



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica - IMECC
Departamento de Matemática



*Semigrupos e Controle em Grupos Semisimples sobre
Corpos Locais.[†]*

Daniel Miranda Machado

Tese de Doutorado

Orientador: **Prof. Doutor Marcelo Firer**

Co-Orientador: **Prof. Doutor Luiz A. B. San Martin**

07 de Junho de 2006

Campinas - SP

[†] Este trabalho contou com apoio financeiro da FAPESP - processo 01/10951-5.

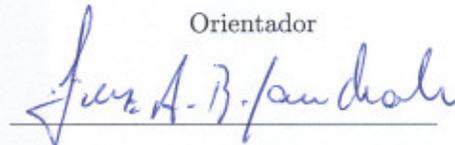
Semigrupos e Controle em Grupos Semisimples sobre Corpos Locais.

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Daniel Miranda Machado** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 07 de junho de 2006.



Prof. Dr. Marcelo Firer
Orientador



Prof. Dr. Luiz A. B. San Martin
Co-Orientador

Banca examinadora:

1. Prof. Dr. Marcelo Firer IMECC - UNICAMP
2. Prof. Dr. Roberto Miatello UNCOR
3. Prof. Dr. Pedro José Catuogo IMECC - UNICAMP
4. Prof. Dr. Nelo da Silva Allan UNESP
5. Prof. Dr. Osvaldo Germano Rocio UEM

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção de Título de **Doutor em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Machado, Daniel Miranda

M18s Semigrupos e controle em grupos semisimples sobre corpos locais / Daniel Miranda Machado -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2006.

Orientadores : Marcelo Firer; Luiz Antonio Barrera San Martin

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Lie, Grupos de. 2. Teoria de controle. 3. Semigrupos. 4. Corpos locais (Álgebra). I. Firer, Marcelo. II. San Martin, Luiz Antonio Barrera. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Título em inglês: Semigroups and control in semi-simple groups over local fields.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Lie groups. 2. Control theory. 3. Semigroups. 4. Local fields.

Área de concentração: Geometria

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Marcelo Firer (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Roberto Miatello (UNCOR – Argentina)
Prof. Dr. Pedro José Catuogno (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Nelo da Silva Allan (UNESP)
Prof. Dr. Osvaldo Germano Rocio (UEM)

Data da defesa: (07/06/2006)

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 07 de junho de 2006e aprovada

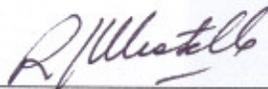
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



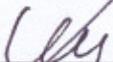
Prof. (a). Dr (a). MARCELO FIRER



Prof. (a). Dr (a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO



Prof. (a). Dr (a). ROBERTO JORGE MIATELLO



Prof. (a). Dr (a). OSVALDO GERMANO DO ROCIO



Prof. (a) Dr. (a) NELO DA SILVA ALLAN

Sumário

Agradecimentos	ix
Resumo	xi
Abstract	xiii
Tabela de Símbolos	xvii
1 Semigrupos em Grupos de Lie Semi-simples	1
1.1 Semigrupos	1
1.1.1 Semigrupos de homeomorfismos locais	2
1.1.2 Geometria da ação de \mathcal{S}	2
1.1.3 Geometria da ação aproximada de \mathcal{S}	3
1.1.4 Relação de equivalência de órbitas	4
1.2 Grupos de Lie Semisimples e Conjunto de Controle	6
1.3 Conjuntos de Controle e a Estrutura no Infinito	8
2 Geometria Ultramétrica	9
2.1 Corpos não-arquimedianos	9
2.1.1 p -ádicos	10
2.1.2 Valoração	10
2.1.3 Teorema de Ostrowski	12
2.2 Topologia ultramétrica	12
2.3 Funções Analíticas	14
2.4 Geometria sobre Corpos Locais	15

3	Espaços CAT e Fronteira Ideal	17
3.1	Definições Preliminares	17
3.2	Espaços CAT	19
3.2.1	Centro de Um Conjunto Limitado	20
3.3	Fronteira no Infinito	21
3.3.1	Compactificação Visual	21
3.3.2	Compactificação de Busemann	22
3.4	Isometrias	23
4	Edifícios de Tits	25
4.1	Estrutura Simplicial	25
4.1.1	Complexos Simpliciais Abstratos	25
4.1.2	Sistemas de Câmaras	26
4.1.3	Complexos de Câmaras	27
4.2	Grupos de Coxeter	28
4.2.1	Grafo de Coxeter	29
4.2.2	Complexos de Coxeter	29
4.3	Edifícios de Tits	30
4.4	Grupos de Automorfismos e Pares BN	32
4.4.1	Associando Δ e G	33
4.4.2	Pares BN	36
5	Edifícios euclidianos	39
5.1	Edifícios Euclidianos são CAT(0)	42
5.2	Edifício no Infinito	43
6	Grupos algébricos lineares sobre Corpos Locais	45
6.1	Grupos Algébricos	45
6.1.1	Variedades Afins	45
6.1.2	Grupos algébricos	46
6.1.3	Edifício Esférico Associado	48
6.2	Grupos algébricos lineares sobre Corpos locais	49
6.2.1	O Edifício Euclidiano Associado	49

6.2.2	Subgrupos parahóricos e parabólicos	49
6.2.3	Decomposição de Cartan e Iwasawa	50
6.2.4	Decomposição Celular de Bruhat	51
7	Semigrupos e Controle	55
7.1	Fatos Preliminares	55
7.2	Ação das Isometrias Hiperbólicas no Edifício Euclidiano	58
7.3	Controle de Semigrupos	62
7.3.1	Subgrupo $W(S)$	66
A	Os edifícios de $Sl_n(\mathbb{Q}_p)$	71
A.1	O edifício esférico	71
A.2	O edifício euclidiano de $Sl_n(k)$	72
B	Exemplos de semigrupo de interior não vazio.	75
C	Exemplo de Semigrupo de $Sl(2, k)$	77
C.1	Ação de $Sl(2, k)$ no espaço Vetorial k^2	78
C.2	Ação de $Sl(2, k)$ na árvore	80

Agradecimentos

Ao meu amigo Marcelo, pelos momentos agradáveis que tivemos fazendo ou não matemática. Pela sua infinita paciência.

Ao Luiz pela oportunidade.

A minha família (Maria, Lázaro, Jenny e Paloma) e aos meus amigos: Alexandre (Filósofo), Carlos, Carol, Dú, Leo, Martha, Paula, Pedro, Peter, Rafael, Renan, Tamara, Thaisa e outros, por terem feito minha vida mais divertida e bela.

Resumo

Dado G um grupo de Lie conexo, simplesmente conexo e quase-simples sobre um corpo local e \mathcal{S} um semigrupo de G com interior não vazio. Estudando a ação dos elementos hiperbólicos regulares pertencentes ao interior de \mathcal{S} na variedade bandeira G/P e no edifício euclidiano associado a G , demonstra-se a existência e unicidade do conjunto de controle invariante. Obtém-se também a seguinte caracterização do conjunto de transitividade dos conjuntos de controles: o conjunto de transitividade é constituído por pontos fixos do tipo w para uma isometria hiperbólica, sendo w um elemento do grupo de Weyl de G . Logo a cada w em W podemos associar um conjunto de controle D_w . Essa associação não é bijetiva, porém $W(\mathcal{S})$, o subconjunto do grupo de Weyl tal que o conjunto de controle D_w coincide com o conjunto de controle invariante D_1 , é um subgrupo de Weyl de W . Temos ainda que os conjuntos de controle podem ser parametrizados pelas classes laterais $W(\mathcal{S})\backslash W$.

Palavras-chave: Semigrupos, Corpos Locais, Teoria de Controle.

Abstract

Let G be a almost-simple, simply connected and connected Lie group over a local field and \mathcal{S} a subsemigroup with non-empty interior. Studying the action of the regular hyperbolic elements in the interior of \mathcal{S} on the flag manifold G/P and on the associated euclidean building, we prove the existence and uniqueness of the invariant control set. Moreover we provide a characterization of the set of transitivity of the control sets: the elements of set of transitivity are the fixed points of type w for a regular hyperbolic isometry, where w is a element of the Weyl group of G . Thus, for each w in W there is a control set D_w and $W(\mathcal{S})$ the subgroup of the Weyl group such that the control set D_w coincide with the invariant control set D_1 is a Weyl subgroup of W . At last, we derived that the control sets are parametrized by the lateral classes $W(\mathcal{S})\backslash W$.

Key-words: Semigroups, Local Fields, Control Theory.

Prefácio

O objetivo deste texto é estudar semigrupos de grupos de Lie sobre corpos locais usando os conjuntos de controles invariantes (c.c.i) na fronteira no infinito do edifício euclidiano. No caso real, usando todo o ferramental da teoria de Lie, San Martin e outros, e, por exemplo, [San1], [San2], [ST] demonstraram uma rica relação entre semigrupos e conjuntos de controle nas variedades bandeiras e no artigo [FR], Firer e Rocio mostraram como interpretar esses resultados para conjuntos de controle nos espaços simétricos. O artigo [FR] usa os resultados (em particular existência e unicidade do conjunto de controle invariante) para variedades bandeiras.

A generalização para o caso não arquimediano é não trivial, pois sobre estes corpos o ferramental da teoria de Lie é insuficiente. Em particular, não temos a convergência da exponencial fora de uma vizinhança da identidade, o que torna inviável a utilização do uso de álgebras de Lie para estudo de fenômenos globais (assintóticos) como os conjuntos de controle.

O recurso é utilizar especialmente o edifício euclidiano associado a esses grupos. O edifício euclidiano desempenha um papel análogo ao do espaço simétrico no caso real. E desta forma obter uma demonstração de existência e unicidade dos conjuntos de controle usando apenas resultados sintéticos sobre a ação do grupo no edifício euclidiano e sua compactificação, o edifício esférico.

O texto foi escrito com objetivo de ser auto-contido. No primeiro capítulo apresentamos esquematicamente os resultados sobre semigrupos de grupos de Lie reais. No segundo apresentamos uma breve introdução aos corpos locais, inclusive à análise sobre esses corpos, no terceiro os espaços **CAT**. O quarto e quinto apresentam a estrutura dos edifícios de Tits esférico e euclidiano. Finalmente no sexto apresentamos os grupos algébricos semisimples sobre corpos não arquimedianos localmente compacto, o edifício

euclidiano associado (que é um espaço **CAT**), o edifício no infinito e várias propriedades que decorrem da ação dos grupos algébricos sobre o edifício: como as decomposições de Bruhat, Cartan, Iwasawa.

Feito isso temos um arsenal sólido para tratarmos a ação dos semigrupos no edifício euclidiano (e a ação projetada no edifício esférico). No capítulo sete apresentamos os resultados obtidos para os semigrupos sobre corpos locais.

Lista de Símbolos

A	anel de valoração	11
\mathbb{B}	variedade bandeira	62
B	estabilizador de uma câmara	33
C	câmara	26
$C(\xi)$	câmara contendo ξ	58
D	conjunto de controle	4
D_0	conjunto de transitividade	4
D_w		65
$\partial_\infty(X)$	fronteira no infinito de X	30
Δ	edifício	30
$ \gamma $	norma da isometria γ	23
G	grupo algébrico	46
h	isometria hiperbólica	55
J	geradores do grupo de Coxeter	28
k	corpo	10
K	subgrupo compacto maximal	50
\hat{k}	corpo resíduo	28
N	estabilizador de um apartamento	33
P, P_I, P^I	subgrupos parabólicos	34
\mathbb{Q}_p	p -ádicos	10
\mathcal{S}	Semigrupo	62

Σ	Apartamento	30
S	setor	41
T	toro	33
$v(x)$	valoração de x	10
$W(\mathcal{S})$		66
W_0	grupo de Weyl do edifício esférico	56
W	grupo de Weyl	29, 33
X	espaço CAT	19
X	edifício euclidiano	42
\bar{X}	compactificação de X	22
ξ, η	pontos em $\partial_\infty(X)$	43

Capítulo 1

Semigrupos em Grupos de Lie Semi-simples

Este capítulo contém as definições e notações referentes a semigrupos e uma compilação dos principais resultados para semigrupos (de interior não vazio) de grupos de Lie.

Duas diferenças significativas da ação de semigrupos, em oposição ao caso de um grupo, são que a inexistência de inversos implica a existência de órbitas de não retorno e que as órbitas de um semigrupo de difeomorfismo de uma variedade não são variedades. O segundo fato é falso para semigrupos pois a relação $x \leq y \Leftrightarrow x \in \mathcal{S}x$ é uma relação de equivalência no caso grupos, mas não é no caso de semigrupos.

Neste cenário os conjuntos de controle (essencialmente os subconjuntos nos quais a relação acima é uma relação de equivalência) desempenham um papel importante. Desta forma, várias propriedades dos semigrupos podem ser deduzidas de propriedades dos conjuntos de controle.

Apesar desta seção ser praticamente independente das posteriores, é nela que traçamos nosso objetivo: generalizar os resultados apresentados no contexto de grupos de Lie sobre os reais, para o caso de grupos semisimples sobre corpos locais.

1.1 Semigrupos

Um **semigrupo** é um conjunto não vazio \mathcal{S} munido de uma operação associativa (produto).

Um **subsemigrupo** é um subconjunto $C \subset \mathcal{S}$ tal que $CC \subset C$.

Um exemplo de semigrupo bastante simples é o conjunto multiplicativo dos reais positivos \mathbb{R}^+ . Um exemplo de maior interesse (na realidade, paradigmático) é o subconjunto $Sl^+(n, \mathbb{R})$ das matrizes reais não negativas com determinante igual a 1, que é um subsemigrupo de $Sl(n, \mathbb{R})$.

1.1.1 Semigrupos de homeomorfismos locais

Dado X um espaço topológico, seja $C_l(X)$ o conjunto das aplicações contínuas

$$g : \text{dom}(g) \rightarrow X$$

tais que $\text{dom}(g)$ é aberto e não vazio. Em $C_l(X)$ podemos definir a seguinte estrutura de semigrupo: dados $g, h \in C_l(X)$ tal que $\text{im}(g) \cap \text{dom}(h) \neq \emptyset$ podemos definir a aplicação hg que é um elemento de $C_l(X)$. Quando definido este produto é associativo.

Um conjunto $\mathcal{S} \subset C(X)$ é dito um **semigrupo local** se é fechado em relação à composição em $C(X)$.

Um semigrupo local G é dito um grupo local se contiver a aplicação identidade e se para cada $g \in G$ existe h tal que $hg = 1$.

Um semigrupo local \mathcal{S} é dito um monóide se $1 \in \mathcal{S}$.

Um homeomorfismo $g : \text{dom}(g) \rightarrow \text{im}(g)$ é dito local se ambos $\text{im}(g)$ e $\text{dom}(g)$ forem abertos. Denotaremos por $\mathcal{H}(X)$ o conjunto dos homeomorfismos locais de X . Observamos que $g \in \mathcal{H}(X)$ se, e somente se, $g^{-1} \in \mathcal{H}(X)$.

Dado um semigrupo local, o conjunto

$$\mathbb{H}(\mathcal{S}) = \{g \in \mathcal{H}(X) \cap \mathcal{S} : g^{-1} \in \mathcal{S}\}$$

é denominado de grupo das unidades de \mathcal{S} .

1.1.2 Geometria da ação de \mathcal{S}

Consideraremos nesta subsecção uma ação de um semigrupo \mathcal{S} em um conjunto X e definiremos vários conjuntos de significado geométrico evidente.

Definição 1.1 Dado \mathcal{S} um semigrupo local e $x \in X$. O conjunto

$$\mathcal{S}x = \{gx \in X : g \in \mathcal{S}, x \in \text{dom}(g)\}$$

é denominado **órbita** de x pela ação de \mathcal{S} .

Um semigrupo \mathcal{S} é dito **transitivo** em um conjunto $D \subset X$ se $y \in \mathcal{S}x$ para todo $x, y \in D$.

Definição 1.2 O conjunto D é dito um conjunto de transitividade de \mathcal{S} ou simplesmente \mathcal{S} -transitivo.

Definição 1.3 Um subconjunto $N \subset X$ é invariante sob \mathcal{S} ou \mathcal{S} -invariante, se $\mathcal{S}x \subset N$ para todo $x \in N$.

Definição 1.4 O domínio de atração de um conjunto $D \subset X$ é definido por

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}}D = \{x \in X : \mathcal{S}x \cap D \neq \emptyset\}$$

Definição 1.5 O conjunto atingível $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}D$ é dado por:

$$\mathcal{R}_{\mathcal{S}}D = \bigcup_{x \in D} \mathcal{S}x$$

1.1.3 Geometria da ação aproximada de \mathcal{S}

Se X for um espaço topológico, e a ação de \mathcal{S} for contínua em X , todos os conceitos da seção anterior podem ser definidos por aproximação utilizando o fecho topológico.

Definição 1.6 Um semigrupo \mathcal{S} é dito aproximadamente transitivo em um conjunto $D \subset X$ se $D \subset \text{cl}(\mathcal{S}x)$ para todo $x \in D$.

Definição 1.7 Um subconjunto $N \subset X$ é aproximadamente invariante sob \mathcal{S} , se $\text{cl}(\mathcal{S}x) \subset \text{cl}(N)$ para todo $x \in N$.

Definição 1.8 O domínio de atração aproximado de um conjunto $D \subset X$ é definido por

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^f D = \{x \in X : \text{cl}(\mathcal{S}x) \cap D \neq \emptyset\}$$

Definição 1.9 O conjunto atingível aproximado $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}^f D$ é dado por:

$$\mathcal{R}_{\mathcal{S}}^f D = \bigcup_{x \in D} \text{cl}(\mathcal{S}x)$$

1.1.4 Relação de equivalência de órbitas

A ação de \mathcal{S} induz duas relações de ordem em X :

1. Dizemos que $x \preceq y$ se $y \in \mathcal{S}x$
2. Dizemos que $x \preceq_f y$ se $y \in \text{cl}(\mathcal{S}x)$

Proposição 1.10 *Se \mathcal{S} é um monóide então \preceq e \preceq_f são pré ordens em X .*

A cada uma dessas pré ordens podemos associar uma relação de equivalência, dizemos que $x \sim y$ se $x \preceq y$ e $y \preceq x$ ou que $x \sim_f y$ se $x \preceq_f y$ e $y \preceq_f x$.

Um semigrupo local \mathcal{S} é dito acessível a partir de $x \in X$ se $\text{int}(\mathcal{S}x) \neq \emptyset$. Um ponto $x \in X$ é dito auto-acessível sob um semigrupo local se $x \in \text{int}(\mathcal{S}x)$.

Definição 1.11 *Uma classe de equivalência D de \sim_f é um **conjunto de controle**, se existe $x \in D$ que é auto acessível sob \mathcal{S}^{-1} .*

Denotamos por

$$D_0 = \{x \in D : x \in \text{int}(\mathcal{S}^{-1}x)\}$$

o conjunto dos pontos $x \in X$ que são auto-acessíveis sob \mathcal{S}^{-1} . Note que se D é um conjunto de controle, então D_0 é não vazio.

Existe uma ordem parcial entre os conjuntos de controle: D_1 é dito menor que D_2 se é possível atingir D_2 a partir de D_1 , ou seja, se existe $x \in D_1$ e $g \in \mathcal{S}$ tal que $gx \in D_2$. Com respeito a essa ordem um conjunto de controle maximal é um **conjunto de controle invariante**.

Proposição 1.12 *Um conjunto de controle para \mathcal{S} em X pode ser caracterizado como um conjunto não vazio $D \subset X$ tal que:*

1. Para todo $x \in D$, $\text{Cl}(\mathcal{S}x) = \text{Cl}(D)$
2. D é maximal dentre os conjuntos com a propriedade acima.

Proposição 1.13 *No caso em que interior de \mathcal{S} é não vazio, seja D um conjunto de controle e $D_0 = (\text{int } \mathcal{S})D$, então temos:*

1. $D_0 = \text{int}(\mathcal{S}x)$ para todo $x \in D_0$
2. $\text{cl} D_0 = D$
3. Se x e $y \in D_0$ então $\exists g \in \text{int } \mathcal{S}$ tal que $gx = y$

Teorema 1.14 *Se X for compacto então existe pelo menos um conjunto de controle invariante D .*

Demonstração: Provaremos a existência do conjunto de controle invariante usando o Lema de Zorn.. Para isso seja $x \in X$ e considere a família de conjuntos:

$$\mathcal{O}_x = \{\text{cl}(\mathcal{S}y) : \text{cl}(\mathcal{S}y) \subset \text{cl}(\mathcal{S}x)\}$$

Esta família é não vazia, pois contém $\text{cl}(\mathcal{S}x)$. Seja então uma cadeia $\{\mathcal{O}_x\}_I$ com índices I . Temos que

$$\bigcap_{y \in I} \text{cl}(\mathcal{S}y) \neq \emptyset$$

Seja $z \in \bigcap_{y \in I} \text{cl}(\mathcal{S}y)$, temos então que $\text{cl}(\mathcal{S}z) \in \mathcal{O}_x$ e $\text{cl}(\mathcal{S}z) \subset (\mathcal{S}y)$ para todo $y \in I$. Logo $\text{cl}(\mathcal{S}z)$ é um limitante inferior da cadeia. Pelo lema de Zorn temos que \mathcal{O}_x possui um elemento minimal $D = \text{cl}(\mathcal{S}p)$, para algum $p \in X$. Pela minimalidade segue que $\text{cl}(\mathcal{S}y) = \text{cl}(\mathcal{S}p)$ para todo $y \in \text{cl}(\mathcal{S}p)$. Logo D é um conjunto de controle invariante. \square

Exemplo: Seja $G = Sl(n, \mathbb{R})$ e \mathcal{S} o semigrupo das matrizes de entrada não negativas. Esse semigrupo age em \mathbb{R}^n de modo usual e conseqüentemente podemos induzir uma ação de $Sl(n, \mathbb{R})$ em $\mathbb{R}P^{n-1}$ por $g[v] = [gv]$, $v \in \mathbb{R}^n - 0$.

O conjunto $D = \{[x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}P^{n-1} : x_i \geq 0\}$ que corresponde à imagem do octante positivo de \mathbb{R}^n é um conjunto de controle para \mathcal{S} .

Provaremos que D é um conjunto de controle invariante mostrando que \mathcal{S} é transitivo em $\text{int}(D) = \{[(x_1, \dots, x_n)] \in \mathbb{R}P^{n-1} : x_i > 0\}$. Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ pertencentes a $\text{int}(D)$. Seja a matriz diagonal pertencente a $Sl(n, \mathbb{R})$ $g = \delta * \text{Diag}(y_1/x_1, \dots, y_n/x_n)$ com $\delta = x_1 \cdots x_n / y_1 \cdots y_n$, temos que $g[x] = y$ e que $\text{cl}(\mathcal{S}[x]) = D$, para todo $x \in D$. Como D é fechado temos que D é o conjunto de controle invariante. \square

1.2 Grupos de Lie Semisimples e Conjunto de Controle

A estrutura de grupo de Lie semi-simples nos fornece ferramentas para uma caracterização precisa dos conjuntos de controles associados a um semigrupo, obtendo resultados substanciais e uma forte ligação entre os conjuntos de controle e os semigrupos maximais.

