Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática

Conjuntos de Controle em Variedades Flag

Dissertação de Mestrado

Adriano João da Silva[1]

Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin
Orientador

Campinas, SP, 2010

[1]Este trabalho contou com o auxílio da Fapesp, processo n° 2007/06865-2

Conjuntos de Controle em Variedades Flag

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Adriano João da Silva e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 26 de março de 2010

Prof. Dr.: Luiz Antonio Barrera San Martin
Orientador

Banca Examinadora:

1 Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin
2 Prof. Dr. Pedro Jose Catuogno
3 Prof. Dr. Alexandre José Santana

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Crisllene Queiroz Custódio – CRB8 / 7966

Silva, Adriano João da
Si38c Conjuntos de controle em variedades flag / Adriano João da Silva -- Campinas, [S.P. : s.n.], 2010.

Orientador : Luiz Antonio Barrera San Martin
Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Teoria do controle. 2. Teoria dos conjuntos. 3. Semigrupos. 4. Variedades complexas. I. San Martin, Luiz Antonio Barrera. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Control sets on flag manifolds

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Control theory. 2. Set theory. 3. Semigroups 4. Complex manifolds.

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Pedro Jose Catuogno (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Alexandre José Santana (UEM)

Data da defesa: 26/03/2010

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 26 de março de 2010 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

Prof. (a). Dr (a). ALEXANDRE JOSÉ SANTANA

Prof. (a). Dr (a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO

Agradecimentos

A toda minha família que sempre me apoiou, principalmente minha mãe, pessoa sem a qual com certeza não estaria aqui hoje.

Ao meu orientador, Prof. Dr. San Martin por ter acreditado em mim e continuar acreditando.

A FAPESP pelo apoio financeiro.

Por fim, a todos os colegas, funcionários e professores dos departamentos de matemática do IMECC e da UNESP - Rio Claro que sempre me ajudaram, seja com problemas matemáticos ou com problemas burocráticos.

Sumário

Abstract

Let G be a connected semi-simple Lie group with finite center and $S \subset G$ a semigroup with interior points. Let G/L be a homogeneous space. There is a natural action of S on G/L. The relation $x \leq y$ if $y \in Sx$, $x, y \in G/L$, is transitive but not reflexive nor symmetric. Roughly, a control set is a subset $D \subset G/L$, inside of which reflexivity and simmetry for $\leq$ hold. Control sets are studied in G/L when L is a parabolic subgroup. They are characterized by means of the Weyl chambers in G meeting $\mathrm{int}S$. Thus, for each $\omega \in W$, the Weyl group of G, there is a control set D_ω. D_1 is the only invariant control set, and the subset $W(S) = \{\omega; D_\omega = D_1\}$ turns out to be a subgroup. The control sets in the maximal flag are determined by $W(S) \setminus W$.

Resumo

Seja G um grupo de Lie conexo, semi-simples e com centro finito e seja $S \subset G$ um semigrupo com interior não vazio. Seja G/L um espaço homegêneo. Existe uma ação natural de S sobre G/L. A relação $x \leq y$ se $y \in Sx$, $x, y \in G/L$, é transitiva, mas não é reflexiva ou simétrica. De maneira simples, um conjunto de controle é um subconjunto $D \subset G/L$ dentro do qual reflexividade e simetria para a relação $\leq$ se verifica. Conjuntos de controle são estudados em G/L quando L é um subgrupo parabólico. Eles são caracterizados por meio das câmaras de Weyl em G que interceptam int$S$. Então, para cada $\omega \in W$, grupo de Weyl de G, existe um conjunto de controle D_ω. D_1 é o único conjunto de controle invariante e o subconjunto $W(S) = \{\omega; D_\omega = D_1\}$ é um subgrupo do grupo de Weyl de G. Os conjuntos de controle no flag maximal são então determinados por $W(S) \setminus W$.

Introdução

O conceito de conjunto de controle foi introduzido por L. Arnold e W. Kliemann com o objetivo de descrever propriedades dinâmicas e ergódicas de difusões geradas por equações diferenciais estocásticas. Para uma equação estocástica pode-se associar de maneira natural um semigrupo. O conjunto de controle invariante para esse semigrupo aparece então como os suportes de medidas invariantes para a difusão, tornando possível detectar as componentes ergódicas por meio dos conjuntos de controle invariantes. Com excessão desses comentários, nenhuma outra referência a teoria estocástica é feita no presente trabalho, considerando apenas os conjuntos de controle por si só.

Consideremos por exemplo M uma variedade diferenciável e S um semigrupo de difeomorfismos de M. Se considerarmos as órbitas de S, não temos necessariamente que estas são subvariedades de M. Isso está relacionado com o fato de que a não existência de inversas para os elementos de S, não garante que a relação $x \leq y$, definida por $y \in Sx$, é de equivalência. De maneira simples, um conjunto de controle para a S-ação em M é um subconjunto $D \subset M$ no qual a relação $\leq$ é uma relação de equivalência.

No presente trabalho estaremos interessados em analisar tais conjuntos dados a partir da ação de semigrupos de grupos de Lie semi-simples em espaços homogêneos especificos. O objetivo principal é caracterizar os conjuntos de controles ditos efetivos para tal ação.

No primeiro capítulo é dado a definição de conjunto de controle e de conjunto de controle efetivo e são apresentados alguns resultados acerca dos mesmos, tais como existência, unicidade e algumas propriedades e relações entre os conjuntos de controle e um subconjunto denso, denominado conjunto de transitividade dentro de D.

O segundo capítulo ja é destinado ao caso em que a ação é a ação natural de um semigrupo de interior não vazio de um grupo de Lie semi-simples sobre o flag maximal. Nesse contexto, os conjuntos de controle efetivos são caracterizados a partir de seu conjunto de transitividade, que nesse contexto é apenas o conjunto dos pontos fixos para certos elementos do grupo que estão no interior do semigrupo.

O terceiro capítulo introduz o importante conceito de tipo parabólico como sendo um subgrupo do grupo de Weyl. Com esse conceito, pode-se mostrar que o número de conjuntos de controle dentro do flag maximal é finito e está em correspondência biunívoca com o conjunto das classes laterais de tal subgrupo.

O quarto e último capítulo analisa os conjuntos de controle nos outros flags a partir da fibração canônica entre o flag maximal e estes. Mostra-se que os conjuntos de controle para esses flags estão em correspondência com as órbitas do tipo parabólico em um quociente do grupo de Weyl.

Capítulo 1

Conjuntos de Controle

Seja S um semigrupo de interior não vazio de um grupo de Lie G e M um espaço munido de uma G-ação. Iremos assumir ainda que esta ação é transitiva para assim podermos pensar em M como um espaço homogêneo de G onde S age como um semigrupo de difeomorfismos.

Definição 1.1. *Um conjunto de controle para a S-ação sobre M é um subconjunto $D \subseteq M$ satisfazendo:*
i) $\mathrm{int}D \neq \varnothing$*;*
ii) $D \subseteq \mathrm{fe}(Sx)$ *para cada* $x \in D$*;*
iii) D é maximal com as propriedades acima.

A condição ii) é a central. Ela está relacionada com a transitividade de S dentro de D, no sentido de que para cada dois pontos x, y em M, exista $g \in S$ satisfazendo $gx = y$. As condições i) e iii) são pedidas para evitar patologias ou trivialidades. Por exemplo, sem i) podemos ter conjuntos unitários como conjunto de controle.

Iremos demonstrar agora uma série de propriedades para esses conjuntos de controle que serão usados posteriormente. Os seguintes resultados clarificam a transitividade dentro de D, tornando a condição ii) mais precisa.

Proposição 1.1. *Seja D um conjunto de controle para S e considere*

$$D_0 = \{x \in D; \exists g \in \mathrm{int}S \text{ com } gx = x\} = \{x \in D; x \in (\mathrm{int}S)x\}.$$

Então:
a) $D_0 = (\mathrm{int}S)D \cap D$*;*
b) $D \subseteq (\mathrm{int}S)^{-1}x$ *para cada* $x \in D_0$ *se* $D_0 \neq \varnothing$*;*
c) $D_0 = (\mathrm{int}S)x \cap (\mathrm{int}S)^{-1}x$ *para cada* $x \in D_0$ *se* $D_0 \neq \varnothing$*;*
d) Para cada $x, y \in D_0$ $\exists g \in \mathrm{int}S$ *tal que* $gx = y$*;*
e) D_0 *é denso em* D *se* $D_0 \neq \varnothing$*;*

f) D_0 é S-invariante dentro de D, ou seja, $hx \in D_0$ se $h \in S$, $x \in D_0$ e $hx \in D$;

g) $D_0 \neq \varnothing$ se $SD \subseteq D$ ou $S^{-1}D \subseteq D$. No último caso, $D_0 = D$.

Demonstração: a) Tome $x \in (\mathrm{int}S)D \cap D$. Então, $x = gd$ para algum $g \in \mathrm{int}S$, $d \in D$ e portanto $g^{-1}x = d \in (\mathrm{int}S)^{-1}x \cap D$. Temos também que $Sx \cap D \neq \varnothing$, pois D contém pontos interiores. Seja então $z \in Sx \cap D$. Como $D \subseteq \mathrm{fe}(Sz)$ e $(\mathrm{int}S)^{-1}x \cap D \neq \varnothing$, temos que $Sz \cap (\mathrm{int}S)^{-1}x \neq \varnothing$ e isso mostra que $x \in (\mathrm{int}S)Sz \subseteq (\mathrm{int}S)Sx \subseteq (\mathrm{int}S)x$ e consequentemente $x \in D_0$.

Reciprocamente, dado $x \in D_0$, temos que $x \in (\mathrm{int}S)x \cap D \subseteq (\mathrm{int}S)D \cap D$.

b) Seja $x \in D_0$ e $y \in D$. Pelo item a), temos que $(\mathrm{int}S)^{-1}x \cap D \neq \varnothing$. Então, utilizando a propriedade ii) da definição de D, $Sy \cap (\mathrm{int}S)^{-1}x \neq \varnothing$ e portanto $y \in S^{-1}(\mathrm{int}S)^{-1}x \subseteq (\mathrm{int}S)^{-1}x$.

c) Seja $y \in (\mathrm{int}S)^{-1}x \cap (\mathrm{int}S)x$. Existem g e h em $\mathrm{int}S$ tais que $y = gx = h^{-1}x$. Isso, juntamente com a propriedade de maximalidade de D, implicam que $y \in D$. De fato, tomando $D' = D \cup \{y\}$ podemos facilmente verificar que D' é também um conjunto de controle que contém D, o que implica $y \in D$. Além disso, como $y = gx = ghh^{-1}x = ghy$, temos que $y \in D_0$.

Reciprocamente, dados x,$y \in D_0$, temos por (b) que $y \in (\mathrm{int}S)^{-1}x$ e $x \in (\mathrm{int}S)^{-1}y$, ou seja, $y \in (\mathrm{int}S)^{-1}x \cap (\mathrm{int}S)x$.

d) Segue imediatamente do item (c).

e) Seja $x \in D_0$. Pelo item (c), temos que dado $x \in D_0$, $D_0 = (\mathrm{int}S)x \cap (\mathrm{int}S)^{-1}x$ e então $\mathrm{fe}(D_0) \supseteq \mathrm{fe}((\mathrm{int}S)x) \cap (\mathrm{int}S)^{-1}x$. De fato, dado $y \in \mathrm{fe}((\mathrm{int}S)x) \cap (\mathrm{int}S)^{-1}x$ e um aberto qualquer contendo y, teremos que esse aberto certamente tem interseção não vazia com $(\mathrm{int}S)x$, pois y está em seu fecho, e também com $(\mathrm{int}S)^{-1}x$.

Por outro lado, o item (b) nos assegura que $D \subseteq (\mathrm{int}S)^{-1}x$ e também temos que $D \subseteq \mathrm{fe}(Sx) \subseteq \mathrm{fe}((\mathrm{int}S)x)$, já que $Sx \subseteq S(\mathrm{int}S)x \subseteq (\mathrm{int}S)x$. Portanto, $D \subseteq \mathrm{fe}(D_0)$ e D_0 é assim denso em D.

f) De fato, $hx = hgx$, onde $g \in \mathrm{int}S$ satisfaz $gx = x$. Então, $hx \in (\mathrm{int}S)x$. Mas, como $hx \in D$ e pelo item (b) $D \subseteq (\mathrm{int}S)^{-1}x$, temos que $hx \in (\mathrm{int}S)x \cap (\mathrm{int}S)^{-1}x = D_0$ o que mostra que D_0 é S-invariante.

g) A primeira parte é consequência do item (a) e do fato de $\mathrm{int}S$ ser não vazio. Suponhamos então que $S^{-1}D \subseteq D$ e seja $x \in D$. Temos que $(\mathrm{int}S)^{-1}x$ é um aberto contido em D e portanto $(\mathrm{int}S)^{-1}x \cap Sx \neq \varnothing$ o que implica $x \in (\mathrm{int}S)Sx \subseteq (\mathrm{int}S)x$, ou seja, $x \in D_0$.

■

A partir de agora nos referiremos a D_0 como o conjunto de transitividade dentro de D. Não é sempre garantido no entanto que tal conjunto seja não vazio. Os conjuntos de controle que satisfazem $D_0 \neq \varnothing$ serão denominados *efetivos* e esses serão os únicos que serão considerados nesse trabalho. Notemos que pelo item (a) da proposição acima, todo conjunto de controle é efetivo no caso de $\text{int}S$ ser denso em S.

Lema 1.1. *Seja D um conjunto de controle para S em M. Valem as seguintes afirmações:*
i)Se D é S-invariante, então D é fechado.
ii)Se D é S^{-1}-invariante, então D é aberto.

Demonstração: i) Primeiramente notemos que $\text{fe}(D)$ certamente tem interior não vazio. Também, dado $z \in \text{fe}(D)$ e $g \in \text{int}S$, $gz \in (\text{int}S)z$ e como g age em M como um difeomorfismo, existe $y \in D$ tal que $gy \in (\text{int}S)z$, ou seja, dado $z \in \text{fe}(D)$, existe $y \in D$ satisfazendo $Sy \cap Sz \neq \varnothing$. Sendo D S-invariante, temos que $D \cap Sz \neq \varnothing$. Seja x nessa interseção. Temos então que $D \subseteq \text{fe}(Sx) \subseteq \text{fe}(Sz)$ e consequentemente $\text{fe}(D) \subseteq \text{fe}(Sz)$ para todo $z \in \text{fe}(D)$. Portanto, $\text{fe}(D)$ satisfaz i) e ii) da Definição 1.1 o que força $D = \text{fe}(D)$ pela maximalidade de D.

ii) Segue diretamente da Proposição 1.1 item (b).

■

Existe uma ordem entre os conjuntos de controle a qual é dada pela relação $D_1 < D_2$ se, e somente se, existe $x \in D_1$ tal que $\text{fe}(Sx) \cap D_2 \neq \varnothing$. Essa é uma ordem parcial que não é, em geral, total. Com respeito a essa ordem, é fácil mostrar utilizando o lema acima que um elemento maximal é dado por um conjunto de controle S-invariante e um minimal por um conjunto S^{-1}-invariante. Pela proposição anterior eles são efetivos.

Nem toda ação de semigrupos admite conjuntos de controle. Por exemplo as órbitas do semigrupo $\{\phi_t(x) = x + t\}$ agindo sobre a reta real. Tais órbitas vão a frente do seu valor inicial e portanto não pode existir um conjunto de controle com a definição dada acima.

Proposição 1.2. *Seja $K \subseteq M$ um subconjunto compacto e S-invariante. Então, para todo $x \in K$, existe um conjunto de controle C, S-invariante tal que $C \subset \text{fe}(Sx)$.*

Demonstração: Seja $x \in K$ e seja

$$\mathcal{I} = \{D \subset M; D \text{ é } S\text{-invariante e } \text{fe}(Sy) \subset D, \forall y \in D\}.$$

Temos que $\mathcal{I}$ é não vazio, pois $\text{fe}(Sx)$ está em $\mathcal{I}$. Ordenemos $\mathcal{I}$ da seguinte forma, $D_1 < D_2$ se, e somente se, $D_2 \subset D_1$. Esta é uma ordem parcial em $\mathcal{I}$. Seja então $\mathcal{J}$ um conjunto totalmente ordenado e tome

$$D_0 = \bigcap_{D \in \mathcal{J}} D.$$

D_0 é não vazio, pois $\mathcal{J}$ é totalmente ordenado. Além disso, D_0 é S-invariante, pois cada D satisfaz essa propriedade e certamente, para todo $y \in D_0$ vale $\text{fe}(Sy) \subseteq D_0$. Então, D_0 acima é uma cota maximal de $\mathcal{J}$ e podemos aplicar o lema de Zorn para garantir um elemento maximal $C \in \mathcal{I}$. Como $C \in \mathcal{I}$, temos que $\text{fe}(Sy) \subseteq C$ para todo $y \in C$. Por outro lado, $\text{fe}(Sy) \in \mathcal{I}$ para todo $y \in C$, então pela forma como ordenamos $\mathcal{I}$ devemos ter $C \subseteq \text{fe}(Sy)$, ou seja, $C = \text{fe}(Sy)$ para todo $y \in C$. A partir disso é imediato que $C \subseteq \text{fe}(Sx)$ para x dado no início e que C é um conjunto de controle invariante.

■

Ainda com respeito a existência dos conjuntos de controle invariantes, temos o resultado abaixo.

Proposição 1.3. *Suponha que $C = \bigcap_{x \in M} \text{fe}(Sx) \neq \varnothing$. Então C é o único conjunto de controle invariante para S em M.*

Demonstração: Notemos inicialmente que a S-invariância vem do fato de que a restrição da ação de G em M para cada $g \in G$ é no mínimo um homeomorfismo e temos portanto que

$$gC = g \bigcap_{x \in M} \text{fe}(Sx) = \bigcap_{x \in M} g\text{fe}(Sx) = \bigcap_{x \in M} \text{fe}(gSx) \subseteq \bigcap_{x \in M} \text{fe}(Sx) = C$$

A partir disso, se $C \neq \varnothing$, tomando $z \in C$ temos que $(\text{int}S)z$ é um aberto não vazio contido em C e a primeira condição da definição 1.1 é satisfeita. Além disso é facil ver que $C \subseteq \text{fe}(Sx)$ para todo $x \in M$, em particular C satisfaz também satisfaz a condição ii).

Quanto a maximalidade, esta vem do fato de que, sendo C um conjunto S-invariante sabemos que C é fechado e portanto $C = \text{fe}(Sx)$ para todo $x \in C$. Consequentemente, se D é um outro conjunto contendo C e satisfazendo i) e ii) da definição 1.1, devemos ter que $D \subseteq \text{fe}(Sx) = C$ para qualquer $x \in C$. Portanto C é um conjunto de controle S-invariante. A unicidade segue do fato de que se D é outro conjunto de controle S-invariante, temos que $D = \text{fe}(Sx)$ para todo $x \in D$ e portanto $C \subseteq D$ o que implica a igualdade como visto acima.

■

Este resultado possui o seguinte corolário:

Corolário 1.1. *Suponha que* $C = \bigcap_{x \in M} \mathrm{fe}(Sx) \neq \varnothing$ *é o único conjunto de controle invariante. Suponha também que exista um* S^{-1} *conjunto de controle, digamos* C^-*, tal que* $(\mathrm{int}C) \cap (\mathrm{int}C^-) \neq \varnothing$*. Então,* S *é transitivo em* M*.*

Demonstração: Sendo C S-invariante, ele é efetivo. Seja então $x \in C_0$. Temos que $x \in (\mathrm{int}S)^{-1}x$ e que $x \in \mathrm{fe}(Sy)$ para todo $y \in M$. Assim, $(\mathrm{int}S)^{-1}x \cap Sy \neq \varnothing$ e então $x \in Sy$ para todo $y \in M$, ou seja, $S^{-1}x = M$. Como C_0 é denso em C, seja $x \in (\mathrm{int}C^-) \cap C_0$. Temos então que $S^{-1}x = M$ e sendo C^- S^{-1}-invariante, temos que $C^- = M$ o que implica que $SC^- \subseteq C^-$ e pela proposição 1.1 temos que $C_0^- = C^- = M$ o que nos mostra que S^{-1} é transitivo e consequentemente S também o é.

■

Proposição 1.4. *Suponha* $g \in \mathrm{int}S$ *e seja* Ω *o conjunto minimal para a* g*-ação sobre* M*. Então existe um conjunto de controle efetivo* D *para* S *tal que* $\Omega \subseteq \mathrm{int}D$*. Em particular os pontos fixados por* g *estão no interior do conjunto de controle.*

Demonstração: Consideremos o conjunto $\mathcal{I} = \{B \subset M;\, \Omega \subset B \text{ e } B \subset \mathrm{fe}(Sx)\, \forall x \in B\}$. Tal conjunto é não vazio, pois o próprio Ω é um elemento. Ordenemos $\mathcal{I}$ pela inclusão e tomemos $\mathcal{J}$ um subconjunto em $\mathcal{I}$ totalmente ordenado. Seja

$$B_0 = \bigcup_{B \in \mathcal{J}} B.$$

Temos que $\Omega \subset B_0$ e dado $x \in B_0$, existe $B \in \mathcal{J}$ de modo que $x \in B$. Agora, dado um elemento $B' \in \mathcal{J}$ qualquer, temos que $B \subset B'$ ou $B' \subset B$, pois $\mathcal{J}$ é totalmente ordenado. Mas então, como tais elementos estão em $\mathcal{I}$, devemos ter $B' \subset \mathrm{fe}(Sx)$, ou seja, $B_0 \subset \mathrm{fe}(Sx)$. Como x em B_0 era arbitrário, devemos ter que $B_0 \subset \mathrm{fe}(Sx)$ para todo $x \in B_0$ e portanto $B_0 \in \mathcal{I}$ é uma cota superior para $\mathcal{J}$. Assim, o Lema de Zorn nos garante que existe $D \in \mathcal{I}$ elemento maximal. Apenas resta mostrar que o conjunto D tem interior não vazio para que este seja um conjunto de controle, pois este já satisfaz a condição (ii) da definiçao 1.1 e é maximal por construção.

