SOBRE A TEORIA GERAL DOS NÚCLEOS REPRODUTORES E APLICAÇÕES

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA TESE DEVIDAMENTE CORRIGIDA E DEFENDIDA PELO SR. MARCELO DOMINGOS MARCHESIN E APROVADA PELA COMISSÃO JULGADORA.

Campinas, 30 de agosto de 1993.

Prof. Dr. BENJAMIN BORDIN

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO, UNICAMP, COMO REQUISÍ TO PARCIAL PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM MATEMÁTICA APLICADA.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Benjamin Bordin pela competente orientação e incentivo.

Ao CNPQ e à Universidade Estadual de Campinas, por terem possibilitado este curso de pós-graduação.

Aos companheiros de pós-graduação pelo incentivo e apoio.

À Páscoa, Domingos e Flávia
pelos momentos de renúncia,
compreensão e incentivo

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

No estudo que segue, estaremos interessados em núcleos de um certo tipo específico. Estes núcleos são utilizados em diferentes ramos da matemática e, no princípio de seu desenvolvimento teórico, muitas vezes foram estudados com nomes e nomenclaturas distintas. Achamos então, necessário iniciar nosso trabalho com uma pequena introdução histórica, com a intenção de apresentar os diferentes modos pelos quais tais núcleos foram utilizados inicialmente. Também faremos alguns comentários sobre os mais importantes ramos de aplicação destes núcleos.

Para desmistificar o assunto definitivamente, vale a pena adiantar que os núcleos que estaremos estudando englobam todas as funções de Green de equações diferenciais ordinárias auto-adjuntas e também as funções de Green limitadas de equações diferenciais parciais. Portanto já são conhecidos há muito tempo, embora somente a partir do início deste século suas propriedades características foram ressaltadas e aplicadas.

O estudo destes núcleos se desenvolveu praticamente de maneira simultânea por vários pesquisadores seguindo basicamente duas linhas distintas de procedimento. Para aclararmos quais foram estas duas linhas de pesquisa, é conveniente que façamos algumas ponderações iniciais: Os núcleos que estaremos estudando podem ser caracterizados como funções de duas variáveis, $K(x,y)$, devido a uma propriedade descoberta por J. Mercer [52]. A este núcleo K corresponde um espaço bem definido F, de funções $f(x)$, em relação ao qual K possui a "propriedade reprodutora", que definiremos mais adiante, (E.H. Moore [55]). Reciprocamente à um dado espaço de funções pode corresponder um núcleo K munido da "propriedade reprodutora" (N. Aronszajn [4]).

Os pesquisadores que seguiam a primeira linha de investigação consideravam um dado núcleo K e o analisavam independente de qualquer outro contexto, ou , eventualmente, o aplicavam a vários domínios (como equações integrais, teoria dos grupos, etc). O espaço F correspondente ao núcleo K podia ser usado como um instrumento de pesquisa mas era introduzido posteriormente. Este tipo de procedimento pode ser encontrado em E.H. Moore [55] e mais recentemente em A. Weil [69], I. Gelfand e D. Raikoff [36] e R. Godement [37,38]. A segunda linha de investigação se interessava principalmente pelo espaço de funções F e seu correspondente núcleo K é utilizado essencialmente como um poderoso instrumento de investigação das funções deste espaço. Um dos maiores problemas deste tipo de procedimento é a construção explícita de um núcleo para um dado espaço F.

Mercer descobriu a seguinte propriedade:

$$\sum_{i,j=1}^{n} K(y_i,y_j)\bar{\xi}_i\xi_j \geq 0 \qquad (1)$$

válida para quaisquer pontos y_i , $i=1,\ldots,n$ e quaisquer constantes complexas ξ_i , $i=1,\ldots,n$. Esta propriedade caracteriza os núcleos de Mercer dentre todos os núcleos contínuos de equações integrais. A este mesmo ramo de pesquisa pertence o trabalho de E.H. Moore [54,55] que introduziu estes núcleo nas décadas de 20 e 30 com o nome de "matrizes hermitianas positivas" com interesse em sua aplicação a um tipo de generalização de equações integrais. Moore considerava núcleos K(x,y) definidos em conjuntos abstratos ExE e caracterizados pela propriedade (1). Foi Moore quem descobriu o teorema que hoje serve como uma das principais ligações entre os dois ramos: Ele demonstrou que a cada matriz hermitiana positiva correspondia um espaço de funções F munido de um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$, formando um espaço de Hilbert, no qual o núcleo possuia a seguinte propriedade, conhecida como propriedade reprodutora:

$$f(y) = \langle f(x),K(x,y)\rangle. \tag{2}$$

Podemos dizer que o segundo ramo de investigação se iniciou no início deste século com o trabalho de S. Zaremba [75,76] sobre problema de fronteira para funções harmônicas e bi-harmônicas. Ele foi o primeiro a introduzir em um caso particular, o núcleo correspondente a uma determinada classe de funções e a especificar sua propriedade reprodutora (2). Contudo ele não desenvolveu uma teoria geral nem tão pouco deu nenhum nome ao núcleo que estava introduzindo. Aparentemente nada neste sentido foi feito até a década de 30 quando S. Bergman [6] introduziu os núcleos correspondentes aos espaços de funções harmônicas e funções analíticas de uma ou mais variáveis. Ele as chamou de "funções núcleos". Estas funções foram introduzidas como núcleos de sistemas ortogonais destes espaços para uma determinada métrica. A propriedade reprodutora destas funções foi notada por Bergman [6] (e também N. Aronszajn [3]) mas ainda não era usada como sua característica fundamental como é atualmente.

Nos anos 30 e 40 o maior progresso se verificou no que hoje chamamos de núcleos de Bergman, ou seja, núcleos de espaços de funções analíticas de uma ou mais variáveis complexas em domínios regulares D com métrica dada por:

$$\int_D |f|^2 dz.$$

Muitos resultados importantes foram obtidos a partir do estudo destes núcleos dentre os quais podemos salientar os resultados relacionados à aplicações conformes de domínios simples ou multiplamente conexos (Bergman [14,15], Zarankiewicz [74] e outros), às aplicações pseudo-conformes (Bergman [9,10,11,12], Welke [71], Aronszajn [3] e outros), ao estudo de métricas Riemannianas invariantes (Bergman [14,17], Fuchs [32,33]) e em outras áreas.

A idéia original de Zaremba de aplicar os núcleos à solução de problemas de valores de fronteira foi desenvolvida nestas duas décadas por apenas alguns trabalhos de Bergman, (Bergman [6,7,8,13]). Esta idéia foi retomada posteriormente por Bergman em uma série de trabalhos (Bergman [16] e Bergman-Schiffer [18,19,20]) na segunda metade da década de 40. Neste estudo, comprovou-se que o núcleo é um utensílio poderoso para solucionar problemas de valores de fronteira para equações diferenciais parciais do tipo elíptico. Para uma equação diferencial parcial, demonstrou-se que o núcleo, de um espaço de soluções para um determinado domínio, é a diferença das correspondentes funções de Neumann e de Green (Bergman e Schiffer [18,20]). Zaremba já havia deduzido esta relação para o caso particular das equações bi-harmônicas.

Ao mesmo tempo em que se dava esta reatívação da aplicação dos núcleos às equações diferenciais parciais, ocorreu o desenvolvimento do estudo das relações entre estes núcleos e os núcleos de Bergman de funções analíticas (Bergman [15], M Schiffer[62,63]).

Também a aplicação de núcleos às transformações conformes de domínios multiplamente conexos conheceu grande progresso visto que todas as aplicações conformes importantes podem ser expressas de maneira simples através dos núcleos de Bergman (Bergman [14,15], P. Garabedian e M. Schiffer [35], Garabedian [34] e Z. Nehari [56,57]).

Em 1950 Aronszajn divulgou a teoria geral dos núcleos reprodutores que contém as funções de Bergman como um caso particular. Esta teoria possibilitou um estudo de forma geral de cada caso particular e ainda permitiu grandes simplificações em muitas das demonstrações envolvidas. Nesta teoria a propriedade reprodutora de um núcleo em relação ao espaço ao qual ele pertence é de importância fundamental. Na verdade o núcleo reprodutor é caracterizado por esta propriedade. Aronszajn verificou que um núcleo reprodutor sempre satisfaz a propriedade (1) e este pode ser considerado a segunda conexão entre as duas linhas de pesquisa utilizadas no desenvolvimento dos estudos dos núcleos.

Os pesquisadores que estudavam estes núcleos parecem não ter se dado conta da relação existente entre as noções matemáticas das duas linhas de pesquisa que desenvolviam. Hoje em dia sabemos que a noção de núcleo como sendo uma matriz hermitiana positiva é equivalente ao conceito de núcleo reprodutor e os métodos desenvolvidos em um ramo da pesquisa se mostram de grande importância no outro.

Mais recentemente a teoria dos núcleos reprodutores, como ficou conhecida a teoria estruturada por Aronszajn, se expandiu em diversas direções distintas onde a estrutura de espaço de Hilbert já exercia papel importante. Os núcleos reprodutores se mostraram ser, de fato, ferramentas importantes no desenvolvimento de várias áreas dentre as quais podemos citar a estatística de um modo geral, principalmente relacionada às séries temporais (Parzen [59,61]), aos problemas de detecção e estimação (Kailath [46], Tempel'man [65]) e aos processos estocásticos: integral múltipla de Weiner (Hida [42]), estudo de processos Gaussianos (Kallianpur [47]) e problemas de movimento Browniano (Molchan [53]). Também podemos destacar sua utilização na teoria das curvas splines (Weinert [70], De Boor [28]).

Yao, K [73], apresenta uma aplicação da teoria dos núcleos reprodutores aos modelos de sinais banda-limitados e escolhemos este estudo, em particular, para apresentarmos como exemplo de aplicação na dissertação que faremos a seguir.

O trabalho que nos propusemos a desenvolver tem por base a teoria geral dos núcleos reprodutores desenvolvida por Aronszajn [2] e assim sendo, segue predominantemente a segunda linha de abordagem com relação ao estudo dos núcleos reprodutores.

Nosso objetivo é realizar um estudo aprofundado da teoria desenvolvida por Aronszajn, analisar alguns exemplos clássicos de espaços munidos de núcleos reprodutores e em seguida fazer um estudo detalhado do trabalho de K. Yao [73] que apresenta um exemplo de aplicação da teoria do núcleos reprodutores à teoria dos sinais.

No capítulo 0 fornecemos uma sequência de definições e resultados importantes e considerados básicos na teoria dos espaços de Hilbert aos quais nos referiremos com frequência no desenrolar de nosso trabalho. Quanto a estes resultados, em nenhum momento nos preocupamos com a inclusão de suas demonstrações pois isto fugiria aos nossos objetivos, alongaria o trabalho, além de que, a maioria dos resultados enunciados neste capítulo são, de fato, bastante conhecidos de qualquer pessoa que tenha estudado a teoria dos espaços de Hilbert.

No capitulo 1 se concentra o corpo de nossa dissertação. Neste capítulo está praticamente todo o conteúdo da teoria dos núcleos reprodutores desenvolvida por Aronszajn em seu trabalho. Algumas seções foram omitidas para não tornarmos este trabalho longo demais, porém, consideramos que os principais resultados concernentes à teoria dos núcleos reprodutores não foram esquecidos. Tivemos o cuidado de verificar e incluir as demonstrações de praticamente todos os resultados que fazem parte deste capítulo. Nossa intenção foi justamente mergulhar a fundo nos conceitos introduzidos por Aronszajn, analisar e desenvolver suas demonstrações e assim tomarmos plena consciência do conteúdo de sua teoria, das construções e das manipulações algébricas possíveis de serem feitas com espaços de funções munidos de núcleos reprodutores.

O capítulo 2 serve para ilustrar, com vários exemplos, a relevância da teoria dos núcleos reprodutores. Iniciamos este capítulo com exemplos extremamente simples e aos poucos passamos a exemplos mais elaborados. Não poderíamos deixar de incluir exemplos de núcleos de Bergman, bem como casos de núcleos reprodutores que são funções de Green para determinadas equações diferenciais. Também, consideramos importante incluir alguns casos simples de construção explícita de alguns núcleos a partir de sistemas ortonormais completos, e ainda salientarmos algumas considerações relativas às aplicações conformes.

No capítulo 3 nos propusemos a estudar profundamente um exemplo concreto de aplicação da teoria desenvolvida por Aronszajn, que trata, entre outras coisas, do estudo dos espaços de funções cujas transformadas de Fourier se anulam fora de um intervalo finito da reta real. Estes espaços são exemplos do que chamamos de espaços de sinais banda-limitados com larga aplicação em estatística.

Além dos espaços de sinais banda-limitados de transformada de Fourier podemos mencionar ainda os sinais banda-limitados de transformadas de Hankel, seno e cosseno que são exemplos específicos de espaços de Hilbert abstratos munidos de núcleo reprodutor. As propriedades básicas destes espaços são utilizadas para um estudo detalhado dos sinais banda-limitados. Também discutimos a importância da teoria dos núcleos reprodutores em resolução de problemas de máximos e mínimos. São apresentados também alguns resultados novos e outros já conhecidos relacionados à energia mínima e interpolação não-uniforme, expansão amostral e limitantes de erros de truncamento obtidos a partir do ponto de vista unificado da teoria dos espaços de Hilbert com núcleos reprodutores. Concluindo a este respeito, podemos dizer que a teoria dos núcleos reprodutores simplifica manipulações em alguns caso mas com certeza o fato mais importante é que ela oferece uma visão global e unificada em todos os casos.

CAPÍTULO 0

RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo forneceremos as noções básicas para uma compreensão dinâmica do trabalho que segue. Basicamente introduziremos aqui o conceito de espaço de Hilbert, seus resultados principais, alguns resultados sobre teoria dos operadores, bem como destacaremos a notação que será utilizada durante todo o trabalho.

1-DEFINIÇÃO: Chamaremos de espaço de Hilbert a um espaço vetorial H munido de um produto interno, $\langle\ ,\ \rangle$, que seja completo na norma $\|\ \|$ induzida por este produto interno.

OBSERVAÇÕES: 1) Se H é um espaço de funções usaremos a notação $\langle\ ,\ \rangle_x$ para indicar que o produto interno é pensado considerando-se os elementos de H como funções de x. Quando não houver possibilidade de confusão, simplesmente omitiremos o sub-índice x.

2) Chamaremos de espaço pré-Hilbertiano ou espaço pré-Hilbert ao espaço que satisfaz todas as condições para ser um espaço de Hilbert com exceção da completude.

As duas desigualdades que virão a seguir são utilizadas com frequência quando trabalhamos com espaços vetoriais munidos de produto interno:

2-DESIGUALDADE DE CAUCHY-SCHWARZ: Se H é um espaço pré-Hilbertiano, então para quaisquer elementos x, y $\in$ H vale a seguinte desigualdade:

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$$

onde $||z||^2 = \langle z,z\rangle^2$.

3-DESIGUALDADE DE BESSEL: Se H é um espaço pré-Hilbertiano, e $\{x_n\}$ uma sequência ortonormal em H, então para qualquer elemento $y \in H$ vale a seguinte desigualdade:

$$\sum |\langle y,x_n\rangle|^2 \leq ||y||^2.$$

Um outro resultado importante envolvendo sequências ortonormais é o seguinte:

4-IDENTIDADE DE PARSEVAL: Se H é um espaço de Hilbert, e $\{x_n\}$ uma sequência ortonormal em H, então as três afirmações abaixo são equivalentes:

i) A sequência $\{x_n\}$ é um sistema ortonormal completo

ii) Para todo $x,y \in H$ vale a seguinte identidade:

$$\langle x,y\rangle = \sum \langle x,x_n\rangle\langle x_n,y\rangle$$

iii) Para todo $x \in H$ temos:

$$||x||^2 = \sum |\langle x,x_n\rangle|^2$$

Dentre os vários tipos de convergências em espaços de Hilbert podemos citar:

5-CONVERGÊNCIA FORTE: Se H é um espaço de Hilbert, então dizemos que uma sequência $\{x_n\}$ de elementos de H converge fortemente para um elemento $x \in H$ quando ocorrer:

$$\lim ||x_n - x|| = 0.$$

6-CONVERGÊNCIA FRACA: Se H é um espaço de Hilbert, então dizemos que uma sequência (x_n) de elementos de H converge fracamente para um elemento $x \in H$ quando para todo $y \in H$ obtivermos:

$$\lim \langle x_n, y\rangle = \langle x,y\rangle.$$

A proposição abaixo é de grande importância e sua demonstração pode ser encontrada em Kolmogorov[48].

7-PROPOSIÇÃO: Toda sequência fracamente convergente é limitada

8-TEOREMA DE PITÁGORAS: Se H é um espaço pré-Hilbert, então para $x,y \in H$ ortogonais entre si, isto é: $\langle x,y\rangle = 0$, vale a seguinte igualdade:

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

9-DEFINIÇÃO: Uma aplicação linear T definida sobre um espaço vetorial V e assumindo valores em um espaço vetorial W é chamada de operador linear se W = V. Se W coincide com o corpo de escalares de H, então T recebe o nome de funcional linear.

10-DEFINIÇÃO: Uma transformação linear T definida sobre um espaço vetorial V é dita ser limitada se existir uma constante real M tal que para todo $x \in V$ vale a seguinte desigualdade:

$$||Tx|| \leq M||x||.$$

Uma importante caracterização de continuidade para funcionais lineares definidos sobre espaços vetoriais é a seguinte:

11-PROPOSIÇÃO: Um funcional linear definido sobre um espaço vetorial V é contínuo se e somente é limitado.

12-DEFINIÇÃO: A norma de um operador linear limitado L é denotado por $||L||$ e definido por:

$$||L|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Lx||}{||x||} .$$

13-DEFINIÇÃO: Um operador linear limitado T definido sobre um espaço de Hilbert H é chamado operador linear simétrico, ou auto-adjunto, se para quaisquer $x,y \in H$ valer a igualdade:

$$\langle Tx,y\rangle = \langle x,Ty\rangle.$$

14-DEFINIÇÃO: Um operador linear T definido sobre um espaço de Hilbert H é dito ser positivo se for simétrico e para todo $x \in H$ satisfizer:

$$\langle Tx,x\rangle \geq 0.$$

A inclusão das duas definições acima se justifica pelo teorema seguinte, que não é tão básico quanto os demais resultados deste capítulo mas que tem grande importância no desenvolvimento da teoria que pretendemos abordar.

15-TEOREMA: Se um operador L definido sobre um espaço de Hilbert H é auto-adjunto e positivo, então existe um único operador auto-adjunto T definido sobre H tal que $T^2=L$. Se L é invertível então T também o é.

Considerando-se uma sequência de transformações lineares $\{T_n\}$ todas definidas sobre um mesmo espaço vetorial V, podemos definir os seguintes tipos de convergências:

16-DEFINIÇÃO: Dizemos que T_n converge em norma, ou uniformemente, para uma transformação linear T, também definida sobre V, se:

$$\lim ||T_n - T|| = 0.$$

Tal convergência será denotado por: *un*limTn=T.

17-DEFINIÇÃO: Dizemos que T_n converge fortemente para uma transformação linear T, também definida sobre V, se para todo $x \in V$ temos:

$$\lim ||T_n x - Tx|| = 0.$$

Tal convergência será denotado por: *str*limT_n=T.

18-DEFINIÇÃO: Dizemos que T_n converge fracamente para uma transformação linear T, também definida sobre V, se para todo $x,y \in V$ temos:

$$\lim \langle T_n x,y\rangle = \langle Tx,y\rangle.$$

Tal convergência será denotado por: *w*limT_n=T.

19-TEOREMA DA REPRESENTAÇÃO DE RIESZ: Seja H um espaço de Hilbert e L um funcional linear contínuo definido sobre H. Então existe um único $y \in H$ satisfazendo:

$$Lx = \langle x,y\rangle$$

para todo $x \in H$. Reciprocamente para todo elemento $y \in H$ a aplicação T_y:H $\mathbb{C}$ dada por $T_y(x)=\langle x,y\rangle$ define um funcional linear contínuo sobre H.

20 TEOREMA DE HAHN-BANACH: Seja X um espaço normado, M um subespaço de X e $f:M\to\mathbb{C}$ um funcional linear limitado. Então existe F pertencente ao espaço X^*, dos funcionais lineares definidos sobre X, tal que $F|_M \equiv f$ e $||F||=||f||$.

21 TEOREMA: Seja C_r a bola fechada $|z-z_o| \leq r$ e $f(z)$ analítica em C_r. Se $f(z)=a_o+a_1(z-z_o)+a_2(z-z_o)^2+\dots$ então:

$$\iint_{C_r} |f(\xi)|^2 \, d\xi = \pi \sum_{n=o}^{\infty} |a_n|^2 (1/n+1) r^{2n+2} .$$

A demonstração do teorema acima pode ser encontrada em Davis [26].

22 TEOREMA: Se f é uma função definida sobre $[1,+\infty)$ assumindo valores reais não negativos, que é contínua e monótona não crescente, se $\int_1^{\infty} f$ é convergente e se $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ é convergente com soma S então, para todo n natural temos:

$$|S - \sum_{k=1}^{n} f(k)| \leq \int_n^{\infty} f(t) \, dt$$

23 TEOREMA DE FUBINI: Sejam $(X,\mathcal{A},\mu)$ e $(Y,\mathcal{B},\upsilon)$ dois espaços de medidas completas e f uma função integrável em XxY. Então vale a igualdade abaixo:

$$\int_X \left[\int_Y f \, d\upsilon \right] d\mu = \int_{X\times Y} f \, d(\mu\times\upsilon) = \int_Y \left[\int_X f \, d\mu \right] d\upsilon$$

24 PROPOSIÇÃO: Seja $\{f_n\}$ uma sequência de Cauchy em $L^p(E)$ tal que exista uma subsequência $\{f_{n_j}\}$ que convirja para f em quase toda parte. Então $f \in L^p(E)$ e $\lim ||f_n - f||_p = 0$.

OBSERVAÇÃO: Se F é um espaço de funções assumindo somente valores reais então F determina naturalmente um espaço de funções, F_c assumindo valores complexos da seguinte maneira:

$$F_c = \{ f = f_1 + if_2 / f_1 , f_2 \in F \}$$

e com norma definida por:

$$\|f\|_c^2 = \|f_1 + if_2\|_c^2 = \| f_1\|^2 + \| f_2\|^2.$$

Temos também que F_c é um espaço de Hilbert e ainda satisfaz as seguintes propriedades:

(3) $$f \in F_c \Rightarrow \bar{f} \in F_c$$

(4) $$\| f \| = \| \bar{f} \|$$

1.2 PROPOSIÇÃO: Se F é um espaço vetorial real e possui um núcleo reprodutor K então F_c também possui K como núcleo reprodutor (assim, o núcleo reprodutor do espaço F_c é uma função que assume somente valores reais).

DEMONSTRAÇÃO: Sejam F, F_c e K como enunciado acima. Desta forma $F \subset F_c$ e como $K_y(x) = K(x,y) \in F$ também temos $K_y(x) \in F_c$. Para verificarmos (2) tomemos $f \in F$ arbitrária. Logo $f = f_1 + if_2$ com f_1 e $f_2 \in F$, assim:

$$f(y) = \langle f_1(x), K(x,y)\rangle + i\langle f_2(x), K(x,y)\rangle =$$

$$= \langle f_1(x) + if_2(x), K(x,y)\rangle = \langle f(x), K(x,y)\rangle$$

logo $K(x,y)$ é um núcleo reprodutor de F_c.

A proposição acima é de grande importância prática visto que a partir de agora podemos sempre considerar, sem perda de generalidade, nossos espaços F como sendo espaços de Hilbert de funções complexas.

OBSERVAÇÃO: No desenvolvimento deste trabalho se F e G são dois espaços de funções definidas sobre o mesmo conjunto E dizemos que G é subclasse de F se G está contida em F e que G é subespaço de F se G for subclasse de F e além disso tivermos $\| \ \|_G = \| \ \|_F$.

