

APLICAÇÕES DE MÉTODOS VARIACIONAIS À SISTEMAS HAMILTONIANOS

ALUNO: ADEMIR FERNANDO PAZOTO

ORIENTADOR: ALOISIO JOSÉ FREIRIA NEVES

IMECC – UNICAMP
1993

APLICAÇÕES DE MÉTODOS VARIACIONAIS À SISTEMAS HAMILTONIANOS

Este exemplar corresponde à redação final da
tese devidamente corrigida e defendida pelo
Sr. Ademir Fernando Pazoto e aprovada pela
Comissão Julgadora. 2093

Campinas, 27 de agosto de 1993



Prof. Dr. Aloisio José Freiria Neves

Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aos meus pais

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Aloísio José F. Neves pela orientação;

Aos meus amigos da Pós-Graduação pelos momentos de amizade e companheirismo;

Ao CNPq pelo apoio financeiro;

À Fátima pela boa vontade e paciência no trabalho de datilografia;

Enfim, a todos aqueles que de uma forma ou de outra contribuíram para a realização desse trabalho.

ÍNDICE

Introdução	1
Capítulo 0: Preliminares	3
Capítulo I: Formulação Variacional	10
Definição do Espaço e Propriedades	10
Definição do Funcional e Propriedades	14
Existência de Pontos Críticos	17
Capítulo II: Existência de Órbitas Periódicas Através de Minimização	19
Condição de Palais-Smale	31
Lema de Deformação	20
Existência de Soluções com Condições de Fronteira de Dirichlet	22
Existência de Soluções com Condições de Contorno Periódicas	24
Capítulo III: Existência de Órbitas Heteroclínicas Através de Minimização	27
Existência de Soluções Conectando Pontos de Energia Máxima	28
Processo Limite para Existência de Órbitas Heteroclínicas	33
Capítulo IV: Existência de Órbitas Periódicas Através do Passo da Montanha	40
Lema de Deformação	40
Teorema do Passo da Montanha	42
Existência de Órbitas Periódicas via Teorema do Passo da Montanha	45
Capítulo V: Existência de Órbitas Homoclínicas Através do Passo da Montanha ..	49
Existência de Órbitas Homoclínicas via Teorema do Passo da Montanha .	50
Referências:	56

INTRODUÇÃO

Muitos problemas em matemática nos levam ao estudo de uma equação não linear da forma

$$F(u) = 0 \tag{*}$$

onde $F : X \longrightarrow X$ é uma função contínua e X é um espaço de Hilbert. Quando esse problema tem uma estrutura variacional; isto é; quando o operador F pode ser visto como a derivada de um funcional $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$F(u) = \nabla\varphi(u),$$

a equação (*) se reduz ao problema de encontrar pontos críticos do funcional φ . Muitos problemas em Física têm tal formulação, em particular os sistemas Hamiltonianos de equações diferenciais ordinárias.

Quando o funcional φ é inferiormente limitado, métodos diretos de Cálculo de Variações fornecem ferramentas para encontrar pontos de mínimo. Contudo, para muitos sistemas Hamiltonianos, o funcional não é limitado inferiormente nem superiormente, e nessa situação o problema de encontrar pontos críticos é mais complicado e nos obriga a lançar mão de outros métodos como os métodos minimax. Um caso particular desses métodos é o teorema do Passo da Montanha, que será discutido no Capítulo 4.

Os métodos minimax apareceram pela primeira vez no trabalho de Birkhoff [2] e posteriormente nos trabalhos de Ljusternik e Schnirelmann [3] e Krasnoselski [4].

Um novo impulso ao uso de métodos minimax no estudo das equações diferenciais não lineares foi dado por Ambrosetti e Rabinowitz [5] com a formulação do teorema do Passo da Montanha, o teorema do Ponto de Sela de Rabinowitz [6] e a generalização envolvendo "*linking*" em dimensão infinita por Benci e Rabinowitz [7]. Esses novos teoremas do tipo minimax foram aplicados às equações diferenciais parciais elíticas e hiperbólicas e aos sistemas Hamiltonianos.

Neste trabalho, usamos Métodos Variacionais para estudar sistemas Hamiltonianos de equações diferenciais ordinárias.

No Capítulo 0 damos uma breve motivação e apresentamos alguns exemplos.

No Capítulo 1 damos uma formulação variacional de sistemas Hamiltonianos de segunda ordem em intervalos de tempo finitos.

No Capítulo 2 provamos um teorema de existência para pontos de mínimo de um funcional inferiormente limitado satisfazendo a condição de Palais-Smale. Nessa demonstração é usado o Lema de Deformação em sua forma mais simples. Aplicamos então esse teorema para encontrar soluções de sistemas Hamiltonianos de segunda ordem quando a energia potencial é limitada superiormente. Também o caso periódico é considerado.

No Capítulo 3 mostramos a existência de órbitas heteroclínicas ligando dois pontos de máximo da potencial no caso autônomo. Para fazer isto, aplicamos o teorema dado no Capítulo 2 para intervalos de tempo finito e tomamos o limite quando o comprimento do intervalo vai para infinito. Nesse processo, o fato mais importante foi a conservação de energia.

No Capítulo 4 estudamos o caso em que o funcional não é inferiormente limitado. Mostramos o teorema do Passo da Montanha e fazemos uma aplicação ao estudo de soluções periódicas de sistemas Hamiltonianos de segunda ordem com potencial superquadrática.

Finalmente, no Capítulo 5 aplicamos o teorema provado no Capítulo 4 para estudar a existência de órbitas homoclínicas de sistemas Hamiltonianos com potencial superquadrática. Nesse Capítulo, como no Capítulo 3, consideramos soluções para intervalo de tempo finito e então tomamos o limite.

CAPÍTULO 0

PRELIMINARES

Neste Capítulo, damos uma breve motivação para o estudo de sistemas Hamiltonianos.

DEFINIÇÃO 0.1: Seja $H \in C^1(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, onde $H = H(x, y, t)$, com $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$. Um sistema da forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x}\end{aligned}\tag{1}$$

onde $\frac{\partial H}{\partial x} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_n}\right)^T$ e $\frac{\partial H}{\partial y} = \left(\frac{\partial H}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial y_n}\right)^T$ é chamado sistema Hamiltoniano com n graus de liberdade em $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$.

A função H é chamada função energia ou energia total do sistema.

Um caso particular de sistemas Hamiltonianos com um grau de liberdade são os sistemas Newtonianos com um grau de liberdade

$$\ddot{x} = f(x)$$

onde $f \in C^1(a, b)$. Essa equação é equivalente ao sistema em $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= f(x)\end{aligned}\tag{2}$$

A energia total para esse tipo de sistema é dada por

$$H(x, y) = T(y) + U(x),$$

onde $T(y) = y^2/2$ é a energia cinética e $U(x) = -\int_c^x f(s)ds$, c constante, é a energia potencial.

Um outro exemplo é o sistema do pêndulo esférico

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= y_1 \\ \dot{x}_2 &= y_2 \\ \dot{y}_1 &= -x_1 \\ \dot{y}_2 &= -x_2\end{aligned}$$

que é equivalente ao par de osciladores harmônicos desacoplados

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + x_1 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + x_2 &= 0\end{aligned}$$

Nesse caso a função energia é $H(x, y) = (x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2)/2$.

Todo sistema Hamiltoniano autônomo é conservativo no sentido de que a função energia $H(x, y)$ se mantém constante ao longo das trajetórias do sistema, como mostra o seguinte teorema.

TEOREMA 0.1: (Conservação de Energia) A energia total $H(x, y)$ dos sistemas Hamiltonianos autônomos permanece constante ao longo de suas trajetórias.

Dem: Seja $(x(t), y(t))$ uma solução dos sistema autônomo.

$$\frac{dH}{dt}(x(t), y(t)) = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

Assim, $H(x, y)$ é constante ao longo das trajetórias e estas “*moram*” nas superfícies $H(x, y) = \text{constante}$.

Antes de enunciarmos o próximo teorema lembramos algumas definições envolvendo pontos de equilíbrio de sistemas da forma (2)

DEFINIÇÃO 0.2: Seja $F(x, y) = (y, f(x))$, onde f é dada por (2). Um ponto de equilíbrio $(x_0, 0)$ de (2) é dito:

- hiperbólico se os autovalores da matriz $DF(x_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f'(x_0) & 0 \end{bmatrix}$ tiverem parte real não nula
- ponto de sela se for hiperbólico e a matriz $DF(x_0)$ tiver no mínimo um autovalor com parte real positiva e um com parte real negativa
- centro se os autovalores da matriz $DF(x_0)$ tiverem parte real nula
- cúspide se a matriz $DF(x_0)$ tiver dois autovalores nulos.

TEOREMA 0.2: Os pontos de equilíbrio do sistema Newtoniano (2) encontram-se no eixo- x . O ponto $(x_0, 0)$ é um ponto de equilíbrio do sistema Newtoniano (2) se, e somente se é um ponto crítico da função $U(x)$. Se $(x_0, 0)$ é um ponto de máximo local estrito de $U(x)$, então é uma sela para (2). Se $(x_0, 0)$ é um ponto de mínimo local estrito de $U(x)$, então é um centro para (2). Se $(x_0, 0)$ é um ponto de inflexão horizontal de $U(x)$, então é uma cúspide para (2), e finalmente, o retrato de fase de (2) é simétrico em relação ao eixo- x .

Dem: As duas primeiras afirmações são imediatas. Para demonstrar as demais, basta considerar a matriz

$$DF(x_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f'(x_0) & 0 \end{bmatrix},$$

e como $U(x) = \int_c^x -f(s)ds$, c constante, obtemos que

$$Df(x_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -U''(x_0) & 0 \end{bmatrix}$$

As aplicações desse teorema podem ser mostradas nos seguintes exemplos:

EXEMPLO 0.1: Construiremos o retrato de fase do pêndulo

$$\ddot{x} + \operatorname{sen} x = 0$$

Essa equação diferencial pode ser escrita como um sistema Newtoniano

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -\operatorname{sen} x$$

que tem $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, como pontos de equilíbrio e $U(x) = \int_0^x \operatorname{sen} t \, dt = 1 - \cos x$ como energia potencial.

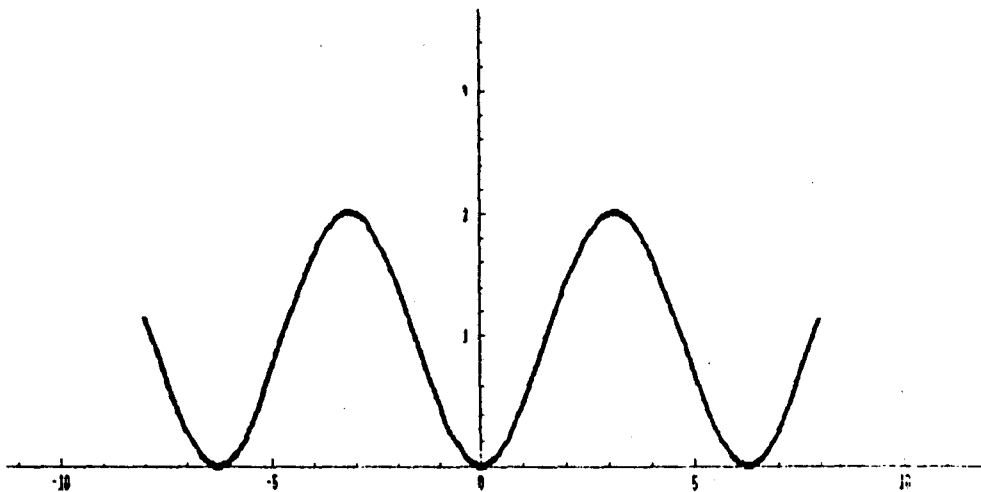


GRÁFICO DE U

Note que $(-\pi, 0)$ e $(\pi, 0)$ são pontos de máximo local estrito de $U(x)$ e $(0, 0)$ é um ponto de mínimo local estrito para $U(x)$. Assim, o teorema 0.2 e o fato de que as trajetórias de (2) “*moram*” em $H(x, y) = \text{constante}$, nos dão o retrato de fase do pêndulo, mostrado na Figura 1.

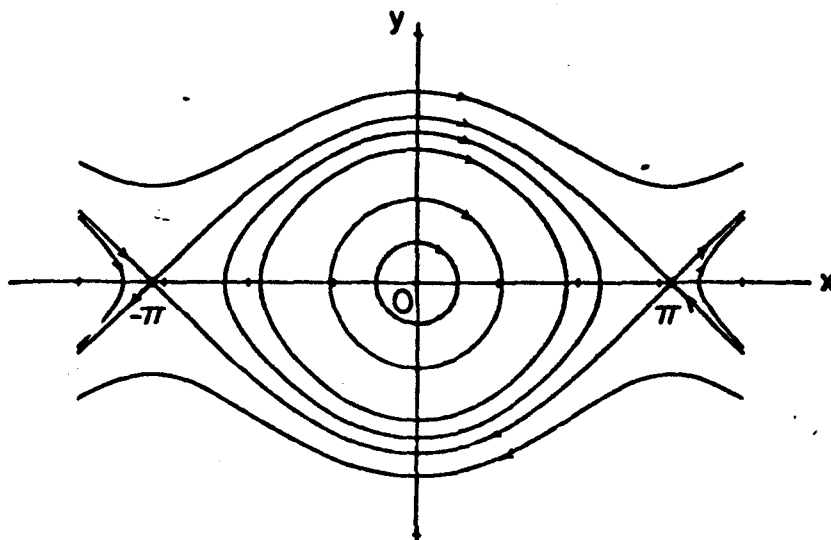


FIGURA 1

EXEMPLO 0.2: O sistema Hamiltoniano

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x^2 + x\end{aligned}$$

tem $(0, 0)$ e $(-1, 0)$ como pontos de equilíbrio e energia potencial

$$U(x) = - \int_0^x (t^2 + t) dt = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$$