Consideremos então $x \in \Omega$. O conjunto $\{g^n x;\, n \in \mathbb{Z}\}$ é denso em Ω. Como $(\mathrm{int}S)x \cap \Omega \neq \varnothing$, tomemos y nessa interseção. Então, existe uma sequência (g^{n_k}) que converge para y e tal sequência pode ser tomada de modo que $n_k \leq 0$. De fato, sendo o conjunto $\{g^n x;\, n \in \mathbb{Z}\}$ denso em Ω, existe uma sequência que converge para y, indexada nos inteiros. Basta então tomar a subsequência indexada somente pelos elementos negativos que temos a sequência desejada. Assim, existe $n_{k_0} \leq 0$ que satisfaz $g^{n_{k_0}} x \in (\mathrm{int}S)x$ e portanto $x \in (\mathrm{int}S)x$, ou seja, $x \in D_0$. Como x era arbitrário, temos $\Omega \subset D_0 \subset \text{int}D$, concluindo a demonstração.

■

Um outro aspecto dos conjuntos de controle que devemos comentar é seu comportamento sobre fibrações equivariantes. Sejam $L_1 \subseteq L_2$ subgrupos fechados de G e consideremos os espaços quocientes G/L_1, G/L_2. Existe uma fibração natural

$$\pi : G/L_1 \longrightarrow G/L_2$$

que leva as classes de G/L_1 em classes de G/L_2. Do fato de $L_1 \subseteq L_2$, segue que a ação é equivariante, ou seja, $\pi \circ g = g \circ \pi$ para todo $g \in G$. É claro que toda fibração entre espaços homogêneos pode ser vista na forma acima, a menos de composição por um difeomorfismo.

Proposição 1.5. *Sejam S, G e $\pi : G/L_1 \longrightarrow G/L_2$ como definidos anteriormente. Suponha que $D \subseteq G/L_1$ é um conjunto de controle efetivo para S em G/L_1 e seja D_0 seu conjunto de transitividade. Então, existe um conjunto de controle efetivo E para S em G/L_2 satisfazendo $\pi(D_0) \subseteq E_0$.*

Demonstração: Seja $x \in D_0$ e $g \in \text{int}S$ satisfazendo $gx = x$. Pela invariância de π, temos $g\pi(x) = \pi(gx) = \pi(x)$ e então pela Proposição 1.4, $\pi(x)$ está em algum conjunto de controle E que é efetivo. Seja $y \in D_0$ qualquer. A transitividade de int$S$ em D_0, implica que existem g_1 e g_2 em int$S$ satisfazendo $g_1x = y$ e $g_2y = x$. Consequentemente, $g_1\pi(x) = \pi(y)$ e $g_2\pi(y) = \pi(x)$ e devemos ter então $\pi(y)$ em E, pois do contrário este não seria maximal. A partir disto concluímos que $\pi(y)$ deve estar em E_0, pois como $g_2\pi(y) = \pi(x)$, temos que $g_1g_2\pi(y) = g_1\pi(x) = \pi(y)$ e $g_1g_2 \in \text{int}S$ concluindo assim que $\pi(D_0) \subseteq E_0$.

■

Para conjuntos de controle invariantes, esse resultado torna-se mais preciso.

Proposição 1.6. *Seja $\pi : G/L_1 \longrightarrow G/L_2$ uma fibração equivariante com G/L_1 compacto. Valem então as seguintes afirmações:*

a) Suponha que $C_1 \subseteq G/L_1$ é um conjunto de controle S-invariante. Então, $C_2 = \pi(C_1)$ é um conjunto de controle S-invariante para S em G/L_2;

b) Se $C_2 \subseteq G/L_2$ é um conjunto de controle S-invariante, existe um conjunto de controle S-invariante $C_1 \subseteq G/L_1$ tal que $\pi(C_1) = C_2$;

c) Para C_1 e C_2 como em a), suponha também que para algum $y \in C_2$, tem-se $\pi^{-1}(\{y\}) \subseteq C_1$. Então $\pi^{-1}(C_2) = C_1$.

Demonstração: a) Pela proposição anterior, temos que existe um conjunto de controle C_2 para S em G/L_2 satisfazendo $\pi((C_1)_0) \subseteq (C_2)_0$. Sendo

C_1 S-invariante, sabemos que se $x \in (C_1)_0$, então $C_1 = \mathrm{fe}(Sx)$. Sendo ainda π fechada, contínua e equivariante, temos que $\pi(C_1) = \pi(\mathrm{fe}(Sx)) = \mathrm{fe}(S\pi(x))$ e estando $\pi(x)$ em $(C_2)_0$, concluímos que $C_2 \subset \pi(D)$. Pela maximalidade de C_2, devemos ter que $C_2 = \pi(C_1)$ é um conjunto de controle S-invariante, concluindo assim a).

b) Sendo que C_2 é S-invariante, temos que C_2 é fechado e portando $\pi^{-1}(C_2)$ é compacto. Além disso, dado $g \in S$ e $x \in \pi^{-1}(C_2)$, $\pi(gx) = g\pi(x) \in C_2$ o que implica $gx \in \pi^{-1}(C_2)$, ou seja, $\pi^{-1}(C_2)$ é S-invariante. Então, pela Proposição 1.2 existe um conjunto de controle S-invariante C_1 contido em $\pi^{-1}(C_2)$. Dado $x \in C_1$, a invariância implica $\pi(C_1) = \pi(\mathrm{fe}(Sx)) = \mathrm{fe}(S\pi(x)) = C_2$

c) Seja y dado pela hipótese e tomemos $z \in (C_2)_0$. Pela propsição 1.1 item (b), existe $g \in \mathrm{int}S$ satisfazendo $gy = z$. Então, $g\pi^{-1}(\{y\}) = \pi^{-1}(\{z\})$. Como $\pi^{-1}(\{y\}) \subseteq C_1$ e C_1 é S-invariante, temos que $\pi^{-1}(\{z\}) \subseteq C_1$ e portanto $\pi^{-1}((C_2)_0) \subseteq C_1$. Como $(C_2)_0$ é denso em C_2 e C_1 é fechado, o resultado segue. ∎

Exemplo: (a) Seja $G = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ e $S \subset G$ o semigrupo de interior não vazio dado pelas matrizes de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ cujas entradas são não negativas. Consideremos a ação usual de G em $\mathbb{R}P^{n-1}$ dada por $g[v] = [gv]$ com $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ e $g \in G$ e onde $[v]$ denota o subespaço gerado por v. O conjunto

$$C = \{[x_1, \cdots, x_n] \in \mathbb{R}P^{n-1}; x_i \geq 0\}$$

é o conjunto de controle invariante para S.

De fato, seja $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, \cdots, y_n)$ com x_i e y_i estritamente positivos. Então, tomando $g = \delta \mathrm{diag}(y_1/x_1, \cdots, y_n/x_n)$ com $\delta = x_1 \cdots x_n / y_1 \cdots y_n$, temos que $g[x] = [y]$. Segue então que, para $[x] \in \mathrm{int}C$, $\mathrm{fe}(S[x]) = C$. Como para todo $[x] \in C$ existe $g \in S$ satisfazendo $g[x] \in \mathrm{int}C$, temos que $\mathrm{fe}(S[x]) = C$ para todo $[x] \in C$ e é portanto o conjunto de controle invariante.

Notemos que C_0 é exatamente $\mathrm{int}C$, pois a identidade de G está em $\mathrm{fe}(\mathrm{int}S)$.

(b) Com o mesmo semigrupo e grupo acima, tomemos a ação de G em S^{n-1}. Como em (a) podemos mostrar que o conjunto de S^{n-1}, C^+, cujas entradas são não negativas, é um conjunto de controle invariante para S. Analogamente, $C^- = -C^+$ é também um conjunto de controle S-invariante. Tomando $\pi : S^{n-1} \to \mathbb{R}P^{n-1}$ a aplicação que identifica os antípodas, temos que $\pi(C^+) = \pi(C^-)$ é o conjunto de controle S-invariante em $\mathbb{R}P^{n-1}$. Veremos mais adiante que temos que C^+ e C^- são na verdade os únicos conjuntos de controle invariante para S em S^{n-1}.

(c) Se tomarmos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e considerarmos o semigrupo em $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$ gerado por $\exp tA$ e $\exp \pm tB$, $t \geq 0$, temos que S tem interior não vazio em $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$, pois A e B geram sua álgebra de Lie. Olhando o círculo S^1 como um espaço homogêneo de $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$, temos que o primeiro e o terceiro quadrantes são S-invariantes. Como $\exp \pm tB$, $t \geq 0$ conecta diferentes pontos com esses quadrantes, eles são conjuntos de controle invariantes para S. Esses são de fatos os únicos conjuntos de controle.

Capítulo 2

Conjuntos de Controle em Flags Maximais

A partir desta seção, G denotará um grupo de Lie semi-simples conexo, com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Para os nossos propósitos, não há perda de generalidade se assumirmos que G tenha centro finito, isto porque iremos trabalhar com ações de semigrupos em G-espaços homogêneos, os quais são obtidos através da ação adjunta de G em $\mathfrak{g}$. Então não há perda de generalidade se assumirmos de fato que G é seu grupo adjunto e portanto sem centro.

Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{r}$ uma decomposição de Cartan com $\mathfrak{k}$ a subálgebra compacta maximal de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{r}$ seu complemento ortogonal com respeito a forma de Cartan-Killing. Seja também $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{r}$ um subespaço abeliano maximal. Tal subespaço é decomposto em câmaras de Weyl. Tomemos uma delas e denotemo-la por $\mathfrak{a}^+$. Associado a estas escolhas, existem o sistema de raízes positivas Π^+, o qual é o subconjunto das raízes que são estritamente positivas em $\mathfrak{a}^+$. Denotamos por $\sum$ o conjunto das raízes simples associadas.

Para uma raiz α, temos

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g}; \mathrm{ad}(H)X = \alpha(H)X, \forall H \in \mathfrak{a}\}$$

o espaço de raiz associado a α. A subálgebra

$$\mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha$$

é nilpotente e decompõe $\mathfrak{g}$, segundo Iwasawa, como

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$$

Denotemos por $A = \exp \mathfrak{a}$ e o denominaremos *subgrupo vetorial.* Esse é um subgrupo abeliano de G e como variedade, difeomorfa a um espaço Euclidiano.

Colocaremos também $A^+ = \exp \mathfrak{a}^+$. Essa é uma câmara positiva em G. A decomposição global de Iwasawa se escreve como $G = KAN^+$ onde $K = \exp \mathfrak{k}$ é um subgrupo compacto, se G possui centro finito, e $N^+ = \exp \mathfrak{n}^+$. Denotaremos por M o centralizador de $\mathfrak{a}$ (ou A) em K e por M^* o seu normalizador, isto é,

$$M = \{u \in K; \mathrm{Ad}(u)H = H \quad \forall H \in \mathfrak{a}\} = \{u \in K; uhu^{-1} = h \quad \forall h \in A\}$$

e

$$M^* = \{u \in K; \mathrm{Ad}(u)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\} = \{u \in K; uAu^{-1} = A\}.$$

O grupo finito $W = M^*/M$ é o grupo de Weyl do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Denotaremos por $\mathfrak{m}$ a álgebra de Lie de M. O subespaço $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$ denominada *subálgebra parabólica minimal*. Esta é a álgebra de Lie do subgrupo de Lie $P = MAN^+$, que é denominado *subgrupo parabólico minimal*. Além disso, P é seu próprio normalizador e também o normalizador de $\mathfrak{p}$ em G. O nosso objeto de estudo serão ações de semigrupos de G sobre o espaço homogêneo $B = G/P$ denominado *flag maximal*. Como P é o normalizador de $\mathfrak{p}$, o espaço homogêneo G/P pode ser visto como a órbita de $\mathfrak{p}$ dada pela ação de G sobre a Grassmaniana dos subespaços de $\mathfrak{g}$ com a mesma dimensão de $\mathfrak{p}$. Tal espaço homogêneo pode também ser visto como o subconjunto dos subgrupos de G conjugados a P que é o subconjunto dos subgrupos parabólicos minimais de G. Feitas essas considerações, podemos pensar nos elementos de G/P como subálgebras parabólicas minimais ou subgrupos parabólicos minimais da seguinte maneira, $gP \in G/P \leftrightarrow gPg^{-1} \leftrightarrow \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{p}$. Também podemos identificar $b \in G/P$ com seu subgrupo de isotropia ou com sua álgebra de isotropia. Denotaremos ainda a origem de B por b_0 e por $\tilde{\omega}b_0$ onde $\omega \in W$ e $\tilde{\omega}$ denota um de seus representantes em M^*. Notemos que pelas identificações anteriores, $\tilde{\omega}b_0$ é identificado com MAN^+_ω ou $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+_\omega$, onde $N^+_\omega = \tilde{\omega}N^+\tilde{\omega}^{-1}$ e $\mathfrak{n}^+_\omega = \mathrm{Ad}(\tilde{\omega})\mathfrak{n}^{\,+}$.

Se restringirmos a ação de G a K, temos ainda uma ação transitiva e como um K-espaço homogêneo, temos $B = K/M$, o que nos mostra que B é compacto.

Convém relembrar que as escolhas das subálgebras e subgrupos feitas anteriormente não é única. No entanto, quaisquer duas escolhas distintas dessas são obtidas uma da outra por conjugação de algum elemento de $g \in G$. Sendo assim, nos referiremos as escolhas feitas previamentes como canônicas.

Discutiremos agora duas fibrações equivariantes entre G-espaços homogêneos que serão úteis quando levarmos em conta tais conjugações.

O produto MA é um subgrupo fechado de G. Se formarmos o espaço homogêneo G/MA, existe uma fibração natural

$$G/MA \longrightarrow G/MAN^+.$$

Geometricamente, G/MA pode ser visto como o conjunto das câmaras de Weyl em $\mathfrak{g}$ ou em G. Isto porque MA é o subgrupo de G que fixa a câmara $\mathfrak{a}^+$ ou A^+. A partir dessa interpretação, a fibração anterior pode ser vista como a aplicação que para uma dada câmara em $\mathfrak{g}$, ou G, associa a única subálgebra parabólica, ou subgrupo, que contém a câmara dada como positiva. Notemos também que, pelo fato de que MA normaliza N^+, o subgrupo N^+ é transitivo na fibra de $b_0 = MAN^+$. Isso nos mostra que cada câmara positiva de $P = MAN^+$ é da forma nA^+n^{-1} com $n \in N^+$.

O produto M^*A é também um subgrupo fechado de G contendo MA. Se formarmos então o espaço homogêneo G/M^*A, existe uma fibração natural equivariante

$$G/MA \longrightarrow G/M^*A.$$

Geometricamente o espaço homogêneo G/M^*A pode ser visto como o conjunto das subálgebras abelianas maximais de $\mathfrak{g}$, ou dos subgrupos vetorias de G. Isso porque M^*A é o normalizador de $\mathfrak{a}$, ou A, em G. Com essa interpretação, a fibração acima leva uma dada câmara em G/MA na subálgebra abeliana maximal ou subgrupo vetorial contendo ela.

Sendo MA normal em M^*A temos que a fibração $G/MA \longrightarrow G/M^*A$ define G/MA como um fibrado principal sobre G/M^*A com grupo dado por $M^*A/MA \approx M^*/M = W$, o grupo de Weyl. Assim, essa fibração é um recobrimento e existe uma ação natural à direita de W em G/MA dada por $(gMA)\omega = g\tilde{\omega}MA$, $g \in G$, $\omega \in W$ e $\tilde{\omega}$ é um representante para ω em M^*. Em termos das interpretações dadas acima essa ação a direita pode ser vista da seguinte maneira.

Seja $\alpha^+ = gMA \in G/MA$ uma câmara e $\alpha \in G/M^*A$ o subgrupo vetorial contendo ela. Temos que $\alpha^+ = gA^+g^{-1}$ e $\alpha = gAg^{-1}$. O normalizador de α em gKg^{-1} é dado por gM^*g^{-1} e seu centralizador em gKg^{-1} é dado por gMg^{-1}. Seja $\omega \in W$ e $\tilde{\omega}$ um seu representante em M^*. Temos

$$\alpha^+\omega = (gMA)\omega = g\tilde{\omega}MA$$

e isso pode ser expresso como

$$(g\tilde{\omega})A^+(g\tilde{\omega})^{-1} = (g\tilde{\omega}g^{-1})(gA^+g^{-1})(g\tilde{\omega}g^{-1})^{-1}.$$

Então $\omega \in W$ age em α^+ como um elemento do grupo de Weyl de α, que é obtido conjugando-se M e M^* por g. Isso mostra que a conjugação por g nos dá um isomorfismo entre os grupos de Weyl de A e ω. Esse isomorfismo não depende do g específico que leva A^+ em α^+, mas ele muda se câmaras diferentes são consideradas em A e em α.

Nossa análise das ações de semigrupos sobre B será baseado na dinâmica das ações de elementos dentro dos subgrupos vetoriais. Para isso necessitamos de um resultado bem conhecido.

Teorema 2.1. *(Bruhat) Se $G = KAN^+$ é uma decomposição de Iwasawa então o número de órbitas de N^- em B é finito e são as que passam pelos pontos $\tilde{\omega}b_0$, com $\tilde{\omega} \in M^*$ um representante de $\omega \in W$. Isto é,*

$$B = \bigcup_{\omega \in W} N^- \tilde{\omega} b_0$$

A demonstração do teorema acima será omitida e pode ser encontrada em [1]

O conjunto N^- acima é o subgrupo oposto de N^+, isto é, $N^- = \exp \mathfrak{n}^-$, onde $\mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$, ou equivalentemente, $N^- = \omega_- N^+ \omega_-^{-1}$, onde $\omega_- \in W$ é o único elemento de W que leva $\mathfrak{a}^+$ em $-\mathfrak{a}^+$. As variedades $N^-\tilde{\omega}b_0$ são denominados células de Bruhat e são disjuntas. Existe apenas uma dela que é aberta e densa em B e é dada por $N^- b_0$.

Seja $h \in A^+$ considerado como um difeomorfismo de B. Utilizando o teorema acima é facil mostrar que tal elemento possui tantos pontos fixos em B quantos são os elementos de W. De fato, dado $\omega \in W$, seja $\tilde{\omega} \in M^*$ um seu representante. Então, sendo M^* o normalizador de A, temos que $h\tilde{\omega}b_0 = \tilde{\omega}\tilde{h}b_0 = \tilde{\omega}b_0$, onde $\tilde{h} \in A$. Portanto, todo elemento da forma $\tilde{\omega}b_0$ é ponto fixo de h. Reciprocamente, dado $x \in B$ satisfazendo $hx = x$ existe, pelo teorema de Bruhat, $w \in W$ tal que $x \in N^-\tilde{\omega}b_0$ com $\tilde{\omega} \in M^*$, ou seja, $x = n_0\tilde{\omega}b_0$. Como h fixa $\tilde{\omega}b_0$, seu inverso também fixa e portanto temos $h^k n_0 h^{-k}\tilde{\omega}b_0 = n_0\tilde{\omega}b_0$ para todo k inteiro. Mas, $h^k n_0 h^{-k} \to 1$ e portanto $x = \tilde{\omega}b_0$.

Além disso, os pontos $\tilde{\omega}b_0$ são hiperbólicos e suas variedades estáveis são exatamente as células de Bruhat $N^-\tilde{\omega}b_0$ para cada $\omega \in W$. O elemento b_0 é então o atrator, já que sua variedade estável é aberta e densa.

Iremos usar a bijeção entre os elementos do grupo de Weyl e os pontos fixos de h para denominá-los. Diremos que $\tilde{\omega}b_0$ é o h-ponto fixo do tipo ω, onde b_0 é o atrator. As conjugações de h por elementos de G também produzem um comportamento semelhante se conjugarmos tudo pelo mesmo elemento. Em particular, o ponto fixo do tipo ω para ghg^{-1}, $g \in G$ e $h \in A^+$ é $g\tilde{\omega}b_0 = (g\tilde{\omega}g^{-1})(gb_0)$, que é a imagem do atrator gb_0 sob um elemento do grupo de Weyl de gAg^{-1}, identificando ω pelo isomorfismo entre os grupos de Weyl discutido acima.

Consideremos S um semigrupo de G de interior não vazio. Temos os seguintes resultados.

