

**MODELOS MATEMÁTICOS PARA DINÂMICA DE POPULAÇÕES
DISTRIBUÍDAS EM ESPAÇOS DE ASPECTO COM INTERAÇÕES
NÃO-LOCAIS: PARADIGMAS DE COMPLEXIDADE**

Este exemplar corresponde à redação final da
tese devidamente corrigida e defendida pelo
Sr. Wilson Castro Ferreira Jr. e aprovada
pela Comissão Julgadora.

Campinas, 18 de junho de 1993



Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi

Orientador

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ciências em Matemática Aplicada.

AGRADECIMENTOS

“... O Tardio encontro,
Passado o tempo de semear o vale,
de colher o fruto.
O desencontro,
do que veio cedo e do que veio tarde”

Cora Coralina

Esta tese é um fruto temporão que deixou de vir à sua estação natural por várias circunstâncias, e só veio agora, em fora de época, porque também outras circunstâncias a fizeram oportuna.

Por estas últimas, devo os meus agradecimentos, que extravasam de muito a formalidade do papel,

Ao vero amigo Rodney Bassanezi, pela sua insistência, sempre solidária, e pelo seu companheirismo descomplicado, que trivializa as dificuldades artificiais e não falha com as de fato,

À Márcia, que esperou com quase-paciência, e certeza não justificada, e às minhas meninas Inês, Leila, Marília, a quem retorno do meu casulo mental com uma desculpa que não as satisfaz,

À Maria de Lourdes Silva que profissionalmente transcodificou as garatujas originais, sem perder a amabilidade, uma virtude maior.

“E me inventei neste gosto de especular idéia ...
Como porque foi que tanto *emendado* começou? Ei,
ei, aí todos esbarram. Compadre meu Quelemém, também.
Sou só um sertanejo, nestas altas idéias
navego mal ...”

Guimarães Rosa

Resumo: Modelos matemáticos para a dinâmica de populações são analisados sob vários pontos de vista enfatizando-se inicialmente o seu papel como novos paradigmas exemplares dos conceitos de múltiplas escalas, transição entre escalas, complexidade e dinâmica emergente.

Apresenta-se uma abordagem generalizada do conceito de modelo matemático reduzido (adimensional) e de complexidade constitutiva e intrínseca.

O fenômeno de transição entre escalas é estudado por meio de uma análise detalhada do conceito de "matching" em alguns problemas de Cauchy tomados como exemplos.

A formulação de modelos matemáticos para a dinâmica de populações que exibem mecanismos de interação individual é discutida por meio do conceito de espaço de aspecto; um modelo macroscópico para representar o fenômeno de crescimento por redes filamentosas é construído e analisado como exemplo, e algumas de suas aplicações biológicas são descritas.

Abstract: Mathematical models for population dynamics are studied under several approaches; in the first place by emphasizing their role as new paradigms for the concepts of multiple scales, transition between them, complexity and emergent dynamics.

A generalized approach is presented for the concept of mathematical model and its intrinsic constitutive complexity; the transition phenomena is studied for initial value problems through a detailed analysis of the heuristic method of "matching".

The formulation of mathematical models for population dynamics which show strong mechanisms of individual interactions is discussed by introducing the concept of aspect space; as an example, a model is constructed to represent macroscopically the phenomena of growth by a network of lines and some biological applications of it are described.

“Science today must search for a source of higher inspiration or perish. There are three reasons for the pursuit of science: one, technical applications, two, the game of chess, three, the way to God. (the game of chess is adorned with competition, prizes and medals).”

Simone Weil-Hermann Haken

Aos meus pais Wilson e Maria,

Às memórias do avô Cândido Álvares Ferreira e do bisavô mestre-escola João Ferreira do Amaral e

À minha família, Márcia, Inês, Leila e Marília, dedico o esforço e a intenção que compartilhamos neste caminho.

Na verdade falei do que não entendia;
coisas maravilhosas demais para mim,
coisas que eu não conhecia

Eis que isto são apenas as orlas dos seus caminhos!
Que leve sussurro temos ouvido dele!
Mas o trovão do seu poder, quem o
entenderá?

Jó 26-14 / 42: 3-5.

ÍNDICE

Capítulo I	Introdução	1
Capítulo II	Os Paradigmas Clássicos da Matemática Aplicada	19
Capítulo III	A Emergência de Novos Paradigmas	43
Capítulo IV	Modelos Matemáticos: Formulação Intrínseca, Espaços de Parâmetros e Complexidade	77
Capítulo V	Transição de Escalas e a Superposição Assintótica	103
Capítulo VI	Afinidades Eletivas: Modelos Matemáticos para Populações Interativas	128
Apêndice I	Efeitos Quase-Locais em Difusão	154
Bibliografia		157

CAPÍTULO I

Introdução

J. Monod: *“There are but two kinds of scholars, Alain* has said: those who love ideas and those who loathe them. In the world of science these two attitudes continue to oppose each other; but both, by their confrontation are necessary to scientific progress. One can only regret (on their behalf) that this progress, to which those which scorn ideas themselves contribute, invariably decides against them”.*

Esta introdução tem a finalidade, aparentemente narcisista e imodesta, de expor alguns aspectos do desenvolvimento intelectual que deu origem à tese de doutoramento do qual ele faz parte, e que julgamos tão interessantes quanto o conteúdo dos capítulos seguintes.

É curioso, por ser talvez incomum para um trabalho de matemática, que uma análise sobre o seu desenvolvimento possa ser adequadamente tecida com a utilização daqueles mesmos conceitos que são os temas centrais do próprio trabalho. Isto pode sugerir que a introdução deva ser lida depois dos outros capítulos mas, conforme se verá durante a sua leitura, o sequencialismo não é o forte desta tese.

Estê cenário de auto referência que se configura, na verdade é proposital e busca focalizar especificamente o *processo intelectual e cognitivo* que deu origem ao trabalho, abstraído da sua estrutura gráfica ou sintática.

A discussão é informal como convém a uma introdução e o aspecto auto referencial não é levado até às últimas consequências. Aqui, simplesmente, faremos uso de algumas metáforas que os modelos matemáticos em biologia possam sugerir, assim como utilizaremos livremente algumas figuras de linguagem decorrentes das descrições destes modelos.

Os fenômenos básicos da dinâmica de populações biológicas, tais como mutação, ativação e inibição, interação e seleção terão os seus análogos detectados neste processo e descritos por meio dos termos correspondentes, que apesar de sugestivos no seu sentido comum, carecem de um certo rigor neste contexto.

Não há, portanto, nesta oportunidade, qualquer pretensão de desenvolver um modelo matemático de cognição, apesar de reconhecermos que há mais do que uma mera superficialidade linguística nestas analogias; este empreendimento seria suficiente para uma outra tese de doutoramento, talvez em outra área.

A proximidade conceitual entre alguns modelos matemáticos de dinâmica de populações, tais como aqueles tratados nos capítulos seguintes, e algumas teorias de cognição, tem sido um tema recorrente já de longa data na literatura. Entretanto, as discussões existentes sobre estas analogias conceituais, apesar de respaldadas pelas autoridades científicas de seus autores (ou talvez, por isto mesmo), tem expressado um entusiasmo apenas cauteloso, em uma postura de respeito ante as grandes dificuldades encontradas para estabelecer conexões explícitas e formais entre estas diversas teorias. De qualquer maneira, o panorama formado pelo conjunto destes sintomas não deixa dúvidas sobre a iminência de uma transição no pensamento científico adjacente, o que certamente resultará em uma síntese de novos paradigmas no sentido analisado no próximo capítulo.*

De fato, atualmente já é possível detectar na literatura a existência de esforços coordenados em psicologia, neurobiologia, inteligência artificial, imunologia etc., que procuram construir modelos matemáticos formais para a descrição de fenômenos cognitivos com base nos conceitos gerais da dinâmica de populações. (Marr [1982], Monod [1971], Franks [1989], Haken [1981], Hadamard [1954], Doyne et.al. [1986], Varela et.al. [1988], Deneubourg-Goss [1989]).

O conceito de dinâmica de populações que adotaremos é abrangente e não restrito aos exemplos clássicos, podendo se referir a conjuntos de indivíduos das mais variadas naturezas (organismos, células, moléculas, partículas, filamentos, ápices de filamentos, subrotinas de programas, sequências gráficas, conceitos abstratos, objetos virtuais e etc.). Estes indivíduos são caracterizados pela sua posição (estado) em um espaço de aspecto onde se processam interações, mutações aleatórias e influências externas que os modificam dinamicamente. Embora aqui os indivíduos possam ser mais gerais, o conceito de população que temos em mente segue de perto a definição

* J. Monod: "For a biologist it is tempting to draw a parallel between the evolution of ideas and that of the biosphere... I shall not hazard a theory of the selection of ideas".

de E. O. Wilson em seu livro "Sociobiology" onde há uma ênfase na existência de relações internas entre os indivíduos, tratando-se portanto de uma população com "estrutura social".