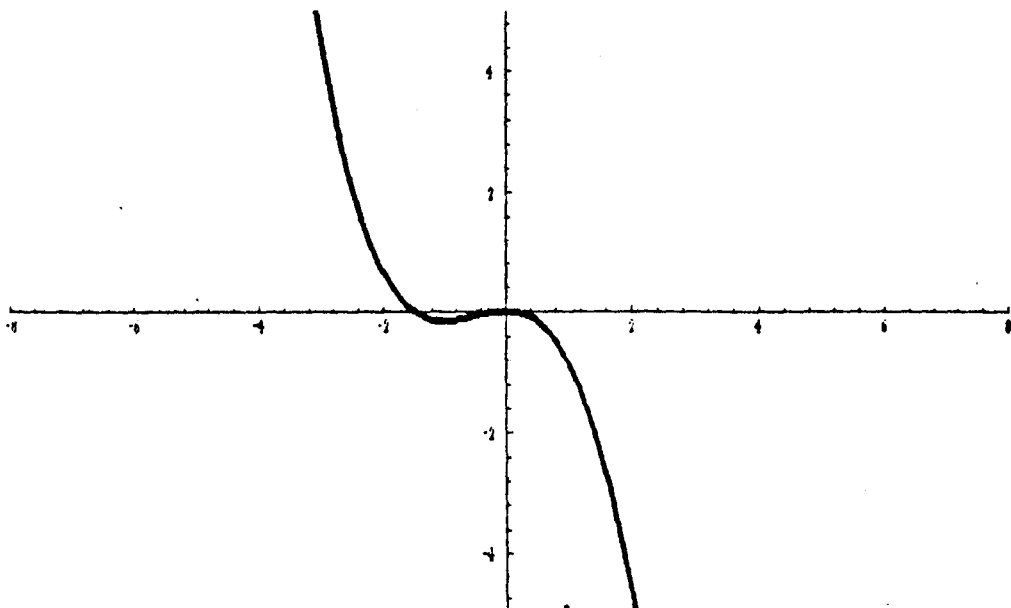


GRÁFICO DE U

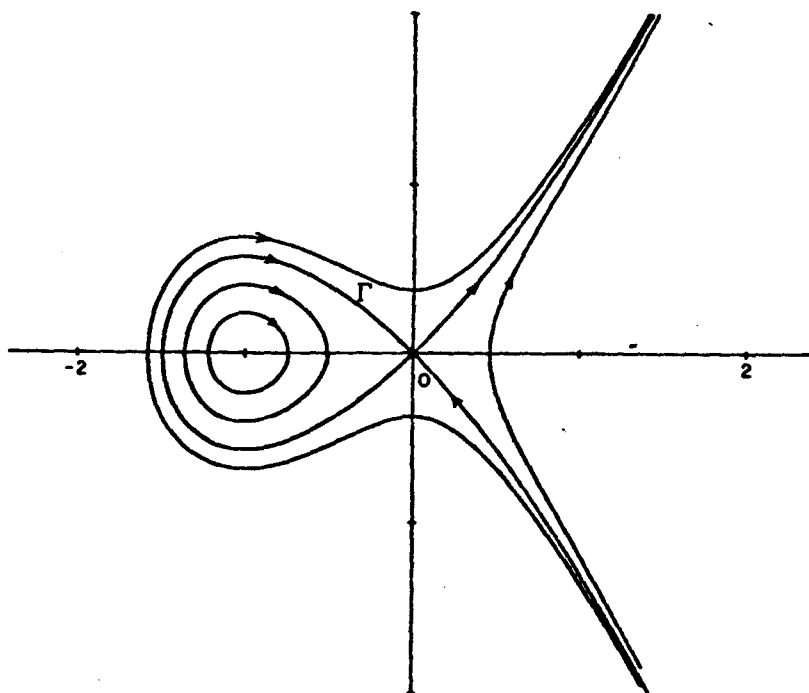


FIGURA 2

As equações de Hamilton, como são chamadas as equações de (1), modelam o movimento de um sistema discreto de partículas e representam uma maneira equivalente de expressar as leis fundamentais de Mecânica.

Quando a função Hamiltoniana $H : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é da forma

$$H(x, y, t) = \frac{1}{2}|y|^2 + V(t, x),$$

onde $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ denota a energia potencial do sistema, temos que

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} \quad \frac{\partial H}{\partial y} = y$$

e portanto, que (1) é equivalente a

$$\ddot{x} + V'(t, x) = 0, \tag{3}$$

onde " $'$ " denota a derivada em relação a segunda variável.

A formulação variacional para esses sistemas Hamiltonianos de segunda ordem é mais simples e aqui consideraremos somente este caso. Existem muitas questões que podem ser levantadas a respeito dessa classe de sistemas. Suponha, por exemplo, que a função Hamiltoniana dependa de t , tornando o sistema não autônomo. A variável t pode aparecer devido a uma força externa. Se assumirmos que a função Hamiltoniana é T -periódica em t , podemos estudar a existência de soluções T -periódicas de (3). No contexto de sistemas autônomos é também interessante estudar a existência de soluções T -periódicas não triviais. O problema de encontrar órbitas homoclínicas e heteroclínicas ligando pontos de mesma energia é também interessante, e vem sendo estudado de um ponto de vista variacional nos últimos anos.

CAPÍTULO I

FORMULAÇÃO VARIACIONAL

Neste capítulo daremos uma formulação variacional para a equação diferencial

$$\ddot{u} + V'(t, u) = 0 \quad (1.1)$$

com condições de contorno periódicas

$$u(0) - u(T) = \dot{u}(0) - \dot{u}(T) = 0, \quad (1.2)$$

onde $V : [0, T] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 e periódica na primeira variável.

No que segue definimos o espaço e o funcional adequados. Introduzimos o espaço

$$W_{T,P} = \left\{ u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N / u \text{ é absolutamente contínua, } u(0) = u(T) \text{ e } \dot{u} \in L^2([0, T], \mathbb{R}^N) \right\}$$

com o produto interno de H^1

$$(u, v) = \int_0^T \dot{u} \cdot \dot{v} dt + \int_0^T u \cdot v dt \quad (1.3)$$

e a norma associada $\|\cdot\|$.

TEOREMA 1.1: $(W_{T,P}, (\cdot, \cdot))$ é um espaço de Hilbert.

Dem: Como $W_{T,P}$ é subespaço de H^1 , basta mostrar que $W_{T,P}$ é fechado. De fato:

$W_{T,P} = \overline{C_T^\infty}$, onde $C_T^\infty = \left\{ u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N / u(0) = u(T) \text{ e } u \text{ é infinitamente diferenciável} \right\}$.

Se $u \in W_{T,P}$, $u - u(0) \in H_0^1$ e com isso existe $(v_n) \subset C_0^\infty([0, T], \mathbb{R}^N)$ que converge para $u - u(0)$ na norma de $W_{T,P}$.

$u_n = v_n + u(0) \in C_T^\infty$ e converge para u na norma de $W_{T,P}$.

Observemos que a demonstração do Teorema 1.1 nos diz que o espaço $W_{T,P}$ pode ser visto como o completamento de

$$C_T^\infty = \left\{ u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N / u(0) = u(T) \text{ e } u \text{ é infinitamente diferenciável} \right\}$$

com o produto interno definido em (1.3).

PROPOSIÇÃO 1.1: Se $u \in L^2([0, T], \mathbb{R}^N)$, e

$$u(t) \sim c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \quad (1.4)$$

é sua série de Fourier, então $u \in W_{T,P}$ se, e somente se

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(|c_n|^2 + |b_n|^2) < \infty \quad (1.5)$$

Dem: Vamos assumir que $u \in W_{T,P}$, e consideremos

$$u \sim c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)$$

e

$$\dot{u} \sim \bar{c}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + \bar{b}_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)$$

as séries de Fourier de u e $\dot{u}$, respectivamente. Então,

$$\bar{c}_n = \int_0^T \dot{u}(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt = u(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \Big|_0^T + \frac{2\pi n}{T} \int_0^T u(t) \cdot \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt = \frac{2\pi n}{T} b_n$$

Analogamente obtemos:

$$\bar{b}_n = -\frac{2\pi n}{T} c_n.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (|c_n|^2 + |b_n|^2) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{T^2}{4\pi^2 n^2} |\bar{b}_n|^2 + \frac{T^2}{4\pi^2 n^2} |\bar{c}_n|^2 \right) \\ &= \frac{T^2}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} |\bar{c}_n|^2 + |\bar{b}_n|^2 < \infty, \text{ pois } \dot{u} \in L^2([0, T], \mathbb{R}^N)\end{aligned}$$

Assumamos agora (1.5) e consideremos

$$u_m(t) = c_0 + \sum_{n=1}^m c_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)$$

Para $m > \ell$, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}|u_m(t) - u_\ell(t)| &= \left| \sum_{n=\ell+1}^m c_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \right| \\ &\leq \sum_{n=\ell+1}^m |c_n| + |b_n| = \sum_{n=\ell+1}^m \frac{1}{n} n(|c_n| + |b_n|) \\ &\leq \left(\sum_{n=\ell+1}^m \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=\ell+1}^m n^2 (|c_n| + |b_n|)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq 2^{1/2} \left(\sum_{n=\ell+1}^m \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=\ell+1}^m n^2 (|c_n|^2 + |b_n|^2) \right)^{1/2}\end{aligned}$$

de onde concluímos que (u_m) é de Cauchy e portanto converge uniformemente para u .

Por outro lado, segue do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$u_m(t) - u_m(0) = \int_0^t \left(\sum_{n=1}^m -\frac{2\pi n}{T} c_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}\tau\right) + \frac{2\pi n}{T} b_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}\tau\right) \right) d\tau$$

Chamando de S_m o integrando acima e usando (1.5) temos que (S_m) é uma sequência de Cauchy em $L^2([0, T], \mathbb{R}^N)$ e portanto converge para um elemento v pertencente a este espaço.

O fato de que $L^2([0, T], \mathbb{R}^N) \subset L^1([0, T], \mathbb{R}^N)$ garante que

$$\int_0^T |S_m(t) - v(t)| dt \rightarrow 0$$

Assim, temos que $u(t) - u(0) = \int_0^t v(\tau) d\tau$; ou seja, que u é absolutamente contínua. Como $u_m(T) - u_m(0) = 0$, segue da convergência de (u_m) que $u(T) - u(0) = 0$, o que completa a demonstração.

A próxima proposição é um caso particular do Teorema de Rellich-Kondrachov.

PROPOSIÇÃO 1.2: A inclusão $i : W_{T,P} \rightarrow C_T$ é compacta, onde

$$C_T = \{u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N / u(0) = u(T) \text{ e } u \text{ é contínua}\}.$$

Dem: Seja $u \in W_{T,P}$. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|u(t) - u(s)| = \left| \int_s^t \dot{u}(\tau) d\tau \right| \leq \sqrt{t-s} \left(\int_s^t |\dot{u}(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} \leq \sqrt{t-s} \|u\| \quad (1.6)$$

Como $u(0) = u(T) - \int_0^T \dot{u}(\tau) d\tau$, integrando ambos os membros, temos

$$Tu(0) = \int_0^T u(t) dt - \int_0^T \int_0^t \dot{u}(\tau) d\tau dt,$$

e usando novamente a desigualdade de Cauchy-Schwarz vem que

$$|u(0)| \leq \frac{1}{T} \left(T^{1/2} \left(\int_0^T |u|^2 dt \right)^{1/2} + \frac{2}{3} T^{3/2} \left(\int_0^T |u|^2 dt \right)^{1/2} \right) \leq c_1 \|u\|, \quad c_1 = \text{constante.} \quad (1.7)$$

Logo, se (u_n) é uma sequência limitada em $W_{T,P}$, (1.6) nos dá que (u_n) é equicontínua e (1.7) garante que (u_n) é uniformemente limitada, pois

$$|u_n(t)| - |u_n(0)| \leq |u_n(t) - u_n(0)| \leq c_1 \|u_n\| \leq c_2, \quad c_2 = \text{constante.}$$

Pelo Teorema de Ascoli - Arzelá, temos que (u_n) possui uma subsequência uniformemente convergente, o que completa a demonstração.

COROLÁRIO 1.1: Se (u_n) é uma subsequência em $W_{T,P}$ que converge fracamente para u , então (u_n) converge uniformemente para u .

Dem: Mostremos que toda subsequência de (u_n) tem uma subsequência convergente. De fato.

Se (u_{n_j}) é uma subsequência de (u_n) , esta também converge fracamente para u e $\|u_{n_j}\| \leq c, c = \text{constante}$, pois $W_{T,P}$ é um espaço de Hilbert. Segue então da Proposição 1.2 que existe $(u_{n_{j_k}})$ que converge uniformemente para uma função v de $W_{T,P}$.

Seja $\varphi \in C_T^*$. Como $i : W_{T,p} \rightarrow C_T$ é compacta, $\varphi \circ i$ pertence a $W_{T,p}^*$, e portanto

$$(\varphi \circ i)(u_{n_{j_k}}) \longrightarrow (\varphi \circ i)(u) \text{ e } (\varphi \circ i)(u_{n_{j_k}}) \longrightarrow (\varphi \circ i)(v);$$

ou seja;

$$\varphi(u_{n_{j_k}}) \longrightarrow \varphi(u) \text{ e } \varphi(u_{n_{j_k}}) \longrightarrow \varphi(v), \forall \varphi \in C_T^*.$$

Logo, $u = v$.

Antes de introduzir o funcional, daremos algumas definições.

DEFINIÇÃO 1.1: Um funcional $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$, H espaço de Hilbert, é dito diferenciável em um ponto a , se existe um funcional linear $\ell \in H^*$, tal que

$$\varphi(a+h) - \varphi(a) - \ell(h) = o(h), \text{ e } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{\|h\|} = 0$$

Lembramos que neste caso o Teorema de Riez garante que existe um elemento em H , que denotaremos por $\nabla \varphi(a)$, tal que

$$(\nabla \varphi(a), h) = \ell(h), \forall h \in H$$

DEFINIÇÃO 1.2: $\nabla \varphi(a)$ é chamado gradiente de φ em a .

DEFINIÇÃO 1.3: Um elemento a é dito ponto crítico do funcional φ se $\nabla \varphi(a) = 0$, e nesse caso $c = \varphi(a)$ é dito valor crítico.

DEFINIÇÃO 1.4: Um funcional é dito de classe $C^{1,1}$ se for de classe C^1 com derivada localmente Lipschitz.

Introduzimos agora o funcional $\varphi : W_{T,p} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\varphi(u) = \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{u}|^2 dt - \int_0^T V(t, u) dt$$

e temos

PROPOSIÇÃO 1.3: Se V é de classe C^1 , φ é de classe C^1 e

$$(\nabla \varphi(u), h) = \int_0^T \dot{u} \cdot \dot{h} dt - \int_0^T V'(t, u) \cdot h dt \quad (1.8)$$

para todo u e h em $W_{T,p}$.

