par ordenado $a, b \in \mathbf{G}$ outro elemento, escrito como $ab \in \mathbf{G}$. A lei de composição satisfaz as seguintes condições:

1. **Associatividade:** A operação é associativa, isto é, se $a, b \in \mathbf{G}$ então:

$$(ab)c = a(bc)$$

2. **Existência do elemento neutro:** Existe $e \in \mathbf{G}$, tal que para todo $a \in \mathbf{G}$:

$$ea = ae = a$$

3. **Existência do elemento inverso:** Para todo $a \in \mathbf{G}$, existe um elemento inverso, denotado a' tal que:

$$a'a = aa' = e$$

3.10 O Grupo Spin(2)

Os números complexos $z \in \mathbb{C}$, tais que $|z| = 1$, são representados no plano complexo pelo *círculo unitário*

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Os elementos de S^1 dotados da operação de multiplicação entre complexos como *produto*, define o *grupo unitário* $U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} = 1\}$. Uma rotação no sentido anti-horário do plano complexo $\mathbb{C}$ por um ângulo φ pode ser representada pela multiplicação de números complexos:

$$x + iy \mapsto (\cos \varphi + \mathbf{i} \sin \varphi)(x + iy), \quad (3.69)$$

onde $\cos \varphi + \mathbf{i} \sin \varphi \in U(1)$.

Uma rotação no sentido anti-horário do plano vetorial $\mathbb{R}^2$ por um ângulo φ pode ser representada pela multiplicação de matrizes:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (3.70)$$

com

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \in SO(2), \quad (3.71)$$

onde $SO(2) = \{R \in \text{Mat}(2, \mathbb{R}) \mid R^T R = I, \det R = 1\}$ é o grupo de rotações *especiais* bidimensionais. O grupo de rotações $SO(2)$ é isomorfo ao grupo unitário $U(1)$. De fato, podemos fazer a seguinte identificação. Usando-se a Eq.(3.44) temos que, dado um número complexo qualquer $z \in U(1)$, $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, sua representação matricial e a de $\bar{z}$ são dadas por

$$z \simeq \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad \bar{z} \simeq \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Assim, como $z\bar{z} = 1$, temos

$$\begin{aligned} z\bar{z} &\simeq \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ab - ba \\ -ab + ba & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Então $a^2 + b^2 = 1$. Por outro lado, dada uma matriz qualquer, R e sua transposta R^T pertencentes a $SO(2)$, se escrevemos com $x, y, z, w \in \mathbb{R}$,

$$R = \begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix}, R^T = \begin{pmatrix} x & w \\ y & z \end{pmatrix},$$

temos que $R^T R = I$

$$\begin{aligned} R^T R &= \begin{pmatrix} x & w \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x^2 + w^2 & xy + wz \\ xy + wz & y^2 + z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

i.e., quando

$$\begin{aligned} x^2 + w^2 &= y^2 + z^2 = 1, \\ xy + wz &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, chega-se a conclusão: $x = z$ e $y = -w$, daí temos que

$$R^T R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e segue que

$$\det R = x^2 + w^2 = 1.$$

As rotações de $\mathbb{R}^2$ podem ser representadas pela multiplicação de Clifford:

$$x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 \mapsto (\cos \frac{\varphi}{2} + \mathbf{e}_{12} \sin \frac{\varphi}{2})^{-1} (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) (\cos \frac{\varphi}{2} + \mathbf{e}_{12} \sin \frac{\varphi}{2}), \quad (3.72)$$

onde $(\cos \frac{\varphi}{2} + \mathbf{e}_{12} \sin \frac{\varphi}{2}) \in \mathbf{Spin}(2) = \{s \in \mathcal{C}\ell_2^+ \mid s\bar{s} = 1\}$, o grupo *spin*. O fato de que dois elementos do grupo $\mathbf{Spin}(2)$ representam a mesma rotação em $SO(2)$ é expresso dizendo-se que $\mathbf{Spin}(2)$ é um recobrimento duplo de $SO(2)$ e escrevemos

$$\mathbf{Spin}(2)/\{\pm 1\} \simeq SO(2).$$

Embora $SO(2)$ e $\mathbf{Spin}(2)$ atuem de forma diferente em $\mathbb{R}^2$, eles são *homomorfos* como grupos abstratos¹³.

¹³No caso específico em consideração temos um homomorfismo $2 : 1$.

Exercício 32 Escreva $\tilde{u} = \langle u \rangle_0 + \langle u \rangle_1 - \langle u \rangle_2$ para $u = \langle u \rangle_0 + \langle u \rangle_1 + \langle u \rangle_2 \in \mathcal{Cl}_2, \langle u \rangle_k \in \bigwedge^k \mathbb{R}^2$. Defina o grupo $\mathbf{Pin}(2)$ como o conjunto

$$\begin{aligned} \mathbf{Pin}(2) &= \{u \in \mathcal{Cl}_2^+ \mid \tilde{u}u = 1\} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ \mathbf{x} &\mapsto R(\mathbf{x}) = u\mathbf{x}u^{-1}, \end{aligned}$$

e o grupo $O(2)$ como o conjunto

$$O(2) = \{R \in \text{Mat}(2, \mathbb{R}) \mid R^T R = I\}.$$

Mostre que $\mathbf{Pin}(2)/\{\pm 1\} \simeq O(2)$

Solução: O exercício pede para mostrar que dados os grupos $\mathbf{Pin}(2)$ e $O(2)$ temos os seguinte *isomorfismo*:

$$\mathbf{Pin}(2)/\{\pm 1\} \simeq O(2). \quad (3.73)$$

Iniciamos o exercício recordando que

$$\mathbf{Pin}(2) := \{u \in \mathcal{Cl}_2^+ \mid \tilde{u}u = 1\}. \quad (3.74)$$

Seja

$$u = a + b\mathbf{e}_1 + c\mathbf{e}_2 + d\mathbf{e}_{12}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Então

$$\tilde{u} = a + b\mathbf{e}_1 + c\mathbf{e}_2 - d\mathbf{e}_{12} \quad (3.75)$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{u}u &= (a + b\mathbf{e}_1 + c\mathbf{e}_2 + d\mathbf{e}_{12})(a + b\mathbf{e}_1 + c\mathbf{e}_2 - d\mathbf{e}_{12}) \\ &= a^2 + ab\mathbf{e}_1 + ac\mathbf{e}_2 - ad\mathbf{e}_{12} \\ &\quad + ab\mathbf{e}_1 + b^2 + bc\mathbf{e}_{12} - db\mathbf{e}_2 \\ &\quad + ca\mathbf{e}_2 - cb\mathbf{e}_{12} + c^2 + cd\mathbf{e}_1 \\ &\quad + ad\mathbf{e}_{12} - bde_2 + cde_1 + d^2 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + (2ab + 2cd)\mathbf{e}_1 + (2ac - 2db)\mathbf{e}_2 \\ &\quad + (-ad + bc - cb + ad)\mathbf{e}_{12}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Assim,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &= 1, \\ ab + cd &= 0, \\ ac - db &= 0, \end{aligned} \quad (3.77)$$

e concluimos que podemos ter as possibilidades

$$\begin{aligned} (i) \quad & a^2 + d^2 = 1, \quad b = c = 0, \\ (ii) \quad & b^2 + c^2 = 1 \quad a = d = 0. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Da possibilidade (i) temos que $u \in \mathbf{Pin}(2)$ tem a forma

$$u = a + d\mathbf{e}_{12}, \quad (3.79)$$

que pode ser parametrizado como

$$u = \cos \varphi/2 + \mathbf{e}_{12} \sin \varphi/2 = \exp\left(\frac{\varphi}{2}\mathbf{e}_{12}\right). \quad (3.80)$$

Da possibilidade (ii) segue ainda que

$$u = b\mathbf{e}_1 + c\mathbf{e}_2 \in \mathbf{Pin}(2), \quad b^2 + c^2 = 1 \quad (3.81)$$

Note que os elementos da forma $u = \exp(\frac{\varphi}{2}\mathbf{e}_{12})$ geram rotações e os elementos $u = b\mathbf{e}_1 + c\mathbf{e}_2$ geram reflexões. De fato, $u \in \mathbf{Pin}(2)$ age em $\mathbf{x} \in \bigwedge^1 \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathcal{Cl}_2$ por

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = u\mathbf{x}u^{-1}. \quad (3.82)$$

Exemplo 33 (a) Tome, $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ e $u = \mathbf{e}_1$. Temos

$$\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \quad (3.83)$$

que corresponde a uma reflexão em relação do eixo determinado por $\mathbf{e}_1$.

(b) Tome, por exemplo, $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ e $u = \mathbf{e}_2$. Temos

$$\mathbf{e}_2(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad (3.84)$$

que corresponde a uma reflexão em relação do eixo determinado por $\mathbf{e}_2$.

Observação 34 Da Eq.(3.82) acima fica óbvio que u e $-u$ determinam a mesma rotação ou a mesma reflexão.

Agora,

$$O(2) = \{R \in \text{Mat}(2, \mathbb{R}) \mid R^T R = 1\} \quad (3.85)$$

Assim,

$$\det R = \pm 1. \quad (3.86)$$

Os elementos que satisfazem $\det R = 1$ são ditos rotações e temos $R \in SO(2) \subset O(2)$. Os elementos que satisfazem $\det R = -1$ correspondem as reflexões, mas observe do exemplo acima que as reflexões podem ser geradas em $\mathbb{R}^2$ por rotações. Assim temos

$$\begin{aligned}\mathbf{Pin}(2) \ni u &= \exp\left(\frac{\varphi}{2}\mathbf{e}_{12}\right) \simeq \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = R_1 \in O(2), \\ \mathbf{Pin}(2) \ni u' &= \exp\left(-\frac{\varphi}{2}\mathbf{e}_{12}\right) \simeq \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = R_1 \in O(2), \\ \mathbf{Pin}(2) \ni u'' &= b\mathbf{e}_1 + c\mathbf{e}_2 \simeq \begin{pmatrix} b^2 - c^2 & 2cb \\ 2cb & -(b^2 - c^2) \end{pmatrix} = R_2 \in O(2), \\ \mathbf{Pin}(2) \ni u''' &= -b\mathbf{e}_1 - c\mathbf{e}_2 \simeq \begin{pmatrix} b^2 - c^2 & 2cb \\ 2cb & -(b^2 - c^2) \end{pmatrix} = R_2 \in O(2),\end{aligned}\tag{3.87}$$

donde concluimos primeiramente que temos um *homomorfismo* $2 - 1$ entre $\mathbf{Pin}(2)$ e $O(2)$.

De fato, levando em conta que os elementos de $\mathbf{Pin}(2)/\{\pm 1\}$ são as classes de equivalência definidas por

$$u \simeq v \text{ se } u\mathbf{x}u^{-1} = v\mathbf{x}v^{-1},\tag{3.88}$$

i.e., devemos ter

$$\mathbf{x} = (v^{-1}u)^{-1}\mathbf{x}(v^{-1}u)\tag{3.89}$$

e portanto $v^{-1}u = \pm 1 \in \mathbf{Pin}(2) \Rightarrow u = v$ ou $u = -v$. As classes de equivalência de $\mathbf{Pin}(2)/\{\pm 1\}$ são denotadas por $[u]$. Note bem que em $\mathbf{Pin}(2)/\{\pm 1\}$, u e $-u$ são equivalentes. Assim escrevemos:

$$\mathbf{Pin}(2)/\{\pm 1\} = \{[u]\}.\tag{3.90}$$

e dado que

$$u\mathbf{x}u^{-1} = (-u)\mathbf{x}(-u^{-1})\tag{3.91}$$

concluimos que

$$\mathbf{Pin}(2)/\{\pm 1\} \simeq O(2),\tag{3.92}$$

e neste caso temos um *isomorfismo* entre $\mathbf{Pin}(2)/\{\pm 1\}$ e $O(2)$.

Capítulo 4

Bivetores e a Álgebra Exterior

A exigência de que o produto de dois vetores deveria descrever suas direções relativas, auxiliou na formulação da definição de produto *escalar*. Mas o produto escalar não cumpre totalmente aquela exigência, pois falha em não expressar que duas linhas não paralelas (mas não reversas) determinam um plano, ou melhor, que dois segmentos orientados não colineares (interpretados como *vetores livres* de um espaço afim) determinam um paralelogramo. A partir do momento em que um paralelogramo possa ser considerado como um tipo de produto geométrico de seus lados, a noção de ‘números’ precisa ser generalizada.

Um paralelogramo pode ser considerado como um fragmento de plano orientado, descrito por um novo tipo de ‘número’, chamado de bivector. Em analogia a um vetor, um bivector tem também um ‘comprimento’, e uma direção (orientação), mas a palavra direção precisa ser entendida num sentido mais amplo que o usual.

Um único vetor caracteriza completamente a relação direcional dos pontos sobre uma linha dada. Um único bivector caracteriza completamente, a relação direcional dos pontos em um plano dado, isto é, um bivector não descreve um conjunto de pontos em um plano e sim a *propriedade direcional* desse conjunto de pontos e dizemos que a direção de um bivector é 2-dimensional para distinguir tal conceito do conceito de direção 1-dimensional de um vetor. Assim, uma vez introduzido o conceito de bivector, a noção de plano como conjunto de pontos pode ser separada da noção de plano como relação [8]. Em outras palavras, um bivector descreve a propriedade direcional de um conjunto de pontos que determinam o plano por eles definido. Para aqueles que já fizeram um curso de Mecânica, fica aqui a observação de que *veloci-*

dade angular, torque, ângulo de rotação, são exemplos de quantidades com significado físico precisos que são representados por bivectores.

Como já mencionamos anteriormente, a *álgebra exterior* de $\mathbb{R}^k$ é definida como sendo o espaço vetorial $\bigwedge \mathbb{R}^k$ equipado com o produto exterior¹ $\wedge$. Escalares, vetores, bivectores e o elemento de volume são elementos de subespaços de graduação homogênea do espaço vetorial $\bigwedge \mathbb{R}^k$. Assim por exemplo, temos:

4.1 Bivectores Como Segmentos Planos Orientados.

Vamos agora aprofundar nosso estudo dos bivectores. Começamos por recordar novamente que em $\mathbb{R}^3$ os bivectores são segmentos planos orientados, que possuem direção e comprimento (a área do segmento plano). Dois bivectores possuem a mesma direção se são planos paralelos e possuem o mesmo sentido de rotação.

Vetor (segmento linha direcionado)

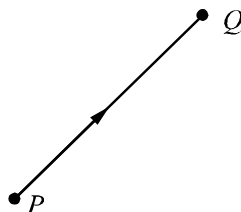


Figura 11

As propriedades de um vetor são

1. magnitude (comprimento de $\overline{PQ}$)

2. direção $\left\{ \begin{array}{l} \text{posição} \\ \text{orientação} \end{array} \right.$

Bivector (segmento plano orientado)

¹Por enquanto não será necessário sermos mais precisos.

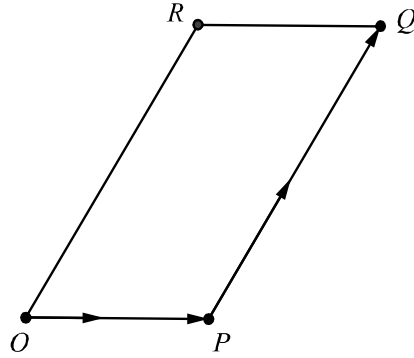


Figura 12

As propriedades de um bivetor são

1. magnitude (área de OPQR)
2. direção $\left\{ \begin{array}{l} \text{posição} \\ \text{orientação (sentido de rotação)} \end{array} \right.$

Bivetores serão denotados por letras maiúsculas em negrito. Dois bivetores $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ em planos paralelos tem a mesma posição, e escrevemos $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$. Os bivetores paralelos $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ podem ser considerados como ângulos orientados, cada um girando na mesma direção, $\mathbf{A} \uparrow\uparrow \mathbf{B}$, ou girando em direções opostas $\mathbf{A} \uparrow\downarrow \mathbf{B}$. Se dois segmentos planos tem a mesma área e a mesma direção, então os bivetores são iguais:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \iff |\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| \text{ e } \mathbf{A} \uparrow\uparrow \mathbf{B} \quad (4.1)$$

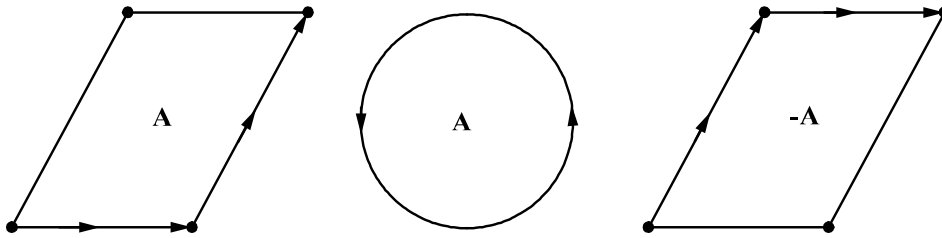


Figura 13

O bivetor $\mathbf{A}$ e seu oposto $-\mathbf{A}$ possuem a mesma área e são paralelos, porém suas orientações são opostas. Um *bivetor unitário* tem área igual a 1, i.e., $|\mathbf{A}| = 1$.

A forma da área de um bivector é *irrelevante*.

Quando se representa um bivector como um paralelogramo orientado, vem imediatamente a nossa mente, a idéia de que tal objeto possa ser convenientemente expresso (i.e., representado algebricamente) como um certo ‘produto geométrico’ de seus lados. Dada tal sugestão, introduzimos o *produto exterior* $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ entre os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ para representar o plano orientado que se obtém acrescentando-se (como na figura abaixo) o vetor $\mathbf{b}$ a extremidade do vetor $\mathbf{a}$.

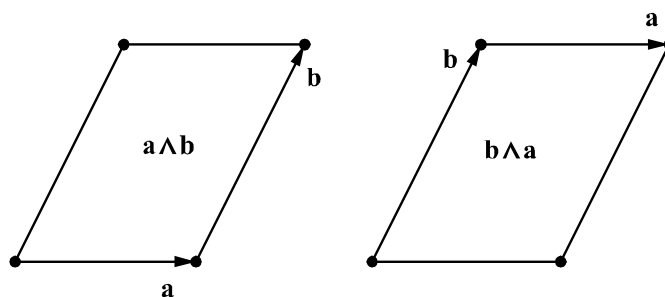


Figura 14

Agora, $\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$ é o bivector que se obtém acrescentando-se o vetor $\mathbf{a}$ a extremidade do vetor $\mathbf{b}$. Assim é natural exigirmos que os bivectores $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ e $\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$ tenham a mesma área e a mesma 2-direção, porém, tenham sentido de rotação opostos, i.e.:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}. \quad (4.2)$$

4.1.1 Adição de Bivetores

A interpretação geométrica da adição de bivectores pode ser entendida facilmente quando os dois bivectores que se deseja somar são expressos em termos do produto exterior de dois vetores, que possuem um dado vetor como um fator comum, por exemplo, os bivectores $\mathbf{A} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$. Note que não estamos tratando do caso de dois bivectores particulares, uma vez que em $\mathbb{R}^3$ dois bivectores arbitrários sempre podem ser expressos desta maneira, dado o fato de que dois planos quaisquer são paralelos ou sua intersecção se dá ao longo de uma linha comum. Nestas condições o bivector $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ é definido como

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c},$$

cujos significado geométrico óbvio pode-se ver na Figura 15.

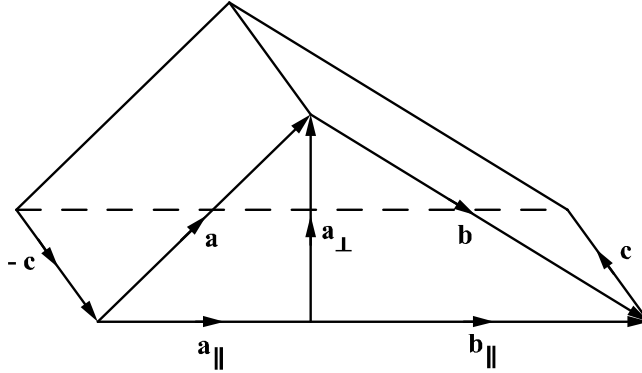


Figura 15

Observe na Figura 15, que $\mathbf{a}_\perp = -\mathbf{b}_\perp$, e decompondo $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ em componentes paralelas e perpendiculares, temos:

$$\begin{cases} \mathbf{b}_\perp + \mathbf{b}_\parallel = \mathbf{b} \\ \mathbf{a}_\perp + \mathbf{a}_\parallel = \mathbf{a} \end{cases} \implies \mathbf{a}_\parallel + \mathbf{b}_\parallel = \mathbf{a} + \mathbf{b},$$

e portanto

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{c} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a}_\parallel + \mathbf{b}_\parallel) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a}_\parallel \wedge \mathbf{c} + \mathbf{b}_\parallel \wedge \mathbf{c}.$$

4.1.2 Base do Espaço dos Bivetores

Definição 35 Um elemento de graduação $r = 0, 1, 2, 3$ de $\bigwedge \mathbb{R}^3$ é dito *simples*² se for o produto exterior de r vetores.

Por exemplo, os elementos $\alpha \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ são simples, mas o elemento $(\alpha \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + \beta \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3)$ ³ não é simples.

O segmento plano orientado obtido tomando-se o produto exterior de pares de vetores da base, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ do espaço linear $\mathbb{R}^3$, i.e., os objetos $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$, formam uma *base* para o espaço vetorial $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$, i.e., o espaço linear, sobre o corpo $\mathbb{R}$, dos bivetores.

²A soma de elementos simples de mesma graduação é dito um elemento *homogêneo* da álgebra exterior.

³Note que esse elemento é homogêneo.