Nesta discussão estaremos particularmente tratando da dinâmica de uma população de *conceitos* que interagem entre si e que eventualmente formarão uma estrutura macroscópica "coerente" em um processo de morfogênese conceitual. Estes componentes são obviamente abstratos e sua representação concreta somente ocorre no "Wetware" formado pela mente fisiológica do autor (e, ao contrário da moda atual, sem a concorrência dos "coprocessadores de silício"). A exposição gráfica não é uma representação fidedigna desta estrutura, que é muito mais rica por ser em grande parte imprecisa e subjetiva e impossível de ser descrita explicitamente por uma sintaxe, mais exata e objetiva.

A descrição e a comunicação de conceitos, e de estruturas conceituais, de natureza "subjetiva" não cabe estritamente na estrutura sequencial e dedutiva do modelo científico grego; é necessário o uso de metáforas e uma abordagem multidimensional e paralela, que é mais próxima da tradição babilônica e judaica. E, para isto, comecemos pelos exemplos que servirão de metáforas.

Segundo uma visão "ingênua" da teoria neurológica de Francis Crick (The Searchlight Hypothesis, Proc. Nat. Acad. Sci. (USA) 81, (1984), 4586), o cérebro humano busca e escolhe seu foco principal de atenção, dentre os muitos estímulos exteriores (visuais, por exemplo) que ele normalmente recebe, fazendo uso de uma dinâmica coletiva da população de terminais oculares no córtex cerebral. Nesta dinâmica ocorrem fenômenos de interações não locais ativadoras e inibidoras, e excitações aleatórias, isto é, os princípios básicos da biologia de organização evolutiva, variação (mutação e interação) e seleção (competição, ativação e inibição), estão presentes no fundamento desta dinâmica.

Portanto, segundo esta visão da teoria de Crick, a atenção é resultado de uma estrutura macroscópica emergente em uma população formada por um grande número de componentes que apresentam uma extraordinária complexidade física e bioquímica na sua micro estrutura.

Modelos analógicos construídos por meio de redes constituídas de uma grande

quantidade de circuitos elétricos simples acoplados, tem sido utilizados recentemente para a simulação das hipóteses básicas desta teoria [Hoppensteadt J. Math. Biol. 29, 1991, 689-891 SIAM Rev. 34-3, 1992, 426-44].

É importante ressaltar aqui os aspectos não-determinísticos, não-dedutivos e não-sequenciais desta *dinâmica coletiva*, o que a torna muito semelhante aos processos ditos paralelos ou evolutivos. Nestes processos, a dinâmica individual e seus componentes é resultado, não apenas de sua história e das influências externas, mas de pequenas flutuações aleatórias e de interações de longo alcance nas formas de reforço (ou ativação) e inibição. A *busca* e a *escolha* final do estado de atenção não se processa de acordo com algum plano central detalhado e com um fim pre-determinado, mesmo porque isto seria impossível de se estabelecer “a priori” na presença de tão grande complexidade. A estrutura final e consciente do sistema, como um todo, emerge evolutivamente (no sentido biológico) e resulta do conjunto distribuído da dinâmica individual de seus componentes.

Estas estruturas *conscientes* (estados de atenção) são em geral efêmeras dependendo do seu “grau” de estabilidade e dos estímulos exteriores. Um sistema destes, cujas estruturas fossem dotadas de um “excesso de estabilidade”, teria um comportamento enrijecido, o que resultaria em um prejuízo quanto à sua flexibilidade e, conseqüentemente, à sua evolução. Por outro lado, uma “carência de estabilidade” tornaria o sistema volúvel e dispersivo e destinado a desaparecimentos voláteis. A medida “certa” destes graus de estabilidade adequados a cada função foi alcançada pelo próprio processo de evolução biológica. No sistema imunológico, por exemplo, que apresenta notáveis características de cognição, como o auto-conhecimento, um excesso ou uma carência de estabilidades das estruturas são igualmente desastrosos para o organismo anfitrião (Segel-Perelson [1988]).

Estas propriedades conferem ao sistema a característica mais notável dos processos evolutivos que é a *adaptabilidade* em meios de grande complexidade.

Uma dinâmica de características evolutivas tem sido recentemente utilizada também na construção de algoritmos destinados a otimização em “paisagens” dotadas de complexidade topográfica. Uma dinâmica simplesmente determinística nestes casos é completamente ineficiente pois seria capturada por qualquer poço local. É por-

tanto necessário que um certo grau de instabilidade associado a flutuações aleatórias seja introduzido para que mínimos mais globais possam ser atingidos.

A cognição em qualquer nível deve ser um processo análogo pois aparentemente, este é o funcionamento do cérebro. Uma sequência dedutiva pode servir de condutor entre dois padrões cognitivos próximos, mas um longo processo dedutivo na verdade não conduz diretamente mas passa por padrões intermediários. É razoável utilizar o exemplo do algoritmo minimizador adaptativo como metáfora e interpretar os pontos mínimos como padrões de cognição. Em situações complexas (topografia complexa) um processo sequencial só será capaz de conduzir a mínimos locais; é necessário nestas situações, dispor de um processo adaptativo ou seja, de um algoritmo adaptativo para que um mínimo global (cognição global) possa ser atingido eventualmente (e não dedutivamente). Esta metáfora dispõe de representação mais concreta do que pode parecer inicialmente através de dispositivos de reconhecimento de padrão (Haken [1986]).

Um algoritmo adaptativo ou genético é um modelo computacional que por meio de um processo evolutivo de variação e seleção em uma população de sub algoritmos busca a solução ótima para um determinado problema. As características de paralelismo e comportamento distribuído, ao contrário de um processo sequencial ou subordinado a um controle central, tornam os algoritmos genéticos exemplos de sistemas de computação emergente onde a solução surge de um comportamento coletivo não planejado em detalhes (Hightower [1992]).

A descrição da teoria de Crick e dos algoritmos adaptativos que vagamente acabamos de realizar, não tem por objetivo “explicar” a dinâmica fisiológica no cérebro do autor e tampouco o mecanismo neurobiológico em si, mas apenas utilizá-la metaforicamente. A emergência ou a morfogênese de estruturas macroscópicas em populações que apresentam dispersão e interação é um fenômeno comum em inúmeras áreas da ciência (Física, Química, Biologia, etc.). A escolha dos exemplos acima (que não são tratados especificamente na tese) tem a vantagem da proximidade circunstancial com o processo cognitivo; um compartilhando o mesmo meio fisiológico e, o outro, compartilhando a abstração dos elementos na população. Esta proximidade entretanto, exige um cuidado maior para se evitar o risco de interpretação equivocadas do

significado dos termos comuns.

No processo em questão, o autor é meramente visto como um “*Wetware*” que representa o “meio” onde ocorre a evolução de uma população interativa de *conceitos* que, eventualmente emerge em uma estrutura cognitiva macroscópica que será naturalmente representada por este trabalho.

O trabalho em si poderia ser encarado na sua realização sintática e gráfica mas optamos por interpretá-lo semanticamente na forma de um corpo coerente de idéias, o que reconhecemos ser menos concreto e objetivo mas não menos real.

É importante distinguir aqui as duas escalas em que o mesmo sistema é tratado; por um lado, através de uma visão macroscópica como que por sobre uma floresta de conceitos sem nenhuma preocupação com a estrutura microscópica mas, ao contrário, tentando captar o panorama global onde ocorre a emergência da estrutura consciente final. Por outro lado, é importante também analisar a mecânica microscópica que diz respeito aos componentes individuais da população. Alguns separam estas escalas em consciente e subconsciente (Simonov [1987]).*

Se a dinâmica macroscópica tem todas as características de um processo paralelo, evolutivo, emergente, por outro lado, a descrição dos seus componentes micro e mesoscópicos é predominantemente sequencial e dedutiva. Os conceitos de curto e médio alcance são (e devem ser) construídos e formalizados por meio de sequências dedutivas que são exemplos da aplicação da metodologia axiomática euclideana. A interação entre estas sequências é de caráter lógico dedutivo embora a ocorrência da interação, dependa em algum grau, de “choques aleatórios”. Não é de todo estranho invocar aqui uma analogia do processo acima com o processo intelectual envolvido em um jogo de xadrez, em que um participante pode formar mentalmente sequências (dedutivas) de lances de curto e médio comprimento e desenvolver uma interação (lógica) entre elas. Entretanto, é obviamente impossível para ele prever

* “R. Jackendoff... Postulates, as do most cognitive scientists, that the computation carried out by the brain are largely unconscious and that what we become aware of is the result of this computation”- F. Crick-C. Koch - “The problem of consciousness” *Sci. Am.* [1992], p. 153-159.

“The creation of new information is the act of memorizing the outcome of random selection. Phenomena of this type are abundant in evolution ... Incidentally, the generation of new information by creative activities, such as writing poetry, also proceeds in the manner of making a random choice (i.e. free choice) to memory” M.W. Volkenshtein in Makarov [1987] p. 87.

sequencialmente o jogo como um todo em virtude da complexidade do processo e de sua dinâmica adaptativa.