Dem: Calcularemos inicialmente a derivada direcional de φ . Seja $h \in W_{T,p}$.

$$\varphi(u + \tau h) - \varphi(u) = \tau \int_0^T \dot{u} \cdot \dot{h} dt + \frac{\tau^2}{2} \int_0^T |\dot{h}|^2 dt - \int_0^T \Delta V(t, \tau) dt,$$

onde $\Delta V(t, \tau) = V(t, u + \tau h) - V(t, u)$. Logo,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\varphi(u + \tau h) - \varphi(u)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^T \dot{u} \cdot \dot{h} dt + \frac{\tau}{2} \int_0^T |\dot{h}|^2 dt - \int_0^T \frac{\Delta V(t, \tau)}{\tau} dt \quad (1.9)$$

AFIRMAÇÃO:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^T \frac{\Delta V(t, u)}{\tau} dt = \int_0^T V'(t, u) \cdot h dt$$

Dem: Como V é diferenciável,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta V(t, u)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{V(t, u + \tau h) - V(t, u)}{\tau h} \cdot h = V'(t, u) \cdot h, \text{ e}$$

$$|\Delta V(t, u)| \leq \max_{t \in [0, T], s \in [0, 1]} |V'(t, u + sh)| \|\tau h\|_\infty$$

pela Desigualdade do Valor Médio; ou ainda;

$$\left| \frac{\Delta V(t, u)}{\tau} \right| \leq \max_{t \in [0, T], s \in [0, 1]} |V'(t, u + sh)| \|h\|_\infty \equiv c,$$

$c = \text{constante}$.

Segue então do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\int_0^T V'(t, u) \cdot h dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{V'(t, u + \frac{1}{n}h) - V(t, u)}{1/n} dt = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^T \frac{\Delta V(t, u)}{\tau} dt.$$

Essa afirmação juntamente com (1.9) nos permite concluir que

$$(\nabla\varphi(u), h) = \int_0^T \dot{u} \cdot \dot{h} dt - \int_0^T V'(t, u) \cdot h dt$$

Mostremos que $\nabla\varphi(\cdot)$ é contínuo, para todo $u \in W_{T,P}$. Seja $u_0 \in W_{T,P}$.

$$\begin{aligned} \|\nabla\varphi(u) - \nabla\varphi(u_0)\|_{\mathcal{L}(W_{T,P}, \mathbb{R})} &= \sup_{\|h\|=1} \left| \int_0^T (\dot{u} - \dot{u}_0) \cdot \dot{h} dt - \int_0^T (V'(t, u) - V'(t, u_0)) \cdot h dt \right| \\ &\leq \sup_{\|h\|=1} \left(\int_0^T |(\dot{u} - \dot{u}_0) \cdot \dot{h}| dt + \int_0^T |(V'(t, u) - V'(t, u_0)) \cdot h| dt \right) \\ &\leq \sup_{\|h\|=1} \left(\int_0^T |\dot{u} - \dot{u}_0| |h| dt + \int_0^T |(V'(t, u) - V'(t, u_0))| |h| dt \right), \end{aligned}$$

pela desigualdade de Cauchy-Schwarz para o espaço $\mathbb{R}^N$.

Como V' é contínua, existe $\delta_1 > 0$, tal que se $\|u - u_0\| < \delta_1$,

$$\sup_{\|h\|=1} |V'(t, u) \cdot \dot{h} - V'(t, u_0) \cdot h| < \varepsilon, \varepsilon > 0 \text{ arbitrário.}$$

Usando esse fato e a desigualdade de Cauchy-Schwarz para o espaço $L^2([0, T], \mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned} \|\nabla\varphi(u) - \nabla\varphi(u_0)\|_{\mathcal{L}(W_{T,P}, \mathbb{R})} &\leq \sup_{\|h\|=1} \left(\left(\int_0^T |\dot{u} - \dot{u}_0|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T |\dot{h}|^2 dt \right)^{1/2} + \varepsilon T/2 \right) \\ &\leq \sup_{\|h\|=1} (T\|u - u_0\| \|h\| + \varepsilon T/2) = \\ &= T(\|u - u_0\| + \varepsilon/2) \end{aligned}$$

Tomando então $\delta = \min(\delta_1, \varepsilon/2)$,

$$\|\nabla\varphi(u) - \nabla\varphi(u_0)\|_{\mathcal{L}(W_{T,P}, \mathbb{R})} \leq T(2(\varepsilon/2)) = T\varepsilon, \text{ se } \|u - u_0\| < \delta,$$

o que mostra a continuidade de $\nabla\varphi(\cdot)$.

COROLÁRIO 1.2: Se V é de classe $C^{1,1}$, φ é de classe $C^{1,1}$.

Dem: Seja u_0 um elemento de $W_{T,P}$.

Como V' é localmente Lipschitz, existe uma vizinhança de u_0 , que denotaremos $B_\delta(u_0)$, e uma constante $c > 0$, tal que

$$\sup_{\|h\|=1} |V'(t, u) \cdot \dot{h} - V'(t, v) \cdot \dot{h}| \leq c\|u - v\|, \text{ para todo } u, v \text{ na } B_\delta(u_0) \text{ e } t \in [0, T].$$

Usando os mesmos argumentos que foram usados para demonstrar a continuidade de $\nabla\varphi(\cdot)$ na proposição 1.3, temos que

$$\|\varphi(u) - \varphi(v)\|_{\mathcal{L}(W_{T,P}, R)} \leq (T + cT)\|u - v\|, \text{ para } u, v \text{ na } B_\delta(u_0),$$

concluindo assim a demonstração.

Provaremos agora o Teorema central deste trabalho.

TEOREMA 1.2: $u \in W_{T,P}$ e $\nabla\varphi(u) = 0$ se, e somente se u é de classe C^2 , $\ddot{u} + V'(t, u) = 0$ e $u(0) - u(T) = \dot{u}(0) - \dot{u}(T) = 0$.

Dem: Suponhamos que $u \in W_{T,P}$ e $\nabla\varphi(u) = 0$; ou seja; que

$$\int_0^T \dot{u} \cdot \dot{h} dt - \int_0^T V'(t, u) \cdot h dt = 0, \text{ para toda } h \in W_{T,P}. \quad (1.10)$$

Mostraremos inicialmente que $\dot{u} \in W_{T,P}$. Sejam

$$\begin{aligned} \dot{u} &\sim c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \text{ e} \\ V'(t, u) &\sim \bar{c}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + \bar{b}_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \end{aligned}$$

as representações em série de Fourier de $\dot{u}$ e $V'(t, u)$.

Aplicando (1.10) com $h(t) = \cos(\frac{2\pi n}{T}t)$, temos

$$\bar{c}_n = \int_0^T V'(t, u(t)) \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt = -\frac{2\pi n}{T} \int_0^T \dot{u}(t) \cdot \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt = -\frac{2\pi n}{T} b_n.$$

Analogamente obtemos $\bar{b}_n = \frac{2\pi n}{T} c_n$ e $\bar{c}_0 = 0$ fazendo $h(t) = \sin(\frac{2\pi n}{T}t)$ e 1 respectivamente. Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(|c_n|^2 + |b_n|^2) = \frac{T^2}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} |\bar{c}_n|^2 + |\bar{b}_n|^2 < \infty.$$

Segue então da Proposição 1.1 que $\dot{u} \in W_{T,P}$, e com isso $\ddot{u} \in L^2([0, T], \mathbb{R}^N)$.

Agora integrando (1.10) por partes, vem que

$$\dot{u} \cdot h|_0^T - \int_0^T \ddot{u} \cdot h dt - \int_0^T V'(t, u) \cdot h dt = 0;$$

ou seja;

$$\int_0^T (\ddot{u} + V'(t, u)) \cdot h dt = 0.$$

Segue daí que

$$\ddot{u} = -V'(t, u), \text{ quase sempre em } [0, T].$$

Como V é de classe C^1 , $\ddot{u} = -V'(t, u)$ para todo t em $[0, T]$ e u é de classe C^2 .

A periodicidade de $\dot{u}$ segue do fato de $\dot{u} \in W_{T,P}$.

Reciprocamente, temos imediatamente que $u \in W_{T,P}$.

Usando o fato de que $\ddot{u} + V'(t, u) = 0$, temos

$$\ddot{u} \cdot h = -V'(t, u) \cdot h, \text{ para toda } h \in W_{T,P}.$$

Integrando ambos os membros e usando integração por parte no membro esquerdo concluímos que

$$\int_0^T \dot{u} \cdot \dot{h} dt - \int_0^T V'(t, u) \cdot h dt = 0, \text{ para toda } h \in W_{T,P};$$

ou seja; $\nabla \varphi(u) = 0$.

OBSERVAÇÕES:

(1.1) Em $W_{T,0} = \{u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N / u \text{ é absolutamente contínua, } u(0) = u(T) = 0 \text{ e } \dot{u} \in L^2([0, T], \mathbb{R}^N)\}$, demonstra-se usando a desigualdade de Poincaré que a norma $\|u\| = (\int_0^T |\dot{u}|^2 dt)^{1/2}$, define uma norma equivalente.

(1.2) Para uma função de $W_{T,0}$, em lugar de (1.4), consideramos a série de Fourier apenas com senos.

CAPÍTULO II

EXISTÊNCIA DE ÓRBITAS PERIÓDICAS ATRAVÉS DE MINIMIZAÇÃO

Quando estamos procurando pontos críticos de um funcional, a situação mais simples ocorre quando o funcional é limitado inferiormente. Se $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$ é o funcional então

$$c = \inf_{u \in H} \varphi(u)$$

é finito. No entanto, a existência do ínfimo c não implica que c seja atingido. Considere $\varphi(u) = \exp u$ e $h = \mathbb{R}$ por exemplo. Para mostrar que c é valor crítico precisamos de uma condição de compacidade.

Neste Capítulo, mostraremos sob quais hipóteses o funcional φ , introduzido no Capítulo 1, satisfaz tal condição e $c = \inf \varphi(u), u \in W_{T,P}$, é atingido. Mostraremos também que quando este último fato ocorre, $\nabla \varphi(u^*) = 0$, onde $\varphi(u^*) = c$.

DEFINIÇÃO 2.1: Seja H um espaço de Hilbert e $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que φ satisfaz a condição de Palais–Smale (P.S.) se toda sequência (u_n) em H , tal que

$$\varphi(u_n) \text{ é limitada e } \nabla \varphi(u_n) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty, \quad (2.1)$$

possui uma subsequência convergente.

A consequência mais importante dessa condição de compacidade é o seguinte Lema:

Lema 2.1: (Lema de Deformação) Seja H um espaço de Hilbert e $\varphi : H \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^{1,1}$ satisfazendo (P.S.). Se $c \in \mathbb{R}$ não é um valor crítico de φ , existe $\varepsilon_0 > 0$ e $\eta : [0, 1] \times H \longrightarrow H$, contínua (a deformação), tal que

$$(D1) \quad \eta(0, u) = u, \quad \forall u \in H;$$

$$(D2) \quad \varphi(\eta(\tau, u)) \leq \varphi(u), \quad \forall u \in H \text{ e } \tau \in [0, 1];$$

$$(D3) \quad \varphi(\eta(1, u)) \leq c - \varepsilon_0, \quad \forall u \in \varphi^{-1}([c - \varepsilon_0, c + \varepsilon_0])$$

Dem:

AFIRMAÇÃO 1: $\exists \bar{\varepsilon} > 0$ e $b > 0$, tal que $\|\nabla \varphi(u)\| \leq b$, $\forall u \in \varphi^{-1}([c - \bar{\varepsilon}, c + \bar{\varepsilon}])$.

Dem: De fato, assumindo o contrário, teríamos que para $\bar{\varepsilon} = 1/n$ e $b = 1/n$, existiria (u_n) em H tal que

$$\|\nabla \varphi(u_n)\| \leq 1/n \text{ e } c - 1/n \leq \varphi(u_n) \leq c + 1/n;$$

ou seja, $\varphi(u_n)$ seria limitada e $\nabla \varphi(u_n)$ convergiria a zero.

Usando a condição (P.S.) obteríamos (u_{n_j}) subsequência de (u_n) , tal que $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n_j}$. Como $|\varphi(u_n) - c| < 1/n$, segue da continuidade de φ e $\nabla \varphi$ que

$$\nabla \varphi(u) = 0 \text{ e } \varphi(u) = c,$$

contradizendo a definição de c e concluindo a demonstração.

Consideremos a equação diferencial ordinária

$$\dot{\eta} = -h(\|\nabla \varphi(\eta)\|)\nabla \varphi(\eta) \tag{2.2}$$

$$\eta(0) = u \tag{2.3}$$

onde $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por $h(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq s \leq 1 \\ 1/s & \text{se } s > 1 \end{cases}$.

Como h é localmente Lipschitz e φ é de classe $C^{1,1}$, o membro direto de (2.2) é localmente Lipschitz. Logo, existe uma única solução local e contínua de (2.2) - (2.3).

AFIRMAÇÃO 2: Seja $\eta(\tau, u)$ uma solução de (2.2) - (2.3) no tempo τ . Então, para todo $u \in H$, $\eta(\cdot, u)$ pode ser estendida para $\mathbb{R}$.

Dem: Seja $(\tau^-(u), \tau^+(u))$ o intervalo maximal de definição de $\eta(\cdot, u)$, $u \in H$. Suponhamos que $\tau^+(u) < \infty$.

Tomando (τ_n) sequência em $(\tau^-(u), \tau^+(u))$ convergindo para $\tau^+(u)$ e aplicando a Desigualdade do Valor Médio, vem que

$$\|\eta(\tau_n, u) - \eta(\tau_m, u)\| \leq \max_{\tau_n \leq \tau \leq \tau_m} \|\dot{\eta}(\tau, u)\| |\tau_n - \tau_m|.$$

Mas o membro direto da desigualdade é limitado. Para verificar isso, basta considerar os casos em que $\|\nabla\varphi(\eta)\| \geq 1$, $\|\nabla\varphi(\eta)\| \leq 1$ e usar (2.2) para concluir que $\|\dot{\eta}\| \leq 1$.

Logo, $(\eta(\tau_n, u))$ é uma sequência de Cauchy e portanto convergente, o que nos permite estender $\tau^+(u)$.

O mesmo argumento pode ser usado para $\tau^-(u)$.