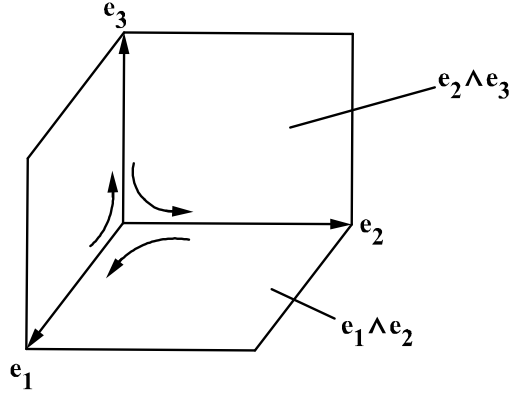


Figura 16

Um bivetor $\mathbf{B}$ arbitrário, é portanto uma combinação dos elementos da base,

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2} B_{ij} \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \\ &= B_{12} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + B_{13} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + B_{23} \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3,\end{aligned}$$

onde $B_{12}, B_{13}, B_{23} \in \mathbb{R}$ e são tais que⁴

$$B_{ij} = -B_{ji}.$$

É imediato concluir-se que $\dim \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 = 3$.

O produto escalar no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ que denotamos pelo símbolo $\cdot$ estende-se para um produto bilinear simétrico sobre o espaço dos bivetores $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$. Definimos então

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = \langle \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} \rangle = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix}. \quad (4.3)$$

Para exemplificar a utilização de tal conceito vamos calcular a norma ou área de

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} B_{ij} \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j.$$

⁴Em $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$, como é óbvio, todos os bivetores são simples, isto é, eles são o produto exterior de dois particulares vetores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{B} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$. Tal propriedade não é verdadeira em $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$; por exemplo $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4$ não é simples. Ver Definição (35).

Temos (levando em conta que $B_{ij} = -B_{ji}$) que

$$\langle \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k \wedge \mathbf{e}_l \rangle = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k & \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_l \\ \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k & \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_l \end{vmatrix},$$

que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{i,j} \sum_{k,l} B_{ij} B_{kl} \langle \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k \wedge \mathbf{e}_l \rangle \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i,j} \sum_{k,l} B_{ij} B_{kl} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k & \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_l \\ \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k & \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_l \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i,j} \sum_{k,l} B_{ij} B_{kl} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k,l} B_{kl} B_{kl} - \sum_{k,l} \frac{1}{4} B_{lk} B_{kl} \\ &= \sum_{k,l} \frac{1}{4} (B_{kl})^2 + \sum_{k,l} \frac{1}{4} (B_{kl})^2 \\ &= \sum_{k,l} \frac{1}{2} (B_{kl})^2 \\ &= B_{12}^2 + B_{13}^2 + B_{23}^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |\mathbf{B}| &= \sqrt{\langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle} \\ &= \sqrt{B_{12}^2 + B_{13}^2 + B_{23}^2}. \end{aligned}$$

4.2 O Elemento de Volume Orientado

O produto exterior $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ dos vetores $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{c} = c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + c_3 \mathbf{e}_3$ representa o volume orientado do paralelepípedo onde suas arestas são segmentos de reta sobre os vetores $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \quad (4.4)$$

O elemento $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ é dito um 3-vetor do espaço vetorial $\bigwedge^3 \mathbb{R}^3$, que obviamente é 1-dimensional com base $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$.

Dados $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$, recordamos que o produto exterior é associativo,

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$$

Tal propriedade pode ser facilmente verificada quando se escreve o produto exterior de vetores em termos do produto de Clifford. De fato temos:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) \mathbf{c} - \mathbf{c} \frac{1}{2} (\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) \right] \\ &= \frac{1}{4} (\mathbf{abc} - \mathbf{bac} - \mathbf{cab} + \mathbf{cba}), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) &= \frac{1}{2} \left[\mathbf{a} \frac{1}{2} (\mathbf{bc} - \mathbf{cb}) - \frac{1}{2} (\mathbf{bc} - \mathbf{cb}) \mathbf{a} \right] \\ &= \frac{1}{4} (\mathbf{abc} - \mathbf{bac} - \mathbf{cab} + \mathbf{cba}), \end{aligned}$$

o que prova nossa afirmação.

Ademais, o produto exterior de três vetores satisfaz, como se verifica de imediato,

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{a} = -\mathbf{c} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = -\mathbf{a} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{c} \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}.$$

Volume Orientado

O produto exterior dos vetores unitários e ortogonais $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ resulta na unidade de volume orientado $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \in \bigwedge^3 \mathbb{R}^3$. A norma ou volume $|\mathbf{V}|$ de um 3-vetor⁵ onde

$$\mathbf{V} = V \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$$

é dada por $|\mathbf{V}| = |V|$, isto é, $|V \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3| = V$ para $V \geq 0$ e $|V \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3| = -V$ para $V \leq 0$. Para expressarmos $|\mathbf{V}|$ de maneira apropriada recordamos que o produto escalar em $\mathbb{R}^3$ estende-se a um produto bilinear simétrico sobre $\bigwedge^3 \mathbb{R}^3$ por

⁵ V é um número real, positivo ou negativo, enquanto $\mathbf{V}$ é um 3-vetor. Usualmente o que se denomina por volume é dado por $|\mathbf{V}| = |V|$.

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{d} \wedge \mathbf{e} \wedge \mathbf{f}) = \langle \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}, \mathbf{d} \wedge \mathbf{e} \wedge \mathbf{f} \rangle = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{e} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{f} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{e} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{f} \\ \mathbf{c} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{c} \cdot \mathbf{e} & \mathbf{c} \cdot \mathbf{f} \end{vmatrix}.$$

Com esta definição, verifica-se imediatamente que a norma ou volume de $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ é dada por

$$\begin{aligned} |\mathbf{V}| &= \sqrt{\langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle} \\ &= \sqrt{\langle V\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, V\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \rangle} \\ &= \sqrt{V^2 \langle \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \rangle} \\ &= |V|. \end{aligned}$$

Antes de prosseguirmos é conveniente que definamos o produto escalar entre os elementos $\alpha, \beta \in \bigwedge^0 \mathbb{R} = \mathbb{R}$ por

$$\alpha \cdot \beta = \alpha\beta,$$

i.e., o produto de números reais, e também definiremos para $A_p \in \bigwedge^p \mathbb{R}$ e $A_q \in \bigwedge^q \mathbb{R}$,

$$A_p \cdot B_q = 0, \text{ se } p \neq q.$$

Os casos em que $p = 0, q = 0, p = 1, q = 1, p = 2, q = 2, p = 3, q = 3$ sendo como acima introduzidos.

4.3 O Produto Vetorial

Sejam $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$. O bivetor $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ pode ser expresso como um *determinante*:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \end{aligned} \tag{4.5}$$

resultado que segue trivialmente como uma aplicação da Eq.(2.13) do Capítulo 2.

Já o *produto vetorial* dos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ pode ser expresso (uma vez *fixada* uma orientação de mão direita para o $\mathbb{R}^3$) como o vetor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{e}_1(a_2b_3 - a_3b_2) + \mathbf{e}_2(a_3b_1 - a_1b_3) + \mathbf{e}_3(a_1b_2 - a_2b_1) \end{aligned} \quad (4.6)$$

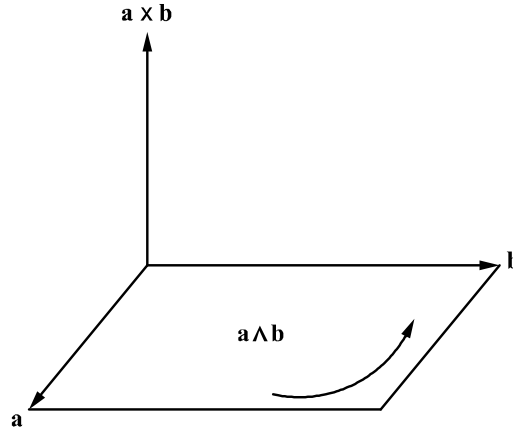


Figura 17

A direção de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é perpendicular ao plano $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ e o comprimento ou norma de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é igual a área ou norma de $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, isto é

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \alpha \quad (4.7)$$

onde α é o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ e $0 \leq \alpha \leq \pi$. Note que

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}$$

e

$$|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = \sqrt{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}.$$

Apesar da semelhança entre as expressões dos determinantes que definem o produto exterior $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ e o produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, há uma diferença *crucial* entre os dois conceitos: o produto exterior não requer uma métrica, enquanto o produto vetorial requer ou induz uma métrica (i.e., um produto escalar). A métrica está envolvida no posicionamento *perpendicular* do vetor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ em relação ao bivector $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

4.4 A Dualidade de Hodge

Os espaços vetoriais $\mathbb{R}^3$ e $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ são tais que $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 = 3$. Portanto tais espaços são linearmente isomorfos. Podemos, através da métrica padrão do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ estabelecer um isomorfismo padrão entre $\mathbb{R}^3$ e $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$. Tal pode ser realizado com a introdução do operador *dual de Hodge* que associa a um vetor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ um bivetor $\star \mathbf{a} \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$, definido por:

$$\mathbf{b} \wedge \star \mathbf{a} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \text{ para todo } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \quad (4.8)$$

O *dual de Hodge* não depende apenas da métrica, mas também depende *crucialmente* da orientação escolhida para $\mathbb{R}^3$, costuma-se usar a regra da mão direita definida por uma base ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ convenientemente escolhida.

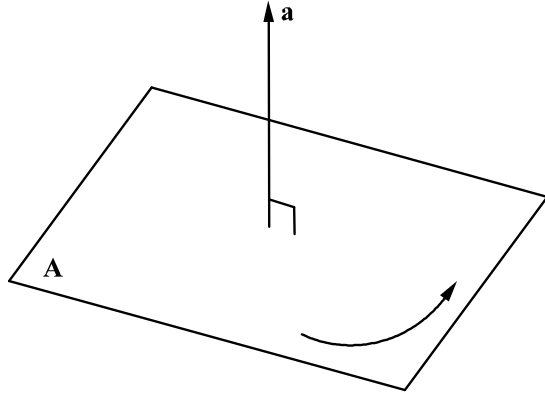


Figura 18

Assim, associado a cada vetor

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3,$$

temos um único bivetor

$$\mathbf{A} = \star \mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + a_2 \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 + a_3 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3.$$

Usando a métrica induzida sobre o espaço vetorial dos bivectores, podemos estender o *dual de Hodge* para uma aplicação que envia um bivetor $\mathbf{A} \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ a um vetor $\star \mathbf{A} \in \mathbb{R}^3$, definido por:

$$\mathbf{B} \wedge \star \mathbf{A} = \langle \mathbf{B}, \mathbf{A} \rangle \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \forall \mathbf{B} \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3. \quad (4.9)$$

Usando a dualidade, a relação entre o produto vetorial e o produto exterior pode ser escrita como⁶

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \star(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (4.10)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \star(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \quad (4.11)$$

4.5 A Álgebra Exterior $\bigwedge \mathbb{R}^3$ e a Álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_3$

A álgebra exterior $\bigwedge \mathbb{R}^3$ do espaço linear $\mathbb{R}^3$, é uma soma direta dos

subespaços de $\bigwedge \mathbb{R}^3$		com bases
escalares	$\mathbb{R}$	1
vetores	$\mathbb{R}^3$	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$
bivetores	$\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$
elemento de volume	$\bigwedge^3 \mathbb{R}^3$	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$

Como já observamos, nos referiremos a um vetor de $\mathbb{R}^3$ como um 1-vetor e também identificamos $\bigwedge^1 \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$. Da mesma maneira nos referiremos a um escalar como um 0-vetor e identificamos $\bigwedge^0 \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}$. Como $\bigwedge \mathbb{R}^3$ é uma soma direta dos subespaços que aparecem na tabela acima, escrevemos:

$$\bigwedge \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \oplus \bigwedge^3 \mathbb{R}^3 \quad (4.12)$$

As dimensões de $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ e $\bigwedge^3 \mathbb{R}^3$ são respectivamente, 1, 3, 3, 1 e a dimensão de $\bigwedge \mathbb{R}^3$ é a soma dessas dimensões, isto é, 8.

⁶Na álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_3$, a relação entre o produto exterior e o produto vetorial pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \mathbf{e}_{123}, \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \mathbf{e}_{123} \end{aligned}$$

Usando a álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_3$ o dual de Hodge pode ser calculado como $\star \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} \mathbf{e}_{123}$. Disso origina o dual de Clifford definido como $\mathbf{u} \mathbf{e}_{123}$ para $\mathbf{u} \in \mathcal{C}\ell_3$.

A álgebra exterior $\bigwedge \mathbb{R}^3$ é uma álgebra associativa com unidade 1 gerada por uma base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ do espaço linear $\mathbb{R}^3$ que satisfaz

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j &= -\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_i, \text{ para } i \neq j, \\ \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_i &= 0. \end{aligned}} \quad (4.13)$$

O produto exterior de dois elementos homogêneos de graduações distintas $A_r \in \bigwedge^r \mathbb{R}^3$ e $B_s \in \bigwedge^s \mathbb{R}^3$ satisfaz:

$$A_r \wedge B_s \in \bigwedge^{r+s} \mathbb{R}^3,$$

e temos que $A_r \wedge B_s = 0$ sempre que $r + s > 3$. De fato, temos a proposição.

Proposição 36 *O produto exterior de m vetores anula-se sempre que $m > n$, onde $n = \dim \mathbb{R}^n$.*

Prova: Considere o produto exterior de $n + 1$ vetores, $\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_n \wedge \mathbf{x}_{n+1}$. Se $n = \dim \mathbb{R}^n$, temos no máximo n vetores linearmente independentes. Assim, os $(n + 1)$ vetores são necessariamente linearmente dependentes e um deles pode ser escrito como combinação linear dos demais. Sem perda de generalidade, escolhamos $\mathbf{x}_{n+1}$ como sendo esse vetor e escrevemos $\mathbf{x}_{n+1} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{x}_i$. Usando a Eq.(4.13), temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_n \wedge \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_n \wedge (a_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2 + \dots + a_n \mathbf{x}_n) \\ &= (-1)^{n-1} a_1 \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_n \\ &\quad + (-1)^{n-2} a_2 \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_n \\ &\quad + \dots + a_n \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_{n-1} \wedge \mathbf{x}_n \wedge \mathbf{x}_n \\ &= 0, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Dessa proposição, vemos que não existe um espaço vetorial $\bigwedge^p \mathbb{R}^n$ se $p > n$.

4.6 Produto de Clifford em $\mathcal{Cl}_3$

O produto de Clifford de elementos u e v da álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_3$ do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ é denotado por *justaposição*, i.e., escrevemos para tal

produto uv para distingui-lo do produto exterior $u \wedge v$. O produto de Clifford entre os elementos de uma base ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3 \subset \mathcal{Cl}_3$ satisfaz:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j &= -\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i, \text{ para } i \neq j, \\ \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i &= 1, \end{aligned} \quad (4.14)$$

e produtos de Clifford entre elementos da base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ geram uma base para $\mathcal{Cl}_3$, que corresponde a uma base de $\bigwedge \mathbb{R}^3$,

$\mathcal{Cl}_3$	$\bigwedge \mathbb{R}^3$
1	1
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$

Observação 37 *Escreveremos algumas vezes para simplificação de notação o produto $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k$ como $\mathbf{e}_{ijk}$, i.e., $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \equiv \mathbf{e}_{ijk}$.*

Essa correspondência induz a uma identificação do espaço linear $\mathcal{Cl}_3$ com o espaço linear $\bigwedge \mathbb{R}^3$, e escrevemos tal identificação como

$$\begin{aligned} \bigwedge \mathbb{R}^3 &= \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R} \oplus \bigwedge^3 \mathbb{R}^3, \\ \mathcal{Cl}_3 &= \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R} \oplus \bigwedge^3 \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Essa decomposição introduz uma estrutura *multivetorial* na álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_3$. Tal estrutura multivetorial é única, isto é, um elemento arbitrário $u \in \mathcal{Cl}_3$ pode ser decomposto unicamente em uma soma de k -vetores, com k -partes $\langle u \rangle_k$ de u ,

$$u = \langle u \rangle_0 + \langle u \rangle_1 + \langle u \rangle_2 + \langle u \rangle_3$$

onde $\langle u \rangle_k \in \bigwedge^k \mathbb{R}^3$.

4.7 O Produto de Clifford de Dois Vetores

$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

Recordamos que no Capítulo 2 introduzimos o produto de Clifford entre dois vetores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$. Usaremos a mesma definição para o produto de Clifford de $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, i.e.,

$$\mathbf{ab} := \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

A comutatividade de $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ junto com a anti-comutatividade de $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$ implicam em uma relação entre $\mathbf{ab}$ e $\mathbf{ba}$. Assim

$$\mathbf{ba} := \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

Se dois vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são paralelos, $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, seu produto de Clifford é comutativo, $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$.

Se dois vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são ortogonais, $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, seu produto de Clifford, é anti-comutativo, $\mathbf{ab} = -\mathbf{ba}$.

4.8 As Partes Par e Parte Impar de $\mathcal{Cl}_3$

A álgebra de Clifford, assim como a álgebra exterior, é uma soma direta de dois subespaços,

$$\begin{aligned} \text{a parte par} & \quad \mathbb{R} \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^3, \\ \text{a parte ímpar} & \quad \mathbb{R}^3 \oplus \bigwedge^3 \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Em ambas as álgebras, a parte par é também uma subálgebra. A subálgebra par $(\bigwedge \mathbb{R}^3)^+ = \mathbb{R} \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ de $\bigwedge \mathbb{R}^3$ é comutativa e a subálgebra par $\mathcal{Cl}_3^+ = \mathbb{R} \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ de $\mathcal{Cl}_3$ não é comutativa. As partes ímpares são denotadas por $\mathcal{Cl}_3^-$ e $(\bigwedge \mathbb{R}^3)^-$.

Proposição 38 *A subálgebra par $\mathcal{Cl}_3^+$ é isomorfa a álgebra dos quatérnions, i.e., $\mathbb{H} \simeq \mathcal{Cl}_3^+$.*

Prova: Os quatérnions consistem de elementos da forma $\mathbb{H} \ni q = w + ix + jy + kz$, onde, i, j, k são ‘unidades imaginárias’ que satisfazem as seguintes regras:

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = -1 \\ ij &= k = -ji, \\ jk &= i = -kj, \\ ki &= j = -ik \\ ij k &= -1. \end{aligned}$$

Seja $\mathcal{C}\ell_3^+ \ni u = u_0 + u_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + u_{31}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + u_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. Vamos introduzir a seguinte notação que será eventualmente usada somente nesta proposição⁷:

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2, \mathbf{j} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3, \mathbf{k} = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$$

Assim $\mathcal{C}\ell_3^+ \ni u = u_0 - u_{12}\mathbf{k} - u_{31}\mathbf{j} - u_{23}\mathbf{i}$. Como $\mathcal{C}\ell_3^+$ é uma subálgebra par, se $u, t \in \mathcal{C}\ell_3^+$ então $ut \in \mathcal{C}\ell_3^+$. Por outro lado, verificamos por (4.14) que:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1,$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{ij} &= \mathbf{k} = -\mathbf{ji} \\ \mathbf{jk} &= \mathbf{i} = -\mathbf{kj} \\ \mathbf{ki} &= \mathbf{j} = -\mathbf{ik} \end{aligned} \quad ,$$

o que mostra que de fato $\mathbb{H} \simeq \mathcal{C}\ell_3^+$, isto é, a álgebra $\mathcal{C}\ell_3^+$ é isomorfa a álgebra $\mathbb{H}$ através da identificação $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} \leftrightarrow \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. ■.

4.9 O Centro

O centro de uma álgebra consiste no conjunto de todos os seus elementos que comutam com todos os elementos da álgebra. O centro $\text{Cen}(\mathcal{C}\ell_3) = \mathbb{R} \oplus \bigwedge^3 \mathbb{R}^3$ de $\mathcal{C}\ell_3$ é isomorfo a $\mathbb{C}$, e o centro de $\bigwedge \mathbb{R}^3$ é $\text{Cen}(\bigwedge \mathbb{R}^3) = \mathbb{R} \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \oplus \bigwedge^3 \mathbb{R}^3$.

Exercício 39 Mostre que $\text{Cen}(\mathcal{C}\ell_3) = \mathbb{R} \oplus \bigwedge^3 \mathbb{R}^3$ de $\mathcal{C}\ell_3$ é isomorfo a $\mathbb{C}$.

Solução: Seja $\text{Cen}(\mathcal{C}\ell_3) \ni u = \alpha + \beta\mathbf{e}_{123}$, temos que $(\mathbf{e}_{123})^2 = -1$ e a operação de reversão nos fornece $\tilde{u} = \alpha - \beta\mathbf{e}_{123}$ de u .

Por outro lado dado um número complexo arbitrário $\mathbb{C} \ni z = a + bi$, podemos fazer a identificação:

$$i \mapsto \mathbf{i} = \mathbf{e}_{123} \text{ e } \bar{z} = \tilde{u}, \text{ que nos fornece } \text{Cen}(\mathcal{C}\ell_3) = \mathbb{R} \oplus \bigwedge^3 \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{C}.$$

⁷Por favor, não confundir o $\mathbf{i} = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2$ com o elemento $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ que também foi denotado por $\mathbf{i}$ nas seções anteriores.