A seguir vamos enunciar e demonstrar várias propriedades básicas dos núcleos reprodutores que serão amplamente utilizadas durante todo o trabalho.

1.3 PROPRIEDADE: Se F possui um núcleo reprodutor então ele é único.

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que F possua dois núcleos reprodutores K e K'. Temos que

$$0 \leq \| \ K(x,y) - K'(x,y) \ \|^2 = \langle (K-K')(x,y), K(x,y) \rangle -$$

$$- \langle (K-K')(x,y), K'(x,y) \rangle.$$

Agora, $(K-K')(x,y) \in F$ como função de x segue da propriedade reprodutora que

$$\langle (K-K')(x,y), K(x,y) \rangle - \langle (K-K')(x,y), K'(x,y) \rangle =$$

$$= (K-K')(y,y) - (K-K')(y,y) = 0$$

e daí obtemos que K=K'.

1.4 PROPRIEDADE: Uma condição necessária e suficiente para que um espaço de Hilbert H seja um RKHS é que para qualquer $y \in E$ o funcional linear T_y , dado por $T_y(f)=f(y)$, seja contínuo.

DEMONSTRAÇÃO: A condição é necessária pois se F é um RKHS com núcleo reprodutor K, temos que:

$$|f(y)| = |\langle f(x),K(x,y)\rangle| \le ||f||\,||K(x,y)|| =$$

$$= ||f||(K(y,y))^{1/2}$$

pois:

$$||K(x,y)||^2 = \langle K(x,y),K(x,y)\rangle = (K(y,y)). \tag{5}$$

Segue que

$$\frac{||T_y(f)||}{||f||} = \frac{|f(y)|}{||f||} \le (K(y,y))^{1/2}$$

e portanto T_y é contínuo pois é linear e limitado.

Para verificarmos que a condição é suficiente, basta utilizarmos o teorema de Riesz e então temos que ao funcional contínuo T_y corresponde uma função $g_y(x)$ pertencente ao espaço e satisfazendo

$$f(y) = T_y(f) = \langle f(x),g_y(x)\rangle$$

e assim basta tomar $K(x,y) = g_y(x)$ como sendo o núcleo reprodutor procurado.

1.5 DEFINIÇÃO: Uma função K(x,y) definida sobre um conjunto ExE é dita ser uma matriz positiva se dada uma n-úpla arbitrária $\xi = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ a fórmula quadrática a ela associada é não negativa, isto é:

$$(6) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} K(y_i,y_j)\bar{\xi}_i\xi_j \geq 0$$

para toda n-úpla $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ com $y_i \in E$ para $i = 1,2,\ldots,n$.

Esta definição é devida à E. H. Moore [54]. Isto é o mesmo que dizer que dado qualquer n-úpla $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ não nula com $y_i \in E$ para $i=1,2,..,n$ a matriz $A=A_{ij}=K(y_i,y_j)$ é definida semi-positiva. Ou seja, para qualquer vetor complexo n-dimensional $\xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ não nulo temos $\xi^t A\xi \geq 0$.

1.6 PROPRIEDADE: $K(x,y)$ é uma matriz positiva.

DEMONSTRAÇÃO: A verificação da propriedade acima é devida ao seguinte fato,

$$\|\sum_{i=1}^{n} K(x,y_i)\xi_i\|^2 = \langle \sum_{j=1}^{n} K(x,y_j)\xi_j, \sum_{i=1}^{n} K(x,y_i)\xi_i \rangle =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \langle K(x,y_j)\xi_j, K(x,y_i)\xi_i \rangle.$$

Temos também que:

$$= \bar{\xi}_i\xi_j\ K(y_i,y_j) =$$

$$= \bar{\xi}_i\xi_j \langle K(x,y_j), K(x,y_i)\rangle = \langle K(x,y_j)\xi_j, K(x,y_i)\xi_i\rangle$$

onde a primeira igualdade segue diretamente da propriedade reprodutora de K. Assim obtemos:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \bar{\xi}_i\xi_j K(y_i,y_j) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle K(x,y_j)\xi_j, K(x,y_i)\xi_i\rangle =$$

$$= \| \sum_{i=1}^{n} K(x,y_i)\xi_i \|^2 \geq 0.$$

OBSERVAÇÃO: Um caso particular e interessante para ser considerado é o seguinte: n=1, $\xi_1=1$ e $y_1=x=y_2$ e assim a desigualdade (6) torna-se simplesmente:

(7) $$K(x,x)\geq 0.$$

Também fazendo-se $f(x)=K(x,y)$ e utilizando-se novamente a propriedade reprodutora obtemos:

(8) $$K(x,y) = f(x) = \langle f(z),K(z,x)\rangle = \langle K(z,y),K(z,x)\rangle$$

e de (8) segue claramente o seguinte resultado:

(9) $$K(x,y) = \overline{K(y,x)}$$

pois:

$$K(x,y) = \langle K(z,y),K(z,x)\rangle = \overline{\langle K(z,x),K(z,y)\rangle} = \overline{K(y,x)}.$$

Temos também que:

(10) $$|K(x,y)|^2 \leq K(x,x)K(y,y).$$

De fato, fazendo uso de (9), (8), da desigualdade de Cauchy-Schwarz e (5) obtemos:

$$|K(x,y)|^2 = |K(x,y)K(y,x)| =$$

$$= |\langle K(z,y),K(z,x)\rangle\langle K(z,x),K(z,y)\rangle|$$

$$\leq ||K(z,y)||\,||K(z,x)||\,||K(z,x)||\,||K(z.y)||$$

$$=(K(y,y))^{1/2}(K(x,x))^{1/2}(K(x,x))^{1/2}(K(y,y))^{1/2}=$$

$$=K(x,x)K(y,y).$$

1.7 PROPRIEDADE: A cada matriz positiva $K(x,y)$ definida sobre $E\mathrm{x}E \neq \varnothing$ corresponde um e somente um espaço de funções, definidas sobre E, possuindo uma única norma determinada sobre ele e formando um espaço de Hilbert admitindo $K(x,y)$ como núcleo reprodutor.

A propriedade acima é basicamente uma recíproca da anterior e sua demonstração, que não será incluída aqui, é creditada à E.H. Moore[54]. O espaço de funções que corresponde à matriz positiva $K(x,y)$ é gerado por funções do tipo:

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k \; K(x,y_k)$$

com $\xi_k \in \mathbb{C}$ e $y_k \in E$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e com norma dada pela forma quadrática abaixo:

$$||\sum_{i=1}^{n} \xi_i K(x,y_i)||^2 = \sum_{i,j=1}^{n} K(y_i,y_j)\bar{\xi}_i \xi_j \geq 0.$$

O espaço de funções com a norma definida como acima deve ser completado de modo a formar um espaço de Hilbert.

1.8 PROPRIEDADE: Em um RKHS a convergência forte de uma ncia de funções deste espaço acarreta necessariamente rgência pontual desta sequência. Além disso, em t njunto do domínio E onde K(x,x) for uniformeme ido temos que a convergência forte implica rgência uniforme da sequência.

)NSTRAÇÃO: Fazendo-se uso da desigualdade de Cauchy-Schw s que:

$$|f(y)-f_n(y)|=|\langle f(x)-f_n(x),K(x,y)\rangle|\leq||f-f_n||\,||K(x,y)||=$$

$$=||f-f_n||(K(y,y))^{1/2}$$

seguem os resultados.

RVAÇÃO: A convergência fraca em um RKHS também implica rgência pontual. Este fato segue direto da definição rgência fraca e da propriedade reprodutora.

Até o presente momento não havíamos coloc ma restrição sobre o conjunto E a não ser a exigên ser não vazio. Contudo, se E possui uma topolo nos analisar a continuidade ou não da aplicação ϕ de E ia por $\phi(y)=K(x,y)$.

ROPOSIÇÃO: Considere um RKHS F definido sobre um conju a aplicação ϕ como descrita acima. Se ϕ é contínua entã rgência fraca de uma sequência de funções de F impl onvergência uniforme em todo subconjunto E_1 de E que s acto.

)NSTRAÇÃO: Já sabemos, pela proposição (7) do capitulo toda sequência fracamente convergente é limitada. S p$||f_n||$. Pela continuidade de ϕ segue que para qualquer e para qualquer ε positivo arbitrário, existe δ posit ue $||y-y_o||<\delta \Rightarrow ||K(x,y)-K(x,y_o)||<\varepsilon/4M$. Consideren agora este δ. Como E_1 é compacto posso cobri-lo por um número finito de bolas com raio $r=\delta$. Isto é, existe $\{y_1,y_2,..,y_n\}$ tal que $E_1 \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i,\delta)$. Logo, para todo y em E_1 existe um número natural $j \leq n$ tal que y pertence à bola de centro y_j e raio δ e pela continuidade de ϕ isto acarreta que $||K(x,y)-K(x,y_j)||$ $< \varepsilon/4M$ Como pela observação acima $\{f_n\}$ converge pontualmente para f em E_1 escolhemos N tal que $n > N$ implica $|f(y_j)-f_n(y_j)|< \varepsilon/4$. Logo para y em E_1 temos:

$$|f(y)-f_n(y)| \leq |f(y_j)-f_n(y_j)| + |f(y)-f(y_j)| +$$

$$+ |f_n(y_j)-f_n(y)| \leq \varepsilon/4 + |\langle f(x)-f_n(x),K(x,y)-K(x,y_j)\rangle|$$

$$\leq \varepsilon/4 + ||f-f_n|| \, ||K(x,y)-K(x,y_j)|| \leq$$

$$\leq \varepsilon/4 + (||f|| + ||f_n||)\varepsilon/4M \leq \varepsilon/4 + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

o que demonstra o resultado desejado.

Chamamos a atenção para o fato de que a continuidade de ϕ é uma propriedade que é satisfeita pela maioria dos RKHS que são normalmente considerados, como por exemplo, espaços de funções analíticas, funções harmônicas, soluções de equações diferenciais parciais.

1.10 PROPOSIÇÃO: Se F possui um núcleo reprodutor K(x,y) e se F é ele próprio um subespaço de um espaço de Hilbert $\mathbb{L}$ então a projeção de todo elemento h de $\mathbb{L}$ sobre F é dado com a ajuda do núcleo reprodutor K da seguinte maneira:

$$f(y) = \langle h(x),K(x,y)\rangle.$$

DEMONSTRAÇÃO: Isto é claro pois se $h \in \mathbb{L}$ e G é o complemento ortogonal de F em $\mathbb{L}$, então existem e são únicos f em F e g em

G tal que h=f+g. Logo:

$$\langle h(x),K(x,y)\rangle = \langle f(x),K(x,y)\rangle + \langle g(x),K(x,y)\rangle = f(y)$$

pois $K(x,y) \in F$ como função de x e assim sendo, é ortogonal a G.

1.11 PROPRIEDADE: Se F possui um núcleo reprodutor então todo subespaço linear fechado de F também possui.

DEMONSTRAÇÃO: Esta propriedade segue da propriedade 1.4 que nos diz que F é um RKHS se e somente se f(y) é um funcional contínuo de f percorrendo F. Desta forma, se f(y) é um funcional contínuo em F então com mais razão este funcional será contínuo percorrendo um subespaço linear fechado de F e portanto este subespaço de F também será um RKHS.

1.12 PROPRIEDADE: Se F' e F" são subespaços fechados complementares de F, onde F é um espaço com núcleo reprodutor K. Então os núcleos reprodutores K' e K" de F' e F'' respectivamente satisfazem K'+K"=K.

DEMONSTRAÇÃO: É claro que K=K'+K" pertence a F como função de x pois K' e K'' satisfazem esta mesma propriedade. Seja $f \in F$ arbitrária e f' e f" as únicas funções pertencentes a F' e F" respectivamente tais que f = f'+f". Temos que

$$f(y)=f'(y) + 0 + 0 + f''(y)= \langle f'(x),K'(x,y)\rangle +$$

$$+ \langle f''(x),K'(x,y)\rangle+\langle f'(x),K''(x,y)\rangle+\langle f''(x),K''(x,y)\rangle$$

$$= \langle f'+f'',K'\rangle+\langle f'+f'',K''\rangle= \langle f(x),K'(x,y)+K''(x,y)\rangle.$$

Logo K'+K" satisfaz a propriedade reprodutora dos núcleos reprodutores e pela unicidade, segue que K=K'+K".

1.13 PROPRIEDADE: Se F é um RKHS e $\{g_n\}$ é um sistema ortonormal em F então para toda sequência $\{\alpha_n\} \in \ell^2(\mathbb{C})$ temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \, |g_n(x)| \le (K(x,x))^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \right)^{1/2} .$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $y \in E$ fixo. Então os coeficientes de Fourier de $K(x,x)$ para o sistema ortogonal $\{g_n\}$ são dados por:

$$\langle K(x,y), g_n(x) \rangle = \overline{\langle g_n(x), K(x,y) \rangle} = \overline{g_n(y)}.$$

Pela desigualdade de Bessel temos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |g_n(y)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\overline{g_n(y)}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle K(x,y), g_n(x) \rangle|^2 \le$$

$$\le \| K(x,y) \|^2 = K(y,y)$$

e portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \, |g_n(x)| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |g_n(x)|^2 \right)^{1/2} \le$$

$$(K(x,x))^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \right)^{1/2}$$

o que demonstra a propriedade.

§2-COMPLETAMENTO FUNCIONAL DE UM ESPAÇO PRÉ-HILBERTIANO

Em aplicações geralmente nos deparamos com espaços de funções que satisfazem todas as condições para serem espaços de Hilbert com exceção da completude. Assim surgem dois problemas: 1º) Completar o espaço de modo a obter um espaço de Hilbert de funções e 2º) Garantir que o espaço completado seja um RKHS. *O estudo e resolução destes dois problemas é o conteúdo desta seção.*

Se temos um espaço de funções F que só necessita da completude para se tornar um espaço de Hilbert, poderíamos resolver este problema simplesmente completando tal espaço da maneira usual. Contudo, em geral, esta forma de completamento destrói todas as propriedades de continuidade entre os valores de uma determinada função e a convergência no espaço. Isto é, dado $y_o \in E$ fixo, gostaríamos de ter $f(y_o)$ e $g(y_o)$ próximos se f e g estão próximas uma da outra. Este fato justifica a seguinte definição:

2.1 DEFINIÇÃO: COMPLETAMENTO FUNCIONAL : Dizemos que um espaço incompleto de funções F admite um completamento funcional quando as funções incluídas em F para torná-lo completo dependem continuamente de f como um elemento do espaço em cada ponto $y \in E$. Neste caso dizemos que F é completado funcionalmente.

OBSERVAÇÃO: A definição acima, em outras palavras, exige que o funcional $T_y(f) = f(y)$ seja contínuo para toda função f do espaço completado e todo $y \in E$.

Segue assim, pela propriedade 1.4 que todo espaço de funções completado funcionalmente é um RKHS. Portanto os dois problemas mencionados na introdução desta seção são transformados em um só.

2.2 TEOREMA: Seja F um espaço de funções pré-Hilbertiano. F admite um completamento funcional se e somente se as duas condições seguintes forem verificadas:

(1) Para todo $y \in E$ o funcional linear $T_y(f) = f(y)$ definido em F é limitado.

(2) Para toda sequência de Cauchy $\{f_n\} \subset F$ tal que $f_n(y)$ converge para 0 para todo $y \in E$, devemos ter a sequência $\{||f_n||_F\}$ convergindo para 0.

Se o espaço F admite completamento funcional então este completamento é único.

DEMONSTRAÇÃO: Mostremos primeiramente que o completamento funcional implica nas condições (1) e (2).

Se F admite um completamento funcional F^*, então como vimos pela observação acima segue que F^* é um RKHS e assim pela propriedade 1.4 o funcional T_y é contínuo e portanto limitado em F^* e assim sendo T_y é limitado também em F para todo $y \in E$.

Se agora considerarmos uma sequência de Cauchy $\{f_n\}$ em F^* que converge para 0 pontualmente para todo $y \in E$ devemos necessariamente ter f_n convergindo fortemente para 0. Pois, se isto não fosse verdade, então como a sequência é de Cauchy no espaço completo F^* teríamos f_n convergindo fortemente para alguma função não nula $f \in F^*$. Se f é não nula então existe $y_o \in E$ tal que $f(y_o) \neq 0$. Mas, então pela propriedade 1.8

devemos ter também que $f_n(y)$ converge para $f(y)$ para todo $y \in E$. Em particular $f_n(y_o)$ converge para $f(y_o) \neq 0$. Como, por hipótese, $\{f_n\}$ é uma sequência que converge pontualmente para 0 isto é um absurdo. Logo devemos ter f_n convergindo fortemente para 0 o que é equivalente a dizer que a sequência $\{||f_n||_F\}$ converge para 0 como queríamos.

Para mostrarmos a recíproca consideremos F^* o completamento de F e, supondo válidas as propriedades (1) e (2), mostremos que este completamento é funcional, isto é, o funcional avaliação é contínuo em F^*.

Seja $g \in F^*$ arbitrária, então existe uma sequência de Cauchy $\{f_n\} \subset F$ convergindo fortemente para g. Também $f_n \in F$ para todo n natural e pela propriedade (1) segue que para todo $y \in E$ existe uma constante real M_y tal que:

$$|f_m(y) - f_n(y)| \leq M_y ||f_m - f_n||_F$$

de onde segue que $\{f_n(y)\}$ é de Cauchy em $\mathbb{C}$ e portanto convergente pois $\mathbb{C}$ é completo. Denotemos por $f(y)$ o limite de $f_n(y)$ e assim temos que toda sequência de Cauchy em F define uma função f para qual ela converge pontualmente em todo ponto de E.

Notemos também que $\{f_n - f\}$ é de Cauchy, pois $\{f_n\}$ o é, e $\{f_n(y)-f(y)\}$ converge para 0 para todo $y \in E$. Pela propriedade (2) temos que f_n converge fortemente para f e isto acarreta em $g(y) = f(y)$ para todo $y \in E$.

Agora, consideremos o teorema de Hahn-Banach que nos assegura a existência de um funcional linear contínuo L_y definido sobre F^* cuja restrição a F coincide com T_y.

Portanto, como f_n converge forte e pontualmente para f e L_y é contínuo obtemos:

$$L_y(f) = \lim L_y(f_n) = \lim T_y(f_n) = \lim f_n(y) =$$

$$= f(y).$$

Assim L_y é, de fato, o funcional avaliação em F^* e, como já vimos, é contínuo por Hahn-Banach. Logo F^* é um RKHS.

A unicidade do completamento funcional segue do fato de que todo completamento de um espaço vetorial é único a menos de isomorfismo.

OBSERVAÇÕES: (1) Não devemos concluir erroneamente que a condição (1) de nosso teorema é suficiente para garantir que um espaço de funções pré-Hilbert H possua uma função $W_y(x) = W(x,y)$ que satisfaça as mesmas propriedades que os núcleos reprodutores satisfazem para espaço de Hilbert, isto se deve ao fato de que o teorema da existência e unicidade de um núcleo reprodutor diz que um **espaço de Hilbert** de funções possui um núcleo reprodutor se e somente se o funcional avaliação T_y é limitado para todo y em E e a demonstração deste fato usa fortemente o teorema da representação de Riesz que por sua vez exige a completude do espaço.

Por outro lado, se em um espaço de funções pré-Hilbertiano F, se conhece uma função W(x,y) tal que para todo y fixado, $W(x,y) \in F$ como função de x e esta função possui a propriedade de que para toda $f \in F$

$$f(y) = \langle f(x), W(x,y) \rangle$$

vê-se claramente que a condição (1) segue da propriedade acima e da desigualdade de Cauchy-Schwarz. Assim, para podermos aplicar o teorema basta verificarmos a veracidade da condição (2).

(2) Para ilustrar que a condição (2) pode , de fato, deixar de ocorrer, incluiremos a seguir um exemplo: Consideremos o conjunto $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C} \ / |z|<1\}$ e tomemos em $\mathbb{D}$ uma sequência $\{z_n\}$ satisfazendo:

$$\sum (1-|z_n|) < \infty$$

Seja E o conjunto dos pontos z_n e em E consideremos o espaço F de todos os polinômios em z. Claro que, com exceção do polinômio nulo, nenhum polinômio pode ser zero em todo ponto de E pois teríamos um polinômio com infinitas raízes. Assim sendo, um polinômio está completamente determinado pelos valores que assume em E. Definamos uma norma em F por:

$$||f||^2 = \int_{|\xi|<1} |p(\xi)|^2 \, d\xi$$

onde $p(\xi)$ é o único polinômio que restrito a E coincide com f. Verifica-se que a norma definida acima satisfaz a regra do paralelogramo e portanto é proveniente de um produto interno. Entretanto F não é completo pois existem sequências de polinômios que convergem para funções que não são polinômios. Mostremos a seguir que a condição (2) não é satisfeita.

Consideremos a função Φ dada pelo produto de Blaschke correspondente a $\{z_n\}$:

$$\Phi(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z_n - z}{1-\bar{z}_n z}\right)\left(\frac{|z_n|}{z_n}\right).$$

Tal função Φ satisfaz as seguintes propriedades (ver Depree-Oehring [27], pag 277):

$$\Phi(z_n) = 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$|\Phi(z)| < 1 \qquad \forall\, z \in \mathbb{D}$$

a função Φ é um "limite forte de polinômios" no seguinte sentido:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{|z|<1} |\Phi(z)-p_k(z)|^2\, dz = 0$$

assim, $p_k(z)$ "se aproxima" de $\Phi(z)$ na norma de F mas pode ocorrer que $\Phi(z)$ não pertença a F. Portanto $p_k(z)$ não é convergente a $\Phi(z)$ em F mas o seria em $L^2(\mathbb{D})$ pois este é um espaço completo que contém F. Consequentemente $\{p_k\}$ é uma sequência de Cauchy no espaço considerado e para todo $z_n \in E$ $p_k(z_n)$ converge para $\Phi(z_n) = 0$ ao passo que:

$$\lim ||p_k||_2 = ||\Phi||_2 > 0$$

Isto claramente contraria a condição (2) o que demonstra o resultado desejado.

§3-RESTRIÇÃO DE UM NÚCLEO REPRODUTOR

Consideremos $F = (F, \| \ \|, K)$ *um* RKHS *cujas funções estão definidas sobre um conjunto* E. *Já vimos que* K *é uma matriz positiva e portanto* $K|_{E_1}$, *sua restrição ao conjunto* $\emptyset \neq E_1 \subset E$, *também o é. Isto significa que* K *restrito a* E_1 *corresponderá a um espaço de funções* F_1 *definidos sobre* E_1 *e com norma* $\| \ \|_{F_1}$ *.Nesta seção especificaremos quem são* F_1 *e* $\| \ \|_{F_1}$.

Consideremos F, K e E_1 como mencionados acima. Seja F_o o subconjunto de F formado pelas funções que se anulam completamente em E_1. F_o é um subespaço fechado de F. Denotemos for F' o completamento ortogonal de F_o e assim pela propriedade 1.12 segue que $K = K_o + K'$ onde K_o e K' são os núcleos reprodutores de F_o e F' respectivamente. Contudo, para todo $x \in E_1$ $K_o(x,y) = 0$ pois $K_o \in F_o$ como função de x, portanto para qualquer $x \in E_1$ temos:

(1) $$K(x,y) = K_o(x,y) + K'(x,y) = K'(x,y).$$

Consideremos agora F_1 o espaço de funções formado pelas restrições a E_1 das funções de F. Observemos que, ao contrário de F_o e F', F_1 não é um subconjunto de F.

3.1 PROPOSIÇÃO: Todas as funções de F cujas restrições a E_1 coincidem têm a mesma projeção sobre F'.

DEMONSTRAÇÃO: Se f, $g \in F$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in E_1$ então $f-g \in F_o$ e reciprocamente. Também sabemos que existem únicos f_o, $g_o \in F_o$ e $f', g' \in F'$ tais que:

$$f = f_o + f' \quad \text{e} \quad g = g_o + g'$$

e portanto,

$$f - g = f_o - g_o + f' - g'.$$

Mas como $f - g \in F_o$ devemos ter então $f' - g' = 0$. Logo $f' = g'$. Mas f' e g' são justamente as projeções de f e g sobre F' respectivamente e assim obtemos o resultado desejado.