O jogo como um todo deve então ser encarado em uma outra escala (macroscópica) onde uma estratégia sequencial dedutiva é completamente inútil ([Geanakopoulos-Gray [1992] Santa Fe Inst. Bull. 6 1991, 4).

É interessante citar também o processo intelectual de composição de uma peça musical tal como descrita por ninguém menos que Mozart em uma carta reproduzida parcialmente por Hadamard [1954 pg. 16]:

“When I fell well and in a good humor ... Thoughts crowd into my mind as easily as you could wish. Whence and how do they come? I do not know and I have nothing to do with it. Those which please me I keep in my head and hum them... Once I have my theme, another melody comes, linking it self to the first one, in accordance with the needs of the composition as whole: the counter point, the part of each instrument, and all these melodic fragments at last produce the entire work. Then my soul is on fire with inspiration, if however nothing occur that distract my attention. The work grows; I keep expanding it, conceiving it more and more clearly until I have the entire composition finished in my head though it may belong. Then my mind seizes it as a glance of my eye a beautiful picture or a handsome youth. *It does not come to me successively*, with it its various parts worked out in detail, as they will be later on, but it is in its entirety that my imagination lets me hear it”.

Guardadas as devidas proporções (no que diz respeito às complexidades), podemos constatar neste caso os mesmos ingredientes dos outros exemplos: sequencialismo dedutivo e mutação aleatória microscópica, concomitemente a uma evolução intuitiva macroscópica e a emergência de uma estrutura.

Y. Manin [1980 pg 31] por outro lado, nos fornece uma interessante interpretação para estes dois níveis de atividade intelectual conforme uma teoria do neurofisiologista K. Pribram:

“In right handed persons the left hemisphere processes information much as does the digital computer, while the right hemisphere functions more according to the principle of optical holographic processing system. In particular the left hemisphere contains genetically predetermined mechanisms for understanding natural language and more generally symbolism, logic, the Latin “Ratio”; the right hemisphere controls forms, Gestalt perception, intuition. The discovery of this physiological basis sheds light on the nature and typology of mathematical intellects and even schools working on the foundation of mathematics”.

A mecânica micro e mesoscópica exige do autor o domínio de técnicas matemáticas e de argumentação lógica sem as quais é impossível um processo interativo; esta é a contribuição ativa consciente do autor.

Uma maior habilidade do autor com as técnicas e as argumentações típicas do assunto resultam em uma interatividade conceitual maior e favorece a formação de novos conceitos, construídos por sequências dedutivas mais longas a partir das anteriormente disponíveis. Mas além disso, é preciso admitir a existência de “mutações conceituais” assim como a formação (ou abandono) de novos conceitos através de correlações não intencionais (i.e., não planejadas conscientemente ou dedutivamente), situações estas que introduzem um aspecto aleatório em escala microscópica. Este fenômeno psicológico de “mutação”, que ocorre, obviamente, com maior frequência em uma “população mais densa” e com maior “capacidade interativa”, é uma espécie de intuição de curto alcance amplamente conhecido e que já recebeu o curioso e justificável nome de “Teoria do Aha!” (Ubiratã [1992]).

A mutagênese mental e a recombinação mental de estruturas conceituais localizadas na memória tem uma marcada característica de imprevisibilidade que pode ser fruto da enorme complexidade do processo interativo e não exatamente de alguma estocasticidade intrínseca, embora esta distinção não seja tão essencial aqui. O fato notável que deve ser mencionado é que o aspecto criativo de qualquer trabalho intelectual é dependente desta imprevisibilidade de associações mentais. Aquilo que pode ser (finitamente) programado e mecanizado não passa de um robô com objetivos (e até trajetórias) perfeitamente previsíveis e, conseqüentemente, sem nenhum valor de originalidade. A imprevisibilidade é um ingrediente indispensável (ainda que não seja, é claro, suficiente) para o ato criativo, isto é, ao ato que gera algo que na máquina

não foi possível gerar dentro de regras pre-determinadas; o ato criativo extrapola as regras mecânicas “finitas”. O seu resultado pode ser reproduzido mecanicamente a posteriori, mas é impossível prevê-lo deterministicamente “a priori”. Sob este ponto de vista poderíamos dizer que um argumento criativo tem todas as características de uma trajetória evolutiva, com variação e seleção natural, perfeitamente compreensível depois de realizada mas imprevisível por regras finitas predeterminadas. Enfim, o ato criativo em si é *irredutível* e uma experiência única, cujo resultado pode ser alcançado por outros caminhos, mas a reprodução do processo original é impossível.

A mecânica microscópica destes “átomos” ou “partículas” de conhecimento dedutivo dentro de um intelecto, evoca imediatamente outra analogia, agora com a teoria evolutiva de macromoléculas de M. Eigen [Die Naturwissenschaften 58, (1971), 1858]. Nesta teoria, é possível uma previsão dedutiva (por métodos mecânicos quânticos) de macromoléculas no limiar da escala macroscópica. Entretanto, a previsão determinística das moléculas “sobreviventes”, ou ainda, do resultado de um processo morfogenético macroscópico que resultaria em estruturas celulares, é impossível de se obter por meio de processos dedutivos-sequenciais.

Da mesma forma, as sequências dedutivas, se observadas em sua escala microscópica, nem sequer sugerem a morfogênese e a emergência de uma macro estrutura cognitiva e, portanto, muito menos possibilitam a predictabilidade da sua forma específica.

O todo macroscópico como algo que não pode ser entendido pela “soma” de suas partes, mas existe como um novo objeto que apresenta características próprias, (não compartilhados pelas partes individuais) tem sido, a “grosso modo”, a base técnica de importantes correntes do pensamento em psicologia e de teorias recentes em inteligência artificial.

Em suma, o processo intelectual de que estamos tratando, tal como todos os

H. Weyl: “Mathematizing may well be a creative activity of men, like language or music, of primary originality, whose historical decisions defy complete objective rationalization” (Kline [1974] p. 1210).

“Podemos compreender deste modo quais os processos possíveis e quais os que logo de partida escusam a ser considerados. A cadeia real de acontecimentos não pode, contudo, ser reconstruída em pormenor”. O que Eigen e Winkler [19, p. 224] dizem acima a respeito da evolução biológica cabe perfeitamente neste contexto.

sistemas mencionados anteriormente, tem uma mecânica microscópica que é predominantemente sequencial, dedutiva, e determinística mas que apresenta uma dinâmica macroscópica dominada por características evolutivas, de adaptabilidade e de paralelismo que é o cenário típico para o fenômeno de morfogênese de estruturas macroscópicas.*

As mutações aleatórias não descaracterizam o aspecto sequencial-mecanista da dinâmica microscópica pois são pequenas flutuações que macroscopicamente só influenciam na sua média e, portanto, poderiam ser perfeitamente substituídos por processos determinísticos equivalentes, tal como se faz nas simulações.

Uma das características mais peculiares e notáveis de processos evolutivos-paralelos é a sua completa instabilidade no que diz respeito à correlação entre a estrutura final e as condições iniciais. Isto está relacionado naturalmente com o fato de que o resultado final é absolutamente impossível de ser descrito por meio de um processo sequencial a partir do estado inicial. Os parâmetros do processo podem ser ajustados para impedir a prevalência do “caos” mas, em sistemas com esta dinâmica, os detalhes da estrutura final, se existir, é sempre uma grande surpresa para as expectativas iniciais.

Outra característica importante destes processos que os distingue claramente de processos sequenciais é a sua *robustês*. O mal “funcionamento” de um componente, ou de vários até, não compromete a dinâmica ou a estrutura final do sistema no sentido de torná-las atípicas ou de suprimí-las. Em sistemas sequenciais, por outro lado, cada elo é de importância crucial e pode ser individualmente responsável pela completa descaracterização do sistema como um todo.

O termo “soma” utilizado anteriormente sugere uma transição regular, suave e gradual entre os modelos de diferentes escalas. Entretanto, o conceito de transição assintótica de escalas a ser tratado no capítulo V, enfatiza exatamente o caráter singular e limite da transição, onde novos conceitos surgem, não por acumulação, mas por transformação irreversível como que resultado de um processo infinito cujo

* G.S. Tseytin: “There seems to be a third distinction between informal methods and algorithms. It is in the use of some kind of pattern recognition (possibly frame identification but not the classical pattern matching) in order to identify the situation and then to select the action”. (Springer Lect. Comput. Sci. 122, 1981.

percurso seria incognoscível para um observador “finito”.*

O conceito de transição assintótica de escalas em modelos matemáticos é um dos temas centrais desta tese e é um processo que ocorre em inúmeras situações (embora nem sempre compreendido ou explicitado) principalmente na Física Clássica: entre modelos cinéticos, de gases e a termodinâmica, entre a mecânica newtoniana e a quântica, entre a teoria ondulatória e a teoria de raios para propagação de ondas, entre a teoria de Euler e a de Navier-Stokes em Dinâmica dos Fluidos e etc.