Teorema 2.2. *Seja B o flag maximal de G e considere a ação natural sobre B. Então existe apenas um conjunto de controle maximal que é o S-invariante.*

Provaremos esse teorema exibindo a existência de um $b_0 \in B$ com $b_0 \in$ fe(Sb) para todo $b \in B$ e então o resultado segue da Proposição 1.3.

Para achar b_0 como acima, necessitamos do seguinte lema:

Lema 2.1. *Existe uma decomposição de Iwasawa* $\mathfrak{g}=\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$ *de* $\mathfrak{g}$ *e* $H \in \mathfrak{a}$ *de modo que* $h = exp\ H \in \mathrm{int}S$. *Além disso,* H *pode ser escolhido sendo* $\mathfrak{a}$*-regular no sentido de que* $\lambda(H) \neq 0$ *para toda raiz* λ.

Notemos que mudando $\mathfrak{n}^+$ se necessário podemos assumir que H está na câmara de Weyl positiva que está implícita na decomposição de Iwasawa.

Demonstração: Como int$S \neq \varnothing$ ele contém um elemento regular de G e portanto int$S$ intercepta algum subgrupo de Cartan [7]. Denotemos tal subgrupo por J e seja $\mathfrak{j}$ sua álgebra de Lie. J é o centralizador de $\mathfrak{j}$ em G que é uma subálgebra abeliana de $\mathfrak{g}$.

Também é demonstrado em [7] que existe uma decomposição de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{r}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{j}$ se decompõe como $\mathfrak{j} = \mathfrak{j} \cap \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{j} \cap \mathfrak{r} = \mathfrak{j}_{\mathfrak{k}} \oplus \mathfrak{j}_{\mathfrak{r}}$.

Seja $K = \exp \mathfrak{k}$ e $J_K = K \cap J$. Como estamos assumindo que G tem centro finito, J_K é um subgrupo compacto de G. Também, J admite a decomposição $J = J_K(\exp \mathfrak{j}_{\mathfrak{r}})$ [7].

Definimos a subconjunto σ de J_K por, $u \in \sigma$ se, e somente se, existe $g \in \mathrm{int}S \cap J$ satisfazendo $g = uh$ para $h \in \exp \mathfrak{j}_{\mathfrak{r}}$. Como nesta decomposição u comuta com h, σ é um semigrupo de interior não vazio em J_K e sendo este compacto, σ tem que conter a componente da identidade e então, $\mathrm{int}S \cap \exp \mathfrak{j}_{\mathfrak{r}} \neq \varnothing$.

Agora, tomando $\mathfrak{a}$ o abeliano maximal em $\mathfrak{r}$ contendo $\mathfrak{j}_{\mathfrak{r}}$. Temos que $\mathrm{int}S \cap \exp \mathfrak{a} \neq \varnothing$ e sendo o conjunto dos elementos regulares denso em $\mathfrak{a}$, o lema segue.

■

Demonstraremos agora o Teorema 2.2;

Demonstração: Seja $G = KAN^+$ a decomposição de Global de Iwasawa dada pelo lema acima. Se M denota o centralizador de A em K, então $P = MAN^+$ é um subgrupo parabólico minimal e B pode ser visto como o quociente G/P. Denotemos como sempre $b_0 = P$. Pelo teorema de decomposição de Bruhat, N^-b_0 é denso em B, então dado $b \in B$, existe $g \in S$ de modo que $gb \in N^-b_0$. Então, existe $n \in N^-$ tal que $gb = nb_0$. Tomando h regular, dado também pelo lema acima, temos que $h^k b = h^k n h^{-k} b_0$ e como $h^k n h^{-k} \to 1$, quando $k \to \infty$, temos que $h^k b \to b_0$ e portanto $b_0 \in$ fe(Sb) demonstrando o teorema.

■

Consideremos uma decomposição de Iwasawa para G e suponhamos que $\text{int}S \cap A \neq \varnothing$. Seja então

$$\Gamma = \{H \in \mathfrak{a};\ \exp tH \in \text{int}S \text{ para algum } t > 0\}.$$

Temos que Γ é um cone convexo. De fato, dado $H \in \Gamma$ existe $t_1 > 0$ tal que $\exp t_1 H \in \text{int}S$. Então, para todo $t > 0$ podemos tomar $t' = t_1/t > 0$ que temos $tH \in \Gamma$. Para a demonstração de que Γ é convexo tomemos $H \in \Gamma$. Então, existe um intervalo (a, b) tal que $\exp tH \in \text{int}S$ para $t \in (a, b)$. Assim, $\exp tH \in \text{int}S$ para $t \in (ka, kb)$ para k inteiro positivo. Então, se k é grande o suficiente temos $ka < (k-1)b$ e portanto existe $T > 0$ tal que $\exp tH \in \text{int}S$ se $t > T$. Seja então H_1, H_2 tais que $\exp t_1 H_1, \exp t_2 H_2 \in \text{int}S$. Então, sendo A abeliano,

$$\exp t_1 H_1 \exp t_2 H_2 = \exp(t_1 + t_2)\left(\frac{t_1}{t_1 + t_2} H_1 + \frac{t_2}{t_1 + t_2} H_2\right) \in \text{int}S.$$

e portanto $(t_1/t_1 + t_2)H_1 + (t_2/t_1 + t_2)H_2 \in \Gamma$. Fazendo $t_1 \to \infty$ e mantendo t_2 fixo, e vice e versa, obtemos que Γ é convexo.

Definimos

$$\Lambda = \{h \in A; \exists \in N^+ \text{com } hn \in \text{int}S\}$$

Como A normaliza N^+, temos que Λ é um semigrupo aberto de A. Definimos também,

$$\tilde{\Lambda} = \{H \in \mathfrak{a}\ ;\ \exp tH \in \Lambda \text{ para algum } t > 0\}.$$

Temos que $\Gamma \subset \tilde{\Lambda}$ e assim como Γ, $\tilde{\Lambda}$ é um cone em $\mathfrak{a}$.

Da demonstração do Teorema 2.2 temos que se $\mathfrak{a}^{\,+}$ é a câmara de Weyl positiva, implícita na decomposição de Iwasawa, então $b_0 \in C_0$ já que $\Gamma \cap \mathfrak{a}^+ \neq \varnothing$. O mesmo acontece caso $\Lambda \cap \mathfrak{a}^+ \neq \varnothing$ como mostraremos mais a frente.

Lema 2.2. *Consideremos as notações acima e seja C o único conjunto de controle S-invariante em B. Suponhamos que $b_0 \in C_0$ e que $A \cap \text{int}S \neq \varnothing$. Suponhamos também que um dado $\omega \in W$ satisfaz $\tilde{\omega} b_0 \in C_0$. Então $\omega^{-1}(\Gamma) \subset \tilde{\Lambda}$.*

Demonstração: Seja $b' = \tilde{\omega} b_0$ e N_ω definido como antes. Então, o subgrupo de isotropia de b' é dado por $P_\omega = MAN_\omega^+$. Como b_0 e b' estão em C_0, existem g e g' em $\text{int}S$ satisfazendo $g' b_0 = b'$ e $gb' = b_0$. Tomando a decomposição de g e g' em KAN_ω^+ e KAN^+, respectivamente, temos $g = \tilde{\omega}^{-1} m_1 h_1 n_1$ e $g' = \tilde{\omega} m_2' h_2' n_2'$, com $m_1, m_2' \in M$, $h_1, h_2' \in A$, $n_1 \in N_\omega^+$ e $n_2' \in N^+$. Podemos ainda reescrever $g' = m_2 h_2 n_2 \tilde{\omega}$, onde $m_2 = \tilde{\omega} m_2' \tilde{\omega}^{-1} \in M$, $h_2 = \tilde{\omega} h_2' \tilde{\omega}^{-1} \in A$ e $n_2' = \tilde{\omega} n_2' \tilde{\omega}^{-1} \in N_\omega^+$.

Seja $H \in \Gamma$. Então, para $t > T$ e algum $T > 0$, $h_t = \exp tH \in \mathrm{int}S$ e portanto $gh_tg' \in \mathrm{int}S$. Temos,

$$gh_tg' = \tilde{\omega}^{-1}m_1h_1n_1h_tm_2h_2n_2\tilde{\omega} =$$

$$= \tilde{\omega}^{-1}\bar{m}h_th_1h_2\bar{n}\tilde{\omega}$$

com $\bar{n} \in N^+_\omega$. Tomando $\bar{h}_t = \tilde{\omega}^{-1}h_th_1h_2\tilde{\omega}$, temos

$$gh_tg' = m_0\bar{h}_tn_0 \in \mathrm{int}S$$

com $n_0 = \tilde{\omega}^{-1}\bar{n}\tilde{\omega}$.

Se fixarmos t e considerarmos o subconjunto

$$\sigma = \{m \in M; \exists n \in N^+ \text{e um inteiro } k; m\bar{h}_t^k n \in \mathrm{int}S\},$$

teremos que σ é um semigrupo de interior não vazio e como estamos assumindo G de centro finito deve conter a componente da identidade. Então, para algum inteiro k e algum $n \in N^+$, temos que $\bar{h}_t^k n \in \mathrm{int}S$ e portanto $\bar{H}_t = \log \bar{h}_t \in \tilde{\Lambda}$.

Notemos que como $\bar{H}_t = \omega^{-1}(\log h_th_1h_2)$ e como o raio definido por $\log h_th_1h_2$ se aproxima do raio definido por H quando $t \to \infty$, temos que o raio definido por $\bar{H}_t$ se aproxima do raio definido por $\omega^{-1}(H)$ e portanto $\omega^{-1}(H) \in \mathrm{fe}(\tilde{\Lambda})$.

Como o H escolhido anteriormente era arbitrário, temos que $\omega^{-1}(\Gamma) \subset \mathrm{fe}(\tilde{\Lambda})$, mas Γ e $\tilde{\Lambda}$ são abertos e portanto $\omega^{-1}(\Gamma) \subset \tilde{\Lambda}$.

■

Seja

$$\Delta = \{\alpha^+ \in G/MA; \alpha^+ \cap \mathrm{int}S \neq \varnothing\}.$$

Esse é o conjunto dos elementos em $\mathrm{int}S$ para os quais a ação em B possui um ponto fixo que atrai um conjunto aberto e denso. Tal conjunto nos permitirá caracterizar todos os conjuntos de controle efetivos em B. Notemos que pelo Lema 2.1, o conjunto Δ acima é não vazio.

Teorema 2.3. *Seja C o único conjunto de controle invariante para S em B e C_0 é seu conjunto de transitividade, então $C_0 = \pi(\Delta)$, onde $\pi : G/MA \to G/MAN^+$ é a projeção canônica.*

Demonstração: Dado $\alpha^+ \in \Delta$, como $\alpha^+ \cap \mathrm{int}S \neq \varnothing$, então dado h nessa interseção, podemos proceder como na demonstração do Teorema 2.2 e mostrar que $b = \pi(\alpha^+)$ está em fe(Sz) para todo z em B e portanto b está C e logo em C_0 pela definição deste. Então $\pi(\Delta) \subseteq C_0$.

Reciprocamente, dado $b \in C_0$, consideremos P a isotropia de b. Temos que $P \cap \text{int}S \neq \varnothing$. Tomemos uma decomposição de Iwasawa de G de modo que $P = MAN^+$. Consideremos o subconjunto de M dado por

$$\sigma = \{m \in M; \exists hn \in AN^+ \text{com } mhn \in \text{int}S\}.$$

Este é um semigrupo com interior não vazio de M, pois M normaliza AN^+. Como estamos assumindo G com centro finito, M é compacto e então σ contém a componente da identidade M. Assim, $\text{int}S \cap AN^+ \neq \varnothing$ e sendo o conjunto dos elementos regulares denso em AN^+, podemos encontrar $g = hn$ regular em int$S$ com h regular em A. Sendo h regular, existe n_0 tal que $n_0 h n_0^{-1} = hn$ e podemos então tomar a decomposição de P dada por $P = M_0 A_0 N^+$, onde $M_0 = n_0 M n_0^{-1}$ e $A_0 = n_0 A n_0^{-1}$. Seja então $\mathfrak{a}^+$ a câmara de Weyl positiva para essa decomposição.

Como o conjunto das câmaras de Weyl é denso em $\mathfrak{a}$, existe uma câmara $\mathfrak{a}^*$ satisfazendo $\mathfrak{a}^* \cap \Gamma \neq \varnothing$. Seja $\omega \in W$ o único elemento satisfazendo $\omega(\mathfrak{a}^+) = \mathfrak{a}^*$ e coloquemos $P_\omega = M_0 A_0 N_\omega^+$. Então, $P_\omega = \omega P \omega^{-1}$ e $\tilde{\omega} b = b^*$, se b^* corresponde a P_ω em B.

A câmara $\mathfrak{a}^*$ é positiva para P_ω e como $\mathfrak{a}^* \cap \Gamma \neq \varnothing$, $b^* \in C_0$. De fato, como $\mathfrak{a}^* \cap \Gamma \neq \varnothing$, temos que $A^* \cap \text{int}S \neq \varnothing$, onde $A^* = \exp \mathfrak{a}^*$. Assim, b^* atrai a variedade aberta e densa em B dada por $N_\omega^- b^*$ e portanto $C_0 \cap N_\omega^- b^* \neq \varnothing$, ou seja, $nb^* \in C_0$, já que este é não vazio e aberto. Mas tomando h regular em $\mathfrak{a}^* \cap \Gamma$ temos que $h^k n b^* = h^k n h^{-k} b^* \to b^*$ quando $k \to \infty$. Sendo C o conjunto S-invariante, temos que esta sequência converge em C, ou seja, $b^* \in C$. Na verdade, como h é um elemento em int$S$, temos que $b^* \in C_0$

Disso, $b^* = \tilde{\omega} b \in C_0$ e pelo Lema 2.2 temos que $\omega^{-1}(\Gamma) \subset \tilde{\Lambda}$. Mas, $\omega^{-1}(\mathfrak{a}^*) = \mathfrak{a}^+$ e portanto $\mathfrak{a}^+ \cap \tilde{\Lambda} \neq \varnothing$, ou seja, existe $\bar{n} \in N^+$ tal que $\bar{n} A^+ \bar{n}^{-1} \cap \text{int}S \neq \varnothing$, isto é, $\bar{n} A^+ \bar{n}^{-1} \in \Delta$ e além disso, $\pi(\bar{n} A^+ \bar{n}^{-1}) = b$, concluindo a demonstração. ■

Assim, o conjunto de controle invariante para S em B é essencialmente dado por aqueles pontos fixos para certos elementos em int$S$ que possuem uma variedade estável densa. Os outros conjuntos de controle são dados pelas outras classes de pontos fixos, como demonstraremos no teorema abaixo.

Teorema 2.4. *Para um dado $\omega \in W$,*

$$\pi(\Delta\omega)$$

está inteiramente contido em um conjunto de controle para S, onde π é a projeção.

Demonstração: Fixemos $b \in C_0$ e definimos

$$\nu(b,\omega) = \pi\left\{\alpha^+\omega \in G/MA; \alpha^+ \in \pi^{-1}(b) \cap \Delta\right\}.$$

Temos que

$$\pi(\Delta\omega) = \bigcup_{b \in C_0} \nu(b,\omega).$$

Então, para demonstrarmos o teorema devemos mostrar que:

i) $\nu(b,\omega)$ está contido em um conjunto de controle que denotaremos inicialmente por $D(b,\omega)$;

ii) Para b_1, $b_2 \in C_0$, temos que $D(b_1,\omega) = D(b_2,\omega)$.

Então:

Lema 2.3. *O conjunto $\nu(b,\omega)$ está contido em um conjunto de controle $D(b,\omega)$.*

Demonstração: Seja $b \in C_0$ e assumamos sem perda de generalidade que $b = b_0 = P$. Sejam α_1^+, α_2^+ elementos arbitrários de $\pi^{-1}(b_0) \cap \Delta$ e coloquemos $b_1 = \pi(\alpha_1^+\omega)$ e $b_2 = \pi(\alpha_2^+\omega)$. Devemos mostrar então que b_1 e b_2 estão no mesmo conjunto de controle para S.

Como α_1^+, α_2^+ são câmaras positivas em P, existe $n_0 \in N^+$ tal que $\alpha_2^+ = n_0\alpha_1^+$. Assim, $b_2 = \pi(\alpha_2^+\omega) = \pi(n_0\alpha_1^+\omega) = n_0\pi(\alpha_1^+\omega) = n_0 b_1$, pela equivariância da ação de G com relação a π. Portanto, b_1 e b_2 estão na mesma N^+-órbita. Seja então $h \in \alpha_1^+ \cap \mathrm{int}S$. Para todo inteiro k, temos

$$h^{-k}b_2 = h^{-k}n_0 b_1 = (h^{-k}n_0h^k)b_1.$$

Pela proposição 1.4, b_1 pertence ao interior de um conjunto de controle e como $h^{-k}n_0h^k \to 1$ quando $k \to \infty$, temos que o conjunto de controle contendo b_2 pode ser obtido do conjunto de controle contendo b_1. De fato, seja $D(b_1,\omega)$ e $D(b_2,\omega)$ os conjuntos de controle contendo b_1 e b_2 respectivamente. Então, para k suficientemente grande, $h^{-k}b_2 \in D(b_1,\omega) \subseteq \mathrm{fe}(Sz)$ para todo $z \in D(b_1,\omega)$ o que implica $b_2 \in \mathrm{fe}(Sz)$ e consequentemente $\mathrm{fe}(Sz) \cap D(b_2,\omega) \neq \varnothing$, ou seja, $D(b_1,\omega) < D(b_2,\omega)$. Revertendo o argumento, conseguimos que $D(b_1,\omega) = D(b_2,\omega)$ e portanto $\nu(b,\omega) \subseteq D(b,\omega)$ concluindo a demonstração. ■

Para provar ii) necessitamos do seguinte lema:

Lema 2.4. *Seja $b_1, b_2 \in C_0$. Então existe $\alpha^+ \in \pi^{-1}(b_1) \cap \Delta$ e $g \in \mathrm{int}S$ satisfazendo $gb_1 = b_2$ e $g\alpha^+ \in \pi^{-1}(b_2) \cap \Delta$.*

Demonstração: Sejam P_1 e P_2 os subgrupos de isotropia de b_1 e b_2, respectivamente e tomemos:

$$S_i = P_i \cap S \qquad i = 1, 2.$$

Esses são semigrupos de interior não vazio em P_1 e P_2, pois $b_1, b_2 \in C_0$. Assim, para se demonstrar o lema é suficiente mostrar a existência de $g \in \mathrm{int}S$ com $gb_1 = b_2$ tal que os conjuntos de P_2, $\mathrm{int}(gS_1g^{-1})$ e $\mathrm{int}(S_2)$ interceptem a mesma câmara positiva, digamos β^+, para P_2. De fato, se isto ocorre, $\beta^+ = g\alpha^+$ com α^+ positiva para P_1 satisfazendo as condições do lema.

Para mostrar a existência de um elemento g como acima, tomamos primeiro $\tilde{g} \in \mathrm{int}S$ satisfazendo $\tilde{g}b_1 = b_2$ que existe, pois $b_1, b_2 \in C_0$.

Tomemos então $\tilde{S}_1 = \tilde{g}S_1\tilde{g}^{-1}$. Esse é um semigrupo com interior não vazio em P_2. Para $u \in S_1$, $\tilde{g}u \in \mathrm{int}S$, $\tilde{g}ub_1 = b_2$ e

$$(\tilde{g}u)S_1(\tilde{g}u)^{-1} = (\tilde{g}u\tilde{g}^{-1})(\tilde{g}S_1\tilde{g}^{-1})(\tilde{g}u\tilde{g}^{-1})^{-1} = h\tilde{S}_1h^{-1}$$

com $h = \tilde{g}u\tilde{g}^{-1} \in \tilde{S}_1$. Então, para se encontrar um g da forma $g = \tilde{g}u, u \in S_1$ é suficiente encontrar $h \in \tilde{S}_1$ e uma câmara $\beta \in \pi^{-1}(b_2)$ tal que β intercepte o interior de $h\tilde{S}_1h^{-1}$ e S_2 simultaneamente.

Agora, pelo Teorema 2.3, S_1 intercepta uma câmara positiva para P_1 . Então $\tilde{S}_1$ intercepta uma câmara positiva para P_2. Denotaremos tal câmara por β_1^+. Pela mesma razão S_2 intercepta um câmara positiva, digamos β_2^+, positiva para P_2. Assumiremos sem perda de generalidade que $\beta_1 = A^+$ e que $P_2 = MAN^+$. Seja $h_1 \in \beta_1^+ \cap \mathrm{int}\tilde{S}_1$ e $h_2 \in \beta_2^+ \cap \mathrm{int}S_2$. Temos que $h_2 = h'n$ para algum $h' \in \beta_1^+$ e $n \in N^+$. Para todo inteiro k, temos

$$h_1^{-k}h_2h_1^k = h_1^{-k}(h'n)h_1^k = h'(h^{-k}nh^k) \in h_1^{-k}S_2h_1^k.$$

Também, $\mathrm{int}\tilde{S}_1$ intercepta a câmara que contém h' e portanto intercepta todas as câmaras que contém pontos próximos de h'. Como $h^{-k}nh^k \to 1$ quando $k \to \infty$, temos que para k grande o suficiente $\mathrm{int}(h_1^{-k}S_2h_1^k)$ intercepta a mesma câmara positiva para P_2. Basta então tomarmos $h = h_1^k$ e o lema fica assim demonstrado.

