

Variações do diagrama de Ferrers, partições planas e funções geradoras

Jair Cunha Filho

Orientador: Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos

Variações do diagrama de Ferrers, partições planas e funções geradoras

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Jair Cunha Filho e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 07 de Julho de 2006



Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos
Orientador

Banca Examinadora

Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos

Prof. Dr. Carlile Campos Lavor

Profa. Dra. Sueli Irene Rodrigues Costa

Prof. Dr. Paulo Mondek

Prof. Dr. Rommel Melgaço Barbosa

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Matemática Aplicada.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues - CRB8a / 2116

Cunha Filho, Jair

C914v Variações do diagrama de Ferrers, partições planas e funções geradoras / Jair Cunha Filho -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2006.

Orientador : Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Partições (Matemática). 2. Funções geradoras. 3. Análise combinatória. I. Santos, José Plínio de Oliveira. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Variations of the Ferrers diagram, plane partitions and generating functions.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Partitions (Mathematics). 2. Generating functions. 3. Combinatorial analysis.

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

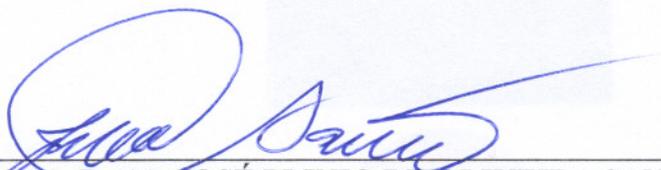
Banca examinadora: Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Carlile Campos Lavor (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dra. Sueli Irene Rodrigues Costa (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Paulo Mondek (UFMS)
Prof. Dr. Rommel Melgaço Barbosa (UFG)

Data da defesa: 07-07-2006

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática Aplicada

Tese de Doutorado defendida em 07 de julho de 2006 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



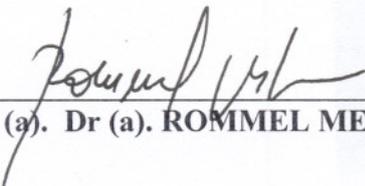
Prof. (a). Dr (a). JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA SANTOS



Prof. (a). Dr (a). SUELI IRENE RODRIGUES COSTA



Prof. (a). Dr (a). PAULO MONDEK



Prof. (a). Dr (a). ROMMEL MELGAÇO BARBOSA



Prof. (a) Dr. (a) CARLILE CAMPOS LAVOR

Agradecimentos

Às minhas amadas esposa Rute Maria Rezende Bustamante Cunha e filhas Eulália Rezende Cunha e Guiomar Rezende Cunha. Ao meu pai, Jair Cunha, in memoriam, ex-combatente e falecido em 10/06/1968. Às minhas queridas mãe Eulália Rennó Schumann Cunha e sogra Dona Teresa e a meu querido sogro Sr. Iado, pelas orações.

Ao meu irmão engenheiro e mestre Geraldo Schumann Cunha, pela torcida e pelo orgulho que demonstrava quando lhe apresentava os resultados que ia obtendo. Ao meu irmão engenheiro e mestre Agnelo Raimundo Schumann Cunha, pela torcida e pelo apoio financeiro num momento difícil durante o curso. Ao meu irmão, engenheiro e Prof. Dr. João Bosco Schumann Cunha que, na sua labuta, não esquece de torcer por mim.

Ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, pelo apoio através da bolsa BIG, me proporcionando o prazer e o orgulho de lecionar por seis semestres na UNICAMP.

Aos meus professores de Matemática: João Vitor Pereira Pinto (5^a série do ensino fundamental), Antônio Salomon, in memoriam (6^a e 7^a séries do ensino fundamental) e Paulo Meloni (8^a série do ensino fundamental e 1^a e 2^a séries do ensino médio), pela forma como ministraram Matemática a mim, sempre evidenciando o respeito e o amor por ela.

Agradeço às minhas professoras do antigo ensino primário (em especial, minha mãe), porque sem elas não teria chegado aqui.

Aos meus amigos Prof. Dárcio Pereira e engenheiro Aristides de Mello Costa, por me incentivarem e me “forçarem” a cursar Doutorado em Matemática.

Ao Prof. Dr. José Luiz Boldrini, pelas lindas aulas e por mostrar o quão é belo ter rigor em uma demonstração em Matemática.

À UNIFEI.

Também, principalmente, agradeço ao meu orientador Prof. Dr. José

Plínio de Oliveira Santos, pela sua forma honesta e competente de trabalhar, facilitando nossos contatos e o desenvolvimento deste trabalho.

Finalmente, agradeço a Deus, porque sem Ele nada seria possível.

Sumário

Resumo	x
Abstract	xi
Introdução	xii
1 Conceitos, notações e resultados básicos	13
1.1 Partições, Funções Geradoras e Diagramas de Ferrers	13
1.2 Algumas notações básicas	17
2 Algumas variações do diagrama de Ferrers	19
2.1 Variação 1: Números de Fibonacci e partições simétricas	22
2.1.1 O Diagrama Hex2	24
2.1.2 O Diagrama Hex2 e os Números de Fibonacci	27
2.1.3 O Diagrama $\frac{1}{2}$ Hex2	34
2.1.4 Os Diagramas Simétricos de Hex2	39
2.2 Variação 2: Uma seqüência envolvendo potências de 3	46
2.3 Variação 3: Diagrama Hex4	50
2.3.1 Função geradora para o número de diagramas de peso n de Hex4	50
2.3.2 Função geradora para o número de diagramas de peso n de $\frac{1}{2}$ Hex4	53
2.4 Variação 4: Diagrama A_3	56
2.4.1 Função geradora para o número de diagramas de peso n de A_3	56
2.4.2 Função geradora para o número de diagramas de peso n de $\frac{1}{2}A_3$	58

2.4.3	Função geradora para o número de diagramas simétricos de peso n de A_3	60
2.5	Variação 5: Diagrama B	62
2.5.1	Função geradora para o número de diagramas de peso n de B	62
2.5.2	Função geradora para o número de diagramas de peso n de $\frac{1}{2}B$	62
2.5.3	Função geradora para o número de diagramas simétricos de peso n de B	63
3	Sobre partições planas com duas linhas: uma interpretação em termos de partições ordinárias	67
3.1	Uma nova interpretação em termos de partições ordinárias	70
3.2	Exemplos	70
3.3	Observação	73
3.4	Bijeção entre as partições descritas na seção 3.1 e as partições planas com duas linhas	75
3.5	Bijeção entre as partições descritas na seção 3.1 e as partições descritas por Cheema e Gordon	76
4	Partições planas com três linhas: uma interpretação em termos de partições ordinárias	79
4.1	Uma interpretação em termos de partições ordinárias	79
4.2	Como são obtidas as cópias	82
4.3	O número de cópias de cada inteiro positivo	83
4.4	Como são as restrições das partições associadas a diagramas legais de peso n	84
4.5	Observação	87
4.6	Bijeção entre o conjunto das partições da seção 4.4 e as partições planas com 3 linhas	87
5	Um conjunto de bijeções envolvendo números de Fibonacci e números de Pell	91
5.1	Números de Fibonacci	91
5.2	As bijeções	93
5.2.1	Bijeção (A, C)	93
5.2.2	Bijeção (A, D)	96
5.2.3	Bijeção (B, C)	98

5.2.4	Bijeção (B, D)	100
5.2.5	Bijeção (C, D)	101
5.2.6	Bijeção (C, E)	103
5.2.7	Bijeção (D, E)	107
5.3	Números de Pell	110
5.4	As bijeções	111
5.4.1	Bijeção (F, G)	111
5.4.2	Bijeção (H, I)	112
6	Uma classe de partições	115
	Considerações finais	121
	Referências Bibliográficas	123

Resumo

Neste trabalho, tratamos de algumas variações dos Diagramas de Ferrers, onde apresentamos, em especial, uma que consiste de um diagrama hexagonal infinito, com cada hexágono dotado das diagonais que passam pelo seu centro. O resultado envolve uma subsequência da seqüência de Fibonacci fazendo contagem em termos de partições. Apresentamos, também, interpretações das partições planas com duas e três linhas em termos de partições ordinárias com partes tomadas em multiconjuntos, exibindo, em cada caso, as respectivas bijeções. No caso das partições planas com duas linhas, exibimos uma bijeção entre a interpretação obtida e uma interpretação já conhecida. Finalmente, apresentamos bijeções entre algumas interpretações combinatórias, envolvendo números de Fibonacci e Pell. Encerramos, exibindo uma classe de partições, onde, para valores particulares de um parâmetro, obtemos como corolários resultados conhecidos.

Abstract

In this thesis we study some variations of the Ferrers Diagram where we present, in particular, one that involves a infinite hexagonal diagram including the diagonals going through the center. The result involves a subsequence of the Fibonacci numbers where one uses partitions. We present, also, interpretations of plane partitions with two and three lines, in terms of the ordinary partitions, with parts taken from multisets giving, in each case, the corresponding bijections. In the case of the plane partitions with two lines a bijection between our interpretation and one already known is given. We have combinatorial results related to Fibonacci and Pell numbers. At the end we present a class of partitions where, for particular values of the parameter, we get results already known.

Introdução

Este trabalho está dividido em 6 capítulos, cujos conteúdos estão descritos a seguir.

No capítulo (1), introduzimos as notações e resultados básicos que utilizamos nos demais capítulos.

No capítulo (2), apresentamos cinco variações do diagrama de Ferrers, onde obtemos as funções geradoras para contar o número de diagramas em cada caso.

No capítulo (3), apresentamos uma interpretação das partições planas com duas linhas em termos de partições ordinárias, exibindo a respectiva bijeção. Apresentamos, também, uma bijeção entre a interpretação obtida para as partições planas com duas linhas e uma já apresentada por Cheema e Gordon ([5]).

No capítulo (4), apresentamos uma interpretação das partições planas com três linhas em termos de partições ordinárias, exibindo, também, a correspondente bijeção.

No capítulo (5), apresentamos um conjunto de bijeções entre algumas interpretações combinatórias dos números de Fibonacci e Pell.

Finalmente, no capítulo (6), exibimos uma classe de partições, onde, para valores particulares de um parâmetro, obtemos como corolários resultados conhecidos.

Capítulo 1

Conceitos, notações e resultados básicos

Introduzimos, neste capítulo, algumas definições e notações, além de alguns resultados que serão utilizados.

1.1 Partições, Funções Geradoras e Diagramas de Ferrers

Uma partição de um inteiro positivo n é uma representação de n como soma de inteiros positivos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$,

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r,$$

onde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$. Denota-se por $p(n)$ o número de partições de n . Se $n = 0$, tomamos $p(0) = 1$, com a observação de que a partição vazia ϕ é a única partição de zero. Por exemplo, $p(4) = 5$

$$\begin{array}{c} 4 \\ 3 + 1 \\ 2 + 2 \\ 2 + 1 + 1 \\ 1 + 1 + 1 + 1 \end{array}$$

Apresentamos, a seguir, duas ferramentas para tratar de partições: funções geradoras e representação gráfica de partições. Considerando a seqüência $p(n)$, $n \geq 0$, a função geradora $f(q)$ para esta seqüência é definida como sendo a série de potências

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n.$$

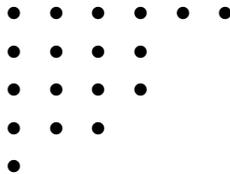
No estudo de partições, não estaremos interessados nos valores da variável q , mas nos valores de $p(n)$. Desse modo, é suficiente considerar $f(q)$ como uma série de potências formal em q .

Produtos infinitos gerando tais funções podem ser manuseados para obter resultados sobre partições. Por exemplo, a função geradora para o número de todas as partições de $n \geq 0$, pode ser escrita como

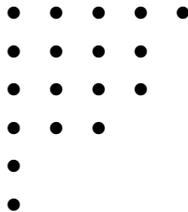
$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n}.$$

O leitor pode consultar [1], para maiores detalhes.

Outro modo de estudar partições, é através de uma representação gráfica, conhecida como diagrama de Ferrers, que é obtida colocando-se λ_j pontos na linha j . Por exemplo, o diagrama de Ferrers da partição $6 + 4 + 4 + 3 + 1$ é



A partição conjugada de uma partição, vista por meio de seu diagrama de Ferrers, é a partição obtida quando, em tal diagrama, trocamos as linhas pelas colunas. Por exemplo, a partição conjugada de $6 + 4 + 4 + 3 + 1$ é $5 + 4 + 4 + 3 + 1 + 1$, cujo diagrama de Ferrers é



Com o objetivo de ilustrar como a manipulação de tais ferramentas auxiliam na obtenção de provas de resultados envolvendo partições, apresentamos o teorema seguinte, devido a Euler, com duas provas: uma envolvendo funções geradoras e outra fazendo uso de diagramas de Ferrers.

Teorema 1.1 (Euler) *O número de partições de n em partes ímpares é igual ao número de partições de n em partes distintas.*

Prova 1:

Sejam $p_o(n)$ e $p_d(n)$, respectivamente, o número de partições de n em partes ímpares e o número de partições de n em partes distintas. Temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_o(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{2n-1}} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_d(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n).$$

Mas

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - q^{2n}}{1 - q^n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{2n-1}}.$$

Assim

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_o(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_d(n)q^n.$$

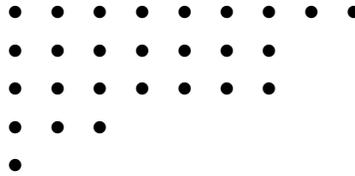
Então, devido à unicidade da expansão em série de potências de uma função, segue que $p_o(n) = p_d(n)$, $\forall n$.

Prova 2:

Como os conjuntos dos dois tipos de partições são finitos, este tipo de prova consiste em obter uma bijeção entre eles, implicando que tais conjuntos têm mesma cardinalidade.

Seja uma partição em partes ímpares, por exemplo, $\lambda = 9 + 7 + 7 + 3 + 1$, e consideremos sua representação em diagrama de Ferrers. Havendo duas linhas iguais (com mesmo número de pontos), as reunimos numa só linha e reordenamos as linhas de modo que se sucedam em ordem não crescente, com relação ao número de pontos na linha. Repetindo o procedimento até

que não haja mais linhas iguais, chegamos ao diagrama de Ferrers de uma partição de n em partes distintas. Ilustramos abaixo as operações feitas, onde se obtém a partição $\pi = 14 + 9 + 3 + 1$.



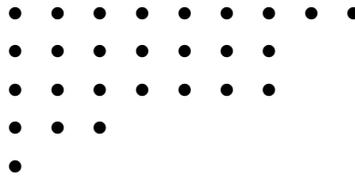
⇓



Reciprocamente, seja uma partição em partes distintas, por exemplo, $\pi = 14 + 9 + 3 + 1$, e consideremos sua representação em diagrama de Ferrers. Havendo linha com número par de pontos, a dividimos em duas linhas iguais e reordenamos de modo que as linhas se sucedam em ordem não crescente. Repetindo este procedimento até que não haja linhas com número par de pontos, chegamos ao diagrama de Ferrers de uma partição em partes ímpares, conforme ilustra-se abaixo, onde se obtém a partição $\lambda = 9 + 7 + 7 + 3 + 1$



⇓



1.2 Algumas notações básicas

No que se segue, q é um número complexo tal que $|q| < 1$. Sejam $a \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}_+^*$ e $n \in \mathbb{Z}_+$.

Definimos

$$(a; q^k)_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ (1-a)(1-aq) \cdots (1-aq^{k(n-1)}), & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

$$(a; q^k)_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} (a; q^k)_n \quad \text{e}$$

$$(a)_n = (a; q)_n$$

Também se define para $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(a; q^k)_\lambda = \frac{(a; q^k)_\infty}{(aq^{k\lambda}; q^k)_\infty}.$$

Desta última definição, destacamos a seguinte consequência

$$\frac{1}{(q^k; q^k)_{-n}} = 0,$$

que vale para todo $n = 1, 2, 3, \dots$

Capítulo 2

Algumas variações do diagrama de Ferrers

Neste capítulo apresentamos cinco variações dos diagramas de Ferrers, seguindo a idéia de Propp ([12]). Os principais resultados obtidos se referem ao diagrama Hex2 (subseção 2.1.1-Teorema 2.2, subseção 2.1.2-Teorema 2.4 e subseção 2.1.3-Teorema 2.6) e ao diagrama Hex3 (seção 2.2-Teorema 2.8). Destacamos o Teorema 2.2, que estabelece a importante presença dos números de Fibonacci, fazendo contagem em termos de partições.

Em [12], Propp cita que os diagramas de Ferrers e suas variações podem ser considerados como ideais inferiores de conjuntos parcialmente ordenados. Especificamente, seja (\mathbf{Square}, \geq) o conjunto dos pontos (a, b) determinado por

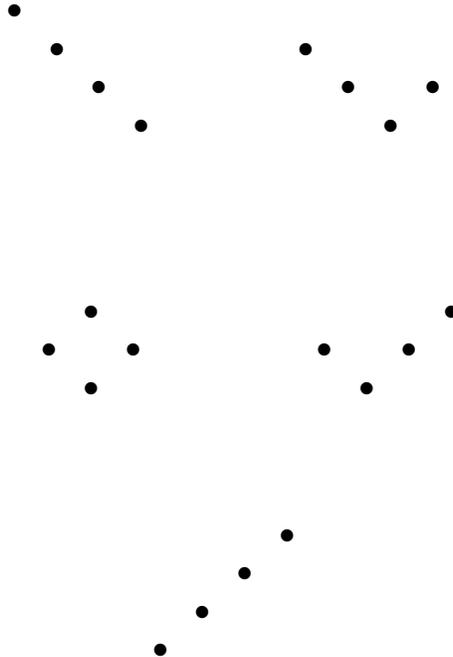
$$\mathbf{Square} \text{ (ou } \mathbf{Sq}) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

e a relação

$$(a', b') \geq (a, b) \iff a' \geq a \text{ e } b' \geq b,$$

onde $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Se a cada partição $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ fizermos corresponder o conjunto de pontos $(i-1, j-1)$, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq \lambda_i$, obtemos subconjuntos finitos de \mathbf{Square} , que são saturados com relação a \geq . Salientamos que um conjunto finito $A \subset \mathbf{Sq}$ é saturado com relação a \geq se, para cada ponto (a', b') de A , todo ponto $(a, b) \in \mathbf{Sq}$ tal que $(a', b') \geq (a, b)$, também pertence a A . O diagrama de Ferrers de λ é o gráfico destes pontos no quarto quadrante (figura 1a). Outro modo de inserir (\mathbf{Sq}, \geq) no plano é mostrado na figura 1b, a qual deixa clara a simetria de \mathbf{Sq} .

Um ideal inferior é um subconjunto de tais pontos, que é saturado com relação a \geq . A condição de saturação pode ser interpretada do seguinte modo: um subconjunto finito de n pontos será chamado um diagrama legal de peso n se, e somente se, sempre que um ponto estiver presente, os pontos imediatamente abaixo dele e ligados a ele também estiverem presentes. Neste caso, tal subconjunto é um diagrama de Ferrers de uma partição de n . Por exemplo, os diagramas legais de peso 4 são



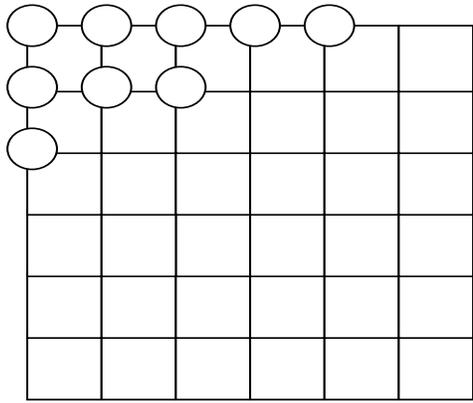


figura 1a ($\lambda = 5 + 3 + 1$)

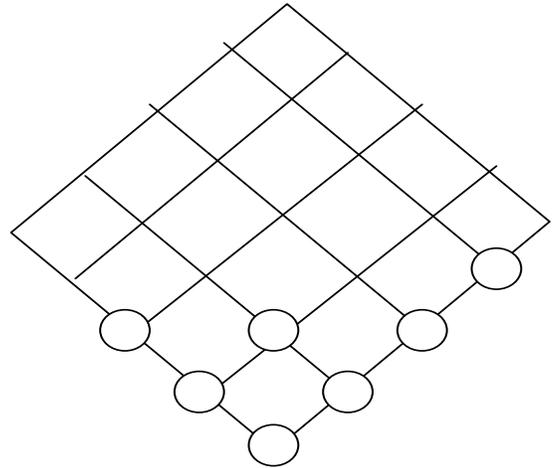


figura 1b ($\lambda = 4 + 2 + 1$)

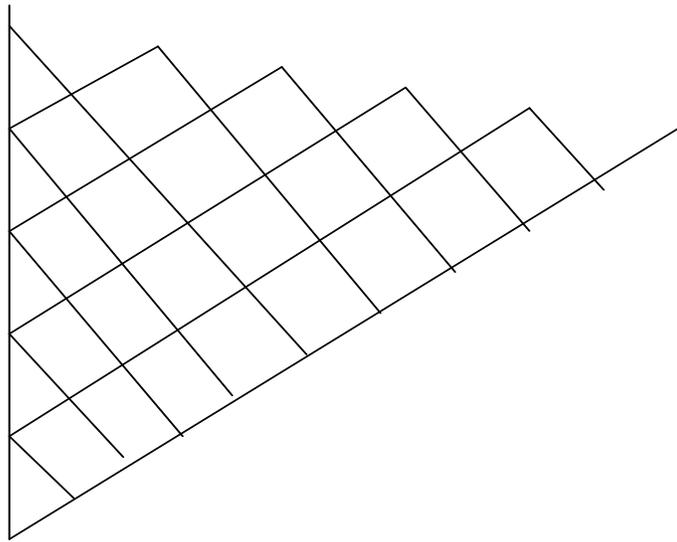


figura 2

Propp considerou este diagrama e outras variações, apresentando em cada caso, funções geradoras para o número de diagramas legais de peso n . Ele considerou, também, o diagrama $\frac{1}{2} \mathbf{Sq}$, como sendo um subconjunto de \mathbf{Sq} constituído somente dos pontos da vertical (ver figura 2) e dos pontos situados à direita dela. Além disso, obteve funções geradoras para o número de diagramas simétricos de peso n , que são aqueles diagramas legais onde os pontos presentes estão simetricamente dispostos em relação à vertical.

2.1 Variação 1: Números de Fibonacci e partições simétricas

Aqui, nós consideramos uma variação do diagrama de Ferrers constituída de um diagrama hexagonal infinito, com cada hexágono dotado das diagonais que passam pelo centro, conforme figura 3, onde temos um diagrama legal de peso 15.

O chamaremos de diagrama **Hex2**, por ser uma variação do diagrama **Hex** tratado por Propp. Apresentamos, de forma recursiva, a função geradora para o número de diagramas legais de peso n de **Hex2** e destacamos uma seqüência que conta o número de partições que começam com $n > 0$ e que representam diagramas legais em **Hex2**, a qual é formada por números de Fibonacci

$$1, 1, 2, 2, 3, 8, 8, 13, 34, 34, 55, \dots$$

Apresentamos, também de forma recursiva, as funções geradoras para o número de diagramas legais de $\frac{1}{2} \mathbf{Hex2}$ e para o número de diagramas legais simétricos de **Hex2**. No diagrama $\frac{1}{2} \mathbf{Hex2}$, destacamos a seqüência

$$1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 8, 8, 8, 16, 16, 16, \dots$$

fazendo a mesma contagem que a seqüência anterior, isto é, o número de partições que começam com $n > 0$ e que representam diagramas legais de $\frac{1}{2} \mathbf{Hex2}$. Finalmente, destacamos uma seqüência que conta o número de partições que começam com $n = 1$, $n = 2$ e $n = 4k$ ou $n = 4k + 2$, $k \geq 1$ e que representam diagramas simétricos, a qual conta o número de partições simétricas de um inteiro não negativo

$$1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, \dots$$

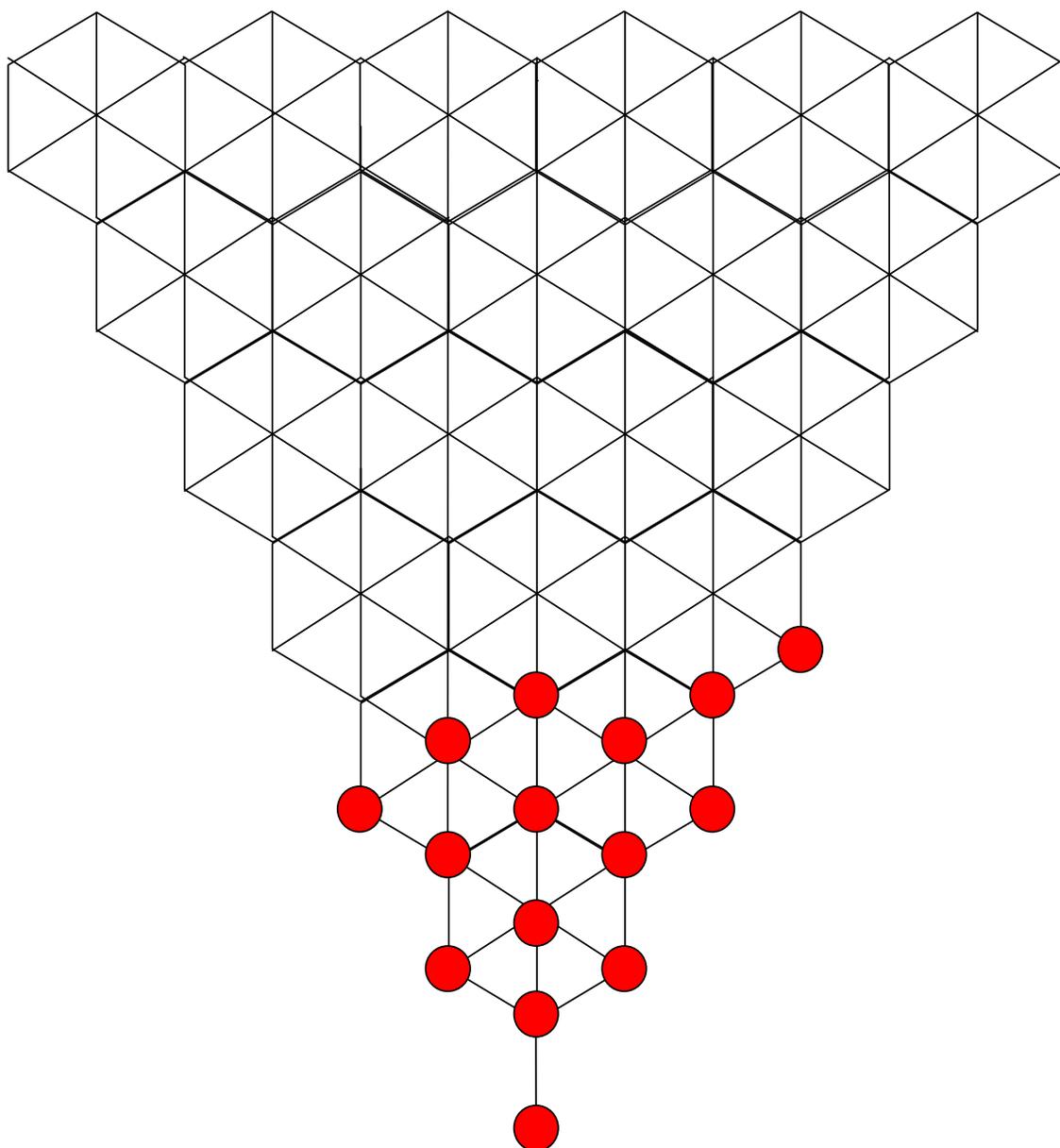


figura 3

2.1.1 O Diagrama Hex2

Na figura 4, temos um diagrama legal de peso $n = 51$ em **Hex2** e a partição $\lambda = (14, 13, 11, 6, 4, 2, 1)$ associada, a qual foi obtida lendo nas diagonais, de baixo para cima e da direita para a esquerda e contando o número de pontos em cada faixa diagonal. Analisando, na figura 4, as duas primeiras faixas, podemos tirar as conclusões abaixo sobre como são as partes da partição associada a um diagrama de peso n :

- as partes devem ser distintas;
- se uma parte vale pelo menos 4, então necessariamente a próxima parte deve estar presente, sendo que
 - a) se uma parte vale 4, 5 ou 6, a próxima deve valer pelo menos 1;
 - b) se uma parte vale pelo menos 7, digamos $3k + i$, $i = 1, 2, 3$, então a próxima parte deve valer pelo menos $3k - 3$;
 - c) se uma parte é cônica a $0, 1(\text{mod}3)$, então a próxima parte deve diferir desta de pelo menos 2 unidades.