A morfogênese macroscópica não trivial que ocorre em populações formadas por componentes de estrutura e comportamento interativo muito simples é uma observação já relativamente antiga (tal como o modelo de Ising da mecânica estatística), mas cujas possibilidades só tem sido adequada e extensamente exploradas nos últimos 10 anos, principalmente por meio de simulações com automatas celulares (Wolfram [1984-1986], Langton [1988]), redes neurais (Hertz [1991]), circuitos VCON (Hopernsteadt [1992] e etc.**

Estes modelos de simulação procuram realizar, de uma maneira concreta, a transição de escalas entre mecânicas determinísticas microscópicas e comportamentos fenomenológicos macroscópicos ou, para utilizar a sugestiva linguagem de Schelling [1978], estes modelos relacionam um macrocomportamento com uma micromotivação.

Interessa-nos, particularmente para esta discussão, os processos de transição que relacionam uma dinâmica microscópica de características determinísticas sequenciais com uma dinâmica macroscópica de característica evolutiva, o que também significa, previsível no varejo e imprevisível no atacado. A propósito é interessante destacar a seguinte observação sobre sociobiologia animal (Deneubourg [1991]):

* Z.W. Pyhyshyn: “Gestalt psychologists have enshrined their view in the slogan “The whole is different from the sum of its parts”. But as Minsky and Papert point out, whether this is true or not depends very much on what one means by both ‘sum’ and ‘parts’.”

** A rigor estes modelos não são exatamente de simulação de um fenômeno natural (o que só a natureza poderia fazer como um computador de si própria). Seria mais correto encará-los como modelos paradigmáticos no sentido que Hogeweg e Hesper atribuem ao seu modelo *MIRROR* [Hogeweg-Hesper (1983)].

...“the structures’ complexity is not related to what common sense calls cerebral capacity: Primates (except humans or dolphins) are poor builders, whereas much simpler organisms such as arthropods are good builders. So we must not confuse the fact of building and the potential abilities of the organisms related to its brain”.

Isto significa claramente que a complexidade da estrutura emergente de uma dinâmica coletiva não é necessariamente resultado da complexidade das estruturas individuais de seus componentes, mas deve ser vista como um atributo macroscópico das relações (interações) entre estes componentes. Esta observação exprime, metaforicamente, talvez a principal característica reivindicável para este trabalho.

A análise de transições assintóticas de escalas tem sido feita sob diferentes aspectos e por diversos métodos, e ainda considerando-as nas duas direções. É difícil exagerar a importância destes estudos que tem por objetivo comparar e compatibilizar teorias ou pontos de vista que se apresentam irreconciliáveis (alguns, historicamente), mas que todavia são igualmente necessários ao conhecimento científico.

Em todos os exemplos citados, tal como no processo que estamos tratando, verifica-se que são sistemas abertos a influências oferecidas pelo meio exterior. Estas influências, ou estímulos, desempenham um papel importante na dinâmica do processo e, em algumas situações, podem ser encarados como um controle no sentido de introduzir aspectos fortemente determinísticos no seu comportamento macroscópico.

Consideremos por exemplo que o modelo de Crick seja submetido a um estímulo artificial de intensidade “*ofuscante*” (isto é, acima dos níveis normais de interação e mutação). Neste caso a sua atenção estará permanentemente capturada em uma determinada configuração o que automaticamente elimina qualquer aspecto interativo e aleatório da dinâmica microscópica de busca e escolha. Poderíamos interpretar esta situação como um enrijecimento do sistema ou uma perda da capacidade de decisão.

Este fenômeno, que pode ser denominado figurativamente por Hipnose ou Robotização, tem a característica de suprimir (ou, pelo menos abafar a nível de flutuação quase microscópica) o imponderável, o imprevisível e o eventualmente criativo e subjetivo, em troca de uma dinâmica controlada, programada, sequencial e objetiva.

Esta distinção não deve sugerir precipitadamente que houve uma escolha

maniqueísta por parte do autor, mas é necessário que estes aspectos sejam claramente diferenciados e percebidos quando ocorrerem nesta discussão e nos próximos capítulos.

Uma tese de doutoramento é, na grande maioria das vezes, resultado de um trabalho orientado por um objetivo pre-estabelecido que o mantém artificialmente focalizado ao longo de seu desenvolvimento, ainda que o foco escolhido exerça uma atração natural não mais que tênue sobre o interesse do autor.

As instruções formais e informais, que regulamentam e descrevem o procedimento para a elaboração de uma tese, sugerem, com maior ou menor ênfase, esta estratégia de caráter determinístico que visa, burocraticamente, a assegurar a chegada final a um resultado previamente considerado aceitável. É previsível portanto, que tais instruções sejam quase que invariavelmente acatadas, as vezes até com maior realce do que a pretendida. Com isto, a dinâmica intelectual-conceitual do processo é prematuramente capturada, os aspectos aleatórios e evolutivos são fortemente reprimidos, perdendo-se, conseqüentemente a imprevisibilidade da estrutura final, o que deveria ser uma característica desejável neste contexto.*

Portanto, ao contrário do que sugerem as bulas institucionais, o desenvolvimento do presente trabalho se deu sob influência de uma enorme variedade de estímulos que disputaram, competitivamente entre si no espaço de aspecto fisiológico-conceitual no tálamo cerebral do seu autor ao longo de todo o processo.

É importante ressaltar que isto não significa que houve uniformidade de intensidades entre os estímulos recebidos e nem uma atribuição "a priori" de pesos, o que de resto seria mesmo impossível de ser feito em um meio tão complexo. Durante o processo houve, naturalmente, alguns estímulos que lhe imprimiram um desvio maior, e estes são facilmente distinguíveis pela insistência com que são citados na bibliografia (Segel, Edelstein-Keshet, Murray.). Por outro lado, não consideramos que estas particulares influências (apesar do enorme interesse que despertam) fossem ofuscantes, uma vez que são amplamente diversificadas e por estarem sempre nebulosamente a uma segura distância cognitiva. (Isto é, nunca foram tão detalhadamente estudados ao ponto de que toda a semântica fosse esvaziada de ambigüidades e reduzido a uma

* "You know you've got a complex adaptive system on your hands when it continues to surprise you no matter how long its been running ... Perpetual novelty is highly desirable in a game although it is sheer disaster in aviation systems or telephone networks". J. Holland

fria sintaxe). Isto implica também que o autor não se considera nem pretende-se apresentar como um especialista em todas as referências citadas, se é que isto se faz necessário afirmar.

Utilizando agora metáforas associadas às discussões anteriores, é seguro afirmar que o desenvolvimento deste trabalho, ou seja, o processo intelectual adjacente, teve uma característica claramente adaptativa e não-sequencial; o resultado final que aqui está, não foi atingido, mas simplesmente emergiu. A sua estrutura tem alguma estabilidade, mas precária e certamente vulnerável à flutuações não muito intensas.

Esta estrutura final (até o momento!) jamais foi imaginada (ou imaginável), mesmo pouco antes da sua emergência e, muito menos, portanto, foi resultado de um planejamento inicial.

A não existência de um foco explícito que desempenhasse o papel de um farol orientador em situações de turbulência intelectual, pode parecer um cenário ideal para que um trabalho de tese se perca em reviravoltas inconsequentes sem qualquer chance de se aportar em uma estrutura coerente (com um adicional risco de naufrágio mental para o candidato). Por outro lado a insegurança desta perspectiva pode resultar em um bloqueio psicológico paralizante, o que não foi o caso presente.*

A existência de uma grande variedade de estímulos e de interesses e o domínio das técnicas matemáticas específicas do ramo garantem a interação entre os conceitos absorvidos que resulta em um processo evolutivo com a conseqüente emergência de estruturas. Sem estes ingredientes, o processo correria o risco de ser caricaturizado pela estória daquele macaco que, colocado em frente a uma máquina de escrever, teria sido acometido de uma frenética disposição de golpear todas as teclas e, espantosamente (para nós), acabaria por produzir uma, ou mesmo, várias obras completas de Shakespeare (ou, menos espantosamente, uma tese de doutorado!). Esta piada se,

* A estratégia de se fixar um farol distante a ser perseguido é irresistivelmente associada ao chavão popular da "luz ao fim do túnel" que, naturalmente, evoca sentimentos de esperança e de alívio futuro pelo antegoço do término de um longo suplício. (Seria esta a única satisfação garantida pelo processo?). Neste trabalho, o suplício não se localizou no (ou foi resultado do) pensar e matutar, muito pelo contrário, esta atividade foi a origem e foi motivada ao mesmo tempo pelo prazer intelectual que proporcionava. Um "desconforto" houve, mas, exclusivamente, devido à inconclusão temporária da tese, o que no meio acadêmico-burocrático tem uma peculiar característica de concretizar pavlovianamente inúmeras barreiras artificiais.

por um lado, põe em relevo um dos aspectos essenciais para um jogo evolutivo (no sentido de Eigen-Winkler [1989]), que é a aleatoriedade, por outro lado, obscurece grotescamente (como é próprio de toda piada) a inexistência dos fenômenos iterativos, que são indispensáveis na elaboração de um texto coerente. Não se escreve uma frase e não se a modifica isoladamente; há uma forte influência mútua com outras frases do trabalho e com variados graus de interação, de longo e curto alcance. Afinal, o desfecho de uma tragédia é descrito com base no texto e nos personagens introduzidos anteriormente que, por sua vez, tem os seus tipos psicológicos preparados para o seu papel final.