Mostraremos agora (D1), (D2) e (D3)

(D1): Segue da definição de η ;

(D2): Usando (2.2), temos que

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau}(\eta(\tau, u)) &= \nabla\varphi(\eta(\tau, u)) \cdot \dot{\eta}(\tau, u) = -\nabla\varphi(\eta(\tau, u)) \cdot h(\|\nabla\varphi(\eta(\tau, u))\|) \nabla\varphi(\eta(\tau, u)) = \\ &= -h(\|\nabla\varphi(\eta(\tau, u))\|) \|\nabla\varphi(\eta(\tau, u))\|^2 \leq 0. (*) \end{aligned}$$

Integrando de 0 a τ , $\tau \in [0, 1]$,

$$\varphi(\eta(\tau, u)) - \varphi(\eta(0, u)) \leq 0 ; \text{ isto é; } \varphi(\eta(\tau, u)) \leq \varphi(u), \quad \forall u \in H \text{ e } \tau \in [0, 1]$$

(D3) (i) se $\|\nabla\varphi(\eta(\tau, u))\| \leq 1$, $\frac{d\varphi}{d\tau}(\eta(\tau, u)) = -\|\nabla\varphi(\eta(\tau, u))\|^2 \leq -b^2$, pela afirmação 1, desde que $u \in \varphi^{-1}([c - \bar{\epsilon}, c + \bar{\epsilon}])$.

$$(ii) \text{ se } \|\nabla\varphi(\eta(\tau, u))\| \geq 1, \quad \frac{d\varphi}{d\tau}(\eta(\tau, u)) = -\|\nabla\varphi(\eta(\tau, u))\| \leq -1$$

Integrando (*) de 0 a 1 e usando (i) e (ii), vem que $\varphi(\eta(1, u)) - \varphi(u) \leq -\min(b^2, 1)$, para $u \in \varphi^{-1}([c - \bar{\varepsilon}, c + \bar{\varepsilon}])$; ou seja;

$$\varphi(\eta(1, u)) \leq c + \bar{\varepsilon} - \min(b^2, 1), \quad \forall u \in \varphi^{-1}([c - \bar{\varepsilon}, c + \bar{\varepsilon}]).$$

Escolhendo $\varepsilon_0 < \min(b^2/2, 1/2, \bar{\varepsilon})$, temos que para $u \in \varphi^{-1}([c - \varepsilon_0, c + \varepsilon_0])$,

$$\varphi(\eta(1, u)) \leq c + \varepsilon_0 - 2\varepsilon_0 = c - \varepsilon_0.$$

TEOREMA 2.1: Seja H um espaço de Hilbert e $\varphi : H \longrightarrow \mathbb{R}$. Se φ é de classe $C^{1,1}$, inferiormente limitado e satisfaz a condição (P.S.), existe $u^* \in H$, tal que

$$\varphi(u^*) = \inf_{u \in H} \varphi(u)$$

e então $\nabla \varphi(u^*) = 0$.

Dem: Seja $c = \inf_{u \in H} \varphi(u)$. Assumindo que c não é um valor crítico de φ , segue do Lema 2.1 que existe $\eta : [0, 1] \times H \longrightarrow H$ e $\varepsilon_0 > 0$ satisfazendo $\varphi(\eta(1, u)) \leq c - \varepsilon_0$ para todo $u \in \varphi^{-1}([c - \varepsilon_0, c + \varepsilon_0])$.

Por outro lado segue da definição de c que existe $u \in H$, tal que $\varphi(\bar{u}) \leq c + \varepsilon_0$. Logo, $\varphi(\eta(1, \bar{u})) \leq c - \varepsilon_0$, o que contradiz a definição de c .

Assim, existe $u^* \in H$, tal que $\nabla \varphi(u^*) = 0$ e $c = \varphi(u^*)$.

O Teorema 2.1 será usado para obter soluções de sistemas Hamiltonianos de segunda ordem com condições de contorno periódicas e condições de Dirichlet.

Assumiremos que a função $V : [0, T] \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz

(V0) V é de classe $C^{1,1}$;

(V1) V é superiormente limitada; isto é; existe $K \in \mathbb{R}$, tal que

$$V(t, q) \leq K, \quad \forall t \in [0, T] \text{ e } \forall q \in \mathbb{R}^N.$$

TEOREMA 2.2: Se V satisfaz (V0) - (V1), a equação

$$\ddot{u} + V'(t, u) = 0$$

$$u(0) = u(T) = 0$$

possui no mínimo uma solução.

Dem: Consideremos $\varphi : W_{T,P} \longrightarrow \mathbb{R}$, φ introduzido no Capítulo 1. Mostraremos inicialmente que φ verifica as hipóteses do Teorema 2.1.

(V0) e o Corolário 1.2 garantem que φ é de classe $C^{1,1}$, e de (V1) vem que

$$\varphi(u) = \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{u}|^2 dt - \int_0^T V(t, u) dt \geq \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{u}|^2 dt - KT \geq -KT;$$

ou seja; que φ é inferiormente limitado.

Consideremos agora (u_n) sequência em $W_{T,0}$, tal que

$$(\varphi(u_n)) \text{ é limitada e } (\nabla \varphi(u_n)) \text{ converge a zero.} \quad (2.4)$$

Usando (V1) e (2.4), temos que existe $c \in \mathbb{R}^+$ satisfazendo

$$c \geq \varphi(u_n) = \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{u}_n|^2 dt - \int_0^T V(t, u_n) dt \geq \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{u}_n|^2 dt - KT;$$

ou ainda;

$$\int_0^T |\dot{u}_n|^2 dt \leq 2(c + KT) \quad (2.5)$$

o que mostra que (u_n) é limitada em $W_{T,0}$, já que o membro direito da desigualdade define uma norma equivalente neste espaço. Segue então de uma propriedade básica dos espaços de Hilbert, que existe uma subsequência de (u_n) , que continuaremos chamando de (u_n) , que converge fracamente, e portanto uniformemente, de acordo como o Corolário 1.1.

Agora, para $m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$,

$$(\nabla \varphi(u_n) - \nabla \varphi(u_m), u_n - u_m) = \int_0^T |\dot{u}_n - \dot{u}_m|^2 dt - \int_0^T (V'(t, u_n) - V'(t, u_m)) \cdot (u_n - u_m) dt$$

e por (V0) e (2.4), existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{|(\nabla\varphi(u_n) - \nabla\varphi(u_m), u_n - u_m)|}{\|u_n - u_m\|} < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ e } m, n \geq m_0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^T |\dot{u}_n - \dot{u}_m|^2 dt &\leq \left| \int_0^T (V'(t, u_n) - V'(t, u_m)) \cdot (u_n - u_m) dt \right| + \varepsilon \|u_n - u_m\| \\ &\leq \int_0^T |V'(t, u_n) - V'(t, u_m)| |u_n - u_m| dt + \varepsilon \|u_n - u_m\| \\ &\leq \left(\int_0^T |V'(t, u_n) - V'(t, u_m)|^2 dt \right)^{1/2} \|u_n - u_m\| + \varepsilon \|u_n - u_m\| \end{aligned}$$

pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, para $m, n \geq m_0$.

Como (u_n) é uniformemente convergente, limitada em $W_{T,0}$ e φ é de classe $C^{1,1}$, existe $c > 0$ e $m_1 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\int_0^T |\dot{u}_n - \dot{u}_m|^2 dt \leq 2\varepsilon c, \quad \text{para } m, n \geq m_1$$

o que mostra que (u_n) é de Cauchy em $W_{T,0}$ e portanto convergente.

Segue então do Teorema 2.1 que existe $u^* \in W_{T,0}$, tal que $\nabla\varphi(u^*) = 0$, e o Teorema 1.2 garante que u^* é solução do problema.

Para demonstrar o próximo Teorema, colocaremos mais duas condições sobre a função V ;

(V2) V é T -periódica em t ;

(V3) $\lim_{|q| \rightarrow +\infty} V(t, q) = +\infty$.

TEOREMA 2.3: Se V satisfaz (V0), (V1), (V2) e (V3), a equação

$$\ddot{u} + V'(t, u) = 0$$

$$u(0) - u(T) = \dot{u}(0) - \dot{u}(T) = 0$$

possui no mínimo uma solução.

Dem: A demonstração é análoga à do Teorema 2.2, considerando $\varphi : W_{T,P} \rightarrow \mathbf{R}$.

Aqui, novamente, (V0) e o Corolário 2.1 garantem que φ é de classe $C^{1,1}$ e (V1) que φ é inferiormente limitado.

Seja (u_n) sequência em $W_{T,P}$ satisfazendo (2.4).

AFIRMAÇÃO: Existe $c > 0$, tal que, $|u_n(t)| \leq c, \forall t \in [0, T]$.

Dem: Segue de (2.5) e da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$|u_n(r) - u_n(s)| = \left| \int_s^r \dot{u}_n(t) dt \right| \leq T^{1/2} \left(\int_0^T |\dot{u}_n(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq T^{1/2} 2^{1/2} (c + KT)^{1/2},$$

para $\forall r, s \in [0, T]$.

Assim, se $(u_n(t))$ fosse ilimitada, para todo $k \in \mathbf{N}$, existiria $t_k \in [0, T]$ e $n_k \in \mathbf{N}$, tal que $|u_{n_k}(t_k)| > k$ e

$$|u_{n_k}(t)| \geq |u_{n_k}(t_k)| - |u_{n_k}(t_k) - u_{n_k}(t)| \geq k - T^{1/2} 2^{1/2} (c + TK)^{1/2},$$

para todo $t \in [0, T]$, o que implica que $|u_{n_k}(t)|$ fica arbitrariamente grande.

Assim, por (V3), seguiria que $-V(t, u_{n_k}) \rightarrow \infty$ quando $n_k \rightarrow \infty$, e consequentemente $-\int_0^T V(t, u_{n_k}) dt \rightarrow \infty$ quando $n_k \rightarrow \infty$. Com isso, teríamos

$$\varphi(u_{n_k}) = \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{u}_{n_k}|^2 dt - \int_0^T V(t, u_{n_k}) dt \geq - \int_0^T V(t, u_{n_k}) dt,$$

contradizendo (2.4).

Esse resultado juntamente com (2.5) garante que (u_n) é limitada em $W_{T,P}$, e com isso possui uma subsequência fracamente convergente, denotada por (u_n) , que também convergirá uniformemente.

Logo, dado $\varepsilon > 0$, para m e n suficientemente grandes,

$$\int_0^T |\dot{u}_n - \dot{u}_m|^2 dt < \varepsilon/2,$$

conforme foi mostrado no Teorema 2.2, e

$$\int_0^T |u_n - u_m|^2 dt < \varepsilon/2,$$

o que mostra que (u_n) é de Cauchy em $W_{T,p}$ e portanto convergente.

A demonstração se completa com os Teoremas 2.1 e 1.2.

CAPÍTULO III

EXISTÊNCIA DE ÓRBITAS HETEROCLÍNICAS ATRAVÉS DE MINIMIZAÇÃO

Nessa seção consideramos o sistema Hamiltoniano autônomo

$$\ddot{u} + V'(u) = 0 \tag{3.1}$$

assumindo (V0) e (V1). Admitiremos que V tem um valor máximo $\bar{V}$ e definiremos

$$\mathcal{M} = \{q \in \mathbb{R}^N / V(q) = \bar{V}\}.$$

Consideraremos as seguintes hipóteses:

(V4) $\mathcal{M}$ tem no mínimo dois pontos e é finito.

(V5) $\limsup_{|q| \rightarrow +\infty} V(q) < 0$.

Por simplicidade vamos supor $\bar{V} = 0$, $V(0) = 0$ e mostrar a existência de soluções de (3.1), tais que,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = q_1 \text{ e } \lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = q_2$$

com $q_1 \neq q_2$ e $q_1, q_2 \in \mathcal{M}$. Em outras palavras, mostraremos a existência de órbitas heteroclinicas ligando dois pontos de máximo de V .

DEFINIÇÃO 3.1: $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é uma solução heteroclínica de (3.1) se satisfaz (3.1) e se

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = q_0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \dot{u}(t) = 0,$$

onde

$$V'(q_0) = V'(0) = 0 \quad \text{e} \quad q_0 \neq 0.$$

Usaremos um método que consiste em encontrar soluções de (3.1) ligando q_1 e q_2 em um intervalo de tempo finito, e obtém-se então as soluções heteroclínicas como limites, de soluções com intervalos de tempo cada vez maiores.

Consideremos $\bar{q} \in \mathcal{M}$, $\bar{q} \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$ e a equação diferencial

$$\begin{aligned} \ddot{u} + V'(u) &= 0 \\ u(0) &= 0, u(kT) = \bar{q} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Definindo $z_k(t) = \frac{t}{kT} \bar{q}$, temos um problema equivalente em $w = u - z_k(t)$:

$$\begin{aligned} \ddot{w} + \tilde{V}'(t, w) &= 0 \\ w(0) &= w(kT) = 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde $\tilde{V}(t, w) = V(w + z_k(t))$.

Estudaremos essas equações usando o Teorema 2.2, considerando o funcional

$$\varphi_k(u) = \frac{1}{2} \int_0^{kT} |\dot{u}|^2 dt - \int_0^{kT} V(u) dt.$$

PROPOSIÇÃO 3.1: Se V satisfaz (V0)–(V1), então (3.2) possui uma solução u_k , para todo $k \in \mathbb{N}$. Além disso

$$\varphi_k(u_k) \leq \varphi_k(w + z_k(t)), \quad \text{para todo } w \in W_{kT,0}$$

Dem: Considerando (3.3) em lugar de (3.2), podemos aplicar o Teorema 2.2 com

$$\bar{\varphi}_k(w) = \frac{1}{2} \int_0^{kT} |\dot{w}|^2 dt - \int_0^{kT} \tilde{V}(t, w) dt, \quad w \in W_{kT,0}$$

De fato:

$\tilde{V}$ é superiormente limitada e C^1 , pois se trata da composição de duas funções superiormente limitadas e de classe C^1 . Além disso,

$$\begin{aligned} |\tilde{V}'(t, w_1) - \tilde{V}'(t, w_2)| &= |V'(w_1 + z_k(t)) - V'(w_2 + z_k(t))| \leq \\ &\leq c|w_1 + z_k(t) - w_2 - z_k(t)| = c|w_1 - w_2|, \end{aligned}$$

para $w_1, w_2 \in W_{kT,0}$, suficientemente próximos, onde c é uma constante positiva.

Aplicando agora o Teorema 2.2, obtemos $w_k \in W_{kT,0}$ que é solução de (3.3).