Salientamos que está claro que este comportamento se repete com as segunda e terceira faixas, as terceira e quarta faixas e assim por diante. Desse modo, temos o seguinte teorema

Teorema 2.1 *Seja um diagrama de peso n em **Hex2**. Lendo nas diagonais, de baixo para cima e da direita para a esquerda, temos que ele corresponde a uma partição de n em partes distintas, onde sempre que uma parte $\equiv 0, 1(\text{mod}3)$ ocorre, a próxima parte difere de pelo menos 2 unidades, com a condição adicional de que, dada uma parte $\lambda_m = 3k + i$, $i = 1, 2, 3$ e $k \geq 2$, então a próxima parte λ_{m+1} vale no mínimo $3k - 3$ e nenhuma partição tem como última parte 4, 5 ou 6.*

Na tabela 1, temos valores de uma parte λ_m e os possíveis valores da parte seguinte λ_{m+1} , ilustrando a conclusão tirada a partir da figura 4, que foi estabelecida no **Teorema 2.1**.

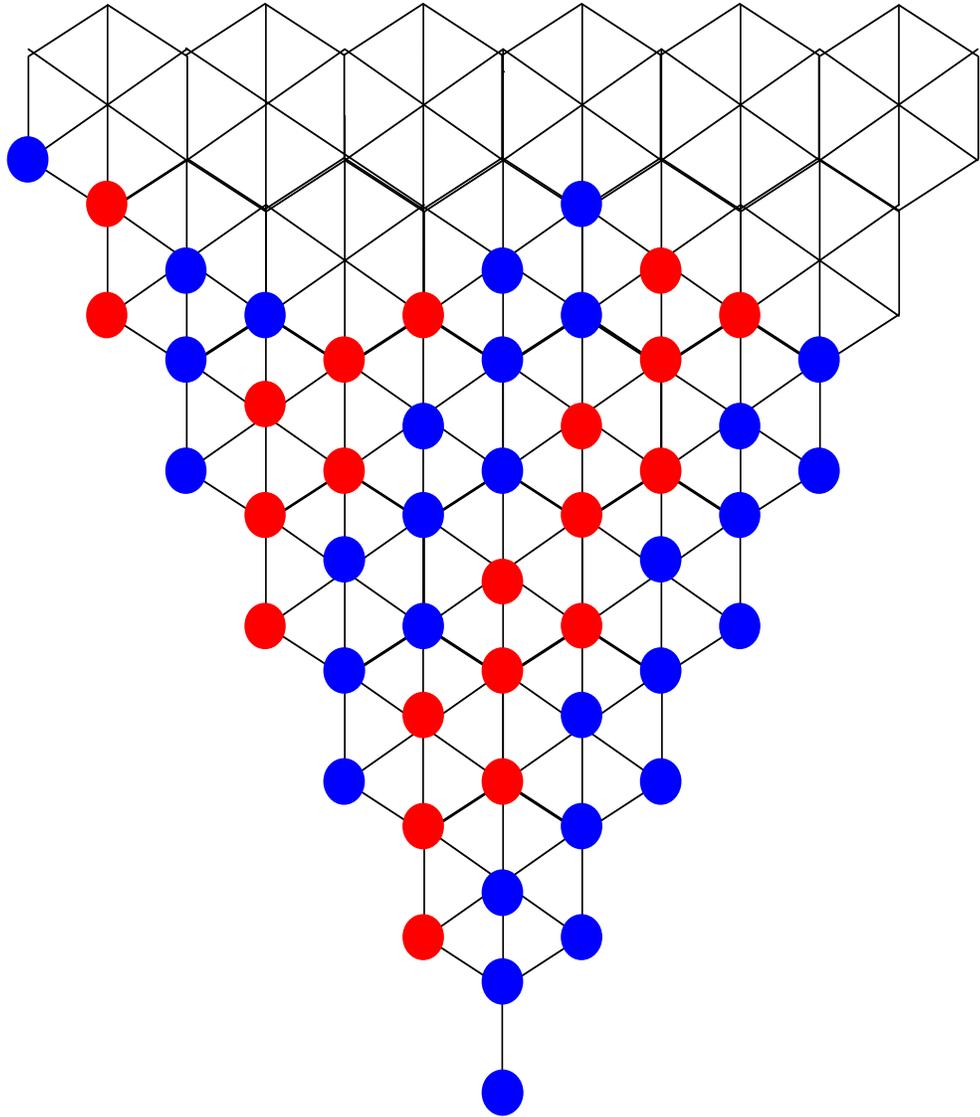


Figura 4: $\lambda = 14+13+11+6+4+2+1$
25

λ_m	λ_{m+1}
1	0
2	0,1
3	0,1
4	1,2
5	1,2,3,4
6	1,2,3,4
7	3,4,5
8	3,4,5,6,7
9	3,4,5,6,7
10	6,7,8
11	6,7,8,9,10
12	6,7,8,9,10
13	9,10,11
14	9,10,11,12,13
15	9,10,11,12,13
16	12,13,14
17	12,13,14,15,16
18	12,13,14,15,16
19	15,16,17
20	15,16,17,18,19
21	15,16,17,18,19

tabela 1

Denotando por $f(\text{Hex2}; q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(\text{Hex2}, q; n)q^n$ a função geradora para o número de diagramas legais de peso n de **Hex2**, podemos, a partir da tabela 1, escrever

$$\begin{aligned}
f(\text{Hex2}; q) &= \sum_{n=0}^{\infty} p(\text{Hex2}, q; n)q^n = \\
&= 1 + \\
&+ q + \\
&+ q^2(1 + q) + \\
&+ q^3(1 + q) + \\
&+ q^4[q + q^2(1 + q)] + \\
&+ q^5[q + q^2(1 + q) + q^3(1 + q) + q^4(q + q^2(1 + q))] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + q^6[q + q^2(1 + q) + q^3(1 + q) + q^4(q + q^2(1 + q))] + \\
& + q^7[q^3(1 + q) + q^4(q + q^2(1 + q)) + q^5(q + q^2(1 + q) + q^3(1 + q) + q^4(q + q^2(1 + q)))] + \\
& + \dots
\end{aligned}$$

ou, de forma recursiva

$$f(\text{Hex2}; q) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(q)q^n,$$

onde

$$f_0(q) = f_1(q) = 1$$

$$f_2(q) = f_3(q) = 1 + q$$

$$\begin{aligned}
k = 1 \Rightarrow & \left\{ \begin{aligned} f_{3k+1}(q) &= \sum_{j=1}^{3k-1} f_j(q)q^j \\ f_{3k+2}(q) = f_{3k+3}(q) &= \sum_{j=1}^{3k+1} f_j(q)q^j \end{aligned} \right. \\
k \geq 2 \Rightarrow & \left\{ \begin{aligned} f_{3k+1}(q) &= \sum_{j=3k-3}^{3k-1} f_j(q)q^j \\ f_{3k+2}(q) = f_{3k+3}(q) &= \sum_{j=3k-3}^{3k+1} f_j(q)q^j \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

2.1.2 O Diagrama Hex2 e os Números de Fibonacci

Seja F_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, denotando o n -ésimo número de Fibonacci, isto é

$$\begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1}, \text{ se } n \geq 0 \end{cases} .$$

Destacamos que, para $q = 1$, a seqüência f_0, f_1, f_2, \dots , onde f_n denota o número de partições começando com n e que representam diagramas legais de **Hex2** é dada por

$$1, 1, 2, 2, 3, 8, 8, 13, 34, 34, 55, \dots,$$

conforme tabela 2, onde constatamos que, a partir de f_2 , a seqüência $\{f_n\}$ toma duas vezes um número de Fibonacci, uma vez o próximo e pula o seguinte.

Fibonacci	Número de partições começando com n , que representam diagramas legais de Hex2
$F_0 = 1$	$f_0 = 1$
$F_1 = 1$	$f_1 = 1$
$F_2 = 2$	$f_2 = 2$
$F_3 = 3$	$f_3 = 2$
$F_4 = 5$	$f_4 = 3$
$F_5 = 8$	$f_5 = 8$
$F_6 = 13$	$f_6 = 8$
$F_7 = 21$	$f_7 = 13$
$F_8 = 34$	$f_8 = 34$
$F_9 = 55$	$f_9 = 34$
$F_{10} = 89$	$f_{10} = 55$
$F_{11} = 144$	$f_{11} = 144$
\vdots	\vdots

tabela 2

Afirmamos que tal relação entre as seqüências f_n e F_n é válida para todo $n \geq 2$, conforme provamos no teorema abaixo, onde registramos, também, os valores de f_0 e f_1 .

Teorema 2.2 *Seja $\{f_n\}_{n \geq 0}$ a seqüência obtida da seqüência de polinômios $\{f_n(q)\}_{n \geq 0}$ quando $q = 1$ (f_n é o número de partições que começam com n e que representam diagramas legais de **Hex2**). Então*

$$\begin{cases} f_0 = f_1 = 1, \\ n \geq 0 \Rightarrow f_{3n+2} = f_{3n+3} = F_{3n+2}, \\ n \geq 1 \Rightarrow f_{3n+1} = F_{3n} \end{cases}$$

Antes de provarmos o **Teorema 2.2**, registramos nas tabelas 3 e 4 a afirmação do Teorema, onde registramos apenas os valores de f_2, f_3, \dots .

n	F_{3n+2}	$f_{3n+2} = f_{3n+3}$
0	$F_2 = 2$	$f_2 = f_3 = 2$
1	$F_5 = 8$	$f_5 = f_6 = 8$
2	$F_8 = 34$	$f_8 = f_9 = 34$
3	$F_{11} = 144$	$f_{11} = f_{12} = 144$
\vdots	\vdots	\vdots

tabela 3

n	F_{3n}	f_{3n+1}
1	$F_3 = 3$	$f_4 = 3$
2	$F_6 = 13$	$f_7 = 13$
3	$F_9 = 55$	$f_{10} = 55$
\vdots	\vdots	\vdots

tabela 4

A prova do teorema se baseia no seguinte procedimento

- provamos uma relação de recorrência para a subsequência de números de Fibonacci $\{F_{3n+2}\}_{n \geq 0}$ (**Lema 2.1**) e mostramos que a mesma relação se verifica para a seqüência $\{f_{3n+2}\}_{n \geq 0}$ (**Lema 2.2**);
- fazemos o mesmo para as subsequências $\{F_{3n}\}_{n \geq 1}$ (**Lema 2.3**) e $\{f_{3n+1}\}_{n \geq 1}$ (**Lema 2.4**).

Lema 2.1 *Seja $\{F_{3n+2}\}_{n \geq 0}$ a subsequência (F_2, F_5, F_8, \dots) da seqüência de Fibonacci $\{F_n\}_{n \geq 0}$. Então*

- (i) $F_2 = 2F_1$ e $F_5 = 2F_1 + 3F_2$;
(ii) se $n \geq 2$, então

$$F_{3n+2} = 2F_1 + 4F_2 + 4F_5 + 4F_8 + \dots + 4F_{3n-4} + 3F_{3n-1}.$$

Prova:

A afirmação (i) é imediata. Para provarmos a afirmação (ii), temos inicialmente que ela vale para $n = 2$, pois

$$2F_1 + 4F_2 + 3F_5 = 2 \times 1 + 4 \times 2 + 3 \times 8 = 2 + 8 + 24 = 34 = F_8.$$

Na hipótese de que

$$F_{3k+2} = 2F_1 + 4F_2 + 4F_5 + 4F_8 + \dots + 4F_{3k-4} + 3F_{3k-1}, k \geq 2,$$

mostremos que

$$F_{3(k+1)+2} = F_{3k+5} = 2F_1 + 4F_2 + 4F_5 + 4F_8 + \dots + 4F_{3k-4} + 4F_{3k-1} + 3F_{3k+2}.$$

Temos

$$\begin{aligned}
F_{3k+5} &= F_{3k+3} + F_{3k+4} \\
&= F_{3k+1} + F_{3k+2} + F_{3k+2} + F_{3k+3} \\
&= F_{3k+1} + F_{3k+2} + F_{3k+2} + F_{3k+1} + F_{3k+2} \\
&= F_{3k+2} + 2F_{3k+1} + 2F_{3k+2} \\
&= 2F_1 + 4F_2 + 4F_5 + 4F_8 + \dots + 4F_{3k-4} + 3F_{3k-1} + 2F_{3k+1} + 2F_{3k+2}.
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
2F_{3k+1} &= F_{3k+1} + F_{3k+1} \\
&= F_{3k-1} + F_{3k} + F_{3k+1} \\
&= F_{3k-1} + F_{3k+2},
\end{aligned}$$

o que completa a prova.

Lema 2.2 *Tem-se*

(i) $f_2 = 2f_1$ e $f_5 = 2f_1 + 3f_2$;

(ii) se $n \geq 2$, então

$$f_{3n+2} = 2f_1 + 4f_2 + 4f_5 + 4f_8 + \dots + 4f_{3n-4} + 3f_{3n-1}.$$

Prova:

A afirmação (i) é imediata. Para provarmos a afirmação (ii), temos inicialmente que ela vale para $n = 2$, pois

$$2f_1 + 4f_2 + 3f_5 = 2 \times 1 + 4 \times 2 + 3 \times 8 = 2 + 8 + 24 = 34 = f_8.$$

Na hipótese de que

$$f_{3k+2} = 2f_1 + 4f_2 + 4f_5 + 4f_8 + \dots + 4f_{3k-4} + 3f_{3k-1}, k \geq 2,$$

mostremos que

$$f_{3(k+1)+2} = f_{3k+5} = 2f_1 + 4f_2 + 4f_5 + 4f_8 + \dots + 4f_{3k-4} + 4f_{3k-1} + 3f_{3k+2}.$$

Temos

$$\begin{aligned}
f_{3k+5} &= f_{3(k+1)+2} = \sum_{j=3(k+1)-3}^{3(k+1)+1} f_j = \sum_{j=3k}^{3k+4} f_j \\
&= f_{3k} + f_{3k+1} + f_{3k+2} + f_{3k+3} + f_{3k+4} \\
&= 2f_1 + 4f_2 + 4f_5 + 4f_8 + \dots + 4f_{3k-4} + 3f_{3k-1} \\
&+ f_{3k} + f_{3k+1} + f_{3k+3} + f_{3k+4}.
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
f_{3k} + f_{3k+1} + f_{3k+3} + f_{3k+4} &= f_{3(k-1)+3} + \sum_{j=3k-3}^{3k-1} f_j + f_{3k+2} + f_{3(k+1)+1} \\
&= f_{3(k-1)+2} + f_{3k-3} + f_{3k-2} + f_{3k-1} + f_{3k+2} \\
&\quad + \sum_{j=3(k+1)-3}^{3(k+1)-1} f_j \\
&= f_{3k-1} + f_{3k-3} + f_{3k-2} + f_{3k-1} \\
&\quad + f_{3k+2} + f_{3k} + f_{3k+1} + f_{3k+2} \\
&= f_{3k-1} + 2f_{3k+2} + f_{3k-3} \\
&\quad + f_{3k-2} + f_{3k-1} + f_{3k} + f_{3k+1} \\
&= f_{3k-1} + 2f_{3k+2} + f_{3k+2} \\
&= f_{3k-1} + 3f_{3k+2},
\end{aligned}$$

o que completa a prova.

Lema 2.3 *Se $n \geq 1$, então*

$$F_{3n} = 4F_0 + 4F_3 + 4F_6 + \dots + 4F_{3n-6} + 3F_{3n-3}.$$

Prova

A afirmação é verdadeira para $n = 1$, pois $F_3 = 3$ e $F_0 = 1$. Na hipótese de que

$$F_{3k} = 4F_0 + 4F_3 + 4F_6 + \dots + 4F_{3k-6} + 3F_{3k-3}, \quad k \geq 1,$$

mostremos que

$$F_{3(k+1)} = F_{3k+3} = 4F_0 + 4F_3 + 4F_6 + \dots + 4F_{3k-6} + 4F_{3k-3} + 3F_{3k}.$$

Temos

$$\begin{aligned}
F_{3k+3} &= F_{3k+1} + F_{3k+2} \\
&= F_{3k-1} + F_{3k} + F_{3k} + F_{3k+1} \\
&= 4F_0 + 4F_3 + 4F_6 + \dots + 4F_{3k-6} + 3F_{3k-3} + F_{3k-1} + F_{3k} + F_{3k+1}.
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
F_{3k-1} + F_{3k+1} &= F_{3k-3} + F_{3k-2} + F_{3k-1} + F_{3k} \\
&= F_{3k-3} + F_{3k} + F_{3k} \\
&= F_{3k-3} + 2F_{3k},
\end{aligned}$$

o que completa a prova.

Lema 2.4 *Se $n \geq 1$, então*

$$f_{3n+1} = 4f_1 + 4f_4 + 4f_7 + \dots + 4f_{3n-5} + 3f_{3n-2}.$$

Prova:

A afirmação é verdadeira para $n = 1$ e $n = 2$, pois é imediato que $f_4 = 3f_1$ e $f_7 = 4f_1 + 3f_4$. Na hipótese de que

$$f_{3k+1} = 4f_1 + 4f_4 + 4f_7 + \dots + 4f_{3k-5} + 3f_{3k-2},$$

mostremos que

$$f_{3(k+1)+1} = f_{3k+4} = 4f_1 + 4f_4 + 4f_7 + \dots + 4f_{3k-5} + 4f_{3k-2} + 3f_{3k+1}.$$

Temos

$$\begin{aligned}
f_{3(k+1)+1} &= \sum_{j=3(k+1)-3}^{3(k+1)-1} f_j = \sum_{j=3k}^{3k+2} f_j \\
&= f_{3k} + f_{3k+1} + f_{3k+2} \\
&= 4f_1 + 4f_4 + 4f_7 + \dots + 4f_{3k-5} + 3f_{3k-2} + f_{3k} + f_{3k+2}.
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
f_{3k} + f_{3k+2} &= \sum_{j=3k-6}^{3k-2} f_j + \sum_{j=3k-3}^{3k+1} f_j \\
&= f_{3k-6} + f_{3k-5} + f_{3k-4} + f_{3k-3} + f_{3k-2} \\
&\quad + f_{3k-3} + f_{3k-2} + f_{3k-1} + f_{3k} + f_{3k+1} \\
&= f_{3k-6} + f_{3k-5} + f_{3k-4} \\
&\quad + f_{3k-3} + f_{3k-2} + f_{3k} \\
&\quad + (f_{3k-3} + f_{3k-2} + f_{3k-1}) + f_{3k+1} \\
&= f_{3k-2} + (f_{3k-3} + f_{3k-2} + f_{3k}) + f_{3k+1} + f_{3k+1}.
\end{aligned}$$

Como $f_{3k} = f_{3(k-1)+3} = f_{3(k-1)+2} = f_{3k+1}$, a prova está completa.

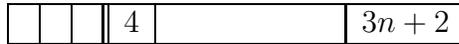
Encerramos esta seção, apresentando provas combinatórias das duas identidades envolvendo números de Fibonacci, que foram estabelecidas nos lemas 2.1 e 2.3. Para isto, usaremos o fato de que F_n conta o número de maneiras de ladrilhar um retângulo $2 \times n$ com ladrilhos 1×1 e 2×2 ou, equivalentemente, o número de maneiras de ladrilhar um retângulo $1 \times n$ com quadrados (ladrilhos 1×1) e dominós (ladrilhos 1×2). Aqui, dizemos que um ladrilhamento pode ser quebrado numa célula k se ele pode ser decomposto em dois ladrilhamentos, um cobrindo as células de 1 até k e o outro cobrindo as células de $k + 1$ até n . Se um dominó ocupa as células k e $k + 1$, dizemos que o ladrilhamento não pode ser quebrado na célula k . Para mais detalhes, veja [4].

Identidade 1: $F_{3n+2} = 2F_1 + 4F_2 + 4F_5 + 4F_8 + \dots + 4F_{3n-4} + 3F_{3n-1}, \forall n \geq 2$.

Prova:

Seja A o conjunto dos ladrilhamentos de comprimento $3n + 2$. Então, denotando por $|A|$ a cardinalidade de A , temos $|A| = F_{3n+2}$. Sejam A_k , $k = 3, 6, 9, \dots, 3n, 3n+1$, os subconjuntos de A formados pelos ladrilhamentos que podem ser quebrados na célula k .

- Considerando o conjunto $B_1 = A_3$ dos ladrilhamentos que podem ser quebrados na célula 3, temos $|B_1| = F_3 \times F_{3n-1} = 3F_{3n-1}$, conforme figura



Aqui, nas 3 primeiras células, o número de ladrilhamentos é contado por $F_3 = 3$ e nas $3n + 2 - 3 = 3n - 1$ células restantes, o número de ladrilhamentos é contado por F_{3n-1} .

- Considerando os ladrilhamentos de $B_2 = A \setminus A_2$ que podem ser quebrados na célula 6, eles têm um dominó cobrindo as células 3 e 4, porque os ladrilhamentos que podem ser quebrados na célula 3 já foram contados em B_1 . Desse modo, $|B_2| = F_2 \times F_2 \times F_{3n-4} = 4F_{3n-4}$, conforme figura

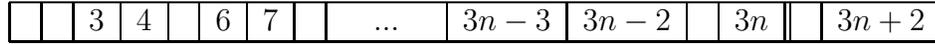


- Considerando os ladrilhamentos de $B_3 = A \setminus A_3 \cup A_6$ que podem ser quebrados na célula 9, eles devem ter um dominó cobrindo as células 3 e 4 e um dominó cobrindo as células 6 e 7. Assim, $|B_3| = F_2 \times F_2 \times F_{3n-7} = 4F_{3n-7}$, conforme figura



- De um modo geral, nos ladrilhamentos de $B_r = A \setminus \bigcup_{k=1}^{r-1} A_{3k}$, $r = 2, 3, \dots, n-1$, que podem ser quebrados na célula $3r$, temos que eles devem ter dominós cobrindo as células 3 e 4, 6 e 7, 9 e 10, ..., $3r-3$ e $3r-2$, separados por células 1×1 e situados entre dois retângulos 1×2 .

Para os ladrilhamentos de $B_n = A \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_{3k}$, que podem ser quebrados na célula $3n$, temos $|B_n| = 4F_2$, conforme figura



- Finalmente, considerando o conjunto $B_{n+1} = A \setminus \bigcup_{k=1}^n A_{3k}$, que podem ser quebrados na célula $3n+1$ (deve ter um dominó cobrindo as células $3n$ e $3n+1$), temos $|B_{n+1}| = 2F_1$, conforme figura



Como os conjuntos B_k , $k = 1, 2, \dots, n+1$ são disjuntos e $A = \bigcup_{k=1}^{n+1} B_k$, segue que

$$F_{3n+2} = 2F_1 + 4F_2 + 4F_5 + 4F_8 + \dots + 4F_{3n-4} + 3F_{3n-1}, \forall n \geq 2.$$

Identidade 2:

$$F_{3n} = 4F_0 + 4F_3 + 4F_6 + \dots + 4F_{3n-6} + 3F_{3n-3}, \forall n \geq 1.$$

A prova é análoga. Por esse motivo, a omitimos.

2.1.3 O Diagrama $\frac{1}{2}\text{Hex2}$

O diagrama $\frac{1}{2}\text{Hex2}$ está apresentado na figura 5, onde temos um diagrama legal de peso 38.