4.10 Estrutura Multivetorial e Graduação

O produto exterior de elementos homogêneos satisfaz, como já vimos, as relações

$$A_i \wedge B_j \in \bigwedge^{i+j} \mathbb{R}^3 \text{ para } A_i \in \bigwedge^i \mathbb{R}^3 \text{ e } B_j \in \bigwedge^j \mathbb{R}^3$$

A álgebra $\bigwedge \mathbb{R}^3$ é dita *graduada* sobre o grupo de índices $\mathbb{Z}$, porque seus elementos homogêneos simples representam subespaços de dimensões específicas, cujos elementos diremos possuir graduação *fixa* ou *homogênea*. Os elementos homogêneos em $\bigwedge \mathbb{R}^3$, satisfazem:

$$A_i \wedge B_j = (-1)^{ij} B_j \wedge A_i \text{ para } A_i \in \bigwedge^i \mathbb{R}^3 \text{ e } B_j \in \bigwedge^j \mathbb{R}^3.$$

O produto de Clifford para os subespaços par e ímpar, satisfaz as relações:

$$\begin{aligned} \mathcal{Cl}_3^+ \mathcal{Cl}_3^+ &\subset \mathcal{Cl}_3^+, \\ \mathcal{Cl}_3^- \mathcal{Cl}_3^+ &\subset \mathcal{Cl}_3^-, \\ \mathcal{Cl}_3^+ \mathcal{Cl}_3^- &\subset \mathcal{Cl}_3^-, \\ \mathcal{Cl}_3^- \mathcal{Cl}_3^- &\subset \mathcal{Cl}_3^+. \end{aligned}$$

A álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_3$ é portanto de graduação par ou ímpar, i.e., é $\mathbb{Z}_2$ -graduada⁸ e as notações $(\mathcal{Cl}_3)_0 = \mathcal{Cl}_3^+$ para a parte par, $(\mathcal{Cl}_3)_1 = \mathcal{Cl}_3^-$ para parte ímpar é (como já mencionamos) eventualmente empregada.

A álgebra $\bigwedge \mathbb{R}^3$ também tem graduação par ou ímpar, i.e., seus elementos são pares ou ímpares.

A álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_3$ não é graduada sobre $\mathbb{Z}$. No entanto, podemos reconstruir o produto exterior, de maneira única, a partir do produto de Clifford. Nos referiremos a dimensão graduada da álgebra exterior associativa, dizendo que a álgebra de Clifford possui uma estrutura multivetorial. Lembrando que $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^3$ possuem, por definição, cópias únicas em $\mathcal{Cl}_3$, assim como $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$.

Note que o produto exterior de dois vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ é simplesmente a parte anti-simétrica do produto de Clifford:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2} (\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \text{ com } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3,$$

uma vez que a expressão acima vem da adição das seguintes fórmulas:

⁸ $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$.

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

$$\mathbf{ba} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

O subespaço dos 3-vetores $\bigwedge^3 \mathbb{R}^3$ pode ser construído de maneira única dentro de $\mathcal{Cl}_3$, através da anti-simetrização do produto de Clifford, i.e., pondo

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \frac{1}{6} (\mathbf{abc} + \mathbf{bca} + \mathbf{cab} - \mathbf{cba} - \mathbf{acb} - \mathbf{bac}) \in \bigwedge^3 \mathbb{R}^3, \quad . \quad (4.15)$$

com $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$. Feito isto, fica estabelecido um isomorfismo linear, enviando $\bigwedge \mathbb{R}^3$ em $\mathcal{Cl}_3$ que se escreve como $\bigwedge \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathcal{Cl}_3$. Temos, então:

$\bigwedge \mathbb{R}^3$		$\mathcal{Cl}_3$
α	=	$\alpha \in \mathbb{R}$
$\mathbf{a}$	=	$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$
$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$	=	$\frac{1}{2} (\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$
$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$	=	$\frac{1}{6} (\mathbf{abc} + \mathbf{bca} + \mathbf{cab} - \mathbf{cba} - \mathbf{acb} - \mathbf{bac}) \in \bigwedge^3 \mathbb{R}^3$

Podemos descrever a construção do subespaço dos 3-vetores $\bigwedge^3 \mathbb{R}^3$ de uma outra maneira, usando a reversão, $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \frac{1}{2} (\mathbf{abc} - \mathbf{cba}) \in \bigwedge^3 \mathbb{R}^3$ para $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$, relacionando a construção recursiva, via um passo intermediário em $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$. De fato, podemos escrever

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{B} = \frac{1}{2} (\mathbf{aB} + \mathbf{Ba}) \in \bigwedge^3 \mathbb{R}^3 \text{ para } \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{B} \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3. \quad (4.16)$$

Note que a expressão (4.16) vem da soma da parte simétrica com a parte anti-simétrica do produto $\mathbf{aB}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{aB} &= \frac{1}{2} (\mathbf{aB} + \mathbf{aB}) + \frac{1}{2} (\mathbf{Ba} - \mathbf{Ba}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{aB} - \mathbf{Ba}) + \frac{1}{2} (\mathbf{aB} + \mathbf{Ba}) \\ &= \mathbf{a} \lrcorner \mathbf{B} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{B}, \end{aligned}$$

onde, como veremos em seguida, o termo $\frac{1}{2} (\mathbf{aB} - \mathbf{Ba}) \in \bigwedge^1 \mathbb{R}^3$ que foi denotado por $\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{B}$, é dito a *contração à esquerda* de $\mathbf{a}$ por $\mathbf{B}$.

4.11 Produto de Vetores e Bivetores

Como já sabemos, um vetor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ e um bivector $\mathbf{B} \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ podem ser multiplicados *exteriormente*, sendo o resultado de tal operação um 3-vetor $\mathbf{a} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{a} \in \bigwedge^3 \mathbb{R}^3$ que é representado geometricamente um volume orientado:

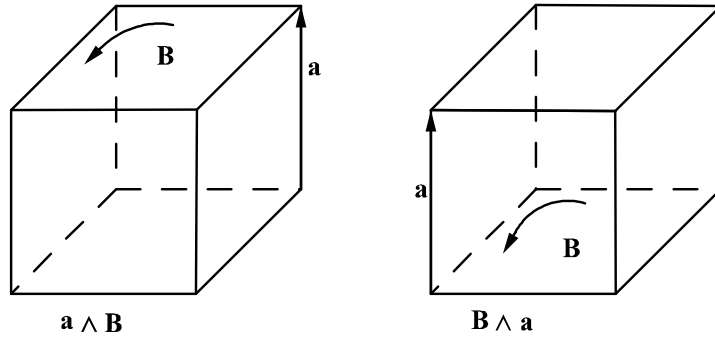


Figura 19

A orientação é obtida, colocando-se as setas em sequência. A comutatividade do produto exterior $\mathbf{a} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{a}$, significa que o sentido da rotação é o mesmo, sem reflexão. Introduzimos agora um outro tipo de produto entre vetor e bivector.

4.12 As Contrações $\lrcorner$ e $\lrcorner$

Um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ e um bivector $\mathbf{B} \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ podem também ser associados a um vetor bem definido, introduzindo-se a operação dita *contração à direita* (denotada por $\lrcorner$) e resultando em um vetor $\mathbf{B} \lrcorner \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Considere um vetor $\mathbf{x}$ formando um ângulo de inclinação φ em relação ao plano do bivector $\mathbf{B}$. Seja $\mathbf{a}$ a projeção ortogonal de $\mathbf{x}$ no plano de $\mathbf{B}$. Então $|\mathbf{a}| = |\mathbf{x}| \cos \varphi$. A contração à direita do bivector $\mathbf{B}$ pelo vetor $\mathbf{x}$ é o vetor $\mathbf{y} = \mathbf{B} \lrcorner \mathbf{x}$ no plano de $\mathbf{B}$, tal que:

- (i) $|\mathbf{y}| = |\mathbf{B}| |\mathbf{a}|$,
- (ii) $\mathbf{y} \perp \mathbf{a}$ e $\mathbf{a} \wedge \mathbf{y} \uparrow \uparrow \mathbf{B}$.

Introduzimos agora a *contração à esquerda* entre vetor e bivector por:

$$\mathbf{x} \lrcorner \mathbf{B} = -\mathbf{B} \lrcorner \mathbf{x},$$

isto é, as *contrações à direita* e à *esquerda* (neste caso) tem sinais opostos.

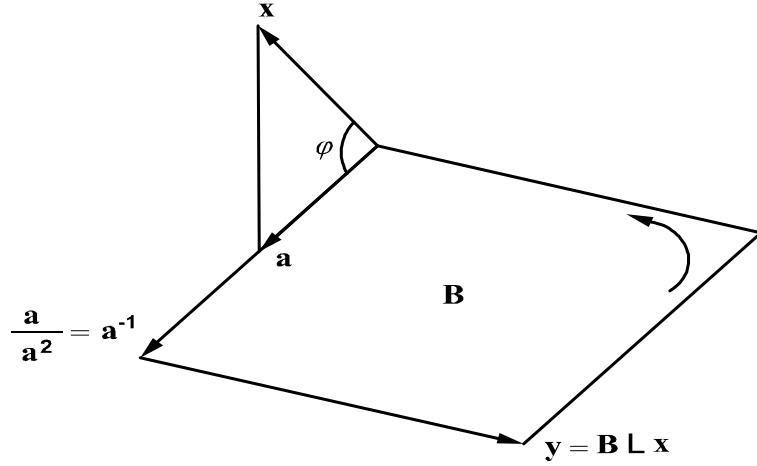


Figura 20

Observando o inverso do vetor $\mathbf{a}$, i.e., o vetor $\mathbf{a}^{-1}$ na Figura 20, vemos que seu significado geométrico nos permite escrever:

$$|\mathbf{B}| = |\mathbf{a}^{-1}| |\mathbf{y}|$$

4.12.1 Contrações e Derivações

O produto de Clifford para dois vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ é a soma de um escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ e um bivetor $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$,

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b},$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \frac{1}{2} (\mathbf{ab} + \mathbf{ba}), \\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= \frac{1}{2} (\mathbf{ab} - \mathbf{ba}). \end{aligned}$$

O produto de Clifford de um vetor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ por um bivetor $\mathbf{B} \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ é a soma de um vetor com um 3-vetor:

$$\mathbf{aB} = \mathbf{a} \lrcorner \mathbf{B} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{B}$$

onde

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{B} &= \frac{1}{2}(\mathbf{a}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{a}), \\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{B} &= \frac{1}{2}(\mathbf{a}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{a}).\end{aligned}$$

Em geral, o produto de Clifford de um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ e um elemento arbitrário $u \in \mathcal{C}\ell_3$, pode ser decomposto na soma da *contração à esquerda* e do produto exterior, como a seguir⁹:

$$\mathbf{x}u = \mathbf{x} \lrcorner u + \mathbf{x} \wedge u. \quad (4.17)$$

No caso em que u é um k -vetor $u = \langle u \rangle_k \in \bigwedge^k \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{x} \lrcorner u = \frac{1}{2}(\mathbf{x}u - (-1)^k u\mathbf{x}) \in \bigwedge^{k-1} \mathbb{R}^3, \quad (4.18)$$

$$\mathbf{x} \wedge u = \frac{1}{2}(\mathbf{x}u + (-1)^k u\mathbf{x}) \in \bigwedge^{k+1} \mathbb{R}^3. \quad (4.19)$$

O produto exterior aumenta o grau do produto de elementos homogêneos, e a contração à esquerda diminui o grau do produto contraído de elementos homogêneos, i.e, para $A_i \in \bigwedge^i \mathbb{R}^3$, $B_j \in \bigwedge^j \mathbb{R}^3$ temos:

$$\begin{aligned}A_i \wedge B_j &\in \bigwedge^{i+j} \mathbb{R}^3, \\ A_i \lrcorner B_j &\in \bigwedge^{j-i} \mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

Obviamente se $i > j$ devemos ter $A_i \lrcorner B_j = 0$.

A *contração à esquerda* entre dois elementos $u, v \in \bigwedge \mathbb{R}^3$ pode ser obtida usando-se o produto exterior e o produto de Clifford, por intermédio da fórmula

$$u \lrcorner v = [u \wedge (v \mathbf{e}_{123})] \mathbf{e}_{123}^{-1}. \quad (4.20)$$

Isso significa que a *contração à esquerda* é o dual do produto exterior. Esta fórmula se deduz usando-se as propriedades que definem a *contração à esquerda*. Estas são:

⁹Um produto escalar sobre $\mathbb{R}^3 \subset \bigwedge \mathbb{R}^3$ induz uma contração sobre $\bigwedge \mathbb{R}^3$ que pode ser usada para introduzir um novo produto $\mathbf{x}u = \mathbf{x} \lrcorner u + \mathbf{x} \wedge u$ para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ e $u \in \bigwedge \mathbb{R}^3$, que estende a linearidade e a associatividade para todo $\bigwedge \mathbb{R}^3$. O espaço linear $\bigwedge \mathbb{R}^3$ munido com este novo produto é a álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_3$.

- 1) $\mathbf{x} \lrcorner \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$,
- 2) $\mathbf{x} \lrcorner (u \wedge v) = (\mathbf{x} \lrcorner u) \wedge v + \hat{u} \wedge (\mathbf{x} \lrcorner v)$,
- 3) $(u \wedge v) \lrcorner w = u \lrcorner (v \lrcorner w)$,

onde $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ e $u, v, w \in \bigwedge \mathbb{R}^3$, $u_p \in \bigwedge^p \mathbb{R}^3$, $v_q \in \bigwedge^q \mathbb{R}^3$ e onde recordamos que $\hat{u} = (-1)^k u$ para $u \in \bigwedge^k \mathbb{R}^3$.

A segunda propriedade, significa que a contração à esquerda por um vetor é uma *derivação* da álgebra exterior $\bigwedge \mathbb{R}^3$, assim como da álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_3$, i.e.,

$$\mathbf{x} \lrcorner (uv) = (\mathbf{x} \lrcorner u) v + \hat{u} (\mathbf{x} \lrcorner v) \text{ para } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad u, v \in \mathcal{C}\ell_3. \quad (4.21)$$

A *contração à direita* é definida pela equação:

$$u_p \lrcorner v_q = (-1)^{p(p-q)} v_q \lrcorner u_p, \text{ onde } p < q$$

Exercício 40 Mostre que se $A_p, B_p \in \bigwedge^p \mathbb{R}^3$ então

$$A_p \lrcorner B_p = \tilde{A}_p \cdot B_p = A_p \lrcorner B_p \quad (4.22)$$

Solução: A fórmula é trivialmente verdadeira para $p = 0, 1$. Para $p = 2$, levando em conta que qualquer bivector em $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ pode ser escrito como o produto estrieto de dois vetores, escrevemos $A_2 = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ e $B_2 = \mathbf{c} \wedge \mathbf{d}$. Usando-se a propriedade 3) da contração escrevemos:

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \lrcorner (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = \mathbf{a} \lrcorner (\mathbf{b} \lrcorner (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d})).$$

Agora, de acordo com a propriedade 2) da contração, temos primeiramente:

$$\mathbf{b} \lrcorner (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{d} - \mathbf{c} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}), \quad (4.23)$$

identidade que se prova como se segue. Usando-se a definição de produto geométrico, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \lrcorner (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) &= \frac{1}{2} [\mathbf{a}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{a}] \\ &= \frac{1}{2} [\mathbf{a} \frac{1}{2} (\mathbf{bc} - \mathbf{cb}) - \frac{1}{2} (\mathbf{bc} - \mathbf{cb})\mathbf{a}] \\ &= \frac{1}{4} [\mathbf{abc} - \mathbf{acb} - \mathbf{bca} + \mathbf{cba}]. \end{aligned}$$

4.13. A ÁLGEBRA DE CLIFFORD VERSUS A ÁLGEBRA EXTERIOR⁸⁵

Adicionando-se ao lado esquerdo dessa expressão o valor

$$0 = \frac{1}{4}[\mathbf{bac} - \mathbf{cab} - \mathbf{bac} + \mathbf{cab}],$$

e reagrupando os termos obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \lrcorner (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) &= \frac{1}{4}[(\mathbf{ab} + \mathbf{ba})\mathbf{c} - (\mathbf{ca} + \mathbf{ac})\mathbf{b} - \mathbf{b}(\mathbf{ca} + \mathbf{ac}) + \mathbf{c}(\mathbf{ba} + \mathbf{ab})] \\ &= \frac{1}{4}[2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - \mathbf{b}2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) + \mathbf{c}2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})] \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b}, \end{aligned}$$

o que prova a Eq.(4.23)

Então usando-se novamante a propriedade 2) da contração,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \lrcorner (\mathbf{b} \lrcorner (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d})) &= \mathbf{a} \lrcorner ((\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d} - \mathbf{c}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})) \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{4.24}$$

Comparando a Eq.(4.24) com a Eq.(4.3) concluimos

$$A_2 \lrcorner B_2 = -A_2 \cdot B_2 = \tilde{A}_2 \cdot B_2.$$

A prova para o caso $p = 3$ é análoga a do caso $p = 2$ e deixada ao cargo do leitor interessado.

4.13 A Álgebra de Clifford Versus a Álgebra Exterior

Ambas as álgebras $\mathcal{Cl}_3$ e $\bigwedge \mathbb{R}^3$, contém uma cópia de $\mathbb{R}^3$. Este fato faz com que aquelas estruturas sejam instrumentos de grande utilidade em diversas aplicações envolvendo cálculos relacionados a geometria dos objetos do espaço afim $(X = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^3, \theta)$. A característica que distingue $\mathcal{Cl}_3$ de $\bigwedge \mathbb{R}^3$ consiste no fato de que a multiplicação de Clifford preserva a norma, $|\mathbf{ab}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$

para todo $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, enquanto $|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$. A equação $|\mathbf{ab}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$ permite a realização de um número maior de cálculos envolvendo operações geométricas em $\mathbb{R}^3$, mais especialmente, cálculos envolvendo rotações que são representadas por operações algébricas bem definidas em $\mathcal{Cl}_3$. Tal afirmação ficará clara com os resultados que apresentaremos nos dois próximos capítulos.

Exercício 41 *Mostre que o produto de Clifford de um bivector $\mathbf{B} \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ e um elemento arbitrário $u \in \mathcal{Cl}_3$ pode ser decomposto como:*

$$\mathbf{B}u = \mathbf{B} \lrcorner u + \frac{1}{2} (\mathbf{B}u - u\mathbf{B}) + \mathbf{B} \wedge u.$$

Solução: Desejamos provar que para $\mathbf{B} = \langle \mathbf{B} \rangle_2 \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ e $\forall u \in \mathcal{Cl}_3$ temos:

$$\mathbf{B}u = \mathbf{B} \lrcorner u + \mathbf{B} \times u + \mathbf{B} \wedge u. \quad (4.25)$$

onde

$$\mathbf{B} \times u := \frac{1}{2} (\mathbf{B}u - u\mathbf{B}) \quad (4.26)$$

A primeira coisa que devemos recordar é que $u \in \mathcal{Cl}_3$ pode ser escrito como

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3, \quad (4.27)$$

com $u_i = \langle u_i \rangle_i \in \bigwedge^i \mathbb{R}^3, i = 0, 1, 2, 3$. Agora note que podemos escrever

$$\mathbf{B}u_0 = \mathbf{B} \lrcorner u_0 + \mathbf{B} \times u_0 + \mathbf{B} \wedge u_0 \quad (4.28)$$

uma vez que a definição de contração à esquerda $\mathbf{B} \lrcorner u_0 = 0$,

$$\mathbf{B} \times u_0 = \frac{1}{2} (\mathbf{B}u_0 - u_0\mathbf{B}) = \frac{1}{2} (u_0\mathbf{B} - u_0\mathbf{B}) = 0 \quad (4.29)$$

e $\mathbf{B} \wedge u_0 = \mathbf{B}u_0$.