Um processo intelectual em que os conceitos introduzidos por estímulos exteriores não estejam sujeitos a interações mútuas, com certeza seria melhor descrito como uma sopa de idéias em constante ebulição; obviamente um caso extremo de diletantismo inconsequente. No desenvolvimento do presente trabalho, a profusão de estímulos sempre esteve também submetida a um razoável processo de escrutínio e análise de forma a manter uma certa coesão macroscópica e evitar uma excessiva dispersão. Isto é natural, uma vez que o interesse do autor não pode ser uniforme nos 360° de longitude e 180° de latitude. [A inexistência de um plano sequencial “a priori” com um objetivo fixo na sua extremidade oposta, não significa que o processo tenha sido desencadeado sem a expectativa ou sem o interesse obstinado pela construção de uma estrutura conceitual que pudesse ser apresentada como tese! Pelo contrário, foi realizado um trabalho árduo a nível microscópico dedutivo, que esteve constantemente acompanhado de uma análise macroscópica que foi a responsável final pela emergência (e percepção) de uma estrutura aceitável.]

Sabemos de sobra que esta estratégia é *formalmente* inaceitável pela burocracia acadêmica que não tem meios de confiar na conclusão de um trabalho que se recusa a “submeter” a um plano detalhado, sequencial, e gerenciado por uma autoridade central. A burocracia, em geral, está dotada de uma visão míope que unicamente percebe a micro escala e se vê investida de uma missão planejadora com auto-atribuições de uma “engenharia científica”, presciente de todas as arroelas, buchas e parafusos intelectuais necessários ao desenvolvimento da ciência. Aos seus dirigentes mais zelosos, qualquer atividade intelectual que se entregue deliberada-

mente a um método babilônico é vista como uma reencenação da mencionada estória de um primata ou como receita de uma sopa intelectual.

Curiosamente a própria burocracia também já foi descrita, de passagem, por Haken [1983] como uma estrutura resultante de uma dinâmica coletiva de macrocomportamento cuja emergência poderia ser previsível sob condições muito gerais com respeito à dinâmica de interação cultural e social a nível de indivíduos e grupos.*

Se por um lado uma saudável cautela ainda não recomendaria a tentativa de representação deste fenômeno na forma de um modelo matemático, (para evitar divagações semelhantes àsquelas cometidas com a teoria da catástrofe), por outro lado, não há dúvidas de que já existe uma bagagem de conceitos disponíveis em teorias de população com micro-estruturas de dominação (Hogeweg-Hesper [1983], Jager-Segel [1982]), e o comportamento social (Schelling [1978]) suficientes para uma análise mais coesa e talvez pre-formal desta interessante questão. Estaria a burocracia acadêmica, em particular, disposta a este exercício de auto-análise?

Um maior desenvolvimento desta questão, todavia, foge completamente do objetivo deste prefácio (e às qualificações do autor). Portanto, este é um ponto oportuno para iniciarmos a descrição da estrutura final assumida pelo presente trabalho, ainda com a ajuda das metáforas que ele próprio sugere.

Esta ênfase na estrutura como o teor principal da tese, é de importância fundamental para a apreciação do trabalho, uma vez que o seu conteúdo específico é localizado muito mais na forma e no seu aspecto funcional de que na substância. Este trabalho não é uma análise de técnicas e ferramentas matemáticas e suas aplicações (embora algo inédito ocorra no capítulo V) e não é o estudo de um ou mais problemas biológicos específicos por meio de modelos matemáticos (embora um destes problemas seja tratado com ênfase particular no capítulo VI). Também, este trabalho não é sobre matemática ou sobre biologia ou ainda sobre matemática aplicada à biologia; é sobre a matemática “ aplicanda”, ou seja, a matemática na sua interação por duas vias (influenciando e sendo influenciada) com a biologia. É também um estudo de novas abordagens para a representação de fenômenos biológicos em dinâmica de populações

*“I readily admit my doubts that the growth of bureaucracy can be prevented unless the entire company or the structure of public administration collapses, when the whole cycle will start afresh” Haken [1981]. Esta observação publicada a mais de uma década não poderia ser mais atual.

por meio de conceitos e simbolismos matemáticos assim como a influência destas abordagens na formulação de novos modelos e problemas matemáticos. O termo população, como já dissemos, é empregado com um sentido amplamente aberto no que diz respeito à natureza de seus indivíduos componentes e tem a sua característica mais relevante no que se refere às interações individuais (microscópicas) entre estes indivíduos e o significado destas quanto ao comportamento macroscópico da população. Interessa-nos portanto muito mais os seus aspectos funcionais do que os de substância; os indivíduos das populações não nos interessam pelo que são, mas pelas interações que apresentam uns com os outros e pelo fenômeno coletivo resultante (mais uma vez realizam-se assim as analogias entre o próprio trabalho e os objetos de seu estudo).

Como consequência da natureza do processo que lhe deu origem, é natural esperar que a estrutura desta tese dificilmente poderia ser descrita linearmente, i.e., sequencialmente. A sua organização, capítulo a capítulo, parágrafo a parágrafo, é artificial do ponto de vista conceitual e tem sua razão de ser unicamente devido a uma óbvia necessidade de caráter gráfico. Na verdade, mais vezes do que percebemos, os trabalhos são abordados e analisados sequencialmente por uma mera conveniência ditada pela sua representação gráfica e não será aqui a ocasião de experimentar qualquer inovação neste sentido. Portanto, toda a sua estrutura foi talvez artificialmente acomodada na forma convencional.

Como o trabalho não foi fruto de uma busca delineada de um alvo pre-programado por meio de cadeias dedutivas, em estados subsequentes, lineares e bem ajustados, ele não pode ser apresentado como uma trajetória ou um caminho com duas extremidades. Não há um ponto de partida único seguido de um adensamento que leve a um "gran finale" ou a um clímax. Uma tese de doutoramento apresenta tradicionalmente sua estrutura guiada por um tronco essencialmente linear e sequencial de uma árvore cujos ramos, ou foram impedidos de se desenvolver por um prematuro aborto ou foram posteriormente desbastados. No presente trabalho os ramos tiveram espaço para se desenvolverem até onde pudessem florescer, mesmo que não igualmente viçosos. Conseqüentemente, a sua estrutura conceitual pode também ser descrita, metaforicamente, como uma rede filamentar consituída de seus diversos ramos e ápices, e apresentando inúmeros processos de bifurcação e anastomose tal

como, o modelo matemático tratado no capítulo VI. A estrutura de rede filamentar (dedutiva) apresentada por este trabalho, nos permite apontar ainda mais uma de suas características através da analogia com o conceito de ponto crítico em sistemas de percolação que, se não apresentam uma conexão sequencial que una um começo a um fim, por outro lado, qualquer ponto pode ser lógica e naturalmente ligado a qualquer outro ponto da estrutura. Esta característica lhe fornece uma coerência estrutural que talvez possa ser admitida em lugar da sequencial que é normalmente esperada nestes casos. Esta estrutura mesoscópica formada por filamentos sequenciais dedutivos com o rigor usual da matemática aplicada e ápices conclusivos com algum interesse pelo seu valor técnico, é a estrutura que deve ser de fato considerada como a tese de doutoramento.

Apesar do esforço intelectual exigido para a sua elaboração e da importância que atribuímos a esta parte do trabalho, a sua designação como *Introdução* visa, de certa forma, colocá-la em uma posição formalmente destacada do corpo central. Com isto, procuramos evitar que a reivindicação de originalidade da tese inclua a sua apresentação como exemplo de si mesma o que poderia provocar perigosas perturbações no aconchego lógico exigido para seu julgamento. (Ou, talvez ainda mais grave, que pudéssemos ser acusados da tentativa de utilização do princípio do “bootstrap”; aquele que prevê a possibilidade de se soerguer puxando pelos seus próprios cadarços).

E assim sendo, melhor seja que esta *Introdução* não mais se alongue, a menos que a imagem absurda do rabo que sacode seu respectivo cachorro passe a ser uma figura de linguagem auto-descritiva.

P. Davis - R. Heash - “Como vimos, toda explicação científica tem seu aspecto metafórico”.

CAPÍTULO II

Os Paradigmas Clássicos da Matemática Aplicada

1. Os Paradigmas Clássicos

O termo “Paradigma” foi introduzido no estudo da história da ciência por Thomas Kuhn em seu influente trabalho “The Structure of Scientific Revolutions”, em 1962, emprestado da gramática e empregado com um sentido não muito preciso, ou não muito bem entendido. Entretanto, a riqueza conceitual que envolvia o termo fez com que ele fosse posteriormente utilizado nas mais diversas situações o que levou o próprio Kuhn a escrever um longo *Post Scriptum* explicativo sobre o assunto para a segunda edição de seu livro (Kuhn [1972]).

