
ANA CLAUDIA LOPES ONORIO

# PROPRIEDADES HOMOLÓGICAS DE PRODUTOS SUBDIRETOS DE GRUPOS LIMITES

**CAMPINAS**
**2014**


Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

Ana Claudia Lopes Onorio

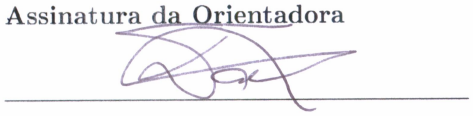
# Propriedades Homológicas de Produtos Subdiretos de Grupos Limites

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em *Matemática*.

**Orientadora: Dessislava Hristova Kochloukova**

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELA ALUNA ANA CLAUDIA LOPES ONORIO, E ORIENTADA PELA PROFA DRA DESSISLAVA HRISTOVA KOCHLOUKOVA.

**Assinatura da Orientadora**



Campinas
2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

On7p

Onorio, Ana Claudia Lopes, 1989-
Propriedades homológicas de produtos subdiretos de grupos limites / Ana Claudia Lopes Onorio. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Dessislava Hristova Kochloukova.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

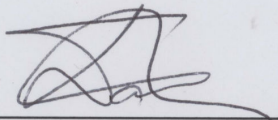
1. Álgebra homológica. 2. Grupos limites. 3. Bass-Serre, Teoria de. I. Kochloukova, Dessislava Hristova,1970-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

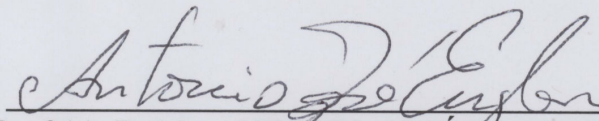
**Título em outro idioma:** Homological properties of subdirect products of limit groups
**Palavras-chave em inglês:**
Homological algebra
Limit groups
Bass-Serre theory
**Área de concentração:** Matemática
**Titulação:** Mestra em Matemática
**Banca examinadora:**
Dessislava Hristova Kochloukova [Orientador]
Antonio José Engler
Pavel Zalesski
**Data de defesa:** 21-03-2014
**Programa de Pós-Graduação:** Matemática

**Dissertação de Mestrado defendida em 21 de março de 2014 e aprovada**

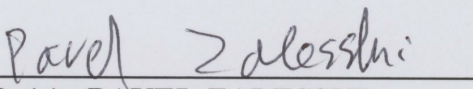
**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



**Prof.(a). Dr(a). DESSISLAVA HRISTOVA KOCHLOUKOVA**



**Prof.(a). Dr(a). ANTONIO JOSÉ ENGLER**



**Prof.(a). Dr(a). PAVEL ZALESSKI**

# ABSTRACT

The homological type $FP_s$ of subdirect products of limit groups was studied according to Bridson, Howie, Miller and Short's results. The limit group theory was developed using as a tool the algebraic homology and geometric group theory and in particular Bass-Serre theory on groups acting on trees.

**Keywords**: Bass-Serre theory, homological algebra, groups of type $FP_n$, limit groups, subdirect product of limit groups

# RESUMO

Estudamos o tipo homológico $FP_s$ de produtos subdiretos de grupos limites seguindo resultados de Bridson, Howie, Miller, Short. Desenvolvemos teoria de grupos limites usando como ferramenta homologia algébrica e teoria geométrica de grupos, em particular a teoria de Bass-Serre sobre grupos que agem sobre árvores.

**Palavras-chaves**: teoria de Bass-Serre, álgebra homológica, grupos de tipo $FP_n$, grupos limites, produto subdireto de grupos limites

# SUMÁRIO

# AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à minha orientadora professora Dessislava. Sempre presente durante esses dois anos de trabalho, ela não somente me orientou e me auxiliou com as muitas dúvidas que surgiam ao longo do mestrado; mas também me apoiou enormemente quanto aos meus planos para o doutorado. É difícil expressar em palavras minha gratidão.

Gostaria também de agradecer aos professores que ao longo da vida me inspiraram como pessoas e profissionais: Carmem Sílvia, Augusto, Cristiano. Dessa forma, também agradeço novamente à professora Dessislava e ao meu orientador durante minha graduação, professor Roldão, quem primeiro me iniciou à pesquisa e acreditou em mim muito mais do que eu mesma.

Agradeço à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), cujo apoio financeiro permitiu a concretização deste trabalho. Também agradeço à UNICAMP (Universidade Estadual de Campinas) e ao IMECC (Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica), tão importantes na minha formação profissional e pessoal. Ainda a UNICAMP, através do SAE (Serviço de Apoio ao Estudante) e do PME (Programa de Moradia Estudantil), foi auxílio fundamental para que eu pudesse me manter na universidade. Minha imensa gratidão.

Meus especiais agradecimentos às meninas que conviveram comigo e estiveram presentes durante toda ou boa parte da minha história de gradução e mestrado: Dani, Pam, Elisa, Gra, Cí e Angie. Também agradeço a dois amigos especiais: à Dé, que me lembrava de todas as datas importantes, e ao Francis, que me ajudou a finalizar essa dissertação.

Por fim, agradeço às pessoas que sempre me apoiaram primeiro e incondicionalmente: minha família. Sou muito feliz por poder compartilhar com minha mãe, meu pai e minha irmã cada realização da minha vida. Minha eterna gratidão.

# LISTA DE SÍMBOLOS

$R$ - anel associativo com identidade

$\mathbb{Z}$ - conjunto dos números inteiros, grupo abeliano usual dos inteiros, ou anel usual dos inteiros

$\mathbb{Q}$ - conjunto dos números racionais, corpo usual dos racionais

$\mathbb{Z}_n$ - grupo cíclico finito de ordem n.

$\mathbb{Z}^n$ - grupo abeliano cujo conjunto de elementos é o conjunto de $n$-uplas de números inteiros $\mathbb{Z}^n$ e a operação é a soma usual em $\mathbb{Z}^n$

$G = \langle X \rangle$ - significa que o grupo $G$ é gerado por $X$

$\langle R \rangle^G$ - fecho normal de um conjunto $R$ no grupo $G$, ou seja, menor subgrupo normal em $G$ gerado por $R$.

$A \leq B$ - significa que o grupo $A$ é subgrupo do grupo $B$, ou que o módulo $A$ é submódulo do módulo $B$

$|X|$ - cardinalidade do conjunto $X$

$\lhd$ - denota subgrupo normal

$\cong$ - significa "isomorfo a"

$\twoheadrightarrow$ - símbolo utilizado para funções que são sobrejetivas

$\rightarrowtail$ - símbolo utilizado para funções que são injetivas

$\hookrightarrow$ - símbolo utilizado para funções que são inclusões e mergulhos

$\leftrightarrow$ - símbolo utilizado para identificações entre elementos

$\oplus$ - significa soma direta

$\prod$ - significa produto direto

$|G : H|$ - símbolo que denota o índice do subgrupo $H$ no grupo $G$

$\dot{\bigcup}$ - símbolo utilizado para união disjunta

# Introdução

O objetivo desta dissertação é estudar alguns resultados envolvendo produtos subdiretos de grupos limites. A teoria de grupos limites foi desenvolvida por Z. Sela [20] e independentemente por Kharlampovich e Myasnikov [14]. O termo **grupo limite** foi introduzido por Z. Sela em [20] como o quociente de um grupo finitamente gerado $G$ pelo núcleo da ação de $G$ sobre uma árvore limite. No mesmo artigo, Sela mostra que um grupo finitamente gerado é grupo limite se, e somente se, é $\omega$-residualmente livre. Embora outros artigos definam grupos limites sob diferentes perspectivas (por exemplo, grupos limites como limites de grupos livres, ver [11]), este trabalho descreverá grupo limite como grupo fundamental de um grafo finito de grupos [7], que será exibido no Capítulo 6.

As propriedades homológicas de produtos subdiretos de grupos limites foi iniciado em [6]. Embora o termo grupo limite não tenha sido usado, o artigo [6] trata do estudo de produtos subdiretos de grupos de superfície, que são grupos limites quando a característica de Euler dessas superfícies é menor que -1. Seja $G = G_1 \times \ldots \times G_n$ um produto direto de grupos. Dizemos que $S \leq G$ é um produto subdireto de $G$ se as projeções canônicas $p_i : S \longrightarrow G_i$, para cada $i = 1, \ldots, n$, são sobrejetivas.

Para entender tais resultados, foi necessário o estudo e desenvolvimento de algumas teorias como Bass-Serre e Homologia Algébrica.

O capítulo 1 desenvolve conceitos básicos de grupos livres, produtos livres, produtos livres amalgamados e extensões HNN. No capítulo 2, é apresentada a teoria geral de Bass-Serre sobre grupos que agem sobre árvores e grupos fundamentais de grafos de grupos. O conteúdo apresentado nesses capítulos segue o livro [12].

No capítulo 3 são estudados conceitos básicos de Homologia Algébrica necessários para o desenvolvimento da teoria de grupos limites do capítulo final. No capítulo 4 é feita a construção de sequências espectrais. O capítulo 5 introduz definições e resultados básicos sobre grupos de tipo $FP_n$. O conteúdo desses capítulos foi baseado nos livros [19], [10] e [5].

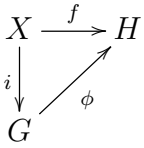
Na parte final da dissertação, estudamos a teoria de grupos limites seguindo os artigos principais [9] e [17]. Outras referências como [20], [4], [23], [7] e [16] foram utilizadas para o desenvolvimento da teoria. A motivação do estudo de produtos subdiretos de grupos limites vem do fato de que cada grupo finitamente gerado e residualmente livre mergulha em um produto direto finito de grupos limites [3] [20] [15] .

# Capítulo 1

# Teoria Combinatorial de Grupos

## 1.1 Grupos Livres

**Definição 1.1.1.** *Seja $G$ um grupo, $X$ um conjunto e $i$ uma função de $X$ em $G$. Dizemos que $G$ é* **grupo livre com base** *$X$ se satisfaz a seguinte propriedade universal: para todo par $(f, H)$, em que $H$ é um grupo qualquer e $f$ uma função qualquer de $X$ em $H$, existe um único homomorfismo $\phi : G \longrightarrow H$ tal que $\phi \circ i = f$, ou seja, tal que o diagrama abaixo é comutativo:*




**Proposição 1.1.1.** *Sejam $G_1$ e $G_2$ grupos livres com base $X$ e $i_1$, $i_2$ as funções, respectivamente, de $X$ em $G_1$ e $X$ em $G_2$. Então, existe um único isomorfismo $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ tal que $\varphi \circ i_1 = i_2$.*

*Demonstração.* Pela propriedade de grupo livre, existem únicos homomorfismos $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ e $\varphi' : G_2 \longrightarrow G_1$ tais que $\varphi \circ i_1 = i_2$ e $\varphi' \circ i_2 = i_1$. Assim, $\varphi \circ \varphi' \circ i_2 = i_2$ e $\varphi' \circ \varphi \circ i_1 = i_1$. Pela unicidade do homomorfismo da propriedade universal de grupos livres, temos que $\varphi \circ \varphi' = id_{G_2}$ e $\varphi' \circ \varphi = id_{G_1}$. Logo, $\varphi' = \varphi^{-1}$ e, portanto, $\varphi$ é um isomorfismo. □

**Proposição 1.1.2.** *Se $G$ é grupo livre com base $X$ e $i$ é a função de $X$ em $G$, então $i$ é injetora.*

*Demonstração.* Considere $H = \mathbb{Z}^X := \{\text{funções de } X \text{ a } \mathbb{Z}\}$. As funções $\alpha_y : X \longrightarrow \mathbb{Z}$, $y \in X$, definidas por

$$\alpha_y(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = y \\ 0 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

pertencem a $H$. Tome $f : X \longrightarrow H$ tal que $f(x) = \alpha_x$. Pela propriedade universal de grupos livres, existe um homomorfismo $\phi : G \longrightarrow H$ tal que $\phi \circ i = f$. Daí, se $x_1$, $x_2 \in X$ e $i(x_1) = i(x_2)$, então

$$\phi \circ i(x_1) = \phi \circ i(x_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \alpha_{x_1} = \alpha_{x_2} \Rightarrow x_1 = x_1.$$

Portanto, $i$ é injetora. □

### 1.1.1 Existência de Grupos Livres

Seja $X$ um conjunto cujos elementos chamaremos de **letras**. Considere $\overline{X}$ outro conjunto, disjunto de $X$, tal que $X \longrightarrow \overline{X}$ é uma bijeção e cada $x \in X$ tem um correspondente em $\overline{X}$ denotado por $x^{-1}$. Se $x_{i_1}^{\epsilon_1}, \ldots, x_{i_n}^{\epsilon_n} \in X \cup \overline{X}$, $\epsilon_i = \pm 1$, $i = 1, \ldots, n$, dizemos que $x_{i_1}^{\epsilon_1} \ldots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ é uma **palavra**.

Defina $\mathcal{M}(X \cup \overline{X})$ o conjunto de todas as palavras com letras em $X \cup \overline{X}$. Dizemos que uma palavra $w$ é **redutível** se existe $j$ tal que $x_{i_{j+1}}^{\epsilon_{j+1}} = x_{i_j}^{-\epsilon_j}$. Se $w$ não é redutível, então dizemos que $w$ é **reduzida**. Toda palavra redutível pode ser reduzida, basta tomar $w' = x_{i_1}^{\epsilon_1} \ldots x_{i_{j-1}}^{\epsilon_{j-1}} x_{i_{j+2}}^{\epsilon_{j+2}} \ldots x_{i_n}$. A redução de $w$ em $w'$ é chamada **redução elementar**. Caso $w'$ ainda não seja reduzida, basta aplicar o processo de redução elementar novamente, e assim sucessivamente.

Daí, se $w, v$ são palavras de $\mathcal{M}(X \cup \overline{X})$, definimos a seguinte relação $\sim$ e dizemos que $w \sim v$ se:

- $w = v$ ou
- existe uma sequência de palavras $w_1, \ldots, w_k$ tal que $w_1 = w$, $w_k = v$ e $w_i$, $w_{i+1}$ diferem por uma redução elementar, $i = 1, \ldots, k-1$.

Assim, $xx^{-1} \sim$ **palavra vazia**.

É fácil ver que $\sim$ é relação de equivalência:

- $u \sim u$, pois $u = u$;
- se $u = v$, então $v = u$; se existe uma sequência de palavras $w_1, \ldots, w_k$ tal que $w_1 = u$ e $w_k = v$ e $w_i$, $w_{i+1}$ diferem por uma redução elementar, $i = 1, \ldots, k-1$, a nova sequência de palavras $u_j = w_{k-(j-1)}$, $j = 1, \ldots, k$ é tal que duas palavras consecutivas diferem por uma redução elementar e $u_1 = v$ e $u_k = u$. Portanto, se $u \sim v$ então $v \sim u$;
- se $u_1, \ldots, u_k$, $v_1, \ldots, v_l$ são duas sequências de palavras tais que $u_1 = u$, $u_k = v$, $v_1 = v$, $v_l = w$ e termos consecutivos diferem por uma redução elementar, então $u_1, \ldots, u_k, v_2, \ldots, v_l$ é uma sequência de palavras cujos termos consecutivos diferem por uma redução elementar; se $u = v$ ou $v = w$, a demonstração é óbvia. Portanto, se $u \sim v$ e $v \sim w$, então $u \sim w$.

Se $u, v, w, z$ são palavras e $u \sim v$, $w \sim z$, então $uw \sim vw$ e $vw \sim vz$. Logo, $uw \sim vz$.

Denotamos por $\mathcal{F}(X)$ o conjunto de todas as classes de equivalência $[w]$ de palavras $w$ em $\mathcal{M}(X \cup \overline{X})$. Definimos em $\mathcal{F}(X)$ o produto $[w] \cdot [v] = [wv]$ ($wv$ é apenas a justaposição das palavras $w$ e $v$).

1) *o produto está bem definido:* se $w' \sim w$ e $v' \sim v$, então $w'v' \sim wv$.

2) $\mathcal{F}(X)$ *com o produto* $\cdot$ *é grupo:* se $w = x_{i_1}^{\epsilon_1} \ldots x_{i_n}^{\epsilon_n}$, vamos definir $w^{-1} = x_{i_n}^{-\epsilon_n} \ldots x_{i_1}^{-\epsilon_1}$. Vemos que $[\,]$ (classe da palavra vazia) é o elemento neutro de $\mathcal{F}(X)$, pois $[\,] \cdot [w] = [w] = [w] \cdot [\,]$. Ainda, vemos que $[ww^{-1}] = [\,] = [w^{-1}w]$. Então, $[w]^{-1} = [w^{-1}]$. Basta mostrar que $\mathcal{F}(X)$ é associativa. Mas $(wv)u = w(vu)$. Portanto, concluímos que $\mathcal{F}(X)$ é grupo.

**Teorema 1.1.1.** *Seja $i : X \rightarrowtail \mathcal{F}(X)$ a função dada por $i(x) = [x]$. Então, $\mathcal{F}(X)$ é grupo livre com base $X$.*

*Demonstração.* Seja $H$ um grupo e $f$ uma função de $X$ em $H$. O homomorfismo $\phi : \mathcal{F}(X) \longrightarrow H$ definido por $\phi([x]) = f(x)$ é, obviamente, o único tal que $\phi \circ i = f$. □

**Teorema 1.1.2** (Teorema da Forma Normal para Grupos Livres)**.** *Toda classe de equivalência de $\mathcal{F}(X)$ possui apenas uma palavra reduzida.*

*Demonstração.* (**Método de van der Waerden**): Seja $S$ o conjunto de todas as palavras reduzidas e $Perm(S)$ o grupo de todas as permutações de $S$. Seja $w = x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ uma palavra reduzida, $\epsilon_k = \pm 1$. Definimos $f : X \longrightarrow Perm(S)$ como:

$$f(x)(x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}) = \begin{cases} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n} & \text{se } x_{i_1}^{\epsilon_1} = x^{-1} \\ x x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

É fácil verificar que a função $f(x)^{-1}$ definida por

$$f(x)^{-1}(x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}) = \begin{cases} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n} & \text{se } x_{i_1}^{\epsilon_1} = x \\ x^{-1} x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é a inversa de $f(x)$. Portanto, $f(x) \in Perm(S)$.
Como $\mathcal{F}(X)$ é livre, existe um único homomorfismo $\phi : \mathcal{F}(X) \longrightarrow Perm(S)$ tal que $\phi([x]) = f(x)$, $\forall x \in X$, e $\phi([w]) = f(x_{i_1})^{\epsilon_1} \dots f(x_{i_n})^{\epsilon_n}$. Daí, se $w \sim w'$ e ambas são reduzidas, então $[w] = [w']$ e $\phi([w])[\,] = \phi([w'])[\,]$ implica que $w = w'$. □

**Proposição 1.1.3.** $\mathcal{F}(X) \cong \mathcal{F}(Y) \Leftrightarrow |X| = |Y|$.

*Demonstração.* Seja $s : X \longrightarrow Y$ uma bijeção, $i$ a função injetora de $X$ em $\mathcal{F}(X)$ e $j$ a função injetora de $Y$ em $\mathcal{F}(Y)$. Então, existem únicos homomorfismos $\phi : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(Y)$ e $\varphi : \mathcal{F}(Y) \longrightarrow \mathcal{F}(X)$ tais que $\phi \circ i = j \circ s$ e $\varphi \circ j = i \circ s^{-1}$. Daí,

$$\phi \circ \varphi \circ j = \phi \circ i \circ s^{-1} = j \circ s \circ s^{-1} = j \quad \text{e} \quad \varphi \circ \phi \circ i = \varphi \circ j \circ s = i \circ s^{-1} \circ s = i.$$

Logo, $\varphi = \phi^{-1}$. Portanto, $\mathcal{F}(X) \cong \mathcal{F}(Y)$.
Se $\mathcal{F}(X) \cong \mathcal{F}(Y)$, então o número de homomorfismos de $\mathcal{F}(X)$ em $\mathbb{Z}_2$ é o mesmo que o número de homomorfismos de $\mathcal{F}(Y)$ em $\mathbb{Z}_2$. Portanto, se $X$, $Y$ são conjuntos finitos, então $2^{|X|} = 2^{|Y|} \Rightarrow |X| = |Y|$. Se os conjuntos não são finitos, então, pelo Axioma da Escolha, $|\mathcal{M}(X \cup \overline{X})| = |X \cup \overline{X}| = |X|$. Sendo $\mathcal{F}(X)$ o conjunto de classes de equivalência de $\mathcal{M}(X \cup \overline{X})$, então $|\mathcal{F}(X)| \leq |X|$. Mas como $X$ mergulha em $\mathcal{F}(X)$, então $|X| \leq |\mathcal{F}(X)|$. Logo, $|X| = |\mathcal{F}(X)|$. Pela hipótese de que $|\mathcal{F}(X)| = \mathcal{F}(Y)|$, temos que $|X| = |Y|$. □

Portanto, se $G$ é um grupo livre com base $X$, temos que $G \cong \mathcal{F}(X)$. Denotamos **posto de** $G$ a cardinalidade de $|X|$.

**Definição 1.1.2.** *$G$ é grupo livre se $G$ é isomorfo a $\mathcal{F}(X)$ para algum conjunto $X$.*

### 1.1.2 Caracterização de Grupos livres

**Proposição 1.1.4.** *Seja $X$ um subconjunto do grupo $G$. São equivalentes:*

*i) $G$ é livre com base $X$;*

*ii) todo elemento de $G$ pode ser unicamente escrito como $x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}$, para algum $n \geq 0$, $x_{i_k} \in X$, $\epsilon_k = \pm 1$, em que $\epsilon_{k+1} \neq -\epsilon_k$ se $i_{k+1} = i_k$;*

*iii) $X$ gera $G$ e 1 não pode ser escrito como $x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}$, com $n > 0$, $x_{i_k} \in X$, $\epsilon_k = \pm 1$, e $\epsilon_{k+1} \neq -\epsilon_k$ se $i_{k+1} = i_k$.*

*Demonstração.* (ii) $\Rightarrow$ (iii) : óbvio (1 refere-se ao elemento de $G$ tal que $n = 0$). (iii) $\Rightarrow$ (ii) : $X$ gera $G \Rightarrow$ todo elemento de $G$ pode ser escrito como $x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}$, para algum $n \geq 0$, $x_{i_k} \in X$, $\epsilon_k = \pm 1$, em que $\epsilon_{k+1} \neq -\epsilon_k$ se $i_{k+1} = i_k$. Se $g \in G$ tem duas decomposições distintas $g = x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ e $g = x_{j_1}^{\delta_1} \dots x_{j_m}^{\delta_m}$, então $1 = x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n} x_{j_m}^{-\delta_m} \dots x_{j_1}^{-\delta_1}$, que é um produto de elementos de $X$, contradição.
(i) $\Rightarrow$ (ii) e (iii) : $G \cong \mathcal{F}(X) \Rightarrow X$ gera $G$ e se $1 = x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}$, cujo produto está nas condições de (ii), e $n > 0$, então $[\,] = [x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}]$. Como a palavra $x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ é reduzida, pelo teorema 1.1.2 ela deve ser a única representante reduzida da classe, contradição.
(ii) e (iii) $\Rightarrow$ (i) : a inclusão de $X$ em $G$ induz um homomorfismo de $\phi$ de $\mathcal{F}(X)$ em $G$ dado por $\phi([x]) = x$, $\forall x \in X$. Como $X$ gera $G$, $\phi$ é sobrejetora. Se $g, g' \in G$, então podem ser escritos como o produto descrito em (ii). Se $g'g^{-1} = 1$, então, pela (iii), $g'g^{-1}$ é redutível a 1. Logo, $[g'g^{-1}] = [\,]$. Assim, $\phi$ é injetora e, portanto, $G \cong \mathcal{F}(X)$. □

## 1.2 Geradores e Relações

**Proposição 1.2.1.** *Todo grupo $G$ é isomorfo a um quociente de algum grupo livre.*

*Demonstração.* Considere a identidade $id : G \longrightarrow G$ e o monomorfismo natural $i : G \rightarrowtail \mathcal{F}(G)$ ($i(g) = [g]$, $\forall g \in G$). Como $\mathcal{F}(G)$ é livre, pela propriedade universal dos grupos livres, existe um homomorfismo (único) $\phi : \mathcal{F}(G) \longrightarrow G$ tal que, $\forall g \in G$, $\phi([g]) = g$. Vemos que $\phi$ é sobrejetora. Logo, $G \cong \frac{\mathcal{F}(G)}{ker\phi}$. □

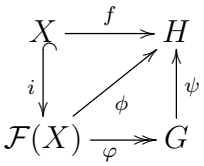
Seja $G$ um grupo, $X$ um conjunto e $\varphi : \mathcal{F}(X) \twoheadrightarrow G$ um epimorfismo. É claro que $G = \langle \{\varphi([x]),\ x \in X\} \rangle$. Como $X$ mergulha em $\mathcal{F}(X)$ é injetiva, usaremos a notação $\varphi(x)$ ao invés de $\varphi([x])$. Assim, $G = \langle \varphi(X) \rangle$. Portanto, denotaremos $X$ o conjunto dos **geradores** de $G$ (sob $\varphi$). Seja $R$ um subconjunto de $\mathcal{F}(X)$ tal que $\langle R \rangle^{\mathcal{F}(X)} = ker\varphi$. Então, denotamos $R$ o conjunto das **relações** de $G$ (sob $\varphi$). O conjunto $ker\varphi$ é chamado de conjunto de **consequências** de $R$. Dessa forma, dizemos que $G$ possui **apresentação** $\langle X; R \rangle^{\varphi}$.
Como vimos pela proposição 1.2.1, todo grupo tem apresentação.
Se $X$ e $R$ são finitos, dizemos que $G$ é **finitamente apresentável**.
Para ilustrar tais definições, consideremos o grupo $\mathbb{Z}_n$ gerado por $x$. Seja $\varphi : \mathcal{F}(\{x\}) \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ o homomorfismo dado por $\varphi([x]) = x$. Temos que $ker\varphi = \left\{[x^{kn}],\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. Tomando $R = \{[x^n]\}$, vemos que $ker\varphi = \langle R \rangle^{\mathcal{F}(\{x\})}$. Portanto, a apresentação de $\mathbb{Z}_n$ é $\langle x; x^n \rangle^{\varphi}$. É comum escrevermos também da seguinte maneira: $\langle x; x^n = 1 \rangle^{\varphi}$.

Nem sempre $\varphi$ é mencionada. Assim, a apresentação de $\mathbb{Z}_n$ pode ser dada por $\langle x; x^n\rangle$. Não comuns, mas também possíveis, são as apresentações de $\mathbb{Z}_n$ dadas por $\langle x; x^{n-1} = x^{-1}\rangle$ e $\langle x, y; x^{n-1} = y^{-1},\ xy = x^2\rangle$.

**Observação 1.2.1.** *Se $G$ tem apresentação $\langle X; xy = yx,\ \forall x, y \in X\rangle$, então dizemos que $G$ é* **grupo livre abeliano com base** *$X$, e é denotado por $\mathbb{Z}X$. Em $\mathbb{Z}X$, temos que $x + y = y + x,\ \forall x, y \in X$.*

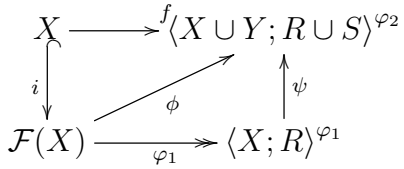
**Teorema 1.2.1** (Teorema de von Dyck)**.** *Seja $G$ o grupo com apresentação $\langle X; R\rangle^{\varphi}$, $H$ um grupo qualquer, $f : X \longrightarrow H$ uma função e $\phi : \mathcal{F}(X) \longrightarrow H$ o homomorfismo correspondente ao diagrama da propriedade universal de $\mathcal{F}(X)$. Então, existe um homomorfismo $\psi : G \longrightarrow H$ tal que $f(x) = \psi \circ \varphi(x),\ \forall x \in X$, se $R \subseteq ker\phi$. Além disso, $\psi$ é um epimorfismo se $f(X)$ gera $H$.*

*Demonstração.* Como $ker\varphi$ é o fecho normal de $R$ e $ker\phi$ é um subgrupo normal de $\mathcal{F}(X)$ com $R \subseteq ker\phi$, então $ker\varphi \subseteq ker\phi$. Defina $\psi : G \longrightarrow H$ por $\psi(g) = \phi(y)$, em que $g = \varphi(y)$, para algum $y \in \mathcal{F}(X)$. Daí, se $x, y \in \mathcal{F}(X)$ tais que $\varphi(x) = \varphi(y)$, então $\varphi(xy^{-1}) = 1 \Rightarrow xy^{-1} \in ker\varphi \subseteq ker\phi \Rightarrow \phi(x) = \phi(y)$.




Se $\langle f(X)\rangle = H$, então $\varphi(G) = H$. □

Em particular, tomando $Y$ um conjunto disjunto de $X$, a inclusão $X \hookrightarrow X \cup Y$, o mergulho de $X \cup Y \hookrightarrow \mathcal{F}(X \cup Y)$ e o epimorfismo $\varphi_2 : \mathcal{F}(X \cup Y) \twoheadrightarrow \langle X \cup Y; R \cup S\rangle^{\varphi_2}$, $S \subseteq \mathcal{F}(X \cup Y)$, induzem, pelo teorema 1.2.1, o homomorfismo $\psi : \langle X; R\rangle^{\varphi_1} \longrightarrow \langle X \cup Y; R \cup S\rangle^{\varphi_2}$. Aqui, $f(x) = \varphi_2(x)$. Vemso que $\psi \circ \varphi_1(x) = \varphi_2(x)$.

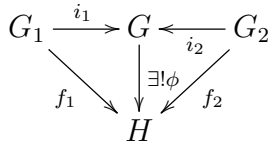



## 1.3 Produto Livre

A definição geral de produto livre $G$ é feita para uma família qualquer de grupos $G_\alpha$ e homomorfismos $i_\alpha : G_\alpha \longrightarrow G$. Porém, aqui ele será definido para uma família de dois elementos. As definições e proposições são facilmente extensíveis para o caso de uma família qualquer.

**Definição 1.3.1.** *Sejam $G_1$, $G_2$, $G$ grupos e $i_1 : G_1 \longrightarrow G$, $i_2 : G_2 \longrightarrow G$ homomorfismos que satisfazem a seguinte propriedade universal: para qualquer grupo $H$ e quaisquer homomorfismos $f_1 : G_1 \longrightarrow H$ e $f_2 : G_2 \longrightarrow H$, existe um único homomorfismo $\phi : G \longrightarrow H$ tal*

*que $\phi \circ i_1 = f_1$ e $\phi \circ i_2 = f_2$. Então, $G$ é chamado* **produto livre** *de $G_1$ e $G_2$ e é denotado por $G_1 * G_2$.*




**Proposição 1.3.1.** *Se $G$ e $H$ são produtos livres dos grupos $G_1$ e $G_2$, então existe um único isomorfismo $\varphi : G \longrightarrow H$ tal que $\varphi \circ i_k = j_k$, $k = 1, 2$, em que $i_k$ são os homomorfismos de $G_k$ em $G$ e $j_k$ os homomorfismo de $G_k$ em $H$.*

*Demonstração.* Pela propriedade universal do produto livre, existe um único homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow H$ tal que $\varphi \circ i_k = j_k$. Da mesma forma, existe um único homomorfismo $\varphi' : H \longrightarrow G$ tal que $\varphi' \circ j_k = i_k$. Daí, $\varphi' \circ \varphi \circ i_k = i_k$ e $\varphi \circ \varphi' \circ j_k = j_k$. Pela unicidade dos homomorfismos na propriedade universal, $\varphi \circ \varphi' = id_H$ e $\varphi' \circ \varphi = id_G$. Portanto, $\varphi' = \varphi^{-1}$ e $\varphi$ é um isomorfismo. □

**Proposição 1.3.2.** *Se $G_1 * G_2$ é produto livre, então $i_1$ e $i_2$ são monomorfismos.*

*Demonstração.* Tome $H = G_1$ e $f_1 = id_{G_1}$. Sejam $a, b \in G_1$ tais que $i_1(a) = i_1(b)$. Então, $\phi \circ i_1(a) = \phi \circ i_1(b) \Rightarrow id_1(a) = id_1(b)$, e , portanto, $a = b$. De forma análoga, mostramos que $i_2$ é injetora. □

### 1.3.1 Existência de Produto Livre

**Teorema 1.3.1.** *Sejam $G_1$ e $G_2$ grupos. Então, existe produto livre $G_1 * G_2$.*

*Demonstração.* Considere as apresentações de $G_1 = \langle X_1; R_1 \rangle^{\varphi_1}$ e de $G_2 = \langle X_2; R_2 \rangle^{\varphi_2}$ e $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Tome

$$G = \langle X_1 \cup X_2; R_1 \cup R_2 \rangle^{\varphi},$$

em que $\varphi$ é o epimorfismo natural de $\mathcal{F}(X_1 \cup X_2)$ em $\frac{\mathcal{F}(X_1 \cup X_2)}{\langle R_1 \cup R_2 \rangle^{\mathcal{F}(X_1 \cup X_2)}}$. Já vimos anteriormente que, pelo teorema 1.2.1, existe um homomorfismo $i_k : G_k \longrightarrow G$ tal que $i_k \circ \varphi_k = \varphi$, $k = 1, 2$. Sejam $f_k : G_k \longrightarrow H$, $k = 1, 2$, homomorfismos.
Denotemos por $\psi_k$ o homomorfismo $f_k \circ \varphi_k : \mathcal{F}(X_k) \longrightarrow H$. Temos que $\psi_k(R_k) = f_k \circ \varphi_k(R_k) = f_k(1) = 1$. Daí, definimos o homomorfismo $\psi : \mathcal{F}(X_1 \cup X_2) \longrightarrow H$ tal que $\psi|_{X_k} = \psi_k$. Como $\psi(R_1 \cup R_2) = 1$, temos que $ker\varphi \subseteq ker\psi$, e então, podemos definir $\phi : G \longrightarrow H$ da seguinte forma: $\phi(g) = \psi(x)$, para algum $x \in \mathcal{F}(X_1 \cup X_2)$ tal que $\varphi(x) = g$. Portanto, $\phi \circ \varphi = \psi$. Para todo $x \in X_1$,

$$\phi \circ i_1(\varphi_1(x_1)) = \phi \circ \varphi(x_1) = \psi(x_1) = \psi_1(x_1) = f_1(\varphi_1(x_1)).$$

E, do fato de que $\varphi_1(X_1)$ gera $G_1$, temos que $\phi \circ i_1 = f_1$. De forma análoga, concluímos que $\phi \circ i_2 = f_2$. Por fim, como $\varphi(X_1 \cup X_2)$ gera $G$ e sendo $\varphi(X_1 \cup X_2) = i_1 \circ \varphi_1(X_1) \cup i_2 \circ \varphi_2(X_2)$, temos que $\phi$ deve ser único. □

**Exemplo 1.3.1.** *O grupo livre $\mathcal{F}(X)$ é produto livre dos grupos cíclicos infinitos $\langle x \rangle$, $x \in X$.*

**Teorema 1.3.2** (Tereoma da Forma Normal para Produtos Livres)**.** *Seja $G = G_1 * G_2$ um produto livre. Então,*

*i)* $i_k : G_k \longrightarrow G_1 * G_2$ *é monomorfismo;*

*ii) tomando* $i_1$, $i_2$ *como inclusões, todo elemento de* $G$ *pode ser escrito unicamente como* $g_1 \dots g_n$, *em que* $n \geq 0$, $g_i \in G_1 \cup G_2$, $g_i \neq 1$ *e* $g_i$, $g_{i+1}$ *não pertencem ao mesmo grupo, para* $i < n$,

$k = 1, 2$.

*Demonstração.* Já vimos na proposição anterior que $i_k$ é monomorfismo. Portanto, tomando $i_k$ como inclusão, vamos representar $i_k(g_i)$ como $g_i$, $\forall g_i \in G_k$. Como $G_1 \cup G_2$ gera $G$, $g \in G$ é escrito como $g_1 \dots g_n$, com $n \geq 0$, $g_i \in G_1 \cup G_2$ e $g_i \neq 1$. Se, para algum $i < n$, $g_i$, $g_{i+1} \in G_k$ e $g_{i+1} \neq g_i^{-1}$, então $g$ pode ser escrito como $g_1 \dots g_{i-1} h g_{i+2} \dots g_n$ onde $h = g_i g_{i+1} \neq 1$; se, no entanto, $g_{i+1} = g_i^{-1}$, então $g$ pode ser escrito como $g_1 \dots g_{i-1} g_{i+2} \dots g_n$. Agora, utilizando o Método de van der Waerden, provaremos que $g$, representado pela maneira do enunciado, só pode pode ser escrito de uma única forma. Considere $S$ o conjunto de todas as sequências $(g_1, \dots, g_n)$, $n \geq 0$, tal que $g_i$, $g_{i+1}$ não pertencem ao mesmo grupo. Vamos definir $f_k : G_k \longrightarrow Perm(S)$ da seguinte maneira, para $h_k \in G_k - \{1\}$:

$$f_k(h_k)(g_1, \dots, g_n) = \begin{cases} (h_k, g_1, \dots, g_n) & \text{se } g_1 \notin G_k \\ (h_k g_1, \dots, g_n) & \text{se } g_1 \in G_k \text{ e } h_k g_1 \neq 1 \\ (g_2, \dots, g_n) & \text{se } g_1 \in G_k \text{ e } h_k g_1 = 1 \end{cases}$$

e $f_k(1) = id_S$.
Seja $h'_k \in G_k$, $h'_k h_k \neq 1$. Então,

$$f_k(h_k h'_k)(g_1, \dots, g_n) = \begin{cases} (h_k h'_k, g_1, \dots, g_n) & \text{se } g_1 \notin G_k \\ (h_k h'_k g_1, \dots, g_n) & \text{se } g_1 \in G_k \text{ e } h_k h'_k g_1 \neq 1 \\ (g_2, \dots, g_n) & \text{se } g_1 \in G_k \text{ e } h_k h'_k g_1 = 1 \end{cases}$$

e

$$f_k(h_k) \circ f(h'_k)(g_1, \dots, g_n) = \begin{cases} (h_k h'_k, g_1, \dots, g_n) & \text{se } g_1 \notin G_k \\ (h_k h'_k g_1, \dots, g_n) & \text{se } g_1 \in G_k,\ h'_k g_1 \neq 1 \text{ e } h_k h'_k g_1 \neq 1 \\ (g_2, \dots, g_n) & \text{se } g_1 \in G_k \text{ e } h'_k g_1 \neq 1 \text{ mas } h_k h'_k g_1 = 1 \\ (h_k, \dots, g_n) & \text{se } g_1 \in G_k \text{ e } h'_k g_1 = 1, \end{cases}$$

Portanto, $f_k$ é um homomorfismo. Ainda, para cada $h_k \in G_k$, $f(h_k^{-1}) = f(h_k)^{-1}$, ou seja, todo $f(h_k)$ tem inversa. Logo, $f$ está bem definida.
Como $G$ é produto livre, seja $\phi : G \longrightarrow Perm(S)$ o homomorfismo tal que $\phi \circ i_k = f_k$. Suponha que $g \in G$ seja escrito como $g_1 \dots g_n$, com $g_i \in G_1 \cup G_2$, $g_i \neq 1$ e $g_i$, $g_{i+1}$ não pertencentes ao mesmo grupo, para $i < n$, e $h_1 \dots h_m$, da mesma forma, com $h_j \in G_1 \cup G_2$, $h_j \neq 1$ e $h_j$, $h_{j+1}$ não pertencentes ao mesmo grupo, para $j < n$. Então, $\phi(g)(\ ) = f_{k_1}(g_1) \circ \dots \circ f_{k_n}(g_n)(\ ) = f_{k_1}(g_1) \circ \dots \circ f_{k_{n-1}}(g_{n-1})(g_n) = (g_1, \dots, g_n) = (h_1, \dots, h_m)$, $k_1, \dots k_n \in \{1,\ 2\}$. Logo, $m = n$ e $g_i = h_i$, $\forall i \leq n$. □

### 1.3.2 Caracterização de Produtos Livres

**Proposição 1.3.3.** *Sejam $G_1$ e $G_2$ subgrupos de um grupo $G$. São equivalentes:*

*i)* $G = G_1 * G_2$;

*ii) todo elemento de $G$ pode ser unicamente escrito como $g_1 \dots g_n$, em que $n \geq 0$, $g_i \in G_1 \cup G_2$, $g_i \neq 1$ e $g_i$, $g_{i+1}$ não pertencem ao mesmo grupo, para $i < n$;*

*iii) $G$ é gerado pelos subgrupos $G_1$ e $G_2$ e $1$ não pode ser escrito como o produto $g_1 \dots g_n$ com $n > 0$, $g_i \in G_1 \cup G_2$, $g_i \neq 1$ e $g_i$, $g_{i+1}$ não pertencentes ao mesmo grupo, para $i < n$.*

*Demonstração.* (ii) $\Rightarrow$ (iii) : óbvio (1 é o elemento de $G$ tal que $n = 0$).
(iii) $\Rightarrow$ (ii) : $G_1$ e $G_2$ geram $G \Rightarrow$ todo elemento de $G$ pode ser escrito como $g_1 \dots g_n$, com $n \geq 0$, $g_i \in G_1 \cup G_2$, $g_i \neq 1$ e $g_i$, $g_{i+1}$ não pertencentes ao mesmo grupo, para $i < n$. Se $g \in G$, $g = g_1 \dots g_n$ e $g = h_1 \dots h_m$, ambos diferentes, então $1 = g_1 \dots g_n h_m^{-1} \dots h_1^{-1}$, que é um produto de elementos de $G_1$ e $G_2$, contradição.
(i) $\Rightarrow$ (ii): teorema 1.3.2.
(ii) e (iii) $\Rightarrow$ (i): sabemos que, pela propriedade universal do produto livre, existe um único homomorfismo $\phi : G_1 * G_2 \longrightarrow G$ tal que $\phi|_{G_k}$ é a inclusão de $G_k$ em $G$. Logo, $\forall g \in G$, $g$ é descrito como em (ii), e $g_1 \dots g_n = \phi(g_1 \dots g_n)$. É fácil ver que $\phi$ é um isomorfismo. □

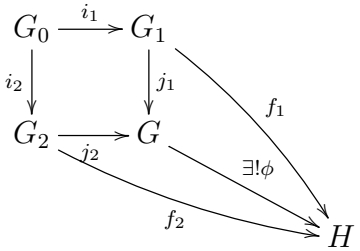
## 1.4 Produto Livre Amalgamado

### 1.4.1 Push-Out

**Definição 1.4.1.** *Sejam $G_0, G_1, G_2$ e $G$ grupos e $i_1 : G_0 \longrightarrow G_1$, $i_2 : G_0 \longrightarrow G_2$, $j_1 : G_1 \longrightarrow G$, $j_2 : G_2 \longrightarrow G$ homomorfismos . Dizemos que $(G, j_1, j_2)$ é* **push-out** *de $(i_1, i_2)$ se:*

*i)* $j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2$;

*ii) para qualquer grupo $H$ e quaisquer homomorfismos $f_1 : G_1 \longrightarrow H$, $f_2 : G_2 \longrightarrow H$ tais que $f_1 \circ i_1 = f_2 \circ i_2$, temos que $\exists! \phi : G \longrightarrow H$ homomorfismo tal que $\phi \circ j_1 = f_1$ e $\phi \circ j_2 = f_2$.*




**Lema 1.4.1.** *Se $(G', j_1', j_2')$ também é push-out de $(i_1, i_2)$, então $G$ e $G'$ são isomorfos.*

*Demonstração.* Seja $\phi$ o único homomorfismo de $G$ em $G'$ e $\phi'$ o único homomorfismo de $G'$ em $G$ dados pelo push-out. Então, sendo $k = 1, 2$, temos que $\phi \circ j_k = j_k'$ e $\phi' \circ j_k' = j_k \Rightarrow \phi' \circ \phi \circ j_k = j_k$ e $\phi \circ \phi' \circ j_k' = j_k'$. Mas $\phi \circ \phi'$ e $\phi' \circ \phi$ são únicos. Logo, $\phi \circ \phi' = id_{G'}$ e $\phi' \circ \phi = id_G$. Portanto, $\phi' = \phi^{-1}$. □

**Teorema 1.4.1.** *Sejam $i_1 : G_0 \longrightarrow G_1,\ i_2 : G_0 \longrightarrow G_2$ homomorfismos de grupos. Então, o par $(i_1, i_2)$ tem push-out.*

*Demonstração.* Considere

$$G_0 = \langle X_0; R_0 \rangle^{\varphi_0}, G_1 = \langle X_1; R_1 \rangle^{\varphi_1}, G_2 = \langle X_2; R_2 \rangle^{\varphi_2}.$$

Tome, para cada $x_0 \in G_0$, os elementos $\alpha_{x_0,1} \in \mathcal{F}(X_1)$ e $\alpha_{x_0,2} \in \mathcal{F}(X_2)$ tais que $i_1(x_0) = \varphi_1(\alpha_{x_0,1})$ e $i_2(x_0) = \varphi_2(\alpha_{x_0,2})$. Por fim, considere $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ e tome

$$G = \left\langle X_1 \cup X_2; R_1 \cup R_2 \cup \left\{\alpha_{x_0,1}\alpha_{x_0,2}^{-1}\right\} \right\rangle^{\varphi}$$

e $j_1 : G_1 \longrightarrow G,\ j_2 : G_2 \longrightarrow G$ os homomorfismos naturais tais que $\varphi(x_k) = j_k \circ \varphi_k(x_k),\ k = 1, 2$. Daí, para cada $x_0 \in G_0$,

$$[j_1 \circ i_1(x_0)][j_2 \circ i_2(x_0)]^{-1} = j_1(\varphi_1(\alpha_{x_0,1}))j_2(\varphi_2(\alpha_{x_0,2}))^{-1} = 1 \Rightarrow j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2.$$

Seja $H$ um grupo e $f_1 : G_1 \longrightarrow H$ e $f_2 : G_2 \longrightarrow H$ homomorfismos tais que $f_1 \circ i_1 = f_2 \circ i_2$. Temos que os homomorfismos $\vartheta_1 = f_1 \circ \varphi_1$ e $\vartheta_2 = f_2 \circ \varphi_2$, triviais em $R_1$ e $R_2$ respectivamente, induzem o homomorfismo $\vartheta$ de $\mathcal{F}(X_1 \cup X_2)$ em $H$ tal que $\vartheta(x_k) = \vartheta_k(x_k), \forall x_k \in X_k, k = 1, 2$. Ainda,

$$\vartheta(\alpha_{x_0,1}\alpha_{x_0,2}^{-1}) = \vartheta_1(\alpha_{x_0,1})\vartheta_2(\alpha_{x_0,2})^{-1} = [f_1 \circ \varphi_1(\alpha_{x_0,1})][f_2 \circ \varphi_2(\alpha_{x_0,2})]^{-1} = [f_1 \circ i_1(x_0)][f_2 \circ i_2(x_0)]^{-1} = 1.$$

Portanto, $ker\varphi \subseteq ker\vartheta$. Assim, pelo teorema 1.2.1, existe um homomorfismo $\phi : G \longrightarrow H$ tal que, para $k = 1, 2,\ \phi \circ \varphi(x_k) = \vartheta_k(x_k),\ \forall x_k \in X_k$. Daí,

$$f_k(\varphi_k(x_k)) = \vartheta_k(x_k) = \vartheta(x_k) = \phi \circ \varphi(x_k) = \phi \circ j_k(\varphi_k(x_k)) \Rightarrow \phi \circ j_k = f_k.$$

Provada a existência de $\phi$, a unicidade vem do fato de que $j_1(G_1) \cup j_2(G_2)$ gera $G$. Como $\phi$ já está definida em $j_1(G_1) \cup j_2(G_2)$, temos que $\phi$ encontrada deve ser única. □

Um exemplo interessante de push-out é dado pelo

**Exemplo 1.4.1** (Teorema de van Kampen)**.** *Sejam $X, X_1, X_2$ espaços topológicos, $X_1, X_2$ não-vazios, conexos por caminhos, não disjuntos e abertos em $X = X_1 \cup X_2 = X$ e $X_1 \cap X_2$ também conexo por caminhos. Então, o diagrama abaixo é um push-out,*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_1 \cap X_2) & \xrightarrow{i_{1*}} & \pi_1(X_1) \\ {\scriptstyle i_{2*}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_{1*}} \\ \pi_1(X_2) & \xrightarrow[j_{2*}]{} & \pi_1(X) \end{array}$$

*em que $i_{1*}, i_{2*}, j_{1*}, j_{2*}$ são os homomorfismos entre grupos fundamentais induzidos pelas inclusões dos espaços topológicos.*

### 1.4.2 Produto Livre Amalgamado

Dizemos que $G$ é **produto livre amalgamado** de $G_1$ e $G_2$ com $G_0$ amalgamado se $i_1, i_2$ são monomorfismos. Escrevemos $G = G_1 \underset{G_0}{*} G_2$. Vamos tomar $i_1$ e $i_2$ como inclusões.

Para o enunciado do próximo teorema, recordemos que, sendo $A, B$ grupos, $B \leq A$, um subconjunto $C$ de $A$ é um **transversal à direita** de $B$ em $A$ se $A = \dot{\bigcup}_{c \in C} Bc$.

**Teorema 1.4.2** (Teorema da Forma Normal para Produtos Livres Amalgamados)**.** *Seja* $G = G_1 \underset{G_0}{*} G_2$. *Então:*

*i)* $j_1, j_2$ *são monomorfismos;*

*ii)* $j_1(G_1) \cap j_2(G_2) = j_1(G_0) = j_2(G_0)$;

*iii) tomando* $j_1, j_2$ *como inclusões, qualquer elemento de* $G$ *pode ser unicamente escrito como* $g_0 u_1 \dots u_n$, *onde* $n \geq 0$, $g_0 \in G_0$ *e* $u_1, \dots, u_n$ *vêm alternadamente de* $S - \{1\}$ *e* $T - \{1\}$, *em que* $S$ *é um transversal à direita de* $G_0$ *em* $G_1$ *e* $T$ *é um transversal à direita de* $G_0$ *em* $G_2$, *e* $1 \in S \cap T$.

*Demonstração.* i) Suponha que exista um grupo $H$ e monomorfismos $f_1 : G_1 \rightarrowtail H$, $f_2 : G_2 \rightarrowtail H$ tais que $f_1 \circ i_1 = f_2 \circ i_2$. Então, pela definição de push-out, existe um único homomorfismo $\phi : G \longrightarrow H$ tal que $\phi \circ j_1 = f_1$ e $\phi \circ j_2 = f_2$. Logo, $\phi \circ j_1$ e $\phi \circ j_2$ são monomorfismos, o que implica que $j_1$, $j_2$ são monomorfismo. Portanto, precisamos encontrar $H$, $f_1$ e $f_2$ que satisfaçam tais hipóteses.
Defina $H = Perm(G_0 \times S \times T)$ e $f_1 : G_1 \longrightarrow H$ da seguinte forma:

$$f_1(g_1)(g_0, s, t) = (\tilde{g_0}, \tilde{s}, t), \text{ em que } g_1 g_0 s = \tilde{g_0}\tilde{s} \text{ (já que } G_1 = \dot{\bigcup}_{s \in S} G_0 s).$$

Temos que $f_1(g_1^{-1})(\tilde{g_0}, \tilde{s}, t) = (g_0', s', t)$ tal que

$$g_1^{-1}\tilde{g_0}\tilde{s} = g_0' s' \Rightarrow g_0 s = g_0' s' \Rightarrow g_0' = g_0 \text{ e } s' = s,$$

pois $G_1$ é união disjunta de $G_0 s$, $s \in S$. Daí, $f_1(g_1^{-1}) f_1(g_1) = f_1(g_1) f_1(g_1^{-1}) = id_{G_0 \times S \times T}$. Portanto, $f_1(g_1^{-1}) = f_1(g_1)^{-1}$, para cada $g_1 \in G_1$. Assim, $f_1(g_1)$ é permutação, $\forall g_1 \in G_1$.
Agora, quero mostrar que $f_1$ é homomorfismo. Temos, $\forall (g_0, s, t) \in G_0 \times S \times T$, $g_1$, $g_1' \in G_1$, que

$$f_1(g_1) f_1(g_1')(g_0, s, t) = f_1(g_1)(g_0', s', t) = (\tilde{g_0}, \tilde{s}, t),$$

em que

$$g_1' g_0 s = g_0' s' \text{ e } g_1 g_0' s' = \tilde{g_0}\tilde{s}, \text{ ou seja, } (g_1 g_1') g_0 s = \tilde{g_0}\tilde{s}.$$

Portanto, $f_1(g_1) f_1(g_1') = f_1(g_1 g_1')$, $\forall g_1, g_1' \in G_1$.
Construímos $f_2$ de maneira análoga. Assim, temos dois homomorfismos. Quero mostrar que $f_1, f_2$ são injetivos. Se $g_1 \in ker f_1$, então

$$f_1(g_1)(g_0, s, t) = (g_0, s, t) \Leftrightarrow g_1 g_0 s = g_0 s \Leftrightarrow g_1 = 1.$$

Analogamente, mostramos que $f_2$ é injetora.
Falta verificar que $f_1|_{G_0} = f_2|_{G_0}$. Mas $\forall g_0 \in G_0,\ \forall (g_0', s, t) \in G_0 \times S \times T$,

$$f_1(g_0)(g_0', s, t) = (g_0 g_0', s, t) \text{ e } f_2(g_0)(g_0', s, t) = (g_0 g_0', s, t),$$

pois $g_0 g_0' \in G_0$.

iii) Tomando $j_1, j_2$ como inclusões, temos que $G_1 \cup G_2$ gera $G$. Logo, $\forall g \in G,\ g = g_1 \dots g_n,\ g_i \in G_1 \cup G_2,\ i = 1, \dots, n$. Se $n = 1$, então $g = g_0 s$, ou $g = g_0 t$ ou $g = g_0$, $g_0 \in G_0,\ s \in S - \{1\},\ t \in T - \{1\}$.
Seja $n > 1$. Por indução, suponha que $g_2 \dots g_n = g_0 u_1 \dots u_m$, com $u_1, \dots, u_m$ alternadamente de $S - \{1\}$ e $T - \{1\}$, $m > 0$. Se $g_1 \in G_0$, $g_1 g_0 \in G_0$, então $g$ é escrito como em (iii). Suponha $g_1 \in G_1 - G_0$. Temos dois casos:

- se $u_1 \in S$, então, $g_1 g_0 u_1 \in G_1 \Rightarrow g_1 g_0 u_1 = g_0' s,\ g_0' \in G_0,\ s \in S - \{1\}$; portanto, $g = g_0' s u_2 \dots u_m$ como em (iii)

- se $u_1 \in T$, então, $g_1 g_0 \in G_1 - G_0 \Rightarrow g_1 g_0 = g_0' s,\ g_0' \in G_0,\ s \in S - \{1\}$; portanto, $g = g_0' s u_1 u_2 \dots u_m$ como em (iii).