Observe também que podemos escrever

$$\mathbf{B}u_1 = \mathbf{B} \lrcorner u_1 + \mathbf{B} \times u_1 + \mathbf{B} \wedge u_1. \quad (4.30)$$

De fato, da definição de contração à esquerda $\mathbf{B} \lrcorner u_1 = 0$ e levando em conta que

$$\mathbf{B} \wedge u_1 := \frac{1}{2} (\mathbf{B}u_1 + u_1\mathbf{B}) \quad (4.31)$$

4.13. A ÁLGEBRA DE CLIFFORD VERSUS A ÁLGEBRA EXTERIOR⁸⁷

e da Eq.(4.26), temos:

$$\mathbf{B}u_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{B}u_1 - u_1\mathbf{B}) + \frac{1}{2}(\mathbf{B}u_1 + u_1\mathbf{B}) \quad (4.32)$$

$$= \mathbf{B} \times u_1 + \mathbf{B} \wedge u_1 = \mathbf{B} \lrcorner u_1 + \mathbf{B} \times u_1 + \mathbf{B} \wedge u_1. \quad (4.33)$$

Calculemos agora $\mathbf{B}u_2$. É óbvio que $\mathbf{B} \wedge u_2 = 0$. Agora, a contração à esquerda entre $w, v \in \bigwedge^3 \mathbb{R}^3$ pode ser obtida a partir do produto exterior e do produto de Clifford pela fórmula (ver 4.20)

$$w \lrcorner v = [w \wedge (v \mathbf{e}_{123})] \mathbf{e}_{123}^{-1} \quad (4.34)$$

Assim no caso particular $w = \mathbf{B}, v = u_2$ temos que $u_2 \mathbf{e}_{123} \in \bigwedge^1 \mathbb{R}^3, \mathbf{B} \wedge (u_2 \mathbf{e}_{123}) \in \bigwedge^3 \mathbb{R}^3$ e finalmente

$$\mathbf{B} \lrcorner u_2 = [\mathbf{B} \wedge (u_2 \mathbf{e}_{123})] \mathbf{e}_{123}^{-1} \in \bigwedge^0 \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R} \quad (4.35)$$

Por outro lado usando a definição do produto exterior entre bivector e vetor Eq.(4.31), temos:

$$\mathbf{B} \wedge (u_2 \mathbf{e}_{123}) = \frac{1}{2}(\mathbf{B}u_2 \mathbf{e}_{123} + u_2 \mathbf{e}_{123} \mathbf{B}) \quad (4.36)$$

e então sendo que $\mathbf{i} = \mathbf{e}_{123}$ comuta com bivector, isto é, $\mathbf{iB} = \mathbf{Bi}$ podemos escrever a Eq.(4.36) como

$$\mathbf{B} \wedge (u_2 \mathbf{e}_{123}) = \frac{1}{2}(\mathbf{B}u_2 + u_2 \mathbf{B}) \mathbf{e}_{123} \quad (4.37)$$

e portanto obtemos a identidade

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \lrcorner u_2 &= \left[\frac{1}{2}(\mathbf{B}u_2 + u_2 \mathbf{B}) \mathbf{e}_{123} \right] \mathbf{e}_{123}^{-1} \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{B}u_2 + u_2 \mathbf{B}) \mathbf{e}_{123} \mathbf{e}_{123}^{-1} \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{B}u_2 + u_2 \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Desta maneira levando em conta que podemos escrever

$$\mathbf{B}u_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{B}u_2 + u_2 \mathbf{B}) + \frac{1}{2}(\mathbf{B}u_2 - u_2 \mathbf{B}) \quad (4.39)$$

recordando que $\mathbf{B} \wedge u_2 = 0$, temos

$$\mathbf{B}u_2 = \mathbf{B} \lrcorner u_2 + \mathbf{B} \times u_2 + \mathbf{B} \wedge u_2. \quad (4.40)$$

Investiguemos finalmente $\mathbf{B}u_3$. Notemos de imediato que $\mathbf{B} \wedge u_3 = 0$. Agora,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \lrcorner u_3 &= [\mathbf{B} \wedge (u_3 \mathbf{e}_{123})] \mathbf{e}_{123}^{-1} \\ &= [\mathbf{B} \wedge (u_3 \mathbf{i})] \mathbf{i}^{-1}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

e como $u_3 \mathbf{i} \in \bigwedge^0 \mathbb{R}^3$, usando a definição do produto exterior de bivector por vetor e o fato $\mathbf{i}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{i}$, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \wedge (u_3 \mathbf{i}) &= \frac{1}{2} (\mathbf{B}u_3 \mathbf{i} + u_3 \mathbf{i}\mathbf{B}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{B}u_3 + u_3 \mathbf{B}) \mathbf{i} \end{aligned} \quad (4.42)$$

e portanto

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \lrcorner u_3 &= \left[\frac{1}{2} (\mathbf{B}u_3 + u_3 \mathbf{B}) \mathbf{i} \right] \mathbf{i}^{-1} \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{B}u_3 + u_3 \mathbf{B}) \mathbf{i} \mathbf{i}^{-1} \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{B}u_3 + u_3 \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (4.43)$$

Assim

$$\begin{aligned} \mathbf{B}u_3 &= \frac{1}{2} (\mathbf{B}u_3 + u_3 \mathbf{B}) + \frac{1}{2} (\mathbf{B}u_3 - u_3 \mathbf{B}) \\ &= \mathbf{B} \lrcorner u_3 + \mathbf{B} \times u_3 + \mathbf{B} \wedge u_3. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Finalmente somando-se as Eqs.(4.30), (4.32), (4.39) e (4.44) temos:

$$\begin{aligned} &\mathbf{B}(u_0 + u_1 + u_2 + u_3) \\ &= \mathbf{B} \lrcorner (u_0 + u_1 + u_2 + u_3) + \mathbf{B} \times (u_0 + u_1 + u_2 + u_3) + \mathbf{B} \wedge (u_0 + u_1 + u_2 + u_3) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathbf{B}u = \mathbf{B} \lrcorner u + \mathbf{B} \times u + \mathbf{B} \wedge u.$$

Exercício 42 Seja $\mathbf{A}_k \in \bigwedge^k \mathbb{R}^3$. Mostre que seu dual de Hodge $\star \mathbf{A}_k$ é dado por:

4.13. A ÁLGEBRA DE CLIFFORD VERSUS A ÁLGEBRA EXTERIOR 89

$$\star \mathbf{A}_k = \tilde{\mathbf{A}}_k \mathbf{i},$$

onde

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_{123} \text{ e } \tilde{\mathbf{A}}_k = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}.$$

Solução: Aqui, mostraremos tal resultado somente para $\mathbf{a} \in \bigwedge^1 \mathbb{R}^3$, deixando os demais casos para a verificação do leitor interessado. De acordo com a definição de $\star \mathbf{a}$ devemos ter para $\forall \mathbf{b} \in \bigwedge^1 \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{b} \wedge \star \mathbf{a} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{i}.$$

Agora, como $\mathbf{a} \mathbf{i} = \mathbf{a} \lrcorner \mathbf{i}$ é um bivector, devemos ter levando em conta ainda que $\mathbf{a} \mathbf{i} = \mathbf{i} \mathbf{a}$, que:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \mathbf{i} &= \frac{1}{2}(\mathbf{b} \mathbf{a} \mathbf{i} + \mathbf{a} \mathbf{i} \mathbf{b}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{b} \mathbf{a} + \mathbf{a} \mathbf{b}) \mathbf{i} \\ &= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{i}, \end{aligned}$$

o que prova o que queríamos demonstrar.

Exercício 43 Mostre que $u \lrcorner v = \star(\star^{-1}(v) \wedge \tilde{u})$.

Solução: Para mostrar que

$$u \lrcorner v = \star(\star^{-1}(v) \wedge \tilde{u}), \quad (4.45)$$

note primeiramente que designando-se $\mathbf{i} = \mathbf{e}_{123}$ podemos escrever

$$\begin{aligned} \star &: \bigwedge^p \mathbb{R}^3 \longrightarrow \bigwedge^{3-p} \mathbb{R}^3, \\ u &\longmapsto \star u = \tilde{u} \mathbf{i} \end{aligned}$$

Note também que sendo

$$\star(\star^{-1}u) = u, \quad (4.46)$$

devemos ter

$$\star^{-1}u = \mathbf{i} \tilde{u}. \quad (4.47)$$

Agora, tenha em mente que provar a fórmula para $u = u_p \in \bigwedge^p \mathbb{R}^3$ e $v = v_q \in \bigwedge^q \mathbb{R}^3$ é suficiente, pois para $u = \sum_r u_r$ e $v = \sum_s v_s$, com $u_r \in \bigwedge^r \mathbb{R}^3$ e $v_s \in \bigwedge^s \mathbb{R}^3$, $r, s = 0, 1, 2, 3$ temos

$$u \lrcorner v = \sum_{r,s} u_r \lrcorner v_s. \quad (4.48)$$

Agora, uma vez que $\mathbf{i}^{-1} = \tilde{\mathbf{i}} = -\mathbf{i}$, e de acordo com a Eq.(4.20)

$$\begin{aligned} u_p \lrcorner v_q &= [u_p \wedge (v_q \mathbf{e}_{123})] \mathbf{e}_{123}^{-1} \\ &= [u_p \wedge (v_q \mathbf{i})] \mathbf{i}^{-1} \\ &= [u_p \wedge (v_q \mathbf{i})] \tilde{\mathbf{i}} \\ &= [u_p \wedge (v_q \tilde{\mathbf{i}})] \mathbf{i} \\ &= \star [(\mathbf{i} \tilde{v}_q) \wedge \tilde{u}_p] \\ &= \star [\star^{-1}(v_q) \wedge \tilde{u}_p] \end{aligned} \quad (4.49)$$

Exercício 44 Mostre usando a Eq.(4.20) que $1 \lrcorner u = u$ para todo $u \in \bigwedge \mathbb{R}^3$.

Solução: Da Eq.(4.20) escrevemos:

$$1 \lrcorner u = (1 \wedge (u \mathbf{i})) \mathbf{i}^{-1}.$$

Assim,

$$(1 \wedge (u \mathbf{i})) \mathbf{i}^{-1} = (u \mathbf{i}) \mathbf{i}^{-1} = u \mathbf{i} \mathbf{i}^{-1} = u.$$

Capítulo 5

As Matrizes Spin de Pauli e Spinors

O experimento de Stern-Gerlach¹ realizado em 1922, mostrou a deflexão de partículas elementares carregadas quando tais partículas, por exemplo, um feixe de elétrons, atravessava um campo magnético não-uniforme. A deflexão observada foi a de que o feixe se dividia em duas componentes. Tal fato foi interpretado teoricamente atribuindo-se aos elétrons não somente uma massa e carga elétrica, mas também uma nova propriedade, o *spin* ao qual está associado um momento de dipolo magnético. A descrição matemática (usando-se a Mecânica Quântica) do spin de um elétron está intimamente associada à álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_3$ e o grupo $\text{Spin}(3) \subset \mathcal{Cl}_3$. Para entendermos tal afirmação, recordemos que os textos de Mecânica Quântica iniciam o capítulo sobre spin dizendo que Pauli², um dos pioneiros na descrição desse novo estado quântico, introduziu um conjunto de três matrizes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (as matrizes de Pauli), que desempenham um papel de destaque na teoria do spin do elétron. Tais matrizes são:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Elas satisfazem:

$$\sigma_1 \sigma_2 = i \sigma_3 \text{ (permutação cíclica)} \quad (5.2)$$

¹Otto Stern e Walther Gerlach.

²Wolfgang Ernst Pauli (1900-1978), físico austríaco.

e a relação de anti-comutação

$$\sigma_j \sigma_k + \sigma_k \sigma_j = 2\delta_{jk} I, \quad (5.3)$$

onde na Eq.(5.3) I se refere a matriz identidade bidimensional.

5.1 Vetores Unitários Ortogonais e Base Ortonormal

O espaço vetorial euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$ possui infinitas bases ortogonais, cada uma delas formada por três vetores unitários. Seja $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ uma tal base. Como já sabemos, a álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_3$ de $\mathbb{R}^3$, é a álgebra real associativa gerada pelo conjunto $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ quando os elementos de tal conjunto satisfazem as relações

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1^2 &= 1, \quad \mathbf{e}_2^2 = 1, \quad \mathbf{e}_3^2 = 1, \\ \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 &= -\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Recordamos ademais que $\mathcal{C}\ell_3$ é 8 - dimensional, com uma base formada pelos elementos:

1	escalar
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	vetores
$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$	bivetores
$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$	elemento de volume

Assim, um elemento arbitrário $u \in \mathcal{C}\ell_3$ é uma soma de um escalar, um vetor, um bivector e um elemento de volume, e pode ser escrito como³

$$u = \alpha + \mathbf{a} + \mathbf{b} \mathbf{e}_{123} + \beta \mathbf{e}_{123}, \quad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ e } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3. \quad (5.4)$$

Exemplo 45 Calcule o produto $\mathbf{e}_{12} \mathbf{e}_{13}$.

Solução: Por definição $\mathbf{e}_{12} \mathbf{e}_{13} = (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3)$ pela associatividade

$$(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3.$$

Aplicando a anti-comutatividade e substituindo $\mathbf{e}_1^2 = 1$, temos $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$.

³Lembrando que o dual de Hodge associa vetores a bivectores.

Observação 46 *Unidade imaginária.* Os três bivectores $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ representam unidades de planos orientados e também são geradores de rotações nos planos coordenados correspondentes. Eles partilham uma propriedade básica da unidade imaginária, qual seja, $(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j)^2 = -1$ para $i \neq j$. O elemento de volume orientado $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ também partilha a propriedade básica da unidade imaginária, $(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)^2 = -1$, e além disso ele comuta com todos os elementos em $\mathcal{Cl}_3$. Como vimos no capítulo anterior, a unidade de volume orientado representa o operador de dualidade.

5.2 Representação de $\mathcal{Cl}_3$ em $\text{Mat}(2, \mathbb{C})$

No que segue denotaremos o conjunto das matrizes 2×2 com entradas complexas por $\text{Mat}(2, \mathbb{C})$. Consideraremos tal conjunto (i.e., $\text{Mat}(2, \mathbb{C})$) como uma álgebra *real*. Tal significa que o espaço linear dos elementos de $\text{Mat}(2, \mathbb{C})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. O produto na álgebra real $\text{Mat}(2, \mathbb{C})$ é o produto matricial. As matrizes spin de Pauli, σ_i , $i = 1, 2, 3$ introduzidas na Eq.(5.1) juntamente com a matriz I geram a álgebra real $\text{Mat}(2, \mathbb{C})$ uma vez que qualquer $U \in \text{Mat}(2, \mathbb{C})$ pode ser escrito como

$$U = a_0 I + \sum_{j=1}^3 a_j \sigma_j.$$

As matrizes σ_i , $i = 1, 2, 3$ satisfazem (como se verifica trivialmente) as propriedades:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = I, \\ \sigma_1\sigma_2 &= i\sigma_3 = -\sigma_2\sigma_1, \\ \sigma_3\sigma_1 &= i\sigma_2 = -\sigma_1\sigma_3, \\ \sigma_2\sigma_3 &= i\sigma_1 = -\sigma_3\sigma_2, \end{aligned}$$

que são análogas as propriedades satisfeitas por $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3 \subset \mathcal{Cl}_3$.

A correspondência $\mathbf{e}_1 \simeq \sigma_1, \mathbf{e}_2 \simeq \sigma_2, \mathbf{e}_3 \simeq \sigma_3$, estabelece um isomorfismo entre as álgebras reais $\mathcal{Cl}_3$ e $\text{Mat}(2, \mathbb{C})$, com a seguinte correspondência para os elementos da base de $\mathcal{Cl}_3$:

$\text{Mat}(2, \mathbb{C})$	$\mathcal{C}\ell_3$
I	1
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$
$\sigma_1\sigma_2, \sigma_1\sigma_3, \sigma_2\sigma_3$	$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$
$\sigma_1\sigma_2\sigma_3$	$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$

A principal diferença entre a álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_3$ e a álgebra das matrizes $\text{Mat}(2, \mathbb{C})$, é que em $\mathcal{C}\ell_3$, distinguimos o subespaço dos vetores $\mathbb{R}^3$ onde o quadrado de um vetor é igual a sua norma ao quadrado, ou seja, $r^2 = |r|^2$. Na álgebra das matrizes $\text{Mat}(2, \mathbb{C})$ não há *nenhum* subespaço com tal distinção. Em vez disso, escolhe-se (veja mais abaixo) o conjunto das matrizes hermitianas de traço nulo, para representar o $\mathbb{R}^3$, o que adiciona uma estrutura extra a $\text{Mat}(2, \mathbb{C})$.

Exemplo 47 *Podemos escolher, para representar a anti-comutatividade de vetores unitários de $\mathbb{R}^3$, no lugar das matrizes de Pauli, as seguintes matrizes:*

Exemplo 48

$$u_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3i & 5 \\ 5 & -3i \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, u_3 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & -3i \\ -3i & -5 \end{pmatrix},$$

onde $u_1 = \frac{1}{4}(5\sigma_1 + 3\sigma_1\sigma_2)$, $u_2 = \sigma_2$, $u_3 = \frac{1}{4}(5\sigma_3 - 3\sigma_2\sigma_3)$. Estas matrizes são não-hermitianas mas satisfazem

$$u_i u_k + u_k u_i = 2\delta_{jk} I$$

Note que $u_1 u_2 = \frac{1}{4}(5\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_1)$ e $u_2 u_1 = -\frac{1}{4}(5\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_1) = -u_1 u_2$.

5.3 O Centro de $\mathcal{C}\ell_3$

O elemento $\mathbf{e}_{123}$ comuta com todos os elementos de $\mathcal{C}\ell_3$. Mais geralmente, os elementos da forma

$$x + y\mathbf{e}_{123} \simeq \begin{pmatrix} x + iy & 0 \\ 0 & x + iy \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

comutam com todos os elementos de $\mathcal{C}\ell_3$. A subálgebra dos escalares e 3-vetores

$$\mathbb{R} \oplus \bigwedge^3 \mathbb{R}^3 = \{x + y\mathbf{e}_{123} \mid x, y \in \mathbb{R}\},$$

é o *centro* de $\mathcal{Cl}_3$, ou seja, tal subálgebra contém todos os elementos de $\mathcal{Cl}_3$ que comutam com todos os elementos de $\mathcal{Cl}_3$. Note que $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = iI$. Haja visto que $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = -1$, o centro de $\mathcal{Cl}_3$ é isomorfo ao corpo dos complexos $\mathbb{C}$, i.e.,

$$\text{Cen}(\mathcal{Cl}_3) = \mathbb{R} \oplus \bigwedge^3 \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{C}.$$

5.4 A Subálgebra Par $\mathcal{Cl}_3^+$

Os elementos 1 e $\mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{23}$ são como já sabemos, elementos pares de $\mathcal{Cl}_3$. Eles são representados pelas seguintes matrizes:

$$w + x\mathbf{e}_{23} + y\mathbf{e}_{31} + z\mathbf{e}_{12} \simeq \begin{pmatrix} w + iz & ix + y \\ ix - y & w - iz \end{pmatrix}.$$

Ademais, os elementos pares formam um subespaço real

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 &= \{w + x\mathbf{e}_{23} + y\mathbf{e}_{31} + z\mathbf{e}_{12} \mid w, x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &\simeq \{wI + xi\sigma_1 + yi\sigma_2 + zi\sigma_3 \mid w, x, y, z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

que é fechado para a operação de multiplicação. Portanto, o subespaço $\mathbb{R} \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ é uma subálgebra, chamada a subálgebra par de $\mathcal{Cl}_3$, que denotada por $\mathcal{Cl}_3^+$. Esta subálgebra par como já mostramos é isomorfa à álgebra dos quatérnions $\mathbb{H}$. Aqui recordamos, uma vez mais, aquela importante correspondência que permitira estabelecermos que $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \simeq \mathcal{Cl}_3$.

$$\begin{array}{ll} \mathbb{H} & \mathcal{Cl}_3^+ \\ \mathbf{i} & -\mathbf{e}_{23} \\ \mathbf{j} & -\mathbf{e}_{31} \\ \mathbf{k} & -\mathbf{e}_{12} \end{array}$$

Observação 49 A álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_3$ contém duas subálgebras, o centro, que é isomorfo aos complexos $\mathbb{C}$, e a subálgebra par, que é isomorfa à álgebra dos quatérnions, e podemos escrever:

- 1) $ab = ba$ para $a \in \mathbb{C}$ e $b \in \mathbb{H}$,
- 2) $\mathcal{Cl}_3$ é gerada como uma álgebra real por $\mathbb{C}$ e por $\mathbb{H}$,
- 3) $(\dim \mathbb{C})(\dim \mathbb{H}) = \dim \mathcal{Cl}_3$.

Das três observações temos imediatamente que

$$\mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \simeq \mathcal{Cl}_3$$

5.5 Involuções em $\mathcal{C}\ell_3$

A álgebra de Clifford possui três involuções semelhantes a conjugação complexa.

Tomando um elemento arbitrário $u \in \mathcal{C}\ell_3$ e escrevendo-se

$$u = \langle u \rangle_0 + \langle u \rangle_1 + \langle u \rangle_2 + \langle u \rangle_3, \quad (5.6)$$

introduzimos as seguintes involuções:

$$\hat{u} = \langle u \rangle_0 - \langle u \rangle_1 + \langle u \rangle_2 - \langle u \rangle_3 \text{ involução graduada,} \quad (5.7)$$

$$\tilde{u} = \langle u \rangle_0 + \langle u \rangle_1 - \langle u \rangle_2 - \langle u \rangle_3 \text{ reversão,} \quad (5.8)$$

$$\bar{u} = \langle u \rangle_0 - \langle u \rangle_1 - \langle u \rangle_2 + \langle u \rangle_3 \text{ Clifford-conjugado.} \quad (5.9)$$

Como já vimos anteriormente, a Clifford-conjugado é uma composição das duas outras involuções:

$$\bar{u} = \widehat{(\tilde{u})} = (\langle u \rangle_0 - \langle u \rangle_1 + \langle u \rangle_2 - \langle u \rangle_3)^\sim = \langle u \rangle_0 - \langle u \rangle_1 - \langle u \rangle_2 + \langle u \rangle_3 = \widehat{(\tilde{u})}.$$

A correspondência $\sigma_1 \simeq \mathbf{e}_1, \sigma_2 \simeq \mathbf{e}_2, \sigma_3 \simeq \mathbf{e}_3$ fixa as seguintes representações para as involuções:

$$u \simeq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \hat{u} \simeq \begin{pmatrix} d^* & -c^* \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad \tilde{u} \simeq \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}, \quad \bar{u} \simeq \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

$a, b, c, d \in \mathbb{C}.$ (5.10)

onde o asterisco denota a conjugação complexa. Observamos que a reversa $\tilde{u}$ é representada pela matriz hermitiana conjugada $u^\dagger$ e a Clifford-conjugado $\bar{u}$ é representada pela matriz $u^{-1} \det u \in \text{Mat}(2, \mathbb{R})$, desde que a matriz u seja inversível.

A involução graduada induz uma graduação par-ímpar em $\mathcal{C}\ell_3$, isto é, $\mathcal{C}\ell_3 = \mathcal{C}\ell_3^+ \oplus \mathcal{C}\ell_3^-$. Note que

$$\hat{u} = \langle u \rangle_0 - \langle u \rangle_1 + \langle u \rangle_2 - \langle u \rangle_3 = (\langle u \rangle_0 + \langle u \rangle_2) - (\langle u \rangle_1 + \langle u \rangle_3)$$

A involução graduada, pode ser usada para estender a norma de $\mathbb{R}^3$ para todo os elementos de $\mathcal{C}\ell_3$:

$$|u|^2 = \langle u\tilde{u} \rangle_0$$

A norma de

$$u = u_0 + u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3 + u_{12}\mathbf{e}_{12} + u_{13}\mathbf{e}_{13} + u_{23}\mathbf{e}_{23} + u_{123}\mathbf{e}_{123} \quad (5.11)$$

pode ser obtida como:

$$|u|^2 = |u_0|^2 + |u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2 + |u_{12}|^2 + |u_{13}|^2 + |u_{23}|^2 + |u_{123}|^2 \quad (5.12)$$

A norma satisfaz a inequação:

$$|uv| \leq \sqrt{2} |u| |v| \text{ para } u, v \in \mathcal{Cl}_3. \quad (5.13)$$

A conjugação pode ser usada para se determinar o inverso de $u \in \mathcal{Cl}_3$. Temos imediatamente que se $u\bar{u} \neq 0$,

$$u^{-1} = \frac{\bar{u}}{u\bar{u}}. \quad (5.14)$$

Note que elemento $u\bar{u} = \bar{u}u$ está no centro $\mathbb{R} \oplus \bigwedge^3 \mathbb{R}^3$ de $\mathcal{Cl}_3$.