Neste adendo, o termo “Paradigma” é associado explicitamente a um conjunto de crenças, doutrinas,* problemas, teoremas e resultados, na qualidade de agentes ou peças que tiveram uma função peculiar no desenvolvimento da ciência (Kuhn [1970]).

É importante enfatizar este seu caráter de função social dentro da comunidade científica afim, independente de sua validade. Isto é, os conceitos, idéias, crenças e resultados podem ser verdadeiros, significativos ou não; o que mais interessa neste ponto de vista é o seu papel histórico científico.

Aparentemente esta abordagem só teria importância e influência extrínseca ao desenvolvimento das ciências que seguiria impávida o seu destino autônomo.

* Para evitar o termo “crença” que têm conotações religiosas, é comum substituí-lo pelo termo “princípio”, considerado mais científico. Entretanto, não há distinção substancial a fazer entre um e outro.

Entretanto, é mais do que claro que os “rumos” da ciência e a sua estrutura dependem inevitavelmente do contexto social global e da comunidade científica relacionada.

Além disso, como teremos oportunidade de argumentar, a ciência tem conexões mais profundas do que superficialmente aparenta com as estruturas neuropsicológicas dos indivíduos que nelas trabalham, o que significa, do homem como espécie.

A demonstração de um teorema matemático, que seria um exemplo máximo de objetividade, na verdade, é um ato de aceitação social (Manin [1982], Haken [1981]).

O termo Paradigma tem por finalidade a representação de um conceito que se refere ao processo de intermediação, nos dois sentidos, entre o desenvolvimento interno da ciência e o contexto social que a envolve.

A utilização que faremos do termo está, em linhas gerais, de acordo com esta exposição de Kuhn, mas o sentido desejado emergirá de contextos em que será empregado, sem compromissos com alguma definição rigorosa. De qualquer forma, é interessante ressaltar de saída que há duas *funções históricas* distintas desempenhadas pelas teorias clássicas que iremos denominar de paradigmas. A primeira, tem o sentido configurado ao nível de uma metateoria, onde o paradigma tem um papel de modelo de teoria científica, independente do objeto tratado, e carrega uma informação tácita de caráter metodológico. Assim, a teoria geométrica tal como exposta nos “Elementos” de Euclides é um paradigma clássico como *Método Axiomático*, como também é o “Principia Mathematica” de Newton.

Por outro lado, o mesmo “Principia” é também um paradigma intrínseco ao nível interno da ciência natural com respeito aos *conceitos de determinismo, preditabilidade e causalidade (mecanismo)*.

Portanto, quando nos referirmos ao paradigma newtoniano, o contexto deverá deixar claro em qual função histórico-científica tem o seu sentido empregado.

A função do paradigma euclideano como programa e conjunto de balizas conceituais para o desenvolvimento da geometria, e da matemática em geral, embora de grande importância histórica, não será enfatizada neste trabalho.

O objetivo deste capítulo é apresentar um esboço do nosso ponto de vista com respeito ao *surgimento* dos novos paradigmas resultantes da interação entre a

matemática e a biologia teórica. Este processo tem todas as características de uma revolução científica em fermentação (no sentido de Kuhn [1970]), cujo impacto na sociedade humana deverá ser igualmente revolucionário mas de consequências imprevisíveis.

Uma descrição rápida é apresentada a seguir dos principais paradigmas clássicos e tem por finalidade montar o cenário conceitual científico que serve de contraste, diante do qual é possível uma melhor percepção do processo de formação e desenvolvimento dos novos paradigmas.

O método axiomático junto com os conceitos de dedução lógica e demonstração, tem as suas raízes históricas na Grécia antiga (Kline [1974]) onde foram desenvolvidos e cultivados com extraordinário vigor, estabelecendo-se a partir daí como base metodológica para a construção do conhecimento científico.

Dentre todos os trabalhos escritos pelos gregos antigos e que chegaram aos tempos modernos, não há dúvidas de que o “Elementos” de Euclides (300 A.C.) se sobressai, tanto como o seu maior edifício intelectual como pela enorme influência que exerceu sobre toda a cultura ocidental, constituindo-se no mais importante paradigma da história da ciência.

Como já dissemos, o paradigma euclideano nos interessará aqui principalmente quanto à sua função de modelo exemplar de teoria científica e, mais especialmente, como modelo exemplar do método *axiomático*.

Durante quase dois milênios o modelo axiomático de teoria científica esteve indissociável de sua exemplificação euclideana, um monumento admirado mas, cuja perfeição, era considerada inatingível por outras ciências, especialmente às que se distanciassem da matemática. (Aliás, por motivos diversos, não é raro o intuito de desenfatar as origens óbvias que a teoria geométrica de Euclides tem na experiência física). Inúmeros trabalhos que utilizaram o método axiomático foram escritos antes e depois de Euclides, mas o modelo do método axiomático continuou sendo representado soberanamente pelo “Elementos”.

O rompimento desta exclusividade só ocorreu no final do século XVII com a publicação do “Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (1687 D.C.) de Isaac Newton e isto se deve, não pela modificação do método mas pelo seu impacto como

teoria bem sucedida para a explicação de fenômenos naturais. Os objetos da teoria euclideana eram as formas geométricas estáticas e o objetivo da teoria newtoniana era a dinâmica destas formas materiais e, sob este ponto de vista, eram complementares mas distintas.

Entretanto, com respeito à sua estrutura conceitual, ambas se constituem em paradigmas exemplares do mesmo método axiomático.

A influência do paradigma euclideano no trabalho de Newton é evidente, não só pela sua fundamentação em postulados iniciais não demonstrados e explicitamente enunciados, (a sua base axiomática), como também pelas demonstrações que procuram se manter estritamente dentro da linguagem geométrica de Euclides. Desta forma a semelhança é tanto na arquitetura como na construção dedutiva do método. O sucesso da teoria lhe conferiu entretanto uma dinâmica própria que modificou rapidamente a sua interpretação e também o seu formalismo. A sua base axiomática passa a ser vista como um conjunto de “leis naturais” e a construção da teoria passa a utilizar-se de uma linguagem matemática mais sintética inventada por Leibniz. O método axiomático, contudo, permanece inalterado na sua essência e, mais do que isto, ganha assim um novo reforço com a aceitação da teoria newtoniana por quase toda a comunidade científica.

O método axiomático teve desta maneira reafirmada a eficiência de suas duas principais características representadas pela *capacidade de síntese axiomática e de codificação lógico-dedutiva*.

A geometria euclideana sempre foi admirada pelo seu extraordinário edifício intelectual fundamentado em bases axiomáticas sólidas e irrefutáveis (“evidentes por si mesmo”) e construído (ou, potencialmente construtível) através de processos dedutivos considerados objetivos, verificáveis e, mais do que isto, *inevitáveis*. Uma vez estabelecidos os axiomas (consistentes, pois que fisicamente interpretáveis) acreditava-se que o edifício completo estaria virtualmente e potencialmente determinado, independente do observador a quem só restava explorá-lo.

É interessante notar que Aristóteles (384-322 A.C.), e aparentemente também Euclides, não exigiam que os axiomas fossem “evidentes por si mesmos”; a sua veracidade deveria ser comprovada pela verificação das suas consequências diante da

realidade (Kline [1974]).

Esta é uma atitude adotada com frequência na física teórica moderna, principalmente depois do sucesso das teorias de Maxwell (eletromagnetismo) e de Schrodinger (mecânica ondulatória) que, todavia, partiam de hipóteses que dificilmente poderiam ser consideradas “evidentes por si mesmas”.

Observemos que esta *crença* na determinação automática e objetiva da teoria uma vez estabelecidos os axiomas, ou “leis”, embora não sendo, obviamente parte das hipóteses e nem demonstrada por uma metateoria, foi dominante no meio científico por séculos e, desta forma é parte dos paradigmas euclideano e newtoniano.

Esta crença quando explicitada é denominada de princípio de *completude* do modelo axiomático para a teoria em questão.

A capacidade de síntese codificadora das “leis” de Newton e a crença de que elas poderiam ser dedutivamente “expandidas” para incluir qualquer fato observável da mecânica (que, na época, considerava-se como abrangente a todos os fenômenos naturais), não poderia deixar de exercer uma revolucionária influência em todo o pensamento científico, filosófico e até mesmo religioso nos anos que se sucederam à publicação do “Principia”.

É como se o universo estivesse encapsulado compactamente nas Leis de Newton, e a chave dos mistérios de todos os fenômenos estaria concedida ao gênero humano através de uma capacidade dedutiva. Seria esta a árvore do conhecimento?

A religiosidade mística da época não aceitou, obviamente, que tamanho poder estivesse à disposição do homem e, para salvaguardar o poder divino e o destino humano da inexorabilidade lógica, estabeleceu-se nos meios mais piedosos o princípio vitalista de que a natureza se utiliza de fenômenos inatingíveis por esta teoria. Consequentemente, ela se constituiria na depositária inviolável do seu livre arbítrio (Dillenberger [1960] e Hooykaas [1988]).