$u_k = w_k + z_k(t)$ é solução de (3.2) e

$$\varphi_k(u_k) = \frac{1}{2} \int_0^{kT} |\dot{w}_k + \dot{z}_k|^2 dt - \int_0^{kT} \tilde{V}(t, w_k) dt = \frac{1}{2} \int_0^{kT} |\dot{w}_k|^2 + |\dot{z}_k|^2 dt - \int_0^{kT} \tilde{V}(t, w_k) dt \quad (3.4)$$

Como o Teorema 2.1 garante que $\bar{\varphi}_k(w_k) \leq \bar{\varphi}_k(w)$, $\forall w \in W_{kT,0}$, segue de (3.4) que

$$\varphi_k(u_k) \leq \frac{1}{2} \int_0^{kT} |\dot{w}|^2 + |\dot{z}_k|^2 dt - \int_0^{kT} \tilde{V}(t, w) dt = \frac{1}{2} \int_0^{kT} |\dot{w} + \dot{z}_k|^2 dt - \int_0^{kT} \tilde{V}(t, w) dt = \varphi(w + z_k)$$

para todo $w \in W_{kT,0}$.

No que segue, obteremos estimativas uniformes para os valores críticos $c(k) = \varphi_k(u_k)$ e para as soluções (u_k) , independentes de k .

DEFINIÇÃO 3.2: Dado $\varepsilon > 0$, definiremos $\alpha_\varepsilon = \min_{q \notin B_\varepsilon(\mathcal{M})} V(q)$, onde

$$B_\varepsilon(\mathcal{M}) = \{q \in \mathbb{R}^N; |q - \mathcal{M}| < \varepsilon\}.$$

Note que $\alpha_\varepsilon > 0$ se assumirmos (V5).

DEFINIÇÃO 3.3: Definiremos $W_{loc} = \{u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ absolutamente contínuas sobre todo intervalo limitado } \dot{u} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)\}$.

LEMA 3.1: Para todo $u \in W_{loc}$ e $r < s$, tal que $u(t) \notin B_\epsilon(\mathcal{M})$ para $t \in [r, s]$

$$\frac{1}{2} \int_r^s |\dot{u}|^2 dt - \int_r^s V(u) dt \geq \sqrt{2\alpha_\epsilon} |u(r) - u(s)| \quad (3.5)$$

Dem: Seja $\ell \equiv |u(r) - u(s)|$ e $\tau \equiv |r - s|$.

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\ell = \left| \int_r^s \dot{u}(t) dt \right| \leq \tau^{1/2} \left(\int_r^s |\dot{u}(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

Segue desse fato e da definição de α_ϵ que

$$\frac{1}{2} \int_r^s |\dot{u}|^2 dt - \int_r^s V(u) dt \geq \frac{\ell^2}{2\tau} + \alpha_\epsilon \tau \equiv f(\tau) \quad (3.6)$$

O mínimo de f é atingido em $\tau = \left(\frac{\ell^2}{2\alpha_\epsilon} \right)^{1/2}$, e com isso (3.6) implica (3.5).

COROLÁRIO 3.1: Existe uma constante $c_0 > 0$, tal que

$$c_0 \leq c(k), \text{ para todo } k \in \mathbb{N}$$

Dem: Para ϵ suficientemente pequeno, $B_\epsilon(0) \cap (B_\epsilon(\mathcal{M}) \setminus \{0\}) = \emptyset$, e como a função $u_k = w_k + z_k(t)$ é contínua e $\mathcal{M}$ é finito, existe $r < s$, tal que $u_k(t) \notin B_\epsilon(\mathcal{M})$, $\forall t \in [r, s]$.

Segue então do Lema 3.1 que

$$\varphi_k(u_k) = \frac{1}{2} \int_0^{kT} |\dot{u}_k|^2 dt - \int_0^{kT} V(u_k) dt \geq \frac{1}{2} \int_r^s |u_k|^2 dt - \int_r^s V(u_k) dt \geq \sqrt{2\alpha_\epsilon} |u_k(r) - u_k(s)|$$

Tomando $a < \frac{1}{3} \inf \{|x - y| / x \in B_\epsilon(0) \text{ e } y \in B_\epsilon(\mathcal{M} \setminus \{0\})\}$ e r, s adequados temos que $|u_k(r) - u_k(s)| \geq a$, e

$$c(k) = \varphi_k(u_k) \geq \sqrt{2\alpha_\epsilon} a \equiv c_0.$$

COROLÁRIO 3.2: Existe $c_1 > 0$, tal que

$$c(k) \leq c_1, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}$$

Dem: Segue da Proposição 3.1 que existe $u_1 : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo (3.2) para $k = 1$.

Considerando

$$\bar{u}_1(t) = \begin{cases} u_1(t) & \text{se } 0 \leq t \leq T \\ \bar{q} & \text{se } T \leq t \leq kT \end{cases}$$

extensão de u_1 , segue que $\bar{u}_1 \in W_{kT, P}$ e a Proposição 3.1 garante que

$$c(k) = \varphi_k(u_k) \leq \varphi_k(\bar{u}_1) \equiv c_1.$$

Nos próximos resultados usaremos a seguinte característica do sistema (3.1):

Dada qualquer solução de (3.1), fazendo o produto interno com $\dot{u}$, obtemos

$$\ddot{u} \cdot \dot{u} + V'(u) \cdot u = 0;$$

ou seja;

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\dot{u}|^2 + V(u) \right) = 0$$

Assim, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe uma constante E_k , chamada energia, tal que

$$\frac{1}{2} |\dot{u}_k(t)|^2 + V(u_k(t)) = E_k, \text{ para todo } t \in [0, kT] \quad (3.7)$$

LEMA 3.2: a) $\lim_{k \rightarrow +\infty} E_k = 0$;

b) (u_k) e $(\dot{u}_k)$ são uniformemente limitadas em $[0, kT]$;

c) $\lim_{k \rightarrow +\infty} \dot{u}_k(0) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \dot{u}_k(kT) = 0$.

Dem: a) Do Corolário 3.2, de (3.7) e do fato de V ser negativa obtemos

$$c_1 \geq \int_0^{kT} \frac{1}{2} |\dot{u}_k|^2 - V(u_k) dt \geq \int_0^{kT} \frac{1}{2} |\dot{u}_k|^2 + V(u_k) dt \geq kT E_k$$

Logo,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} E_k \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{c_1}{kT} = 0$$

Por outro lado, como $E_k = \frac{1}{2}|\dot{u}_k(0)|^2 + V(u_k(0)) = \frac{1}{2}|\dot{u}_k(0)|^2 \geq 0$, segue que $\lim_{k \rightarrow +\infty} E_k \geq 0$, demonstrando (a).

c) Usando novamente (3.7) e que $V(0) = V(\bar{q}) = 0$, vem que

$$\frac{1}{2}|\dot{u}_k(0)|^2 = E_k = \frac{1}{2}|\dot{u}_k(kT)|^2$$

A afirmação a) completa a demonstração.

b) Se (u_k) não fosse uniformemente limitada, para todo $M > 0$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existiria $k \in \mathbb{N}$ e $t_k \in [0, kT]$, tal que $|u_k(t_k)| > M$ e $u_k(t_k) \notin B_\varepsilon(\mathcal{M})$.

Sendo $M_0 = \text{diam}(\mathcal{M})$, é possível obter $s \in [0, kT]$, $s > t_k$ satisfazendo

$$|u_k(s)| \leq M_0 \text{ e } u_k(t) \notin B_\varepsilon(\mathcal{M}), \forall t \in [t_k, s].$$

Segue então do Lema 3.1 que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{kT} |\dot{u}_k|^2 dt - \int_0^{kT} V(u_k) dt &\geq \frac{1}{2} \int_{t_k}^s |\dot{u}_k|^2 dt - \int_{t_k}^s V(u_k) dt \geq c|u_k(t_k) - u_k(s)| \\ &\geq c(M - M_0), \end{aligned}$$

onde c é uma constante independente de M .

Mas pelo Corolário 3.2, temos que o lado esquerdo é limitado, o que implica que a desigualdade acima não ocorre já que M é arbitrário. Consequentemente existe $r_1 > 0$, tal que

$$\sup_{t \in [0, kT]} |u_k(t)| \leq r_1$$

Com isso, segue de (3.7), (V1) e a) que existe $r_2 > 0$, tal que

$$\sup_{t \in [0, kT]} |\dot{u}_k(t)| \leq r_2$$

Portanto, (u_k) e $(\dot{u}_k)$ são uniformemente limitadas.

Começaremos agora o processo limite.

Considere, $(k_m)_{m \in \mathbb{N}}$, subseqüência de (k) . Por simplicidade vamos denotar $v_m = u_{k_m}$. Sejam $(t_m^+)_{m \in \mathbb{N}}$ e $(t_m^-)_{m \in \mathbb{N}}$ subseqüências reais satisfazendo

$$(s1) \quad t_m^+, t_m^- \in [0, k_m T]$$

$$(s2) \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} t_m^+ - t_m^- = \lim_{m \rightarrow +\infty} k_m T - t_m^+ = +\infty$$

$$(s3) \quad |v_m(t_m^-)| < \varepsilon_0/2, |v_m(t_m^+)| = \varepsilon_0 \text{ e } |v_m(t)| < \varepsilon_0, \forall t \in (t_m^-, t_m^+),$$

onde

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2} \min\{|q_1 - q_2|/q_1, q_2 \in \mathcal{M}, q_1 \neq q_2\}$$

Definiremos uma seqüência de funções por translação e extensão de v_m

$$\xi_m(t) = \begin{cases} v_m(t + t_m^+) & t \in [-t_m^+, k_m T - t_m^+] \\ 0 & t \in (-\infty, -t_m^+) \\ \bar{q} & t \in (k_m T - t_m^+, +\infty) \end{cases}$$

Como (3.2) é autônomo, $\xi_m(t)$ é solução de (3.2) para $t \in [-t_m^+, k_m T - t_m^+]$ e dado $k \in \mathbb{N}$, (ξ_m) e $(\dot{\xi}_m)$ restritas a $[-k, k]$ são uniformemente limitadas. Com isso, (ξ_m) restrita a $[-k, k]$ é equicontínua.

Como (s2) garante que para m suficientemente grande $[-k, k] \subset [-t_m^+, k_m T - t_m^+]$, segue do Teorema de Ascoli-Arzelá que existe (ξ_{m_k}) , subseqüência de (ξ_m) , que converge uniformemente para uma função $\xi_k : [-k, k] \rightarrow \mathbb{R}^N$ que satisfaz (3.1) em $[-k, k]$.

De fato:

Sendo ξ_{m_k} solução de (3.1),

$$\ddot{\xi}_{m_k} = -V'(\xi_{m_k}) \quad (3.8)$$

donde concluímos que $(\ddot{\xi}_{m_k})$ é uniformemente convergente e portanto uniformemente limitada em $[-k, k]$. Isso, juntamente com o fato de $(\dot{\xi}_{m_k})$ também ser uniformemente limitada nesse intervalo, nos garante, pelo Teorema de Ascoli-Arzelá, que existe $(\dot{\xi}_{m_{j_k}})$, subseqüência de $(\dot{\xi}_{m_k})$, que converge uniformemente para uma função g em $[-k, k]$.

Como a convergência de (ξ_{m_k}) para ξ_k também é uniforme segue que $g = \dot{\xi}_k$ e que

$$\tilde{\xi}_{m_k} \longrightarrow \tilde{\xi}_k \text{ uniformemente em } [-k, k]$$

Passando (3.7) ao limite, vem que

$$\tilde{\xi}_k - V'(\xi_k) = 0 \text{ em } [-k, k].$$

Considerando agora a subsequência de (ξ_m) relativa a (ξ_{m_k}) restrita ao intervalo $[-k-1, k+1]$, obtemos $(\xi_{m_{k+1}})$ subsequências de (ξ_{m_k}) que converge uniformemente para uma função $\xi_{k+1} : [-k-1, k+1] \longrightarrow \mathbb{R}^N$.

Procedendo por indução, para todo $j \in \mathbb{N}$ podemos repetir o processo anterior obtendo subsequência de (ξ_m) , tais que $(\xi_{m_{j+1}})$ é subsequência de (ξ_{m_j}) . Tomando então a subsequência diagonal, que denotaremos (ξ_m^1) , obtemos uma subsequência de (ξ_m) que converge localmente uniformemente para uma função $\xi^1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^N$, e esta satisfaz (3.1). Para verificar este último fato, basta notar que ξ_{k+1} restrita a $[-k, k]$ coincide com ξ_k :

$$x \in [-k, k], \quad \xi_{m_{k+1}}(x) \text{ coincide com } \xi_{m_k}(x).$$

Logo

$$\xi_{k+1}(x) = \xi_k(x)$$

Outro fato a ser demonstrado é que $\xi^1 \neq 0$:

$$|\xi_m^1(0)| = |v_m(t_m^+)| = \varepsilon_0,$$

de acordo com (s2), e como

$$\xi_m^1(0) \longrightarrow \xi^1(0), \text{ segue que } |\xi^1(0)| = \varepsilon_0.$$

Assim, ξ^1 não é a solução trivial.

LEMA 3.3: a) $\lim_{t \rightarrow -\infty} \xi^1(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow -\infty} \dot{\xi}^1(t)$

b) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi^1(t) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{\xi}^1(t) \in \mathcal{M}$.

Dem: Inicialmente mostraremos alguns resultados envolvendo a função ξ^1 .

Segue do Corolário 3.2, que para todo $M \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-M}^M -V(\xi_{m_k})dt \leq \int_0^{k_{m_k}T} -V(v_{m_k})dt \leq c_1$$

Tomando o limite quando $m_k \rightarrow +\infty$, $\xi_{m_k} \rightarrow \xi^1$ uniformemente em $[-M, M]$. Logo,

$$\int_{-M}^M -V(\xi_{m_k})dt \rightarrow \int_{-M}^M -V(\xi^1)dt.$$

Quando $M \rightarrow \infty$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -V(\xi^1)dt \leq c_1 \quad (3.9)$$

Usando a conservação de energia dada por (3.6), vem que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} |\dot{\xi}_m^1(t)|^2 = -V(\xi^1(t)),$$

localmente uniformemente. Por outro lado, temos que $(\dot{\xi}_m^1)$ e $(\tilde{\xi}_m^1)$ são uniformemente limitadas sobre compactos, e com isso o Teorema de Ascoli-Arzelá e o fato de que $\xi_m^1 \rightarrow \xi^1$ localmente uniformemente, implica que $\dot{\xi}_m^1(t) \rightarrow \dot{\xi}^1(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e que

$$\frac{1}{2} |\dot{\xi}^1(t)|^2 + V^1(\xi^1(t)) = 0, \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.10)$$

Integrando (3.10) e usando (3.9),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{\xi}^1|^2 dt \leq 2c_1. \quad (3.11)$$

Segue da condição (s3) e da definição de ξ_m que $|\xi_m(t)| \leq \varepsilon_0$, para $t \in (t_m^- - t_m^+, 0)$. Usando agora (s2), vem que

$$|\xi^1(t)| \leq \varepsilon_0, \quad \forall t \in (-\infty, 0) \quad (3.12)$$

a) Suponhamos que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \xi^1(t) \neq 0$. Então, para $a > 0$, em particular $a < \varepsilon_0/2$, existe $t_n \rightarrow -\infty$, que juntamente com (3.12), satisfaz $a \leq |\xi^1(t_n)| \leq \varepsilon_0$.