Dado G um grupo de Lie semisimples de centro finito e \mathfrak{g} a álgebra de Lie associada.

Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{s}$ uma decomposição de Cartan de \mathfrak{g} e \mathfrak{a} uma sub-álgebra abeliana maximal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$. Podemos decompor \mathfrak{a} em câmaras de Weyl. Selecione uma delas, denotada por \mathfrak{a}^+ , associadas a ela temos um sistema positivo de raízes Δ^+ e um sistema simples de raízes Π . Para toda raiz α seja o seu espaço de raízes:

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : \text{ad}(H)X = \alpha(H)X, \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\}$$

Temos então que $\mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$ é nilpotente. E temos ainda a decomposição de Iwasawa de \mathfrak{g} :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$$

Associada à decomposição de Iwasawa da álgebra, temos a decomposição global de Iwasawa do grupo $G = KAN^+$, sendo K um subgrupo compacto, A subgrupo abeliano e N^+ nilpotente.

Seja M o centralizador de A em K

$$M := \{u \in K : uhu^{-1} = h \text{ para todo } h \in A\}$$

e M^* o normalizador

$$M^* = \{u \in K : uAu^{-1} = A\}$$

O grupo finito $W = M^*/M$ é o grupo de Weyl de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$.

Se denotarmos por \mathfrak{m} a álgebra de Lie de M , temos que $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ é a sub-álgebra parabólica minimal, essa álgebra é a álgebra de Lie do subgrupo parabólico minimal $P = MAN^+$. Um subgrupo é dito parabólico se contiver algum parabólico minimal.

A teoria de controle de subsemigrupos de G no variedade bandeira $B = G/P$ foi desenvolvida por San Martin (veja as referências no início da seção). Apresentamos alguns desses resultados no texto que segue.

O seguinte resultado caracteriza o caso em que temos um único conjunto de controle.

Teorema 1.15 *O semigrupo \mathcal{S} admite um único conjunto de controle em $M = G/H$, se, e somente se, $D = \bigcap_{x \in M} \text{cl}(\mathcal{S}x)$ for não vazio. Neste caso D é o conjunto de controle invariante (para demonstração ver [AK]).*

O seguinte resultado garante a existência de conjuntos de controles em alguns casos interessantes.

Teorema 1.16 *Suponha $g \in \text{int}(\mathcal{S})$, e seja Ω o conjunto minimal para a g -ação em M . Então existe um conjunto de controle D para \mathcal{S} tal que $\Omega \subset \text{int}(D)$. Em particular pontos fixos para M estão no interior de conjuntos de controle.*

Teorema 1.17 *Se $\text{int}(\mathcal{S}) \neq \emptyset$, então existe um único conjunto de controle em G/P*

Temos também o seguinte resultado de controlabilidade:

Teorema 1.18 *Seja G um grupo de Lie semisimples e conexo, se $\text{int } \mathcal{S} \neq \emptyset$. Então \mathcal{S} é transitivo no flag maximal G/P se, e somente se, $\mathcal{S} = G$*

E por último temos a seguinte descrição dos semigrupos maximais de interior não vazio:

Proposição 1.19 *Todo subgrupo maximal com interior não vazio é um semigrupo de compressão de um conjunto D de um flag maximal de G :*

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_D = \{g \in G : gD \subset D\}$$

sendo D um conjunto de controle invariante para \mathcal{S} .

Para obtermos uma caracterização completa dos semigrupos maximais de G , precisamos caracterizar os conjuntos D tais que \mathcal{S}_D é maximal.

Um conjunto D é dito \mathfrak{B} -convexo se for igual à interseção de todas as células de Bruhat contendo ele. Veja a seção 6.2.4 para uma descrição detalhada da decomposição celular de Bruhat.

Teorema 1.20 *Um conjunto \mathcal{S} é maximal se, e somente se, existe um conjunto \mathfrak{B} -convexo D com $\text{int } D \neq \emptyset$ tal que $\mathcal{S} = \mathcal{S}_K$, com $K = \text{cl}(\text{int } D)$. Neste caso K é o conjunto de controle invariante para \mathcal{S} .*

1.3 Conjuntos de Controle e a Estrutura no Infinito

Os resultados da seção anterior foram todos obtidos para o flag G/P . Uma abordagem mais geométrica desse problema seria estudar a ação de \mathcal{S} e os conjuntos de controle no espaço simétrico $X = G/K$ ou mais precisamente na fronteira ideal $\partial_\infty(G/K)$. Isso foi feito por Firer e Rocio em [FR]. Neste caso o conjunto de controle é a fronteira ideal $\partial_\infty(\mathcal{S}x_0)$, ou seja, a projeção na fronteira ideal da órbita $\mathcal{S}x_0$ sendo x_0 um ponto arbitrário do espaço simétrico.

O teorema principal dessa abordagem nos diz:

Teorema 1.21 *Seja \mathcal{S} um subsemigrupo de G com interior não vazio. Considere a fronteira de uma órbita $\mathcal{S}x_0$ em G/K e seja E a fronteira ideal de $\partial_\infty(\mathcal{S}x_0)$. Então E é o único conjunto de controle invariante de \mathcal{S} . Além disso se D é o único conjunto de controle invariante em G/P , temos uma projeção canônica:*

$$\pi(E) = D$$

A projeção π acima é uma consequência de $\partial_\infty(G/K)$ ser uma realização do edifício esférico para G , enquanto $\bigcup_{\Theta \in \Sigma} G/P_\Theta$ é o edifício esférico. Detalhes a respeito podem ser encontrados nas seções 6.2.2 e 6.2.4

Referências

As referências principais para esse capítulo são os artigos:

- SAN MARTIN L. A. B. *Invariant Control Sets on Flag Manifold*
- SAN MARTIN L. A. B.; TONELLI, P; *Semigroups Actions on Homogeneous Spaces*
- SAN MARTIN L. A. B. *Maximal Semigroups in Semi-Simple Lie Groups*
- FIRER, M.; ROCIO, O. *Invariant Control Sets on Flag Manifolds and Ideal Boundaries of Symmetric Spaces*

Capítulo 2

Geometria Ultramétrica

2.1 Corpos não-arquimedianos

No que se segue por **corpos** entenderemos corpos comutativos. Os anéis que consideraremos além de comutativos sempre serão dotados da identidade.

Uma **norma** ou **valor absoluto** é uma função de um anel $| \cdot | : A \rightarrow \mathbb{R}_+$, que satisfaz as seguintes propriedades:

- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|xy| = |x| |y|$
- $|1| = 1$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ (desigualdade triangular)

O nosso interesse no que se segue será em corpos normados que satisfazem a **desigualdade ultramétrica** (ou **desigualdade triangular forte**) :

$$|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$$

Uma norma que satisfaz a desigualdade triangular forte é dita norma ultramétrica. Os corpos dotados de normas ultramétricas são ditos **corpos ultramétricos**, ou **corpos não-arquimedianos** ou **corpos ultramétricos**.

Um **corpo** normado será dito **completo** se ele for completo na topologia induzida por sua norma. Claramente todo corpo pode ser completado de modo que o completamento seja um corpo.

Um **corpo** ultramétrico é dito **local** se for completo e localmente compacto

Os exemplos paradigmáticos de corpos locais são os p -ádicos.

2.1.1 p -ádicos

A construção dos p -ádicos é feita através da decomposição dos números inteiros em primos. Como sabemos, todo número inteiro n pode ser decomposto como produtos de primos distintos elevados a uma potência

$$n = p_1^{r_1} \dots p_j^{r_j}$$

Essa decomposição é essencialmente única a menos de associação e de permutação.

Dado p um número primo, podemos construir sobre \mathbb{Q} a norma p -ádica. Para todo $a \in \mathbb{Q}$ temos que

$$a = p^r \frac{m}{n}$$

com m, n, r inteiros e m, n coprimos com p . Desta forma definimos a norma $| \cdot |_p$ para \mathbb{Q} por $\begin{cases} |x|_p = 0 & \text{se } x = 0 \\ |x|_p = p^{-r} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$

Definição 2.1 Definimos o corpo \mathbb{Q}_p dos p -ádicos como o completamento de \mathbb{Q} em relação à topologia $| \cdot |_p$.

2.1.2 Valoração

Seja k um corpo e k^* seu grupo multiplicativo. Uma **valoração** de k é um homomorfismo do grupo (k^*, \cdot) no grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$

$$v : k^* \rightarrow \mathbb{R}$$

que satisfaz

$$v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$$

para todo $x, y \in k^*$ com $x + y \neq 0$.

No caso em que v é um homomorfismo sobrejetivo de k em \mathbb{Z} , satisfazendo $v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$ a **valoração** é dita **discreta**.

Em ambos os casos é útil definir $v(0) = +\infty$ e desta forma a desigualdade passa a ser válida para todos $x, y \in k$.

Proposição 2.2 (*[At]*) *Para valorações discretas temos:*

1. $A = \{x \in k : v(x) \geq 0\}$ é um sub-anel de k denominado **anel de valoração**¹
2. O grupo de unidades A^* de A é o kernel ($v^{-1}(0)$) de v .
3. Se tomarmos um elemento $\pi \in k$ com $v(\pi) = 1$, então todo elemento $x \in k^*$ pode ser expresso de maneira única na forma $x = \pi^n u$ com $n \in \mathbb{N}$ e $u \in A^*$.
4. k é o corpo de frações de A
5. O ideal $\pi A = \{x \in k : v(x) > 0\}$ é um ideal maximal, já que todo elemento de A que não está em πA é uma unidade.
6. O anel quociente $\hat{k} = A/\pi A$ é um corpo.

Uma valoração induz uma norma ultra-arquimediana em k , definida por:

$$|x|_v = e^{-v(x)}$$

Diremos que duas valorações (normas) são **equivalentes** se elas induzem a mesma topologia.

Proposição 2.3 *Dadas duas normas equivalentes $|\cdot|_1$ e $|\cdot|_2$ em um corpo k então existe um número real c tal que $|\cdot|_2 = |\cdot|_1^c$*

Exemplo: Valoração em \mathbb{Q} .

Dado p primo, e $a \in \mathbb{Q}$ temos que

$$a = p^r \frac{m}{n}$$

¹Os anéis que podem ser obtidos desta forma a partir de uma valoração discreta são usualmente chamados, em álgebra comutativa, de anéis de valoração discreta.

Definimos $v(a) = r$ se $a \neq 0$ e $v(0) = +\infty$. Neste caso temos que esta valoração é equivalente à valoração p -ádica, pois as normas $|a|_v = e^{-r}$ e $|a|_p = p^{-r} = (e^{-r})^{\log p}$ são equivalentes pela proposição acima. \square

2.1.3 Teorema de Ostrowski

O teorema de Ostrowski, em uma de suas formas, nos diz que as normas possíveis em \mathbb{Q} ou \mathbb{R} são a usual ou são as p -ádicas e desta forma este teorema esclarece um pouco a importância dos números p -ádicos

Teorema 2.4 ([Schi, pág. 20] pág. 20) *Toda norma não trivial no corpo dos números racionais é equivalente a usual ou a uma norma p -ádica*

2.2 Topologia ultramétrica

A topologia proveniente da desigualdade triangular forte nos corpos ultra-arquimedianos difere intensamente da usual, apresentando peculiaridades estranhas e sutis. O objetivo desta seção é dar um pequeno panorama destas peculiaridades. Apesar de ser nosso objetivo central entender a topologia nos corpos ultramétricos, podemos fazer este estudo em um contexto mais geral, o dos espaços ultramétricos, sem acréscimo na dificuldade.

Um espaço métrico (X, d) é dito **ultramétrico** se satisfizer a desigualdade triangular forte:

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(y, z)\} \text{ para } \forall x, y, z \in X$$

No que se segue consideraremos apenas espaços ultramétrico (denotados por (X, d)).

Proposição 2.5 ([Schi] pág. 47) *(Princípio do triângulo isósceles) Para $\forall x, y, z \in X$ com $d(x, y) \neq d(y, z)$ temos que:*

$$d(x, z) = \max\{d(x, y), d(y, z)\}$$

Ou seja, as duas maiores distâncias entre $d(x, z)$, $d(x, y)$ e $d(y, z)$ são iguais.

Como usual, definimos a bola aberta de raio r e centro a como:

$$B_r(a) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$$

e a bola fechada como:

$$\overline{B_r(a)} = \{x \in X : d(x, a) \leq r\}$$

Apesar de termos designado $B_r(a)$ e $\overline{B_r(a)}$ como, respectivamente, bolas abertas e fechadas, a proposição a seguir nos mostra que no caso ultramétrico estas designações não são muito boas.

Proposição 2.6 ([Schi] pág. 48) *$B_r(a)$ e $\overline{B_r(a)}$ são ambas abertas e fechadas. Além disso todos os pontos numa bola são centros.*

Demonstração: $\overline{B_r(a)}$ é aberta pois dado $x \in \overline{B_r(a)}$, a bola aberta $B_r(x)$ contém x e

$$B_r(x) \subset \overline{B_r(a)},$$

pois dado $y \in B_r(x)$, temos que:

$$|y - a| = |y - x + x - a| \leq \max\{|y - x|, |x - a|\} \leq r$$

Por argumentos de complementariedade, temos que $B_r(a)$ também é aberta e fechada.

Finalmente vamos provar que dado $b \in B_r(a)$ temos que $B_r(b) = B_r(a)$.

Para isso seja $y \in B_r(a) \Rightarrow |a - y| < r$ e segue que:

$$|b - y| = |b - a + a - y| \leq r$$

A recíproca segue de forma análoga. Desta forma $\forall y \in B_r(a)$ pode ser considerado centro desta bola. □

Proposição 2.7 ([Schi] pág. 48) *Dadas B_1 e B_2 bolas em X , temos então que $B_1 \subset B_2$ ou $B_2 \subset B_1$ ou B_1 e B_2 são disjuntas e neste caso $\forall x \in B_1$ e $y \in B_2$ temos:*

$$d(x, y) = d(B_1, B_2)$$

O seguinte teorema nos apresenta uma forte caracterização dos espaços ultramétricos:

Teorema 2.8 ([Schi] pág. 293) *Todo espaço ultramétrico pode ser isometricamente mergulhado em um corpo ultramétrico.*

2.3 Funções Analíticas

No que se segue k será um corpo ultramétrico (com valoração não trivial) e $\text{char}(k) = 0$. Sem perda de generalidade podemos assumir que k é topologicamente completo e a valoração discreta.

Seja a_n uma sequência em k . Uma série formal de potências é uma expressão da forma:

$$\sum a_n x^n$$

O domínio de convergência

de uma série de potências é o conjunto

$$\{x \in k : \sum a_n x^n \text{ converge}\}$$

Uma diferença fundamental entre as funções analíticas reais e suas contrapartidas p-ádicas é que sobre os p-ádicos não podemos fazer a extensão de uma função analítica usando séries de Taylor centrada em pontos distintos, pois no caso ultramétrico duas bolas ou são disjuntas ou uma esta contida na outra.

Podemos generalizar a definição de analiticidade acima para abertos U um aberto no espaço vetorial k^m . Uma função $\phi : U \rightarrow k$ é dita analítica se para todo $x \in U$ existir uma série formal de potência f e um raio $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset U$, f converge em $B_r(x)$ e $\exists h \in k^n$ tal que $\phi(x + h) = f(h)$

Uma função vetorial $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) : U \subset k^m \rightarrow k^n$ será dita analítica se cada ϕ_i for analítica.

Teorema 2.9 (Teorema da função inversa, [Se] LG. 2.10) *Dada $f : U \rightarrow k^n$ uma função analítica. Suponha $0 \in U$ e $f(0) = 0$. Se a diferencial $Df(0) : k^n \rightarrow k^n$ é um isomorfismo linear, então f é um isomorfismo analítico local.*

Teorema 2.10 ([Se] LG. 5.48) *Suponha $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ é uma função analítica. Então a equação diferencial*

$$\tau'(s) = \phi(\tau(s)) \text{ e } \tau(0) = 0$$

possui uma única solução local τ .

2.4 Geometria sobre Corpos Locais

Dado X um espaço topológico, uma carta em X é uma tripla $c = \{U, \phi, n\}$ tal que $U \subset X$ é aberto, $n \in \mathbb{N}$ é a dimensão da carta e $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset k^n$ é um homeomorfismo aberto.

Dadas duas cartas $c = \{U, \phi, n\}$ e $c' = \{U', \phi', n'\}$ são ditas compatíveis se para $V = U \cap U'$ tivermos que as aplicações $\phi' \circ \phi^{-1}|_V$ e $\phi'^{-1} \circ \phi|_V$ forem analíticas. Se as cartas forem compatíveis e $V \neq \emptyset$ então $n = n'$. Uma família de cartas $\{c_i\}_{i \in I}$ de X cobre X se $\bigcup_{i \in I} U_i = X$. Um atlas A em X é uma família de cartas sobre X que cobre X e tal que duas cartas desta família são mutuamente compatíveis. Finalmente, dois atlas são ditos equivalentes se $A \cup A'$ for um atlas.

Uma estrutura de **variedade analítica** em X é uma classe de equivalência de atlas em X .

Definição 2.11 *Dado G uma variedade analítica que é um grupo topológico. G é dito um grupo de Lie se:*

1. a aplicação $(x, y) \rightarrow xy$ é um morfismo.
2. a aplicação $x \rightarrow x^{-1}$ é um morfismo.

Observação 2.12 *No caso p -ádico temos que $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ converge apenas localmente, o que diminui a importância do ferramental da teoria de Lie para grupos de Lie sobre esses corpos. Várias questões globais se apresentam bastante intratáveis desse ponto de vista.*

Temos que os seguintes resultados, conhecidos no caso real, permanecem válidos no contexto ultramétrico.

Teorema 2.13 ([Se] LG. 5.12) *A formula de Campbell Hausdorff converge numa vizinhança da identidade.*

Teorema 2.14 (de Cartan, [Se] LG. 5.42) *Um subgrupo fechado de um grupo de Lie é de Lie.*

Referências

As principais referências para este capítulo são:

- SCHIKHOF, W. H.; *Ultrametric Calculus*, Cambridge 1984.
- SERRE, JEAN-PIERRE; *Lie Algebras e Lie Groups*, Benjamin 1965.
- CASSELS, J. W. S.; *Local Fields*, London Mathematical Society 1986.

Capítulo 3

Espaços CAT e Fronteira Ideal

Espaços **CAT(k)** são espaços métricos nos quais a métrica possui curvatura menor que k , sendo a curvatura definida comparativamente a espaços de curvatura constante. Esses espaços possuem várias das propriedades de seus análogos riemannianos: as variedades de curvatura não positiva.

3.1 Definições Preliminares

Nesta seção (X, d) será sempre um espaço métrico. Uma **curva** em X é uma aplicação contínua $\gamma : [a, b] \rightarrow X$. O **comprimento** de uma curva γ é definido como

$$L(\gamma) = \sup \sum_{i=1}^k d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i))$$

sendo o supremo tomado sobre todas as partições do intervalo $[a, b]$.

O comprimento de uma curva é um número não negativo ou infinito. Uma curva γ é dita **retificável** se o seu comprimento é finito.

Um caminho $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ é dito **parametrizado proporcionalmente ao comprimento de arco** se a função

$$\lambda(t) := L(\gamma(s)), \text{ com } s \in [a, t]$$

for linear. Neste caso o coeficiente $\lambda(t)$ é dito velocidade da parametrização.

Observamos que a função $\lambda(t)$ é sempre uma função monótona crescente.

Um **segmento geodésico minimizante** ligando os pontos x a y é uma aplicação $\gamma : [0, l] \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = x$ e $\gamma(l) = y$ e

$$d(\gamma(t), \gamma(t')) = v |t - t'|$$

para t e $t' \in [0, l]$. Apesar desse segmento não precisar necessariamente ser único, o denotaremos por $[x, y]$, usando sub-índices para diferenciar dois desses segmentos quanto necessários

Uma **geodésica** como sendo uma aplicação cujo domínio é $[-\infty, \infty]$ e tal que para todo $t \in [-\infty, \infty]$, existe uma vizinhança $U \subset [-\infty, \infty]$ tal que restrita a essa vizinhança

$$d(\gamma(t), \gamma(t')) = v |t - t'|$$

Uma **geodésica é minimizante** se a igualdade acima é satisfeita para todos t e $t' \in [-\infty, \infty]$

Analogamente definimos **raio** e **raio minimizante**, apenas alterando o domínio da aplicação para $[0, \infty]$ nas definições de geodésica e geodésica minimizante

Um espaço métrico (X, d) é dito **espaço de caminho** se a distância de todo par de pontos $x, y \in X$ for igual ao ínfimo do tamanho das curvas ligando os pontos.

Um espaço X é dito um **espaço geodésico** se para quaisquer dois pontos $x, y \in X$ existe uma geodésica minimizante de x a y .

Espaços de curvatura Constante

Como trataremos apenas de espaços CAT de curvatura $k \leq 0$. Restringiremos as variedades de curvatura constante não positiva. Seja \mathbb{M}^k o espaço bidimensional de curvatura constante k , no caso $k = 0$, \mathbb{M}^k é o plano euclidiano \mathbb{E}^2 e para $k < 0$, \mathbb{M}^k é o espaço hiperbólico de curvatura k .

Definição 3.1 *Dados três pontos p, q, r em um espaço métrico X um **triângulo de comparação** em \mathbb{M}_k^2 é um triângulo no espaço bidimensional de curvatura constante k com vértices $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ tal que: $d(p, q) = d(\bar{p}, \bar{q})$, $d(p, r) = d(\bar{p}, \bar{r})$ e $d(r, q) = d(\bar{r}, \bar{q})$.*

Dado $k \leq 0$ e p, q, r três pontos em um espaço métrico X , então existe um triângulo de comparação $\bar{\Delta}(p, q, r)$ em \mathbb{M}_k^2 . Tal triângulo é único a menos de isometria.

Definição 3.2 Um *triângulo geodésico* no espaço métrico X consiste de três pontos p, q, r em X e uma escolha de três geodésicas $[p, q]$, $[q, r]$ e $[r, p]$.

Ângulos

A definição de ângulos em um espaço métrico X é feita comparando triângulos em X com triângulos em espaços de curvatura constante.