(Em meios mais materialistas, nem o próprio homem era excluído da teoria newtoniana). Mas, ainda que a teoria newtoniana se restringisse apenas à matéria bruta ou apenas ao sistema solar, (que era o seu objetivo inicial), a aceitação de que todos os fenômenos relacionados estariam inexoravelmente determinados pelas “Leis” de Newton e pela “Leis” da “Razão” (mesmo que não se soubesse como deduzí-los),

continuava sendo extremamente difícil de ser aceita ou insuportável.

Por outro lado, esta situação parecia inescapável devido aos extraordinários sucessos que a teoria newtoniana vinha acumulando na explicação de inúmeros fenômenos, especialmente em astronomia.

As grandes dificuldades encontradas para a explicação de fenômenos mais “terrestres”, como a luz, o calor, a eletricidade e o magnetismo por meio da teoria newtoniana, diminuíram o entusiasmo na sua utilização como fundamento universal mas não diminuíram a crença da sua capacidade como tal.

Como consequência destas dificuldades outras teorias físicas foram surgindo baseadas em novas “leis” naturais dando origem à ótica, à termodinâmica e ao eletromagnetismo, que, tanto quanto possível eram construídas de acordo com o modelo axiomático. Entretanto, não se considerava (implicitamente, pelo menos) que a estrutura axiomática seria indispensável nestes casos uma vez que eram tratadas como situações provisórias. Estas teorias eram denominadas *fenomenológicas* pois considerava-se que as suas “Leis” não eram fundamentais mas fenômenos. Acreditava-se que, mais cedo ou mais tarde, seriam incorporadas à teoria newtoniana como consequências das “Leis” fundamentais de Newton.

O esforço no sentido de reduzir fenômenos não mecânicos às “Leis” de Newton foi iniciado pelo próprio Newton no estudo da ótica e da propagação do som e continuado logo em seguida por D. Bernoulli (teoria cinética dos gases) Euler (hidrodinâmica), passando por Gibbs e Boltzmann (termodinâmica) e chegando até o começo do século XX com a teoria atômica de Bohr (M. Born - *Atom Mechanik*, Berlin 1924).

As leis da ótica geométrica, as leis da termodinâmica, as equações de Maxwell; as equações de Navier-Stokes e etc. se constituíam para cada área respectiva em uma codificação, extremamente sintética, de acordo com o modelo axiomático de teoria científica. Uma vez estabelecidas as “Leis” fundamentais, sejam elas na forma de equações matemáticas ou na forma descritiva, a estrutura da teoria estaria virtualmente (ou, potencialmente) determinada e codificada como em uma rede filamentar dedutiva; bastava então apenas torná-la explícita, o que seria feito percorrendo-a guiado pela sua própria lógica construtiva.

Se por um lado esta capacidade de síntese era um triunfo do método axiomático aplicado à física, e um triunfo da própria física, por outro lado, verificou-se rapidamente que esta mesma extraordinária compactação de informações tornava a sua decodificação uma tarefa sobrehumana. Tomando como exemplo as equações de

$$\text{Navier-Stokes, } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u \\ \text{div } u = 0 \end{cases}, \text{ formuladas em meados do século XIX}$$

e consideradas como uma excelente teoria fenomenológica para a hidrodinâmica, é impossível não se maravilhar com a estupefata variedade de informações codificadas nestas duas linhas incompletas. (Basta considerar os fenômenos observáveis cotidianamente na dinâmica dos fluidos).

A questão que se coloca, passado o primeiro entusiasmo, é: como resgatar estas informações e, mais, como julgar de antemão, onde se encontram aquelas poucas que realmente nos interessam!

O paradigma newtoniano como modelo do método axiomático na física é, desta forma, idealizado até as suas últimas consequências por meio de uma busca deliberada das “Leis Fundamentais” que permitiriam, construir (ou supor construtível) dedutivamente todo o universo do conhecimento natural.

A pedra filosofal aparentemente retorna, assim, com uma roupagem abstrata mas não menos cobiçada. Entretanto, não nos interessa aqui este aspecto ideológico mas o aspecto *metodológico* resultante que é estreitamente ligado ao método axiomático e que denominaremos de *reducionismo*.

O reducionismo como ideologia é a busca (e crença na existência) de uma teoria axiomática unificada para todo o conhecimento matemático, ou todo o conhecimento físico.

O reducionismo como método dentro da ciência é a incorporação de macrofenômenos em teorias axiomáticas microscópicas. Ambas as expressões do reducionismo contém embutidas (explícita ou implícitamente) a crença de que os fenômenos microscópicos são mais simples e, portanto, mais fundamentais como pontos de partida de um edifício axiomático. A invalidade deste fato será discutida mais adiante.

O reducionismo levou à concepção de “Leis” consideradas universais como

a conservação de energia e a conservação de quantidade de movimento linear e angular que na mecânica newtoniana eram consequências dos axiomas fundamentais. Entretanto, estes conceitos se tornaram tão arraigados no pensamento científico que nenhuma teoria física seria considerada ortodoxa sem que eles fossem adequadamente definidos e suas leis de conservação tivessem uma formulação demonstrável dentro da teoria.

O conceito de “Lei de Conservação” é uma das mais importantes balizas conceituais firmadas na ciência natural pelo paradigma newtoniano e que intrinsecamente adquire um papel de princípio fundamental e também exerce uma grande influência como princípio metodológico. As teorias de dinâmica populacional que serão abordadas em próximos capítulos terão as suas formulações baseadas sempre em “Leis de Conservação”.

O reducionismo em matemática atingiu o seu clímax com a teoria dos conjuntos e com a escola formalista encabeçada por David Hilbert [1862-1943] que chegou a declarar categoricamente em seu famoso discurso de encerramento do Segundo Congresso Internacionald e Matemática em Paris no ano de 1900: “Nós sempre ouviremos um eterno desafio: eis o problema, procure a sua solução. Você pode encontrá-la por meio da razão pura, pois em matemática não existe *Ignorabimus*”. Em seguida ele apresentou uma lista de 23 problemas que, segundo ele, deveriam se constituir no desafio e programa para a matemática no século XX.

Dentre estes problemas, Hilbert incluiu a axiomatização da física em uma clara demonstração de credulidade no reducionismo. Se este congresso tivesse se realizado uma ou duas décadas depois, quando a física clássica estava sendo abalada em seus princípios fundamentais, dificilmente esta questão teria sido colocada. Entretanto, na mudança do século, havia uma crença generalizada de que os princípios básicos da física tinham sido descobertos, bastava desenvolvê-los. Hilbert apenas formalizou esta crença.

A história da ciência está repleta destes arroubos de entusiasmo do reducionismo ideológico desde Descartes* até aos nossos dias.

* Descartes chega a afirmar em seu desvario racionalista que tudo o que existe ou pode existir deve ser buscado dedutivamente a partir de certos *germes de verdade que pertencem por natureza à nossa alma*. E ele fazia o que pregava, tendo deduzido a água, o ar, o fogo e os minerais em

Com o advento triunfante da mecânica quântica, o reducionismo newtoniano clássico dava mais um passo e, na sua maior exacerbação chegou a reduzir o próprio homem a muito menos do que o pó bíblico; nesta nova fantasia o homem não passaria de uma mera combinação de ondas probabilísticas.*

É interessante contrapor o pensamento de Poincaré (um matemático francês, apenas de nascimento e, sob muitos aspectos, oposto ao seu contemporâneo alemão Hilbert) com respeito ao método dedutivo:

“Qual é a natureza do raciocínio matemático? É realmente dedutivo como se acredita? Uma análise aprofundada nos mostra que não é nada disso, que ele participa em uma certa medida da natureza do raciocínio indutivo e que essa é a causa de sua fecundidade... A característica essencial do raciocínio por recorrência é que ele contém, digamos assim, condensado em uma única fórmula um número infinito de silogismos”. A opinião de Poincaré é valiosa não só por sua importância na matemática, mas também pelo seu interesse no processo criativo, no que ele era um mestre notável. Em biologia o reducionismo contemporâneo está representado pelo esforço concentrado durante as últimas décadas (desde a descoberta de F. Crick e J. Watson em 1953) no desvendamento de fenômenos biológicos a partir da bioquímica, e da biologia molecular e, mais recentemente, pelo projeto Genomia.

O método axiomático representa um esforço consciente para eliminar completamente de uma teoria científica características antropomórficas tal como o conhecimento subjetivo, a intuição, o propósito, a adaptabilidade e a associação de idéias, enfim, a imprevisibilidade. A perfeição ideal seria atingida com uma teoria objetiva que existisse independentemente do observador(**). Não é de se admirar portanto que esta perfeição em uma teoria se torna tão mais difícil quanto mais ligado à natureza humana ela estivesse, o que não impediu todavia a existência de esforços nesse sentido seu “Principia Philosophiae”. (Hooykass [1988]). Mas é necessário lembrar que Descartes era um dualista no sentido de acreditar que outros princípios seriam necessários para o estudo da vida, que para ele tinha profundas raízes divinas.

* “Reductionism, ... It is an attitude... In the early sixties people thought they could solve Schrodinger Equation, but still one can't compute a protein conformation and an organism might have 10^{14} cells. H. Bremmermann *in* Conrad [1992].