O caso em que $g_1 \in G_2 - G_0$ é análogo.
Suponha, por fim, $m = 0$. Se $g_1 \in G_0$, nada mais a provar. Se $g_1 \in G_1 - G_0$, então

$$g_1 g_0 \in G_1 - G_0 \Rightarrow g_1 g_0 = g_0' s,\ g_0' \in G_0,\ s \in S - \{1\}.$$

Análogo para $g_1 \in G_2$.
Falta agora mostrar a unicidade. Para isso, utilizaremos o Método de van der Waerden. Seja $W$ o conjunto de todas as sequências $(g_0, u_1, \dots, u_n)$, com $g_0 \in G_0,\ n \geq 0$ e $u_1, \dots, u_n$ alternadamente de $S - \{1\}$ e $T - \{1\}$ e defina $f_1 : G_1 \longrightarrow Perm(W)$ da seguinte forma: para cada $g_1 \in G_1$ e $(g_0, u_1, \dots, u_n) \in W$

$$f_1(g_1)(g_0, u_1, \dots, u_n) = \begin{cases} (g_0', s, u_1, \dots, u_n) & \text{se } u_1 \in T,\ g_1 g_0 = g_0' s,\ g_0' \in G_0,\ s \in S - \{1\} \\ (g_0', u_1, \dots, u_n) & \text{se } u_1 \in T,\ g_1 g_0 = g_0' \in G_0 \\ (g_0', s, u_2, \dots, u_n) & \text{se } u_1 \in S,\ g_1 g_0 u_1 = g_0' s,\ g_0' \in G_0,\ s \in S - \{1\} \\ (g_0', u_2, \dots, u_n) & \text{se } u_1 \in S,\ g_1 g_0 u_1 = g_0' \in G_0 \end{cases}$$

Daí, aplicando $f_1(g_1^{-1})$ em $f_1(g_1)(g_0, u_1, \dots, u_n)$,

$$\begin{cases} f_1(g_1^{-1})(g_0', s, u_1, \dots, u_n) = (g_0, u_1, \dots, u_n), & \text{pois } g_1^{-1} g_0' s = g_0 \in G_0 \\ f_1(g_1^{-1})(g_0', u_1, \dots, u_n) = (g_0, u_1, \dots, u_n), & \text{pois } u_1 \in T,\ g_1^{-1} g_0' = g_0 \in G_0 \\ f_1(g_1^{-1})(g_0', s, u_2, \dots, u_n) = (g_0, u_1, \dots, u_n), & \text{pois } g_1^{-1} g_0' s = g_0 u_1,\ g_0' \in G_0,\ u_1 \in S - \{1\} \\ f_1(g_1^{-1})(g_0', u_2, \dots, u_n) = (g_0, u_1, \dots, u_n), & \text{pois } u_2 \in T,\ g_1^{-1} g_0' = g_0 u_1,\ g_0 \in G_0,\ u_1 \in S - \{1\} \end{cases}$$

Aplicando $f_1(g_1)$ em $f_1(g_1^{-1})(g_0, u_1, \dots, u_n)$ obtemos o mesmo resultado (basta tomar $g_1 = ((g_1^{-1})^{-1})$. Portanto, $f_1(g_1)$ tem inversa $f_1(g_1^{-1}) \Rightarrow f_1(g_1)$ é permutação, $\forall g_1 \in G_1$.
Vamos agora mostrar que $f_1$ é homomorfismo: sejam $g, g_1 \in G_1$. Então, aplicando $f_1(g)$ em

$f_1(g_1)$,

$$\begin{cases} f_1(g)(g_0', s, u_1, \ldots, u_n) = (g_0'', u_1, \ldots, u_n) & \text{se } gg_0's = gg_1g_0 = g_0'' \in G_0 \\ f_1(g)(g_0', s, u_1, \ldots, u_n) = (g_0'', s', u_1, \ldots, u_n) & \text{se } gg_0's = gg_1g_0 = g_0''s',\ g_0'' \in G_0,\ s' \in S - \{1\} \\ f_1(g)(g_0', u_1, \ldots, u_n) = (g_0'', u_1, \ldots, u_n), & \text{se } gg_0' = gg_1g_0 = g_0'' \in G_0 \\ f_1(g)(g_0', u_1, \ldots, u_n) = (g_0'', s', u_1, \ldots, u_n), & \text{se } gg_0' = gg_1g_0 = g_0''s',\ g_0'' \in G_0, s' \in S - \{1\} \\ f_1(g)(g_0', s, u_2, \ldots, u_n) = (g_0'', u_2, \ldots, u_n), & \text{se } gg_0's = gg_1g_0u_1 = g_0'' \in G_0 \\ f_1(g)(g_0', s, u_2, \ldots, u_n) = (g_0'', s', u_2, \ldots, u_n), & \text{se } gg_0's = gg_1g_0u_1 = g_0''s',\ g_0'' \in G_0, s' \in S - \{1\} \\ f_1(g)(g_0', u_2, \ldots, u_n) = (g_0'', s', u_2, \ldots, u_n), & \text{se } gg_0' = gg_1g_0u_1 = g_0''s',\ g_0'' \in G_0,\ s' \in S - \{1\} \\ f_1(g)(g_0', u_2, \ldots, u_n) = (g_0'', u_2, \ldots, u_n), & \text{se } gg_0' = gg_1g_0u_1 = g_0'' \in G_0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} f_1(gg_1)(g_0, u_1, \ldots, u_n) = (g_0'', u_1, \ldots, u_n) & \text{se } u_1 \in T,\ gg_1g_0 = g_0'' \in G_0 \\ f_1(gg_1)(g_0, u_1, \ldots, u_n) = (g_0'', s', u_1, \ldots, u_n) & \text{se } u_1 \in T,\ gg_1g_0 = g_0''s',\ g_0'' \in G_0,\ s' \in S - \{1\} \\ f_1(gg_1)(g_0, u_1, \ldots, u_n) = (g_0'', u_2, \ldots, u_n), & \text{se } u_1 \in S,\ gg_1g_0u_1 = g_0'' \in G_0 \\ f_1(gg_1)(g_0, u_1, \ldots, u_n) = (g_0'', s', u_2, \ldots, u_n), & \text{se } u_1 \in S,\ gg_1g_0u_1 = g_0''s',\ g_0'' \in G_0, s' \in S - \{1\} \end{cases}$$

Analogamente, definimos $f_2 : G_2 \longrightarrow Perm(W)$.
Seja $g \in G_0$. Então,

$$f_1(g)(g_0, u_1, \ldots, u_n) = (gg_0, u_1, \ldots, u_n) = f_2(g)(g_0, u_1, \ldots, u_n).$$

Portanto, existe um (único) homomorfismo $\phi : G \longrightarrow Perm(W)$ tal que $\phi|_{G_1} = f_1$ e $\phi|_{G_2} = f_2$. Daí, sejam $g_0u_1 \ldots u_n$ e $g_0'u_1' \ldots u_m'$ duas formas normais de $g \in G$. Então,

$$\phi(g)(1) = \phi(g_0)\phi(u_1) \ldots \phi(u_n)(1) = \phi(g_0)\phi(u_1) \ldots \phi(u_{n-1})(1, u_n) = (g_0, u_1, \ldots, u_n) =$$

$$= \phi(g_0')\phi(u_1') \ldots \phi(u_m')(1) = (g_0', u_1', \ldots, u_m') \Rightarrow g_0 = g_0',\ m = n \text{ e } u_i = u_i',\ i = 1, \ldots, n.$$

ii) $j_1(G_0) = j_2(G_0) \subseteq j_1(G_1) \cap j_2(G_2)$. Seja, então, $g \in j_1(G_1) \cap j_2(G_2)$. Temos que

$$g = j_1(g_0s) = j_2(g_0't),\ g_0, g_0' \in G_0,\ s \in S,\ t \in T.$$

Pela unicidade da forma normal, $s = t = 1$ e $g = j_1(g_0) = j_2(g_0') \in j_1(G_0) = j_2(G_0)$. Se $j_1, j_2$ são inclusões, então $G_1 \cap G_2 = G_0$. □

Uma outra forma de se pensar os elementos de $G$, sem fazer uso dos conjuntos transversais, é dada pelo seguinte teorema:

**Teorema 1.4.3** (Teorema da Forma Reduzida para Produtos Livres Amalgamados)**.** *Seja* $G = G_1 \underset{G_0}{*} G_2$ *e considere* $j_1, j_2$ *inclusões. Então:*

*i) qualquer* $g \in G - G_0$ *pode ser escrito como* $g_1 \ldots g_n$, *com* $n \geq 1$ *e* $g_1, \ldots, g_n$ *alternadamente de* $G_1 - G_0$ *e* $G_2 - G_0$ *(forma reduzida de* $g$*);*

*ii) se* $g$ *também pode ser escrito como* $h_1 \ldots h_m$ *com* $h_1, \ldots, h_m$ *alternadamente de* $G_1 - G_0$ *e* $G_2 - G_0$, *então* $m = n$ *e* $h_1G_0 = g_1G_0$, $G_0h_n = G_0g_n$ *e* $G_0h_iG_0 = G_0g_iG_0$, $i = 2, \ldots, n-1$*;*

*iii) se $n > 1$, então $g \notin G_1 \cup G_2$;*

*iv) se $g_1, \ldots, g_n$ são alternadamente de $G_1 - G_0$ e $G_2 - G_0$, então $g_1 \ldots g_n \notin G_0$.*

*Demonstração.* i) Sabemos que $g$ assume forma normal $g_0 u_1 \ldots u_n$. Se $n = 0$, $g \in G_0$, contradição. Portanto, $n \geq 1$. Se $u_1 \in S$, então $g_0 u_1 \in G_1 - G_0$, e $u_2 \in T - \{1\} \subseteq G_2 - G_0$. Portanto, tomando $g_1 = g_0 u_1,\ g_2 = u_2, \ldots, g_n = u_n$, $g$ é escrito alternadamente com termos de $G_1 - G_0$ e $G_2 - G_0$. Se $u_1 \in T$, análogo.

ii) Vamos provar por indução no comprimento da forma reduzida de $g$. Se $m = 1$, então $g = h_1 \in G_1 - G_0$. Assim, $g = g_0 u_1,\ g_0 \in G_0,\ u_1 \in S - \{1\}$.
Seja $g = h_1 \ldots h_m$, $m > 1$, um forma reduzida de $g$. Temos que $h_2 \ldots h_m$ tem forma normal $g_0 u_2 \ldots u_k$. Por indução, $m = k$, $h_2 G_0 = g_0 u_2 G_0,\ G_0 h_k = G_0 u_k$ e $G_0 h_i G_0 = G_0 u_i G_0,\ i = 3, \ldots, k-1$.
Suponha $h_1 \in G_1 - G_0$ (o caso $h_1 \in G_2 - G_0$ é análogo). Então, $h_2 \in G_2 - G_0 \Rightarrow g_0 u_2 \in G_2 - G_0$. Portanto, $h_i, u_i$ pertencem ao mesmo conjunto $G_1 - G_0$ ou $G_2 - G_0$ para $i \geq 3$. Como $h_1 g_0 \in G_1 - G_0$, tome $h_1 g_0 = g_0' u_1,\ g_0' \in G_0,\ u_1 \in S - \{1\}$. Então, $g_0' u_1 u_2 \ldots u_m$ é forma normal de $g$. Portanto, o comprimento da forma reduzida de $g$ é o comprimento da forma normal de $g$, que é único. Ainda, $h_1 G_0 = h_1 g_0 G_0 = g_0' u_1 G_0$, $G_0 h_i G_0 = G_0 u_i G_0,\ i = 3, \ldots, k-1$, e $G_0 h_k = G_0 u_k$.

iii) Se $g \in G_1 \cup G_2$, então $g = g_0 \in G_0$, ou $g = g_0 s,\ g_0 \in G_0,\ s \in S - \{1\}$, ou $g = g_0 t,\ g_o \in G_0,\ t \in T - \{1\}$. Em qualquer caso, $n \leq 1$.

iv) Suponha $g = g_1 \ldots g_n \in G_0$, $n \geq 1$, um produto alternado, e $g_1 \in G_1 - G_0$. Tome $g' \in G_2 - G_0$. Então, $g'g \in G_2 - G_0$. Assim, $g'g$ tem forma reduzida $g' g_1 \ldots g_n$, contradição (pela (iii)). □

**Proposição 1.4.1.** *Sejam $G_1, G_2$ subgrupos de um grupo $G$ e $G_0 = G_1 \cap G_2$. Então, $G = G_1 \underset{G_0}{*} G_2$ se e somente se todo elemento de $G - G_0$ pode ser escrito como um produto $g_1 \ldots g_n$, com $g_i$ alternadamente de $G_1 - G_0$ e $G_2 - G_0$, e nenhum desses produtos é 1.*

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) Pelo teorema 1.4.3.
($\Leftarrow$) Sejam $f_1, f_2$ as inclusões de $G_1$ em $G$ e $G_2$ em $G$, respectivamente. Então, existe um (único) homomorfismo $\phi$ de $G_1 \underset{G_0}{*} G_2$ em $G$ tal que $\phi|_{G_1} = f_1$ e $\phi|_{G_2} = f_2$. Se $g \notin G_0$, pelo teorema 1.4.3, $g = g_1 \ldots g_n$ produto alternado $\Rightarrow \phi(g) = \phi(g_1) \ldots \phi(g_n) = g_1 \ldots g_n$. Se $g \in ker\phi$, então $g = 1$. Portanto, $\phi$ é injetiva. Ainda, se $g \in G_0$ então $\phi(g) = g$ e se $g \in G$, por hipótese $g$ é o produto alternado $g_1 \ldots g_n = \phi(g)$. Portanto, $\phi$ é sobrejetiva. Logo, $G = G_1 \underset{G_0}{*} G_2$. □

## 1.5 Extensões HNN

**Definição 1.5.1.** *Sejam $G$ e $A$ grupos, $i_0, i_1$ monomorfismos de $A$ em $G$ e $P$ um grupo cíclico infinito gerado por $p$. Seja $N = \langle \{p^{-1} i_0(a) p i_1(a)^{-1},\ a \in A\} \rangle^{G*P}$. Então, $H = (G * P)/N$ é chamada* **extensão HNN de grupo base G com letra estável $t$ e subgrupos associados $i_0(A)$ e $i_1(A)$.**

O termo $HNN$ vem de Highman, Neumann e Neumann, que estudaram, em 1949, essa construção a partir de subgrupos de certos produtos livres amalgamados.

Pensando em $A$ como um subgrupo de $G$, $i_0$ uma inclusão e $B = i_1(A)$, temos que $\varphi : A \longrightarrow B$, dado por $\varphi(a) = i_1(a)$, é um isomorfismo. Definimos, então, a extensão HNN $H = (G * P)/\langle\{p^{-1}ap\varphi(a)^{-1}\}\rangle^{G*P}$. Se $G = \langle X|R\rangle$, então $H$ tem apresentação $\langle X,\ p \mid R,\ p^{-1}ap = \varphi(a),\ a \in A\rangle$ ou, ainda, $\langle X,\ p|R,\ p^{-1}Ap = B\rangle$. A extensão $HNN$ $H$ tem notação $HNN(G, A, p, \varphi)$.

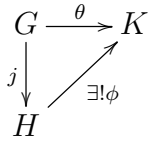
De forma mais geral, sejam $A_\alpha$ uma família de subgrupos de $G$ e $i_{0,\alpha},\ i_{1,\alpha}$ monomorfismos de $A_\alpha$ em $G$, $P$ um grupo livre com base $\{p_\alpha\}$ e $N = \langle\{p_\alpha^{-1}i_{0,\alpha}(a)p_\alpha i_{1,\alpha}(a)^{-1};\ \forall\alpha,\ \forall a \in A_\alpha\}\rangle^{G*P}$. Definimos $H = (G*P)/N$ a extensão HNN de grupo base $G$ com letras estáveis $\{p_\alpha\}$ e pares associados de subgrupos $i_{0,\alpha}(A_\alpha)$ e $i_{1,\alpha}(A_\alpha)$.

**Exemplo 1.5.1.** *1) O grupo livre $\mathcal{F}(X)$ é a extensão HNN do grupo trivial com letras estáveis $x \in X$.*

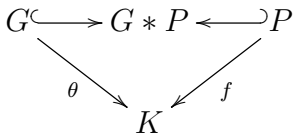
**Exemplo 1.5.2.** *2) Sejam $G = \mathbb{Z} \cong A = \langle a\rangle$, $B = 2\mathbb{Z} \cong \langle a^2\rangle$ e $\varphi : A \longrightarrow B$ o isomorfismo dado por $\varphi(a) = a^2$. Então, a extensão HNN de grupo base $A$ com letra estável $t$ e subgrupos associados $A$ e $B$ tem apresentação $H = \langle a,\ p \mid p^{-1}a^np = a^{2n}\rangle$, $n \in \mathbb{Z}$. Como $p^{-1}a^np = (p^{-1}ap)^n$, temos que $H = \langle a,\ p \mid p^{-1}ap = a^2\rangle$, conhecido como* **grupo de Baumslag-Solitar** *$BS(1, 2)$.*

Antes de enunciar a próxima proposição, considere $H = HNN(G, A, p, \varphi)$, $j : G \longrightarrow H$ o homomorfismo induzido da inclusão de $G$ em $G * P$ e $N = \langle\{p^{-1}ap\varphi(a)^{-1},\ a \in A\}\rangle^{G*P}$.

**Proposição 1.5.1** (Propriedade Universal de Extensões HNN)**.** *Seja $\theta$ um homomorfismo de $G$ em $K$, em que $K$ é um grupo tal que existe $k \in K$ com $k^{-1}\theta(a)k = \theta(\varphi(a)),\ \forall a \in A$. Então, $\exists!\phi : H \longrightarrow K$ homomorfismo tal que $\phi \circ j = \theta$ e $\phi(p) = k$.*




*Demonstração.* Considere o diagrama




em que $f$ é um homomorfismo de $P$ em $K$ dado por $f(p) = k$. Então, pela propriedade universal do produto livre, $\exists!\phi' : G * P \longrightarrow K$ homomorfismo tal que $\phi'|_G = \theta$ e $\phi'(p) = k$. Ainda,

$$\phi'(p^{-1}ap\varphi(a)^{-1}) = \phi'(p)^{-1}\phi'(a)\phi'(p)\phi'(\varphi(a))^{-1} = k^{-1}\theta(a)k\theta(\varphi(a))^{-1} = 1,\ \forall a \in A.$$

Portanto, $\phi'$ induz um homomorfismo $\phi : H \longrightarrow K$ tal que $\phi \circ j(g) = \phi'(g),\ \forall g \in G$ e $\phi(pN) = \phi'(p) = k$. Como $H$ é gerado por $j(G)$ e $pN$, $\phi$ deve ser único. □

Em particular, se $K = P$ e $\theta : G \longrightarrow P$ é trivial, existe um homomorfismo $\phi : H \longrightarrow P$ tal que $\phi|_{\langle pN \rangle}$ é um isomorfismo de $\langle pN \rangle$ em $P$. Portanto, vamos enxergar $P$ como uma inclusão em $H$.

**Teorema 1.5.1** (Teorema da Forma Normal para Extensões HNN). *Seja $H = HNN(G, A, p, \varphi)$, $j : G \longrightarrow H$ o homomorfismo induzido pela inclusão $G \hookrightarrow G * P$ e $S$, $T$ transversais à direita de $A$ e $B$ em $G$ respectivamente, $1 \in S \cap T$. Então,*

*i) $j$ é monomorfismo;*

*ii) tomando $j$ como inclusão, todo $h \in H$ pode ser unicamente escrito como $g_0 p^{\epsilon_1} g_1 p^{\epsilon_1} \dots p^{\epsilon_n} g_n$, em que $n \geq 0$, $\epsilon_i = \pm 1$, $g_0 \in G$ e, para $i \geq 1$, $g_i \in S$ se $\epsilon_i = -1$, $g_i \in T$ se $\epsilon_i = 1$ e, se $\epsilon_i = -\epsilon_{i+1}$, então $g_i \neq 1$. Dizemos que $g_0 p^{\epsilon_1} g_1 p^{\epsilon_1} \dots p^{\epsilon_n} g_n$ é a* **forma normal** *de $h$.*

*Demonstração.* i) Utilizaremos o Método de van der Waerden. Seja $W$ o conjunto de todas as sequências $(g_0, \epsilon_1, g_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, g_n)$ tais que $n \geq 0$, $g_0 \in G$, $\epsilon_i = \pm 1$, $g_i \in S$ se $\epsilon_i = -1$, $g_i \in T$ se $\epsilon_i = 1$ e, se $\epsilon_i = -\epsilon_{i+1}$, então $g_i \neq 1$. Defina $\theta : G \longrightarrow Perm(W)$ por

$$\theta(g)(g_0, \epsilon_1, g_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, g_n) = (gg_0, \epsilon_1, g_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, g_n).$$

É fácil ver que $\theta$ é monomorfismo e $\theta(g^{-1}) = \theta(g)^{-1}$.
Seja $k : W \longrightarrow W$ dado por

$$k(g_0, \epsilon_1, g_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, g_n) = \begin{cases} (a, 1, t, \epsilon_1, g_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, g_n) & \text{se } \epsilon_1 = -1 \text{ e } t \neq 1 \text{ ou se } \epsilon_1 \neq -1 \\ (ag_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, g_n) & \text{se } \epsilon_1 = -1 \text{ e } t = 1 \end{cases}$$

em que $g_0 = bt$, $b \in B$, $t \in T$ e $a = \varphi^{-1}(b)$. (Assim, $k(g_0) = (a, 1, t)$).

Defina

$$k^{-1}(g_0, \epsilon_1, g_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, g_n) = \begin{cases} (b, -1, s, \epsilon_1, g_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, g_n) & \text{se } \epsilon_1 = 1 \text{ e } s \neq 1 \text{ ou se } \epsilon_1 \neq 1 \\ (bg_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, g_n) & \text{se } \epsilon_1 = 1 \text{ e } s = 1 \end{cases}$$

em que $g_0 = as$, $a \in A$, $s \in S$ e $b = \varphi(a)$.
É simples verificar que $kk^{-1} = k^{-1}k = id_W$. Portanto, $k \in Perm(W)$.
Vemos que $\forall a \in A$,

$$\theta(a)k(g_0, \epsilon_1, g_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, g_n) = \begin{cases} (aa', 1, t, \epsilon_1, g_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, g_n) & \text{se } \epsilon_1 = -1 \text{ e } t \neq 1 \text{ ou se } \epsilon_1 \neq -1 \\ (aa'g_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, g_n) & \text{se } \epsilon_1 = -1 \text{ e } t = 1 \end{cases}$$

em que $g_0 = bt$, $b \in B$, $t \in T$ e $a' = \varphi^{-1}(b)$. Daí, $k\theta(\varphi(a))(g_0, \epsilon_1, g_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, g_n) =$

$$k(\varphi(a)g_0, \epsilon_1, g_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, g_n) = \begin{cases} (aa', 1, t, \epsilon_1, g_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, g_n) & \text{se } \epsilon_1 = -1 \text{ e } t \neq 1 \text{ ou se } \epsilon_1 \neq -1 \\ (aa'g_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, g_n) & \text{se } \epsilon_1 = -1 \text{ e } t = 1, \end{cases}$$

pois $\varphi(a)g_0 = \varphi(a)bt$ e $\varphi^{-1}(\varphi(a)b) = a\varphi^{-1}(b) = aa'$. Portanto, $\theta(a)k = k\theta(\varphi(a))$.
Pela propriedade universal da extensão HNN, $\exists!\ \phi : H \longrightarrow Perm(W)$ tal que $\phi \circ j = \theta$ e $\phi(p) = k$. Como $\theta$ é injetora, $j$ é um monomorfismo.

ii) Seja $h \in H$. Então, $h = g'_0 p^{\delta_1} g'_1 p^{\delta_2} \dots p^{\delta_m} g'_m$, $g'_i \in G$, $\delta_i = \pm 1$. Nesse caso, dizemos que $h$ tem comprimento m. Por indução no comprimento da palavra, $g'_1 p^{\delta_2} \dots p^{\delta_m} g'_m$ tem forma normal, suponha $g''_0 p^{\mu_1} g''_1 p^{\mu_2} \dots p^{\mu_r} g''_r$. Portanto, $h = g'_0 p^{\delta_1} g''_0 p^{\mu_1} g''_1 p^{\mu_2} \dots p^{\mu_r} g''_r$. Se essa decomposição de $h$ não é normal, temos os seguintes casos:

1º) $g''_0 = 1$ e $\delta_1 = -\mu_1$. Então, $p^{\delta_1} p^{\mu_1} = 1$. Portanto, $h$ tem forma normal $(g'_0 g''_1) p^{\mu_2} g''_2 p^{\mu_r} g''_r$.

2º) $\delta_1 = 1$ e $g''_0 \notin T$. Então, $g''_0 = bt$, $b \in B$, $t \in T \Rightarrow p g''_0 = pbt = \varphi^{-1}(b) pt = apt$. Portanto, $h$ tem forma normal $(g'_0 a) ptp^{\mu_1} g''_1 \dots p^{\mu_r} g''_r$.

3º) $\delta_1 = -1$ e $g''_0 \notin S$ é análogo ao 2º caso.

Se $h$ tem formas normais $g_0 p^{\epsilon_1} g_1 \dots p^{\epsilon_n} g_n$ e $h_0 p^{\delta_1} h_1 \dots p^{\delta_m} h_m$, então $\phi(g_0 p^{\epsilon_1} g_1 \dots p^{\epsilon_n} g_n)(1) = \phi(h_0 p^{\delta_1} h_1 \dots p^{\delta_m} h_m)(1)$. Mas

$$\phi(p^{\epsilon_n})\phi(g_n)(1) = k^{\epsilon_n}(g_n) = \begin{cases} (1, 1, g_n) & \text{se } \epsilon_n = 1 \\ (1, -1, g_n) & \text{se } \epsilon_n = -1. \end{cases}$$

Por indução, é fácil mostrar que $\phi(g_0 p^{\epsilon_1} g_1 \dots p^{\epsilon_n} g_n)(1) = (g_0, \epsilon_1, g_1, \dots, \epsilon_n, g_n)$. Portanto, $m = n$, $g_0 = h_0$, $\epsilon_i = \delta_i$ e $g_i = h_i$ para $i \geq 1$. □

Assim como em produto livre amalgamado, é possível escrever elementos de $H$ sem usar o conceito de conjunto transversal.

**Teorema 1.5.2** (Teorema da Forma Reduzida ou Lema de Britton)**.** *Seja $H = HNN(G, A, p, \varphi)$. Então:*

*i) todo $h \in H$ pode ser escrito como $g_0 p^{\epsilon_1} g_1 \dots p^{\epsilon_n} g_n$, em que $n \geq 0$, $\epsilon_i = \pm 1$, $g_i \in G$ e $h$ não possui subpalavra $p^{-1}ap$, $a \in A$, ou $pbp^{-1}$, $b \in B$. Dizemos que essa é a* **forma reduzida** *de $h$.*

*ii) se $h$ tem outra forma reduzida $h_0 p^{\delta_1} h_1 \dots p^{\delta_m} h_m$, então $m = n$ e $\epsilon_i = \delta_i$ para cada $i = 1, \dots, n$. Além disso, se $\epsilon_1 = 1$, então $h_0 A = g_0 A$. Se $\epsilon_1 = -1$, então $h_0 B = g_0 B$.*

*iii) Se $h$ tem forma reduzida e $n > 0$, então $h \notin G$.*

*iv) Se $h = g_0 p^{\epsilon_1} g_1 \dots p^{\epsilon_n} g_n \in G$, com $n > 0$, $g_i \in G$, $\epsilon_i = \pm 1$, então $h$ tem subpalavra $p^{-1}ap$, $a \in A$ ou $pbp^{-1}$, $b \in B$.*

*Demonstração.* i) Suponha que a forma normal de $h$ não seja uma forma reduzida. Então, existe uma subpalavra em $h$ da forma $p^{-1}ap$, $a \in A$ ou $pbp^{-1}$, $b \in B$. Suponha $p^{-1}ap$. Então, $a \in S \Rightarrow a = 1$, pois $A \cap S = 1$, contradição. Se a subpalavra é $pbp^{-1}$, então $b \in T \Rightarrow b = 1$, contradição.

ii) Vamos provar por indução no comprimento da forma reduzida de $h \in H$. Se $h$ tem comprimento 0, então $h = h_0 \in G$ é a forma normal de $h$.
Suponha $h = g_0 p^{\epsilon_1} g_1 \dots p^{\epsilon_n} g_n$ uma forma reduzida de $h$, $n > 0$. Então, $p^{\epsilon_2} g_2 \dots p^{\epsilon_n} g_n$ está na forma reduzida e possui forma normal $g'_0 p^{\delta_2} g'_2 \dots p^{\delta_m} g'_m$. Por indução no comprimento da

forma reduzida, $m = n$, $\epsilon_i = \delta_i$ para cada $i = 2, \ldots, n$ e, se $\epsilon_2 = 1$, então $g_0' \in A$; mas se $\epsilon_2 = -1$, então $g_0' \in B$. Daí,

$$h = g_0 p^{\epsilon_1} g_1 p^{\epsilon_2} g_2 \ldots p^{\epsilon_n} g_n = g_0 p^{\epsilon_1} g_1 g_0' p^{\epsilon_2} g_2' \ldots p^{\epsilon_n} g_n'.$$

Consideremos $\epsilon_1 = 1$ (O caso $\epsilon_1 = -1$ é análogo). Então, $pg_1 g_0' = pbt = apt,\ b \in B,\ t \in T,\ a = \varphi^{-1}(b)$. Daí, se $t \neq 1$, $(g_0 a) p t p^{\epsilon_2} g_2' \ldots p^{\epsilon_n} g_n'$ é forma normal de $h$, e $g_0 aA = g_0 A$. Se $t = 1$ e $\epsilon_2 = -1$, h tem forma reduzida $g_0 p g_1 p^{-1} \ldots p^{\epsilon_n} g_n$. Mas $g_0' \in B \Rightarrow g_1 \in B$, pois $g_1 g_0' = b$. Então, $pg_1 p^{-1}$ é subpalavra de $h$, contradição.

iii) Se $h = g_0 p^{\epsilon_1} g_1 p^{\epsilon_2} g_2 \ldots p^{\epsilon_n} g_n \in G$ é da forma reduzida, $n > 0$, então $h = g_0' \in G$ também é forma reduzida, e $h$ tem comprimento 0. Pela (ii), contradição. Portanto, $h$ deve conter palavra da forma $p^{-1} ap,\ a \in A$ ou $pbp^{-1},\ b \in B$. Logo, (iv) está provada. □

# Capítulo 2

# Teoria de Bass-Serre

## 2.1 Grafos

**Definição 2.1.1.** *Seja $\Gamma$ uma estrutura composta por dois conjuntos disjuntos, $V(\Gamma)$ e $E(\Gamma)$, e duas funções, $\sigma : E(\Gamma) \longrightarrow V(\Gamma)$ e $\overline{*} : E(\Gamma) \longrightarrow E(\Gamma)$, tais que $e \neq \overline{e}$ e $e = \overline{\overline{e}}$, $\forall e \in E(\Gamma)$. Dizemos que $\Gamma$ é um* **grafo**. *Chamamos $E(\Gamma)$ o conjunto de* **arestas** *de $\Gamma$ e $V(\Gamma)$ o conjunto de* **vértices** *de $\Gamma$. Podemos definir outra função $\tau : E(\Gamma) \longrightarrow V(\Gamma)$ dada por $\tau(e) = \sigma(\overline{e})$. Denominamos $\sigma(e)$ o* **começo** *de $e$, $\tau(e)$ o* **fim** *de $e$ e $\overline{e}$ o* **inverso** *de $e$. Se $\sigma(e) = \tau(e)$, dizemos que $e$ é um* **laço**.

Representaremos $V(\Gamma)$ por $V$ e $E(\Gamma)$ por $E$.

**Definição 2.1.2.** *Um* **caminho** *em $\Gamma$ é uma sequência finita de arestas $e_1 \dots e_n$ tal que $\tau(e_i) = \sigma(e_{i+1})$, $i = 1, \dots, n-1$. Esse caminho tem comprimento $n$, começa em $\sigma(e_1)$ e termina em $\tau(e_n)$. Dizemos que o caminho é:*

- *um vértice se $n = 0$;*
- **simples** *se $\sigma(e_1), \sigma(e_2), \dots, \sigma(e_{n-1}), \tau(e_n)$ são todos os distintos.*
- **reduzido** *se para todo $i = 1, \dots, n-1$ temos que $e_{i+1} \neq \overline{e_i}$;*
- **fechado** *se $\tau(e_n) = \sigma(e_1)$;*

Se dois vértices são ligados por um caminho, eles podem ser ligados por um caminho reduzido. De fato, sejam $v$, $w$ dois vértices de $\Gamma$ e $e_1, \dots, e_n$ um caminho que começa em $v$ e termina em $w$. Se $n > 2$, suponha $e_{i+1} = \overline{e_i}$ para algum $i$. Então, $e_1 \dots e_{i-1} e_{i+2} \dots e_n$ é um caminho de $v$ a $w$, pois $\tau(e_{i-1}) = \sigma(e_i) = \tau(\overline{e_i}) = \tau(e_{i+1}) = \sigma(e_{i+2})$. Esse processo é chamado de **redução elementar**. Daí, se existe $j$ no novo caminho tal que $e_{j+1} = \overline{e_j}$, basta realizar o processo de redução elementar novamente. Como ele é finito, chegaremos em um caminho reduzido.
Se $n = 2$ e $e_2 = \overline{e_1}$, o caminho reduzido é o vértice $\sigma(e_1) = v$, chamado de caminho reduzido fechado de comprimento 0.
Se $e$ é um laço, dizemos que $e$ é reduzido fechado de comprimento 1.

**Definição 2.1.3.** *Sejam $f$, $g$ respectivamente os caminhos $e_1 \dots e_n$ e $e'_1 \dots e'_m$ tais que $\tau(e_n) = \sigma(e'_1)$. Então, definimos o produto $f \cdot g$ como o caminho $e_1 \dots e_n e'_1 \dots e'_m$, e $f \cdot \tau(e_n) = f$, $\sigma(e_1) \cdot f = f$. Chamamos de $\overline{f} = \overline{e}_n \dots \overline{e}_1$ a* **inversa** *de $f$.*

Vamos denotar $f \cdot g$ por $fg$.

**Definição 2.1.4.** *Se $\Gamma_1$ é uma estrutura composta por $V_1 \subseteq V$ e $E_1 \subseteq E$ tais que $\overline{e} \in E_1$ e $\sigma(e) \in V_1$, $\forall e \in E_1$, então $\Gamma_1$ é um* **subgrafo** *de $\Gamma$. Ainda, $\tau(e) = \sigma(\overline{e}) \in V_1$, $\forall e \in E_1$.*

A união e a interserção arbitrária de subgrafos de $\Gamma$ é também um subgrafo de $\Gamma$.

**Definição 2.1.5.** *Um grafo $\Gamma$ é* **conexo** *se dados quaisquer dois vértices de $\Gamma$ existe um caminho em $\Gamma$ que os liga.*

Seja $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$ uma família de grafos conexos tal que $\bigcap\limits_{i \in I} \Gamma_i \neq \emptyset$. Tome $v_0 \in \bigcap\limits_{i \in I} \Gamma_i$. Dados quaisquer dois vértices $v$, $w$ em $\bigcup\limits_{i \in I} \Gamma_i$, existe um caminho $f$ de $v$ a $v_0$ e outro caminho $g$ de $w$ a $v_0$. Daí, $f\overline{g}$ é um caminho em $\bigcup\limits_{i \in I} \Gamma_i$ de $v$ a $w$. Portanto, $\bigcup\limits_{i \in I} \Gamma_i$ é conexo.

**Lema 2.1.1.** *Seja $\Gamma$ um grafo conexo e $S$ um subconjunto não-vazio de $V$ tal que, $\forall e \in E$, se $\sigma(e) \in S$, então $\tau(e) \in S$. Então, $S = V$.*

*Demonstração.* Seja $v \in V$, $w \in S$ e $e_1 \dots e_n$ um caminho em $\Gamma$ tal que $\sigma(e_1) = w$ e $\tau(e_n) = v$. Por hipótese, $\tau(e_1) = \sigma(e_2) \in S$. Logo, por indução, $\tau(e_n) = v \in S$. Como $v$ é arbitrário, temos que $V = S$. □

**Definição 2.1.6.** *Uma* **floresta** *é um grafo que não possui caminhos reduzidos fechados de comprimento $n > 0$. Uma* **árvore** *é uma floresta conexa.*

Embora floresta seja um conceito mais geral, árvore é o assunto de interesse para resultados a serem apresentados posteriormente.

### 2.1.1 Árvores Maximais

**Lema 2.1.2.** *Um grafo conexo $\Gamma$ é uma árvore se e somente se quaisquer dois vértices $v$ e $w$ de $\Gamma$ podem ser ligados por um único caminho reduzido.*

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) Sejam $v$ e $w$ dois vértices de $\Gamma$. Como $\Gamma$ é conexo, existe um caminho reduzido $f = f_1 \dots f_n$ de $v$ a $w$. Suponha $g = g_1 \dots g_m$ um caminho reduzido distinto de $f$ de $v$ a $w$. Então, $f\overline{g}$ é um caminho fechado em $v$. Aplicando o processo de redução de caminhos em $f\overline{g}$, chegamos num caminho reduzido fechado $h$ em $v$ de comprimento $n > 0$. De fato, se $h$ é um vértice, então $m = n$ e $f_i = g_i$ para cada $i = 1, \dots, n$, contradição. Mas $\Gamma$ é árvore. Portanto, $f$ é único.
($\Leftarrow$) Suponha $v$ vértice de $\Gamma$ tal que existe um caminho reduzido fechado $e_1 \dots e_n$ em $v$ de comprimento $n > 0$. Seja $w = \tau(e_1)$. Então, $\overline{e}_1$ e $e_2, \dots, e_n$ são caminhos reduzidos distintos de $w$ a $v$, contradição. □

**Definição 2.1.7.** *Seja $\Gamma$ um grafo. Dizemos que $T$ é* **árvore maximal** *de $\Gamma$ se $T$ é árvore e $\Gamma_1$ não é árvore, $\forall \Gamma_1$ subgrafo de $\Gamma$ tal que $\Gamma_1 \supset T$.*

**Proposição 2.1.1.** *Todo grafo* $\Gamma$ *contém uma árvore maximal.*

*Demonstração.* Seja $\Omega$ um subconjunto do conjunto de todas as árvores de $\Gamma$ tal que $T_i \subseteq T_j$ ou $T_j \subseteq T_i$ para todo $T_i,\ T_j \in \Omega$. Então, $T = \bigcup_{T_i \in \Omega} T_i$ é árvore. De fato, suponha $f$ um caminho reduzido fechado de comprimento $n > 0$ em $T$. Então, $f$ está em $T_i$ para algum $i$, contradição. Por fim, aplicando o Lema de Zorn, existe uma árvore maximal de $\Gamma$. □

**Proposição 2.1.2.** *Seja* $\Gamma$ *um grafo conexo e* $T$ *uma árvore de* $\Gamma$. *Então,* $T$ *é árvore maximal de* $\Gamma$ *se e somente se* $V(T) = V(\Gamma)$.

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) Suponha $V(T) \neq V(\Gamma)$. Então, existe $e \in E(\Gamma)$ tal que $\sigma(e) \notin V(T)$ mas $\tau(e) \in V(T)$. Daí, $T \cup \{\sigma(e), e, \overline{e}\}$ é árvore, contradição, pois $T$ é maximal.
($\Leftarrow$) Seja $\Gamma_1$ um subgrafo de $\Gamma$ tal que $\Gamma_1 \supset T$. Como $V(T) = V(\Gamma)$, deve existir $e \in E(\Gamma_1) - E(T)$. Daí, $\Gamma_1$ contém dois caminhos reduzidos de $\sigma(e)$ a $\tau(e)$: $e$ e o caminho reduzido em $T$. Portanto, $\Gamma_1$ não é árvore. □

**Proposição 2.1.3.** *Seja* $\Gamma$ *um grafo conexo finito com* $n$ *vértices e* $m$ *pares de arestas. Então,* $\Gamma$ *é uma árvore se e somente se* $n = m + 1$.

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) Se $n = 1$, então $m = 0$. Seja $\Gamma$ uma árvore finita com $n$ vértices e $m$ pares de arestas. Se $\Gamma_1$ é uma subárvore de $\Gamma$ com $n - 1$ vértices, então, por indução, $\Gamma_1$ tem $n - 2$ arestas. Seja $v \in V(\Gamma) - V(\Gamma_1)$. Então, $v = \sigma(e)$ para algum $e \in E(\Gamma) - E(\Gamma_1)$. Suponha que $\Gamma$ possui $m$ arestas, $m > n - 1$. Então, existe $e_1 \in E(\Gamma) - E(\Gamma_1)$, $e_1 \neq e$, tal que $\sigma(e_1) = \sigma(e)$. Seja $f$ o caminho reduzido de $\tau(e)$ a $\tau(e_1)$ em $\Gamma_1$. Então, $f$ e $\overline{e}e_1$ são dois caminhos distintos reduzidos de $\tau(e)$ a $\tau(e_1)$. Assim, $\Gamma$ não é árvore, contradição. Como $m > n - 2$, então $m = n - 1$. Portanto, $n = m + 1$.
($\Leftarrow$) Seja $T$ uma árvore maximal de $\Gamma$. Então, $V(T) = V(\Gamma)$. Portanto, $T$ possui $n$ vértices. Pelo que acabamos de provar, $T$ possui $n - 1$ arestas. Mas $\Gamma$ possui $n - 1$ arestas. Como $T \subseteq \Gamma$, então $T = \Gamma$. □

Seja $I$ um conjunto e $\{T_i\}_{i \in I}$ uma família de subárvores de um grafo $\Gamma$ tal que $T_i \cap T_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Ainda, considere que todo vértice de $V$ está em $\bigcup_{i \in I} T_i$. Desejamos construir um grafo $\Delta$ da seguinte maneira:

- $V(\Delta) = I$;
- $E(\Delta) = \left\{ e \in E \mid e \notin \bigcup_{i \in I} T_i \right\}$. Se $e \in E(\Delta)$, então $\overline{e} \in E(\Delta)$.

Daí, se $e \in E(\Delta)$, $\sigma(e) = i$ tal que, para quando $e \in E$, $\sigma(e) \in T_i$. Análogo para $\tau : E(\Delta) \longrightarrow V(\Delta)$.
Dizemos que $\Delta$ é um grafo obtido de $\Gamma$ pela **contração de árvores** $\{T_i\}_{i \in I}$ **de** $\Gamma$.

**Lema 2.1.3.** *i)* $\Delta$ *é conexo* $\Leftrightarrow$ $\Gamma$ *é conexo.*

*ii)* $\Delta$ *é árvore* $\Leftrightarrow$ $\Gamma$ *é árvore.*

*Demonstração.* i) ($\Rightarrow$) Sejam $v, w \in V,\ v \neq w$. Sabemos que $v \in T_i$ e $w \in T_j$. Se $i = j$, existe caminho de $v$ a $w$ em $\Gamma$ pois $T_i$ é árvore. Caso contrário, existe um caminho $e_1 \dots e_n$ em $\Delta$ de $i$ em $j$. Considere $e_1 \dots e_n \in \Gamma$. Então, existe um caminho $f_0 \in T_i$ de $v$ a $\sigma(e_1)$, existem caminhos $f_k \in T_{\tau(e_k),\ e_k \in E(\Delta)}$ de $\tau(e_k)$ em $\sigma(e_{k+1}),\ k = 1, \dots, n-1$, e existe caminho $f_n \in T_j$ de $\tau(e_n)$ a $w$. Portanto, $f_0 e_1 f_1 e_2 \dots e_n f_n$ é um caminho de $v$ a $w$ em $\Gamma$.
($\Leftarrow$) Sejam $i, j \in V(\Delta),\ i \neq j$. Se $v \in T_i$ e $w \in T_j$, existe um caminho $e_1 \dots e_n$ em $\Gamma$ de $v$ a $w$. Se $e_k \in \bigcup_{l \in I} T_l$ para $k \in \{1, \dots, n\}$, então $e_k \in T_l$ para algum $l \in I$ e para todo $k$. De fato, se $e_k \in T_{l_1}$ e $e_{k+1} \in T_{l_2}$, temos que

$$\tau(e_k) = \sigma(e_{k+1}) \in T_{l_1} \cap T_{l_2} \Rightarrow T_{l_1} = T_{l_2},\ k = 1, \dots, n-1.$$

Portanto, $l = i = j$, contradição. Logo, existem $e_{k_1}, \dots, e_{k_s} \notin \bigcup_{l \in I} T_l,\ k_1 < \dots < k_s$. Então, $e_{k_1} \dots e_{k_s}$ é um caminho em $\Delta$ de $i$ a $j$.
ii)($\Rightarrow$) Suponha que $\Gamma$ não é árvore. Se $\Gamma$ é desconexo, então $\Delta$ é desconexo, e portanto não é árvore. Suponha $\Gamma$ conexo. Seja $e_1 \dots e_n$ um caminho reduzido fechado de $v$ em $\Gamma$ de comprimento $> 0$. Sejam $e_{k_1}, \dots, e_{k_s},\ k_1 < \dots < k_s$ não pertencentes a $\bigcup_{l \in I} T_l$. Então, $e_{k_1} \dots e_{k_s}$ é um caminho reduzido fechado em $\Delta$ de comprimento $> 0$. De fato, se $\overline{e}_{k_j} = e_{k_{j+1}}$ para algum $j \in \{1, \dots, s-1\}$, então o caminho $e_{k_j+1} \dots e_{k_{j+1}-1}$ é um caminho fechado e reduzido de comprimento $> 0$ em alguma das subárvores, absurdo.
($\Leftarrow$) Suponha que $\Delta$ é conexo e não é árvore. Seja $e_1 \dots e_n$ um caminho reduzido fechado de $i$ em $\Delta$ de comprimento $> 0$. Então, existe um caminho reduzido $f_0 \in T_i$ de $\tau(e_n)$ a $\sigma(e_1)$ e existem caminhos reduzidos $f_k \in T_{\tau(e_k),\ e_k \in E(\Delta)}$ de $\tau(e_k)$ em $\sigma(e_{k+1}),\ k = 1, \dots, n-1$. Portanto, $f_0 e_1 f_1 e_2 \dots e_n$ é um caminho reduzido fechado de comprimento $> 0$ em $\Gamma$. □

Sejam $\Gamma$ um grafo. Considere

- $\mathbb{Z}V$ o grupo abeliano livre com base $V$;
- $\frac{\mathbb{Z}E}{N}$, em que $N = \langle e + \overline{e},\ e \in E \rangle^{\mathbb{Z}E}$, o grupo abeliano livre com base o conjunto contendo uma única aresta para cada par $\{e, \overline{e}\}$ em $E$.

Assim, definimos os homomorfismos

- $\epsilon : \mathbb{Z}V \longrightarrow \mathbb{Z}$ dado por $\epsilon(v) = 1,\ \forall v \in V$;
- $\delta : \frac{\mathbb{Z}E}{N} \longrightarrow \mathbb{Z}V$ dado por $\delta(e) = \tau(e) - \sigma(e),\ \forall e \in E$ (aqui estamos denotando $eN$ por $e$). Vemos que $\delta(-\overline{e}) = -(\tau(\overline{e}) - \sigma(\overline{e})) = -(\sigma(e) - \tau(e)) = \delta(e)$.

Se $\sum_{i=1}^{n} z_i e_i \in \frac{\mathbb{Z}E}{N}$, então

$$\epsilon \circ \delta(\sum_{i=1}^{n} z_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} z_i \epsilon(\delta(e_i)) = \sum_{i=1}^{n} z_i(\epsilon(\tau(e)) - \epsilon(\sigma(e))) = \sum_{i=1}^{n} z_i(1-1) = 0.$$

Portanto, $Im\delta \subseteq ker\epsilon$.

**Lema 2.1.4.** *i) $\Gamma$ é conexo $\Leftrightarrow Im\delta = ker\epsilon$.*

*ii)* $\Gamma$ *é árvore* $\Leftrightarrow ker\delta = 0$.

*Demonstração.* i) ($\Rightarrow$) Se $v, w \in V$, então $\epsilon(v - w) = 0$. Seja $\sum_{i=1}^{n} z_i \in ker\epsilon$. Vemos que

$$\sum_{i=1}^{n} z_i v_i = z_1(v_1 - v_2) + (z_1 + z_2)(v_2 - v_3) + \ldots +$$

$$+(z_1 + \ldots + z_{n-1})(v_{n-1} - v_n) + \underbrace{(z_1 + \ldots + z_n)}_{0, \text{ pois } \epsilon(\sum_{i=1}^{n} z_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} z_i = 0} v_n.$$

Portanto, $ker\epsilon$ é gerado por $\{v - w,\ v, w \in V\}$. Seja $e_1 \ldots e_n$ um caminho em $\Gamma$ tal que $\sigma(e_1) = w$ e $\tau(e_n) = v$. Então, $\delta(e_1 + \ldots + e_n) = v - w$. Portanto, $Im\delta = ker\epsilon$.
($\Leftarrow$) Seja $\Gamma$ desconexo. Sejam $v, w \in V$ tais que não existe caminho entre $v$ e $w$ em $\Gamma$. Tome $\epsilon' : \mathbb{Z}V \longrightarrow \mathbb{Z}$ o homomorfismo dado por, para $z \in V$,

$$\begin{cases} \epsilon'(z) = 1 \text{ se existe caminho de } z \text{ a } v \text{ em } \Gamma \\ \epsilon'(z) = 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

É fácil vermos que $\epsilon' \circ \delta = 0$. Se $v - w \in Im\delta$, então $\epsilon'(v - w) = 0$. Mas $\epsilon'(v - w) = \epsilon'(v) - \epsilon'(w) = 1 - 0 = 1$.
ii) ($\Rightarrow$) Seja $\sum_{i=1}^{n} z_i e_i \in ker\delta$ não trivial. Vamos supor $e_i \neq e_j$ se $i \neq j$ e $z_i > 0$ (se $z_i < 0$, basta considerar $z_i e_i = (-z_i)(-\overline{e_i})$). Então,

$$\delta(\sum_{i=1}^{n} z_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} (\tau(e_i) - \sigma(e_i)) = 0,\ z_i > 0,\ i = 1, \ldots, n.$$

Portanto, para cada $i$, existem $j, k \neq i$ tais que $\sigma(e_i) = \tau(e_j)$ e $\tau(e_i) = \sigma(e_k)$. Ou seja, se $\Gamma_1$ é um subgrafo finito de $\Gamma$ que contém $\{e_i, \overline{e}_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ e $\{\sigma(e_i), \sigma(\overline{e}_i),\ i = 1, \ldots, n\}$, um caminho reduzido $f_1 \ldots f_m$ de maior comprimento possível em $\Gamma_1$. Tome o caminho de tal forma que $f_i = e_j$ para algum par $i, j$. Como cada vértice de $e_k,\ k = 1, \ldots, n$, tem ao menos duas arestas $e_r,\ e_s$, construa o caminho $f = f_1 \ldots f_{i-1} e_j e_{k_1} \ldots e_{k_l}$. Daí, se $k_l = m - i$, devemos ter que $\tau(e_{k_l})$ é um vértice em $f$. Isso nos dá um caminho reduzido fechado de comprimento $> 0$ em $\Gamma$.
($\Leftarrow$) Suponha que $\Gamma$ não é árvore. Então, seja $e_1 \ldots e_n$ um caminho reduzido fechado em $\Gamma$, $n > 0$. Temos que $\delta(e_1 + \ldots + e_n) = \tau(e_n) - \sigma(e_1) = 0$. Portanto, $e_1 \ldots e_n \in ker\delta$. □

### 2.1.2 O Grupo Fundamental de Grafos

**Definição 2.1.8.** *Seja* $\Gamma$ *um grafo. Dizemos que o caminho* $f$ *em* $\Gamma$ *é* **homotópico** *ao caminho* $g$ *em* $\Gamma$ *se existe uma sequência de caminhos* $f_k$ *em* $\Gamma$, $1 \leq k \leq m$, *para algum* $m \in \mathbb{N}$, *tal que* $f_1 = f$ *e* $f_m = g$ *e, para todo* $k < m$, $f_{k+1}$ *e* $f_k$ *se diferenciam por uma redução elementar. Nesse caso, podemos definir a relação* $f \sim g$. *É fácil ver que* $\sim$ *é uma relação de equivalência.*

Se $f,\ g$ são caminhos de $v$ a $w$, $f',\ g'$ são caminhos de $w$ a $u$ e $f \sim g$, $f' \sim g'$, então $ff' \sim gg'$. De fato, seja $f_k$ a sequência de caminhos de $f$ a $g$. Então, $f_k f'$ é uma sequência de caminhos de $ff'$ a $gf'$ tal que termos consecutivos se diferenciam por redução elementar.

Da mesma forma, $ff' \sim gg'$. Além disso, $f\overline{f} \sim v$.

A relação de equivalência $\sim$ define classes de equivalência $[f]$ chamados **classes de homotopia de f**.

**Definição 2.1.9.** *O conjunto das classes de homotopia de caminhos fechados de $v$ em $\Gamma$ com o produto $[f]\,[f'] = [ff']$ é chamado de* **grupo fundamental de $\Gamma$ com ponto base** *$v$, e é denotado por $\pi_1(\Gamma, v)$. Vemos que $1 = [v]$ e $[f]^{-1} = \left[\overline{f}\right]$.*

Seja $\Gamma$ conexo. Se $g$ é um caminho de $v$ a um vértice $w$, então a aplicação $[f] \longmapsto [\overline{g}fg]$ de $\pi_1(\Gamma, v)$ a $\pi_1(\Gamma, w)$ define um isomorfismo entre os grupos fundamentais. De fato,

- se $f,\ f'$ são caminhos fechados em $v$, então $[\overline{g}fg]\,[\overline{g}f'g] = [\overline{g}fg\overline{g}f'g] = [\overline{g}ff'g]$;
- $\overline{g}fg \sim w \Rightarrow \overline{g}f \sim \overline{g} \Rightarrow f \sim g\overline{g} \sim v \Rightarrow [f] = 1$;
- se $g'$ é um caminho fechado em $w$, $[g'] = [\overline{g}gg'\overline{g}g]$, em que $[gg'\overline{g}]$ é um caminho fechado em $v$.

Portanto, denotamos $\pi_1(\Gamma, v)$ por $\pi_1(\Gamma)$.

**Teorema 2.1.1.** *Seja $T$ uma árvore maximal em $\Gamma$ conexo. Então, $\pi_1(\Gamma)$ tem apresentação $\langle E \mid R \cup \{e : e \in T\}\rangle$, em que $R \subseteq \mathcal{F}(E)$, $R = \{e\overline{e} : \forall e \in E\}$.*

*Demonstração.* Tome $a \in V(\Gamma)$. Quero mostrar que $\pi_1(\Gamma, a) \cong \mathcal{F}(E)/\langle R \cup \{e : e \in T\}\rangle$. Para isso, definimos o homomorfismo $\phi : \mathcal{F}(E) \longrightarrow \pi_1(\Gamma, a)$ tal que $\phi(e) = \left[f_v e\overline{f}_w\right]$, em que $v = \sigma(e)$ e $w = \tau(e)$, $f_v$ é o caminho reduzido em $T$ de $a$ a $v$ e $f_w$ o caminho reduzido em $T$ de $a$ a $w$. Daí, se $f \in \mathcal{F}(E)$ e $f = e_1 \dots e_n,\ e_i \in E$ para $i = 1, \dots, n,\ \sigma(e_1) = v,\ \tau(e_n) = w$, $e_1 \dots e_n$ um caminho em $\Gamma$, então

$$\phi(f) = \phi(e_1) \dots \phi(e_n) = \left[f_v e_1 \overline{f}_{\tau(e_1)}\right] \left[f_{\sigma(e_2)} e_2 \overline{f}_{\tau(e_2)}\right] \dots \left[\overline{f}_{\sigma(e_n)} e_n \overline{f}_w\right] =$$

$$= \left[f_v e_1 \overline{f}_{\tau(e_1)} f_{\sigma(e_2)} e_2 \overline{f}_{\tau(e_2)} \dots f_{\sigma(e_n)} e_n \overline{f}_w\right] = \left[f_v e_1 \dots e_n \overline{f}_w\right] = \left[f_v f \overline{f}_w\right].$$

Seja $f$ um caminho fechado em $a$. Então, $[f] = \left[f_a f \overline{f}_a\right] = \phi(f)$, em que $f_a$ é o caminho trivial de $a$ em $a$. Portanto, $\phi$ é sobrejetora.
Quero mostrar agora que $ker\phi = \langle R \cup \{e : e \in T\}\rangle^{\mathcal{F}(E)}$. Para todo $e \in E$,

$$\phi(e\overline{e}) = \left[f_{\sigma(e)} e\overline{e} \overline{f}_{\tau(\overline{e})}\right] = \left[f_{\sigma(e)} \overline{f}_{\sigma(e)}\right] = 1.$$

Se $e \in T$, $\overline{f}_{\tau(e)} = \overline{e}\overline{f}_{\sigma(e)}$. Então,

$$\phi(e) = \left[f_{\sigma(e)} e \overline{f}_{\tau(e)}\right] = \left[f_{\sigma(e)} e\overline{e} \overline{f}_{\sigma(e)}\right] = 1.$$

Portanto, $\langle R \cup \{e : e \in T\}\rangle^{\mathcal{F}(E)} \subseteq ker\phi$.
Seja $f$ um caminho em $\Gamma$ com começo em $v$ e fim em $w$. Se $\phi(f) = 1$, então $\left[f_v f \overline{f}_w\right] = 1$. Daí, $f_v f \overline{f}_w \sim a \Rightarrow f \sim \overline{f}_v f_w$. Como $\overline{f}_v f_w$ é um caminho reduzido em $T$, temos que $f$ é reduzido a $\overline{f}_v f_w$ por sucessivas reduções elementares. Portanto, $f$ é um caminho composto por arestas

$e \in T$ e caminhos $e\overline{e},\ e \in E$. Portanto, $f$ é consequência de $\{e : e \in T\} \cup \{e\overline{e} : \forall e \in E\}$. Logo, $ker\phi \subseteq \langle R \cup \{e : e \in T\}\rangle^{\mathcal{F}(E)}$. Assim,

$$\frac{\mathcal{F}(E)}{ker\phi} = \frac{\mathcal{F}(E)}{\langle R \cup \{e : e \in T\}\rangle^{\mathcal{F}(E)}} \cong \pi_1(\Gamma, a).$$

Como $\Gamma$ é conexo, $\pi_1(\Gamma, a) = \pi_1(\Gamma)$ e $\pi_1(\Gamma)$ tem apresentação $\langle E \mid R \cup \{e : e \in T\}\rangle$. □

**Corolário 2.1.1.** *Seja $\Gamma$ um grafo conexo e $T$ uma árvore maximal de $\Gamma$. Então, $\pi_1(\Gamma)$ é livre, cujo conjunto base é constituído por uma única aresta de cada par de arestas $\{e, \overline{e}\}$ não contido em $T$. Além disso, a aresta escolhida corresponde à classe de $f_v e \overline{f}_w$, $f_v$ é o único caminho reduzido em $T$ de $a$ a $v$, $v = \sigma(e),\ w = \tau(e)$.*

*Demonstração.* A segunda parte é óbvia, pela construção da demonstração do teorema acima. Já a primeira parte, vemos que

$$\pi_1(\Gamma) = \langle E \mid R \cup \{e : e \in T\}\rangle = \langle x \in \{e, \overline{e}\} \subseteq E - E(T)\rangle\,,$$

com $x$ é escolhido unicamente de cada par de arestas. Assim, temos que $\pi_1(\Gamma)$ é um grupo livre com a base descrita acima. □

**Corolário 2.1.2.** *Um grafo conexo $\Gamma$ é uma árvore se e somente se seu grupo fundamental é trivial.*

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) Como $\Gamma$ é árvore, temos que $T = \Gamma$. Portanto, $E - E(T) = \emptyset$. Pelo corolário 2.1.1, temos que $\pi_1(\Gamma)$ é trivial.
($\Leftarrow$) Seja $T$ uma árvore maximal em $\Gamma$. Então,

$$\pi_1(\Gamma) = \mathcal{F}(x \in \{e, \overline{e}\} \subseteq E - E(T),\ x \text{ unicamente escolhido de cada par de arestas}) = \{1\}\,.$$

Portanto, $x = 1$ para cada $x \Rightarrow \forall e \in E,\ e \in T \Rightarrow E = E(T)$. Como $V(T) = V(\Gamma)$, então $T = \Gamma$. □

**Corolário 2.1.3.** *Seja $\Gamma$ um grafo conexo com $n$ vértices e $m$ pares de arestas. Então, o número $k$ de elementos do gerador de $\pi_1(\Gamma)$ é $m - n + 1$, supondo $n$ finito.*

*Demonstração.* Seja $T$ uma árvore maximal de $\Gamma$. Então, $T$ possui $n$ vértices e $n - 1$ pares de arestas, conforme proposiçao 2.1.3. Como o gerador de $\pi_1(\Gamma)$ é o conjunto composto por um elemento de cada par de arestas não pertencentes a $E(T)$, então $k = m - n + 1$. □

**Exemplo 2.1.1.** *Seja $\Gamma$ o grafo conexo tal que $V(\Gamma) = \{v\}$ e $E(\Gamma) = \{e, \overline{e}\}$ (o grafo pode ser representado pelo $S^1$). Então, a árvore maximal de $\Gamma$ é $T = \{v\}$. Assim, $\pi_1(\Gamma) = \mathcal{F}(\{e\}) \cong \mathbb{Z}$. Daí, $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.*

## 2.2 Ação de Grupos

**Definição 2.2.1.** *Uma* **ação de um grupo $G$ sobre um conjunto** $X$ *é um homomorfismo $\varphi$ de $G$ em $Perm(X)$.*

Uma definição equivalente que será utilizada é a seguinte: $G$ age sobre $X$ (à esquerda) se existir uma aplicação $G \times X \longrightarrow X$ tal que $(g, x) \longmapsto gx \in X$, em que

- $1_G x = x,\ \forall x \in X$ e
- $g_2(g_1 x) = (g_2 g_1)x,\ \forall x \in X,\ \forall g_1, g_2 \in G.$

**Definição 2.2.2.** *Seja $G$ um grupo e $\Gamma$ uma grafo. Então, $G$ age sobre $\Gamma$ se $G$ age sobre $V(\Gamma)$ e $E(\Gamma)$ e:*

*i)* $g\overline{e} = \overline{ge},\ \forall e \in E(\Gamma)$;

*ii)* $g\sigma(e) = \sigma(ge),\ g\tau(e) = \tau(ge),\ \forall e \in E(\Gamma),\ \forall g \in G.$

Se existe $g \in G,\ e \in E$ tal que $ge = \overline{e}$, dizemos que $G$ **age com inversão**.