Definição 3.3 Dado X um espaço métrico e duas geodésicas $\gamma(t)$ e $\gamma'(t')$, ambas com ponto inicial p . Seja $\bar{\Delta}(p, \gamma(t), \gamma'(t'))$ o triângulo de comparação e $\bar{Z}_p(\gamma(t), \gamma'(t'))$ o ângulo de comparação. O ângulo de Alexandrov entre as geodésicas é definido como:

$$\angle(\gamma, \gamma') = \lim_{t, t' \rightarrow 0} \sup \bar{Z}_p(\gamma(t), \gamma'(t'))$$

3.2 Espaços CAT

Um espaço métrico X é dito **CAT**(k) se para qualquer triângulo geodésico $\Delta \subset X$ e $\bar{\Delta} \subset M^k$ um triângulo de comparação em M^k , tivermos que $d(x, y) \leq d(\bar{x}, \bar{y})$ para qualquer $x, y \in \Delta$ (não necessariamente os vértices).

Nesse caso X é dito de curvatura $\leq k$.

Observação 3.4 No que se segue somente consideraremos espaços **CAT** com curvatura não positiva $k \leq 0$. Estes espaços são conhecidos como espaços de Hadamard.

Teorema 3.5 (de Cartan Hadamard, [Bri] pág. 193) Seja X um espaço de Hadamard

1. Existe uma única geodésica ligando cada par de pontos $x, y \in X$, e esse segmento geodésico varia continuamente com os extremos.
2. Toda geodésica local é uma geodésica.
3. Todas as bolas são convexas
4. Bolas são contráteis
5. Um espaço de Hadamard é contrátil

A seguinte caracterização dos espaços de Hadamard deve se a Bruhat e Tits [BT].

Proposição 3.6 (Desigualdade de Bruhat-Tits,[Bro] pág. 157) *Seja X um espaço métrico completo. Então X é um espaço de Hadamard se, e somente se, para todo par de pontos x, y em X , existe um ponto $m \in X$ (o ponto médio entre x e y) tal que:*

$$d(z, m)^2 \leq \frac{1}{2}(d(z, x)^2 + \frac{1}{2}d(z, x)^2 - \frac{1}{4}d(x, y)^2)$$

para todo $z \in X$.

3.2.1 Centro de Um Conjunto Limitado

O conceito de centro de um conjunto limitado foi usado por Elie Cartan para provar a existência de um ponto fixo para a ação de qualquer grupo compacto de isometrias numa variedade. Resultado análogo foi provado por Bruhat e Tits para grupos agindo em Edifícios euclidianos

Dados um conjunto limitado $Y \subset X$ e um ponto $x \in X$, seja $r(x, Y)$ o menor número tal que $Y \subset \overline{B}(x, r)$. O raio de Y , $r(Y)$, é definido como o ínfimo dos números reais positivos r tais que $Y \subset B_r(x)$ para algum $x \in X$. Os pontos x que satisfazem $Y \subset B_r(x)$ sendo r o raio de Y são ditos centros (circuncentros) de Y .

Proposição 3.7 ([Bro] pág. 158) *Dado X um espaço CAT(k) completo, se Y for um conjunto limitado, então existe um único ponto $c_Y \in X$ denominado centro de Y .*

Demonstração: Provaremos primeiro a unicidade. Dados dois pontos $x, y \in X$, usando a desigualdade NC com $z \in Y$ para obtermos

$$r^2(m, Y) \leq \frac{1}{2}(r^2(x, Y) + r^2(y, Y) - \frac{1}{4}d^2(x, y))$$

e como $r(m, Y) \geq r(Y)$, temos que

$$d^2(x, y) \leq 2[r^2(x, Y) + r^2(y, Y) - 2r^2(Y)]$$

Logo x, y são circuncentros obtemos que $d(x, y) \leq 0$ e conseqüentemente $x = y$.

Para provarmos a existência, suponha $x_n \in X$ uma sequência tal que $r(x_n, Y) \rightarrow r(Y)$, mas

$$d^2(x_n, x_m) \leq 2[r^2(x_n, Y) + r^2(x_m, Y) - 2r^2(Y)]$$

e temos que a sequência x_n é de Cauchy e logo converge para um ponto x . Esse ponto satisfaz $r(x, Y) = r(Y)$. \square

Teorema 3.8 (de Bruhat-Tits, [Bro] pág. 161) *Seja G um grupo de isometrias em um espaço $\text{CAT}(0)$. Se G estabiliza um conjunto limitado de X então G possui ponto fixo.*

Demonstração: Segue diretamente do lema acima e da observação que o circuncentro é um ponto fixo. \square

3.3 Fronteira no Infinito

Nesta seção apresentamos o estudo da geometria no infinito para espaços $\text{CAT}(0)$. Primeiro apresentaremos a compactificação visual, (definida por Eberlein e Oneil), e posteriormente a compactificação de Busemann.

A compactificação visual pode ser obtida a partir das direções geodésicas a partir de um ponto. A compactificação de Busemann através do mergulho do espaço X no espaço de suas funções contínuas $C(X)$. A compactificação de Busemann é bastante genérica, sendo a construção válida para qualquer espaço métrico localmente compacto. A compactificação visual possui um conteúdo visual bastante evidente. E no caso de espaços $\text{CAT}(0)$ elas são equivalentes.

3.3.1 Compactificação Visual

Dado X um espaço $\text{CAT}(0)$ localmente compacto, dois **raios geodésicos** $\gamma(t)$ e $\sigma(t)$ são ditos **assintóticos** se existe uma constante K para a qual $d(\gamma(t), \sigma(t)) \leq K$ para todo $t > 0$. Definimos o conjunto $\partial_\infty X$ dos pontos na fronteira de X como as classes de equivalências dos raios geodésicos assintóticos. A união $X \cup \partial_\infty X$ será denotada por \bar{X} . Se $\xi \in \partial X$ e γ é um raio pertencente a classe de ξ , escrevemos que $\gamma(\infty) = \xi$

Dados dois pontos $x \in X$ e $\xi \in \partial X$, existe um raio geodésico γ começando em x e com $\gamma(\infty) = \xi$, o que justifica a nomenclatura de compactificação visual. Neste caso

diremos que γ é um raio geodésico com início em x e término em ξ , fato denotado por $\gamma_{x,\xi}$

Introduziremos uma topologia em $\bar{X} = X \cup \partial X$ usando como base para essa topologia os abertos de X e os seguintes abertos:

$$U(x, \xi, R, \varepsilon) := \{z \in \bar{X} : z \notin B(x, R) \text{ e } d(\sigma_{x,z}(R), \sigma_{x,\xi}(R)) < \varepsilon\}$$

com $x \in X, \xi \in \partial X$ e R e ε reais.

Pela convexidade da função distância em espaços **CAT**(0) temos que $d(\sigma_{x,z}(t), \sigma_{x,\xi}(t)) < \varepsilon$ para todo $0 \leq t \leq R$.

Os conjuntos $U(x, \xi, R, \varepsilon)$ definidos acima, juntamente com os abertos de X , formam uma base para a topologia de \bar{X} .

3.3.2 Compactificação de Busemann

Considere X um espaço **CAT**(0) localmente compacto, para cada $x \in X$ definimos a função $d_x : X \rightarrow \mathbb{R}$ como $d_x(y) = d(x, y)$. Se considerarmos o espaço $C(X)$ das funções reais contínuas com a topologia da convergência uniforme em compactos, a aplicação d_x define um mergulho de X em $C(X)$. Consideramos então o quociente de $C(X)$ pelas funções constantes, $C_*(X) := C(X)/\{\text{funções constantes}\}$. Para cada $f \in C(X)$, \bar{f} denota a classe de f em $C_*(X)$. Assim obtemos um mergulho $i : X \hookrightarrow C_*(X)$, $x \rightarrow \bar{d}_x$

Definimos então o fecho $\text{Cl}(X)$ como o fecho de $i(X)$ em $C_*(X)$, a fronteira ou bordo é definido como $\text{Bd}(X) = \text{Cl}(X) \setminus i(X)$. Desta forma temos que pontos no bordo são definidos como funções em X a menos de uma constante.

Consideraremos em $\text{Cl}(X)$ e $\text{Bd}(X)$ a topologia induzida de $C_*(X)$

Proposição 3.9

1. Se $\bar{h} \in \text{Cl}(X)$ então $|h(x) - h(y)| \leq d(x, y)$.
2. $\text{Cl}(X)$ e $\text{Bd}(X)$ são compactos.

Definição 3.10 Uma função $h \in C(X)$ é dita uma horofunção (centrada em \bar{h}) se $\bar{h} \in \text{Bd}(X)$. Os conjuntos $h^{-1}(-\infty, r)$ são ditos horobolas e os conjuntos $h^{-1}(r)$ horosferas.

Exemplos típicos de horofunções são as funções de Busemann.

Definição 3.11 Dado um raio geodésico $\gamma(t)$. A função $b_\gamma(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$b_\gamma(x) := \lim_{t \rightarrow \infty} (d(x, \gamma(t)) - t)$$

é denominada **função de Busemann** associada ao raio geodésico γ

No caso **CAT** temos que os conceitos de horofunção e função de Busemann coincidem.

Proposição 3.12 ([Bri], pág 269) Dado X um espaço **CAT**(0) então as funções de Busemann associadas a raios assintóticos diferem por uma constante. Neste contexto, temos que horofunções coincidem com as função de Busemann.

Proposição 3.13 ([Bri], pág 269) Dado X um espaço **CAT**(0) completo e dado x_n uma seqüência de pontos em X , então d_{x_n} converge para um ponto η em \bar{X} se, e somente se, para um ponto x_0 os segmentos geodésicos $[x_0, x_n]$ convergirem para o raio geodésico $[x_0, \eta]$.

A compactificação visual e de Busemann coincidem. Seja a aplicação $\phi : \bar{X} \rightarrow \text{cl}(X)$ definida como $\phi(x) = \bar{d}_x$, se $x \in X$ e como $\phi(\gamma(\infty)) = \bar{h}_\gamma$ se $\gamma(\infty) \in \partial_\infty X$.

Teorema 3.14 ([Bri], pág 271) A aplicação $\phi : \bar{X} \rightarrow \text{cl}(X)$ é um homeomorfismo e $\phi(\partial_\infty X) = \text{Bd}(X)$.

3.4 Isometrias

Dado X um espaço **CAT**(0) e uma isometria γ de X , definimos a função deslocamento $d_\gamma : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ como $d_\gamma(x) = d_\gamma(\gamma x, x)$, e o deslocamento da isometria γ como $|\gamma| := \inf \{d_\gamma(x) : x \in X\}$. O conjunto de pontos para os quais $|\gamma|$ atinge o ínfimo será denotado por $\text{Min}(\gamma)$.

Uma isometria γ é dita **semi-simples** se $\text{Min}(\gamma)$ for não vazio.

Proposição 3.15

1. $\text{Min}(\gamma)$ é γ invariante
2. Se α é uma isometria em X , então $|\alpha\gamma| = |\alpha\gamma\alpha^{-1}|$ e $\text{Min}(\alpha\gamma\alpha^{-1}) = \alpha \text{Min}(\gamma)$

3. Se X é CAT(0) então $\text{Min}(\gamma)$ é um conjunto fechado convexo

As isometrias podem ser classificadas como:

1. **elíptica** se γ possui um ponto fixo, ou seja, $|\gamma| = 0$ e $\text{Min}(\gamma) \neq \emptyset$;
2. **hiperbólica** se d_γ atinge um mínimo positivo, ou seja, $|\gamma| > 0$ e $\text{Min}(\gamma) \neq \emptyset$;
3. **parabólica** se d_γ não atinge o mínimo, ou seja, se $\text{Min}(\gamma) = \emptyset$.

As isometrias elípticas e hiperbólicas admitem a seguinte caracterização

Proposição 3.16 ([Bri], pág 228) *Uma isometria ϕ é elíptica se, e somente se,:*

1. ϕ possui um ponto fixo;
2. ϕ possui uma órbita limitada.

Proposição 3.17 1. *Uma isometria γ de X é hiperbólica se, e somente se, existe uma geodésica $c : \mathbb{R} \rightarrow X$ que é trasladada de maneira não trivial, ou seja, $\gamma \cdot c(t) = c(t + a)$, para algum $a > 0$. Tal geodésica é dita um eixo para γ .*

2. *Os eixos de uma isometria hiperbólica γ são todos paralelos e sua união é $\text{Min}(\gamma)$ e $\text{Min}(\gamma)$ é isométrico ao produto $Y \times \mathbb{R}$*

Refêrencias As principais referências para este capítulo são:

- BRIDSON, M; HAEFLIGER, A; *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*
- BALLMANN, WERNER; *Lecture on Spaces of Nonpositive Curvature*, Birkhäuser Verlag, 1995.
- GROMOV, M.; BALLMAN, W.; SCHROEDER, V.; *Manifolds of Nonpositive Curvature*, Birkhäuser, 1985.
- EBERLEIN, P.; *Geometry of Nonpositively Curved Manifolds*, The University of Chicago Press, 1996.

Capítulo 4

Edifícios de Tits

4.1 Estrutura Simplicial

4.1.1 Complexos Simpliciais Abstratos

Um **complexo simplicial abstrato** é um conjunto \mathcal{V} de elementos denominados vértices e uma coleção Δ de subconjuntos finitos de \mathcal{V} (chamados simplexos), tal que todo subconjunto com um elemento $\{v\}$ é um simplexo e todo subconjunto de um simplexo A é um simplexo (denominado face de A). A cardinalidade r de A é dito posto de A e $r - 1$ é dito dimensão de A .

O conjunto simplicial Δ é um conjunto parcialmente ordenado, se tomarmos a relação "ser face de", ou seja, quaisquer dois elementos $A, B \in \Delta$ têm uma cota inferior maximal $A \cap B$.

Temos ainda que para qualquer $A \in \Delta$ o conjunto $\Delta_{\leq A}$ das faces de A é isomorfo ao conjunto parcialmente ordenado dos subconjuntos de $\{1, \dots, r\}$ para algum $r \geq 0$.

Geralmente denotaremos um complexo simplicial pela letra grega Σ e quando for necessário fazermos referências a mais de um complexo simplicial usaremos Σ', Σ'' etc.

Uma **aplicação simplicial** de Δ em Δ' é uma aplicação ϕ dos vértices de Δ nos vértices de Δ' que leva simplexos em simplexos. Se a imagem $\phi(A)$ sempre tiver a mesma dimensão de A , então ϕ é dita não degenerada.

Complexos de Bandeiras

Seja P um conjunto com uma relação binária denominada **incidência**, que é reflexiva e simétrica. Os exemplos de maior importância para o que se segue ocorrem quando P consiste de pontos, linhas, planos, etc., de uma geometria (afim, projetiva, esférica, etc.) com a noção usual de incidência ou ainda quando P consiste em um conjunto parcialmente ordenado com x e y incidente se eles forem comparáveis (ou seja, $x \leq y$ ou $x \geq y$). Uma **bandeira** em P é uma sequência e_i (que pode ser finita) de elementos de P tal que e_j é incidente com e_{j+1} . No caso em que P é um conjunto parcialmente ordenado, uma bandeira é o mesmo que uma cadeia. Um complexo de bandeiras associado a P é o complexo simplicial $\Delta(P)$ com o conjunto de vértices sendo P e as bandeiras finitas sendo simplexes.

Vale ressaltar que nem todo complexo simplicial é um complexo de bandeiras. Por exemplo o bordo de um triângulo, pois se fosse teríamos que os três vértices seriam dois a dois incidentes e logo eles formariam uma bandeira e conseqüentemente um vértice do complexo de bandeiras.

4.1.2 Sistemas de Câmaras

Dado I um conjunto de índices, que chamaremos de conjunto de rótulos, e C um conjunto tal que para todo $i \in I$ existe uma relação de equivalência denominada i -adjacência, denotada $x \sim_i y$, então C é um **sistema de câmaras** sobre I e os elementos de C são ditos câmaras. A cardinalidade de I é denominada posto do sistema de câmaras. Cada classe de i -adjacência π é dita uma i -parede.

Um **automorfismo** é uma aplicação bijetiva preservando a relação de equivalência para cada $i \in I$.

Uma galeria é uma sequência de câmaras $\Gamma = (C_0, \dots, C_d)$, tal que duas câmaras consecutivas C_{j-1} e C_j são i_j -adjacentes. Dizemos neste caso que a câmara conecta C_0 e C_d e o inteiro d é dito **tamanho da galeria** Γ .

Se todos os i_j pertencerem a um subconjunto $J \subset I$ então diremos que Γ é uma J -galeria. Nos diremos que um sistema de câmaras é conexo (J -conexo) se dadas duas câmaras elas puderem ser ligadas por uma galeria (J -galeria). As componentes J -conexas são ditas J -resíduos.

Um conceito de fundamental importância é a **distância combinatória** entre duas câmaras, definida como o ínfimo dos tamanhos das galerias conectando estas câmaras.

4.1.3 Complexos de Câmaras

Dado Δ um complexo simplicial, este será dito um **complexo de câmaras** se todos os seus simplexos maximais tiverem a mesma dimensão e quaisquer dois destes puderem ser ligados por uma galeria. Os simplexos maximais serão denominados **câmaras**.

Uma aplicação simplicial entre complexos de câmaras de mesma dimensão é não degenerada somente se leva câmaras a câmaras e neste caso esta aplicação é denominada **aplicação de câmaras**.

No caso em que Δ' é um subcomplexo de Δ e ϕ é a aplicação identidade em Δ' , a aplicação de câmaras é dita **retração**.

Rotulamentos

Um rotulamento de um complexo de câmaras Δ é uma função $\lambda : \mathcal{V}(\Sigma) \rightarrow I$ que associa a cada vértice um elemento de I de modo que os vértices de cada câmara são mapeados bijectivamente em I . (É útil pensar no rotulamento como colorir os vértices usando tantas cores quanto o posto de Δ e exigindo que se dois vértices pertencem a mesma câmara então eles terão cores diferentes).

Freqüentemente denominaremos $\lambda(v)$ do **tipo** de v . De forma mais geral definiremos o **tipo de um simplexo** σ como o subconjunto de I que contém os rótulos $\lambda(v)$ de σ .

Tipos de Galerias

Dado Σ um complexo de câmaras rotulado e I seu conjunto de rótulos, então todo simplexo de codimensão 1 de Σ têm um tipo $I - \{i\}$, para algum $i \in I$. Podemos agora redefinir a relação de i -adjacência: duas câmaras serão i -adjacentes se, e somente se, ambas tiverem uma face comum do tipo $I - \{i\}$.

O fato de duas câmaras serem i -adjacentes para apenas um i nos permite definir o **tipo de uma galeria**: Dada $\Gamma = (C_0, \dots, C_n)$ uma galeria na qual $C_{j-1} \overset{i}{\sim} C_j$ então o tipo de Γ é $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n)$.

4.2 Grupos de Coxeter

Seja I um conjunto de índices e $m_{ij} : I \times I \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ uma função satisfazendo $m_{ii} = 1$ e $m_{ij} = m_{ji}$. Denominamos $M = (m_{ij})$ a **matriz de Coxeter**.

Um grupo de Coxeter do tipo M é um grupo $W(M)$ que admite a apresentação

$$W(M) = \langle r_i : r_i^2 = (r_i r_j)^{m_{ij}} = 1, \forall i, j \in I \rangle$$

Para simplificarmos a notação denotaremos $W(M)$ por W toda vez que for claro a matriz de Coxeter a que estamos nos referindo.

Dada uma apresentação de W definimos a **norma** de um elemento g como sendo o comprimento da menor palavra que o representa:

$$|g| = \inf_r \{g = j_1 j_2 \cdots j_r : j_i \in J\}.$$

Definimos a norma do elemento identidade como sendo 0. Da definição segue que $|g| = 1$ se, e somente se, g for um gerador do grupo. Para evitarmos algumas complicações desnecessárias, iremos assumir sempre que $J = J^{-1}$. Esta norma define uma distância em G , dada por $d(g, h) = |h^{-1}g|$, conhecida como distância de Cayley. Claramente a norma, bem como a distância, dependem da escolha de sistemas de geradores.

Dada uma palavra $f = i_1 \dots i_k$ no monóide livre sobre I , definimos $r_f = r_{i_1} \dots r_{i_k}$ como a palavra associada pertencente a G . No caso de f ser a palavra \emptyset então $r_f = 1$. Para fins de notação, dados i e j distintos com m_{ij} finitos, por $p(i, j)$ entenderemos $\dots i j i j$ (m_{ij} fatores, por exemplo $m_{ij} = 5$ então $p(i, j) = j i j i j$).

Uma **homotopia elementar** é uma alteração de uma palavra da forma $f_1 p(i, j) f_2$ para a forma $f_1 p(j, i) f_2$. Duas palavras são **homotópicas** se uma puder ser transformada na outra através de uma série de homotopias elementares e denotaremos por $f \simeq g$.

Uma **contração elementar** é uma alteração de uma palavra da forma $f_1 i i f_2$ para a forma $f_i f_2$.

Diremos que duas palavras são **equivalentes** se elas podem ser transformadas uma na outra por uma sequência de homotopias, contrações e expansões.

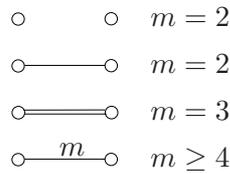
Lema 4.1 *Duas palavras f e g serão equivalentes se, e somente se, $r_f = r_g$.*

Demonstração: As relações $(r_i r_j)^{m_{ij}} = 1$ são equivalentes a $r_{p(i, j)} = r_{p(j, i)}$ e como $r_i^2 = 1$, segue de imediato a equivalência. \square

Uma palavra é dita **reduzida** se ela não é homotopicamente equivalente a uma da forma $f_1 i f_2$. Vale ressaltar que dentro de cada classe de equivalência temos uma palavra reduzida.

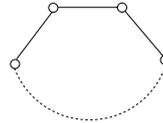
4.2.1 Grafo de Coxeter

É usual representar M por um grafo com pesos, no qual os vértices são os índices e entre dois vértices existe uma ligação (ou não) de acordo com as regras



Exemplos:

1. Quando $M = \circ \text{---}^m \circ$ então $W(M)$ é isomorfo ao grupo diedral D_{2m} .
2. Quando $M = A_n$, ou seja, quando o grafo é $\circ \text{---} \circ \text{---} \circ \cdots \text{---} \circ$ com n vértices, então $W(M)$ é isomorfo ao grupo simétrico S_{n+1} .
3. Quando $M = \tilde{A}_n$, $n \geq 2$, ou seja, quando o grafo é um circuito fechado com $n + 1$ vértices



então $W(M)$ é isomorfo ao produto semidireto de \mathbb{Z}^n com S_{n+1} .

□

4.2.2 Complexos de Coxeter

A um grupo de Coxeter W finitamente gerado podemos associar um complexo simplicial denominado **complexo de Coxeter** da seguinte forma: denominaremos um **subgrupo** W' de **especial** se ele for gerado por um subconjunto de J . Uma classe especial é uma classe da forma wW' . Então definimos $\Sigma(W, J)$ como sendo o conjunto parcialmente

ordenado das classes especiais, ordenado pela relação oposta à de inclusão: $B \leq A$ se, e somente se, $A \subseteq B$. (No caso em que W não for finitamente gerado a estrutura acima é apenas de ordem parcial, mas por facilidade também a chamaremos de complexo de Coxeter).