OBSERVAÇÕES: 1) Durante esta seção denotaremos a restrição de uma função $f \in F$ ao conjunto E_1 por f_1, ou seja, $f_1 = f|_{E1}$.

2) Se f' é a projeção de f sobre F' então $f'|_{E1} = f|_{E1} = f_1$ pois para todo $y \in E_1$ temos:

$$f(y) = f_o(y) + f'(y) = 0 + f'(y).$$

3) Dentre todas as funções $g \in F$ cuja restrição a E_1 coincide com f_1 segue pela observação 2) que f', a projeção de uma qualquer destas g's (que coincidem devido a proposição 3.1) é também uma função cuja restrição a E_1 coincide com f_1 e ainda é a de menor norma. Isto se verifica devido ao seguinte fato:

Se $g \in F$ é tal que $g_1 = f_1$ então $g = g_o + f'$ pela proposição 3.1. Assim, temos:

$$||g||^2 = ||g_o + f'||^2 = ||g_o||^2 + ||f'||^2 \geq ||f'||^2 \geq 0,$$

onde a segunda igualdade acima é devido ao teorema de Pitágoras. Portanto

$$||g|| \geq ||f'||.$$

Assim sendo, definimos:

(2) $$||f_1||_{F_1} = ||f'||$$

onde f' é a projeção sobre F' de uma função cuja restrição a E_1 é igual a f_1.

3.2 PROPOSIÇÃO: A correspondência $\Psi: F_1 \to F'$ definida por $\Psi(f_1) = f'$ onde f' é a projeção sobre F' de uma função qualquer $f \in F$ cuja restrição a E_1 coincida com f_1, estabelece uma isometria bijetora entre $(F_1, ||\ ||_{F_1})$ e $(F', ||\ ||)$.

DEMONSTRAÇÃO: Notemos primeiramente que a proposição 3.1 garante que a aplicação Ψ está bem definida.

A propriedade isométrica é evidente pela própria definição da norma $||\ ||_{F_1}$. Mostremos a bijetividade de Ψ: Sejam $f_1 \neq g_1$ ambas pertencentes a F_1. Então existe $y \in E_1$ tal que $f_1(y) \neq g_1(y)$. Sejam f e g funções de F cujas restrições a E_1 coincidam respectivamente com f_1 e g_1 e sejam representadas de maneira única por:

$$f = f_o + f' \qquad \text{e} \qquad g = g_o + g'.$$

Segue que $f(y) \neq g(y)$ para algum $y \in E_1$ pois caso contrário teríamos $f_1 = g_1$. Porém $f_o(y) = 0 = g_o(y)$ para todo $y \in E_1$. Logo deve existir $y \in E_1$ tal que $f'(y) \neq g'(y)$, ou seja $\Psi(f_1) \neq \Psi(g_1)$ e assim fica demonstrado que Ψ é injetora.

Para mostrarmos que Ψ é sobrejetora consideremos $f \in F' \subset F$ e $f_1 \in F_1$ sua restrição a E_1. $\Psi(f_1)$ é a projeção de f (ou de qualquer outra função cuja restrição a E_1 coincide com f_1) sobre F'. Porém $f \in F'$ e então $\Psi(f_1) = f$ e portanto Ψ é sobrejetora.

Assim $(F_1, ||\ ||_{F_1})$ e $(F', ||\ ||)$ são espaços isométricos e passaremos a tratá-los indistintamente.

3.3 TEOREMA: Seja $K = K(x,y)$ o núcleo reprodutor de um espaço de funções F definidas sobre um conjunto E e seja $\emptyset \neq E_1 \subset E$. Então K restrito a E_1 é o núcleo reprodutor da classe F_1 formada pelas restrições a E_1 das funções $f \in F$. Para cada restrição $f_1 \in F_1$ a norma $\| f_1 \|_{F_1}$ será o mínimo das normas de f dentre todas as funções f cuja restrição a E_1 coincida com f_1.

DEMONSTRAÇÃO: Pela definição dada a $\| \ \|_{F_1}$ anteriormente e pela observação 3 desta seção, segue o resultado referente a norma do espaço F_1.

Seja $f_1 \in F_1$ e $f' = \Psi(f_1) \in F' \subset F$. Então para todo $y \in E_1$ temos:

$$f_1(y) \cong f'(y) = \langle f'(x), K'(x,y) \rangle$$

onde o símbolo $\cong$ representa a identificação feita pela isometria Ψ.

Como $K'(x,y) \in F'$ para todo $y \in E$ fixo, podemos fazer uso de nossa identificação de F_1 e F' via Ψ e escrever:

$$f_1(y) = \langle f_1(x), K_1(x,y) \rangle_1 \quad , \tag{3}$$

onde $K_1(x,y) = \Psi^{-1}(K'(x,y))$. Logo K_1 é o núcleo reprodutor de $(F, \| \ \|_{F_1})$ pois satisfaz (3) e, para todo $y \in E_1$ fixo, temos $K_1(x,y) \cong K'(x,y) \in F' \subset F$ como função de x.

Para todo $x \in E_1$, temos da igualdade (1) desta seção que:

$$K(y,x) = \overline{K(x,y)} = \overline{K'(x,y)} = K'(y,x)$$

ou equivalentemente, para todo $y \in E_1$:

$$K(x,y) = K'(x,y).$$

Assim, fazendo uso novamente de (I) desta seção, obtemos que para todo $(x,y) \in E_1xE_1$ temos:

$$K(x,y) = K'(x,y),$$

ou seja, as restrições de K e K' ao conjunto E_1 coincidem. Além disso $K'|_{E1} = K_1$ pois $\Psi(K_1) = K'$. Portanto $K_1 = K|_{E1}$ que é o resultado procurado.

Consideremos agora um caso bem particular e interessante. Se $F_o = \{ 0 \}$, ou seja, F_o só possui o polinômio nulo, então $F' = F$. Assim para toda função $f_1 \in F_1$, f_1 é a restrição de uma única função $f \in F$, pois se houvesse f e g pertencentes a F tais que $f|_{E1} = f_1 = g|_{E1}$ então teríamos $(f-g) \in F_o = \{ 0 \}$ e assim $f = g$.

Portanto $||f_1||_{F_1} = ||f||$ para a única $f \in F$ tal que $f|_{E1} = f_1$ pois por definição temos $||f_1||_{F_1} = ||f'||$ onde f' é a projeção de f sobre F'=F. Mas $f = f_o + f' = f'$ pois $f_o \in F_o = \{ 0 \}$ e então segue que $||f_1||_{F_1} = ||f||$.

§4-SOMA DE NÚCLEOS REPRODUTORES

Consideremos duas classes de funções $F_1 = (F_1, ||\ ||_{F_1}, K_1)$ e $F_2 = (F_2, ||\ ||_{F_2'}, K_2)$ *que são* RKHS *cujas funções estão definidas sobre um mesmo conjunto* E. *Assim,* K_1 *e* K_2 *são matrizes positivas e portanto* $K = K_1 + K_2$ *também o é.*

É objetivo desta seção encontrar o espaço $F = (F, \|\ \ \|)$ *correspondente ao núcleo* K.

Consideremos dois espaços de Hilbert de funções F_1 e F_2 formando dois RKHS, com núcleos reprodutores K_1 e K_2 respectivamente e $K = K_1 + K_2$,onde as funções estão definidas sobre um mesmo conjunto E. Seja H o espaço definido por:

$$H = \{ (f_1, f_2) \text{ onde } f_i \in F_i \ \ i = 1,2 \}$$

munido do seguinte produto interno:

$$\langle (f_1, f_2), (g_1, g_2) \rangle_H = \langle f_1, g_1 \rangle_{F_1} + \langle f_2, g_2 \rangle_{F_2} .$$

Temos que,

$$\| (f_1, f_2) \|_H^2 = \| f_1 \|_{F_1}^2 + \| f_2 \|_{F_2}^2$$

onde $\langle\ ,\ \rangle_{F_i}$ e $\|\ \ \|_{F_i}$ indicam respectivamente o produto interno e a norma em F_i $i = 1,2$. Tomemos em H as operações de soma e multiplicação por escalar como segue:

$$(f_1, f_2) + \alpha (g_1, g_2) = (f_1 + \alpha g_1, f_2 + \alpha g_2).$$

4.1 PROPOSIÇÃO: Seja $F_o = F_1 \cap F_2$ que é claramente subespaço de F_1 e F_2 e tomemos H_o subespaço de H dado por:

$$H_o = \{ (f, -f) \ / \ f \in F_o \}.$$

Então H_o é um subespaço fechado de H.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\{(f_n, -f_n)\}$ uma sequência de elementos de H_o convergindo para $\{(f', f'')\}$. Devemos mostrar que $\{(f', f'')\} \in H_o$. Pela definição da norma em H segue que para ε positivo qualquer existe um número natural N_o tal que para todo $n > N_o$

implica:

$$||f_n-f'||^2_{F_1} + ||-f_n-f''||^2_{F_2} = ||(f_n-f',-f_n-f'')||^2_H < \varepsilon^2.$$

Segue daí que f_n converge fortemente para f' enquanto que $-f_n$ converge fortemente para f" e portanto f" = -f'. Logo, (f',f") $\in H_o$ e a proposição está demonstrada.

Como H_o é fechado, podemos considerar seu complementar H' em H, ou seja:

$$H = H_o \oplus H'$$

Tomemos F como sendo o seguinte espaço vetorial:

$$F = \{\ g(x) = f_1(x) + f_2(x)\ /\ f_i(x) \in F_i\ \ i=1,2\}$$

e seja $T':H \to F$ a aplicação linear definida por:

$$T'((f',f'')) = f(x) = f'(x) + f''(x).$$

Como $Ker(T') = H_o$ tomemos T como sendo a restrição de T' a H' que é uma aplicação linear injetora. Também, pela forma como F foi definida fica fácil verificar que T é uma bijeção entre H' e F. Definimos então a aplicação inversa $T^{-1}:F \to H'$por:

$$T^{-1}(f(x)) = (g'(f),g''(f))$$

onde f(x) = g'(f)(x) + g"(f)(x) e definamos em F a seguinte norma:

$$||f||^2 = ||(g'(f),g''(f))||^2_H = ||g'(f)||^2_{F_1} + ||g''(f)||^2_{F_2}$$

de modo a tornar T uma isometria.

4.2 LEMA: Fixemos y em E arbitrário e denotemos $K'(x,y)=g'(K(x,y))$ e $K''(x,y)=g''(K(x,y))$. Então $(K_1-K', K_2-K'') \in H_o$.

DEMONSTRAÇÃO: Segue da notação utilizada no enunciado que:

$$T^{-1}(K(x,y)) = (g'(K(x,y)), g''(K(x,y)) = (K'(x,y), (K''(x,y))$$

e de forma análoga consideremos $f'=g'(f)$ e $f''=g''(f)$. Consequentemente obtemos

$$T^{-1}(f(y)) = (g'(f), g''(f))$$

logo

$$f(y) = g'(f)(y) + g''(f)(y) = f'(y) + f''(y)$$

e

$$K(x,y) = K'(x,y) + K''(x,y)$$

Porém de $K = K_1 + K_2$ segue que: $K_1-K' = K''-K_2$ e como $K''-K_2 \in F_2$ e $K_1-K' \in F_1$ temos que $K''-K_2=-(K'-K_1) \in F_o$ e portanto $(K_1-K', K_2-K'') \in H_o$.

4.3 TEOREMA: O núcleo reprodutor K correspondente ao espaço F definido acima é dado por $K = K_1 + K_2$.

DEMONSTRAÇÃO: K(x,y) pertence a F como função de x pois corresponde ao elemento $(K_1(x,y), K_2(x,y)) \in H$ pela isometria T, isto é, $T((K_1(x,y), K_2(x,y))= K(x,y)$.

Para a verificação da propriedade reprodutora usaremos o lema 4.2 e o fato de H_o e H' serem ortogonais:

$$f(y) = f'(y) + f''(y) =$$

$$\langle f'(x), K_1(x,y)\rangle_{F_1} + \langle f''(x), K_2(x,y)\rangle_{F_2} =$$

$$\langle (f',f''),(K_1,K_2)\rangle_H =$$

$$\langle (f',f''),(K',K'')-(K',K'')+(K_1,K_2)\rangle =$$

$$\langle (f',f''),(K',K'')\rangle + \langle (f',f''),(K_1-K',K_2-K'')\rangle =$$

$$\langle (f',f''),(K',K'')\rangle$$

também temos que $f=f'+f''$ e $K=K'+K''$ e pela isometria T obtemos:

$$f(y) = \langle f(x), K(x,y)\rangle.$$

OBSERVAÇÃO : Poderíamos, desde o início, ter caracterizado o espaço F como sendo o espaço constituido pela soma de funções de F_1 e F_2. Neste caso, evitaríamos a passagem por um espaço auxiliar definindo a norma em F da seguinte maneira:

$$||f||^2 = \min \left[||f_1||^2_{F_1} + ||f_2||^2_{F_2} \right]$$

onde o mínimo é tomado dentre todas as possíveis decomposições $f=f_1+f_2$ com $f_1 \in F_1$ e $f_2 \in F_2$

4.4 TEOREMA : Se $F_1=(F_1, ||\ ||_{F_1}, K_1)$ e $F_2=(F_2, ||\ ||_{F_2}, K_2)$ são dois RKHS então $K = K_1 + K_2$ é o núcleo reprodutor de:

$$F = \{ f = f_1 + f_2 \ / \ f_1 \in F_1 \text{ e } f_2 \in F_2 \}$$

munido da seguinte norma:

$$\|f\|^2 = \min\,[\,\|f_1\|^2_{F_1} + \|f_2\|^2_{F_2}\,]$$

onde o mínimo é tomado dentre todas as possíveis decomposições $f = f_1 + f_2$ com $f_i \in F_i$, $i=1,2$.

DEMONSTRAÇÃO: Para provarmos a equivalência desta definição com a anterior basta lembrarmos que $f(x)$ corresponde aos elementos $(f_1,f_2) \in H$ e $(g'(f),g''(f)) \in H'$. Isto acarreta que $f=f_1+f_2 = g'(f)+g''(f)$ e consequentemente temos que $(f_1-g'(f),f_2-g''(f)) \in H_o$ e como $(g'(f),g''(f)) \in H'$ segue pelo teorema de Pitágoras para espaços de Hilbert que:

$$\|f_1\|^2_{F_1} + \|f_2\|^2_{F_2} = \|(f_1,f_2)\|^2_H =$$
$$= \|(g'(f),g''(f))\|^2_H + \|(f_1-g'(f),f_2-g''(f))\|^2_H$$

onde $f_1 + f_2$ é uma decomposição arbitrária de f e $g'(f)$, $g''(f)$ são determinadas de modo único por T^{-1}. Logo o mínimo ocorrerá na igualdade acima se e somente se $f_1=g'(f)$ e $f_2=g''(f)$ e neste caso temos:

$$\|f\|^2 = \min\,[\,\|f_1\|^2_1 + \|f_2\|^2_2\,] =$$
$$= \min\,[\,\|(g'(f),g''(f))\|^2_H + \|(f_1-g'(f),f_2-g''(f))\|_H] =$$
$$= \|(g'(f),g''(f))\|^2_H ,$$

que era a nossa definição inicial.

OBSERVAÇÕES: 1) O resultado acima é facilmente generalizável para somas com mais de duas parcelas.

2) Se $F_1 \cap F_2 = \{\,0\,\}$ então T' é bijetora pois $\mathrm{Ker}(T') = H_o = (0,0)$ e $H' = H$. logo $f \in F$ é representada unicamente na forma $f = f_1 + f_2$ com $f_1 \in F_1$ e $f_2 \in F_2$, ou seja, $F = F_1 \oplus F_2$.

3) Se tomarmos o espaço $\overline{F}$ formado pelo conjugado das funções de F munido do seguinte produto interno:

$$\langle \overline{f}, \overline{g} \rangle_{\overline{F}} = \langle g, f \rangle$$

e se K(x,y) é o núcleo reprodutor de F temos então que para todo y ∈ E K(x,y) ∈ F e portanto $\overline{K(x,y)} \in \overline{F}$ como função de x. Também f(y) = ⟨f(x),K(x,y)⟩ de onde segue que:

$$\overline{f(y)} = \overline{\langle f(x), K(x,y) \rangle} = \langle K(x,y), f(x) \rangle = \langle \overline{f(x)}, \overline{K(x,y)} \rangle_{\overline{F}}$$

logo $K_{\overline{F}}(x,y) = \overline{K(x,y)} = K(y,x)$ é o núcleo reprodutor de $\overline{F}$ e $||\overline{f}||^2_{\overline{F}} = \langle \overline{f}, \overline{f} \rangle_{\overline{F}} = \langle f, f \rangle = ||f||^2$.

Também $F_1 = F + \overline{F} = \{ f + \overline{g} \,/\, f, g \in F \}$ e pelo teorema anterior obtemos:

$$K_1 = K_F + K_{\overline{F}} = K(x,y) + \overline{K(x,y)} = 2 \ \ \mathrm{Re}K(x,y)$$

e a norma em F_1 é dada por:

$$||h||^2_{F_1} = \min [\ ||f||^2_F + ||g||^2_F \ ]$$

onde o mínimo é tomado dentre todas as possíveis decomposições $h = f + \overline{g}$ com f, g ∈ F.

4) Se F é um espaço vetorial complexo correspondente a um espaço vetorial real, então pelo que foi visto no §1 temos que $F = \overline{F}$ e $||f|| = ||\overline{f}||$ e é claro que $F_1 = F$, $||f||_{F_1} = ||f||$ e $K_1 = K + \overline{K} = 2\mathrm{Re}K$ e esta propriedade caracteriza o núcleo reprodutor K_1 de um espaço vetorial complexo F correspondente a um espaço vetorial real.

§ 5 DIFERENÇA DE NÚCLEOS REPRODUTORES

Dado duas matrizes positivas K_1 e K estamos agora interessados em explicitar quem é o espaço de funções F_2 correspondente a matriz $K - K_1$ quando fizer sentido pensar em $K - K_1$ como uma matriz positiva.

5.1 DEFINIÇÃO: Sejam $K_1(x,y)$ e $K(x,y)$ duas matrizes positivas definidas sobre um mesmo conjunto ExE. Dizemos que $K_1 \ll K$ se $K(x,y) - K_1(x,y)$ for uma matriz positiva.

É fácil verificar que $K_1 \ll K_2 \ll K_3$ implica em $K_1 \ll K_3$ e também que $K_1 \ll K_2$ e $K_2 \ll K_1$ implica que $K_1 = K_2$. Assim, vemos que $\ll$ estabelece uma ordem parcial sobre o espaço das matrizes positivas.

5.2 TEOREMA: Sejam K e K_1 núcleos reprodutores de espaços F e F_1 com normas $\| \ \|$ e $\| \ \|_{F_1}$ respectivamente. Se $K_1 \ll K$ então $F_1 \subset F$ e $\|f_1\|_{F_1} \geq \|f_1\|$ para toda $f_1 \in F_1$.

DEMONSTRAÇÃO: Pela hipótese do teorema segue que $K_2 = K - K_1$ é uma matriz positiva e considerando-se $(F_2, \| \ \|_{F_2})$ o espaço correspondente a K_2 temos que $K = K_1 + K_2$ e pelo teorema 4.4 segue que:

$$F = \{ f(x) = f_1(x) + f_2(x) \text{ onde } f_i \in F_i \ \ i = 1,2\}.$$

Portanto se $f_1 \in F_1$ então $f_1 + 0 = f_1 \in F$ e consequentemente $F_1 \subset F$. Ainda pelo teorema 4.4 segue que:

$$\|f_1\|^2 = \min\,[\|g_1\|^2_{F_1} + \|h_2\|^2_{F_2}]$$

onde o mínimo é tomado sobre todas as possíveis decomposições $f_1 = g_1 + h_2$ com $g_1 \in F_1$ e $h_2 \in F_2$. Como $f_1 = f_1 + 0$ é uma destas possíveis decomposições segue que:

$$\|f_1\|^2 \leq \|f_1\|^2_{F_1}$$

e o resultado está completo.

O resultado a seguir pode ser interpretado como uma recíproca do teorema 5.2.

5.3 TEOREMA: Se $(F, \|\ \|, K)$ é um RKHS e se $F_1 \subset F$ é um espaço de Hilbert com norma $\|\ \|_{F_1}$ tal que $\|f_1\|_{F_1} \geq \|f_1\|$ para toda $f_1 \in F_1$ então F_1 possui um núcleo reprodutor K_1 tal que $K_1 \ll K$.

DEMONSTRAÇÃO: Pela propriedade 1.4 temos que existe M_y tal que $|f(y)| \leq M_y \|f\|$ para toda $f \in F$. Assim, se considerarmos $f_1 \in F_1 \subset F$, temos:

$$|f_1(y)| \leq M_y \|f_1\| \leq M_y \|f_1\|_{F_1}$$

o que novamente pela propriedade 1.4 garante a existência do núcleo reprodutor K_1 em F_1.

Nossa intenção agora é obter o RKHS $(F_2, \|\ \|_{F_2})$ correspondente ao núcleo reprodutor $K_2 = K - K_1$. Ao construirmos o espaço F_2, estaremos implicitamente demonstrando que $K - K_1$ é, de fato, uma matriz positiva. Com este objetivo passaremos inicialmente por alguns lemas que nos serão muito úteis na demonstração do teorema que virá a seguir.

5.4 LEMA Sejam F_1 e F como no teorema 5.3. Existe um único operador linear L definido sobre F e transformando F em F_1 e que satisfaz a seguinte equação para toda $g \in F_1$:

$$\langle g,f\rangle = \langle g,Lf\rangle_{F_1} .$$

Além disso, este operador é simétrico positivo e limitado pela constante 1.

DEMONSTRAÇÃO: Para cada $f \in F$ consideremos o funcional $T_f:F_1 \to \mathbb{C}$ definido por $T_f(g) = \langle g,f\rangle$. Pela continuidade do produto interno temos que T_f é um funcional linear contínuo e como tal ele é representado na forma de um produto escalar, em F_1, de g com um elemento $f_1 \in F_1$ determinado de forma única. Fazendo $f_1 = Lf$ obtemos

$$Tf(g) = \langle g,f\rangle = \langle g,f_1\rangle_{F_1} = \langle g,Lf\rangle_{F_1} .$$

Isto prova a primeira parte do lema. Mostraremos agora que L é simétrico, positivo e limitado pela constante 1.

O operador $L:F \to F_1$ é linear e está bem definido em todo F pois T_f foi definido para $f \in F$ arbitrário. O operador L é simétrico pois para $f,g \in F$ temos

$$\langle Lf,g\rangle = \langle Lf,Lg\rangle_{F_1} = \overline{\langle Lg,Lf\rangle_{F_1}} = \overline{\langle Lg,f\rangle} = \langle f,Lg\rangle.$$

Agora, $\langle Lf,f\rangle = \langle Lf,Lf\rangle_{F_1} \geq 0$, ou seja, L é positivo. Além disso,

$$\langle Lf,f\rangle = \langle Lf,Lf\rangle_{F_1} = ||Lf||_{F_1}^2 \geq ||Lf||^2$$

e portanto como L é positivo segue que:

$$||Lf||^2 \leq \langle Lf,f\rangle = |\langle Lf,f\rangle| \leq ||Lf||\,||f||$$

de onde segue que $||L|| \leq 1$. O que conclui a demonstração do lema.

Observemos que o operador $I-L$, onde I é o operador identidade, é também linear, simétrico, positivo e limitado. Portanto, da teoria de operadores lineares segue, como mencionado no capítulo 0, que $I-L$ possui uma raiz quadrada L', isto é, $(L')^2=I-L$, que é também um operador simétrico e limitado.

Tomemos F_o subespaço linear fechado de F dado pelo núcleo do operador L', isto é:

$$F_o = \{ f \in F \ \text{ tal que } L'f = 0\}$$

e seja F' seu complemento ortogonal.