### 2.2.1 Grafo de Cayley

**Definição 2.2.3.** *Seja $G$ um grupo e $S$ um subconjunto de $G$. Defina $\Gamma(G, S)$ o grafo tal que $V(\Gamma(G, S)) = G$ e $E(\Gamma(G, S))$ é o conjunto $G \times S \times \{-1, 1\}$. Ainda, $\sigma(g, s, 1) = g,\ \tau(g, s, 1) = gs$ e $\overline{(g, s, \epsilon)} = (g, s, -\epsilon)$, para $\epsilon = \pm 1$. O grafo $\Gamma(G, S)$ é chamado* **grafo de Cayley de $G$ com respeito a $S$**.

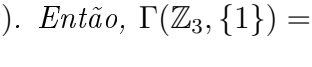
Se definirmos

- $G \times G \longrightarrow G$ por $(g, h) \longmapsto gh$ (produto em $G$), $\forall g, h \in G$, e
- $G \times (G \times S \times \{-1, 1\}) \longrightarrow G \times S \times \{-1, 1\}$ por $(g, (h, s, \epsilon)) \longmapsto (gh, s, \epsilon),\ \forall g, h \in G,\ \forall s \in S,\ \epsilon = \pm 1,$

temos que

- $g\sigma(h, s, \epsilon) = \begin{cases} gh = \sigma(gh, s, \epsilon) = \sigma(g(h, s, \epsilon)) & \text{se } \epsilon = 1 \\ g\sigma\overline{(h, s, -\epsilon)} = g\tau(h, s, -\epsilon) = ghs = \tau(gh, s, -\epsilon) = \sigma(gh, s, \epsilon) & \text{se } \epsilon = -1 \end{cases}$
- $g\tau(h, s, \epsilon) = \begin{cases} ghs = \tau(gh, s, \epsilon) = \tau(g(h, s, \epsilon)) & \text{se } \epsilon = 1 \\ g\tau\overline{(h, s, -\epsilon)} = gh = \sigma(gh, s, -\epsilon) = \tau(gh, s, \epsilon) = \tau(g(h, s, \epsilon)) & \text{se } \epsilon = -1 \end{cases}$
- $g\overline{(h, s, \epsilon)} = g(h, s, -\epsilon) = (gh, s, -\epsilon) = \overline{(gh, s, \epsilon)} = \overline{g(h, s, \epsilon)}.$

Além disso, $g(h, s, \epsilon) = (gh, s, \epsilon) \neq (h, s, -\epsilon)$. Portanto, $G$ age em $\Gamma(G, S)$ sem inversões.

**Exemplo 2.2.1.** *1) $G = \mathbb{Z}_3,\ S = \{1\}$. Então, $V = \{1, a, a^2\}$,*
*$E = \{(1, 1, 1), (1, 1, -1), (a, 1, 1), (a, 1, -1), (a^2, 1, 1), (a^2, 1, -1)\}$. Temos que $\sigma(g, 1, \epsilon) = g = \tau(g, 1, \epsilon)$. Então, $\Gamma(\mathbb{Z}_3, \{1\}) =$*  *desconexo.*

*2) $G = \mathbb{Z}_2 = \{1, a\},\ S = \{a\}$. Então, $V = \{1, a\},\ E = \{(1, a, 1), (a, a, 1), (1, a, -1), (a, a, -1)\}$.*
*Temos que*

- $\sigma(1, a, \epsilon) = \begin{cases} 1 & se\ \epsilon = 1 \\ a & se\ \epsilon = -1 \end{cases}$
- $\sigma(a, a, \epsilon) = \begin{cases} a & se\ \epsilon = 1 \\ a^2 = 1 & se\ \epsilon = -1 \end{cases}$

$\Gamma(\mathbb{Z}_2, \{a\}) =$  *conexo.*



**Lema 2.2.1.** *i)* $\Gamma(G, S)$ *é conexo se e somente se* $S$ *gera* $G$.

*ii)* $\Gamma(G, S)$ *é árvore se e somente se* $G$ *é livre com base* $S$.

*Demonstração.* Antes, definamos a função $f_g : \langle S \rangle \longrightarrow \Gamma(G, S)$ por

$$f_g(s_1^{\epsilon_1} \dots s_n^{\epsilon_n}) = e_1 \dots e_n,\ s_i \in S,\ \epsilon_i = \pm 1,$$

em que $e_1 \dots e_n$ é um caminho tal que $e_r = (g_r, s_r, \epsilon_r)$ com

- $e_1 = (g, s_1, \epsilon_1)$ se $\epsilon_r = 1$ e
- $e_1 = (gs_1^{\epsilon_1}, s_1, \epsilon_1)$ se $\epsilon_1 = -1$;
- $g_r = gs_1^{\epsilon_1} \dots s_{r-1}^{\epsilon_{r-1}}$ se $\epsilon_r = 1$ e
- $g_r = gs_1^{\epsilon_1} \dots s_r^{\epsilon_r}$ se $\epsilon_r = -1$,

$1 < r \leq n$. Daí, $\tau(e_n) = gs_1^{\epsilon_1} \dots s_n^{\epsilon_n}$.
A função é claramente injetora.
Além disso, se $e_{r+1} = \overline{e}_r$ para algum $r$, então $s_{r+1} = s_r$ e $\epsilon_{r+1} = -\epsilon_r$. Logo, $s_1^{\epsilon_1} \dots s_n^{\epsilon_n}$ não é reduzida. Se $e_1 \dots e_n$ é um caminho reduzido em $\Gamma(G, S)$ que começa em $g$ e termina em $h$, então

- $e_1 = (g, s_1, \epsilon_1)$ se $\epsilon_1 = 1$ e
- $e_1 = (gs_1^{\epsilon_1}, s_1, \epsilon_1)$ se $\epsilon_1 = -1$;
- $e_2 = (gs_1^{\epsilon_1}, s_2, e_2)$ se $\epsilon_2 = 1$ e
- $e_2 = (gs_1^{\epsilon_1} s_2^{\epsilon_2}, s_2, e_2)$ se $\epsilon_2 = -1$.

Daí,

- $e_r = (gs_1^{\epsilon_1} \dots s_r^{\epsilon_r}, s_r, \epsilon_r)$ se $\epsilon = -1$ e
- $e_r = (gs_1^{\epsilon_1} \dots s_{r-1}^{\epsilon_{r-1}}, s_r, \epsilon_r)$ se $\epsilon = 1$,

$1 < r \leq n$. É fácil verificar que $s_1^{\epsilon_1} \dots s_n^{\epsilon_n}$ é reduzida. Vemos que $\tau(e_n) = gs^{\epsilon_1} \dots s^{\epsilon_n} = h \Rightarrow g^{-1}h = s^{\epsilon_1} \dots s^{\epsilon_n}$.
i) Se $\langle S \rangle = G$, então, $\forall g, h \in G$, $g^{-1}h = s_1^{\epsilon_1} \dots s_n^{\epsilon_n}$ para algum $n \in \mathbb{N}$, $s_i \in S$, $\epsilon_i = \pm 1$. Daí, $f_g(g^{-1}h) = e_1 \dots e_n$ tal que $\sigma(e_1) = g$ e $\tau(e_n) = h$. Logo, $\Gamma(G, S)$ é conexo.
Se $\Gamma(G, S)$ é conexo, $\forall g, h \in G$, existe um caminho $e_1 \dots e_n$ de $g$ a $h$ em $\Gamma(G, S)$. Então,

existem $s_i \in S,\ \epsilon_i = \pm 1$, tais que $g^{-1}h = s_1^{\epsilon_1} \dots s_n^{\epsilon_n}$. Portanto, $\langle S \rangle = G$.
ii) Seja $G$ livre com base $S$. Se $e_1 \dots e_n$ é um caminho reduzido em $\Gamma(G,S)$ com $\sigma(e_1) = g,\ \tau(e_n) = h$, então $e_1 \dots e_n$ deve ser único, pois $g_1^{-1}h$ é escrito de maneira única e reduzida como $s_1^{\epsilon_1} \dots s_n^{\epsilon_n}$. Logo, $\Gamma(G,S)$ é árvore.
Se $\Gamma(G,S)$ é árvore, existe um único caminho reduzido de $g$ a $h$. Então, $g^{-1}h = s_1^{\epsilon_1} \dots s_n^{\epsilon_n}$ é escrito de maneira única com $s_i \in S,\ \epsilon_i = \pm 1,\ s_{i+1}^{\epsilon_{i+1}} \neq s_i^{-\epsilon_i}$. □

## 2.3 Aplicações de Grafos

**Definição 2.3.1.** *Seja $G$ um grupo que age sem inversão sobre um grafo $X$. Defina a seguinte relação de equivalência:*

- $\forall v, w \in V(X),\ v \sim w$ *se* $v = gw$ *para algum* $g \in G$;
- $\forall e_1, e_2 \in E(X),\ e_1 \sim e_2$ *se* $e_1 = he_2$ *para algum* $h \in G$.

*Chamamos de* **grafo quociente de $X$ por $G$** *ao grafo cujos vértices são as classes de equivalência $[v]$, $v \in V(X)$, e as arestas são as classes de equivalência $[e]$, $e \in E(X)$. Denotamos tal grafo por $X/G$. Vemos que se $v \in V(X)$, então $[v] = Gv$ e, se $e \in E(X)$, então $[e] = Ge$. Por isso, $V(G/X) :=$ conjunto das $G$-órbitas de $V(X)$ e $E(G/X) :=$ conjunto das $G$-órbitas de $E(X)$. Assim,*

- $\overline{[e]} = \overline{Ge} = G\overline{e} = [\overline{e}]$,
- $\sigma([e]) = \sigma(Ge) = G\sigma(e) = [\sigma(e)]$ *e*
- $\tau([e]) = \tau(Ge) = G\tau(e) = [\tau(e)]$.

Se $G$ agisse com inversão, teríamos $g \in G,\ e \in E(X)$ tal que $ge = \overline{e} \Rightarrow Ge = G\overline{e} \Rightarrow [e] = \overline{[e]}$.

**Definição 2.3.2.** *Sejam $X$, $Y$ grafos. Dizemos que $\varphi : X \longrightarrow Y$ é uma* **aplicação de grafos** *se:*

*i)* $\varphi(E(X)) \subseteq E(Y)$ *e* $\varphi(V(X)) \subseteq V(Y)$;

*ii)* $\forall e \in E(X),\ \sigma(\varphi(e)) = \varphi(\sigma(e)),\ \tau(\varphi(e)) = \varphi(\tau(E))$ *e* $\overline{\varphi(e)} = \varphi(\overline{e})$.

**Definição 2.3.3.** *Seja $p : X \longrightarrow Y$ é uma aplicação de grafos. Dizemos que $p$ é* **localmente sobrejetora** *se, para cada $v \in V(X)$ e para $e_2 \in E(Y)$ tal que $\sigma(e_2) = p(v)$, existe uma aresta $e_1 \in E(X)$ com $\sigma(e_1) = v$ e $p(e_1) = e_2$. Dizemos que $p$ é* **localmente injetora** *se, $\forall e_1, e_2 \in E(X),\ e_1 \neq e_2$, tal que $\sigma(e_1) = \sigma(e_2)$, temos que $p(e_1) \neq p(e_2)$. Por fim, $p$ é* **localmente bijetora** *se $p$ é localmente sobrejetora e localmente injetora.*

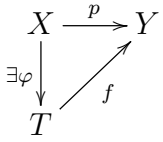
**Exemplo 2.3.1.** *Seja $p : X \longrightarrow G/X$ dada por $p(v) = [v],\ v \in V(X)$, e $p(e) = [e],\ e \in E(X)$. $p$ é uma aplicação de grafos, pois satisfaz a definição 2.3.2 (i) e, $\forall e \in E(X)$,*

- $\sigma(p(e)) = \sigma([e]) = [\sigma(e)] = p(\sigma(e))$,

- $\tau(p(e))$ *é análogo,*
- $p(\overline{e}) = [\overline{e}] = \overline{[e]} = \overline{p(e)}$.

*Além disso, se* $v \in V(X)$ *e* $[e_2] \in E(Y)$ *tal que* $\sigma([e_2]) = p(v)$, *então* $\sigma([e_2]) = [v] \Rightarrow [\sigma(e_2)] = [v] \Rightarrow \exists g \in G$ *tal que* $g\sigma(e_2) = v \Rightarrow \sigma(ge_2) = v$. *Daí, tome* $e_1 = ge_2$. *Então,* $p$ *é localmente sobrejetora e* $p$ *é chamado* **projeção canônica**.

**Lema 2.3.1.** *Seja* $p : X \longrightarrow Y$ *localmente sobrejetora. Seja* $T$ *uma árvore e* $f : T \longrightarrow Y$ *uma aplicação de grafos. Seja* $a$ *um vértice* $T$ *e* $v$ *um vértice de* $X$ *tal que* $p(v) = f(a)$. *Então, existe uma aplicação* $\varphi : T \longrightarrow X$ *tal que* $p \circ \varphi = f$ *e* $\varphi(a) = v$.

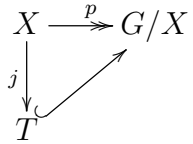



*Demonstração.* Seja $T_1$ a subárvore de $T$ tal que $T_1$ consiste apenas do vértice $a$. Defina $\varphi_1 : T_1 \longrightarrow X$ a aplicação tal que $\varphi_1(a) = v$. Então, o conjunto $\Omega$ de todas os pares $(T_i, \varphi_i)$ tal que $T_i$ é subárvore de $T$ e $\varphi_i$ é uma aplicação de $T_i$ em $X$ com $\varphi_i(a) = v$ e $p \circ \varphi_i = f|_{T_i}$ é não vazio. Defina uma ordem parcial em $\Omega$ da seguinte forma:

$$(T_1, \varphi_1) \leq (T_2, \varphi_2) \text{ se } T_1 \subseteq T_2 \text{ e } \varphi_2|_{T_1} = \varphi_1.$$

Para uma cadeia de pares $(T_i, \varphi_i)$, temos que $\bigcup T_i$ é subárvore de $T$ e $\tilde{\varphi}$ tal que $\tilde{\varphi}(x) = \varphi_i(x)$ se $x \in T_i$ é uma aplicação de grafos de $\bigcup T_i$ em $X$. Logo, pelo Lema de Zorn, existe um par maximal $(T_0, \varphi_0)$ em $\Omega$. Se $T_0 \neq T$, então existe um vértice em $T$ que não está em $T_0$. Seja $e \in E(T)$ tal que $\sigma(e) \in V(T_0)$ e $\tau(e) \notin V(T_0)$. Então, $f(e)$ é uma aresta em $Y$ tal que $p \circ \varphi(\sigma(e)) = \sigma(f(e))$, por hipótese. Como $p$ é localmente sobrejetora, existe $\tilde{e} \in E(X)$ com $\sigma(\tilde{e}) = \varphi \circ \sigma(e)$ e $p(\tilde{e}) = f(e)$. Daí, seja $\tilde{T_0}$ a árvore $T_0 \cup \{e, \overline{e}, \tau(e)\}$ e $\tilde{\varphi_0}$ a aplicação de $\tilde{T_0}$ em $X$ tal que $\tilde{\varphi_0}|_{\tilde{T_0}} = \varphi_0$ e $\tilde{\varphi_0}(e) = \tilde{e}$, $\tilde{\varphi_0}(\overline{e}) = \overline{\tilde{e}}$ e $\tilde{\varphi_0}(\tau(e)) = \tau(\tilde{e})$. Assim, $p \circ \tilde{\varphi_0} = f$. Portanto, $(\tilde{T_0}, \tilde{\varphi_0})$ é um par em $\Omega$ tal que $(T_0, \varphi_0) < (\tilde{T_0}, \tilde{\varphi_0})$, contradição, pois $(T_0, \varphi_0)$ é maximal. Logo, $T_0 = T$. Basta tomar $\varphi = \varphi_0$. □

Seja $G$ um grupo que age sobre o grafo $X$. Considere $p : X \twoheadrightarrow G/X$ a projeção canônica e $T$ uma árvore maximal em $G/X$. Pelo lema 2.3.1, tomando $f : T \longrightarrow G/X$ como inclusão, temos que existe uma aplicação $j : T \longrightarrow X$ tal que $p \circ j$ é inclusão de $T$ em $G/X$.




Portanto, $j$ é injetora e $p$ define um isomorfismo de $j(T)$ em $T$. Chamamos $j(T)$ de **árvore representante da ação de** $G$ **em** $X$. Vemos que $j(T)$ possui um único representante de cada classe de $G/X$. De fato, se $m, n$ são vértices ou arestas em $j(T)$ tais que $p(m) = [m] = [n] = p(n)$, então $m = j([m]) = j([n]) = n$.

**Lema 2.3.2** ([12], Lema 3, pág.184). *Seja $p : X \longrightarrow Y$ localmente injetora. Sejam $\varphi$ e $\psi$ aplicações de um grafo conexo $Z$ em $X$ tal que $p \circ \varphi = p \circ \psi$. Se existe algum vértcie $z$ tal que $\varphi(z) = \psi(z)$, então $\varphi = \psi$.*

**Lema 2.3.3** ([12], Lema 4, pág.184). *Seja $p : S \longrightarrow Y$ e $q : T \longrightarrow Y$ localmente bijetoras, e sejam $S$ e $T$ árvores. Sejam $v$ e $w$ vértices de $S$ e $T$ respectivamente tais que $p(v) = q(w)$. Então, existe um único isomorfismo $\varphi : S \longrightarrow T$ tal que $\varphi(v) = w$ e $q \circ \varphi = p$.*

**Lema 2.3.4** ([12], Lema 5, pág.184). *Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação de grafos.*

*i) Se $f$ é localmente sobrejetora e $Y$ é conexo, então $f$ é sobrejetora.*

*ii) Se $f$ é localemnte injetora, $X$ é conexo e $Y$ é uma árvore, então $f$ é injetora.*

*iii) Se $f$ é localmente bijetora e $X$ e $Y$ são ávores, então $f$ é bijetora.*

**Definição 2.3.4.** *Seja $G$ um grupo e $X$ um grafo. Dizemos que $G$ age* **livremente** *em $X$ se $\forall g \in G - \{1\}$, $\forall v \in V(X)$, temos que $gv \neq v$.*

Consequentemente, podemos observar que $\forall g \in G - \{1\}$, $\forall e \in E(X)$, $ge \neq e$. De fato, se existe $e \in E(X)$ tal que $ge = e$, então $g(\sigma(e)) = \sigma(ge) = \sigma(e)$, contradição.

**Exemplo 2.3.2.** *Seja $\Gamma(G, S)$ o grafo de Cayley de $G$ com respeito a $S$. Para $g, h \in G$, se $gh = h$, temos que $g = 1$. Para $h \in G$, $s \in S$, $\epsilon = \pm 1$, $g(h, s, \epsilon) = (h, s, \epsilon) \Rightarrow gh = h \Rightarrow g = 1$. Portanto, $G$ age livremente em $\Gamma(G, S)$.*

**Definição 2.3.5.** *Uma* **orientação** *de um grafo $X$ é um subconjunto de $E(X)$ cujos elementos são uma única aresta de cada par de arestas $\{e, \overline{e}\}$ em $E(X)$.*

Se $G$ age em $X$ sem inversão e $B$ é uma orientação de $G/X$, então $A = p^{-1}(B)$ é uma orientação de $X$ e $GA = A$. De fato, seja $\{e, \overline{e}\}$ um par de arestas de $X$. Suponha $[e] \in B$. Então, $e \in A$. Se $\overline{e} \in A$, então $p(\overline{e}) = [\overline{e}] \in B$, contradição. Ainda, $\forall e \in A$, $[ge] = [e] \in B \Rightarrow ge \in p^{-1}(B) = A$, $\forall g \in G$.

**Teorema 2.3.1.** *Seja $G$ um grupo que age livremente sem inversão sobre uma árvore $T$. Seja $T_0$ a árvore representante da ação de $G$ em $T$ e $A$ uma orientação de $T$ tal que $GA = A$. Seja $S = \{g \in G - \{1\} : \exists e \in A$ com $\sigma(e) \in T_0$ e $\tau(e) \in gT_0\}$. Então, $G$ é livre com base $S$.*

*Demonstração.* Sejam $g, h \in G$, $v, w \in V(T_0)$. Então, se $gv = hw$, temos que $[v] = [w]$. Mas $T_0$ só tem um representante de cada classe. Logo, $v = w$. Como $G$ age livremente, temos que $g^{-1}hv = v \Rightarrow g = h$. Se $e_1, e_2$ são arestas em $E(T_0)$, obtemos os mesmos resultados de forma análoga. Portanto, $gT_0 \cap hT_0 = \emptyset$, $\forall g, h \in G$ com $g \neq h$. Além disso, se $v \in V(T)$, então $v = gv_0$ para algum $v_0 \in T_0$, para algum $g \in G$.
Podemos então construir o grafo $X$ a partir da contração de árvores $gT_0$, $g \in G$. Então, se $e \in E(X)$, temos que $\sigma(e) = g$ tal que $\sigma(e) = gv_0$, $v_0 \in V(T_0)$, $e \in E(T)$.
Pelo lema 2.1.3, temos que $X$ é árvore.
Seja agora $\phi : \Gamma(G, S) \longrightarrow X$ tal que $\phi(g) = g$, $\forall g \in G$. Se $s \in S$, então existe $e \in A$ com $\sigma(e) \in T_0$ e $\tau(e) \in sT_0$, $s \neq 1$. Se $e'$ é outra aresta em $A$ com $\sigma(e') \in T_0$ e $\tau(e') \in sT_0$, $s \neq 1$, então $e, e'$ são duas arestas distintas em $X$ com o mesmo começo e fim, contradição, pois $X$ é

árvore. Logo, $e$ é única e $ge$ corresponde a outra aresta em $X$ tal que $\sigma(ge) = g$ e $\tau(ge) = gs$ em $X$. Portanto, podemos definir $\phi(g, s, 1) = ge$. Vemos que $\phi(g, s, -1) = \overline{ge}$,

$$\phi(\sigma(g, s, \epsilon)) = \sigma(g, s, \epsilon) = g = \sigma(ge) \text{ se } \epsilon = 1$$

e

$$\phi(\sigma(g, s, \epsilon)) = \phi(gs) = gs = \sigma(gse) = \tau(ge) = \sigma(\overline{ge}) \text{ se } \epsilon = -1.$$

Análogo para $\tau$.
Portanto, $\phi$ é uma aplicação de grafos bijetora nos vértices.
Temos que $\phi$ é injetora no conjuntos de arestas: seja $ge = \phi(g, s, \epsilon) = \phi(h, s', \epsilon') = he'$. Se $\epsilon = \epsilon'$, então

$$\sigma(ge) = \sigma(he'),\ \tau(ge) = \tau(he') \Rightarrow g = h \ \text{ e } \ s = s'.$$

Se $\epsilon \neq \epsilon'$, seja $\epsilon = 1$. Então, $ge \in GA$ e $he' \in G\overline{A}$ ($A \dot{\cup} \overline{A} = E(T)$), absurdo.
Assim, $(g, s, \epsilon) \neq (h, s,', \epsilon') \Rightarrow \phi(g, s, \epsilon) \neq \phi(h, s', \epsilon')$.
Ainda, $\phi$ é sobrejetora no conjunto das arestas:
Seja $e \in E(X)$. Temos que $\sigma(e) = g$ e $\tau(e) = h$, $g \neq h$. Suponha $e \in A$. Então, $g^{-1}e \in GA = A$. Daí, $\sigma(g^{-1}e) = 1$ e $\tau(g^{-1}e) = g^{-1}h$ em $X$. Portanto, $g^{-1}h \in S$. Assim, $\phi(g, g^{-1}h, 1) = gg^{-1}e = e$.
Logo, $\phi$ é um isomorfismo de grafos. Daí, como $\Gamma(G, S)$ é árvore, pelo lema 2.2.1 $G$ é livre com base $S$. □

Como $A$ pode ser sempre escolhida de tal forma que $GA = A$ quando $G$ age sem inversão, temos o seguinte resultado:

**$G$ é livre se e somente se $G$ age livremente sem inversão sobre uma árvore.**

Ainda, se $G$ age livremente sem inversão sobre uma árvore, então, sendo $H \leq G$, $H$ age livremente sem inversão sobre a árvore. Logo, $H$ é livre. Assim, temos o seguinte resultado:

**Todo subgrupo de um grupo livre é livre.**

## 2.4 Grafo de Grupos

**Definição 2.4.1.** *Um* **grafo generalizado de grupos** $\Delta$ *consiste de:*

*i) um grafo conexo $X$;*

*ii) um grupo $G_v$ para cada $v \in V(X)$ e um grupo $G_e$ para cada $e \in E(X)$ tal que $G_e = G_{\overline{e}}$;*

*iii) um homomorfimo de $G_e$ em $G_{\tau(e)}$ para cada $e \in E(X)$.*

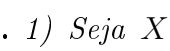
*Quando os homomorfismos de $G_e$ em $G_{\tau(e)}$ são monomorfismos, chamamos $\Delta$ apenas de* **grafo de grupos**.

Como $G_e = G_{\overline{e}}$ e $\tau(\overline{e}) = \sigma(e)$, temos também um homomorfismo de $G_e$ em $G_{\sigma(e)}$, para cada $e \in E(X)$. Usamos $\sigma_e$, $\tau_e$ para denotar tais homomorfismos, $\tau_e : G_e \longrightarrow G_{\tau(e)}$ e $\sigma_e : G_e \longrightarrow G_{\sigma(e)}$. Chamamos $G_v$, para cada $v \in V(X)$, **grupo de vértice** e $G_e$, para cada $e \in E(X)$, **grupo de aresta**.

**Definição 2.4.2.** *Seja $\Delta$ um grafo generalizado de grupos em $X$, $E$ o grupo livre com base $E(X)$ e $N$ o fecho normal de $\{e^{-1}\sigma_e(g)e\tau_e(g)^{-1} : e \in E(X),\ g \in G_e\} \cup \{e\overline{e} : e \in E(X)\}$ em $E * \left(\underset{v\in V(X)}{*} G_v\right)$. Definimos $F(\Delta) = E * \left(\underset{v\in V(X)}{*} G_v\right)/N$.*

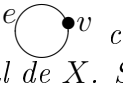
Em $F(\Delta)$ temos que $\overline{e} = e^{-1}$. Se $\Delta$ é um grafo de grupos, então $\sigma_e, \tau_e$ são monomorfismos, $\forall e \in E(X)$, e daí, $F(\Delta)$ é uma extensão $HNN$ de grupo base $\underset{v\in V(X)}{*} G_v$ e letras estáveis $e$, em que cada aresta é única para cada par $\{e, \overline{e}\} \in E(X)$, e com grupos associados $\sigma_e(G_e)$ e $\tau_e(G_e)$, para cada letra estável $e$.

**Definição 2.4.3.** *Seja $\Delta$ um grafo generalizado de grupos e $T$ uma árvore maximal de $X$. Denotamos $\pi(\Delta, X, T)$ ao grupo $F(\Delta)/M$, em que $M$ é o fecho normal em $F(\Delta)$ do conjunto $\{e : e \in E(T)\}$.*

**Exemplo 2.4.1.** *1) Seja $X$ o grafo*  *cujas arestas são $e, \overline{e}$ e os vértices são $\sigma(e) = v \neq w = \tau(e)$. Como $X$ é árvore, $T = X$. Seja $\Delta$ um grafo de grupos sobre $X$. Então,*

$$\pi(\Delta, X, X) = \frac{F(\Delta)}{\langle\{e\}\rangle^{F(\Delta)}} = \frac{(G_v * G_w)}{\langle\{\sigma_e(g)\tau_e(g)^{-1}\}\rangle^{G_v * G_w}},$$

*que é o produto livre amalgamado $G_v \underset{G_e}{*} G_w$.*

*2) Seja $X$ o grafo*  *cujas arestas são $e, \overline{e}$ e o vértice é $v = \sigma(e) = \tau(e)$. O vértice $v$ é árvore maximal de $X$. Seja $\Delta$ um grafo de grupos sobre $X$. Então,*

$$\pi(\Delta, X, v) = F(\Delta) \text{ é uma extensão } HNN \text{ de grupo base } G_v \text{ e letra estável } e \text{ com grupos associados } \sigma_e(G_e) \text{ e } \tau_e(G_e).$$

*3) Seja $\Delta$ um grafo generalizado de grupos sobre $X$ cujos grupos $G_v$ são triviais para cada $v \in V(X)$. Seja $T$ uma árvore maximal de $X$. Então,*

$$\pi(\Delta, X, T) = \frac{F(\Delta)}{\langle\{e : e \in E(T)\}\rangle^{F(\Delta)}} = \langle E(X) \mid \{e\overline{e} : e \in E(X)\} \cup \{e : e \in E(T)\}\rangle =$$

$$= \langle\{x \in \{e, \overline{e}\} \mid x \text{ é um único elemento de cada par } \{e, \overline{e}\} \subseteq E(X) - E(T)\}\rangle = \pi_1(X).$$

*4) Seja $\Delta$ um grafo generalizado de grupos sobre $X$ e $G_e = 1$, para todo $e \in E(X)$. Então, se $T$ é uma árvore maximal de $X$,*

$$\pi(\Delta, X, T) = \frac{E * (\underset{v\in V(X)}{*} G_v)}{\langle\{e\overline{e} : e \in E(X)\} \cup \{e : e \in E(T)\}\rangle^{E*(\underset{v\in V(X)}{*} G_v)}} =$$

$$= E_0 * (\underset{v\in V(X)}{*} G_v) = \pi_1(X) * \left(\underset{v\in V(X)}{*} G_v\right),$$

*em que $E$ é o grupo livre com base $E(X)$ e $E_0$ é o grupo livre com base*

$$\{x \in \{e, \overline{e}\} \mid x \text{ é um único elemento de cada par } \{e, \overline{e}\} \subseteq E(X) - E(T)\}.$$

*5) Se $\Delta$ é um grafo de grupos sobre a árvore $X$, então*

$$\pi(\Delta, X, T) = \frac{(\underset{v\in V(X)}{*} G_v)}{\langle\{\sigma_e(g)\tau_e(g)^{-1},\ g \in G_e,\ e \in E(X)\}\rangle^{(\underset{v\in V(X)}{*} G_v)}}.$$

**Definição 2.4.4.** *Seja $\Delta$ um grafo generalizado de grupos sobre $X$ e $v_0 \in V(X)$. Definimos $\pi(\Delta, X, v_0)$ o subconjunto de $F(\Delta)$ cujos elementos são todos que podem ser escritos na forma $g_0e_1g_1e_2, \ldots, e_ng_n$, em que $e_1 \ldots e_n$ é um caminho fechado de $X$ em $v_0$, $g_0 \in G_{v_0}$ e $g_i \in G_{\tau(e_i)}$, $i = 1, \ldots, n$. Se $n = 0$, o elemento é $g_0 \in G_{v_0}$.*

Um elemento de $F(\Delta)$ ou de $\pi(\Delta, X, T)$ é uma classe de equivalência. Porém, faremos abuso de notação e $[e]$ será denotado por $e$ assim como $[g]$ será denotado por $g$.

Se $g_0e_1g_1e_2 \ldots e_ng_n,\ h_0e'_1h_1e'_2 \ldots e'_mh_m \in \pi(\Delta, X, v_0)$, então
$g_0e_1g_1e_2 \ldots e_ng_nh_0e'_1h_1e'_2 \ldots e'_mh_m \in \pi(\Delta, X, v_0)$, pois

$$g_n \in G_{\tau(e_n)} = G_{v_0} \Rightarrow g_nh_0 \in G_{v_0} \Rightarrow g_i \in G_{\tau(e_i)},\ h_j \in G_{\tau(e_j)},\ g_nh_0 \in G_{\tau(e_n)},$$

$i = 1, \ldots, n-1,\ j = 1, \ldots, m$.
Além disso, $e_1 \ldots e_ne'_1 \ldots e'_m$ é um caminho fechado em $v_0$, pois $\tau(e_n) = v_0 = \sigma(e'_1)$.
Ainda, $g_n^{-1}e_n^{-1} \ldots e_2^{-1}g_1^{-1}e_1^{-1}g_0^{-1} \in \pi(\Delta, X, v_0)$, pois $g_n^{-1} \in G_{\tau(e_n)} = G_{v_0}$ e, sabendo que em $\pi(\Delta, X, v_0)$ temos $e^{-1} = \overline{e}$, então $g_{i-1}^{-1} \in G_{\tau(e_{i-1})} = G_{\sigma(e_i)} = G_{\tau(\overline{e})},\ i = 1, \ldots, n$ e $e_n^{-1} \ldots e_1^{-1}$ é o caminho $\overline{e}_n \ldots \overline{e}_1$ em $X$ fechado em $v_0$.
Vemos que $\pi(\Delta, X, v_0)$ é claramente um grupo e 1 é seu elemento neutro.
Portanto, $\pi(\Delta, X, v_0)$ é subgrupo de $F(\Delta)$.

**Proposição 2.4.1.** *Seja $\Delta$ um grafo generalizado de grupos sobre $X$, $v_0 \in V(X)$ e $T$ uma árvore maximal de $X$. O homomorfismo natural de $F(\Delta)$ em $\pi(\Delta, X, T)$ induz um isomorfismo de $\pi(\Delta, X, v_0)$ em $\pi(\Delta, X, T)$.*

*Demonstração.* Seja $E$ o grupo livre com base $E(X)$. Então, um caminho $e_1 \ldots e_n$ em $X$ pode ser visto como o produto $e_1 \ldots e_n$ em $E$. Daí, para cada $v \in V(X)$, seja $p_v$ o caminho único reduzido em $T$ de $v_0$ a $v$ e $p_{v_0} = 1$ em $E$. Seja $\phi : E * (\underset{v\in V(X)}{*} G_v) \longrightarrow E * (\underset{v\in V(X)}{*} G_v)$ um homomorfismo tal que

$$\phi(e) = p_{\sigma(e)}ep_{\tau(e)}^{-1} \quad \text{e} \quad \phi(g) = p_vgp_v^{-1},\ g \in G_v.$$

Verificamos que $\phi(e\overline{e}) = p_{\sigma(e)}e\overline{e}p_{\sigma(e)}^{-1}$ e

$$\phi(e^{-1}\sigma_e(g)e\tau_e(g)^{-1}) = \phi(e)^{-1}\phi(\sigma_e(g))\phi(e)\phi(\tau_e(g))^{-1} =$$

$$= p_{\tau(e)}e^{-1}p_{\sigma(e)}^{-1}p_{\sigma(e)}\sigma_e(g)p_{\sigma(e)}^{-1}p_{\sigma(e)}ep_{\tau(e)}^{-1}p_{\tau(e)}\tau_e(g)^{-1}p_{\tau(e)}^{-1} = p_{\tau(e)}e^{-1}\sigma_e(g)e\tau_e(g)^{-1}p_{\tau(e)}^{-1}.$$

Portanto, sendo $N = \langle\{e\overline{e} : e \in E(X)\} \cup \{e^{-1}\sigma_e(g)e\tau_e(g)^{-1},\ g \in G_e,\ e \in E(X)\}\rangle^{E*(\underset{v\in V(X)}{*} G_v)}$, temos que $\phi(N) \subseteq N$.

Assim, $\phi$ induz um homomorfismo $\varphi : F(\Delta) \longrightarrow F(\Delta)$.
i) $Im\varphi = \pi(\Delta, X, v_0)$:
$Im\varphi = \langle \{\varphi(e),\ e \in E(X)\} \cup \{\varphi(g),\ g \in G_v,\ v \in V(X)\} \rangle$. Daí, se $e \in E(X)$, então $\varphi(e) = p_{\sigma(e)} e p_{\tau(e)}^{-1}$, em que $p_{\sigma(e)} e p_{\tau(e)}^{-1}$ equivale a um caminho em $X$ que começa em $v_0$ e termina em $v_0$. Portanto, $\varphi(e) \in \pi(\Delta, X, v_0)$. Ainda, se $g \in G_v$, então $\varphi(g) = p_v g p_v^{-1}$, em que $p_v p_v^{-1}$ equivale a um caminho fechado em $v_0$ em $X$. Portanto, $\varphi(g) \in \pi(\Delta, X, v_0),\ \forall v \in V(X)$. Dessa forma, $Im\varphi \subseteq \pi(\Delta, X, v_0)$.
Seja agora $g_0 e_1 g_1 e_2 \dots e_n g_n \in \pi(\Delta, X, v_0)$. Temos que

$$\varphi(g_0 e_1 g_1 e_2 \dots e_n g_n) = \varphi(g_0)\varphi(e_1)\varphi(g_1)\varphi(e_2)\dots\varphi(e_n)\varphi(g_n) =$$
$$= g_0 e_1 p_{\tau(e_1)}^{-1} p_{\tau(e_1)} g_1 p_{\tau(e_1)}^{-1} p_{\tau(e_1)} e_2 p_{\tau(e_2)}^{-1} p_{\tau(e_2)} g_2 p_{\tau(e_2)}^{-1} \dots p_{\tau(e_n)} e_n p_{\tau(e_n)}^{-1} p_{\tau(e_n)} g_n p_{\tau(e_n)}^{-1} =$$
$$= g_0 e_1 g_1 e_2 \dots e_n g_n.$$

Portanto, $\pi(\Delta, X, v_0) \subseteq Im\varphi$.
Assim, vamos definir $\varphi$ como o epimorfismo de $F(\Delta)$ em $\pi(\Delta, X, v_0)$. Se $e \in E(T)$, então $\varphi(e) = p_{\sigma(e)} e p_{\tau(e)}^{-1}$, em que $p_{\tau(e)}^{-1}$ é o caminho em $X$ dado por $\overline{ep}_{\sigma(e)}$. Portanto, $\varphi(e) = 1$. Então, $\varphi$ induz um epimorfismo $\theta : \pi(\Delta, X, T) \longrightarrow \pi(\Delta, X, v_0)$. Como $\pi(\Delta, X, v_0) \leq F(\Delta)$, seja $\theta'$ o homomorfismo natural de $\pi(\Delta, X, v_0)$ em $\pi(\Delta, X, T)$. Daí,

$$\theta' \circ \theta(e) = \theta'(p_{\sigma(e)} e p_{\tau(e)}^{-1}) = \theta'(e) = e,\ e \in E(X),$$

e, para $g \in G_v$,

$$\theta' \circ \theta(g) = \theta'(p_v g p_v^{-1}) = \theta'(g) = g,$$

pois $p_{\sigma(e)},\ p_{\tau(e)},\ p_v$ são caminhos em $T$. Assim, $\theta' \circ \theta = id_{\pi(\Delta,X,T)} \Rightarrow \theta$ é injetora. Portanto, $\theta$ é um isomorfismo. □

Concluímos que, sendo $v_0$ arbitrário e $\pi(\Delta, X, T) \cong \pi(\Delta, X, v_0)$, $T$ uma árvore maximal qualquer de $X$, temos que, a menos de isomorfismo, $\pi(\Delta, X, T)$ não depende de $T$ e $\pi(\Delta, X, v_0)$ não depende de $v_0$. Podemos então denotar $\pi(\Delta, X, T)$ por $\pi(\Delta)$, o qual denominamos **grupo fundamental de** $\Delta$.

**Definição 2.4.5.** *Seja $\Delta$ um grafo generalizado de grupos sobre $X$ e $Y$ um subgrafo conexo de $X$. Definimos $\Delta|_Y$ o grafo generalizado de grupos sobre $Y$ cujos $G_v$ são os mesmo de $\Delta$, para cada $v \in V(Y) \subseteq V(X)$, e $G_e$ são os mesmos de $\Delta$, para cada $e \in E(Y) \subseteq E(X)$. Também, $\sigma_e,\ \tau_e$ denotam os mesmos homomorfismos de $\Delta$.*

Sejam $v_0 \in V(Y)$, $S$ uma árvore maximal de $Y$ e $T$ uma ávore maximal de $X$ tal que $T \supseteq S$. Então, $g_0 e_1 g_1 e_2 \dots e_n g_n \longmapsto g_0 e_1 g_1 e_2 \dots e_n g_n$ define o homomorfismo natural de $\pi(\Delta|_Y, Y, v_0)$ em $\pi(\Delta, X, v_0)$, $g_0 \in G_{v_0},\ e_1 \dots e_n$ caminho fechado em $Y$, e consequentemente em $X$, $g_i \in G_{\tau(e_i)},\ i = 1, \dots, n$.
Já $e \longmapsto e,\ g \longmapsto g,\ e \in E(Y),\ g \in G_v,\ v \in V(Y)$ induzem um homomorfismo $\phi$ de $E_0 * (\underset{v \in V(Y)}{*} G_v) \longrightarrow E * (\underset{v \in V(X)}{*} G_v)$, em que $E_0$ é o grupo livre com base $E(Y)$ e $E$ o grupo livre com base $E(X)$. Como $E(Y) \subseteq E(X)$ e $\sigma_e,\ \tau_e$ são os mesmos em $\Delta|_Y$ e $\Delta$, $\phi$ induz um homomorfismo $\phi_1$ de $F(\Delta|_Y)$ em $F(\Delta)$. Por sua vez, como $S \subseteq T$, $\phi_1$ induz o homomorfismo natural de $\pi(\Delta|_Y, Y, S)$ em $\pi(\Delta, X, T)$.

**Lema 2.4.1.** *O homomorfismo natural de $\pi(\Delta|_Y, Y, S)$ em $\pi(\Delta, X, T)$ é um monomorfismo. Em particular, $\forall v \in V(X)$, o homomorfismo natural de $G_v$ a $\pi(\Delta, X, T)$ é um monomorfismo.*

Antes de começarmos a demonstração, é necessário definir alguns conceitos e propriedades.

**Definição 2.4.6.** *Um* **conjunto dirigido** *é um conjunto $\Lambda$ junto com uma relação $\leq$ em $\Lambda$ que satisfaz, $\forall x, y, z \in \Lambda$:*

*i)* $x \leq y$ *e* $y \leq z$, *então* $x \leq z$;

*ii)* $x \leq x$, $\forall x \in \Lambda$;

*iii)* $x \leq y$ *e* $y \leq x$, *então* $x = y$;

*iv)* $\forall x, y \in \Lambda$, *existe* $w \in \Lambda$ *tal que* $x \leq w$ *e* $y \leq w$.

**Definição 2.4.7.** *Seja $\Lambda$ um conjunto dirigido e $G_\lambda$ um grupo para cada $\lambda \in \Lambda$. Para todos $\lambda, \mu \in \Lambda$ tais que $\lambda \leq \mu$, seja $\varphi_{\lambda,\mu} : G_\lambda \longrightarrow G_\mu$ um homomorfismo tal que $\varphi_{\lambda,\lambda} = id_{G_\lambda}$ e $\varphi_{\mu,\nu} \circ \varphi_{\lambda,\mu} = \varphi_{\lambda,\nu}$ se $\lambda \leq \mu \leq \nu$. A coleção dos grupos $G_\lambda$ e os homomorfismos $\varphi_{\lambda,\mu}$, $\lambda, \nu \in \Lambda$, formam um sistema chamado* **sistema direto de grupos sobre** $\Lambda$.

**Definição 2.4.8.** *Suponha que tenhamos um sistema direto de grupos sobre $\Lambda$. Seja $G$ um grupo e $\psi_\lambda : G_\lambda \longrightarrow G$ um homomorfismos para cada $G_\lambda$ no sistema direto de grupos. Chamamos de $(G, \psi_{\lambda\lambda\in\Lambda})$ de* **limite direto** *do sistema direto de grupos se:*

1. $\psi_\lambda = \psi_\mu \circ \varphi_{\lambda,\mu}$, $\forall\ \lambda \leq \mu$;
2. (propriedade universal) *para qualquer grupo $H$ e homomorfismos $f_\lambda : G_\lambda \longrightarrow H$ tais que $f_\lambda = f_\mu \circ \varphi_{\lambda,\mu}$, $\lambda \leq \mu$, existe um único homomorfismo $\phi : G \longrightarrow H$ tal que $f_\lambda = \phi \circ \psi_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$.*

*Denotamos $G$ por $\varinjlim G_\lambda$.*

**Exemplo 2.4.2.** *Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dirigido, $G_n$ grupos tais que $G_n \subseteq G_{n+1}$. Tome, então, $\varphi_{n,m}$, $n < m$, a inclusão de $G_n$ em $G_m$. É claro que $G_{n,n} = id_{G_n}$. Temos que $\varinjlim G_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ e $\psi_n$ é a inclusão de $G_n$ em $G$.*

**Proposição 2.4.2** ([12], Proposição 2, pág. 71)**.** *Todo sistema direto de grupos tem limite direto.*

**Proposição 2.4.3** ([12], Proposição 3, pág. 72)**.** *Seja $G = \varinjlim G_\lambda$. Então, $G = \bigcup \psi_\lambda(G_\lambda)$. Além disso, para $g_\lambda \in G_\lambda$, temos que $\psi_\lambda(g_\lambda) = 1 \Leftrightarrow \varphi_{\lambda,\mu}(g_\lambda) = 1$, para algum $\mu \geq \lambda$.*

**Corolário 2.4.1** ([12], Corolário 1, pág. 72)**.** *Se cada $\varphi_{\lambda,\mu}$ é um monomorfismo, então cada $\psi_{\lambda,\mu}$ é um monomorfismo.*

**Corolário 2.4.2** ([12], Corolário 2, pág. 72)**.** *Seja $H$ um grupo e $\theta_\lambda : G_\lambda \longrightarrow H$ homomorfismos. Suponha que $\theta_\lambda = \theta_\mu \circ \varphi_{\lambda,\mu}$ se $\lambda \leq \mu$, que $H = \bigcup \theta_\lambda(G_\lambda)$ e que $\theta_\lambda(g_\lambda) = 1$ se e somente se $\varphi_{\lambda,\mu}(g_\lambda) = 1$ para algum $\mu \geq \lambda$. Então, $H = \varinjlim G_\lambda$.*

Agora, podemos retornar à demonstração do lema 2.4.1:

*Demonstração.* Primeiro, vamos mostrar que $\pi(\Delta|_S, S, S)$ e $G_v$ mergulham em $\pi(\Delta|_T, T, T)$, para cada $v \in V(X)$.

- $T$ finito (ou seja, $|T|$ é finito):
  Seja $|T| = |V(T)| + |E(T)|$. Se $X$ é um vértice, caso trivial. Se $X$ é o grafo 1 do exemplo 2.4.1, então $T = X$, $Y$ é um vértice, $S = Y$ e $\pi(\Delta, X, X) = G_v \underset{G_e}{*} G_w$. Pela forma normal do produto amalgamado, $G_v = \pi(\Delta|_Y, Y, Y)$ e $G_w$ mergulham em $\pi(\Delta, X, X)$.
  Se $X$ é o grafo 2 do exemplo 2.4.1, então $T$ é o vértice $v$, $Y = T = S$ e $\pi(\Delta, X, T)$ é a extensão $HNN$ de grupo base $G_v$ e letra estável $e$ com grupos associados $\sigma_e(G_e)$ e $\tau_e(G_e)$ e, pela forma normal da extensão $HNN$, $\pi(\Delta|_Y, Y, Y) = G_v$ mergulha em $\pi(\Delta, X, T)$.
  Seja $|E(T)| > 1$. Se $S = T$, não há nada a provar. Suponha então $S \subset T$. Seja $\tilde{e} \in E(T)$ tal que $T - \left\{\tilde{e}, \overline{\tilde{e}}\right\} = S_1 \dot{\cup} S_2$, em que $S_1,\ S_2$ são subárvores de $T$ com $S \subseteq S_1$ ou $S \subseteq S_2$, e $\sigma(\tilde{e}) \in V(S_1)$ e $\tau(\tilde{e}) \in V(S_2)$. Por indução em $|T|$, temos que $G_v$ mergulha em $\pi(\Delta|_{S_1}, S_1, S_1)$, para cada $v \in V(S_1)$ e $G_v$ mergulha em $\pi(\Delta|_{S_2} S_2, S_2)$, para cada $v \in V(S_2)$. Sabendo que $\pi(\Delta|_T, T, T) = \pi(\Delta|_{S_1}, S_1, S_1) \underset{G_{\tilde{e}}}{*} \pi(\Delta|_{S_2}, S_2, S_2)$ e que $G_{\tilde{e}} \rightarrowtail G_{\sigma_e(\tilde{e})}$ e $G_{\tilde{e}} \rightarrowtail G_{\tau_e(\tilde{e})}$ são monomorfismos, então $\pi(\Delta|_{S_1}, S_1, S_1)$ e $\pi(\Delta|_{S_2}, S_2, S_2)$ mergulham em $\pi(\Delta|_T, T, T)$ assim como os grupos de vértices em $T$. Supondo $S \subseteq S_1$, por indução em $T$ temos que $\pi(\Delta|_S, S, S)$ mergulha em $\pi(\Delta|_{S_1}, S_1, S_1)$, então $\pi(\Delta|_S, S, S)$ e $G_v$ mergulham em $\pi(\Delta|_T, T, T),\ \forall v \in V(X)$.

- $T$ é infinito e $S$ é finito:
  Considere os grupos $\pi(\Delta|_{T_i}, T_i, T_i)$ em que $T_i$ são subárvores finitas de $T$ tais que $T_i \supseteq S$ para cada $i$. Considere a apresentação $\langle X_v \mid R_v \rangle$ de cada grupo $G_v$ do grafo de grupos $\Delta$. Então, cada grupo $\pi(\Delta|_{T_i}, T_i, T_i)$ tem apresentação $\langle X_i \mid R_i \rangle$, em que

$$X_i = \dot{\bigcup_{v \in V(T_i)}} X_v$$

  e

$$R_i = \dot{\bigcup_{v \in V(T_i)}} R_v \,\dot{\cup}\, \left\{\sigma_e(g)\tau_e(g)^{-1},\ g \in G_e,\ e \in E(T_i)\right\}.$$

  É imediato ver que

$$\pi(\Delta|_T, T, T) = \left\langle \bigcup X_i \mid \bigcup R_i \right\rangle.$$

  Considere $i \leq j$ se $T_i \subseteq T_j$. É fácil verificar que as propriedades (i) a (iii) da definição 2.4.6 de conjunto dirigido são satisfeitas. Se $T_i$ e $T_j$ não se interceptam, tome $v_i \in V(T_i),\ v_j \in V(T_j)$ e o caminho reduzido único $f$ em $T$ de $v_i$ a $v_j$. Então, {vértices de f} $\cup$ {arestas de f} $\cup\ T_i \cup T_j$ é uma subárvore finita de $T$ que contém $T_i$ e $T_j$. Logo, (iv) também é satisfeita. Então, se $i \leq j$, tome $\varphi_{i,j}$ o homomorfismo natural de $\langle X_i \mid R_i \rangle$ em $\langle X_j \mid R_j \rangle$. Vemos que

$$\varphi_{i,i} = id_{\langle X_i \mid R_i \rangle} \quad \text{e} \quad \varphi_{i,k} = \varphi_{j,k} \circ \varphi_{i,j} \quad \text{se} \quad i \leq j \leq k.$$

Portanto, temos um sitema direto de grupos $\langle X_i \mid R_i\rangle$ e homomorfismos $\varphi_{i,j}$. Além disso, tomando $\theta_i$ o homomorfismo natural de $\langle X_i \mid R_i\rangle$ em $\pi(\Delta|_T, T, T)$, para cada $i$, vemos que

$$\pi(\Delta|_T, T, T) = \bigcup \theta_i(\langle X_i \mid R_i\rangle),\ \theta_i = \theta_j \circ \varphi_{i,j},\ \forall i \leq j$$

e

$$\theta_i(g_i) = 1 \Leftrightarrow g_i \text{ é consequência de } \bigcup R_i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g_i \text{ é consequência de } R_j \text{ para todo } j \geq i \Leftrightarrow \varphi_{i,j}(g_i) = 1\ \forall j \geq i.$$

Assim, pelo corolário 2.4.2,

$$\pi(\Delta|_T, T, T) = \varinjlim \pi(\Delta|_{T_i}, T_i, T_i).$$

Do caso anterior, vimos que, se $i \leq j$, então $\langle X_i \mid R_i\rangle$ mergulha em $\langle X_j \mid R_j\rangle$. Assim, $\varphi_{i,j}$ é monomorfismo para cada $i \leq j$. Pelo corolário 2.4.1, $\theta_i$ é monomorfismo para cada $i$. Como $\pi(\Delta|_S, S, S)$ mergulha em $\pi(\Delta|_{T_i}, T_i, T_i)$ para cada $i$, pois $T_i$ é finito, temos que $\pi(\Delta|_S, S, S)$ mergulha em $\pi(\Delta|_T, T, T)$. Como para cada $v \in V(T)$ temos que $G_v$ mergulha em $\pi(\Delta|_{T_i}, T_i, T_i)$ para algum $T_i$, então $G_v$ mergulha em $\pi(\Delta|_T, T, T)$, $\forall v \in V(X)$.

- $T$ e $S$ são infinitos:
  Seja $v \in V(S)$ e $\{S_i\}$ uma coleção das subárvores finitas de $S$ tais que $v \in V(S_i)$ para cada $i$. Considerando as apresentações de $\pi(\Delta|_{S_i}, S_i, S_i)$, para cada $i$, e os homomorfismos naturais de $\pi(\Delta|_{S_i}, S_i, S_i)$ em $\pi(\Delta|_{S_j}, S_j, S_j)$ para cada $i \leq j$, temos que, analogamente ao caso anterior, $\pi(\Delta_S, S, S) = \varinjlim \pi(\Delta|_{S_i}, S_i, S_i)$. Já provamos que $\pi(\Delta|_{S_i}, S_i, S_i)$ mergulha em $\pi(\Delta|_T, T, T)$ para cada $i$ através de $f_i$. Portanto, pela propriedade universal de limite direto, existe um único homomorfismo $\phi$ de $\pi(\Delta_S, S, S)$ em $\pi(\Delta|_T, T, T)$ tal que é um monomorfismo, pois $f_i = \phi \circ \psi_i$, em que $\psi$ é o homomorfismo natural de $\pi(\Delta|_{S_i}, S_i, S_i)$ em $\pi(\Delta_S, S, S)$. Ainda, $G_v$ mergulha em $\pi(\Delta|_{S_i}, S_i, S_i)$ para cada $i$. Então, $G_v$ mergulha em $\pi(\Delta|_T, T, T)$. Como $v$ é arbitrário, vale para todo $v \in V(X)$.