Os elementos maximais de Γ serão denominados câmaras. Elas são as classes especiais minimais, ou seja, os conjuntos de um elemento w com $w \in W$. (O leitor que se sentiu incomodado com a última afirmação deve se lembrar que o subconjunto vazio de J gera por convenção o subgrupo de um elemento). Nas câmaras podemos definir a relação de adjacência $w_1 \sim_i w_2$ se, e somente se, $w_1 = r_i w_2$, e desta forma obtemos um sistema de câmaras.

Exemplos:

1. Um exemplo simples, porém ilustrativo ocorre quando $M = \circ \text{---} \overset{3}{\text{---}} \text{---} \circ$, ou seja, quando W é o grupo diedral D_6
2. $M = \circ \text{---} \infty \text{---} \circ$, então o complexo de Coxeter
3. Quando $M = A_n$ então
4. Quando $M = \tilde{A}_n$ então o complexo de Coxeter é um n -simplexo tendo ângulos iguais a $\pi/3$ ou $\pi/2$. O exemplo \tilde{A}_2 é ilustrado abaixo.

□

Rótulos canônicos

Complexos de Coxeter são sempre rotuláveis. Para provarmos este fato, seja $\Sigma(W, J)$ um complexo de Coxeter qualquer, neste caso a ação de W particiona os vértices em n órbitas e podemos rotular Σ associando um rótulo $i \in I$ a cada órbita. O rotulamento canônico é obtido tomando o conjunto de rótulos I como sendo J .

4.3 Edifícios de Tits

Um **edifício de Tits** é um complexo simplicial Δ que pode ser expresso como a união de subcomplexos Σ (chamados apartamentos) satisfazendo os seguintes axiomas:

- B0. Cada apartamento é um complexo de Coxeter.
- B1. Dados dois simplexos $A, B \in \Delta$, existe um apartamento Σ contendo ambos.
- B2. Se Σ e Σ' forem dois apartamentos contendo A e B então existe um isomorfismo $\phi : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ fixando A e B pontualmente.

O axioma B2 pode ser formulado de uma maneira equivalente como

- B2'. Se Σ e Σ' são dois apartamentos com uma câmara em comum então existe um isomorfismo $\phi : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ fixando todo simplexo em $\Sigma \cap \Sigma'$.

Se tomarmos A e B como sendo simplexos vazios e usando B2 teremos que quaisquer dois apartamentos são isomorfos. Vale ressaltar ainda que Δ é um complexo de câmaras e que dado C e C' dois simplexos maximais, então eles pertencem a um mesmo apartamento Σ por B1, possuindo assim a mesma dimensão e sendo conexos por uma galeria.

Observação 4.2 *A definição acima não é a única encontrada na literatura. O que chamamos de edifícios são as vezes denominados edifícios fracos, sendo o termo edifício reservado para o que chamaremos de edifícios grossos, que são definidos como os edifícios nos quais todo simplexo de codimensão 1 é face de ao menos três câmaras.*

Proposição 4.3 *Δ é rotulável. E o isomorfismo $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ do axioma B2 pode ser tomado de modo a preservar o rotulamento.*

Dado Δ um edifício rotulado, com matriz de Coxeter M e grupo de Weyl W , com um conjunto de geradores J em correspondência com o conjunto de índices I . È conveniente identificar o conjunto de índices I com J , e desta forma considerar J como o conjunto de rótulos.

Consideraremos \mathcal{C} o conjunto das câmaras de Δ , em \mathcal{C} temos uma relação de adjacência. Esta relação permite definir o tamanho de uma galeria d que torna \mathcal{C} um espaço métrico.

Dado um rótulo $j \in J$, dizemos que duas câmaras C e D são j -adjacentes e escreveremos $C \overset{j}{\sim} D$, se D e C têm uma face do tipo $J - \{j\}$. Desta forma uma galeria C_0, \dots, C_n tem um tipo bem definido $j = (j_1, \dots, j_n)$ sendo j_i tal que $C_{i-1} \overset{j_i}{\sim} C_i$ para $i = 1, \dots, n$. Podemos ver o tipo da galeria j como uma palavra em W (a palavra $j_1 j_2 \dots j_n$).

Dado o edifício Δ , o apartamento Σ e uma câmara fixa C de Σ , podemos definir uma retração $\rho_{\Sigma, C} : \Delta \rightarrow \Sigma$. Dado um simplexo σ de Δ existe Σ contendo C e σ e $\phi : \Sigma' \rightarrow \Sigma$ fixando C e desta forma podemos definir $\rho_{\Sigma, C} = \phi(\sigma)$.

Proposição 4.4 *Os apartamentos são convexos: Dada duas câmaras de Σ então qualquer galeria minimal de Δ ligando as câmaras está contida em Σ .*

Demonstração: Dada uma galeria minimal $C_0 \dots C_l$ e Σ o apartamento contendo C_0 e C_l . Suponha que a galeria não esteja toda contida em Σ . Desta forma temos que existe $C_{i-1} \in \Sigma$ tal que $C_i \notin \Sigma$. Seja $C \in \Sigma$ a câmara adjacente a C_{i-1} e seja $\rho_{\Sigma, C}$ a retração definida acima. A imagem da galeria por esta retração é uma galeria com os mesmos extremos e pela definição da retração temos $\rho_{\Sigma, C}(C_i) = C_{i-1}$, o que contradiz nossa hipótese de minimalidade da galeria. \square

Teorema 4.5 *Existe uma única função $\delta : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow W$ com a seguinte propriedade: para qualquer $C, D \in W$, se Γ é uma galeria minimal de C a D do tipo $j = (j_1, \dots, j_n)$, então*

$$\delta(C, D) = j_1 j_2 \dots j_n$$

Temos ainda que $d(C, D) = l(\delta(C, D))$, sendo $l : W \rightarrow Z$ a função comprimento da palavra.

A função δ definida acima é dita W -distância ou as vezes simplesmente distância.

4.4 Grupos de Automorfismos e Pares BN

Dado Δ um edifício grosso, \mathcal{A} um sistema de apartamentos. Suponha que um grupo G aja como um automorfismo simplicial que preserva tipos e deixando \mathcal{A} invariante. Assim se Σ é um apartamento em \mathcal{A} também o é $g\Sigma$.

Dizemos que a ação de G é **fortemente transitiva** se G age transitivamente nos pares (Σ, C) consistindo de um apartamento $\Sigma \in \mathcal{A}$ e de uma câmara $C \in \Sigma$, ou seja, se G é transitiva nos apartamentos e o estabilizador de um apartamento é transitivo nas câmaras $Ch(\Sigma)$.

Assumiremos no que se segue que G é um grupo fortemente transitivo, além disso que tenhamos escolhido um Σ_0 e C_0 que chamaremos de **apartamento** e **câmaras fundamentais**, respectivamente.

Alguns subgrupos de G são de particular interesse:

$$B = \{g \in G : gC_0 = C_0\}$$

$$N = \{g \in G : g\Sigma_0 = \Sigma_0\}$$

$$T = \{g \in G : \text{que fixam } \Sigma_0 \text{ pontualmente}\}$$

$$W = N/T\%$$

4.4.1 Associando Δ e G

Quando a ação de um grupo em um conjunto possui alguma propriedade de transitividade, várias propriedades do conjunto podem ser obtidas a partir deste grupo e de alguns de seus subgrupos (estabilizadores). No nosso caso, como demonstraremos, podemos recuperar toda a estrutura de edifícios a partir do grupo G e de seus subgrupos B, N, T, W . Ao explicitarmos as relações entre o edifício Δ e o grupo fortemente transitivo G (e seus subgrupos), obteremos por fim uma maneira algébrica de construirmos edifícios de Tits: os famosos pares BN , que se constituem de um grupo G e subgrupos B e N sujeitos a alguns axiomas. Para determinarmos estes axiomas estudaremos em maiores detalhes a ação de G em Δ .

Para isso consideraremos que Δ esteja rotulado de maneira canônica, cujo conjunto de índices é J . Além disso já sabemos que Δ pode ser visto como um sistema de câmaras $Ch(\Delta)$, no qual temos as relações de j -adjacência, $j \in J$.

O fato de G agir de maneira transitiva em $Ch(\Delta)$ e ter como estabilizador da câmara fundamental o subgrupo B implica que temos a bijeção:

$$\begin{aligned} G/B &\rightarrow Ch(\Delta) \\ gB &\rightarrow gC \end{aligned}$$

Esta bijeção nos permite ver as câmaras como classes laterais em G . O nosso próximo passo será compreender as j -relações neste contexto.

Suponha $h \in G$ tal que hC é j -adjacente a C , logo $C \cap hC$ é face de $A = C \cap jC$. Do fato de h preservar tipo, temos que h leva a face A de C para uma face do mesmo tipo em hC , mas como A é a face de hC do tipo $J - \{j\}$, temos que $hA = A$. Logo temos que hC é j -adjacente a C se, e somente se, h está no estabilizador P_j da face A de C . Desta forma gC é j -adjacente a $g'C \iff g' = gh$ para $h \in P_j$. Em outras palavras a j -adjacência induz a seguinte relação de j -adjacência em G/B

$$gB \overset{j}{\sim} g'B \iff gP_j = g'P_j$$

O subgrupo P_j pode ser caracterizado de maneira simples:

Proposição 4.6 P_j é o subgrupo de G gerado por $\langle B, j \rangle$.

Demonstração: Seja $h \in P_j$ e Σ o edifício contendo C e hC . Pela transitividade forte $\exists b$ tal que $b\Sigma' = \Sigma$ com $bC = C$ (ou seja, $b \in B$).

Do fato de C e hC serem j -adjacentes temos que bhC é j -adjacente a $bC = C$, logo $bhC \overset{j}{\sim} C$, assim bhC é C ou jC . Logo bh está em B ou em Bj , ou seja, $h \in B$ ou a BjB

$$h \in B \cup BjB$$

O conjunto BjB é denominado classe dupla. □

O resultado acima pode ser facilmente generalizado:

Proposição 4.7 Dado $J' \subset J$ e A uma face do tipo $J - J'$ (cujo estabilizador em W é o grupo especial $W' = \langle J' \rangle$), então o estabilizador de A em G , $P_{J'}$, satisfaz:

$$P_{J'} = \bigcup_{w \in W'} BwB.$$

O caso em que a proposição acima possui maior interesse ocorre quando $P_{J'}$ é o estabilizador da face \emptyset . Neste caso $J' = J$ e $P_{J'} = G$ e $W' = W$, e a expressão acima fica:

$$G = \bigcup_{w \in W} BwB$$

A expressão acima pode ser refinada. Temos então a **Decomposição de Bruhat**

$$G = \coprod_{w \in W} BwB$$

Produtos de Classes Duplas

A decomposição de Bruhat implica a seguinte propriedade do produto de classes duplas:

Proposição 4.8 $BwB \circ BjB \subseteq BwB \cup BwjB$

Demonstração: Do fato de $\rho : \Delta \rightarrow \Sigma$ preservar tipos e j -adjacência, decorre que $\bar{\rho} : G \rightarrow W$ satisfaz $\bar{\rho}(gh) = \bar{\rho}(g)$ ou $\bar{\rho}(g)j$ para $g \in G$ e $h \in P_j$. Desta forma se $g \in BwB$ e $h \in BjB \subset P_j$ temos que:

$$\bar{\rho}(gh) = w \text{ ou } wj$$

□

Será conveniente adotarmos a notação $C(w) = BwB$. Nesta notação a proposição acima, pode ser reescrita como:

$$C(w)C(j) = C(wj) \text{ ou } C(w)C(j) = C(w) \cup C(wj).$$

Espessura

Nesta seção vamos reescrever a propriedade de um edifício ser grosso em termos de propriedades do grupo G .

A definição de edifício grosso diz que toda as faces de codimensão 1 é face de pelo menos três câmaras, ou seja, dado $j \in J \exists C'$ j -adjacente a C e diferente de C e jC . C' tem necessariamente a forma hC , para $h \in P_j$

$$hC \neq C \Rightarrow h \notin B, \text{ ou seja,} \\ h \in BjB$$

Já a condição $hc \neq jc$ implica que $h \notin jB$. Desta forma, temos que $BjB \not\subseteq jB$. Esta condição é necessária e suficiente para que o edifício seja grosso. Esta afirmação é equivalente também a

$$j^{-1}Bj \not\subseteq B \text{ ou} \\ jBj \not\subseteq B$$

4.4.2 Pares BN

Baseados nos resultados anteriores vamos definir um **sistema de Tits** ou **Par BN** como um grupo G e um par de subgrupos B, N satisfazendo:

BN0. $\langle B, N \rangle = G$

BN1. Definindo $T = B \cap N \triangleleft N$, então $W = N/T$ é um grupo de Coxeter com geradores j_1, \dots, j_n

BN2. $BjB \circ BwB \subset BwB \cup BjwB$, quando $w \in W$ e $j = j_i$

BN3. $jBj \neq B$ para $j = j_i$

Observação 4.9 $(BN0)$ e $(BN1)$ implicam que $G = BNB$

Proposição 4.10 (i) Se $BwB = Bw'B$ então $w = w'$ e desta forma que $G = \coprod_{w \in W} BwB$ (Decomposição de Bruhat)

(ii) Se $l(jw) > l(w)$ então $BjB \circ BwB = BjwB$

(iii) $BW'B$ é um subgrupo de G para todo W' subgrupo especial de W

Teorema 4.11 ([Bro] págs. 100-115) *Seja G um grupo de automorfismos fortemente transitivo de um edifício grosso Δ . Se definirmos B como o estabilizador de C e N como o estabilizador de Σ , então (B, N) forma um par BN .*

Teorema 4.12 ([Bro] págs. 100-115) *Todo sistema de Tits (B, N) em um grupo G define um edifício, no qual as câmaras são as classes laterais a esquerda de B , com a relação de i -adjacência dada por:*

$$gB \overset{i}{\sim} hB \Leftrightarrow g^{-1}h \in Bj_iB$$

A ação de G neste edifício é fortemente transitiva e N estabiliza um apartamento.

Referências

As principais referências para este capítulo são:

- BROWN, KENNETH; *Buildings*, Springer Verlag 1989
- GARRET, PAUL, *Buildings and Classical Groups*
- RONAN, MARK; *Lecture on Buildings*, Perspectives in Mathematics, Academic Press, 1989
- RONAN, MARK; *Buildings: Main Ideas and Applications I & II*, London Mathematical Society 24 1992 1-51
- TITS, J; BRUHAT, F.; *Groupes Réductifs sur un Corps Local*, I.H.E.S, 1972

Capítulo 5

Edifícios euclidianos

Grupos euclidianos de reflexões

Um espaço euclidiano é um espaço vetorial V sobre os reais munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. O grupo de isometrias deste espaço é $O(n) \ltimes V$.

Um **grupo de Coxeter euclidiano** W é um subgrupo discreto infinito de $O(n) \ltimes V$ que age em V de forma essencial e irredutível.

Todo elemento $w \in W$ pode ser decomposto em

$$w = \bar{w} + T,$$

sendo \bar{w} a parte linear e T a parte de translação de w . (Essa decomposição depende do ponto que escolhemos para origem).

Um hiperplano (sub-espaço afim de codimensão 1) $H \subset V$ é caracterizado por um vetor normal α_H . Podemos também associar a cada hiperplano H um funcional $\alpha_H = \langle \cdot, \alpha_H \rangle$.

Dado um hiperplano H definimos a reflexão neste hiperplano, s_H como:

$$s_H(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in H \\ -x, & \text{se } x \in H^\perp \end{cases}$$

e estendida por linearidade.

Definimos $\mathcal{H} = \{H \text{ tal que } s_H \in W\}$ e $\mathcal{F} = \{\alpha_H : H \in \mathcal{H}\}$ o conjunto de todos os funcionais associados a $H \in \mathcal{H}$. Dado uma função $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \{+, -\}$ associamos o conjunto

$$C_\phi = \{x \in V : f(x) = \phi(x), \forall f \in \mathcal{F}\}.$$

As câmaras são definidas como os conjuntos C_ϕ não vazios.

A família de hiperplanos \mathcal{H} divide V em um número infinito de componentes conexas limitadas C_ϕ .

No que se segue escolheremos uma câmara C , que chamaremos câmara fundamental. Denotaremos por J as reflexões nas paredes de C .

Proposição 5.1 1. W age de forma simplesmente transitiva nas câmaras.

2. W é gerado por J

3. (W, J) é um sistema de Coxeter

4. Cada câmara possui um número finito de paredes

5. Existe um ponto $x \in V$, tal que o estabilizador W_x é isomorfo a \overline{W} , um grupo de Coxeter finito.

6. Todos os hiperplanos $H \in \mathcal{H}$ são paralelos a um hiperplano passando por x . E existem um número finito de classes paralelas de hiperplanos.

7. $W \simeq Z^n \rtimes \overline{W}$

Definição 5.2 Um ponto x tal que $W_x \rightarrow \overline{W}$ é um isomorfismo, é denominado **ponto especial**.

Complexos de Coxeter Euclidianos

Um complexo de Coxeter abstrato Σ isomorfo a um complexo $\Sigma(W, V)$ proveniente da ação de W em V , é denominado **complexo de Coxeter euclidiano** e que $|\Sigma| = \Sigma(W, V)$ é sua realização geométrica.

Dado $|\Sigma|$ a realização geométrica de Σ , existe um homeomorfismo de $|\Sigma|$ em V , para qualquer W e V . Este homeomorfismo é proveniente do homeomorfismo canônico entre duas câmaras (simplexos de dimensão $n + 1$).

O próximo lema nos diz que o espaço V (a menos de uma dilatação da métrica) pode ser reconstruído do complexo simplicial abstrato $\Sigma(W, V)$.

Lema 5.3 ([Ga] págs. 189) *Dados (W, V) e (W', V') grupos euclidianos de reflexão. Seja $\phi : \Sigma(W, V) \rightarrow \Sigma(W', V')$ um isomorfismo simplicial. Então a função composta:*

$$V \rightarrow |\Sigma(W, V)| \xrightarrow{|\phi|} |\Sigma(W', V')| \rightarrow V'$$

é uma aplicação de similaridade, ou seja, é uma aplicação afim tal que a parte linear g satisfaz $\langle gv, gv' \rangle = \lambda \langle v, v' \rangle$, com $\lambda > 0$.

O lema anterior nos diz que V é bem determinado e temos uma classe de equivalência de normas em V . Podemos escolher um representante canônico da norma, exigindo que a câmara tenha diâmetro 1. Com esta escolha, temos que $|\Sigma|$ é um espaço euclidiano, e que todo isomorfismo abstrato $\phi : \Sigma(W, V) \rightarrow \Sigma(W', V')$ induz uma isometria $|\Sigma(W, V)| \xrightarrow{|\phi|} |\Sigma(W', V')|$.

Setores e Células Cônicas

Seja Σ um complexo de Coxeter, que identificaremos com sua realização geométrica, e seja x_0 um ponto especial. Denotamos por \mathcal{H}_{x_0} o conjunto dos hiperplanos em \mathcal{H} que passam por x_0 e a cada $H \in \mathcal{H}_{x_0}$ associamos o funcional linear α_H . Nos edifícios euclidianos, \mathcal{H}_{x_0} é finito e divide A em cones simplexes, todos com vértice x_0 (um cone simplexo em geral será denotado por c). Para todo $x \in A$, o cone trasladado $x + c$ será dito **setor** S de A com vértice em x . A direção do setor é c . Se um setor $S' = x' + c'$ estiver contido em outro setor $S = x + c$, então diremos que $x' + c'$ é um subsetor de $x + c$. Dois setores $x' + c'$ e $x'' + c''$ estão em direção contrária se $c'' = -c'$.

Generalizando a definição de setor chegamos ao conceito de célula cônica. Uma célula cônica é construída através de uma partição de \mathcal{H}_{x_0} em três partes disjuntas

$$\mathcal{H}_{x_0} = \mathcal{H}_{x_0}^+ \sqcup \mathcal{H}_{x_0}^- \sqcup \mathcal{H}_{x_0}^0$$

Definimos então uma célula cônica c como o conjunto $z \in A$ tal que

$$\alpha_H(z) > 0, H \in \mathcal{H}_{x_0}^+$$

$$\alpha_H(z) < 0, H \in \mathcal{H}_{x_0}^-$$

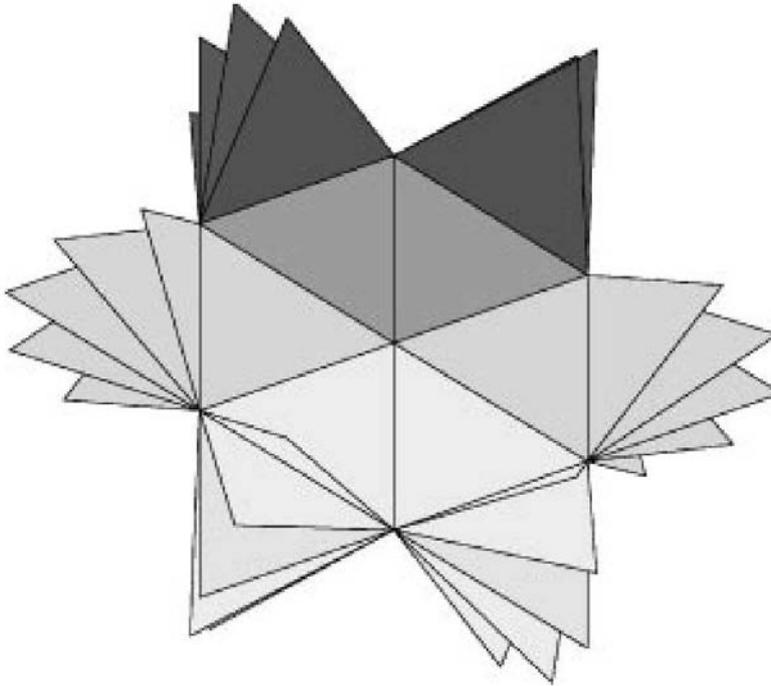
$$\alpha_H(z) = 0, H \in \mathcal{H}_{x_0}^0$$

Podemos definir uma relação de faces nas células cônicas. Para isso sejam duas células cônicas c e d dadas pelas partições $Y = Y^+ \sqcup Y^- \sqcup Y^0$ e $Z = Z^+ \sqcup Z^- \sqcup Z^0$.

Diremos que $c \leq d$ se $Z^+ \subset Y^+$ e $Z^- \subset Y^-$.

Edifícios Euclidianos

Dado X um edifício euclidiano equipado com um sistema de apartamentos \mathcal{A} . Diremos que X é um edifício euclidiano se os apartamentos forem complexos de Coxeter euclidianos. Do fato de cada apartamento ter uma realização geométrica como um espaço euclidiano afim, temos uma realização geométrica $|X|$ do edifício euclidiano X .