Exemplo 50 *Mostre que cada elemento par não nulo em $\mathcal{Cl}_3^+$ é inversível.*

Solução: Seja u um elemento não nulo arbitrário em $\mathcal{Cl}_3^+ = \mathbb{R} \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$, tal que

$$u = w + x\mathbf{e}_{23} + y\mathbf{e}_{31} + z\mathbf{e}_{12} \simeq \begin{pmatrix} w + iz & ix + y \\ ix - y & w - iz \end{pmatrix}, \quad x, y, z, w \in \mathbb{R}$$

Queremos mostrar que u é inversível.

- Se $u = w \neq 0$ e $x = y = z = 0$ é trivial, pois $w \in \mathbb{R}$ e todo elemento não nulo em $\mathbb{R}$ é inversível.

- Suponhamos $w, x, y, z \in \mathbb{R}^*$. Procuramos $v \in \mathcal{Cl}_3^+$, tal que

$$uv = 1, \text{ isto é, } v = \frac{\bar{u}}{u\bar{u}},$$

temos que $\bar{u} = w - x\mathbf{e}_{23} - y\mathbf{e}_{31} - z\mathbf{e}_{12}$ e $u\bar{u} = w^2 + x^2 + y^2 + z^2$. Assim

$$\begin{aligned} v &= \frac{w - x\mathbf{e}_{23} - y\mathbf{e}_{31} - z\mathbf{e}_{12}}{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \frac{wI + xi\sigma_1 + yi\sigma_2 + zi\sigma_3}{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} \\ &\simeq \frac{1}{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} \begin{pmatrix} w - iz & -ix - y \\ -ix + y & w + iz \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

deste modo, está demonstrado que todo elemento não nulo de $\mathcal{Cl}_3^+$ é inversível.

Exemplo 51 *Mostre que a norma sobre $\mathcal{Cl}_3$, definida por $|u|^2 = \langle u\tilde{u} \rangle_0$, concorda com a norma dada por $|u|^2 = \langle u, u \rangle$ onde o produto bilinear simétrico é determinado por*

$$\begin{aligned}\langle \alpha, \beta \rangle &= \alpha\beta \text{ para } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \text{ para } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3\end{aligned}$$

e por

$$(\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_k) \cdot (\mathbf{y}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{y}_k) = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y}_1 & \dots & \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y}_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{x}_k \cdot \mathbf{y}_1 & \dots & \mathbf{x}_k \cdot \mathbf{y}_k \end{vmatrix} \quad (5.15)$$

em $\bigwedge^k \mathbb{R}^3$, $k \geq 2$.

Solução: Escreva

$$u = \alpha + \mathbf{a} + \mathbf{bi} + \beta \mathbf{i}. \quad (5.16)$$

Então

$$\begin{aligned}u\tilde{u} &= (\alpha + \mathbf{a} + \mathbf{bi} + \beta \mathbf{i})(\alpha + \mathbf{a} - \mathbf{bi} - \beta \mathbf{i}) \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + 2\alpha\mathbf{a} + 2\beta\mathbf{b} + 2\mathbf{a} \times \mathbf{b},\end{aligned} \quad (5.17)$$

e

$$\langle u\tilde{u} \rangle_0 = \alpha^2 + \beta^2 + \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 \quad (5.18)$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}\langle u, u \rangle &= u \cdot u \\ &= (\alpha + \mathbf{a} + \mathbf{bi} + \beta \mathbf{i})(\alpha + \mathbf{a} + \mathbf{bi} + \beta \mathbf{i}) \\ &= \alpha^2 + \mathbf{a}^2 + \mathbf{bi} \cdot \mathbf{bi} + \beta \mathbf{i} \cdot \beta \mathbf{i}.\end{aligned} \quad (5.19)$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{bi} &= \mathbf{b} \lrcorner (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) + \mathbf{b} \wedge (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) \\ &= \mathbf{b} \lrcorner (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) \\ &= b_1(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) + b_2(\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1) + b_3(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2),\end{aligned}$$

onde

$$b_i = \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Portanto

$$\mathbf{bi} = \mathbf{b}_\perp (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3)$$

e usando-se a última fórmula da Eq.(5.15) temos

$$\mathbf{bi} \cdot \mathbf{bi} = \mathbf{b}^2 \quad (5.20)$$

Também

$$\begin{aligned} \beta \mathbf{i} \cdot \beta \mathbf{i} &= \beta^2 (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) \\ &= \beta^2 \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \beta^2, \end{aligned} \quad (5.21)$$

e usando-se estes resultados, a proposição fica provada.

Exemplo 52 *Mostre que a reflexão através do plano do bivetor $\mathbf{A}$ é obtida por*

$$\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}' = -\mathbf{A}\mathbf{r}\mathbf{A}^{-1}.$$

Solução: O plano π descrito por um bivetor $\mathbf{A}$ é o plano ortogonal ao vetor $\mathbf{Ai}$. Ademais, podemos escrever

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_\parallel + \mathbf{r}_\perp \quad (5.22)$$

onde $\mathbf{r}_\parallel$ encontra-se no plano π e $\mathbf{r}_\perp$ é ortogonal à π . Evidentemente o vetor refletido em π é

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_\parallel - \mathbf{r}_\perp.$$

Agora calculemos $\mathbf{r}_\parallel \mathbf{A}$ e $\mathbf{A} \mathbf{r}_\parallel$. Temos

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\parallel \mathbf{A} &= (\mathbf{r}_\parallel \lrcorner \mathbf{A} + \mathbf{r}_\parallel \wedge \mathbf{A}) \\ &= \mathbf{r}_\parallel \lrcorner \mathbf{A}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{r}_\parallel &= \mathbf{A} \lrcorner \mathbf{r}_\parallel + \mathbf{A} \wedge \mathbf{r}_\parallel \\ &= \mathbf{A} \lrcorner \mathbf{r}_\parallel, \end{aligned} \quad (5.23)$$

onde usamos o fato de que⁴ $\mathbf{r}_{\parallel} \wedge \mathbf{A} = \mathbf{A} \wedge \mathbf{r}_{\parallel} = \mathbf{0}$ e

$$\mathbf{r}_{\parallel} \lrcorner \mathbf{A} = -\mathbf{A} \lrcorner \mathbf{r}_{\parallel} \quad (5.24)$$

temos

$$\mathbf{A} \mathbf{r}_{\parallel} = -\mathbf{r}_{\parallel} \mathbf{A}. \quad (5.25)$$

Analogamente

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{r}_{\perp} &= (\mathbf{A} \lrcorner \mathbf{r}_{\perp} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{r}_{\perp}) \\ \mathbf{r}_{\perp} \mathbf{A} &= (\mathbf{r}_{\perp} \lrcorner \mathbf{A} + \mathbf{r}_{\perp} \wedge \mathbf{A}) \end{aligned}$$

Como $\mathbf{r}_{\perp}$ é ortogonal ao plano determinado por $\mathbf{A}$, então

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\perp} \lrcorner \mathbf{A} &= \mathbf{r}_{\perp} \lrcorner \alpha(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \\ &= \alpha(\mathbf{r}_{\perp} \cdot \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{r}_{\perp} \cdot \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Também $\mathbf{A} \lrcorner \mathbf{r}_{\perp} = 0$ e como $\mathbf{A} \wedge \mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp} \wedge \mathbf{A}$, temos que $\mathbf{A} \mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp} \mathbf{A}$. Segue que uma vez que

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{A}^2},$$

temos

$$\begin{aligned} \mathbf{A} (\mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}) \mathbf{A}^{-1} &= (\mathbf{A} \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{A} \mathbf{r}_{\perp}) \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{A}^2} \\ &= (\mathbf{A} \mathbf{r}_{\parallel} \mathbf{A} + \mathbf{A} \mathbf{r}_{\perp} \mathbf{A}) \frac{1}{\mathbf{A}^2} \\ &= (-\mathbf{r}_{\parallel} \mathbf{A} \mathbf{A} + \mathbf{A} \mathbf{A} \mathbf{r}_{\perp}) \frac{1}{\mathbf{A}^2} \\ &= -\mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp} = -\mathbf{r}'. \end{aligned}$$

5.6 Reflexões e Rotações

No espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ os vetores⁵ $\mathbf{r}$ e $\mathbf{a} \mathbf{r} \mathbf{a}^{-1} = 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{a}^{-1} - \mathbf{r}$ são simétricos com respeito ao eixo $\mathbf{a}$. O vetor oposto à $\mathbf{a} \mathbf{r} \mathbf{a}^{-1}$ é dado por:

$$-\mathbf{a} \mathbf{r} \mathbf{a}^{-1} = \mathbf{r} - 2 \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{\mathbf{a}^2} \mathbf{a},$$

⁴De fato podemos sem perda de generalidade supor que π é o plano determinado por $\mathbf{A} = \alpha(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) para alguma base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. Nestas condições como $\mathbf{r}_{\parallel} = \beta \mathbf{e}_1 + \gamma \mathbf{e}_2$ ($\beta, \gamma \in \mathbb{R}$) segue que $\mathbf{r}_{\parallel} \wedge \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

⁵Use a definição do produto de Clifford onde $\mathbf{a} \mathbf{r} + \mathbf{r} \mathbf{a} = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$.

que é obtido refletindo-se $\mathbf{r}$ no plano $\mathbf{a}\mathbf{e}_{123}$.

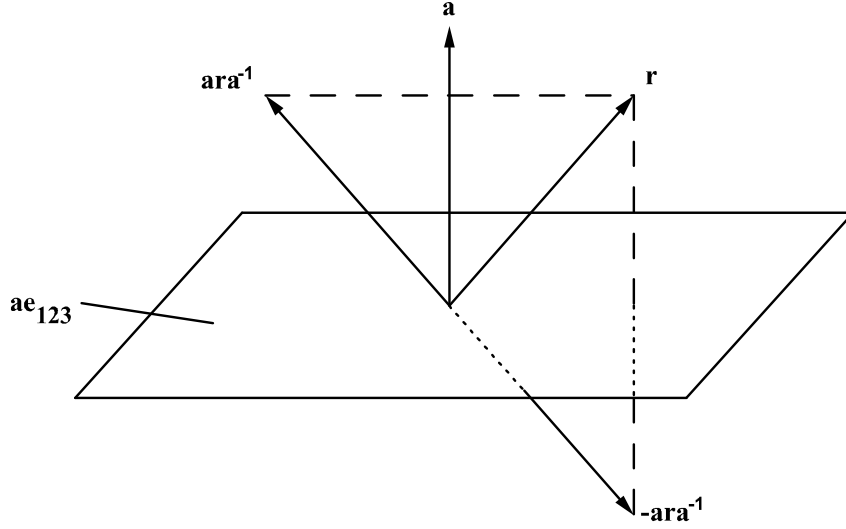


Figura 21

Considere um vetor $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$ e o bivetor $\mathbf{a}\mathbf{e}_{123} = a_1\mathbf{e}_{23} + a_2\mathbf{e}_{31} + a_3\mathbf{e}_{12}$ que é o dual de $\mathbf{a}$. O vetor $\mathbf{a}$ tem quadrado positivo

$$\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2, \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

mas o bivetor $\mathbf{a}\mathbf{e}_{123}$ tem quadrado negativo

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}\mathbf{e}_{123})^2 &= -|\mathbf{a}|^2. \\ \mathbf{a}\mathbf{e}_{123} &= \pm\sqrt{-|\mathbf{a}|^2} \\ \mathbf{a}\mathbf{e}_{123} &= \pm|\mathbf{a}|\mathbf{i}. \end{aligned}$$

Segue disso que pondo

$$\alpha = |\mathbf{a}|, \quad \mathbf{a} = \alpha\mathbf{n},$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}
 \exp(\mathbf{ai}) &= 1 + \mathbf{ai} + \frac{1}{2}(\mathbf{ai})^2 + \frac{1}{3!}(\mathbf{ai})^3 + \frac{1}{4!}(\mathbf{ai})^4 + \dots \\
 &= 1 + \alpha \mathbf{ni} - \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{3!}\alpha^3 \mathbf{ni} + \frac{1}{4!}\alpha^4 + \dots \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{4!}\alpha^4 + \dots\right) \\
 &\quad + \mathbf{in} \left(\alpha - \frac{1}{3!}\alpha^3 + \dots\right) \\
 &= \cos \alpha + \mathbf{i} \frac{\mathbf{a}}{\alpha} \sin \alpha,
 \end{aligned}$$

ou

$$\exp(\mathbf{ae}_{123}) = \cos \alpha + \mathbf{e}_{123} \frac{\mathbf{a}}{\alpha} \sin \alpha.$$

Uma rotação espacial do vetor $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ no *sentido anti-horário* em torno do eixo $\mathbf{a}$ por um ângulo α é dada por:

$$\mathbf{r} \mapsto \mathbf{sr}s^{-1}, \quad s = \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{ae}_{123}\right) \quad (5.26)$$

onde expandido-se em série de potências como fizemos com $\exp(\mathbf{ae}_{123})$ obtemos imediatamente que

$$s = \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \mathbf{e}_{123} \frac{\mathbf{a}}{\alpha} \sin \frac{\alpha}{2}\right). \quad (5.27)$$

Definimos também a rotação de um multivetor $\mathbf{A}$ por um ângulo α através do plano cuja normal é $\mathbf{a}$ (o eixo de rotação) pela expressão:

$$\mathbf{A}' = \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{ae}_{123}\right) \mathbf{A} \exp\left(\frac{1}{2}\mathbf{ae}_{123}\right). \quad (5.28)$$

Exemplo 53 Seja $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{e}_3$ e seja $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 \cos \theta + \mathbf{e}_2 \sin \theta$. Temos

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}' &= \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha\mathbf{ie}_3\right) \mathbf{v} \exp\left(\frac{1}{2}\alpha\mathbf{ie}_3\right) \\
 &= \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \mathbf{ie}_3 \sin \frac{\alpha}{2}\right) \mathbf{v} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \mathbf{ie}_3 \sin \frac{\alpha}{2}\right) \\
 &= \left(\mathbf{v} \cos \frac{\alpha}{2} - \mathbf{ie}_3 \mathbf{v} \sin \frac{\alpha}{2}\right) \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \mathbf{ie}_3 \sin \frac{\alpha}{2}\right) \\
 &= \mathbf{v} \left(\cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \mathbf{ive}_3 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} - \mathbf{ie}_3 \mathbf{v} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \mathbf{e}_3 \mathbf{ve}_3 \left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)^2
 \end{aligned}$$

Agora,

$$\mathbf{e}_3 \mathbf{v} \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 (\mathbf{e}_1 \cos \theta + \mathbf{e}_2 \sin \theta) \mathbf{e}_3 = -\mathbf{v},$$

e

$$\begin{aligned} & \mathbf{v} \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \mathbf{e}_3 \mathbf{v} \mathbf{e}_3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ = & \mathbf{v} \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \\ = & \mathbf{v} \cos \alpha \\ = & \cos \theta \cos \alpha \mathbf{e}_1 + \sin \theta \cos \alpha \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned} & \mathbf{i} \mathbf{v} \mathbf{e}_3 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} - \mathbf{i} \mathbf{e}_3 \mathbf{v} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \\ = & 2\mathbf{i} \frac{1}{2} (\mathbf{v} \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \mathbf{v}) \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \\ = & \mathbf{i} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{e}_3) \sin \alpha \\ = & \mathbf{i} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 \cos \theta + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \sin \theta) \sin \alpha \\ = & \cos \theta \sin \alpha \mathbf{e}_2 - \sin \theta \sin \alpha \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Usando-se estes resultados temos finalmente

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha \mathbf{i} \mathbf{e}_3\right) \mathbf{v} \exp\left(\frac{1}{2}\alpha \mathbf{i} \mathbf{e}_3\right) \\ &= (\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha) \mathbf{e}_1 \\ &\quad + (\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha) \mathbf{e}_2 \\ &= \mathbf{e}_1 \cos(\theta + \alpha) + \mathbf{e}_2 \sin(\theta + \alpha), \end{aligned}$$

uma fórmula bem conhecida.

Exercício 54 Encontre a exponencial de $u = \alpha + \mathbf{a} + \mathbf{b} \mathbf{e}_{123} + \beta \mathbf{e}_{123}$.

Solução: Vamos calcular e^u onde

$$\begin{aligned} u &= \alpha + \mathbf{a} + \mathbf{b} \mathbf{e}_{123} + \beta \mathbf{e}_{123}, \\ \alpha, \beta &\in \mathbb{R}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Antes de mais nada para simplificar a notação escreveremos como já usual

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_{123}, \tag{5.30}$$

e observamos que $(\alpha + \beta \mathbf{i})$ comuta com todos os elementos de $\mathcal{C}\ell_3$. Assim, (note que $\mathcal{C}\ell_3 \simeq \text{Mat}(2, \mathbb{C})$) podemos escrever

$$\begin{aligned} e^u &= e^{(\alpha + \beta \mathbf{i})} e^{\mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{i}} \\ &= e^\alpha e^{\beta \mathbf{i}} e^{\mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{i}} \\ &= (\cosh \alpha + \sinh \alpha)(\cos \beta + \mathbf{i} \sin \beta) e^{\mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{i}} \end{aligned} \quad (5.31)$$

Temos que

$$e^{\mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{i}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{i})^n}{n!} \quad (5.32)$$

Agora,

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{i})^2 &= \mathbf{a}^2 + \mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{i} + \mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{i} - \mathbf{b}^2 \\ &= (\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2) + 2\frac{1}{2}(\mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}\mathbf{a})\mathbf{i} \\ &= (\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2) + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{i} \\ &= \gamma + \delta \mathbf{i} = \lambda^2. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Portanto quando $\lambda \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{i}} &= 1 + (\mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{i}) + \frac{1}{2!}\lambda^2 + \frac{1}{3!}\lambda^2(\mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{i}) + \frac{1}{4!}\lambda^4 + \frac{1}{5!}\lambda^4(\mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{i}) + \dots \\ &= \left(1 + \frac{1}{2!}\lambda^2 + \frac{1}{4!}\lambda^4 + \dots\right) + \frac{(\mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{i})}{\lambda} \left(\lambda + \frac{1}{3!}\lambda^3 + \frac{1}{5!}\lambda^5 + \dots\right) \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)^{2n}}{(2n)!} + \frac{(\mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{i})}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= 1 + \cosh \lambda + \frac{(\mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{i})}{\lambda} \sinh \lambda, \end{aligned} \quad (5.34)$$

e finalmente

$$e^u = (\cosh \alpha + \sinh \alpha)(\cos \beta + \mathbf{i} \sin \beta) \left(1 + \cosh \lambda + \frac{(\mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{i})}{\lambda} \sinh \lambda\right) \quad (5.35)$$

Quando $\lambda = 0$ temos obviamente que

$$e^u = (\cosh \alpha + \sinh \alpha)(\cos \beta + \mathbf{i} \sin \beta)(1 + \mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{i}). \quad (5.36)$$

Exemplo 55 Mostre que $|u\mathbf{a}\tilde{u}| = |u|^2 |\mathbf{a}|$ para $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R} \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$.

Solução 56 Desejamos mostrar que para $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ e $u \in (\mathbb{R} + \bigwedge^2 \mathbb{R}^3)$ temos:

$$|u\mathbf{a}\tilde{u}| = |u|^2 |\mathbf{a}|.$$

Primeiramente escrevemos que

$$u = \alpha + \mathbf{w}\mathbf{i}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{i} \in \bigwedge^3 \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{i}^2 = -1. \quad (5.37)$$

Portanto

$$u\tilde{u} = (\alpha^2 + \mathbf{w}^2) \in \mathbb{R}, \quad (5.38)$$

$$|u| = \sqrt{\alpha^2 + \mathbf{w}^2}, \quad (5.39)$$

e levando-se em conta que $u\tilde{u}$ é escalar, podemos escrever

$$\begin{aligned} u\mathbf{a}\tilde{u}u\mathbf{a}\tilde{u} &= u\tilde{u}u\mathbf{a}\mathbf{a}\tilde{u} \\ &= (\alpha^2 + \mathbf{w}^2)u\mathbf{a}^2\tilde{u} \\ &= (\alpha^2 + \mathbf{w}^2)u\tilde{u}\mathbf{a}^2 \\ (u\mathbf{a}\tilde{u})^2 &= (\alpha^2 + \mathbf{w}^2)^2\mathbf{a}^2 \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (5.40)$$

Agora

$$\begin{aligned} |u\mathbf{a}\tilde{u}| &= \sqrt{\langle u\mathbf{a}\tilde{u}u\mathbf{a}\tilde{u} \rangle_0} = \sqrt{(\alpha^2 + \mathbf{w}^2)^2\mathbf{a}^2} \\ &= \sqrt{|u|^4 |\mathbf{a}|^2} = |u|^2 |\mathbf{a}|. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Exemplo 57 Seja $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$. Calcule $\langle \mathbf{xyz} \rangle_1$ e $\langle \mathbf{xyz} \rangle_3$.