Agora, $\pi(\Delta, X, T) =$

$$= E * (\underset{v\in V(X)}{*} G_v) / \left\langle \left\{ e^{-1}\sigma_e(g) e \tau_e(g)^{-1},\ e \in E(X) - E(T),\ g \in G_e \right\} \right\rangle^{E*(\underset{v\in V(X)}{*} G_v)},$$

em que $E$ é o grupo livre com base $E_1$, conjunto dos elementos $e$, cada um único de cada par $\{e, \overline{e}\}$ de $E(X) - E(T)$. Logo, $\pi(\Delta, X, T)$ é a extensão $HNN$ de grupo base $\pi(\Delta|_T, T, T)$ com letras estáveis $e \in E_1$ e grupos associados $\sigma_e(G_e)$, $\tau_e(G_e)$, $e \in E_1$. Analogamente, $\pi(\Delta|_Y, Y, S)$ é extensão $HNN$ de grupo base $\pi(\Delta_S, S, S)$ e letras estáveis $e$, cada uma única de cada par $\{e, \overline{e}\}$ de $E(Y) - E(S)$, com grupos associados $\sigma_e(G_e)$ e $\tau_e(G_e)$, $e$ letra estável. Seja $E_2$ o conjunto das arestas que representam as letras estáveis de $\pi(\Delta|_Y, Y, S)$. Como já vimos que o grupo fundamental de grafo de grupos independe da árvore maximal, tomemos $T$ uma árvore maximal que contém $S$. Assim, $S = Y \cap T$. Então, $E_2 \subseteq E_1$. Como $\pi(\Delta|_S, S, S)$ mergulha em $\pi(\Delta|_T, T, T)$, temos que $\pi(\Delta|_Y, Y, S)$ mergulha em $H$, a extensão $HNN$ de grupo base $\pi(\Delta|_T, T, T)$ e letras estáveis $e \in E_2$ com grupos associados $\sigma_e(G_e)$ e $\tau_e(G_e)$,

$e \in E_2$. Mas $\pi(\Delta, X, T)$ é a extensão $HNN$ de grupo base $H$ e letras estáveis $e \in E_1 - E_2$, com grupos associados $\sigma_e(G_e)$ e $\tau_e(G_e)$, $e \in E_1 - E_2$. Portanto, pelo forma normal da extensão $HNN$, temos que $H$ mergulha em $\pi(\Delta, X, T)$. Logo, $\pi(\Delta|_Y, Y, S)$ mergulha em $\pi(\Delta, X, T)$. Como $G_v$ mergulha em $\pi(\Delta|_T, T, T)$, então $G_v$ mergulha em $\pi(\Delta, X, T)$ para cada $v \in V(X)$. □

**Lema 2.4.2.** *Seja $\Delta$ um grafo de grupos sobre $X$ e $H$ um grupo. Suponha que existam homomorfismos $\theta_v : G_v \longrightarrow H$ para cada $v \in V(X)$ e elementos $\alpha_e \in H$ para cada $e \in E(X)$ tais que $\alpha_{\overline{e}} = \alpha_e^{-1}$ e, para todo $g \in G_e$, $\alpha_e^{-1}\theta_{\sigma(e)}(\sigma_e(g))\alpha_e = \theta_{\tau(e)}(\tau_e(g))$. Então, existe um homomorfismo de $\pi(\Delta)$ em $H$ cuja restrição a $G_v$ é um conjugado de $\theta_v$.*

*Demonstração.* Podemos induzir um homomorfismo de $F(\Delta)$ em $H$ que leva $g \in G_v$ em $\theta_v(g)$ e $e$ em $\alpha_e$, pois $\alpha_e\alpha_{\overline{e}} = 1$ e $\alpha_e^{-1}\theta_{\sigma(e)}(\sigma_e(g))\alpha_e = \theta_{\tau(e)}(\tau_e(g))$. Se $\alpha_e = 1$ quando $e \in T$, existirá um homomorfismo de $\pi(\Delta, X, T)$ em $H$ que é $\theta_v$ quando restrito a $G_v$. Portanto, queremos encontrar elementos $\beta_e$ de $H$ tais que $\beta_e = 1$ quando $e \in T$.
Fixemos um vértice $v_0$ em $X$. Para cada vértice $v$ de $X$, seja $\alpha_v = \alpha_{e_1} \dots \alpha_{e_n}$, em que $e_1 \dots e_n$ é o caminho reduzido em $T$ de $v_0$ a $v$. Tome $\beta_e = \alpha_v \alpha_e \alpha_w^{-1}$, em que $v = \sigma(e)$ e $w = \tau(e)$. Então, se $e \in T$, $\alpha_w = \alpha_v\alpha_e \Rightarrow \beta_e = 1$. Ainda, $\beta_{\overline{e}} = \alpha_w\alpha_{\overline{e}}\alpha_v^{-1} = \alpha_w\alpha_e^{-1}\alpha_v^{-1} = \beta_e^{-1}$.
Defina, agora, o homomorfismo $\psi : G_v \longrightarrow H$ tal que $\psi(g) = \alpha_v\theta_v(g)\alpha_v^{-1}$ para cada $g \in G_v$, $v \in V(X)$. Então,

$$\beta_e^{-1}\psi_{\sigma(e)}(\sigma_e(g))\beta_e = \alpha_{\tau(e)}\alpha_e^{-1}\alpha_{\sigma(e)}^{-1}\alpha_{\sigma(e)}\theta_{\sigma(e)}(\sigma_e(g))\alpha_{\sigma(e)}^{-1}\alpha_{\sigma(e)}\alpha_e\alpha_{\tau(e)}^{-1} =$$

$$= \alpha_{\tau(e)}\alpha_e^{-1}\theta_{\sigma(e)}(\sigma_e(g))\alpha_e\alpha_{\tau(e)}^{-1} = \alpha_{\tau(e)}\theta_{\tau(e)}(\tau(g))\alpha_{\tau(e)}^{-1} = \psi_{\tau(e)}(\tau_e(g)).$$

Portanto, existe um homomorfismo de $\pi(\Delta)$ em $H$ cuja restrição a $G_v$ é um conjugado de $\theta_v$. □

### 2.4.1 Primeira Construção

Seja $G$ um grupo que age sem inversões num grafo conexo $X$. Defina $Y$ o grafo quociente $X/G$ e tome $p$ a projeção canônica de $X$ em $Y$. Considere $T$ uma árvore maximal de $Y$ e $A$ uma orientação de $Y$.
Seja $j : T \longrightarrow X$ a aplicação tal que $p \circ j$ é a identidade em $T$. Recordemos que $j(T)$ é a árvore representante da ação de $G$ em $X$. Denotaremos $j$ a extensão a $Y$ que vamos construir a partir de $j : T \longrightarrow X$. Como $T$ é árvore maximal, $j$ já está definida em $V(Y)$.
Seja então $e \in A - T$. Sabemos que $\sigma(e) = p \circ j(\sigma(e))$. Como $p$ é localmente sobrejetora, existe uma aresta $x \in X$ tal que $\sigma(x) = j(\sigma(e))$ e $p(x) = e$. Assim, definimos $j(e) = x$ e $j(\overline{e}) = \overline{x}$. Se $j(e) = j(e')$, $e, e' \in E(Y)$, então $p \circ j(e) = p \circ j(e') \Rightarrow e = e'$. Portanto, $j$ continua injetora.
Se $e \in A$, temos

$$p \circ \tau(j(e)) = \tau(p(j(e))) = \tau(e) = p \circ j(\tau(e)).$$

Logo, $\tau(j(e))$ e $j(\tau(e))$ pertencem à mesma classe de equivalência em $Y$. Assim, devemos ter $\gamma_e \in G$ tal que $\tau(j(e)) = \gamma_e j(\tau(e))$. Defina $\gamma_{\overline{e}} = \gamma_e^{-1}$. Quando $e \in A \cap T$, temos $j(\tau(e)) = \tau(j(e))$. Nesse caso, tome $\gamma_e = 1$.

O **estabilizador de** $x$ **em** $X$ é o subgrupo $\{g \in G : gx = x\}$ e é denotado por $G_x$.

Agora, queremos construir um grafo de grupos $\Delta$ em $Y$. Para cada $y \in Y$, defina

$$G_y := G_{j(y)}.$$

Se $e \in A$, vemos que $G_{j(\overline{e})} = \{g \in G : gj(\overline{e}) = j(\overline{e})\}$. Mas $\overline{gj(e)} = \overline{j(e)} \Leftrightarrow gj(e) = j(e)$. Portanto, $G_e = G_{\overline{e}}$. Desse modo, precisamos apenas definir os monomorfismos para $e \in A$. Se $gj(e) = j(e)$, então $g\sigma(j(e)) = \sigma(gj(e)) = \sigma(j(e))$. Pela construção da extensão $j$, vemos que $j(\sigma(e)) = \sigma(j(e))$, $\forall e \in A$. Assim, $G_e \subseteq G_{\sigma(e)}$ e o monomorfismo é a inclusão. Da mesma forma, $G_{j(e)} \subseteq G_{\tau(j(e))}$. Mas

$$g\tau(j(e)) = \tau(j(e)) \Leftrightarrow g\gamma_e j(\tau(e)) = \gamma_e j(\tau(e)) \Leftrightarrow \gamma_e^{-1} g\gamma_e j(\tau(e)) = j(\tau(e)).$$

Então, $G_{j(\tau(e))} = \gamma_e^{-1} G_{\tau(j(e))}\gamma_e$. Daí, definimos o monomorfismo de $G_e$ em $G_{\tau(e)}$ tal que $g \longmapsto \gamma_e^{-1} g\gamma_e$. Daí, é só definir $\sigma_{\overline{e}}$ por $\tau_e$.

### 2.4.2 Segunda Construção

Considere o grafo de grupos $\Delta$ sobre o grafo $Y$, $T$ uma árvore maximal de $Y$ e $A$ uma orientação de $Y$. Seja $G$ o grupo $\pi(\Delta, Y, T)$. Agora, sejam $g, h \in G$ e $v, w \in V(Y)$. Dizemos que os pares $(g, v), (h, w)$ são equivalentes, ou seja, $(g, v) \sim (h, w)$ se $v = w$ e $g \in hG_v$. De forma parecida, se $g, h \in G$ e $y, z \in A$, dizemos que $(g, y) \sim (h, z)$ se $y = z$ e $g \in h\sigma_z(G_z)$ e $(g, \overline{y}) \sim (h, \overline{z})$ se $y = z$ e $g \in h\tau_z(G_z)$. Assim, podemos definir o grafo $\widetilde{Y}$ cujos vértices são as classes de equivalência $[g, v]$ e as arestas as classes de equivalência $[g, y]$ e $[g, \overline{y}]$. (A menos que seja necessário o contrário, vamos denotar $\sigma_e = \sigma$ e $\tau_e = \tau$).
Definamos $p : \widetilde{Y} \longrightarrow Y$ e $j : Y \longrightarrow \widetilde{Y}$ por $p([g, y]) = y$ e $j(y) = [1, y]$, $\forall y \in V(Y) \cup E(Y)$. Assim, $G$ age em $\widetilde{Y}$ pela ação $(g, [h, y]) \longmapsto [gh, y]$, $\forall y \in V(Y) \cup E(Y)$.
Se $y \in A$ e $k \in h\sigma(G_y)$, então $gk \in gh\sigma(G_y) \Rightarrow [gk, y] = [gh, y]$. Analogamente, mostramos que, se $y \in V(Y)$, então $[gk, y] = [gh, y]$. Portanto, a ação está bem definida. Além disso, $g[h, \overline{y}] \neq [h, y]$. Assim, podemos definir:

1) $\overline{[g, y]} = [g, \overline{y}]$;

2) $\sigma([g, y]) = [g, \sigma(y)]$, $\forall y \in A$.

3) $\tau([g, y]) = [gy, \tau(y)]$, $\forall y \in A$.

É necessário observar que $y$ é seu elemento correspondente em $G$, ou seja, se $y \in T$, $y = 1 \in G$. Se $[h, y]$ é outro representante de $[g, y]$, então

$$h \in g\sigma(G_y) \Rightarrow hy \in g\sigma(G_y)y = gy\tau(G_y) \subseteq gyG_{\tau(y)} \Rightarrow [hy, \tau(y)] = [gy, \tau(y)].$$

Daí, se $y \in A$,

$$\sigma([g, \overline{y}]) = \sigma(\overline{[g, y]}) = \tau([g, y]) = [gy, \tau(y)].$$

Portanto, $p$ é uma aplicação de grafos. Pelo fato de $y = 1$ se $y \in T$, então $\sigma(j(y)) = \sigma([1, y]) = [1, \sigma(y)]$, $\forall y \in E(T)$. Análogo para $\tau$.

Logo, $j : T \longrightarrow \widetilde{Y}$ também é aplicação de grafos. Porém, como $\sigma(j(y)) = [y, \sigma(y)] \neq j(\sigma(y))$ se $y \notin A \cup E(T)$, então $j : Y \longrightarrow \widetilde{Y}$ não é uma aplicação de grafos.

Chamamos $\widetilde{Y}$ de **recobrimento universal do grafo de grupos** $\Delta$.

**Observação 2.4.1.** *Se a partir da ação de $G$ em $\widetilde{Y}$ fizermos a primeira construção, vamos obter um grafo de grupos $\widetilde{\Delta}$ sobre $G/\widetilde{Y}$. Queremos mostrar que $\widetilde{\Delta}$ é isomorfo a $\Delta$.*

*i)* $G/\widetilde{Y} \cong Y$:
$V(G/\widetilde{Y}) = \{G[g, v],\ v \in V(Y)\}$ *e* $E(G/\widetilde{Y}) = \{G[g, e],\ e \in E(Y)\}$. *Fazendo a identificação* $G[g, y] \leftrightarrow y \in Y$, *temos que* $Y \cong G/\widetilde{Y}$. *Então, vamos considerar* $\widetilde{\Delta}$ *sobre* $Y$.

*ii) Os grupos de* $\widetilde{\Delta}$:
$p : \widetilde{Y} \longrightarrow Y$ *pode ser visto como a projeção canônica de* $\widetilde{Y}$ *em* $G/\widetilde{Y}$ *e temos* $j$ *a aplicação de* $T$ *em* $\widetilde{Y}$ *tal que* $j(T)$ *é árvore representante da ação de* $G$ *em* $\widetilde{Y}$ *(pois* $p \circ j = id_T$*).*
*Sejam* $\widetilde{G_y}$ *os grupos de* $\widetilde{\Delta}$. *Vemos que*

$$\widetilde{G_v} = G_{j(v)} = G_{[1,v]} = G_v,\ v \in V(Y),$$

*e*

$$\widetilde{G_e} = G_{j(e)} = G_{[1,e]} = \sigma_e(G_e),\ e \in A.$$

*Como* $\sigma_e$ *é monomorfismo, então* $\widetilde{G_e} \cong G_e$.

*iii) Os monomorfismos de* $\widetilde{\Delta}$:
*Os diagramas abaixo comutam:*

$$\begin{array}{ccc} G_e & \xrightarrow{\sigma_e} & G_{\sigma(e)} \\ {\scriptstyle \sigma_e}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id} \\ \widetilde{G_e} & \hookrightarrow & \widetilde{G_{\tilde{\sigma}_e}} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G_e & \xrightarrow{\tau_e} & G_{\sigma(e)} \\ {\scriptstyle \sigma_e}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id} \\ \widetilde{G_e} & \xrightarrow[\tilde{\tau}_e]{} & \widetilde{G_{\tilde{\tau}_e}} \end{array}$$

*O primeiro é óbvio. No segundo diagrama, vemos que, se* $g \in G_e$, *então*

$$\tilde{\tau}_e(\sigma_e(g)) = \gamma_e^{-1}\sigma_e(g)\gamma_e = \tau_e(g),$$

*pois* $\gamma_e$ *corresponde a* $e$ *em* $G$, *e em* $G = \pi(\Delta, Y, T)$ *temos que* $e^{-1}\sigma_e(g)e = \tau_e(g)$.

*Segue que* $\Delta \cong \widetilde{\Delta}$.

## 2.5 Os Teoremas Estruturais

**Teorema 2.5.1** (Primeiro Teorema Estrutural)**.** *O recobrimento universal de um grafo de grupos é uma árvore.*

*Demonstração.* i) $\widetilde{Y}$ é conexo:
Seja $Z$ o subgrafo de $\widetilde{Y}$ tal que

$$E(Z) = \{[1, e], [1, \overline{e}],\ \forall e \in A\}$$

e

$$V(Z) = \{[1, \sigma(e)], [\gamma_e, \tau(e)],\ \forall e \in A\}$$

(os vértices de $Z$ de fato possuem essa forma, pois se $\overline{e} \notin A$, então $\sigma([1, \overline{e}]) = \tau([1, e]) = [\gamma_e, \tau(e)]$, e $\tau([1, \overline{e}]) = \sigma([1, e]) = [1, \sigma(e)]$).
Com isso, $\forall v \in V(Y)$, temos que $v = \sigma(e)$ ou $v = \tau(e)$ para algum $e \in A \cap T$, e $\gamma_e = 1$. Logo, $j(T) \subseteq Z$. E, como $\sigma(e) \in V(T)$, temos que $[1, \sigma(e)] \in j(T),\ \forall e \in A$. Sendo $j(T)$ conexo, temos que $Z$ é conexo.
Da definição de $Z$, temos que $GZ = \widetilde{Y}$.
Se $g \in G_v,\ \forall v \in V(Y)$, então $g[1, v] = [1, v]$. Portanto, $Z \cap gZ \neq \emptyset,\ \forall g \in G_v,\ \forall v \in V(Y)$.
Ainda, se $e \in A$, então

$$\tau([1, e]) = [\gamma_e, \tau(e)] = \gamma_e[1, \tau(e)] \Rightarrow Z \cap \gamma_e Z \neq \emptyset \ \text{ e } \ Z \cap \gamma_e^{-1} Z \neq \emptyset.$$

Por indução no número $n$ de elementos finitos $s_1, \ldots, s_n$ de $\bigcup_{v \in V(Y)} G_v \cup \bigcup_{e \in A} \{\gamma_e, \gamma_e^{-1}\}$, temos que

$$Z \cup s_1 Z \cup s_1 s_2 Z \cup \ldots \cup s_1, s_2, \ldots s_{n-1} Z$$

é conexo e, como $s_n Z \cap Z \neq \emptyset$, então

$$s_1, \ldots s_{n-1} Z \cap s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, s_n Z \neq \emptyset.$$

Logo,

$$Z \cup s_1 Z \cup s_1 s_2 Z \cup \ldots \cup s_1, s_2, \ldots s_n Z$$

é conexo. Como $Z$ pertence a qualquer um desses subgrafos, $\forall n > 0$, então a união de todos os subgrafos escritos dessa maneira, $\forall n > 0$, é conexa. Como $G$ é gerado por $G_v$ e $\gamma_e$, $v \in V(Y),\ e \in E(Y)$, essa união é $GZ$. Logo, $GZ = \widetilde{Y}$ é conexo.
ii) $\widetilde{Y}$ é árvore:
Suponha $G_v = 1,\ \forall v \in V(Y)$. Dizemos que $\widetilde{Y}$ é um recobrimento universal de $Y$. Nesse caso, $G = \pi(\Delta, Y, T)$ é o grupo livre com base $\{\gamma_e : e \in A - E(T)\}$.
Seja $[g_1, e_1], \ldots, [g_n, e_n]$ um caminho fechado de $[1, v]$ em $\widetilde{Y}$, para algum $v \in V(Y)$. Temos

- $\tau([g_i, e_i]) = g_i \gamma_{e_i}[1, \tau(e_i)]$ se $e_i \in A$ e
- $\tau([g_i, e_i]) = g_i[1, \tau(e_i)]$ se $e_i \notin A$.

Seja, então, $h_i = g_i$ se $e_i \in A$ e $h_i = g_i \gamma_{e_i}^{-1}$ se $e_i \notin A$. Daí, $\tau([g_i, e_i]) = h_i \gamma_{e_i}[1, \tau(e_i)]$.
Da mesma forma,

- $\sigma([g_i, e_i]) = g_i[1, \sigma(e_i)]$ se $e_i \in A$ e
- $\sigma([g_i, e_i] = g_i \gamma_{\overline{e_i}}[1, \sigma(e_i)] = g_i \gamma_{e_i}^{-1}[1, \tau(e_i)]$ se $e_i \notin A$, o que implica $\sigma([g_i, e_i]) = h_i[1, \sigma(e_i)]$.

Do fato de que $\tau([g_i, e_i]) = \sigma([g_{i+1}, e_{i+1}]),\ i = 1, \ldots, n-1$, temos que

$$h_i\gamma_{e_i}[1, \tau(e_i)] = h_{i+1}[1, \sigma(e_{i+1})] \Rightarrow \tau(e_i) = \sigma(e_{i+1}) \ \text{ e } \ h_i\gamma_{e_i} = h_{i+1},\ i = 1, \ldots, n-1.$$

Também,

$$\tau[g_n, e_n] = \sigma[g_1, e_1] \Rightarrow \tau(e_n) = \sigma(e_1) = v \ \text{ e } \ h_n\gamma_{e_n} = h_1.$$

Daí,

$$\gamma_{e_1}\gamma_{e_2}\ldots\gamma_{e_n} = h_1^{-1}h_2h_2^{-1}h_3\ldots h_{n-1}^{-1}h_nh_n^{-1}h_1 = 1 \ \text{ em } \ G.$$

Mas $G$ é grupo livre. Então:

1) $e_i \in T,\ \forall i = 1, \ldots, n$, o que implica que $\exists i$ tal que $\overline{e_i} = e_{i+1}$ ou

2) $\exists i$ tal que $e_{i+1} = \overline{e_i}$ ou

3) $\exists r, s,\ r+1 < s$, tal que $e_s = \overline{e_r}$ e $e_i \in T,\ r < i < s$, o que implica que $e_{i+1} = \overline{e_i}$ para algum $i$ tal que $r < i < s$.

Como $\tau([g_i, e_i]) = \sigma([g_{i+1}, \overline{e_i}])$, temos

$$h_i\gamma_{e_i}[1, \tau(e_i)] = h_{i+1}[1, \tau(e_i)] \Rightarrow g_i\gamma_{e_i} = g_{i+1}\gamma_{e_{i+1}}^{-1} = g_{i+1}\gamma_{e_i} \ \text{ se } \ e_i \in A \ \text{ e } \ g_i = g_{i+1} \ \text{ se } \ e_i \notin A.$$

Em qualquer caso, $g_i = g_{i+1}$. Assim, $[g_i, e_{i+1}] = \overline{[g_i, e_i]}$, Portanto, todo caminho fechado em $\widetilde{Y}$ com $n > 0$ não é reduzido (se $n = 1$ e $\sigma([g_1, e_1]) = \tau([g_1, e_1])$, então $g_1\gamma_{e_1} = g_1 \Rightarrow \gamma_{e_1} = 1 \Rightarrow e_1 \in T$, contradição).
Portanto, $\widetilde{Y}$ é árvore se os grupos $G_v$ são triviais.
Antes de voltarmos à situação original, consideremos o seguinte: seja $U$ o recobrimento universal de $Y$ e $p : U \longrightarrow Y$ a projeção canônica. Já vimos que $p$ é localmente sobrejetora. Sejam $[g_1, u_2],\ [g_2, u_2]$ arestas distintas de $U$ tais que $\sigma([g_1, u_1]) = \sigma([g_2, u_2])$. Então,

$$h_1[1, \sigma(u_1)] = h_2[1, \sigma(u_2)], \ \text{ em que } \ h_i = g_i \ \text{ se } \ u_i \in A \ \text{ e } \ h_i = g_i\gamma_{u_i} \ \text{ se } \ u_i \notin A.$$

Devemos ter que $\sigma(u_1) = \sigma(u_2)$ e $h_1 = h_2$. Logo,

$$u_1 \neq u_2 \Rightarrow p([g_1, u_1]) = u_1 \neq p([g_2, u_2]) = u_2.$$

Portanto, $p$ é localmente injetora. Por fim, $p$ é localmente bijetora. Seja $\alpha$ um automorfismo de $Y$ e $u, u' \in V(U)$ tais que $p(u') = \alpha \circ p(u)$. Aplicando o lema 2.3.3 em $p$ e $\alpha \circ p$, existe um único automorfismo $\beta$ de $U$ tal que $\beta(u) = u'$ e $p \circ \beta = \alpha \circ p$. Chamamos $\beta$ de **extensão** de $\alpha$.
Seja, agora, $W$ o recobrimento universal de $\widetilde{Y}$ e $q : W \longrightarrow \widetilde{Y}$ a projeção. Como $j(T)$ é árvore em $\widetilde{Y}$, já vimos que existe uma aplicação $m : j(T) \longrightarrow W$ tal que $q \circ m = id_{j(T)}$. Seja $y \in A$. Então, $j(y)$ é uma aresta em $\widetilde{Y}$ e $q \circ m(\sigma(j(y))) = \sigma(j(y))$ (lembrando que $\sigma(j(y)) = j(\sigma(y))$). Como $q$ é localmente sobrejetora, existe uma aresta $w \in W$ tal que $\sigma(w) = m \circ \sigma(j(y))$ e $q(w) = j(y)$. Como $p$ é localmente injetora, $w$ deve ser única. Então, definimos $m \circ j(y) = w$, e vemos que $\sigma(w) = m \circ j(\sigma(y))$. Também definimos $m \circ j(\overline{y}) = \overline{m \circ j(y)}$. Denote $m \circ j = k$. Temos que , se $y \in A$, $\sigma(k(y)) = k(\sigma(y))$.
Iremos agora definir automorfismos de $W$ a partir de vértices e arestas de $Y$ que fixam

elementos de $W$, além de estudar suas propriedades. O objetivo dessas definições é podermos usar o lema 2.4.2 para obtermos um homomorfismo de $G$ em $Aut(W)$. As propriedades serão utilizadas posteriormente.
i)Seja $v \in V(Y)$ e $g \in G_v$. Então, a ação de $g$ em $\widetilde{Y}$ define um automorfismo $\alpha_g$ em $\widetilde{Y}$ tal que

$$\alpha_g([h,y]) = [gh,y] \quad \text{e} \quad \alpha_g(j(v)) = [g,v] = [1,v] = j(v).$$

Ainda,

$$q(k(v)) = j(v) = \alpha_g \circ q(k(v)).$$

Portanto, existe uma extensão única de $\alpha_g$ denotada por $\varphi_g$ automorfismo de $W$ tal que $\varphi_g$ fixa $k(v)$. Vemos que, se $h \in G_v$, então $\alpha_h$ fixa $j(v)$ e, por consequência, $\varphi_h$ fixa $k(v)$. Como $gh \in G_v$ e $\alpha_g \circ \alpha_h = \alpha_{gh}$, temos que, pela unicidade da extensão, $\varphi_g \circ \varphi_h = \varphi_{gh}$ é um automorfismo de $W$ que fixa $k(v)$.
ii)Seja $e \in A$. A ação de $e$ como elemento de $G$ em $\widetilde{Y}$ define o automorfismo $\alpha_e$ de $\widetilde{Y}$ dado por $\alpha_e([g,y]) = [eg,y]$ e

$$\alpha_e(j(\tau(e))) = \alpha_e([1,\tau(e)]) = [e,\tau(e)] = \tau([1,e]) = \tau(j(e)).$$

Ainda,

$$q(\tau(k(e))) = \tau(q(k(e))) = \tau(j(e)) = \alpha_e(j(\tau(e))) = \alpha_e \circ q((k(\tau(e)))).$$

Portanto, existe uma extensão única $\varphi_e \in Aut(W)$ de $\alpha_e$ tal que $\varphi_e(k(\tau(e))) = \tau(k(e))$. Como $\overline{e}$ em $G$ é $e^{-1}$, temos que $\alpha_e \circ \alpha_{e^{-1}} = id_{\widetilde{Y}} \Rightarrow \varphi_{e^{-1}}$ estende $e^{-1}$ e $\varphi_{e^{-1}} = \varphi_e^{-1}$.
*Observação:* Se $\varphi_{y_1}$, $\varphi_{y_2}$ estendem respectivamente $y_1$ e $y_2$, então $\varphi_{y_1} \circ \varphi_{y_2}$ estende $\alpha_{y_1} \circ \alpha_{y_2} = \alpha_{y_1 y_2}$ Portanto, pela unicidade da extensão, $\varphi_{y_1 y_2} = \varphi_{y_1} \circ \varphi_{y_2}$.
iii) Seja $e \in A$ e $g \in \sigma_e(G_e)$. Então:

- $\sigma(\varphi_g(k(e))) = \varphi_g(\sigma(k(e))) = \varphi_g(k(\sigma(e))) = k(\sigma(e)) = \sigma(k(e))$ (aqui, utilizamos o fato de $\varphi_g$ e $m$ serem aplicações de grafos, a construção $j$ e o fato de $\varphi_g$ fixar $k(\sigma(e))$).
- $q \circ \varphi_g(k(e)) = \alpha_g \circ q(k(e)) = \alpha_g(j(e)) = gj(e) = j(e) = q(k(y))$ (utilizamos propriedade de extensão e o fato de que $g \in \sigma(G_e)$). Como $q$ é localmente injetora, temos que $\varphi_g(k(e)) = k(e)$.

iv) Seja $e \in A$ e $h \in G_e$. Então, pela definição de extensões acima, $\varphi_{\tau_e(h)}$ estende $\tau_e(h)$ e fixa $k(\tau(e))$, já que $\tau_e(h) \in G_{\tau(e)}$. Em (iii), vimos que, como $\sigma_e(h) \in G_{\sigma(e)}$, então $\varphi_{\sigma_e(h)}$ fixa $k(e)$. Então,

$$\varphi_{\sigma_e(h)}(\tau(k(e))) = \tau(\varphi_{\sigma_e(h)}(k(e))) = \tau(k(e)).$$

Assim, $\varphi_e^{-1}\varphi_{\sigma(h)}\varphi_e$ fixa $k(\tau(e))$. Ainda, $\varphi_e^{-1}\varphi_{\sigma_e(h)}\varphi_e$ estende $e^{-1}\sigma_e(h)e = \tau_e(h)$ em $G$. Logo,

$$\varphi_e^{-1}\varphi_{\sigma_e(h)}\varphi_e = \varphi_{\tau_e(h)}.$$

v) Se $e \in T$, então $j(\tau(e)) = \tau(j(e))$ e $k(\tau(e)) = \tau(k(e))$. Pela unicidade de extensão, $\varphi_e$ deve ser a $id_W$.
Portanto, a aplicação $g \longmapsto \varphi_g$, $g \in G_v$, é um homomorfismo de $G_v$ em $Aut(W)$, para cada $v \in V(Y)$, $\varphi_{\overline{e}} = \varphi_e^{-1}$ e $\varphi_e^{-1}\varphi_{\sigma_e(h)}\varphi_e = \varphi_{\tau_e(h)}$, $\forall h \in G_e$. Pelo lema 2.4.2, existe um homomorfismo de $G$ em $Aut(W)$, que, pela definição de ação dada, é uma ação de $G$ em $W$,

$gw = \varphi_g(w)$. Seja $s : \widetilde{Y} \longrightarrow W$ dada por $s(gj(y)) = gk(y),\ y \in Y,\ g \in G$.

- $s$ está bem definida: seja $h \in g\sigma_e(G_e),\ e \in A$. Então, $g^{-1}h \in \sigma_e(G_e) \Rightarrow \varphi_{g^{-1}h}$ fixa $k(e)$, pelo item (iii) acima. Então, $\varphi_g(k(e)) = \varphi_h(k(e)) \Rightarrow gk(e) = hk(e)$. Se $h \in gG_v$, então $g^{-1}h \in G_v \Rightarrow \varphi_{g^{-1}h}$ fixa $k(v) \Rightarrow \varphi_g(k(v)) = \varphi_h(k(v)) \Rightarrow gk(v) = hk(v)$;
- é claro que $s(V(\widetilde{Y})) \subseteq V(W)$ e $s(E(\widetilde{Y})) \subseteq E(W)$;
- seja $e \in A$. Então, $s(\overline{gj(e)}) = s(gj(\overline{e})) = gk(\overline{e}) = g\overline{k(e)} = \overline{gk(e)}$, pela definição de $j$ e $k$;
- seja $e \in A$. Então, $s(\sigma(gj(e))) = s(g(j(\sigma(e)))) = gk(\sigma(e)) = g\sigma(k(e)) = \sigma(gk(e)) = \sigma(s(gj(e)))$, por construção de $k$;
- seja $e \in A$. Então, $s(\tau(gj(e))) = s(g\tau(j(e))) = s(gej(\tau(e))) = gek(\tau(e)) = \varphi_g\varphi_e(k(\tau(e))) = \varphi_g(\tau(k(e))) = g\tau(k(e)) = \tau(gk(e)) = \tau(s(gj(e)))$ (utilizamos o resultado (ii)).

Concluímos que $s$ é uma aplicação de grafos. Além disso,

$$q \circ s(gj(y)) = q(gk(y)) = q(\varphi_g(k(y))) = \alpha_g \circ q(k(y)) = \alpha_g(j(y)) = gj(y),\ g \in G,\ y \in Y.$$

Portanto, $q \circ s = id_{\widetilde{Y}}$. Portanto, $s$ é injetora e, como já provamos que $W$ é árvore e $\widetilde{Y}$ é conexo, temos que $\widetilde{Y}$ deve ser árvore. □

Considere $X,\ G,\ Y = X/G,\ T,\ A,\ j : Y \longrightarrow X,\ p : X \longrightarrow Y$ e o grafo de grupos $\Delta$ da *Primeira Construção*. Aplicando a *Segunda Construção* nesses elementos, vamos obter a árvore $\widetilde{Y}$ sobre a qual age o grupo $\pi(\Delta, Y, T)$.
Antes de enunciarmos o próximo teorema, consideremos o lema seguinte:

**Lema 2.5.1.** *Sejam $H$ subgrupo de $G$ e $X_1,\ X_2$ subgrafos de $X$ tais que $X_2 \subseteq X_1,\ GX_1 = X,\ V(X_1) \subseteq HV(X_2)$ e $gV(X_2) \cap V(X_2) = \emptyset,\ \forall g \in G - H$. Então, $H = G$.*

*Demonstração.* $HX_1 = X$:
Seja $\sigma(e) \in V(X_1)$. Por hipótese, existe $g \in G,\ x \in E(X_1)$ tal que $gx = e$. Como $\sigma(e),\ \sigma(x) \in V(X_1) \subseteq HV(X_2)$, existem $h, k \in H$ tais que $h\sigma(e),\ k\sigma(x) \in V(X_2)$. Daí,

$$hgk^{-1}(k\sigma(x)) = h\sigma(gx) = h\sigma(e) \in hgk^{-1}V(X_2) \cap V(X_2) \Rightarrow hgk^{-1} \in H,$$

que, por hipótese, implica

$$g \in H \Rightarrow e = gx \in HX_1 \Rightarrow \tau(e) \in HX_1.$$

Se $\sigma(e) \in HX_1$, então $\sigma(he) \in X_1$, para algum $h \in H$. Então, $he \in HX_1 \Rightarrow e \in HX_1$. Portanto, como $X$ é conexo, pelo lema 2.1.1, $HV(X_1) = V(X)$. Então, $e \in HX_1,\ \forall e \in E(X)$. Logo, $HX_1 = X$.
Por hipótese, $V(X) = HV(X_1) \subseteq HV(X_2) \Rightarrow V(X) = HV(X_2)$.
Finalmente, seja $g \in G$. Se $v \in V(X_2)$, existe $h \in H$ e $w \in V(X_2)$ tais que $gv = hw$. Então, $w = h^{-1}gv \in h^{-1}gV(X_2) \cap V(X_2) \Rightarrow h^{-1}g \in H \Rightarrow g \in H$. □

**Teorema 2.5.2** (Segundo Teorema Estrutural)**.** *São equivalentes:*

*i)* $X$ *é árvore;*

*ii)* $\widetilde{Y}$ *é isomorfo a* $X$*;*

*iii)* $\pi(\Delta, Y, T)$ *é isomorfo a* $G$*.*

*Demonstração.* Denotaremos $\pi(\Delta, Y, T)$ por $\pi$ apenas. Para cada $v \in V(Y)$, $G_v \in \Delta$, $G_v \hookrightarrow G$. Ainda, para cada $e \in A$, $\gamma_e$, $\gamma_{\overline{e}}$ são os elementos correspondentes em $G$ respectivamente de $e$ e $\overline{e} = e^{-1}$. Se $e \in T$, então $\gamma_e = 1$. Por fim, $e^{-1}\sigma_e(g)e\tau_e(g)^{-1}$, $\forall e \in E(Y)$, $\forall g \in G_e$, corresponde, em $G$, ao elemento $\gamma_e^{-1}\sigma_e(g)\gamma_e\tau_e(g)^{-1} = 1$, pois, por construção, $\tau_e(g) = \gamma_e^{-1}g\gamma_e$ e $\sigma_e(g) = g$. Portanto, é possível definir o homomofismo $\varphi : \pi \longrightarrow G$ tal que $\varphi(g) = g$, $\forall g \in G_v$, $\forall v \in V(Y)$, e $\varphi(e) = \gamma_e$, $\forall e \in A$.
$\varphi$ é sobrejetora:
Seja $H = \varphi(\pi(\Delta, Y, T))$, $X_2 = j(T)$ e $X_1$ o subgrafo de $X$ que consiste de todas as arestas de $j(Y)$ e do começo e fim de cada uma delas. Então, $X_2 \subseteq X_1$. Além disso, como $j(Y)$ contém um representante de cada $G$-órbita de $Y$, temos que $GX_1 = X$. Também,

$$V(X_1) = V(X_2) \cup \{\sigma(j(e)), \tau(j(e)),\ e \in A - E(T)\}.$$

Mas $\sigma(j(e)) = j(\sigma(e))$, então

$$V(X_1) = V(X_2) \cup \{\tau(j(e)),\ e \in A - E(T)\}.$$

Para $e \in A$, vimos que

$$\tau(j(e)) = \gamma_e j(\tau(e)) = \varphi(e)j(\tau(e)) \in HV(X_2).$$

Portanto, $V(X_1) \subseteq HV(X_2)$. Por fim, se $gV(X_2) \cap V(X_2) \neq \emptyset$, então existem $v, w \in T$ tais que

$$gj(v) = j(w) \Rightarrow p(gj(v)) = p(j(w)) \Rightarrow v = w$$

e

$$g \in G_{j(v)} = G_v \Rightarrow g = \varphi(g) \in H.$$

Satisfeitas as hipóteses do lema 2.5.1 acima, obtemos que $H = \varphi(\pi) = G$.
Agora, vamos definir $\psi : \widetilde{Y} \longrightarrow X$ por $\psi([h, y]) = \varphi(h)j(y)$, $y \in Y$, $h \in \pi$.
i) $\psi$ está bem definida:
Se $[k, z] = [h, y]$, então $z = y$ e $k \in hG_y$. Mas

$$G_y = G_{j(y)} \Rightarrow h^{-1}kj(y) = j(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(h^{-1}k)j(y) = h^{-1}kj(y) = j(y) \Rightarrow \varphi(h)j(y) = \varphi(k)j(y).$$

ii) $\psi$ é uma aplicação de grafos:

- $\psi(\overline{[h, e]}) = \psi([h, \overline{e}]) = \varphi(h)j(\overline{e}) = \overline{\varphi(h)j(e)}$;
- se $e \in A$, $\psi(\sigma([h, e])) = \psi([h, \sigma(e)]) = \varphi(h)j(\sigma(e)) = \varphi(h)\sigma(j(e)) = \sigma(\varphi(h)j(e))$;

- se $e \in A$, $\psi(\tau([h,e])) = \psi([he, \tau(e)]) = \varphi(he)j(\tau(e)) = \varphi(h)\gamma_e(\tau(j(e))) = \varphi(h)\tau(j(e)) = \tau(\varphi(h)j(e))$.

Como $X = Gj(Y)$ e $\varphi$ é sobrejetora, temos que $\psi$ também é sobrejetora.
iii) $\psi$ é localmente injetora:
Sejam $e, e' \in A$. Então se $\psi([h,\overline{e}]) = \psi([k,e'])$, aplicando $p$ teremos que $\overline{e} = e'$, contradição. Seja, então, $\psi([h,e]) = \psi([k,e'])$. Aplicando $p$, vamos ter $e = e'$. Supondo $\sigma([h,e]) = \sigma([k,e])$, temos que

$$k^{-1}h \in G_{\sigma(e)} \Rightarrow \varphi(k^{-1}h) = k^{-1}h.$$

Ainda,

$$\varphi(h)j(e) = \varphi(k)j(e) \Rightarrow \varphi(k^{-1}h)j(e) = j(e) \Rightarrow \varphi(k^{-1}h) \in G_{j(e)} = G_e.$$

Portanto,

$$k^{-1}h \in G_e \Rightarrow h \in kG_e \Rightarrow [h,e] = [k,e].$$

Analogamente, se $\psi([h,\overline{e}]) = \psi([k,\overline{e'}])$, aplicando $p$ temos $\overline{e} = \overline{e'} \Rightarrow e = e'$. Supondo $\sigma([h,\overline{e}]) = \sigma([k,\overline{e}])$, temos que

$$\tau([h,e]) = \tau([k,e]) \Rightarrow he \in keG_{\tau(e)} \Rightarrow e^{-1}k^{-1}he \in G_{\tau(e)} \Rightarrow k^{-1}h \in eG_{\tau(e)}e^{-1}.$$

Ainda,

$$\varphi(h)j(\overline{e}) = \varphi(k)j(\overline{e}) \Rightarrow \varphi(k^{-1}h)j(\overline{e}) = j(\overline{e}) \Rightarrow \varphi(k^{-1}h) \in G_{j(\overline{e})} = G_{\overline{e}} = G_e.$$

Mas

$$G_e = \sigma_e(G_e) \subseteq G_{\sigma(e)} \Rightarrow \varphi(k^{-1}h) \in \varphi(G_e).$$

Como $\varphi$ é injetora em $G_{\tau(e)}$, temos que $\varphi$ é injetora em $eG_{\tau(e)}e^{-1}$. Daí, sabendo que em $\pi$ temos $\sigma_e(G_e) = e\tau_e(G_e)e^{-1} \subseteq eG_{\tau(e)}e^{-1}$, $\varphi(k^{-1}h) \in \varphi(G_e)$ e $\varphi$ é injetora em $G_e$, então

$$k^{-1}h \in G_e = \sigma_e(G_e) \Rightarrow [h,\overline{e}] = [k,\overline{e}].$$

$(i) \Rightarrow (ii)$ $\psi$ é localmente injetora, sobrejetora, $\widetilde{Y}$ é conexo e $X$ é árvore. Logo, pelo lema 2.3.4, $\psi$ é injetora e, portanto, um isomorfismo.
$(ii) \Rightarrow (i)$ óbvio.
$(iii) \Rightarrow (ii)$ $\psi$ já é sobrejetora e injetora nas arestas. Falta mostrar que $\psi$ é injetora em $V(\widetilde{Y})$. Sejam $h, k \in \pi$, $v, w \in V(Y)$ e $\psi([h,v]) = \psi([k,w])$. Então, $\varphi(h)j(v) = \varphi(k)j(w)$. Aplicando $p$, vemos que $v = w$. Ainda,

$$\varphi(k^{-1}h)j(v) = j(v) \Rightarrow \varphi(k^{-1}h) \in G_{j(v)} = G_v = \varphi(G_v).$$

Como $\varphi$ é isomorfismo, $k^{-1}h \in G_v \Rightarrow [h,v] = [k,v]$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Seja $h \in ker(\varphi)$. Tome $v \in V(Y)$. Então,

$$\psi([h,v]) = \varphi(h)j(v) = j(v) = \psi([1,v]).$$

Como $\psi$ é isomorfismo, temos que $[h,v] = [1,v] \Rightarrow h \in G_v \Rightarrow \varphi(h) = h = 1$. □

Como conclusão, vemos que, se tivermos um grafo de grupos sobre $Y$, uma árvore maximal $T$ e $A$ uma orientação de $Y$ e considerarmos G $= \pi(\Delta, Y, T)$, pela 2ª construção teremos uma árvore $\widetilde{Y}$ sobre a qual $G$ age sem inversões. Se aplicarmos a $\widetilde{Y}$ e $G$ a 1ª construção, obteremos um grafo de grupos $\widetilde{\Delta}$, que será isomorfo a $\Delta$, conforme foi provado.
Se, por outro lado, começarmos com um grupo $G$ agindo sem inversões sobre uma árvore $X$ e aplicarmos a 1ª construção, obteremos um grafo de grupos $\Delta$ sobre $Y = X/G$ com árvore maximal $T$ e orientação $A$. Pela 2ª construção, teremos como resultado a árvore $\widetilde{Y}$ que será isomorfa a $X$, sobre a qual age sem inversões o grupo $\pi(\Delta, Y, T)$, por sua vez isomorfo a $G$. A árvore $X$ sobre a qual $G$ age é chamada de **árvore de Bass-Serre**.

## 2.6 Aplicações dos Teoremas Estruturais

**Teorema 2.6.1.** *Seja $\Delta$ um grafo de grupos sobre $X$ e $H$ um subgrupo de $\pi(\Delta)$. Então, $H = \pi(\Omega)$, em que os grupos dos vértices de $\Omega$ são $H \cap gG_vg^{-1}$, $\forall v \in V(X)$, onde $g$ percorre um subconjunto dos representantes das classes bilaterais de $H$ e $G_v$, da forma $HkG_v$, $k \in \pi(\Delta)$, e os grupos das arestas de $\Omega$ são $H \cap gG_eg^{-1}$, $\forall e \in E(X)$, onde $g$ percorre um subconjunto dos representantes das classes bilaterais de $H$ e $G_e$, da forma $HkG_e$, $k \in \pi(\Delta)$.*

*Demonstração.* Pela 2ª construção, $\pi(\Delta)$ age sem inversões em $\widetilde{X}$. Então, $H$ age sem inversões em $\widetilde{X}$. Pela 1ª construção e pelo *Segundo Teorema Estrutural*, $H \cong \pi(\Omega)$, em que $\Omega$ é um grafo de grupos sobre $H/\widetilde{X}$ tal que seus grupos $H_y$, $y \in H/\widetilde{X}$, são os estabilizadores de um único representante em $\widetilde{X}$ de cada $H$-órbita. Daí, seja $[g, v]$ um desses representantes, $g \in \pi(\Delta)$, $v \in V(\widetilde{X})$. Temos que

$$k \in G_{[g,v]} \Leftrightarrow k[g, v] = [g, v] \Leftrightarrow k \in gG_vg^{-1},$$

em que $G_v$ é o grupo em $\Delta$ do vértice $v$. Mas, por construção de $\Omega$, $k \in H$. Portanto, $G_{[g,v]} = H \cap gG_vg^{-1}$. Ainda, se $HkG_v$ é um representante de uma classe bilateral, $g, g' \in HkG_v \Leftrightarrow [g, v], [g', v] \in H[k, v]$. Como tomamos um representante único para cada órbita, temos, para cada $v \in V(\widetilde{X})$, $G_{[g,v]} = H \cap gG_vg^{-1}$, em que $g$ percorre um subconjunto dos representantes de das classes bilaterais de $H$ e $G_v$, da forma do enunciado. Analogamente, seja $[g, e]$ um representante único em $\widetilde{X}$ de uma $H$-órbita, $g \in \pi(\Delta)$, $e \in A$, $A$ orientação de $X$. Temos que

$$k \in G_{[g,e]} \Leftrightarrow k[g, e] = [g, e] \Leftrightarrow k \in g\sigma_e(G_e)g^{-1},$$

em que $G_e$ é o grupo em $\Delta$ da aresta $e$. Mas, por construção de $\Omega$, $\sigma_e(G_e) = G_e$. E como $k \in H$, temos que $G_{[g,e]} = H \cap gG_eg^{-1}$. Ainda, se $HkG_e$ é um representante de uma classe bilateral, $g, g' \in HkG_e \Leftrightarrow [g, e], [g', e] \in H[k, e]$. Como tomamos um representante único para cada órbita, temos, para cada $e \in A$, $G_{[g,e]} = H \cap gG_eg^{-1}$, em que $g$ percorre um subconjunto dos representantes de das classes bilaterais de $H$ e $G_e$, da forma do enunciado. □

**Corolário 2.6.1.** *Seja $H$ um subgrupo de um grupo fundamental de um grafo de grupos tal que $H$ interseciona cada conjungado de um grupo de vértices no grupo trivial. Então, $H$ é livre.*

*Demonstração.* Pelo teorema 2.6.1 anterior, os grupos de vértices do grafo de grupos cujo grupo fundamental é isomorfo a $H$ são triviais. Já vimos que $H$ deve ser livre ($H$ é o grupo livre com base um único representante de cada par de arestas $\{e, \overline{e}\}$ de $H/\widetilde{X}$ que não pertencem à árvore maximal de $H/\widetilde{X}$ da 1ª construção sobre $H$ agindo em $\widetilde{X}$). □

**Corolário 2.6.2.** *Seja $\Delta$ um grafo de grupos. Suponha que existam um grupo $H$ e um homomorfismo $\varphi : \pi(\Delta) \longrightarrow H$ tal que $\varphi$ é injetora em cada grupo dos vértices. Então, $ker\varphi$ é livre.*

*Demonstração.* Seja $g \in \pi(\Delta)$ e $h \in G_v$, para algum vértice $v$ do grafo de grupos $\Delta$. Então,

$$\varphi(ghg^{-1}) = 1 \Rightarrow \varphi(h) = \varphi(g)^{-1}\varphi(g) = 1 \Rightarrow h = 1.$$

Portanto, $ker\varphi$ é um subgrupo do grupo fundamental $\pi(\Delta)$ que satisfaz as hipóteses do corolário 2.6.2 anterior. Logo, $ker\varphi$ é livre. □

# Capítulo 3

# Homologia Algébrica

## 3.1 Categorias e Funtores

Nessa seção, trataremos brevemente de alguns conceitos básicos envolvendo categorias e funtores, necessários aos assuntos posteriores.

**Definição 3.1.1.** *Uma categoria $\Xi$ é uma coleção de conjuntos chamados* **objetos** *e relações entre esse objetos, chamadas de* **morfismos**. *À classe dos objetos denotamos $Obj(\Xi)$ e aos morfismos $Hom_\Xi(A,B)$, $A,B \in Obj(\Xi)$. Além disso, existe uma operação binária $\circ : Hom_\Xi(A,B) \times Hom_\Xi(B,C) \longrightarrow Hom_\Xi(A,C)$ dada por $(f,g) \longmapsto g \circ f$ chamada* **composição** *e que satisfaz:*

1. *associatividade, ou seja, se $f \in Hom_\Xi(A,B)$, $g \in Hom_\Xi(B,C)$, $h \in Hom_\Xi(C,D)$, então $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.*

2. *Para todo $A \in Obj(\Xi)$, existe um morfismo de $Hom_\Xi(A,A)$ denotado por $1_A$ tal que, $\forall f \in Hom_\Xi(A,B)$, $\forall g \in Hom_\Xi(C,A)$, temos que $f \circ 1_A = f$ e $1_A \circ g = g$.*

**Exemplo 3.1.1.** *1. Categoria dos $R$-módulos à esquerda cujos morfismos são os homomorfismos de $R$-módulos à esquerda com a composição usual de homomorfismos, em que $1_M$ é a identidade de $M$, $M$ um $R$-módulo à esquerda. Denotamos essa categoria por ${}_R\mathcal{M}$. Analogamente, $\mathcal{M}_R$ representa a categoria dos $R$-módulos à direita.*

2. *Categoria dos espaços topológicos cujos morfismos são as funções contínuas entre os espaços com a composição usual de funções. A função $1_X$, $X$ um espaço topológico, é a identidade de $X$.*

**Definição 3.1.2.** *Sejam $\Xi, \Xi'$ duas categorias. Um* **funtor** *$F$ é uma função entre duas categorias que satisfaz:*

*i)* $F(A) \in Obj(\Xi')$, $\forall A \in Obj(\Xi)$;

*ii) se* $f \in Hom_\Xi(A,B)$, *então* $F(f) \in Hom_{\Xi'}(F(A),F(B))$, $\forall A,B \in \Xi$;

*iii) se* $A,B,C \in \Xi$ *e* $f \in Hom_\Xi(A,B)$, $g \in Hom_\Xi(B,C)$, *então* $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$;

*iv) se* $A \in \Xi$, *então* $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

*Nessas condições, dizemos que $F$ é um* **funtor covariante**. *Se, no entanto, $F$ satisfaz (i), (iv) e (ii'), (iii'), em que:*
*ii') se $f \in Hom_{\Xi}(A,B)$, então $F(f) \in Hom_{\Xi'}(F(B),F(A))$, $\forall A,B \in \Xi$;*
*iii') se $A,B,C \in \Xi$ e $f \in Hom_{\Xi}(A,B)$, $g \in Hom_{\Xi}(B,C)$, então $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$,*
*dizemos que $F$ é um* **funtor contravariante**.

**Exemplo 3.1.2.** *1. Considere a categoria dos espaços topológicos conexos por caminhos com as funções contínuas e a categoria dos grupos. Temos que $\pi_1$ é um funtor que relaciona ambas as categorias: se $X$ é um espaço topológico conexo por caminhos, $\pi_1(X)$ é conhecido como o grupo fundamental de $X$. Se $f : X \longrightarrow Y$ é uma função contínua entre dois espaços topológicos conexos por caminhos, $\pi_1(f)$ é a função induzida de $f$ denotada por $f_*$. Temos que $\pi_1$ é um funtor covariante, pois $f_* \circ g_* = (f \circ g)_*$.*

2. *Seja $C \in {}_R\mathcal{M}$. Temos que $Hom_R(*,C)$ é um funtor contravariante da categoria dos $R$-módulos à esquerda para a categoria dos grupos abelianos com homomorfismos de grupos - ou categoria dos $\mathbb{Z}$-módulos, com $za = \underbrace{a + \ldots + a}_{z vezes}$, $z \in \mathbb{Z}$, $a$ pertencente a um $\mathbb{Z}$-módulo.*
*De fato, se $f,g \in Hom_R(A,C) = Hom_R(*,C)(A)$, $\forall a \in A$,*

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a) = g(a) + f(a) \Rightarrow f + g = g + f.$$

*Então, $Hom_R(A,C)$ é grupo abeliano.*
*Ainda, se $f \in Hom_R(A,C)$, $z \in \mathbb{Z}$, $r \in R$,*

$$(zf)(ra) = \underbrace{(f + \ldots + f)}_{zvezes}(ra) = \underbrace{f(ra) + \ldots + f(ra)}_{zvezes} = \underbrace{rf(a) + \ldots + rf(a)}_{zvezes} =$$

$$= r\underbrace{(f(a) + \ldots + f(a))}_{zvezes} = r\underbrace{(f + \ldots + f)}_{zvezes}(a) = r(zf)(a)$$

*e*

$$(zf)(a_1 + a_2) = (zf)(a_1) + (zf)(a_2).$$

*Portanto, é fácil ver que as propriedades de $\mathbb{Z}$-módulo se verificam.*
*Além disso,*

$$Hom_R(*,C) : Hom_R(A,B) \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(Hom_R(B,C), Hom_R(A,C))$$

*tal que, se $f \in Hom_R(A,B)$, $g \in Hom_R(B,C)$, temos*

$$Hom_R(*,C)(f)(g) = g \circ f.$$

*Já o funtor*

$$Hom_R(C,*) : Hom_R(A,B) \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(Hom_R(C,A), Hom_R(C,B))$$

*dado por $Hom_R(C,*)(f)(g) = f \circ g$, $g \in Hom_R(C,A)$, é covariante.*

3. *Seja $A \in \mathcal{M}_R$ e $B \in {}_R\mathcal{M}$. O produto tensorial de $R$-módulos $A \otimes_R B$ é um grupo abeliano $R$-bilinear, ou seja,*

- $(a_1 + a_2) \otimes b = a_1 \otimes b + a_2 \otimes b$,
- $a \otimes (b_1 + b_2) = a \otimes b_1 + a \otimes b_2$ *e*
- $ar \otimes b = a \otimes rb$,

$a, a_1, a_2 \in A,\ b, b_1, b_2 \in B,\ r \in R.$
*Então,* $A \otimes_R *$ *define um funtor covariante da categoria* ${}_R\mathcal{M}$ *para a categoria* ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{M}$ *tal que*

$$A \otimes_R * : Hom_R(B, C) \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(A \otimes_R B, A \otimes_R C)$$

*é dado por*

$$(A \otimes_R *)(f) = id_A \otimes f$$

*e, se* $g \in Hom_R(C, D)$, *então* $A \otimes_R (g \circ f) = id_A \otimes (g \circ f)$.
*Analogamente, se* $B \in {}_R\mathcal{M}$, *então* $* \otimes_R B$ *é um funtor covariante de* $\mathcal{M}_R$ *em* $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$ *tal que, para* $f \in Hom_R(A, C)$, *temos que* $(* \otimes_R B)(f) = f \otimes id_B$ *e, se* $g \in Hom_R(C, D)$, *então* $(* \otimes_R B)(g \circ f) = (g \circ f) \otimes id_B$.