5.1 Edifícios Euclidianos são CAT(0)

A realização geométrica de um edifício euclidiano pode ser dotada de uma métrica, cuja construção descreveremos agora. Dados dois pontos $x, y \in |X|$, o axioma **(B1)** de edifícios nos diz que existe um apartamento E contendo x e y . Esse apartamento pode ser dotado com uma métrica que faz com que as câmaras tenham diâmetro 1. Seja $d_E(x, y)$ essa métrica.

Definimos então a **métrica canônica** :

$$d(x, y) = d_E(x, y)$$

Proposição 5.4 ([Ga] págs. 194) *Dado $\phi : X \rightarrow X'$ um isomorfismo de edifícios euclidianos. Então ϕ é uma isometria se ambos edifícios forem dotados da métrica canônica.*

O seguinte resultado é de suma importância:

Teorema 5.5 ([Ga] págs. 197) *A realização geométrica de qualquer edifício é um espaço CAT completo.*

5.2 Edifício no Infinito

Um fato de grande importância nos estudos dos edifícios euclidianos é a semelhança que estes possuem com os espaços simétricos: ambos são espaços **CAT(0)** completos e, principalmente, ambos podem ser compactificados e essas compactificações podem ser dotadas da estrutura de um edifício esférico. Ou seja, para ambos, a fronteira no infinito é a realização geométrica de um edifício esférico.

Seja X a realização geométrica de edifício euclidiano dotado com a métrica canônica. Um ponto ξ na fronteira no infinito $\partial_\infty(X)$, é uma classe de raios geodésicos assintóticos conforme a construção apresentada na seção 3.3.

Nosso objetivo é dotar $\partial_\infty(X)$ de uma estrutura de edifício esférico e para isso introduziremos uma estrutura simplicial.

A face no infinito c_∞ de uma célula cônica c em X com vértice em x_0 é o subconjunto dos pontos $\xi \in \partial_\infty(X)$ tal que o raio geodésico aberto (x, ξ) está contido em c .

Um **simplexo ideal** ou **simplexo no infinito** é um subconjunto σ de $\partial_\infty(X)$ para o qual existe uma célula cônica c tal que $\sigma = c_\infty$.

Dado c e d duas células cônicas com vértice em x_0 , dizemos que o simplexo ideal d_∞ é uma face do simplexo ideal c_∞ se d é uma face de c . Escreveremos neste caso que $d_\infty \leq c_\infty$.

Teorema 5.6 ([Ga] pág. 279) *Os simplexos ideais particionam $\partial_\infty(X)$. A relação de face é bem definida, e o conjunto parcialmente ordenado dos simplexos em $\partial_\infty(X)$ é um complexo simplicial. Além disso $\partial_\infty(X)$ é um edifício esférico, e os apartamentos do edifício esférico estão em bijeção com o sistema maximal de apartamentos de X .*

Capítulo 6

Grupos algébricos lineares sobre Corpos Locais

Aos grupos algébricos semisimples podemos sempre associar um edifício esférico cuja construção, usando os subgrupos de Borel, é bastante conhecida. No caso de grupos semisimples sobre corpos locais, temos a particularidade de podermos associar um edifício euclidiano, de tal modo que o edifício esférico, construído usando os subgrupos de Borel, aparece naturalmente como o edifício esférico no infinito do edifício euclidiano.

A combinação desses dois edifícios implica em diversas propriedades dos grupos algébricos semisimples sobre corpos localmente compactos, como veremos neste capítulo.

6.1 Grupos Algébricos

6.1.1 Variedades Afins

Dado k um corpo local de característica zero e \mathbf{k} o seu fecho algébrico, o espaço afim $\mathbb{A}^n = (a_1, \dots, a_n)$ é definido como o espaço vetorial de dimensão n sobre \mathbf{k} .

Dado $A = \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$ a álgebra dos polinômios sobre \mathbf{k} . Cada polinômio $f(x) \in A$ será visto como uma função em \mathbb{A}^n . Para cada $f \in A$, definimos o conjunto dos zeros de f como $Z(f) = \{P \in \mathbb{A}^n : f(P) = 0, \forall f \in T\}$. A definição se aplica de maneira óbvia a subconjuntos de A .

Um conjunto Y de \mathbb{A}^n é **algébrico** se existe $T \subset A$ tal que $Y = Z(T)$.

Podemos associar uma topologia a \mathbb{A}^n , usando a álgebra de polinômios. A **topologia de Zariski** em \mathbb{A}^n é topologia na qual os abertos são os complementares dos conjuntos algébricos.

Um conjunto não vazio Y de um espaço topológico X é dito irredutível se ele não pode ser expresso como união de dois fechados próprios disjuntos.

Definiremos agora um dos principais objetos de estudo da geometria algébrica: as variedades afins. As variedades afins são os protótipos locais da geometria algébrica exercendo um papel similar ao dos abertos de \mathbb{R}^n na geometria diferencial.

Definição 6.1 *Uma variedade algébrica afim X é um conjunto fechado (algébrico) irredutível de \mathbb{A}^n . Um subconjunto aberto de uma variedade afim é dito variedade quasi afim. Uma variedade algébrica é dita definida sobre k se X for o conjunto de zeros de um número finito de polinômios sobre k . Se X é uma variedade algébrica em \mathbf{k}^n , denotaremos por $X(k) = X \cap k^n$, o conjunto dos pontos k -racionais.*

6.1.2 Grupos algébricos

A definição de grupos algébricos mimetiza a definição de grupos de Lie.

Definição 6.2 *Um grupo algébrico é uma variedade algébrica G dotada de uma estrutura de grupos*

$$\begin{aligned}\mu : G \times G &\rightarrow G, & \mu(x, y) &= xy \\ i : G &\rightarrow G, & i(x) &= x^{-1}\end{aligned}$$

tais que as operações μ e i são morfismo da variedade G .

Pela definição temos que a translação a direita

$$\begin{aligned}R_g : G &\rightarrow G \\ x &\rightarrow xy\end{aligned}$$

é um isomorfismo de variedades.

Definição 6.3 *Um isomorfismo de grupos algébricos G e G' é um isomorfismo de variedades que é simultaneamente um isomorfismo de grupos.*

Exemplos de grupos algébricos 1. $G_a = \mathbb{A}^1$ com a estrutura aditiva $\mu(x, y) = x + y$, $i(x) = -x$, $e = 0$

2. $G_m = \mathbb{A}^1 - \{0\}$ com a estrutura multiplicativa $\mu(x, y) = xy$, $i(x) = x^{-1}$, $e = 1$

Os exemplos acima são irredutíveis e unidimensionais, na verdade a menos de isomorfismo são os únicos com estas propriedades.

3. \mathbb{A}^n com a estrutura de espaço vetorial.

Os exemplos acima são todos abelianos.

4. $GL(n, k)$ é definido pelo não anulamento do polinômio \det

5. Como um subgrupo fechado de um grupo algébrico é algébrico, podemos desse fato tirar os exemplos:

5.a $T(n, k)$ matrizes triangulares superiores que em $GL(n, k)$

5.b As matrizes diagonais $D(n, k)$

5.c $U(n, k)$ matrizes triangulares superiores com diagonal 1.

Componente da identidade e Conexidade

É possível demonstrar que existe uma única componente irredutível contendo a identidade. Essa componente será denotada por G^0 e a designaremos por componente da identidade de G .

Proposição 6.4 *Dado um grupo algébrico G , então G^0 é um subgrupo normal de índice finito e qualquer subgrupo de índice finito contém G^0 .*

Um grupo G é dito conexo se $G = G^0$.

Toros, Grupos Unipotentes, Grupos Redutíveis, Semisimples

Um grupo algébrico T sobre k é dito um **toro** de posto n se T se torna isomorfo a $(GL_1)^n$ após a extensão do corpo base para o fecho algébrico \bar{k} . Um toro é dito *split* se ele for isomorfo a $(GL_1)^n$ sobre k .

Um elemento $g \in GL(n, k)$ é dito **unipotente** se $g - 1$ for nilpotente. Isto é equivalente a dizer que g é conjugado a um elemento de $U(n, k)$. Um grupo de matrizes é dito unipotente se cada um de seus elementos é unipotente. Isto é equivalente, pelo teorema

de Kolchin, a dizer que o grupo é conjugado a um subgrupo de $U(n, k)$. Um grupo algébrico linear G sobre k é dito unipotente se para um mergulho de G como subgrupo fechado de Gl_n tivermos que $G(\bar{k})$ for um subgrupo unipotente de $Gl(n, \bar{k})$. Resaltamos que a definição de grupo unipotente independe do mergulho.

Um grupo algébrico G sobre k é dito **reduzível** se não contiver nenhum subgrupo normal unipotente conexo e não trivial. Os grupos Gl_n e Sl_n são reduzíveis.

Finalmente, um grupo algébrico $G(k)$ é dito semisimples se $G(\bar{k})$ não contiver nenhum subgrupo normal solúvel conexo e não trivial. O grupo Sl_n é semisimples. Um grupo G é dito quase-simples se seu centro Z for finito e o quociente G/Z for simples como grupo abstrato.

6.1.3 Edifício Esférico Associado

Se G é semisimples (ou de modo mais geral reduzível) então $G(k)$ tem um par **BN** ao qual podemos associar um edifício esférico. Descreveremos rapidamente esta construção (para maiores detalhes consulte [Hu]).

Um subgrupo H é dito parabólico quando G/H é uma variedade completa. Um subgrupo de Borel P é um subgrupo parabólico minimal. Podemos escolher um subgrupo de Borel de modo que ele contenha um toro *split* maximal $T(k)$.

Seja \mathcal{N}_{sph} o normalizador de T em $G(k)$.

Teorema 6.5 ([Hu],[Bo]) *A tripla $(G, P, \mathcal{N}_{sph})$ forma um par **BN**, ao qual podemos associar um edifício esférico que tem posto igual ao posto de $T(k)$.*

Proposição 6.6 (Decomposição de Bruhat,[Bro] pág. 110) *A classe dupla PgP , $g \in G$ é da forma PwP , $w \in W$ e a aplicação $\omega \rightarrow PwP$ é uma bijeção do grupo de Weyl nas classes duplas PgP , com $g \in G$.*

Proposição 6.7 ([Ga] págs. 111) *Se $gP^{I_1}g^{-1} = P^{I_2}$ então $I_1 = I_2 = I$ e $g \in P^I$.*

Proposição 6.8 (Decomposição de Langlands) *Seja N o radical unipotente de P , $N = P_u$, e seja M o subgrupo compacto maximal de Z , sendo Z o centralizador de A . Então $Z = MA$, e temos*

$$P = MAN, \bar{P} = MAN\bar{N} \text{ e } P \cap \bar{P} = A.$$

6.2 Grupos algébricos lineares sobre Corpos locais

6.2.1 O Edifício Euclidiano Associado

O edifício esférico apresentado na seção anterior depende apenas da estrutura algébrica do grupo G . No caso do corpo base ser um corpo local, é possível dotar o grupo G de uma estrutura de par BN adicional que resulta em um edifício euclidiano associado a G .

Teorema 6.9 (Teorema de Tits [TB]) *Dado um grupo G simples e simplesmente conexo, definido sobre um corpo ultramétrico localmente compacto podemos construir um edifício euclidiano para G . Temos ainda que os subgrupos parabólicos com respeito a esse par BN são abertos e compactos (usando a topologia não arquimediana).*

A demonstração desse resultado é bastante envolvente e não a faremos aqui, apresentaremos, porém, um exemplo no apêndice: $Sl(n, k)$.

6.2.2 Subgrupos parahóricos e parabólicos

Seja G um grupo simples conexo, simplesmente conexo sobre um corpo local e X o edifício euclidiano associado G , conforme o Teorema de Tits.

Definimos:

\mathcal{N}_{aff} = estabilizador em G do apartamento A

B = fixador pontual em G da câmara C

T = $\mathcal{N}_{aff} \cap B$

P = estabilizador em G da câmara C_∞

\mathcal{N}_{sph} = estabilizador em G do apartamento A_∞

T^+ = $\mathcal{N}_{sph} \cap P$ denominada componente de Levi

No caso esférico "B" será denotado por P e será denominado **parabólico minimal** ou **subgrupo de Borel**, enquanto no caso euclidiano "B" será denotado por B e será denominado **parahórico minimal** ou **subgrupo de Iwahori**.

Teorema 6.10 ([Ga], 259) $\mathcal{N}_{aff} = \mathcal{N}_{sph}$

Desta forma escreveremos simplesmente $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{aff} = \mathcal{N}_{sph}$.

É usual designar:

$$W = \mathcal{N}/T = \text{grupo de Weyl afim (ou euclidiano)}$$

$$W_0 = \mathcal{N}/T^+ = \text{grupo de Weyl esférico}$$

Se denotarmos por \mathcal{N}_{trans} o subgrupo de \mathcal{N} cujas restrições a A são translações, temos:

Lema 6.11 ([Ga] págs. 200) *A componente de Levi $T^+ = \mathcal{N} \cap P$ do parabólico minimal P com respeito ao apartamento A_∞ é o subgrupo de translações, ou seja,*

$$T^+ = \mathcal{N}_{trans}$$

Uma consequência interessante do teorema de Bruhat-Tits é a seguinte caracterização dos edifícios euclidianos:

Teorema 6.12 ([Bro], pág 163) *O edifício X associado ao par \mathbf{BN} euclidiano é isomorfo ao complexo de bandeiras da geometria de incidência dos subgrupos limitados maximais de g com a relação de incidência: P e Q são incidentes se, e somente se, $P \cap Q$ é um subgrupo maximal de P .*

6.2.3 Decomposição de Cartan e Iwasawa

Seja G um grupo simples conexo e simplesmente conexo sobre um corpo local e X o edifício euclidiano associado. Seja (G, B, \mathcal{N}) o sistema afim de Tits de X , sendo que \mathcal{N} estabiliza o apartamento Σ e P estabiliza a câmara $c \in \Sigma$ com vértice especial s .

Seja S o setor em Σ com vértice especial s , temos que esse setor determina uma câmara S^∞ no edifício esférico no infinito $\partial_\infty(X)$. Seja W o grupo de Coxeter afim agindo em Σ e W_0 o subgrupo de W fixando s . Em particular W_0 é o grupo de Coxeter esférico agindo em Σ^∞ .

Seja K o estabilizador em G de s , lembramos que $K = BW_0B$. Quando o corpo é localmente compacto, K é um subgrupo maximal compacto, pelo teorema anterior. Seja T o grupo de translações de Σ (T é um subgrupo de W) e seja $T_S \subset T$ o subconjunto das translações que enviam o vértice s para um vértice em S . Por último denote N o subgrupo unipotente de G estabilizando o vértice S^∞ de $\partial_\infty(X)$.

Então temos o seguinte Teorema de Bruhat e Tits.

Teorema 6.13 ([Brh], [Ron2] pág 100)

1. (Decomposição de Iwasawa) $G = KTN$, e as classes laterais duplas $K \backslash G / N$ estão em correspondência biunívoca com T .
2. (Decomposição de Cartan) $G = KT_s K$ e as classes laterais duplas $K \backslash G / K$ estão em correspondência biunívoca com T_s .

Esboço de demonstração (i) Dado $g \in G$ um elemento qualquer e seja $s' = gs$. Dado um vértice qualquer x e um setor qualquer S , existe um subsetor S_1 tal que x e S_1 estão no mesmo apartamento. Logo existe Σ' um apartamento contendo s' e um subsetor de S . Temos assim que Σ e Σ' são apartamentos contendo s e s' respectivamente e S^∞ no infinito. Seja $u \in N$ o único elemento tal que $u(\Sigma') = \Sigma$. Seja $t \in T$ a única translação enviando us' a s . Temos que $tus' = s$, ou seja, $tug^{-1} \in K$, e logo $g \in KTN$. Substituindo Σ' por outro apartamento contendo s e S^∞ , obtemos $u' \in U$. Ambos u e u' têm a mesma ação em $\Sigma \cap \Sigma'$, logo $us' = u's'$ e logo t é unicamente determinado.

- (ii) Pela decomposição de Bruhat temos $K = BW_0B$. Usando os axiomas de pares **BN** temos que $KwK = BW_0wW_0B$ para todo $w \in W$. Além disso W é união disjunta de classes duplas da forma W_0tW_0 para $t \in T_s$. Logo $G = BWB$ é uma união disjunta de classes duplas KtK com t em T_s .

Observação 6.14 Note que na notação da seção anterior a decomposição de Iwasawa se escreve como

$$G = \bigsqcup_{w \in W_0} PwB$$

A notação usada nesta seção assemelha-se à notação usual para grupos de Lie, enquanto a da seção anterior é usual no contexto de grupos algébricos sobre corpos ultramétricos.

6.2.4 Decomposição Celular de Bruhat

Nesta seção G denotará um grupo algébrico semi-simples, conexo sobre um corpo ultramétrico. O grupo quociente pode ser dotado de uma estrutura de variedade, e em particular teremos que as variedades bandeiras são variedades com a topologia ultramétrica.

Teorema 6.15 ([Se] LG 4.10 e LG4.11) *Seja H um subgrupo de G que é uma variedade e G/H o espaço das classes laterais, então G/H possui uma única estrutura de variedade ultramétrica fazendo $G \xrightarrow{\pi} G/H$ uma submersão.*

A partir desses resultados podemos construir a decomposição celular de Bruhat. Para isso consideraremos o edifício esférico de G .

Seja J um conjunto de índices para os geradores do grupo de Coxeter esférico W_0 . Dado $I \subset J$ um subconjunto dos geradores J de W_0 , seja $W_I = \langle j_i : i \in I \rangle$ e $W^I = \langle j_k : k \notin I \rangle$. Definimos os subgrupos parabólicos $P_I = PW_IP$ e $P^I = PW^IP$. Pelos axiomas de Tits temos que $G = \langle P^I, P_I \rangle$ e que $P^I \cap P_I = P$.

Considere a variedade bandeira G/P^I , dado $g \in G$ a imagem de g pela aplicação $G \xrightarrow{\pi} G/P^I$ será denotada por $\dot{g} = gP^I$. Seja c_I o simplexo fixo por P^I e $-c_I$ seu oposto em A , sendo A um apartamento qualquer fixo contendo c_I . Seja N_I o subgrupo unipotente maximal de P^I , ou seja, N_I é o grupo unipotente maximal de fixando c_I . e seja \bar{N}_I o subgrupo unipotente maximal de P_I , sendo P_I o parabólico que fixa $-c_i$.

A variedade $\bar{N}_I \cdot \dot{e}$ é dita a maior célula de G/P_I . Essa célula pode ser identificada com \bar{N}_I pois $n_2 n_1^{-1} \in P^I$ se, e somente se, $n_1 = n_2$. Mostraremos que a célula maior $\bar{N}_I \cdot \dot{e}$ é aberta e densa em G/P^I .

Para isso notemos que pela aplicação $gP \rightarrow gP^I$, cada variedade bandeira é imagem de G/P e desta forma podemos reduzir os cálculos a esse caso.

Teorema 6.16 (Decomposição celular de Bruhat) *Se $w \in W$, seja $\bar{N}^w = \bar{N} \cap w\bar{N}w^{-1}$. Então a aplicação $\eta \rightarrow \eta \cdot \dot{w}$ de \bar{N}^w em G/P é injetiva e G/P é união disjunta das células $\bar{N}^w \dot{w}$, $w \in W$. Além disso se $a \in A$ e $\eta \in \bar{N}^w$, a aplicação $\eta \mapsto \eta \dot{w}$ identifica $a\eta a^{-1} \in \bar{N}^w$ com $a\eta \dot{w} \in G/P$*

Demonstração: Como a ação W é simplesmente transitiva nas câmaras de A , existe e é único o elemento σ de w tal que $\sigma(c) = -c$, ou equivalentemente $\sigma N \sigma^{-1} = \bar{N}$. Pela decomposição de Bruhat e decomposição de Langlands, respectivamente, temos:

$$G = \sigma G = \bigsqcup_{w \in W} \sigma P w P = \bigsqcup_{w \in W} \sigma M N A \sigma^{-1} w P = \bigsqcup_{w \in W} \sigma N \sigma^{-1} w P = \bigsqcup_{w \in W} \bar{N} w P$$

O estabilizador do parabólico wP em G é wPw^{-1} e o estabilizador da classe $\dot{w} = wP \in G/P$ em \bar{N} é $\bar{N} \cap wPw^{-1} = \bar{N} \cap wNw^{-1}$. E assim $\bar{N}wP$ pode ser identificado com $\bar{N}/(\bar{N} \cap wNw^{-1})$.

Como $\bar{N} = (\bar{N} \cap w\bar{N}w^{-1})(\bar{N} \cap wNw^{-1})$ temos que $\bar{N}wP = \bar{N}^w wP$ pode ser identificado com $\bar{N}^w \cdot \dot{w}$. Logo G/P é a união disjunta das células $\bar{N}^w w$. \square

A dimensão de $\bar{N} \cdot \dot{e}$ é igual a dimensão de G/P , enquanto as células $\bar{N}^w \cdot \dot{w}$ têm codimensão pelo menos um. Portanto, $\bar{N} \cdot \dot{e}$ é aberto e denso em G/P .

Corolário 6.17 *A célula maior $\bar{N} \cdot \dot{e}$ é aberta e densa em G/P*

Seja \tilde{X} o edifício euclidiano associado a G e X sua realização geométrica, vimos na seção 4.4.1 que podemos associar a todo simplexo S o subgrupo parabólico P^I e um tipo parabólico I , desta forma definimos a aplicação:

$$\begin{aligned} \pi : \partial_\infty(\tilde{X}) &\rightarrow \bigcup_{I \subset J} G/P^I \\ &: S \rightarrow P^I \end{aligned}$$

A aplicação π pode ser decomposta em uma série de aplicações

$$\pi^\ominus : \partial_\infty^I(\tilde{X}) \rightarrow G/P^I$$

sendo que $\partial_\infty^I(\tilde{X})$ denota a imagem inversa $\pi^{-1}(G/P^I)$. Os pontos de $\partial_\infty^I(X_T)$ são ditos pontos do tipo I em $\partial_\infty(\tilde{X})$.

Se considerarmos em $\partial_\infty^I(X_T)$ a topologia de Busemann temos que:

Lema 6.18 *Os espaços topológicos $\partial_\infty^\emptyset(\tilde{X})$ com a topologia de Busemann e G/P com a topologia ultramétrica são homeomorfos.*

Demonstração: O grupo G age como transformações contínuas e transitivamente em $\partial_\infty^\emptyset(\tilde{X})$ com P estabilizado uma câmara, o que implica que temos uma bijeção contínua $\pi : G/P \rightarrow \partial_\infty^\emptyset(\tilde{X})$ e como $\partial_\infty^\emptyset(\tilde{X})$ é compacto (3.3.2) temos que π é um homeomorfismo. \square

Uma consequência direta do lema anterior é a compacidade da variedade bandeira G/P (compare com [Ma, pág 55]).