Solução: Usando a definição do produto de Clifford podemos escrever:

$$\begin{aligned} \mathbf{xyz} &= \mathbf{x}(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{z}) = \mathbf{x}(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}) + \mathbf{x}(\mathbf{y} \wedge \mathbf{z}) \\ &= \mathbf{x}(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}) + \mathbf{x} \lrcorner (\mathbf{y} \wedge \mathbf{z}) + \mathbf{x} \wedge (\mathbf{y} \wedge \mathbf{z}) \\ &= \mathbf{x}(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}) + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{y} + \mathbf{x} \wedge (\mathbf{y} \wedge \mathbf{z}), \end{aligned} \quad (5.42)$$

onde usamos a identidade $\mathbf{x} \lrcorner (\mathbf{y} \wedge \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{y}$. Da Eq.(5.42) temos diretamente que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{xyz} \rangle_1 &= \mathbf{x}(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}) + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{y}, \\ \langle \mathbf{xyz} \rangle_3 &= \mathbf{x} \wedge (\mathbf{y} \wedge \mathbf{z}). \end{aligned} \quad (5.43)$$

5.7 O grupo Spin (3)

A álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_3$ pode ser usada para se construir o recobrimento universal do grupo de rotações $\text{SO}(3)$ de $\mathbb{R}^3$. Um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ pode ser rotacionado usando-se a fórmula

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x} \mapsto \boldsymbol{\rho}(s) \mathbf{x} = s \mathbf{x} s^{-1}, \quad (5.44)$$

onde s é um elemento do grupo

$$\text{Spin}(3) = \{s \in \mathcal{C}\ell_3 \mid \bar{s}s = 1, \quad \tilde{s}s = 1\}. \quad (5.45)$$

O grupo $\text{Spin}(3)$, lê-se *grupo spin 3*, é um recobrimento duplo do grupo de rotações $\text{SO}(3)$. Da Eq.(5.44) tem-se imediatamente que s e $-s$ geram a mesma rotação.

Esta observação mostra imediatamente que existe um *homomorfismo* $2-1$ entre $\text{Spin}(3)$ e $\text{SO}(3)$. Ademais temos o isomorfismo

$$\frac{\text{Spin}(3)}{\{1, -1\}} \simeq \text{SO}(3).$$

5.7.1 Spin (3) $\simeq$ SU (2)

Dada uma representação matricial de $\mathcal{C}\ell_3$ em $\text{Mat}(2, \mathbb{C})$, mostraremos que existe um isomorfismo entre o grupo $\text{Spin}(3)$ e o grupo especial unitário $\text{SU}(2)$, definido por:

$$\text{SU}(2) = \{S \in \text{Mat}(2, \mathbb{C}) \mid S^\dagger S = I, \quad \det S = 1\}.$$

Para provar nossa afirmação, recordemos que a rotação do vetor $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ em torno do eixo $\mathbf{a}$ no sentido anti-horário por um ângulo $\alpha = |\mathbf{a}|$ é dada pela eq. (5.26) $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}' = s\mathbf{r}s^{-1}$, com $s = \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{a}\mathbf{e}_{123}\right)$. Observe agora que sendo, $s = \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{a}\mathbf{e}_{123}\right)$, temos imediatamente que

$$\tilde{s} = s^{-1} = \bar{s},$$

uma vez que $\tilde{s} = \exp\left(-\widetilde{\frac{1}{2}\mathbf{a}\mathbf{e}_{123}}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\mathbf{a}\mathbf{e}_{123}\right) = s^{-1}$. Portanto

$$s = \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{a}\mathbf{e}_{123}\right) \in \text{Spin}(3).$$

Por outro lado, $u \in \mathcal{C}\ell_3^+$ é tal que

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u_{12}\mathbf{e}_{12} + u_{31}\mathbf{e}_{31} + u_{23}\mathbf{e}_{23} \\ &\simeq \begin{pmatrix} u_0 + u_{12}i & u_{31} + u_{23}i \\ -u_{31} + u_{23}i & u_0 - u_{12}i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} w_1 & -w_2^* \\ w_2 & w_1^* \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde $w_1 = u_0 + u_{12}i$ e $w_2 = -u_{31} + u_{23}i$, temos que, por (5.10)

$$\begin{aligned} \tilde{u}u &\simeq \begin{pmatrix} w_1^* & w_2^* \\ -w_2 & w_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & -w_2^* \\ w_2 & w_1^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|w_1|^2 + |w_2|^2 = \det \begin{pmatrix} w_1 & -w_2^* \\ w_2 & w_1^* \end{pmatrix} = 1.$$

Voltando a expressão (5.28), notamos que tanto $s = \exp(\frac{1}{2}\mathbf{a}\mathbf{e}_{123})$ como $-s = -\exp(\frac{1}{2}\mathbf{a}\mathbf{e}_{123})$ descrevem obviamente a mesma rotação.

Com isso, estabelecemos um isomorfismo $\text{Spin}(3) \simeq \text{SU}(2)$.

Para um elemento arbitrário $S \in \text{SU}(2)$ a função $\mathbf{X} \rightarrow \rho(S)\mathbf{X} = S\mathbf{X}S^{-1}$ é uma rotação no espaço vetorial real das matrizes hermitianas de traço nulo⁶,

$$\{\mathbf{X} \in \text{Mat}(2, \mathbb{C}) \mid \text{traço}(\mathbf{X}) = 0, \mathbf{X}^\dagger = \mathbf{X}\} \simeq \mathbb{R}^3$$

Todos os elementos em $\text{SO}(3)$ podem ser representados por matrizes em $\text{SU}(2)$. O grupo $\text{SU}(2)$ é o recobrimento universal (e duplo) do grupo $\text{SO}(3)$.

5.8 Spinores de Pauli

5.8.1 Spinores de Pauli Covariantes

Os spinores de Pauli *covariantes* são elementos de um espaço vetorial 2-dimensional complexo $\mathbb{C}^2$, equipado com uma métrica spinorial

$$\beta : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad \beta(\Psi, \Phi) = \Phi^\dagger \Psi, \quad (5.46)$$

⁶ $\mathbf{X} \in \text{Mat}(2, \mathbb{C})$ com traço nulo pode ser escrito como $\mathbf{X} = \sum_{j=1}^3 x_j \sigma_j$ e pode ser pensada como a representante em $\text{Mat}(2, \mathbb{C})$ de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

onde

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad \Phi^\dagger = \begin{pmatrix} \phi_1^* & \phi_2^* \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

Note que

$$\Psi^\dagger \Psi = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2. \quad (5.48)$$

Um spinor de Pauli é dito *unitário* se $\Psi^\dagger \Psi = 1$.

Ademais, note que se $U \in \text{SU}(2)$ então

$$\beta(U\Psi, U\Phi) = \Phi^\dagger U^\dagger U \Psi = \Phi^\dagger \Psi = \beta(\Psi, \Phi), \quad (5.49)$$

i.e., a métrica é invariante sob a ação do grupo $\text{SU}(2)$. O espaço é dito o carregador da representação fundamental $D^{1/2}$ do grupo $\text{SU}(2)$. Tal significa que quaisquer que sejam $U_1, U_2 \in \text{SU}(2)$ então

$$U_1(U_2\Psi) = (U_1U_2)\Psi.$$

5.8.2 Spinors de Pauli Algébricos

Nosso interesse aqui é revelar a natureza geométrica secreta de um spinor de Pauli $\Psi \in \mathbb{C}^2$, e em particular dos spinors de Pauli unitários. Tal será feito, como veremos, obtendo-se uma representação de Ψ na álgebra $\mathcal{C}\ell_3$. Primeiramente escrevemos Ψ como.

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\beta_1 \\ \alpha_2 + i\beta_2 \end{pmatrix} \quad (5.50)$$

onde $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$. Em seguida fazemos corresponder $\Psi \in \mathbb{C}^2$ a $\Psi' \in \text{Mat}(2, \mathbb{C})$ por

$$\mathbb{C}^2 \ni \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \mapsto \Psi' = \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 \\ \psi_2 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2, \mathbb{C}) \quad (5.51)$$

Assim podemos expressar o espaço vetorial dos Ψ' como o ideal à esquerda⁷ $\mathbf{S} = \text{Mat}(2, \mathbb{C}) F_0$, onde $F_0^2 = F_0$, é um elemento idempotente minimal de $\text{Mat}(2, \mathbb{C})$.

⁷Um ideal à esquerda $\mathbf{S}$ da álgebra $\mathcal{C}\ell_3$, é o conjunto dos elementos de $\mathcal{C}\ell_3$ tais que $xi \in \mathbf{S}, \forall x \in \mathcal{C}\ell_3, \forall i \in S$.

O ideal $\mathbf{S}$ pode ser considerado como um espaço vetorial *real* com base $\{F_0, F_1, F_2, F_3\}$ onde

$$F_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.52)$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.53)$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.54)$$

$$F_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.55)$$

Assim escrevemos

$$\Psi' = \sum_{i=0}^3 a_i F_i. \quad (5.56)$$

Exercício 58 Encontre a relação entre os a_i , $i = 0, 1, 2, 3$ e os ψ_j , $j = 1, 2$.

Solução: De (5.51) e de (5.52), (5.53), (5.54), (5.55) e de (5.56) temos que:

$$\begin{aligned} \psi' &= a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_0 + ia_3 & 0 \\ -a_2 + ia_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 \\ \psi_2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ logo} \\ a_0 + ia_3 &= \psi_1 \text{ e } -a_2 + ia_1 = \psi_2 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

O ideal $\mathbf{S}$ pode ser posto em correspondência com o ideal $S = \mathcal{C}\ell_3 f_0 \subset \mathcal{C}\ell_3$ onde $f_0^2 = f_0$ é um elemento idempotente de $\mathcal{C}\ell_3$. Escolhemos aqui $f_0 = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_3)$ pois temos imediatamente a correspondência

$$f_0 = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_3) \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = F_0$$

O ideal $S \subset \mathcal{C}\ell_3$ é um ideal minimal em $\mathcal{C}\ell_3$, pois os únicos ideais à esquerda que ele contém são os ideais S e $\{0\}$. Ademais, S como um espaço linear real, possui uma base $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ onde

$$\begin{aligned}
f_0 &= \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_3) \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
f_1 &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_{23} + \mathbf{e}_2) \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\
f_2 &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_{31} - \mathbf{e}_1) \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\
f_3 &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_{12} + \mathbf{e}_{123}) \simeq \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Assim, definiremos como o representante $\psi \in S$ de $\Psi \in \mathbb{C}_2$ ou de $\Psi' \in \text{Mat}(2, \mathbb{C})$ o elemento $\psi \in \mathcal{C}\ell_3 f_0$ dado por

$$\psi = \sum_{i=0}^3 a_i f_i. \quad (5.57)$$

Agora, antes de prosseguirmos registramos um fato notável, qual seja: o subconjunto de $\mathcal{C}\ell_3$ dado por

$$\mathbb{F} = f\mathcal{C}\ell_3 f \simeq \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = cF_0 \mid c \in \mathbb{C} \right\}$$

é um subanel de $\mathcal{C}\ell_3$ com unidade f , isto é, $af = fa$ para $a \in \mathbb{F}$. Nenhum elemento de $\mathbb{F}$, em $\mathcal{C}\ell_3$ é inversível. No entanto para cada elemento não nulo $a \in \mathbb{F}$, há um único $b \in \mathbb{F}$, tal que $ab = f$. Assim, $\mathbb{F}$ é um *anel de divisão com unidade* f . Como uma álgebra real de divisão bidimensional, $\mathbb{F}$ deve ser isomorfo a $\mathbb{C}$. O isomorfismo $\mathbb{F} \simeq \mathbb{C}$ é dado pela equação $f_3^2 = -f_0$ relacionando os elementos da base $\{f_0, f_3\}$ da álgebra real $\mathbb{F}$.

5.8.3 Spinors de Pauli Operatoriais e Rotações

Seja $A \in \mathcal{C}\ell_3$ dado por

$$A = a_0 + a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 + a_{12} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + a_{13} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + a_{23} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + a_7 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3, \quad (5.58)$$

onde os coeficientes são números reais. A representação matricial em $\text{Mat}(2, \mathbb{C})$ deste elemento é:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0 + a_3 + i(a_{12} + a_7) & a_1 - a_{13} + i(-a_2 + a_{23}) \\ a_1 + a_{13} + i(a_2 + a_{23}) & a_0 - a_3 + i(-a_{12} + a_7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_3 \\ \psi_2 & \psi_4 \end{pmatrix} \quad (5.59)$$

O elemento $A \in \mathcal{C}\ell_3$ gera o spinor álgebraico $\psi \in \mathcal{C}\ell_3 f_0$ dado por (pondo $\mathbf{i} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$):

$$\begin{aligned} \psi &= A f_0 \\ &= [a_0 + a_3 + \mathbf{i}(a_{12} + a_7)] f_0 + [a_1 + a_{13} + \mathbf{i}(a_2 + a_{23})] \mathbf{e}_1 f_0 \\ &= [a_0 + a_3 + \mathbf{i}(a_{12} + a_7)] f_0 + [(a_1 + a_{13}) \mathbf{e}_1 + \mathbf{i}(a_2 + a_{23}) \mathbf{e}_1] f_0 \end{aligned} \quad (5.60)$$

cujas representação matricial em $\text{Mat}(2, \mathbb{C})$ é dada por

$$\Psi' = \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 \\ \psi_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.61)$$

Para entendermos como os spinores estão associados com rotações vamos provar agora a proposição.

Proposição 59 *Dado qualquer $A \in \mathcal{C}\ell_3$ existe $Q \in \mathcal{C}\ell_3^+$ tal que*

$$A f_0 = Q f_0 \quad (5.62)$$

Prova: Um elemento genérico $X \in \mathcal{C}\ell_3^+$ tem a forma

$$\begin{aligned} X &= x_0 + x_{12} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + x_{13} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + x_{23} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \\ &= x_0 + x_{12} \mathbf{i} \mathbf{e}_3 - x_{13} \mathbf{i} \mathbf{e}_2 - x_{23} \mathbf{i} \mathbf{e}_1. \end{aligned} \quad (5.63)$$

e

$$X f_0 = (x_0 - x_{23} \mathbf{i} \mathbf{e}_1 - x_{13} \mathbf{i} \mathbf{e}_2 + x_{12} \mathbf{i} \mathbf{e}_3) f_0. \quad (5.64)$$

Levando-se em conta que:

$$\mathbf{e}_3 f_0 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 f_0 = \mathbf{i} \mathbf{e}_1 f_0 \quad (5.65)$$

podemos escrever:

$$\begin{aligned} A f_0 &= [(a_0 + a_3) + \mathbf{i}(a_{12} + a_7) \mathbf{e}_3] f_0 + [(a_1 + a_{13}) \mathbf{e}_1 + (a_2 + a_{23}) \mathbf{e}_2] f_0 \\ &= [(a_0 + a_3) + (a_1 + a_{13}) \mathbf{e}_1 + (a_2 + a_{23}) \mathbf{e}_2 + \mathbf{i}(a_{12} + a_7) \mathbf{e}_3] f_0. \end{aligned}$$

Também, comparando $X f_0$ com $A f_0$ na Eq.(5.60) temos imediatamente que os coeficientes de Q devem ser:

$$\begin{aligned} x_0 &= a_0 + a_3, \quad x_{23} = -(a_{12} + a_7), \\ x_{13} &= -(a_2 + a_{23}), \quad x_{12} = (a_{12} + a_7), \end{aligned}$$

o que prova a proposição. ■

Note que todo $Q, \bar{Q} \in \mathcal{C}\ell_3^+$ tem as seguintes representações matriciais em $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}' \in \text{Mat}(2, \mathbb{C})$,

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} z & -w^* \\ w & z^* \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} z^* & w^* \\ -w & z \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^\dagger.$$

Portanto se a norma de $Q\bar{Q} = 1$ temos imediatamente que $\det \mathbf{Q} = +1$.

Agora, recordamos da Seção (5.4) que $\mathcal{C}\ell_3^+ \simeq \mathbb{H}$, a álgebra dos quatérnions. Portanto acabamos de provar que a todo spinor de Pauli $\Psi \in \mathbb{C}^2$ pode-se associar um *spinor algébrico* $\psi \in \mathcal{C}\ell_3 f_0$ e também um elemento $Q \in \mathcal{C}\ell_3^+$ que é o representante em $\mathcal{C}\ell_3^+$ de um quatérnion $q \in \mathbb{H}$.

Definição 60 *O elemento $Q \in \mathcal{C}\ell_3^+$ que satisfaz as condições acima é dito um spinor operatorial.*

A razão para este nome, ficará claro no que se segue, mas antes recordemos por completeza que a métrica spinorial é representada em $\mathcal{C}\ell_3$ pela aplicação

$$\beta : S \times S \rightarrow \mathbb{C}, \quad \beta(\psi, \varphi) = \langle \tilde{\psi} \varphi \rangle_0, \quad (5.66)$$

como se pode verificar sem grandes dificuldades.

Se $u \in \text{Spin}(3)$ é claro que

$$\beta(u\psi, u\varphi) = \langle \tilde{\psi} \tilde{u} u \varphi \rangle_0 = \langle \tilde{\psi} \varphi \rangle_0 = \beta(\psi, \varphi). \quad (5.67)$$

Obviamente, a um spinor algébrico unitário $\varphi \in \mathcal{C}\ell_3 f_0$ corresponde um spinor operatorial $u \in \mathcal{C}\ell_3^+$ unitário (que é o representante em $\mathcal{C}\ell_3^+$ de um quatérnion unitário $q \in \mathbb{H}$), cujo quadrado da norma é $\bar{u}u = \tilde{u}u = 1$ e $\bar{q}q = 1$. Como o espaço dos quatérnions unitários é $\text{Spin}(3)$ chegamos a conclusão não trivial de que os spinores algébricos que são uma representação especial dos spinores de Pauli unitários nada mais são que rotações.

Quando um spinor algébrico ($\psi \in \mathcal{C}\ell_3 f_0$ correspondente a $\Psi \in \mathbb{C}^2$) não é unitário, ele tem como sabemos a forma

$$\psi = Q f_0.$$

Sua representação em $\text{Mat}(2, \mathbb{C})$ é a matriz

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\psi_2^* \\ \psi_2 & \psi_1^* \end{pmatrix}$$

Se $\bar{Q}Q = \rho \neq 0$, podemos escrever

$$Q = \rho^{1/2}u,$$

onde u é um ‘quatérnion’ unitário que pode ser escrito como

$$u = \exp\left(\frac{1}{2}\theta\mathbf{in}\right),$$

onde $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ é um vetor unitário e $\theta \in \mathbb{R}$. Portanto dado um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathcal{C}\ell_3$ temos que

$$Q\mathbf{v}\tilde{Q} = \rho \exp\left(\frac{1}{2}\theta\mathbf{in}\right)\mathbf{v} \exp\left(\frac{1}{2}\theta\mathbf{in}\right).$$

Mas já vimos na seção **(5.7.1)** que $u\mathbf{v}\tilde{u}$ produz uma rotação do vetor $\mathbf{v}$.

Assim, concluímos com um resultado não trivial. *Um spinor rotaciona um vetor e depois o dilata!*[6]

Capítulo 6

Quatérnions

William Rowan Hamilton (1805 – 1865) pesquisou por três décadas um sistema para a análise do espaço tridimensional que culminou com a descoberta dos quatérnions em 1843, sistema esse, que é nada mais nada menos, que um dos principais sistemas da análise vetorial. Estes objetos também estavam implícitos nos trabalhos de Olinde Rodrigues de 1840 (veja [1]). Neste Capítulo vamos apresentar mais alguns resultados sobre os quatérnions que em particular revelam a origem do produto vetorial introduzido por Gibbs e Heaviside.

6.1 Quatérnions Como Números Hipercomplexos

Como já sabemos do Capítulo 3 onde identificamos o corpo dos quatérnions com a subálgebra par $\mathcal{C}\ell_3^+$, estes objetos representam uma generalização dos números complexos. Neste capítulo estudaremos os quatérnions como originalmente inferidos por Hamilton, i.e., como um sistema de números hipercomplexos, i.e., $q \in \mathbb{H}$ se escreve $q = w + ix + jy + kz$, onde as generalizações da unidade imaginária são os quatérnions i, j, k , que satisfazem:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$ij = k = -ji; \quad jk = i = -kj; \quad ki = j = -ik,$$

$$ijk = -1$$

Dadas estas propriedades, verifica-se imediatamente que a multiplicação quaterniônica é associativa mas não é comutativa.

No que se segue, neste capítulo, as generalizações da unidade imaginária, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ serão denotadas também por $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, dependendo se enfatizarmos a ação destes objetos sobre geradores de rotações ou sobre vetores (translação)¹.

6.2 Parte Pura de um Quatérnion e o Produto Vetorial

Um quatérnion $q = w + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ é a soma de sua parte real $\text{Re}(q) = w \in \mathbb{R}$ com sua parte imaginária $\text{Pu}(q) = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z \in \mathbb{R}^3$. Os quatérnions formam um espaço linear real 4-dimensional, $\mathbb{H}$, que contém o eixo real $\mathbb{R}$ e o espaço linear real tridimensional $\mathbb{R}^3$, isto é, $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$. Também denotamos a parte pura de um quatérnion em negrito, i.e., $q = q_0 + \mathbf{q}$ com $q_0 \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{q} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z \in \mathbb{R}^3$. O espaço linear real $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$ com o produto quaterniônico, é uma álgebra associativa sobre $\mathbb{R}$ dita álgebra dos quatérnions. Escrevemos o produto de dois quatérnions $a = a_0 + \mathbf{a}$ e $b = b_0 + \mathbf{b}$ como:

$$ab = a_0b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + a_0\mathbf{b} + \mathbf{a}b_0 + \mathbf{a} \times \mathbf{b}. \quad (6.1)$$

O produto de dois quatérnions puros $\mathbf{a} = \mathbf{i}a_1 + \mathbf{j}a_2 + \mathbf{k}a_3$ e $\mathbf{b} = \mathbf{i}b_1 + \mathbf{j}b_2 + \mathbf{k}b_3$ é a soma de um número real e um quatérnion puro:

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (6.2)$$

onde identificamos o produto escalar

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \quad (6.3)$$

e o produto vetorial

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{i}(a_2b_3 - a_3b_2) + \mathbf{j}(a_3b_1 - a_1b_3) + \mathbf{k}(a_1b_2 - a_2b_1) \quad (6.4)$$

O espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ equipado com o produto vetorial

$$\times : (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

¹A distinção não é clara, haja visto que bivectores são duais de vetores e geradores de rotações. Também, não confundir o símbolo $\mathbf{i}$ deste capítulo com o mesmo símbolo usado em capítulos anteriores.