5.5 PROPOSIÇÃO: Os núcleos dos operadores L' e L'^2 coincidem.

DEMONSTRAÇÃO: Claro que $\mathrm{Ker}L' \subset \mathrm{Ker}L'^2$. Para verificarmos a recíproca basta considerar $f \in F$ tal que $L'^2 f = 0$ e obtemos:

$$0 = \langle L'^2 f,f\rangle = \langle L'(L'f),f\rangle = \langle L'f,L'f\rangle = ||L'f||^2$$

e portanto $L'f = 0$.

Notemos também que pela definição de L'^2 segue que $f \in \mathrm{Ker}L'^2$ se e somente se $f = Lf$. Pela proposição anterior temos então que $F_o = \mathrm{Ker}\ L' = \mathrm{Ker}\ L'^2$ é o conjunto dos pontos fixos de L.

5.6 LEMA: Seja L' como definido acima. Então duas funções que têm a mesma imagem via L' têm também a mesma projeção sobre

F'.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam f, $g \in F$ tal que $L'f=L'g$. Então $(f-g) \in F_o$. Consideremos f', $g' \in F'$ e f_o, $g_o \in F_o$ as funções determinadas de modo único que satisfaçam:

$$f = f' + f_o \qquad \text{e} \qquad g = g' + g_o \ ,$$

e assim $f'-g' = f-g-f_o+g_o \in F_o$. Mas isto implica que $f'-g' \in F_o \cap F' = \{0\}$ e então $f' = g'$. Isto é exatamente dizer que a projeção de f e de g sobre F' coincidem.

5.7 LEMA: Seja L' como definido acima e F_2 o conjunto de funções formado pela imagem de F por L', isto é:

$$F_2 = \{ g \text{ tal que } g = L'f \text{ para alguma } f \in F\} \ .$$

Então, a restrição de L' a F', determina uma isometria de F' sobre F_2.

DEMONSTRAÇÃO: Para facilitar nossa notação continuaremos a chamar de L' a restrição deste funcional ao subespaço F'. É claro que L' determina uma bijeção entre F' e F_2 pois a sobrejetividade segue diretamente da definição de F_2 e a injetividade segue da definição de F_o que é o completamento ortogonal de F'. Mais ainda, afirmamos que $F_2 \subset F'$. Verifiquemos esta afirmação considerando $g = L'f \in F_2$ e $h \in F_o$ e obtemos

$$\langle h,g\rangle = \langle h,L'f\rangle = \langle L'h,f\rangle = \langle 0,f\rangle = 0 \ ,$$

ou seja, g é ortogonal a h, e como h foi tomado arbitrariamente em F_o segue que g é ortogonal a F_o e portanto $g \in F'$ de onde segue que $F_2 \subset F'$.

Em F_2 definimos uma norma, $|| \ ||_{F_2}$ por:

$$||f_2||_{F_2} = ||P'f|| \ ,$$

onde $f \in F$ é qualquer função satisfazendo $L'f = f_2$ e P' é a projeção de F sobre F'. A norma definida acima claramente independe da função f escolhida devido ao lema 5.6 e ainda torna L' uma isometria de F' em F_2 pois se $L'f = f_2$ então:

$$||L'f||_{F_2} = ||f_2||_{F_2} = ||P'f|| = ||f|| \quad ,$$

onde a última igualdade acima decorre do fato de $f \in F'$. Portanto, para $f,g \in F'$ devemos ter também:

$$\text{(1)} \qquad \langle L'f, L'g\rangle_{F_2} = \langle f,g\rangle \ .$$

Como F' é um subespaço fechado de um espaço de Hilbert segue que F' é , ele próprio, um espaço de Hilbert e assim segue que F_2 também o é pois é isométrico a F'.

5.8 TEOREMA: Se $(F, || \ ||, K)$ é um RKHS então, nas condições do teorema 5.3 temos que o espaço $(F_2, || \ ||_{F_2})$ correspondente ao núcleo reprodutor $K_2 = K-K_1$ é definido como segue. A equação $f_1(y) = Lf = \langle f(x), K_1(x,y)\rangle$ define em F um operador positivo com limitante menor ou igual a 1, transformando F em $F_1 \subset F$. Consideremos qualquer raiz quadrada simétrica $L' = (I-L)^{1/2}$ e seja F_2 o conjunto de todas as transformações $L'f$ com $f \in F$, F_o o subespaço fechado de F constituido pelos pontos fixos de L e F' seu complemento ortogonal. L' estabelece uma correspondência biunívoca isométrica entre F' e F_2. A norma em F_2 é dada por:

$$||f_2||_{F_2} = ||P'f'||$$

para qualquer $f' \in F'$ tal que $f_2 = L'f'$ e P' a projeção de F sobre F'.

DEMONSTRAÇÃO: Pelos lemas 5.4, 5.6 e 5.7 temos que só nos resta mostrar que $F_2 = (F_2, ||\ ||_{F_2})$ admite $K - K_1$ como seu núcleo reprodutor. Verifiquemos inicialmente que L é dado por $Lf = \langle f(x), K_1(x,y)\rangle$. Seja $f_1 = Lf$ e então:

$$Lf(y) = f_1(y) = \langle f_1(x),K_1(x,y)\rangle_{F_1} = \langle Lf(x),K_1(x,y)\rangle_{F_1} =$$

$$= \langle f(x),LK_1(x,y)\rangle_{F_1} = \langle f(x),K_1(x,y)\rangle$$

Por este resultado temos então que para $z \in E$ fixo, L aplicado a $K(x,z)$ nos fornece $LK(x,z) = K_1(x,z)$ e assim, $L'^2 = I-L$ transforma $K(x,z)$ em $L'^2(K(x,z)) = K(x,z) - K_1(x,z)$. Isto prova que $K-K_1$ pertence a F_2 como função de x visto que é imagem de $L'K(x,y)$ por L'.

Verifiquemos agora a validade da propriedade reprodutora. Seja uma função não nula $g \in F_2 \subset F$ e tomando-se $f \in F$ qualquer tal que $L'f = g$ temos:

$$g(y) = \langle g(x),K(x,y)\rangle = \langle L'f(x),K(x,y)\rangle = \langle f(x),L'K(x,y)\rangle$$

como $L'f=g \not\equiv 0$ segue que $f \in F'$. Também $L'K(x,y) \in F_2 \subset F'$ de onde segue que:

$$P'f = f \qquad e \qquad P'L'K(x,y) = L'K(x,y) .$$

Portanto por (1) desta seção temos

$$g(y) = \langle f(x), L'K(x,y)\rangle =$$

$$= \langle L'f, L'(L'K(x,y))\rangle_{F_2}$$

$$= \langle g(x), K(x,y)-K_1(x,y)\rangle_{F_2}$$

e está demonstrado o teorema.

A construção de F_2 é complicada pois necessitamos da raiz quadrada do operador I-L. Contudo, existe uma maneira muito mais fácil de se construir um subespaço vetorial G denso em F_2 e a norma $\|\ \|_G$ neste subespaço. Seja G definido como abaixo:

$$G = \{\ g \in F_2 \text{ onde } g = L'^2 f \text{ para alguma } f \in F\}$$

É fácil verificar que G é uma subclasse linear fechada de F_2. A norma $\|\ \|_G$ em G pode ser definida como segue: Para $g \in G$ seja $f \in F$ arbitrária tal que $L'^2 f = g$ então:

$$(2) \qquad \|L'^2 f\|_G^2 = \|g\|_G^2 = \|L'f\|^2 = \langle L'f, L'f\rangle =$$

$$= \langle f, L'^2 f\rangle = \langle f,f\rangle - \langle f, Lf\rangle$$

$$= \langle f,f\rangle - \langle Lf, Lf\rangle_{F_1}$$

5.9 PROPOSIÇÃO: G é denso em F_2 em relação a norma $\|\ \|_{F_2}$.

DEMONSTRAÇÃO: Nesta demontração faremos uso do seguinte fato: Se $G \subset F_2$ é um subespaço fechado de F_2 e não denso então, e só então, existe $H \subset F_2$, H não vazio e tal que $G \oplus H = F_2$.

Desta forma, suponhamos por absurdo que G seja não denso em F_2. Então existe $0 \neq h \in H \subseteq F_2$ onde H é o complemento ortogonal de G. Logo existe $f' \in F'$ tal que $L'f' = h$ pois $h \neq 0$. Portanto $\langle h,f\rangle_{F_2} = 0$ para toda função $f \in G$, isto é: $\langle L'f',L'^2g\rangle_{F_2} = 0$ onde $g \in F$ é arbitrária satisfazendo $L'g = f$.

Segue de (1) que

$$(3) \qquad 0 = \langle L'f',L'^2g\rangle_{F_2} = \langle f',L'g\rangle = \langle L'f',g\rangle .$$

Tomando-se então $f=L'^2(L'f') \in G$ podemos tomar $g=L'f'$ e de (3) segue então que $L'f'=0$ o que é um absurdo pois por hipótese $0\neq h=L'f'$. Portanto G é denso em F_2.

OBSERVAÇÃO: Poderíamos também, estudar o caso da matriz $K=K_1K_2$ onde K_1 e K_2 são núcleos reprodutores de dois RKHS F_1 e F_2. É possível se demonstrar que $K=K_1K_2$ é também uma matriz positiva. Os cálculos para obtermos o RKHS F correspondente a K são longos e técnicos e, por isso, optamos por simplesmente enunciar alguns resultados concernentes a este caso.

Seja $E'=ExE$ e F o conjunto de todas as funções definidas sobre E' da forma:

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{k,l}\ g_k(x)h_k(y)$$

com

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |\alpha_{k,l}|^2 < \infty$$

onde $g_k(x) \in F_1$ e $h_k(x) \in F_2$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Pode-se demonstrar que F como definida acima é o completamento funcional do espaço F' das funções da forma:

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x)h_k(y)$$

com $g_k \in F_1$ e $h_k \in F_2$ k=1,2,..n, com F' munido do seguinte produto interno $\langle\ ,\ \rangle'$: Para $f',f'' \in F'$ arbitrárias:

$$f'(x,y) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x)h_k(y)$$

$$f''(x,y) = \sum_{l=1}^{n} r_l(x)s_l(y)$$

então:

$$\langle f',f''\rangle' = \sum_{k}^{n}\sum_{l}^{m} \langle g_k,r_l\rangle_1 \langle h_k,s_l\rangle_2$$

pode-se mostrar ainda que este produto interno independe das representações de f' e f".

Sobre F podemos afirmar que:

5.11 TEOREMA: F é um RKHS com núcleo reprodutor dado por $K(x_1,x_2,y_1,y_2) = K_1(x_1,y_1)K_2(x_2,y_2)$.

5.12 TEOREMA: $K(x,y) = K_1(x,y)K_2(x,y)$ é o núcleo reprodutor do espaço G das restrições de todas as funções de F ao conjunto diagonal $E_1 = \{ (x,x)$ tal que $x \in E\} \subset E'$. Para qualquer restrição f temos $||f|| = \min||g||'$ dentre todas as funções g que restritas a E_1 coincida com f.

§ 6 LIMITES DE SEQUÊNCIAS DE NÚCLEOS REPRODUTORES

Estudaremos agora o caso de uma sequência de núcleos reprodutores K_n *sob determinadas condições impostas sobre* F_n *e* E_n, *respectivamente o espaço e o domínio das funções do espaço do qual* K_n *é o núcleo reprodutor. Analisaremos quando faz sentido falar em* $\lim K_n$ *e quem será o espaço de funções correspondentes a* $K_o = \lim K_n$.

Consideraremos dois casos distintos:

CASO A: Inicialmente consideraremos o caso dos espaços F_n formando uma sequência decrescente num certo sentido com uma sequência decrescente de núcleos reprodutores $K_1 \gg K_2 \gg \ldots$.

Consideremos uma sequência crescente de conjuntos $\{E_n\}$ e $E = \bigcup E_n$ sua união. Sejam F_n os espaços das funções definidas sobre E_n respectivamente e denotemos por f_{nm} a restrição de f_n a $E_m \subset E_n$ sempre que $m \leq n$. Suponhamos que F_n forme uma sequência decrescente no seguinte sentido, para $m \leq n$:

$$(1) \qquad f_n \in F_n \Rightarrow f_{nm} \in F_m \quad .$$

Suponhamos ainda que as normas $\| \ \|_{F_n}$ definidas em F_n formem uma sequência crescente no seguinte sentido, para $m \leq n$:

(2) $$f_n \in F_n \Rightarrow ||f_{nm}||_{F_m} \leq ||f_n||_{F_n}$$

Finalmente suponhamos que cada F_n possua um núcleo reprodutor K_n. Chamamos atenção para o fato de que o caso $E_1=E_2=\ldots=E$ não está excluído. Neste caso temos claramente $f_{nm}=f_n$ e F_n está literalmente contido em F_m.

Notemos que, também neste caso, basta supor a existência de K_1, núcleo reprodutor de E_1 e obtemos que F_1 é um RKHS que contém um espaço de Hilbert F_n e ainda $||f_n||_{F_n} \geq ||f_{n1}||_{F_1} = ||f_n||_{F_1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para toda $f_n \in F_n$ pois $E_n=E_1$ para todo n. Isto nos deixa em condições de utilizar o teorema 5.3 e concluirmos que para todo n, F_n possui um núcleo reprodutor K_n satisfazendo $K_n \ll K_1$. Desta forma se deduz a existência de todos os K_n, $n=1,2,\ldots$ e a seguinte propriedade:

$$K_n \ll K_m \quad \text{para todo } m < n \quad .$$

No caso geral as coisas não são tão simples assim e precisamos introduzir as restrições de K_n a E_m sempre que $m \leq n$. Seguindo o critério acima, denotaremos tal restrição por K_{nm}. Pelo teorema 3.3, K_{nm} é o núcleo reprodutor da classe F_{nm} de todas as restrições f_{nm} das funções $f_n \in F_n$ e a norma em F_{nm} é dada por:

$$||f_{nm}||_{F_{nm}} = \min||g_n||_{F_n}$$

onde o mínimo é tomado dentre todas as funções de F_n que restritas a E_m coincidam com f_{nm}.

Obtemos então para $m \leq n$:

$$||f_{nm}||_{F_{nm}} = \min||g_n||_{F_n} = ||\bar{g}_n||_{F_n}$$

onde $\bar{g}_{nm}=f_{nm}$ é a função que atinge o mínimo. Assim, fazendo uso de (2):

$$||f_{nm}||_{F_{nm}} = ||\bar{g}_n||_{F_n} \geq ||\bar{g}_{nm}||_{F_m} = ||f_{nm}||_{F_m} \quad ,$$

e novamente nos encotramos nas condições do teorema 5.3 pois F_m é um RKHS, $F_{nm} \subset F_m$ é um espaço de Hilbert. Portanto podemos concluir que F_{nm} possui o núcleo reprodutor K_{nm} e ainda para todo m < n:

(3) $$K_{nm} \ll K_m$$

A seguir provaremos o seguinte teorema:

6.1 TEOREMA: Sob as suposições acima feitas sobre os espaços F_n, os núcleos reprodutores K_n convergem ao núcleo reprodutor $K_o(x,y)$ definido para todo $(x,y) \in ExE$. K_o é o núcleo reprodutor da classe F_o formada por todas as funções f_o com domínio E tais que f_{on}, suas restrições a E_n, pertençam a F_n para todo n natural e ainda satisfaçam:

$$\lim ||f_{on}||_{F_n} < \infty$$

e a norma $||\ ||_{F_o}$ em F_o é definida para uma $f_o \in F_o$, por:

$$||f_o||_{F_o} = \lim||f_{on}||_{F_n}$$

OBSERVAÇÃO: A primeira condição do teorema, sobre as restrições das funções f_o aos E_n pertencerem aos F_n, n=1,2,... , nos garante que $\lim||f_{on}||_{F_n}$ existe mas pode ser infinito pois para $f_{on} = g_n \in F_n$ temos com $m \leq n$ que:

$$||f_{om}||_{F_m} = ||f_{onm}||_{F_m} = ||g_{nm}||_{F_m} \leq ||g_n||_{F_n} = ||f_{on}||_{F_n}$$

o que garante a monotonicidade da nossa sequência, no entanto a segunda condição em nosso teorema não pode ser dispensada.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 6.1: A convergência de K_n para K_o deve ser entendida no seguinte sentido: Para quaisquer $x,y \in E$ existe n_o tal que $x,y \in E_n$ para todo $n \geq n_o$. Consequentemente $K_n(x,y)$ esta definido para $n \geq n_o$ e temos que provar que lim $K_n(x,y) = K(x,y)$. Lembrando-se que f_{mn} simplesmente denota a restrição da função f_m ao conjunto E_n observa-se facilmente que para $n > m \geq k$ temos:

$$K_{mk} - K_{nk} = K_{mk} - K_{nmk} = (K_m - K_{nm})_k = (K_{mm} - K_{nm})_k = (K_m - K_n)_{mk}$$

e portanto, fixando-se $y \in E_k$ e $k \leq m < n$, temos:

$$||K_{mk} - K_{nk}||^2_{F_k} = ||(K_m - K_n)_{mk}||^2_{F_k} \leq ||(K_m - K_n)_m||^2_{F_m} =$$

$$||K_m - K_{nm}||^2_{F_m} = \langle K_m - K_{nm}, K_m - K_{nm} \rangle$$

mas $\langle K(x,y),K(x,y)\rangle = K(y,y)$ e $\langle K_{nm}(x,y),K_m(x,y)\rangle = K_{nm}(y,y)$ pois K_m é o núcleo reprodutor de F_m. Além disso, pela equação (7) da propriedade 1.6 segue que $\langle K_m(x,y),K_{nm}(x,y)\rangle = \overline{K_{nm}(y,y)} = K_{nm}(y,y)$ e assim segue que:

$$(4) \qquad ||K_{mk} - K_{nk}||^2_{F_k} \leq K_m(y,y) - K_{nm}(y,y) = K_m(y,y) - K_n(y,y) \; ,$$

pois para $y \in E_k$ e $k \leq m < n$ temos $K_{nm}(y,y) = K_n(y,y)$.

De (3) segue que $K_m - K_{nm}$ é uma matriz positiva e para $y \in E_k$ fixo temos: $0 \leq K_m(y,y) - K_{nm}(y,y) = K_m(y,y) - K_n(y,y)$. A sequência $\{K_m(y,y)\}_{m\geq k}$ é não negativa decrescente e portanto convergente. Por (4) obtemos então que como $K_{mk}(x,y) \in F_k$ para k e y fixos então a sequência $\{K_{mk}(x,y)\}$ é de Cauchy e portanto converge fortemente para uma função $\Phi_k(x) \in F_k$ pois F_k é completo por hipótese. Pela propriedade 1.8 obtemos que esta convergência ocorre também pontualmente e portanto para k e y fixos e para todo $x \in E_k$ obtemos:

(5) $$\lim K_{mk}(x,y) = \lim K_m(x,y)=\Phi_k(x) .$$

Como o resultado acima foi obtido para k fixo porém arbitrário, concluímos que toda sequência de restrições do tipo $K_{mk}(x,y)$ converge para uma $\Phi_k(x)$ desde que $x \in E_k$. Assim, segue que $K_m(x,y)$ deve também convergir para uma $K_o(x,y)$ para todo $x \in E$ e é claro que a função $\Phi_k(x)$ é apenas a restrição $K_{ok}(x,y)$ de $K_o(x,y)$ a E_k. Para y fixo temos então que K_{mk} converge fortemente para K_{ok} em F_k. Então, fazendo-se $n \to \infty$ em (4) obtém-se:

(6) $$||K_{mk}-K_{ok}||^2_{F_k} \leq K_m(y,y)-K_o(y,y) .$$

Agora, segue pela desigualdade triangular e por (6) que

$$\begin{aligned} ||K_{ok}(x,y)||_{F_k} &\leq ||K_{ok}(x,y)-K_{mk}(x,y)||_{F_k} + ||K_{mk}(x,y)||_{F_k} \leq \\ & [K_m(y,y)-K_o(y,y)]^{1/2} + ||K_m(x,y)||_{F_m} \\ & [K_m(y,y)-K_o(y,y)]^{1/2} + [K_m(y,y)]^{1/2} \end{aligned}$$

e passando-se ao limite com $m \to \infty$ obtemos:

$$||K_{ok}(x,y)||^2_{F_k} \le K_o(y,y) < \infty \quad .$$

Portanto K_o satisfaz a segunda condição para pertencer a F_o. Também, para cada $y \in E$ fixado e para todo k temos que $K_{ok}(x,y)=\Phi_k(x) \in F_k$ e então a primeira condição para K_o pertencer a F_o também é satisfeita e portanto $K_o(x,y) \in F_o$ como função de x. Não é difícil mostrar que F_o munido do produto interno: $\langle f_o,g_o\rangle_{F_o} = \lim \langle f_{on},g_{on}\rangle_{F_n}$, que induz a norma $||\ ||_{F_o}$, é de fato um espaço de Hilbert, porém, omitiremos esta demonstração para não nos alongarmos demais.

Provemos agora a propriedade reprodutora de K_o. Tomemos $f_o \in F_o$ e $y \in E$ arbitrários. Para n suficientemente grande temos $y \in E_n$ e portanto:

$$f_o(y) = f_{on}(y) = \langle f_{on}(x),K_n(x,y)\rangle_{F_n}$$

$$=\langle f_{on}(x),K_{on}(x,y)\rangle_{F_n} + \langle f_{on}(x),K_n(x,y) - K_{on}(x,y)\rangle_{F_n}$$

mas $\lim\langle f_{on}(x),K_{on}(x,y)\rangle_{F_n} = \langle f_o(x),K_o(x,y)\rangle_{F_o}$ por definição de $\langle\ ,\ \rangle_{F_o}$ e por (6) com $k = m = n$ temos

$$|\langle f_{on}(x),K_n(x,y)-K_{on}(x,y)\rangle| \le ||f_{on}||_{F_n}\ ||K_n(x,y)-K_{on}(x,y)||_{F_n} \le$$

$$\le ||f_o||_{F_o} (K_n(y,y)-K_o(y,y))^{1/2}$$

e portanto $\lim \langle f_{on}(x),K_n(x,y)-K_{on}(x,y)\rangle_{F_n} = 0$ pois $\lim K_n=K_o$.

Logo:

$$f_o(y)=\langle f_o(x),K_o(x,y)\rangle_{F_o} \quad .$$

CASO B: Neste caso, consideremos $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots$ e $E = \bigcap E_i$, F_n espaços de funções definidas em E_n e como no caso A denotemos por f_{nm} a restrição de f_n à E_m só que agora necessitamos ter $m \geq n$. Vamos assumir que F_n forme uma sequência crescente no seguinte sentido:

(7) $$f_n \in F_n \text{ e } m \geq n \Rightarrow f_{nm} \in F_m .$$

Suponhamos ainda que para toda $f_n \in F_n$ e $m \geq n$ tenhamos:

(8) $$||f_{nm}||_{F_m} \leq ||f_n||_{F_n}$$

e que todo espaço F_n seja um RKHS com núcleo reprodutor K_n. Observemos que, ao contrário do que ocorreu no caso A, mesmo se tomarmos $E_1 = E_2 = \ldots$ não podemos aplicar o teorema 5.3 e portanto não podemos deduzir a existência de todos os núcleos a partir da existência de um deles. No caso mais geral em que pode ocorrer $E_i \neq E_j$ será necessário considerar as restrições $K_{nm} = K_n|_{E_m}$ e se supusermos que F_m possui núcleo reprodutor K_m então, agora para todo $n \leq m$ podemos fazer uso do teorema 5.3, como foi feito no caso A, para obter que a classe F_{nm} das restrições das funções de F_n a E_m é um RKHS com núcleo reprodutor K_{nm} satisfazendo:

(9) $$K_{nm} \ll K_m \qquad \text{para } m > n \quad .$$

Pela seção 3 K_{nm} é o núcleo reprodutor de F_{nm} com norma dada por $||f_{nm}||_{F_{nm}} = \min||g_n||_{F_n}$ dentre todas as funções $g_n \in F_n$ tais que $g_{nm} = f_{nm}$.