Finalmente podemos concluir que:

Lema 6.19 Dado \tilde{C} uma câmara em $\partial_\infty^\emptyset(\tilde{X})$ seja N o grupo unipotente maximal de fixando \tilde{C} e \bar{N} o grupo unipotente maximal de fixando $-\tilde{C}$. A célula $\bar{N} \cdot \tilde{C}$ é aberta e densa em $\partial_\infty^\emptyset(\tilde{X})$. Ou equivalentemente seja C a realização geométrica de C . A célula $\bar{N} \cdot C$ é aberta e densa em $\partial_\infty^\emptyset(X)$

Referências

As principais referências para este capítulo são:

- HUMPHREYS, J.E., *Linear Algebraic Groups*, Springer Verlag, New York, 1975.
- BOREL, ARMAND *Linear algebraic Groups*, Benjamin 1969
- BHUHAT, F; TITS, J;, *Groupes réductifs sur un corps local*, I.H.E.S, 1972
- TITS, J; *Buildings of Spherical Type and Finite BN Pairs*, Lecture Notes 386 Springer Verlag 1974
- TITS, J; *Buildings and Group Amalgamations*, London Mathematical Society 121 1986
- TITS, J; *Théorie des groupes*, Resume du cours, Annuaire du College de France, 1988-89
- VIMBERG, E. B.; ONISHCHIK, A. L.; *Lie Groups and Algebraic Groups*, Springer Verlag 1990

Capítulo 7

Semigrupos e Controle

7.1 Fatos Preliminares

Começaremos com um pequeno resumo da linguagem usada.

Seja G um grupo linear algébrico simples e simplesmente conexo sobre um corpo ultramétrico. Pelo teorema de Tits podemos associar à G um edifício euclidiano X ¹. O edifício X com a métrica canônica é um espaço **CAT**(0) localmente compacto no qual o grupo G age como isometrias. Assim podemos classificar os elementos $g \in G$, como isometrias elípticas, parabólicas e hiperbólicas, em termos da função translação $|g|$ [sec. 3.4]. O espaço X pode ser compactificado com a topologia de Busemann [sec. 3.3.2] de modo que ambos $\widehat{X} = X \cup \partial_\infty X$ e $\partial_\infty X$ são compactos. Temos também que $\partial_\infty X$ é a realização do edifício esférico associado ao edifício euclidiano.

Um **flat** F é um conjunto convexo de X que é isométrico a um espaço euclidiano. Um flat é maximal se não estiver contido em nenhum outro. A dimensão do flat maximal é denominada **posto** de X . Nos edifícios euclidianos, os flats maximais possuem todos a mesma dimensão e também são chamados de **apartamentos**.

Grande parte do nosso estudo de semigrupos consistirá em entender as propriedades das isometrias hiperbólicas e de suas ações no edifício euclidiano e esférico.

Relembramos que uma isometria h é dita hiperbólica se a **função translação** d_h atinge um mínimo positivo, ou seja, $|h| := \min_{x \in X} d_h(x) > 0$. Uma isometria hiperbólica

¹Por abuso de notação, X denotará tanto um edifício euclidiano como sua realização geométrica. Esse abuso é fundamentado pela proposição 5.4.

é dita **regular** se todos os eixos de h estão contidos em um único apartamento.

Para uma isometria hiperbólica não regular, temos por definição que existe pelo menos um eixo contido em mais de um apartamento. Um **eixo canônico** neste caso é um eixo que está contido em um número maximal de apartamentos.

Se considerarmos a ação de W_0 , o grupo de Weyl (associado ao edifício esférico) de G , em um apartamento F , podemos apresentar uma outra caracterização das isometrias regulares e não regulares. Para isso introduzimos a seguinte notação: dado P um hiperplano no apartamento F , denotamos por s_P a inversão neste hiperplano. Escolhemos um vértice especial x_0 em F e denotamos por $W_0 = \{w \in W_{aff} : w(x_0) = x_0\}$. Temos que $W_0 \approx W$, ou seja, essencialmente W_0 é o grupo de Weyl do edifício esférico associado a G . Associamos a W uma família de hiperplanos $\mathcal{H} = \{P : s_P \in W\}$. Uma isometria h é regular se os eixos de h não estão contidos em nenhum hiperplano $P \in \mathcal{H}$. Uma isometria não regular é definida por negação. De modo mais preciso, uma isometria hiperbólica h é dita do tipo Θ se h possui um eixo contido em todos os hiperplanos $P \subset \mathcal{H}_\Theta$, sendo

$$\mathcal{H}_\Theta = \{P : s_P \in W_\Theta\}$$

e W_Θ o subgrupo de Weyl de W maximal com essa propriedade.

O seguintes lemas apresentam diversas propriedades das isometrias hiperbólicas para espaços **CAT**(0), análogas às conhecidas no caso de espaços simétricos [[BGS] págs 77-85]:

1. Considere um subconjunto convexo fechado $M \subset X$ invariante por γ . Então, γ é elíptica, parabólica ou hiperbólica se, e somente se, a restrição $\gamma|_M$ for elíptica, parabólica ou hiperbólica respectivamente.
2. Os eixos de h são todos paralelos e sua união é $\text{Min}(\gamma)$.
3. Seja γ um eixo para h . A união de todos as geodésicas paralelas a γ , P_γ , é um conjunto convexo invariante por h . P_γ se decompõe em

$$P_\gamma \simeq P'_\gamma \times \mathbb{R}$$

sendo P'_γ um subconjunto convexo fechado de X , e h se decompõe como $h = (h', h'')$ sendo h' uma isometria elíptica em P'_γ e h'' uma translação em \mathbb{R} .

Os seguintes lemas apresentam uma caracterização da ação de uma isometria hiperbólica no edifício euclidiano.

Lema 7.1 *Seja $\{F_\gamma^i\}$ a família de flats que contêm um eixo γ de h . Então $U = \bigcup F_\gamma^i$ e $I = \bigcap F_\gamma^i$ são ambos invariantes por h . Em particular se h é uma **isometria hiperbólica regular**, ou seja, todos os eixos de h estão contidas em um único apartamento, então esse apartamento é invariante.*

Demonstração: Seja F_γ^i um flat contendo γ . Temos que hF_γ^i é um flat que contém γ pois h é isometria deixando o eixo γ invariante.

Como a família $\{F_\gamma^i\}$ é finita (no caso de corpos locais) e como h é uma bijeção, não podemos ter $hF_\gamma^i = hF_\gamma^j$, assim h age como permutação na família $\{F_\gamma^i\}$. Consequentemente temos que

$$hU = \bigcup hF_\gamma^i = \bigcup F_\gamma^i = U$$

e

$$hI = \bigcap hF_\gamma^i = \bigcap F_\gamma^i = I$$

são deixados invariantes. □

Lema 7.2 *Seja F um flat no edifício euclidiano X , e h uma isometria hiperbólica de F . Então:*

1. *Existe uma isometria \tilde{h} de X tal que $\tilde{h}|_F = h$.*
2. *Se F não for maximal então duas dessas extensões \tilde{h}_1 e \tilde{h}_2 diferem por um elemento de W_F , ou seja $\tilde{h}_1(\tilde{h}_2)^{-1} \in W_F$, sendo W_F o grupo das isometrias de X que fixam F pontualmente.*
3. *Se F for um flat maximal essa isometria é única.*

Demonstração: Seja \hat{F} um flat maximal contendo F . O flat \hat{F} é isométrico a \mathbb{R}^n , sendo n o posto do edifício, e F é isométrico a um sub-espço de \mathbb{R}^n . É conhecido que a isometria h pode ser estendida de modo único a uma isometria \hat{h} de \hat{F} . Para estendermos \hat{h} a X , considere C uma câmara em \hat{F} e $\hat{h}(C)$ sua imagem. Pelos axiomas de edifício

sabemos que existe \tilde{h} isometria de X tal que $\tilde{h}(C) = \hat{h}(C)$ e $h(\hat{F}) = \hat{F}$. Essa isometria satisfaz $\tilde{h}|_F = h$.

Por definição, temos que $\tilde{h}_1(\tilde{h}_2)^{-1}|_F$ é a aplicação identidade, ou seja $\tilde{h}_1(\tilde{h}_2)^{-1} \in W_F$, o que implica em unicidade no caso em que F é um flat maximal. \square

Nem todas as geodésicas podem ser eixos para uma translação proveniente de G . Veja, por exemplo, o caso em que nosso edifício não é grosso, ou seja o caso em que X é isométrico a um complexo de Coxeter. A finitude local do grupo de Coxeter nos diz que nem todas as retas podem ser eixos de uma isometria proveniente do grupo W . O teorema anterior nos diz que as geodésicas que são eixos para uma isometria proveniente da ação de W em um flat também são eixos para uma isometria de X .

7.2 Ação das Isometrias Hiperbólicas no Edifício Euclidiano

Queremos caracterizar a ação das isometrias hiperbólicas regulares no edifício euclidiano e sobre o edifício esférico. Para tanto, seja uma isometria hiperbólica regular h , F o apartamento deixado invariante por h e $\mathbf{F} = \partial_\infty(F)$ o apartamento do edifício esférico que é fronteira do apartamento F em $\partial_\infty(X)$. Destacamos que a notação da linha anterior será mantida: quando tivermos nos referindo a um simplexo do edifício esférico em $\partial_\infty(X)$ associado a um simplexo do edifício euclidiano X , denotaremos ambos pelos mesmos símbolos, usando fontes em **negrito** para os simplexos em $\partial_\infty(X)$.

Definimos o **atrator principal** de uma isometria hiperbólica h como o ponto $\xi \in \partial_\infty(X)$ tal que $h^n(x) \rightarrow \xi$ para qualquer $x \in X$. A câmara no infinito contendo ξ será denotada por $\mathbf{C}(\xi)$. O atrator principal de h^{-1} é denominado **repulsor principal** de h será denotado por $-\xi$. Temos que $\mathbf{C}(-\xi)$ é a câmara oposta a $\mathbf{C}(\xi)$ em \mathbf{F} , sendo F o apartamento invariante por h .

O objetivo principal dessa seção é entender o comportamento da órbita de $\eta \in \partial_\infty(X)$ pela ação da isometria hiperbólica regular h .

Nossa primeira observação é que quando η está no apartamento invariante por h , ou seja $\eta \in \mathbf{F} = \partial_\infty(F)$, a ação de h em η é trivial e η é deixado fixo. Assim restringiremos nos ao caso $\eta \notin \mathbf{F}$ e consideraremos F' um apartamento contendo η e $-\xi$. Neste caso

temos:

$$h^k(\eta) \in \partial_\infty(h^k(F')) \setminus \partial_\infty(h^k(F)) = \partial_\infty(h^k(F')) \setminus \partial_\infty(F)$$

Para dar informações mais precisas sobre a órbita estudaremos o comportamento de alguns segmentos geodésicos que convergem para os pontos η e ξ . Nossa abordagem se dará prevalentemente no edifício euclidiano, obtendo os resultados concernentes ao edifício esférico "projetando os resultados no infinito". Começaremos por duas definições.

Definição 7.3 *Considere um apartamento $F \subset X$ e $(S_i)_{i=1}^k$ uma família finita de setores com o mesmo ponto base. No caso em que $\bigcup_{i=1}^k S_i$ seja um conjunto convexo de X , essa união é denominada **setor generalizado**.*

Definição 7.4 *Dado γ um segmento, raio, ou geodésica e $A \subset X$ um subconjunto do edifício euclidiano, definimos*

$$\gamma|_A := \{\gamma(t) : \gamma(t) \in A\}$$

Observamos que quando A é convexo (em particular se A é um apartamento), temos que $\gamma|_A$, se não for vazio, é um segmento, um raio ou uma geodésica.

Dado $S \subset F$ um setor generalizado, tal que $-\xi \in \partial_\infty(S)$ com $-\xi$ o repulsor principal de h , demonstraremos que $h^k S$ é uma família crescente de setores generalizados encaixantes, ou seja, $h^k(S) \subsetneq h^{k+1}(S)$.

Lema 7.5 *Seja h isometria hiperbólica regular, com ξ e $-\xi$ os atratores e repulsores principais, respectivamente. Seja F um apartamento contendo um eixo de h e $S \subset F$ um setor tal que $-\xi \in \partial_\infty(S)$. Então $h^k S$ é uma família crescente de setores encaixantes. Se x é um ponto no interior de S e γ uma geodésica iniciando em x e não inteiramente contida em S , então o comprimento do segmento de γ contido em $h^k(S)$, $L(\gamma|_{h^k(S)})$ cresce linearmente.*

Demonstração: Como F é invariante por h , e a restrição de h a F é uma isometria hiperbólica de um apartamento isométrico a \mathbb{R}^n , reduzimos o problema a uma situação euclidiana clássica na qual podemos considerar h uma translação de \mathbb{R}^n . E assim temos $L(\gamma|_{h^k(S)}) = kd(x_0, h(x_0))$ para qualquer $x_0 \in F$. \square

O lema abaixo nos caracteriza a interseção $S = F \cap F'$ de dois apartamentos que possuem uma câmara $\mathbf{C}(-\xi)$ em comum.

Lema 7.6 ([Bro], pág. 176) *A interseção de dois apartamentos F e F' é sempre um setor generalizado. (Podendo ser o setor generalizado vazio). Em particular, quando os apartamentos F e F' possuem uma câmara no infinito \mathbf{C} em comum, então $F \cap F'$ contém um setor S tal que $\partial_\infty(S) = \mathbf{C}$.*

Para dar informações mais precisas sobre a órbita $h^k(\eta)$ estudaremos o comportamento de alguns segmentos geodésicos que convergem para os pontos $h^k(\eta)$ e ξ . Dado x_0 um ponto no interior de S definimos o segmento geodésico $\gamma^k(t)$, como o segmento que inicia em x_0 e tal que $\gamma^k(\infty) = h^k(\eta)$.

Seguimos considerando apartamentos F e F' com $S = F \cap F'$ um setor generalizado.

Seja σ o raio geodésico passando por x_0 , que esta inteiramente contido em F , e que é paralelo ao segmento $\gamma^0|_F$. Um segmento inicial de σ coincide com um segmento inicial de γ^0 e em algum ponto estes se bifurcam como em uma árvore, σ prolongando-se em F e γ^0 prolongando-se em F' . O mesmo ocorre com a interseção de σ e γ^k , com a diferença que γ^k se prolonga em $h^k(F')$. O lema abaixo descreve o crescimento desta interseção:

Lema 7.7 *Sejam σ e γ^k como acima. Então, a interseção de σ e γ^k é um segmento geodésico cujo comprimento cresce linearmente.*

Demonstração: Por construção sabemos que $\gamma^0 \cap \sigma = \sigma|_S$.

Vamos mostrar que $\gamma^1 \cap \sigma = \sigma|_{h(S)}$.

Para tanto considere o segmento geodésico $h\gamma^0$. Esse segmento geodésico passa por $h(x_0)$ e por $h(\eta)$, e está contido em $h(F')$. Temos também que $h\gamma^0|_F$ é paralelo a σ , por ser imagem de γ^0 por uma translação.

Seja l a geodésica em $h(F')$ paralela a $h\gamma^0$ e que passe por x_0 . O segmento de $l|_F$ é paralelo a σ , ou seja, $\gamma^1 \cap \sigma = \sigma|_{h(S)}$. Como a interseção $\sigma(t) \cap \gamma^1(t)$ é igual a $\sigma|_S$, pelo lema anterior temos que essa cresce linearmente.

Usando o mesmo argumento temos que $\sigma(t) \cap \gamma^k(t) = \sigma|_{h^k(S)}$ e que essa interseção cresce linearmente, ou seja,

$$L(\sigma(t) \cap \gamma^k(t)) = L(\sigma(t) \cap \gamma^0(t)) + kd(x_0, h(x_0)), \forall x_0 \in F.$$

□

Com esses lemas em mãos, passaremos agora ao resultado principal. Para isso precisamos de um pouco de linguajar da teoria de Lie, que introduzimos no final do capítulo anterior.

Seja h uma isometria hiperbólica regular, F o apartamento invariante por h e ξ seu atrator principal. Seja $G = KAN$ a decomposição de Iwasawa definida por ξ e F , na qual $N\xi = \xi$ e $h \in A$.

Seja N^- o subgrupo nilpotente que fixa pontualmente $-\xi$. Todo ponto $\eta \in \partial_\infty X$ pode ser expresso como $\eta = nw_0\xi \in \partial_\infty X$, com $w_0 \in W$ (ou $w_0 \in M' := \{k \in K : kAk^{-1} = A\}$) e $n \in N^-$.

Proposição 7.8 *Seja um ponto $\eta = nw_0\xi \in \partial_\infty(F)$, sendo ξ o atrator principal da isometria hiperbólica regular h e $hF = F$. Então:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h^k nw_0\xi = w_0\xi$$

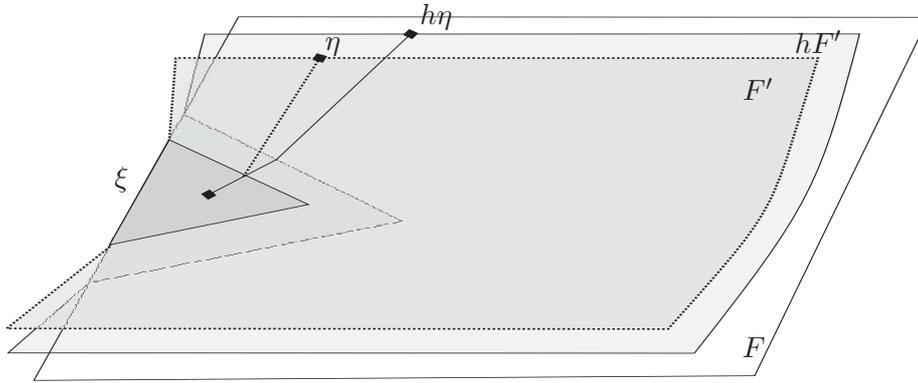
Considerando em \hat{X} a topologia de Busemann.

Demonstração: Dado $\eta = nw_0\xi$, sabemos (pelo axioma B1 dos edifícios de Tits) que existe um apartamento F' contendo η e $-\xi$. A interseção de F e F' é um setor generalizado contendo um setor S tal que $\partial_\infty(S) = \mathbf{C}(-\xi)$. Consideramos então o ponto $h^k(\eta)$. Este ponto está contido na fronteira no infinito do apartamento $h^k(F')$.

Seja x_0 um ponto no interior de $F \cap F'$. Definimos então o raio geodésico σ que inicia em x_0 e termina em $nw_0\xi$ e os raios geodésicos $\gamma_n(t)$ que ligam x_0 a $h^k(\eta)$. Os segmentos γ_n e σ coincidem na interseção dos apartamentos $F \cap h^k(F')$ que é crescente. Então pela Prop. 3.13, que caracteriza a convergência na topologia de Busemann, temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h^k nw_0\xi = w_0\xi$$

□



7.3 Controle de Semigrupos

Em toda esta seção, denotaremos por G um grupo de Lie sobre um corpo local simples, simplesmente conexo com a topologia de ultramétrica (G, τ_U) e $\mathcal{S} \subset G$ um semigrupo de interior não vazio.

Seja $\xi \in \partial_\infty(X)$ um ponto regular no edifício esférico e $C(\xi)$ a única câmara contendo ξ . Pelo Lema 6.18, podemos identificar biunívocamente as câmaras de $\partial_\infty(X)$ com pontos do flag maximal \mathbb{B} e assim, por abuso de notação, escreveremos que $\mathbf{C}(\xi) \in \mathbb{B}$, ou ainda que $\xi \in \mathbb{B}$.

Dado um ponto $\xi \in \mathbb{B}$, denotaremos por $B(\xi)$ a célula de Bruhat aberta contendo ξ (sec. 6.2.4).

Diferentemente do que ocorre no caso real, podemos ter semigrupos de interior não vazio que não contêm isometrias hiperbólicas.

Relembramos as seguintes propriedades já enunciadas em capítulos anteriores:

1. Um subgrupo é compacto maximal se, e somente se, a órbita de qualquer câmara no edifício euclidiano é limitada (Teorema 3.8 (Bruhat-Tits)).
2. Uma isometria é elíptica se, e somente se, a órbita de uma câmara é limitada.
3. Em um edifício euclidiano não existem isometrias parabólicas, pois a ação de G no edifício X é discreta (a estrutura simplicial é preservada e a imagem de câmara é câmara).

Proposição 7.9 *Dado $\mathcal{S} \subset G$ um semigrupo de interior não vazio de um grupo de*

Lie simples, simplesmente conexo sobre um corpo local. Se \mathcal{S} contém uma isometria hiperbólica de X , então \mathcal{S} contém uma isometria hiperbólica em seu interior.

Demonstração: Seja $g \in \text{int}(\mathcal{S})$, podemos supor que g é elíptica. Seja x um ponto fixo por g e K_x o subgrupo compacto maximal fixando x . Seja $\mathcal{S}_x := \{s \in \mathcal{S} : sx = x\}$ o semigrupo de \mathcal{S} fixando o ponto x , como $g \in \text{int}(\mathcal{S}) \cap \mathcal{S}_x \neq \emptyset$, temos que \mathcal{S}_x é um semigrupo de interior não vazio em K_x , o que implica pela compacidade de K_x que \mathcal{S}_x é um grupo (aberto) e que $g \in \mathcal{S}_x \subset \mathcal{S}$. Agora dada h uma isometria hiperbólica em \mathcal{S} temos que ghg^{-1} é uma isometria hiperbólica no interior de \mathcal{S} . \square

Proposição 7.10 *Dado $\mathcal{S} \subset G$ um semigrupo de interior não vazio de um grupo de Lie simples simplesmente conexo sobre um corpo local, se \mathcal{S} contém apenas isometrias elípticas, então \mathcal{S} é um grupo aberto.*

Demonstração: Seja $g \in \text{int}(\mathcal{S})$, como g é elíptica pelo argumento apresentado no lema anterior temos que $g^{-1} \in \mathcal{S}$. Logo temos que $\text{int}(\mathcal{S})$ é um grupo. Seja então um elemento qualquer $s \in \mathcal{S}$, então para todo $g \in \text{int}(\mathcal{S})$ temos $gs \in \text{int}(\mathcal{S})$ logo $s^{-1}g^{-1} \in \text{int}(\mathcal{S})$ e logo $s \in \text{int}(\mathcal{S})$. \square

A existência de uma isometria hiperbólica regular em $\text{int}(\mathcal{S})$, quanto $\text{int}(\mathcal{S}) \neq \emptyset$, deve se a argumentos de dimensão típicos. Seja $h \in \text{int}(\mathcal{S})$. Pela proposição 6.11 temos que as isometrias hiperbólicas fixando um apartamento são os elementos de um toro maximal T , associado ao edifício esférico. Seja T um toro maximal contendo h . Porém como os elementos regulares T_R formam um conjunto aberto e denso do toro ([Bo], pág 286) e $h \in \text{int}(\mathcal{S}) \cap T$ temos que $\text{int}(\mathcal{S}) \cap T_R \neq \emptyset$. E logo podemos escolher uma isometria hiperbólica regular no interior de \mathcal{S} .