é uma álgebra² não *associativa*. O produto vetorial satisfaz as seguintes propriedades:

(i) é anti-comutativo, i.e.,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a},$$

(ii) satisfaz a *identidade de Jacobi*, i.e.,

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

6.3 Quatérnion Conjugado, Norma e Inverso.

O conjugado $\bar{q}$ de um quatérnion $q = w + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ é obtido trocando-se o sinal da parte pura:

$$\bar{q} = w - \mathbf{i} - \mathbf{j}y - \mathbf{k}z.$$

A conjugação em $\mathbb{H}$ é um anti-automorfismo; de fato, por (6.1), se $a, b \in \mathbb{H}$, temos que:

$$\begin{aligned} \overline{ab} &= \overline{(a_0b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + a_0\mathbf{b} + \mathbf{a}b_0 + \mathbf{a} \times \mathbf{b})} \\ &= [a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 + a_0(\mathbf{i}b_1 + \mathbf{j}b_2 + \mathbf{k}b_3) + (\mathbf{i}a_1 + \mathbf{j}a_2 + \mathbf{k}a_3)b_0 + \\ &\quad + \mathbf{i}(a_2b_3 - a_3b_2) + \mathbf{j}(a_3b_1 - a_1b_3) + \mathbf{k}(a_1b_2 - a_2b_1)] \\ &= [a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_0(\mathbf{i}b_1 + \mathbf{j}b_2 + \mathbf{k}b_3) - (\mathbf{i}a_1 + \mathbf{j}a_2 + \mathbf{k}a_3)b_0 + \\ &\quad - \mathbf{i}(a_2b_3 - a_3b_2) - \mathbf{j}(a_3b_1 - a_1b_3) - \mathbf{k}(a_1b_2 - a_2b_1)] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{b}\bar{a} &= (b_0 - \mathbf{i}b_1 - \mathbf{j}b_2 - \mathbf{k}b_3)(a_0 - \mathbf{i}a_1 - \mathbf{j}a_2 - \mathbf{k}a_3) \\ &= [a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_0(\mathbf{i}b_1 + \mathbf{j}b_2 + \mathbf{k}b_3) - (\mathbf{i}a_1 + \mathbf{j}a_2 + \mathbf{k}a_3)b_0 + \\ &\quad - \mathbf{i}(a_2b_3 - a_3b_2) - \mathbf{j}(a_3b_1 - a_1b_3) - \mathbf{k}(a_1b_2 - a_2b_1)] \\ \therefore \quad \overline{ab} &= \bar{b}\bar{a} \end{aligned}$$

Um quatérnion q multiplicado por seu conjugado $\bar{q}$, resulta em um número real $q\bar{q} = w^2 + x^2 + y^2 + z^2$ chamado de norma de $q = w + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$. A norma de $|q| = \sqrt{q\bar{q}}$, isto é,

$$|q| = |w + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z| = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} \quad (6.5)$$

²O espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido com o produto vetorial é uma *álgebra de Lie*.

A norma de um produto de dois quatérnions a e b é o produto de suas normas, ou seja, $|ab| = |a| |b|$ para $a, b \in \mathbb{H}$, isso faz de $\mathbb{H}$ uma álgebra com norma.

O inverso q^{-1} de um quatérnion não nulo q é obtido por:

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2} \quad \text{ou}$$

$$\frac{1}{w + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z} = \frac{w - \mathbf{i}x - \mathbf{j}y - \mathbf{k}z}{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}.$$

Em particular, $ab = 0$ implica em $a = 0$ ou $b = 0$, que significa que a álgebra dos quatérnions é uma álgebra de divisão (ou que o anel dos quatérnions é um anel de divisão).³

Exemplo 61 *Determine a raiz quadrada do quatérnion $q = q_0 + \mathbf{q}$.*

Solução: Escreva

$$q = q_0 + \mathbf{q} \in H, \tag{6.6}$$

$$r = r_0 + \mathbf{r} \in H, \tag{6.7}$$

$$r^2 = q.$$

Devemos analisar os seguintes casos:

(a) $q = q_0 > 0$. Neste caso temos duas raízes, $r = \pm\sqrt{q_0}$.

(b) $q = q_0 < 0$. Neste caso existe uma infinidade de raízes. De fato, seja $u = \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{H}$ tal que

$$|\mathbf{u}| = 1 \tag{6.8}$$

Se $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ então

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}, \tag{6.9}$$

e

$$\mathbf{u}\mathbf{u} = -(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) = -1. \tag{6.10}$$

Portanto, escrevendo-se

$$r = \sqrt{-q_0}\mathbf{u}, \tag{6.11}$$

³Álgebras ou anéis de divisão nada mais são do que corpos em que a multiplicação não é necessariamente comutativa.

temos

$$rr = \sqrt{-q_o}\mathbf{u}\sqrt{-q_o}\mathbf{u} = (-q_o)\mathbf{u}^2 = (-q_o)(-1) = q_o. \quad (6.12)$$

(c) Agora, seja $q = q_0 + \mathbf{q}$, $\mathbf{q} \neq 0$. Neste caso devemos ter

$$r_0^2 + 2r_0\mathbf{r} + \mathbf{r}^2 = q_0 + \mathbf{q}, \quad (6.13)$$

e portanto

$$r_0^2 + \mathbf{r}^2 = q_0, \quad (6.14)$$

$$2r_0\mathbf{r} = \mathbf{q} \quad (6.15)$$

Substituindo-se $\mathbf{r} = \mathbf{q}/2r_0$ na Eq.(6.14) e resolvendo-se a equação bi-quadrática, obtemos trivialmente.

$$r_0 = \sqrt{\frac{q_0 + |q|}{2}}. \quad (6.16)$$

De (6.15) vem que

$$\mathbf{q} = 2\sqrt{\frac{q_0 + |q|}{2}}\mathbf{r} \quad (6.17)$$

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{q}}{2\sqrt{\frac{q_0 + |q|}{2}}}. \quad (6.18)$$

E da Eq. (6.6), temos

$$r = \pm \left(\sqrt{\frac{q_0 + |q|}{2}} + \frac{\mathbf{q}}{2\sqrt{\frac{q_0 + |q|}{2}}} \right). \quad (6.19)$$

Note que tal equação ainda pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
r &= \pm \left(\sqrt{\frac{q_0 + |q|}{2}} + \frac{\mathbf{q} \sqrt{\frac{|q| - q_0}{2}}}{2 \sqrt{\frac{q_0 + |q|}{2}} \sqrt{\frac{|q| - q_0}{2}}} \right) \\
&= \pm \left(\sqrt{\frac{q_0 + |q|}{2}} + \frac{\mathbf{q} \sqrt{\frac{q_0 \mp |q|}{2}}}{\sqrt{|q|^2 - q_0^2}} \right) \\
&= \pm \left(\sqrt{\frac{q_0 + |q|}{2}} + \frac{\mathbf{q} \sqrt{\frac{q_0 \mp |q|}{2}}}{\sqrt{\mathbf{q}^2}} \right) \\
&= \pm \left(\sqrt{\frac{q_0 + |q|}{2}} + \frac{\mathbf{q} \sqrt{\frac{q_0 \mp |q|}{2}}}{|\mathbf{q}|} \right). \tag{6.20}
\end{aligned}$$

6.3.1 O Centro de $\mathbb{H}$

O conjunto de todos os elementos de $\mathbb{H}$ que comutam com todos os elementos de $\mathbb{H}$, formam o *centro* de $\mathbb{H}$,

$$\text{cen}(\mathbb{H}) = \{w \in \mathbb{H} \mid wq = qw \text{ para todo } q \in \mathbb{H}\}.$$

O centro de $\mathbb{H}$, é fechado para a multiplicação e é isomorfo ao corpo dos números reais $\mathbb{R}$.

6.4 Rotações em Três Dimensões

Seja $\mathbf{r}$ um quatérnion puro identificado com um vetor de $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z \in \mathbb{R}^3,$$

de comprimento $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Para um quatérnion não nulo $a \in \mathbb{H}$, a expressão ara^{-1} é novamente um quatérnion puro com o mesmo comprimento de $\mathbf{r}$, ou seja:

$$ara^{-1} \in \mathbb{R}^3 \text{ e } |ara^{-1}| = |\mathbf{r}|.$$

Mostrar a igualdade $|a\mathbf{r}a^{-1}| = |\mathbf{r}|$ é simples, já que a norma do produto de quatérnions é igual ao produto das suas normas, isto é, $|a\mathbf{r}a^{-1}| = |a||\mathbf{r}||a|^{-1}$ como $|a|$, $|a|^{-1} \in \mathbb{R}$, $|a||\mathbf{r}||a|^{-1} = |a||a|^{-1}|\mathbf{r}| = |\mathbf{r}|$. Vamos mostrar agora que $a\mathbf{r}a^{-1} \in \mathbb{R}^3$, onde $\mathbf{r}$ é um quatérnion puro e $a \in \mathbb{H}$.

Notação 62 Antes de qualquer coisa vamos expressar a representação de um quatérnion qualquer (a fim de facilitar futuros cálculos) $q = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3 \in \mathbb{H}$, como $q = (q_0, \mathbf{q})$, onde $q_0 \in \mathbb{R}$ representa a parte real e $\mathbf{q} = (\mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3)$ representa a parte imaginária e o produto definido em (6.1) por

$$ab = (a_0, \mathbf{a})(b_0, \mathbf{b}) = (a_0b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, a_0\mathbf{b} + \mathbf{a}b_0 + \mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

Sejam então $a = (a_0, \mathbf{a}) \in \mathbb{H}$ e $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z = (0, \mathbf{r})$. Temos:

$$\begin{aligned} & |a|^2 a\mathbf{r}a^{-1} \\ = & (a_0, \mathbf{a})(0, \mathbf{r}) \frac{(a_0, -\mathbf{a})}{|a|^2} \\ = & (a_0, \mathbf{a})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}, a_0\mathbf{r} - \mathbf{r} \times \mathbf{a}) \\ = & [a_0(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (a_0\mathbf{r} - \mathbf{r} \times \mathbf{a}), a_0(a_0\mathbf{r} - \mathbf{r} \times \mathbf{a}) + \mathbf{a}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a} \times (a_0\mathbf{r} - \mathbf{r} \times \mathbf{a})] \\ = & (0, a_0^2\mathbf{r} + 2a_0(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) + \mathbf{a}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r})) \\ = & (0, a_0^2\mathbf{r} + 2a_0(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) + \mathbf{a}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})\mathbf{r}) \\ = & (0, a_0^2\mathbf{r} + 2a_0(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) + 2\mathbf{a}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Assim mostramos que

$$a\mathbf{r}a^{-1} = \left(0, \frac{a_0^2\mathbf{r} + 2a_0(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) + 2\mathbf{a}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})\mathbf{r}}{|a|^2}\right) \quad (6.21)$$

é um quatérnion puro.

Em outras palavras, a aplicação

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r} \mapsto a\mathbf{r}a^{-1} \quad (6.22)$$

é uma rotação no espaço dos quatérnions puros $\mathbb{R}^3$. Cada rotação deste espaço, é como sabemos, representada por um elemento do grupo $\text{SO}(3)$ e a Eq.(6.22) mostra que há dois *quatérnions unitários*⁴, a e $-a$ que representam

⁴Significa que $a\bar{a} = 1$, ou equivalentemente, $|a|^2 = 1$.

a mesma rotação, uma vez que $ara^{-1} = (-a)\mathbf{r}(-a)^{-1}$. Em outras palavras, a esfera de quatérnions unitários,

$$S^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\},$$

é um duplo recobrimento do grupo $SO(3)$, isto é, $SO(3) \simeq S^3 / \{\pm 1\}$.

Como é bem conhecido a (hiper)esfera unitária S^3 é difeomórfica ao espaço topológico do grupo $SU(2)$, pois já sabemos do capítulo anterior que $SO(3) \simeq SU(2) / \{\pm 1\}$.

Para fornecer o eixo de rotação, consideremos um quatérnion unitário a , $|a| = 1$ e o escrevamos na forma $a = e^{\mathbf{a}/2}$ onde $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$. Note que

$$e^{\mathbf{a}/2} = \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{\mathbf{a}}{\alpha} \sin \frac{\alpha}{2}$$

onde $\alpha = |\mathbf{a}|$. A rotação $\mathbf{r} \mapsto ara^{-1}$ gira $\mathbf{r}$ em torno do eixo $\mathbf{a}$ por um ângulo α . O sentido dessa rotação é anti-horário.

6.5 Fórmula de Rodrigues

Suponhamos que desejamos compor duas rotações, a primeira em torno de $\mathbf{a}$ por um ângulo $\alpha = |\mathbf{a}|$ e a segunda em torno de $\mathbf{b}$ por um ângulo $\beta = |\mathbf{b}|$. Esta composição de rotações é equivalente a uma rotação em torno um certo eixo $\mathbf{c}$ que deseja-se determinar. Tal problema foi resolvido por Olinde Rodrigues em trabalho onde introduziu objetos algébricos semelhantes aos quatérnions [1]. Para determinar $\mathbf{c}$ basta escrever

$$\exp\left(\frac{\mathbf{c}}{2}\right) = \exp\left(\frac{\mathbf{b}}{2}\right) \exp\left(\frac{\mathbf{a}}{2}\right)$$

e inspecionar as partes real e puras dos quatérnions. Temos primeiramente

$$\left(\cos \frac{\gamma}{2}, \frac{\mathbf{c}}{\gamma} \sin \frac{\gamma}{2}\right) = \left(\cos \frac{\beta}{2}, \frac{\mathbf{b}}{\beta} \sin \frac{\beta}{2}\right) \left(\cos \frac{\alpha}{2}, \frac{\mathbf{a}}{\alpha} \sin \frac{\alpha}{2}\right)$$

onde a parte real do produto é

$$\cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\beta \alpha} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2},$$

e a parte pura é

$$\cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \frac{\mathbf{a}}{\alpha} + \frac{\mathbf{b}}{\beta} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\beta \alpha} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Portanto dividindo ambos os membros por suas partes reais temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\mathbf{c}}{\gamma} \tan \frac{\gamma}{2} &= \frac{\cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \frac{\mathbf{a}}{\alpha} + \frac{\mathbf{b}}{\beta} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\beta \alpha} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\beta \alpha} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2}} \\
 &= \frac{\cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \frac{\mathbf{a}}{\alpha} + \frac{\mathbf{b}}{\beta} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\beta \alpha} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} (1 - \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\beta \alpha} \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\alpha}{2})} \\
 &= \frac{\cos \frac{\beta}{2} \tan \frac{\alpha}{2} \frac{\mathbf{a}}{\alpha} + \frac{\mathbf{b}}{\beta} \tan \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\beta \alpha} \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\alpha}{2}}{(1 - \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\beta \alpha} \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\alpha}{2})}. \quad (6.23)
 \end{aligned}$$

6.6 Representação em $\text{Mat}(4, \mathbb{R})$ para a Multiplicação de Quatérnions

O produto de dois quatérnions $q = w + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ e $u = u_0 + \mathbf{i}u_1 + \mathbf{j}u_2 + \mathbf{k}u_3$ pode ser representado (como se verifica facilmente) pela multiplicação das matrizes

$$\begin{pmatrix} w & -x & -y & -z \\ x & w & -z & y \\ y & z & w & -x \\ z & -y & x & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

onde $qu = v$. Trocando a ordem da multiplicação, i.e., uq , o resultando se altera, haja visto que a multiplicação entre quatérnions não é comutativa. Tal multiplicação, i.e., $uq = v'$, pode ser representada (como se verifica facilmente) pelo seguinte produto de matrizes

$$\begin{pmatrix} w & -x & -y & -z \\ x & w & z & -y \\ y & -z & w & x \\ z & y & -x & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_0 \\ v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix}.$$

Denotaremos as matrizes que representam $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $u \mapsto qu$ e $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $u \mapsto uq$, respectivamente por L_q e R_q , tais que, $L_q u = qu$ e $R_q u = uq$. Observe

que

$$\begin{aligned}
 (L_i L_j L_k)(u) &= L_i L_j(\mathbf{k}u) \\
 &= L_i L_j(\mathbf{k}u_0 + \mathbf{j}u_1 - \mathbf{i}u_2 - u_3) \\
 &= L_i(\mathbf{j}\mathbf{k}u_0 + \mathbf{j}\mathbf{j}u_1 - \mathbf{j}\mathbf{i}u_2 - \mathbf{j}u_3) \\
 &= \mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k}u_0 + \mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{j}u_1 - \mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{i}u_2 - \mathbf{i}\mathbf{j}u_3 \\
 &= -u_0 - \mathbf{i}u_1 - \mathbf{j}u_2 - \mathbf{k}u_3 \\
 &= -u.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$L_i L_j L_k = -I.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
 (R_i R_j R_k)(u) &= R_i R_j(u\mathbf{k}) \\
 &= R_i[(u_0\mathbf{k} - \mathbf{j}u_1 + \mathbf{i}u_2 + \mathbf{k}u_3)\mathbf{j}] \\
 &= (u_0\mathbf{k}\mathbf{j} - \mathbf{j}u_1\mathbf{j} + \mathbf{i}u_2\mathbf{j} + \mathbf{k}u_3\mathbf{j})\mathbf{i} \\
 &= u_0 + \mathbf{i}u_1 + \mathbf{j}u_2 + \mathbf{k}u_3 \\
 &= u.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$R_i R_j R_k = I$$

Esse dois conjuntos $\{L_q \in \text{Mat}(4, \mathbb{R}) \mid q \in \mathbb{H}\}$ e $\{R_q \in \text{Mat}(4, \mathbb{R}) \mid q \in \mathbb{H}\}$ formam duas subálgebras de $\text{Mat}(4, \mathbb{R})$, ambas isomorfas a $\mathbb{H}$. Para dois quatérnions arbitrários $a, b \in \mathbb{H}$, as duas matrizes representativas, comutam, ou seja, $L_a R_b = R_b L_a$. De fato, temos

$$(L_a R_b)(u) = L_a(R_b u) = L_a(ub) = aub = R_b(au) = (R_b L_a)(u).$$

Qualquer matriz 4×4 é uma combinação linear de matrizes da forma $L_a R_b$. As observações acima junto ao fato que $(\dim \mathbb{H})^2 = \dim \text{Mat}(4, \mathbb{R})$ implicam que

$$\text{Mat}(4, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{H} \times \mathbb{H}.$$

Além da representação em $\text{Mat}(4, \mathbb{R})$, recordamos do Capítulo 4 que os quatérnions também podem ser representados por matrizes 2×2 com entradas complexas:

$$q = w + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z \simeq \begin{pmatrix} w + iz & ix + y \\ ix - y & w - iz \end{pmatrix}.$$

Os quatérnions puros unitários $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ são representados por matrizes que foram obtidas da multiplicação das matrizes de Pauli $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ por $i = \sqrt{-1}$:

$$\mathbf{i} \simeq \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} \simeq \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

isto é,

$$\mathbf{i} \simeq i\sigma_1, \quad \mathbf{j} \simeq i\sigma_2, \quad \mathbf{k} \simeq i\sigma_3.$$

6.7 Alguns Exercícios

Exercício 63 *Sejam $a, b \in \mathbb{H}$. Naturalmente, $ab = ba$ implica $e^a e^b = e^{a+b}$, mas será que $e^a e^b = e^{a+b}$ implica $ab = ba$?*

Solução: Note primeiramente que

$$e^a := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}, \quad e^b := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!} \quad (6.24)$$

Para resolvermos este exercício lembremos que existe um isomorfismo entre $\mathbb{H}$ e álgebra do conjunto $\mathbf{M}$ de matrizes 2×2 com coeficientes reais geradas pelas matrizes

$$\mathbf{1}, \quad \mathbf{I} = i\sigma_1, \quad \mathbf{J} = i\sigma_2, \quad \mathbf{K} = i\sigma_3, \quad (6.25)$$

onde $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$, $\sigma_i, i = 1, 2, 3$ são as matrizes de Pauli e $\mathbf{1}$ é a matriz unidade 2×2 . O isomorfismo é dado por

$$H \ni q = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3 \longleftrightarrow q_0\mathbf{1} + \mathbf{I}q_1 + \mathbf{J}q_2 + \mathbf{K}q_3 = \mathbf{Q} \in \mathbf{M} \quad (6.26)$$

onde $q_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, 3$. Desta maneira definindo-se também para $\mathbf{A} \in \mathbf{M}$

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \quad (6.27)$$

temos imediatamente que

$$\begin{aligned} e^a e^b &\longleftrightarrow e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}}, \\ e^{a+b} &\longleftrightarrow e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} \end{aligned} \quad (6.28)$$

Neste ponto recordamos de um resultado notável da teoria de matrizes, a famosa fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff que estabelece a solução da equação matricial (para matrizes $n \times n$ com entradas reais ou complexas):

$$\mathbf{C} = \ln(e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}), \quad e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{C}} \quad (6.29)$$

onde as matrizes $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ são tais que $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \neq \mathbf{0}$. A fórmula é:

$$\mathbf{C} = \sum_{n>0} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{\substack{r_i + s_i > 0 \\ 1 \leq i \leq n}} \frac{\mathbf{A}^{r_1} \mathbf{B}^{s_1} \dots \mathbf{A}^{r_n} \mathbf{B}^{s_n}}{r_1! s_1! \dots r_n! s_n!} \quad (6.30)$$

onde os primeiros termos da série são

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= \mathbf{A} + \mathbf{B}, \\ \mathbf{C}_2 &= \frac{1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{B}], \\ \mathbf{C}_3 &= \frac{1}{12}([\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] + [[\mathbf{A}, \mathbf{B}], \mathbf{B}]) \end{aligned} \quad (6.31)$$

e todos os demais termos envolvem comutadores de $\mathbf{A}$ com $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ e $\mathbf{B}$ com $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$. Assim vemos primeiramente que se $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{0}$ então

$$e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} \quad (6.32)$$

Ademais, se ocorrer que $[\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = \mathbf{0}$ e $[\mathbf{B}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = \mathbf{0}$ temos que

$$[\mathbf{A} + \mathbf{B}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = \mathbf{0},$$

e portanto

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} &= e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}+\frac{1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]} \\ &= e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}e^{\frac{1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]} \end{aligned} \quad (6.33)$$

Do isomorfismo entre $\mathbb{H}$ e $\mathbf{M}$ podemos escrever que para $a, b \in \mathbb{H}$ tais que⁵

$$[a, [a, b]] = 0, \quad (6.34)$$

$$[b, [a, b]] = 0, \quad (6.35)$$

⁵ $[a, b] = ab - ba$.

temos

$$e^a e^b = e^{a+b} e^{\frac{1}{2}[a,b]}, \quad (6.36)$$

Seja agora $a, b \in \mathbb{H}$ tal que

$$\frac{1}{2}[a,b] = 2\pi\mathbf{i}, [a, [a, b]] = 0, [b, [ab]] = 0. \quad (6.37)$$

Assim,

$$e^a e^b = e^{a+b} e^{2\pi\mathbf{i}} \quad (6.38)$$

Mas,

$$e^{2\pi\mathbf{i}} = \cos 2\pi + \mathbf{i} \sin 2\pi = 1 \quad (6.39)$$

Assim finalmente, para este caso temos

$$e^a e^b = e^{a+b}, \quad (6.40)$$

mas

$$[a, b] = 4\pi\mathbf{i} \neq \mathbf{0}. \quad (6.41)$$

Portanto podemos afirmar que $e^a e^b = e^{a+b}$ não implica que $ab = ba$.