Para $y \in E$ fixo e $n < m$ temos que $K_n(y,y) = K_{nm}(y,y) \leq K_m(y,y)$ por (9). Logo $K_m(y,y)$ forma uma sequência crescente de números reais. Chamemos de E_o o subconjunto de E onde $K_o(y,y) = \lim K_m(y,y) < \infty$. Suponhamos que E_o seja não vazio e definamos o espaço F_o, limite dos espaços F_n, como sendo o conjunto de todas as restrições a E_o das funções $f_n \in E_n$ para todo n natural. De (8) temos que a sequência$(||f_{nk}||_{F_k})_{k=n,n+1...}$ é decrescente para n fixado, pois para $n \leq k \leq l$ $||f_{nk}||_{F_k} \geq ||f_{nkl}||_{F_l} = ||f_{nl}||_{F_l}$ e assim, podemos definir:

$$||f_{no}||_{F_o} = \lim_{k\to\infty} ||f_{nk}||_{F_k} \quad . \tag{10}$$

Em geral F_o não será completo. Para que F_o admita um completamento funcional é necessário que se verifique as duas condições do teorema 2.2. A este respeito demonstraremos a seguinte proposição:

6.2 PROPOSIÇÃO: As duas condições abaixo são equivalentes:

1) Para todo $y \in E_o$ existe M_y tal que:

$$|f_{no}(y)| \leq M_y ||f_{no}||_{F_o} \quad \forall f_{no} \in F_o$$

2) Para todo $y \in E_o$ temos: $K_o(y,y) = \lim K_n(y,y) < \infty$.

DEMONSTRAÇÃO: Para $y \in E_o$ fixo e arbitrário temos

$$|f_{no}(y)| = |f_{nk}(y)| = |\langle f_{nk}(x), K_k(x,y)\rangle_{F_k}| \leq$$

$$\leq ||f_{nk}||_{F_k} (K_k(y,y))^{1/2}$$

pois $f_{nk} \in F_k$ por (7). Passando-se ao limite quando k tende ao infinito obtemos

$$|f_{no}(y)| \leq ||f_{no}||_{F_o} (K_o(y,y))^{1/2} .$$

Portanto a condição 1) é satisfeita com $M_y = (K_o(y,y))^{1/2}$. Partindo agora da condição 1) para $y \in E_o$ fixo e como $||K_{no}||_{F_o}$ é o limite da sequência decrescente $\{||K_{nk}||_{F_k}\}$ temos

$$K_n(y,y) = K_{no}(y,y) = |K_{no}(y,y)| \leq M_y ||K_{no}||_{F_o} \leq$$

$$\leq M_y ||K_n(x,y)||_{F_n} = M_y (K_n(y,y))^{1/2}$$

de onde segue que $K_n(y,y) \leq M_y^2$ e portanto vale a condição 2).

Logo a primeira condição do teorema 2.2 é garantida pela restrição ao conjunto E_o. Mas em geral a segunda condição não é satisfeita.

É possível superar esta dificuldade procedendo da seguinte forma: Completamos F_o com "elementos idealizados" e para este espaço completado $\overline{F}_o$ escolhemos um conjunto adicional E' de modo que as funções de $\overline{F}_o$ estendidas a $E_o + E'$ com a mesma norma que em F_o forme um espaço que admita completamento funcional que leve ao espaço G com núcleo reprodutor K_G. Como foi visto na seção 3, retornamos ao conjunto E_o pela restrição das funções de G a E_o. Tomando no espaço H das restrições a norma dada pelo teorema 3.3 nós chegamos ao núcleo reprodutor K_H que é a restrição de K_G a E_o. O espaço H e sua norma $||\ \ ||_H$ podem ser descritos em termos do espaço F_o e de sua norma $||\ \ ||_{F_o}$ como segue: Pelo teorema 3.3 já vimos que para qualquer $f \in H$ temos:

$$||f||_H = \min ||g||_G$$

onde $g \in G$ é tal que g restrita a E_o coincide com f. Mas como G foi obtida de $\overline{F}_o$ via completamento funcional segue que:

$$||g||_G = \lim ||f_n||_{F_o}$$

onde $\{f_n\} \subset \overline{F}_o$ é uma sequência de Cauchy qualquer que convirja para g em todo ponto $y \in E_o + E'$. Em particular $\{f_n\}$ é uma sequência de Cauchy qualquer convergindo para f em todo ponto de E_o, pois $g|_{E_o}=f$. Portanto, dado $f \in H$ existe uma sequência de Cauchy $\{f_n\} \subset F_o$ tal que:

$$(11) \qquad f(x) = \lim f_n(x) \qquad \forall\, x \in E_o$$

e portanto:

$$(12) \qquad ||f||_H = \min \lim ||f_n||_{F_o}$$

onde o mínimo é tomado dentre todas as sequências de Cauchy de F_o que convirjam a qualquer função $g \in G$ cuja restrição a E_o coincida com f. Existe pelo menos uma sequência de Cauchy para a qual o mínimo é obtido. Tais sequência serão chamadas de *sequências determinadoras de f.*

O produto interno correspondente a $||\ \ ||_H$ é definido por:

$$(13) \qquad \langle f,g\rangle_H = \lim \langle f_n,g_n\rangle$$

para quaisquer duas sequências de Cauchy $\{f_n\},\{g_n\}$ determinadoras de f e g.

É importante observar que (13) ainda é válida quando apenas uma das sequências for determinadora e a outra simplesmente satisfizer (11).

Provemos agora o seguinte teorema:

6.3 TEOREMA: As restrições $K_{no}(x,y)$ para cada $y \in E_o$ fixo formam uma sequência de Cauchy em F_o. Elas convergem à função $K_H(x,y) \in H$ que é o núcleo reprodutor de H.

DEMONSTRAÇÃO: De modo semelhante ao que foi feito para obtenção de (4) no caso A, agora para $n \le m \le k$ obtemos:

$$(14) \qquad \|K_{mk}-K_{nk}\|^2_{F_k} \le K_m(y,y) - K_n(y,y)$$

e fazendo-se k tender ao infinito obtemos:

$$(15) \qquad \|K_{mo}-K_{no}\|^2_{F_k} \le K_m(y,y) - K_n(y,y) .$$

Pela definição do conjunto E_o, segue que $\{K_{mo}\}$ é de fato uma sequência de Cauchy em F_o. Como $K_{no} \in F_o$, segue pela proposição 6.2 que $|K_{no}(x,y)| \le M_y \|K_{no}\|_{F_o}$ e, por (15), temos que para $y \in E_o$ fixo, $\{K_{no}(x,y)\}$ é de Cauchy em $\mathbb{C}$ para todo $x \in E_o$ e portanto seja:

$$K_H(x,y) = \lim K_{no}(x,y) .$$

Assim, para $y \in E_o$ fixado, $K_H(x,y) \in H$ como função de x.

Provemos agora a propriedade reprodutora de K_H: Tomemos $f \in H$ arbitrária e uma sequência de Cauchy, $\{f_n\} \subset F_o$, determinadora de f. Cada f_n é uma restrição a E_o de alguma f_{k_n} $\in F_{k_n}$, isto é $f_n = f_{k_n o}$. Por (10) temos que para todo $i \in \mathbb{N}$:

$$||f_{io}||_{F_o} = \lim_{l\to\infty} ||f_{il}||_{F_l}$$

onde $i\leq l_1<l_2 \Rightarrow ||\ \ ||_{F_{l1}} \geq ||\ \ ||_{F_{l2}}$. Assim, tomando-se $i=k_n$, segue que podemos construir uma sequência crescente $m_1 < m_2 <\ldots$ e ainda satisfazendo $m_n > k_n$, para que faça sentido falar na restrição $f_{k_n m_n}$ e para a qual vale:

$$(16) \qquad (||f_{k_n m_n}||_{F_{m_n}})^2 - ||f_{k_n o}||^2_{F_o} \leq 1/n^2 \quad .$$

Claro que $\{K_{m_n o}(x,y)\}$ também é de Cauchy convergente para $K_H(x,y)$. Por (13) segue:

$$(17) \qquad \langle f(x),K_H(x,y)\rangle_H = \lim\langle f_{k_n o}(x),K_{m_n o}(x,y)\rangle_{F_o}$$

pois $\{f_{k_n o}\} = \{f_n\}$ é uma sequência determinadora de f. Assim escrevemos:

$$\langle f_{k_n o},K_{m_n o}\rangle_{F_o} = \langle f_{k_n m_n},K_{m_n}\rangle_{F_{m_n}} - [\ \langle f_{k_n m_n},K_{m_n}\rangle_{F_{m_n}}$$

$$(18) \qquad - \langle f_{k_n o},K_{m_n o}\rangle_{F_o}\ ] \quad .$$

Note que o colchete acima é da forma $[\langle g,h\rangle_{F_{m_n}} - \langle g_o,h_o\rangle_{F_o}]$ para g,h de F_{m_n} e com g_o e h_o sendo as restrições de g e h a E_o respectivamente. Isto é uma forma bilinear em g e h e a forma quadrática correspondente $\langle g,g\rangle_{F_{m_n}} - \langle g_o,g_o\rangle_{F_o} =$

$(||g||_{F_{m_n}})^2 - ||g_o||^2_{F_o}$ é positiva (segue de (8) e de (10)).

Consequentemente a desigualdade de Cauchy é válida para esta forma e temos:

$$|[...]| \leq [||f_{k_{m_n}}||^2_{F_{m_n}} - ||f_{k_{n_o}}||^2_{F_o}]^{1/2} [||K_{m_n}||^2_{F_{m_n}} -$$

$$||K_{m_n o}||^2_{F_o}]^{1/2} \leq (1/n)||K_{m_n}||_{F_{m_n}} = (1/n)\,(K_{m_n}(y,y))^{1/2} .$$

Quando n tende ao infinito o último membro tende a zero pois $K_{m_n}(y,y)$ tende a $K_o(y,y)$ que é finito por hipótese. Portanto (17) e (18) nos garantem que:

$$\langle f(x),K_H(x,y)\rangle_H = \lim \langle f_{k_{m_n}}(x),K_{m_n}(x,y)\rangle_{F_{m_n}} =$$

$$= \lim f_{k_{m_n}}(y)$$

e para $y \in E_o$ fixado temos $f_{k_{m_n}}(y) = f_{k_{n_o}}(y)$ e portanto temos ainda:

$$= \lim f_{k_{n_o}}(y) = \lim f_n(y) = f(y).$$

ou seja, vale a propriedade reprodutora para K_H.

OBSERVAÇÃO: Um caso particularmente simples é quando $(F_o, ||\ ||_{F_o})$ vem a ser um subespaço de um RKHS, F. Neste caso a segunda condição do teorema 2.2 é claramente satisfeita. H é então o completamento funcional de F_o, a norma $||\ ||_H$ é a extensão da norma $||\ ||_{F_o}$ e H é simplesmente o fecho de F_o em F pois um subespaço de um espaço de Hilbert é completo se e somente se é fechado.

Um exemplo trivial de um caso como este seria o caso $F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F$ onde todos os F_i's fossem subespaços de um RKHS F. Assim $E_1 = E_2 = \ldots = E = E_o$, onde a última igualdade segue da proprosição 6.2. Neste caso $F_o = \bigcup F_n$ e H seu fecho.

§ 7 OPERADORES EM ESPAÇOS COM NÚCLEOS REPRODUTORES

Em espaços de Hilbert de funções munidos de núcleos reprodutores, os operadores limitados admitem uma representação interessante.

Nesta seção usaremos $L_x K(x,y)$ *para denotar o operador L atuando em K(x,y) como função de x e a imagem de K(x,y) via* L_x *é vista também como função de x tendo y como parâmetro.*

Seja F um RKHS e L um operador linear sobre F e L^* o operador adjunto de L. Se tomarmos a transformação:

(1) $$\Lambda(x,y) = L^*_x K(x,y)$$

temos que Λ como função de x pertence a F.

Segue imediatamente da definição acima que ao operador identidade, I, corresponde o núcleo $\Lambda(x,y)=K(x,y)$.

Utilizando-se (1) temos que para cada $f \in F$:

(2) $$Lf(y) = \langle Lf(x),K(x,y)\rangle_x = \langle f(x),L^*_x K(x,y)\rangle_x = \\ = \langle f(x),\Lambda(x,y)\rangle_x$$

Logo, a um dado operador limitado L em F corresponde um núcleo $\Lambda(x,y)$ que, para todo parâmetro y, é um elemento de F como função de x. O operador é representado em termos de seu núcleo pela relação (2).

7.1 PROPOSIÇÃO: O núcleo $\Lambda^*(x,y)$ correspondente ao operador L^* é dado por $\Lambda^*(x,y) = \overline{\Lambda(y,x)}$.

DEMONSTRAÇÃO: Por (1) temos $\Lambda^*(x,y)=(L_x^*)^*K(x,y)=L_xK(x,y)$ e então:

$$\begin{aligned}\langle\Lambda^*(x,z),K(x,y)\rangle &= \langle L_xK(x,z),K(x,y)\rangle= \\ &= \langle K(x,z),L_x^*K(x,y)\rangle= \\ &= \overline{\langle\Lambda(x,y),K(x,z)\rangle}.\end{aligned}$$

Agora, tomando-se $f(y)=\Lambda^*(y,z)$ e $g(z)=\Lambda(z,y)$ obtemos pela propriedade reprodutora de K o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}\Lambda^*(y,z)=f(y)=\langle f(x),K(x,y)\rangle&=\langle\Lambda^*(x,z),K(x,y)\rangle= \\ &= \overline{\langle\Lambda(x,y),K(x,z)\rangle} = \overline{\langle g(x),K(x,z)\rangle} \\ &= \overline{g(z)} = \overline{\Lambda(z,y)}\end{aligned}$$

isto é:

$$\Lambda^*(y,z) = \overline{\Lambda(z,y)}. \tag{3}$$

É claro que à $L_1 + L_2$ e à αL correspondem $\Lambda_1 + \Lambda_2$ e $\bar{\alpha}\Lambda$ respectivamente pois $(L_1^* + L_2^*) = L_1^* + L_2^*$ e $(\alpha L)^* = \bar{\alpha}L^*$.

7.2 PROPOSIÇÃO: O núcleo Λ correspondente à composição $L=L_1L_2$, com respectivos núcleos Λ_1 e Λ_2 é dado por:

$$\Lambda(y,z) = \langle\Lambda_1(x,z),\overline{\Lambda_2(y,x)}\rangle. \tag{4}$$

DEMONSTRAÇÃO: Como $(L_1L_2)^*=L_2^*L_1^*$ segue por (2) e (3) que

$$\begin{aligned}\Lambda(y,z) &= (L_1L_2)_y^*K(y,z) = L_{2y}^*L_{1y}^*K(y,z) = \\ &= L_{2y}^*\Lambda_1(y,z) = \langle\Lambda_1(x,z),\Lambda_2^*(x,y)\rangle \\ &= \langle\Lambda_1(x,z),\overline{\Lambda_2(y,x)}\rangle.\end{aligned}$$

Dos resultados acima obtemos facilmente:

$$
\begin{aligned}
\langle\langle f(x),\Lambda(x,y)\rangle_x,g(y)\rangle_y &= \langle Lf(y),g(y)\rangle_y = \\
&= \langle f(y),L^* g(y)\rangle_y \\
&= \langle f(y),\langle g(x),\Lambda^*(x,y)\rangle_x\rangle_y \\
&= \langle f(y),\langle g(x),\overline{\Lambda(y,x)}\rangle_x\rangle_y \ .
\end{aligned}
$$

Efetuando-se uma troca de variáveis no segundo membro da última equação acima obtém-se:

$$
(5) \qquad \langle\langle f(x),\Lambda(x,y)\rangle_x,g(y)\rangle_y = \langle f(x),\langle g(y),\overline{\Lambda(x,y)}\rangle_y\rangle_x
$$

De (3) segue ainda que a simetria de L é equivalente a simetria hermitiana de Λ:

$$
(6) \qquad \Lambda(x,y) = \overline{\Lambda(y,x)}
$$

Provaremos a seguir uma importante propriedade:

7.3 PROPOSIÇÃO: O operador limitado L é positivo se e somente se seu núcleo correspondente Λ é uma matriz positiva.

DEMONSTRAÇÃO: L é positivo quando e somente quando $\langle Lf,f\rangle \geq 0$ para qualquer $f \in F$. Tomemos $f \in F$ como definida abaixo:

$$
(7) \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k K(x,y_k)
$$

para n-úplas arbitrárias $(y_1,y_2,\ldots y_n) \in E^n$ e $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) \in \mathbb{C}^n$ e temos:

$$
0 \leq \langle Lf,f\rangle = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_k \overline{\xi}_j \langle L_x K(x,y_k),K(x,y_j)\rangle =
$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_k\bar{\xi}_j\langle\Lambda^*(x,y_k),K(x,y_j)\rangle$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_k\bar{\xi}_j\Lambda^*(y_j,y_k)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_k\xi_j\overline{\Lambda(y_k,y_j)}$$

isto prova que $\bar{\Lambda}$ e portanto Λ são matrizes positivas.

Para a verificação da recíproca notemos que o que foi feito acima nos garante que se Λ é uma matriz positiva, então $\langle Lf,f\rangle \geq 0$ para toda $f \in F$ da forma (7). Como estas funções formam um conjunto denso em F (propriedade 1.7) toda função de F pode ser aproximada por uma sequência deste tipo. Passando-se ao limite obtém-se $\langle Lf,f\rangle \geq 0$ para toda $f \in F$.

OBSERVAÇÃO: Generalizando-se a notação utilizada na seção 5 adotaremos $\Lambda_1 \ll \Lambda_2$ ou $\Lambda_2 \gg \Lambda_1$ sempre que $\Lambda_2-\Lambda_1$ for uma matriz positiva.

7.4 TEOREMA: Seja um núcleo arbitrário $\Lambda(x,y)$ hermitiano simétrico, isto é: $\Lambda(x,y)=\overline{\Lambda(y,x)}$. Uma condição necessária e suficiente para que a ele corresponda um operador simétrico limitado L, com limitante inferior m finito e limitante superior M finito é que $mK \ll \Lambda \ll MK$.

DEMONSTRAÇÃO: Se à Λ corresponde um operador simétrico e limitado L satisfazendo $m\langle f,f\rangle \leq \langle Lf,f\rangle \leq M\langle f,f\rangle$ para qualquer $f \in F$ então: $\langle (L-mI)f,f\rangle \geq 0$ e $\langle (MI-L)f,f\rangle \geq 0$ também para toda $f \in F$. Assim, $(L-mI)$ e $(MI-L)$ são operadores positivos e pela proposição (7.3) temos que $\Lambda-mK$ e $MK-\Lambda$ são também matrizes positivas.

Verifiquemos a recíproca. Temos da hipótese que $0 \ll K_1 = (1/M-m)(\Lambda - mK) \ll K$. Portanto K_1 é uma matriz positiva que satisfaz: $K_1 \ll K$, e assim sendo é o núcleo reprodutor de uma classe $(F_1, \| \ \|_{F_1})$ e pelo teorema 5.2 temos $F_1 \subset F$ e $\|f_1\|_{F_1} \geq \|f_1\|$ para toda $f_1 \in F_1$ e pelo teorema 5.8 o operador $L_1 f(y) = \langle f(x), K_1(x,y) \rangle$ é um operador positivo com limitante menor ou igual a 1, isto é, para toda $f \in F_1$:

$$0 \leq \langle L_1 f, f \rangle \leq \langle f, f \rangle .$$

Da definição de L_1 segue que a ele corresponde K_1, consequentemente $\Lambda = (M-m)K_1 + mK$ corresponde ao operador $L = (M-m)L_1 + mI$ e as últimas desigualdades fornecem:

$$m\langle f,f \rangle \leq \langle mIf, f \rangle + \langle (M-m)L_1 f, f \rangle \leq M\langle f,f \rangle$$

pois $(M-m) > 0$ e assim $\langle (M-m)L_1 f, f \rangle \geq 0$ portanto:

$$m\langle f,f \rangle \leq \langle L\ f, f \rangle \leq M\langle f,f \rangle$$

OBSERVAÇÃO: Um núcleo Λ é representável de maneira única na forma $\Lambda = \Lambda_1 + i\Lambda_2$ com Λ_1, Λ_2 hermitianos simétricos. Basta para tanto tomar:

$$\Lambda_1(x,y) = (1/2)(\Lambda(x,y) + \overline{\Lambda(y,x)})$$

$$\Lambda_2(x,y) = (1/2i)(\Lambda(x,y) - \overline{\Lambda(y,x)}) .$$

Assim, uma condição necessária e suficiente para que à Λ corresponda um operador limitado é claramente que à Λ_1 e Λ_2 correspondam tais operadores. À estes nós podemos aplicar o teorema 7.4.

Sobre a convergência de uma sequência de operadores, mantendo a notação introduzida no capítulo 0 podemos verificar o seguinte resultado:

7.5 TEOREMA: Se $L = w\lim L_n$ então para os núcleos correspondentes podemos afirmar que $\Lambda(x,y) = \lim \Lambda_n(x,y)$ para todo $(x,y) \in ExE$. Se $L = un\lim L_n$ então Λ_n converge uniformemente para Λ para todo (x,y) pertencentes ao subconjunto de ExE onde $K(x,x)$ e $K(y,y)$ sejam uniformemente limitados.

DEMONSTRAÇÃO: Ambos os resultados seguem diretamente da propriedade do núcleo reprodutor e da definição de $\Lambda(x,y)$, pois:

$$\begin{aligned}\Lambda(x,y) &= \langle \Lambda(z,y),K(z,x)\rangle_z = \langle L_z^* K(z,y),K(z,x)\rangle_z = \\ &= \langle K(z,y),L_z K(z,x)\rangle = \lim \langle K(z,y),L_{nz} K(z,x)\rangle_z \\ &= \lim \Lambda_n(x,y) .\end{aligned}$$

Análogo ao que foi feito acima também obtemos:

$$\begin{aligned}|\Lambda(x,y) - \Lambda_n(x,y)| &= |(\langle K(z,y),(L-L_n)_z K(z,x)\rangle| \leq \\ &= ||K(z,y)||_z ||L-L_n|| ||K(z,x)||_z \\ &= ||L - L_n||(K(x,x)K(y,y))^{1/2}.\end{aligned}$$

CAPÍTULO 2

CONSIDERAÇÕES SOBRE ALGUNS ESPAÇOS DE HILBERT IMPORTANTES

Neste capítulo pretendemos fornecer alguns exemplos importantes de espaços de Hilbert que possuem núcleos reprodutores (RKHS). Também incluiremos aqui um resultado interessante que relaciona a teoria dos núcleos reprodutores à algumas transformações conformes particulares

§1-ESPAÇOS DE HILBERT DE DIMENSÃO FINITA

Mostraremos que os espaços de Hilbert, de funções, de dimensão finita, são exemplos de RKHS.