■

Dados b_1 e b_2 em C_0 o lema anterior assegura a existência de $\alpha^+ \in \pi^{-1}(b_1) \cap \Delta$ e $g \in \mathrm{int}S$ tal que $g\alpha^+ \in \pi^{-1}(b_2) \cap \Delta$. Portanto, $g\pi(\alpha\omega) = \pi(g\alpha\omega) \in \nu(b_2, \omega)$.

Como $\pi(\alpha\omega) \in \nu(b_1, \omega)$, temos que o conjunto de controle contendo $\nu(b_2, \omega)$ é obtido do conjunto de controle contendo $\nu(b_1, \omega)$, isto é, $D(b_1, \omega) < D(b_2, \omega)$. Revertendo o argumento, temos que tais conjuntos coincidem. Isso mostra ii) e termina a demonstração do Teorema 2.4.

■

No que segue, iremos denotar por D_ω o único conjunto de controle que contém $\pi(\Delta\omega)$. Estritamente falando, a definição de D_ω depende da escolha da câmara de Weyl A^+. Iremos no entanto denotar o conjunto de controle apenas como acima e especificaremos qual câmara esta sendo usada quando ouver perigo de confusão. Lembremos que D_1 é o conjunto de controle invariante obtido pela câmara de Weyl básica, isso porque o ponto fixo do tipo 1 é o atrator para todo elemento regular h. Notemos ainda que pela definição dada, D_ω contém pontos que são fixados por elementos em $\text{int}S$, então o conjunto de transitividade $(D_\omega)_0$ é não vazio. Na verdade vale que todo conjunto de controle efetivo D em B é D_ω para algum ω.

De fato, se D é um conjunto de controle efetivo, temos que existe $b \in D$ tal que $P \cap \text{int}S \neq \varnothing$, onde P é a isotropia b. Como visto anteriormente existe uma decomposição de $P = MAN^+$ de modo que $A \cap \text{int}S \neq \varnothing$. Consideremos A^+ a câmara positiva para essa decomposição. Sendo o conjunto das câmaras de Weyl densa em A, existe uma câmara A_1^+ de A que intercepta $\text{int}S$.

Se b^* é a imagem de A_1^+ por π em B, temos que b^* é ponto fixo do tipo 1 para algum $h \in A_1^+ \cap \text{int}S$

Tomando então $\omega \in W$ que leva A_1^+ em A^+ temos que $b = \omega b^*$ e portanto $D_\omega \cap D \neq \varnothing$ o que por maximalidade implica $D_\omega = D$.

O próximo resultado irá complementar o Teorema 2.4 dando uma caracterização para os conjuntos de transitividade de D_ω.

Teorema 2.5. *Para $\omega \in W$, seja $(D_\omega)_0$ o conjunto de transitividade dentro do conjunto de controle D_ω e tomemos $b \in (D_\omega)_0$. Então existe $b_0 \in C_0$ tal que $b \in \nu(b_0, \omega)$, ou seja, $(D_\omega)_0 = \pi(\Delta\omega)$.*

Demonstração: Dado $b \in (D_\omega)_0$, existe $h \in \text{int}S$ tal que $hb = b$. Podemos ainda supor que h está em algum subgrupo vetorial, como já mostramos. Sendo o resultado independente da câmara de Weyl básica, não existe perda de generalidade em assumir que $h \in A^+$ e que $b = \tilde{\omega}_1 b_0$, para algum $\omega_1 \in W$ e $b_0 = MAN^+$. Temos que $b_0 \in C_0$, pois $h \in A^+ \cap \text{int}S$ e portanto $b' = \tilde{\omega} b_0$ satisfaz $b' \in (D_\omega)_0$. Então, existem $g, g' \in \text{int}S$ tais que $gb' = b$ e $g'b = b'$. Tomando as decomposições de Iwasawa de g e g' com relação a KAN_ω^+ e $KAN_{\omega_1}^+$, respectivamente, temos

$$g = \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}^{-1} h_1 (\tilde{\omega} n_1 \tilde{\omega}^{-1}), \qquad h_1 \in A, n_1 \in N^+$$

e

$$g' = \tilde{\omega} \tilde{\omega}_1^{-1} h_2 (\tilde{\omega}_1 n_2 \tilde{\omega}_1^{-1}), \qquad h_2 \in A, n_2 \in N^+.$$

Essa decomposição segue de que $gb' = \tilde{\omega}_1\tilde{\omega}^{-1}b' = b$ e $g'b = \tilde{\omega}\tilde{\omega}_1^{-1}b = b'$. Temos que $gh^kg' \in \mathrm{int}S$ para todo inteiro positivo k. Também,

$$gh^kg' = \tilde{\omega}_1(\tilde{\omega}^{-1}h_1\tilde{\omega})n_1(\tilde{\omega}^{-1}h^k\tilde{\omega})(\tilde{\omega}_1^{-1}h_2\tilde{\omega}_1)n_2\tilde{\omega}_1^{-1}.$$

Usando agora o fato de que A normaliza N^+, essa expressão se reduz a

$$gh^kg' = \tilde{\omega}_1h'n\tilde{\omega}_1^{-1}, \qquad n \in N^+$$

onde

$$h' = (\tilde{\omega}^{-1}h_1\tilde{\omega})(\tilde{\omega}^{-1}h^k\tilde{\omega})(\tilde{\omega}_1^{-1}h_2\tilde{\omega}_1).$$

Tomando k grande o suficiente, podemos assumir que $h' \in \tilde{\omega}^{-1}A^+\tilde{\omega}$. Notemos que $gh^kg'b = b$ e portanto $gh^kg' \in MAN^+_{\omega_1}$ que é a isotropia em b. Com relação a essa decomposição, temos

$$gh^kg' = h''n'$$

onde $n' = \tilde{\omega}_1n\tilde{\omega}_1^{-1} \in N^+_{\omega_1}$ e $h'' = \tilde{\omega}_1h'\tilde{\omega}_1^{-1}$.

Suporemos inicialmente que $n' = 1$. Temos então que h'' pertence a câmara $\alpha^+ = \omega_1\omega^{-1}A^+$ e então $\alpha^+ \in \sum$. Vamos mostrar que $b = \pi(\alpha^+\omega)$. Para isso, notemos que a ação a direita de ω em α^+ é dada pela ação a esquerda depois que conjugamos ω por $\omega_1\omega^{-1}$. Então

$$\alpha^+\omega = (\omega_1\omega^{-1})\omega(\omega_1\omega^{-1})^{-1}\alpha^+ = \omega_1A^+ = \tilde{\omega}_1A^+\tilde{\omega}_1^{-1}.$$

Mas pela definição de ω_1, temos que $\pi(\tilde{\omega}_1A^+\tilde{\omega}_1^{-1}) = \tilde{\omega}_1b_0 = b$, ou seja, $b = \pi(\alpha^+\omega) \in \nu(b_0, \omega)$ como desejado. O caso para $n \neq 1$ se reduz a esse se conjugarmos tudo por $n_0 \in N^+_{\omega_1}$, onde n_0 satisfaz $n_0h''n'n_0^{-1} = h''$ e tal n_0 é existe, pois a aplicação $n \in N^+_{\omega_1} \mapsto (h'')^{-1}nh''n^{-1} \in N^+_{\omega_1}$ é um difeomorfismo para h'' regular.

■

Iremos adicionar dois resultados a respeito de controlabilidade que serão usados posteriormente. Dizemos que o semigrupo S de G é controlável no flag B se $Sx = B$ para todo $x \in B$.

Lema 2.5. *Seja G um grupo de Lie conexo semi-simples com centro finito e S um semigrupo de interior não vazio em G. Suponha que exista $X \in \mathfrak{g}$ tal que* $\mathrm{ad}(X)$ *seja nilpotente e que* $\exp X \in \mathrm{int}S$. *Então $S = G$.*

Demonstração: É suficiente considerarmos o caso em que G é o grupo $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ dos automorfismos internos de $\mathfrak{g}$. De fato, esse grupo é o quociente $G/Z(G)$ de G pelo seu centro. Sendo $Z(G)$ finito, $G \to G/Z(G)$ define um fibrado principal com grupo compacto e então $S = G$ se $S/Z(G) = G/Z(G)$. Para demonstrar o lema, iremos aproximar $\exp X$ por elementos compactos em $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$.

Como $\mathrm{ad}(X)$ é nilpotente, X pode ser mergulhado numa subálgebra $\mathfrak{g}_0$ isomorfa a $\mathrm{sl}(2, \mathbb{R})$. Então, existem H, Y tais que

$$[H, X] = 2X \qquad [H, Y] = -2Y \qquad [X, Y] = H,$$

e $\mathfrak{g}_0$ é a álgebra tridimensional gerada por X, Y, H. Denotemos por $G_0 \subset \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ o subgrupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0$. Tal grupo é semi-simples e possui centro finito. Então, para $Z \in \mathfrak{g}_0$, o grupo a um parâmetro $\{\exp tZ; t \in \mathbb{R}\} \subset G_0$ gerado por Z é compacto se, e somente se, $\{\exp t\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}(Z); t \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{Int}(\mathfrak{g}_0)$ é compacto.

Dado $\epsilon > 0$ consideremos $Z_\epsilon = X - \epsilon^2 Y \in \mathfrak{g}_0$. Então, a matriz de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}(Z_\epsilon)$ com respeito a X, Y, H é da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ \epsilon^2 & 0 & 1 \\ 0 & -2\epsilon^2 & 0 \end{pmatrix}$$

e seus autovalores são 0 e $\pm 2\epsilon\sqrt{-1}$. Portanto, $\{\exp t\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}(Z_\epsilon); t \in \mathbb{R}\}$ é compacto e assim $\{\exp tZ_\epsilon; t \in \mathbb{R}\}$ é também compacto em G_0, e consequentemente em $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$.

Então, para ϵ suficientemente pequeno, $\exp Z_\epsilon$ está próximo de $\exp X$ e então $\exp Z_\epsilon \in \mathrm{int}S$. Isso nos assegura a existência de um subgrupo compacto $L \subset G$ satisfazendo $L \cap \mathrm{int}S \neq \varnothing$. Sendo esta interseção um semigrupo com interior não vazio em L, ele contém contém a componente da identidade de L. Portanto $1 \in L \cap \mathrm{int}S \subset \mathrm{int}S$, o que implica $S = G$.

■

Teorema 2.6. *Seja G um grupo de Lie semi-simples com centro finito e seja $S \subset G$ um semigrupo com interior não vazio. Suponhamos que S é controlável em B. Então $S = G$.*

Demonstração: Pelo lema acima, só precisamos encontrar um elemento nilpotente em $\mathrm{int}S$. Notemos que S é controlável em B se, e somente se, $B = C$, onde C é o conjunto de controle S-invariante. De fato, se $Sx = B$ para todo $x \in B$, em particular $B = Sx \subset \mathrm{fe}(Sx) = C$ para todo $x \in C$ e portanto $B = C$. Reciprocamente, se $C = B$, temos que $C = C_0$ pela Proposição 1.1 (g). Pela mesma proposição, temos que $C_0 = (\mathrm{int}S)x \cap (\mathrm{int}S)^{-1}x \subset Sx$ para todo $x \in C_0 = B$ e portanto S é controlável em B.

Tomemos então $b \in B$ e seja P seu subgrupo parabólico correspondente. Então, existe uma decomposição de Langlands $P = MAN^+$ de modo que $A \cap$

int$S \neq \varnothing$ e pelo Lema 2.2, $\omega^{-1}(\Gamma) \subset \tilde{\Lambda}$ para todo $\omega \in W$. Assim, $\tilde{\Lambda}$ intercepta toda câmara em $\mathfrak{a}$ e sendo $\tilde{\Lambda}$ um cone convexo, $\tilde{\Lambda} = \mathfrak{a}$. Portanto, existe $h \in A$ e $n_1, n_2 \in N^+$ satisfazendo $hn_1, h^{-1}n_2 \in \mathrm{int}S$ e portanto $N^+ \cap \mathrm{int}S \neq \varnothing$ e o teorema segue do Lema 2.5.

■

Seja $\sum$ um sistema simples de raízes associado ao par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ e $\Theta \subset \sum$ um subconjunto. Associado a Θ existe um subgrupo parabólico P_Θ cuja subálgebra parabólica é dada por $\mathfrak{p}_\Theta$. Tais conjuntos são dados da seguinte maneira:

Seja $\mathfrak{n}^{\pm}(\Theta)$ a subálgebra de $\mathfrak{n}^{\pm}$ dada por

$$\mathfrak{n}^{+}(\Theta) = \sum_{\alpha \in \langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$$

onde $\langle\Theta\rangle^+$ é o menor subconjunto fechado de Π^+ contendo Θ. A subálgebra parabólica é então dada por

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{n}^-(\Theta) \oplus \mathfrak{p}$$

e o subgrupo parabólico P_Θ é o normalizador de $\mathfrak{p}_\Theta$ em G. Notemos que $\mathfrak{p}_{\Theta_1} \subset \mathfrak{p}_{\Theta_2}$ se $\Theta_1 \subset \Theta_2$. Também, $\mathfrak{p}_\varnothing = \mathfrak{p}$ e $\mathfrak{p}_{\sum} = \mathfrak{g}$. Também, $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_\Theta$, $P \subset P_\Theta$ para todo $\Theta \subset \sum$.

Podemos decompor $\mathfrak{p}_\Theta$ da seguinte maneira

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{m}_\Theta \oplus \mathfrak{a}_\Theta \oplus \mathfrak{n}_\Theta^+,$$

onde $\mathfrak{a}_\Theta$ é o complemento $\langle\,,\rangle_\theta$-ortogonal da subálgebra $\mathfrak{a}(\Theta)$ gerada por $\{H_\alpha; \alpha \in \langle\Theta\rangle\}$, $\mathfrak{n}_\Theta^+ = \sum_{\alpha \in \Pi^+ - \langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}_\alpha$ e $\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}(\Theta) \oplus \mathfrak{n}^+(\Theta) \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta)$, com todos os termos dessa decomposição sendo subálgebras. Além disso, $\mathfrak{a}_\Theta \oplus \mathfrak{n}_\Theta^+$ é um ideal em $\mathfrak{p}_\Theta$ e $\mathfrak{m}_\Theta$ centraliza $\mathfrak{a}_\Theta$.

A subálgebra $\mathfrak{p}(\Theta)$ gerado por $\mathfrak{n}^+(\Theta)$ e $\mathfrak{n}^-(\Theta)$ é semi-simples e $\mathfrak{a}(\Theta)$ está contido em $\mathfrak{g}(\Theta)$ como uma subálgebra abeliana maximal.

Para o subgrupo parabólico temos a decomposição $P_\Theta = \tilde{M}_\Theta A_\Theta N_\Theta^+$, onde $A_\Theta = \exp\mathfrak{a}_\Theta$, $N_\Theta^+ = \exp\mathfrak{n}_\Theta^+$ e $\tilde{M}_\Theta$ é o subgrupo fechado com álgebra de Lie $\mathfrak{a}_\Theta$. Em geral $\tilde{M}_\Theta$ não é conexo, contudo o número de suas componentes é finito. Denotaremos por $M_\Theta = \exp\mathfrak{m}_\Theta$ a componente conexa da identidade de $\tilde{M}_\Theta$. Temos ainda que $\tilde{M}_\Theta$ normaliza $A_\Theta N_\Theta^+$. O espaço quociente $B_\Theta = G/P_\Theta$ é denominado *flag do tipo* Θ.

Seja $S \subset G$ um semigrupo com interior não vazio. Com as notações anteriores como sendo as canônicas, suponhamos que $b_0 \in C_0$. Seja

$$\pi : B \to B_\Theta$$

a fibração canônica invariante. Em B_Θ existe apenas um conjunto de controle S-invariante, digamos C_Θ. Este é dado por

$$C_\Theta = \pi(C).$$

Portanto, se tomarmos ξ_0 como sendo a origem de B_Θ, temos que $\xi_0 = \pi(b_0)$ e assim $\xi_0 \in (C_\Theta)_0$.

Feitas estas observações podemos olhar agora o que acontece na fibra $F = \pi^{-1}(\xi_0) \cap C_0$ de ξ_0 sobre C_0. Coloquemos então

$$\tilde{S}_\Theta = S \cap P_\Theta.$$

Esse é um semigrupo de interior não vazio em P_Θ, pois $\xi_0 \in (C_\Theta)_0$ e P_Θ é a isotropia em ξ_0. Também, pelo fato de que C_0 é o conjunto de transitividade dentro de C, $\tilde{S}_\Theta F = F$. Coloquemos agora

$$S_\Theta = \tilde{S}_\Theta \cap (P_\Theta)_0\,,$$

onde $(P_\Theta)_0$ é a componente conexa da identidade. Como P_Θ possui um número finito de componentes conexas, S_Θ possui interior não vazio em $(P_\Theta)_0$. Afirmamos que ainda temos $S_\Theta F = F$. A inclusão $S_\Theta F \subseteq F$ é imediata. Para a outra inclusão, seja $b \in F$. Iremos mostrar que $b \in S_\Theta b'$, com $b' \in F$.

Como $b \in F$, existe $h \in \mathrm{int}S$ satisfazendo $hg = g$ com h em algum subgrupo vetorial de G. Temos também que $h\xi_0 = \xi_0$ e portanto $h \in \tilde{S}_\Theta$. Trocando, se necessário, h por h^m para algum inteiro positivo m, podemos assumir que $h \in (P_\Theta)_0$ e então $h \in \mathrm{int}S_\Theta$. Agora, como b atrai um conjunto aberto e denso em B, podemos tomar $b' \in F$ de modo que $h^k b' \to b$ quando $k \to \infty$ e assim $b \in \mathrm{fe}(S_\Theta b')$ e como $hb = b$ com $h \in \mathrm{int}S_\Theta$, temos que $b \in S_\Theta b'$ concluindo a afirmação.

Mostraremos agora que o fecho de F é na verdade um conjunto de controle invariante de um semigrupo de interior não vazio em um grupo de Lie semi-simples agindo sobre $\pi^{-1}(\xi_0)$. O subgrupo $A_\Theta N_\Theta^+$ de $(P_\Theta)_0$ age trivialmente em $\pi^{-1}(\xi_0)$, pois é normal e fixa b_0. Portanto a ação de S_Θ sobre $\pi^{-1}(\xi_0)$ depende somente da ação de $\Gamma_\Theta = S_\Theta / A_\Theta N_\Theta^+$ que é um semigrupo de interior não vazio em $M_\Theta \cong (P_\Theta)_0 / A_\Theta N_\Theta^+$.

Seja $Z(\mathfrak{g}(\Theta))$ o centralizador de $\mathfrak{g}(\Theta)$ em M_Θ. Esse é um subgrupo fechado e normal de M_Θ, pois $\mathfrak{g}(\Theta)$ é um ideal de $\mathfrak{m}(\Theta)$, a álgebra de Lie de M_Θ. Além disso, a álgebra de Lie de $Z(\mathfrak{g}(\Theta))$, que é o centralizador de $\mathfrak{g}(\Theta)$ em $\mathfrak{m}$, complementa $\mathfrak{g}(\Theta)$ em $\mathfrak{m}_\Theta$. Então a álgebra de Lie de

$$G(\Theta) = M_\Theta / Z(\mathfrak{g}(\Theta))$$

é isomorfa a $\mathfrak{g}(\Theta)$ que é semi-simples. Mas, $Z(\mathfrak{g}(\Theta))$ está contido em M, o centralizador de $\mathfrak{a}$ e portanto $Z(\mathfrak{g}(\Theta)) b_0 = b_0$ e como ele é normal em M_Θ, sua ação sobre $\pi^{-1}(\xi_0)$ é trivial. Então a ação de S_Θ sobre $\pi^{-1}(\xi_0)$ depende somente da ação do semigrupo de interior não vazio de $G(\Theta)$ dado por

$$S(\Theta) = \Gamma_\Theta / Z(\mathfrak{g}(\Theta)).$$

Portanto, o fecho de F é um conjunto de controle pra $S(\Theta)$. Na verdade, este é o único conjunto de controle invariante para $S(\Theta)$ em $\pi^{-1}(\xi_0)$, pois esta fibra é exatamente o flag maximal de $G(\Theta)$, que segue do fato de que $\tilde{M}_\Theta \cap P$ é um subgrupo parabólico minimal do grupo de Lie redutível $\tilde{M}_\Theta$.