Segue também da Desigualdade do Valor Médio que para todos $n \in \mathbb{N}$

$$|\xi^1(t) - \xi^1(t_n)| \leq \sup |\dot{\xi}^1(s)| |t - t_n| \leq c |t - t_n| \leq a/2, \quad (3.13)$$

desde que $|t - t_n| \leq \varepsilon_1$, onde $\varepsilon_1 = a/2c$ e c é uma constante positiva.

Por outro lado, temos que no anel

$$A = \{x \in \mathbb{R}^N / a/2 \leq |x| \leq \varepsilon_0 + a/2\}$$

a função $-V$ assume um valor mínimo, pois A não contém nenhum de seus zeros. Assim, para $|t - t_n| \leq \varepsilon_1$, (3.13) garante que $\xi^1(t)$ não será zero de V . Com isso, podemos então afirmar que existe $\varepsilon_2 > 0$ satisfazendo

$$-V(\xi^1(t)) \geq \varepsilon_2, \text{ para } |t - t_n| \leq \varepsilon_1.$$

Integrando em $[t_n - \varepsilon_1, t_n + \varepsilon_1]$, obtemos

$$\int_{t_n - \varepsilon_1}^{t_n + \varepsilon_1} -V(\xi^1(t)) dt \geq 2\varepsilon_1\varepsilon_2,$$

o que contradiz (3.9).

Portanto, $\lim_{t \rightarrow -\infty} \xi^1(t) = 0$. Usando agora (3.9), temos

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |\dot{\xi}^1(t)|^2 = -2 \lim_{t \rightarrow -\infty} V(\xi^1(t)) = -2V(\lim_{t \rightarrow -\infty} \xi^1(t)) = V(0) = 0,$$

demonstrando assim a).

b) De (3.10) e (3.11), obtemos

$$0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} |\dot{\xi}^1(t)|^2 = -2 \lim_{t \rightarrow +\infty} V(\xi^1(t)) = -2V(\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi^1(t))$$

Logo, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi^1(t) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow -\infty} \xi^1(t) \in \mathcal{M}$.

PROPOSIÇÃO 3.2: A equação (3.1) possui uma órbita heteroclínica começando em 0 e terminando em $\mathcal{M} \setminus \{0\}$.

Dem: Considere $k_m = m, m \in \mathbb{N}$, e, $t_m^+, t_m^- \in [0, k_m T]$, satisfazendo

$$|v_m(t_m^+)| = \varepsilon_0, \quad |v_m(t)| < \varepsilon_0 \quad \forall t < t_m^+$$

e $t_m^- = 0$. Se mostrarmos que (t_m^+) e (t_m^-) satisfazem (s1), (s2) e (s3) podemos aplicar o processo limite descrito anteriormente e o Lema 3.3.

É claro que (s1) e (s3) são verificados. Para mostrar (s2), considere o seguinte problema de valor inicial

$$\ddot{u} + V'(u) = 0 \quad (3.14)$$

$$u(0) = 0 \text{ e } \dot{u}(0) = a \quad (3.15)$$

Sendo u uma solução de (3.14) - (3.15) e observando que $u = 0$ é solução para $a = 0$, segue da dependência contínua das condições iniciais que

$$|u(t)| \leq ce^{kt}|a|, \text{ onde } c \text{ e } k \text{ são constantes}$$

Logo, para $M > 0$, se $|a| \leq \varepsilon_0 / ce^{kM}$ e $0 \leq t \leq M$, $u(t) \in B_{\varepsilon_0}(0)$.

Pelo Lema 3.2, para todo $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que, $|\dot{u}_k(0)| < \varepsilon$. Assim, $u_k(t) \in B_{\varepsilon_0}(0)$ se $0 \leq t \leq M$. Como $|v_m(t_m^+)| = \varepsilon_0$, temos $t_m^+ > M$, o que mostra a primeira parte de (s2) já que M é arbitrário.

Para mostrar que $\lim_{m \rightarrow +\infty} k_m T - t_m^+ = +\infty$, considere o problema de valor inicial

$$\ddot{u} + V'(u) = 0$$

$$u(kT) = \bar{q} \text{ e } \dot{u}(kT) = a.$$

Como $u \equiv \bar{q}$ é solução para $a = 0$, segue novamente da dependência contínua das condições iniciais que

$$|u(t) - \bar{q}| \leq \bar{c}e^{\bar{k}t}|a|, \text{ onde } \bar{c} \text{ e } \bar{k} \text{ são constantes.}$$

Logo, para $M > 0$, se $|a| \leq \varepsilon_0 / \bar{c}e^{\bar{k}(M - k_m T)}$ e $0 \leq t \leq M - k_m T$, $u(t) \in B_{\varepsilon_0}(\bar{q})$.

Pelo Lema 3.2, para $\varepsilon > 0$, arbitrário, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $|\dot{u}_k(kT)| < \varepsilon$. Assim, $u_k(t) \in B_{\varepsilon_0}(\bar{q})$ se $0 \leq t \leq M - k_m T$. Como $|v_m(t_m^+)| = \varepsilon_0$, temos $t_m^+ > M - k_m T$, ou seja, $k_m T - t_m^+ > M$.

Aplicando então o processo limite e o Lema 3.3, encontramos uma solução não trivial ξ^1 de (3.1) que será uma órbita heteroclínica se $\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi^1(t) \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$; caso contrário temos uma órbita homoclínica. Vamos supor que estamos nessa situação.

Seja $t^1 \in \mathbb{R}$, tal que, $\xi^1(t) \in B_{\varepsilon_0/3}(0) \forall t \geq t^1$. Observe que $t^1 > 0$, pois $|\xi^1(0)| = \varepsilon_0$. Consideremos a sequência (ξ_m^1) definida no processo limite. Como $\xi_m^1(t)$ assume o valor $\bar{q}$, existem números τ_m^- e τ_m^+ , tais que, $0 < \tau_m^- < t^1 < \tau_m^+ < k_m T - t_m^+$ e

$$|\xi_m^1(\tau_m^-)| < \varepsilon_0/2, \quad |\xi_m^1(\tau_m^+)| = \varepsilon_0 \text{ e } |\xi_m^1(t)| < \varepsilon_0, \quad \forall t \in (\tau_m^-, \tau_m^+).$$

Vamos definir $t_m^{-1} = t_m^+ + \tau_m^-$, $t_m^{1+} = t_m^+ + \tau_m^+$ e mostrar que (t_m^{1+}) e (t_m^{1-}) satisfazem (s1), (s2) e (s3).

(s1) Como $0 < \tau_m^- < t^1 < \tau_m^+ < k_m T - t_m^+$, temos $0 < t_m^+ + \tau_m^- < t_m^+ + \tau_m^+ < k_m T$; ou seja, $t_m^{1-}, t_m^{1+} \in [0, k_m T]$.

(s3) ξ_m^1 é obtida trasladando v_m de t_m^+ . Logo,

$$|v_m(t_m^{1-})| = |\xi_m^1(\tau_m^-)| < \varepsilon_0 \text{ e } |v_m(t_m^{1+})| = |\xi_m^1(\tau_m^+)| = \varepsilon_0,$$

e como $|\xi_m^1(t)| < \varepsilon_0$, $\forall t \in (\tau_m^-, \tau_m^+)$, temos que

$$|v_m(t)| < \varepsilon_0, \quad \forall t \in (t_m^+ + \tau_m^-, t_m^+ + \tau_m^+) = (t_m^{1-}, t_m^{1+})$$

(s2) Para mostrar que $\lim_{m \rightarrow +\infty} k_m T - t_m^{1+} = +\infty$, tomamos a subsequência de (v_m) correspondente a (ξ_m^1) e procedemos como antes. Quanto à outra parte, precisamos mostrar que $(\tau_m^+ - \tau_m^-)$ vai para infinito. De fato:

Desde que $0 < \tau_m^- < t_m^1$, é suficiente mostrar que $\lim_{m \rightarrow +\infty} \tau_m^+ = +\infty$.

Supondo que (τ_m^+) é limitada, obtemos subsequências $(\tau_{m_j}^+)$ e $(\tau_{m_j}^-)$ que convergem para τ^+ e τ^- , respectivamente, com $0 \leq \tau^- \leq t^1 \leq \tau^+$. Como $|\xi_m^1(\tau_m^+)| = \varepsilon_0$ teríamos $|\xi^1(\tau^+)| = \varepsilon_0$, o que contradiz a definição de t^1 .

Aplicando novamente o processo limite, obtemos uma sequência (ξ_m^2) que converge localmente uniformemente para uma solução ξ^2 de (3.1) que não é identicamente nula, pois

$$|\xi_m^2(0)| = |\xi_m^2(t_m^{1+})| = \varepsilon_0,$$

e com isso

$$|\xi^2(0)| = \varepsilon_0$$

ξ^2 é uma órbita heteroclínica se $\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi^2(t) = 0$, caso contrário temos uma órbita homoclínica. Admitindo que estamos nessa situação obtemos $t^2 \in \mathbb{R}$, tal que, $\xi^2(t) \in B_{\varepsilon_0/3}(0)$ se $t \geq t^2$. Note que $t^2 > 0$, pois $|\xi^2(0)| = \varepsilon_0$. Considerando a sequência (ξ_m^2)

definida anteriormente, o fato das ξ_m^2 's assumirem o valor $\bar{q}$ nos garante a existência de números τ_m^{1+} e τ_m^{1-} , tais que, $0 < \tau_m^{1-} < t^2 < \tau_m^{1+} < k_m T - t_m^{1+}$ e

$$|\xi_m^2(\tau_m^{1-})| < \varepsilon_0/2, \quad |\xi_m^2(\tau_m^{1+})| = \varepsilon_0 \quad \text{e} \quad |\xi_m^2(t)| < \varepsilon_0, \quad \forall t \in (\tau_m^{1-}, \tau_m^{1+}).$$

Definindo $t_m^{2-} = t_m^{1+} + \tau_m^{1-}$ e $t_m^{2+} = t_m^{1+} + \tau_m^{1+}$, é possível mostrar, usando os mesmos argumentos usados anteriormente, que (t_m^{2+}) e (t_m^{2-}) satisfazem (s1), (s2) e (s3). Aplicando então o processo limite obtemos uma sequência (ξ_m^3) que converge localmente uniformemente para uma solução não identicamente nula ξ^3 de (3.1).

Repetindo esse processo e assumindo que em cada caso encontramos uma órbita homoclínica, obtemos sequências $(t_m^{i+}), (t_m^{i-}), \dots, (t_m^i), \dots$, tais que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} t_m^{i+} - t_m^{i-1+} = +\infty \quad \text{e} \quad |v_m(t_m^{i+})| = \varepsilon_0; \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Isso, juntamente com o Lema 3.1 e o fato das v'_m s terem derivada limitada contradiz (3.9) e (3.11).

TEOREMA 3.1: Se a potencial V satisfaz (V0), (V1), (V4) e (V5) então para todo $q \in \mathcal{M}$ a equação (3.1) possui no mínimo duas órbitas heteroclínicas, a primeira começando em q e a segunda terminando em q .

Dem: Pela Proposição (3.2) a equação (3.1) possui no mínimo uma órbita heteroclínica começando em 0 e terminando em $\mathcal{M} \setminus \{0\}$.

Trocando a condição de fronteira $u(0) = 0$, $u(kT) = \bar{q}$ por

$$u(0) = \bar{q}, \quad u(kT) = 0$$

e mudando os argumentos de uma forma conveniente, obtemos uma órbita heteroclínica começando em $\mathcal{M} \setminus \{0\}$ e terminando em 0.

CAPÍTULO IV

EXISTÊNCIA DE ÓRBITAS PERIÓDICAS ATRAVÉS DO PASSO DA MONTANHA

Nesse Capítulo provaremos um teorema de existência para órbitas periódicas em uma situação diferente. Aqui não assumiremos que o funcional é inferiormente limitado, o que elimina a possibilidade de minimização. Contudo, existe uma situação geométrica que ainda garante a existência de pontos críticos, situação esta, dada pelo Teorema do Passo da Montanha. A prova desse teorema é baseada em uma versão do Lema de Deformação ligeiramente mais precisa que a do Capítulo II.

LEMA 4.1: Sob as hipóteses do Lema 2.1, dado $\hat{\varepsilon} > 0$ existe $0 < \varepsilon_0 < \hat{\varepsilon}$ e uma deformação η satisfazendo (D1), (D2), (D3) e

$$(D4) \quad \eta(\tau, u) = u, \quad \forall u \in \varphi^{-1}((-\infty, c - \hat{\varepsilon}] \cup [c + \hat{\varepsilon}, +\infty))$$

Dem: A demonstração é análoga à do Lema 2.1.

AFIRMAÇÃO 1: $\exists \bar{\varepsilon} > 0$ e $b > 0$, tal que, $\|\nabla \varphi(u)\| \geq b$, $\forall u \in \varphi^{-1}([c - \bar{\varepsilon}, c + \bar{\varepsilon}])$

Dem: análoga.

Considere os conjuntos

$$A = \{u \in H / \varphi(u) \leq c - \varepsilon\} \cup \{u \in H / \varphi(u) \geq c + \varepsilon\}, B = \{u \in H / c - \varepsilon \leq \varphi(u) \leq c + \varepsilon\}$$

e a função

$$g(u) = \frac{|u - A|}{|u - A| + |u - B|}$$

Como A e B são fechados e $A \cap B = \emptyset$ (para ε adequado), g está bem definida e satisfaz $g(u) = 0$ se $u \in A$, $g(u) = 1$ se $u \in B$ e $0 \leq g(u) \leq 1$. Temos também que g é localmente Lipschitz, pois se trata da função de Uryson diferenciável.

Em lugar de (2.2) consideremos

$$\dot{\eta} = -g(\eta)h(\|\nabla\varphi(\eta)\|)\nabla\varphi(\eta) \quad (4.1)$$

$$\eta(0) = u \quad (4.2)$$

onde $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é a mesma da demonstração do Lema 2.1.