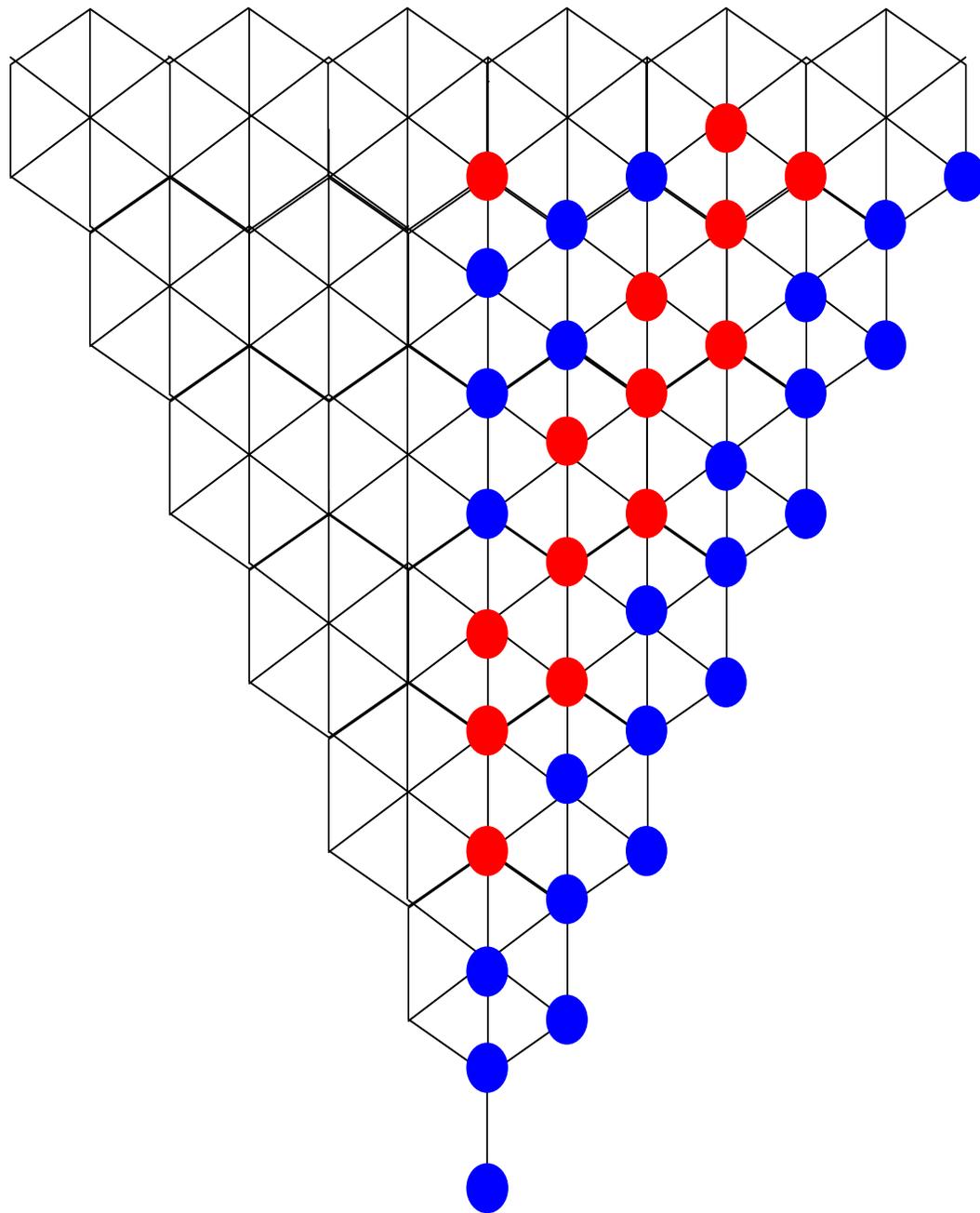


figura 5
35

Lendo-o nas diagonais, como foi feito no caso do diagrama **Hex2**, obtemos o seguinte teorema

Teorema 2.3 *Dado um diagrama de peso n de $\frac{1}{2}\mathbf{Hex2}$, temos que ele corresponde a uma partição de n em partes distintas, com as seguintes restrições*

- *se uma parte $= 1, 2, 3, 4$ ocorre, então ela é a última parte;*
- *se uma parte $\lambda_m = 3k + i$, $k \geq 1$ e $i = 2, 3$ ocorre, então a próxima parte λ_{m+1} vale no mínimo $3k - 6$ e no máximo $3k - 2$;*
- *sempre que uma parte $\lambda_m = 3k + 1$, $k \geq 3$ ocorre, então a próxima parte λ_{m+1} vale no mínimo $3k - 6$ e no máximo $3k - 4$.*

Na tabela 5, temos os valores de uma parte λ_m e os possíveis valores da parte seguinte λ_{m+1}

λ_m	λ_{m+1}
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0,1
6	0,1
7	1,2
8	1,2,3,4
9	1,2,3,4
10	3,4,5
11	3,4,5,6,7
12	3,4,5,6,7
13	6,7,8
14	6,7,8,9,10
15	6,7,8,9,10
16	9,10,11
17	9,10,11,12,13
\vdots	\vdots

tabela 5

Denotando por $f(\frac{1}{2}\mathbf{Hex2}; q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(\frac{1}{2}\mathbf{Hex2}, q; n)q^n$ a função geradora para

o número de diagramas legais de peso n de $\frac{1}{2}\mathbf{Hex2}$, podemos, a partir da tabela 5, escrever

$$f\left(\frac{1}{2}\mathbf{Hex2}; q\right) = \sum_{n=0}^{\infty} p\left(\frac{1}{2}\mathbf{Hex2}, q; n\right)q^n =$$

$$\begin{aligned} &= 1 + \\ &+ q \\ &+ q^2 \\ &+ q^3 \\ &+ q^4 \\ &+ q^5(1 + q) \\ &+ q^6(1 + q) \\ &+ q^7(q + q^2) \\ &+ q^8(q + q^2 + q^3 + q^4) \\ &+ q^9(q + q^2 + q^3 + q^4) \\ &+ q^{10}[q^3 + q^4 + q^5(1 + q)] \\ &+ q^{11}[q^3 + q^4 + q^5(1 + q) + q^6(1 + q) + q^7(q + q^2)] \\ &+ q^{12}[q^3 + q^4 + q^5(1 + q) + q^6(1 + q) + q^7(q + q^2)] \\ &+ q^{13}[q^6(1 + q) + q^7(q + q^2) + q^8(q + q^2 + q^3 + q^4)] \\ &+ \dots \end{aligned}$$

ou, de forma recursiva

$$f\left(\frac{1}{2}\mathbf{Hex2}; q\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(q)q^n,$$

$$\text{onde } f_0(q) = f_1(q) = f_2(q) = f_3(q) = f_4(q) = 1$$

$$f_5(q) = f_6(q) = 1 + q$$

$$f_7(q) = q + q^2$$

$$f_8(q) = f_9(q) = q + q^2 + q^3 + q^4$$

$$k \geq 3 \Rightarrow \begin{cases} f_{3k+2}(q) = f_{3k+3}(q) = \sum_{j=3k-6}^{3k-2} f_j(q)q^j \\ f_{3k+1}(q) = \sum_{j=3k-6}^{3k-4} f_j(q)q^j \end{cases}$$

Da definição acima, constatamos que para $q = 1$, a seqüência obtida $\{f_n\}_{n \geq 0}$ é

$$1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 8, 8, 8, \dots,$$

isto é, $f_0 = f_1 = 1$ e, a partir de $n = 2$, f_n assume como valores potências consecutivas de 2, cada uma delas tomada 3 vezes. Afirmamos que isto vale para todo n , conforme provamos no teorema seguinte.

Teorema 2.4 *Seja $\{f_n\}_{n \geq 0}$ a seqüência obtida quando fazemos $q = 1$ na definição recursiva anterior. Tem-se*

(i) $f_0 = f_1 = 1$.

(ii) Se $n \geq 1$, então

$$f_{3n-1} = f_{3n} = f_{3n+1} = 2^{n-1}.$$

Prova:

Conforme a definição recursiva, a afirmação (i) é imediata. Com relação à afirmação (ii), temos inicialmente que ela vale para $n = 1, 2, 3$, uma vez que da definição anterior, temos

$$n = 1 \Rightarrow f_2 = f_3 = f_4 = 1 = 2^0$$

$$n = 2 \Rightarrow f_4 = f_5 = f_6 = 2 = 2^1$$

$$n = 3 \Rightarrow \begin{cases} f_8 = f_9 = 4 = 2^2 \\ f_{10} = f_{3 \times 3 + 1} = \sum_{j=3}^5 f_j = f_3 + f_4 + f_5 = 1 + 1 + 2 = 4 = 2^2 \end{cases}$$

Para provarmos que a afirmação (ii) é verdadeira para todo $n \geq 4$, mostraremos que para todo $n \geq 4$, tem-se

a) $f_{3n-1} = f_{3n} = f_{3n+1}$,

b) $f_{3n} = 2^{n-1}$.

Como segue da definição que $f_{3n-1} = f_{3n}$, para que a prova de (a) seja feita, basta mostrarmos que $f_{3n} = f_{3n+1}, \forall n \geq 4$. Para isso, temos inicialmente que vale para $n = 4$, pois

$$\begin{aligned} f_{3 \times 4} &= f_{3 \times 3 + 3} = \sum_{j=3}^7 f_j = f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 \\ &= 1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 8 \end{aligned}$$

e

$$f_{3 \times 4 + 1} = \sum_{j=6}^8 f_j = f_6 + f_7 + f_8 = 2 + 2 + 4 = 8.$$

- se uma parte $\lambda_m = 1, 2$, então ela é a última;
- se uma parte $\lambda_m = 4$, então a próxima parte é, no máximo, 1;
- se uma parte $\lambda_m = 6, 8$, então a próxima parte vale, no mínimo, 1 e difere de pelo menos 4;
- se uma parte $\lambda_m = 4k$, $k \geq 3$ ocorre, então a próxima parte λ_{m+1} vale, no mínimo, $4k - 8$ e no máximo $4k - 4$;
- se uma parte $\lambda_m = 4k + 2$, $k \geq 2$ ocorre, então a próxima parte λ_{m+1} vale, no mínimo, $4k - 4$ e, no máximo, $4k - 2$.

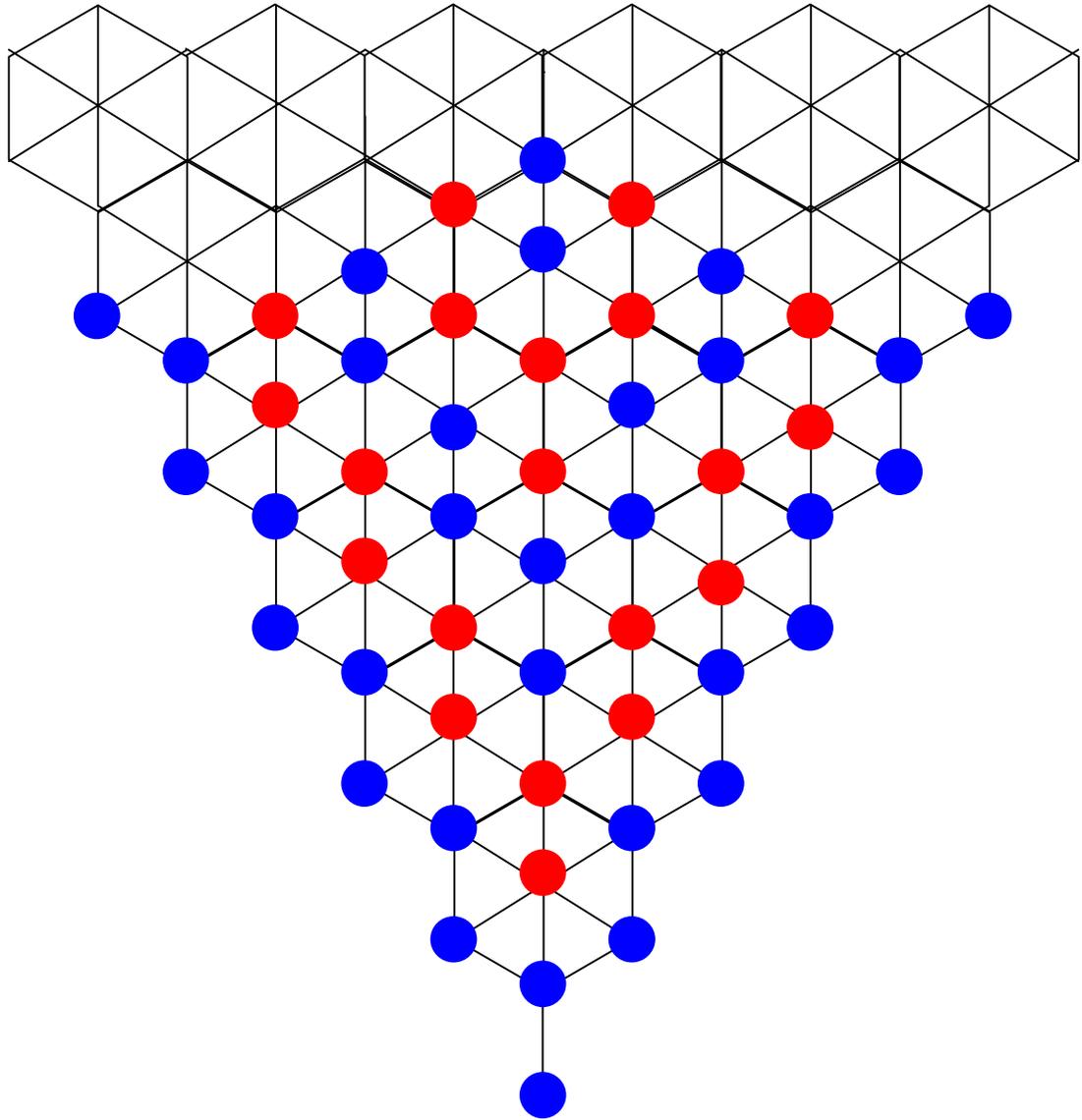


figura 6

Na tabela 6, temos os valores de uma parte λ_m e os possíveis valores da parte seguinte λ_{m+1}

λ_m	λ_{m+1}
1	0
2	0
4	0,1
6	1,2
8	1,2,4
10	4,6
12	4,6,8
14	8,10
16	8,10,12
18	12,14
20	12,14,16
\vdots	\vdots

tabela 6

Assim, denotando por $f(Hex2, \sigma; q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(Hex2, \sigma, q; n)q^n$ a função geradora para o número de diagramas legais simétricos de peso n de **Hex2** (σ denota a citada simetria), podemos, a partir da tabela 6, escrever

$$\begin{aligned}
 f(Hex2, \sigma; q) &= \sum_{n=0}^{\infty} p(Hex2, \sigma, q; n)q^n = \\
 &= 1 + \\
 &+ q \\
 &+ q^2 \\
 &+ q^4(1 + q) \\
 &+ q^6(q + q^2) \\
 &+ q^8[q + q^2 + q^4(1 + q)] \\
 &+ q^{10}[q^4(1 + q) + q^6(q + q^2)] \\
 &+ q^{12}[q^4(1 + q) + q^6(q + q^2) + q^8(q + q^2 + q^4(1 + q))] \\
 &+ q^{14}[q^8(q + q^2 + q^4(1 + q)) + q^{10}(q^4(1 + q) + q^6(q + q^2))] \\
 &+ \dots
 \end{aligned}$$

ou, de forma recursiva

$$f(\text{Hex2}, \sigma; q) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(q)q^n,$$

onde

$$f_0(q) = f_1(q) = f_2(q) = 1$$

$$f_4(q) = 1 + q$$

$$f_6(q) = q + q^2$$

$$f_8(q) = q + q^2 + q^4(1 + q)$$

$$k \geq 2 \Rightarrow f_{4k+2}(q) = \sum_{j=4k-4}^{4k-2} f_j(q)q^j$$

$$k \geq 3 \Rightarrow f_{4k}(q) = \sum_{j=4k-8}^{4k-4} f_j(q)q^j$$

$$k \geq 1 \Rightarrow f_{2k+1}(q) = 0$$

Observação: Seja a seqüência $\{g_n\}_{n \geq 0}$ dada por $g_n = f_{2n}$, onde $\{f_n\}_{n \geq 0}$ é a seqüência obtida quando fazemos $q = 1$ na definição recursiva anterior. Temos

$$g_{2k} = g_{2k+1} = 2^k,$$

ou seja, é a seqüência

$$1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, \dots,$$

que conta as partições simétricas de um inteiro $n \geq 0$. Uma partição simétrica de n é uma partição de n cujas partes são ordenadas de modo que as partes equidistantes dos extremos são iguais:

$$n = 0 \Rightarrow g_0 = 1 \Rightarrow \text{partição vazia}$$

$$n = 1 \Rightarrow g_1 = 1 \Rightarrow 1$$

$$n = 2 \Rightarrow g_2 = 2 \Rightarrow 2, 1 + 1$$

$$n = 3 \Rightarrow g_3 = 2 \Rightarrow 3, 1 + 1 + 1$$

$$n = 4 \Rightarrow g_4 = 4 \Rightarrow 4, 2 + 2, 1 + 2 + 1, 1 + 1 + 1 + 1$$

$$n = 5 \Rightarrow g_5 = 4 \Rightarrow 5, 2 + 1 + 2, 1 + 3 + 1, 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

etc.

Desse modo, temos o teorema seguinte.

Teorema 2.6 *Tem-se:*

- $f_0 = f_1$ é o número de partições simétricas de 0;
- f_2 é o número de partições simétricas de 1;
- o número de partições começando com $n = 4k$ ou $n = 4k+2$, $k \geq 1$, que representam diagramas legais simétricos de $Hex2$, é igual ao número de partições simétricas de $\frac{n}{2}$, isto é

$$f_{4k} = f_{4k+2} = 2^k.$$

A tabela 7 ilustra a afirmação do teorema:

n	f_n
0	$1 = f_0 = g_0 = 2^0$
1	$1 = f_1 = 2^0$
2	$1 = f_2 = g_1 = 2^0$
4	$2 = f_4 = g_2 = 2^1$
6	$2 = f_6 = g_3 = 2^1$
8	$4 = f_8 = g_4 = 2^2$
10	$4 = f_{10} = g_5 = 2^2$
12	$8 = f_{12} = g_6 = 2^3$
14	$8 = f_{14} = g_7 = 2^3$
16	$16 = f_{16} = g_8 = 2^4$
18	$16 = f_{18} = g_9 = 2^4$
\vdots	\vdots

tabela 7

A prova é feita através dos dois lemas seguintes:

Lema 2.5 *Se $k \geq 1$, então $f_{4k} = f_{4k+2}$.*

Prova:

Conforme tabela, temos que a afirmação é verdadeira para $k = 1$ e $k = 2$. Para $k \geq 3$, temos

$$\begin{aligned}
f_{4k+2} &= \sum_{j=4k-4}^{4k-2} f_j = f_{4k-4} + f_{4k-2} \\
&= f_{4k-4} + f_{4(k-1)+2} \\
&= f_{4k-4} + \sum_{j=4(k-1)-4}^{4(k-1)-2} f_j \\
&= f_{4k-4} + \sum_{j=4k-8}^{4k-6} f_j \\
&= \sum_{j=4k-8}^{4k-4} f_j = f_{4k},
\end{aligned}$$

o que completa a prova.

Lema 2.6 *Se $k \geq 1$, então $f_{4k} = 2^k$.*

Prova:

A afirmação é verdadeira para $k = 1, 2, 3$, pois

$$k = 1 \Rightarrow f_{4k} = f_4 = 2 = 2^1$$

$$k = 2 \Rightarrow f_{4k} = f_8 = 4 = 2^2$$

$$k = 3 \Rightarrow f_{4k} = f_{12} = \sum_{j=4}^8 f_j = f_4 + f_6 + f_8 = 2 + 2 + 4 = 8 = 2^3$$

Na hipótese de que $f_{4k} = 2^k$, $k \geq 3$, vamos mostrar que $f_{4(k+1)} = f_{4k+4} = 2^{k+1}$. Temos

$$\begin{aligned}
f_{4k+4} &= f_{4(k+1)} = \sum_{j=4(k+1)-8}^{4(k+1)-4} f_j = \sum_{j=4k-4}^{4k} f_j \\
&= 2^k + f_{4k-4} + f_{4k-2}.
\end{aligned}$$

Mas $f_{4k-4} + f_{4k-2} = 2^k$, $k \geq 3$, pois isto é verdadeiro para $k = 3$ e, na hipótese de que $f_{4r-4} + f_{4r-2} = 2^r$, $r \geq 3$, a prova de que vale para $k = r + 1$ segue do teorema anterior. Logo

$$f_{4k+4} = 2^k + 2^k = 2^{k+1},$$

ficando encerrada a prova.

2.2 Variação 2: Uma seqüência envolvendo potências de 3

Aqui, tratamos de uma outra variação do diagrama **Hex** (diagrama **Hex3**), que apresentamos na figura 7, onde temos um diagrama legal de peso $n = 41$ e a partição associada $\lambda = 20 + 13 + 8$, a qual foi obtida lendo nas diagonais, de baixo para cima e da direita para a esquerda e contando o número de pontos em cada faixa diagonal. O teorema abaixo estabelece como são as partes da partição associada.

Teorema 2.7 *Dado um diagrama de peso n de **Hex3**, temos que ele corresponde a uma partição de n , onde:*

- não há parte $\equiv 3, 5 \pmod{6}$;
- a) se uma parte é $= 1, 2$ ou 4 , então ela é a última;
b) se $\lambda_m \equiv 4 \pmod{6}$, $\lambda_m > 4$, digamos $\lambda_m = 6k + 4$, $k \geq 1$, então $\lambda_{m+1} = 6k - 2$;
c) se $\lambda_m \equiv 0, 1, 2 \pmod{6}$, $\lambda_m > 2$, digamos $\lambda_m = 6k, 6k + 1, 6k + 2$, $k \geq 1$, então λ_{m+1} vale, no mínimo, $6k - 6$ e, no máximo, $6k - 4$.

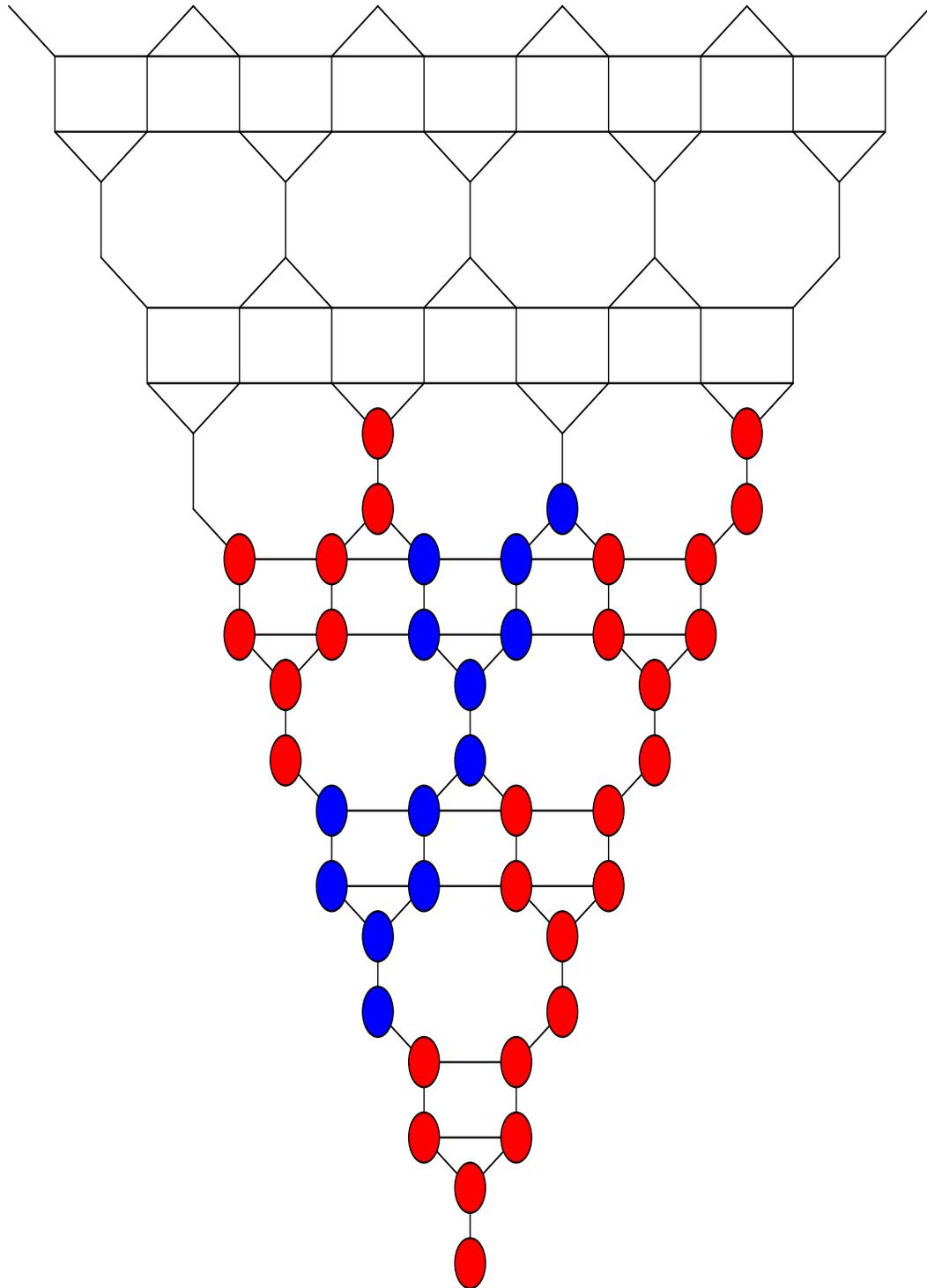


figura 7

Salientamos que está claro que este comportamento se repete com as segunda e terceira faixas, as terceira e quarta faixas e assim por diante.

Na tabela 8, temos valores de uma parte λ_m e os possíveis valores da parte seguinte λ_{m+1} , ilustrando a conclusão tirada a partir da figura 7.

λ_m	λ_{m+1}
1	0
2	0
4	0
6	0,1,2
7	0,1,2
8	0,1,2
10	4
12	6,7,8
13	6,7,8
14	6,7,8
16	10
18	12,13,14
19	12,13,14
20	12,13,14
22	16
24	18,19,20
25	18,19,20
26	18,19,20

tabela 8

Denotando por $f(\text{Hex3}; q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(\text{Hex3}, q; n)q^n$ a função geradora para o número de diagramas legais de peso n de **Hex3**, podemos, a partir da tabela 8, escrever

$$\begin{aligned}
 f(\text{Hex3}; q) &= \sum_{n=0}^{\infty} p(\text{Hex3}, q; n)q^n = \\
 &= 1 + \\
 &+ q + \\
 &+ q^2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ q^4 + \\
&+ q^6[1 + q + q^2] + \\
&+ q^7[1 + q + q^2] + \\
&+ q^8[1 + q + q^2] + \\
&+ q^{10} \times q^4 + \\
&+ q^{12}[q^6(1 + q + q^2) + q^7(1 + q + q^2) + q^8(1 + q + q^2)] + \\
&+ q^{13}[q^6(1 + q + q^2) + q^7(1 + q + q^2) + q^8(1 + q + q^2)] + \\
&+ q^{14}[q^6(1 + q + q^2) + q^7(1 + q + q^2) + q^8(1 + q + q^2)] + \\
&+ q^{16} \times q^{10} \times q^4 + \\
&+ q^{18}[q^{12}(q^6(1 + q + q^2) + q^7(1 + q + q^2) + q^8(1 + q + q^2)) + \\
&+ q^{13}(q^6(1 + q + q^2) + q^7(1 + q + q^2) + q^8(1 + q + q^2)) + \\
&+ q^{14}(q^6(1 + q + q^2) + q^7(1 + q + q^2) + q^8(1 + q + q^2))] + \dots + \\
&+ q^{22} \times q^{16} \times q^{10} \times q^4 + \\
&+ \dots
\end{aligned}$$

ou, de forma recursiva

$$f(\text{Hex3}; q) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(q)q^n,$$

onde

$$\begin{aligned}
f_0(q) &= f_1(q) = f_2(q) = f_4(q) = 1 \\
f_{6k+3}(q) &= f_{6k+5}(q) = 0, k \geq 0 \\
f_{6k+4}(q) &= \prod_{j=1}^k q^{6j-2}, k \geq 1
\end{aligned}$$

$$k \geq 1 \Rightarrow f_{6k}(q) = f_{6k+1}(q) = f_{6k+2}(q) = \sum_{j=6k-6}^{6k-4} f_j(q)q^j$$

Destacamos que, para $q = 1$, a seqüência f_0, f_1, f_2, \dots , onde f_n denota o número de partições começando com n e que representam diagramas legais de **Hex3** é dada por

$$1, 1, 1, 0, 1, 0, 3, 3, 3, 0, 1, 0, 9, 9, 9, 0, 1, 0, 27, 27, 27, 0, 1, 0, \dots,$$

formada por potências consecutivas de 3, cada uma tomada 3 vezes e separadas por 0,1,0.

Afirmamos que tal comportamento se verifica para todo $n \geq 0$, conforme provamos no teorema seguinte

Teorema 2.8 *Seja $\{f_n\}_{n \geq 0}$ a seqüência obtida da seqüência de polinômios $\{f_n(q)\}_{n \geq 0}$, quando fazemos $q = 1$ na definição recursiva anterior. Então*

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0 = f_1 = f_2 = f_4 = 1, \\ f_{6k+3} = f_{6k+5} = 0, k \geq 0, \quad e \quad f_{6k+4} = 1, k \geq 1 \\ k \geq 1 \Rightarrow f_{6k} = f_{6k+1} = f_{6k+2} = 3^k \end{array} \right.$$

Prova:

As duas primeiras afirmações são imediatas. Para a prova da terceira afirmação, basta mostrar que $f_{6k} = 3^k$, $k \geq 1$. Inicialmente, temos que isto é verdade para $k = 1$, uma vez que $f_6 = \sum_{j=0}^2 f_j = f_0 + f_1 + f_2 = 1 + 1 + 1 = 3$.

Na hipótese de que $f_{6r} = 3^r$, $r \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} f_{6(r+1)} &= \sum_{j=6(r+1)-6}^{6(r+1)-4} f_j = \sum_{j=6r}^{6r+2} f_j \\ &= f_{6r} + f_{6r+1} + f_{6r+2} = 3f_{6r} = 3 \times 3^r = 3^{r+1}, \end{aligned}$$

o que encerra a prova.

2.3 Variação 3: Diagrama Hex4

O diagrama **Hex4** está apresentado na figura 8, onde temos um diagrama legal de peso 25.