Temos então o seguinte resultado:

Proposição 2.1. *Seja C e C_Θ os conjuntos de controle invariantes de B e B_Θ, respectivamente, e tome $\xi_0 \in (C_\Theta)_0$. Seja $S(\Theta) \subset G(\Theta)$ como definido anteriormente. Temos que $\pi^{-1}(\xi_0)$ é o flag maximal de $G(\Theta)$. Tomemos $F = \pi^{-1}(\xi_0) \cap C_0$. Então* $\mathrm{fe}(F)$ *é o conjunto de controle $S(\Theta)$-invariante de $\pi^{-1}(\xi_0)$ e F está contido em seu conjunto de transitividade.*

Capítulo 3

Um subgrupo do Grupo de Weyl

Iremos estudar agora quais dos conjuntos de controle D_ω coincidem em B. Começaremos pelos conjuntos de controle invariante, isto é, olharemos o subconjunto dos elementos $\omega \in W$ tal que $\Delta\omega$ e Δ se projetam sobre o mesmo conjunto de controle em B. Seja então,

$$W(S) = \{\omega \in W; D_\omega \text{ é o conjunto de controle } S\text{-invariante}\}.$$

Notemos que inicialmente $W(S)$ é apenas um subconjunto do grupo de Weyl. Mostraremos que na verdade $W(S)$ é um subgrupo de W. Tal fato não é imediato, pois $W(S)$ não é definido como o subconjunto que deixa Δ invariante. De fato, para $\omega \in W(S)$ e $\alpha^+ \in \Delta$, não é necessariamente verdade que $\alpha^+\omega \in \Delta$, temos somente que alguma câmara positiva para $\pi(\alpha^+\omega)$ pertence a Δ. Assim como D_ω, $W(S)$ também depende da escolha de uma câmara de Weyl básica A^+ para sua definição. Indicaremos isso escrevendo $W(S, A^+)$ no lugar de $W(S)$ quando ouver qualquer perigo de confusão. Fixado A^+, $W(S)$ é um subconjunto do grupo de Weyl de A e $\omega \in W(S)$ se, e somente se, existe $g \in G$ tal que $gA^+ \in \Delta$ e $\pi(g\tilde{\omega}A^+) = \pi((g\tilde{\omega}g^{-1})(gA^+)) \in C_0$, onde $\tilde{\omega}$ é um representante de ω em M^*. Com isso, é facil mostrar que $W(S, A_1^+) = gW(S, A^+)g^{-1}$ se $A_1^+ = gA^+$.

Proposição 3.1. *Fixemos uma decomposição canônica e suponhamos que $b_0 = MAN^+ \in C_0$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*
i) $\omega \in W(S)$;
ii) $N^+\tilde{\omega}b_0 \subseteq C_0$.
Além disso, se $A^+ \in \Delta$ as condições acima também são equivalentes a
iii) $\tilde{\omega}b_0 \in C_0$, onde $\tilde{\omega}$ é um representante de ω.

Demonstração: Como $b_0 \in C_0$, sabemos que existe $h \in A^+$ e $n \in N^+$ satisfazendo $hn \in \mathrm{int}S$. Suponhamos inicialmente que $n = 1$, isto é, $h \in \mathrm{int}S$

e $A^+ \in \Delta$. Temos então que $A^+\omega = \tilde{\omega}A^+$, onde $\tilde{\omega}$ é um representante qualquer de ω em M^*. Assim, $\pi(A^+\omega) = \pi(\tilde{\omega}A^+) = \tilde{\omega}\pi(A^+) = \tilde{\omega}b_0$. Segue então que $\tilde{\omega}b_0 \in C_0$ se $\omega \in W(S)$.

Sendo C_0 aberto, existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ da identidade em N^+, tal que $\mathcal{U}\tilde{\omega}b_0 \subset C_0$. Além disso, como $h^{-k}nh^k \to 1$ quando $k \to \infty$, se $n \in N^+$, temos que para k grande o suficiente, $h^{-k}nh^k \in \mathcal{U}$, ou seja, $n \in h^k\mathcal{U}h^{-k}$ e portanto $N^+ = h^k\mathcal{U}h^{-k}$.

Contudo, $(h^k\mathcal{U}h^{-k})\tilde{\omega}b_0 = h^k\mathcal{U}\tilde{\omega}b_0 \subset C_0$, pois $\mathcal{U}\tilde{\omega}b_0 \subset C_0$ e $h^k \in \text{int}S$. Isso mostra que $N^+\tilde{\omega}b_0 \subset C_0$.

Se considerarmos agora o caso geral, pelo mesmo argumento usado na demonstração do Teorema 2.5, existe $n_0 \in N^+$, tal que

$$hn = n_0hn_0^{-1}.$$

Então, $n_0A^+n_0^{-1} \cap \text{int}S \neq \varnothing$ e sendo $n_0\tilde{\omega}n_0^{-1}$ um representante de ω no normalizador de $n_0A^+n_0^{-1}$, o argumento anterior assegura que

$$N^+n_0\tilde{\omega}n_0^{-1} = N^+\tilde{\omega}b_0 \subset C_0$$

e portanto fica mostrado que i) $\Rightarrow$ ii) . Para a recíproca, notemos que ii) assegura que $n_0\tilde{\omega}n_0^{-1}b_0 = n_0\tilde{\omega}b_0 \in C_0$, então i) segue da definição de $W(S)$.

Notemos que ii) implica iii) diretamente e que iii) implica i) caso $A^+ \in \Delta$ pela definição de $W(S)$.

Proposição 3.2. *$W(S)$ é um subgrupo do grupo de Weyl W.*

Demonstração: $W(S)$ é não vazio, pois D_1 é o conjunto de controle maximal. Consideremos como sempre que uma notação canônica esteja escolhida com $b_0 \in C_0$. Sejam ω_1 e ω_2 em $W(S)$ e $\tilde{\omega}_1$ e $\tilde{\omega}_2$ seus representantes em M^*. Pela proposição 3.1, $\tilde{\omega}b_0 \in C_0$. Conjugando por $\tilde{\omega}_1$, obtemos pelo fato de $\omega_2 \in W(S)$,

$$(\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2\tilde{\omega}_1^{-1})(\tilde{\omega}_1)b_0 \in C_0$$

que é $\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2b_0 \in C_0$. Isso mostra que $W(S)$ é um semigrupo de W. Como W é finito, $W(S)$ é um subgrupo de W.

■

O subgrupo $W(S)$ conta aqueles elementos $\omega \in W$ para os quais D_ω é o conjunto de controle invariante. Mostraremos mais adiante que os outros conjuntos de controle têm uma descrição semelhante, dada por classes laterais a direita de $W(S)$ em W.

Definição 3.1. *O subgrupo $W(S)$ dado acima é denominada tipo parabólico de S.*

Dados dois grupos de Lie semi-simples G_1 e G_2 e semigrupos S_1 e S_2 de G_1 e G_2, respectivamente, podemos associar ao grupo de Lie semi-simples $G = G_1 \times G_2$ o semigrupo de interior não vazio $S = S_1 \times S_2$. Uma questão que surge naturalmente é a seguinte: Qual a relação entre o tipo parabólico de S e os tipos parabólicos de S_1 e S_2 ?

Sejam então G_1 e G_2 grupos de Lie semi-simples com álgebras de Lie $\mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{g}_2$, respectivamente. Sejam ainda $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{k}_i \oplus \mathfrak{a}_i \oplus \mathfrak{n}_i^+$ decomposições de Iwasawa de $\mathfrak{g}_i$ para $i = 1, 2$.

Se considerarmos o produto $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$, temos que uma decomposição de Iwasawa para $\mathfrak{g}$ é dada por $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$, onde $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_1 \times \mathfrak{k}_2$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$ e $\mathfrak{n}^+ = \mathfrak{n}_1^+ \times \mathfrak{n}_2^+$. De fato, como o colchete em $\mathfrak{g}$ é dado pelo colchete em cada coordenada, temos que $\mathfrak{a}$ é um abeliano maximal na parte simétrica $\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{g}$, onde $\mathfrak{r}$ é o cartesiano das partes simétricas de $\mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{g}_2$. Além disso, como os espaços são todos de dimensão finita, podemos identificar o dual de $\mathfrak{a}$ com o cartesiano dos duais de $\mathfrak{a}_1$ e $\mathfrak{a}_2$ e obtermos assim que a parte nilpotente dessa decomposição é mesmo $\mathfrak{n}^+$. Notemos que com essa escolha, as câmaras positivas de $\mathfrak{a}$ são identificadas com o cartesiano de câmaras positivas em $\mathfrak{a}_1$ e $\mathfrak{a}_2$.

Desta maneira, tomando $A^+ = A_1^+ \times A_2^+$ como sendo a câmara positiva para P e supondo sem perda de generalidade que A_i^+ intercepta intS_i, temos que A intercepta int$S$. Temos um difeomorfismo equivariante $\xi : B \to B_1 \times B_2$ dado de maneira usual, isto é, $\xi((g_1, g_2)P) = (\xi_1((g_1, g_2)P), \xi_2((g_1, g_2)P)) = (g_1P_1, g_2P_2)$. Além disso, se tivermos $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in W(S)$, temos que ωb_0 pertence ao conjunto de controle S-invariante em B pela proposição 3.1 e como $\omega_i b_i \in \xi_i(D_\omega)$, temos pela mesma proposição que $\omega_i \in W(S_i)$, já que $\xi_i(D_\omega)$ é o conjunto de controle S_i-invariante em B_i se D_ω é o conjunto de controle S-invariante em B. Desta maneira, obtemos que $W(S) \subset W(S_1) \times W(S_2)$. Tomando o difeomorfismo inverso, obtemos a outra inclusão e temos portanto.

Proposição 3.3. *Sejam G_1 e G_2 grupos de Lie semi-simples, S_1 e S_2 subgrupos de interior não vazio em G_1 e G_2 respectivamente. Então, o tipo parabólico de S é o cartesiano dos tipos parabólicos de S_1 e S_2.*

Notemos que todas os procedimentos feitos anteriormente podem ser extendidos a um número finito de grupos de Lie semi-simples e temos portanto que se G_i, $i = 1, \ldots, n$ são grupos de Lie semi-simples e S_i seus respectivos semigrupos de interior não vazio, então $W(S) = W(S_1) \times \cdots \times W(S_n)$, onde S é o cartesiano dos S_i's.

Seja agora G um grupo de Lie semi-simples com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e S um semigrupo de interior não vazio de G. Consideremos a decomposição de $\mathfrak{g}$ em componentes simples, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \cdots \times \mathfrak{g}_k$. Consideremos inicialmente que o grupo G é simplesmente conexo. Então $G = G_1 \times \cdots \times G_k$, com G_i grupos de Lie simples. Dessa maneira, o semigrupo S se projeta em cada G_i como um semigrupo de interior não vazio, digamos S_i. Como visto anteriormente, o flag $B = G/P$ é difeomormo ao cartesiano $B_1 \times \cdots \times B_k$, onde $B_i = G_i/P_i$ são os flags de G_i e também, o grupo de Weyl de G é $W = W_1 \times \cdots \times W_k$, com W_i grupo de Weyl de G_i. Se considerarmos então $\pi_i : B \to B_i$ como a projeção canônica, temos que se C é o conjunto de controle S-invariante em B, então certamente $\pi_i(C)$ é o conjunto de controle S_i-invariante em B_i e portanto, dado $\omega = (\omega_1 \ldots, \omega_k) \in W(S)$, temos que $\omega_i b_i \in \pi_i(D_\omega)$ que é o conjunto de controle S_i-invariante. Assim, a Proposição 3.1 assegura que $\omega_i \in W(S_i)$, ou seja, $W(S) \subset W(S_1) \times \cdots \times W(S_k)$. Reciprocamente, se tomarmos $\omega_i \in W(S_i)$ para todo $i = 1, \ldots, k$, temos que $\pi_i(C) = D_{\omega_i}$ para todo i, o que força $\omega b_0 \in C$ e portanto $\omega \in W(S)$, onde C é o conjunto de controle S-invariante e $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_k)$. Temos então que $W(S) = W(S_1) \times \cdots \times W(S_k)$.

No caso em que G não é simplesmente conexo, o grupo G é igual ao cartesiano dos grupos simples G_i, com álgebra de Lie $\mathfrak{g}_i$ quocientado por um subgrupo central e discreto. No entanto, quando tomamos o flag maximal de G, temos que esse é isomorfo ao flag maximal do grupo $G_1 \times \cdots \times G_k$ e também que seus grupos de Weyl coincidem.

Fixemos agora uma notação canônica de modo que $A \cap \mathrm{int}S \neq \varnothing$. Pelo Lema 2.2 e a Proposição 3.1 temos que $\tilde{\omega}^{-1}(\Gamma) \subset \tilde{\Lambda}$ se $\omega \in W(S)$. Sendo $W(S)$ um subgrupo, temos que $\tilde{\omega}(\Gamma) \subset \tilde{\Lambda}$ para $\omega \in W(S)$.

Seja $\Xi = \Xi(S)$ o cone convexo gerado por $\cup\{\omega\Gamma; \omega \in W(S)\}$. Então Ξ é $W(S)$-invariante e $\Xi \subset \tilde{\Lambda}$.

Temos então as seguintes possibilidades:

1) $\tilde{\Lambda} = \mathfrak{a}$. Então $\mathrm{Ad}(S) = \mathrm{Ad}(G)$ e, pelo Teorema 2.6, S pode ser um semigrupo próprio somente se G possui centro infinito.

2) $\tilde{\Lambda}$ é um cone próprio de $\mathfrak{a}$. Então Ξ é também próprio e então $W(S)$ deixa um cone em $\mathfrak{a}$ invariante. Como $W(S)$ é finito, isso se verifica se, e somente se, existe um elemento não nulo $H \in \mathfrak{a}$ que é fixado por $W(S)$, isto é, $\omega H = H$ para todo $\omega \in W(S)$.

Tomemos agora um ponto fixo para o conjunto $W(S)$ que esteja no fecho de uma câmara de Weyl que intercepta $\tilde{\Lambda}$. Podemos fazer isso, pois um ponto fixo é dado por

$$H = \sum_{\omega \in W(S)} \omega H'$$

onde H' é qualquer vetor não nulo em Γ. Como $\Gamma \subset \tilde{\Lambda}$, temos que H está no fecho de uma câmara $\mathfrak{a}^+$ que satisfaz $\mathfrak{a}^+ \cap \tilde{\Lambda} \neq \varnothing$. Notemos que H está na fronteira de $\mathfrak{a}^+$ a menos que $W(S) = \{1\}$.

Associado a $\mathfrak{a}^+$, existe um sistema de raízes Π. Assim, o subgrupo de W que deixa H fixo é W_Θ, onde Θ é um subconjunto de Π e W_Θ é o subgrupo gerado pelas reflexões definidas pelas raízes em Θ. Notemos que $\Theta = \{\alpha \in \Pi; \alpha(H) = 0\}$. Então $W(S) \subset W_\Theta$ para algum $\Theta \subset \Pi$. Escolhemos então H com regularidade máxima, isto é, tal que o Θ correspondente seja mínimo. Afirmamos que para essa escolha, $W(S)$ coincide com W_Θ.

Seja P_Θ o subgrupo parabólico associado a Θ e consideremos a fibração equivariante

$$\pi : B \to B_\Theta.$$

Denotaremos por C e C_Θ os respectivos conjuntos de controle em B e B_Θ e assumiremos que $b_0 \in C_0$ e então $\xi_0 = \pi(b_0) \in (C_\Theta)_0$. Seja $C_{\xi_0} = C \cap \pi^{-1}(\xi_0)$. Tal conjunto é o conjunto de controle invariante do semigrupo $S(\Theta)$. A fibra $\pi^{-1}(\xi_0)$ coincide com a fronteira do grupo semi-simples $G(\Theta)$. Também, W_Θ é o grupo de Weyl de $G(\Theta)$. Pela Proposição 3.1, $\tilde{\omega} b_0 \in C_{\xi_0}$ se $\omega \in W(S)$ e portanto $W(S)$ é um semigrupo de $W(S(\Theta))$.

Agora, se assumirmos que Θ é minimal, temos que $W(S)$ não possui um vetor não nulo fixado dentro da subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{a}(\Theta)$ de $\mathfrak{g}(\Theta)$. Como $W(S) \subset W(S(\Theta))$, concluimos que $W(S(\Theta))$ não deixa nenhum cone próprio em $\mathfrak{a}(\Theta)$ invariante. Portanto $S(\Theta) = G(\Theta)$ e $C_{\xi_0} = \pi^{-1}(\xi_0)$. Isso implica que $\tilde{\omega} b_0 \in C_{\xi_0} \subset C$ para todo $\omega \in W_\Theta$ e pela Proposição 3.1 concluímos que $W(S) = W_\Theta$.

Temos então o seguinte resultado:

Teorema 3.1. *Fixemos as notações canônicas com $b_0 \in C_0$ e $A^+ \in \Delta$. Então $W(S, A^+) = W_\Theta$ para algum $\Theta \subset \Pi$, onde Π é o sistema de raízes associado a decomposição de Iwasawa definido por b_0. Além disso, seja C_Θ o conjunto de controle S-invariante em B_Θ. Então $C = \pi^{-1}(C_\Theta)$, onde π é a fibração canônica.*

Demonstração: A primeira parte segue da discussão acima. A segunda é consequência do fato $C_{\xi_0} = \pi^{-1}(\xi_0)$ e da Proposição 1.6.

O teorema acima nos permite chamar indistintamente de tipo parabólico de um semigrupo S o subgrupo do grupo de Weyl $W(S)$, como dado na definição 3.1, ou ao subconjunto minimal Θ obtido no teorema acima ou ainda ao flag B_Θ associado a esse Θ.

Corolário 3.1. *As seguintes afirmações são equivalentes*

i) $\omega \in W(S)$;

ii) Existe algum subgrupo parabólico minimal $P = MAN^+$ e $g \in \mathrm{int}S \cap P$ tal que $g = hn$ com $h \in A$, $n \in N^+$ e $\omega h = h$;
iii) Existe algum subgrupo vetorial A_1 e $a \in \mathrm{int}S \cap A_1$ tal que $\omega a = a$.

Demonstração: Assumindo i), temos pelo teorema anterior que ω fixa $H \in \tilde{\Lambda}$. Então, para algum $n \in N^+$, temos $hn \in \mathrm{int}S$ com h fixado por ω, obtendo assim ii).

Seja $g = hn$ dado em ii) e consideremos $g = g_s g_u$ a decomposição de Jordan de g, com g_s semi-simples, g_u unipotente e $g_s g_u = g_u g_s$. Temos que h e g_s são conjugados. Como h é hiperbólico, o mesmo acontece com g_s, então ele pertence a algum subgrupo vetorial A_1 de G. O centralizador de g_s é o grupo redutível $\tilde{M}_\Theta$ para Θ um subconjunto de raízes simples associadas a alguma câmara em A_1 contendo g_s em seu fecho. Temos ainda que $g_u \in \tilde{M}_\Theta$ e sendo unipotente, existe pelo Lema 2.5 um elemento compacto, digamos $b \in \tilde{M}_\Theta$, com $b^k = 1$ para algum inteiro k, suficientemente próximo de g_u e tal que $g_s b \in \mathrm{int}S$. Portanto, se tomarmos $a = g_s^k$, temos que $a = (g_s b)^k \in \mathrm{int}S$. Notemos que um elemento do grupo de Weyl fixa a se, se somente se, fixa g_s. Usando o fato de que h e g_s são conjugados, é possível obter $u \in G$ satisfazendo $uAu^{-1} = A_1$ e $uhu^{-1} = a$. A partir disso, temos que u leva câmaras com h no bordo em câmaras contendo g_s, e consequentemente a, em seus fechos. Também, multiplicando u a direita por elementos do grupo de Weyl que fixam h e a esquerda por aqueles que fixam a é possivel descrever as câmaras que são intercambiadas por u. Usando agora o isomorfismo entre os grupos de Weyl de A e de A_1 dado por u obtemos iii).

Finalmente, se a é como dado em iii), ele pertence a fronteira de alguma câmara de Weyl, digamos A_1^+ em A_1. Como $a \in \mathrm{int}S$ e $\omega a = a$, temos que A_1^+ e ωA_1^+ interceptam $\mathrm{int}S$, então $\omega A_1^+ \in \Delta$ e portanto $\omega \in W(S)$ concluindo assim o teorema.

■

Estamos agora em condições de provar que os diferentes conjuntos de controle da forma D_ω são parametrizados pelas classes a direita em $W(S) \setminus W$.

Teorema 3.2. *$D_{\omega_1} = D_{\omega_2}$ se, e somente se, $W(S)\omega_1 = W(S)\omega_2$. Então os conjuntos de controle efetivos para S sobre B estão em correspondência com $W(S) \setminus W$.*

Demonstração: Suponhamos inicialmente $W(S)\omega_1 = W(S)\omega_2$ e tomemos a escolha canônica com $b_0 \in C_0$ e de modo que $A^+ \in \Delta$. Temos que $\tilde{\omega}_1 b_0 \in D_{\omega_1}$, $\tilde{\omega}_2 b_0 \in D_{\omega_2}$ e $\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2^{-1} b_0 \in C_0$, onde $\tilde{\omega}_1$ e $\tilde{\omega}_2$ são representantes em M^* de ω_1 e ω_2, respectivamente. Iremos mostrar que $D_{\omega_1} < D_{\omega_2}$. Para isso fixemos notações canônicas adaptadas a $\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2^{-1}b_0$. Temos:

$$\tilde{\omega}_1 b_0 = ((\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2^{-1})\tilde{\omega}_2(\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2^{-1})^{-1})(\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2^{-1}b_0).$$

Então, o ponto fixo do tipo ω_2 para elementos em A'^{+} é $\tilde{\omega}_1 b_0$ e os pontos fixos do mesmo tipo para as outras câmaras em $A'N'^{+}$ são da forma $n\tilde{\omega}_1 b_0$, com $n \in N'^{+}$ e A'^{+}, $A'N'^{+}$ são os elementos da decomposição canônica de $\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2^{-1}b_0$. Como $\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2^{-1}b_0 \in C_0$, temos que D_{ω_2} contém pontos da forma $n'\tilde{\omega}_1 b_0$ com $n' \in N'^{+}$. Usando então um argumento de expansão como utilizado anteriormente, temos que é possível obter D_{ω_1} a partir de D_{ω_2}, isto é, $D_{\omega_1} < D_{\omega_2}$. Analogamente provamos que $D_{\omega_2} < D_{\omega_1}$ e portanto eles coincidem.