O fato da função do segundo membro ser localmente Lipschitz, pois se trata do produto de função localmente Lipschitz, nos garante que existe uma única solução local e contínua de (4.1) - (4.2).

AFIRMAÇÃO 2: Seja $\eta(\tau, u)$ uma solução de (4.1) - (4.2) no tempo τ . Então, para todo $u \in H$, $\eta(\cdot, u)$ pode ser estendida para todo τ .

Dem: A função do segundo membro de (4.1) é limitada. Para verificar isso, basta considerar os casos em que $\|\nabla\varphi(\eta)\| \geq 1$, $\|\nabla\varphi(\eta)\| \leq 1$ e concluir que $\|\dot{\eta}\| \leq 1$.

Segue então de um resultado clássico para equações diferenciais ordinárias que η pode ser estendida para todos τ .

Mostremos agora (D1), (D2), (D3) e (D4)

(D1): Segue da definição de η ;

(D2): Usando (4.1), vem que

$$\frac{d\varphi}{d\tau}(\eta(\tau, u)) = -g(\eta)h(\|\nabla\varphi(\eta(\tau, u))\|)\|\nabla\varphi(\eta(\tau, u))\|^2 \leq 0. \quad (4.3)$$

Integrando de 0 a τ , $\tau \in [0, 1]$, obtemos $\varphi(\eta(\tau, u)) \leq \varphi(u)$, para todo $u \in H$ e $\tau \in [0, 1]$.

(D3): Tomando $\varepsilon_0 < \min(\bar{\varepsilon}, \hat{\varepsilon}, b^2/2, 1/2)$, usando afirmação 1 e (4.3), a demonstração segue análoga a que foi feita no Lema 2.1 ;

(D4): Se $u \in \varphi^{-1}((-\infty, c-\hat{\varepsilon}] \cup [c+\hat{\varepsilon}, +\infty))$, $g(\eta(\tau, u)) = 0$ e consequentemente, por (4.1), $\dot{\eta}(\tau, u) = 0$. Segue daí que $\eta(\tau, u) = u$ para todo $u \in \varphi^{-1}((-\infty, c-\hat{\varepsilon}] \cup [c+\hat{\varepsilon}, +\infty))$.

TEOREMA 4.1: (Passo da Montanha)

Sejam H um espaço de Hilbert e $\varphi : H \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional $C^{1,1}$ satisfazendo a condição (P.S.) e

($\varphi 1$) Existe $\rho > 0$ e $\alpha > 0$, tal que

$$\varphi(u) \geq \alpha, \quad \forall u \in \partial B_\rho(0)$$

($\varphi 2$) $\varphi(0) = 0$ e existe $e \in H \setminus B_\rho(0)$, tal que $\varphi(e) \leq 0$.

Então, φ possui um ponto crítico com valor crítico maior ou igual a α .

Dem: Definamos Γ o seguinte conjunto de caminhos

$$\Gamma = \{g \in C([0, 1], H) / g(0) = 0 \text{ e } g(1) = e\}$$

e

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \sup_{s \in [0, 1]} \varphi(g(s))$$

AFIRMAÇÃO 1: $\alpha \leq c < +\infty$

Dem: $[0, 1] \xrightarrow{g} H \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$.

Como $[0, 1]$ é compacto e φ e g são contínuas, $\varphi \circ g$ assume máximo; ou seja; $\varphi \circ g$ é limitado superiormente.

Por outro lado, para $\forall g \in \Gamma$, existe $s_0 \in (0, 1)$, tal que, $\|g(s_0)\| = \rho$. Segue então de ($\varphi 1$) que $\varphi(g(s_0)) \geq \alpha$, para toda g em Γ . Logo,

$$\sup_{s \in [0, 1]} \varphi(g(s)) \geq \alpha, \quad \forall g \in \Gamma$$

e consequentemente $c \geq \alpha$.

AFIRMAÇÃO 2: c é valor crítico de φ .

Dem: Mostraremos que se a afirmação 2 não for verdadeira é possível obter $\tilde{g} \in \Gamma$ que contradiz a definição de c .

Supondo então o contrário, podemos aplicar o Lema 4.1 para $\hat{\varepsilon} = \alpha/2$ e obter ε_0 e η dados por esse resultado. Escolhamos agora $g \in \Gamma$, tal que,

$$\sup_{s \in [0,1]} \varphi(g(s)) \leq c + \varepsilon_0 \quad (4.4)$$

e definamos $\tilde{g}(s) = \eta(1, g(s))$. O fato de que

$$\alpha - \varepsilon_0 \geq \alpha - \alpha/2 = \alpha/2 > 0$$

e a hipótese (φ_2) nos garantem que $\{0, e\} \subset \varphi^{-1}((-\infty, c - \varepsilon_0])$, o que juntamente com (D4) nos dá que

$$\tilde{g}(0) = \eta(1, g(0)) = 0 \text{ e } \tilde{g}(1) = \eta(1, g(1)) = e$$

mostrando assim que $\tilde{g} \in \Gamma$.

Por outro lado, segue de (D3) e (4.4) que

$$\sup_{s \in [0,1]} \varphi(\tilde{g}(s)) \leq c - \varepsilon_0$$

o que contradiz a definição de c .

As afirmações 1 e 2 demonstram o resultado.

Para o próximo Teorema, assumiremos que a potencial V pode ser decomposta em

$$V(t, q) = -\frac{1}{2}L(t)q \cdot q + W(t, q) \quad (4.5)$$

satisfazendo,

(V0) V é de classe $C^{1,1}$;

(V2) V é T -periódica em t ;

(V6) $L : [0, T] \longrightarrow M_N(\mathbb{R})$ é contínua, T -periódica e $L(t)$ é simétrica e positiva definida;

(V7) W é superquadrático; isto é; existe $\mu > 2$ satisfazendo

$$0 < \mu W(t, q) \leq W'(t, q) \cdot q, \quad \forall q \neq 0.$$

Destacamos duas consequências das afirmações (V6) e (V7), que serão utilizadas na demonstração do próximo resultado.

AFIRMAÇÃO 1: Existem constantes $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$, tais que,

$$W(t, q) \geq c_1 |q|^\mu \text{ se } |q| \geq 1 \quad (4.6)$$

e

$$W(t, q) \leq c_2 |q|^\mu \text{ se } |q| \leq 1. \quad (4.7)$$

Dem: Seja $f(\tau) = W(t, \tau q), \tau \in \mathbb{R}$.

Derivando f e observando que por (V7) $\mu W(t, \tau q) \leq W'(t, \tau q) \cdot \tau q$ segue que

$$f'(\tau) = W'(t, \tau q) \cdot q \geq \frac{\mu}{\tau} W(t, \tau q) \geq \frac{\mu}{\tau} f(\tau)$$

Multiplicando ambos os membros dessa desigualdade por $\tau^{-\mu}$, obtemos

$$\frac{d}{d\tau}(f(\tau))\tau^{-\mu} \geq 0.$$

Considerando agora os casos em que $|q| \leq 1, |q| \geq 1$ e integrando essa nova desigualdade de $1/|q|$ a 1 e de 1 a $1/|q|$ respectivamente, vem que

$$W(t, q) \geq W(t, \frac{q}{|q|})|q|^\mu \text{ se } |q| \geq 1$$

e

$$W(t, q) \leq W(t, \frac{q}{|q|})|q|^\mu \text{ se } |q| \leq 1.$$

Mas, se $q \in \mathbb{R}^N, q/|q| \in \partial B_1[0]$ e sendo a $B_1[0]$ compacta e W contínua, segue que, existem constantes positivas c_1 e c_2 , tais que,

$$W(t, q) \geq c_1 |q|^\mu \text{ se } |q| \geq 1$$

e

$$W(t, q) \leq c_2 |q|^\mu \text{ se } |q| \leq 1.$$

AFIRMAÇÃO 2: Existe $c > 0$, tal que $L(t)q \cdot q \geq c|q|^2$, $\forall q \in \mathbb{R}^N$ e $\forall t \in [0, T]$.

Dem: Segue de um resultado básico de Álgebra Linear que

$$L(t)q \cdot q \geq c_t |q|^2, \quad \forall q \in \mathbb{R}^N \text{ e } t \in [0, T].$$

Considere a aplicação

$$\gamma : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}.$$

$$t \longmapsto c_t$$

Como γ é contínua e $[0, T]$ é compacto, existe $c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, tal que, $c_t \geq c$, $\forall t \in [0, T]$ e o resultado segue.

TEOREMA 4.2: Sob as hipóteses (V0), (V2), (V6) e (V7), a equação

$$\ddot{u} + V'(t, u) = 0$$

$$u(0) - u(T) = \dot{u}(0) - \dot{u}(T) = 0$$

possui no mínimo uma solução não trivial.

Dem: Consideraremos o funcional

$$\varphi(u) = \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{u}|^2 + L(t)u \cdot u dt - \int_0^T W(t, u) dt$$

definido sobre o espaço $W_{T,P}$, e mostraremos inicialmente que φ satisfaz as hipóteses do Teorema 4.1

(i) φ verifica as condições geométricas (φ_1) e (φ_2) .

Pela afirmação 2,

$$\frac{1}{2} \int_0^T |\dot{u}|^2 + L(t)u \cdot u dt \geq \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{u}|^2 + c|u|^2 dt \geq d\|u\|^2 \quad (4.8)$$

onde d é uma constante positiva. Por outro lado, segue da Proposição 1.2 que existe uma constante c_3 , tal que

$$\sup_{t \in [0, T]} |u(t)| \leq c_3 \|u\|, \quad \forall u \in W_{T,P}.$$

Tomando $\rho_1 = 1/c_3$, segue da desigualdade acima e de (4.7) que se $\|u\| \leq \rho_1$

$$\int_0^T W(t, u) dt \leq \int_0^T c_2 |u|^\mu dt \leq c_2 T c_3^\mu \|u\|^\mu = c_4 \|u\|^\mu. \quad (4.9)$$

Logo, de (4.8) e (4.9),

$$\varphi(u) \geq d\|u\|^2 - c_4 \|u\|^\mu \quad \text{se } \|u\| \leq \rho_1$$

e consequentemente

$$\varphi(u) \geq d\rho_1^2 - c_4 \rho_1^\mu \quad \text{se } \|u\| = \rho_1.$$

Escolhendo $\rho < \min(1/c_3, (d/c_4)^{\mu-1})$ e $\alpha = d\rho^2 - c_4 \rho^\mu$,

$$\varphi(u) \geq \alpha \quad \text{se } \|u\| = \rho$$

mostrando assim (φ_1) .

Para mostrar (φ_2) , observamos que $\varphi(0) = 0$ e consideramos $v \in W_{T,P}, v \neq 0$. Se $\tau > 0$,

$$\begin{aligned} \varphi(\tau v) &= \tau^2 \left(\frac{1}{2} \int_0^T |\dot{v}|^2 + L(t)v \cdot v dt \right) - \int_0^T W(t, \tau v) dt \\ &= \tau^2 \left(\frac{1}{2} \int_0^T |\dot{v}|^2 + L(t)v \cdot v dt \right) - \left(\int_{k_1} W(t, \tau v) dt + \int_{k_2} W(t, \tau v) dt \right), \end{aligned}$$

onde

$$k_1 = \{t \in [0, T] : |\tau v(t)| \geq 1\} \text{ e } k_2 = \{t \in [0, T] : |\tau v(t)| \leq 1\}.$$

Agora,

$$-\int_{k_2} W(t, \tau v) dt \leq 0 \text{ e } -\int_{k_1} W(t, \tau v) dt \leq -c_1^\mu |\tau|^\mu \int_{k_1} |v|^\mu dt,$$

por (4.6), e com isso

$$\varphi(\tau v) \leq \tau^2 \left(\frac{1}{2} \int_0^T |\dot{v}|^2 + L(t) v \cdot v dt \right) - c_1^\mu |\tau|^\mu \int_{k_1} |v|^\mu dt.$$

Tomando τ suficientemente grande e definindo $e = \tau v$, temos $\varphi(e) \leq 0$.

(ii) φ satisfaz a condição (P.S.).

Seja (u_n) sequência com $W_{T,P}$, tal que,

$$(\varphi(u_n)) \text{ é limitada} \quad (4.10)$$

$$(\nabla \varphi(u_n)) \text{ converge a zero} \quad (4.11)$$

Para n suficientemente grande, segue de (4.11) que

$$\sup_{v \neq 0} \frac{|(\nabla \varphi(u_n), v)|}{\|v\|} < 2, \quad \forall v \in W_{T,P}.$$

Em particular,

$$-\frac{1}{2}(\nabla \varphi(u_n), u_n) \leq \|u_n\|,$$

e por (4.10), existe $\bar{c} > 0$, tal que

$$\begin{aligned} \bar{c} + \|u_n\| &\geq \varphi(u_n) - \frac{1}{2}(\nabla \varphi(u_n), u_n) \\ &= \varphi(u_n) - \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{u}_n|^2 + L(t) u_n \cdot u_n - W'(t, u_n) \cdot u_n dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T W'(t, u_n) \cdot u_n dt - \int_0^T W(t, u_n) dt. \end{aligned}$$

Usando então (V7),

$$\bar{c} + \|u_n\| \geq \left(\frac{\mu}{2} - 1 \right) \int_0^T W(t, u_n) dt. \quad (4.12)$$

Agora, por (4.8) e (4.10)

$$d\|u_n\| - \int_0^T W(t, u_n)dt \leq \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{u}_n|^2 + L(t)u_n \cdot u_n dt - \int_0^T W(t, u_n)dt \leq \bar{c};$$

ou seja;

$$d\|u_n\|^2 \leq \bar{c} + \int_0^T W(t, u_n)dt.$$

Dessa desigualdade e de (4.12), obtemos

$$d\|u_n\|^2 \leq \left(1 + \frac{2}{\mu - 2}\right) c + \frac{2}{\mu - 2} \|u_n\|,$$

o que mostra que (u_n) é limitada em $W_{T,P}$. Usando um argumento análogo ao que foi usado na demonstração do Teorema 2.3 obtemos (u_{n_j}) , subsequência de (u_n) , e $u \in W_{T,P}$, tal que

$$\|u_{n_j} - u\| \longrightarrow 0, \text{ quando } j \longrightarrow +\infty$$

mostrando assim, que φ satisfaz a condição (P.S.).

Segue então do Teorema 4.1, que existe $v \in W_{T,P}$, tal que $\nabla\varphi(v) = 0$ e consequentemente solução do problema.