2.3.1 Função geradora para o número de diagramas de peso n de Hex4

Dado um diagrama de peso n de **Hex4**, lendo de baixo para cima e da esquerda para a direita, conforme figura 8, obtemos o seguinte teorema:

Teorema 2.9 *Dado um diagrama de peso n de **Hex4**, temos que ele corresponde a uma partição de n , onde se uma parte do tipo $3k + 1$ ou $3k + 2$, $k \geq 0$, ocorre, então a próxima parte é no máximo $3k$ (isto indica que as partes do tipo $3k + 1$ ou $3k + 2$ não ocorrem ambas na mesma partição) e que não há restrição para as partes $\equiv 0 \pmod{3}$.*

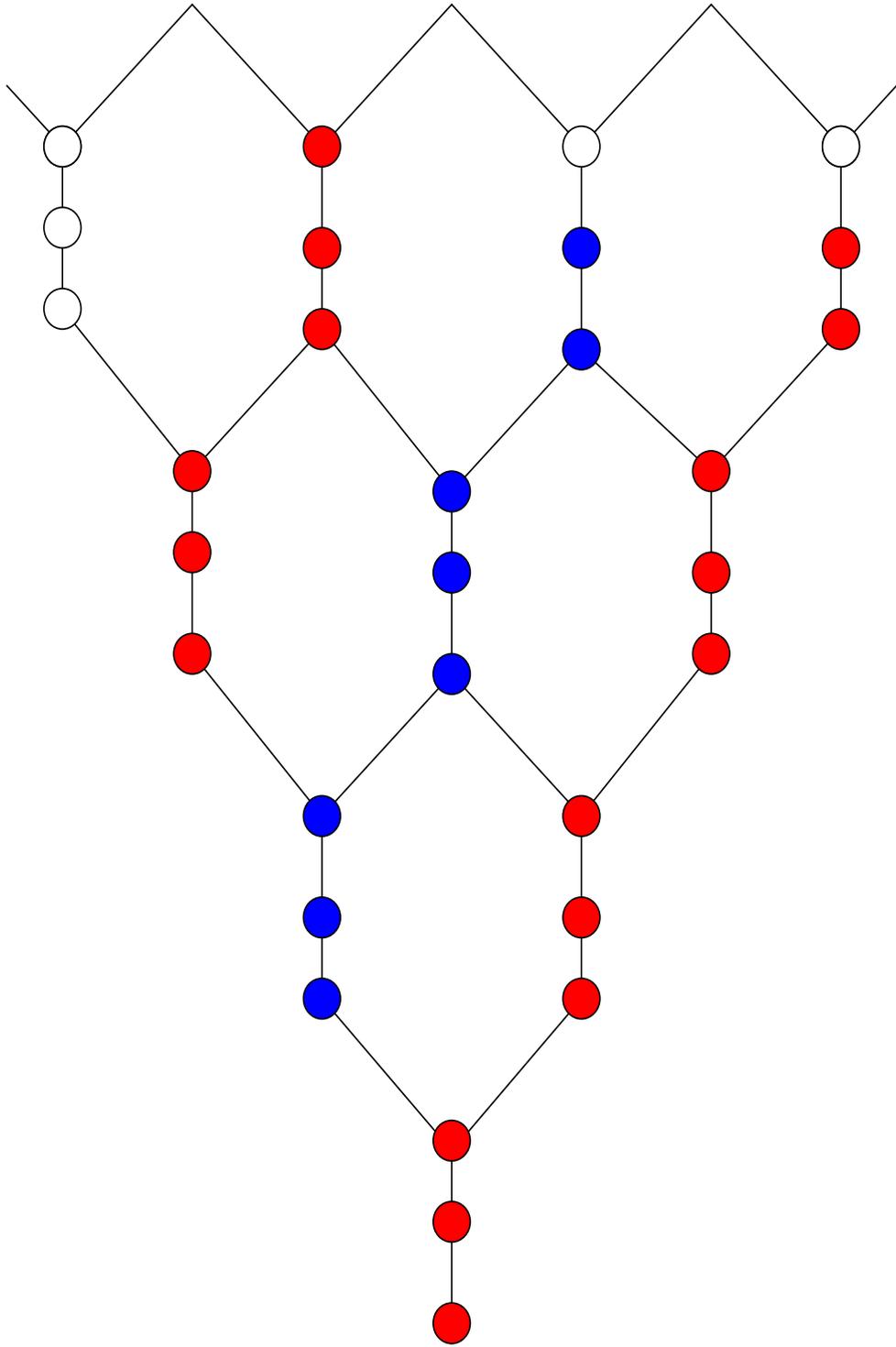


figura 8
51

Desse modo, denotando por $f(Hex4; q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(Hex4, q; n)q^n$ a pretendida função geradora, temos

$$\begin{aligned}
f(Hex4; q) &= \sum_{n=0}^{\infty} p(Hex4, q; n)q^n \\
&= 1 + \\
&+ q + \\
&+ \frac{q^4(1+q+q^2)}{1-q^3} \\
&+ \frac{q^7(1+q+q^2)(1+q^4+q^5)}{(1-q^3)(1-q^6)} + \dots \\
&+ q^2 \\
&+ \frac{q^5(1+q+q^2)}{1-q^3} \\
&+ \frac{q^8(1+q+q^2)(1+q^4+q^5)}{(1-q^3)(1-q^6)} + \dots \\
&+ \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^{3k}} \\
&= 1 + q + q^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{(1+q^{3j+1}+q^{3j+2})q^{3k+1}}{1-q^{3j+3}} \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{(1+q^{3j+1}+q^{3j+2})q^{3k+2}}{1-q^{3j+3}} \\
&+ \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^{3k}},
\end{aligned}$$

ou, definindo $\prod_{j=0}^{k-1} \frac{1+q^{3j+1}+q^{3j+2}}{1-q^{3j+3}} = 1$, quando $k = 0$,

$$f(Hex4; q) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{(1+q^{3j+1}+q^{3j+2})(q^{3k+1}+q^{3k+2})}{1-q^{3j+3}} + \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^{3k}}.$$

Observações:

- em [12], James Propp, ao tratar do diagrama Hex (com dois pontos em

cada segmento vertical: os vértices do lado do hexágono), mostrou que

$$f(\text{Hex}; q) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + q^{2n-1}}{1 - q^{2n}},$$

o que equivale à nossa interpretação de que se uma parte do tipo $2k + 1$ ocorre, então a próxima parte é no máximo $2k$, $k \geq 0$. Desse modo, é imediata a identidade

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{1 + q^{2j+1}}{1 - q^{2j+2}} \times q^{2n+1} + \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{3n}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + q^{2n-1}}{1 - q^{2n}}.$$

- Generalizando para o caso de termos $r \geq 2$ pontos em cada segmento vertical da figura 8, temos que

$$\begin{aligned} f(\text{Hex}_{r+1}; q) &= \sum_{n=0}^{\infty} p(\text{Hex}_{r+1}, q; n) q^n \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{(1 + q^{rj+1} + q^{rj+2} + \dots + q^{rj+r-1})(q^{rk+1} + q^{rk+2} + \dots + q^{rk+r-1})}{1 - q^{rj+r}} \\ &\quad + \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{rk}}. \end{aligned}$$

2.3.2 Função geradora para o número de diagramas de peso n de $\frac{1}{2}\text{Hex}4$

Dado um diagrama de peso n de $\frac{1}{2}\text{Hex}4$, lendo nas diagonais, conforme figura 9, temos:

Teorema 2.10 *Dado um diagrama de peso n de $\frac{1}{2}\text{Hex}4$, temos que ele corresponde a uma partição de n em partes distintas, onde, se uma parte é do tipo $3k$, $3k + 1$ ou $3k + 2$, $k \geq 0$, então a próxima vale no máximo $3k - 3$.*

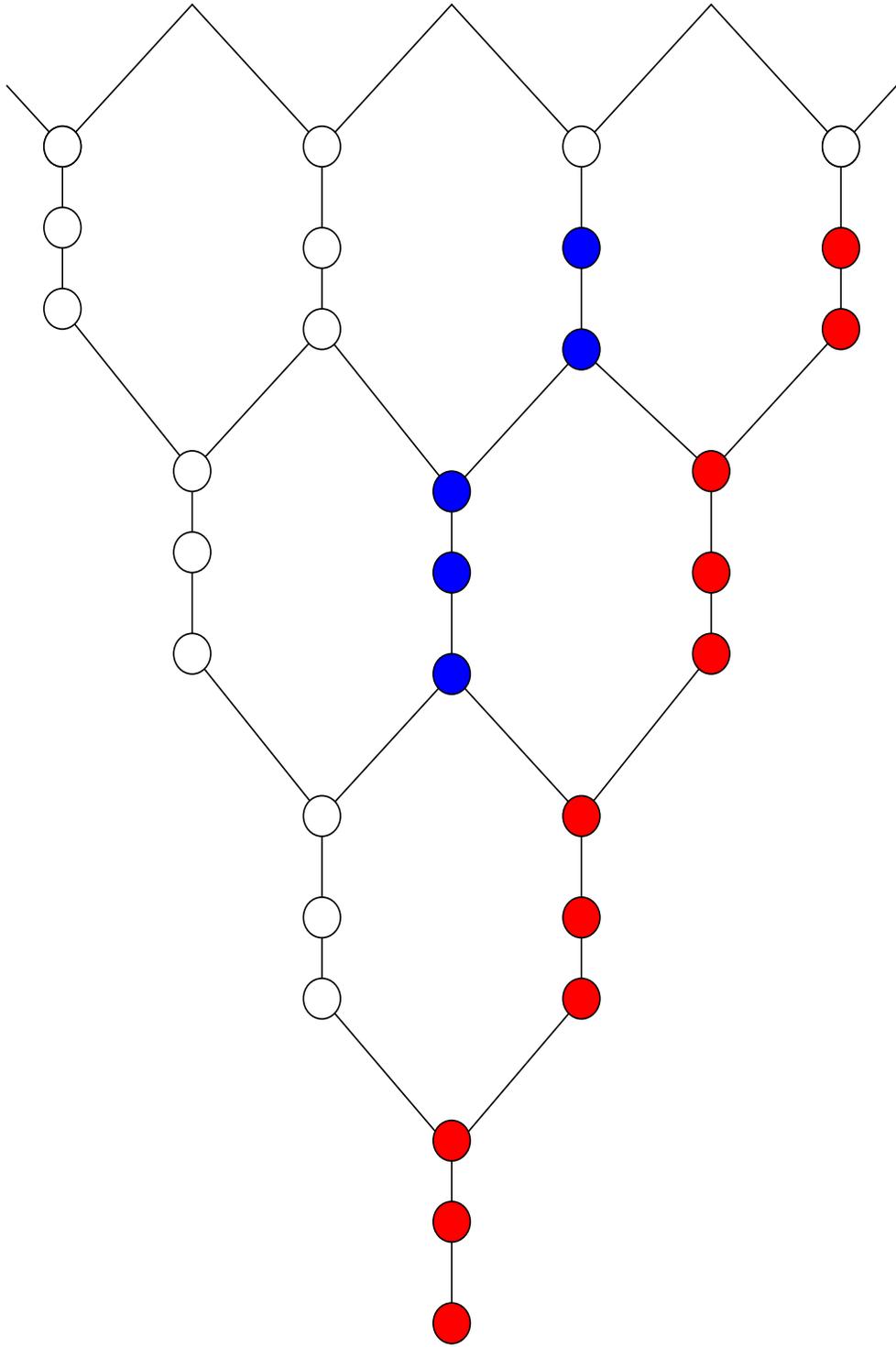


figura 9
54

Então, denotando por $f(\frac{1}{2}\text{Hex4}; q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(\frac{1}{2}\text{Hex4}, q; n)q^n$ a função geradora, temos que

$$\begin{aligned}
f(\frac{1}{2}\text{Hex4}; q) &= 1 \\
&+ q \\
&+ q^2 \\
&+ (q^3 + q^4 + q^5) \times 1 \\
&+ (q^6 + q^7 + q^8) \times (1 + q + q^2 + q^3) \\
&+ (q^9 + q^{10} + q^{11}) \times (1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6) \\
&+ \dots \\
&= 1 + q + q^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (q^{3k} + q^{3k+1} + q^{3k+2})(1 + q + \dots + q^{3k-3}) \\
&= 1 + q + q^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(q^{3k} + q^{3k+1} + q^{3k+2})(1 - q^{3k-2})}{1 - q}.
\end{aligned}$$

Observações:

- No diagrama $\frac{1}{2}\text{Hex2}$ (veja [12]), James Propp mostrou que um diagrama de peso n corresponde a uma partição em partes distintas não consecutivas, onde as partes ímpares diferem de pelo menos 4. Gölnitz (veja [7]) mostrou que este número é igual ao número de partições em partes $\equiv 1, 5, 6 \pmod{8}$. Desse modo, Propp estabeleceu que

$$f(\frac{1}{2}\text{Hex4}; q) = \prod_{n \equiv 1, 5, 6 \pmod{8}} \frac{1}{1 - q^n}.$$

De acordo com nossa interpretação, este diagrama legal corresponde a uma partição de n em partes distintas, onde, se uma parte do tipo $2k$ ou $2k + 1$, $k \geq 0$, ocorre, então a próxima é no máximo $2k - 2$, que equivale à descrição das partições de Propp. Desse modo, é imediata a identidade

$$\prod_{n \equiv 1, 5, 6 \pmod{8}} \frac{1}{1 - q^n} = 1 + q + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(q^{2n} + q^{2n+1})(1 - q^{2n-1})}{1 - q}.$$

- Generalizando para o caso de se ter $r \geq 2$ pontos em cada segmento vertical de Hex, temos

$$f\left(\frac{1}{2}\text{Hex}_r\right) = 1 + q + \cdots + q^{r-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(q^{rk} + q^{rk+1} + \cdots + q^{r(k+r-1)})(1 - q^{r(k-r+1)})}{1 - q}.$$

2.4 Variação 4: Diagrama A_3

O diagrama A_3 é um subconjunto de \mathbf{Sq} (veja [12]) definido por

$$A_3 = \{(a, b) \in Sq : a \equiv b \pmod{3}\}$$

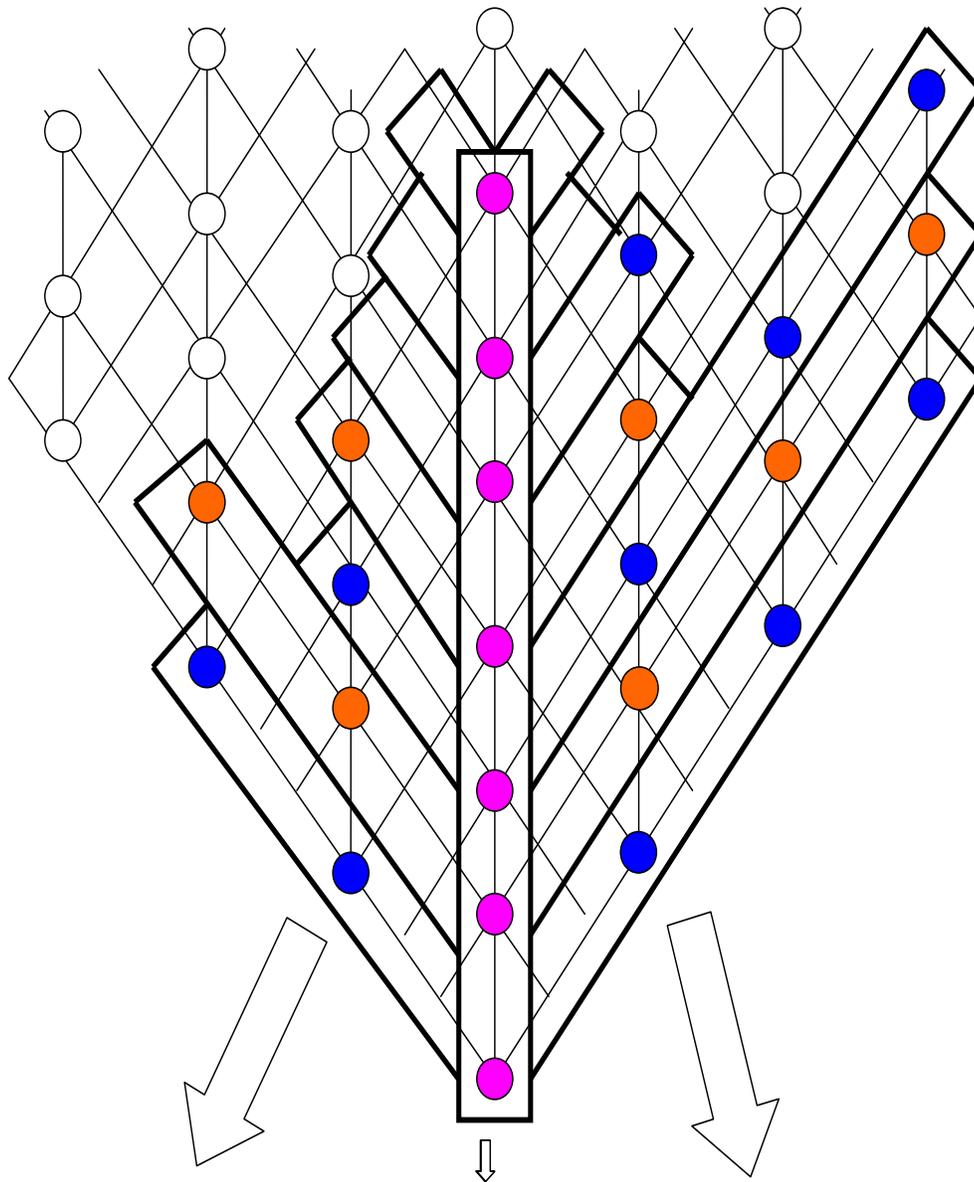
e está apresentado na figura 10.

2.4.1 Função geradora para o número de diagramas de peso n de A_3

Afim de obter a função geradora para o número de diagramas legais de peso n de A_3 , destaquemos na coluna central os m pontos que nela estão presentes, conforme figura 10. Fixando nossa atenção no lado esquerdo, devemos ter no mínimo $m - 3$ braços e no máximo m braços, pois o último ponto da coluna central força a existência de pelo menos $m - 3$ braços e mais do que m braços forçaria acrescentar mais pontos na coluna central. Acrescentando braços sem pontos de modo a se ter m braços, temos que o conjunto do lado esquerdo corresponde a uma partição de um número α em m partes não negativas, onde cada parte aparece no máximo 3 vezes. De modo análogo temos, para o lado direito o mesmo tipo de partição para um número β .

Desse modo, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.11 *O número de diagramas legais de peso n de A_3 ($p(A_3; n)$) é igual a $\varphi_3(n)$, número de partições generalizadas de Frobenius, onde, em cada linha, cada parte aparece no máximo 3 vezes.*



$m = 7$

partição de $a = 6$ em partes ≥ 0 ,
onde cada parte ocorre no máximo
3 vezes: $(2,2,1,1,0,0,0)$.

figura 10 partição de $b = 11$ em partes
 ≥ 0 , onde cada parte ocorre no
máximo 3 vezes: $(3,3,3,1,1,0,0)$

Partição generalizada de Frobenius: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Andrews (veja [2]) mostrou que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_3(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+q^{6n-3})}{(1-q^{12n})} \times \frac{1}{(1-q^{6n-5})(1-q^{6n-4})^2(1-q^{6n-3})^2(1-q^{6n-2})^2(1-q^{6n-1})}.$$

Assim, denotando por $f(A_3; q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(A_3; n)q^n$, temos que

$$f(A_3; q) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+q^{6n-3})}{(1-q^{12n})} \times \frac{1}{(1-q^{6n-5})(1-q^{6n-4})^2(1-q^{6n-3})^2(1-q^{6n-2})^2(1-q^{6n-1})}.$$

2.4.2 Função geradora para o número de diagramas de peso n de $\frac{1}{2}A_3$

Dado um diagrama de peso n de $\frac{1}{2}A_3$, lendo nas diagonais, conforme figura 11, temos:

Teorema 2.12 *Dado um diagrama de peso n de $\frac{1}{2}A_3$, temos que ele corresponde a uma partição de n em que nenhuma parte ocorre mais do que 3 vezes.*

Desse modo, denotando por $f(\frac{1}{2}A_3; q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(\frac{1}{2}A_3; n)q^n$ a função geradora para o número de diagramas de peso n de $\frac{1}{2}A_3$, temos

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{2}A_3; q) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n + q^{2n} + q^{3n}) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - q^{4n}}{1 - q^n} \\ &= \prod_{n \equiv 1, 2, 3 \pmod{4}} \frac{1}{1 - q^n} \\ &= \prod_{n \not\equiv 0 \pmod{4}} \frac{1}{1 - q^n}. \end{aligned}$$

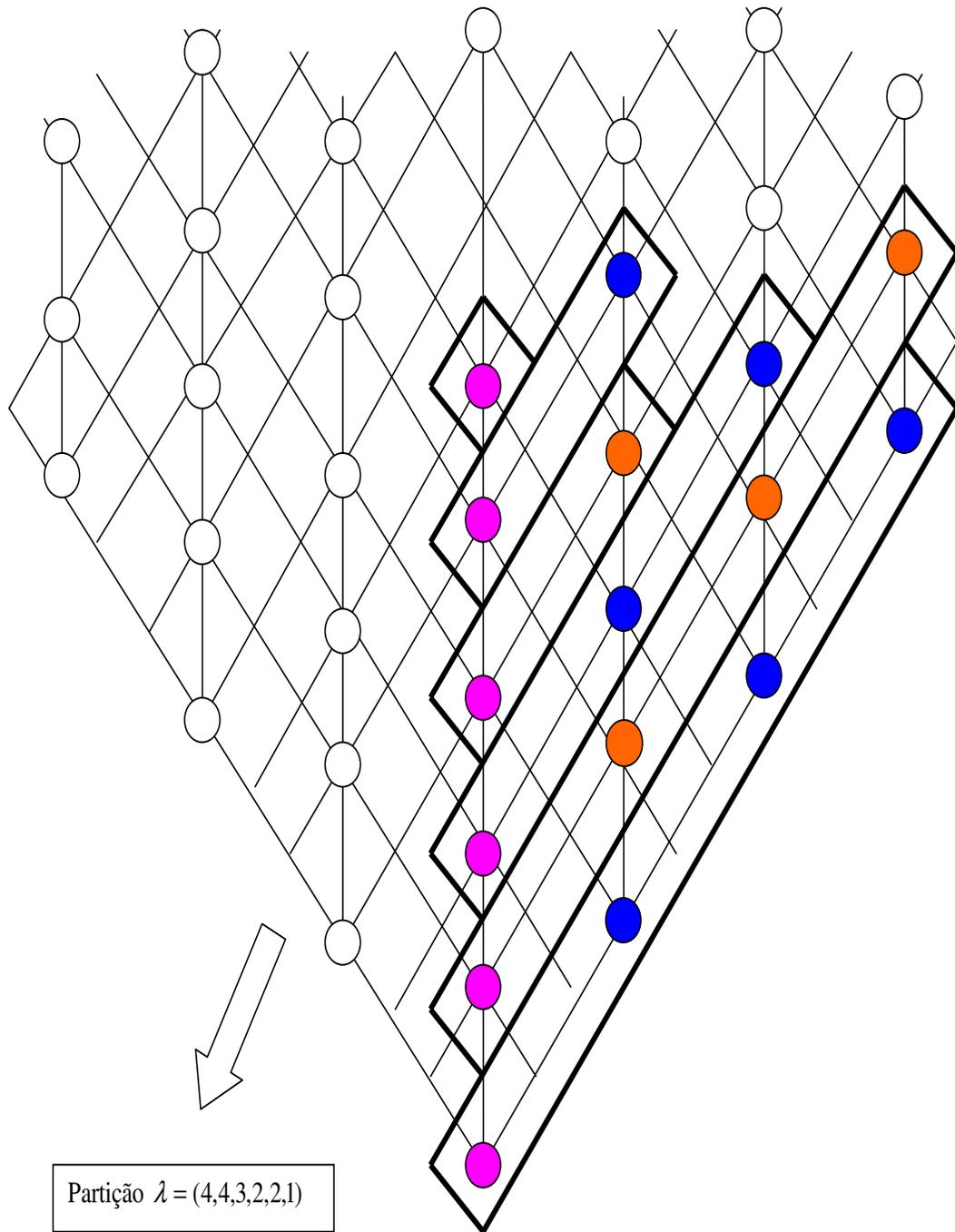


figura 11
59

2.4.3 Função geradora para o número de diagramas simétricos de peso n de A_3

Dado um diagrama simétrico de peso n de A_3 , lendo em \mathbf{V} 's, conforme figura 12, temos:

Teorema 2.13 *Dado um diagrama simétrico de peso n de A_3 , temos que ele corresponde a uma partição de n em partes ímpares, onde nenhuma parte ocorre mais do que 3 vezes.*

Desse modo, denotando por $f(A_3, \sigma; q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(A_3, \sigma; n)q^n$, temos que

$$\begin{aligned} f(A_3, \sigma; q) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1} + q^{2(2n-1)} + q^{3(2n-1)}) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - q^{4(2n-1)}}{1 - q^{2n-1}}. \end{aligned}$$

Observação: Estes resultados podem ser generalizados do seguinte modo

- seja $A_k = \{(a, b) \in Sq : a \equiv b \pmod{k}\}$, $k \geq 2$. Então, o número de diagramas de peso n de A_k é igual ao número de partições generalizadas de Frobenius, onde, em cada linha, cada parte aparece no máximo k vezes.
- o número de diagramas de peso n de $\frac{1}{2}A_k$ é igual ao número de partições de n em que cada parte não ocorre mais do que k vezes e é dado pelo número de partições de n em partes não múltiplas de $k+1$, ou seja, a função geradora é

$$f\left(\frac{1}{2}A_k; q\right) = \prod_{n \not\equiv 0 \pmod{k+1}} \frac{1}{1 - q^n}.$$

- o número de diagramas simétricos de peso n de A_k é igual ao número de partições de n em partes ímpares, onde nenhuma parte ocorre mais do que k vezes, ou seja, a função geradora é

$$\begin{aligned} f(A_k, \sigma; q) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1} + q^{2(2n-1)} + q^{3(2n-1)} + \dots + q^{k(2n-1)}) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - q^{(k+1)(2n-1)}}{1 - q^{2n-1}}. \end{aligned}$$

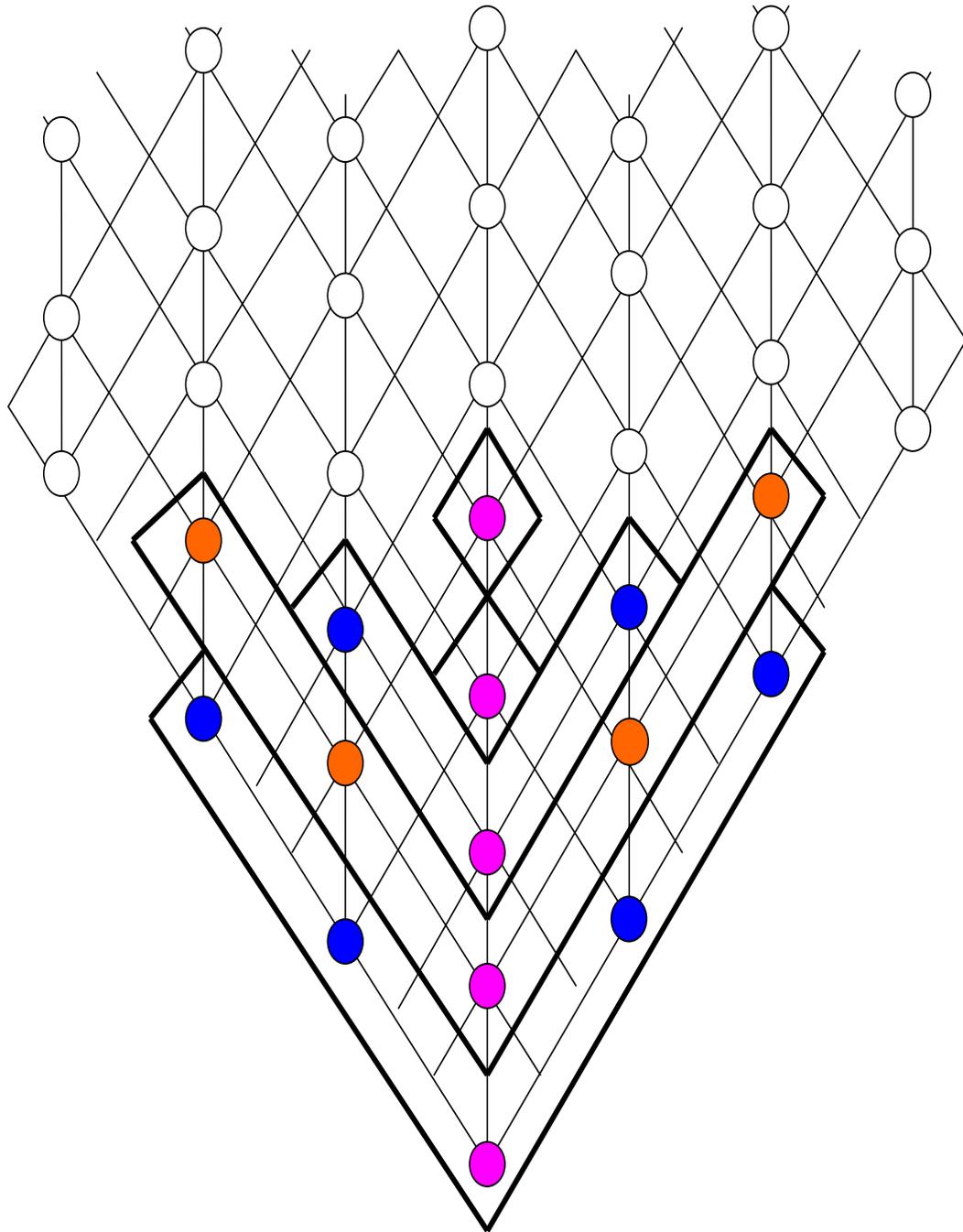


figura 12: $\lambda = (5,5,3,1,1)$
61

2.5 Variação 5: Diagrama B

O diagrama B está apresentado na figura 13, onde temos um diagrama legal de peso $n = 19$.