**Definição 3.1.3.** *Uma categoria* $\Xi$ *é* **pré-aditiva** *se* $Hom_\Xi(A, B)$ *é um grupo abeliano (pela soma),* $\forall A, B \in Obj(\Xi)$, *e satisfaz:* $\forall z \in \mathbb{Z},\ f, k \in Hom_\Xi(A, B),\ g, h \in Hom_\Xi(B, C)$,

$$(zh + g) \circ f = z(h \circ f) + g \circ f \quad e \quad g \circ (zf + k) = z(g \circ f) + g \circ k.$$

As categorias dos $R$-módulos à esquerda e à direita, por exemplo, são pré-aditivas.

**Definição 3.1.4.** *Se* $\Xi, \Xi'$ *são categorias pré-aditivas, dizemos que um funtor* $F : \Xi \longrightarrow \Xi'$ *é* **aditivo** *se* $F(f + g) = F(f) + F(g),\ \forall f, g \in Hom_\Xi(A, B),\ \forall A, B \in Obj(\Xi)$.

Na categoria dos $R$-módulos à esquerda e à direita, se 0 é o homomorfismo tal que $0(a) = 0,\ \forall a$ em algum $R$-módulo, temos que $F(0 + 0) = F(0) = F(0) + F(0) \Rightarrow F(0) = 0$.

**Exemplo 3.1.3.**
- $Hom_R(*, C), Hom_R(A, *)$ *são funtores aditivos devido à distributividade dos homomorfismos de* $R$*-módulos.*
- $A \otimes_R *,\ * \otimes_R B$ *são funtores aditivos devido à bilinearidade do produto tensorial.*

**Teorema 3.1.1.** *Seja* $\bigoplus_{j \in J} A_j$ *uma soma direta de* $R$*-módulos e* $i_k$ *o mergulho de* $A_k$ *em* $\bigoplus_{j \in J} A_j$. *Seja* $B$ *um* $R$*-módulo. Então, o homomorfismo*

$$\theta : Hom_R(\bigoplus_{j \in J} A_j, B) \longrightarrow \prod_{j \in J} Hom(A_j, B)$$

*dado por* $\theta(f) = (f \circ i_j)_{j \in J}$ *é um isomorfismo.*

**Teorema 3.1.2.** *Seja* $\prod_{j \in J} A_j$ *um produto direto de* $R$*-módulos e* $p_k$ *a projeção de* $\prod_{j \in J} A_j$ *em* $A_k$. *Seja* $B$ *um* $R$*-módulo. Então, o homomorfismo*

$$\theta : Hom_R(B, \prod_{j \in J} A_j) \longrightarrow \prod_{j \in J} Hom_R(B, A_j)$$

*dado por* $\theta(f) = (p_j \circ f)_{j \in J}$ *é um isomorfismo.*

**Teorema 3.1.3.** *Seja $A$ um $R$-módulo à direita e $\{B_j\}_{j\in J}$ uma família de $R$-módulos à esquerda. O homomorfismo*

$$\theta : A \otimes_R (\bigoplus_{j\in J} B_j) \longrightarrow \bigoplus_{j\in J} (A \otimes_R B_j)$$

*dado por $\theta(a \otimes \sum_{j\in J} b_j) = \sum_{j\in J} (a \otimes b_j)$ é um isomorfismo.*

Para as seções posteriores, consideraremos $R$ um anel com unidade e ${}_R\mathcal{M}$ a categoria dos $R$-módulos à esquerda. Tudo o que será feito na categoria ${}_R\mathcal{M}$ pode ser feito na categoria $\mathcal{M}_R$ de $R$-módulos à direita, com as adequações necessárias. Por fim, sempre que nos referirmos a homomorfismos, estaremos considerando homomorfismos de $R$-módulos à esquerda.

## 3.2 Sequências exatas

**Definição 3.2.1.** *Sejam $A, B, C \in {}_R\mathcal{M}$ e $\alpha : A \longrightarrow B$, $\beta : B \longrightarrow C$ homomorfismos. Dizemos que a sequência abaixo é* **exata em B** *se $Im\alpha = ker\beta$.*

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

*Considere a sequência (finita ou infinita) de homomorfismos de $R$-módulos seguinte:*

$$\ldots \longrightarrow A_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i-1} \longrightarrow \ldots$$

*Essa sequência é dita* **exata** *se é exata em cada objeto, ou seja, $Im\alpha_{i+1} = ker\alpha_i$, para todo $i$.*
*Quando a sequência exata é dada por*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

*dizemos que é uma* **sequência exata curta**.

**Definição 3.2.2.** *Seja $F$ um funtor covariante e $G$ um funtor contravariante. Dizemos que:*

*i) $F$ é* **exato à esquerda** *se, para toda sequência exata $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$, temos que a sequência $0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(\alpha)} F(B) \xrightarrow{F(\beta)} F(C)$ é exata.*

*ii) $F$ é* **exato à direita** *se, para toda sequência exata $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$, temos que a sequência $F(A) \xrightarrow{F(\alpha)} F(B) \xrightarrow{F(\beta)} F(C) \longrightarrow 0$ é exata.*

*iii) $G$ é* **exato à esquerda** *se, para toda sequência exata $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$, temos que a sequência $0 \longrightarrow G(C) \xrightarrow{G(\beta)} G(B) \xrightarrow{G(\alpha)} G(A)$ é exata.*

*iv) $G$ é* **exato à direita** *se, para toda sequência exata $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$, temos que a sequência $G(C) \xrightarrow{G(\beta)} G(B) \xrightarrow{G(\alpha)} G(A) \longrightarrow 0$ é exata.*

**Teorema 3.2.1.** *Sejam $M, N \in {}_R\mathcal{M}$. Então:*

*i) $Hom_R(M, *)$ é funtor exato à esquerda;*

*ii) $Hom_R(*, N)$ é funtor contravariante exato à esquerda.*

*Demonstração.* i) Seja $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ uma sequência exata. Queremos mostrar que

$$Hom_R(M,0) \longrightarrow Hom_R(M,A) \xrightarrow{\alpha_*} Hom_R(M,B) \xrightarrow{\beta_*} Hom_R(M,C)$$

é uma sequência exata, onde $\alpha_*$ e $\beta_*$ são, respectivamente, $Hom_R(M,*)(\alpha)$ e $Hom_R(M,*)(\beta)$. Já vimos que $Hom_R(M,*)$ é funtor aditivo, portanto $Hom_R(M,0) = 0$.

a) $\alpha_*$ *é monomorfismo:* seja $f \in ker\alpha_*$. Então, $\alpha_*(f) = \alpha \circ f = 0 \Rightarrow Imf \subseteq ker\alpha \Rightarrow Imf = \{0\} \Rightarrow f \equiv 0 \Rightarrow ker\alpha_* = \{0\}$.

b) $Im\alpha_* \subseteq ker\beta_*$: $\beta_* \circ \alpha_* = Hom_R(M,*)(\beta \circ \alpha) = Hom_R(M,*)(0) = 0$, pois $Im\alpha = ker\beta$.

c) $ker\beta_* \subseteq Im\alpha_*$: Seja $f \in ker\beta_*$. Então, $\beta \circ f = 0 \Rightarrow Imf \subseteq ker\beta = Im\alpha$. Defina $g : M \longrightarrow A$ tal que $g(m) = a$, em que $\alpha(a) = f(m)$. Vemos que $a$ é único, pois $\alpha$ é injetiva.
$g$ é homomorfismo: se $m, m' \in M$, então, sendo $\alpha(a) = f(m)$ e $\alpha(a') = f(m')$, temos que

$$\alpha(a)+\alpha(a') = f(m)+f(m') = f(m+m') = \alpha(a+a') \Rightarrow g(m+m') = a+a' = g(m)+g(m').$$

Ainda, se $r \in R$,

$$\alpha(ra) = r\alpha(a) = rf(m) = f(rm) \Rightarrow rg(m) = ra = g(rm).$$

Portanto, $\alpha_*(g) = \alpha \circ g = f$.

ii) A demonstração é análoga: seja $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ uma sequência exata. Queremos mostrar que

$$Hom_R(0,N) \longrightarrow Hom_R(C,N) \xrightarrow{\beta_*} Hom_R(B,N) \xrightarrow{\alpha_*} Hom_R(A,N)$$

é uma sequência exata. Já vimos que $Hom_R(0,N) = 0$.

a) $\beta_*$ *é monomorfismo:* seja $f \in ker\beta_*$. Então, $\beta_*(f) = f \circ \beta = 0 \Rightarrow f(Im\beta) = f(C) = 0 \Rightarrow f \equiv 0$.

b) $Im\beta_* \subseteq ker\alpha_*$: $\alpha_* \circ \beta_* = Hom_R(*,N)(\beta \circ \alpha) = Hom_R(*,N)(0) = 0$.

c) $ker\alpha_* \subseteq Im\beta_*$: seja $f \in ker\alpha_*$. Então $\alpha_*(f) = f \circ \alpha = 0 \Rightarrow Im\alpha \subseteq kerf$. Defina $g : C \longrightarrow N$ por $g(c) = f(b)$, onde $c = \beta(b)$. Se $\beta(b') = c$, então $b - b' \in ker\beta = Im\alpha \Rightarrow f(b-b') = f(b) - f(b') = 0$. Portanto, $g$ está bem definida. Se $g(c) = f(b)$ e $g(c') = f(b')$, então

$$\beta(b+b') = \beta(b) + \beta(b') = c + c' \Rightarrow g(c+c') = f(b+b') = f(b) + f(b') = g(c) + g(c').$$

Também, se $r \in R$,

$$\beta(rb) = r\beta(b) = rc \Rightarrow g(rc) = f(rb) = rf(b) = rg(c).$$

Portanto, $g$ é um homomorfismo e $\beta_*(g) = g \circ \beta = f$.

□

**Teorema 3.2.2.** *Sejam $M \in \mathcal{M}_R$ e $N \in {}_R\mathcal{M}$. Então, $M \otimes_R *$ e $* \otimes_R N$ são funtores exatos à direita.*

*Demonstração.* Já vimos que ambos são funtores covariantes. Seja $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ um sequência exata. Queremos mostrar, primeiramente, que

$$M \otimes_R A \xrightarrow{id_M \otimes \alpha} M \otimes_R B \xrightarrow{id_M \otimes \beta} M \otimes_R C \longrightarrow M \otimes_R 0$$

é uma sequência exata. Já vimos que $M \otimes_R 0 = 0$.

i) *$id_M \otimes \beta$ é epimorfismo:* tome $m \otimes c \in M \otimes_R C$. Como $\beta$ é sobrejetiva, existe $b \in B$ tal que $\beta(b) = c$. Daí, $(id_M \otimes \beta)(m \otimes b) = id_M(m) \otimes \beta(b) = m \otimes c$. Como $\{m \otimes c \mid m \in M,\ c \in C\}$ gera $M \otimes_R C$, temos o resultado que queríamos.

ii) *$Im(id_M \otimes \alpha) \subseteq ker(id_M \otimes \beta)$:* $(id_M \otimes \beta) \circ (id_M \otimes \alpha) = id_M \otimes (\beta \circ \alpha) = id_m \otimes 0 = 0$, pois $Im\alpha = ker\beta$.

iii) *$ker(id_M \otimes \beta) \subseteq Im(id_M \otimes \alpha)$:* seja $\pi : M \otimes_R B \longrightarrow (M \otimes_R B)/Im(id_M \otimes \alpha)$ a projeção canônica. Queremos mostrar que existe um homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $\gamma : M \otimes_R C \longrightarrow (M \otimes_R B)/Im(id_M \otimes \alpha)$ tal que $\gamma \circ (id_M \otimes \beta) = \pi$, pois, desse modo,

$$ker(id_M \otimes \beta) \subseteq ker(\gamma \circ (id_M \otimes \beta)) = ker\pi = Im(id_m \otimes \alpha).$$

Seja $f : M \times C \longrightarrow \frac{(M \otimes_R B)}{Im(id_M \otimes \alpha)}$ uma função dada por $f(m, c) = m \otimes b + Im(id_m \otimes \alpha)$, tal que $\beta(b) = c$.

a) $f$ está bem definida: se $b' \in B$ é tal que $\beta(b') = c$, então $b - b' \in ker\beta = Im\alpha \Rightarrow m \otimes b - m \otimes b' = m \otimes (b - b') \in Im(id_M \otimes \alpha)$.

b) $f$ é $R$-bilinear: $f(m + m', c) = (m + m') \otimes b + Im(id_M \otimes \alpha) = m \otimes b + m \otimes b + Im(id_M \otimes \alpha) = m \otimes b + Im(id_M \otimes \alpha) + m \otimes b + Im(id_M \otimes \alpha) = f(m, c) + f(m', c)$.
$f(m, c + c')$ é análogo.
$f(mr, c) = mr \otimes c + Im(id_M \otimes \alpha) = m \otimes rc + Im(id_M \otimes \alpha) = f(m, rc)$.

A demonstração para $* \otimes_R N$ é análoga. □

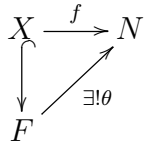
# 3.3 Módulos

## 3.3.1 Módulos livres

**Definição 3.3.1.** *Seja $M \in {}_R\mathcal{M}$. Dizemos que $M$ é $R$-**módulo livre** se $M \cong \bigoplus_{i \in I} A_i$, em que $A_i$ são $R$-módulos cíclicos, ou seja, da forma $Ra_i$, sendo $I$ um conjunto qualquer. Cada $A_i$ é isomorfo a $R$ pela identificação óbvia de $r \leftrightarrow ra_i$. O conjunto $X = \{a_i : i \in I\}$ é chamado* **base** *de $M$ e $|X|$ é chamado* **posto de M** *($X$ não precisa ser único).*

Assim como em grupo livre, $R$-módulos livres também possuem uma propriedade universal:

**Teorema 3.3.1** (Propriedade Universal de Módulos Livres)**.** *Sejam $F$, $N \in {}_R\mathcal{M}$, $F$ livre com base $X$. Seja $i : X \hookrightarrow F$ a inclusão e $f : X \longrightarrow N$ uma função qualquer. Então, existe um único homomorfismo $\theta : F \longrightarrow N$ tal que $\theta \circ i = f$.*




*Demonstração.* Seja $m \in F$. Então, $m$ é escrito unicamente como $\sum_{i\in I} r_i a_i,\ r_i \in R$. Defina $\theta(m) = \sum_{i\in I} r_i f(a_i)$. Assim, $\theta(a_i) = f(a_i) \Rightarrow \theta \circ i = f$. Além disso, $\theta$ é homomorfismo:
a) se $m_1, m_2 \in M$, $m_1 = \sum_{i\in I} r_{i,1}a_i,\ m_2 = \sum_{i\in I} r_{i,2}a_i$, então

$$\theta(m_1 + m_2) = \theta(\sum_{i\in I} r_{i,1}a_i + \sum_{i\in I} r_{i,2}a_i) = \theta(\sum_{i\in I}(r_{i,1} + r_{i,2})a_i) = \sum_{i\in I}(r_{i,1} + r_{i,2})f(a_i) =$$

$$= \sum_{i\in I} r_{i,1}f(a_i) + \sum_{i\in I} r_{i,2}f(a_i) = \theta(\sum_{i\in I} r_{i,1}a_i) + \theta(\sum_{i\in I} r_{i,2}a_i) = \theta(m_1) + \theta(m_2).$$

b) se $r \in R$ e $m \in F$, $m = \sum_{i\in I} r_i a_i$, então

$$r\theta(m) = r\theta(\sum_{i\in I} r_i a_i) = r\sum_{i\in I} r_i f(a_i) = \sum_{i\in I}(rr_i)f(a_i) = \theta(\sum_{i\in I}(rr_i)a_i) = \theta(r\sum_{i\in I} r_i a_i) = \theta(rm).$$

□

**Teorema 3.3.2.** *Todo $R$-módulo é quociente de um $R$-módulo livre.*

*Demonstração.* Seja $N \in {}_R\mathcal{M}$. Tome $F$ o $R$-módulo livre com base $N$, ou seja, $F = \bigoplus_{n\in N} Rn$. Pela propriedade universal de módulos livres, temos que existe um homomorfismo $\theta : F \longrightarrow N$ tal que $\theta|_N = id_N$. Portanto, $\theta$ é um epimorfismo. Logo, $N \cong F/ker\theta$. □

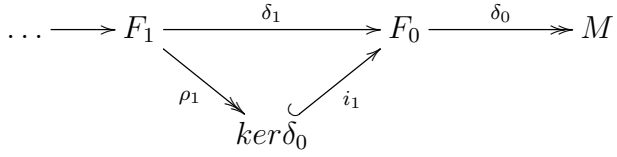
**Definição 3.3.2.** *Seja $M \in {}_R\mathcal{M}$. Uma* **resolução livre de** *$M$ é uma sequência exata de $R$-módulos de homomorfismos $\delta_i$*

$$\ldots \longrightarrow F_i \xrightarrow{\delta_i} F_{i_1} \xrightarrow{\delta_{i-1}} \ldots \xrightarrow{\delta_1} F_0 \xrightarrow{\delta_0} M \longrightarrow 0$$

*em que cada $F_i$ é livre.*

**Teorema 3.3.3.** *Todo $M \in {}_R\mathcal{M}$ tem* **resolução livre**.

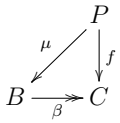
*Demonstração.* Vimos no teorema 3.3.1 acima que existe um epimorfismo de um módulo livre $F_0$ em $M$. Chamemos tal epimorfismo de $\delta_0$. Da mesma forma, existe um epimorfismo $\rho_1$ de um módulo livre $F_1$ em $ker\delta_0$. Seja $i_1$ a inclusão de $ker\delta_0$ em $F_0$. Tome $\delta_1 = i_1 \circ \rho_1$. Então, $Im\delta_1 = Im\rho_1 = ker\delta_0$. Continuando o mesmo processo com o $ker\delta_n,\ n > 1$, definimos uma resolução livre de $M$.




□

### 3.3.2 Módulos projetivos

**Definição 3.3.3.** *Seja $P \in {}_R\mathcal{M}$. Dizemos que $P$ é* **projetivo** *se, para quaisquer homomorfismos de $R$-módulos $\beta : B \longrightarrow C$, $f : P \longrightarrow C$, com $\beta$ sobrejetivo, existe um homomorfismo $\mu : P \longrightarrow B$ tal que $\beta \circ \mu = f$.*




**Lema 3.3.1.** *Seja $P \in {}_R\mathcal{M}$. Então, $P$ é projetivo $\Leftrightarrow Hom_R(P, *)$ é um funtor exato.*

*Demonstração.* Já vimos que $Hom_R(P, *)$ é um funtor exato à esquerda. Seja

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

uma sequência exata curta. Então, $\beta_*$ é sobrejetiva $\Leftrightarrow$ para cada $f \in Hom_R(P, C)$ existe $g \in Hom_R(P, B)$ tal que $\beta_*(g) = \beta \circ g = f$, ou seja, temos justamente que $Hom_R(P, *)$ é um funtor exato $\Leftrightarrow P$ é projetivo . □

**Teorema 3.3.4.** *Todo $R$-módulo livre é projetivo.*

*Demonstração.* Seja $P = F$ um módulo livre com base $X$. Para cada $x \in X$, tome $b_x \in B$ tal que $\beta(b_x) = f(x)$. Pela propriedade universal de módulos livres, existe um homomorfismo $\mu : F \longrightarrow B$ tal que $\mu(x) = b_x,\ \forall x \in X$. Seja $m \in F$. Como $F \cong \bigoplus_{x \in X} Rx$, $m = \sum_{x \in X} r_x x,\ r_x \in R$. Então,

$$\beta \circ \mu(m) = \beta \circ \mu(\sum_{x \in X} r_x x) = \beta(\sum_{x \in X} r_x \mu(x)) =$$

$$= \beta(\sum_{x \in X} r_x b_x) = \sum_{x \in X} r_x \beta(b_x) = \sum_{x \in X} r_x f(x) = f(\sum_{x \in X} r_x x) = f(m).$$

Como $b_x$ pode não ser único, então $\mu$ não precisa ser único. □

**Definição 3.3.4.** *Seja $M \in {}_R\mathcal{M}$. Uma* **resolução projetiva de** *$M$ é uma sequência exata de $R$-módulos com homomorfismos $\delta_i$*

$$\ldots \longrightarrow P_i \xrightarrow{\delta_i} P_{i-1} \xrightarrow{\delta_{i-1}} \ldots \xrightarrow{\delta_1} P_0 \xrightarrow{\delta_0} M \longrightarrow 0$$

*em que cada $P_i$ é projetivo.*

**Teorema 3.3.5.** *Todo $M \in {}_R\mathcal{M}$ tem resolução projetiva.*

*Demonstração.* $M$ tem resolução livre. Como todo $R$-módulo livre é projetivo, então $M$ tem resolução projetiva. □

**Definição 3.3.5.** *Seja $\beta : B \longrightarrow C$ um epimorfismo de $R$-módulos. Dizemos que $\beta$* **cinde** *(ou é um* **epimorfismo cindido***) se existe um homomorfismo $\gamma : C \longrightarrow B$ tal que $\beta \circ \gamma = id_C$.*

**Lema 3.3.2.** *Seja $\beta : B \longrightarrow C$ um epimorfismo de $R$-módulos cindido. Então, $B = ker\beta \oplus \gamma(C)$, $\gamma(C) \cong C$.*

*Demonstração.* Se $b \in B$, $b = (b - \gamma \circ \beta(b)) + \gamma \circ \beta(b)$. Vemos que

$$\beta(b - \gamma \circ \beta(b)) = \beta(b) - \beta \circ \gamma(\beta(b)) = \beta(b) - \beta(b) = 0.$$

Logo, $b - \gamma\beta(b) \in ker\beta$. Portanto, $B = ker\beta + \gamma(C)$. Se $b \in ker\beta \cap \gamma(C)$, então $b = \gamma(c)$ para algum $c \in C$ e

$$\beta(b) = \beta(\gamma(c)) = c = 0 \Rightarrow b = \gamma(0) = 0.$$

Como $\beta \circ \gamma = id_C$, temos que $\gamma$ deve ser injetiva. Logo, $\gamma(C) \cong C$. □

**Corolário 3.3.1.** *Sejam $B, P \in {}_R\mathcal{M}$, $P$ projetivo, e $\beta : B \longrightarrow P$ um epimorfismo. Então, $B = P_1 \oplus P_2$, com $P_2 \cong P$.*

*Demonstração.* Considerando $id_P$ e o fato de $P$ ser projetivo, temos que existe um homomorfismo $\mu : P \longrightarrow P$ tal que $\beta \circ \mu = id_P$. Como $id_P$ é injetiva, devemos ter $\mu$ injetiva. Portanto, $\beta$ cinde $\Rightarrow B = ker\beta \oplus \mu(P)$, $\mu(P) \cong P$. □

**Teorema 3.3.6.** *Seja $P \in {}_R\mathcal{M}$. Então, $P$ é projetivo se, e somente se, existe $F_0 \in {}_R\mathcal{M}$ livre tal que $F_0 = P_0 \oplus P$. Ainda, todo somando de $R$-módulo projetivo é projetivo.*

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) Seja $F$ o $R$-módulo livre tal que existe um epimorfismo $\beta : F \longrightarrow P$. Então, $F = P_1 \oplus P_2$, $P_2 \cong P$. Tome $F_0 = P_1 \oplus P \cong F$.
($\Leftarrow$) Considere o seguinte diagrama de homomorfismos:

$$\begin{array}{ccc} F_0 & \twoheadrightarrow & P \\ {\scriptstyle \exists\theta}\downarrow & \swarrow_{\mu} & \downarrow{\scriptstyle f} \\ B & \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} & C \end{array}$$

onde $f, B, C$ são quaisquer tal que $\beta$ é sobrejetivo. Considere $i$ a inclusão de $P$ em $F_0$. Pela propriedade do módulo livre, existe $\theta : F_0 \longrightarrow B$ tal que $\beta \circ \theta = f \circ \pi$. Tome $\mu = \theta \circ i : P \longrightarrow B$. Então,

$$\beta \circ \mu = \beta \circ \theta \circ i = f \circ \pi \circ i = f.$$

Portanto, $P$ é projetivo. O diagrama acima diz que, se $F_0$ é um $R$-módulo projetivo qualquer dado por soma direta de $R$-módulos, então, se $P$ é um somando de $F_0$, $P$ é projetivo. □

**Teorema 3.3.7.** *A soma direta de projetivos é projetiva.*

*Demonstração.* Seja $I$ um conjunto qualquer. Seja $\beta : B \longrightarrow C$ um epimorfismo qualquer e $f : \bigoplus_{i\in I} P_i \longrightarrow C$ um homomorfismo qualquer. Para cada $i$, defina o homomorfismo $f_i : P_i \longrightarrow C$ por $f_i(p_i) = f(0, \ldots, 0, p_i, 0, \ldots)$. Para cada $f_i$, existe $g_i$ tal que $\beta \circ g_i = f_i$. Tome, então, $g : \bigoplus_{i\in I} P_i \longrightarrow B$ por $g(p_1, p_2, \ldots) = (g_1(p_1), g_2(p_2), \ldots)$. □

**Lema 3.3.3** (Lema de Schanuel)**.** *Sejam* $0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$ *e* $0 \longrightarrow K' \longrightarrow P' \longrightarrow M \longrightarrow 0$ *sequências exatas curtas de* $R$*-módulos, com* $P, P'$ *projetivos. Então,* $K \oplus P' \cong K' \oplus P$.

*Demonstração.* Sejam $\phi : P \longrightarrow M$, $\phi' : P' \longrightarrow M$ os homomorfimos da sequência acima. Seja $N = \{(p, p') \in P \oplus P' \ : \ \phi(p) = \phi'(p')\}$. Temos que $N$ é $R$-submódulo de $P \oplus P'$, pois é fácil ver que $(N, +)$ é grupo abeliano e $\phi(rp) = r\phi(p) = r\phi'(p') = \phi'(rp') \Rightarrow r(p, p') = (rp, rp') \in N, \ \forall r \in R, \ (p, p') \in N$.
Considere a projeção $\pi : N \longrightarrow P$. Seja $p \in P$. Então, $\phi(p) \in M$. Como $\phi'$ é sobrejetiva, $\exists p' \in P'$ tal que $\phi'(p') = \phi(p)$. Portanto, $(p, p') \in N$ e $\pi(p, p') = p \Rightarrow \pi$ é sobrejetiva. Ainda, $ker\pi = \{(0, p') \ : \ (0, p') \in N\} = \{(0, p') \ : \ \phi'(p') = 0\} \cong \{p' \in P' \ : \ \phi'(p') = 0\} = ker\phi' \cong K'$, pois o homomorfismo de $K'$ em $P'$ é injetivo, logo, sua imagem é isomorfa a $K'$. Assim, $N \cong ker\pi \oplus P \cong K' \oplus P$.
De maneira análoga, tomando a projeção $\pi' : N \longrightarrow P'$, teremos que $N \cong K \oplus P'$.
Logo, $K' \oplus P \cong K \oplus P'$. □

Podemos generalizar o lema com sequências exatas não curtas:

**Lema 3.3.4** (Generalização do Lema de Schanuel)**.** *Sejam* $0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ *e* $0 \longrightarrow P'_n \longrightarrow P'_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P'_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ *sequências exatas com* $P_i, P'_i$ *projetivos pra todo* $i < n$. *Então,*

$$P_0 \oplus P'_1 \oplus P_2 \oplus P'_3 \oplus \ldots \cong P'_0 \oplus P_1 \oplus P'_2 \oplus P_3 \oplus \ldots$$

*Consequentemente, se* $P_i, P'_i$ *são finitamente gerados,* $\forall i < n$, *então* $P_n$ *é finitamente gerado se, e somente se,* $P'_n$ *é finitamente gerado.*

*Demonstração.* Para $n = 1$, temos as hipóteses do Lema de Schanuel 3.3.3. Por indução em $n$, suponhamos que o lema valha para $n - 1$. Sejam $K, K'$ os núcleos dos homomorfismos respectivamente de $P_{n-2}$ em $P_{n-3}$ e de $P'_{n-2}$ em $P'_{n-3}$ (no caso $n = 2$, consideramos $P_{-1} = P'_{-1} = M$). A inclusão dos núcleos gera sequências exatas $K \hookrightarrow P_{n-2} \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ e $K' \hookrightarrow P'_{n-2} \longrightarrow P'_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P'_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ que, por hipótese, satisfazem

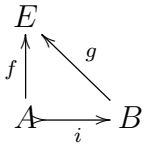
$$K \oplus P'_{n-2} \oplus P_{n-3} \oplus \ldots \cong K' \oplus P_{n-2} \oplus P'_{n-3} \oplus \ldots.$$

Sejam $Q = P'_{n-2} \oplus P_{n-3} \oplus \ldots$ e $Q' = P_{n-2} \oplus P'_{n-3} \oplus \ldots$. Seja $d_n$ o homomorfismo de $P_n$ em $P_{n-1}$. A aplicação de $P_n$ em $P_{n-1} \oplus Q$ dada por $a \longmapsto (d_n(a), 0), \ a \in P_n$, é claramente um monomorfismo. Seja $d_{n-1}$ o homomorfismo de $P_{n-1}$ em $P_{n-2}$. Sabemos que $Imd_{n-1} = K$. Portanto, a aplicação de $P_{n-1} \oplus Q$ em $K \oplus Q$ dada por $(a, q) \longmapsto (d_{n-1}(a), q), \ a \in P_{n-1}, \ q \in Q$, é um epimorfismo. Assim, temos uma sequência exata $0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \oplus Q \longrightarrow$

$K \oplus Q \longrightarrow 0$. Analogamente, teremos essa outra sequência exata $0 \longrightarrow P'_n \longrightarrow P'_{n-1} \oplus Q' \longrightarrow K' \oplus Q' \longrightarrow 0$. Como já vimos que $K \oplus Q \cong K' \oplus Q'$ e pelo fato de $P_{n-1} \oplus Q$, $P'_{n-1} \oplus Q'$ serem projetivas, podemos usar o Lema de Schanuel 3.3.3. Daí, provamos que $P_n \oplus P'_{n-1} \oplus Q' \cong P'_n \oplus P_{n-1} \oplus Q$. □

### 3.3.3 Módulos Injetivos

**Definição 3.3.6.** *Seja $E \in R_M$. Dizemos que $E$ é* **injetivo** *se para quaisquer homomorfismos de $R$-módulos $i : A \longrightarrow B$, $f : A \longrightarrow E$, $i$ injetiva, existe um homomorfismo de $R$-módulos $g : B \longrightarrow E$ tal que $g \circ i = f$.*

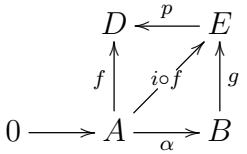



**Lema 3.3.5.** *Seja $E \in R_M$. Então, $E$ é injetivo $\Leftrightarrow Hom_R(*, E)$ é exato.*

*Demonstração.* Já vimos que $Hom_R(*, E)$ é um funtor contravariante exato à esquerda. Seja $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta. Então, $\alpha_*$ é sobrejetiva $\Leftrightarrow \forall f \in Hom_R(A, E)$, existe $g \in Hom_R(B, E)$ tal que $\alpha_*(g) = g \circ \alpha = f \Leftrightarrow E$ é injetivo. □

**Lema 3.3.6.** *Sejam $E, D, D_0 \in R_M$, $E$ injetivo, $E = D \oplus D_0$. Então, $D$ é injetivo.*

*Demonstração.* Considere o diagrama abaixo em que $i$ é inclusão de $D$ em $E = D \oplus D_0$, $p$ é projeção canônica, $\alpha$ é um monomofismo e $f$ é um homomorfismo qualquer.




(linha exata)

Existe um homomorfismo $g : B \longrightarrow E$ com $g \circ \alpha = i \circ f$, pois $E$ é injetivo. Defina, então, $h = p \circ g$. Temos que

$$h \circ \alpha = p \circ g \circ \alpha = p \circ i \circ f = id_D \circ f = f.$$

Logo, $D$ é injetiva. □

**Teorema 3.3.8.** *O produto direto de módulos injetivos é injetivo.*

*Demonstração.* Seja $I$ um conjunto qualquer. Seja $i : A \longrightarrow B$ um monorfismo qualquer, $f : A \longrightarrow \prod_{i \in I} E_i$ um homomorfismo qualquer. Vemos que $\forall a \in A$, $f(a) = (f_1(a), f_2(a), \ldots)$, em que $f_i$ são homomorfismos de $A$ em $E_i$. Como $E_i$ são injetivos, existem $g_i : B \longrightarrow E_i$ tais que $g_i \circ i = f_i$. Basta definir $g : B \longrightarrow \prod_{i \in I} E_i$ por $g(b) = (g_1(b), g_2(b), \ldots)$. □

**Teorema 3.3.9** (Critério de Baer)**.** *Seja $E \in R_M$. Então, $E$ é injetivo $\Leftrightarrow$ para cada ideal $I$ à esquerda em $R$ e para cada homomorfismo $f : I \longrightarrow E$ existe $g : R \longrightarrow E$ que estende $f$.*

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) considerando a inclusão de $I$ em $R$, basta considerar a propriedade de $E$ como módulo injetivo.
($\Leftarrow$) Sejam $i : A \longrightarrow B$ e $f : E \longrightarrow$ homomorfismos quaisquer, sendo $i$ injetiva. Podemos considerar $A$ como $R$-submódulo de $B$ e $i$ inclusão. Considere o conjunto $\Sigma = \{(C,t)|\ C$ é R-submódulo de B que contém A e $t : C \longrightarrow E$ é homomorfismo tal que $t|_A = f\}$. $\Sigma$ não é vazio, pois $(A,f) \in \Sigma$. Definimos uma relação de ordem no conjunto da seguinte maneira: $(C_1,t_1) \leq (C_2,t_2)$ se $C_1$ é $R$-submódulo de $C_2$ e $t_2|_{C_1} = t_1$. Seja $\{(C_i,t_i)|\ i \in J\}$, $J$ um conjunto qualquer, uma cadeia de elementos de $\Sigma$. Vemos que $(\bigcup_{i\in J} C_i, t)$, em que $t : \bigcup_{i\in J} C_i \longrightarrow E$ é tal que $t|_{C_i} = t_i$ é limitante superior em $\Sigma$ da cadeia: basta verificar que esse elemento está em $\Sigma$.
Logo, $\Sigma$ tem elemento maximal $(M,\delta)$. Se $M$ está propriamente contido em $B$, tome $b \in B - M$. Então, $M + Rb$ é $R$-submódulo de $B$. O conjunto $I = \{r \in R|\ r \in M\}$ é ideal à esquerda de $M$. Seja $f_0 : I \longrightarrow E$ um homomorfismo dado por $f_0(r) = \delta(rb)$. Por hipótese, existe $g : R \longrightarrow E$ que estende $f_0$. Daí, construimos o homomorfismo $\delta_0 : M + Rb \longrightarrow E$ tal que $\delta_0(m + rb) = \delta(m) + g(r)$. Contradição, pois $(M,\delta)$ é maximal. Logo, $M = B$. □

**Definição 3.3.7.** *Seja $m \in {}_R\mathcal{M}$, $m \in M$, $r \in R$. Dizemos que $m$ é* **divisível por r** *se existe $m' \in M$ tal que $rm' = m$. Dizemos que $M$ é* **divisível** *se, $\forall m \in M$, $\forall r \in R - \{0\}$ tal que $r$ não é divisor de 0, temos que $m$ é divisível por $r$.*

**Lema 3.3.7.** *Seja $E \in {}_R\mathcal{M}$ injetivo. Então, $E$ é divisível.*

*Demonstração.* Tome $m \in E$ e $r \in R - \{0\}$ tal que $r$ não é divisor de 0. Então, $Rr$ é ideal à esquerda de $R$. Considere a inclusão $Rr \hookrightarrow R$. Defina o homomorfismo $f : Rr \longrightarrow E$ por $f(sr) = sm$. Vemos que $f$ está definido, pois $sr = 0 \Rightarrow s = 0$. Daí, como $E$ é injetivo, existe $g : R \longrightarrow E$ tal que $g|_{Rr} = f$. Temos que $g(r) = g(1.r) = f(1.r) = 1.m = m$ e $g(r.1) = rg(1) = m$. Basta tomar $m' = m$. □

**Teorema 3.3.10.** *Seja $R$ um domínio de ideais principais. Então, $E \in {}_R\mathcal{M}$ é injetivos $\Leftrightarrow$ $E$ é divisível.*

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) lema 3.3.7.
($\Leftarrow$) um ideal à esquerda de $R$ é $I = Rr$. Seja $f : I \neq 0 \longrightarrow E$ um homomorfismo. Como $E$ é divisível, temos que $f(r) = m$ é divisível. Logo, existe $m' \in E$ tal que $rm' = m$. Defina, então $g(1) = m'$. Daí, $\forall s \in R$, $g(s) = sg(1) = sm'$ e $g(sr) = sg(r) = srm' = sm = sf(r) = f(sr)$. Portanto, $g$ estende $f$. Pelo Critério de Baer, $E$ é injetivo. □

**Teorema 3.3.11.** *Seja $M \in {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{M}$. Então, existe $M_0 \in {}_{\mathbb{Z}\mathcal{M}}$ tal que $M$ é $\mathbb{Z}$-submódulo de $M_0$ e $M_0$ é injetivo.*

*Demonstração.* Já vimos que $M$ é quociente de $\mathbb{Z}$-módulo livre. Logo, $M = (\bigoplus_{i\in I}\mathbb{Z})/S$, em que $S$ é $\mathbb{Z}$-submódulo de $\bigoplus_{i\in I}\mathbb{Z}$. Basta tomar $M_0 = (\bigoplus_{i\in I}\mathbb{Q})/S$, pois, $\forall z \in \mathbb{Z} - \{0\}$, $\forall q \in \mathbb{Q}$, $z(q/z) = q$, ou seja, $\mathbb{Q}$ é divisível. Daí, é fácil ver que $M_0$ é divisível. Sendo $\mathbb{Z}$ um domínio de ideais principais, pelo teorema anterior temos que $M_0$ é injetivo. □

**Teorema 3.3.12.** *Seja $D \in {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{M}$, $D$ divisível como $\mathbb{Z}$-módulo. Seja $R$ um anel com unidade. Então, $Hom_{\mathbb{Z}}(R,D) \in {}_R\mathcal{M}$ é $R$-módulo injetivo.*

**Teorema 3.3.13.** *Seja $M \in {}_R\mathcal{M}$. Então, existe $M_0 \in {}_R\mathcal{M}$ tal que $M$ é $R$-submódulo de $M_0$ e $M_0$ é injetivo como $R$-módulo.*

*Demonstração.* $M \in {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{M} \Rightarrow$ existe $D \in {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{M}$ injetivo, e portanto, divisível como $\mathbb{Z}$-módulo. Pelo teorema anterior, $Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$ é $R$-módulo injetivo. Tome $M_0 = Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$. Defina, agora, $\alpha : M \longrightarrow M_0$ em que $\alpha(m) : R \longrightarrow D$, com $\alpha(m)(r) = rm$.

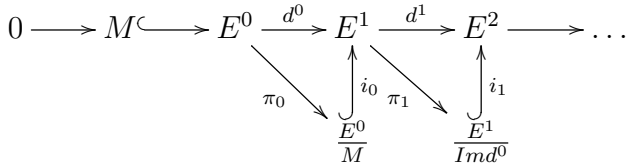
- $\alpha(m)$ é homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos: $z \in \mathbb{Z}$, $z\alpha(m)(r) = z(rm) = (zr)m = \alpha(m)(zr)$, com $zr = \overbrace{r + r + \ldots + r}^{\text{z vezes}}$.
- $\alpha$ é homomorfismo de $R$-módulos:
- $\alpha$ é monomorfismo: $\alpha(m) = 0 \Rightarrow \alpha(m)(r) = 0,\ \forall r \in R \Rightarrow rm = 0, \forall r \in R \Rightarrow m = 0$.

□

**Definição 3.3.8.** *Seja $M \in {}_R\mathcal{M}$. Uma* **resolução injetiva de M** *é um sequência exata de $R$-módulos $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\epsilon} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \xrightarrow{d^2} \ldots \xrightarrow{d^{n-1}} E^n \xrightarrow{d^n} E^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \ldots$, onde cada $E^i$ é injetivo.*

**Teorema 3.3.14.** *Seja $M \in {}_R\mathcal{M}$. Então, existe uma resolução injetiva de $M$.*

*Demonstração.* Pelo teorema anterior, vimos que existe $E^0 \in {}_R\mathcal{M}$ injetivo tal que $M$ é $R$-submódulo de $E^0$. Seja $\pi_0 : E^0 \longrightarrow E^0/M$ a projeção canônica. Existe $E^1 \in {}_R\mathcal{M}$ tal que $E^0/M$ é $R$-submódulo de $E^1$. Seja $i_0 : E^0/M \longrightarrow E^1$ a inclusão. Defina $d^0 = i_0 \circ \pi_0$. Vemos que $kerd^0 = ker\pi_0 = M$. Seja, agora, $\pi_1 : E^1 \longrightarrow E^1/Imd^0$ a projeção canônica e $i_1 : E^1/Imd^0 \longrightarrow E^2$ a inclusão de $E^1/Imd^0$ num $R$-módulo injetivo. Definindo $d^1 = i_1 \circ \pi_1$, vemos que $kerd^1 = ker\pi_1 = Imd^0$. Continuando o processo, temos a sequência exata que queríamos.




□

### 3.3.4 Módulos Planos

**Definição 3.3.9.** *Sejam $A \in \mathcal{M}_R$ e $B \in {}_R\mathcal{M}$. Dizemos que $A$ é* **plano** *se $A \otimes_R *$ é funtor exato. Da mesma forma, $B$ é* **plano** *se $* \otimes_R B$ é funtor exato.*

**Observação 3.3.1.** *Já vimos anteriormente que $A \otimes_R *$ e $* \otimes_R B$ são sempre exatos à direita. Seja $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} D \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta de $R$-módulos à direita. Sabemos que $A \otimes_R B \xrightarrow{\alpha \otimes id_B} D \otimes_R B \xrightarrow{\beta \otimes id_B} C \otimes_R B \longrightarrow 0$ é exata. Logo, $* \otimes_R B$ é exato $\Leftrightarrow \alpha \otimes id_B$ é monomorfismo. Como $A$ e $D$ são quaisquer, temos o seguinte resultado:*

$$* \otimes_R B \text{ é exato} \Leftrightarrow \forall \alpha : A \longrightarrow D \text{ monomorfismo de } R\text{-módulos à direita, } \alpha \otimes id_B \text{ é monomorfismo de grupos abelianos.}$$

*Analogamente,*

$$A \otimes_R * \text{ é exato} \Leftrightarrow \forall \alpha : C \longrightarrow D \text{ monomorfismo de } R\text{-módulos à esquerda, } id_A \otimes \alpha \text{ é monomorfismo de grupos abelianos.}$$

**Teorema 3.3.15.** *$R$ é um $R$-módulo plano.*

*Demonstração.* Seja $\alpha : A \rightarrowtail B$ um monomorfismo de $R$-módulos à esquerda. Considere os isomorfismos de $R \otimes_R A \cong A$ e $R \otimes_R B \cong B$ dados pela identificação $r \otimes c \leftrightarrow rc$. Pela comutatividade do diagrama abaixo, temos que $id_R \otimes \alpha$ é monomorfismo de grupos abelianos.

$$\begin{array}{ccc} R \otimes_R A & \xrightarrow{id_R \otimes \alpha} & R \otimes_R B \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ A & \xrightarrow[\alpha]{} & B \end{array}$$

□

Um resultado importante sobre módulos planos que será usado mais adiante é que $\mathbb{Q}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo plano, ou seja, $* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ é um funtor exato. Esse resultado é um corolário encontrado em [19], pág. 86, que diz que se $R$ é um domínio, então seu corpo de frações é $R$-módulo plano.

**Teorema 3.3.16.** *Seja $\{B_i\}_{i \in I}$ um conjunto de $R$-módulos à esquerda (ou à direita). Então, $B = \bigoplus_{i \in I} B_i$ é plano $\Leftrightarrow$ cada $B_i$ é plano.*

**Corolário 3.3.2.** *Seja $P \in {}_R\mathcal{M}$. Então, $P$ é projetivo $\Rightarrow$ $P$ é plano.*

*Demonstração.* Pelo teorema 3.3.16, concluímos que $\bigoplus_{i \in I} R$ é plano $\Rightarrow$ todo módulo livre é plano. Como $P$ é projetivo, $P$ é somando de um módulo livre $\Rightarrow$ pelo teorema 3.3.16, $P$ é plano. □

**Corolário 3.3.3.** *Seja $M \in {}_R\mathcal{M}$. Existe uma sequência exata de $R$-módulos à esquerda $\ldots P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ onde cada $P_i$ é plano. Ela é chamada de* **resolução plana de M**.

## 3.4 Complexos

**Definição 3.4.1.** *Um* **complexo de $R$-módulos** *é uma sequência*

$$\ldots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \longrightarrow \ldots$$

*com $A_n \in {}_R\mathcal{M}$, $d_n$ homomorfismos de $R$-módulos e $Imd_{n+1} \subseteq kerd_n$, isto é, $d_n \circ d_{n+1} = 0$. Cada $d_n$ é chamado de* **diferencial**. *Vamos denotar o complexo acima por $(\mathcal{A}, d)$.*

**Observação 3.4.1.** *Seja* $F : {}_R\mathcal{M} \longrightarrow {}_S\mathcal{M}$ *um funtor aditivo e*

$$\mathcal{A} : \ldots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \longrightarrow \ldots$$

*um complexo de* $R$*-módulos. Então,*

$$F\mathcal{A} : \ldots \longrightarrow FA_{n+1} \xrightarrow{Fd_{n+1}} FA_n \xrightarrow{Fd_n} FA_{n-1} \longrightarrow \ldots$$

*é um complexo de* $S$*-módulos, já que* $Fd_n \circ Fd_{n+1} = F(d_n \circ d_{n+1}) = F0 = 0$.

Sempre que nos referirmos a complexos, serão complexos de $R$-módulos, todos da categoria ${}_R\mathcal{M}$ ou $\mathcal{M}_R$.

**Definição 3.4.2.** *Sejam* $(\mathcal{A}, d), (\mathcal{B}, \tilde{d})$ *complexos. Dizemos que* $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ *é um* **homomorfismo de complexos** *se existem homomorfismos* $f_n : A_n \longrightarrow B_n$ *tais que o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{A}: & \ldots \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{d_n} & A_{n-1} & \longrightarrow \ldots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle f_n} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} & & \\
\mathcal{B}: & \ldots \longrightarrow & B_{n+1} & \xrightarrow[\tilde{d}_{n+1}]{} & B_n & \xrightarrow[\tilde{d}_n]{} & B_{n-1} & \longrightarrow \ldots
\end{array}$$

**Corolário 3.4.1.** *Os complexos de* $R$*-módulos formam uma categoria denotada* ${}_R Comp$*, ou simplesmente* **Comp***, cujos morfismos são os homomorfismos de complexos.*

**Definição 3.4.3.** $(\mathcal{A}', d')$ *é* **subcomplexo** *do complexo* $(\mathcal{A}, d)$ *se* $\mathcal{A}'$ *é complexo com respeito a* $d'$*, cada* $A'_n$ *é* $R$*-submódulo de* $A_n$ *e cada* $d'_n = d_n|_{A_n}$.

**Definição 3.4.4.** *Seja* $(\mathcal{A}', d')$ *um subcomplexo de* $(\mathcal{A}, d)$*. Podemos definir um novo complexo* $(\mathcal{A}'', d'')$ *tal que* $A''_n = A_n/A'_n$ *e,* $\forall a \in A_n$*,* $d''_n(a + A'_n) = d_n(a) + A'_{n-1}$*, para cada* $n$*. Chamamos* $(\mathcal{A}''d'')$ *de* complexo quociente *e é denotado por* $(\mathcal{A}/\mathcal{A}', d'')$.

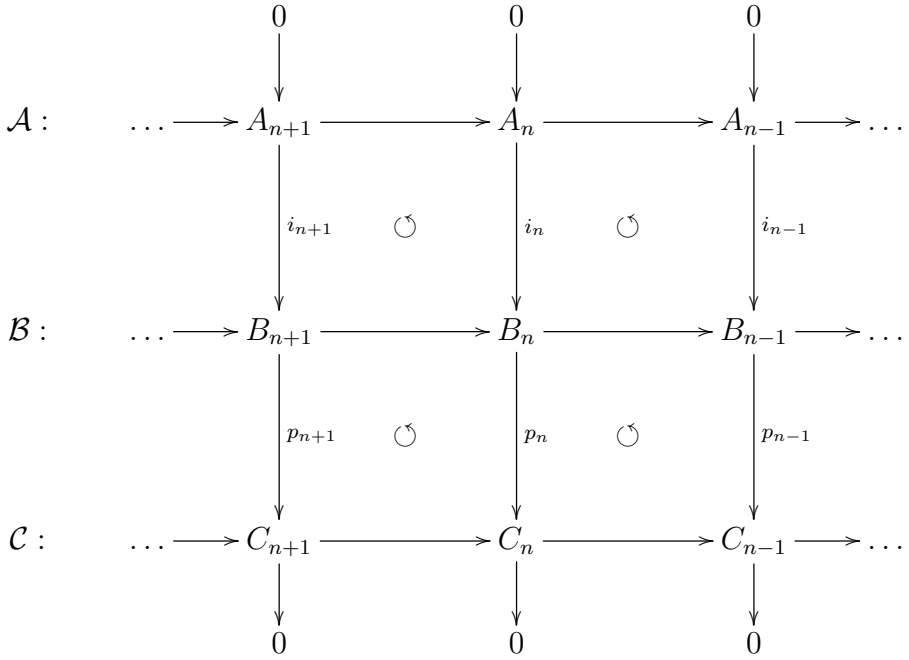
**Definição 3.4.5.** *Seja* $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ *um homomorfismo de complexos. Dizemos que* $f$ *é* isomofismo de cadeias *se* $f_n$ *é isomorfismo para cada* $n$.

**Definição 3.4.6.** *Sejam* $(\mathcal{A}, d)$*,* $(\mathcal{B}, \partial)$ *complexos e* $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ *um homomorfismo de complexos. Então, definimos os complexos*

- $kerf : \ldots kerf_{n+1} \xrightarrow{d'_{n+1}} kerf_n \xrightarrow{d'_n} kerf_{n-1} \longrightarrow \ldots$ *com* $d'_n = d_n|_{kerf_n}$ *para cada* $n$.
- $Imf : \ldots Imf_{n+1} \xrightarrow{\partial'_{n+1}} Imf_n \xrightarrow{\partial'_n} Imf_{n-1} \longrightarrow \ldots$ *com* $\partial'_n = \partial_n|_{Imf_n}$ *para cada* $n$.

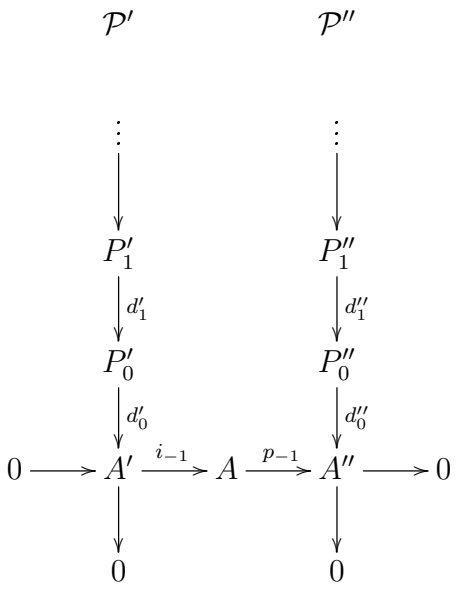
**Teorema 3.4.1** (Teorema de Isomorfismo 1)**.** *Sejam* $(\mathcal{A}, d)$*,* $(\mathcal{B}, \partial)$ *complexos e* $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ *um homomorfismo de complexos. Então,* $\mathcal{A}/kerf$ *é isomorfo a* $Imf$ *cujo isomorfismo é dado por* $\tau_n : \mathcal{A}/kerf \longrightarrow Imf$*,* $\tau_n(a + kerf_n) = f_n(a)$*,* $\forall a \in A_n$.

**Definição 3.4.7.** *Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ complexos e $i : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, $p : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ homomorfismos de complexos. Dizemos que $0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{B} \xrightarrow{p} \mathcal{C} \longrightarrow 0$ é uma* **sequência exata curta de complexos**, *em que $0$ é o complexo nulo, se $Imp = \mathcal{C}$, $keri = 0$, $Imi = kerp$ e o diagrama abaixo comuta:*




*em que, para cada $n$, $i_n$ é monomorfismo, $p_n$ é epimorfismo e $kerp_n = Imi_n$.*

**Lema 3.4.1** (Lema da Ferradura)**.** *Considere o seguinte diagrama de $R$-módulos*




*onde as colunas complexas $\mathcal{P}', \mathcal{P}''$ são resoluções projetivas respectivamente de $A'$ e $A''$ e a linha do diagrama é uma sequência exata curta. Então, existe uma resolução projetiva $\mathcal{P}$*

*de $A$ e homomorfismos de complexos $i$ e $p$ tais que $0 \longrightarrow \mathcal{P}' \xrightarrow{i} \mathcal{P} \xrightarrow{p} \mathcal{P}'' \longrightarrow 0$ é uma sequência exata curta de complexos.*

**Observação 3.4.2.** *Podemos enunciar o Lema da Ferradura para colunas de resoluções injetivas.*

**Lema 3.4.2** (Lema da Cobra)**.** *Considere o seguinte diagrama comutativo de $R$-módulos cujas linhas são exatas:*

$$\begin{array}{ccccccc} A' & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{q} & A'' & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \beta} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow[j]{} & B & \xrightarrow[p]{} & B'' \end{array}$$

*Então, existe uma sequência exata*

$$ker\alpha \xrightarrow{i} ker\beta \xrightarrow{q} ker\gamma \xrightarrow{\partial} coker\alpha \xrightarrow{j_*} coker\beta \xrightarrow{p_*} coker\gamma$$

*onde $\forall b' \in B',\ \forall b \in B,\ \forall a'' \in ker\gamma,\ j_*(b' + Im\alpha) = j(b') + Im\beta,\ p_*(b_I m\beta) = p(b) + Im\gamma$ e $\partial(a'') = j^{-1} \circ \beta \circ q^{-1}(a'') + Im\alpha$.*

### 3.4.1 Homotopia

**Definição 3.4.8.** *Sejam $(\mathcal{A}, d), (\mathcal{B}, \tilde{d})$ complexos e $f, g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ homomorfismos de complexos. Dizemos que* **f é homotópico a g** *se existem homomorfismos $s_n : A_n \longrightarrow B_{n+1}$ para cada $n$ tais que $f_n - g_n = s_{n-1} \circ d_n + \tilde{d}_{n+1} \circ s_n$.*

$$\begin{array}{lccccccc} \mathcal{A}: & \ldots \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{d_n} & A_{n-1} & \longrightarrow \ldots \\ & & & \searrow^{s_n} & \downarrow{\scriptstyle f_n} & \swarrow_{s_{n-1}} & & \\ \mathcal{B}: & \ldots \longrightarrow & B_{n+1} & \xrightarrow[\tilde{d}_{n+1}]{} & B_n & \xrightarrow[\tilde{d}_n]{} & B_{n-1} & \longrightarrow \ldots \end{array}$$

***Obs:*** *O diagrama não é necessariamente comutativo.*
*Dizemos que $\{s_n :\ n \in \mathbb{Z}\}$ é uma* **homotopia** *e denotamos $f \sim g$.*

**Lema 3.4.3.** *$\sim$ é uma relação de equivalência.*

**Teorema 3.4.2** (Teorema da Comparação)**.** *Considere o diagrama de $R$-módulos*

$$\begin{array}{lccccccccc} \mathcal{P}: & \ldots \longrightarrow & P_i & \xrightarrow{d_i} & P_{i-1} & \longrightarrow \ldots \longrightarrow & P_0 & \xrightarrow{d_0} & A & \longrightarrow 0 \\ & & & & & & & & \downarrow{\scriptstyle f} & \\ \mathcal{Q}: & \ldots \longrightarrow & Q_i & \xrightarrow{\partial_i} & Q_{i-1} & \longrightarrow \ldots \longrightarrow & Q_0 & \xrightarrow{\partial_0} & B & \longrightarrow 0 \end{array}$$

*em que $f$ é um homomorfismo, cada $P_i$ é projetivo, $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ são complexos e $\mathcal{Q}$ é exato. Então, existe um homomorfismo de complexos $\overline{f} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ que estende $f$, i.e., existem homomorfismos $f_i : P_i \longrightarrow Q_i$ tais que o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathcal{P}: & \ldots \longrightarrow & P_i & \xrightarrow{d_i} & P_{i-1} & \longrightarrow \ldots \longrightarrow & P_0 & \xrightarrow{d_0} & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_i} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle f_{i-1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\
\mathcal{Q}: & \ldots \longrightarrow & Q_i & \xrightarrow{\partial_i} & Q_{i-1} & \longrightarrow \ldots \longrightarrow & Q_0 & \xrightarrow{\partial_0} & B & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

*Ainda, se $\overline{h} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ é outra extensão de $f$, então $\overline{h}$ e $\overline{f}$ são homotópicos.*

## 3.5 O Funtor $H_n$

**Definição 3.5.1.** *Seja $(\mathcal{A}, d)$ um complexo. Chamamos de* **n-bordos** *a $B_n(\mathcal{A}) = Imd_{n+1}$ e* **n-ciclos** *a $Z_n(\mathcal{A}) = kerd_n$. Já vimos que $B_n(\mathcal{A}) \subseteq Z_n(\mathcal{A}) \subseteq A_n$, $B_n(\mathcal{A}), Z_n(\mathcal{A})$ $R$-submódulos de $A_n$. Definimos, então, o $R$-módulo $H_n(\mathcal{A}) = Z_n(\mathcal{A})/B_n(\mathcal{A})$, chamado de* **n-ésima homologia do complexo** *$\mathcal{A}$.*

**Definição 3.5.2.** *Seja $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ um homomorfismo de complexos. Definimos $H_n(f) : H_n(\mathcal{A}) \longrightarrow H_n(\mathcal{B})$ por $H_n(f)(z + B_n(\mathcal{A})) = f_n(z) + B_n(\mathcal{B}),\ \forall z \in Z_n(\mathcal{A})$.*

É comum denotar $H_n(f)$ por $f_*$, para cada $n$.