Reciprocamente, suponhamos que $D_{\omega_1} = D_{\omega_2}$ e fixemos escolhas canônicas com $b_0 \in C_0$ e $A^+ \in \Delta$. Tomemos então $W(S)$ com respeito a essa câmara, isto é, $W(S) = W(S, A^+)$. Definimos

$$\tilde{\Lambda} = \{H \in \mathfrak{a}; \exists n \in N_{\omega_2}; (\exp tH)n \in \mathrm{int}S \text{ para algum } t > 0\}.$$

Assim como Γ, $\tilde{\Lambda}_2$ é um cone convexo com interior não vazio em $\mathfrak{a}$. Como estamos assumindo $A^+ \in \Delta$, temos que $\tilde{\Lambda}_2 \cap \mathfrak{a}^+ \neq \varnothing$. Iremos mostrar que $\tilde{\Lambda}_2$ também intercepta $\omega_2\omega_1^{-1}\mathfrak{a}^+$. Por hipótese, $\tilde{\omega}_2 b_0 \in D_{\omega_1}$. Na verdade, $\tilde{\omega}_2 b_0$ esta no interior do conjunto de transitividade em D_{ω_1}, pois $h\tilde{\omega}_2 b_0 = \tilde{\omega}_2 b_0$ para $h \in A^+ \cap \mathrm{int}S$. Portanto, como na demonstração do Teorema 2.5 existe $g \in \mathrm{int}S$ com $g\tilde{\omega}_2 b_0 = \tilde{\omega}_2 b_0$ e tal que a imagem por ω_1 da câmara que contém g é uma câmara positiva para $\tilde{\omega}_2 b_0$ o que é equivalente a dizer que g é da forma

$$g = h'n$$

onde $h' \in \tilde{\omega}_2\tilde{\omega}_1^{-1}A^+$ e $n \in N_{\omega_2}^+$. Temos então que $\tilde{\Lambda}_2 \cap \omega_2\omega_1^{-1}\mathfrak{a}^+ \neq \varnothing$.

Agora, usando a convexidade de $\tilde{\Lambda}_2$, existem elementos regulares $H_1, \cdots, H_k$ satisfazendo:

i) $H_1 \in \omega_2\omega_1^{-1}\mathfrak{a}^+$ e $H_k \in \mathfrak{a}^+$;

ii) O segmento $\{H_i, H_{i+1}\}$ entre H_i e H_{i+1} está contido em $\tilde{\Lambda}_2$ para todo $i = 1, \cdots, k-1$;

iii) Se o segmento $\{H_i, H_{i+1}\}$ cruza a fronteira de uma câmara, então isso é feito através de um hiperplano que é anulado por apenas uma raíz;

iv) Cada segmento esta contido na união de no máximo duas câmaras.

Seja H_i' a interseção de $\{H_i, H_{i+1}\}$ com o hiperplano de (iii) e tome $s_i \in W$ tal que $s_i H_i' = H_i'$. Então s_i muda as câmaras que contém $\{H_i, H_{i+1}\}$, pois s_i leva pontos que estão próximos de H' em pontos também próximos de H'. Também, pelo Corolário 3.1, $s_i \in W(S)$ quando $W(S)$ é definido por meio de uma câmara contendo H_i' em seu fecho. Como $s_{i-1} \dots s_1\omega_2\omega_1^{-1}\mathfrak{a}^+$ é uma dessas câmaras e como estamos definindo $W(S)$ por meio de $\mathfrak{a}^+$, conjugamos para obtermos

$$(s_{i-1}\ldots s_1\omega_2\omega_1^{-1})^{-1}s_i(s_{i-1}\ldots s_1\omega_2\omega_1^{-1}) \in W(S).$$

Contudo, por construção, $s_k \ldots s_1\omega_2\omega_1^{-1}\mathfrak{a}^+ = \mathfrak{a}^+$ e portanto $s_k\ldots s_1\omega_2\omega_1^{-1} = 1$. A expressão anterior nos mostra então que $s_{k-1}\ldots s_1\omega_2\omega_1^{-1} \in W(S)$. Procedendo por indução sobre j, segue que $s_{k-j}\ldots s_1\omega_2\omega_1^{-1} \in W(S)$ para $j = 0, 1, \cdots, k$, ou seja, $\omega_2\omega_1^{-1} \in W(S)$, concluindo assim a demonstração do teorema.

■

Corolário 3.2. *Mantendo fixada a câmara básica A^+, temos que $W(S^{-1}, A^+) = W(S, A^+)$.*

Demonstração: Seja $\omega_0 \in W$ satisfazendo $\omega\mathfrak{a}^+ = -\mathfrak{a}^+$. Então D_{ω_0} é o conjunto de controle minimal de S e também o conjunto de transitividade do conjunto de controle invariante de S^{-1}. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $A^+ \in \Delta$ e que $b_0 \in C_0$. Temos então que $s \in W(S^{-1}, A^+)$ se, e somente se, $s\omega_0 b_0 \in D_{\omega_0}$ que, pelo teorema anterior, se verifica se, e somente se, $s = s\omega_0\omega_0^{-1} \in W(S, A^+)$ e portanto $W(S^{-1}, A^+) = W(S, A^+)$.

■

Poderiamos comparar este corolário com o Teorema 3.1. Temos que $W(S, A^+) = W_\Theta$, quando escolhemos $A^+ \in \Delta$. Então, para encontrarmos o subconjunto Θ correspondente a S^{-1}, devemos tomar $A^{+^{-1}}$ e $\Theta \subset -\Pi$. Mas, $W(S^{-1}, A^{+^{-1}}) = \omega_0 W(S^{-1}, A^+)\omega_0$, onde $\omega_0^{-1}A^+ = A^{+^{-1}}$, e então o conjunto de controle invariante para S^{-1} é da forma $\pi^{-1}C^-_{\omega_0\Theta}$, onde $C^-_{\omega_0\Theta}$ é o conjunto de controle invariante para S^{-1} em $B_{\omega_0\Theta}$.

Corolário 3.3. $\mathrm{Ad}(S) = \mathrm{Ad}(G)$ *se $D_{\omega_1} = D_{\omega_2}$ e $\omega_2\omega_1^{-1}$ não possui ponto fixo não nulo em $\mathfrak{a}$.*

Temos ainda o seguinte resultado:

Proposição 3.4. *Seja Θ tal que $W(S, A^+) = W_\Theta$ e seja C_Θ o conjunto de controle S-invariante em B_Θ. Coloquemos $\xi_0 = P_\Theta$, e assumamos sem perda de generalidade que $\xi_0 \in (C_\Theta)_0$. Então, $C_\Theta \subset N^-\xi_0$.*

Demonstração: Suponhamos que C_Θ intercepta o complementar de $N^-\xi_0$ e tomemos $h \in A^+ \cap \mathrm{int}S$. Temos que o complementar de $N^-\xi_0$ é fechado e é a união de variedades estáveis para h. Portanto C_Θ contém um ponto, digamos ξ_1, no complementar de $N^-\xi_0$ tal que $h\xi_1 = \xi_1$. De fato, seja $\tilde{\xi}_1$ um ponto da interseção de C_Θ com o complementar de $N^-\xi_0$. O fato do complementar de $N^-\xi_0$ ser união de variedades estáveis para h nos assegura que existe ξ_1 que satisfaça $h^k\tilde{\xi_1} \to \xi_1$ quando $k \to \infty$. Sendo C_Θ fechado e S-invariante, temos que $\xi_1 \in C_\Theta$ e como $h\xi_1 = \xi_1$ temos o desejado.

Mas então, $\xi_1 = \omega\xi_0$ para $\omega \in W - W_\Theta$, pois $\omega'\xi_0 = \xi_0$ para todo $\omega' \in W_\Theta$. Além disso, se $b_0 = P$ temos que $b_0 \in \pi^{-1}(\xi_0)$ e $\omega b_0 \in \pi^{-1}(\xi_1)$ e portanto $b_0, \omega b_0 \in \pi^{-1}(C_\Theta) = C$. Como $h \in \text{int}S$ é tal que $hb_0 = b_0$ e $h\omega b_0 = \omega b_0$ concluímos que $b_0, \omega b_0 \in C_0$ e pela Proposição 3.1, $\omega \in W(S, A^+)$ contradizendo o fato de que $W(S, A^+) = W_\Theta$ e concluindo a demonstração.

■

Ainda com relação ao tipo parabólico de um semigrupo S, temos a seguinte proposição

Proposição 3.5. *Suponha que o subconjunto $C \subset B_\Theta$ esteja contido na célula aberta de uma decomposição de Bruhat e satisfaça $C = \text{fe}(\text{int}C)$. Então, o subgrupo*

$$S_C = \{g \in G; gC \subset C\}$$

possui interior não vazio. Além disso C é o conjunto de controle invariante para S_C em B_Θ, $C_0 = \text{int}C$ e o tipo parabólico de S_C é Θ.

Demonstração: Seja $b \in \text{int}C$. Como C está contido na célula aberta de Bruhat, existe h Θ-regular tal que b é o atrator de h (ver [12]) e que para todo $x \in C$, temos que $h^k x \to b$ quando $k \to +\infty$. Além disso, sendo C compacto, temos que para toda vizinhança U de b, existe $k_0 > 0$ tal que $h^k C \subset U$, para todo $k \geq k_0$.

De fato, dado uma vizinhança U de b e $x \in C$, temos que existe $k_x > 0$ tal que $h^k x \in U$ para todo $k \geq k_x$ e portanto $x \in h^{-k_x}U$. Assim,

$$C \subset \bigcup_{x \in C} h^{-k_x}U$$

e sendo $h^{-k_x}U$ abertos, existem $x_1, \ldots, x_n \in C$ tal que $C \subset h^{-k_1}U \cup \ldots \cup h^{-k_n}U$, onde k_i é associado a x_i. Tomando então $k_0 = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$, temos $h^k C \subset U$ para todo $k \geq k_0$.

Então, tomando U um aberto em C, temos que existe um k_0, tal que $g = h^{k_0} \in S_C$. Como $\{f; f(C) \subset U\}$ é um aberto na topologia compacto-aberto sobre as aplicações de B_Θ, temos que $g \in \text{int}S_C$.

O fato de que C é o conjunto de controle S_C-invariante segue de que todo elemento em $\text{int}C$ é atrator de algum elemento Θ-regular e de que $C = \text{fe}(\text{int}C)$, pois dado $x \in C$ e $y \in \text{int}C$ existe h em $\text{int}S_C$, elemento Θ-regular, de modo que y é atrator de h e portanto $h^k x \to y$, ou seja, $y \in \text{fe}(S_C x)$. Sendo x e

y arbitrários, temos que int$C \subset$ fe$(S_C x)$ para todo $x \in C$ e portanto C é o conjunto S_C-invariante em B_Θ.

Pelo fato de todo elemento em int$C$ ser atrator para elementos Θ-regulares em intS_C, temos a igualdade int$C = C_0$. Que os conjuntos $W(S_C)$ e W_Θ coincidem segue diretamente, pois como C está contido na célula aberta de Bruhat, devemos ter que $\Theta \subset \Theta(S)$ e como existem elementos Θ-regulares que no interior de S_C, o Corolário 3.1 garante a outra inclusão. ■

Exemplos:

a) Tomemos $G = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$. Uma decomposição canônica é dada tomando $\mathfrak{a}$ como a álgebra das matrizes diagonais com traço nulo. As raízes são $\alpha_{i,j} = \lambda_i - \lambda_j$, onde $\lambda_i(H) = a_i$ para $H = \mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n)$. Um sistema simples de raízes é dado por $\sum = \{\alpha_{i,i+1}; i = 1, \cdots, n-1\}$ e o grupo de Weyl é exatamente o grupo das permutações em n elementos e age em $\mathfrak{a}$ permutando as entradas das matrizes diagonais. Tomando $\Theta = \sum - \{\alpha_{k,k+1}\}$ para $k \in \{1, \ldots n-1\}$, temos que o flag B_Θ se identifica a Grassmaniana $Gr_k(n)$.

Consideremos então a forma bilinear dada pela matriz

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_{n-k} \end{pmatrix}$$

e C um subconjunto da Grassmaniana dado por $C = \{V \in Gr_k(n); B|_V \geq 0\}$. Vamos provar que Θ é o tipo parabólico de S_C. Mas para isso é suficiente que asseguremos a existência de um elemento Θ-regular h que esteja no interior de S_C e em $A = \exp\mathfrak{a}$, pois dessa forma o Corolário 3.1 nos garante que $W_\Theta \subset W(S)$ já que todo elemento $\omega \in W_\Theta$ fixa h. Como S_C é um subconjunto próprio de G, temos que $W(S)$ é um subgrupo próprio de W e como W_Θ é um subgrupo maximal próprio contido em W, devemos $W(S) = W_\Theta$.

Consideremos então o elemento Θ-regular,

$$h = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda, ..., \lambda}_{k}, \underbrace{\mu, ..., \mu}_{n-k})$$

com $\lambda > \mu > 0$. Devemos mostrar então que h é tal que para cada $V \in C$ temos que $B(hv, hv) > 0$ para todo $v \in V$, pois $\mathrm{int}S_C = \{g \in G; gC \subset \mathrm{int}C\}$ e $\mathrm{int}C = \{V \in C; B|_V > 0\}$.

Seja então $V \in C$ e $v \in V$ não nulo. Tomando $v = a_1e_1 + ... + a_ne_n$, onde e_i são os elementos da base canônica, temos que $B(v, v) = (a_1^2 + ... + a_k^2) - (a_{k+1}^2 + ... + a_n^2) \geq 0$. Assim, $B(hv, hv) = \lambda^2(a_1^2 + \ldots + a_k^2) - \mu^2(a_{k+1}^2 + ... + a_n^2) > \lambda^2 B(v, v) \geq 0$.

b) Seja $G = \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ o grupo simplético real. Sua álgebra de Lie, $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$, é realizada como a subálgebra de matrizes $2n \times 2n$ da forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}$$

com A, B e C matrizes $n \times n$ e com B e C simétricas. Uma escolha para $\mathfrak{a}$ é a subálgebra das matrizes diagonais em $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ da forma $\mathrm{diag}(H, -H)$, com H uma matriz diagonal $n \times n$. Um sistema simples é dado por $\sum =$

$\{\lambda_1 - \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1} - \lambda_n, 2\lambda_n\}$, onde λ_i é o funcional de $\mathfrak{a}^*$ que associa a i-ésima entrada de H. O grupo de Weyl possui $2^n n!$ elementos. Consideremos $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1} - \lambda_n\}$. A subálgebra parabólica associada a Θ é dada por

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -A^t \end{pmatrix}$$

e o flag minimal B_Θ é o conjunto dos subespaços Lagrangianos em $\mathbb{R}^{2n}$, isto é, os subespaços onde a forma simplética canônica

$$\Phi(x, y) = y^t \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} x$$

é identicamente nula.

Consideremos também a forma quadrática $Q(\xi) = B((x, y), (x, y))$, onde $B : \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é a forma bilinear simétrica em $\mathbb{R}^{2n}$ dada por $B((x, y), (u, v)) = x \cdot v + u \cdot y$.

Para o semigrupo $S = \{g \in G : Q(g\xi) \geq Q(\xi)\}$ iremos mostrar que o tipo parabólico de S é a Grassmaniana Lagrangiana dos subespaço Lagrangianos de dimensão n em $\mathbb{R}^{2n}$, $\Lambda_n(2n) \subset Gr_n(2n)$.

Seja $C = \{V \in \Lambda_n(2n) : Q_{|V} \geq 0\}$. Temos que $\text{int}C = \{V \in \Lambda_n(2n) : B_{|V} > 0\}$ e $\text{int}S = \{g \in G : Q(g\xi) > Q(\xi)\}$. Consideremos então o semigrupo $S_C = \{g \in G : gC \subset C\}$ e $\text{int}S_C = \{g \in G : gC \subset \text{int}C\}$.

Lema 3.1. $\text{int}S_C = \text{int}S$

Demonstração: Por um lado é claro que $intS \subset intS_C$, pois se $g \in intS$ e $V \in C$ então para todo $\xi \in V$ temos $Q(g\xi) > Q(\xi) \geq 0$, ou seja, $gV \in intC$. Para completar a prova basta ver que $intS_C \subset intS$, ou seja, é basta provar que se $gC \subset intC$ então $Q(g\xi) > Q(\xi)$. Ver proposição 4.2.2 (pg 104 Livro Barrera e Pesin). □

De mesma forma que no exemplo anterior, para resolver o problema precisamos encontrar uma matriz h em $\text{int}S$ que em alguma base é da forma

$$h = \text{diag}(\underbrace{\lambda, ..., \lambda}_{n}, \underbrace{\lambda^{-1}, ..., \lambda^{-1}}_{n})$$

com $\lambda > 1$. Para isso, consideremos os subspaços $V_0 = \langle e_1 + e_{n+1}, ..., e_n + e_{2n}\rangle \in intC$, onde Q é definida positiva, e $V_1 = \langle -e_1 + e_{n+1}, ..., -e_n + e_{2n}\rangle$ um complementar de V_0 onde Q é negativa definida. Pondo $v_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i + e_{i+n})$ e $w_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_i + e_{i+n})$ temos que $\beta = \{v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_n\}$ é uma base simplética de $\mathbb{R}^{2n}$. Definimos então a matriz g que na base β é da forma diag$(a, ..., a, a^{-1}, ..., a^{-1})$ com $a > 1$. Como a base β é simplética segue que g é simplética (e todas as suas potências).

Vejamos agora que para todo $V \in C$ existe $k > 0$ tal que $g^k V \in intC$. Para isso basta ver que para todo $v \in V$ com $||v|| = 1$ existe $k_0 > 0$ tal que $Q(g^k v) = B(g^k v, g^k v) > 0$ para todo $k > k_0$, e daí, por compacidade, concluímos que existe $k > 0$ como desejado.

Seja então $v \in V$, não nulo, e escreva $v = v_0 + v_1$. Como $Q(v) \geq 0$ segue que $v_0 \neq 0$ pois caso contrário teríamos $Q(v_1) = 0$, e logo $v_1 = 0$ e $v = 0$. Agora $\frac{1}{a^k} g^k v = v_0 + a^{-2k} v_1$, $Q(v_0) > 2\epsilon > 0$, $a^{-2k} v_1 \to 0$ e então para k suficientemente grande $Q(\frac{1}{a^k} g^k v) > \epsilon$ ou $Q(g^k v) > a^k \epsilon$ e portanto $h = g^k \in \text{int}S$ como desejado.

Capítulo 4

Conjuntos de controle em flags do tipo Θ

Mostramos na proposição 1.6 que uma fibração equivariante projeta conjuntos de controle efetivos em conjuntos de controle efetivos. Para as fibrações entre os flags, temos um resultado muito mais preciso.

Proposição 4.1. *Seja B o flag maximal e $\pi : B \to B_\Theta$ a fibração canônica. Seja E um conjunto de controle efetivo para S em B_Θ. Então, existe $\omega' \in W$ tal que $\pi(D_\omega)_0 = E_0$ para todo $\omega \in \omega' W_\Theta$. Além disso, $\pi(D_0) = E_0$ se D é um conjunto de controle efetivo satisfazendo $D_0 \cap \pi^{-1}(E_0) \neq \varnothing$.*

Demonstração: Tomemos $\xi \in E_0$. Então existe um elemento regular $h \in \mathrm{int}S$ tal que $h\xi = \xi$. De fato, denotando por Q a isotropia em ξ. O fato de $\xi \in E_0$ implica que $Q \cap \mathrm{int}S \neq \varnothing$. A existência de h segue então da estrutura do subgrupo parabólico Q, que é conjugado de P_Θ.

Fixemos a decomposição canônica definida por h. Essa satisfaz $b_0 \in C_0$, onde C é o conjunto de controle S-invariante em B. Temos também que h deixa a fibra $\pi^{-1}(\xi)$ invariante e seus pontos fixos nessa fibra são da forma ωb_0 com $\omega \in \omega' W_\Theta$ para algum $\omega' \in W$, já que os pontos h-fixos em B_Θ são da forma $\omega\xi_0$ para $\omega \in W/W_\Theta$ e $\xi_0 = P_\Theta$. Podemos então escolher um elemento na classe $\omega' W_\Theta$, digamos ω_ξ, tal que a variedade h-estável de ω_ξ dentro de $\pi^{-1}(\xi)$ é aberta e densa. Temos que para $\omega \in \omega_\xi W_\Theta$, $\pi(\omega b_0) = \xi$ e portanto $\xi \in \pi(D_\omega)_0$ e pela proposição 1.5 $\pi(D_\omega) \subset E_0$. Tomemos agora $\eta \in E_0$. Então, existe $g \in \mathrm{int}S$ tal que $g\eta = \xi$ e pela escolha de ω_ξ, devemos ter $D_{\omega_\eta} < D_{\omega_\xi}$. De fato, sendo $g\eta = \xi$, devemos ter $g\pi^{-1}(\eta) = \pi^{-1}(\xi)$. Além disso, $D_{\omega_\eta} \cap \pi^{-1}(\eta) \neq \varnothing$, pois $\omega_\eta b_0$ esta nessa interseção, e portanto $gD_{\omega_\eta} \cap \pi^{-1}(\xi) \neq \varnothing$. Sendo D_{ω_η} efetivo, existe $z \in D_{\omega_\eta}$ que satisfaz $h^k(gz) \to \omega_\xi b_0$ pela nossa escolha de ω_ξ. Consequentemente $\mathrm{fe}(Sz) \cap D_{\omega_\xi} \neq \varnothing$ e $D_{\omega_\eta} < D_{\omega_\xi}$.