Observação: Aproveitando a **ocasião** vamos deduzir uma fórmula que fornece diretamente o produto $e^a e^b$, para $a, b \in \mathbb{H}$ quando $a^2 \neq 0, b^2 \neq 0$. Para tanto escreva

$$a = \alpha\mathbf{a}, \quad b = \beta\mathbf{b}, \quad (6.42)$$

onde

$$\mathbf{a} = \frac{a}{\alpha} \in \mathbb{H}, \dots \mathbf{b} = \frac{b}{\beta} \in \mathbb{H},$$

$$\alpha = \sqrt{-(a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)} \in \mathbb{C}, \quad \beta = \sqrt{-(b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2)} \in \mathbb{C}. \quad (6.43)$$

Note que

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{a}\mathbf{a} = \frac{aa}{\alpha^2} = \frac{a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}{-(a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)} = -1,$$

$$\mathbf{b}^2 = \mathbf{b}\mathbf{b} = \frac{aa}{\beta^2} = \frac{b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2}{-(b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2)} = -1 \quad (6.44)$$

Agora, usando a Eqs .(6.24), (6.42) e (6.44) podemos escrever

$$\begin{aligned}
 e^a &= e^{\alpha \mathfrak{a}} = 1 + \alpha \mathfrak{a} + \frac{1}{2!} \alpha^2 \mathfrak{a}^2 + \frac{1}{3!} \alpha^3 \mathfrak{a}^3 + \frac{1}{4!} \alpha^4 \mathfrak{a}^4 + \dots \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2!} \alpha^2 + \frac{1}{4!} \alpha^4 + \dots\right) + \mathfrak{a} \left(\alpha - \frac{1}{3!} \alpha^3 + \frac{1}{3!} \alpha^3 + \dots\right) \\
 &= \cos \alpha + \mathfrak{a} \sin \alpha.
 \end{aligned} \tag{6.45}$$

Analogamente

$$e^b = \cos \beta + \mathfrak{b} \sin \beta \tag{6.46}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 e^a e^b &= (\cos \alpha + \mathfrak{a} \sin \alpha)(\cos \beta + \mathfrak{b} \sin \beta) \\
 &= \cos \alpha \cos \beta + \mathfrak{b} \cos \alpha \sin \beta + \mathfrak{a} \sin \alpha \cos \beta + \mathfrak{a} \mathfrak{b} \sin \alpha \sin \beta.
 \end{aligned} \tag{6.47}$$

Proposição 64 *Suponha que $A (\neq \mathbb{R})$ é uma álgebra real simples e associativa de dimensão ≤ 4 com centro $\mathbb{R}$. Mostre que A é $\mathbb{H}$ ou $\text{Mat}(2, \mathbb{R})$.*

Prova: O centro de $A (\neq \mathbb{R})$ é por definição

$$\mathcal{C} = \{c \in A \mid cx = xc, \forall x \in A\} = \mathbb{R} \tag{6.48}$$

Como toda álgebra A é também um espaço linear e como o problema diz que $\dim A \leq 4$, denotaremos por $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 0, 1, 2, 3$ uma base arbitrária do espaço linear A .

Note que como $1 \in \mathbb{R} \simeq \mathcal{C}$ podemos sempre escolher uma base do espaço linear subjacente à A onde

$$1 \simeq 1\mathbf{e}_0, \tag{6.49}$$

$$\mathbf{e}_0^2 = 1 \tag{6.50}$$

Ademais, como para qualquer $x \in A$,

$$\mathbf{e}_0 x = x \mathbf{e}_0 = x \tag{6.51}$$

devemos ter

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0 &= \mathbf{e}_0, \\
 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_i &= \mathbf{e}_i \mathbf{e}_0.
 \end{aligned} \tag{6.52}$$

Assim, os elementos de $\mathcal{C}$ podem ser tomados como $\mathbf{c} = c\mathbf{e}_0$, $c \in \mathbb{R}$ e

$$\mathbf{c}^2 = c^2\mathbf{e}_0, \quad c^2 \geq 0. \quad (6.53)$$

Agora, mostraremos que $\mathbf{e}_i^2 \in \mathcal{C}$ mas que $\mathbf{e}_i \notin \mathcal{C}$, $i = 1, 2, 3$. De fato, considere o fato que, por exemplo, dado que A é associativa devemos ter:

$$(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1) \quad (6.54)$$

Suponhamos que $\mathbf{e}_1^2 \notin \mathcal{C}$. Neste caso devemos ter:

$$\mathbf{e}_1^2 = w\mathbf{e}_0 + x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3, \quad (6.55)$$

e

$$(\mathbf{e}_1^2)\mathbf{e}_1 = w\mathbf{e}_1 + x\mathbf{e}_1^2 + y\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + z\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 \quad (6.56)$$

Por outro lado,

$$\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1^2) = w\mathbf{e}_1 + x\mathbf{e}_1^2 + y\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3, \quad (6.57)$$

e para que as Eqs. (6.56) and (6.57) sejam satisfeitas devemos ter:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Mas se a Eq.(6.58) é verdadeira, levando em conta também a Eq.(6.52) devemos ter para $\forall x \in A$,

$$\mathbf{e}_1x = x\mathbf{e}_1. \quad (6.59)$$

Ora, este resultado implica que $\mathbf{e}_1 \in \mathcal{C}$, contra hipótese assumida de que todos os elementos de $\mathcal{C}$ tenham a forma $c\mathbf{e}_0$, $c \in \mathbb{R}$.

Portanto concluímos que $\mathbf{e}_i^2 \in \mathcal{C}$. Mas note que $\mathbf{e}_i^2$ não pode ser um real positivo, pois somente o seria se $\mathbf{e}_1 \in \mathcal{C}$, o que já mostramos não é o caso. Contudo os $\mathbf{e}_i^2$ poderiam ser nulos (i.e., $\mathbf{e}_i^2 = 0$, $i = 1, 2, 3$), mas neste caso A não seria uma álgebra de divisão.

(i) Assim estudemos primeiramente o caso em que

$$\mathbf{e}_i^2 = k_i\mathbf{e}_0, \quad k_i < 0. \quad (6.60)$$

Analogamente se mostra que $\mathbf{e}_2^2 = k_2\mathbf{e}_0$, $k_2 < 0$, $\mathbf{e}_3^2 = k_3\mathbf{e}_0$, $k_3 < 0$. Sem perda de generalidade podemos escolher uma base $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ tal que

$$\mathbf{e}_i^2 = -\mathbf{e}_0. \quad (6.61)$$

Agora note que devemos ter:

$$\begin{aligned}
-\mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2, \\
-\mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_3(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1) = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3, \\
-\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1, \\
-\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3, \\
-\mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1, \\
-\mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_2(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2.
\end{aligned} \tag{6.62}$$

A solução de tais equações é (como se pode verificar por inspeção) obtida com a seguinte regra de multiplicação para os $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$:

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_k, \quad i \neq j \neq k, \tag{6.63}$$

que implica que

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j\mathbf{e}_i = 0, \quad i \neq j \tag{6.64}$$

e faz com que reconheçamos $A \simeq \mathbb{H}$.

(ii) Agora vamos estudar o caso em que $\mathbf{e}_i^2 = 0$, $i = 1, 2, 3$. Neste caso, A não é uma álgebra de divisão e se levarmos em conta que por hipótese A é simples e que toda álgebra simples sobre $\mathbb{R}$ possui representação como álgebra de matrizes sobre um anel $\mathbb{K} \supseteq \mathbb{R}$, e ademais que $\dim A \leq 4$, vemos que A não pode ser outra que $\text{Mat}(2, \mathbb{R})$. De fato, esta é a menor álgebra de matrizes de dimensão 4 sobre $\mathbb{R}$ e se $\{\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3\}$ é a base canônica de $\text{Mat}(2, \mathbb{R})$, i.e.,

$$\mathbf{C}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.65}$$

temos a identificação

$$\mathbf{e}_0 \longleftrightarrow \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.66}$$

■

Exercício 65 Suponha que $A(\neq \mathbb{R})$ é uma álgebra real simples com centro $\mathbb{R}$ e um anti-automorfismo $x \mapsto \alpha(x)$ tal que $x + \alpha(x) \in \mathbb{R}$ e $x\alpha(x) \in \mathbb{R}$. Mostre que A é $\mathbb{H}$ ou $\text{Mat}(2, \mathbb{R})$.

Solução: Somente se for dado que $\dim A = 4$ parece-me existir uma solução. Admitindo esta hipótese, seja $\{\mathbf{e}_\mu\}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ uma base do espaço vetorial subjacente à A e suponhamos sem perda de generalidade que $\mathbf{e}_0 \in \mathcal{C}$ e também que

$$\mathbf{e}_0^2 = \mathbf{e}_0.$$

Ademais escrevamos por simplicidade que

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= \hat{x}, \\ \widehat{(xy)} &= \hat{y}\hat{x}, \\ \widehat{\hat{x}} &= x.\end{aligned}$$

Seja

$$x = \sum_{\mu=0}^3 x_\mu \mathbf{e}_\mu \quad (6.67)$$

Como no exercício anterior descobrimos que todos os $\mathbf{e}_i^2 \in \mathcal{C}$, $i = 1, 2, 3$ e devemos ter

$$\mathbf{e}_i^2 = k_i \mathbf{e}_0 \quad (6.68)$$

com todos os $k_i < 0$ para termos uma álgebra de divisão. Se um ou todos os k_i forem nulos A não será uma álgebra de divisão. Sem perda de generalidade escolhemos

$$\mathbf{e}_i^2 = -\mathbf{e}_0 \quad (6.69)$$

Agora, note que

$$-\hat{\mathbf{e}}_2 = (\widehat{\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2}) = (\hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_1) \hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_1 (\hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2) \quad (6.70)$$

e portanto como deve ser

$$\hat{\mathbf{e}}_1^2 = -\mathbf{e}_0 \quad (6.71)$$

Comparando as Eqs. (6.69) e (6.71) vemos que a única solução possível haja visto que os $\mathbf{e}_i$ são linearmente independentes e $\mathbf{e}_1 + \hat{\mathbf{e}}_1 = 0$ é

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = -\mathbf{e}_1, . \quad (6.72)$$

e analogamente se obtém

$$\hat{\mathbf{e}}_j = \mathbf{e}_j, \quad j = 2, 3 \quad (6.73)$$

Agora construindo uma tabela para os $\hat{\mathbf{e}}_i$ análoga a dada pela Eq.(6.62) chegamos a conclusão que

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = - \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \quad (6.74)$$

o que é suficiente para identificarmos $A \simeq \mathbb{H}$.

Finalmente quando A não é álgebra de divisão, i.e., alguns ou todos os $\hat{\mathbf{e}}_i^2 = 0$, uma análise tal a que foi realizada no exercício anterior mostra que neste caso A deve ser identificada com $\text{Mat}(2, \mathbb{R})$. ■

Capítulo 7

Conclusão

Neste trabalho apresentamos uma introdução elementar às álgebras de Clifford Cl_2 e Cl_3 que a nosso ver podem servir de base para um curso introdutório de geometria analítica, para a descrição dos objetos geométricos dos espaços afins bi e tri-dimensionais. Notamos que o produto de Clifford possui significado geométrico profundo e ademais o espaço linear Cl_3 possui subconjuntos muito interessantes como $\text{Spin}(3)$ e $I = Cl_3 e$, respectivamente o grupo de recobrimento universal de $\text{SO}(3)$ e o espaço que representa os Spinors de Pauli, isso permite a introdução de conceitos sofisticados em Física Moderna.

Referências Bibliográficas

- [1] Altman, S. L. ,*Rotations Quaternions, and Double Groups*. Oxford Univ. Press, Oxford,1986.
- [2] Boldrini,J. L.; Costa, S. I. R.; Figueiredo, V. L.; e Wetzler, H. G. *Álgebra Linear*. (3ª edição). Editora Harbra, São Paulo1986.
- [3] Carvalho, A. L. Trovon. *Fundamentos Matemáticos das Teorias de Calibre*, Dissertação de Mestrado. IMECC-UNICAMP, Campinas-SP, 1996.
- [4] Crowe, M. J. *A History of Vector Analysis*, Dover Publications, Inc., New York. 1985.
- [5] Casanova, G. *El Algebra Vectorial*, Ediciones Morata S.A., Madri, 1977.
- [6] Figueiredo, V. L.; Oliveira, E. C.; Rodrigues Jr., W. A. Covariant, Algebraic and Operator Spinors. *Int. J. of Theor.Phys.* **29**, 371-395 (1990).
- [7] Hefez, A. *Curso de Álgebra* (vol.1),Coleção Matemática Universitária, CNPq, Rio de Janeiro,1993.
- [8] Hestenes, D. *New Foundations for Classical Mechanics* (second edition), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht ,1999.
- [9] Hestenes, D. *Space-Time Algebra*, Gordon and Breach Sci. Publ. Inc, New York,1966.
- [10] Hoffman K.; Kunze, R. *Linear Algebra*. Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs-N.J, 1961.
- [11] Lima, ELON. L. *Álgebra Linear*. Coleção Matemática Universitária, CNPq, Rio de Janeiro,1995.

- [12] Lounesto, P. *Clifford Algebras and Spinors*, London Mathematical Society Lecture Note Series. **239**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [13] Menon, M. J. Sobre as Origens das Definições dos Produtos Escalar e Vetorial, *Rev. Bras. Ens. Física.* **31**, 2305-2311 (2009).
- [14] Porteous, I. *Topological Geometry* (2nd edition). Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1981.
- [15] Vaz, J. Jr. A Álgebra Geométrica do Espaço Euclidiano e a Teoria de Pauli, *Rev. Bras. Ens. Física* **19**, 234-259 (1997).

Índice Remissivo

- Álgebra, 27, 38, 79, 128
 - centro, 78
 - de divisão, 118, 129, 130
 - Números complexos, 40
 - não-associativa, 117
 - real simples, 130
 - simples, 130
- Álgebra
 - de matrizes, 94, 130
- Álgebra das Matrizes 2×2 , 24
- Álgebra de Clifford, 92, 95
 - não-graduada, 79
 - parte par e parte ímpar, 52
- Álgebra exterior, 55, 64
- Álgebra real, 93
- Áreas orientadas, 21
- accent 7013Álgebra de Clifford , 18
- Anel
 - de divisão
 - com unidade, 110
- Anti-automorfismo, 27, 117
- Anti-involução
 - Anti-automorfismo, 27
- Aplicação sobrejetora, 13
- Argumento, 35
- Automorfismo, 27, 40
 - álgebra, 39
- Automorfismo
 - entrelaçamento, 42
 - corpo, 39
 - entrelaçamento, 29
- Automorfismo identidade, 40, 42
- Base, 10, 14
- Bilinear, 38
- Bivetor, 17, 19, 20, 63, 64, 66, 99
- Bivetor unitário, 48
- Círculo unitário, 57
- Caspar Wessel, 4, 33
- Centro, 95, 97, 128
- Clifford, 6
- Clifford-conjugada, 96
- Clifford-conjugado, 53
 - Conjugado, 26
- Combinação linear, 10, 14
- Comprimento de vetor, 15
- Comutatividade, 17
- Conjugação complexa, 96
- Conjugado de Study, 41
- Contração
 - à direita, 81
 - à esquerda, 82
 - à esquerda, 80, 83
- Contração à direita, 84
- Corpo, 37
- Corpo dos complexos, 37
- Decomposição de vetor
 - componente paralela

- componente ortogonal, 21
- Determinante, 71
- Dual, 83, 101
- Dual de Hodge, 73
- Duplo anel, 40
- Duplo recobrimento, 122
- Elemento de volume, 93
- Elemento homogêneo, 55, 79
- Elemento idempotente, 109
 - minimal, 108
- Elemento simples, 67
- Elementos homogêneos, 83
- Elementos pares, 95
- Escalar, 9
- Espaço afim, 13, 14
- Espaço dos vetores livres, 13
- Espaço euclidiano
 - Plano euclidiano, 16
- Espaço tangente, 13
- Espaço vetorial, 109
- Espaços Lineares
 - Funções lineares, 11
- Espaço afim, 7, 10, 85
- Espaço linear, 39, 128
- Espaço vetorial, 10, 11
 - espaço afim, 10
- Estrutura afim, 12
- Estrutura linear real, 38
- Estrutura multivetorial, 18, 76, 79
- Estruturas quadráticas
 - métrica, 14
- Euclides, 3
- Exponencial, 103
- Fórmula
 - Baker-Campbell-Hausdorff, 126
- Fórmula de Euler, 35
- Forma polar hiperbólica, 41
- Forma quadrática, 16
- Função exponencial, 35
- Gauss, 4
- Gerador de rotação, 93
- Gibbs, 7
- Graduação
 - par-ímpar, 53
- Graduação, 79
- Graduação par-ímpar, 96
- Grassmann, 5
- Grupo de rotações, 57
 - $SO(3)$, 106
- Grupo $O(2)$, 59
- Grupo $Pin(2)$, 59
- Grupo $spin(2)$, 58
- Grupo $Spin(3)$, 91, 106
- Grupo $Spin(30)$, 106
- Grupo $SU(2)$, 106, 108
- Grupo unitário, 57
- Hamilton, 4, 115
- Heaviside, 7
- Hipercomplexos, 115
- Homomorfismo, 59, 106
- Ideal, 109
 - Minimal, 109
- Ideal
 - à esquerda, 108
- Identidade de Jacobi, 117
- Inversível, 32
- Inverso
 - vetor, 82
- Involução, 27, 53
- Involução graduada, 53, 96
- Involuções, 96
- Isaac Newton, 4

- Isomorfismo, 93, 106, 107, 110, 125
- Isomorfismo , 73
- Jerome Cardan, 3
- Leibniz, 3
- Métrica
 - spinoral, 112
- Métrica spinoral, 107
- Matriz
 - hermitiana, 94
 - hermitiana conjugada, 96
 - não-hermitiana, 94
- Matriz spin de Pauli, 93
- Matrizes de Pauli, 125
- Matrizes hermitianas, 107
- Matrizes spin de Pauli, 91
- Maxwell, 5
- Multiplicação por escalar, 10
- Multivetor, 102
- Números complexos, 33
- Números de Study, 41
- Norma, 35, 98, 112, 117
 - volume, 71
- Operador de dualidade, 93
- Parte ímpar, 77
- Parte par, 77
- Pauli, 91
- Plano complexo, 34
- Produto
 - vetorial, 72
- Produto bilinear simétrico, 68, 70, 98
- Produto de Clifford, 16, 18, 75, 82, 86
- Produto de clifford, 105
- Produto de quatérnions, 123
- Produto escalar
 - Produto interno, 15
- Produto exterior, 19, 64, 75
- Produto geométrico, 20, 84
- Projeções
 - Perpendicular, 22
- Quatérnion, 112, 116
 - puro, 116, 120
 - unitário, 112, 121
- Quatérnions, 77, 95
- Recobrimento duplo, 58, 106
- Recobrimento universal, 106
- Reflexão, 22, 60, 99
- René Descartes, 3
- Reversão, 25, 53
- Rotação, 24
- Rotação, 49, 55, 102, 107, 121, 122
 - sentido anti-horário, 57
- Rotação racional, 50
- Série de potências, 35, 102
- Spin, 91
- Spinor
 - de Pauli
 - unitário, 108
 - algébrico, 111, 112
 - operacional, 112
 - unitário, 112
- Spinor
 - algébrico
 - unitário, 112
 - de Pauli, 108
 - covariantes, 107
 - de pauli
 - unitário, 112
- Stern-Gerlach, 91
- Subálgebra
 - Par, 47

- par, 77, 95, 115
- Subálgebra
 - par, 95
- Subálgebras, 124
- Subespaço vetorial, 12
- Subespaço, 24, 95
- Tait, 5
- Transformação linear, 12
- Unidade de área orientada, 50
- Unidade de volume orientado, 70
- Unidade imaginária, 93
- Vetor, 9
- Vetor unitário, 16
- Vetores, 11
- Vetores livres
 - Vetores tangentes, 13
- Vetores ortogonais, 16
- Volume orientado, 69, 81