**Teorema 3.5.1.** *$H_n : Comp \longrightarrow {}_R\mathcal{M}$ é um funtor aditivo.*

**Teorema 3.5.2.** *Se $f, g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ são homomorfismos de complexos homotópicos, então, para cada $n$, $f_* = g_* : H_n(\mathcal{A}) \longrightarrow H_n(\mathcal{B})$.*

**Teorema 3.5.3** (Homomorfismo de Conexão)**.** *Sejam $(\mathcal{A}, d), (\mathcal{A}', d'), (\mathcal{A}'', d'')$ complexos e $0 \longrightarrow \mathcal{A}' \xrightarrow{i} \mathcal{A} \xrightarrow{p} \mathcal{A}'' \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta de complexos. Então, existe um homomorfismo $\partial_n : H_n(\mathcal{A}'') \longrightarrow H_{n-1}(\mathcal{A}')$, para cada $n$, dado por*

$$\partial_n(z + B_n(\mathcal{A}'')) = i_{n-1}^{-1} \circ d_n \circ p_n^{-1}(z) + B_{n-1}(\mathcal{A}'),\ \forall z \in Z_n(\mathcal{A}'')$$

**Teorema 3.5.4** (Sequência Longa Exata)**.** *Seja $0 \longrightarrow \mathcal{A}' \xrightarrow{i} \mathcal{A} \xrightarrow{p} \mathcal{A}'' \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta de complexos. Então, existe um sequência exata de $R$-módulos, chamada* sequência longa exata *de $R$-módulos, dada por*

$$\ldots \longrightarrow H_n(\mathcal{A}') \xrightarrow{i_*} H_n(\mathcal{A}) \xrightarrow{p_*} H_n(\mathcal{A}'') \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(\mathcal{A}') \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(\mathcal{A}) \xrightarrow{p_*} H_{n-1}(\mathcal{A}'') \xrightarrow{\partial_{n-1}} H_{n-2}(\mathcal{A}') \longrightarrow \ldots$$

**Teorema 3.5.5** (Naturalidade da Sequência Longa Exata). *Considere o seguinte diagrama comutativo de complexos com linhas exatas:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{A}' & \xrightarrow{i} & \mathcal{A} & \xrightarrow{p} & \mathcal{A}'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \beta} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{B}' & \xrightarrow[j]{} & \mathcal{B} & \xrightarrow[q]{} & \mathcal{B}'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

*Então, o diagrama abaixo, cujas linhas são as sequências longas exatas em homologia, é comutativo:*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\ldots & \longrightarrow & H_n(\mathcal{A}') & \xrightarrow{i_*} & H_n(\mathcal{A}) & \xrightarrow{p_*} & H_n(\mathcal{A}'') & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(\mathcal{A}') & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_*} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \beta_*} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \gamma_*} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \alpha_*} & & \\
\ldots & \longrightarrow & H_n(\mathcal{B}') & \xrightarrow[j_*]{} & H_n(\mathcal{B}) & \xrightarrow[q_*]{} & H_n(\mathcal{B}'') & \xrightarrow[\partial_n]{} & H_{n-1}(\mathcal{B}') & \longrightarrow & \ldots
\end{array}$$

**Lema 3.5.1** (Lema de Mayer-Vietoris). *Considere o diagrama comutativo abaixo de $R$-módulos com linhas exatas*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\ldots & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{i_n} & B_n & \xrightarrow{p_n} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & A_{n-1} & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_n} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \beta_n} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \gamma_n} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{n-1}} & & \\
\ldots & \longrightarrow & A'_n & \xrightarrow{j_n} & B'_n & \xrightarrow{q_n} & C'_n & \xrightarrow{\partial'_n} & A'_{n-1} & \longrightarrow & \ldots
\end{array}$$

*em que, para cada $n$, $\gamma_n$ é um isomorfismo. Então, temos uma sequência exata*

$$\ldots \longrightarrow A_n \xrightarrow{\alpha_n \oplus i_n} A'_n \oplus B_n \xrightarrow{j_n - \beta_n} B'_n \xrightarrow{\alpha_n \circ \gamma_n^{-1} \circ q_n} A_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1} \oplus i_{n-1}} A'_{n-1} \oplus B_{n-1} \xrightarrow{j_{n-1} - \beta_{n-1}} B'_{n-1} \longrightarrow \ldots$$

## 3.6 Funtores Derivados

### 3.6.1 O Funtor *Ext*

**Definição 3.6.1.** *Tome $A \in \mathcal{M}_R$ e $\mathcal{E} : 0 \longrightarrow A \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \longrightarrow \ldots$ uma resolução injetiva de $A$. Denominamos $\mathcal{E}_A : 0 \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \longrightarrow \ldots$* **resolução injetiva apagada de** *$A$.*

**Definição 3.6.2.** *Seja $F : \mathcal{M}_R \longrightarrow \mathcal{M}_S$ um funtor covariante aditivo, $A \in \mathcal{M}_R$, $(\mathcal{E}, d)$ uma resolução injetiva de $A$ e $\mathcal{E}_A$ a resolução injetiva apagada de $A$. Definimos*

$$H^n(F\mathcal{E}_A) = H_{-n}(F\mathcal{E}_A) = kerF(d^n)/ImF(d^{n-1}),\ n \geq 0,$$

*em que denotamos $Z^n(F\mathcal{E}_A) = kerF(d^n)$ e $B^n(F\mathcal{E}_A) = ImF(d^{n-1})$. Chamamos $H^n$ a* **homologia de dimensão** $-n$*. Assim, podemos definir $(R^nF)(A) = H^n(F\mathcal{E}_A)$ e chamamos $R^nF : \mathcal{M}_R \longrightarrow \mathcal{M}_S$ de* **funtor derivado à direita de** $F$*.*

**Observação 3.6.1.** *Para definirmos $(R^nF)(f)$, sendo $f \in Hom_R(A, B)$, $A, B \in \mathcal{M}_R$, tomemos $\overline{f}$ uma extensão de $f$ entre resoluções injetivas de $A$ e $B$, respectivamente*

$$\mathcal{E} : 0 \longrightarrow A \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \longrightarrow \dots$$

*e*

$$\tilde{\mathcal{E}} : 0 \longrightarrow B \longrightarrow \tilde{E}^0 \xrightarrow{\tilde{d}^0} \tilde{E}^1 \xrightarrow{\tilde{d}^1} \tilde{E}^2 \longrightarrow \dots$$

*($\overline{f}$ existe pelo Teorema da Comparação 3.4.2). Considere a mesma notação $\overline{f}$ para o homomorfismo de complexos entre essas resoluções injetivas apagadas $\mathcal{E}_A$ e $\tilde{\mathcal{E}}_B$. Assim, definimos*

$$(R^nF)(f) = H^n(F\overline{f}) : H^n(F\mathcal{E}_A) = (R^nF)(A) \longrightarrow H^n(F\tilde{\mathcal{E}}_B) = (R^nF)(B)$$

*e, portanto, se $z + B^n(F\mathcal{E}_A) \in H^n(F\mathcal{E}_A)$, então*

$$(R^nF)(f)(z + B^n(F\mathcal{E}_A)) = f_n(z) + B^n(F\tilde{\mathcal{E}}_B),$$

*em que $f_n$ é o homomorfismo entre $E^n_A$ e $\tilde{E}^n_B$ da extensão $\overline{f}$.*

**Teorema 3.6.1.** *Para $F$ um funtor covariante aditivo, temos que $R^nF : \mathcal{M}_R \longrightarrow \mathcal{M}_S$ é um funtor aditivo.*

**Observação 3.6.2.** *Quando $n = 0$, temos que $H^0(F\mathcal{E}_A) = kerF(d^0)/Im(0) = kerF(d^0)$.*

**Teorema 3.6.2.** *$R^nF$ independe da escolha da resolução injetiva de $A$.*

**Teorema 3.6.3.** *Seja $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A'' \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta de $R$-módulos e $F : \mathcal{M}_R \longrightarrow \mathcal{M}_S$ um funtor covariante aditivo. Então existe uma sequência longa exata de $S$-módulos*

$$0 \longrightarrow (R^0F)(A') \longrightarrow (R^0F)(A) \longrightarrow (R^0F)(A'') \longrightarrow (R^1F)(A') \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow (R^nF)(A') \longrightarrow (R^nF)(A) \longrightarrow (R^nF)(A'') \longrightarrow (R^{n+1}F)(A') \longrightarrow \dots.$$

*Demonstração.* Sejam $\mathcal{E}'$ e $\mathcal{E}''$ resoluções injetivas de $A'$ e $A''$ respectivamente. Pelo Lema da Ferradura 3.4.1, existe uma resolução injetiva $\mathcal{E}$ de $A$ tal que $0 \longrightarrow \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'' \longrightarrow 0$ é uma sequência exata curta de complexos que estende $\alpha$ e $\beta$. Além disso, $E^n \cong E'^n \oplus E''^n$. Por isso, para cada $n$, $E^n$ é cindido. Daí, $0 \longrightarrow F\mathcal{E}'_A \longrightarrow F\mathcal{E}_A \longrightarrow F\mathcal{E}''_A \longrightarrow 0$ é uma sequência exata curta de complexos que gera um sequência longa exata em homologia. □

**Definição 3.6.3.** *Considere $F$ o funtor $Hom_R(A,*) : \mathcal{M}_R \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$ covariante aditivo. Definimos $R^nF = Ext^n_R(A,*)$. Assim, se $B \in \mathcal{M}_R$, $(\mathcal{E},d)$ é uma resolução injetiva de $B$ e $\mathcal{E}_B$ é a resolução injetiva apagada de $B$, então*

$$Ext^n_R(A,B) = H^n(Hom_R(A,\mathcal{E}_B)) = kerd^n_*/Imd^{n-1}_*.$$

*Ainda, sejam $f \in Hom_R(B,C)$ e $\overline{f}$ a extensão de $f$ sobre as resoluções injetivas $(\mathcal{E},d)$ de $B$ e $(\tilde{\mathcal{E}},\tilde{d})$ de $C$. Denote igualmente $\overline{f}$ para o homomorfismo de complexos entre as resoluções injetivas apagadas. Então,*

$$Ext^n_R(A,*)(f) : H^n(Hom_R(A,\mathcal{E}_B)) \longrightarrow H^n(Hom_R(A,\tilde{\mathcal{E}}_C)),$$

*em que*

$$Ext^n_R(A,*)(f)(g + Imd^{n-1}_*) = f_n \circ g + Im\tilde{d}^{n-1}_*.$$

**Corolário 3.6.1.** *Seja $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A'' \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta de $R$-módulos. Então existe uma sequência exata longa de $\mathbb{Z}$-módulos*

$$0 \longrightarrow Ext^0_R(B,A') \longrightarrow Ext^0_R(B,A) \longrightarrow Ext^0_R(B,A'') \longrightarrow Ext^1_R(B,A') \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow Ext^n_R(B,A') \longrightarrow Ext^n_R(B,A) \longrightarrow Ext^n_R(B,A'') \longrightarrow Ext^{n+1}_R(B,A') \longrightarrow \dots.$$

*Demonstração.* Basta tomar $F = Hom_R(B,*)$. □

**Lema 3.6.1.** *$Ext^0_R(A,*) \cong Hom_R(A,*)$, cujo isomorfismo é natural.*

*Demonstração.* i) $Ext^0_R(A,B) \cong Hom_R(A,B)$, $\forall B \in \mathcal{M}_R$: Seja

$$\mathcal{E} : 0 \longrightarrow B \xrightarrow{\epsilon} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \longrightarrow \dots$$

uma resolução injetiva de $B$ e

$$\mathcal{E}_B : 0 \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \longrightarrow \dots$$

a resolução injetiva apagada de $B$. Sabemos que

$$Hom_R(A,\mathcal{E}_B) : 0 \longrightarrow Hom_R(A,E^0) \xrightarrow{d^0_*} Hom_R(A,E^1) \xrightarrow{d^1_*} Hom_R(A,E^2) \longrightarrow \dots,$$

$Hom_R(A,B) \xrightarrow{\epsilon_*} Hom_R(A,E_0)$ é injetivo e $Im\epsilon_* = kerd^0*$. Então,

$$Ext^0_R(A,B) = H^0(Hom_R(A,\mathcal{E}_B)) = kerd^0_* = Im\epsilon_* \cong Hom_R(A,B).$$

ii) *Se $f \in Hom_R(B,C)$, $\forall B,C \in \mathcal{M}_R$, então o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{array}{ccc} Hom_R(A,B) & \xrightarrow{\quad f_* \quad} & Hom_R(A,C) \\ \Big\downarrow (\epsilon^B_*) \cong & & \cong (\epsilon^C_*) \Big\downarrow \\ Im\epsilon^B_* = Ext^0_R(A,B) & \xrightarrow[\quad f_* \quad]{} & Ext^0_R(A,C) = Im\epsilon^C_* \end{array}$$

onde $f_*$ na parte de baixo do diagrama é induzida da aplicação de $Ext^0_R(A,*)$ em $f$ e na parte de cima da aplicação de $Hom_R(A,*)$ em $f$. Os isomorfismos do diagrama são dados por $\epsilon^B_*$ e $\epsilon^C_*$ cujo contradomínio são suas respectivas imagens. Esses homomorfismos são induzidos pela aplicação de $Hom_R(A,*)$ nos homomorfismos das resoluções injetivas respectivamente de $B$ e $C$, $\epsilon^B : B \longrightarrow E^0_B$ e $\epsilon^C : C \longrightarrow E^0_C$. Considere $\overline{f}$ uma extensão de $f$ nas resoluções injetivas de $B$ e $C$. Assim, se $g \in Hom_R(A,B)$,

- $\epsilon^C_* \circ f_*(g) = \epsilon^C_*(f \circ g)$.
- $f_* \circ \epsilon^B_*(g) = f_*(g) = f_0 \circ \epsilon^B_*(g) = \epsilon^C_* \circ f_*(g) = \epsilon^C_*(f \circ g)$.

□

**Lema 3.6.2.** *Sejam $A, B \in \mathcal{M}_R$. Se $B$ é injetivo, então $Ext^n_R(A,B) = 0$ para $n \geq 1$.*

*Demonstração.* Considere a sequência

$$\mathcal{E} : 0 \longrightarrow B \xrightarrow{id_B} B \xrightarrow{d^0 \equiv 0} 0 \xrightarrow{d^1 \equiv 0} 0 \longrightarrow \dots.$$

Essa sequência é uma resolução injetiva de $B$. Daí, $\forall n \geq 1$, vemos que

$$Ext^n_R(A,B) = H^n(Hom_R(A, \mathcal{E}_B) = kerd^n_*/Imd^{n-1}_* = 0.$$

□

**Definição 3.6.4.** *Seja $T$ um funtor aditivo contravariante. Seja $A \in \mathcal{M}_R$ e*

$$\mathcal{P} : \dots \longrightarrow P_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} P_i \xrightarrow{d_i} P_{i-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0$$

*uma resolução projetiva de $A$. Definimos, para $n \geq 0$,*

$$R^nT(A) = H^n(T\mathcal{P}_A) = kerTd_{n+1}/ImTd_n,$$

*em que*

$$\mathcal{P}_A : \dots \longrightarrow P_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} P_i \xrightarrow{d_i} P_{i-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

*é a resolução projetiva apagada de $A$. Ainda, se $f \in Hom_R(A,C)$ e $\overline{f}$ é extensão de $f$ sobre as resoluções projetivas $(\mathcal{P}, d)$ de $A$ e $(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{d})$ de $C$. Denote igualmente $\overline{f}$ para o homomorfismo de complexos entre as resoluções projetivas apagadas de $A$ e $C$. Então, $R^nT(f) : H^n(T\mathcal{P}_C) \longrightarrow H^n(T\mathcal{P}_A)$ e*

$$R^nT(f)(z + ImTd_n) = T\overline{f}_n(z) + ImT\tilde{d}_n.$$

**Teorema 3.6.4.** *$R^nT$ é um funtor contravariante aditivo cuja definição independe da escolhas das resoluções projetivas.*

**Definição 3.6.5.** *Considere $T$ o funtor $Hom_R(*,B) : \mathcal{M}_R \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$ contravariante aditivo. Definimos $R^nT = ext^n_R(*,B)$. Seja $A \in \mathcal{M}_R$, $(\mathcal{P}, d)$ uma resolução projetiva de $A$ e $\mathcal{P}_A$ a resolução projetiva apagada de $A$. Então, definimos*

$$ext^n_R(A,B) = H^n(Hom_R(\mathcal{P}_{\mathcal{A}}, B)) = kerd^*_{n+1}/Imd^*_n.$$

*Ainda, sejam $f \in Hom_R(A,C)$ e $\overline{f}$ a extensão de $f$ sobre as resoluções projetivas $(\mathcal{P},d)$ de $A$ e $(\tilde{\mathcal{P}},\tilde{d})$ de $C$. Denote igualmente $\overline{f}$ para o homomorfismo de complexos entre as resoluções projetivas apagadas. Então, definimos*

$$ext^n_R(*,B)(f) : H^n(Hom_R(\tilde{\mathcal{P}}_C,B)) \longrightarrow H^n(Hom_R(\mathcal{P}_A,B))$$

*por*

$$ext^n_R(*,B)(f)(g+Im\tilde{d}^*_n) = g\circ f_n + Imd^*_n.$$

**Teorema 3.6.5.** *Seja $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A'' \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta de $R$-módulos. Para cada $R$-módulo $B$, temos que existe uma sequência longa exata*

$$0 \longrightarrow ext^0_R(A'',B) \longrightarrow ext^0_R(A,B) \longrightarrow ext^0_R(A',B) \longrightarrow ext^1_R(A'',B) \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow ext^n_R(A'',B) \longrightarrow ext^n_R(A,B) \longrightarrow ext^n_R(A',B) \longrightarrow ext^{n+1}_R(A'',B) \longrightarrow \dots.$$

*Demonstração.* Sejam $\mathcal{P}'$ e $\mathcal{P}''$ resoluções projetivas de $A'$ e $A''$ respectivamente. Pelo Lema da Ferradura 3.4.1, existe uma resolução projetiva $\mathcal{P}$ de $A$ tal que $0 \longrightarrow \mathcal{P}' \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}'' \longrightarrow 0$ é uma sequência exata curta de complexos que estende $\alpha$ e $\beta$. Ainda, $P^n \cong P'^n \oplus P''^n$, ou seja, $P^n$ é cindido para cada $n$. Daí, $0 \longrightarrow Hom_R(\mathcal{P}''_A,B) \longrightarrow Hom_R(\mathcal{P}_A,B) \longrightarrow Hom_R(\mathcal{P}'_A,B) \longrightarrow 0$ é uma sequência exata curta de complexos que gera um sequência longa exata em homologia. □

**Lema 3.6.3.** *Sejam $A,B \in \mathcal{M}_R$. Se $A$ é projetivo, então $ext^n_R(A,B) = 0$ para $n \geq 1$.*

*Demonstração.* Seja $\mathcal{P} : \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow A \xrightarrow{id_A = d_0} A \longrightarrow 0$ é um resolução projetiva de $A$. Aplicando $Hom_R(*,B)$ sobre a resolução projetiva apagada de $A$, $\mathcal{P}_A$, temos a sequência

$$0 \longrightarrow Hom_R(A,B) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \dots.$$

Então,

$$ext^n_R(A,B) = H^n(Hom_R(\mathcal{P}_A,B)) = ker(d_{n+1})_*/Im(d_n)_* = 0,$$

para todo $n \geq 1$. □

**Lema 3.6.4.** *$ext^0_R(*,B) \cong Hom_R(*,B)$, cujo isomorfismo é natural. Portanto, $ext^0_R(A,B) \cong Ext^0_R(A,B),\ \forall A,B \in \mathcal{M}_R$.*

*Demonstração.* i) *$ext^0_R(A,B) \cong Hom_R(A,B),\ \forall A \in \mathcal{M}_R$*: Seja $A$ um $R$-módulo e

$$\dots \longrightarrow P_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} P_i \xrightarrow{d_i} P_{i-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0$$

uma resolução projetiva de $A$ e

$$\dots \longrightarrow P_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} P_i \xrightarrow{d_i} P_{i-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

a resolução projetiva apagada de $A$. Então,

$$ext^0_R(A,B) = H^n(Hom_R(\mathcal{P}_A,B)) = ker(d_1)_*/Im(d_0)_* = ker(d_1)_* = Im\epsilon_* \cong Hom_R(A,B).$$

ii) *Se* $f \in Hom_R(A,C)$, $\forall A, C \in \mathcal{M}_R$, *então o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{array}{ccc} Hom_R(C,B) & \xrightarrow{\quad f^* \quad} & Hom_R(A,B) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \epsilon_C^*} & \circlearrowleft & \Big\downarrow{\scriptstyle \epsilon_A^*} \\ Im\epsilon_C^* = ext_R^0(C,B) & \xrightarrow[\quad f^* \quad]{} & ext_R^0(A,B) = Im\epsilon_A^* \end{array}$$

onde $f^*$ na parte de baixo do diagrama é induzida da aplicação de $ext_R^0(*,B)$ em $f$ e na parte de cima da aplicação de $Hom_R(*,B)$ em $f$. Os isomorfismos do diagrama são dados por $\epsilon_A^*$ e $\epsilon_C^*$, cujo contradomínio são suas respectivas imagens. Esses os homomorfismos são induzidos pela aplicação de $Hom_R(*,B)$ nos homomorfismos das resoluções projetivas respectivamente de $A$ e $C$, $\epsilon_A : (P_0)_A \longrightarrow A$ e $\epsilon_C : (P_0)_C \longrightarrow C$. Considere $\overline{f}$ uma extensão de $f$ nas resoluções projetivas de $A$ e $C$. Assim, se $g \in Hom_R(C,B)$,

- $\epsilon_A^* \circ f^*(g) = \epsilon_A^*(g \circ f)$.
- $f^* \circ \epsilon_C^*(g) = f_0^* \circ \epsilon_C^*(g) = \epsilon_A^* \circ f^*(g) = \epsilon_A^*(g \circ f)$.

□

**Teorema 3.6.6.** *Seja*

$$\mathcal{P} : \ldots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow 0$$

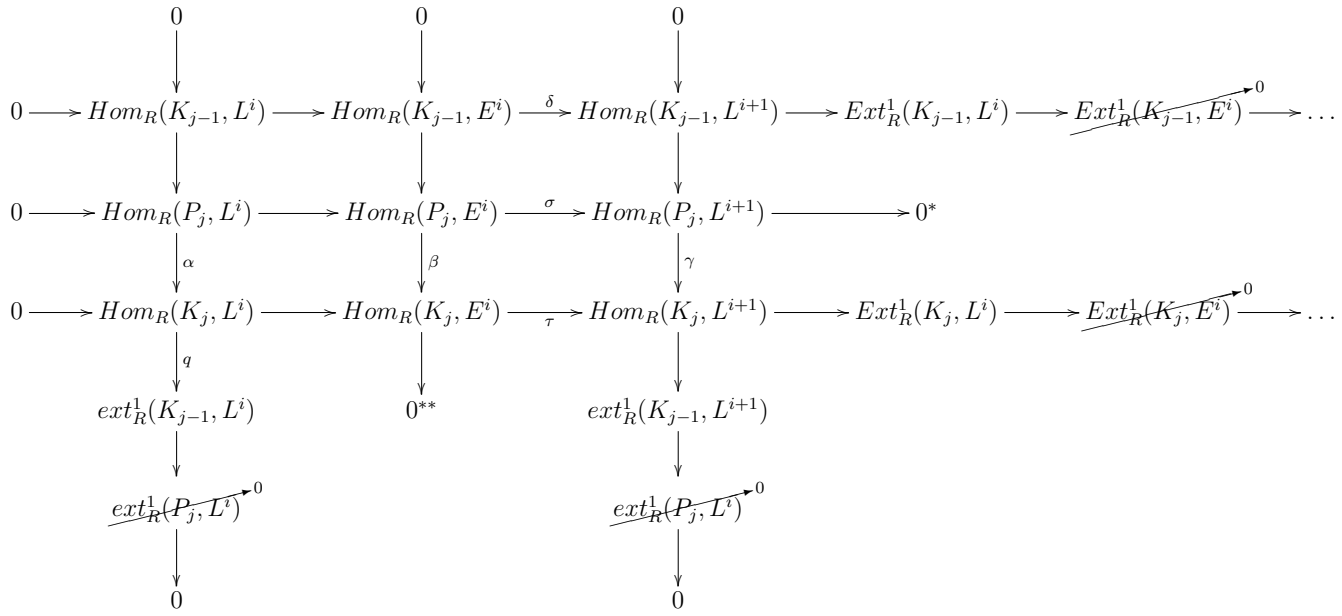
*uma resolução projetiva de* $A$ *e*

$$\mathcal{E} : 0 \longrightarrow B \xrightarrow{\epsilon} E^0 \xrightarrow{\partial^0} E^1 \xrightarrow{\partial^1} E^2 \longrightarrow \ldots$$

*uma resolução injetiva de* $B$. *Então,*

$$Ext_R^n(A,B) = H^n(Hom_R(A, \mathcal{E}_{\mathcal{B}})) \cong H^n(Hom_R(\mathcal{P}_A, B)) = ext_R^n(A,B)$$

*Demonstração.* Denotemos $L^i = ker\partial^i$. Como $L^{i+1} = ker\partial^{i+1} = Im\partial^i$, temos a sequência exata curta $0 \longrightarrow L^i \hookrightarrow E^i \xrightarrow{\partial^i} L^{i+1} \longrightarrow 0$, para cada $i \geq 0$. Vemos que $L^0 = ker\partial^0 = Im\epsilon \cong B$.
Denotemos $K_j = kerd_j$. Como $K_{j-1} = kerd_{j-1} = Imd_j$, temos a sequência exata curta $0 \longrightarrow K_j \hookrightarrow P_j \xrightarrow{d_j} K_{j-1} \longrightarrow 0$, para cada $j \geq 0$. Vemos que $K_{-1} = A$.
Construímos, então, o diagrama comutativo



Como $P_j$ é projetivo e $E^j$ é injetivo, temos que $Ext^1_R(K_{j-1}, E^i)$, $Ext^1_R(K_j, E^i)$, $ext^1_R(P_j, L^i)$, $ext^1_R(P_j, L^{i+1})$ se anulam. Ainda, * e ** indicam que $\beta$ e $\sigma$ são sobrejetivas. Isso se dá pela propriedade universal de $P_j$ e $E^i$.
Pelo Lema da Cobra, existe sequência exata

$$ker\alpha \longrightarrow ker\beta \xrightarrow{\sigma} ker\gamma \longrightarrow coker\alpha \longrightarrow coker\beta \longrightarrow coker\gamma.$$

Mas $coker\beta = 0$, pois $\beta$ é sobrejetiva. Além disso, $ker\beta \cong Hom_R(K_{j-1}, E^i)$, $ker\gamma \cong Hom_R(K_{j-1}, L^{i+1})$, $coker\alpha = Hom_R(K_j, L^i)/Im\alpha = Hom_R(K_j, L^i)/kerq \cong ext^1_R(K_{j-1}, L^i)$. Logo, temos uma sequência exata

$$Hom_R(K_j, E^i) \xrightarrow{\delta} Hom_R(K_j, L^{i+1}) \longrightarrow ext^1_R(K_j, L^i) \longrightarrow 0.$$

Portanto, por isso e pelo diagrama, temos que $ext^1_R(K_j, L^i) \cong Hom_R(K_j, L^{i+1})/Im\delta \cong Ext^1_R(K_j, L^i)$. Então,

$$\text{(I) } ext^1_R(K_j, L^i) \cong Ext^1_R(K_j, L^i).$$

Sendo $\beta, \sigma$ sobrejetivas, temos que $Im\tau = Im\tau \circ \beta = Im\gamma \circ \sigma = Im\gamma$. Daí, $ext^1_R(K_{j-1}, L^{i+1}) \cong Hom_R(K_j, L^{i+1})/Im\gamma = Hom_R(K_j, L^{i+1})/Im\tau \cong Ext^1_R(K_j, L^i)$. Então,

$$\text{(II) } ext^1_R(K_{j-1}, L^{i+1}) \cong Ext^1_R(K_j, L^i).$$

De (I) e (II), vemos que

$$\text{(III) } Ext^1_R(K_j, L^i) \cong Ext^1_R(K_{j+1}, L^{i-1}).$$

Das sequências longas exatas de $Ext$ e $ext$, temos

- $\ldots \longrightarrow \cancelto{0}{Ext^n_R(A,E^i)} \longrightarrow Ext^n_R(A,L^{i+1}) \xrightarrow{\cong} Ext^{n+1}_R(A,L^i) \longrightarrow \cancelto{0}{Ext^{n+1}_R(A,E^i)} \longrightarrow \ldots$
- $\ldots \longrightarrow \cancelto{0}{ext^n_R(P_j,B)} \longrightarrow ext^n_R(K_j,B) \xrightarrow{\cong} ext^{n+1}_R(K_{j-1},B) \longrightarrow \cancelto{0}{ext^{n+1}_R(P_j,B)} \longrightarrow \ldots$

Alternando $n$ e $i$:

- $Ext^{n+1}_R(A,B) \cong Ext^n_R(A,L^1) \cong Ext^{n-1}_R(A,L^2) \cong \ldots \cong Ext^1_R(A,L^n)$
- $ext^{n+1}_R(A,B) \cong ext^n_R(K_0,B) \cong ext^{n-1}_R(K_1,B) \cong \ldots \cong ext^1_R(K_{n-1},B)$

Assim,

$Ext^{n+1}_R(A,B) \cong Ext^1_R(A,L^n) \overset{(III)}{\cong} Ext^1_R(K_0,L^{n-1}) \overset{(III)}{\cong} Ext^1_R(K_1,L^{n-2}) \cong \ldots\ldots \cong Ext^1_R(K_{n-1},B) \overset{(I)}{\cong} ext^1_R(K_{n-1},B) \cong ext^{n+1}_R(A,B)$

□

A partir de agora, não mais utilizaremos a notação $ext$, e sim $Ext$.

**Teorema 3.6.7.** *1.* $Ext^n_R(\bigoplus_{i\in I} A_i, B) \cong \prod_{i\in I} Ext^n_R(A_i,B)$.

*2.* $Ext^n_R(A, \prod_{i\in I} B_i) \cong \prod_{i\in I} Ext^n_R(A,B_i)$.

*Demonstração.* 1. $Hom_R(\bigoplus_{i\in I} A_i, B) \cong \prod_{i\in I} Hom_R(A_i,B)$, isomorfismo natural. Portanto, sabendo que $Ext^0_R(*,B) \cong Hom_R(*,B)$, naturalmente, então o teorema vale para $n=0$. Vejamos para $n=1$:
Para cada $i$, existe um $R$-módulo livre $P_i$ - portanto, projetivo - e um epimorfismo $p_i : P_i \longrightarrow A_i$. Seja $L_i = ker p_i$. Portanto, temos a sequência exata curta $0 \longrightarrow L_i \longrightarrow P_i \xrightarrow{p_i} A_i \longrightarrow 0$ para cada $i$. Aplicando a sequência longa exata de $Ext$, temos o seguinte diagrama de linhas exatas:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & \prod_{i\in I} Ext^0_R(A_i,B) & \longrightarrow & \prod_{i\in I} Ext^0_R(P_i,B) & \xrightarrow{\alpha} & \prod_{i\in I} Ext^0_R(L_i,B) & \longrightarrow & \prod_{i\in I} Ext^0_R(A_i,B) & \longrightarrow & \cancelto{0}{\prod_{i\in I} Ext^0_R(P_i,B)} \longrightarrow \ldots \\
 & & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \delta} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \\
0 & \longrightarrow & Ext^0_R(\bigoplus_{i\in I} A_i,B) & \longrightarrow & Ext^0_R(\bigoplus_{i\in I} P_i,B) & \xrightarrow[\beta]{} & Ext^0_R(\bigoplus_{i\in I} L_i,B) & \longrightarrow & Ext^0_R(\bigoplus_{i\in I} A_i,B) & \longrightarrow & \cancelto{0}{Ext^0_R(\bigoplus_{i\in I} P_i,B)} \longrightarrow \ldots
\end{array}$$

em que $\prod_{i\in I} Ext^0_R(A_i,B) \cong coker\alpha$ e $Ext^0_R(\bigoplus_{i\in I} A_i,B) \cong coker\beta$, $\gamma, \delta$ são isomorfismos e $\phi$ é definido por $\phi(f + Im\alpha) = \delta(f) + Im\beta$, $f \in \prod_{i\in I} Ext^0_R(L_i,B)$.

- $\phi$ está bem definida: $f - g \in Im\alpha \Rightarrow f - g = \alpha(h) \Rightarrow \phi(f - g + Im\alpha) = \delta(f-g) + Im\beta = \delta(\alpha(h)) + Im\beta = \beta(\gamma(h)) + Im\beta = Im\beta$.

- $\phi$ é isomorfismo: $\phi(f + Im\alpha) = Im\beta \Rightarrow \delta(f) \in im\beta \Rightarrow \delta(f) = \beta(\gamma(g)) = \delta(\alpha(g)) \Rightarrow f = \alpha(g) \Rightarrow f \in Im\alpha$. Ainda, $g + Im\beta \in coker\beta \Rightarrow g + Im\beta = \delta(f) + Im\beta \Rightarrow \phi(f + Im\alpha) = g + Im\beta$.

Portanto, $Ext^1_R(\underset{i\in I}{\oplus} A_i, B) \cong \prod_{i\in I} Ext^1_R(A_i, B)$.

Agora, considere a sequência exata curta $0 \longrightarrow \underset{i\in I}{\oplus} L_i \longrightarrow \underset{i\in I}{\oplus} P_i \longrightarrow \underset{i\in I}{\oplus} A_i \longrightarrow 0$ para cada $i$. Da sequência longa exata de $Ext$, temos:

- $\ldots \longrightarrow \prod_{i\in I} Ext^{n-1}_R(P^i,B) \xrightarrow{0} \prod_{i\in I} Ext^{n-1}_R(L^i,B) \xrightarrow{\cong} \prod_{i\in I} Ext^n_R(A^i,B) \longrightarrow \prod_{i\in I} Ext^n_R(P^i,B) \xrightarrow{0} \ldots$
- $\ldots \longrightarrow Ext^{n-1}_R(\underset{i\in I}{\oplus} P^i,B) \xrightarrow{0} Ext^{n-1}_R(\underset{i\in I}{\oplus} L^i,B) \xrightarrow{\cong} Ext^n_R(\underset{i\in I}{\oplus} A^i,B) \longrightarrow Ext^n_R(\underset{i\in I}{\oplus} P^i,B) \xrightarrow{0} \ldots$

Por indução, $\prod_{i\in I} Ext^{n-1}_R(L^i, B) \cong Ext^{n-1}_R(\underset{i\in I}{\oplus} L^i, B)$. Logo, $\prod_{i\in I} Ext^n_R(A^i, B) \cong Ext^n_R(\underset{i\in I}{\oplus} A^i, B)$.

2. Análogo ao anterior, mas considerando a sequência exata curta $0 \xrightarrow{j_i} B_i \longrightarrow E_i \longrightarrow L_i \longrightarrow 0$, em que $E_i$ é um $R$-módulo injetivo no qual $B_i$ está contido e $L_i = coker j_i$.

□

### 3.6.2 O Funtor *Tor*

**Definição 3.6.6.** *Tome $A \in \mathcal{M}_R$ e $\mathcal{P} : \ldots \longrightarrow P_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} P_i \xrightarrow{d_i} P_{i-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0$ uma resolução projetiva de $A$. O complexo $\mathcal{P}_A : \ldots \longrightarrow P_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} P_i \xrightarrow{d_i} P_{i-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} 0$ é chamado de* **resolução projetiva apagada de A**.

**Definição 3.6.7.** *Sejam $F : \mathcal{M}_R \longrightarrow \mathcal{M}_S$ um funtor aditivo covariante. Seja $A \in \mathcal{M}_R$, $(\mathcal{P}, d)$ uma resolução projetiva de $A$ e $\mathcal{P}_A$ a resolução projetiva apagada de $A$. Definimos $(L_nF)(A) = H_n(F\mathcal{P}_A) = kerFd_n/ImFd_{n+1}$ e $L_nF : \mathcal{M}_R \longrightarrow \mathcal{M}_S$ é chamado de* **funtor derivado à esquerda de F**.

**Observação 3.6.3.** *Quando $n = 0$, vemos que $(L_0F)(A) = H_0(F\mathcal{P}_A) = FP_0/ImFd_1$.*

**Observação 3.6.4.** *Para definirmos $(L_nF)(f)$, sendo $f \in Hom_R(A, B)$, $A, B \in \mathcal{M}_R$, tomemos $\overline{f}$ uma extensão de $f$ entre resoluções projetivas de $A$ e $B$, respectivamente*

$$\mathcal{P} : \ldots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0$$

*e*

$$\tilde{\mathcal{P}} : \ldots \longrightarrow \tilde{P}_2 \xrightarrow{\tilde{d}_2} \tilde{P}^1 \xrightarrow{\tilde{d}_1} \tilde{P}_0 \xrightarrow{\tilde{\epsilon}} B \longrightarrow 0$$

*($\overline{f}$ existe pelo Teorema da Comparação 3.4.2). Considere a mesma notação $\overline{f}$ para o homomorfismo de complexos entre essas resoluções projetivas apagadas $\mathcal{P}_A$ e $\tilde{\mathcal{P}}_B$. Assim, definimos*

$$(L_nF)(f) = H_n(F\overline{f}) : H_n(F\mathcal{P}_\mathcal{A}) = (L_nF)(A) \longrightarrow H_n(F\tilde{\mathcal{P}}_B) = (L_nF)(B)$$

*e, portanto, se $z + B_n(F\mathcal{P}_\mathcal{A}) \in H^n(F\mathcal{P}_A)$, então*

$$(L_nF)(f)(z + B^n(F\mathcal{P}_\mathcal{A})) = f_n(z) + B^n(F\tilde{\mathcal{P}}_B),$$

*em que $f_n$ é o homomorfismo entre $P_n$ e $\tilde{P}_n$ da extensão $\overline{f}$.*

**Teorema 3.6.8.** *Para $F$ um funtor covariante aditivo, temos que $L_nF : \mathcal{M}_R \longrightarrow M_S$ é um funtor aditivo e $L_nF(A)$ independe da escolha da resolução projetiva de $A$.*

**Teorema 3.6.9.** *Seja $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta de $R$-módulos. Seja $F : \mathcal{M}_R \longrightarrow M_S$ um funtor covaritante aditivo. Então, existe uma sequência longa exata*

$$\ldots (L_nF)(A') \xrightarrow{i_*} (L_nF)(A) \xrightarrow{p_*} (L_nF)(A'') \xrightarrow{\partial} (L_{n-1}F)(A') \xrightarrow{i_*} (L_{n-1}F)(A) \longrightarrow \ldots$$

$$\ldots \longrightarrow (L_1F)(A'') \xrightarrow{\partial} (L_0F)(A') \xrightarrow{i_*} (L_0F)(A) \xrightarrow{p_*} (L_0F)(A'') \longrightarrow 0$$

*em que $i_*, p_*$ são, respectivamente, $L_nF(i), L_nF(p)$ e $\partial$ é homomorfismo de conexão.*

**Definição 3.6.8.** *Sejam $A \in \mathcal{M}_R$ e $B \in {}_R\mathcal{M}$. Considere os funtores covariantes aditivos $F = * \otimes_R B : \mathcal{M}_R \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$, $T = A \otimes_R * : {}_R\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$. Definimos os funtores $Tor_n^R(*, B) = L_nF$ e $tor_n^R(A, *) = L_nT$. Em particular, se $C \in \mathcal{M}_R$, $D \in {}_R\mathcal{M}$ e $(\mathcal{P}, d)$ e $(\mathcal{Q}, \partial)$ são respectivamente as resoluções projetivas de $C$ e $D$, temos*

$$Tor_n^R(C, B) = (L_nF)(C) = H_n(F\mathcal{P}_C) = ker(d_n \otimes id_B)/Im(d_{n+1} \otimes id_B)$$

*e*

$$tor_n^R(A, D) = (L_nT)(D) = H_n(T\mathcal{Q}_D) = ker(id_A \otimes \partial_n)/Im(id_A \otimes \partial_{n+1}).$$

**Corolário 3.6.2.** *Seja $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta de $R$-módulos à direita e $0 \longrightarrow B' \longrightarrow B \longrightarrow B'' \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta de $R$-módulos à esquerda. Então, existem sequências longas exatas*

$$\ldots \longrightarrow Tor_n^R(A', B) \longrightarrow Tor_n^R(A, B) \longrightarrow Tor_n^R(A'', B) \xrightarrow{\partial} Tor_{n-1}^R(A', B) \longrightarrow \ldots$$

$$\ldots \longrightarrow Tor_0^R(A', B) \longrightarrow Tor_0^R(A, B) \longrightarrow Tor_0^R(A'', B) \longrightarrow 0$$

*e*

$$\ldots \longrightarrow tor_n^R(A, B') \longrightarrow tor_n^R(A, B) \longrightarrow tor_n^R(A, B'') \xrightarrow{\partial} tor_{n-1}^R(A, B') \longrightarrow \ldots$$

$$\ldots \longrightarrow tor_0^R(A, B') \longrightarrow tor_0^R(A, B) \longrightarrow tor_0^R(A, B'') \longrightarrow 0$$

*em que $\partial$ é o homomorfismo de conexão.*

**Teorema 3.6.10.** *1) $Tor_0^R(A, *) \cong A \otimes_R *$, cujo isomorfismo é natural.*

*2) $tor_0^R(*, B) \cong * \otimes_R B$, cujo isomorfismo é natural.*

**Teorema 3.6.11.** *$Tor_n^R(A, B) \cong tor_n^R(A, B)$.*

Portanto, a partir de agora denotaremos *tor* por *Tor*.

**Lema 3.6.5.** *1) Seja $P \in \mathcal{M}_R$ projetivo. Então, $Tor_n^R(P, B) = 0$ para $n \geq 1$.*

*2) Seja $Q \in {}_R\mathcal{M}$ projetivo. Então, $Tor_n^R(A, Q) = 0$ para $n \geq 1$.*

**Lema 3.6.6.** *1) Seja $C \in \mathcal{M}_R$ plano. Então, $Tor_n^R(C, B) = 0$ para $n \geq 1$.*

*2) Seja $D \in {}_R\mathcal{M}$ plano. Então, $Tor_n^R(A, D) = 0$ para $n \geq 1$.*

**Teorema 3.6.12.** *$Tor_n^R(\bigoplus_{i \in I} A_i, B) \cong \bigoplus_{i \in I} Tor_n^R(A_i, B)$, cujo isomorfismo é natural.*

## 3.7 Homologia de Grupos

**Definição 3.7.1.** *Seja $(G,\cdot)$ um grupo multiplicativo e $R$ um anel com unidade. Definimos o* **anel de grupo** $RG = \left\{ \sum_{g\in G} r_g g \mid r_g \in R \text{ e quase todos os } r_g \text{ são } 0 \right\}$, *que consiste do $R$-módulo livre com base $G$ e cuja multiplicação do anel é definida pela multiplicação do grupo. Então, temos as seguintes operações:*

- $(\sum_{g\in G} r_g g) + (\sum_{g\in G} s_g g) = \sum_{g\in G}(r_g + s_g)g$, *onde quase todos os $r_g$ e quase todos os $s_g$ são $0$; logo, quase todos os $r_g + s_g$ são $0$.*
- $(\sum_{g\in G} r_g g)(\sum_{g'\in G} s_{g'} g') = \sum_{g,g'\in G} r_g s_{g'} g\cdot g'$, *onde quase todos os $r_g$ e quase todos os $s_{g'}$ são $0$; logo, quase todos os $r_g s_{g'}$ são $0$.*

  *Se $R$ é um anel comutativo, temos ainda:*

- $\forall t \in R,\ t((\sum_{g\in G} r_g g)(\sum_{g'\in G} s_{g'} g')) = t(\sum_{g,g'\in G} r_g s_{g'} g\cdot g') = \sum_{g,g'\in G} t r_g s_{g'} g\cdot g' = \sum_{g,g'\in G} r_g t s_{g'} g\cdot g' = (\sum_{g\in G} r_g g) t (\sum_{g'\in G} s_{g'} g')$.

*Nesse caso, $RG$ é uma álgebra sobre $R$, e dizemos que $RG$ é uma* **álgebra de grupo**.

Nessa seção, consideraremos $R = \mathbb{Z}$. O objetivo, posteriormente, é trabalhar com $R = \mathbb{Q}$.

**Definição 3.7.2.** *$A$ é um* **$\mathbb{Z}G$-módulo** *se $A$ é um grupo abeliano tal que existe uma ação de $G$ sobre $A$. Se a ação é pela esquerda, dizemos que $A$ é* **$\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda**. *Se a ação é pela direita, então $A$ é um* **$\mathbb{Z}G$-módulo à direita**.

**Observação 3.7.1.**

- *Se $G$ age em $A$ pela esquerda, então podemos definir uma ação de $G$ pela direita por $a\cdot g = g^{-1}\cdot a,\ a\in A,\ g\in G$.*
- *Todo grupo abeliano $A$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo, basta tomar ação trivial de $G$ em $A$, ou seja, $g\cdot a = a$. Nesse caso, dizemos que $A$ é* **$\mathbb{Z}G$-módulo trivial**.
- *$A$ é chamado de* **G-módulo** *se $A$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo.*

**Definição 3.7.3.** *Seja $G$ um grupo e $A$ um $G$-módulo à esquerda. Considere $\mathbb{Z}$ um $G$-módulo trivial. Os grupos $H_i(G,A) = Tor_i^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},A)$, também denotados $Tor_i^G(\mathbb{Z},A)$, $i\geq 0$, definem a* homologia do grupo G com coeficientes em A.

**Definição 3.7.4.** *O homomorfismo de anéis $\epsilon : \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z}$ dado por $\epsilon(\sum_{g\in G} r_g g) = \sum_{g\in G} r_g$ é chamado de* **homomorfismo de augmentação de $\mathbb{Z}$G**. *O ideal bilateral $ker\epsilon$ é chamado* **ideal augmentado de $\mathbb{Z}$G**, *denotado por* **Aug($\mathbb{Z}$G)**. *Vemos que $Aug(\mathbb{Z}G) = \left\{ \sum_{g\in G} z_g g \in \mathbb{Z}G \mid \sum_{g\in G} z_g = 0 \right\}$.*

**Lema 3.7.1.** *Seja $G$ um grupo e $A$ um $G$-módulo. Então, $H_0(G,A) \cong A/(Aug(\mathbb{Z}G)\cdot A)$.*

*Demonstração.* Sabemos que $H_0(G,A) = Tor_0^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},A) \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} A$. A sequência de $\mathbb{Z}G$-módulos $0 \longrightarrow Aug(\mathbb{Z}G) \hookrightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ é exata. Logo, $0 \longrightarrow Aug(\mathbb{Z}G) \otimes_{\mathbb{Z}G} A \hookrightarrow \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} A \xrightarrow{\epsilon \otimes id_A} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} A \longrightarrow 0$ é exata. Sabendo que $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} A \cong A$ através do isomorfismo $1 \cdot 1 \otimes a \leftrightarrow a$, temos que $Aug(\mathbb{Z}G) \otimes_{\mathbb{Z}G} A \cong Aug(\mathbb{Z}G) \cdot A$. □

**Corolário 3.7.1.** *$H_0(G,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.*

**Lema 3.7.2.** *Seja $G$ um grupo e $A$ um $G$-módulo. Então, $H_1(G,A) \cong Aug(\mathbb{Z}G)/Aug(\mathbb{Z}G)^2$.*

**Definição 3.7.5.** *O subgrupo normal de $G$ dado por $[G,G] = \{[g,h] = ghg^{-1}h^{-1} |\ g,h \in G\}$ é chamado de* **comutador de G**.

**Teorema 3.7.1.** *$Aug(\mathbb{Z}G)/Aug(\mathbb{Z}G)^2 \cong G/[G,G]$.*

*Demonstração.* [19], Teorema 10.2, pág. 266. □

**Corolário 3.7.2.** *Seja $G$ um grupo. Então, $H_1(G,\mathbb{Z}) \cong G/[G,G]$.*

**Definição 3.7.6.** *Seja $(\mathcal{A},\alpha)$ um complexo de $R$-módulos à direita e $(\mathcal{C},\gamma)$ um complexo de $R$-módulos à esquerda. Então, definimos $\mathcal{A}\otimes\mathcal{C}$ o complexo tal que $(\mathcal{A}\otimes\mathcal{C})_n = \bigoplus_{p+q=n} A_p \otimes_R C_q$ e o homomorfismos são $d_n = d'_{p,q} + (-1)^p d''_{p,q}$, em que $d'_{p,q} = \alpha_p \otimes id_{C_q} : A_p \otimes_R C_q \longrightarrow A_{p-1} \otimes_R C_q$ e $d''_{p,q} = id_{A_p} \otimes \gamma_q : A_p \otimes_R C_q \longrightarrow A_p \otimes_R C_{q-1}$.*

**Teorema 3.7.2** (Fórmula de Künneth, versão homológica)**.** *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}$ complexos de $R$-módulos com cada módulo de $\mathcal{A}$ plano. Existem sequências exatas naturais*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(\mathcal{A}) \otimes_R H_q(\mathcal{C}) \longrightarrow H_n(\mathcal{A}\otimes\mathcal{C}) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} Tor_1^R(H_p(\mathcal{A}), H_q(\mathcal{C})) \longrightarrow 0$$

*que cindem. Consequentemente,*

$$H_n(\mathcal{A}\otimes\mathcal{C}) \cong \Big(\bigoplus_{p+q=n} [H_p(\mathcal{A}) \otimes_R H_q(\mathcal{C})]\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p+q=n-1} Tor_1^R(H_p(\mathcal{A}), H_q(\mathcal{C}))\Big).$$

Como consequência da Fórmula de Künneth, é possível extrair a seguinte fórmula:

$$H_n(G_1 \times G_2, \mathbb{Q}) \cong \Big(\bigoplus_{p+q=n} [H_p(G_1,\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H_q(G_2,\mathbb{Q})]\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p+q=n-1} Tor_1^{\mathbb{Q}}(H_p(G_1,\mathbb{Q}), H_q(G_2,\mathbb{Q}))\Big).$$

**Teorema 3.7.3** (Teorema do Coeficiente Universal, versão homológica)**.** *Seja $G$ um grupo e $A$ um $G$-módulo trivial. Então,*

$$H_n(G,A) \cong H_n(G,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} A \oplus Tor_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(G,\mathbb{Z}), A).$$

*Demonstração.* Tome $\mathcal{P}$ uma resolução projetiva apagada de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo trivial. Considere o complexo $\mathcal{A} = \mathcal{P} \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}$ e o complexo $\mathcal{C}$ tal que $C_n = 0$, $\forall n \neq 0$ e $C_0 = A$. Assim, $\mathcal{A}\otimes\mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes A$. Temos que $(P_n \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} A \cong P_n \otimes_{\mathbb{Z}G} A$. Portanto, $H_n(\mathcal{A}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathcal{C}) \cong H_n(\mathcal{P} \otimes_{\mathbb{Z}G} A) = H_n(G,A)$. Pela Fórmula de Künneth, temos que $H_n(G,A) \cong (H_n(\mathcal{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} A) \oplus Tor_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(\mathcal{A}), A)$, em que $H_n(\mathcal{A}) = H_n(G,\mathbb{Z})$. □

**Corolário 3.7.3.** *Seja $G$ um grupo. Então, sendo $\mathbb{Q}$ um $G$-módulo trivial, temos*

$$H_1(G,\mathbb{Q}) \cong H_1(G,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

*Demonstração.* Pelo teorema 3.7.3 anterior e sabendo que $Tor_1^{\mathbb{Z}}(H_0(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Q}) = Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Q}) = 0$, pois $\mathbb{Z}$ é $\mathbb{Z}$-módulo livre. □

**Lema 3.7.3.** *Sejam $G_1,\ldots,G_n$ grupos. Então, $H_1(G_1 * \ldots * G_n,\mathbb{Q}) \cong \bigoplus_{i=1}^n H_1(G_i,\mathbb{Q})$.*

*Demonstração.* Primeiro, vamos mostrar que $\frac{G_1*G_2}{[G_1*G_2,G_1*G_2]} \cong \frac{G_1}{[G_1,G_1]} \oplus \frac{G_2}{[G_2,G_2]}$. Seja $a_1b_2a_2b_2\ldots a_kb_k \in G_1 * G_2$ na forma normal, com $a_i \in G_1$ e $b_i \in G_2$, $i = 1,\ldots,k$. Seja $\phi : \frac{G_1*G_2}{[G_1*G_2,G_1*G_2]} \longrightarrow \frac{G_1}{[G_1,G_1]} \oplus \frac{G_2}{[G_2,G_2]}$ dado por $\phi(\overline{a_1b_2a_2b_2\ldots a_kb_k}) = (\overline{a_1a_2\ldots a_k},\overline{b_1b_2\ldots b_k})$. É fácil ver que $\phi$ é um homomorfismo de grupos. Se $\phi(\overline{a_1b_2a_2b_2\ldots a_kb_k}) = (1,1)$, então $\overline{a_1a_2\ldots a_k} = 1$ e $\overline{b_1b_2\ldots b_k} = 1 \Rightarrow \overline{a_1b_2a_2b_2\ldots a_kb_k} = 1$, pois $\frac{G_1*G_2}{[G_1*G_2,G_1*G_2]}$ é abeliano. Claramente, $\phi$ é sobrejetiva. Portanto, $\phi$ é um isomorfismo. Daí,

$$H_1(G_1*G_2,\mathbb{Q}) = \frac{G_1*G_2}{[G_1*G_2,G_1*G_2]} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \left(\frac{G_1}{[G_1,G_1]} \oplus \frac{G_2}{[G_2,G_2]}\right) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} =$$

$$= \left(\frac{G_1}{[G_1,G_1]} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}\right) \oplus \left(\frac{G_2}{[G_2,G_2]} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}\right) = H_1(G_1,\mathbb{Q}) \oplus H_1(G_2,\mathbb{Q}).$$

Por indução, chegamos no resultado. □

**Proposição 3.7.1.** *Se $G$ é um grupo livre e $M$ é um $G$-módulo, então $H_n(G,M) = 0$, $\forall n \geq 2$.*

*Demonstração.* Basta considerar a resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, $G$ livre, feita em [10], pág. 16. □

## 3.8 Cohomologia de Grupos

**Definição 3.8.1.** *Seja $G$ um grupo e $A$ um $G$-módulo. Considere $\mathbb{Z}$ um $G$-módulo trivial. Os grupos abelianos $H^i(G,A) = Ext^i_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},A)$, também denotados $Ext^i_G(\mathbb{Z},A)$, $i \geq 0$, definem a* cohomologia do grupo G com coeficientes em A.