2.5.1 Função geradora para o número de diagramas de peso n de B

Dado um diagrama de peso n de B, lendo conforme figura 13, temos:

Teorema 2.14 *Dado um diagrama de peso n de B, temos que ele corresponde a uma partição de n , onde as duas primeiras partes são distintas.*

Desse modo, denotando por $f(B; q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(B, n; q)q^n$ a função geradora, segue que

$$\begin{aligned} f(B; q) &= 1 + q + \sum_{n=2}^{\infty} q^n \times \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{1 - q^j} \\ &= 1 + q + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{q^n}{(q; q)_{n-1}} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{(q; q)_{n-1}}. \end{aligned}$$

2.5.2 Função geradora para o número de diagramas de peso n de $\frac{1}{2}B$

Dado um diagrama de peso n em $\frac{1}{2}B$, lendo conforme figura 14, temos:

Teorema 2.15 *Dado um diagrama de peso n em $\frac{1}{2}B$, temos que ele corresponde a uma partição de n em partes distintas, com as duas primeiras partes não consecutivas.*

Então, denotando por $f(\frac{1}{2}\mathbf{B}; q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(\frac{1}{2}\mathbf{B}, n; q)q^n$ a função geradora, temos que

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{2}\mathbf{B}; q) &= 1 + q + q^2 + \sum_{n=3}^{\infty} q^n \times \sum_{j=1}^{n-2} (1 + q^j) \\ &= 1 + q + q^2 + \sum_{n=3}^{\infty} q^n (-q; q)_{n-2}. \end{aligned}$$

2.5.3 Função geradora para o número de diagramas simétricos de peso n de \mathbf{B}

Dado um diagrama simétrico de peso n em \mathbf{B} , lendo conforme figura 15, temos:

Teorema 2.16 *Dado um diagrama simétrico de peso n em \mathbf{B} , então*

- *se $n = 1$, temos um único diagrama simétrico, cuja partição associada é $\lambda = 1$;*
- *se $n \geq 2$, então ele corresponde a uma partição de n , onde a maior parte é par e a outras são ímpares distintas, com as duas primeiras partes não consecutivas. Note que isto implica que há um único diagrama simétrico de peso $n = 2$, com a partição associada $\lambda = 2$ e que não há diagrama simétrico de peso $n = 3$.*

Desse modo, denotando por $f(\mathbf{B}, \sigma; q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(\mathbf{B}, \sigma, n)q^n$ a função geradora (σ denota a simetria), temos que

$$\begin{aligned} f(\mathbf{B}, \sigma; q) &= 1 + q + q^2 + \sum_{n=2}^{\infty} q^{2n} \prod_{j=0}^{n-2} (1 + q^{2j+1}) \\ &= 1 + q + q^2 + \sum_{n=2}^{\infty} q^{2n} (-q; q^2)_{n-1}. \end{aligned}$$

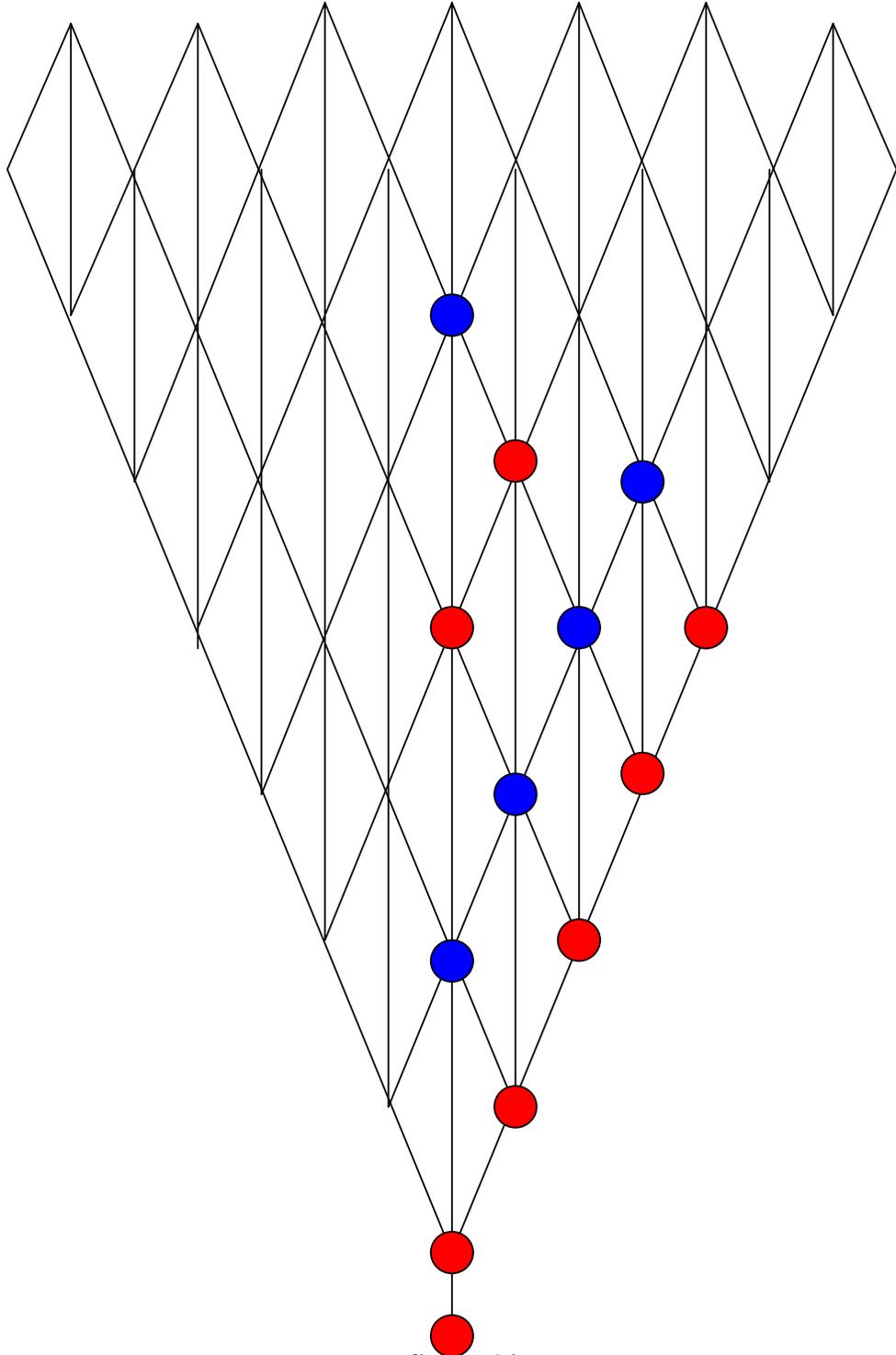


figura 14
65

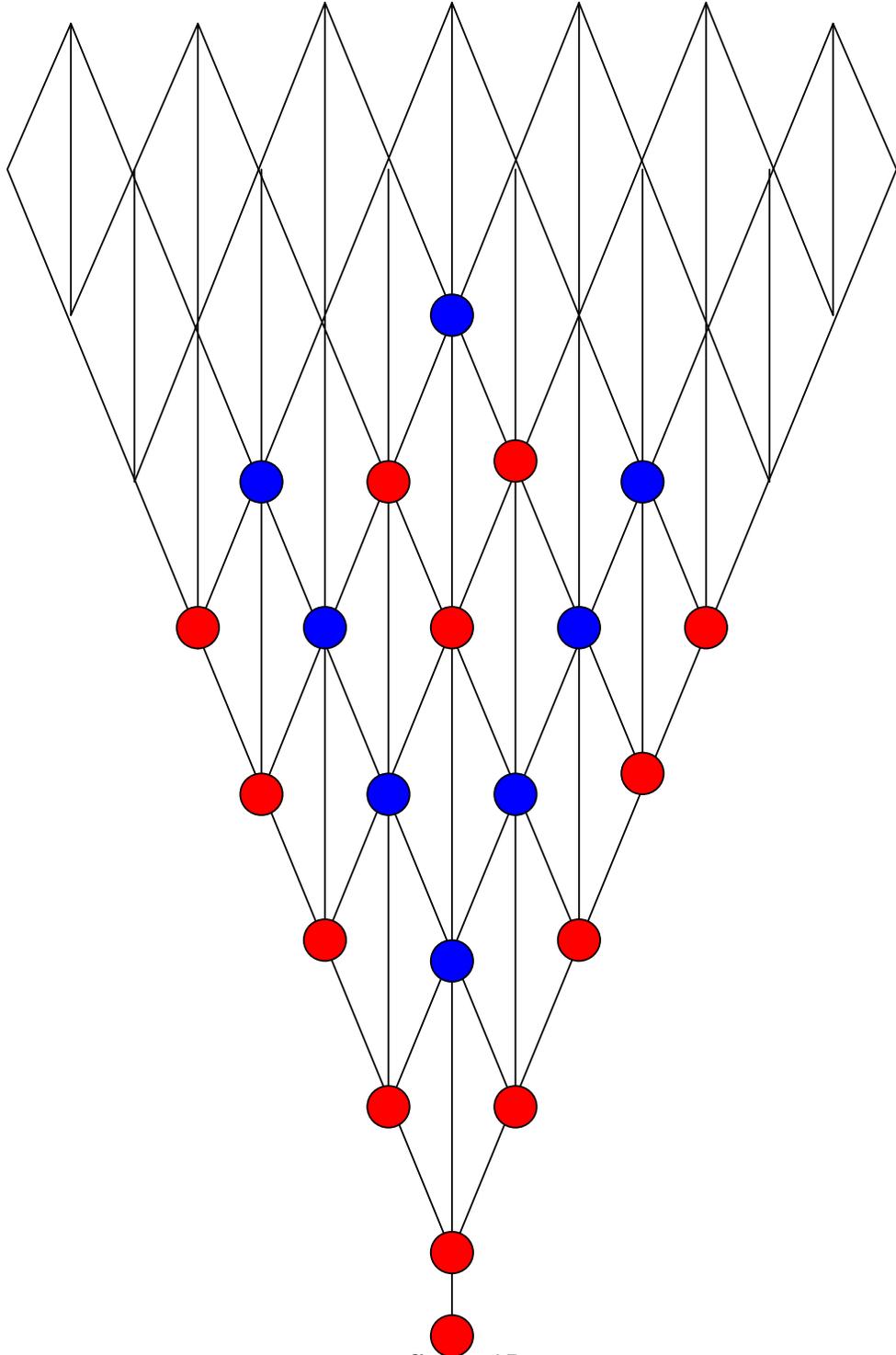


figura 15
66

Capítulo 3

Sobre partições planas com duas linhas: uma interpretação em termos de partições ordinárias

Neste capítulo, os resultados obtidos estão estabelecidos no Teorema 3.1 e nas seções 3.4 e 3.5. Destacamos a seção 3.5, onde estabelecemos a bijeção entre a interpretação obtida das partições planas com duas linhas, em termos de partições ordinárias e a interpretação obtida por Cheema e Gordon ([5]), ambas usando partes em multiconjuntos. Salientamos que, na primeira interpretação, o número de cópias de cada inteiro positivo aumenta quando este inteiro cresce e que, na segunda, Cheema e Gordon usam uma cópia de 1 e duas cópias de cada inteiro positivo maior do que 1.

Consideramos, inicialmente, uma extensão de \mathbf{Sq} no caso tridimensional, substituindo os quadrados de \mathbf{Sq} por cubos. Chamamos o novo diagrama de diagrama \mathbf{C} , o qual está apresentado na figura 16, onde temos um diagrama legal de peso $n = 40$. A condição de legalidade é que, sempre que um ponto está presente, os pontos imediatamente abaixo dele e ligados a ele também devem estar presentes. Observamos que o número de diagramas legais de peso n é, claramente, o número de partições planas com duas linhas de n . Uma partição plana com 2 linhas de um inteiro positivo n é uma representação de

n na forma

$$n = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{\infty} n_{i,j},$$

onde os $n_{i,j}$ são inteiros positivos satisfazendo

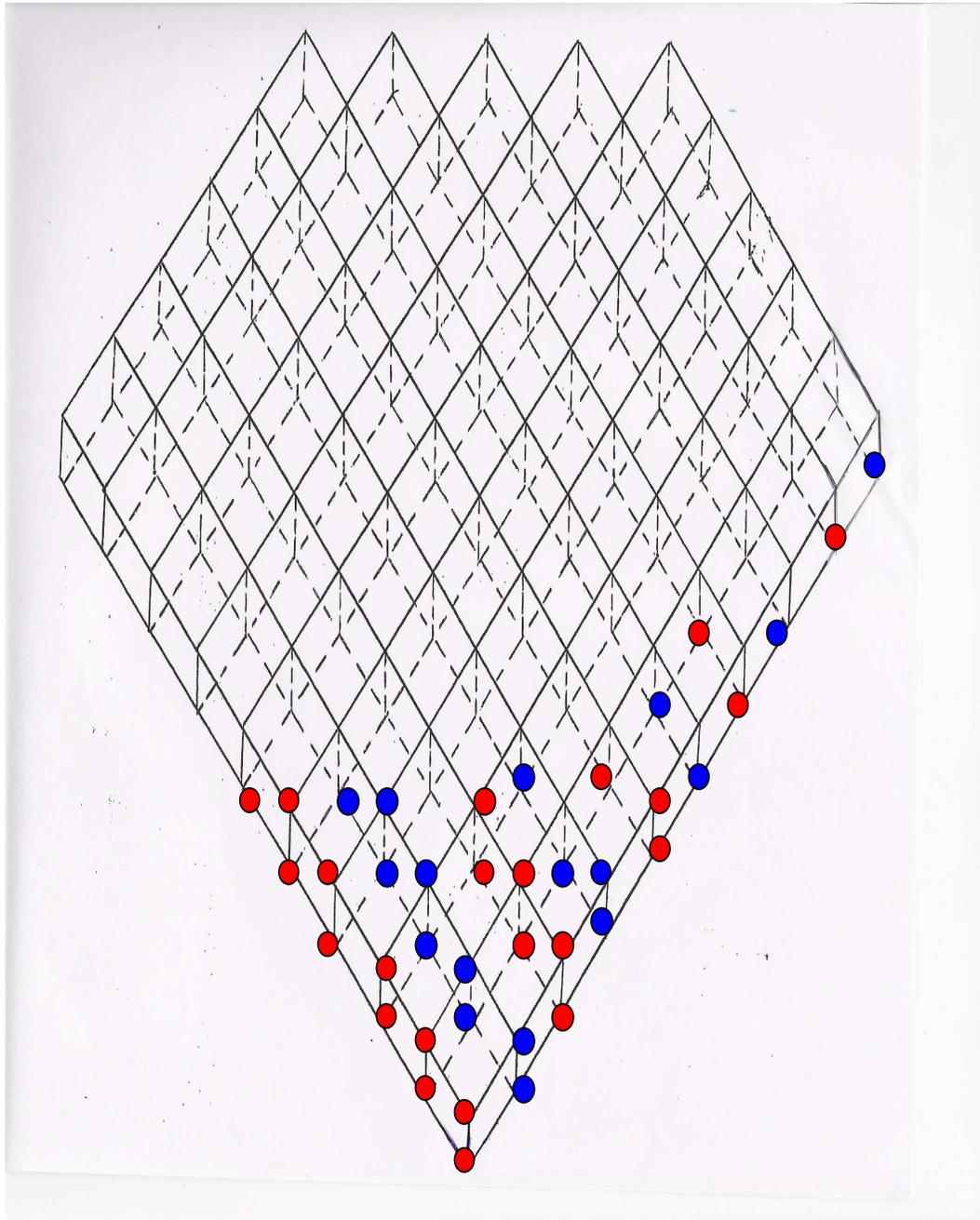
$$n_{i,j} \geq n_{i,j+1} \quad \text{e} \quad n_{i,j} \geq n_{i+1,j}.$$

Estas partições podem ser convenientemente escritas, colocando-se os $n_{i,j}$ em 2 linhas, com $n_{i,j}$ sendo o elemento da linha i e da coluna j . Por exemplo, as partições planas com duas linhas de $n = 3$ são 5

$$\begin{array}{cccccc} 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Na figura 16, a partição plana com duas linhas é

$$\begin{array}{cccccccc} 6 & 5 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$



6 5 3 3 2 2 2 1 1 1
figura 16:
 5 4 3 1 1 0 0 0 0 0
 69

3.1 Uma nova interpretação em termos de partições ordinárias

Na figura 17, observando a primeira, temos 11 pontos presentes, que estão representados por bolas vermelhas. Estes 11 pontos poderiam aparecer de 6 maneiras possíveis. Por exemplo:

1. os 11 pontos no segmento inferior da placa. A este número associamos a cópia 11_1 do número 11;
2. 10 pontos no segmento inferior e 1 ponto no segmento superior da placa. A este número associamos a cópia 11_2 do número 11;

e assim por diante. De um modo geral, se tivermos $j - 1$ pontos no segmento superior e $a - (j - 1)$ pontos no segmento inferior, associamos a este conjunto de pontos a cópia a_j do número a . Desse modo, temos:

Teorema 3.1 *Dado um diagrama legal de peso n em \mathbf{C} , temos que ele corresponde a uma partição de n , usando $\frac{j+1}{2}$ cópias de $j \leq n$, $j_1, j_2, \dots, j_{\frac{j+1}{2}}$, se j é ímpar e $\frac{j+2}{2}$ cópias de $j \leq n$, $j_1, j_2, \dots, j_{\frac{j+2}{2}}$, se j é par, sendo que duas cópias distintas de uma mesma parte não figuram na partição, com a condição adicional de que se j_r e k_s , $j > k$, são duas partes consecutivas da partição, então $s \leq r$.*

Com estas notações, a partição associada ao diagrama legal de peso 40 da figura 17 é

$$11_6 + 9_5 + 6_4 + 4_2 + 3_2 + 2_1 + 2_1 + 1_1 + 1_1 + 1_1.$$

3.2 Exemplos

1. $n = 1$: temos um diagrama legal de peso 1. A partição correspondente é 1_1 .
2. $n = 2$: temos 3 diagramas legais de peso 2. As partições correspondentes são

$$2_1$$

$$2_2$$

$$1_1 + 1_1$$

3. $n = 3$: temos 5 diagramas legais de peso 3. As partições correspondentes são

$$3_1$$

$$3_2$$

$$2_1 + 1_1$$

$$2_2 + 1_1$$

$$1_1 + 1_1 + 1_1$$

4. $n = 4$: temos 10 diagramas legais de peso 4. As partições correspondentes são

$$4_1$$

$$4_2$$

$$4_3$$

$$3_1 + 1_1$$

$$3_2 + 1_1$$

$$2_1 + 2_1$$

$$2_2 + 2_2$$

$$2_1 + 1_1 + 1_1$$

$$2_2 + 1_1 + 1_1$$

$$1_1 + 1_1 + 1_1 + 1_1$$

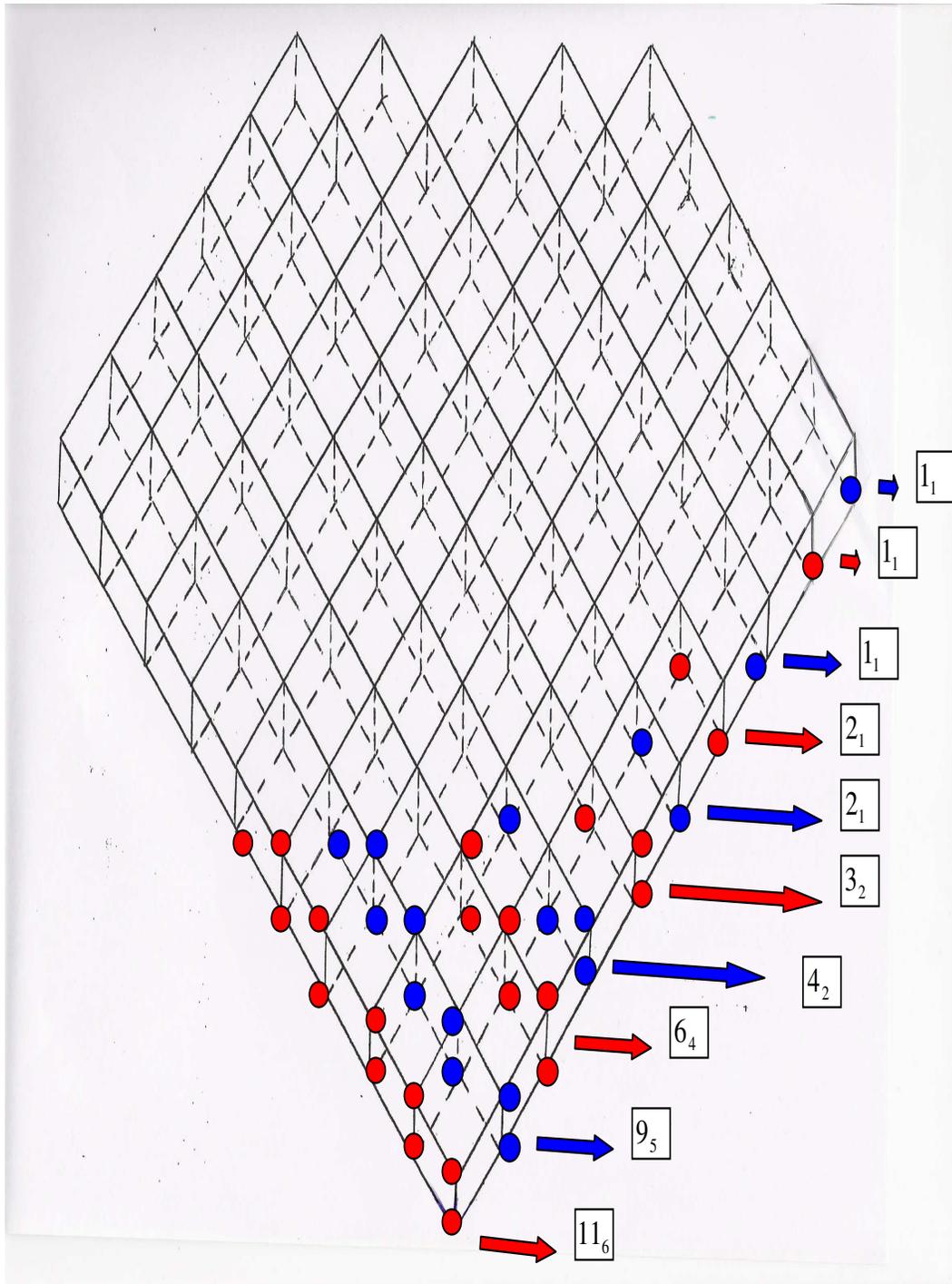


figura 17
72

3.3 Observação

Seja $t_k(n)$ denotando o número de partições planas com k linhas de n . MacMahon mostrou que

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_k(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-\min(n,k)}.$$

Em particular, para $k = 2$, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_2(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-\min(n,2)} = \frac{1}{1 - q} \times \prod_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^n)^2}.$$

Cheema e Gordon deram, em [5], uma outra prova para a identidade acima. Sendo $\sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n$ a expansão em série de potências do lado direito da identidade, eles escreveram

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n} \times \prod_{n'=2}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{n'}}$$

e observaram que c_n é o número de partições de n em partes tomadas do conjunto $\{1, 2', 2, 3', 3, \dots\}$, consistindo de 1 e duas cópias m, m' de cada inteiro $m \geq 2$, adotando a ordem $1 < 2' < 2 < 3' < 3 < \dots$. A seguir, apresentaram uma bijeção entre a classe A das partições enumeradas por c_n e o conjunto das partições planas com duas linhas, feita como segue

1. seja $\pi \in A$. Coloca-se índice 1 em cada parte não marcada de π e, começando da esquerda, coloca-se índice 0 ou 1 em cada parte marcada a' , conforme a soma dos índices à esquerda de a é 0 ou > 0 , respectivamente;
2. a partição plana com duas linhas μ correspondente a π é construída do seguinte modo: todas as partes não marcadas são colocadas na primeira linha e todas as partes com índice -1 são colocadas na segunda linha. Se a é uma parte com índice 0, então $a - 1$ é colocado na primeira linha e 1 é colocado na segunda linha;
3. após colocar as partes de cada linha em ordem não crescente, obtém-se μ .

Por exemplo

$$\begin{aligned}
\pi = 655'4'4'33'3'22111 &\implies 6_15_15_{-1}4_{-1}4_03_13_{-1}3_02_12_11_11_1 \\
&\implies \begin{array}{cccccccc} 6 & 5 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\
&\implies \begin{array}{cccccccc} 6 & 5 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}
\end{aligned}$$

onde colocamos 0's nos espaços vazios.

Reciprocamente, dada uma partição plana com duas linhas μ , descarta-se os 1's da segunda linha, coloca-se índice -1 nas partes restantes da segunda linha e rearranja-se, juntamente com as partes da primeira linha em ordem não crescente. Por exemplo

$$\begin{aligned}
\begin{array}{cccccccc} 6 & 5 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} &\implies \begin{array}{cccc} 6 & 5 & 3 & 3 \\ 5_{-1} & 4_{-1} & 3_{-1} & \end{array} \\
&\implies 655_{-1}4_{-1}333_{-1}222111
\end{aligned}$$

Resta, agora, colocar índices 0 e 1 nas partes restantes, acrescentando de uma unidade as partes com índice 0. Eles mostraram que existe uma única maneira de fazer isto, implicando que há uma única partição $\pi \in A$ correspondente a μ

$$\begin{aligned}
\pi &= 6_15_15_{-1}4_{-1}4_03_13_{-1}3_02_12_11_11_1 \\
&= 655'4'4'33'3'22111.
\end{aligned}$$

Na seção 3.1, demos uma nova interpretação em termos de partições ordinárias para os diagramas legais de peso n . A seguir, apresentamos uma bijeção entre as partições descritas na seção 3.1 e as partições planas com duas linhas. Apresentamos, também, uma bijeção entre as partições descritas na seção 3.1 e as partições descritas por Cheema e Gordon ([5]).