1.1 EXEMPLO: Seja F um espaço de funções de dimensão finita n formando um espaço de Hilbert e consideremos $\mathbb{B} = \{\omega_1(x),\omega_2(x),\ldots,\omega_n(x)\}$ uma base de F. Se f e g pertencem a F então:

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \omega_i(x) \qquad \text{e} \qquad g(x) = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \omega_j(x)$$

com ξ_i , i=1,2,..,n, e os η_j , j=1,2,..,n, determinados de modo único. Consideremos o seguinte produto interno em F:

$$(2) \qquad \langle f,g\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \omega_i,\omega_j\rangle \xi_i \overline{\eta_j}\ .$$

A norma por ele determinada é dada por:

$$||f||^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_i\overline{\xi_j} \qquad \text{com } \alpha_{ij} = \langle\omega_i,\omega_j\rangle.$$

A matriz $G = (\alpha_{ij})$ é a matriz do produto interno em relação à base ordenada $\mathbb{B}$, também chamada de matriz de Gram da base $\mathbb{B}$. A matriz de Gram de uma base qualquer possui as importantes propriedades de ser Hermitiana, inversível e definida positiva. Denotando por (β_{jk}) o conjugado da matriz inversa de G obtemos:

$$(3) \qquad \sum \alpha_{ij}\overline{\beta_{jk}} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq k \\ 1 & \text{se } i = k. \end{cases}$$

1.2 PROPOSIÇÃO: Seja F um espaço de funções como no exemplo 1.1. Então o núcleo reprodutor F com a norma proveniente do produto interno (2) acima, é dado por

$$(4) \qquad K(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}\omega_i(x)\overline{\omega_j(y)}\ .$$

DEMONSTRAÇÃO: Claro que K(x,y) como dado acima, e considerado como função de x, pertence ao espaço em questão, pois β_{ij} e $\omega_j(y)$, $i,j= 1,..,n$, são constantes complexas e $\omega_i(x) \in F$. Também, sejam $y \in E$ e $f \in F$ arbitrários. Considerando f em sua representação na base $\mathbb{B}$ dada por (1) temos:

$$\langle f(x),K(x,y)\rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} \xi_k\omega_k(x), \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}\omega_i(x)\overline{\omega_j(y)} \rangle_x =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l,j=1}^{n} \xi_k \overline{\beta_{lj}} \omega_j(y) \langle \omega_k(x), \omega_l(x) \rangle_x =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l,j=1}^{n} \xi_k \omega_j(y) \alpha_{kl} \overline{\beta_{lj}} .$$

Logo, por (3) e por (1) segue que:

$$\langle f(x), K(x,y) \rangle = f(y) ,$$

como queríamos demonstrar.

A matriz $\{\beta_{ij}\}$ é Hermitiana definida positiva pois sua inversa $G = \{\alpha_{ij}\}$ o é. Desta forma acabamos de demonstrar o seguinte resultado:

1.3 TEOREMA: $K(x,y)$ é o núcleo reprodutor de um espaço de Hilbert de funções, F, de dimensão finita n se e somente se $K(x,y)$ for da forma (4) com uma matriz definida positiva $\{\beta_{jk}\}$ e funções linearmente independentes $\omega_k(x)$, $k=1,..,n$. O correspondente espaço F é então gerado pelas funções $\omega_k(x)$, $k=1,...,n$. As funções $f \in F$ são dadas por (1), com norma proveniente do produto interno (2) como descrito acima.

Veremos agora um caso particular importante de RKHS de dimensão finita.

1.4 EXEMPLO: Seja $P_n(\mathbb{C})$ o espaço vetorial dos polinômios complexos de graus $\leq n$ munido do seguinte produto interno:

$$\langle f,g \rangle = \int_{\mathbb{C}} f(z)\overline{g(z)}\, dz .$$

Seja $\mathbb{B} = \{p_1(z), p_2(z), ..., p_n(z)\}$ uma base ortonormal de $P_n(\mathbb{C})$ e tomemos a função $K_n(z,w)$ definida sobre $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ como segue:

$$K_n(z,w) = \sum_{i=1}^{n} p_i(z)\overline{p_i(w)} \; .$$

É claro que $K_n(z,w)$ é o núcleo reprodutor do espaço $P_n(\mathbb{C})$ pois para qualquer $p \in P_n(\mathbb{C})$ temos:

$$p(z) = \sum_{i=1}^{n} \langle p, p_i \rangle p_i(z)$$

e portanto:

$$\langle p(z), K_n(z,w) \rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \langle p, p_i \rangle p_i(z), \sum_{j=1}^{n} p_j(z)\overline{p_j(w)} \Big\rangle_z =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle p, p_i \rangle p_j(w) \langle p_i(z), p_j(z) \rangle_z$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle p, p_i \rangle p_i(w) =$$

$$= p(w).$$

Alcançamos, então, o resultado procurado.

§2-NÚCLEOS DE BERGMAN: Seja B um domínio, isto é, uma região aberta e conexa no plano complexo, e analisemos agora o subespaço de $L^2(B)$ formado pelo conjunto das funções analíticas de quadrado integrável sobre B.

OBSERVAÇÃO: O subespaço acima descrito não é, necessariamente, completo. Denotemos por $L^2_o(B)$ o completamento deste espaço.

2.1-TEOREMA: Tomando B nas condições acima, temos que $L^2_o(B)$ é um RKHS.

OBSERVAÇÃO: Vale a pena ressaltar que cada classe de equivalência de funções de $L^2_o(B)$ possui apenas uma função. Este resultado segue do fato de que duas funções analíticas em uma região B do plano complexo, que diferem no máximo em um conjunto de medida nula, são necessariamente idênticas.

A importância desta observação se deve ao fato de que a teoria dos núcleos reprodutores, como foi vista no capítulo 1, só apresenta sentido para espaços de Hilbert de **funções**, no sentido clássico da palavra, e não para espaços de classes de equivalência de funções pois, nestes casos, o funcional avaliação $T_y(f)=f(y)$ não está definido

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2.1: Basta demonstrar que o espaço das funções analíticas de quadrado integrável sobre B satisfaz as duas condições do teorema 2.2 do capítulo 1. Para verificarmos que a primeira condição é satisfeita faremos uso do teorema (21) do capítulo 0

Para um ponto arbitrário t pertencente ao interior de B podemos encontrar uma constante real r, tal que $C_r : |z-t| \le r$ está contida em B. Como f é analítica em B temos que para todo $z \in C_r$ vale

$$f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t)(z-t)^n}{n!} \quad .$$

Segue então,do teorema (21) que:

$$\pi \sum_{n=o}^{\infty} \frac{|f^{(n)}(t)|^2 r^{2n+2}}{(n!)^2(n+1)} = \iint_{C_r} |f(\xi)|^2 d\xi \le$$

$$\leq \iint_B |f(\xi)|^2 d\xi = ||f||^2 .$$

Em particular, para qualquer n natural temos:

$$\frac{\pi|f^{(n)}(t)|^2 r^{2n+2}}{(n+1)(n!)^2} \leq ||f||^2 ,$$

e tomando-se n=0 obtemos que o funcional $L_t(f)=f(t)$ é limitado, visto que:

$$|L(f)| = |f(t)| \leq \frac{||f||}{r\pi^{1/2}} .$$

A verificação da segunda condição segue como um corolário da proposição (24) do capítulo 0. Portanto $L_o^2(B)$ é, de fato, o completamento funcional do espaço das funções analíticas de quadrado integrável. Logo $L_o^2(B)$ é um RKHS.

O lema abaixo pode ser encontrado em Davis [26] e será utilizado para demonstrarmos a forma como o núcleo reprodutor K(x,y) do espaço $L_o^2(B)$, pode ser representado.

2.2 LEMA: Seja B um domínio em $\mathbb{C}$, $\{h_n(z)\}$ um sistema ortonormal completo em $L_o^2(B)$. Para $w \in B$ fixo a série:

(5) $$K(z,w)= \sum_{n=1}^{\infty} h_n(z)\overline{h_n(w)}$$

converge uniforme e absolutamente em qualquer região limitada e fechada B', contida em B. A soma é analítica em $z \in B$ e pertence a $L_o^2(B)$. Também temos que:

$$h_k(w) = \langle h_k(z), K(z,w)\rangle_z \ .$$

2.3 TEOREMA: Se $\{h_n(z)\}$ é um sistema ortonormal completo em $L^2_o(B)$ então seu núcleo reprodutor $K(x,y)$, admite a seguinte representação:

$$(6) \qquad K(z,w) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(z)\overline{h_n(w)} \ .$$

$K(z,w)$ é chamado de núcleo de Bergman para a região B.

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos $\{h_n(z)\}$, um sistema ortonormal completo em $L^2_o(B)$. Temos que mostrar que para qualquer $f(z) \in L^2_o(B)$ vale:

$$f(w) = \langle f(z), K(z,w)\rangle_z = \iint_B f(z)\overline{K(z,w)}\, dz.$$

De fato, como $f \in L^2_o(B)$ segue que:

$$f(z) = \sum \langle f, h_k\rangle h_k(z) \ ,$$

e pelo lema 2.2 e pela identidade de Parseval temos:

$$\langle f(z), K(z,w)\rangle_z = \sum \langle f, h_k\rangle \langle h_k(z), K(z,w)\rangle_z =$$

$$= \sum \langle f, h_k\rangle h_k(w) = f(w)$$

e está demonstrado o resultado.

Os núcleos de Bergman possuem uma propriedade de invariância bastante interessante. Como um exemplo desta propriedade poderíamos citar o caso de dois domínios, D e D', no plano complexo. Se $T(z)$ é uma transformação conforme de D em D' então

$$K_{D'}(z',w')T'(z)\overline{T'(w)} = K_D(z,w) ,$$

onde $z'=T(z)$ e $w'=T(w)$.

No caso de uma variável, vale a pena salientar que, quase todas as aplicações conformes importantes são representadas em termos destes núcleos. Para uma região simplesmente conexa D, por exemplo, a aplicação $\xi=f(z,z_o)$, que representa D sobre um círculo $|\xi|< R$ de tal forma que o ponto $z_o \in D$ é levado em $\xi=0$ e $f'(z_o,z_o)=1$, é representada em termos deste núcleo por:

$$f(z,z_o) = \frac{1}{K(z_o,z_o)} \int_{z_o}^{z} K(t,z_o)\, dt.$$

A seguir incluiremos um exemplo particular de núcleo de Bergman:

2.4-EXEMPLO: Seja $B = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$ o círculo unitário complexo. Pode-se verificar que as funções:

$$f_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\; z^n \qquad n= 0,1,2,\ldots \quad ,$$

formam um sistema ortonormal completo em $L^2_o(B)$. Portanto, pelo que foi visto acima, segue que o núcleo reprodutor para $L^2_o(B)$ é dado por:

$$K(z,w) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{n+1}{\pi}\, z^n(\bar{w})^n = \left(\pi(1-z\bar{w})^2\right)^{-1} .$$

Nosso próximo exemplo está relacionado ao estudo das equações diferenciais;

§3-FUNÇÕES DE GREEN: Consideremos o espaço X constituído de todas as funções F(x) da forma

$$F(x) = \int_o^x f(t)\, dt \qquad 0 \le x \le 1 ,$$

onde $f(t) \in L^2([0,1])$. Se $G(x)=\int g(t)\, dt$. Consideremos em X o seguinte produto interno:

$$\langle F,G\rangle = \int_o^1 f(x)g(x)\, dx = \int_o^1 F'(x)G'(x)\, dx .$$

3.1 TEOREMA: O espaço de Hilbert de funções X como definido acima é um espaço de Hilbert com núcleo reprodutor.

DEMONSTRAÇÃO: Tomando-se:

$$\begin{cases} K(t,x) = t & 0 \le t \le x \\ K(t,x) = x & x \le t \le 1 , \end{cases}$$

temos que

$$|F(x)|^2 = |\langle F(z),K(z,x)\rangle|^2 \le ||F||^2||K(z,x)||^2 =$$

$$= K(x,x) \int_o^1 |F'(x)|^2\, dx$$

$$= x \int_o^1 |F'(x)|^2\, dx .$$

Isto comprova que o funcional linear $L(F)=F(x)$ é limitado como queríamos. Agora, derivando-se $K(t,x)$ em relação a t obtemos:

$$\begin{cases} K'(t,x) = 1 & 0 \leq t \leq x \\ K'(t,x) = 0 & x \leq t \leq 1 \end{cases}$$

e então $F(x)$ pode ser escrita como

$$F(x) = \int_0^x F'(t)\, dt = \int_0^1 F'(t)K'(t,x)\, dt = \langle F(t),K(t,x)\rangle ,$$

e $K(t,x)$ é então o núcleo reprodutor de X.

Observemos que a função $K'(t,x)$ é, na verdade, a função de Green para a equação diferencial $y'=0$ com condição inicial $y(0)=0$.

§4 A FUNÇÃO DELTA DE DIRAC.

Seja $F = L^2[-\pi,\pi]$. A rigor, F não é propriamente um espaço de funções mas sim um espaço de classes de equivalência de funções no qual duas funções são identificadas se e somente se elas diferem, no máximo, em um conjunto de medida nula. Neste caso é importante salientar que, como já observamos anteriormente, o funcional linear $L(f)=f(x)$ relevante à definição de espaço de Hilbert com núcleo reprodutor, não é definido. Contudo, não podemos deixar de mencionar um núcleo de muita importância: a "função" delta de Dirac $K(x,y) = \delta(x-y)$ (para maiores informações sobre a função delta de Dirac ver Butkov[5] pag 224). A expressão integral:

$$f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\delta(x-y)dy \quad ,$$

e a expansão ortogonal (divergente):

$$\delta(x-y) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos k(x-y) \quad ,$$

são propriedades básicas da teoria da função δ de Dirac.

Embora muitas coisas interessantes possam ser feitas formalmente, a teoria dos núcleos reprodutores para o caso de distribuições, como é o caso das funções delta de Dirac, deve ser analisada a partir de um outro ponto de vista.

§5 ALGUNS RESULTADOS RELACIONADOS À TRANSFORMAÇÕES CONFORMES.

Nossa intenção agora é fornecer uma expressão alternativa bastante útil para o núcleo reprodutor de $L^2_o(B)$ no caso em que B seja bastante simples. Não incluiremos, porém, as demonstrações destes resultados que poderão ser encontradas em P. Davis [26] teorema 12.6.14 (pag 325) e corolário 12.6.15 (pag 325).

5.1 TEOREMA: Se $m(z)=w$ é uma transformação conforme biunívoca da região B sobre o círculo unitário C, então o núcleo reprodutor para $L^2_o(B)$ é dado por:

$$K(z,t) = \frac{m'(z)\overline{m'(t)}}{\pi(1-m(z)\overline{m(t)})^2} \; .$$

5.2 COROLÁRIO: Seja $m(z) = w$ uma transformação conforme biunívoca da região B sobre o círculo unitário C. Se a transformação é normalizada exigindo-se que $m(t)=0$ e $m'(t)>0$ onde t é um ponto fixado em B então:

$$m(z)= c\int_t^z K(z,t)\,dz \ ,$$

onde c é uma constante.

A utilidade do corolário acima se baseia no fato de que para regiões B com fronteira suficientemente suave existe um sistema ortonormal completo de polinômios em $L_o^2(B)$, e $K(z,t)$ pode, ao menos em princípio, ser computado diretamente pelo que foi visto em §2 deste capítulo. Poderíamos então, fazer uso deste corolário para expressarmos de uma forma bastante simples uma transformação conforme entre B e o círculo unitário.

CAPÍTULO 3

APLICAÇÕES DA TEORIA DOS NÚCLEOS REPRODUTORES AOS MODELOS DE SINAIS BANDA-LIMITADOS

De uma maneira geral, entendemos por sinal *uma função que fornece informação sobre o estado de um sistema físico. Se torna então, natural e conveniente considerarmos sinais e funções que dependem do tempo de maneira indistinta. Neste capítulo entenderemos por* espaço de sinais *um espaço vetorial de funções que dependem do tempo. Particularmente, estaremos interessados em espaços de funções de quadrado integrável e, assim sendo, introduziremos os seguintes conceitos:*

SINAIS COM ENERGIA FINITA: *O seguinte conjunto de sinais:*

$$S_E(K) = \{\ f(t) : \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\ dt \le K\ ,\ K \ge 0\ \}$$

é dito ter energia finita limitada por K. É comum interpretar fisicamente a integral acima com sendo a "energia" de um sinal, isto se deve ao fato de que se f(t) é a voltagem que atravessa um resistor de 1-ohm então a integral temporal do *quadrado da voltagem fornece justamente a energia dissipada no resistor.*

SINAIS BANDA-LIMITADOS DE TRANSFORMADA DE FOURIER:

Seja K *uma constante real positiva e para uma dada função f* $\in L^2(\mathbb{R})$ *consideremos sua transformada de Fourier dada por:*

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}\, dt \quad .$$

Então, o conjunto dos sinais banda-limitados, de transformada de Fourier, $S_B(K)$*, é definido como sendo o conjunto dos sinais de energia finita dado da seguinte forma:*

$$S_B(K)=\{\ f(t):\ F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}\ dt = 0 \text{ sempre que } |w|>K\ \}$$

As mesmas considerações feitas acima podem ser estendidas aos sinais banda-limitados de transformadas de Hankel, seno e cosseno.

Os sinais banda-limitados de energia finita, de Fourier, de Hankel, seno e cosseno são exemplos especificos de espaços de Hilbert abstratos com núcleos reprodutores (RKHS).

Propriedades básicas dos RKHS são aplicadas ao estudo detalhado dos sinais banda-limitados. Também se investiga a importância dos núcleos reprodutores em resolução de problemas de extremos (máximos e minimos).

São apresentados ainda, alguns resultados novos e outros já conhecidos em expansão amostral, energia mínima, interpolação não uniforme e limitantes de erros de truncamento, a partir do ponto de vista unificado da teoria dos núcleos reprodutores.

O procedimento via teoria dos núcleos reprodutores simplifica os cálculos em vários casos, além disso, oferece um ponto de vista geral e unificado em todos os casos.

Na teoria das comunicações e da informação, modelos de sinais banda-limitados são usados para análise e representação. Estes modelos são usados pois, com frequência, eles representam razoavelmente bem os verdadeiros sinais encontrados na prática. Além disso, muitas propriedades matemáticas podem e têm sido obtidas a partir destes modelos.

Neste capítulo vamos nos limitar a algumas aplicações da teoria dos núcleos reprodutores aos modelos de sinais banda-limitados.

§1 ESPAÇOS DE HILBERT COM NÚCLEOS REPRODUTORES ASSOCIADOS À ALGUNS ESPAÇOS DE SINAIS BANDA-LIMITADOS

Consideraremos espaços de Hilbert H_i munidos de núcleos reprodutores K_i com funções definidas em conjuntos não vazios T_i $i=1,2,3,4$. Por simplicidade assumiremos que todos os escalares e todas as funções assumam somente valores reais.

Em análise de sinal, os sinais são geralmente caracterizados em termos de algumas propriedades no domínio da transformada de Fourier. Não é difícil verificar que o espaço de sinais banda-limitados, de energia finita, de transformadas de Fourier formam um exemplo específico de um RKHS .O teorema de Paley-Wiener (ver Triebel [67]) nos garante que nestes espaços, cada classe de equivalência de funções é, na verdade, constituida por uma única função. O núcleo reprodutor K é dado pela função seno como veremos a seguir:

1.1 TEOREMA: Seja H_1 a classe das funções $f(t)$ de $L^2(-\infty,\infty)$ tais que suas transformadas de Fourier:

$$F(w) = \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} f(t)e^{-iwt}dt$$

se anulam em quase toda parte fora do intervalo $(-\pi,\pi)$. Assim H_1 é um RKHS em T_1=$(-\infty,\infty)$ com núcleo reprodutor dado por:

$$K_1(s,t) = \frac{\operatorname{sen}\pi(t-s)}{\pi(t-s)}$$

Observamos que o limite considerado acima é o limite forte em L^2, ou seja, o limite na norma $\|\ \|_2$.

DEMONSTRAÇÃO: Pela transformada de Fourier inversa temos que qualquer função $f \in H_1$ é dada por:

$$f(t) = \lim_{N\to\infty} (2\pi)^{-1}\int_{-N}^{N} F(w)e^{iwt}\,dw = (2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} F(w)e^{iwt}dw$$

com $F \in L^2(-\pi,\pi)$. Segue assim, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz que o funcional avaliação $T_t(f)=f(t)$ é limitado para qualquer tempo finito t e portanto H_1 é um RKHS. Mostraremos agora a propriedade reprodutora de K_1.

Temos que

$$f(t) = (2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} F(w)e^{iwt}\, dw =$$

$$= (2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-iws}ds \right) e^{iwt}dw=$$

e pelo teorema de Fubini obtemos:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \left[(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iws}e^{iwt}dw\right]ds \; .$$

Agora,

$$(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iws}e^{iwt}dw = \frac{\operatorname{sen}\pi(t-s)}{\pi(t-s)} = K_1(s,t)$$

de onde segue então que:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\; K_1(s,t)ds= \langle f(s),K_1(s,t)\rangle$$

e está demonstrado o teorema 1.1.

Em análise de sinal em duas dimensões, os sinais são, às vezes, caracterizados em termos de algumas propriedades no domínio da transformada de Hankel. Podemos mostrar que os espaços de sinais banda-limitados, de energia finita, de transformadas de Hankel, seno e cosseno são exemplos específicos de RKHS abstratos da mesma maneira que no teorema 1.1. Pela semelhança dos resultados vamos enunciá-los a seguir como corolários. Incluiremos apenas as idéias das demonstrações destes corolários pois elas seguem exatamente a mesma linha do que foi feito para o teorema 1.1.

1.2 DEFINIÇÃO: Considere o espaço $L^2((0,\infty))$. Definimos a transformada de Hankel de ordem υ, para uma função f qualquer deste espaço por:

$$F_H(w) = \lim_{A\to\infty} \int_0^A (wt)^{1/2} J_\nu(wt) f(t)\, dt$$

onde J_υ é a correspondente função de Bessel. A transformada de Hankel inversa é dada por:

$$f(t) = \lim_{A\to\infty} \int_0^A (wt)^{1/2} J_\nu(wt) F_H(w)\, dw$$

1.3 COROLÁRIO: Seja H_2 o espaço das funções f(t) de $L^2(0,\infty)$ tais que suas transformadas de Hankel de ordem ν, $\nu \geq -1/2$ se anulam em quase toda parte fora do intervalo $(0,\pi)$. Neste caso a transformada de Hankel inversa é dada por

$$f(t) = \int_0^{\pi} (wt)^{1/2} J_\nu(wt) F_H(w)\, dw$$

com $t \in (0,\infty)$ e $F_H \in L^2(0,\pi)$. Assim H_2 é um RKHS em $T_2(0,\infty)$ com núcleo reprodutor dado por:

$$K_2(s,t) = \frac{\pi (ts)^{1/2}}{s^2-t^2}\left(tJ_\nu(s\pi)J'_\nu(t\pi) - sJ_\nu(t\pi)J'_\nu(s\pi)\right)$$

DEMONSTRAÇÃO: A demonstração segue de forma análoga ao que foi feito para o teorema 1.1 fazendo-se uso do seguinte resultado da teoria das transformadas de Hankel:

$$\int_0^1 xJ_\nu(s\pi x)J_\nu(t\pi x)\, dx = \frac{tJ_\nu(s\pi)J'_\nu(t\pi) - sJ_\nu(t\pi)J'_\nu(s\pi)}{\pi(s^2-t^2)}$$

1.4 DEFINIÇÃO: Considere o espaço $L^2((0,\infty))$. Definimos as transformadas seno, F_S , e cosseno, F_C , e suas respectivas inversas para uma função f qualquer deste espaço por:

$$F_S(w) = \lim_{A\to\infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^A \operatorname{sen}(wt) f(t)\, dt \quad .$$

A transformada seno inversa é dada por:

$$f(t) = \lim_{A\to\infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^A sen(wt)F_s(w)dw =$$

com $t \in (0,\infty)$ e $F_s \in L^2(0,\pi)$. A transformada cosseno é dada por:

$$F_c(w) = \lim_{A\to\infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^A \cos(wt)f(t)\, dt$$

e a transformada cosseno inversa é dada por:

$$f(t) = \lim_{A\to\infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^A \cos(wt)F_c(w)dw \ .$$

com $t \in (0,\infty)$ e $F_c \subset L^2(0,\pi)$.