**Definição 3.8.2.** *Sejam $(\mathcal{A},\alpha)$ e $(\mathcal{C},\gamma)$ complexos de $R$-módulos. Denotamos $Hom(\mathcal{A},\mathcal{C})$ o complexo cujos termos são $(Hom(\mathcal{A},\mathcal{C}))_n = \prod_{p+q=n} Hom(A_{-p},C_q)$ tal que os homomorfismos são $d_n = (-1)^{n-1} \prod_{p+q=n} (d'_{p,q} + d''_{p,q})$, em que*

$$d'_{p,q} = Hom_R(*,C_q)(\alpha_{-p+1}) : Hom_R(A_{-p},C_q) \longrightarrow Hom_R(A_{-p+1},C_q)$$

*e*

$$d''_{p,q} = (-1)^{p+q+1} Hom_R(A_{-p},*)(\gamma_q) : Hom_R(A_{-p},C_q) \longrightarrow Hom_R(A_{-p},C_{q-1}).$$

**Teorema 3.8.1** (Fórmula de Künneth, versão cohomológica)**.** *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}$ complexos de $R$-módulos com cada módulo de $\mathcal{A}$ projetivo. Existem sequências exatas naturais*

$$0 \longrightarrow \prod_{q-p=n+1} Ext^1_R(H_p(\mathcal{A}), H_q(\mathcal{C}) \longrightarrow H^n(Hom(\mathcal{A}, \mathcal{C})) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \prod_{q-p=n} Hom_R(H_p(\mathcal{A}), H_q(\mathcal{C})) \longrightarrow 0$$

*que cindem.*

**Teorema 3.8.2** (Teorema do Coeficiente Universal, versão cohomológica)**.** *Seja $G$ um grupo e $A$ um $G$-módulo trivial. Então,*

$$H^n(G, A) \cong Hom_{\mathbb{Z}}(H_n(G, \mathbb{Z}), A) \oplus Ext^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(G, \mathbb{Z}), A).$$

**Lema 3.8.1** (Lema de Shapiro)**.** *Se $S$ é um subgrupo de $G$ e $A$ é um $S$-módulo, então, $\forall n \geq 0$,*

- $H^n(S, A) \cong H^n(G, Hom_S(\mathbb{Z}G, A))$;
- $H_n(S, A) \cong H_n(G, \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} A)$.

# Capítulo 4

# Sequências Espectrais

**Definição 4.0.3.** *Um* **módulo graduado M** *é uma família de R-módulos* $\{M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$. *Dizemos que* $N$ *é um* **submódulo graduado de M** *se* $N$ *é um módulo graduado e,* $\forall i \in \mathbb{Z}$, $N_i$ *é* $R$*-submódulo de* $M_i$.

**Definição 4.0.4.** *1) Um* **módulo bigraduado M** *é uma família de R-módulos* $\{M_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$.

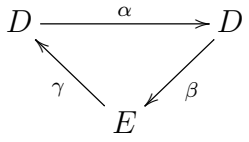
*2) Sejam* $M, \tilde{M}$ *módulos bigraduados. Dizemos que* $f : M \longrightarrow \tilde{M}$ *é um* **homomorfismo de módulos bigraduados de grau (a,b)** *se* $f$ *é uma sequência de homomorfismos de* $R$*-módulos* $\left\{f_{i,j} : M_{i,j} \longrightarrow \tilde{M}_{i+a,j+b}\right\}$.

*3)* $N$ *é* **submódulo bigraduado de M** *se* $N$ *é um módulo bigraduado e,* $\forall i, j \in \mathbb{Z}$, $N_{i,j}$ *é* $R$*-submódulo de* $M_{i,j}$. *Daí, podemos definir o* **módulo bigraduado quociente M/N**, *dado pela família de R-módulos quocientes* $\{(M/N)_{i,j} = M_{i,j}/N_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$.

*4)* **ker f** *e* **Im f** *são submódulos bigraduados respectivamente de* $M$ *e* $\tilde{M}$, *cujas definições são:*

$$ker f = N = \{N_{i,j} = ker f_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{Z}} \text{ e } Im f = \tilde{N} = \left\{\tilde{N}_{i,j} = Im f_{i-a,j-b} \subseteq \tilde{M}_{i,j}\right\}_{i,j\in\mathbb{Z}}.$$

**Definição 4.0.5.** *Um* **par exato** *de módulos bigraduados* $D$ *e* $E$ *é um triângulo exato com homomorfismos de módulos bigraduados* $\alpha,\ \beta,\ \gamma$,




*ou seja,* $Im\alpha = ker\beta,\ Im\beta = ker\gamma,\ Im\gamma = ker\alpha$.

## 4.1 Construção da Sequência Espectral

Considere o par exato de módulos bigraduados da definição acima cujos homomorfismos $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ têm bigraus, respectivamente, $(1,-1),\ (0,0),\ (-1,0)$. Vamos construir um novo par exato de módulos bigraduados denotados por $D^2$ e $E^2$ a partir do par exato dado.

Defina $D^2 = Im\alpha$, ou seja, $D^2_{p,q} = Im\alpha_{p-1,q+1}$. Portanto, $D^2$ é submódulo bigraduado de $D$. Defina, então, o homomorfismo de módulos bigraduados $\alpha^2_{p,q} = \alpha_{p,q}|_{D^2_{p,q}} : D^2_{p,q} \longrightarrow Im\alpha_{p,q} = D^2_{p+1,q-1}$. Logo, $\alpha^2$ tem bigrau $(1,-1)$.

Queremos definir, agora, $E^2$. Para isso, denotemos $d^1_{p,q} = \beta_{p-1,q} \circ \gamma_{p,q}$, ou seja, $d^1_{p,q} : E_{p,q} \xrightarrow{\gamma_{p,q}} D_{p-1,q} \xrightarrow{\beta_{p-1,q}} E_{p-1,q}$. Então, temos que $d^1$ é um homomorfismo de módulos brigraduados com bigrau $(-1,0)$.

**Afirmação 4.1.1.** $d^1_{p-1,q} \circ d^1_{p,q} = 0$.

*Demonstração.* Como o par de módulos bigraduados $D$ e $E$ é um triângulo exato, temos que $\gamma_{p,q} \circ \beta_{p,q} = 0$. Daí,

$$d^1_{p-1,q} \circ d^1_{p,q} = \beta_{p-2,q} \circ \underbrace{\gamma_{p-1,q} \circ \beta_{p-1,q}}_{0} \circ \gamma_{p,q} = 0.$$

□

Portanto, para cada $q \in \mathbb{Z}$, o par $(E_{*,q}, d^1_{*,q})$ gera o complexo

$$\ldots \longrightarrow E_{p+1,q} \xrightarrow{d^1_{p+1,q}} E_{p,q} \xrightarrow{d^1_{p,q}} E_{p-1,q} \xrightarrow{d^1_{p-1,q}} E_{p-2,q} \ldots$$

Finalmente, definimos $E^2 = H(E, d^1)$, em que $H(E, d^1)$ é a família de $R$-módulos $\left\{H_p(E_{*,q}, d^1_{*,q})\right\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$. Portanto, $E^2$ é um módulo bigraduado tal que $E^2_{p,q} = H_p(E_{*,q}, d^1_{*,q}) = ker d^1_{p,q}/Im d^1_{p+1,q}$.

Por fim, completamos a construção com as seguintes definições:

- Seja $z_{p,q} + Imd^1_{p+1,q} \in E^2_{p,q}$. Então, $\gamma^2_{p,q}(z_{p,q} + Imd^1_{p+1,q}) = \gamma_{p,q}(z_{p,q}) \in D^2_{p-1,q}$.
- Seja $a_{p,q} \in D^2_{p,q}$. Sabemos que $a_{p,q} = \alpha_{p-1,q+1}(b_{p-1,q+1})$ para algum $b_{p-1,q+1} \in D_{p-1,q+1}$. Então, $\beta^2_{p,q}(a_{p,q}) = \beta_{p-1,q+1} \circ \alpha^{-1}_{p-1,q+1}(a_{p,q}) + Imd^1_{p,q+1}$.

**Observação 4.1.1.** *$\gamma^2$ e $\beta^2$ estão bem definidos. De fato,*

- $z_{p,q} - z'_{p,q} \in Imd^1_{p+1,q} \Rightarrow \gamma_{p,q}(z_{p,q} - z'_{p,q}) = \gamma_{p,q} \circ d^1_{p+1,q}(w_{p+1,q}) =$

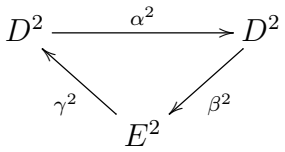
  $= \underbrace{\gamma_{p,q} \circ \beta_{p,q}}_{0} \circ \gamma_{p+1,q}(w_{p+1,q}) = 0$;

- $\beta_{p-1,q}(\gamma_{p,q}(z_{p,q})) = d^1_{p,q}(z_{p,q}) = 0 \Rightarrow \gamma_{p,q}(z_{p,q}) \in ker\beta_{p-1,q} = Im\alpha_{p-2,q+1} = D^2_{p-1,q}$.
- $c, c' \in \alpha^{-1}_{p-1,q+1}(a_{p,q}) \Rightarrow c - c' \in ker\alpha_{p-1,q+1} = Im\gamma_{p,q+1} \Rightarrow \beta_{p-1,q+1}(c - c') =$

  $= \beta_{p-1,q+1}(\gamma_{p,q+1}(b)) = d^1_{p,q+1}(b)$.

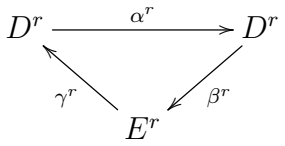
- $d^1_{p-1,q+1}(\beta_{p-1,q+1} \circ \alpha^{-1}_{p-1,q+1}(a_{p,q})) = \beta_{p-1,q+1} \circ \underbrace{\gamma_{p-1,q+1} \circ \beta_{p-1,q+1}}_{0} \circ \alpha^{-1}_{p-1,q+1}(a_{p,q}) = 0$.

**Teorema 4.1.1.** *O triângulo abaixo é exato,*



*em que $\alpha^2$ tem bigrau $(1,-1)$, $\beta^2$ tem bigrau $(-1,1)$ e $\gamma^2$ tem bigrau $(-1,0)$.*

Por indução, seja



um par exato de módulos bigraduados em que $\alpha^r$ tem bigrau $(1,-1)$, $\beta^r$ tem bigrau $(1-r,r-1)$ e $\gamma^r$ tem bigrau $(-1,0)$. Definimos $D^{r+1} = Im\alpha^r$, ou seja, $D^{r+1}_{p,q} = Im\alpha^r_{p-1,q+1}$.

Analogamente às definições acima, denotamos $d^r_{p,q} = \beta^r_{p-1,q} \circ \gamma^r_{p,q}$, ou seja, $d^r_{p,q} : E^r_{p,q} \xrightarrow{\gamma^r_{p,q}} E^r_{p-1,q} \xrightarrow{\beta^r_{p-1,q}} E^r_{p-r,q+r-1}$. Logo, $d^r$ é um homomorfismo de módulos bigraduados com bigrau $(-r,r-1)$. Ainda,

$$d^r_{p-r,q+r-1} \circ d^r_{p,q} = \beta^r_{p-r-1,q+r-1} \circ \underbrace{\gamma^r p-r, q+r-1 \circ \beta^r_{p-1,q}}_{0} \circ \gamma^r p, q = 0.$$

Podemos gerar o complexo

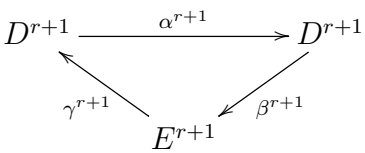
$$\ldots \longrightarrow E^r_{p+r,q-r+1} \xrightarrow{d^r_{p+r,q-r+1}} E^r_{p,q} \xrightarrow{d^r_{p,q}} E^r_{p-r,q+r-1} \xrightarrow{d^r_{p-r,q+r-1}} E^r_{p-2r,q+2(r-1)} \longrightarrow \ldots$$

para cada $p,q \in \mathbb{Z}$. Portanto, $E^{r+1} = H(E^r, d^r)$, em que $H(E^r,d^r)$ é a família das homologias do complexo acima, para cada $p,q \in \mathbb{Z}$. Denotamos $E^{r+1}_{p,q} = ker d^r_{p,q}/Im d^r_{p+r,q-r+1}$. Logo, $E^{r+1}$ é um módulo bigraduado.

Por fim, a definição de $\alpha^{r+1}$, $\beta^{r+1}$, $\gamma^{r+1}$ é induzida a partir de, respectivamente, $\alpha^r$, $\beta^r$, $\gamma^r$ assim como na primeira construção. Assim, temos:

- $\alpha^{r+1}_{p,q} = \alpha^r_{p,q}|_{D^{r+1}_{p,q}}$, $\alpha^{r+1}_{p,q} : D^{r+1}_{p,q} \longrightarrow D^{r+1}_{p+1,q-1}$;
- $\beta^{r+1}_{p,q}(a) = \beta^r_{p-1,q+1} \circ (\alpha^r_{p-1,q+1})^{-1}(a) + Im d^r_{p,q+1}$, $\beta^{r+1}_{p,q} : D^{r+1}_{p,q} \longrightarrow E^{r+1}_{p-r,q+r}$;
- $\gamma^{r+1}(z + Im d^r_{p+r,q-r+1}) = \gamma^r_{p,q}(z)$, $\gamma^{r+1}_{p,q} : E^{r+1}_{p,q} \longrightarrow D^{r+1}_{p-1,q}$.

**Teorema 4.1.2.** *O triângulo abaixo é exato,*



*em que $\alpha^{r+1}$ tem bigrau $(1,-1)$, $\beta^{r+1}$ tem bigrau $(-r,r)$ e $\gamma^{r+1}$ tem bigrau $(-1,0)$.*

**Definição 4.1.1.** *Uma* **sequência espectral** *é uma sequência de módulos bigraduados e homomorfismos de módulos bigraduados* $\{E^r, d^r\}_{r\geq 1}$ *tal que* $d^r \circ d^r = 0$ *e* $E^{r+1} = H(E^r, d^r)$.

## 4.2 Propriedades de Sequências Espectrais

**Definição 4.2.1.** *Dizemos que* $N$ *é* **subquociente** *do* $R$*-módulo* $M$ *se* $N$ *é um quociente* $M'/M''$ *tal que* $M'' \subseteq M'$ *são submódulos de* $M$.

Cada $E^{r+1}$ é subquociente de $E^r$, $r \geq 1$. Denote $Z^{r+1}_{p,q} = ker d^r_{p,q}$ e $B^{r+1}_{p,q} = Im d^r_{p+r,q-r+1}$. Obtemos, então, a seguinte sequência:

$$0 \subseteq B^2_{p,q} \subseteq B^3_{p,q} \subseteq \ldots \subseteq B^r_{p,q} \subseteq B^{r+1}_{p,q} \subseteq \ldots \subseteq Z^{r+1}_{p,q} \subseteq Z^r_{p,q} \subseteq \ldots \subseteq Z^3_{p,q} \subseteq Z^2_{p,q} \subseteq E^1_{p,q}.$$

**Definição 4.2.2.** *Denotamos* $B^\infty_{p,q} = \bigcup\limits_{r\geq 1} B^r_{p,q}$, $Z^\infty_{p,q} = \bigcap\limits_{r\geq 1} Z^r_{p,q}$ *e* $E^\infty_{p,q} = Z^\infty_{p,q}/B^\infty_{p,q}$, *sendo este último chamada* **termo limite** *da sequêcia espectral.*

**Definição 4.2.3.** *Seja* $H$ *um módulo graduado. Uma* **filtração de H** *é uma sequência* $\{\phi^p H\}_{p\in\mathbb{Z}}$ *de submódulos graduados de* $H$ *tais que* $\phi^p H \subseteq \phi^{p+1} H$, $\forall p \in \mathbb{Z}$, *ou seja,* $(\phi^p H)_i \subseteq (\phi^{p+1} H)_i$, $\forall i, p \in \mathbb{Z}$. *Dizemos que a filtração é* **limitada** *se,* $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\exists s(n), t(n) \in \mathbb{Z}$ *tais que* $0 = (\phi^{s(n)} H)_n$ *e* $(\phi^{t(n)} H)_n = H_n$.

**Definição 4.2.4.** *Seja* $\{E^r, d^r\}_{r\geq 1}$ *uma sequência espectral. Dizemos que a sequência espectral* **converge a H** *se existe uma filtração limitada* $\{\phi^p H\}_{p\in\mathbb{Z}}$ *de* $H$ *tal que* $E^\infty_{p,q} \cong (\phi^p H)_n/(\phi^{p-1} H)_n$, $n = p + q$. *Denotamos* $E^2_{p,q} \underset{p}{\Rightarrow} H_n$.

### 4.2.1 Sequência Espectral LHS

**Teorema 4.2.1** (Teorema de Grothendieck)**.** *Sejam* $A, B, C$ *categorias de módulos e* $G : U \longrightarrow B$, $F : B \longrightarrow C$ *funtores tais que* $F$ *é exato à esquerda e, se* $E \in U$ *é injetivo, então* $(R^p F)(GE) = 0$, $\forall p \geq 1$. *Então, para cada módulo* $A \in U$, *existe uma sequência espectral com*

$$E_2^{p,q} = (R^p F)(R^q G(A)) \underset{p}{\Rightarrow} R^n(F \circ G)(A),\ n = p + q.$$

**Teorema 4.2.2** (Teorema de Lyndon-Hochschild-Serre, versão homológica)**.** *Seja* $G$ *um grupo e* $N$ *um subgrupo normal de* $G$. *Seja* $A$ *um* $\mathbb{Z}G$*-módulo. Existe uma sequência espectral com*

$$E^2_{p,q} = H_p(G/N, H_q(N, A)) \underset{p}{\Rightarrow} H_n(G, A).$$

**Teorema 4.2.3** (Teorema de Lyndon-Hochschild-Serre, versão cohomológica)**.** *Seja* $G$ *um grupo e* $N$ *um subgrupo normal de* $G$. *Seja* $A$ *um* $\mathbb{Z}G$*-módulo. Existe uma sequência espectral com*

$$E_2^{p,q} = H^p(G/N, H^q(N, A)) \underset{p}{\Rightarrow} H^n(G, A).$$

# Capítulo 5

# Grupos de tipo $FP_n$

## 5.1 Resoluções de Tipo Finito

**Notação:** Seja $M \in {}_R\mathcal{M}$ livre com posto $k$. Então, $M$ é isomorfo à soma direta de $k$ anéis $R$. Denotaremos $M$ por $R^k$.

**Definição 5.1.1.** *Dizemos que $M \in {}_R\mathcal{M}$ é* **finitamente gerado** *se existe $X = \{m_1, \ldots, m_k\} \subseteq M$ tal que, $\forall m \in M$, $\exists r_1, \ldots, r_k \in R$ tais que $m = r_1m_1 + \ldots + r_km_k$. O conjunto $X$ é chamado de* **conjunto gerador de** *$M$.*

**Observação 5.1.1.** *$R$-submódulos de $R$-módulos não precisam ser finitamente gerados mesmo que o módulo seja. Considere, por exemplo, $R$ o anel de polinômios em $\mathbb{Z}$ sobre um conjunto infinito enumerável de variáveis, $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots]$. Temos que $R$ é $R$-módulo gerado por $\{1\}$. Tome $S$ o $R$-submódulo de $R$ dos polinômios de termo constante 0. Os polinômios $x_1, x_2, \ldots$ pertencem a $S$ e são gerados por eles mesmos, já que $x_n = 1 \cdot x_n$. Logo, $S$ é infinitamente gerado.*

**Corolário 5.1.1.** *Seja $B \in {}_R\mathcal{M}$. Se todo $R$-submódulo finitamente gerado de $B$ é plano, então $B$ é plano.*

**Proposição 5.1.1.** *Seja $M \in {}_R\mathcal{M}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*
*i) existe uma sequência exata $R^t \longrightarrow R^s \longrightarrow M \longrightarrow 0$ para alguns inteiros $t, s$.*
*ii) existe uma sequência exata $P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ para alguns $R$-módulos projetivos $P_0, P_1$ finitamente gerados.*
*iii) $M$ é finitamente gerado e para todo epimorfismo $\varphi : P \longrightarrow M$, $P$ um $R$-módulo projetivo finitamente gerado, $ker\varphi$ é finitamente gerado.*

*Demonstração.* iii) $\Rightarrow$ i): Seja $X$ o conjunto gerador finito de $M$, $|X| = s$, e $F(X)$ o $R$-módulo livre com base $X$, isomorfo a $R^s$. Já vimos que existe um epimorfismo $\alpha_s : F(X) \longrightarrow M$. Como $F(X)$ é projetivo e finitamente gerado, por hipótese, $ker\alpha_s$ é finitamente gerado. Seja $Y$ seu gerador, $|Y| = t$, e $F(Y)$ o $R$-módulo livre com base $Y$, isomorfo $R^t$. Então, existe um epimorfismo $\alpha_t : F(Y) \longrightarrow ker\alpha_s$. Logo, i) vale.
i) $\Rightarrow$ ii): óbvio, pois $R^t, R^s$ são $R$-módulos projetivos finitamente gerados.
ii) $\Rightarrow$ iii): Seja $\alpha_0$ o homomorfismo em ii) de $P_0$ em $M$ e $\alpha_1$ o homomorfismo em ii) de $P_1$ em $P_0$. Como $\alpha_0$ é sobrejetiva, então $M \cong P_0/ker\alpha_0$. Como $P_0$ é finitamente gerado, $M$

é finitamente gerado. Ainda, como $ker\alpha_0 = Im\alpha_1$ e $P_1$ é finitamente gerado, temos que $ker\alpha_0$ é finitamente gerado. Sejam $\varphi : P \longrightarrow M$ um epimorfismo com $P$ um $R$-módulo projetivo finitamente gerado, e as inclusões $i_0 : ker\alpha_0 \hookrightarrow P_0$ e $i : ker\varphi \hookrightarrow P$. Então, $0 \longrightarrow ker\alpha_0 \overset{i_0}{\hookrightarrow} P_0 \overset{\alpha_0}{\longrightarrow} M \longrightarrow 0$ e $0 \longrightarrow ker\varphi \overset{i}{\hookrightarrow} P \overset{\varphi}{\longrightarrow} M \longrightarrow 0$ são sequências exatas curtas que satisfazem as hipóteses do lema de Schanuel 3.3.3. Logo, $P_0 \oplus ker\varphi \cong P \oplus ker\alpha_0$. Como $P, ker\alpha_0$ e $P_0$ são finitamente gerados, $ker\varphi$ também é finitamente gerado. □

Se $M \in {}_R\mathcal{M}$ satisfaz as afirmações dessa proposição, dizemos que $M$ é **finitamente apresentável**. Isso vem de algumas conclusões que podemos extrair da proposição sobre $M$. De (i) vemos que $M \cong R^s/ker\alpha_s$. Mas $ker\alpha_s = Im\alpha_t$. Analogamente a geradores e relações de grupos, $M$ então tem $X$ como o conjunto dos seus geradores (cardinalidade $s$) e $\alpha_t(Y)$ o conjunto de suas relações (cardinalidade $t$), ambos finitos. Portanto, $M$ tem apresentação finita. Ainda, se $\{x_1, \ldots, x_k\}$ é outro conjunto finito de geradores de $M$, por (iii) vemos que o conjunto das relações de $M$ também é finito e forma um $R$-submódulo de $R^k$.

**Corolário 5.1.2.** *Todo $R$-módulo plano finitamente apresentável é projetivo.*

**Corolário 5.1.3.** *Considere a sequência exata curta de $R$-módulos $0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow B \longrightarrow 0$. Se $B$ é finitamente apresentável e $M$ é finitamente gerado, então $K$ é finitamente gerado.*

**Definição 5.1.2.** *Uma resolução qualquer é de* **tipo finito** *se todos os seus $R$-módulos são finitamente gerados. Dizemos que $M$ é de* **tipo** $FP_n$ *($n \geq 0$) se existe uma resolução projetiva de $M$ da forma $P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ tal que, $\forall i = 0, \ldots, n$, $P_i$ é finitamente gerado.*

**Observação 5.1.2.**

*Se $M$ é de tipo $FP_n$, como $P_0 \longrightarrow M$ é sobrejetiva, então $M$ é finitamente gerado.*

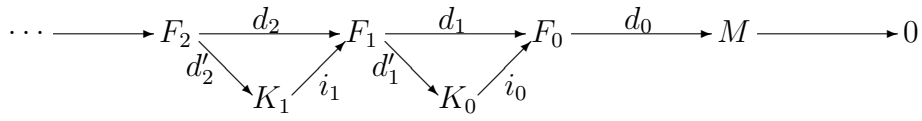
*Se $M$ é finitamente gerado e $X$ é seu conjunto gerador, existe uma sobrejeção do $R$-módulo livre gerado por $X$, que é projetivo e finitamente gerado. Portanto, $M$ é de tipo $FP_0$.*

*Se $M$ é finitamente apresentável, pela condição (i) da proposição 5.1.1, $M$ é de tipo $FP_1$.*

Dessa forma, podemos generalizar a proposição 5.1.1:

**Proposição 5.1.2.** *Seja $M$ um $R$-módulo e $n \geq 0$. As seguintes afirmações são equivalentes:*
*(i) $M$ tem resolução livre $F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ em que cada $F_i$ tem posto finito, $\forall i = 0, \ldots, n$.*
*(ii) $M$ é de tipo $FP_n$.*
*(iii) $M$ é finitamente gerado e, para toda resolução projetiva de $M$ de tipo finito da forma $P_k \overset{d_k}{\longrightarrow} P_{k-1} \overset{d_{k-1}}{\longrightarrow} \ldots \overset{d_1}{\longrightarrow} P_0 \overset{d_0}{\longrightarrow} M \longrightarrow 0$ com $0 \leq k < n$, $kerd_k$ é finitamente gerado.*

*Demonstração.* (iii) $\Rightarrow$ (i): Seja $X_0$ gerador de $M$, $|X_0| = t_0$. Tome $F_0$ o $R$-módulo livre com base $X_0$ e $d_0$ o epimorfismo de $F_0$ em $M$. Por hipótese, $K_0 = kerd_0$ é finitamente gerado. Seja $X_1$ o gerador de $K_0$, $|X_1| = t_1$. Tome $F_1$ o $R$-módulo livre com base $X_1$ e $d_1'$ o epimorfismo de $F_1$ em $K_0$. Considere $i_0$ a inclusão $K_0 \hookrightarrow F_0$ e defina $d_1 = i_0 \circ d_1'$. Temos que $Imd_1 = Im(i_0 \circ d_1') = i_0(K_0) = K_0 = kerd_0$. Continuando o processo até $n$, obtemos uma resolução livre de $M$ nas condições de (i).



(i) $\Rightarrow$ (ii): óbvio, pois $F_i$ é projetivo finitamente gerado, $\forall i = 0, \ldots, n$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): seja $P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$ uma resolução projetiva de $M$ de tipo finito.
1) Seja $\{x_1, \ldots, x_m\}$ o conjunto gerador de $P_0$. Então, se $m \in M$, $m = d_0(a) = d_0(r_1x_1 + \ldots + r_mx_m) = r_1d_0(x_1) + \ldots + r_md_0(x_m)$, $r_1, \ldots, r_m \in R$, $a \in P_0 \Rightarrow d_0(x_1), \ldots, d_0(x_m)$ geram $M$.
2) Por demonstração análoga a da (1), mostramos que $kerd_k = Imd_{k+1}$ é finitamente gerado, $\forall k < n$. Assim, seja $P'_k \xrightarrow{d'_k} P'_{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} \ldots \xrightarrow{d'_1} P'_0 \xrightarrow{d'_0} M \longrightarrow 0$ uma resolução projetiva de $M$ de tipo finito, $k < n$. As inclusões $kerd_k \hookrightarrow P_k$, $kerd'_k \hookrightarrow P'_k$ geram as sequências exatas

$$0 \longrightarrow kerd_k \hookrightarrow P_k \longrightarrow P_{k-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow kerd'_k \hookrightarrow P'_k \longrightarrow P'_{k-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P'_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Pela generalização do Lema de Schanuel 3.3.4,

$$kerd_k \oplus P'_k \oplus P_{k-1} \oplus P'_{k-2} \oplus \ldots \cong kerd'_k \oplus P_k \oplus P'_{k-1} \oplus P_{k-2} \oplus \ldots.$$

Portanto, como todos os $R$-módulos à esquerda do isomorfismo são finitamente gerados, $kerd'_k$ também deve ser finitamente gerado. □

**Proposição 5.1.3.** *Seja $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ um sequência exata curta de $R$-módulos. Então:*

*i) se $A'$ é de tipo $FP_{n-1}$ e $A$ é de tipo $FP_n$, então $A''$ é de tipo $FP_n$;*

*ii) se $A$ é de tipo $FP_{n-1}$ e $A''$ é de tipo $FP_n$, então $A'$ é de tipo $FP_{n-1}$;*

*iii) se $A'$ e $A''$ são de tipo $FP_n$, então $A$ é de tipo $FP_n$.*

*Demonstração.* [5], Proposição 1.4, pág. 12. □

**Definição 5.1.3.** *Um $R$-módulo $M$ é de* **tipo** $FP_\infty$ *se $M$ é de tipo $FP_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.*

**Proposição 5.1.4.** *Seja $M$ um $R$-módulo. As seguintes afirmações são equivalentes:*
*i) $M$ possui resolução livre infinita de tipo finito, ou seja, a resolução livre é da forma $\ldots \longrightarrow F_i \longrightarrow F_{i-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$, em que $F_i$ é finitamente gerado para todo $i \geq 0$.*
*ii) $M$ possui resolução projetiva infinita de tipo finito.*
*iii) $M$ é de tipo $FP_\infty$.*

*Demonstração.* (i) $\Rightarrow$ (ii): óbvio.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): se $\ldots \longrightarrow P_i \longrightarrow P_{i-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ é uma resolução projetiva de $M$, para cada $i$, $P_i \longrightarrow P_{i-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ é uma resolução projetiva de $M$.
(iii) $\Rightarrow$ (i): basta utilizar o mesmo processo de construção de resolução livre da demonstração da proposição 5.1.2. □

**Definição 5.1.4.** *$G$ é um* **grupo de tipo** *$FP_n$ se $\mathbb{Z}$ é de tipo $FP_n$ como $\mathbb{Z}G$-módulo trivial.*

Se $G$ é um grupo de tipo $FP_n$ e $M$ um $G$-módulo finitamente gerado como grupo abeliano, então $H_i(G, M)$ é finitamente gerado para todo $i \leq n$.

**Lema 5.1.1.** *Seja $H$ um subgrupo de $G$. Se $H$ é de tipo $FP_\infty$, então $\mathbb{Z}[G/H]$ é de tipo $FP_\infty$ como $\mathbb{Z}G$-módulo.*

*Demonstração.* Seja $\mathcal{P} : \ldots \longrightarrow P_i \longrightarrow P_{i-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ uma resolução projetiva de tipo finito do $\mathbb{Z}H$-módulo trivial $\mathbb{Z}$. Queremos mostrar que $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} \mathcal{P}$ é uma resolução projetiva de tipo finito de $\mathbb{Z}[G/H]$ como $\mathbb{Z}G$-módulo.
Existe um subconjunto $T$ de $G$ chamado transversal tal que $G = \dot{\bigcup}_{t\in T} Ht$. Portanto, $\mathbb{Z}G = \bigoplus_{t\in T} \mathbb{Z}Ht$, ou seja, $\mathbb{Z}G$ é um $\mathbb{Z}H$-módulo livre. Então, $\mathbb{Z}G$ é projetivo como $\mathbb{Z}H$-módulo $\Rightarrow \mathbb{Z}G$ é plano como $\mathbb{Z}H$-módulo $\Rightarrow \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} *$ é funtor exato. Logo, o complexo $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} \mathcal{P}$ é exato. Do teorema 3.3.6, temos que $P_i$ é somando de um $\mathbb{Z}H$-módulo livre $F_i \cong \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}H$, $I$ finito. Como $P_i$ é finitamente gerado, podemos tomar $F_i$ finitamente gerado. Daí,

$$\begin{aligned} F_i = P_i \oplus P_i' \Rightarrow (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} P_i) \oplus (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} P_i') \\ = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} (P_i \oplus P_i') = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} F_i \\ = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}H \\ = \bigoplus_{i\in I} (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} \mathbb{Z}H) \cong \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}G. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Portanto, $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} P_i$ é somando de um $\mathbb{Z}G$-módulo livre. Logo, $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} P_i$ é $\mathbb{Z}G$-módulo projetivo, também finitamente gerado.
Por fim, $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}[G/H]$ como $\mathbb{Z}G$-módulo. □

## 5.2 Dimensão Cohomológica

**Definição 5.2.1.** *Seja $M$ um $R$-módulo. A* **dimensão projetiva de M** *é o menor inteiro $n$ tal que $M$ admite uma resolução projetiva $0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$. Denotamos $n = projdim_R M$. Se $M$ não admite uma resolução projetiva finita, então $projdim_R M = \infty$.*

**Lema 5.2.1.** *São equivalentes:*

*i) $projdim_R M \leq n$;*

*ii) $Ext^i_R(M, *) = 0$ para $i > n$;*

*iii)* $Ext_R^{n+1}(M, *) = 0$;

*iv) Se* $0 \longrightarrow K \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ *é um sequência exata qualquer de* $R$*-módulos com* $P_i$ *projetivos, então* $K$ *é projetivo.*

**Definição 5.2.2.** *A* **dimensão cohomológica do grupo G**, *denotada por* **cd(G)**, *é o menor inteiro n tal que o lema 5.2.1 acima vale para* $R = \mathbb{Z}G$ *e* $M = \mathbb{Z}$ *como* $\mathbb{Z}G$*-módulo trivial. Ou seja,*

$$cd(G) = projdim_{\mathbb{Z}G}\mathbb{Z} = inf\,\{n|\ \mathbb{Z} \text{ admite uma resolução projetiva de tamanho } n\} =$$

$$= inf\left\{n|\ H^i(G, *) = 0 \text{ para } i > n\right\}.$$

*Se n não existe, então* $cd(G) = \infty$.

**Teorema 5.2.1** (Serre)**.** *Se G é um grupo livre de torção e H é um subgrupo de G de índice finito, então* $cd(H) = cd(G)$.

**Teorema 5.2.2** (Stallings)**.** *Seja G um grupo não-trivial. Se* $cd(G) = 1$, *então G é livre.*

**Teorema 5.2.3** (Lyndon)**.** *A dimensão cohomológica de um grupo livre de torção com uma relação é menor ou igual a 2.*

**Proposição 5.2.1.** *Seja* $G = \mathcal{F}(X)/R$ *o quociente de um grupo livre. Então, existe uma sequência exata de G-módulos*

$$0 \longrightarrow R_{ab} \longrightarrow \bigoplus_{x\in X}\mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

*em que* $R_{ab}$ *é a abelianização de R, ou seja,* $R_{ab} = R/[R, R]$.

**Teorema 5.2.4.** *Seja* $G = \mathcal{F}(X)/R$ *quociente de um grupo livre. Se G é um grupo de uma relação e livre de torção, então* $R_{ab} \cong \mathbb{Z}G$, *um G-módulo livre.*

Por isso, se $G$ é um grupo livre, temos que existe uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $G$-módulo trivial

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{x\in X}\mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Portanto, $cd(G) = 1$. Se $G$ é o grupo trivial, então

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{id_{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$. Logo, $cd(0) = 0$.

**Observação 5.2.1.** *Grupos livres abelianos de posto n são isomorfos a* $\mathbb{Z}^n$, *cuja dimensão cohomológica é n ([10], Exemplo 5, pág. 185).*

**Proposição 5.2.2.** *i) Se H é subgrupo de G, então* $cd(H) \leq cd(G)$;

*ii)* *se* $1 \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G'' \longrightarrow 1$ *é uma sequência exata curta de grupos, então* $cd(G) \leq cd(G') + cd(G'')$;

*iii)* *se* $G = G_1 *_{G_0} G_2$, *então* $cd(G) \leq max\{cd(G_1),\ cd(G_2),\ 1 + cd(G_0)\}$.

**Corolário 5.2.1.** *Se* $cd(G) < \infty$, *então* $G$ *é livre de torção.*

Em particular, se $G$ é um grupo finito, $G$ contém um subgrupo finito cíclico não-trivial. Daí, $cd(G) = \infty$.

**Proposição 5.2.3.** *Seja* $G$ *uma extensão HNN de grupo base* $G_0$, *letra estável* $t$ *e subgrupos associados* $A, B$. *Então,* $cd(G_0) \leq cd(G) \leq cd(G_0) + 1$.

A seguinte observação será usada para a demonstração do próximo teorema.

**Observação 5.2.2.** *Seja* $X$ *um conjunto qualquer. Então,* $\mathbb{Z}X$ *é o grupo abeliano livre com base* $X$. *Suponha que* $G$ *age em* $X$. *Então,* $X$ *é a união disjunta de* $G$*-órbitas de* $X$. *Logo,*

$$\mathbb{Z}X = \mathbb{Z}[\dot{\bigcup_{i\in I}} Gx_i] = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}[Gx_i] \cong \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}[G/G_{x_i}],$$

*em que* $G_{x_i}$ *é o subgrupo estabilizador de* $x_i$ *em* $X$ *e* $|I|$ *é o número de órbitas disjuntas.*
*O isomorfismo entre* $Gx_i$ *e* $G/G_{x_i}$ *se dá pela identificação* $gx_i \leftrightarrow gG_{x_i}$.

**Teorema 5.2.5.** *Seja* $G$ *o grupo fundamental de um grafo de grupos cujo grafo é finito.*

*i)* *Se os grupos de arestas e vértices são de tipo* $FP_\infty$, *então* $G$ *é de tipo* $FP_\infty$.

*ii)* *Se a dimensão cohomológica de cada grupo de aresta e vértice é finita, então* $cd(G) < \infty$.

*Demonstração.* i) Já vimos que $G$ age sobre a árvore de Bass-Serre $T$. Daí, $V(T)$ é a união disjunta de $G$-órbitas de alguns vértices de $T$. Logo, $\mathbb{Z}V(T) \cong \bigoplus \mathbb{Z}[G/G_v]$ como $\mathbb{Z}G$-módulos, em que a soma direta é sobre esses vértices.
Como $G_v$ é de tipo $FP_\infty$, pelo lema 5.1.1 anterior, vemos que $\mathbb{Z}V(T)$ é $\mathbb{Z}G$-módulo de tipo $FP_\infty$.
Seja $E$ uma orientação de $T$ tal que $GE = E$. Analogamente, $\mathbb{Z}E$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo de tipo $FP_\infty$.
Vamos denotar $V(T)$ por $V$. Sejam $\epsilon : \mathbb{Z}V \longrightarrow \mathbb{Z}$ e $\delta : \mathbb{Z}E \longrightarrow \mathbb{Z}V$ homomorfismos de $\mathbb{Z}G$-módulos, $\mathbb{Z}$ um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial, dados por: $\epsilon(zv) = z$ e $\delta(ze) = z(\tau(e) - \sigma(e))$.
Pelo lema 2.1.4, $\delta$ é injetiva, pois $T$ é árvore, e, como $T$ é conexo, $Im\delta = ker\epsilon$.
Então, temos a sequência exata de $\mathbb{Z}G$-módulos $0 \longrightarrow \mathbb{Z}E \xrightarrow{\delta} \mathbb{Z}V \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$. Sendo $\mathbb{Z}E$ e $\mathbb{Z}V$ de tipo $FP_\infty$, pela proposição 5.1.3 temos que $\mathbb{Z}$ é um $G$-módulo de tipo $FP_\infty$. Logo, $G$ é de tipo $FP_\infty$.

ii) Considere a sequência exata de $\mathbb{Z}G$-módulos $0 \longrightarrow \mathbb{Z}E \xrightarrow{\delta} \mathbb{Z}V \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$. Por Mayer-Vietoris para um grupo G agindo sobre uma árvore ([10], Exemplos 9.1, 9.2, pág. 178), existe sequência longa exata

$$\ldots \longrightarrow H^n(G, A) \longrightarrow \bigoplus H^n(G_v, A) \longrightarrow \bigoplus H^n(G_e, A) \longrightarrow H^{n+1}(G, A) \longrightarrow \ldots$$

para cada $G$-módulo $A$. Daí, se $max\{cd(G_e)\} = r$ e $max\{cd(G_v)\} = s$, então, se $i > max\{r, s\}$, temos que $H^i(G_v, A) = H^i(G_e, A) = 0$, $\forall e, v$. Logo, $H^{i+1}(G, A) = 0$, $\forall i > max\{r, s\}$. Portanto, pelo lema 5.2.1, temos que $cd(G) \leq max\{r, s\} + 1 < \infty$. □

# Capítulo 6

# Grupos Limites

## 6.1 Definições e Conceitos Principais

A definição de grupo limite dada por Sela ([20], Seção 1, pág. 33) é feita de forma geométrica usando uma construção limite que não será abordada aqui. Porém, comentaremos outras formas de se tratar grupos limites: como grupos finitamente gerados $\omega$-residualmente livres e como subgrupos finitamente gerados de torres $\omega$-residualmente livres. Além disso, descreveremos grupo limite como grupo fundamental de um certo grafo de grupos.

**Definição 6.1.1** ([20], Definição 4.5, pág. 60)**.** *Um grupo $G$ é dito* **completamente residualmente livre** *(ou* **$\omega$-residualmente livre**$)$ *se, para todo subconjunto finito $X = \{g_1, \ldots, g_n\} \subset G$ com $1 \notin X$, existe um homomorfismo de grupos $\phi : G \longrightarrow \mathcal{F}$, em que $\mathcal{F}$ é grupo livre, tal que $\phi(g_i) \neq 1$, $i = 1, \ldots, n$. Equivalentemente, para todo subconjunto finito $X \subset G$, existe um homomorfismo de grupos $\phi : G \longrightarrow \mathcal{F}$, em que $\mathcal{F}$ é grupo livre, tal que $\phi|_X$ é injetivo.*

**Teorema 6.1.1** ([20], Teorema 4.6, pág. 60)**.** *Seja $G$ um grupo finitamente gerado. Então, $G$ é completamente residualmente livre se, e somente se, $G$ é um grupo limite.*

**Definição 6.1.2.** *Um grupo $G$ satisfaz* **virtualmente** *uma propriedade se existe um subgrupo $H$ de $G$ com índice finito que satisfaz tal propriedade. Portanto, $G$ é um grupo* **virtualmente livre de torção** *se existe um subgrupo $H$ de $G$ com índice finito que é livre de torção. Pelo teorema 5.2.1 de Serre temos que todo subgrupo livre de torção de $G$ com índice finito tem a mesma dimensão cohomológica. Assim, definimos a* **dimensão cohomológica virtual de G**, *denotada por* **vcd(G)**, *como* cd(H).

**Definição 6.1.3.** *Um grupo $G$ é de* **tipo homológico finito** *se:*

*i) $vcd(G) < \infty$;*

*ii) para todo $G$-módulo $A$ finitamente gerado como grupo abeliano, temos que $H_i(G, A)$ é finitamente gerado para todo $i$.*

**Teorema 6.1.2** (Serre)**.** *Se $G$ é um grupo livre de torção e $H$ é um subgrupo de índice finito, então $cd(H) = cd(G)$.*

*Demonstração.* [10], Teorema 3.1, pág. 190. □

**Definição 6.1.4.** *Seja $G$ um grupo de tipo homológico finito e livre de torção. A* **característica de Euler de G**, *denotada por $\chi(G)$, é dada por*

$$\chi(G) = \sum_i (-1)^i dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} H_i(G, \mathbb{Z})).$$

**Definição 6.1.5.** *Uma* **torre $\omega$-residulamente livre** *é o grupo fundamental de um complexo $X_n$, para algum $n > 0$, construído da seguinte maneira:*

- *$X_0$ é uma união, por um ponto, de grafos, toros $m$-dimensionais $(S^1)^m$, e superfícies hiperbólicas fechadas com característica de Euler menor que -1.*
- *$X_{k+1}$ é construído acrescentando a $X_k$ uma das seguintes estruturas:*
  - *i) Uma superfície hiperbólica $\Sigma$ compacta com fronteira colada através da fronteira, $\chi(\Sigma) \leq -2$, com a condição de que exista uma retração $\rho : X_{k+1} \longrightarrow X_k$ tal que $\rho_*(\pi_1(\Sigma))$ não é abeliano.*
  - *ii) Um toro de qualquer dimensão, $T^m = (S_1)^m$, colado através de uma curva coordenada, isto é, $S^1 \times \{1\} \times \ldots \times \{1\}$, por exemplo. A imagem dessa curva coordenada em $X_k$ deve gerar um subgrupo abeliano maximal de $\pi_1(X_k)$.*

*O valor $n$ é chamado de* **altura** *da torre $\omega$-residualmente livre.*

Em [20], Seção 6, pág. 74, subgrupos finitamente gerados de torres $\omega$-residualmente livres são dados como exemplos de grupos limites. Já no artigo [21], Sela descreve grupo limite como um subgrupo finitamente gerado de uma torre $\omega$-residualmente livre (1.11, 1.12, pág.201). Portanto, podemos tratar grupos limites como os subgrupos finitamente gerados de torres $\omega$-residualmente livres. Essa descrição de grupos limites será usada para provar a Propriedade 2 de grupos limites mais adiante na Seção 6.2.

**Definição 6.1.6.** *A* **altura** *de um grupo limite $G$, denotada por $\boldsymbol{h(G)}$, é a altura mínima de uma torre $\omega$-residualmente livre que possui um subgrupo isomorfo a $G$.*

**Grupos limites de altura 0** são o produto livre de número finito de grupos livres abelianos de posto finito e grupos de superfície com característica de Euler menor ou igual a -2.

**Observação 6.1.1.**

- *O* **posto** *de um grupo abeliano é a cardinalidade do maior conjunto de elementos linearmente independentes sobre $\mathbb{Z}$ do grupo.*
- **Grupos de superfície** *são os grupos fundamentais de superfícies orientáveis e não-orientáveis. As superfícies orientáveis possuem apresentação*

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_{2d} |\ [x_1, x_2]\,[x_3, x_4] \ldots [x_{2d-1}, x_{2d}] \rangle$$

*e as não orientáveis*

$$\left\langle x_1, x_2, \ldots, x_d |\ x_1^2 x_2^2 \ldots x_d^2 \right\rangle.$$

Os dois lemas a seguir de [7], pág. 3, descrevem grupos limites de altura maior que 0.

**Lema 6.1.1.** *Seja $G$ um grupo limite de altura $h(G) \geq 1$. Então, $G$ é o grupo fundamental de um grafo finito bipartido de grupos, ou seja, os vértices do grafo podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos tais que cada aresta conecta um vértice de um conjunto a um vértice do outro. Os grupos de arestas são cíclicos infinitos ou triviais e os grupos de vértices são de dois tipos, cada um correspondente a um conjunto da bipartição: (i) isomorfos a um subgrupo de um grupo limite de altura $h-1$ e (ii) livres ou livres abelianos, de posto finito.*

**Lema 6.1.2.** *Seja $G$ um grupo limite que não pode ser decomposto como produto livre de dois subgrupos não-triviais. Se $G$ tem altura $h(G) \geq 1$, então $G$ é o grupo fundamental de um grafo finito de grupos com os grupos de aresta cíclicos infinitos e com um grupo de vértice que é grupo limite e não-abeliano de altura menor ou igual a $h(G)-1$.*

## 6.2 Propriedades de Grupos Limites

**Teorema 6.2.1.** *Seja $G$ o grupo fundamental de um grafo de grupos $\Delta$ cujo grafo $\Gamma$ é finito, cada grupo de vértice $G_v$ é finitamente apresentável e cada grupo de aresta $G_e$ é finitamente gerado. Então, $G$ é finitamente apresentável.*

*Demonstração.* Já vimos que

$$G = \pi(\Delta) = \frac{(\mathcal{F}(E(\Gamma)) * (\underset{v\in V(\Gamma)}{*} G_v))/M}{N},$$

em que $N$ é o fecho normal em $\mathcal{F}(E(\Gamma)) * (\underset{v\in V(\Gamma)}{*} G_v)$ do conjunto $\{e|\ e \in T\}$, onde $T$ é uma árvore maximal de $\Gamma$, e $M$ é o fecho normal em $\mathcal{F}(E(\Gamma)) * (\underset{v\in V(\Gamma)}{*} G_v)$ do conjunto $\{e^{-1}\sigma_e(a)e\tau_e(a)^{-1}|\ e \in E(\Gamma),\ a \in G_e\} \cup \{e\overline{e}|\ e \in E(\Gamma)\}$, em que $\sigma_e : G_e \longrightarrow G_{\sigma(e)}$ e $\tau_e : G_e \longrightarrow G_{\tau(e)}$ são os monomorfismos do grafo de grupos. Portanto, sendo $\langle X_v|\ R_v\rangle$ a apresentação de $G_v$ para cada $v \in V(\Gamma)$ e $X_e$ o conjunto finito gerador de $G_e$ para cada $e \in E(\Gamma)$, temos que $G$ tem apresentação

$$\left\langle E(\Gamma) \cup \bigcup_{v\in V(\Gamma)} X_v|\ \bigcup_{v\in V(\Gamma)} R_v \cup \bigcup_{e\in E(\Gamma), a\in X_e} \{e^{-1}\sigma_e(a)e\tau_e(a)^{-1}\} \cup \bigcup_{e\in E(\Gamma)} \{e\overline{e}\} \cup \bigcup_{e\in T} \{e\} \right\rangle,$$

em que todos os conjuntos são finitos, já que $V(\Gamma)$, $E(\Gamma)$, $X_v$, $R_v$, $X_e$ e $T$ são finitos. □

**Propriedade 6.2.1.** *Todo grupo limite é finitamente apresentável.*

*Demonstração.* Seja $G$ um grupo limite. Se $h(G) = 0$, já vimos que $G$ é o produto livre de um número finito de grupos com apresentação finita. Se $h(G) \geq 1$, por indução sobre a altura, pelo Lema 6.1.1, $G$ é decomposto como o grupo fundamental de um grafo de grupos com grafo finito, cujos grupos de arestas são cíclicos, ou seja, têm conjunto gerador finito, e os grupos de vértices têm apresentação finita, já que ou têm posto finito ou são grupos limites $G'$ com $h(G') < h(G)$ que, por indução, são finitamente apresentáveis. Portanto, pelo Teorema 6.2.1, $G$ é finitamente apresentável. □

**Propriedade 6.2.2.** *Todo subgrupo finitamente gerado de um grupo limite é grupo limite.*

*Demonstração.* Um subgrupo finitamente gerado de um grupo limite é um subgrupo finitamente gerado de uma torre $\omega$-residualmente livre e, portanto, um grupo limite. □

**Propriedade 6.2.3.** *Seja $G$ um grupo limite e $S$ um subgrupo de $G$. Se $dim_{\mathbb{Q}} H_1(S, \mathbb{Q}) < \infty$, então $S$ é finitamente gerado e, consequentemente, um grupo limite.*

*Demonstração.* Ver [7], Teorema 2, pág. 6. □

**Observação 6.2.1.** *Se $S$ é finitamente gerado, então*

$$\begin{aligned} H_1(S, \mathbb{Q}) &\cong \frac{S}{[S,S]} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong (\mathbb{Z}^m \oplus A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \\ &= (\mathbb{Z}^m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \oplus \underbrace{(A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})}_{0} \\ &= \oplus_{i=1}^{m} (\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^m, \end{aligned}$$

*em que $A$ é um grupo abeliano finito.*

**Propriedade 6.2.4.** *Todo grupo limite $G$ é de tipo $FP_\infty$ e $cd(G) < \infty$. Em particular, $G$ é livre de torção.*

*Demonstração.* Se $G$ é um grupo limite de altura 0, então $G$ é o produto livre finito de grupos de superfície e grupos livres abelianos de posto finito. Como grupos de superfície são grupos com uma relação, pelo teorema 5.2.3 sua dimensão cohomológica é menor ou igual a 2. Já vimos na observação 5.2.1 que grupos livres abelianos de posto finito têm dimensão cohomológica finita. Pelo item (iii) da proposição 5.2.2, $cd(G) < \infty$.
Se a altura de $G$ é maior que 0, então $G$ é o grupo fundamental de um grafo de grupos em que o grafo é finito e os grupos de vértices são livres ou livres abelianos, de posto finito, ou grupos limites de altura menor que $G$ cuja dimensão cohomológica é finita por indução, enquanto os grupos de arestas são cíclicos infinitos ou trivias. Grupos livres não-triviais têm dimensão cohomológica igual a 1, enquanto grupos não-triviais livres abelianos têm dimensão cohomológica igual a 2. Grupos trivias têm dimensão cohomológica 0.
Se considerarmos a sequência exata da proposição 5.2.1 e pelo teorema 5.2.4, vemos que os grupos $H$ finitamente gerados com uma relação são $FP_\infty$, já que existe uma resolução livre de $H$-módulos

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}H \longrightarrow \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z}H \longrightarrow \mathbb{Z}H \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

em que $X$ é um conjunto tal que $H \cong \mathcal{F}(X)/R$.
Se $H$ é grupo livre finitamente gerado, então existe uma resolução livre de $H$-módulos

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z}H \longrightarrow \mathbb{Z}H \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Portanto, $H$ também é $FP_\infty$.
Assim, por indução na altura de $G$ e pelo teorema 5.2.5 anterior, temos o resultado que queríamos demonstrar. □

## 6.3 Resultados envolvendo Grupos Limites

O resultados principais desta seção baseiam-se nos artigos [9] e [17].

Antes, façamos algumas considerações:

1) Seja $S$ um subgrupo finitamente gerado de $G_1 \times \ldots \times G_n$, cada $G_i$ um grupo limite. Considere $p_i : S \longrightarrow G_i$ a projeção de canônica. Então, $S$ é subgrupo de $p_1(S) \times \ldots \times p_n(S)$. Cada $p_i(S)$ é finitamente gerado. Logo, pela propriedade 6.2.2, cada $p_i(S)$ é um grupo limite.

2) Se $S \cap G_i = 1$, então o homomorfismo $\varphi_i : S \subseteq G_1 \times \ldots \times G_n \longrightarrow G_1 \times \ldots G_{i-1} \times G_{i+1} \times \ldots G_n$ dado por $\varphi_i(s_1, \ldots, s_n) = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ é injetivo. Logo, $S \cong \varphi_i(S)$, que é subgrupo de $G_1 \times \ldots G_{i-1} \times G_{i+1} \times \ldots G_n$.

Dizemos que $S$ é um **produto subdireto** de $G_1 \times \ldots \times G_n$ se $p_i(S) = G_i,\ \forall i = 1, \ldots, n$.

3) Seja $L_i = S \cap G_i \neq 1$. Então $L_i \triangleleft G_i$. Antes de demonstrarmos isso, precisamos observar que, na verdade, $L_i = S \cap \{1\} \times \ldots \times \{1\} \times G_i \times \{1\} \times \ldots \times \{1\}$. Portanto, vamos mostrar que $L_i \triangleleft \{1\} \times \ldots \times \{1\} \times G_i \times \{1\} \times \ldots \times \{1\}$. De fato, seja $(1, \ldots, 1, l_i, 1, \ldots, 1) \in L_i$. Como $p_i(S) = G_i$, temos que um elemento de $\{1\} \times \ldots \times \{1\} \times G_i \times \{1\} \times \ldots \times \{1\}$ é da forma $(1, \ldots, 1, s_i, 1, \ldots, 1)$, em que $s_i = p_i(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n)$. Portanto, vemos que $(1, \ldots, 1, s_i, 1, \ldots, 1)(1, \ldots, 1, l_i, 1, \ldots, 1)(1, \ldots, 1, s_i, 1, \ldots, 1)^{-1} = (1, \ldots, 1, s_i l_i s_i^{-1}, 1, \ldots, 1) \in L_i$.

**Lema 6.3.1.** *([8], Teorema 3.1) Seja $G$ um grupo limite e $L$ um subgrupo normal não-trivial de $G$. Então, existe um subgrupo $U$ de $G$ de índice finito tal que $U$ é uma extensão $HNN$ de grupo base finitamente gerado e com subgrupos associados cíclicos e letra estável $t \in L$.*

4) No caso do lema acima, vemos que $U$ é finitamente gerado. Portanto, U é grupo limite. Dessa forma, podemos considerar extensões HNN $U_i$ para cada $G_i$ definidas pelo lema acima. Temos que $U_1 \times \ldots \times U_n$ é subgrupo de índice finito de $G_1 \times \ldots \times G_n$. Ainda, $|S : S \cap (U_1 \times \ldots \times U_n)| \leq |G_1 \times \ldots \times G_n : U_1 \times \ldots \times U_n|$.

As considerações 1, 2 e 4 são *casos de redução* que serão aplicados nas demonstrações de alguns dos resultados do capítulo.

Primeiramente, vamos considerar algumas denotações. Vamos denotar $K_i = kerp_i$ e $N_{i,j} = p_j(K_i)$. Vemos que, se cada $p_j$ é sobrejetora, então $N_{i,j} \triangleleft G_j$: de fato, seja $g \in G_j$ e $h \in N_{i,j}$. Então, $g = p_j(m),\ m \in S$ e $h = p_j(k),\ k \in K_i$. Temos que $p_i(mkm^{-1}) = p_i(m)p_i(m)^{-1} = 1 \Rightarrow mkm^{-1} \in K_i$. Logo, $p_j(m)p_j(k)p_j(m)^{-1} = p_j(mkm^{-1}) \in N_{i,j}$.