Revertendo o argumento, obtemos $D_{\omega_\eta} = D_{\omega_\xi}$ e assim $W(S)\omega_\xi = W(S)\omega_\eta$. Portanto, se $\omega \in \omega_\xi W_\Theta$, $\omega \in W(S)\omega_\eta W_\Theta$ e então $\omega = \omega_1\omega_\eta s$ para algum $\omega_1 \in W(S)$ e $s \in W_\Theta$. Temos $D_\omega = D_{\omega_1\omega_\eta s} = D_{\omega_\eta s}$, pelo teorema 3.2, e como $\eta \in \pi(D_{\omega_\eta s})_0$ concluimos que $\eta \in \pi(D_\omega)_0$ mostrando assim que $\pi(D_\omega)_0 = E_0$ se $\omega \in \omega_\xi W_\Theta$ e provando a primeira parte do teorema. A segunda parte segue imediatamente dos argumentos anteriores e do fato que todo conjunto de controle efetivo em B é D_ω para algum $\omega \in W$.

$\blacksquare$

Essa proposição nos mostra que os conjuntos de controle efetivos em B_Θ são as projeções de conjuntos desse tipo que estão no flag maximal. O teorema 3.2 implica então o seguinte resultado:

Corolário 4.1. *O número de conjuntos de controle efetivos em B_Θ é igual ao número de elementos em $W(S) \setminus W/W_\Theta$, que é o número de $W(S)$-órbitas em W/W_Θ.*

Exemplos:

(a) Tomemos $G = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ e consideremos as decomposição feitas no exemplo (a) da página 37.

Um intervalo em $\sum$ é um subconjunto do tipo $\sum(i,j) = \{\alpha_{r,r+1}; i \leq r \leq j\}$. Cada $\Theta \subset \sum$ é uma união disjunta $\Theta = \sum(i_1, j_1) \cup \cdots \sum(i_k, j_k)$ com $j_l + 1 < i_{l+1}$ para todo $l = 1, \cdots, k-1$. Com Θ visto nessa forma, W_Θ se identifica ai produto direto dos grupos de permutação dos subconjuntos $\{i_l, \cdots, j_l + 1\}$, $l = 1, \cdots, k$. Também, B_Θ é identificado com $F^n(1, \cdots, i_1 - 1, j_1 + 1, \cdots, i_k - 1, j_k + 1, j_k + 2, \cdots, n)$, onde $F^n(r_1, \cdots, r_s)$ é a variedade dos flags $(V_1, \cdots, V_s)$, com $V_i \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço de dimensão r_i. Como a ordem de W_Θ é $|W_\Theta| = (j_1 - i_1 + 2)! \cdots (j_k - i_k + 2)!$, o corolário 4.1 nos assegura que o número de conjuntos de controle efetivos em B_Θ é, no máximo, $n!/(j_1 - i_1 + 2)! \cdots (j_k - i_k + 2)!$.

No caso em que B_Θ é o espaço projetivo $\mathbb{R}P^{n-1}$, $\Theta = \sum(2, n-1)$ e portanto existem no máximo $n = n!/(n-1)!$ conjuntos de controle efetivos em $\mathbb{R}P^{n-1}$ para cada semigrupo $S \subset \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ com $\mathrm{int}S \neq \varnothing$. Esse limite superior ocorre somente quando $W(S)$ se reduz a identidade e para qualquer outra possibilidade de $W(S)$ o número $W(S) \setminus W/W_\Theta$ é estritamente menor que n. Para o caso $W(S) = W_\Theta$ com $\Theta = \sum(2, n-1)$, existem apenas 2 conjuntos desse tipo, o maximal e o minimal. Isto porque W_θ é o grupo das permutações de $\{1, \cdots n\}$ que fixam o 1 e é portanto transitivo em $\{2, \cdots, n\}$, tendo então exatamente duas órbitas em W/W_Θ.

(b) Como aplicação imediata do exemplo acima, tomemos $G = \mathrm{Sl}(3, \mathbb{R})$. Existem três flags, o maximal $F^3(1, 2)$ e dois minimais, $\mathbb{R}P^2$ e a Grassmaniana $Gr_2(3)$. Temos também três possibilidades para $W(S)$:

$W(S) = \{1\}$, $W_{\Theta_1} = \{1, (2\ 3)\}$ e $W_{\Theta_2} = \{1, (1\ 2)\}$ que são associados, respectivamente, a $F^3(1,2)$, $\mathbb{R}P^2$ e $Gr_2(3)$. Suponhamos que $W(S) = W_{\Theta_1}$. Sobre o flag maximal existem $|W(S) \setminus W| = 3$ conjuntos de controle efetivos. Eles são $D_1 = D_{(2\,3)}$, $D_{(1\,2)} = D_{(1\,3\,2)}$ e $D_{(1\,3)} = D_{(1\,2\,3)}$. Como $(1\ 3)$ leva a câmara positiva em sua oposta, temos que $D_{(1\,3)}$ é o conjunto de controle minimal e $D_{(1\,3)} < D_{(1\,2)} < D_1$.

Consideremos $\pi : F^3(1,2) \longrightarrow \mathbb{R}P^2$ a projeção e $b_0 \in F^3(1,2)$ o flag canônico, isto é, $b_0 = (V_1 \subset V_2)$, onde V_1 e V_2 são os subespaços gerados por $\{e_1\}$ e $\{e_1, e_2\}$, respectivamente, e $\{e_1, e_2, e_3\}$ é a base canônica. Temos que $\pi((1\ 2)b_0) = \pi((1\ 2\ 3)b_0)$ e portanto $\pi(D_{(1\,2)}) = \pi(D_{(1\,3)})$ é o conjunto de controle minimal para $\mathbb{R}P^2$. Analogamente para $Gr_2(3)$, se considerarmos $\pi : F^3(1,2) \longrightarrow Gr_2(3)$ como sendo a projeção canônica, obtemos que $\pi((1\ 2)b_0) = \pi(b_0)$ e portanto $\pi(D_1) = \pi(D_(1\ 2))$ é o conjunto de controle maximal em $Gr_2(3)$. Trocando W_{Θ_1} por W_{Θ_2} obtemos resultados semelhantes.

(c) Consideremos, como no exemplo (b) do capítulo anterior, $G = \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ o grupo simplético real com as decomposições canônicas dadas em tal exemplo e o mesmo subgrupo Θ.

O subgrupo W_Θ é o grupo de permutações em n elementos e portanto, o corolário 4.1 garante que existem no máximo 2^n conjuntos de controle efetivos sobre a Grassmaniana dos subespaços Lagrangianos para cada subgrupo $S \subset \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ de interior não vazio.

Apêndice A

Teoria de Lie Semi-Simples Real

Tentaremos nesse pequeno apêndice dar uma introdução à teoria de álgebras de Lie semi-simples dando as definições básicas e os resultados mais importantes. As demonstrações desses resultados podem ser encontradas em muitas das referências da presente dissertação e portanto serão omitidas.

Um espaço vetorial real $\mathfrak{g}$ munido de um produto anti-simétrico $[,] : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ satisfazendo a identidade de Jacobi

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0,$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, é denominada *álgebra de Lie real*. A *representação adjunta*, $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(\mathfrak{g})$, é definida por $\mathrm{ad}(X)Y = [X, Y]$, onde $X, Y \in \mathfrak{g}$ e $\mathrm{gl}(\mathfrak{g})$ é a álgebra de Lie das transformações lineares de $\mathfrak{g}$ tendo como colchete de Lie o comutador. Pela identidade de Jacobi, cada elemento $\mathrm{ad}(X)$ da imagem da representação adjunta é uma derivação de $\mathfrak{g}$, ou seja, para todos $Y, Z \in \mathfrak{g}$

$$\mathrm{ad}(X)[Y, Z] = [\mathrm{ad}(X)Y, Z] + [Y, \mathrm{ad}(X)Z].$$

A imagem da representação adjunta é uma subálgebra da *álgebra das derivações* de $\mathfrak{g}$ e é denominada álgebra das derivações internas de $\mathfrak{g}$.

Um *automorfismo da álgebra* é uma transformação linear invertível que preserva o colchete, isto é, ϕ tal que $\phi[X, Y] = [\phi X, \phi Y]$, ou equivalentemente $\mathrm{ad}(X)\phi Y = \phi\mathrm{ad}(\phi^{-1}X)Y$ para todos $X, Y \in \mathfrak{g}$. O conjunto dos automorfismos da álgebra $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ é um subgrupo fechado do grupo linear geral $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, das transformações lineares invertíveis de $\mathfrak{g}$. Se ϕ é um automorfismo e $\mathfrak{g}^*$ é o dual de $\mathfrak{g}$, a adjunta $\phi^* : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ é definida como $\phi^*\alpha = \alpha \circ \phi^{-1}$ para $\alpha \in \mathfrak{g}^*$. Como a exponencial de uma derivação é um automorfismo da álgebra, o subgrupo $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ gerado pelas exponenciais das derivações internas é denominado de *automorfismos internos* da álgebra.

Se $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$, a imagem $\mathrm{ad}(\mathfrak{h})$ de $\mathfrak{h}$ pela representação adjunta de $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra da *álgebra das derivações internas* de $\mathfrak{g}$ e é denominada *subálgebra das derivações internas* de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$. O subgrupo $\mathrm{Int}(\mathfrak{h})$ gerado pelas exponenciais das derivações internas de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$ é denomindado *subgrupo de automorfismos internos* de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$.

A *forma de Cartan-Killing* é definida como sendo a forma bilinear simétrica dada pela expressão

$$\langle X, Y \rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)).$$

Uma álgebra de Lie é *semi-simples* quando seu radical solúvel $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ é nulo, o que é equivalente à sua forma de Cartan-Killing ser não-degenerada. Neste caso, sua representação adjunta é injetora, ou seja, seu núcleo é trivial, o que é equivalente ao centro $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ da álgebra ser trivial. Outro fato relevante é que toda derivação é de fato uma derivação interna o que implica que, neste caso, $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ é a componente da identidade de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{h})$ e, portanto, um subgrupo fechado. De agora em diante iremos assumir que a álgebra $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie semi-simples.

A.1 Decomposições de Cartan e Iwasawa

Um automorfismo θ de $\mathfrak{g}$ é uma involução quando tem ordem dois, isto é, $\theta^2 = 1$, onde 1 é a identidade de $\mathfrak{g}$. Dado uma involução θ de $\mathfrak{g}$, a forma bilinear não-degenerada associada à θ é definida por

$$\langle X, Y \rangle_\theta = - \langle X, \theta Y \rangle ,$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. O *subespaço compacto* associado a θ é dado por

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} : \theta X = X\}$$

e o *subespaço simétrico* associado a θ é dado por

$$\mathfrak{r} = \{Y \in \mathfrak{g} : \theta Y = -Y\}.$$

Ainda, temos que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{r}$ e essa decomposição é denominada de *decomposição de* $\mathfrak{g}$ *associada à* θ. Pelas definições de $\mathfrak{k}$ e de $\mathfrak{r}$, tem-se que

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k} \qquad [\mathfrak{k}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{r} \qquad [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{k}$$

o que implica que $\mathfrak{k}$ é uma subálgebra, mas não um ideal.

Uma involução θ da álgebra é denominada *involução de Cartan* se sua forma bilinear associada é de fato um produto interno em $\mathfrak{g}$. Nesse caso, a decomposição $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{r}$ é denominada *decomposição de Cartan de* $\mathfrak{g}$ *associada à* θ.

Teorema A.1. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples real. Então, existe uma única involução de Cartan θ a menos de conjugação por automorfismo interno.*

Se ϕ é um automorfismo de $\mathfrak{g}$, então

$$\langle \phi X, \phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle ,$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Definindo-se $\bar{\theta} = \phi\theta\phi^{-1}$, tem-se que $\bar{\theta}$ é uma involução de Cartan, já que

$$\langle \phi X, \phi Y \rangle_{\bar{\theta}} = \langle X, Y \rangle_{\theta} .$$

Logo, se $\mathfrak{g} = \bar{\mathfrak{k}} \oplus \bar{\mathfrak{r}}$ é a decomposição de Cartan associada a $\bar{\theta}$, então $\bar{\mathfrak{k}} = \phi\mathfrak{k}$ e $\bar{\mathfrak{r}} = \phi\mathfrak{r}$ e assim o teorema A.1 implica no seguinte.

Teorema A.2. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples real. Então existe uma única decomposição de Cartan de $\mathfrak{g}$ a menos de conjugação por automorfismo interno. Além disso, se ϕ é um automorfismo da álgebra e $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{r}$ é uma decomposição de Cartan associada a involução de Cartan θ, então $\mathfrak{g} = \phi\mathfrak{k} \oplus \phi\mathfrak{r}$ é a decomposição de Cartan associada a involução de Cartan $\phi\theta\phi^{-1}$.*

Para que θ seja uma involução de Cartan é equivalente que a forma de Cartan-Killing seja negativa semi-definida, quando restrita a $\mathfrak{k}$, e positiva semi-definida, quando restrita a $\mathfrak{r}$. De fato, isto é consequência da seguinte proposição.

Proposição A.1. *Se $X \in \mathfrak{k}$ e $Y \in \mathfrak{r}$, então* $\mathrm{ad}(X)$ *é anti-simétrica e* $\mathrm{ad}(Y)$ *é simétrica em relação à $\langle \, , \rangle_{\theta}$. Além disso, $\mathfrak{k}$ e $\mathfrak{r}$ são ortogonais tanto em relação à $\langle \, , \rangle_{\theta}$ quanto em relação a forma de Cartan-Killing.*

A próxima proposição mostra que se $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra semi-simples invariante por θ, então a restrição de θ a $\mathfrak{h}$ é uma involução de Cartan de $\mathfrak{h}$.

Proposição A.2. *Sejam θ uma involução de Cartan de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ uma subálgebra semi-simples invariante por θ. Então, a restrição de θ a $\mathfrak{h}$ é uma involução de Cartan de $\mathfrak{h}$.*

Seja G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie semi-simples real $\mathfrak{g}$. A representação $I : G \to \mathrm{Int}(G)$ do grupo nos seus automorfismos internos é definida por $I(g) = C_g$, onde C_g é a conjugação no grupo. Temos que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "\mathrm{d}_1\mathrm{C}_g"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{g} \arrow[d, "\exp"] \\
G \arrow[r, "\mathrm{C}_g"'] & G
\end{tikzcd}$$

A *representação adjunta do grupo*, $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Gl}(\mathfrak{g})$, é definida por $\mathrm{Ad}(g)X = \mathrm{d}_1(\mathrm{C}_g)X$, onde $g \in G$, $X \in \mathfrak{g}$ e 1 é a identidade em G. Pelo diagrama anterior, temos

$$\mathrm{C}_g(\exp X) = \exp(\mathrm{Ad}(g)X).$$

A representação Ad é um homomorfismo analítico, o seu núcleo é o centro $Z(G)$ do grupo e a aplicação induzida no quociente é um isomorfismo analítico entre esse e o grupo $\mathrm{Ad}(G)$. No caso semi-simples. o centro de G é um subgrupo discreto, pois sua álgebra de Lie é o centro $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ da álgebra, que é trivial. O seguinte diagrama também é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "\mathrm{d}_1\mathrm{Ad}"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathrm{gl}(\mathfrak{g}) \arrow[d, "\mathrm{e}"] \\
G \arrow[r, "\mathrm{Ad}"'] & \mathrm{Gl}(\mathfrak{g})
\end{tikzcd}$$

A diferencial da representação adjunta do grupo na identidade é na verdade a representação adjunta de sua álgebra, ou seja, $\mathrm{d}_1\mathrm{Ad}X = \mathrm{ad}(X)$. A comutatividade do diagrama acima nos da então a seguinte igualdade

$$\mathrm{Ad}(\exp X) = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}(X)}.$$

No caso conexo, o grupo adjunto é exatamente o subgrupo dos automorfismos internos da álgebra $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ e, quando a álgebra é semi-simples, é portanto um subgrupo fechado de $\mathrm{Gl}(\mathfrak{g})$. Definindo-se K como o subgrupo de Lie conexo gerado por $\exp\mathfrak{k}$, tem-se que sua imagem pela representação adjunta é um subgrupo compacto.

Proposição A.3. $\mathrm{Ad}(K)$ *é um subgrupo compacto de* $\mathrm{Gl}(\mathfrak{g})$ *de transformações lineares* $\langle\, , \rangle_\theta$*-ortogonais.*

Corolário A.1. *O grupo K é compacto se, e somente se, o centro de G é finito.*

Se H e L são subgrupos do grupo de Lie G, o normalizador $N_L(H)$ de H em L é definido por

$$N_L(H) = \{g \in L; gHg^{-1} = H\}$$

e o centralizador $Z_L(H)$ de H em L por

$$Z_L(H) = \{g \in L; ghg^{-1} = h \text{ para todo } h \in H\}.$$

Se $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, o normalizador $N_L(\mathfrak{h})$ de $\mathfrak{h}$ em L é definido por

$$N_L(\mathfrak{h}) = \{g \in L; \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{h} = \mathfrak{h}\}$$

e o centralizador $Z_L(\mathfrak{h})$ de $\mathfrak{h}$ em L por

$$Z_L(\mathfrak{h}) = \{g \in L; \mathrm{Ad}(g)X = X; \text{ para todo } X \in \mathfrak{h}\}.$$

Ainda, se $\mathfrak{l}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$, então o normalizador $\mathfrak{n}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{h})$ de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{l}$ é definido por

$$\mathfrak{n}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{l}; \mathrm{ad}(X)\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}\}$$

e o centralizador $\mathfrak{z}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{h})$ de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{l}$ por

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{l}; \mathrm{ad}(X)Y = 0 \text{ para todo } Y \in \mathfrak{h}\}.$$

Se $X \in \mathfrak{g}$, o normalizador de X em $\mathfrak{l}$ é, por definição, o normalizador da álgebra abeliano gerada por X em $\mathfrak{l}$. Da mesma forma, o centralizador de X em $\mathfrak{l}$ é o centralizador da álgebra abeliana gerada por X em $\mathfrak{l}$. Denotando-se o centralizador de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$ por $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$, tem-se que $\mathfrak{z}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{l}$.

Proposição A.4. *Se $\mathfrak{l}$ é a álgebra de Lie de L, então as álgebras de Lie de $N_L(\mathfrak{h})$ e de $Z_L(\mathfrak{h})$ são, respectivamente, $\mathfrak{n}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{h})$ e $\mathfrak{z}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{h})$. Se H é um subgrupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$, então $N_L(H) = N_L(\mathfrak{h})$ e $Z_L(H) = Z_L(\mathfrak{h})$.*

Um subespaço $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ é dito invariante por uma transformação linear $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ se $\theta(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$. Se $\mathfrak{h}$ é estável pela involução de Cartan, $\mathfrak{h}$ pode ser escrito como soma direta da seguinte forma $\mathfrak{h} = \mathfrak{k}_{\mathfrak{h}} \oplus \mathfrak{r}_{\mathfrak{h}}$, onde $\mathfrak{k}_{\mathfrak{h}} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}$ e $\mathfrak{r}_{\mathfrak{h}} = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{h}$.

Proposição A.5. *Existe $\mathfrak{a}$ uma subálgebra abeliana maximal contida em $\mathfrak{r}$. Além disso, $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{r}$, soma direta $\langle\, ,\rangle_\theta$, onde $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ é o centralizador de $\mathfrak{a}$ em $\mathfrak{r}$ e $\mathfrak{m}$ o centralizador de $\mathfrak{a}$ em $\mathfrak{k}$.*

Teorema A.3. *Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{r}$ uma decomposição de Cartan da álgebra de Lie semi-simples real $\mathfrak{g}$. Então existe uma única subálgebra abeliano maximal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{r}$ a menos de conjugação por automorfismo interno de $\mathfrak{k}$ em $\mathfrak{g}$. Além disso, se ϕ é um automorfismo da álgebra e $\mathfrak{m}$ é o centralizador de $\mathfrak{a}$ em $\mathfrak{k}$, então $\phi\mathfrak{a}$ é uma subálgebra abeliana maximal de $\phi\mathfrak{r}$ e $\phi\mathfrak{m}$ é o centralizador de $\phi\mathfrak{a}$ em $\phi\mathfrak{k}$.*

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples real, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{r}$ uma decomposição de Cartan associada a involução de Cartan θ e $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{r}$ uma subálgebra abeliana maximal. Então $(\theta, \mathfrak{a})$ é denominado um *par admissível de* $\mathfrak{g}$.