Não trataremos o caso \mathcal{S} é um subgrupo de G . De modo mais explícito, assumiremos daqui por diante que $\mathcal{S} \subset G$ é um semigrupo de interior não vazio contendo uma isometria hiperbólica, e que \mathcal{S} não é grupo.

Seja então $h \in \text{int}(\mathcal{S})$ uma isometria hiperbólica regular e η o seu atrator principal.

Lema 7.11 *Para todo ponto $\xi \in \mathbb{B}$ existe um $g \in \mathcal{S}$ com $g\xi \in B(\eta)$.*

Demonstração: A demonstração segue de imediato do fato de $B(\eta)$ ser aberto e denso em \mathbb{B} (6.17). Sejam $\xi \in \mathbb{B}$ e $A \subset \text{int}(\mathcal{S})$ um aberto. Então, temos que $A\xi$ é aberto e logo intercepta a célula de Bruhat $B(\eta)$ que é densa (e aberta) em \mathbb{B} , ou seja, $\exists g \in \text{int}(\mathcal{S})$ tal que $g\xi \in B(\eta)$. \square

A variedade bandeira \mathbb{B} ([Ma, pág. 55]) é um espaço compacto e desta forma, pelo teorema 1.14, temos a existência de conjuntos de controle invariantes. O teorema abaixo prova a unicidade do conjunto de controle invariante em \mathbb{B}

Teorema 7.12 *Seja $\mathcal{S} \subset G$ um semigrupo com $\text{int}(\mathcal{S}) \neq \emptyset$. Então existe um único conjunto de controle invariante em \mathbb{B} para \mathcal{S} .*

Demonstração: Vamos provar que existe um elemento η tal que $\eta \in \text{cl}(\mathcal{S}\xi)$ para todo $\xi \in \mathbb{B}$ ou seja, $\eta \in \bigcap_{\xi \in \mathbb{B}} \text{cl}(\mathcal{S}\xi)$. Pelo lema anterior podemos supor que $\xi \in B(\eta)$. Seja η tal que existe isometria hiperbólica regular h que tem η como atrator principal. Temos então que $\lim_{k \rightarrow \infty} h^k(\xi) = \eta$, para todo $\xi \in B(\eta)$ e logo $\eta \in \text{cl}(\mathcal{S}\xi)$ para todo ξ . Agora pelo Teorema 1.15 temos a existencia do conjunto de controle invariante. \square

Denotaremos por D o único conjunto de controle invariante em \mathbb{B} e por D_0 o seu conjunto de transitividade.

Tendo determinado a unicidade do conjunto de controle invariante vamos agora caracterizar todos os conjuntos de controles em \mathbb{B} .

Definimos

$$\Sigma = \{h \in \text{int}(\mathcal{S}) : h \text{ é isometria hiperbólica regular}\}$$

Dado uma isometria hiperbólica regular h , temos um único apartamento que contém o eixo desta isometria e uma única decomposição de Iwasawa associada $G = KAN$. O conjunto de câmaras no edifício esférico fixas por h está em bijeção com W , de modo que podemos associar a cada uma destas câmaras um w -tipo. Observamos que o w -tipo depende da escolha de h .

Denotaremos por $b(h, w)$ o ponto fixo para h do tipo w .

Proposição 7.13 *Seja $(D_1)_0 := \{b(h, 1) : h \in \Sigma\}$. Então $(D_1)_0 = D_0$.*

Demonstração: Como $(D_1)_0$ é o conjunto dos atratores principais temos que $(D_1)_0 \subset D_0$. Para demonstrarmos a outra inclusão, consideremos $\eta = b(h, 1) \in D_0$ com $h \in \text{int}(\mathcal{S})$ uma isometria regular. Dado um ponto qualquer $\xi \in D_0$ temos que existem $s_1, s_2 \in \text{int}(\mathcal{S})$ tal que $s_1\eta = \xi$ e $s_2\xi = \eta$, pois D_0 é conjunto de transitividade de D . Seja então $h_2 = s_1h^ns_2$. O próximo lema demonstra que $s_1h^ns_2$ é uma isometria hiperbólica regular para n suficientemente grande \square

Proposição 7.14 *Dado h isometria hiperbólica regular com atrator principal ξ e s_1, s_2 tais que $s_2s_1 \in P(\xi)$, $P(\xi)$ o subgrupo parabólico que estabiliza ξ , então para n suficientemente grande, $s_1h^ns_2$ é uma isometria hiperbólica regular.*

Demonstração: Seja $g = s_2s_1$, temos assim que $s_1h^ns_2 = s_1h^ngs_1^{-1}$. Desta forma é suficiente provarmos que h^ng é hiperbólica para g isometria fixando ξ , o atrator principal de h .

Para isso seja F o flat invariante por h e $F' = gF$, S um setor em $F \cap F'$ e $S_2 = g^{-1}S \cap S$. Por construção temos que $gS_2 \subset S$.

Como S_2 e gS_2 são setores em F contendo ξ , temos, para n suficientemente grande, que $h^ngS_2 \subset S_2$, ou seja h^ng é uma isometria hiperbólica regular. \square

Teorema 7.15 *Para cada $w \in W$ existe um conjunto de controle D_w em \mathbb{B} , cujo conjunto de transitividade é*

$$(D_w)_0 = \{b(h, w) : h \in \Sigma\}$$

e esses são todos os conjuntos de controle em \mathbb{B} .

Demonstração: Provaremos o teorema através de três passos.

No primeiro demonstraremos que para todo conjunto de controle D' existe $b(h, w) \in D'$, e um ponto fixo do tipo w , para algum $w \in W$, com $h \in \Sigma$.

No segundo demonstraremos que dados $w \in W$, $h_1, h_2 \in \Sigma$, e dois pontos do mesmo w -tipo $\xi = b(h_1, w)$ e $\eta = b(h_2, w)$, então cada um deles pode ser atingido a partir do outro por elementos em \mathcal{S} , no sentido que $\xi \in \text{cl}(\mathcal{S}\eta)$ e $\eta \in \text{cl}(\mathcal{S}\xi)$. Desta forma teremos, pela Proposição 1.16 que $(D_w)_0$ é o conjunto de transitividade de um conjunto de controle.

E finalmente demonstraremos que $(D_w)_0 := \{b(h, w) : h \in \Sigma\}$ é todo o conjunto de transitividade de D_w .

(1) Dado um conjunto de controle qualquer D' , e $\eta \in D'$, seja P o grupo de isotropia de η . Temos que $P \cap \text{int}(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ se $\eta \in D'_0$. Considerando a decomposição de Iwasawa, temos que $P = MAN^+$ de modo que o subconjunto

$$\sigma = \{m \in M : \exists hn \in AN^+ \text{ com } mhn \in \text{int}(\mathcal{S})\}$$

é um semigrupo com interior não vazio em M porque M normaliza AN . Como M é compacto temos que σ é um subgrupo contendo a componente da identidade de M . Logo $\text{int}(\mathcal{S}) \cap AN^+ \neq \emptyset$, e desta forma temos uma isometria hiperbólica regular $g \in \text{int}(\mathcal{S})$ e tal que $g\eta = \eta$. Em particular, temos que η é ponto fixo do tipo w para g .

(2) Dados dois pontos $\xi = b(h_1, w)$ e $\eta = b(h_2, w)$, se $b(h_1, 1) = b(h_2, 1)$, temos que $b(h_1, w)$ está na mesma célula de Bruhat de $b(h_2, w)$ (considerando a decomposição em células a partir de $b(h_2, 1)$), e logo pela Proposição 7.8 temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} (h_2)^n b(h_1, w) = b(h_2, w)$. Se $b(h_1, 1) \neq b(h_2, 1)$, a Proposição 7.13 nos garante que existe $s_1 \in \mathcal{S}$, tal que $s_1 b(h_1, 1) = b(h_2, 1)$, pois $(D_1)_0$ é conjunto de transitividade, e assim reduzimos ao caso anterior.

(3) Provaremos que dado um conjunto de controle D' seu conjunto de transitividade é $(D_w)_0$ para algum w . Para isso seja $\eta = b(g, w) \in D'$ o atrator do tipo w em D' cuja existência é garantida por (1).

Dado um ponto qualquer $\xi \in D'_0$, temos que existem $s_1, s_2 \in \text{int}(\mathcal{S})$ tais que $s_1 \eta = \xi$ e $s_2 \xi = \eta$, pois D'_0 é conjunto de transitividade de D . Seja então $h_2 = s_1 g^n s_2$.

Consequentemente, temos que $s_1 h_1^n s_2$ é uma isometria hiperbólica regular e que $\xi = b(s_1 h_1^n s_2, w_1)$. Logo D_w é o conjunto de transitividade. \square

7.3.1 Subgrupo $W(\mathcal{S})$

Demonstramos na seção anterior que todo conjunto de controle invariante de \mathcal{S} em \mathbb{B} é da forma D_w para algum $w \in W$. Queremos caracterizar os conjuntos de controle D_w que coincidem. Para isso definimos

$$W(\mathcal{S}) = \{w \in W : D_w = D_1\}$$

O grupo $W(\mathcal{S})$ é definido a partir da escolha de uma câmara \mathbf{C}^+ no apartamento $\mathbf{F} \subset \partial_\infty(X)$. Mas, por abuso de notação escrevemos $W(\mathcal{S})$ ao invés de $W(\mathcal{S}, \mathbf{C}^+)$. Tomando uma câmara $\mathbf{C}_1^+ = g\mathbf{C}^+$, temos que w age em \mathbf{C}_1^+ como o elemento do grupo de Weyl obtido por conjugação por g .

$$w \in W(\mathcal{S}, \mathbf{C}^+) \Leftrightarrow gwg^{-1} \in W(\mathcal{S}, g\mathbf{C}^+).$$

Logo a conjugação por g define um isomorfismo entre os grupos $W(\mathcal{S}, \mathbf{C}^+)$ e $W(\mathcal{S}, g\mathbf{C}^+)$. Esse isomorfismo não depende do g específico que leva \mathbf{C}^+ em $g\mathbf{C}^+$, pois elementos distintos diferem por um elemento que fixa pontualmente a câmara \mathbf{C}^+ .

Nesta seção $b_0 \in \mathbb{B}$ será sempre a imagem da câmara \mathbf{C}^+ a partir da qual definimos $W(\mathcal{S})$.

Lema 7.16 *Dado $b_0 \in (D_1)_0$ então são equivalentes:*

1. $w \in W(\mathcal{S})$;
2. $\tilde{w}b_0 \in (D_1)_0$, sendo \tilde{w} um representante qualquer de w em M^* , e $W = M^*/M$.

Demonstração: Sejam $b_0 \in (D_1)_0$, $w \in W(\mathcal{S})$, com \tilde{w} um representante qualquer de w em M^* . Temos que $\tilde{w}b_0 \in (D_w)_0$ pela caracterização de D_w . Ou seja, $\tilde{w}b_0 \in (D_w)_0 = (D_1)_0$. Para demonstrarmos a recíproca, seja $w \in W(\mathcal{S})$, temos por definição que $D_w = D_1$, o que é equivalente à $(D_w)_0 = (D_1)_0$. Mas $(D_w)_0 = \{b(h, w) : h \in \Sigma\}$ e logo $wb_0 \in (D_w)_0$. \square

Proposição 7.17 *$W(\mathcal{S})$ é um subgrupo de W .*

Demonstração: Seja $b \in (D_1)_0$. Sejam w_1 e $w_2 \in W(\mathcal{S})$ e sejam \tilde{w}_1 e \tilde{w}_2 seus representantes em M^* . Pelo Lema 7.16 $\tilde{w}_1b \in (D_1)_0$. Usando novamente o Lema 7.16 para \tilde{w}_1b temos que $(\tilde{w}_1\tilde{w}_2(\tilde{w}_1)^{-1})\tilde{w}_1b \in D_0$ o que implica $\tilde{w}_1\tilde{w}_2b \in D_0 \Rightarrow W(\mathcal{S})$ é um semigrupo de W , sendo W finito $W(\mathcal{S})$ é um subgrupo. \square

Vamos demonstrar em seguida que $W(\mathcal{S})$ não é apenas um subgrupo do grupo W , mas um subgrupo de Weyl de w , ou seja, $W(\mathcal{S}) = W_\Theta$ para algum subconjunto Θ de raízes simples.

Antes de passarmos à demonstração introduziremos um pouco de notação. Dado F um flat e x_0 um ponto base em F , associaremos a cada isometria hiperbólica h um vetor :

$$v_h = h(x_0) - x_0,$$

e denotaremos por $V_H := \{v_h : h \in H\}$. Temos uma ação de \mathbb{Z} em V_H :

$$nv_h = v_{h^n}$$

que com a adição definida de modo usual torna V_H um \mathbb{Z} módulo.

Dado $H' \subset H$ um subconjunto das isometrias hiperbólicas, podemos definir o espaço vetorial gerado por $v_h, \langle v_h : h \in H' \rangle$. Como a ação de W_{aff} é irredutível temos que $F = \langle v_h : h \in H \rangle$

Teorema 7.18 $W(\mathcal{S}) = W_\Theta$, para algum $\Theta \subset \Pi$

Demonstração: Seja $\mathbb{H} = \{h \in \text{int}(\mathcal{S}) : W(\mathcal{S})h = h\}$.

Suponha que $\mathbb{H} \neq \emptyset$ e seja $\hat{h} \in \mathbb{H}$ uma isometria de regularidade máxima em \mathbb{H} , e Θ o seu tipo. Provaremos que $W(\mathcal{S}) = W_\Theta$ provando que $W(\mathcal{S})$ age transitivamente em $\mathcal{C}_h = \{\text{câmaras que possuem } \hat{h} \text{ como parede}\}$.

Como $\hat{h} \in \text{int}(\mathcal{S})$ temos que existe $h_{\mathbf{C}} \in \text{int}(\mathcal{S})$, tal que $h_{\mathbf{C}}$ uma isometria hiperbólica regular que tem a câmara $\mathbf{C} \in \mathcal{C}_h$ como atrator principal.

Assim todas as câmaras $\mathbf{C} \in \mathcal{C}_h$ pertencem ao conjunto de transitividade do conjunto de controle invariante em \mathbb{B} e desta forma \mathcal{S} age transitivamente em \mathcal{C}_h .

Se $\mathbb{H} = \emptyset$ demonstraremos que $W = W(\mathcal{S})$. Para tanto, seja \mathbf{C} uma câmara em D_0 , o conjunto de transitividade do conjunto de controle invariante em \mathbb{B} , e h uma isometria hiperbólica real que tem \mathbf{C} como atrator principal.

Por notação denotaremos $h_w = wh^n$. Temos que todas as isometrias h_w são hiperbólicas regulares para n suficientemente grande. Considere agora o cone K e o reticulado $K_{\mathbb{N}}$ definidos como segue:

$$K = \left\{ \sum_{w \in W} a_w v_{h_w} : a_w \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

$$K_{\mathbb{N}} = \left\{ \sum_{w \in W} a_w v_{h_w} : a_w \in \mathbb{N} \right\}$$

A primeira observação é que K é um espaço vetorial, pois a ausência de pontos fixos implica que $v_{h^1} + \dots + v_{h^w} = 0$. E como a ação de W é irredutível e $W(\mathcal{S}) \subset W$ age sem pontos fixos temos que C é todo o apartamento F .

Como $K_{\mathbb{N}} \subset \text{int}(\mathcal{S})$ é um reticulado em K temos que dado uma câmara $\mathbf{C} \in \partial_{\infty}(F)$ existe isometria hiperbólica $h' \in K_{\mathbb{N}} \subset \text{int}(\mathcal{S})$, tal que h' tem \mathbf{C} como câmara atratora, e desta forma temos que $W(\mathcal{S})$ age transitivamente nas câmaras de $\partial_{\infty}(F)$. Mas, como W age simplesmente transitivo nas câmaras de $\partial_{\infty}(F)$, temos que $W(\mathcal{S}) = W$. \square

Observação 7.19 *De forma análoga ao caso real temos que as isometrias hiperbólicas que fixam um apartamento estão em bijeção com os elementos de um toro maximal A (proposição 6.11). e as isometrias regulares T_R formam um conjunto aberto ([Bo], pág 286).*

A aplicação $w \rightarrow D_w$ definida no teorema de caracterização dos $(D_w)_0$ não é necessariamente bijetiva. O teorema abaixo nos diz que podemos parametrizar os conjuntos de controle pelas classes laterais $W(\mathcal{S}) \backslash W$.

Teorema 7.20 $D_{w_1} = D_{w_2}$ se, e somente se, $w_1 w_2^{-1} \in W(\mathcal{S})$. Logo os conjuntos de controles efetivos para \mathcal{S} em \mathbb{B} estão em bijeção com $W(\mathcal{S}) \backslash W$.

Demonstração: Na verdade demonstraremos que $(D_{w_1})_0 = (D_{w_2})_0$ se, e somente se, $w_1 w_2^{-1} \in W(\mathcal{S})$.

(\Rightarrow) Seja $b_0 \in D_0 = (D_1)_0$. Pela caracterização dos conjuntos de transitividade, temos que $\tilde{w}_1 b_0 \in (D_1)_0$, e por hipótese temos $(D_{w_1})_0 = (D_{w_2})_0$, e desta forma como $\tilde{w}_1 b \in (D_{w_2})_0$ temos, pela definição de $(D_{w_2})_0$ e por conjugação, que $(\tilde{w}_1 \tilde{w}_2 (\tilde{w}_1)^{-1})^{-1} \tilde{w}_1 b \in D_0$, o que implica $(\tilde{w}_2)^{-1} \tilde{w}_1 \in W(\mathcal{S})$.

(\Leftarrow) Seja $b' = \tilde{w}_1 b_0 \in (D_1)_0$. Temos que $(\tilde{w}_2)^{-1} b' \in D_0$, pois por hipótese $w_2^{-1} w_1 \in W(\mathcal{S})$. Assim, temos que $(\tilde{w}_1 \tilde{w}_2 (\tilde{w}_1)^{-1})^{-1} \tilde{w}_1 b_0 \in D_0$ e desta forma $b' \in (D_{w_2})_0$ pela definição de $(D_{w_2})_0$. \square

Apêndice A

Os edifícios de $Sl_n(\mathbb{Q}_p)$

A.1 O edifício esférico

A construção do edifício esférico para Sl_n pode ser feita sobre um corpo arbitrário k .

Realizaremos essa construção de maneira geométrica, exibindo o edifício esférico associado. Uma demonstração alternativa seria verificar que B e N satisfazem os axiomas de Pares BN .

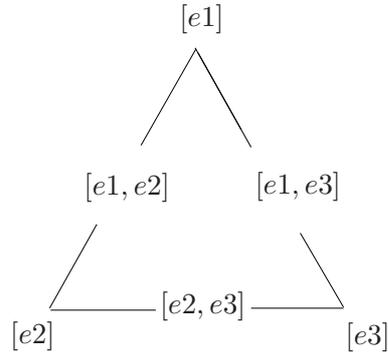
A estrutura simplicial do edifício A_{n-1}

Dado V um espaço vetorial de dimensão finita maior que 2. A geometria projetiva associada a V consiste nos espaços próprios não triviais de V , com dois deles ditos incidentes se um deles contiver o outro.

Um referencial em V é um conjunto $\mathcal{F} = \{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ de subspaços unidimensionais tais que $V = L_1 \oplus \dots \oplus L_n$. Seja $V' \subset V$ próprio tal que V' é gerado por um subconjunto próprio não vazio de \mathcal{F} . Nosso edifício Δ será o complexo de bandeiras dessa geometria.

Seja $\Sigma = \Sigma(\mathcal{F})$ um subcomplexo de Δ consistindo das bandeiras de V' . Um subcomplexo Σ desta forma é um apartamento

As câmaras C serão as bandeiras maximais, como por exemplo C_0 é a bandeira $[e_1] \subset [e_1, e_2] \subset \dots \subset [e_1, \dots, e_{n-1}]$



Cada apartamento é um complexo de Coxeter do tipo A_{n-1} .

Uma demonstração direta que a construção acima constitui um edifício, pode ser obtida a partir do Teorema de Jordan Hölder.

Pares BN

O estabilizador da câmara C_0 é o grupo das matrizes triangulares superiores em $Sl_n(k)$.

Seja Σ_0 o complexo de bandeiras de $V' = \langle e_1, e_2, \dots, e_{n-1} \rangle$, temos que o estabilizador desse apartamento é o subgrupo monomial de $Sl_n(k)$.

Neste caso $T = B \cap N$ é o subgrupo das matrizes diagonais e N/T pode ser identificado com o grupo de permutação de n letras S_n .

A.2 O edifício euclidiano de $Sl_n(k)$

Pares BN

Quando k é um corpo de valoração discreta podemos construir um edifício euclidiano a partir de $Sl_n(k)$. Uma das formas de realizar esta construção é exibindo um par **BN** apropriado. Para esta construção usaremos o diagrama usual para corpos de valoração discreta:

$$\begin{array}{c} A \hookrightarrow k \\ \downarrow \\ \hat{k} \end{array}$$

Sendo A o anel de valoração e \hat{k} o corpo resíduo $A/\pi A$

Temos como consequência o seguinte diagrama de matrizes:

$$\begin{array}{ccc} Sl_n(A) & \hookrightarrow & Sl_n(k) \\ \downarrow & & \\ Sl_n(k) & & \end{array}$$

Para construirmos o par **BN** escolheremos B como a imagem inversa das matrizes triangulares superiores em $Sl_n(k)$, assim B é um subgrupo de $Sl_n(A)$ que contém as matrizes triangulares superiores de $Sl_n(A)$. Escolheremos N como o subgrupo monomial de $Sl_n(k)$. Consequentemente $T = B \cap N$ é o subgrupo das matrizes diagonais.

Para darmos uma caracterização de $W = N/T$ precisaremos de um pouco mais de notação: no que se segue para um anel comutativo R entenderemos $N(R)$ e $T(R)$ respectivamente o subgrupo monomial e o subgrupo diagonal de $Sl_n(R)$. Definiremos

$$\overline{W} = N(k)/T(k)$$

O subgrupo \overline{W} pode ser identificado com o grupo de permutação de n letras S_n .