**Lema 6.3.2.**

$$[N_{1,j}, N_{2,j}, \ldots, N_{j-1,j}, N_{j+1,j}, \ldots, N_{n,j}] := [[\ldots[[N_{1,j}, N_{2,j}], N_{3,j}], \ldots, ], N_{n,j}] \subseteq L_j.$$

*Demonstração.* Fixemos um $j$ e, para $i \neq j$, seja $\partial_{i,j} \in N_{i,j}$. Então, existe $\sigma_i \in S$ tal que $p_i(\sigma_i) = 1$ e $p_j(\sigma_i) = \partial_{i,j}$. Denotemos $\sigma = [\sigma_1, \ldots, \sigma_{j-1}, \sigma_{j+1}, \ldots, \sigma_n] \in S$. Se $x, y \in S$, então

$p_i([x,y]) = [p_i(x), p_i(y)]$. Portanto, é fácil ver que $p_j(\sigma) = [\partial_{1,j}, \ldots, \partial_{j-1,j}, \partial_{j+1,j}, \ldots, \partial_{n,j}] \in G_j$. Basta mostrar que $p_j(\sigma) \in L_j$. Se $i \neq j$, então $p_i(\sigma) = 1$, pois $p_i(\sigma_i) = 1$. Como a projeção de $\sigma$ em qualquer coordenada diferente de $j$ é 1, temos então que $\sigma \in S \cap G_j = L_j$. Logo, $p_j(\sigma) = \sigma \in L_j$. □

Para o próximo lema, assumiremos o seguinte teorema (sua demonstração encontra-se em [9], Teorema 4.1, pág. 11):

**Teorema 6.3.1.** *Sejam $G$ um grupo limite não-abeliano, $L$ um subgrupo não-trivial normal em $G$ e $A$ um subgrupo finitamente gerado de $G$ tal que $L$ é subgrupo de $A$. Então, $|G : A| < \infty$.*

**Lema 6.3.3.** *Sejam $G_1, \ldots, G_n$ grupos limites não-abelianos. Suponha $S$ um subgrupo finitamente gerado de $G_1 \times \ldots \times G_n$ tal que $H_2(S, \mathbb{Q})$ tem dimensão finita e $S$ satisfaz as seguintes condições:*

- *$n \geq 2$;*
- *cada projeção $p_i : S \longrightarrow G_i$ é sobrejetiva;*
- *cada interseção $L_i = S \cap G_i$ é não-trivial;*
- *cada $G_i$ é um grupo limite não-abeliano;*
- *cada $G_i$ é uma extensão $HNN$ com grupo base $B_1$ finitamente gerado e subgrupos associados cíclicos $C_i$ e $\tilde{C}_i$ e letra estável $t_i \in L_i$.*

*Seja $A_{i,j} = p_j(p_i^{-1}(C_i))$. Então, para todo $i, j$, temos que*

*i) $|G_j : A_{i,j}| < \infty$;*

*ii) $A_{i,j}/N_{i,j}$ é cíclico.*

*Demonstração.* ii) Denotemos $\widehat{C_i} = p_i^{-1}(C_i)$. Considere a restrição $p_i|_{\widehat{C_i}} : \widehat{C_i} \longrightarrow C_i$. Vemos que $\widehat{C_i}/K_i \cong C_i \Rightarrow \widehat{C_i}/K_i$ é cíclico. Tome agora o homomorfismo sobrejetor de $\widehat{C_i}/K_i$ em $A_{i,j}/N_{i,j}$ dado por $cK_i \mapsto p_j(c)N_{i,j}$. Portanto, $A_{i,j}/N_{i,j}$ é cíclico.

i) Sem perda de generalidade, podemos tomar $i = 1$. Por hipótese, $G_1$ é uma extensão $HNN$ e $p_1$ é sobrejetiva. Então, $S$ é uma extensão $HNN$ com grupo base $p_1^{-1}(B_1) = \widehat{B_1}$ e subgrupos associados $\widehat{C_1} = p_1^{-1}(C_1)$ e $p_1^{-1}(\tilde{C_1})$ e letra estável $\widehat{t_1} \in p_1^{-1}(t_1)$. Como $t_1 \in L_1 \subset G_1$, podemos tomar $\widehat{t_1} = (t_1, 1, \ldots, 1) \in S \subseteq G_1 \times \ldots \times G_n$. Além disso, sendo $C_1$ subgrupo cíclico de $G_1$, $C_1$ é livre de torção e, portanto, é isomorfo ao grupo trivial ou a $\mathbb{Z}$. Assim, podemos definir um homomorfismo $\alpha : C_1 \longrightarrow \widehat{C_1}$ tal que $p_1 \circ \alpha = id_{C_1}$. Daí, considerando a inclusão de $K_1$ em $\widehat{C_1}$, temos que $\widehat{C_1} = K_1 \rtimes \alpha(C_1)$. Se $c_1$ é gerador de $C_1$, então $\alpha(c_1) = \widehat{c_1}$ e $\alpha(C_1) = \langle \widehat{c_1} \rangle$.
Como $S$ é uma extensão $HNN$ com grupo base $\widehat{B_1}$ e subgrupos associados $\widehat{C_1}$ e $p_1^{-1}(\tilde{C_1})$, temos que $S$ é o grupo fundamental de um grafo de grupos cujo grafo $\Gamma$ é composto por um vértice e uma aresta $e$ tais que o grupo de vértice é o grupo base de $S$ e $\widehat{C_1}$ é o grupo de aresta. Pela

teoria de Bass-Serre, $S$ age sobre uma árvore $\tilde{\Gamma}$ tal que $S/\tilde{\Gamma} = \Gamma$. Assim, $E(\tilde{\Gamma})$ é o conjunto das $S$-órbitas $S[1,e]$ e $S[1,\overline{e}]$, da Segunda Construção que vimos anteriormente no Capítulo 3. O grupo de estabilizadores $S_e = \{s \in S |\ s[1,e] = [1,e]\} = \widehat{C_1}$. Logo, $\mathbb{Z}S[1,e] \cong \mathbb{Z}[S/\widehat{C_1}]$. Analogamente, $\mathbb{Z}V(\tilde{\Gamma}) \cong \mathbb{Z}[S/\widehat{B_1}]$. Temos, então, uma sequência exata curta de $S$-módulos

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[S/\widehat{C_1}] \xrightarrow{\theta} \mathbb{Z}[S/\widehat{B_1}] \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

em que $\theta(s\widehat{C_1}) = s\widehat{t_1}\widehat{B_1} - s\widehat{B_1}$. Sendo $* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ um funtor exato, obtemos uma sequência exata curta de $S$-módulos

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}[S/\widehat{C_1}] \xrightarrow{\theta} \mathbb{Q}[S/\widehat{B_1}] \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

que, aplicando $Tor_i^{\mathbb{Z}S}(\mathbb{Z}, *)$, nos dá uma sequência exata longa em homologia

$$\ldots \longrightarrow H_{i+1}(S,\mathbb{Q}) \longrightarrow H_i(S,\mathbb{Q}[S/\widehat{C_1}]) \longrightarrow H_i(S,\mathbb{Q}[S/\widehat{B_1}]) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H_i(S,\mathbb{Q}) \longrightarrow H_{i-1}(S,\mathbb{Q}[S/\widehat{C_1}]) \longrightarrow \ldots.$$

Sendo $\mathbb{Q}[S/\widehat{B_1}] \cong \mathbb{Q}S \otimes_{\mathbb{Q}\widehat{B_1}} \mathbb{Q}$, vemos que, pelo lema 3.8.1 de Shapiro, $H_i(S,\mathbb{Q}[S/\widehat{B_1}]) \cong H_i(\widehat{B_1},\mathbb{Q})$. Analogamente, $H_i(S,\mathbb{Q}[S/\widehat{C_1}]) \cong H_i(\widehat{C_1},\mathbb{Q})$. Isso nos dá uma sequência longa exata

$$\ldots \to H_{i+1}(S,\mathbb{Q}) \longrightarrow H_i(\widehat{C_1},\mathbb{Q}) \xrightarrow{\phi} H_i(\widehat{B_1},\mathbb{Q}) \longrightarrow H_i(S,\mathbb{Q}) \longrightarrow H_{i-1}(\widehat{C_1},\mathbb{Q}) \to \ldots, \quad (6.1)$$

em que $\phi = i_{2*} - i_{1*}$, sendo $i_{1*}$ induzido da inclusão $\widehat{C_1} \hookrightarrow \widehat{B_1}$ e $i_{2*}$ induzido da conjugação $c \mapsto \widehat{t_1}^{-1} c \widehat{t_1},\ c \in \widehat{C_1}$ (ver [10], pág. 180). Sendo $S$ finitamente gerado, temos que $H_1(S,\mathbb{Q}) = S/[S,S] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ tem dimensão finita.

Temos: $K_1/[K_1,K_1] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\mu} \underbrace{\widehat{C_1}/[\widehat{C_1},\widehat{C_1}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}}_{H_1(\widehat{C_1},\mathbb{Q})} \xrightarrow{\phi} \underbrace{\widehat{B_1}/[\widehat{B_1},\widehat{B_1}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}}_{H_1(\widehat{B_1},\mathbb{Q})}$, em que $\mu$ é induzido pela inclusão de $K_1$ em $\widehat{C_1}$. Mas sendo $K_1 \subseteq \{1\} \times \ldots \times G_n$ e $\widehat{t_1} = (t_1, 1, \ldots, 1)$, vemos que $[\widehat{t_1}, K_1] = 1 \Rightarrow \widehat{t_1}$ age trivialmente sobre $K_1$ por conjugação $\Rightarrow \widehat{t_1}$ age trivialmente sobre $H_1(K_1,\mathbb{Q})$ por conjugação. Logo, $\phi(Im\mu) = 0$. Portanto, $\phi$ induz o homomorfismo

$$\tilde{\phi} : H_1(\widehat{C_1},\mathbb{Q})/Im\mu \longrightarrow H_1(\widehat{B_1},\mathbb{Q}).$$

Mas $H_1(\widehat{C_1},\mathbb{Q})/Im\mu = H_1(\langle \widehat{c_1} \rangle, \mathbb{Q}) \cong \langle \widehat{c_1} \rangle \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Como $\langle \widehat{c_1} \rangle$ é 1 ou $\mathbb{Z}$, vemos que a dimensão de $H_1(\langle \widehat{c_1} \rangle, \mathbb{Q})$ sobre $\mathbb{Q}$ é no máximo 1. O diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_1(\widehat{C_1},\mathbb{Q}) & \xrightarrow{\phi} & H_1(\widehat{B_1},\mathbb{Q}) \\ {\scriptstyle \text{proj. can.}}\downarrow & \nearrow_{\tilde{\phi}} & \\ H_1(\widehat{C_1},\mathbb{Q})/Im\mu & & \end{array}$$

Portanto, $Im\phi = Im\tilde{\phi} \Rightarrow dim_{\mathbb{Q}} Im\phi \leq 1$. Da sequência longa exata 6.1 temos a sequência exata

$$\ldots \longrightarrow H_2(S,\mathbb{Q}) \longrightarrow H_1(\widehat{C_1},\mathbb{Q}) \longrightarrow Im\phi \longrightarrow 0.$$

Como $H_2(S,\mathbb{Q})$ e $Im\phi$ têm dimensão finita sobre $\mathbb{Q}$, então $dim_{\mathbb{Q}}H_1(\widehat{C_1},\mathbb{Q}) < \infty$.

Do homomorfismo sobrejetivo $\widehat{C_1} \longrightarrow p_j(\widehat{C_1}) = A_{1j}$ temos a sobrejeção $H_1(\widehat{C_1},\mathbb{Q}) \longrightarrow H_1(A_{1j},\mathbb{Q})$. Logo, $dim_{\mathbb{Q}}H_1(A_{1j},\mathbb{Q}) < \infty$. Pela propriedade 6.2.3, $A_{1j}$ é finitamente gerado.

Finalmente, temos que

$$p_1(S \cap G_j) = 1 \in G_1,\ j \neq 1 \Rightarrow S \cap G_j \subseteq p_1^{-1}(C_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_j = S \cap G_j = p_j(S \cap G_j) \subseteq p_j(p_1^{-1}(C_1)) = A_{1j}.$$

Assim, pelo Teorema 6.3.1, $1 \neq L_j \subseteq A_{1j} \subseteq G_j$, $A_{1j}$ finitamente gerado $\Rightarrow |G_j : A_{1j}| < \infty$. □

Antes de enunciar a próxima proposição, vamos enunciar o seguinte lema:

**Lema 6.3.4.** *Seja $A$ um grupo abeliano e $D$ um grupo finitamente gerado tal que $A$ é subgrupo normal de $D$ e $D/A$ é finitamente apresentável. Então, $A$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}[D/A]$-módulo.*

*Demonstração.* Seja $\langle X|R\rangle$ a apresentação de $D$, $X$ finito. Seja $Y$ um conjunto de geradores de $A$ como $D$-módulo. Então, $A = \langle Y\rangle^D$. Portanto, $D/A$ tem apresentação $\langle X|R \cup Y\rangle$. Por [12], Proposição 17, pág. 23, temos que existe um subconjunto finito $S$ de $R \cup Y$ tal que $D/A$ tem apresentação finita $\langle X|S\rangle$. Portanto, $A = \langle (S \cap Y)\rangle^D \Leftrightarrow A$ é gerado como $D$-submódulo por $S \cap Y$. Mas a ação de $D$ sobre $A$ induz ação de $D/A$ sobre $A$. Portanto, $S \cap Y$ é um conjunto finito que gera $A$ como $\mathbb{Z}[D/A]$-módulo. □

**Proposição 6.3.1.** *Seja $G$ o grupo fundamental de um grafo de grupos composto por um vértice e uma aresta cujo grupo de vértice é o grupo finitamente gerado $B$ e cujo grupo de aresta é o grupo cíclico infinito $C$. Então, $G$ é uma extensão $HNN$ com grupo base $B$ e subgrupos associados isomorfos a $C$ e letra estável $t$. Suponha que $G$ tenha subgrupos normais $L$ e $N$ tais que $t \in L$, $C \cap N = \{1\}$ e $G/N$ é cíclico infinito. Suponha, também, que $H_1(N,\mathbb{Q})$ tem dimensão infinita. Seja $\Delta \subset G$ o único subgrupo de $G$ de índice 2 que contém $B$. Então, existe um elemento $x \in L \cap \Delta \cap N$ tal que $R\overline{x} \subset H_1(N \cap \Delta;\mathbb{Q})$ é um $R$-módulo livre de posto 1, em que $R = \mathbb{Q}[\Delta/(N \cap \Delta)]$ e $\overline{x}$ é a classe de homologia determinada por $x$.*

*Demonstração.* Sabemos que $G$ age sobre a árvore de Bass-Serre $T$ associada a $G$ como extensão HNN. Definimos $N_2 = N \cap \Delta$ (veja que $N_2 \triangleleft G$). Como $N_2$ é subgrupo de $G$, então $N_2$ deve agir sobre $T$ por restrição da ação de $G$. Mas, pela teoria de Bass-Serre, $N_2$ é o grupo fundamental de um grafo de grupos com grafo $X = T/N_2$. Agora, queremos mostrar que $X$ é um grafo finito. Por hipótese, $|G : \Delta| = 2$. Logo, $|N : N_2|$ é 1 ou 2. Por hipótese, $G/N \cong \mathbb{Z}$. Como qualquer subgrupo não-trivial de $\mathbb{Z}$ tem índice finito, temos que $|G : NC| < \infty$. Assim,

$$|G : N_2C| = |G : NC||NC : N_2C| < \infty.$$

Pelo teorema 2.6.1, temos que

$$|V(X)| = |\{N_2gB|\ g \in G\}| \text{ e } |E(X)| = |\{N_2gC|\ g \in G\}|.$$

Temos então que $|E(X)| < \infty$. Como $C \subseteq B$, então $N_2gC \subseteq N_2gB$. Logo,

$$|V(X)| \leq |E(X)| \Rightarrow |V(X)| < \infty.$$

Portanto, $X$ é grafo finito. Pelo teorema 2.6.1, $N_2$ é grupo fundamental de um grafo de grupos cujo grafo é $X$ e os grupos de vértice são $N_2 \cap gBg^{-1}$, com $g \in \{N_2hB|\ h \in G\}$ e os grupos de arestas são $N_2 \cap gCg^{-1}$, com $g \in \{N_2hC|\ h \in G\}$. Mas $N_2 \cap gCg^{-1} = g(N_2 \cap C)g^{-1} = 1$. Ou seja, os grupos de arestas são triviais. Já vimos anteriormente no exemplo 2.4.1 que, nesse caso, $N_2 = (\underset{v \in V(X)}{*} (N_2)_v) * \pi_1(X)$. Então, pelo lema 3.7.3,

$$\begin{aligned} H_1(N_2, \mathbb{Q}) &= \bigoplus_{i=1}^{|V(X)|} (H_1(g_iBg_i^{-1} \cap N_2, \mathbb{Q}) \oplus H_1(\pi_1(X), \mathbb{Q})) \\ &\cong \bigoplus_{|V(X)|} (H_1(B \cap N_2, \mathbb{Q})) \oplus H_1(\pi_1(X), \mathbb{Q}) \\ &= \left[\bigoplus_{|V(X)|} \left(\frac{B \cap N_2}{[B \cap N_2, B \cap N_2]}\right) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}\right] \oplus \left[\frac{\pi_1(X)}{[\pi_1(X), \pi_1(X)]} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}\right]. \end{aligned}$$

Queremos mostrar que $dim_{\mathbb{Q}} H_1(N_2, \mathbb{Q}) = \infty$. Por hipótese, $dim_{\mathbb{Q}} H_1(N, \mathbb{Q}) = \infty$. A inclusão $N_2 \hookrightarrow N$ induz um homomorfismo de grupos $\frac{N_2}{[N_2,N_2]} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow \frac{N}{[N,N]} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Como $N_2$ é um subgrupo de índice 1 ou 2 em $N$, então

$$dim_{\mathbb{Q}} \frac{N}{[N,N]} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \leq \cdot dim_{\mathbb{Q}} \frac{N_2}{[N_2,N_2]} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

Isso implica que

$$dim_{\mathbb{Q}} \frac{N_2}{[N_2,N_2]} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = dim_{\mathbb{Q}} H_1(N_2, \mathbb{Q}) = \infty.$$

Mas então $dim_{\mathbb{Q}} H_1(B \cap N_2, \mathbb{Q}) = \infty$, já que $dim_{\mathbb{Q}} \frac{\pi_1(X)}{[\pi_1(X),\pi_1(X)]} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} < \infty$, pois $\pi_1(X)$ é livre de posto finito.

Agora, temos que $\frac{BN_2}{N_2} \cong \frac{B}{B \cap N_2} = \frac{B}{B \cap N} \cong \frac{BN}{N} \leq \frac{G}{N}$. Como $C \cap N = \{1\}$ e $C \subseteq B$, temos que $B \nsubseteq N \Rightarrow \frac{BN}{N} \cong \mathbb{Z}$. Portanto, $\frac{B}{B \cap N_2}$ possui um subgrupo $Q \cong \mathbb{Z}$ de índice finito. Portanto, $Q$ é gerado por um elemento que vamos chamar de $\tau$. Sabemos que, como $N_2 \triangleleft BN_2$, então $BN_2$ age sobre $N_2$ por conjugação. Isso implica que obtemos uma ação induzida de $\frac{BN_2}{N_2}$ em $H_1(N_2, \mathbb{Q})$, já que $N_2$ age trivialmente em $H_1(N_2, \mathbb{Q})$. Portanto, $Q$ age sobre $H_1(N_2, \mathbb{Q})$. Da mesma forma, como $B$ age sobre $B \cap N_2$ por conjugação, obtemos uma ação induzida de $\frac{B}{B \cap N_2}$ em $H_1(B \cap N_2, \mathbb{Q})$. Portanto, $Q$ age sobre $H_1(B \cap N_2, \mathbb{Q})$. Logo, $H_1(B \cap N_2, \mathbb{Q})$ é um $\mathbb{Q}Q$-submódulo de $H_1(N_2, \mathbb{Q})$.

Do fato que $\frac{B \cap N_2}{[B \cap N_2, B \cap N_2]} \triangleleft \frac{B}{[B \cap N_2, B \cap N_2]}$, pelo lema 6.3.4 temos que $\frac{B \cap N_2}{[B \cap N_2, B \cap N_2]}$ é finitamente gerado como um $\mathbb{Z}[\frac{B}{B \cap N_2}]$-módulo. Portanto, $H_1(B \cap N_2, \mathbb{Q})$ é finitamente gerado como um $\mathbb{Q}[\frac{B}{B \cap N_2}]$-módulo. Ainda, como $|\frac{B}{B \cap N_2} : Q| < \infty$, temos que $H_1(B \cap N_2, \mathbb{Q})$ é finitamente gerado como um $\mathbb{Q}Q$-módulo.

Observamos que $\mathbb{Q}Q = \mathbb{Q}[\tau, \tau^{-1}]$. Sabemos que $\mathbb{Q}[\tau]$ é um domínio euclidiano, portanto um domínio de ideias principais. Tome $Z = \{\tau^i|\ i \geq 0\}$. Vemos que $Z^{-1}\mathbb{Q}[\tau] = \left\{\frac{d}{z}|\ d \in \mathbb{Q}[\tau],\ z \in Z\right\} = \mathbb{Q}Q$. Portanto, $\mathbb{Q}Q$ é também um domínio de ideias principais. Como $H_1(B \cap N_2, \mathbb{Q})$ é finitamente gerado como $\mathbb{Q}Q$-módulo, temos que $H_1(B \cap N_2, \mathbb{Q})$ é

isomorfo à uma soma direta finita de $\mathbb{Q}Q$ e módulos cíclicos da forma $\frac{\mathbb{Q}Q}{(f)}$, $(f)$ um ideal principal. A dimensão de $\mathbb{Q}Q$ sobre $\mathbb{Q}$ é infinita, enquanto a dimensão de um módulo cíclico da forma $\frac{\mathbb{Q}Q}{(f)}$ sobre $\mathbb{Q}$ é finita. Como $dim_{\mathbb{Q}}H_1(B\cap N_2,\mathbb{Q})=\infty$, então $\mathbb{Q}Q\hookrightarrow H_1(B\cap N_2,\mathbb{Q})$. Seja $z\in B\cap N_2$ e $\overline{z}$ a imagem de $z$ em $H_1(B\cap N_2,\mathbb{Q})$ tal que $\mathbb{Q}Q\overline{z}\cong\mathbb{Q}Q$. Temos que $\mathbb{Q}Q\overline{z}\subseteq H_1(B\cap N_2,\mathbb{Q})$.

Considere, agora, $Q_0=\frac{\Delta}{N\cap\Delta}$. Observamos que $Q_0\cong\mathbb{Z}$. Novamente, $\mathbb{Q}Q_0$ é domínio de ideais principais tal que $\mathbb{Q}Q_0\overline{z}\cong\mathbb{Q}Q_0\subseteq H_1(N_2,\mathbb{Q})$. Se a letra estável $t\in\Delta$, então $G=\langle t,B\rangle\subseteq\Delta$, absurdo. Logo, $t\notin\Delta$. Tome $z_1=z$ e $z_2=tzt^{-1}$. Defina

$$x=[z,t]=ztz^{-1}t^{-1}=z_1z_2^{-1}.$$

Vemos que $z_1\in N_2\subseteq N$ e $z_2=tz_1t^{-1}\in tNt^{-1}=N$. Logo, $x\in N$. Da mesma forma, $z_1\in B\subset\Delta$ e $z_2\in t\Delta t^{-1}=\Delta$. Logo, $x\in\Delta$. Por fim,

$$x=(ztz^{-1})t^{-1}\in zLz^{-1}L\subseteq L\cdot L\subseteq L.$$

Então, $x\in L\cap N\cap\Delta\subseteq N_2$. Seja $\overline{x}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$ a imagem de $x$ em $H_1(N_2,\mathbb{Q})$. Vemos que $\overline{z_1}$ e $\overline{z_2}$ estão em somandos diferentes, pois se estivessem no mesmo, então $t\in N_2B\subseteq\Delta$, absurdo. Então, $\mathbb{Q}Q_0\overline{z_1}\cong\mathbb{Q}Q_0\overline{x}\cong\mathbb{Q}Q_0$. □

**Proposição 6.3.2.** *Sejam $G_1,\ldots,G_n$ grupos limites não abelianos. Se $S$ é um subgrupo finitamente gerado de $G_1\times\ldots\times G_n$ com $H_2(S_1,\mathbb{Q})$ de dimensão finita para cada subgrupo $S_1$ de índice finito de $S$ e se $S$ satisfaz as condições nos itens do Lema 6.3.3, então $N_{i,j}\subset G_j$ tem índice finito pra todo $i,j$.*

*Demonstração.* Vamos provar para o caso $(i,j)=(2,1)$. Considere

$$(p_1\times p_2):S\longrightarrow G_1\times G_2$$

o homomorfismo $(p_1\times p_2)(s)=(p_1(s),p_2(s))$. Denotamos $T=(p_1\times p_2)(S)$, a projeção de $S$ em $G_1\times G_2$. Definimos $M_1=T\cap(G_1\times\{1\})$ e $M_2=T\cap(\{1\}\times G_2)$. Vemos que $T\cap(G_1\times\{1\})=\{(p_1(s),1)|\ s\in kerp_2\}\cong p_1(kerp_2)=N_{2,1}$. Analogamente, $M_2=N_{1,2}$.

Considere agora o homomorfismo

$$\phi_1:G_1\longrightarrow\frac{T}{M_1\times M_2}$$

dado por $\phi_1(p_1(s))=(p_1(s),p_2(s))M_1\times M_2$. Temos que $\phi_1$ é sobrejetiva e $ker\phi_1=\{p_1(s)|\ s\in kerp_2\}=M_1$. Definindo analogamente

$$\phi_2:G_2\longrightarrow\frac{T}{M_1\times M_2}$$

vemos que $ker\phi_2=M_2$. Assim, temos os isomorfismos

$$\frac{G_1}{M_1}\cong\frac{T}{M_1\times M_2}\cong\frac{G_2}{M_2}.$$

Suponhamos que esses grupos sejam infinitos. Queremos obter uma contradição.
Pelo Lema 6.3.3, $\frac{G_1}{M_1}$ é virtualmente cíclico $\Rightarrow\frac{T}{M_1\times M_2}$ é virtualmente cíclico. Portanto, existe

um subgrupo $T_0$ em $T$ de índice finito contendo $M_1 \times M_2$ tal que $\frac{T_0}{M_1 \times M_2}$ é cíclico infinito. Daí, $p_1(T_0)$ é um subgrupo de $p_1(T) = G_1$ de índice finito que contém $M_1$, já que $M_1 \subseteq T_0 \Rightarrow p_1(M_1) = M_1 \subseteq p_1(T_0)$. Ainda, $\frac{p_1(T_0)}{M_1}$ é cíclico infinito. Temos a mesma conclusão análoga para $p_2(T_0)$.
Denotaremos $P_i = p_i(T_0),\ i = 1, 2$. Como $P_i$ é subgrupo de $G_i$, temos que $P_i$ é uma extensão $HNN$ com grupo base $B_i'$ e subgrupos associados $C_i'$ e $\tilde{C_i}'$ e letra estável $t_i'$, em que $C_i' = C_i \cap P_i$ e $t_i'$ é uma certa potência de $t_i$. Note que pelo lema 6.3.3 $C_i' \cap M_i = \{1\}$.
Se considerarmos da proposição 6.3.1 que $G = P_i,\ N = M_i,\ L = L_i,\ t = t_i',\ B = B_i',\ C = C_i'$, teremos um subgrupo $\Delta_i$ em $P_i$ de índice 2 que contém $B_i$ e $x_i \in L_i \cap \Delta_i \cap M_i$ tal que $R\overline{x_i}$ é um $R$-módulo livre de posto 1 em $H_1(M_i \cap \Delta_i, \mathbb{Q})$, em que $\overline{x_i}$ é a imagem de $x_i$ em $H_1(L_i \cap \Delta_i \cap M_i, \mathbb{Q})$ e $R = \mathbb{Q}[\frac{\Delta_i}{M_i \cap \Delta_i}]$.
Seja $\tau \in T_0$ tal que $\tau(M_1 \times M_2)$ gera $\frac{T_0}{M_1 \times M_2}$. Denotemos $\tau_i = p_i(\tau)$. Sabemos que $\frac{\Delta_i}{M_i \cap \Delta_i} \cong \frac{\Delta_i M_i}{M_i}$ é subgrupo de índice finito 1 ou 2 de $\frac{P_i}{M_i} \cong \mathbb{Z}$. Portanto, $\frac{\Delta_i}{M_i \cap \Delta_i} = \langle \tau_i \rangle$. Assim, $R\overline{x_i}$ é um $\mathbb{Q}[\tau_i^{\pm 1}]$-módulo livre de posto 1 em $H_1(M_i \cap \Delta_i, \mathbb{Q})$.
Defina agora $M_i' = M_i \cap \Delta_i$. Pela fórmula de Künneth 3.7.2, temos que $H_2(M_1' \times M_2', \mathbb{Q})$ é naturalmente isomorfo a

$$[H_1(M_1', \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H_1(M_2', \mathbb{Q})] \oplus [H_2(M_1', \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H_0(M_2', \mathbb{Q})] \oplus [H_0(M_1', \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H_2(M_2', \mathbb{Q})]$$

implicando que

$$H_1(M_1', \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H_1(M_2', \mathbb{Q}) \hookrightarrow H_2(M_1' \times M_2', \mathbb{Q})$$

é um monomorfismo de $\mathbb{Q}[\tau_1^{\pm 1}, \tau_2^{\pm 1}]$-módulos. Assim, $\overline{x_1} \otimes \overline{x_2}$ gera um $\mathbb{Q}[\tau_1^{\pm 1}, \tau_2^{\pm 1}]$-submódulo livre de $H_1(M_1', \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H_1(M_2', \mathbb{Q}) \subseteq H_2(M_1' \times M_2', \mathbb{Q})$.
Seja, agora, $T_1 = (M_1' \times M_2') \rtimes \langle \tau \rangle$ subgrupo de índice finito de $T_0$ e $S_1 = (p_1 \times p_2)^{-1}(T_1) \subseteq S$. Temos uma sequência exata curta $1 \longrightarrow M_1' \times M_2' \longrightarrow T_1 \longrightarrow \langle \tau \rangle \longrightarrow 1$. Pelo Teorema da Sequência Espectral LHS 4.2.2, temos que

$$E^2_{p,q} = H_p(\langle \tau \rangle, H_q(M_1' \times M_2', \mathbb{Q})) \underset{p}{\Rightarrow} H_{p+q}(T_1, \mathbb{Q}).$$

Mas, $\forall i \geq 2$,

$$H_i(\langle \tau \rangle, H_j(M_1' \times M_2', \mathbb{Q})) = 0 \Rightarrow E^k_{i,j} = 0.$$

Portanto, os homomorfismos $d^k_{i,j} : E^k_{i,j} \longrightarrow E^k_{i-k,j+k-1}$ são triviais, $\forall i \geq 2$. Tome $i = k$ e $j = 3 - k$, $k \geq 2$. Então, temos

$$E^k_{i,j} \xrightarrow{d^k_{i,j}} E^k_{0,2} \xrightarrow{d^k_{0,2}} E^k_{-k,k+1} = 0 \Rightarrow E^{k+1}_{0,2} = \frac{ker d^k_{0,2}}{Im d^k_{i,j}} = \frac{E^k_{0,2}}{0} = E^k_{0,2}.$$

Portanto, $E^\infty_{0,2} = E^2_{0,2} = H_0(\langle \tau \rangle, H_2(M_1' \times M_2', \mathbb{Q}))$. Logo, existe filtração de $H_2(T_1, \mathbb{Q})$ com quocientes $\left\{E^\infty_{i,j}\right\}_{i+j=2}$. Assim,

$$H_0(\langle \tau \rangle, H_2(M_1' \times M_2', \mathbb{Q})) = H_2(M_1' \times M_2', \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}\langle \tau \rangle} \mathbb{Q} \hookrightarrow H_2(T_1, \mathbb{Q}).$$

Aplicando o funtor $* \otimes_{\mathbb{Q}\langle \tau \rangle} \mathbb{Q}$ à fórmula de Künneth anterior, teremos que

$$H_1(M_1', \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H_1(M_2', \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}\langle \tau \rangle} \mathbb{Q} \hookrightarrow H_2(M_1' \times M_2', \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}\langle \tau \rangle} \mathbb{Q} \hookrightarrow H_2(T_1, \mathbb{Q}).$$

Para $m, n \in \mathbb{Z}$, vemos que $\tau_1^m x_1 \tau_1^{-m} \in M_1'$ e $\tau_2^n x_2 \tau_2^{-n} \in M_2'$. Pela proposição 6.3.1, as imagens de $\left\{\tau_1^m x_1 \tau_1^{-m}\right\}_{m\in\mathbb{Z}}$ e $\left\{\tau_2^n x_2 \tau_2^{-n}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ geram (como $\mathbb{Q}$-módulo), respectivamente, um $\mathbb{Q}\langle\tau_1\rangle$-submódulo livre de $H_1(M_1', \mathbb{Q})$ e um $\mathbb{Q}\langle\tau_2\rangle$-submódulo livre $H_1(M_2', \mathbb{Q})$.

Mas

$$(\mathbb{Q}\langle\tau_1\rangle \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\langle\tau_2\rangle) \otimes_{\mathbb{Q}\langle\tau\rangle} \mathbb{Q} \cong \frac{\mathbb{Q}[\tau_1, \tau_2, \tau_1^{-1}, \tau_2^{-1}]}{(\tau_1\tau_2 - 1)} \cong \mathbb{Q}[\tau_1, \tau_1^{-1}],$$

cuja dimensão em $\mathbb{Q}$ é infinita. Isto implica que

$$dim_{\mathbb{Q}} H_2(M_1' \times M_2', \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}\langle\tau\rangle} \mathbb{Q} = \infty.$$

Agora, temos que $L_1 \times L_2 \subseteq T_1$ induz um homomorfismo $H_2(L_1 \times L_2, \mathbb{Q}) \longrightarrow H_2(T_1, \mathbb{Q})$ cuja imagem tem dimensão infinita. Mas dessa inclusão e do homomorfismo sobrejetivo $S_1 = (p_1 \times p_2)^{-1}(T_1) \longrightarrow T_1$, $S_1$ com índice finito em $S$, podemos construir o diagrama comutativo abaixo.

$$\begin{array}{ccc} H_2(S_1, \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H_2(T_1, \mathbb{Q}) \\ \downarrow & \nearrow & \\ H_2(L_1 \times L_2, \mathbb{Q}) & & \end{array}$$

Mas a imagem de $H_2(L_1 \times L_2, \mathbb{Q})$ em $H_2(T_1, \mathbb{Q})$ tem dimensão infinita, e isso é uma contradição, pois $H_2(S_1, \mathbb{Q})$ tem dimensão finita. □

**Lema 6.3.5.** *Todo grupo limite $G$ tem característica de Euler $\chi(G) \leq 0$. Além disso, $\chi(G) = 0$ se, e somente se, $G$ é abeliano.*

*Demonstração.* Primeiramente, vamos provar para $G$ abeliano. Como $G$ é finitamente gerado abeliano livre de torção, temos que $G \cong \mathbb{Z}^n$. Assim, $G = \langle g_1, \ldots, g_n\rangle$. Tome $V = \mathbb{Z}e_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}e_n$ e defina

$$\Lambda^i V = \bigoplus_{k_1<\ldots<k_i} \mathbb{Z}(e_{k_1} \wedge \ldots \wedge e_{k_i}),\ k_j \in \{1, \ldots, n\},\ 1 \leq i \leq n.$$

Também defina

$$\partial_i : \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^i V \longrightarrow \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^{i-1} V$$

por

$$\partial_i(e_{k_1} \wedge \ldots \wedge e_{k_i}) = \sum_{r=1}^{i} (-1)^{r-1}(g_{k_r} - 1)e_{k_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e_{k_r}} \wedge \ldots \wedge e_{k_i}.$$

Temos então o complexo de Koszul

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^n V \xrightarrow{\partial_n} \ldots \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^2 V \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} V \longrightarrow \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Aplicando agora $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}G} *$, obtemos o complexo

$$0 \longrightarrow \Lambda^n W \xrightarrow{0} \ldots \xrightarrow{0} \Lambda^2 W \xrightarrow{0} W \xrightarrow{0} \mathbb{Q} \xrightarrow{id_{\mathbb{Q}}} \mathbb{Q} \longrightarrow 0,$$

em que $W = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} V$. Daí,

$$\begin{aligned}\chi(G) &= \sum_i (-1)^i dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} H_i(G, \mathbb{Z})) \\ &= \sum_i (-1)^i dim_{\mathbb{Q}}(\Lambda^i W) \\ &= \sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{n}{i} = (1-1)^n = 0.\end{aligned}$$

Considere, agora, $G$ o grupo descrito pela lema 6.1.1. Queremos mostrar que $\chi(G) \leq 0$. Então, $G$ é grupo fundamental de um grafo bipartido finito de grupos $\Gamma$ cujos grupos de arestas $G_e$ são cíclicos e os grupos de vértice $G_v$ são livres ou livres abelianos de posto finito e grupos limites com altura $\leq h - 1$. Por [10], Proposição 7.3(e), pág. 250 e considerando uma versão análoga para extensão HNN, temos que

$$\chi(G) = \sum_{v \in V(\Gamma)} \chi(G_v) - \sum_{e \in E(\Gamma)} \chi(G_e) \leq \sum_{v \in V(\Gamma)} \chi(G_v).$$

Mas $G_v$ é livre ou livre abeliano de posto finito ou tem altura $\leq h(G) - 1$. Por indução sobre a altura dos grupos,

$$\chi(G) \leq \sum_{v \in V(\Gamma)} \chi(G_v) \leq \sum_{v \in V(\Gamma)} 0 \leq 0.$$

Seja $G$ um grupo limite decomposto como um produto livre de subgrupos $H_1 * H_2$ com apresentação $\langle X \cup Y | R \cup S \rangle$. Então, $G$ finitamente gerado $\Rightarrow$ $H_1$ e $H_2$ finitamente gerados $\Rightarrow$ $H_1$ e $H_2$ são grupos limites. Por indução sobre a altura dos grupos, $\chi(H_i) \leq 0,\ i = 1, 2$. Assim,

$$\chi(G) = \chi(H_i) + \chi(H_2) - 1 \leq 0 + 0 - 1 = -1.$$

Se $G$ tem altura 0, então $G$ é o produto livre de número finito de grupos livres abelianos de posto finito e grupos de superfícies com característica de Euler menor que $-1$. Portanto, $\chi(G) \leq 0$.

Se $G$ não possui decomposição como produto livre, consideremos $G$ não abeliano descrito pela lema 6.1.2. Então, $G$ é o grupo fundamental de um grafo finito de grupos $\Gamma$ cujos grupos de arestas $G_e$ são cíclicos infinitos e possui pelo menos um grupos de vértice $G_{v_0}$ que é limite e não abeliano e cuja altura é menor ou igual a $h(G) - 1$. Por indução na altura dos grupos, $\chi(G_{v_0}) < 0$. Se $G_v$ são os grupos de vértice de $\Gamma$, então

$$\begin{aligned}\chi(G) &= \sum_{v \in V(\Gamma)} \chi(G_v) - \sum_{e \in E(\Gamma)} \chi(G_e) = \sum_{v \in V(\Gamma)} \chi(G_v) \\ &= \sum_{v \in V(\Gamma),\ v \neq v_0} \chi(G_v) + \chi(G_{v_0}) \\ &\leq \sum_{v \in V(\Gamma),\ v \neq v_0} 0 + \chi(G_{v_0}) \\ &= \chi(G_{v_0}) < 0.\end{aligned}$$

Provamos que se $G$ é grupo limite não-abeliano, $\chi(G) < 0$. Portanto, se $G$ é um grupo limite tal que $\chi(G) = 0$, então $G$ é abeliano.

□

Antes de enunciarmos os próximos resultados, recordemos algumas definições:

- Uma **série central descendente** de um grupo $G$ é definida por $\gamma_1(G) = G$ e $\gamma_i(G) = [\gamma_{i-1}(G), G]$. Se $G$ é abeliano, $\gamma_2(G) = 1$.
  $G$ é **nilpotente** se existe $n$ tal que $\gamma_n(G) = 1$. Se $G$ é finitamente gerado, definimos o **comprimento de Hirsch** de $G$ como a soma $\sum_{i=1}^{n-1} dim_{\mathbb{Q}}(\frac{\gamma_i}{\gamma_{i+1}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$.

- Um anel $R$ é **Noetheriano à esquerda (direita)** se todo ideal à esquerda (direita) em $R$ é finitamente gerado.

- Um $R$-módulo $M$ é Noetheriano se todo $R$-submódulo de $M$ é finitamente gerado.

- Um ideal $I$ de um anel comutativo $R$ é **primo** se, e somente se, $I \neq R$ e $\frac{R}{I}$ é um domínio. A **dimensão de Krull** de $R$ é o supremo dos comprimentos das cadeias de ideais primos de $R$. A dimensão de Krull de $\mathbb{Z}$, por exemplo, é 1, já que qualquer cadeia de ideais primos é da forma $0 \subset p\mathbb{Z}, p$ primo.

**Lema 6.3.6.** *Sejam $Q_1, \ldots, Q_n$ grupos nilpotentes finitamente gerados e $V_i$ um $\mathbb{Q}[Q_i]$-módulo finitamente gerado tal que $V_i$ contém um $\mathbb{Q}[Q_i]$-submódulo cíclico livre não trivial $W_i$, $i = 1, \ldots, n$. Suponha que $\tilde{Q}$ é um subgrupo de $Q = Q_1 \times \ldots \times Q_n$ tal que $V = V_1 \otimes_{\mathbb{Q}} \ldots \otimes_{\mathbb{Q}} V_n$ é finitamente gerado como um $\mathbb{Q}[\tilde{Q}]$-módulo. Então, $\tilde{Q}$ tem índice finito em $Q$.*

*Demonstração.* Primeiramente, vemos que

$$\mathbb{Q}[Q] = \mathbb{Q}[Q_1 \times \ldots \times Q_n] = \mathbb{Q}[Q_1] \otimes_{\mathbb{Q}} \ldots \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[Q_n].$$

Vamos definir

$$W = W_1 \otimes_{\mathbb{Q}} \ldots \otimes_{\mathbb{Q}} W_n.$$

Vemos que $W$ é um $\mathbb{Q}[Q]$-submódulo de $V$. Por consequência, $W$ é também um $\mathbb{Q}[\tilde{Q}]$-submódulo de $V$. Como $\mathbb{Q}[\tilde{Q}]$ é noetheriano à direita e $V$ é finitamente gerado como $\mathbb{Q}[\tilde{Q}]$-módulo, temos que $W \cong \mathbb{Q}[Q]$ é finitamente gerado sobre $\mathbb{Q}[\tilde{Q}]$, o que implica que

$$dim_{Krull}\mathbb{Q}[Q] \leq dim_{Krull}\mathbb{Q}[\tilde{Q}].$$

Pelo artigo [22], temos que $dim_{Krull}\mathbb{Q}[\tilde{Q}]$ é o comprimento de Hirsch de $\tilde{Q}$. Então, $Q$ e $\tilde{Q}$ têm o mesmo comprimento. Logo, $|Q : \tilde{Q}| < \infty$. □

**Proposição 6.3.3.** *Seja $G$ um grupo com $\chi(G) < 0$ tal que o $\mathbb{Q}[G]$-módulo trivial $\mathbb{Q}$ tem uma resolução livre de módulos finitamente gerados e comprimento finito. Então, para qualquer subgrupo normal $M$ de $G$ tal que $Q = \frac{G}{M}$ é nilpotente livre de torção e $M$ é livre, o $\mathbb{Q}[Q]$-módulo $V = \frac{M}{[M,M]} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ tem um $\mathbb{Q}[Q]$-submódulo livre não trivial. Temos que $Q$ age em $\frac{M}{[M,M]}$ via conjugação.*

*Demonstração.* Seja

$$\mathcal{P} : 0 \longrightarrow \mathbb{Q}[G]^{\alpha_k} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathbb{Q}[G]^{\alpha_0} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

a resolução livre de módulos finitamente gerados de $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{Q}[G]$-módulo trivial. Aplicando $* \otimes_{\mathbb{Q}[M]} \mathbb{Q}$, temos a sequência

$$\mathcal{R} = \mathcal{P} \otimes_{\mathbb{Q}[M]} \mathbb{Q} : 0 \longrightarrow \mathbb{Q}[G]^{\alpha_k} \otimes_{\mathbb{Q}[M]} \mathbb{Q} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathbb{Q}[G]^{\alpha_0} \otimes_{\mathbb{Q}[M]} \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}[M]} \mathbb{Q} \longrightarrow 0.$$

Mas

$$\mathbb{Q}[G]^{\alpha_i} \otimes_{\mathbb{Q}[M]} \mathbb{Q} \cong (\mathbb{Q}[G] \otimes_{\mathbb{Q}[M]} \mathbb{Q})^{\alpha_i} \cong \mathbb{Q}[Q]^{\alpha_i},\ i = 0, \ldots, k.$$

Portanto,

$$\mathcal{R} : 0 \longrightarrow \mathbb{Q}[Q]^{\alpha_k} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathbb{Q}[Q]^{\alpha_0} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow 0.$$

Assim,

$$H_i(\mathcal{R}) = Tor_i^{\mathbb{Q}[M]}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) = H_i(M, \mathbb{Q}).$$

Como $M$ é livre, temos que $H_i(M, \mathbb{Q}) = 0,\ \forall i \geq 2$. Ainda, $H_1(\mathcal{R}) = \frac{M}{[M,M]} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Como $Q$ é um grupo nilpotente livre de torção, temos que $\mathbb{Q}[Q]$ é um anel noetheriano à direita e à esquerda sem divisores de zero. Então, $\mathbb{Q}[Q]$ é um anel de Ore e, pelo teorema de Ore, $\mathbb{Q}[Q] \hookrightarrow K$, em que $K$ é um anel clássico de quocientes. Assim, $K$ é plano como $\mathbb{Q}[Q]$-módulo, o que implica que $* \otimes_{\mathbb{Q}[Q]} K$ é um funtor exato. Logo,

$$\mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Q}[Q]} K : 0 \longrightarrow K^{\alpha_k} \longrightarrow \ldots \longrightarrow K^{\alpha_0} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

e

$$H_i(\mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Q}[Q]} K) \cong H_i(\mathcal{R}) \otimes_{\mathbb{Q}[Q]} K = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \text{se } i \neq 1 \\ K^a & \text{se } i = 1. \end{array} \right\}$$

$a \geq 0$.

Então,

$$\begin{aligned} \chi(G) &= \sum_i (-1)^i \alpha_i \\ &= \sum_i (-1)^i dim_K H_i(\mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Q}[Q]} K) \\ &= \sum_i (-1)^i dim_K (H_i(\mathcal{R}) \otimes_{\mathbb{Q}[Q]} K) \\ &= -dim_K K^a = -a \leq 0. \end{aligned}$$

Logo, $V \otimes_{\mathbb{Q}[Q]} K \cong K^{\chi(G)}$.

Como $\chi(G) \neq 0$, temos que $V$ possui um submódulo isomorfo a $\mathbb{Q}[Q]$. De fato, se $\forall v \in V$ existe $\lambda \in \mathbb{Q}[Q] - \{0\}$ tal que $v\lambda = 0$, então

$$v\lambda = 0 \Rightarrow v \otimes 1_K = v\lambda \otimes \lambda^{-1} 1_k = 0 \otimes \lambda^{-1} 1_K = 0.$$

Mas $V \otimes_{\mathbb{Q}[Q]} K$ é $K$-módulo à direita com

$$(v \otimes k_1)k_2 = v \otimes (k_1 k_1),\ \forall v \in V,\ \forall k_1, k_2 \in K.$$

Logo, como $K$-módulo, $V \otimes_{\mathbb{Q}[Q]} K$ tem geradores $\{v \otimes 1_K\}_{v \in V}$. Portanto, $V \otimes_{\mathbb{Q}[Q]} K = 0$, contradição, pois $V \otimes_{\mathbb{Q}[Q]} K \cong K^{\chi(G)} \neq 0$. Assim, existe $v_0 \in V$ tal que, $\forall \lambda \in \mathbb{Q}[Q] - \{0\}$, $v_0 \lambda \neq 0$. Portanto, $v_0 \mathbb{Q}[Q] \cong \mathbb{Q}[Q]$. □

**Corolário 6.3.1.** *Seja $G$ um grupo limite não abeliano. Então, para qualquer subgrupo normal $M$ de $G$ tal que $Q = \frac{G}{M}$ é nilpotente livre de torção e $M$ é livre, o $\mathbb{Q}[Q]$-módulo $\frac{M}{[M,M]} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ tem um $\mathbb{Q}[Q]$-submódulo livre não trivial.*

*Demonstração.* [17], Corolário 8, pág. 6. □

Para o próximo teorema, usaremos o seguinte resultado:

**Corolário 6.3.2.** *Todo grupo limite é livre por nilpotente livre de torção.*

*Demonstração.* [17], pág. 4, Corolário 3. □

**Teorema 6.3.2.** *Sejam $G_1, \ldots, G_n$ grupos limites não abelianos e $S$ um produto subdireto finitamente gerado de $G = G_1 \times \ldots \times G_n$. Suponha $S \cap G_i$ não trivial para cada $i = 1, \ldots, n$ e $S$ de tipo $FP_s$ sobre $\mathbb{Q}$ para algum $s \in \{2, \ldots, n\}$. Então, para cada projeção canônica $p_{j_1,\ldots,j_s} : G \longrightarrow G_{j_1} \times \ldots \times G_{j_s}$, o grupo $p_{j_1,\ldots,j_s}(S)$ tem índice finito em $G_{j_1} \times \ldots \times G_{j_s}$.*

*Demonstração.* Pela Proposição 6.3.2 e pelo Lema 6.3.2, temos que, fixando j, $\bigcap_{i \neq j} N_{i,j}$ tem índice finito em $G_j$ e $\gamma_{n-1}(\bigcap_{i \neq j} N_{i,j}) \subseteq L_j$, para cada $j = 1, \ldots, n$. Substituindo cada $G_j$ por $\bigcap_{i \neq j} N_{i,j}$ e $S$ por $S \cap G_1 \times \ldots \times G_n$, temos que $\gamma_{n-1}(G_1) \times \ldots \times \gamma_{n-1}(G_n)$ é subgrupo de $S$.
Pelo Corolário 6.3.2, existe $j_0 \geq n-1$ tal que $M_i = \gamma_{j_0}(G_i)$ é livre, $\forall i \leq n$, e $Q_i = \frac{G_i}{M_i}$ é um grupo nilpotente finitamente gerado. Mas $Q_i$ possui um subgrupo de índice finito livre de torção. Mais um vez, podemos reduzir $G_i$ e $S$ por subgrupos de índice finito. Daí, temos $\frac{G_i}{M_i}$ nilpotente livre de torção. Considerando $M = M_1 \times \ldots \times M_n$, pela Fórmula de Künneth e pelo fato de que $H_k(M_i, \mathbb{Q}) = 0,\ \forall k \geq 2$ e $H_0(M_i, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$, temos que

$$H_i(M, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{1 \leq j_1 < \ldots < j_i \leq n} H_1(M_{j_1}, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \ldots \otimes_{\mathbb{Q}} H_1(M_{j_i}, \mathbb{Q}),\ i \leq n.$$

Considere agora $Q = \frac{S}{M}$ um subgrupo finitamente gerado, nilpotente e livre de torção de $Q_1 \times \ldots \times Q_n$. Cada $Q_{j_k}$ age em $H_1(M_{j_k}, \mathbb{Q}) \cong \frac{M_{j_k}}{[M_{j_k}, M_{j_k}]} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ via conjugação.

Seja

$$h_{j_1,\ldots,j_i} : Q_1 \times \ldots \times Q_n \longrightarrow Q_{j_1} \times \ldots \times Q_{j_i}$$

o homomorfismo canônico. Temos que $Q$ age em $H_1(M_{j_1}, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \ldots \otimes_{\mathbb{Q}} H_1(M_{j_i}, \mathbb{Q})$ através de $h_{j_1,\ldots,j_i}$. Pelo Corolário 6.3.1, temos que $H_1(M_{j_k}, \mathbb{Q})$ é um $\mathbb{Q}[Q_{j_k}]$-módulo que possui um $\mathbb{Q}[Q_{j_k}]$-submódulo livre não trivial. Queremos mostrar que $H_1(M_{j_1}, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \ldots \otimes_{\mathbb{Q}} H_1(M_{j_i}, \mathbb{Q})$ é finitamente gerado como $\mathbb{Q}[Q]$-módulo para $i \leq s$. Para isso, vamos mostrar que $H_i(M, \mathbb{Q})$ é finitamente gerado como $\mathbb{Q}[Q]$-módulo para $i \leq s$.
Como $S$ é de tipo $FP_s$ sobre $\mathbb{Q}$, tome

$$\mathcal{F} : \ldots \longrightarrow F_i \longrightarrow F_{i-1} \longrightarrow F_0 \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

uma resolução projetiva do $\mathbb{Q}[S]$-módulo trivial $\mathbb{Q}$ com $F_i$ finitamente gerado para $i \leq s$. Então,

$$H_i(M, \mathbb{Q}) = Tor_i^{\mathbb{Z}[M]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) \cong Tor_i^{\mathbb{Q}[M]}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) = H_i(\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Q}[M]} \mathbb{Q}).$$

Para $i \leq s$, vemos que $F_i \otimes_{\mathbb{Q}[M]} \mathbb{Q}$ é um $\mathbb{Q}[Q]$-módulo finitamente gerado. Como $\mathbb{Q}[Q]$ é noetheriano à direita, temos que cada subquociente de $F_i \otimes_{\mathbb{Q}[M]} \mathbb{Q}$ como $\mathbb{Q}[Q]$-módulo é finitamente gerado para $i \leq s$. Logo, $H_i(M, \mathbb{Q})$ é finitamente gerado como $\mathbb{Q}[Q]$-módulo para $i \leq s$. Portanto, pelo Lema 6.3.6 e pelo Corolário 6.3.1 segue que $h_{j_1,\ldots,j_s}(Q)$ tem índice finito em $Q_{j_1} \times \ldots \times Q_{j_s}$. □

**Corolário 6.3.3.** *Sejam $G_1, \ldots, G_n$ grupos limites não-abelianos e $S$ um produto subdireto de $G = G_1 \times \ldots \times G_n$ tal que $S \cap G_i$ é não-trivial, $i = 1, \ldots, n$. Se $S$ é de tipo $FP_n$, então $S$ tem índice finito em $G$.*

*Demonstração.* Basta aplicar o Teorema 6.3.2 no caso $s = n$. Vemos que, nesse caso, $p_{j_1,\ldots,j_s} = id_G$. □

# Referências Bibliográficas


[1] E. Alibegovic, M. Bestvina, Limit groups are CAT(0), J. London Math. Soc. (2) 74 (2006), 259-272.

[2] M. F. Atiyah, I.G. Macdonald, Introduction to Commutative Algebra. Great Britain: Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[3] G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, Algebraic geometry over groups. I. Algebraic sets and ideal theory, J. Algebra, 219 (1999), pp. 16-79.

[4] M. Bestvina, M. Feighn, Notes on Sela's work: Limit groups and Makanin-Razborov diagrams, 2003.

[5] R. Bieri, Homological dimension of discrete groups. Second edition. Queen Mary College Mathematical Notes. Queen Mary College, Department of Pure Mathematics, London, 1981.

[6] M.R. Bridson, J. Howie, C. F. Miller III, H. Short, The subgroups of direct products of surface groups, Geometriae Dedicata 92 (2002), 95-103.

[7] M.R. Bridson, J. Howie, Normalizers in limit groups, Math. Ann. 337 (2007), 385-394.

[8] M.R. Bridson, J. Howie, Subgroups of direct products of elementarily free groups, Geom. Func. Anal., 17 (2007), 385-403.

[9] M. R. Bridson, J. Howie, C. F. Miller III, H. Short, Subgroups of direct products of limit groups. Ann. of Math. 170 (2009), 1447-1467.

[10] K. S. Brown, Cohomology of groups. Graduate Texts in Mathematics, 87. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[11] C. Champetier, V. Guirardel, Limit groups as limits of free groups, Israel J. Math. 146 (2005), 1-75.

[12] D. E. Cohen, Combinatorial group theory. A topological approach, Queen Mary College Department of Pure Mathematics, London, 1978. Queen Mary College Mathematical Notes.

[13] R. Geoghegan, Topological methods in group theory. Graduate Texts in Mathematics, 243. Springer, New York, 2008.

[14] O. G. Kharlampovich, A. G. Myasnikov, Irreducible affine varieties over a free group. I. Irreducibility of quadratic equations and Nullstellensatz, J. Algebra 200 (1998), 472-516.

[15] O.G. Kharlampovich and A.G. Myasnikov, Irreducible affine varieties over a free group. II. Systems in triangular quasi-quadratic form and description of residually free groups, J. Algebra 200 (1998), 517-570.

[16] O. G. Kharlampovich, A. G. Myasnikov, Equations and fully residually free groups, In Combinatorial and geometric group theory, Trends Math., pages 203-242. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2010.

[17] D. H. Kochloukova, On subdirect products of type FPm of limit groups, J. Group Theory 13 (2010), no. 1, 1-19.

[18] D. S. Passman, A Course in Ring Theory. AMS Chelsea Publishing, Providence, 2004.

[19] J. J. Rotman, An introduction to homological algebra. Pure and Applied Mathematics, 85. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1979.

[20] Z. Sela, Diophantine geometry over groups I: Makanin-Razborov diagrams, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci., 93:31-105, 2001.

[21] Z. Sela, Diophantine geometry over groups. II. Completions, closures and formal solutions, Israel J. Math. 134 (2003), 173-254.

[22] P. F. Smith, On the dimension of group rings, Proc. London Math. Soc. 3 25 (1972), 288-302.

[23] H. Wilton, Solutions to Bestvina and Feighn's Exercises on limit groups, math.GR/0604137.