1.5 COROLÁRIO: Seja H_3 a classe das funções $f(t)$ de $L^2(0,\infty)$ tais que suas transformadas seno se anulam em quase toda parte fora do intervalo $(0,\pi)$. Neste caso a transformada seno inversa é dada por:

$$f(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\pi sen(wt)F_s(w)\, dw \quad ,$$

com $t \in (0,\infty)$ e $F_s \in L^2(0,\pi)$. Assim H_3 é um RKHS em $T_3(0,\infty)$ com núcleo reprodutor dado por:

$$K_3(s,t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}\pi(t-s)}{(t-s)} - \frac{\operatorname{sen}\pi(t+s)}{(t+s)} \right)$$

DEMONSTRAÇÃO: Segue como no teorema 1.1 bastando observar que:

$$K_3(s,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(tx)\operatorname{sen}(sx)\,dx$$

1.6 COROLÁRIO: Seja H_4 a classe das funções f(t) de $L^2(0,\infty)$ tais que suas transformadas cossenos se anulam em quase toda parte fora do intervalo $(0,\pi)$. Neste caso a transformada de cosseno inversa é dada por:

$$f(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^{\pi} \cos(wt)F_C(w)dw \quad ,$$

com $t \in (0,\infty)$ e $F_C \in L^2(0,\pi)$. Assim H_4 é um RKHS em $T_4(0,\infty)$ com núcleo reprodutor dado por:

$$K_4(s,t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}\pi(t-s)}{(t-s)} + \frac{\operatorname{sen}\pi(t+s)}{(t+s)} \right)$$

DEMONSTRAÇÃO: Segue como no teorema 1.1 bastando observar que:

$$K_4(s,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(tx)\cos(sx)dx \ .$$

§2 PROBLEMAS DE EXTREMOS

Em teoria dos sinais, existem certas propriedades que são obtidas a partir da solução de problemas de extremos (máximos e mínimos). Se o espaço de sinais em consideração for um RKHS então seu núcleo reprodutor desempenha um papel importante nestes tipos de problemas. Nesta seção consideraremos dois problemas de extremos em um RKHS abstrato no qual os instantes amostrais são especificados. Nestes problemas, novamente o núcleo reprodutor desenvolve papel importante.

Inicialmente consideremos uma versão simples destes dois problemas: Suponhamos $t \in T$ fixo, onde T é o conjunto sobre o qual estão definidas as funções de H. Buscamos respostas para as seguintes perguntas: Que sinal $f \in H$ com o valor especificado $f(t) = M$, $M \in \mathbb{R}$ constante, possui a menor energia $||f||^2$? Por outro lado, que sinal $f \in H$ com energia $||f||^2 \leq E$ atinge o maior valor para $f^2(t)$?

2.1 PROPOSIÇÃO: O sinal f pertencente a H e satisfazendo $f(t)=M$ para um determinado $t \in T$ fixo que possui a menor energia $||f||^2$ é dado por:

$$f(s)= \frac{M}{||K(s,t)||^2} K(s,t) \ .$$

DEMONSTRAÇÃO: Pela propriedade reprodutora de K e pela desigualdade de Schwarz temos que para todo $t \in T$:

$$|f(t)|=|\langle f(s),K(s,t)\rangle|\leq||f||\,||K||$$

decorre daí que

$$\frac{|M|}{||K||}=\frac{|f(t)|}{||K||}\leq||f|| \ .$$

Portanto o sinal f que buscamos deve ter energia mínima igual a $|M|^2/||K||^2$ e isto deve ocorrer quando tivermos a igualdade na desigualdade de Schwarz. Como isto só ocorre quando f(s) e K(s,t) são linearmente dependentes devemos encontrar uma constante C tal que CK(s,t)=f(s). Então temos:

$$M=f(t)=\langle CK(s,t),K(s,t)\rangle=C||K(s,t)||^2$$

e portanto:

$$C=\frac{M}{||K(s,t)||^2}$$

o que nos fornece o resultado desejado.

2.2 PROPOSIÇÃO: O sinal f pertencente a H e satisfazendo $||f||^2\leq E$, para uma determinada constante real positiva E que atinge o maior valor para $f^2(t)$ para um $t\in T$, arbitrário e fixo, é dado por:

$$f(s)=\frac{\pm\ E^{1/2}}{||K(s,t)||}\,K(s,t) \ .$$

DEMONSTRAÇÃO: Novamente pela desigualdade de Schwarz temos:

$$|f(t)|=|\langle f(s),K(s,t)\rangle|\leq||f||\,||K||\leq E^{1/2}||K(s,t)|| \ .$$

Para obtermos o maior valor possível para $f^2(t)$ necessitamos que as duas desigualdades acima atinjam a igualdade. Pela proposição 2.1 já vimos que devemos ter:

$$f(s)= \frac{f(t)}{||K(s,t)||^2} K(s,t)$$

para obtermos a primeira igualdade. No caso da segunda, devemos ter:

$$E^{1/2}=||f||= \frac{|f(t)|}{||K(s,t)||}$$

logo, $f(t)= \pm E^{1/2}||K(s,t)||$ e o resultado desejado para f(s) é obtido fornecendo ainda como valor máximo de $f^2(t)$:

$$f^2(t) = E||K(s,t)||^2$$

Consideremos agora, os dois problemas acima no caso em que existam n distintos, mas arbitrariamente especificados, instantes amostrais $t_i \in T$ e valores amostrais $M_i \in \mathbb{R}$. Neste caso os dois problemas não são equivalentes.

A solução deste problema é consequência de um resultado mais geral que trataremos a seguir. Buscamos o único sinal $f \in H$ que interpola sobre um número finito de pontos e aproxima qualquer outro sinal especificado $g \in H$. Quando $g = 0$ estamos no caso acima. A demonstração do próximo teorema se baseia no processo de ortonormalização de Gram-Schmidt tão comumente usado em teoria de interpolação. Para a demonstração do teorema faremos uso dos três resultados que enunciaremos abaixo como lemas e cujas demonstrações podem ser encontradas em Davis[26].

Vale a pena observar que nos lemas abaixo $g(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$ denotará o seguinte determinante:

$$g(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \begin{vmatrix} (x_1,x_1) & \ldots. & (x_1,x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (x_n,x_1) & \ldots. & (x_n,x_n) \end{vmatrix}$$

ou ainda, quando não houver possibilidade de confusão $G_n = g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

2.3 LEMA: Seja X um espaço com produto interno e $\{x_1,x_2,\ldots x_n\}$ um conjunto linearmente independente. Então, dado qualquer n-upla de constantes $M_1,M_2,\ldots,M_n$ podemos encontrar $y \in X$ tal que:

$$\langle y,x_i\rangle = M_i \qquad \forall\ i=1,2,\ldots n\ .$$

2.4 LEMA: Seja $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ um conjunto linearmente independente. Seja $\{x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*\}$ este conjunto ortonormalizado através do processo de Gram-Schmidt . Então:

$$x_1^* = \frac{x_1}{\sqrt{g(x_1)}}$$

e para $n > 1$:

$$x_n^* = \frac{1}{\Big(g(x_1,\ldots,x_{n-1})g(x_1,\ldots,x_n)\Big)^{1/2}} \begin{vmatrix} (x_1,x_1) & \ldots. & (x_n,x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ (x_1,x_{n-1}) & \ldots. & (x_n,x_{n-1}) \\ x_1 & \ldots. & x_n \end{vmatrix}$$

2.5 LEMA: Seja X um espaço de Hilbert, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ um conjunto linearmente independente e $M_1, M_2, \ldots, M_n$ constantes reais arbitrárias. Então, para $x \in X$ fixo e arbitrário, existe $y \in X$ satisfazendo

$$\langle y, x_i \rangle = M_i \qquad \forall\ i=1,2,\ldots,n$$

que fornece o mínimo valor para $||x-y||$. Além disso, se $c_i = \langle x, x_i \rangle - M_i$, $i=1,2,\ldots,n$ então o problema acima é resolvido por:

$$y = x + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^* \qquad ,$$

onde os x_i^* , $i=1,\ldots,n$, são os x_i , $i=1,\ldots,n$, ortonormalizados e os a_i , $i=1,\ldots,n$ são dados por:

$$a_1 = \frac{c_1}{\sqrt{g(x_1)}}$$

e para $n > 1$:

$$a_n = \frac{1}{\Big(g(x_1,\ldots,x_{n-1})g(x_1,\ldots,x_n)\Big)^{1/2}} \begin{vmatrix} (x_1,x_1) & \ldots & (x_n,x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ (x_1,x_{n-1}) & \ldots & (x_n,x_{n-1}) \\ c_1 & \ldots & c_n \end{vmatrix}$$

ainda mais:

$$\underset{(x-y)\in X}{\text{M I N}} \ ||x-y||^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2$$

2.6 TEOREMA: Considere o RKHS H com núcleo reprodutor $K(s,t)$ definido sobre TxT. Tomemos os instantes amostrais distintos dois a dois $\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$ com $t_i \in T$, $i \in \mathbb{N}$ e tais que $\{K(x,t_1),K(x,t_2),\ldots,K(x,t_n)\}$ forme um conjunto linearmente independente. Tomemos também, uma n-úpla $\{M_1,M_2,\ldots,M_n\}$ de constantes reais arbitrárias . Seja $g \in H$ fixo e arbitrário e seja H' o hiperplano de H dado por:

$$H'=\{\ f\in H;\ f(t_i) = M_i\ ,\ i=1,2,\ldots,n\}$$

Então:

$$f_o(s) = g(s) + \sum_{i=1}^{n} d_i D_i(s)$$

é o único elemento de H' que atinge o mínimo valor para:

$$\min_{f\in H'} \|f-g\|^2 = \|f_o-g\|^2 = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \quad ,$$

onde para todo $i \in \mathbb{N}$ temos:

$$m_i=M_i-g(t_i)\ , \qquad G_i= \det[K(t_j,t_k)]_{j,k=1,2\ldots i}\ , \quad G_o=1$$

$$d_i= \frac{1}{\left(G_{i-1}G_i\right)^{1/2}} \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & \ldots & K(t_i,t_1) \\ \vdots & & \vdots \\ K(t_1,t_{i-1}) & \ldots & K(t_i,t_{i-1}) \\ m_1 & & m_i \end{vmatrix}$$

e

$$D_i(s) = \frac{1}{\left(G_{i-1} G_i\right)^{1/2}} \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & \dots K(t_i,t_1) \\ \vdots & \vdots \\ K(t_1,t_{i-1}) & \dots K(t_i,t_{i-1}) \\ K(s,t_1) & \dots K(s,t_i) \end{vmatrix}$$

DEMONSTRAÇÃO: O lema 2.3 nos assegura que H' é não vazio. Seja $g \in H$ arbitrário e fixo. Fazendo $w = f-g$ buscamos encontrar $\min \{||w||^2 \; ; \; w+g \in H'\}$. Tomando

$$m_i = \langle w(x), K(x,t_i) \rangle = \langle f(x)-g(x), K(x,t_i) \rangle = M_i - g(t_i)$$

estamos nas condições do lema 2.5 e portanto o problema é resolvido por:

$$f_o(s) - g(s) = w(s) = \sum_{i=1}^{n} d_i D_i(s) \; .$$

Como estamos considerando constantes e funções assumindo apenas valores reais os d_i's e os D_i's são dados pelos lemas 2.5 e 2.4 respectivamente, exatamente como no enunciado deste teorema. Ainda mais temos:

$$\min_{f \in H'} ||f-g||^2 = ||f_o - g||^2 = \sum_{i=1}^{n} d_i^2$$

onde

$$f_o(s) = g(s) + \sum_{i=1}^{n} d_i D_i(s)$$

como queríamos demonstrar.

No segundo problema, vamos considerar instantes amostrais $\{t_i\}_{i=1}^{n}$ específicos e dois a dois distintos. Estaremos interessados em descobrir que sinais $f \in H$ com energia $||f||^2 \leq E$ fornece o máximo valor para $\sum f^2(t_i)$.

2.7 TEOREMA: Considere o RKHS H com núcleo reprodutor $K(s,t)$ definido sobre um conjunto TxT. Seja $\{t_1,\ldots t_n\}$ um conjunto qualquer de elementos de T distintos dois a dois. Denotemos por H" o subconjunto de H sob a restrição de energia definido por:

$$H" = \{f \in H \; ; \; ||f||^2 \leq E \}$$

onde $0 < E < \infty$. Então

(1) $$f_o(s) = \pm \left(\frac{E}{\lambda_n \sum \theta_{n,j}^2} \right)^{1/2} \sum \theta_{n,j} K(s,t_j)$$

são elementos de H" que atingem:

(2) $$\max_{f \in H"} \sum_{i=1}^{n} f^2(t_i) = \sum_{i=1}^{n} f_o^2(t_i) = \lambda_n E \quad ,$$

onde λ_n é o maior autovalor e θ_n é o autovetor correspondente a equação matricial:

(3) $$K\theta = \lambda\theta$$

$$K=[K(t_i,t_j)]_{i,j=1,..n}$$

$$\theta_i^t=[\theta_{i,1},\ldots,\theta_{i,n}] \quad \text{com } i=1,2\ldots n.$$

DEMONSTRAÇÃO: Pela propriedade reprodutora e pela desigualdade de Schwarz temos:

$$\left(\sum f^2(t_i)\right)^2 = \left(\sum f(t_i)\langle f(s),K(s,t_i)\rangle\right)^2 =$$

$$= \left(\langle f(s),\sum f(t_i),K(s,t_i)\rangle\right)^2$$

$$\leq ||f||^2 ||\sum f(t_i),K(s,t_i)||^2$$

$$\leq ||f||^2 \sum\sum f(t_i)f(t_j)K(t_i,t_j) \ .$$

Em particular obtemos

$$(4) \qquad \frac{\sum f^2(t_i)}{||f||^2} \leq \underset{\substack{f(t_i)\ i=1..n \\ f\in H}}{\mathrm{MAX}} \frac{\sum\sum f(t_i)f(t_j)K(t_i,t_j)}{\sum f^2(t_i)} = \lambda_n \ ,$$

onde λ_n é uma constante positiva. Consideremos uma função f_1 definida sobre os t_i , i=1,...,n e satisfazendo:

$$(5) \qquad \sum f_1^2(t_i) = A$$

e

$$(6) \qquad \sum f_1(t_j)K(t_i,t_j) = \lambda_n f_1(t_i) \qquad i=1,2,..,n \ .$$

A verificação da existência de uma tal f_1 será feita mais adiante. Segue de (6) e (5) que

$$\sum\sum f_1(t_i)f_1(t_j)K(t_i,t_j) = \lambda_n \sum f_1^2(t_i) = \lambda_n A \ .$$

Definamos agora, a partir de f_1, uma função $h(s) \in H$ por

$$(7) \qquad h(s) = \sum f_1(t_j)K(s,t_j)$$

Por (7) e (6) segue que

$$h(t_i) = \sum f_1(t_j)K(t_i,t_j) = \lambda_n f_1(t_i)$$

e então

$$\sum h^2(t_i) = \lambda_n^2 \sum f_1^2(t_i) = \lambda_n^2 A \quad . \tag{8}$$

Verifica-se por cálculos diretos que

$$||h||^2 = A\lambda_n \quad . \tag{9}$$

Assim, para h(s) dado por (7) obtém-se a igualdade em (4). Porém, pode ser que $h(s) \notin H''$, assim, nossa solução deve ser tomada como sendo:

$$f_o(s) = \frac{\pm E^{1/2}}{||h||} h(s) \tag{10}$$

pois $||f_o||^2 = E$ e portanto $f_o \in H''$. Temos então que:

$$f_o(s) = \pm\left(\frac{E}{\lambda_n \sum f_1^2(t_i)}\right)^{1/2} \sum f_1(t_j)K(s,t_j) \quad .$$

É sabido que o máximo da forma quadrática normalizada dada por (4) é obtido pelo autovetor θ_n correspondente ao maior autovalor λ_n de (3). Ainda mais, este máximo é exatamente λ_n (Courant-Hilbert[23]). Logo, fica verificada a existência de f_1 satisfazendo (6), pois basta tomar $f_1(t_i) = \theta_{n,i}$ i=1,2...,n. Portanto $f_o(s)$ se torna:

$$f_o(s) = \pm \left(\frac{E}{\lambda_n \sum \theta^2_{n,j}} \right)^{1/2} \sum \theta_{n,j} K(s,t_j)$$

que é a igualdade (1). Por (8), (9) e (10) obtemos

$$\sum f^2_o(t_i) = \frac{E}{||h||^2} \sum h^2(t_i) = E\lambda_n$$

que é a equação (2). Isto conclui a demonstração do teorema 2.7

§3 EXPANSÕES AMOSTRAIS

Na seção 1 mostramos que os espaços de energia finita de sinais banda-limitados de transformadas de Fourier, de Hankel, seno e cosseno formam exemplos abstratos de RKHS. Por razões práticas e teóricas, expansões amostrais podem ser interessantes nestes espaços de sinais.

3.1 DEFINIÇÃO: Um espaço Ω de funções definidas em um conjunto T é dito *possuir uma expansão amostral para um conjunto de instantes amostrais* $\{t_i \in T;\ i \in I = \mathbb{Z}\}$ se existir um conjunto de funções $\{\Psi_i(s,t_i);\ s \in T\ i \in I = \mathbb{Z}\}$, que serão chamadas de *funções amostrais*, satisfazendo:

i) $\Psi_i(s,t_i) \in \Omega \qquad \forall\ i \in I$

ii) $\Psi_i(t_j,t_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

iii) Para toda $f \in \Omega$ existe uma expansão uniformemente convergente dada por

$$f(s) = \sum_{i \in I} f(t_i)\Psi_i(s,t_i) \qquad s \in T\,.$$

Neste caso, a série acima é chamada de expansão amostral de f.

3.2 TEOREMA: Considere o RKHS abstrato H, com núcleo reprodutor K(s,t), definido em um conjunto TxT. Seja $\{\Phi_i(s,t_i)\ ;\ t_i \in T,\ i \in I\}$ um sistema ortonormal completo em H. Se existem constantes c_i , i=1,2,...,n, não nulas, tais que:

$$(11) \qquad \Phi_i(s,t_i) = c_i K(s,t_i) \qquad i \in I$$

e

$$(12) \qquad |K(t,t)| \leq c < \infty \ , \qquad t \in T$$

então a expansão ortonormal completa de uma função $f \in H$ arbitrária, dada por:

$$(15) \qquad f(s) = \sum_{i \in I} \langle f,\Phi_i \rangle \Phi_i(s,t_i) \qquad s \in T$$

é uma expansão amostral de f.

DEMONSTRAÇÃO: Devemos exibir um conjunto de funções amostrais $\{\Psi_i\}_{i \in I}$ satisfazendo i), ii) e iii). Tomando $\Psi_i = c_i \Phi_i$ verifica-se i) e ii) de forma imediata. Para a verificação de iii) observemos que:

$$f(s) = \sum_{i \in I} \langle f,\Phi_i \rangle \Phi_i(s,t_i) =$$

$$= \sum_{i \in I} c_i \langle f(s),K(s,t_i) \rangle\ \Phi_i(s,t_i)$$

$$= \sum_{i \in I} f(t_i) \Psi_i(s,t_i)$$

Além disso, (12) nos garante, pela propriedade 1.8 do capítulo 1 que a convergência é uniforme.

OBSERVAÇÃO: Em particular, temos que os quatro conjuntos de funções abaixo formam sistemas ortonormais completos respectivamente em H_1, H_2, H_3 e H_4:

$$1)\ \left\{ \frac{\operatorname{sen}\pi(s-i)}{\pi(s-i)}\ ,\ s \in T_1,\ -\infty < i < \infty \right\}$$

$$2)\ \left\{ \frac{t_i(2s)^{1/2}\, J_\nu(\pi s)}{(t_i^2 - s^2)},\ \begin{array}{l} s \in T_2,\ \text{onde}\ (\pi t_i)\ \text{são os zeros} \\ \text{positivos de}\ J_\nu,\ \nu \geq -1/2, 1 \leq i < \infty \end{array} \right\}$$

$$3)\ \left\{ \frac{2i}{(s+i)}\ \frac{\operatorname{sen}\pi(s-i)}{\pi(s-i)}\ ,\ s \in T_3, 1 \leq i < \infty \right\}$$

$$4)\ \left\{ \frac{\operatorname{sen}\pi s}{\pi s}\ ,\ \frac{2s}{(s+i)}\ \frac{\operatorname{sen}\pi(s-i)}{\pi(s-i)},\ s \in T_4,\ 1 \leq i < \infty \right\}$$

Assim sendo, segue como aplicação direta do teorema 3.2 os seguintes corolários:

3.3 COROLÁRIO: No RKHS H_1 qualquer $f \in H_1$ possui a seguinte expansão amostral:

$$(16) \qquad f(s) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i) \frac{\operatorname{sen}\pi(s-i)}{\pi(s-i)} \qquad -\infty < s < \infty\ .$$

3.4 COROLÁRIO: No RKHS H_2 qualquer $f \in H_2$ possui a seguinte expansão amostral:

$$(17) \qquad f(s) = \sum_{i=1}^{\infty} f(t_i) \frac{2(st_i)^{1/2} \; J_\nu(\pi s)}{\pi J_{\nu+1}(\pi t_i)(t_i^2 - s^2)} \qquad 0 < s < \infty .$$

3.5 COROLÁRIO: No RKHS H_3 qualquer $f \in H_3$ possui a seguinte expansão amostral:

$$f(s) = \sum_{i=1}^{\infty} f(i) \frac{2i}{(s+i)} \frac{\operatorname{sen}\pi(s-i)}{\pi(s-i)} \qquad 0 < s < \infty .$$

3.6 COROLÁRIO: No RKHS H_4 qualquer $f \in H_4$ possui a seguinte expansão amostral:

$$f(s) = f(0) \frac{\operatorname{sen}\pi s}{\pi s} + \sum_{i=1}^{\infty} f(i) \frac{2s}{(s+i)} \frac{\operatorname{sen}\pi(s-i)}{\pi(s-i)} \qquad 0 < s < \infty .$$

A expansão amostral dada por (16) é comumente conhecida por teorema amostral de Shannon .

Na prática nos deparamos com apenas um número finito de termos na expansão amostral. É, portanto, de muito interesse poder calcular um limitante superior para o erro de truncamento quando um número finito de termos é utilizado no lugar da expansão completa. O próximo teorema nos fornece tal limitante e sua demonstração se baseia fortemente no lema seguinte cuja demonstração pode ser encontrada em Davis, P[26] pag 230.

3.7 LEMA:DESIGUALDADE DO HIPERCÍRCULO DE GOLOMB E WEINBERGER: Seja H um espaço de Hilbert, P o hiperplano $P=\{x \in H : \langle x,x_i\rangle = b_i \;\; i=1,\dots,n\}$ onde $\{x_1,\dots,x_n\}$ é um conjunto linearmente independente seja ainda $C_r=\{x \in H \; ; \; ||x|| \leq r\}$ e $w \in P$ o elemento mais próximo da origem. Então para todo $x \in C_r$ e qualquer funcional linear limitado L temos:

$$|L(x)-L(w)|^2 \leq (r^2-||w||^2) \sum_{k=n+1}^{\infty} |L(x_k^*)|^2 \; .$$

Convém salientar que o elemento $w \in P$ mais próximo da origem é dado por:

$$w = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^* \quad ,$$

onde os a_i , i=1,...,n são os que aparecem no lema 2.5 e os x_i^* , são os x_i ,i=1,...,n ortonormalizados. Note ainda que quando $r < ||w||^2$ o hipercírculo se torna vazio. No caso não degenerado $||w||^2 \leq r$ sempre existe um elemento em C_r para o qual vale a igualdade.

3.8 DEFINIÇÃO: Seja I' um subconjunto próprio de $I=\mathbb{Z}$ com um número finito de termos. O erro de truncamento $E_{I'}(s)$ relativo à expansão amostral de uma determinada função f é definido por:

$$E_{I'}(s) = \sum_{i\in(I-I')} f(t_i)\Psi_i(s,t_i)$$

3.9 TEOREMA: Considere um RKHS abstrato H nas condições do teorema 3.2. A expansão amostral de qualquer $f \in H$ é dada por:

$$f(s) = \sum_{i\in I} f(t_i)\Psi_i(s,t_i) \qquad s \in T, \; f \in H$$

então:

$$(18) \qquad |E_{I'}(s)| \le \left(E - \sum_{i\in I'} c_i^2 f^2(t_i)\right)^{1/2} \left(\sum_{i\in (I-I')} c_i^2 K^2(s,t_i)\right)^{1/2},$$

é válido para qualquer $f \in H'' = \{ f \in H \; ; \; ||f||^2 \le E \}$ com $I' = \{1,2,\ldots n\}$. Além disso

$$\left(E - \sum_{i\in I'} c_i^2 f^2(t_i)\right)$$

é não negativo e portanto existe $f \in H''$ que atinge o limitante superior de $E_{I'}(s)$.