Claramente \overline{W} é o quociente de W com kernel $F = T(k)/T(A)$, ou seja, temos a sequência exata curta:

$$1 \rightarrow F \rightarrow W \rightarrow \overline{W} \rightarrow 1$$

Como $N(A)/T(A) \subset W$ é levado isomorficamente em \overline{W} temos que a sequência acima splita e logo:

$$W \simeq F \rtimes \overline{W}$$

Como $F = T(k)/T(A) = \frac{k^n}{A^n} = Z^n$ e assim:

$$W \simeq Z^n \rtimes S_n$$

Logo W é um grupo de Coxeter afim, e desta forma, temos um edifício euclidiano associado a $Sl_n(Q_p)$, que denotaremos $\tilde{A}_{n-1}(k, v)$.

A estrutura simplicial do edifício $\tilde{A}_{n-1}(k, v)$

Nesta seção apresentaremos a estrutura de incidência do edifício euclidiano $\tilde{A}_{n-1}(k, v)$.

Dado V um espaço vetorial de dimensão n sobre k , um reticulado em V é um A submódulo $L \subset V$ da forma $L = Ae_1 \oplus \dots \oplus Ae_n$ para alguma base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V .

Teorema A.1 *Dados dois reticulados L e L' , existe uma base $\{g_1, \dots, g_n\}$ para L tal que L' admite a base $\{\lambda_1 g_1, \dots, \lambda_n g_n\}$ com $\lambda_i \in k^*$.*

Diremos que dois reticulados são equivalentes se $L = \lambda L'$ para $\lambda \in k^*$. As classes de equivalência serão denotadas pelas respectivas letras gregas. Duas classes (de equivalência) de reticulados são incidentes se existirem representantes que satisfaçam:

$$L \subset L' \subset \pi L$$

O conjunto de vértices do complexo Δ é definido como as classes de equivalência de reticulados e a relação de incidência nos vértices como definida acima.

Os simplexes são dados por conjuntos de vértices dois a dois incidentes. Tais vértices podem ser escritos como conjunto $[L_1], \dots, [L_j]$ satisfazendo:

$$L_1 \supset L_2 \supset \dots \supset L_j$$

Pode-se demonstrar que os simplexes maximais têm n vértices.

Os apartamentos serão o subcomplexo de Δ com todos as classes da forma $\langle \pi^{r_1} e_1, \dots, \pi^{r_n} e_n \rangle_A$. Se definirmos $r = r_1 + \dots + r_n$. Teremos então que $r \bmod(n)$ é constante

Observe que cada $[L]$ é equivalente a um conjunto de enuplas da forma (r_1+t, \dots, r_n+t) para $t \in Z$. Assim vamos associar a cada classe $[L]$ uma enupla real

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ com } x_i = r_i - \frac{r}{n}$$

Desta forma (x_1, x_2, \dots, x_n) é um ponto em R^n que pertence ao hiperplano $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$.

Claramente o conjunto destes pontos são invariantes por trocar x_i por x_{i+1} e por trocar x_n por $x_1 + 1$ e x_1 por $x_n - 1$, ou seja, os pontos x são os vértices do complexo de Coxeter.

Os resíduos em cada vértice são iguais ao número de elementos de k .

Apêndice B

Exemplos de semigrupo de interior não vazio.

Nesta seção construiremos um semigrupo (que não é grupo) de interior não vazio para todo grupo algébrico sobre um corpo local. Na próxima seção trataremos em detalhes o caso $Sl(n, \mathbb{Q}_p)$. Nosso exemplo será construído essencialmente utilizando a axiomática de pares **BN**.

Relembramos que, posteriormente a Tits, é conhecido que dado G , um grupo algébrico sobre os p -ádicos, então existem subgrupos B (subgrupo parahólico) e N que formam um par **BN** associados a um edifício **euclidiano**. O subgrupo B é compacto e de interior não vazio em G . Definimos o toro $T = B \cap N$, o grupo de Weyl $W = N/T$ e escolhemos um conjunto de geradores S para W . Então valem:

1. W, S é um Complexo de Coxeter euclidiano.
2. BN geram G
3. $G = \bigsqcup_w BwB$
4. $BwB \circ BvB = BwvB$ se $l(wv) = l(w) + l(v)$
5. Seja $s \in S$, então $BwB \circ BsB = BwB \bigsqcup BwsB$ se $l(ws) < l(w)$
6. $sBs^{-1} \not\subseteq B$

Vale ressaltar que $W = \overline{W} \rtimes \mathbb{Z}^n$, sendo \overline{W} um grupo de Coxeter finito.

Sejam $s \in W \setminus \overline{W}$ uma translação e \mathbf{S} o semigrupo gerado por s .

Proposição B.1 *O semigrupo gerado por \mathbf{S} e B , denotado por $\langle \mathbf{S}, B \rangle$ é um semigrupo de interior não vazio que não é um grupo.*

Demonstração: Todo elemento $z \in \langle \mathbf{S}, B \rangle$ admite uma representação na forma $z = s^{n_1} b_1 \dots s^{n_k} b_k$ para algum k , e com $n_j \in \mathbb{N} \cup 0$.

Quando $l(ss) = l(s) + l(s)$, temos a seguinte igualdade para o produto de classes duplas: $BsB \circ BsB = Bs^2B$. Logo a representação de z pode ser simplificada. Após sucessivas simplificações temos que qualquer elemento $z \in S$, pode ser representado na forma:

$$z = b'_1 s^m b'_2,$$

consequentemente o elemento s não possui inverso, pois se possuísse teríamos que $sb'_1 s^m b'_2 = 1$, o que implicaria em $b'_1 s^m b'_2 = 1$, ou seja, $s^m = (b'_1)^{-1} (b'_2)^{-1}$, para algum b'_1, b'_2 . O que é absurdo. \square

Falta demonstrarmos que $BwB \circ BvB = BwvB$ se $l(wv) = l(w) + l(v)$. Sabemos que se $l(ws) > l(w)$ então $BwB \circ BsB = BwsB$, se s é um gerador. Provaremos nossa afirmação por indução no tamanho da palavra v . Para isso seja $s_1 \dots s_n$ uma palavra de tamanho mínimo representando v . Temos, assim, que

$$Bws_1 \dots s_{n-1} B \circ Bs_n B = Bws_1 \dots s_n B$$

pois $l(ws_1 \dots s_n) > l(ws_1 \dots s_{n-1})$.

Apêndice C

Exemplo de Semigrupo de $Sl(2, k)$

Nesta seção trabalharemos com o corpo dos p -ádicos, $k = \mathbb{Q}_p$.

Seja B o parahólico minimal de $Sl(2, k)$. Esse parahólico é compacto e tem interior não vazio. Sua forma matricial é:

$$B = \begin{pmatrix} v = 0 & v \geq 0 \\ v \geq 1 & v = 0 \end{pmatrix}$$

na qual $v = 0$, $v \geq 0$ e $v \geq 1$ denota que as entradas são todos os p -ádicos de valoração zero, não negativa e maior que 1, respectivamente.

Seja t o gerador canônico da parte translacional do grupo de Weil afim, ou seja,

$$t = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix}$$

Calculando $t^n B$ para $n \geq 0$, temos que

$$t^n B = \begin{pmatrix} v = n & v \geq n \\ v \geq 1 - n & v = -n \end{pmatrix}$$

e para $n \geq 1$ que

$$Bt^n B = \begin{pmatrix} v \geq 1 - n & v \geq -n \\ v \geq 1 - n & v = -n \end{pmatrix}$$

Com essa expressão em mão é fácil verificar, através do produto matricial, que $Bt^n B \circ Bt^m B \subset Bt^{n+m} B$.

Denotaremos por \mathfrak{B}^0 o parahólico B e por $\mathfrak{B}^n = Bt^nB$. Definimos o semigrupo $S = \bigsqcup_{n \geq 0} \mathfrak{B}^n$. Na seção anterior demonstramos, usando a axiomática de pares BN e o edifício euclidiano, que S é um semigrupo de interior não vazio. Uma demonstração mais elementar desse fato pode ser obtida da forma explícita de S que acabamos de obter. Se $s \in S = \bigsqcup_{n \geq 0} \mathfrak{B}^n$, temos que a entrada s_{22} da matriz de s tem valoração negativa. Deste modo t^{-1} não pertence a S e logo t não possui inversa em S .

C.1 Ação de $Sl(2, k)$ no espaço Vetorial k^2 .

Nos cálculos seguintes, usamos repetidamente a seguintes propriedades da valoração:

Observação C.1 Se $v(a) \neq v(b)$ então $v(a + b) = \min \{v(a), v(b)\}$,

Observação C.2 Se $v(a) = v(b)$ então $v(a + b)$ pode assumir qualquer valor maior que $\min \{v(a), v(b)\}$. Em particular $v(ax + by)$ com $v(x) = v(y) = 1$ assume todos valores maiores que $\min \{v(a), v(b)\}$.

Seja em k^2 , o subconjunto

$$M = \{(x, y) : v(x) \geq v(y)\}$$

O conjunto M é fechado por multiplicação por escalares e por soma, por tanto é um cone.

Seja \widehat{S} o semigrupo de compressão de M , ou seja, o semigrupo de $Sl(2, k)$ que deixa M invariante. Vamos calcular explicitamente \widehat{S} . Para tanto, seja $s \in \widehat{S}$, com forma matricial

$$s = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Como

$$s \cdot (x, y) = (ax + by, cx + dy)$$

e $S \cdot M \subset M$, concluímos que

$$v(ax + by) \geq v(cx + dy)$$

para qualquer $(x, y) \in M$.

Em particular tomando $x = 0$ e $y = 1$ concluímos que $v(b) \geq v(d)$

Exigindo que $v(x) = v(y)$ em C.1 concluímos que $v(c) \neq v(d)$, pois do contrário escolhendo x, y apropriados teríamos que $v(cx + dy)$ poderia ser qualquer inteiro maior que $\min\{v(c), v(d)\}$, o que nos levaria a um absurdo, pois contradizeria C.1. Usando o mesmo raciocínio para $v(x) = v(y) + n$, com n positivo, concluímos que $v(c) + n \neq v(d)$, para $n \geq 0$, ou seja $v(c) > v(d)$.

Como $v(b) > v(d)$ tomando $v(x) = y = 1$, teremos que $v(xa + b) \geq v(d)$, se e somente se $v(a) \geq v(d)$.

Denotando por $m = v(d)$, temos as seguintes condições para s

$$\begin{pmatrix} v \geq m & v \geq m \\ v \geq m + 1 & v = m \end{pmatrix}$$

Não usamos ainda a condição que as matrizes pertencem a $Sl(2, k)$. Essa restrição impede que $m > 0$ pois do contrário teríamos que $v(\det(s)) > 0$.

Se $m = 0$, a condição $\det(s) = 1$, implica que

$$s = \begin{pmatrix} v = 0 & v \geq 0 \\ v \geq 1 & v = 0 \end{pmatrix}$$

Se $m > 0$, a condição $\det(s) = 1$, impõem $v(a) \geq m + 1$ e assim

$$s = \begin{pmatrix} v \geq m + 1 & v \geq m \\ v \geq m + 1 & v = m \end{pmatrix}$$

Ou seja, o semigrupo de compressão \widehat{S} do conjunto M é o semigrupo de interior não vazio S .

Observamos que a condição $v(x) \geq v(y)$ não se altera se multiplicarmos por um escalar $k \in k^*$. Deste modo podemos considerar a projeção de M sobre a linha projetiva $P^1(k)$.

Seja $\pi : k^2 \rightarrow P^1(k)$ a projeção que leva um vetor (x, y) na sua classe de equivalência na linha projetiva e seja $\widehat{M} = \pi(M)$. Como consequência de M ser o conjunto de controle em k^2 , temos que a ação induzida de $Sl(2, k)$ em $P^1(k)$ tem como conjunto de controle \widehat{M} .

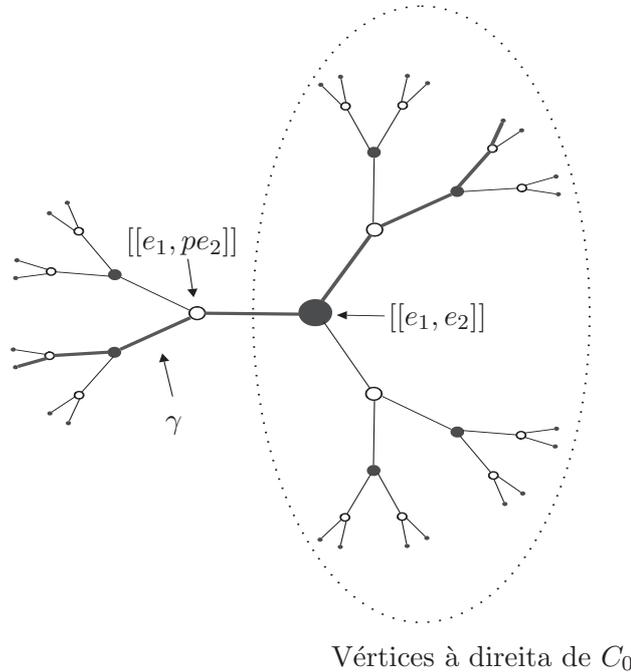
C.2 Ação de $Sl(2, k)$ na árvore

Para $Sl(2, k)$ o edifício euclidiano associado ao grupo é uma árvore homogênea (regular) X com $p + 1$ arestas em cada vértice.

Seja $\{e_1, e_2\}$ base canônica de k^2 . Consideramos $[[e_1, e_2]]$ a classe de equivalência associada ao reticulado gerado por estes elementos, conforme definido em A.2. Definimos uma câmara fundamental C_0 como sendo a aresta que tem $[[e_1, e_2]]$ e $[[e_1, pe_2]]$ como vértices. A ação de B na árvore fixa a câmara fundamental C_0 . Os axiomas de pares **BN** implicam que a ação de B é transitiva nos apartamentos que contém C .

A ação da translação $t = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix}$ deixa invariante a reta γ que contém os vértices $[[p^a e_1, p^b e_2]]$ com $a, b \in \mathbb{Z}$. ([Bro, pág. 133])

Os vértices $[[a, b]]$ que estão mais próximos de $[[e_1, e_2]]$ do que $[[e_1, pe_2]]$, são os que satisfazem $v(a) \geq v(b)$. Ressaltamos que a condição $v(a) \geq v(b)$ independe da escolha do representante da classe de equivalência. Diremos de maneira ingênua que estes são os vértices do lado direito da câmara C_0 , e denotaremos por R o conjunto desses vértices. Assim $[e_1, e_2]$ é o vértice direito da câmara e $[e_1, pe_2]$ o vértice esquerdo.



A ação do subgrupo parahólico B e da isometria hiperbólica t deixam o conjunto R invariante. Consequentemente, o semigrupo S deixa R invariante. Mais precisamente temos que a órbita de C_0 por S é R .

Para demonstrarmos esse fato, seja $C_1 \in R$ uma câmara de distância d de C_0 . A câmara $C_d = t^d C_0$ também está a distância d de C_0 . Seja σ_1 um apartamento contendo C_0 e C_d , e σ_2 um apartamento contendo C_0 e C_1 . Temos que existe $b \in B$ tal que $b\sigma_1 = \sigma_2$ e fixa C_0 , o que nos garante que $bC_d = C_0$. E assim o elemento $s = bt^d \in S$, leva C_0 a C_1 .

Ação de $Sl(2, k)$ no fim da árvore

Considere $\partial_\infty(X)$ a fronteira no infinito de X e R_∞ a projeção de R em $\partial_\infty(X)$, ou seja, as classes de equivalências de geodésicas tais que $\sigma(t) \in R$, para todo $t \geq T$.

A ação de B é transitiva em R_∞ (a demonstração desse fato é similar à de que a órbita de C_0 por S é R). Seja $\xi = \gamma(t)$, sendo γ a geodésica invariante pela isometria t . O ponto $\xi \in \partial_\infty(X)$ é o atrator principal da isometria t .

Dado $\eta \in R_\infty$, temos que existe $b \in B$ tal que $\eta = b\xi$. Neste caso a translação btb^{-1} tem η como atrator principal e logo R_∞ é o conjunto de controle invariante para S .

Referências Bibliográficas

- [AK] ARNOLD, L., KLIEMANN, W; *Qualitative theory of stochastic systems*. Probabilistic Analysis and Related Topics, Vol 3 pp. 1-79, Academic Press 1983.
- [At] ATIYAH, M., MACDONALD, I.; *Introduction to Commutative Algebra*, Addison Wesley, Mass. 1969.
- [BA] BALLMANN, WERNER; *Lecture on Spaces of Nonpositive Curvature*, Birkhäuser Verlag, 1995.
- [BGS] GROMOV, M.; BALLMAN, W.; SCHROEDER, V.; *Manifolds of Nonpositive Curvature*, Birkhäuser, 1985.
- [Bo] BOREL, ARMAND *Linear algebraic Groups*, Benjamin 1969.
- [Bro] BROWN, KENNETH; *Buildings*, Springer Verlag 1989.
- [Brh] BRUHAT, F; *Représentations des groupes de Lie semi-simples complexes* C.R. Acad. Sci. Paris 238 (1954) 437-439.
- [BT] BRUHAT, F; TITS, J.; *Groupes réductifs sur un corps local*, I.H.E.S, 1972
- [Bri] BRIDSON, M; HAEFLIGER, A; *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Springer Verlag 1999.
- [Ca] CASSELS, J. W. S.; *Local Fields*, London Mathematical Society 1986.
- [EB] EBERLEIN, P.; *Geometry of Nonpositively Curved Manifolds*, The University of Chicago Press, 1996.

- [FR] FIRER, M.; ROCIO, O. *Invariant Control Sets on Flag Manifolds and Ideal Boundaries of Symmetric Spaces*, Journal of Lie Theory, Volume 13, 2003.
- [Ga] GARRET, PAUL, *Buildings and Classical Groups*
- [GJT] GUIVARC'H, Y.; JI, L.; TAYLOR, J. C.; *Compactifications of Symmetric Spaces*, Birkhäuser, 1998
- [Ghy] GHYS, E; HAEFLIGER, A; VERJOVSKY, A; *Group Theory from a Geometrical Viewpoint*; World Scientific 1990
- [HC] HARISH-CHANDRA, *Introduction to Harmonic Analysis on reductive p -adic Groups*, Princeton, 1979
- [Hu] HUMPHREYS, J.E., *Linear Algebraic Groups*, Springer Verlag, New York, 1975
- [KL] Kleiner, Bruce; Leeb, Bernhard; *Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces and Euclidean buildings*. Publications Mathématiques de l'IHÉS, 86 (1997), p. 115-197
- [Ma] MARGULIS, M. A.; *Discrete Subgroups of Semisimple Lie Groups*, Springer Verlag 1990
- [Ron1] RONAN, MARK; *Lecture on Buildings*, Perspectives in Mathematics, Academic Press, 1989
- [Ron2] RONAN, MARK; *Buildings: Main Ideas and Applications I & II*, London Mathematical Society 24 1992 1-51
- [San1] SAN MARTIN, L. A. B *Semigroups Actions on Homogeneous Spaces*, Semigroup Forum Vol. 50 (1995) 59-88
- [San2] SAN MARTIN, L. A. B.; *Maximal Semigroups in Semi-Simple Lie Groups*, Transactions of the American Mathematical Society vol. 353 número 12 5165-5184
- [San3] SAN MARTIN, L. A. B, *Control sets and semigroups in semisimple Lie groups*, Semigroups in Algebra, Geometry and Analysis, New York 1995

- [ST] SAN MARTIN, L. A. B.; TONELLI, P; *Invariant Control Sets on Flag Manifold* Math. Control Signals Systems 6 (1993) 41-61
- [Schi] SCHIKHOF, W. H.; *Ultrametric Calculus*, Cambridge 1984.
- [Se] SERRE, JEAN-PIERRE; *Lie Algebras e Lie Groups*, Benjamin 1965.
- [TB] TITS, J; BRUHAT, F.; *Groupes Réductifs sur un Corps Local*, I.H.E.S, 1972
- [Tits[74]] TITS, J; *Buildings of Spherical Type and Finite BN Pairs*, Lecture Notes 386 Springer Verlag 1974
- [Tits[86]] TITS, J; *Buildings and Group Amalgamations*, London Mathematical Society 121 1986
- [Tits[88]] TITS, J; *Théorie des groupes*, Resume du cours, Annuaire du College de France, 1988-89
- [VO] VIMBERG, E. B.; ONISHCHIK, A. L.; *Lie Groups and Algebraic Groups*, Springer Verlag 1990
- [Wa] Warner, G; *Harmonic Analysis on Semi-simple Lie Groups*, Springer Verlag, 1972

Índice Remissivo

- órbita, 3
- ação fortemente transitiva, 32
- anel de valoração, 11
- apartamento, 55
 - fundamental, 33
- aplicação
 - simplicial, 25
- aplicação
 - de câmaras, 27
 - simplicial, 27
- atrator principal, 58
- automorfismo de sistema de câmaras, 26
- bandeira, 26
- câmara, 27
 - fundamental, 33
- complexo
 - de câmara, 27
 - de Coxeter, 29
 - de Coxeter euclidiano, 40
 - simplicial abstrato, 25
- componente
 - da identidade, 47
- conjunto
 - de controle, 4
 - algébrico, 45
 - irredutível, 46
- contração elementar, 28
- corpo
 - local, 10
- corpos
 - completos, 10
 - não-archimedianos, 9
 - ultramétricos, 9
- curva, 17
- Decomposição de Bruhat, 34, 36
- desigualdade
 - triangular forte, 9
 - ultramétrica, 9
- distância combinatória, 27
- edifício de Tits, 30
- eixo canônico, 56
- equivalência
 - de normas, 11
 - de topologias, 11
- espaço
 - geodésico, 18
 - ultramétrico, 12
- espaço
 - de caminhos, 18

- flat, 55
- galeria, 26
 - tamanho, 26
- geodésica, 18
- grupo
 - de Lie, 15
 - algébrico, 46
 - conexo, 47
- homotopia elementar, 28
- incidência, 26
- isometria hiperbólica regular, 56, 57
- isomorfismo
 - de grupos algébricos, 46
- métrica canônica, 42
- matriz de Coxeter, 28
- norma, 9
- p-ádicos, 10
- palavra
 - reduzida, 29
- palavras
 - equivalentes, 28
 - homotópicas, 28
- par BN, 36
- ponto especial, 40
- posto de um edifício, 55
- raios geodésicos assintóticos, 21
- repulsor principal, 58
- retificável, 17
- retração, 27
- semigrupo, 1
 - local, 2
- setor, 41
 - generalizado, 59
- sistema de câmaras, 26
 - posto, 26
- sistema de Tits, 36
- subgrupo
 - especial, 29
- tipo
 - de um simplexo, 27
 - de um vértice, 27
 - de uma galeria, 27
- topologia de Zariski, 46
- transitivo, 3
- triângulo
 - geodésico, 19
- valoração, 10
 - discreta, 11
- variedade
 - analítica, 15
 - afim, 46
 - quase-afim, 46
- w-tipo, 64