3.4 Bijeção entre as partições descritas na seção 3.1 e as partições planas com duas linhas

Seja uma partição do tipo descrito na seção 3.1, por exemplo

$$\lambda = 11_6 + 9_5 + 6_4 + 4_2 + 3_2 + 2_1 + 2_1 + 1_1 + 1_1 + 1_1.$$

Construímos a partição plana com duas linhas do seguinte modo

1. a cada parte a_j associamos uma seqüência não crescente de 2's e 1's, dispostas em colunas, com $j - 1$ 2's e $a - 2(j - 1)$ 1's. No exemplo, temos

$$\begin{array}{cccccccccc} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\ 2 & 2 & 2 & 1 & & & & & & \\ 2 & 2 & & & & & & & & \\ 2 & 1 & & & & & & & & \\ 1 & & & & & & & & & \end{array}$$

2. a primeira linha da partição plana é formada pelas quantidades de 2's e 1's, lidas nas colunas e a segunda linha é formada pelas quantidades de 2's de cada coluna.

Assim, obtemos:

$$\begin{array}{cccccccccc} 6 & 5 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Reciprocamente, dada uma partição plana com duas linhas

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_r \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_r \end{array}$$

colocamos b_i 2's na coluna i , seguidos de $a_i - b_i$ 1's, $i = 1, 2, \dots, r$. Desse modo, obtemos

$$\begin{array}{cccccccccc} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\ 2 & 2 & 2 & 1 & & & & & & \\ 2 & 2 & & & & & & & & \\ 2 & 1 & & & & & & & & \\ 1 & & & & & & & & & \end{array}$$

Cada parte λ_i da partição é dada por a_j , onde a é a soma dos elementos da coluna i e j é o número de 2's da referida coluna, somado com 1. Desse modo, obtemos

coluna 1: $a = 11$ e $j = 6$

coluna 2: $a = 9$ e $j = 5$

coluna 3: $a = 6$ e $j = 4$

coluna 4: $a = 4$ e $j = 2$

coluna 5: $a = 3$ e $j = 2$

coluna 6: $a = 2$ e $j = 1$

coluna 7: $a = 2$ e $j = 1$

coluna 8: $a = 1$ e $j = 1$

coluna 9: $a = 1$ e $j = 1$

coluna 10: $a = 1$ e $j = 1$

e a partição λ é $\lambda = 11_6 + 9_5 + 6_4 + 4_2 + 3_2 + 2_1 + 2_1 + 1_1 + 1_1 + 1_1$.

3.5 Bijeção entre as partições descritas na seção 3.1 e as partições descritas por Cheema e Gordon

Seja π uma partição do tipo Cheema-Gordon. Obtemos uma partição do tipo descrito na seção 3.1 do seguinte modo: a partir da primeira parte, lemos uma a uma cada parte e

1. se uma parte não é marcada, a colocamos na primeira linha. Se é marcada, digamos a' , a colocamos, se possível, na segunda linha na primeira posição disponível, onde há elemento já colocado na primeira linha. Se isto não for possível, colocamos $a - 1$ na primeira linha e 1 na segunda linha;
2. da disposição obtida

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_r \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_r \end{array}$$

associamos a cada coluna uma parte λ_j , onde λ é a soma dos elementos da coluna e $j = b_j + 1$;

3. reordenamos, se necessário, obtendo a partição λ .

Exemplo: seja $\pi = 655'4'4'33'3'22111$. Obtemos, colocando 0's nos espaços vazios da segunda linha

$$\begin{array}{cccccccccc} 6 & 5 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

Desse modo, obtemos

$$11_6 + 9_5 + 4_2 + 6_4 + 3_2 + 2_1 + 2_1 + 1_1 + 1_1 + 1_1,$$

e finalmente

$$\lambda = 11_6 + 9_5 + 6_4 + 4_2 + 3_2 + 2_1 + 2_1 + 1_1 + 1_1 + 1_1.$$

Reciprocamente, seja uma partição do tipo descrito na seção 3.1. Obtemos uma partição do tipo Cheema-Gordon do seguinte modo

1. a cada parte λ_j associamos uma coluna $\begin{array}{c} a_j \\ b_j \end{array}$, onde

$$b_j = j - 1 \quad \text{e} \quad a_j = \lambda - b_j;$$

2. a cada coluna do tipo $\begin{array}{c} \alpha \\ 1 \end{array}$ associamos a parte $(\alpha + 1)'$. Os números restantes da primeira linha são partes não marcadas e os restantes da segunda linha são partes marcadas.

No exemplo, temos

$$\lambda = 11_6 + 9_5 + 6_4 + 4_2 + 3_2 + 2_1 + 2_1 + 1_1 + 1_1 + 1_1.$$

Daí

$$\begin{array}{cccccccccc} 6 & 5 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

e, então

$$\pi = 655'4'4'33'3'22111.$$

Capítulo 4

Partições planas com três linhas: uma interpretação em termos de partições ordinárias

Neste capítulo, repetimos a idéia utilizada no capítulo 3, para partições planas com três linhas. Os resultados obtidos estão estabelecidos no Teorema 4.1 e na seção 4.5, onde estabelecemos a bijeção entre o conjunto das partições estabelecidas no Teorema 4.1 e as partições planas com três linhas.

Acrescentando mais uma pilha de cubos no diagrama C , obtemos o diagrama C_2 , que está apresentado na figura 18, onde temos um diagrama legal de peso $n = 51$. A condição de legalidade é a mesma do diagrama C .

4.1 Uma interpretação em termos de partições ordinárias

Dado um diagrama legal de peso n , lendo-o, conforme figura 19, temos que ele corresponde a uma partição de n , usando cópias de $a \leq n$, denotadas por $a_{i,j}$, $i \geq 1$, $j \geq 0$ e definidas por

$$a_{i,j} = (a - j)_i + j,$$

onde $(a - j)_i$ é como no caso das partições planas com duas linhas e o sinal "+" indica que devemos colocar j pontos na terceira linha (de baixo para

cima) do diagrama C_2 , conforme ilustração

$$6_{3,2} = 4_3 + 2 : \begin{array}{cc} \circ & \circ \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{array}$$

onde 4_3 está representado com cor preta. Na figura 19, a partição associada é

$$\lambda = 12_{5,4} + 12_{5,4} + 9_{4,3} + 6_{3,1} + 5_{3,1} + 3_{2,0} + 3_{2,0} + 1_{1,0}.$$

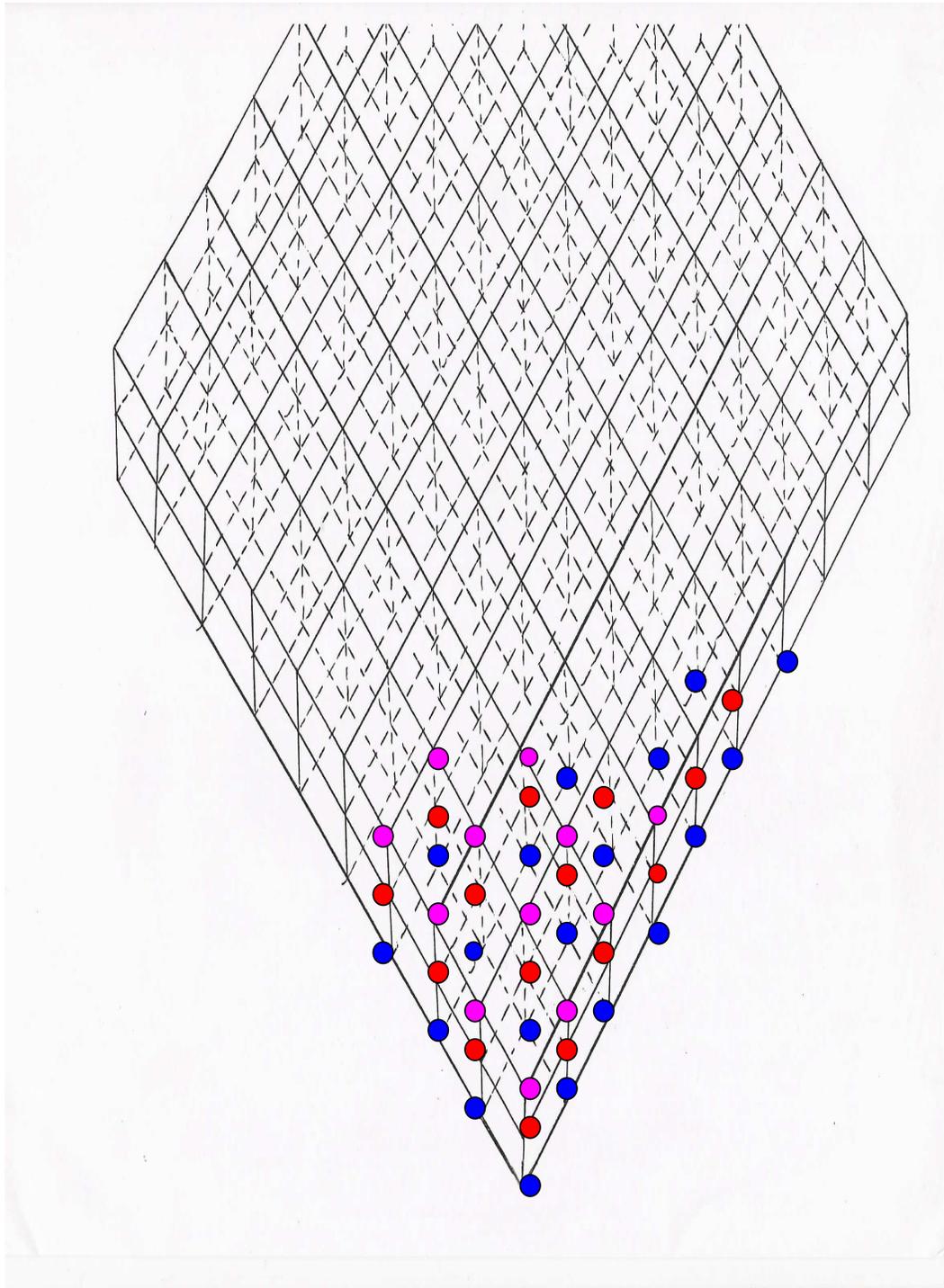


figura 18
81

4.2 Como são obtidas as cópias

Seja $a_{i,j}$ uma cópia de $a > 0$. Como $a_{i,j} = (a - j)_i + j$, temos j pontos na terceira linha, $i - 1$ pontos na segunda linha e $a - j - i + 1$ pontos na primeira linha. Então, devido à condição de legalidade, devemos ter

$$\begin{aligned} \begin{cases} 0 \leq j \leq i - 1 \\ i - 1 \leq a - j - i + 1 \end{cases} &\implies \begin{cases} 0 \leq j \leq i - 1 \\ j \leq a + 2 - 2i \end{cases} \\ &\implies 0 \leq j \leq \min\{i - 1, a + 2 - 2i\}, \end{aligned}$$

onde i varia de 1 a $\frac{a+1}{2}$, se a é ímpar e de 1 a $\frac{a+2}{2}$, se a é par. Por exemplo, as cópias de $a = 5$ são

$$\begin{array}{ccc} 5_{1,0} & 5_{2,0} & 5_{3,0} \\ - & 5_{2,1} & 5_{3,1} \end{array}$$

e as cópias de $a = 6$ são

$$\begin{array}{cccc} 6_{1,0} & 6_{2,0} & 6_{3,0} & 6_{4,0} \\ - & 6_{2,1} & 6_{3,1} & - \\ - & - & 6_{3,2} & - \end{array}$$

Observação: A partir desta caracterização das cópias, podemos adotar o seguinte procedimento para listar as cópias de $a > 0$

1. se a é ímpar, colocamos as $\frac{a+1}{2}$ cópias $a_{i,0}$ na primeira linha. A seguir, colocamos cópias $a_{i,1}$ na segunda linha, pulando a primeira casa. Após isto, colocamos cópias $a_{i,2}$ na terceira linha, pulando as duas primeiras casas e a última e, assim por diante, colocamos na linha $j + 1$ cópias $a_{i,j}$ pulando as j primeiras casas e a última;
2. Se a é par, colocamos as $\frac{a+2}{2}$ cópias $a_{i,0}$ na primeira linha. A seguir, colocamos na linha $j + 1$ cópias $a_{i,j}$ pulando as j primeiras casas e a última.

A seguir, listamos as cópias dos números de $a = 1$ a $a = 9$

- $a = 1$: $1_{1,0}$
- $a = 2$:

$$2_{1,0} \quad 2_{2,0}$$

- $a = 3$:

	$3_{1,0}$		$3_{2,0}$	
	—		$3_{2,1}$	

- $a = 4$:

	$4_{1,0}$		$4_{2,0}$		$4_{3,0}$
	—		$4_{2,1}$		—

- $a = 5$:

	$5_{1,0}$		$5_{2,0}$		$5_{3,0}$
	—		$5_{2,1}$		$5_{3,1}$

- $a = 6$:

	$6_{1,0}$		$6_{2,0}$		$6_{3,0}$		$6_{4,0}$
	—		$6_{2,1}$		$6_{3,1}$		—
	—		—		$6_{3,2}$		—

- $a = 7$:

	$7_{1,0}$		$7_{2,0}$		$7_{3,0}$		$7_{4,0}$
	—		$7_{2,1}$		$7_{3,1}$		$7_{4,1}$
	—		—		$7_{3,2}$		—

- $a = 8$:

	$8_{1,0}$		$8_{2,0}$		$8_{3,0}$		$8_{4,0}$		$8_{5,0}$
	—		$8_{2,1}$		$8_{3,1}$		$8_{4,1}$		—
	—		—		$8_{3,2}$		$8_{4,2}$		—

- $a = 9$:

	$9_{1,0}$		$9_{2,0}$		$9_{3,0}$		$9_{4,0}$		$9_{5,0}$
	—		$9_{2,1}$		$9_{3,1}$		$9_{4,1}$		$9_{5,1}$
	—		—		$9_{3,2}$		$9_{4,2}$		—
	—		—		—		$9_{4,3}$		—

4.3 O número de cópias de cada inteiro positivo

Segue da maneira como as cópias são listadas que o número de cópias de $a > 0$ é

- a ímpar:

$$\frac{a+1}{2} + \sum_{i=1}^{\frac{a+1}{2}} \min\{i-1, a+2-2i\};$$

- a par:

$$\frac{a+2}{2} + \sum_{i=1}^{\frac{a+2}{2}} \min\{i-1, a+2-2i\}.$$

Por exemplo, o número de cópias de $a = 10$ é

$$\begin{aligned} & \frac{10+2}{2} + \sum_{i=1}^{\frac{10+2}{2}} \min\{i-1, 10+2-2i\} = \\ & = 6 + \min\{0, 10\} + \min\{1, 8\} + \min\{2, 6\} + \min\{3, 4\} + \\ & \quad + \min\{4, 2\} + \min\{5, 0\} = \\ & = 6 + 0 + 1 + 2 + 3 + 2 + 0 = 14. \end{aligned}$$

4.4 Como são as restrições das partições associadas a diagramas legais de peso n

Dado um diagrama legal de peso n , lendo-o, conforme figura 19, temos que ele corresponde a uma partição de n com partes descritas na seção 4.1, onde

1. duas cópias distintas de uma mesma parte não aparecem na partição;
2. se $a_{i,j}$ e $b_{r,s}$, $a > b$, são duas partes da partição, então $i \geq r$ e $j \geq s$;
3. se $a_{i,j}$ e $b_{r,s}$, $a > b$ e $a - j = b - s$, então $i = r$.

Desse modo, temos:

Teorema 4.1 *O número de diagramas legais de peso n de C_2 é igual ao número de partições de n , usando $\frac{a+1}{2} + \sum_{i=1}^{\frac{a+1}{2}} \min\{i-1, a+2-2i\}$ cópias de*

$a_{i,j}$ de $a \leq n$ (se a é ímpar) e $\frac{a+2}{2} + \sum_{i=1}^{\frac{a+2}{2}} \min\{i-1, a+2-2i\}$ cópias de $a_{i,j}$ de $a \leq n$ (se a é par), $0 \leq j \leq \min\{i-1, a+2-2i\}$, obtidas conforme a seção 4.1 e com as restrições anteriores.

Por exemplo, temos 12 diagramas legais de peso $n = 4$. As partições correspondentes são

$$\begin{aligned}
 &4_{1,0} \\
 &4_{2,0} \\
 &4_{2,1} \\
 &4_{3,0} \\
 &3_{1,0} + 1_{1,0} \\
 &3_{2,0} + 1_{1,0} \\
 &3_{2,1} + 1_{1,0} \\
 &2_{1,0} + 2_{1,0} \\
 &2_{2,0} + 2_{2,0} \\
 &2_{1,0} + 1_{1,0} + 1_{1,0} \\
 &2_{2,0} + 1_{1,0} + 1_{1,0} \\
 &1_{1,0} + 1_{1,0} + 1_{1,0} + 1_{1,0}
 \end{aligned}$$

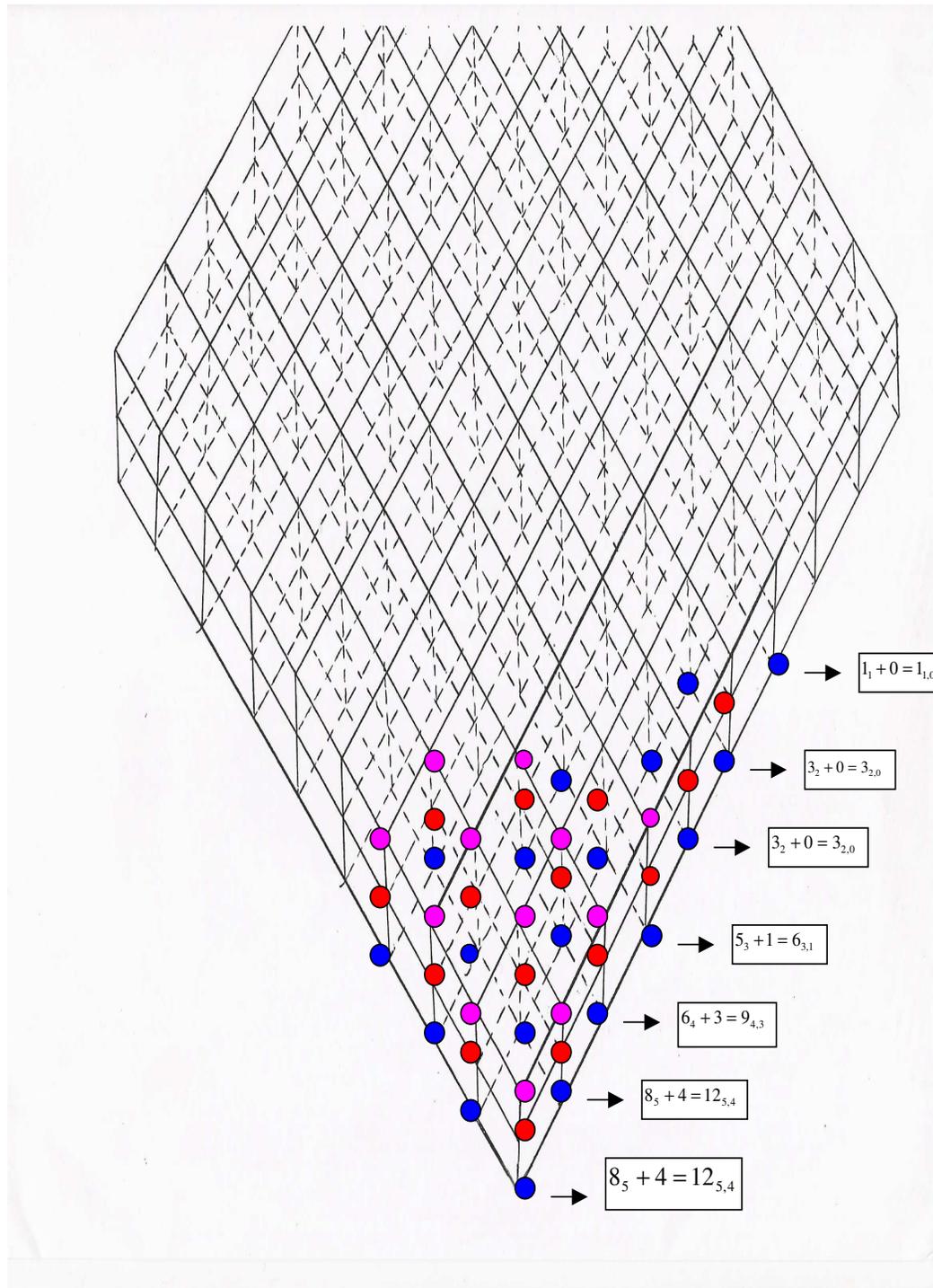


figura 19
86

4.5 Observação

O número de diagramas legais de peso n é, claramente, o número de partições planas com 3 linhas de n . Se $t_3(n)$ denota o número de partições planas com 3 linhas de n , temos por MacMahon

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} t_3(n)q^n &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-\min(n,3)} \\ &= \frac{1}{1 - q} \times \frac{1}{(1 - q^2)^2} \times \prod_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^n)^3} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n} \times \prod_{n'=2}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{n'}} \times \prod_{n''=3}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{n''}}. \end{aligned}$$

Desse modo, temos que o número de partições planas com 3 linhas de n é igual ao número de partições de n com partes tomadas do conjunto $\{1, 2', 2, 3'', 3', 3, \dots\}$, consistindo de uma cópia de 1, duas cópias de 2 e três cópias m, m' e m'' de cada inteiro $m \geq 3$ (aqui, adotaremos a ordem $1 < 2' < 2 < 3'' < 3' < 3 < \dots$).

A seguir, apresentamos uma bijeção entre o conjunto das partições descritas na seção 4.4 e o conjunto das partições planas com 3 linhas.

4.6 Bijeção entre o conjunto das partições da seção 4.4 e as partições planas com 3 linhas

Seja λ uma partição do tipo descrito na seção 4.4, por exemplo

$$\lambda = 12_{5,4} + 12_{5,4} + 9_{4,3} + 6_{3,1} + 5_{3,1} + 3_{2,0} + 3_{2,0} + 1_{1,0}.$$

Construímos a partição plana com três linhas do seguinte modo

1. a cada parte $a_{i,j}$ associamos uma seqüência não crescente de 3's, 2's e 1's, dispostas em colunas, com j 3's, $i - j - 1$ 2's e $a - 3j - 2(i - j - 1)$ 1's. No exemplo temos

$$\begin{array}{cccccccc}
3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\
3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & \\
3 & 3 & 3 & 1 & & & & \\
3 & 3 & & & & & &
\end{array}$$

2. a primeira linha da partição plana é formada pelas quantidades de 3's, 2's e 1's, lidas nas colunas. A segunda linha é formada pelas quantidades de 3's e 2's de cada coluna e a terceira linha é formada pelas quantidades de 3's de cada coluna. Assim, obtemos

$$\begin{array}{cccccccc}
4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 \\
4 & 4 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\
4 & 4 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Reciprocamente, dada uma partição plana com três linhas

$$\begin{array}{cccc}
a_1 & a_2 & \cdots & a_r \\
b_1 & b_2 & \cdots & b_r \\
c_1 & c_2 & \cdots & c_r
\end{array}$$

colocamos c_k 3's na coluna k , seguidos de $b_k - c_k$ 2's e de $a_k - b_k$ 1's, $k = 1, 2, \dots, r$. Desse modo, obtemos

$$\begin{array}{cccccccc}
3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\
3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & \\
3 & 3 & 3 & 1 & & & & \\
3 & 3 & & & & & &
\end{array}$$

Cada parte $\lambda_k = a_{i,j}$ da partição é obtida do seguinte modo: a é a soma dos elementos da coluna k , i é o número de 2's e 3's, somado com 1 e j é o número de 3's da referida coluna. Desse modo, obtemos

coluna 1: $a = 12$, $i = 5$ e $j = 4$
coluna 2: $a = 12$, $i = 5$ e $j = 4$
coluna 3: $a = 9$, $i = 4$ e $j = 3$
coluna 4: $a = 6$, $i = 3$ e $j = 1$
coluna 5: $a = 5$, $i = 3$ e $j = 1$
coluna 6: $a = 3$, $i = 2$ e $j = 0$
coluna 7: $a = 3$, $i = 2$ e $j = 0$

coluna 8: $a = 1$, $i = 1$ e $j = 0$

e a partição λ é $\lambda = 12_{5,4} + 12_{5,4} + 9_{4,3} + 6_{3,1} + 5_{3,1} + 3_{2,0} + 3_{2,0} + 1_{1,0}$.

Capítulo 5

Um conjunto de bijeções envolvendo números de Fibonacci e números de Pell

Neste capítulo, os resultados obtidos referem-se a sete bijeções envolvendo números de Fibonacci (seção 5.2) e duas bijeções envolvendo números de Pell (seção 5.4).

5.1 Números de Fibonacci

A seqüência de Fibonacci é apresentada abaixo

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots,$$

isto é $\{F_n\}_{n \geq 0}$, com $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ e $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$, $n \geq 2$.

Existem muitas interpretações combinatórias para os números de Fibonacci. Apresentamos, a seguir, cinco delas. A letra em maiúsculo, ao lado de cada uma delas, denota o conjunto dos elementos enumerados por F_n na correspondente interpretação.

1. (*A*) F_n , $n \geq 0$, é igual ao número de maneiras de subir uma escada com n degraus, podendo pular no máximo um degrau em cada movimento. Por exemplo, numa escada com quatro degraus, temos $F_4 = 5$ maneiras de subi-la: não pular nenhum degrau, pular somente o primeiro degrau, pular somente o segundo degrau, pular somente o terceiro e pular o primeiro e o terceiro degraus ([13]).

2. (B) A um dado movimento numa escada com n degraus, descrito no item anterior, podemos associar uma partição, cujas partes são dadas pelo número de quadrados que podem ser empilhados abaixo de cada degrau (se ele não foi pulado), ou este número mais um (se ele foi pulado). Mais especificamente, a um movimento numa escada com n degraus está associada uma partição $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$, onde

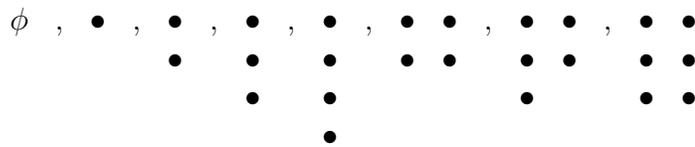
- $1 \leq \lambda_i \leq n, i = 1, 2, \dots, n$;
- a parte = 1 aparece no máximo uma vez e as outras, no máximo duas vezes;
- $\lambda_i = i$ ou $i + 1$ e $\lambda_n = n$;

Desse modo, $F_n, n \geq 0$, é o número de tais partições ([13]).

3. (C) $F_n, n \geq 0$, é o número de ladrilhamentos de um retângulo $2 \times n$, usando somente ladrilhos 1×1 e 2×2 ([13]).

4. (D) $F_n, n \geq 0$, é o número de partições em no máximo n partes, onde todo inteiro menor do que ou igual à maior parte aparece pelo menos duas vezes ([16]). Por exemplo, $F_4 = 5$: ϕ (partição vazia), $1 + 1$, $1 + 1 + 1$, $1 + 1 + 1 + 1$ e $1 + 1 + 2 + 2$.