DEMONSTRAÇÃO: Para adotarmos a notação utilizada no lema (3.7) faremos as seguintes identificações:

(i) $L = L_s$ o funcional linear limitado dado por $L_s(f)=f(s)=\langle f(v),K(v,s)\rangle$.

(ii) $b_i=c_i f(t_i)$ $\quad i \in I'= \{1,2,3,\ldots,n\}$

(iii) $w=f_o \in P:\langle f,\Phi\rangle=b_i$ o que nos garante que $\langle f_o,\Phi\rangle=b_i=c_i f(t_i)$

(iv) $x=f$

(v) $r^2=E$

(vi) $x_k^* = \Phi_k$

Segue diretamente do lema 3.7 que:

$$|L_s(f)-L_s(f_o)|^2 \le (E - ||f_o||^2) \sum_{k=n+1}^{\infty} |L_s(\Phi_k)|^2 .$$

Agora, de (15), do fato de que $f_o \in P$ e pelo lema 3.7 temos que:

$$f_o(s) = \sum_{i\in I'} f(t_i)\Psi_i(s,t_i)$$

e

$$f(s) = \sum_{i \in I} f(t_i)\Psi_i(s,t_i) \quad ,$$

e assim obtemos:

$$|L_s(f)-L_s(f_o)| = |E_{I'}(s)|^2 \ .$$

Pelo teorema 3.2, segue que $L_s(\Phi_k)=\Phi_k(s)=c_kK(s,t_k)$ e calculando-se diretamente $|L_s(\Phi_k)|^2$ e $||f_o||^2$ obtemos:

$$|E_{I'}(s)| \le \left(E - \sum_{i \in I'} c_i^2 f^2(t_i) \right)^{1/2} \left(\sum_{i \in (I-I')} c_i^2 K^2(s,t_i) \right)^{1/2} .$$

Além disso, é claro que para qualquer $f \in H''$ temos que:

$$\left(E - \sum_{i \in I'} c_i^2 f^2(t_i) \right)$$

é não negativo, pois:

$$\sum_{i \in I'} c_i^2 f^2(t_i) \le \sum_{i \in I} [c_i \langle f(s),K(s,t_i)\rangle]^2 =$$

$$= \sum_{i \in I} |\langle f(t_i),\Phi(s,t_i)\rangle|^2 = \ ||f||^2 \quad ,$$

onde a última igualdade segue da identidade de Parseval. Então, pelo lema 3.7, existe $f \in H''$ que atinge a igualdade.

No caso da expansão amostral de Shannon, o resultado fornecido pelo teorema 3.9 pode ser utilizado para calcular de maneira simples um limitante superior do erro de truncamento:

3.10 TEOREMA: Consideremos o RKHS H_1 e a expansão amostral de Shannon:

$$f(s) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)\frac{\operatorname{sen}\pi(s-i)}{\pi(s-i)} \qquad -\infty < s < \infty \quad f \in H_1 .$$

Seja $I'= \{i_o(s)-M\leq i \leq i_o(s)+N\}$ onde $i_o(s)$ representa o inteiro mais próximo de s, e M e N são inteiros positivos. Para qualquer $f \in H''=\{f \in H_1;\ ||f||^2 \leq E\}$ seja $E_{M,N}(s)$, o erro de truncamento dado por

$$E_{M,N}(s) = \sum_{i=-\infty,\, i_o(s)-M-1}^{i=i_o(s)+N+1,\,\infty} f(i)\frac{\operatorname{sen}\pi(s-i)}{\pi(s-i)} \qquad -\infty < s < \infty \quad f \in H_1 .$$

Então um limitante superior de $E_{M,N}(s)$ é dado por:

$$|E_{M,N}(s)| < \begin{cases} \dfrac{E_o^{1/2}}{\pi}\left[\dfrac{1}{M+1} + \dfrac{2}{2N+1}\right]^{1/2}, & s \in (i_o(s), i_o(s)+1/2] \\[2ex] \dfrac{E_o^{1/2}}{\pi}\left[\dfrac{2}{2M+1} + \dfrac{1}{N+1}\right]^{1/2}, & s \in (i_o(s)-1/2, i_o(s)] \end{cases}$$

onde

$$E_o = E - \sum_{i \in I'} f^2(i) < E < \infty$$

DEMONSTRAÇÃO: Fazendo uso do teorema 3.9 obtemos que no caso da expansão amostral de Shannon temos $c_i=1$ para todo i natural. Também temos que $|\operatorname{sen}\pi(s-i)|$ é limitado por 1. Por uma aplicação direta do teorema (22) do capítulo 0 obtemos ainda que:

$$\sum_{i=-\infty,\, i_o(s)-M-1}^{i=i_o(s)+N+1,\,\infty} \frac{1}{(s-i)^2} < \left[\frac{1}{M+1} + \frac{2}{2N+1}\right] \quad \text{com } s \in (i_o(s), i_o(s)+1/2]$$

e

$$\sum_{i=-\infty,\, i_o(s)-M-1}^{i=i_o(s)+N+1,\,\infty} \frac{1}{(s-i)^2} < \left[\frac{2}{2M+1} + \frac{1}{N+1}\right] \quad \text{com } s \in (i_o(s)-1/2, i_o(s)]$$

Agora o resultado segue diretamente do teorema 3.8.

Para finalizar, consideraremos um problema de expansão amostral em H_1 que relaciona várias propriedades de interpolação e de energia mínima dos teoremas 2.6, 2.7, 3.2 e 3.9.

Uma expansão amostral de Shannon finita dada por:

(19) $$g(s) = c\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\frac{\operatorname{sen}\pi(s-t_i)}{\pi(s-t_i)}$$

com $c=1$, $t_i=i$, $i = 1,2,\ldots,n$, $f\in H_1$, satisfaz as propriedades:

(20) $$g(t_i) = f(t_i) \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

(21) $$||g||^2 = \min \{||h||^2;\ h \in H_1,\ h(t_i)=f(t_i)\ i=1,2,\ldots,n\}$$

As propriedades (20) e (21) são chamadas respectivamente de propriedade de interpolação e propriedade de energia mínima.

Em geral se os instantes amostrais t_i , $i=1,\ldots,n$ são distintos mas reais arbitrários, a expansão dada por (19) não possui necessariamente as propriedades (20) e (21). O próximo teorema nos fornece uma condição necessária e suficiente para que isto ocorra.

OBSERVAÇÃO: Na equação (19) que define g(s) consideraremos que se $s=t_j$ para algum instante amostral t_j então $g(t_j)$ será dado pela seguinte fórmula:

$$g(t_j) = c\left[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} f(t_i)\,\frac{\operatorname{sen}\pi(t_j-t_i)}{\pi(t_j-t_i)} + f(t_j)\right]$$

tomada assim de modo a garantir a continuidade de g nos instantes amostrais t_i , $i=1,\ldots n$. No entanto manteremos, como notação, g(s) como definida em (19) de modo a simplificar as manipulações que se seguirão.

3.11 TEOREMA: Uma condição necessária e suficiente para que uma expansão finita da forma (19) com constantes arbitrárias reais distintas t_i , $i=1,\ldots,n$ satisfaça as propriedades (20) e (21), é que $c=1/\lambda_n$, $f(t_i) = \theta_{n,i}$, $i=1,\ldots,n$, onde λ_n é o maior autovalor, e θ_n seu correspondente autovetor, da equação matricial:

$$K\theta = \lambda\theta$$

com:

$$K(t_i,t_j) = \begin{cases} \left[\dfrac{\operatorname{sen}\pi(t_i-t_j)}{\pi(t_i-t_j)}\right]_{i,j=1,\dots,n} & \text{se } i\neq j \\ 1 & \text{se } i=j \end{cases}$$

$$\theta^t = [\theta_1,\dots,\theta_n]$$

DEMONSTRAÇÃO: SUFICIÊNCIA: Tomando $f(t_i)=\theta_{n,i}$ e $c=1/\lambda_n$ a equação (19) se torna:

$$(22) \qquad g(t_j) = (1/\lambda_n)\sum_{i=1}^{n} \theta_{n,i}\,\frac{\operatorname{sen}\pi(t_j-t_i)}{\pi(t_j-t_i)} = \theta_{n,j}=f(t_j)$$

e portanto obtém-se (20). Da demonstração do teorema 2.7 temos para qualquer $h \in H_1$:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} h^2(t_i)\right]^2 \leq ||h||^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h(t_i)h(t_j)\,\frac{\operatorname{sen}\pi(t_i-t_j)}{\pi(t_i-t_j)} \quad ,$$

de onde segue por (4) que:

$$(23) \qquad (1/\lambda_n)\sum_{i=1}^{n}\theta^2_{n,i} = \min_{h\in H_1}\{||h||^2;\ h(t_i)=\theta_{n,i}\ \ i=1,2,\dots,n\} \ ,$$

pois vimos na seção 2 que a igualdade em (4) de fato ocorre para h(s) dada por (7).

Por cálculos diretos, fazendo uso de (22) obtemos:

$$||g||^2 = (1/\lambda_n)^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\theta_{n,i}\theta_{n,j}\,\frac{\operatorname{sen}\pi(t_i-t_j)}{\pi(t_i-t_j)} =$$

$$= (1/\lambda_n)\sum_{j=1}^{n}\theta_{n,j}\left((1/\lambda_n)\sum_{i=1}^{n}\theta_{n,i}\,\frac{\operatorname{sen}\pi(t_i-t_j)}{\pi(t_i-t_j)}\right)$$

$$= (1/\lambda_n)\sum_{j=1}^{n}\theta^2_{n,j}$$

e portanto:

(24) $$||g||^2 = (1/\lambda_n)\sum_{j=1}^{n}\theta^2_{n,j} \quad ,$$

e por (23) segue o resultado desejado.

NECESSIDADE: Suponha que a expansão finita da forma (19) satisfaça a propriedade de interpolação (20):

$$f(t_i)=g(t_i)= c\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\frac{\operatorname{sen}\pi(t_j-t_i)}{\pi(t_j-t_i)} \qquad j=1,2,\ldots,n.$$

Então segue que

(25) $$K\hat{f}=(1/c)\hat{f}$$

tem autovalor $(1/c)$ e correspondente autovetor $\hat{f}$, quando $\hat{f}^t=[f(t_1),\ldots,f(t_n)]$. Suponhamos que a equação (19) satisfaça (21). Então temos

(26) $$\frac{||g||^2}{\sum_{i=1}^{n} f^2(t_i)} = \underset{\substack{h\,\in\,H1\\ h(t_i)=f(t_i)\\ i=1,\ldots,n}}{\mathrm{MIN}}\ \frac{||h||^2}{\sum_{i=1}^{n} h^2(t_i)} = \frac{1}{\lambda_n} \quad ,$$

onde novamente a última igualdade acima segue da ocorrência da igualdade em (4).

Lembrando que, se min A≠ 0, onde A é um conjunto de números reais positivos arbitrários então o inverso do mínimo de A, (min A)$^{-1}$, é o máximo do conjunto B, onde B é constituído pelos inversos dos elementos não nulos de A. Podemos então fazer uso da observação do final da demonstração do teorema 2.7 para concluir que $\hat{f}^t=[f(t_1),\ldots,f(t_n)]$ é o autovetor correspondente a λ_n, o maior autovalor da equação (3) que coincide com a equação $K\theta = \lambda\theta$ do enunciado do teorema 3.10. Portanto $\hat{f}$ satisfaz a equação $K\hat{f}=\lambda_n\hat{f}$ onde λ_n é o maior autovalor de K.

Por (25) segue então que $(1/c) = \lambda_n$ é o maior autovalor de K e $\hat{f}$ seu correspondente autovetor e obtemos então o resultado desejado.

Em particular, se $t_i=i$, $i=1,\ldots,n$ então, para $K(t_j-t_i)$ como definido no enunciado do teorema, temos: $K(t_j-t_i) = \operatorname{sen}\pi(t_j-t_i)/\pi(t_j-t_i)= \delta_{ij}$ e $\lambda_n=1=c$. Portanto, $\theta_{n,i}$, $i=1,\ldots,n$ pode assumir qualquer valor finito. Esta conclusão concorda plenamente com os resultados comentados antes do teorema 3.11, mais precisamente fornecidos pelas equações (19), (20) e (21) no caso particular da expansão finita de Shannon.

REFERÊNCIAS

[1] G. ARFKEN, Mathematical methods for physicists. Academic Press, New York, 1970.

[2] N. ARONSZAJN, Theory of reproducing kernels. Trans. Amer. Math. Soc. Vol 68, (1950), 337-404.

[3] N. ARONSZAJN, Sur les invariants des transformations dans le domaine de n variables complexes. C.R. Acad. Sci. Paris vol 197, (1933) pag 1579 e vol. 198, (1934) pag 143.

[4] N. ARONSZAJN, La théorie générale des noyaux reproduisants et ses applications, Première Partie. Proc. Cambridge Philos. Soc. vol. 39, (1944) pag 133.

[5] K.G. BEAUCHAMP, Signal Processing. Using analog and digital techniques. Halsted Press, New York, 1973.

[6] S.BERGMAN, Ueber die Entwicklung der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach Orthogonalfunktionen. Math. Ann. vol 86, (1922) pag 238-271.

[7] S.BERGMAN, Ueber die Bestimmung der Verzweigungspunkte eines hyperelliptischen Intergrals aus seinen Periodizitätsmoduln mit Anwendungen auf die Theorie des Transformators. Math. Zeit. vol 19, (1923)pag 8-25.

[8] S.BERGMAN, Ueber die Bestimmung der elastischen Spannungen und Verschiebungen in einem konvexen Körper . Math. Ann. vol 98, (1927) pag 248-263.

[9] S.BERGMAN, Ueber unendliche Hermitesche Formen, die zu einem Bereich gehören, nebst Anwendungen auf Fragen der Abbildung durch Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen, Berichte Berliner Mathematische Gesellschaft vol 26, (1927), pag 178-184 e Math. Zeit vol 29, (1929) pag 640-677.

[10] S. BERGMAN, Ueber die Existenz von Reprasentantenbereichen. Math. Ann. vol 102, (1929) pag 430-446.

[11] S.BERGMAN, Sur quelques propriétés des transformations par un couple des fonctions de deux variables complexes. Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Rendiconti(6) vol. 19,

(1934) pag 474-478.

[12] S.BERGMAN, Zur Theorie von pseudokonformen Abbildungen. Rec. Math.(Mat. Sbornik) N.S. vol 1, (1936) pag 79-96.

[13] S.BERGMAN, Zur Theorie der Funktionen, die eine lineare partialle Differentialgleichung befriedigen. Rec. Math. (Mat. Sbornik) N.S. vol 2, (1937) pag 1169-1198.

[14] S.BERGMAN, Partial differential equations, advanced topics. Brown University, Providence 1941.

[15] S.BERGMAN, A remark on the mapping of multiply-connected domains. Amer. J. Math. vol 68, (1946) pag 20-28.

[16] S.BERGMAN, Funktions satisfying certain partial differential equations of elliptic type and their representation. Duke Math. J. vol 14, (1947) pag 349-366.

[17] S.BERGMAN, Sur les fonctions orthogonales de plusieurs variables complexes avec les applications à la théorie des fonctions analytiques. Mémorial des Sciences Mathématiques, vol 106, Paris 1947.

[18] S. BERGMAN E M. SCHIFFER, A representation of Green's and Neumann's functions in the theory of partial differential equations of second order. DukeMath.J. vol 14, (1947) pag 609-638.

[19] S. BERGMAN E M. SCHIFFER, On Green's and Neumann's functions in the theory of partial differential equations. Bull. Amer. Math. Soc. vol 53, (1947) pag 1141-1151.

[20] S. BERGMAN E M. SCHIFFER, Kernel functions in the theory of partial differential equations of elliptic type. DukeMath.J. vol 15, (1948) pag 535-566.

[21] E. BUTKOV, Física matemática. Guanabara Dois S.A., Rio de Janeiro, 1983.

[22] S. COLOMBO, Les transformations de Mellin et de Hankel. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1959.

[23] R. COURANT, D. HILBERT, Methods of mathematical physics. Wiley, New York, 1953.

[24] J.B. CONWAY, A course in functional analysis. Springer-Verlag, New York, 1985.

[25] B. DAVIES, Integral transforms and their applications. Spriger-Verlag, Berlin, 1978.

[26] P.D. DAVIS, Interpolation and aproximation. Dover publications, Inc, New York, 1975.

[27] J.D. DEPREE e C.C. OEHRING, Elements of complex analysis. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1969.

[28] C. DE BOOR e R.E. LYNCH, On splines and their minimum properties. J. Math.Mech. 15 (1966) pàg 953-969.

[29] N. DUNFORD, J.T. SCHWARTZ, Linear operators. Interscience publishers, New York, 1963.

[30] L. FRANKS, Signal Theory. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.

[31] G.B. FOLLAND, Real analysis, modern techniques and their applications. Wiley-interscience Publication, New York, 1984.

[32] B. FUCHS, Ueber einige Eigenschaften der pseudokonformen Abbildungen. Rec.Math.(Mat. Sbonik) N.S. vol 1, (1936) pag 569-574.

[33] B. FUCHS, Ueber geodätische Mannigfaltigkeiten einer bei pseudokonformen Abbildungen invarianten Riemannschen Geometrie. Rec.Math.(Mat. Sbonik) N.S. vol 2, (1937) pag 567-594.

[34] P. GARABEDIAN, Schwarz' lemma and the Szegö kernel function. Trans. Amer. Math. Soc. vol 67, (1949)pag 1-35.

[35] P. GARABEDIAN E M. SCHIFFER, Identities in the theory of conformal mapping, Trans. Amer. Math. Soc. vol 65, (1948) pag 187-238.

[36] I. GELFAND e D. RAIKOFF, Irreducible unitary representation of arbitrary locally bicompact groups. Rec. Math.(Mat. Sbornik) vol 13, (1943) pag 316.

[37] R. GODEMENT, Sur les fonctions de type positif. Sur les propriétés ergodiques des fonctions de type positif. Sur les partitions finies des fonctions de type positif. Sur certains opérateur définis dans l'espace d'une fonction de type positif. Sur quelques propriétés de fonctions de type positif définies sur un groupe quelconque. C.R. Acad. Sci. Paris vol 221, (1945) pag 69, pag 134 e vol 222, (1946) pag 36, pag 213

e pag 529.

[38] R. GODEMENT, Les fonctions de type positif et la théorie des groupes. Trans. Amer. Math. Soc. vol 63, (1948) pag 1-84.

[39] P. R. HALMOS, Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity - Chelsea Publishing Company, New York, N.Y. - 2nd edition, 1957.

[40] H.F. HARMUTH, Transmission of information by orthogonal functions. Spriger-Verlag, New York, 1972.

[41] G. HELMBERG, Introduction to spectral theory in Hilbert space. Amsterdam, North-Holland, 1969.

[42] T. HIDA e N. IKEDA, Analysis on Hilbert space with reproducing kernel arising from multiple Wiener integral. Proceedings of the fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, vol 2, L.M. Le Cam e J. Neyman, eds., University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1967 pag 117-143.

[43] S. HOFFMAN, Advanced calculus. Prentice-Hall, Inc. New Jersey, 1970.

[44] C.S. HÖNIG, A integral de Lesbegue e suas aplicações. 11º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[45] H.P.HSU, Análise de Fourier. Livros Técnicos e Científicos Editora LTDA,Rio de Janeiro, 1973.

[46] T. KAILATH, RKHS approach to detection and estimation problems- part I: Deterministic signals in Gaussian noise. IEEE Trans. Inform. Theory IT-17 (1971) pag 530-549.

[47] G. KALLIANPUR, The role of reproducing kernel Hilbert space in the study of Gaussian processes. Advances in Probability and Related Topics, vol 2, P. Ney ed., Marcel Dekker, New York, 1970 pag 49 e 51-83.

[48] A.N. KOLMOGOROV, S.V. FOMIN, Elementos da teoria das funções e de análise funcional, Editora Mir, Moscou, 1982.

[49] J.L. LACOUME, T.S. DURRANI, R. STORA, Signal processing traitement du signal, Les Houches 1985 session XLV, North-Holland, 1987.

[50] L.H. LOOMIS, An introduction to abstract harmonic

analysis. D. Van Nostrand Company, Inc., New Jersey, 1953.

[51] K. MAURIN, Methods of Hilbert spaces. Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1972.

[52] J. MERCER, Functions of positive and negative type and their connection with the theory of integral equations. Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A vol. 209, (1909) pag 415-446.

[53] G.M. MOLCHAN, On some problems concerning Brownian motion in Lévy's sense. Theory Probab. appl. 12 (1967) pag 682-690.

[54] E. H. MOORE, On properly positive Hermitian matrices. Bull. Amer. Math. Soc. vol 23, (1916) pag 59.

[55] E. H. MOORE, General analysis. Memoirs of the American Philosophical Society, parte I, 1935 e parte II 1939.

[56] Z. NEHARI, The kernel function and canonical conformal maps. Duke Math. J. (1949).

[57] Z. NEHARI, On analytic functions possessing a positive real part. Duke. Math. J. (1949).

[58] A. PAPOULIS, Signal analysis, McGraw-Hill, New York, 1977.

[59] E. PARZEN, An approach to time series analysis. Ann. Math. Stat. 32 (1961) pag 951-989.

[60] E. PARZEN, Time series analysis papers. Holden-Day, Inc, Sn Francisco, 1967.

[61] E. PARZEN, Statistical inference on time series by RKHS methods. 12th Biennal Seminar Canadian Mathematical Congress Proc., R. Pyke, ed., Canadian Mathematical Congress, Montreal, 1970 pag 1-37.

[62] M. SCHIFFER, The kernel function of an orthonormal system. Duke Math. J. vol 13, (1945) pag 529-540.

[63] M. SCHIFFER, An application of orthonormal functions in the theory of conformal mappings. Amer. J. Math. vol 70, (1948) pag 147-156.

[64] M. SCHWARTZ, L. SHAW, Signal processing: discrete spectral analysis detection and estimation. McGraw-Hill, New York, 1975.

[65] A.A. TEMPEL'MAN, On linear regression estimates. 2nd Int. Symp. Inform. Theory Proc., B.N. Petrov and F. Csaki, eds., Budapest,1973 pag 329-354.

[66] J.B. THOMAS, An introduction to statistical communication theory. Jonh Wiley and Sons, Inc., New Jersey, 1969.

[67] H. TRIEBEL, Theory of function spaces. Birkhauser Verlag, Basel, 1983.

[68] H. WALDMAN, Processamento digital de sinal: conceitos fundamentais. Kapelusz, Buenos Aires, 1987.

[69] A. WEIL, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications. Actualités Scientifiques et Industrelles, vol 869, Paris, 1940.

[70] H.L. WEINERT, Statistical methods in optimal curve fitting. Commun. Stat. b7 (1978) pag 417-435.

[71] H. WELKE, Ueber die analytischen Abbildungen von Kreiskorpern und Hartogsschen Bereichen, Math. Ann. vol 103, (1930) pag 437-449.

[72] E.T. WHITTAKER, G.N. WATSON, A course of modern analysis. Cambridge University Press, New York, 1969.

[73] K. YAO, Applications of Reproducing Kernel Hilbert Space - Bandlimited Signal Models. Inform, Control 11, (1967) 429-444.

[74] K. ZARANKIEWICZ, Ueber ein numerisches Verfahren zur konformen Abbildung zweifach zusammenhangender Gebiete. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik vol 14 (1934) pag 97-104.

[75] S. ZAREMBA, L'équation biharmonique et une classe remarquable de fonctions fondamentales harmoniques. Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie (1907) pag 147-196.

[76] S. ZAREMBA, Sur le calcul numérique des fonctions demandées dans le problème de Dirichlet et le problème hydrodynamique. Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie (1908) pag 125-195.