Seja $(\theta, \mathfrak{a})$ um par admissível da álgebra $\mathfrak{g}$. Para cada funcional linear $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ define-se o subespaço

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g}; \mathrm{ad}(H)X = \alpha(H)X, \forall H \in a\}.$$

Se $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$ ele é denominado *espaço associado a raíz* α e o conjunto das raizes associadas ao par $(\theta, \mathfrak{a})$ é definido como

$$\Pi = \{\alpha \in \mathfrak{a}^* - \{0\};\ \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}.$$

O próximo teorema fornece as decomposições em espaços de raízes de uma álgebra de Lie semi-simples real.

Teorema A.4. *Seja $(\theta, \mathfrak{a})$ um par admissível da álgebra $\mathfrak{g}$. Então*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha$$

A decomposição acima é denominada *decomposição em espaços de raízes de* $\mathfrak{g}$ associada ao par $(\theta, \mathfrak{a})$.

Teorema A.5. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples real. Então existe uma única decomposição em espaços de raízes a menos de conjugação por automorfismo interno da álgebra $\mathfrak{g}$. Além disso, se ϕ é um automorfismo da álgebra $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha$ é a decomposição em espaços de raízes associados ao par $(\theta, \mathfrak{a})$, então*

$$\mathfrak{g} = \phi\mathfrak{m} \oplus \phi\mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \phi\mathfrak{g}_\alpha,$$

é a decomposição em espaços de raízes associadas ao par $(\phi\theta\phi^{-1}, \phi\mathfrak{a})$. O conjunto das raízes dessa decomposição é

$$\phi^*\Pi = \{\phi^*\alpha; \alpha \in \Pi\},$$

onde $\phi^*\alpha = \alpha \circ (\phi_{|\mathfrak{a}})$ e

$$\phi^*\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{\phi^*\alpha}.$$

As câmaras de Weyl associadas ao par admissível $(\theta, \mathfrak{a})$ são definidas como as componentes conexas do conjunto $\{H \in \mathfrak{a}; \alpha(H) \neq 0, \forall H \in \Pi\}$. Escolhendo-se uma das câmaras como a *câmara positiva* $\mathfrak{a}^+$, pode-se definir o *conjunto das raízes positivas* associado à $\mathfrak{a}^+$ como $\Pi^+ = \{\alpha \in \Pi; \alpha_{|\mathfrak{a}^+} > 0\}$ e definir

$$\mathfrak{n}^+ = \sum \alpha \in \Pi^+ \mathfrak{g}_\alpha \qquad \text{e} \qquad \mathfrak{n}^- = \sum \alpha \in \Pi^+ \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

Proposição A.6. *Seja $(\theta, \mathfrak{a})$ um par admissível de $\mathfrak{g}$ e ϕ um automorfismo de $\mathfrak{g}$. As câmaras de Weyl associadas ao par $(\phi\theta\phi^{-1}, \phi\mathfrak{a})$ são imagem por $\phi_{|\mathfrak{a}}$ das câmaras de Weyl associadas ao par $(\theta, \mathfrak{a})$. Além disso, se Π^+ é o conjunto das raízes positivas associadas a câmara $\mathfrak{a}^+$ em $\mathfrak{a}$, então $\phi^*\Pi^+$ é o conjunto das raízes positivas associadas a câmara $\phi\mathfrak{a}^+$ em $\phi\mathfrak{a}$.*

Corolário A.2. *Se ψ é um automorfismo interno de $\mathfrak{k}$ em $\mathfrak{g}$ tal que $\psi\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, então $\psi_{|\mathfrak{a}}$ permuta as câmaras de Weyl associadas ao par $(\theta, \mathfrak{a})$.*

Uma terna $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ é denominada *terna admissível de* $\mathfrak{g}$, se $(\theta, \mathfrak{a})$ é um par admissível de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{a}^+$ é uma câmara de Weyl associada a $(\theta, \mathfrak{a})$. Com relação a esta terna, temos a seguinte decomposição de $\mathfrak{g}$.

Teorema A.6. *Seja $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ uma terna admissível de $\mathfrak{g}$. Então,*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+,$$

onde $\mathfrak{n}^+$ é uma subálgebra nilpotente e $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$ é uma subálgebra solúvel.

A decomposição $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$ é denominada *decomposição de Iwasawa* da álgebra associada ao terno $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$. Novamente temos a unicidade de tal decomposição a menos de conjugação, como mostra o teorema abaixo.

Teorema A.7. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples real. Então, existe uma única decomposição de Iwasawa de $\mathfrak{g}$ a menos conjugação por automorfismo interno. Além disso, se ϕ é um automorfismo da álgebra e $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$ é uma decomposição de Iwasawa associada a $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$, então $\mathfrak{g} = \phi\mathfrak{k} \oplus \phi\mathfrak{a} \oplus \phi\mathfrak{n}^+$ é a decomposição de Iwasawa associada a $(\phi\theta\phi^{-1}, \phi\mathfrak{a}, \phi\mathfrak{a}^+)$.*

Seja $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ uma terna admissível de $\mathfrak{g}$ e G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Definimos, K, A e N^+ como sendo os subgrupos conexos de G gerados, respectivamente, pelas exponenciais de $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{n}^+$. Temos então o seguinte resultado.

Teorema A.8. *A aplicação $(k, h, n) \mapsto khn \in KAN^+$, onde $k \in K$, $h \in A$ e $n \in N^+$, é um difeomorfismo entre $K \times A \times N^+$ e G. Além disso, o produto AN^+ é um subgrupo fechado de G e a exponencial é um difeomorfismo entre $\mathfrak{a}$ e A e, também, entre $\mathfrak{n}^+$ e N^+.*

A decomposição $G = KAN^+$ é denominada *decomposição Global de Iwasawa* e é única a menos de conjugação por elementos de G.

A.2 Subálgebras e Subgrupos Semi-simples

Sejam $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ uma terna admissível da álgebra de Lie semi-simples real $\mathfrak{g}$, Π o conjunto das raízes associado ao par $(\theta, \mathfrak{a})$ e Π^+ o conjunto das raízes positivas associado à $\mathfrak{a}^+$. Para cada raíz $\alpha \in \Pi$, define-se o seu representante em $\mathfrak{a}$ como sendo $H_\alpha \in \mathfrak{a}$ tal que

$$\langle H_\alpha, H \rangle_\theta = \alpha(H),$$

para todo $H \in \mathfrak{a}$. A reflexão $r_\alpha : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$, $\langle\, , \rangle_\theta$-ortogonal em relação a H_α, é definida, para todo $H \in \mathfrak{a}$, pela expressão

$$r_\alpha(H) = H - 2\frac{\alpha(H)}{\alpha(H_\alpha)}H_\alpha.$$

Consideremos o conjunto $\Pi_{\mathfrak{a}} = \{H_\alpha \in \mathfrak{a}\,; \alpha \in \Pi\}$. Tal conjunto satisfaz:

1) $\Pi_{\mathfrak{a}}$ é finito, gera $\mathfrak{a}$ e não contém 0;

2) Para todo $H_\alpha \in \Pi_{\mathfrak{a}}$, existe uma reflexão r_α em relação a H_α tal que $r_\alpha(\Pi_{\mathfrak{a}}) = \Pi_{\mathfrak{a}}$;

3) Para todos $H_\alpha, H_\beta \in \Pi_{\mathfrak{a}}$, $r_\alpha(H_\beta) - H_\beta$ é um múltiplo inteiro de H_α.

O conjunto $\Pi_{\mathfrak{a}}$ é denominado *sistema de raízes associado ao par* $(\theta, \mathfrak{a})$.

Um subconjunto $\sum \in \Pi^+$ é um *sistema simples de raízes associado à* $\mathfrak{a}^+$, se o conjunto $\sum_{\mathfrak{a}} = \{H_\alpha \in \mathfrak{a}\,; \alpha \in \sum\}$ é uma base de $\mathfrak{a}$ e se toda raíz positiva é escrita como soma de raízes de $\sum$.

Proposição A.7. *Para toda câmara de Weyl* $\mathfrak{a}^+$*, existe um sistema simples de raízes associado a* $\mathfrak{a}^+$*.*

Se $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ é uma terna admissível de $\mathfrak{g}$ e $\Theta \subset \sum$, então $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+, \Theta)$ é denominada *quadra admissível de* $\mathfrak{g}$.

Um subconjunto Δ de Π é dito *fechado em* Π se, para todo $\alpha, \beta \in \Delta$, satisfazendo $\alpha + \beta \in \Pi$, então $\alpha + \beta \in \Delta$. Para qualquer subconjunto Θ de $\sum$, $\langle\Theta\rangle$ denota o menor subconjunto fechado em Π que contém Θ e $\langle\Theta\rangle^+ = \langle\Theta\rangle \cap \Pi^+$.

A *subálgebra semi-simples* $\mathfrak{g}(\Theta)$ *de tipo* Θ associada a quadra $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+, \Theta)$ é a subálgebra gerada por $\mathfrak{n}^+(\Theta) + \mathfrak{n}^-(\Theta)$, onde

$$\mathfrak{n}^+(\Theta) = \sum_{\alpha \in \langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}_\alpha \qquad \text{e} \qquad \mathfrak{n}^-(\Theta) = \sum_{\alpha \in \langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

Pelo lema [procurar], $\mathfrak{g}(\Theta)$ é invariante por θ e é decomposta como $\mathfrak{g}(\Theta) = \mathfrak{k}(\Theta) \oplus \mathfrak{r}(\Theta)$, onde $\mathfrak{k}(\Theta) = \mathfrak{g}(\Theta) \cap \mathfrak{k}$ e $\mathfrak{r}(\Theta) = \mathfrak{g}(\Theta) \cap \mathfrak{r}$.

Proposição A.8. *A álgebra de Lie* $\mathfrak{g}(\Theta)$ *é semi-simples e* $\mathfrak{g}(\Theta) = \mathfrak{k}(\Theta) \oplus \mathfrak{r}(\Theta)$ *é a decomposição de Cartan associada a involução de Cartan* $\theta_\Theta = \theta_{\mathfrak{g}(\Theta)}$*.*

A subálgebra $\mathfrak{a}(\Theta)$ gerada por $\{H_\alpha; \alpha \in \langle\Theta\rangle\}$ está contida em $\mathfrak{g}(\Theta)$. Denotemos por $\mathfrak{a}_\Theta$ o complemento $\langle\, , \rangle_\theta$-ortogonal de $\mathfrak{a}(\Theta)$ em $\mathfrak{a}$ e por $\mathfrak{m}(\Theta)$ o centralizador de $\mathfrak{a}(\Theta)$ em $\mathfrak{k}(\Theta)$.

Proposição A.9. *Temos que*
1) $\mathfrak{a}_\Theta$ *centraliza* $\mathfrak{g}(\Theta)$*;*
2) $\mathfrak{a}(\Theta) = \mathfrak{g}(\Theta) \cap \mathfrak{a}$*;*
3) $\mathfrak{m}(\Theta) = \mathfrak{g}(\Theta) \cap \mathfrak{m}$*;*
4) $\{H_\alpha; \alpha \in \Theta\}$ *é uma base de* $\mathfrak{a}_\Theta$*.*

Proposição A.10. *A decomposição em espaços de raízes associado ao par* $(\theta_\Theta, \mathfrak{a}(\Theta))$ *é dada por*

$$\mathfrak{g}(\Theta) = \mathfrak{m}(\Theta) \oplus \mathfrak{a}(\Theta) \sum_{\alpha_\Theta \in \Pi(\Theta)} \mathfrak{g}_{\alpha_\Theta},$$

onde

$$\Pi(\Theta) = \{\alpha_\Theta = \alpha_{|\mathfrak{a}(\Theta)}; \alpha \in \langle\Theta\rangle\}.$$

Proposição A.11. *Temos também que*

$$\mathfrak{g}(\Theta) = \mathfrak{k}(\Theta) \oplus \mathfrak{a}(\Theta) \oplus \mathfrak{n}^+(\Theta)$$

é a decomposição de Iwasawa associada a terna $(\theta_\Theta, \mathfrak{a}(\Theta), \mathfrak{a}(\Theta)^+)$*, onde*

$$\mathfrak{a}(\Theta)^+ = \mathfrak{g}(\Theta) \cap \{H \in \mathfrak{a}; \alpha(H) > 0, \forall \alpha \in \langle\Theta\rangle^+\}$$

é uma câmara de Weyl associada ao par $(\theta_\Theta, \mathfrak{a}(\Theta))$*. Além disso,*

$$\Pi(\Theta)^+ = \{\alpha_\Theta \in \Pi(\Theta); \alpha \in \langle\Theta\rangle^+\}$$

é o conjunto das raízes positivas associadas a $\mathfrak{a}(\Theta)^+$ *e*

$$\sum(\Theta) = \{\alpha_\Theta \in \Pi(\Theta)^+; \alpha \in \Theta\}$$

é o sistema simples de raízes associado à $\mathfrak{a}(\Theta)^+$*.*

O grupo de Weyl algébrico $w(\theta, \mathfrak{a})$ *associado ao par* $(\theta, \mathfrak{a})$ é por definição o grupo gerado pelo conjunto $\{r_\alpha; \alpha \in \Pi\}$, das reflexões em torno das raízes do sistema Π. *O grupo de Weyl analítico associado ao par* $(\theta, \mathfrak{a})$ é por definição o grupo

$$W(\theta, \mathfrak{a}) = M^*/M,$$

onde

$$M^* = \{u \in K; \mathrm{Ad}(u)\mathfrak{a}$$

e

$$M = \{u \in K; \mathrm{Ad}(u)H = H \quad \forall H \in \mathfrak{a}\}$$

são, respectivamente, o normalizador e o centralizador de $\mathfrak{a}$ em K. É demonstrado em [1] que tais grupos são isomorfos e por isso denotaremos qualquer um dos dois por W.

Seja $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+, \Theta)$ uma quadra admissível de $\mathfrak{g}$ e G um grupo de Lie conexo cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{g}$. O *subgrupo semi-simples* $G(\Theta)$ *do tipo* Θ de G associado a essa quadra é o subgrupo conexo gerado por $\exp(\mathfrak{g}(\Theta))$.

Proposição A.12. *Sejam $K(\Theta)$, $A(\Theta)$ e $N^+(\Theta)$ as componentes da decomposição de Iwasawa Global de $G(\Theta)$ associado ao terno $(\theta_\Theta, \mathfrak{a}(\Theta), \mathfrak{a}(\Theta)^+)$, tem-se que $K(\Theta)$ é o subgrupo conexo gerado por $\exp(\mathfrak{k}(\Theta))$, $A(\Theta) = \exp(\mathfrak{a}(\Theta))$ e $N^+(\Theta) = \exp(\mathfrak{n}^+(\Theta))$.*

A.3 Subálgebras e Subgrupos Parabólicos

Seja $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+, \Theta)$ uma quadra admissível da álgebra semi-simples real $\mathfrak{g}$. A *subálgebra parabólica de tipo* Θ associada a essa quadra é definida por

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta),$$

onde $\mathfrak{n}^-(\Theta)$ é como na seção anterior e

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$$

é a *subálgebra parabólica minimal de* $\mathfrak{g}$ *associada ao terno* $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$. O *conjunto das subálgebras parabólicas associado ao terno* $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ é o conjunto $\{\mathfrak{p}_\Theta; \Theta \subset \sum\}$. A proposição seguinte mostra que as subálgebras parabólicas são de fato subálgebras.

Proposição A.13. *Para todo $\Theta \subset \sum$, tem-se que:*
1) $[\mathfrak{a}, \mathfrak{n}^\pm(\Theta)] \subset \mathfrak{n}^\pm(\Theta)$*;*
2) $[\mathfrak{m}, \mathfrak{n}^\pm(\Theta)] \subset \mathfrak{n}^\pm(\Theta)$*;*
3) $[\mathfrak{n}^+, \mathfrak{n}^-(\Theta)] \subset \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta)$.

Teorema A.9. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples real. Então o conjunto das subálgebras parabólicas é único a menos de conjugação por automorfismo interno. Além disso, se ϕ é um automorfismo da álgebra e $\mathfrak{p}_\Theta$ é a subálgebra parabólica de tipo Θ associada ao terno $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$, então $\phi\mathfrak{p}_\Theta$ é a subálgebra de tipo $\phi^*\Theta$ associada ao terno $(\phi\theta\phi^{-1}, \phi\mathfrak{a}, \phi\mathfrak{a}^+)$.*

Denotaremos por $\mathfrak{k}_\Theta$ o centralizador de $\mathfrak{a}_\Theta$ em $\mathfrak{k}$, com $\Theta \subset \sum$ e $\mathfrak{a}_\Theta$ o complemento $\langle\, , \rangle_\theta$-ortogonal de $\mathfrak{a}(\Theta)$ em $\mathfrak{a}$.

Teorema A.10. *Seja* $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+, \Theta)$ *uma quadra admissível da álgebra semi-simples real* $\mathfrak{g}$. *Então*

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{k}_\Theta \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+.$$

A decomposição $\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{k}_\Theta \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$ é denominada *decomposição de Iwasawa* de $\mathfrak{p}_\Theta$. A decomposição de Iwasawa da subálgebra parabólica minimal é $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$, pois $\mathfrak{a}_\varnothing = \mathfrak{a}$ e portanto $\mathfrak{k}_\varnothing = \mathfrak{m}$.

Seja G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $G = KAN^+$ uma decomposição Global de Iwasawa associada à terna $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ e

$$K_\Theta = \{u \in K; \mathrm{Ad}(u)H = H, \forall H \in \mathfrak{a}_\Theta\},$$

o centralizador de $\mathfrak{a}_\Theta$ em K. Como $\mathfrak{a}_\varnothing = \mathfrak{a}$, tem-se que $K_\varnothing = M$.

Proposição A.14. *Tem-se que* $K_\Theta = (K_\Theta)_0 M$, *onde* $(K_\Theta)_0$ *é a componente conexa da identidade de* K_Θ.

Proposição A.15. *Seja* $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ *um terno admissível de* $\mathfrak{g}$. *Se* $g \in G$ *é tal que* $\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{a}^+ = \mathfrak{a}^+$, *então* $g \in MA$.

Seja G um grupo conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. O *subgrupo parabólico* P_Θ *do tipo* Θ associado a quadra admissível $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+, \Theta)$ é o normalizador de $\mathfrak{p}_\Theta$ em G.

Teorema A.11. *O grupo* P_Θ *acima admite uma decomposição na forma*

$$P_\Theta = K_\Theta A N^+$$

denominada decomposição de Iwasawa de P_Θ. *Além disso,* P_Θ *é auto-normalizador e sua álgebra de Lie é* $\mathfrak{p}_\Theta$.

Como $\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta)$, $\mathfrak{n}^+ = \mathfrak{n}^+(\Theta) \oplus \mathfrak{n}_\Theta^+$ e $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\Theta) \oplus \mathfrak{a}_\Theta$, tem-se que

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{m}_\Theta \oplus \mathfrak{a}_\Theta \oplus \mathfrak{n}_\Theta^+,$$

denominada *decomposição de Langlands da subálgebra parabólica de tipo* Θ, onde

$$\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}(\Theta) \oplus \mathfrak{n}^+(\Theta) \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta)$$

e

$$\mathfrak{n}_\Theta^+ = \sum_{\alpha \in \Pi^+ - \langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Proposição A.16. *Tem-se que* $\mathfrak{n}_\Theta^+$ *é subálgebra e* $\mathfrak{a}_\Theta \oplus \mathfrak{n}_\Theta^+$ *é ideal de* $\mathfrak{p}_\Theta$. *Além disso,*

$$\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{g}(\Theta) \oplus \mathfrak{z}_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{g}(\Theta))$$

é soma direta $\langle\,\rangle_\theta$*-ortogonal de ideais de* $\mathfrak{m}_\Theta$. *Em particular, tem-se que*

$$\mathfrak{l}_\Theta = \mathfrak{z}_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{g}(\Theta)) \oplus \mathfrak{a}_\Theta \oplus \mathfrak{n}_\Theta^+$$

é um ideal de $\mathfrak{p}_\Theta$.

Referências Bibliográficas

[1] Knapp, A. W. *Lie Groups: Beyond an Introduction*, Birkhause, Boston, 1996.

[2] Chevalley, C. *Theory of Lie groups*, Princeton University Press, 1946.

[3] Helgason, S. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Academic Press, 1978.

[4] San Martin, L. A. B. *Álgebras de Lie*, Editora da Unicamp, 1999.

[5] San Martin, L. A. B. *Grupos de Lie* http://www.ime.unicamp.br/∼smartin/cursos/grupolie-2006.

[6] Varadarajan, V. S. *Lie groups, Lie algebras, and their representations*, Prentice-Hall Inc., 1974.

[7] Warner, G. *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups I*, Springer, 1972.

[8] San Martin, L. A. B. e Tonelli, P. A.:*Semigroup Actions on Homogeneous Spaces*, 2005.

[9] San Martin, L. A. B.*Invariante Control Sets on Flag Manifolds*, Springer-Verlag London Limited, 1993.

[10] San Martin, L. A. B.:*On Global Controllability of discrete-time control systems*, 1995.

[11] Barros, C. J. B. e San Martin, L. A. B.:*Controllability of discrete-time systems on the sympletic group*, SC Letters 90-049, 2001.

[12] San Martin, L. A. B.:*Maximal Semigroups in Semi-Simple Lie Groups*, Transactions of the American Mathematical Society, 2001.