Observações:

(4.1) (4.5) Juntamente com (V6) e (V7), contrastam com a hipótese (V2) do Capítulo II, onde consideramos V superiormente limitada.

(4.2) A hipótese (V6) mostra que a aplicação L , define uma norma equivalente em $\mathbb{R}^N$, fato que será explorado no próximo Capítulo.

CAPÍTULO V

EXISTÊNCIA DE ÓRBITAS HOMOCLÍNICAS ATRAVÉS DO PASSO DA MONTANHA

Nesse Capítulo, encontramos órbitas homoclínicas para um sistema Hamiltoniano como aquele considerado no Capítulo IV. Utilizaremos um processo limite análogo ao utilizado na seção 3, onde a sequência de soluções, dessa vez $2kT$ -periódicas, serão obtidas aplicando o Teorema do Passo da Montanha.

No que segue, assumiremos que a potencial V pode ser escrita como

$$V(t, q) = -\frac{1}{2}L(t)q \cdot q + W(t, q),$$

onde são admitidas (V0), (V2), (V6) e (V7) e adicionalmente (V8) $W'(t, q) = 0(|q|)$, quando $q \rightarrow 0$ uniformemente para $t \in [0, T]$.

DEFINIÇÃO 5.1: Uma solução $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ da equação $\ddot{u} + V'(t, u) = 0$ é dita homoclínica se

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} u(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \dot{u}(t)$$

TEOREMA 5.1: Se V satisfaz (V0), (V2), (V6), (V7) e (V8), então a equação

$$\ddot{u} + V'(t, u) = 0 \quad (5.1)$$

$$u(+\infty) = u(-\infty) = \dot{u}(+\infty) = \dot{u}(-\infty) = 0 \quad (5.2)$$

possui no mínimo uma órbita homoclínica não trivial.

Dem: Dado $k \in \mathbb{N}$, consideremos o sistema

$$\ddot{u} + V'(t, u) = 0 \quad (5.3)$$

$$u(0) - u(2kT) = \dot{u}(0) - \dot{u}(2kT) = 0 \quad (5.4)$$

Trocando T por $2kT$ em (V2) e (V6) e considerando

$$\begin{aligned} \varphi_k : W_{2kT, P} &\longrightarrow \mathbb{R} & \text{e } \Gamma_k &= \{g \in C([0, 1], W_{2kT, P}) / g(0) = 0 \text{ e } g(1) = e_k\} \\ u &\longmapsto \frac{1}{2} \int_0^{2kT} |u|^2 dt - \int_0^{2kT} V(t, u) dt \end{aligned}$$

obtemos pelo Teorema 4.2 uma solução u_k de (5.3) - (5.4) $2kT$ -periódica cujo valor crítico é dado por

$$c_k = \inf_{g \in \Gamma_k} \sup_{s \in [0, 1]} \varphi_k(g(s)).$$

As sequências (u_k) e (c_k) podem ser estimadas, independentes de k . Se considerarmos $e \in W_{2kT, P}$, tal que, $e(0) = 0, e(2T) = 0$ e $\varphi_1(e) \leq 0$ (é possível obter tal elemento, conforme foi verificado na demonstração do Teorema 4.2), podemos definir $e_k \in W_{2kT, P}$, por

$$e_k(t) = \begin{cases} e(t) & \text{se } 0 \leq t \leq 2T \\ 0 & \text{se } 2T \leq t \leq 2kT \end{cases}$$

Assim,

$$\varphi_k(e_k) = \frac{1}{2} \int_0^{2kT} |e_k|^2 dt - \int_0^{2kT} V(t, e_k) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2T} |e|^2 dt - \int_0^{2T} V(t, e) dt = \varphi_1(e) \leq 0$$

Definindo

$$\begin{aligned} g_k : [0, 1] &\longrightarrow W_{2kT, P} \\ s &\longmapsto s e_k \end{aligned}$$

temos que $g_k \in \Gamma_k$, e com isso,

$$c_k \leq \sup_{s \in [0,1]} \varphi_k(g_k(s)) = \sup \varphi_1(g_1(s)) \equiv M_1, \forall k \in \mathbb{N};$$

ou seja;

$$0 \leq c_k \leq M_1, \forall k \in \mathbb{N}. \quad (5.5)$$

Do fato de que $\nabla \varphi_k(u_k) = 0$ e de (V7), obtemos

$$c_k = \varphi_k(u_k) - (\nabla \varphi_k(u_k), u_k) \geq \left(\frac{\mu}{2} - 1\right) \int_0^{2kT} W(t, u_k) dt$$

e por (4.8)

$$d\|u_k\|^2 \leq \frac{1}{2} \int_0^{2kT} |\dot{u}_k|^2 + L(t)u_k \cdot u_k dt = c_k + \int_0^{2kT} W(t, u_k) dt \leq c_k \left(1 + \frac{2}{\mu - 2}\right) \quad (5.6)$$

donde concluímos por (5.5) que existe $M_2 > 0$ satisfazendo

$$\|u_k\| \leq M_2, \forall k \in \mathbb{N}. \quad (5.7)$$

Por outro lado, para toda função $u \in W_{T,P}$

$$|u(t)| \leq |u(\tau)| + \left| \int_{\tau}^t \dot{u}(s) ds \right|$$

e como toda função desse espaço pode ser estendida para todo $t \in \mathbb{R}$, podemos integrar ambos os membros da desigualdade acima em $[t - 1/2, t + 1/2]$, obtendo assim

$$|u(t)| \leq \int_{t-1/2}^{t+1/2} |u(\tau)| d\tau + \int_{t-1/2}^{t+1/2} \left| \int_{\tau}^{t+1/2} \dot{u}(s) ds \right| d\tau$$

Usando agora a desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|u(t)| \leq c \left(\int_{t-1/2}^{t+1/2} |\dot{u}(\tau)|^2 + |u(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2}, \quad (5.8)$$

onde c é constante. Logo,

$$\|u_k\|_{L^\infty(0,2kT)} \leq \bar{c} \|u_k\|$$

$\bar{c}$ constante, o que juntamente com (5.7) garante que existe $M_3 > 0$, tal que

$$\|u_k\|_{L^\infty(0,2kT)} \leq M_3, \forall k \in \mathbb{N} \quad (5.9)$$

Usando (5.8), podemos também estimar $(\dot{u}_k)$ na norma L^∞ . De fato:

Como

$$\ddot{u}_k - \frac{1}{2}L(t)u_k \cdot u_k + W'(t, u_k) = 0,$$

segue de (5.9) que

$$|\ddot{u}_k| \leq \frac{1}{2}|L(t)u_k| + |W'(t, u_k)| \leq M_4,$$

onde M_4 é uma constante positiva. Elevando ao quadrado integrando, obtemos

$$\int_{t-1/2}^{t+1/2} |\dot{u}_k|^2 dt \leq M_5.$$

Aplicando então (5.8) para $\dot{u}_k$, temos

$$|\dot{u}_k(t)|^2 \leq c \left(\int_{t-1/2}^{t+1/2} |\dot{u}_k(\tau)|^2 d\tau + |\ddot{u}_k(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} \leq c(4M_5^2 + M_4^2),$$

de onde concluímos que

$$\|\dot{u}_k\|_{L^\infty(0, 2kT)} \leq M_6, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (5.10)$$

M_6 constante.

Aqui é conveniente definir a seguinte função como translação de u_k :

$$v_k(t) = u_k(t + kT).$$

Como as estimativas (5.9) e (5.10) também se aplicam a (v_k) e $(\dot{v}_k)$ respectivamente, podemos através de um processo diagonal análogo ao que foi usado no Capítulo III, obter uma subsequência de (v_k) que converge localmente uniformemente para uma função v que é solução de (5.1).

AFIRMAÇÃO 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{v}|^2 + L(t)v \cdot v dt < \infty.$$

Dem: Denotando por (v_k) a subsequência acima mencionada, não é difícil mostrar usando o Teorema de Ascoli-Arzelá que toda subsequência de $(\dot{v}_k)$ possui uma subsequência que converge localmente uniformemente para $\dot{v}$. Usando então um resultado de análise para convergência de seqüências concluímos que

$$\dot{v}_k \longrightarrow \dot{v}, \text{ localmente uniformemente.}$$

Assim, para todo $M \in \mathbb{N}$, temos que

$$\int_{-M}^M |\dot{v}_k|^2 + |v_k|^2 dt \longrightarrow \int_{-M}^M |\dot{v}|^2 + |v|^2 dt, \text{ quando } k \longrightarrow +\infty,$$

onde, por (5.7),

$$\int_{-M}^M |\dot{v}|^2 + |v|^2 dt \leq M_2^2.$$

Fazendo agora $M \longrightarrow +\infty$, obtemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{v}|^2 + |v|^2 dt \leq M_1^2,$$

que com a observação (4.2) completa a demonstração.

AFIRMAÇÃO 2: v não é identicamente nula.

Dem: Como $\nabla \varphi_k(u_k) = 0$, temos

$$\frac{1}{2} \int_{-kT}^{kT} |\dot{v}_k|^2 + L(t)v_k \cdot v_k = \int_{-kT}^{kT} W'(t, v_k) \cdot v_k dt$$

e por (4.8)

$$d\|v_k\|^2 \leq \int_{-kT}^{kT} W'(t, v_k) \cdot v_k dt. \quad (5.11)$$

Vamos definir uma função $Y : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, tal que $Y(0) = 0$ e

$$Y(s) = \max \left\{ \frac{W'(t, q) \cdot q}{|q|^2} / t \in [0, T], |q| \leq s \right\}.$$

Segue de (V7), que $Y \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, $Y(s) > 0$ se $s > 0$ e Y é monótona crescente.

Observamos que se u é uma solução $2kT$ -periódica de (5.1), então $v(t + jT)$, $j \in \mathbb{Z}$, é também uma solução. Isso nos permite transladar v_k se necessário, de tal forma que o seu máximo seja sempre atingido no intervalo $[0, T]$. Segue então da definição de Y , que

$$\frac{W'(t, v_k) \cdot v_k}{|v_k|^2} \leq Y(\|v_k\|_{L^\infty}), \quad \forall t \in [-kT, kT]$$

e por (5.11)

$$d\|v_k\|^2 \leq Y(\|v_k\|_{L^\infty}) \int_{-kT}^{kT} |\dot{v}_k|^2 dt \leq Y(\|v_k\|_{L^\infty}) \|v_k\|^2.$$

Logo, $Y(\|v_k\|_{L^\infty}) \geq d$ e consequentemente para uma constante $\lambda > 0$ dada

$$\|v_k\|_{L^\infty} \geq \lambda,$$

o que mostra que $v \not\equiv 0$.

Mostraremos agora (5.2).

Segue da afirmação 1, que

$$\int_m^{m+1} |\dot{v}|^2 + L(t)v \cdot v dt \longrightarrow 0 \text{ quando } m \longrightarrow \pm\infty.$$

Aplicando então (5.8) e a observação (4.2) para a função v , temos

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} v(t) = 0.$$

Esse resultado juntamente com (V8), implicam que

$$\int_m^{m+1} |W'(t, v)|^2 dt \longrightarrow 0 \text{ quando } m \longrightarrow \pm\infty. \quad (5.12)$$

Por outro lado, sendo v solução do problema

$$\ddot{v} - \frac{1}{2}L(t)v + W'(t, v) = 0$$

donde,

$$|\ddot{v}| \leq \frac{1}{2}|L(t)v| + |W'(t, v)|.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado e integrando em $[m, m + 1]$, temos

$$\int_m^{m+1} |\tilde{v}|^2 dt \leq 2 \left(\int_m^{m+1} |L(t)v|^2 + |W'(t, v)|^2 dt \right).$$

Segue então da afirmação 1 e de (5.12) que

$$\int_m^{m+1} |\tilde{v}|^2 dt \longrightarrow 0 \text{ quando } m \longrightarrow \pm\infty. \quad (5.13)$$

Isso, juntamente com a afirmação 1 e (5.8) aplicado a $\dot{v}$ implicam que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \dot{v}(t) = 0.$$

REFERÊNCIAS

- [1] Perko, L. – *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer – Verlag, (1991).
- [2] Birkhoff, G.D. – *Dynamical Systems with two degree of freedom*, Trans. Amer. Math. Soc. 18, 199–300, (1917).
- [3] Ljusternik, L. – *The Topology of Function Spaces and the Calculus of Variations on the Large*, Trans. Math. Soc., Providence, (1966).
- [4] Krasnoselskii, M.A. – *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations*, Mac Millan, New York, (1964).
- [5] Ambrosetti, A.; Rabinowitz, P. – *Dual variational methods in critical points theory and applications*, J. Funct. Anal. 14, 349–381, (1973).
- [6] Rabinowitz, P. – *Some minimax theorems and applications to nonlinear partial differential equations*, *Nonlinear Analysis: A collection of papers in honor of Erich R  the*, Academic Press, New York, 161–177, (1978).
- [7] Benci, V.; Rabinowitz, P. – *Critical point theorems for indefinite functionals*, Invent. Math. 52, 241–273, (1979).
- [8] Felmer, P. – *Heteroclinic orbits for spatially periodic Hamiltonian systems*, A.I.H.P. Analyse non linéaire, Vol. 8, N   5, p. 177–497, (1991).
- [9] Rabinowitz, P. – *Periodic and heteroclinic orbits for a periodic Hamiltonian systems*, A.I.H.P. Analyse non linéaire, Vol. 6, N   5, p. 331–346, (1989).
- [10] Rabinowitz, P. – *Homoclinic orbits for a class of Hamiltonian systems*, Proc. Royal Soc. Edinburgh 114A, 33–38, (1990).
- [11] Felmer, P. – *Variational Methods in Hamiltonian systems*, Lectures Notes of CIMPA Winter School, Temuco, Chile, (1992).
- [12] Figueiredo, D.G. – *Análise de Fourier e Equa  es Diferenciais Parciais*, Projeto Euclides (CNPq), (1987).
- [13] Lima, E.L. – *Curso de Análise*, Volume 2, Projeto Euclides (CNPq), (1981).
- [14] Nachbin, L. – *Introdu  o    Análise Funcional, Espaços de Banach e Cálculo Diferencial*, Editora do I.C.C. (UnB).

- [15] Troutman, J.L. – *Variational Calculus with Elementary Convexity*, Springer – Verlag, (1983).
- [16] Brezis, H. – *Analyse Fonctionnelle, théorie et applications*, Paris, Masson, (1987).
- [17] Rudin, W. – *Princípios de Análise Matemática, ao Livro Técnico*, Editora UnB, (1971).