5. (E) $F_n, n \geq 0$, é o número de partições, onde a maior parte é lado do quadrado de Durfee e a maior parte mais o número de partes é menor do que ou igual a n ([16]). Destacamos que, no diagrama de Ferrers de uma partição (cujas partes são representadas por pontos), o quadrado de Durfee é o maior quadrado que pode ser inserido no canto superior esquerdo, com vértices nos pontos do diagrama. Por exemplo, $F_5 = 8$:



Na próxima seção, apresentamos sete bijeções entre os seguintes pares de conjuntos descritos anteriormente

$$\begin{matrix} (A, C) & (A, D) & (B, C) & (B, D) \\ (C, D) & (C, E) & (D, E) & \end{matrix}$$

5.2 As bijeções

5.2.1 Bijeção (A, C)

Seja uma maneira de subir uma escada com n degraus. Obtemos um ladrilhamento de um retângulo $2 \times n$ com ladrilhos 1×1 e 2×2 do seguinte modo

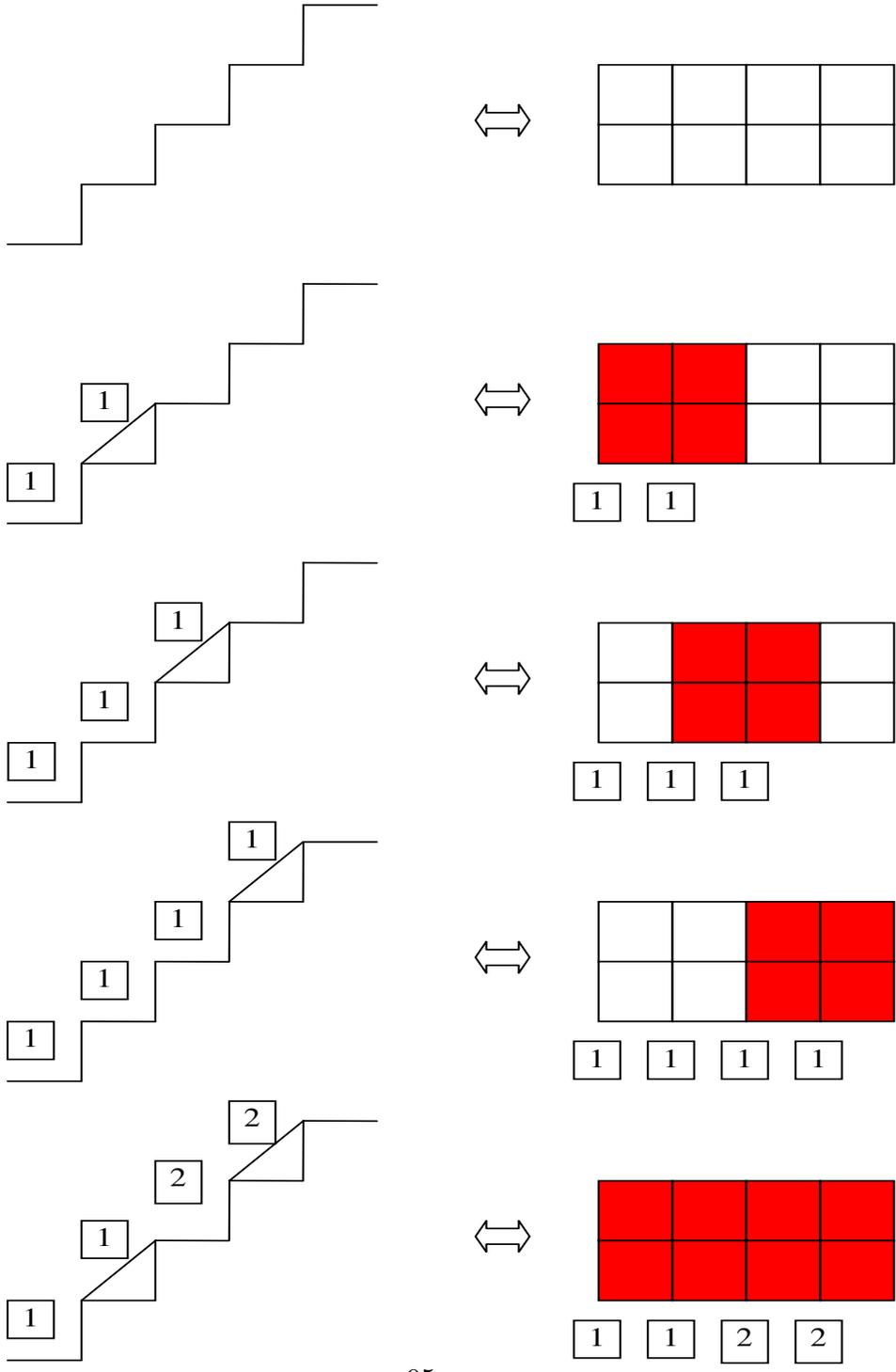
1. ao movimento sem pulo, associamos o ladrilhamento com apenas ladrilhos 1×1 ;
2. nos movimentos com pulos, procedemos da seguinte forma
 - colocamos "1" em cada degrau, a partir do primeiro, até chegarmos no primeiro degrau onde houve o primeiro pulo;
 - repetimos o procedimento, colocando agora "2" até chegarmos no degrau onde houve o segundo pulo, colocando em seguida "3" até chegarmos no terceiro degrau determinado pelo terceiro pulo e assim por diante;
 - no retângulo $2 \times n$, colocamos abaixo de cada segmento vertical, a partir do primeiro, os 1's, seguidos dos 2's, dos 3's e assim por diante;
 - na vertical do último i , $i = 1, 2, 3, \dots$, está o centro do i -ésimo ladrilho 2×2 .

Reciprocamente, dado um ladrilhamento de um retângulo $2 \times n$ com ladrilhos 1×1 e 2×2 , obtemos um movimento na escada do seguinte modo

1. ao ladrilhamento com apenas ladrilhos 1×1 associamos o movimento sem pulo;
2. nos ladrilhamentos que possuem ladrilhos 2×2 , procedemos da seguinte forma
 - abaixo de cada segmento vertical, a partir do primeiro, colocamos 1's até chegarmos naquele segmento que contém o centro do primeiro ladrilho 2×2 , seguidos de 2's até chegarmos naquele segmento que contém o centro do segundo ladrilho 2×2 e assim por diante, colocando 3's, 4's etc;

- na escada com n degraus, colocamos em cada degrau, a partir do primeiro, os 1's, os 2's, os 3's etc;
- o último i , $i = 1, 2, 3, \dots$, determina o degrau onde haverá o i -ésimo pulo.

Exemplo: $F_4 = 5$



5.2.2 Bijeção (A, D)

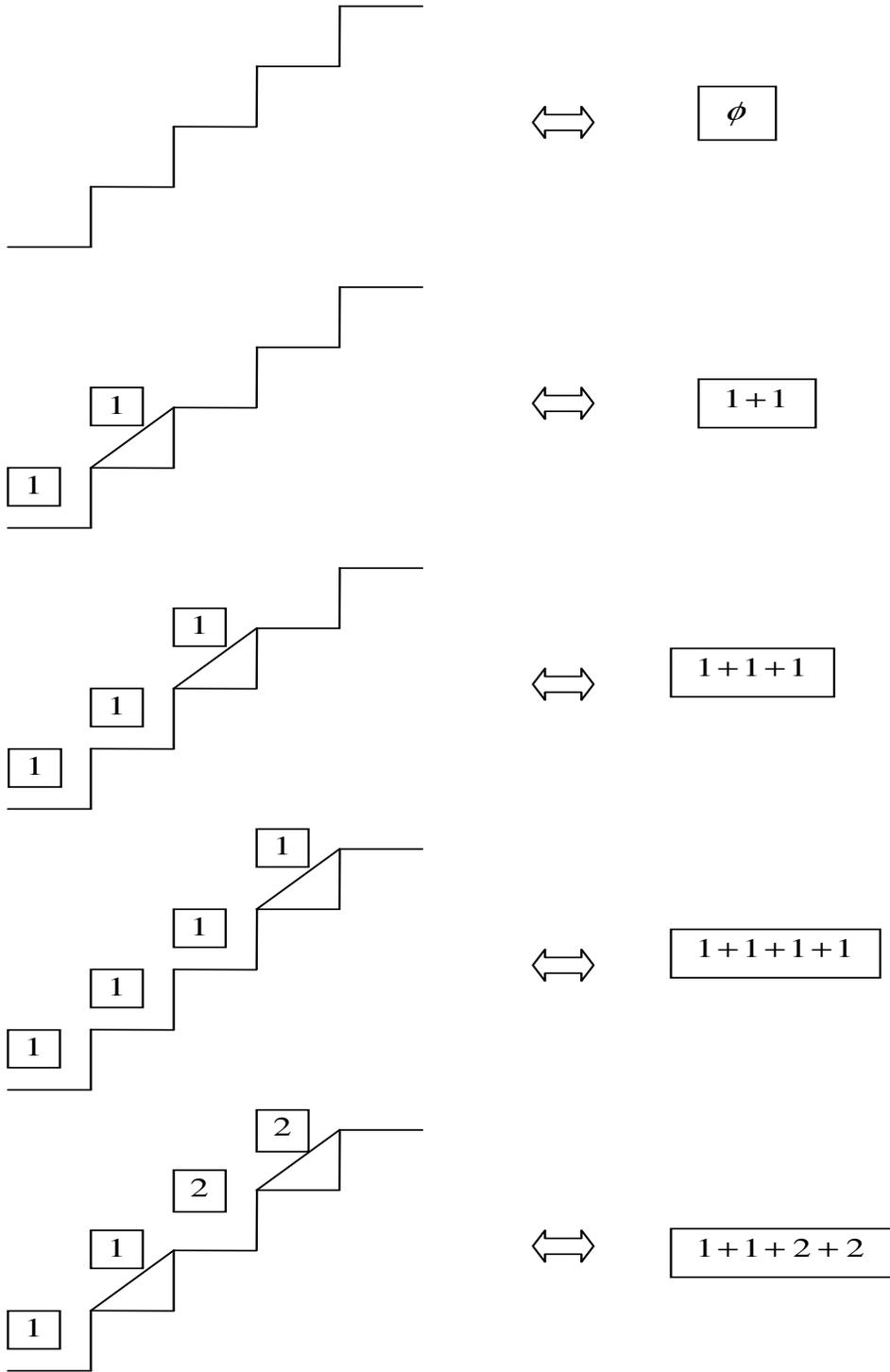
Seja uma maneira de subir uma escada com n degraus. Obtemos uma partição em no máximo n partes, onde todo inteiro menor do que ou igual à maior parte aparece pelo menos duas vezes do seguinte modo

1. ao movimento sem pulo associamos a partição vazia;
2. nos movimentos com pulos, procedemos da seguinte forma
 - colocamos 1's em cada degrau, a partir do primeiro, até chegarmos no degrau onde houve o primeiro pulo, seguidos de 2's até chegarmos no degrau onde houve o segundo pulo e assim por diante. Isto imediatamente nos leva à partição de n pretendida.

Reciprocamente, seja uma partição de n em no máximo n partes, onde todo inteiro menor do que ou igual à maior parte aparece pelo menos duas vezes. Obtemos um movimento na escada do seguinte modo

1. à partição vazia associamos o movimento sem pulo;
2. nas demais partições, procedemos da seguinte forma
 - colocamos as partes da partição, em ordem não decrescente, nos degraus da escada;
 - para cada $i = 1, 2, 3, \dots$, no degrau onde está o último i haverá o i -ésimo pulo.

Exemplo: $F_4 = 5$



5.2.3 Bijeção (B, C)

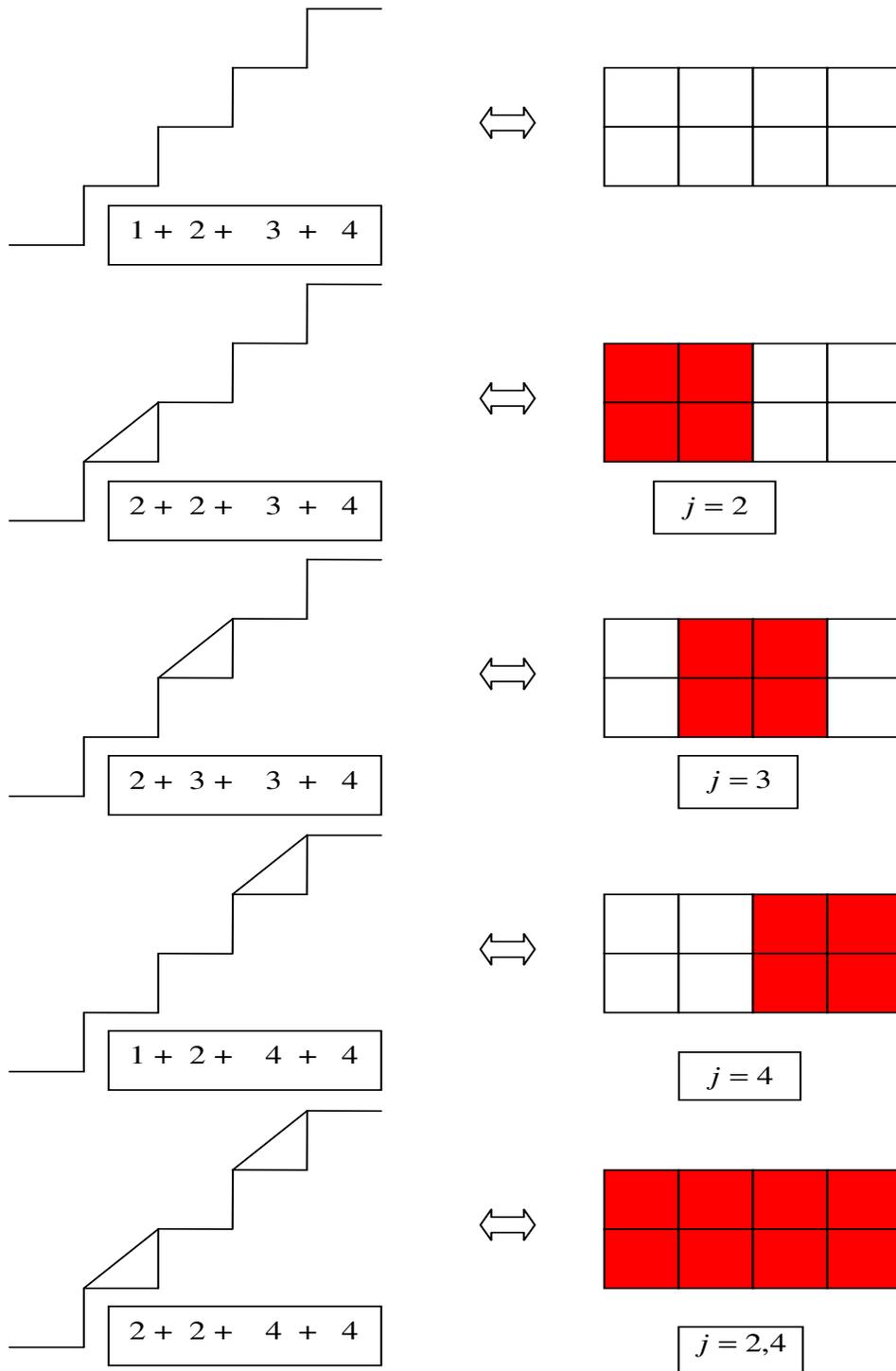
Seja $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ a partição associada a um movimento numa escada com n degraus. Obtemos um ladrilhamento de um retângulo $2 \times n$ com apenas ladrilhos 1×1 e 2×2 do seguinte modo

1. à partição $\lambda = 1 + 2 + \cdots + n$ associamos o ladrilhamento que possui apenas ladrilhos 1×1 ;
2. com relação às demais partições, procedemos da seguinte forma
 - para cada $i = 2, 3, \dots, n - 1$, tomamos j como sendo a posição na partição do segundo elemento do i -ésimo par que se repete;
 - no j -ésimo segmento vertical do retângulo $2 \times n$ está o centro de um ladrilho 2×2 .

Reciprocamente, seja um ladrilhamento de um retângulo $2 \times n$ com apenas ladrilhos 1×1 e 2×2 . Obtemos uma partição $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ associada a um movimento numa escada com n degraus do seguinte modo

1. ao ladrilhamento que possui apenas ladrilhos 1×1 associamos a partição $\lambda = 1 + 2 + \cdots + n$;
2. nos demais ladrilhamentos, procedemos da seguinte forma
 - enumeramos cada segmento vertical do retângulo, a partir do primeiro, por $1, 2, 3, \dots, n$;
 - substituímos os números $i, i + 1$ situados abaixo dos dois primeiros segmentos verticais de cada ladrilho 2×2 por $i + 1, i + 1$;
 - a partição pretendida é formada por estes números, com as devidas substituições anteriores.

Exemplo: $F_4 = 5$



5.2.4 Bijeção (B, D)

Seja $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ a partição associada a um movimento numa escada com n degraus. Obtemos uma partição em no máximo n partes, onde todo inteiro menor do que ou igual à maior parte aparece pelo menos duas vezes, do seguinte modo

1. à partição $\lambda = 1 + 2 + \dots + n$ associamos a partição vazia;
2. nas demais partições, procedemos da seguinte forma: substituímos cada parte da partição (escrita em ordem não decrescente) por "1", até chegarmos no primeiro par de partes repetidas, o qual substituímos por $1 + 1$. Se não houver mais nenhum outro par se repetindo, desprezamos as demais partes, obtendo a partição pretendida. Caso contrário, a partir da próxima parte, substituímos cada parte por "2" até chegarmos no segundo par que se repete, o qual substituímos por $2 + 2$, desprezando as partes restantes, caso não haja mais par se repetindo e assim por diante, colocando i 's até chegarmos ao i -ésimo par que se repete, o qual substituímos por $i + i$.

Reciprocamente, dada uma partição λ em no máximo n partes, onde todo inteiro menor do que ou igual à maior parte aparece pelo menos duas vezes, obtemos uma partição associada a um movimento numa escada com n degraus do seguinte modo

1. substituímos todas as partes da partição por $1, 2, 3, \dots, n$;
2. em cada conjunto de partes que se repetem em λ , trocamos os números i e $i + 1$ que as substituíram por $i + 1$ e $i + 1$, completando, se necessário, até o total de n partes, com os próximos inteiros consecutivos.

Exemplo : $F_6 = 13$

$$\begin{aligned}
 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 &\longleftrightarrow \phi \\
 2 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 &\longleftrightarrow 1 + 1 \\
 1 + 3 + 3 + 4 + 5 + 6 &\longleftrightarrow 1 + 1 + 1 \\
 1 + 2 + 4 + 4 + 5 + 6 &\longleftrightarrow 1 + 1 + 1 + 1 \\
 2 + 2 + 4 + 4 + 5 + 6 &\longleftrightarrow 1 + 1 + 2 + 2 \\
 1 + 2 + 3 + 5 + 5 + 6 &\longleftrightarrow 1 + 1 + 1 + 1 + 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 + 2 + 3 + 5 + 5 + 6 &\longleftrightarrow 1 + 1 + 2 + 2 + 2 \\
1 + 3 + 3 + 5 + 5 + 6 &\longleftrightarrow 1 + 1 + 1 + 2 + 2 \\
1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 6 &\longleftrightarrow 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\
1 + 2 + 4 + 4 + 6 + 6 &\longleftrightarrow 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 \\
1 + 3 + 3 + 4 + 6 + 6 &\longleftrightarrow 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 \\
2 + 2 + 3 + 4 + 6 + 6 &\longleftrightarrow 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 \\
2 + 2 + 4 + 4 + 6 + 6 &\longleftrightarrow 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3
\end{aligned}$$

5.2.5 Bijeção (C, D)

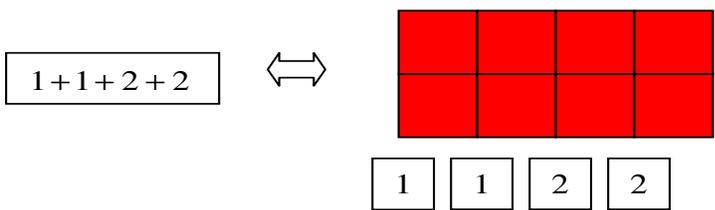
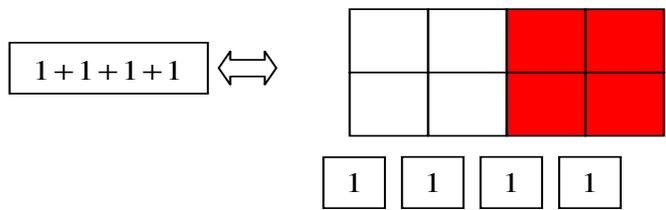
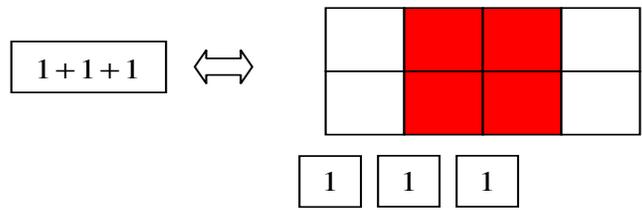
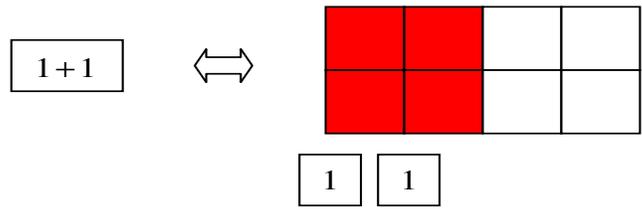
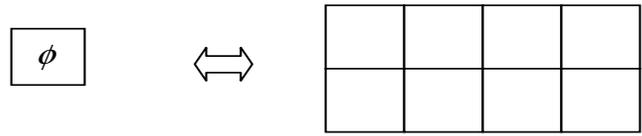
Seja uma partição em no máximo n partes, onde todo inteiro menor do que ou igual à maior parte aparece pelo menos duas vezes. Obtemos um ladrilhamento de um retângulo $2 \times n$ com ladrilhos 1×1 e 2×2 do seguinte modo

1. associamos à partição vazia o ladrilhamento com apenas ladrilhos 1×1 ;
2. para cada partição não vazia, procedemos da seguinte forma
 - abaixo de cada segmento vertical do retângulo, a partir do primeiro, colocamos as partes da partição em ordem não decrescente;
 - no segmento vertical onde há o último "1" está o centro do primeiro ladrilho 2×2 , no segmento vertical onde há o último "2" está o segundo ladrilho 2×2 e assim por diante.

Reciprocamente, dado um ladrilhamento de um retângulo $2 \times n$ com ladrilhos 1×1 e 2×2 , obtemos uma partição do primeiro tipo de seguinte modo

1. ao ladrilhamento que possui apenas ladrilhos 1×1 associamos a partição vazia;
2. nos demais ladrilhamentos, agimos da seguinte forma: a partir do primeiro segmento vertical do retângulo, colocamos 1's até chegar no segmento vertical onde está o centro do primeiro ladrilho 2×2 . A seguir, colocamos 2's até chegarmos no segmento vertical onde está o centro do segundo ladrilho 2×2 e assim por diante, colocando 3's, 4's, etc. Estes 1's, 2's, 3's, ... são as partes da partição desejada.

Exemplo: $F_4 = 5$



5.2.6 Bijeção (C, E)

Seja $n \geq 0$ fixo e consideremos uma partição onde a maior parte p é lado do quadrado de Durfee e a maior parte mais o número de partes é menor do que ou igual a n . Seja c_j o número de pontos na coluna j do diagrama de Ferrers da partição. Obtemos um ladrilhamento de um retângulo $2 \times n$ com ladrilhos 1×1 e 2×2 do seguinte modo

1. à partição vazia associamos o ladrilhamento que possui apenas ladrilhos 1×1 ;
2. se a partição não é vazia, então agimos da seguinte forma
 - calculamos $\gamma_j = 2j - 2$, para $j = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor$. Aqui $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro menor do que ou igual a x ;
 - os valores de $\gamma_{\lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor + 1}, \gamma_{\lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor + 2}, \dots, \gamma_p$ são os valores do passo anterior (exceto o primeiro) escritos na ordem inversa;
 - calculamos $\beta_j = c_j + p - \gamma_j$, para $j = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor$;
 - os valores de $\beta_{\lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor + 1}, \beta_{\lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor + 2}, \dots, \beta_p$ são dados por

$$\beta_{\lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor + k} = c_{\lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor + k} - p + \delta,$$

onde os δ 's são os γ_j 's ($j = 2, 3, \dots, \lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor$) tomados na ordem inversa;

- calculamos $\alpha_j = \beta_j - \beta_{j+1}$, para $j = 1, 2, \dots, p$ (definindo $\beta_{p+1} = 0$);
- no retângulo $2 \times n$ colocamos abaixo de cada segmento vertical, a partir do primeiro, os números $1, 2, \dots, \alpha_1$, seguidos de $1, 2, \dots, \alpha_2, \dots$, seguidos de $1, 2, \dots, \alpha_p$;
- no segmento vertical referente a α_i está o centro do i -ésimo ladrilho 2×2 .

Reciprocamente, dado um ladrilhamento de um retângulo $2 \times n$ com ladrilhos 1×1 e 2×2 , obtemos uma partição do primeiro tipo do seguinte modo

1. ao ladrilhamento que possui apenas ladrilhos 1×1 associamos a partição vazia;

2. ao ladrilhamento com p ladrilhos 2×2 associamos uma partição com lado do quadrado de Durfee igual a p , da seguinte forma

- a partir do primeiro segmento vertical do retângulo, colocamos abaixo de cada segmento os números $1, 2, \dots, \alpha_1$, com α_1 abaixo do segmento vertical onde está o centro do primeiro ladrilho 2×2 . A seguir, colocamos $1, 2, \dots, \alpha_2$, com α_2 abaixo do segmento vertical onde está o centro do segundo ladrilho 2×2 e assim por diante, até chegarmos no p -ésimo ladrilho 2×2 ;

- calculamos

$$\begin{cases} \beta_p = \alpha_p \\ \beta_{p-1} = \alpha_{p-1} + \beta_p \\ \beta_{p-2} = \alpha_{p-2} + \beta_{p-1} \\ \vdots \\ \beta_1 = \alpha_1 + \beta_2 \end{cases}$$

- calculamos $\gamma_j = 2j - 2$, para $j = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor$ e tomamos

$$\gamma_{\lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor + 1}, \gamma_{\lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor + 2}, \dots, \gamma_p$$

como os valores destes γ_j 's (exceto o primeiro) na ordem inversa;

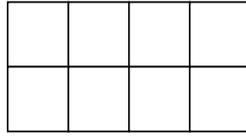
- Calculamos

$$\begin{cases} c_j = \beta_j + \gamma_j - p, & j = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor \\ c_k = \beta_k - \gamma + p, & k = \lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor + 1, \dots, p \end{cases}$$

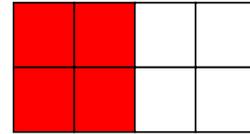
onde os γ 's são os valores de $\gamma_2, \dots, \gamma_{\lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor}$ tomados na ordem inversa.

- no diagrama de Ferrers, colocamos c_k pontos na coluna k , $k = 1, 2, \dots, p$, obtendo a partição pretendida.

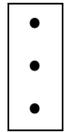
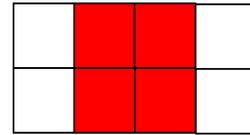
Exemplo: $F_4 = 5$



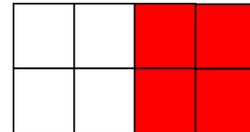
$$p=1 \Rightarrow \begin{cases} \left\lfloor \frac{p+2}{2} \right\rfloor = 1 \\ \gamma_1 = 2 \times 1 - 2 = 0 \\ \beta_1 = c_1 + 1 - 0 = 1 + 1 = 2 \\ \alpha_1 = \beta_1 - \beta_2 = 2 - 0 = 2 \end{cases}$$



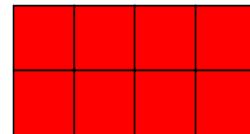
$$p=1 \Rightarrow \begin{cases} \left\lfloor \frac{p+2}{2} \right\rfloor = 1 \\ \gamma_1 = 2 \times 1 - 2 = 0 \\ \beta_1 = c_1 + 1 - 0 = 2 + 1 = 3 \\ \alpha_1 = \beta_1 - \beta_2 = 3 - 0 = 3 \end{cases}$$



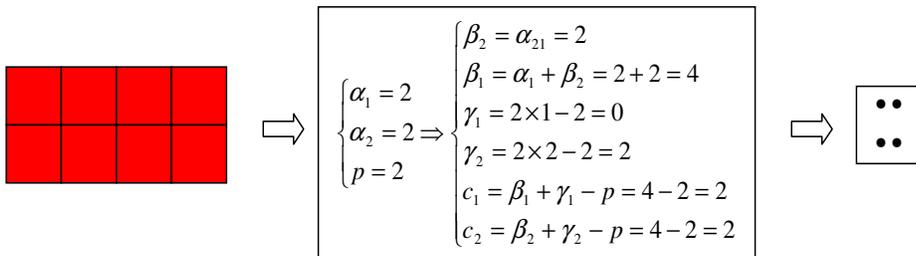
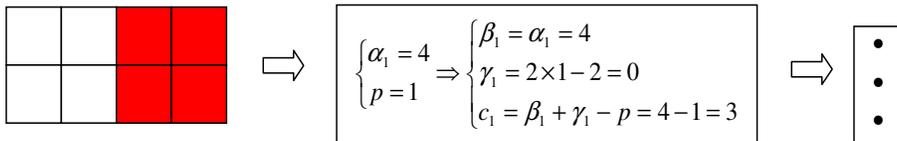
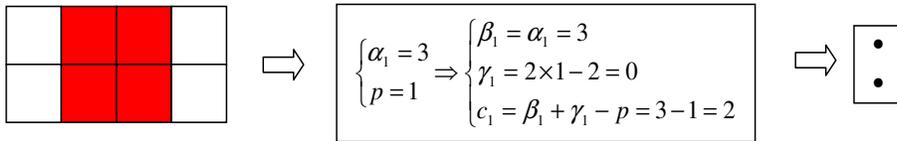
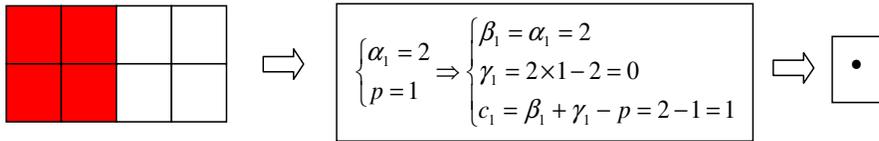
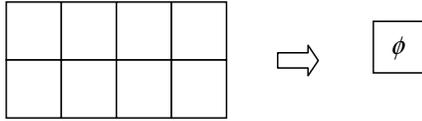
$$p=1 \Rightarrow \begin{cases} \left\lfloor \frac{p+2}{2} \right\rfloor = 1 \\ \gamma_1 = 2 \times 1 - 2 = 0 \\ \beta_1 = c_1 + 1 - 0 = 3 + 1 = 4 \\ \alpha_1 = \beta_1 - \beta_2 = 4 - 0 = 4 \end{cases}$$



$$p=2 \Rightarrow \begin{cases} \left\lfloor \frac{p+2}{2} \right\rfloor = 2 \\ \gamma_1 = 2 \times 1 - 2 = 0 \\ \gamma_2 = 2 \times 2 - 2 = 2 \\ \beta_1 = c_1 + 2 - 0 = 2 + 2 = 4 \\ \alpha_1 = \beta_1 - \beta_2 = 4 - 2 = 2 \\ \alpha_2 = \beta_2 - \beta_3 = 2 - 0 = 2 \end{cases}$$



Reciprocamente:



5.2.7 Bijeção (D, E)

Seja uma partição em no máximo n partes, onde todo inteiro menor do que ou igual à maior parte p aparece pelo menos duas vezes. Obtemos uma partição onde a maior parte p é lado do quadrado de Durfee e a maior parte mais o número de partes é menor do que ou igual a n , do seguinte modo

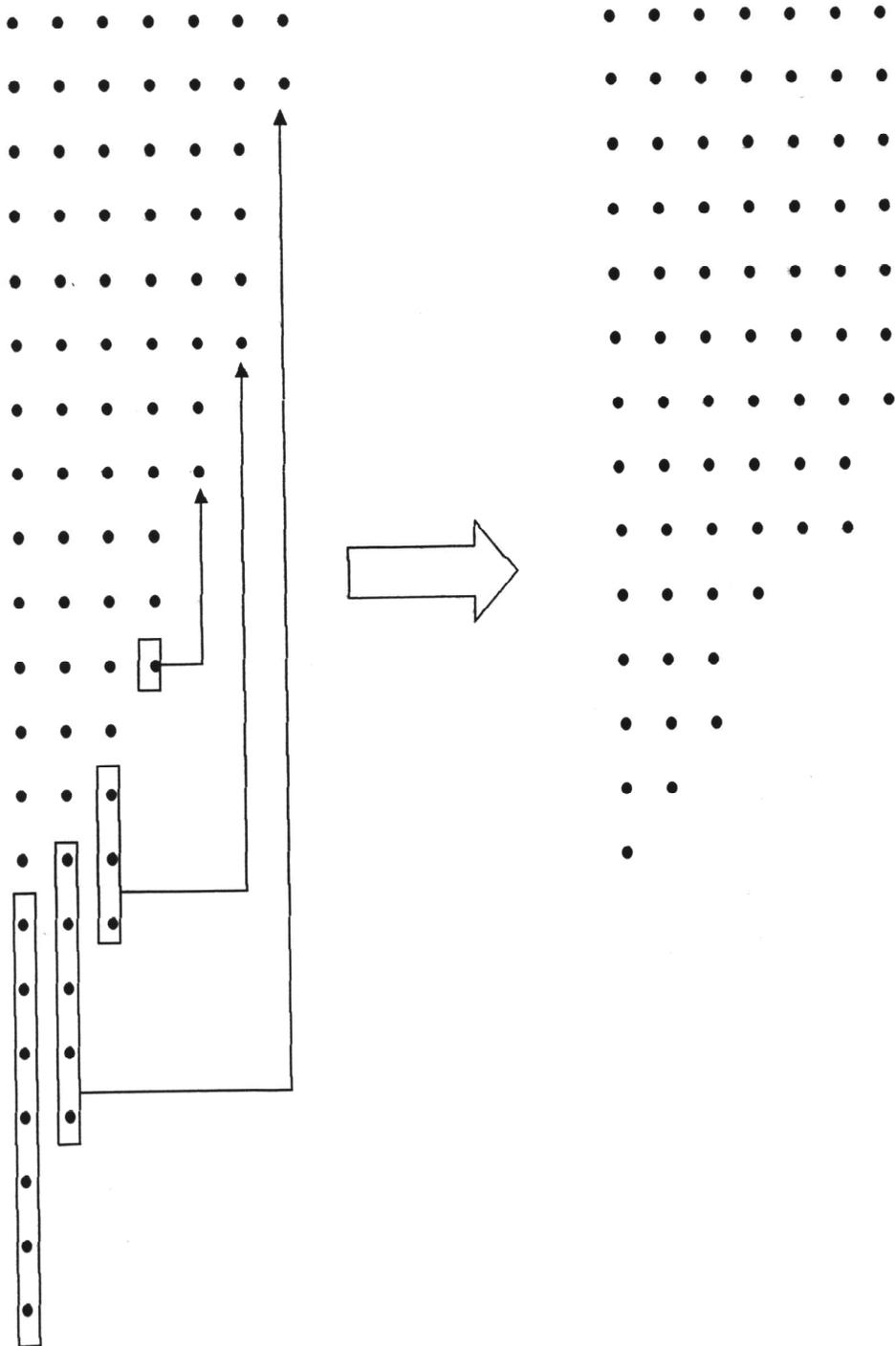
1. à partição vazia associamos a partição vazia;
2. se a partição não é vazia, então agimos da seguinte forma
 - elimina-se p elementos da primeira coluna;
 - transporta-se $p - 2, p - 4, \dots, p - 2 \times \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ elementos das colunas $2, 3, \dots, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1$ para as colunas $p, p - 1, p - 2, \dots, p - \lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1$, respectivamente, obtendo a partição pretendida.

Reciprocamente, dada uma partição, onde a maior parte p é lado do quadrado de Durfee e a maior parte mais o número de partes é menor do que ou igual à maior parte, obtemos uma partição do primeiro tipo do seguinte modo

1. à partição vazia associamos a partição vazia;
2. se a partição não é vazia, então agimos da seguinte forma
 - acrescenta-se p elementos na primeira coluna;
 - transporta-se $p - 2, p - 4, \dots, p - 2 \times \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ elementos das colunas $p, p - 1, p - 2, \dots, p - \lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1$ para as colunas $2, 3, \dots, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1$, respectivamente.

Aqui, quando uma quantidade a ser transportada for negativa ou nula, simplesmente encerramos o processo e tomamos a partição até então obtida como a partição desejada.

Exemplo: Nas páginas 108 e 109, exibimos a transformação que leva a partição $7 + 7 + 6 + 6 + 6 + 6 + 5 + 5 + 4 + 4 + 4 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1$ na partição $7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 6 + 6 + 4 + 3 + 3 + 2 + 1$ e a transformação inversa, respectivamente.



5.3 Números de Pell

A seqüência de Pell é apresentada abaixo

$$1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, , \dots,$$

isto é $\{P_n\}_{n \geq 0}$, com $P_0 = 1$, $P_1 = 2$ e $P_n = P_{n-2} + 2P_{n-1}$.

Existem, também, muitas interpretações combinatórias para os números de Pell. Apresentamos, a seguir, quatro delas. Estas interpretações foram obtidas ao tomar $q = 1$ em seqüências de polinômios $P_n(q)$, obtidas por Santos em [14]. A letra em maiúsculo ao lado de cada uma delas denota o conjunto dos elementos enumerados por P_n em cada interpretação.

1. (*F*) P_n , $n \geq 0$, é o número de partições em no máximo n partes, onde todo ímpar menor do que ou igual à maior parte aparece uma ou duas vezes.
2. (*G*) P_n , $n \geq 0$, é o número de partições em no máximo n partes, onde
 - a maior parte é par;
 - todo par menor do que ou igual à maior parte aparece pelo menos uma vez;
 - as partes ímpares são distintas.
3. (*H*) P_n , $n \geq 0$, é o número de partições em no máximo n partes com duas cores (verde e preta), onde
 - a maior parte é preta;
 - toda parte preta menor do que ou igual à maior parte preta ocorre exatamente uma vez;
 - as partes verdes são menores do que ou iguais à maior parte preta e formam uma sobrepartição. Destacamos que uma sobrepartição é uma partição onde a primeira ocorrência de cada parte pode ser marcada. Por exemplo, as sobrepartições de $n = 3$ são: 3 , $\bar{3}$, $2+1$, $\bar{2} + 1$, $2+\bar{1}$, $\bar{2} + \bar{1}$, $1+1+1$ e $\bar{1} + 1 + 1$. Além disso, as partições deste item para $n = 2$ ($P_2 = 5$) são: ϕ , 1_p , $1_p + 1_v$, $1_p + \bar{1}_v$ e $2_p + 1_p$ (aqui, se a parte a é preta ou verde, a denotamos por a_p e a_v , respectivamente).

4. (I) P_n , $n \geq 0$, é o número de sobrepartições em no máximo n partes, onde todo inteiro menor do que ou igual à maior parte ocorre pelo menos uma vez, com a condição adicional de que só ocorre parte marcada se ocorrer parte igual a ela não marcada. Por exemplo, $P_2 = 5$: $\phi, 1, 1 + 1, 1 + \bar{1}$ e $2 + 1$.

Na próxima seção, apresentamos as bijeções entre os seguintes pares de conjuntos descritos anteriormente

$$(F, G) \quad \text{e} \quad (H, I).$$

5.4 As bijeções

5.4.1 Bijeção (F, G)

Seja uma partição em no máximo n partes, onde todo ímpar menor do que ou igual à maior parte aparece uma ou duas vezes. Obtemos uma partição em no máximo n partes, onde a maior parte é par, todo par menor do que ou igual à maior parte aparece pelo menos uma vez e as partes ímpares são distintas, do seguinte modo

1. à partição vazia, associamos a partição vazia;
2. se a partição não é vazia, então somamos "1" a uma cópia de cada ímpar.

Reciprocamente, dada uma partição do segundo tipo, obtemos uma partição do primeiro tipo do seguinte modo

1. à partição vazia, associamos a partição vazia;
2. se a partição não é vazia, então subtraímos "1" de uma cópia de cada par.

Exemplo:

$$P_3 = 12$$

$$\begin{aligned} \phi &\longleftrightarrow \phi \\ 1 &\longleftrightarrow 2 \\ 1 + 1 &\longleftrightarrow 2 + 1 \\ 2 + 1 &\longleftrightarrow 2 + 2 \\ 3 + 1 &\longleftrightarrow 4 + 2 \\ 2 + 1 + 1 &\longleftrightarrow 2 + 2 + 1 \\ 2 + 2 + 1 &\longleftrightarrow 2 + 2 + 2 \\ 3 + 1 + 1 &\longleftrightarrow 4 + 2 + 1 \\ 3 + 2 + 1 &\longleftrightarrow 4 + 2 + 2 \\ 3 + 3 + 1 &\longleftrightarrow 4 + 3 + 2 \\ 4 + 3 + 1 &\longleftrightarrow 4 + 4 + 2 \\ 5 + 3 + 1 &\longleftrightarrow 6 + 4 + 2 \end{aligned}$$

5.4.2 Bijeção (H, I)

Seja uma partição do conjunto H . Obtemos uma partição do conjunto I do seguinte modo

1. à partição vazia, associamos a partição vazia;
2. se a partição não é vazia, então simplesmente tiramos as marcas p e v .

Reciprocamente, dada uma partição de I , obtemos uma partição de G do seguinte modo

1. à partição vazia, associamos a partição vazia;
2. se a partição não é vazia, então colocamos a marca p em uma cópia de cada parte e colocamos a marca v nas partes restantes.

Exemplo: $P_3 = 12$

$$\begin{aligned}\phi &\longleftrightarrow \phi \\ 1_p &\longleftrightarrow 1 \\ 1_p + 1_v &\longleftrightarrow 1 + 1 \\ 1_p + \bar{1}_v &\longleftrightarrow 1 + \bar{1} \\ 2_p + 1_p &\longleftrightarrow 2 + 1 \\ 1_p + 1_v + \bar{1}_v &\longleftrightarrow 1 + 1 + \bar{1} \\ 1_p + 1_v + 1_v &\longleftrightarrow 111 \\ 2_p + 1_p + 1_v &\longleftrightarrow 2 + 1 + 1 \\ 2_p + 1_p + \bar{1}_v &\longleftrightarrow 2 + 1 + \bar{1} \\ 2_p + 2_v + 1_p &\longleftrightarrow 2 + 2 + 1 \\ 2_p + \bar{2}_v + 1_p &\longleftrightarrow 2 + \bar{2} + 1 \\ 3_p + 2_p + 1_p &\longleftrightarrow 3 + 2 + 1\end{aligned}$$

Capítulo 6

Uma classe de partições

Neste capítulo, apresentamos no teorema seguinte, uma classe de partições, onde temos um parâmetro k . Para valores particulares de k , obtemos como corolários resultados conhecidos em partições. Aqui, seguimos a idéia de Santos e Mondek em [17].

Teorema 6.1 *Seja $f_{j,k}(n)$, $j, k \geq 1$, o número de partições de n em partes distintas $e \equiv j \pmod{k}$ da forma*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_s,$$

onde $a_s \geq j$. Então

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{j,k}(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{kn(n-1)}{2} + jn}}{(q^k; q^k)_n}.$$

Prova:

Seja $f(m, n)$ o número de partições do tipo enumerado por $f_{j,k}(n)$, com a restrição adicional de que o número de partes é exatamente m . Então a seguinte equação de recorrência vale

$$f(m, n) = f(m, n - km) + f(m - 1, n - km + k - j).$$

Para provarmos esta afirmação, nós dividimos as partições enumeradas por $f(m, n)$ em duas classes: (a) aquelas onde $a_m > j$ e (b) aquelas onde $a_m = j$. daquelas da classe (a), nós subtraímos k de cada parte, obtendo partições

de $n - km$ em exatamente m partes, que são enumeradas por $f(m, n - km)$. Das da classe (b), nós deletamos a parte igual a j e subtraímos k de cada parte restante, obtendo partições de $n - k(m-1) - j = n - km + k - j$ em exatamente $m - 1$ partes, que são enumeradas por $f(m - 1, n - km + k - j)$.

Agora, definimos

$$F(z, q) := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n) z^m q^n.$$

Temos

$$\begin{aligned} F(z, q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n) z^m q^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - km) (zq^k)^m q^{n - km} + \\ &+ zq^j \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m - 1, n - km + k - j) (zq^k)^{m-1} q^{n - km + k - j}, \end{aligned}$$

isto é

$$F(z, q) = F(zq^k, q) + zq^j F(zq^k, q).$$

Assumindo que

$$F(z, q) := \sum_{n=0}^{\infty} A(n, q) z^n,$$

então, comparando os coeficientes de z^n na equação funcional acima, obtemos

$$A(n, q) = q^{kn} A(n, q) + q^{k(n-1)+j} A(n - 1, q).$$

Ou seja

$$A(n, q) = \frac{q^{k(n-1)+j}}{1 - q^{kn}} A(n - 1, q).$$

Observando que $A(0, q) = 1$, após $n - 1$ iterações, obtemos

$$A(n, q) = \frac{q^{\frac{kn(n-1)}{2} + jn}}{(q^k; q^k)_n}.$$

Desse modo, podemos escrever

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{kn(n-1)}{2} + jn}}{(q^k; q^k)_n} z^n,$$

o que implica que o teorema está provado, uma vez que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} f_{j,k}(n)q^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} f(m, n)z^m \right) q^n \\ &= F(1, q) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{kn(n-1)}{2} + jn}}{(q^k; q^k)_n}. \end{aligned}$$

Corolário 6.2: *O número de partições de n em partes distintas e múltiplas de k é igual ao número de partições de n em partes $\equiv k \pmod{2k}$.*

Prova;

Fazendo $j = k$ no teorema 1.1, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{k,k}(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{kn(n+1)}{2}}}{(q^k; q^k)_n}.$$

Agora, seja a identidade 07 de Slater ([18])

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{4n-1})(1 - q^{4n-3})(1 - q^{4n}) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)}}{(q^2; q^2)_n},$$

isto é

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{4n-2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)}}{(q^2; q^2)_n}.$$

Substituindo q por $q^{\frac{k}{2}}$, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{kn(n+1)}{2}}}{(q^k; q^k)_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{2kn-k}}.$$

Desse modo, segue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{k,k}(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{2kn-k}},$$

ficando completa a prova.

Observações:

- o caso $k = 1$ nos fornece o conhecido resultado sobre partições: o número de partições de n em partes distintas é igual ao número de partições de n em partes ímpares;
- para o caso $k = 2$, temos: o número de partições de n em partes pares distintas é igual ao número de partições de n em partes $\equiv 2 \pmod{4}$.

Corolário 6.3: *O número de partições de n em partes ímpares distintas, com número par de partes, é igual ao número de partições de n em partes que são pares, onde as partes $\equiv 6, 10 \pmod{16}$ são distintas e as outras partes são múltiplas de 4 e $\not\equiv 0 \pmod{16}$.*

Prova:

Seja a identidade 39 de Slater ([18])

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{8n-3})(1 + q^{8n-5})(1 - q^{8n}) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n^2}}{(q; q)_{2n}}.$$

Fazendo $2n = N$, vem

$$\prod_{\substack{N=2 \\ N \text{ par}}}^{\infty} (1 + q^{4N-3})(1 + q^{4N-5})(1 - q^{4N}) = \prod_{\substack{N=2 \\ N \text{ par}}}^{\infty} (1 - q^N) \times \sum_{\substack{N=0 \\ N \text{ par}}}^{\infty} \frac{q^{\frac{N^2}{2}}}{(q; q)_N},$$

isto é

$$\prod_{\substack{N=2 \\ N \text{ par}}}^{\infty} (1 + q^{4N-3})(1 + q^{4N-5}) \times \prod_{\substack{N=2 \\ N \text{ par}}}^{\infty} \frac{1 - q^{4N}}{1 - q^N} = \sum_{\substack{N=0 \\ N \text{ par}}}^{\infty} \frac{q^{\frac{N^2}{2}}}{(q; q)_N}.$$

Substituindo q por q^2 , obtemos

$$\prod_{\substack{N=2 \\ N \text{ par}}}^{\infty} (1 + q^{8N-6})(1 + q^{8N-10}) \times \prod_{\substack{N=2 \\ N \text{ par}}}^{\infty} \frac{1 - q^{8N}}{1 - q^{2N}} = \sum_{\substack{N=0 \\ N \text{ par}}}^{\infty} \frac{q^{N^2}}{(q^2; q^2)_N},$$

ou, em termos somente de n

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{16n-6})(1 + q^{16n-10}) \times \prod_{\substack{n=1 \\ n \not\equiv 0 \pmod{16}}}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{4n}} = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ par}}}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q^2; q^2)_n}.$$

Agora, fazendo $j = 1$ e $k = 2$ no teorema 1.1, considerando apenas n par e denotando por $f_{e_{1,2}}$ o número de partições com estas considerações, vem

$$\sum_{\substack{n=0 \\ n\text{par}}}^{\infty} f_{e_{1,2}}(n)q^n = \sum_{\substack{n=0 \\ n\text{par}}}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q^2; q^2)_n},$$

ficando completa a prova.

Ilustramos, abaixo, estes conjuntos de partições para $n = 20$.

19 + 1	20
17 + 3	12 + 8
15 + 5	12 + 4 + 4
13 + 7	10 + 6 + 4
11 + 9	8 + 8 + 4
11 + 5 + 3 + 1	4 + 4 + 4 + 4 + 4

Considerações finais

Este trabalho, basicamente, se divide em três partes: variações do diagrama de Ferrers (capítulo 2), partições planas (capítulos 3 e 4) e resultados sobre números de Fibonacci e de Pell (capítulo 5).

Na primeira, motivados pela leitura do artigo de Propp ([12]), efetuamos cinco variações do diagrama de Ferrers, seguidas de suas caracterizações em termos de partições. Nosso objetivo era obter funções geradoras para o número de diagramas legais em cada caso, que foi atingido. Além disso, nos diagramas Hex2 e Hex3, obtivemos seqüências especiais fazendo contagem em termos de partições. Destacamos, em particular, o diagrama Hex2 como o mais relevante do capítulo 2, porque, além da importante presença dos números de Fibonacci, eles podem despertar interesse em outras áreas, como, por exemplo, Química. Há a esperança de se obter mais resultados, através de novas variações de tais diagramas.

Na segunda, tratamos das partições planas com duas e três linhas. As partições planas têm despertado interesse nos últimos anos, tendo sido estudadas por vários matemáticos, dentre os quais destacamos: Bender e Knuth ([3]), Cohn, Larsen e Propp ([6]), MacMahon ([10] e [11]) e Stanley ([19]). Os resultados obtidos foram interpretações combinatórias, em termos de partições ordinárias, das partições planas com duas e três linhas. A busca de tais interpretações foi motivada pela leitura do artigo de Cheema e Gordon ([5]), onde eles apresentaram uma outra interpretação para partições planas com duas linhas. Para o futuro, pode-se tentar estender este estudo para partições planas com quatro ou mais linhas.

Na terceira, obtivemos sete bijeções envolvendo interpretações combinatórias dos números de Fibonacci e duas bijeções envolvendo interpretações combinatórias dos números de Pell. As bijeções são importantes, porque, além da beleza que elas encerram, são úteis na obtenção de demonstrações de identidades em Matemática. O objetivo futuro é obter bijeções entre

outras interpretações combinatórias de Fibonacci e de Pell em termos de sobrepartições, além de bijeções referentes a outros tipos de números, como, por exemplo, números de Jacobsthal.

No capítulo 6, motivado pela leitura do artigo de Santos e Mondek ([17]), o resultado, obtido no final do meu período de doutoramento, fortemente se destaca como o início de uma linha de pesquisa a atuar logo após o Doutorado. Resultados semelhantes, envolvendo sobrepartições, têm sido recentemente obtidos e este tipo de trabalho tem demonstrado interesse na teoria de partições.

Referências Bibliográficas

- [1] Andrews, G. E., *The Theory of Partitions*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Vol. 2, Addison-Wesley, Reading, MA, 1976.
- [2] Andrews, G. E., *Generalized Frobenius Partitions*, Mem. Amer. Math. Soc., **301** (1984).
- [3] Bender, E. A. and Knuth, D. E., *Enumeration of Plane Partitions*, J. Combin. Theory Ser. A, **13** (1972), 40-54.
- [4] Benjamin, A. T. and Quinn, J. J., *Proofs That Really Count*, The Math. Assoc. of America, **27** (2003).
- [5] Cheema, M. S. and Gordon, B., *Some remarks on two- and three-line partitions*, Duke Math. J., **31** (1964), 267-273.
- [6] Cohn, H., Larsen, M. and Propp, J., *The Shape of a Typical Boxed Plane Partition*, New York J. Math., **4** (1998), 137-166.
- [7] Gölnitz, H., *Partitionen mit Differenzenbedingungen*, J. reine Angew Math., **225** (1967), 154-190.
- [8] Hardy, G. H. and Wright, E. M., *An Introduction to the Theory of Numbers*, 4th ed., Oxford Univ. Press, London/New York, 1960.
- [9] MacMahon, P. A., *Combinatory Analysis*, Vol. 2, Cambridge Univ. Press, London/New York, 1916.
- [10] MacMahon, P. A., *Memoir on the Theory of the Partitions of Numbers. V: Partitions in Two-Dimensional Space*, Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A, **211** (1912a), 75-110.

- [11] MacMahon, P. A., *Memoir on the Theory of the Partitions of Numbers. VI: Partitions in Two-Dimensional Space, to which is Added an Adumbration of the Theory of Partitions in Three-Dimensional Sapace*, Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A, **211** (1912b), 345-373.
- [12] Propp, J., *Some Variants of Ferrers Diagrams*, Journal of Combinatorial Theory, **52** (1989), 98-128.
- [13] Sloane, N. J. A., *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*: www.research.att.com/~njas/sequences.
- [14] Santos, J. P. O., *Computer Algebra and Identities of the Rogers-Ramanujan Type*, PhD Thesis, Pennsylvania States University, 1991.
- [15] Santos, J. P. O., *On the Combinatorics of Polynomial Generalizations of Rogers-Ramanujan Type Identities*, Discrete Mathematics, **254** (2002), 497-511.
- [16] Santos, J. P. O. and Ivkovic, M., *Fibonacci numbers and partitions*, The Fibonacci Quartely, **41** (2003), 263-278.
- [17] Santos, J. P. O. and Mondek, P., *A family of partitions with attached parts and N copies of N* , Discrete Mathematics, **222**, n. 1-3 (2000), 213-222.
- [18] Slater, L. J., *Further Identities of the Rogers-Ramanujan Type*, Proc. London Math. Soc. **2** (1952), 147-167.
- [19] Stanley, R. P., *Simmetry of Plane Partitions*, J. Combin. Theory Serie A, **3** (1986), 103-113.