(**)G.H. Hardy [1928]: “Mathematical Theorems are true or false; their truth or falsity is absolutely independent of our Knowledge of them. In *some* sense, mathematical truth is part of objective reality”

por parte de pensadores de liderança em suas respectivas áreas como K. Arrow [1963] e G. Debreu em economia, J.H. Woodger [1937] em biologia, N. Chomsky (Lyons [1970]) em linguística, Clark Hull em psicologia, John Rawls em direito e etc. (*) A matemática representada pelo paradigma euclideano e, mais tarde, a física pelo paradigma newtoniano, se constituíam na única certeza absoluta do humanismo em um universo subjetivo e social imprevisível; estas seriam as únicas áreas onde não poderiam haver dúvidas, surpresas e nem *ignorabimus* (como dizia Hilbert), e o programa científico era estende-las como tal para todas as direções do conhecimento humano.

A certeza de que todo conhecimento em uma teoria axiomática *existia independentemente do observador* (desde que pudesse ser formalmente descrito) e que ele seria acessível a partir dos axiomas por meio de um processo *dedutivo finito* era aceita tacitamente e acriticamente pela comunidade científica em geral, excluindo-se, naturalmente, alguns lógicos e filósofos que fazem do questionamento a sua profissão.

A função do modelo axiomático era, portanto, não só de sintetizar o conhecimento mas também de transmitir e ensinar o que é obviamente indispensável para o seu papel social.

É interessante observar que o método axiomático dedutivo é uma invenção da civilização grega e, aparentemente, não foi utilizada pela matemática babilônica (2000 AC - 300 AC) que a precedeu (Kline [1974], Neugebauer [1969]).

Pelo que se conhece da cultura babilônica, o conhecimento matemático era adquirido através de exemplos práticos resolvidos que se constituíam assim em paradigmas exemplares de técnicas.

O processo de codificação e decodificação (isto é, a transmissão de conhecimento) na antiga Babilônia era realizado por meio do mecanismo denominado *conhecimento tácito* por M. Polanyi [1967]. A validade das soluções e dos métodos era essencialmente decidida através de uma verificação da concordância dos seus resultados com a realidade descrita pelo problema em algumas circunstâncias. Ao contrário do que pode parecer inicialmente a um intelecto de formação na tradição grega e formalista, este procedimento é amplamente utilizado, não apenas na vida prática onde

(*) A propósito, veja o interessante artigo de L. C. Bresser Pereira na *Folha de São Paulo* de 20 de junho de 1993 (Domingo) sobre a impotência do método axiomático-dedutivo em Economia.

ele é dominante, mas também em atividades de caráter eminentemente científico e, de fato, é o único teste possível para as teorias físicas. Nenhuma argumentação lógica, por mais longa e sofisticada, seria suficiente para estabelecer as teorias de Newton, de Maxwell ou de Schroedinger na física, se não fossem disponíveis alguns resultados interessantes que concordassem cabalmente com a realidade material observada.

Se encarada pela metodologia Babilônica, a teoria de Newton seria validada não pelas suas características intrínsecas ou pela sua estrutura dedutiva, mas pelo conjunto de problemas e questões resolvidas que descrevem bem a realidade física se considerarmos os dois sentidos de paradigma mencionados por Kuhn [1970]; a teoria newtoniana como um conjunto de regras dadas pelo modelo axiomático se enquadra em um deles, e como conjunto de questões resolvidas se enquadra no outro sentido. Isto é, a teoria newtoniana pode ser considerada um paradigma tanto no sentido grego como babilônico.

O conflito entre as metodologias de ensino das tradições grega e babilônica é ainda vivo nos dias de hoje e motivo de posições radicais em ambos os lados. A solução salomônica que estabelece a verdade em algum lugar entre os extremos parece se aplicar aqui também.

Para finalizar esta seção e para referencia futura, é necessário explicar alguns aspectos da discussão anterior sobre a função social (no meio científico) que o método axiomático teve como molde conceitual. Esta ênfase será importante como contraste para as apresentação dos novos paradigmas e ressaltará assim o ineditismo que eles introduzem.

O método axiomático tem, a nosso ver, duas características principais, primeiro, a sua capacidade de *síntese codificadora* de uma enorme massa de conhecimentos em uns poucos axiomas, e, segundo, o fato de que esses conhecimentos são armazenados por este método em uma estrutura de tal forma que possam ser *decodificados* de múltiplas maneiras pelo *processo dedutivo*". É claro que o processo dedutivo (e a sua representação simbólica em linguagem escrita ou matemática) se constitui na essência do método axiomático, mas aqui estamos incluindo também o processo dedutivo informal. Este processo, não nasceu com a matemática, ou mesmo com a ciência, e é utilizado naturalmente por qualquer ser humano na vida cotidiana. A ca-

pacidade de executar processos dedutivos sequenciais é inata e pode ser considerada como um dos atributos da natureza humana. A evolução dotou o cérebro humano desta capacidade dedutiva que tem uma função nitidamente *cognitiva*. Portanto, o processo dedutivo é um procedimento cognitivo e esta conexão entre um método científico e a neuro psicologia humana é de grande importância pois tem fundamentos muito mais concretos do que uma mera especulação filosófica. Manin [1981]. Se esta hipótese for afirmativa, mesmo que sob fortes ressalvas com respeito à interpretações dos termos, poderíamos dizer metaforicamente, que o processo dedutivo é uma sombra do funcionamento do cérebro. Resta saber se outras facetas que são notoriamente manifestadas em diferentes situações, como no reconhecimento visual por exemplo, que é obviamente não-dedutivo, também tem, ou poderia ter uma representação matemática.

Como último aspecto a ressaltar, observemos que o reducionismo é um sub produto ou suposto aperfeiçoamento extremado do método axiomático e se constitui em uma atitude de busca (ou uma crença na existencia) de uma base axiomática fundamental cuja teoria deve abranger todo o conhecimento.

Nas ciências naturais o reducionismo também inclui a crença de que os fenômenos microscópicos são mais simples e elementares do que os macroscópicos e, portanto, seriam os mais adequados como universo de referências para o conjunto de postulados básicos que deve incluir as “leis fundamentais”. Como já afirmamos, não nos interessará, nas proximas seções, o aspecto ideológico sobre a crença na existência de um conjunto de “leis fundamentais”, mas a atitude reducionista que vê no modelo axiomático baseado na micro-escala, como o único modelo verdadeiramente científico únicos para a construção do conhecimento científico.

Os novos paradigmas desafiam o reducionismo e o modelo axiomático dedutivo como métodos e como princípios.

3. Paradigma Newtoniano: espaço de fase, determinismo e predictabilidade, causalidade, e reversibilidade^(*)

Na seção anterior abordamos a teoria newtoniana (e a euclideana) como modelo do método axiomático, ou seja, quanto à sua influência, como modelo e alvo de perfeição idealizada, sobre o desenvolvimento das ciências naturais. Diríamos assim que o ponto de vista adotado foi essencialmente externo à teoria, e se referia à sua forma e a sua estrutura, e, em certa medida, independente, neste aspecto, do objeto tratado por ela.

Nesta seção, por outro lado trataremos da influência que o paradigma newtoniano exerceu sobre as ciências naturais por meio dos conceitos e resultados que fazem parte da própria teoria e que extrapolados do seu sentido interno se transformaram em moldes conceituais do pensamento científico moderno.

Estes dois aspectos são, como não poderia deixar de ser, intimamente inter-relacionados e em algumas situações de difícil separação.

A apresentação que faremos trata de conceitos e fatos da história científica amplamente conhecidos e disseminados na literatura, (Prigogine-Stengers [1984], Bunge [1965], Kuhn [1970], Bochner [1968] Feuer [1974]), razão pela qual seremos suficientemente breves, ocupando apenas o espaço necessário para que o nosso ponto de vista, (que não está contido e nem é uma decorrência natural das abordagens tradicionais), possa ser exposto de forma razoavelmente clara.

A teoria newtoniana, vista como uma estrutura dedutiva que dispõe de uma realidade objetiva automaticamente determinada pelas suas leis fundamentais, é constituída por um conjunto de afirmativas descritas que interrelacionam fenômenos observáveis. Entretanto, tratando-se de uma teoria de caráter dinâmico, é necessário qualificar a nível interno e de uma forma mais operacional este processo descritivo que, afinal, é a forma pela qual ela é enunciada. A teoria newtoniana descreve ou, dá os métodos para isto, mas ela não explica e nem trata dos “porquês”, apenas dos

(*) O termo “*predictabilidade*” embora não conste dos dicionários de língua portuguesa, não é estranho à língua, uma vez que os vocábulos predizer/predição/predito, com uma raiz latina comum, fazem parte do vernáculo. O termo “*previsibilidade*”, que consta dos dicionários, não atende ao sentido desejado que é mais próximo ao do ato de *dizer* e *descrever* do que *ver*.

“comos”. Isto é, não se argumenta sobre uma precedência lógica aos seus postulados, apenas são estabelecidas as interrelações entre eles e os conceitos secundários, o que é a essência do modelo axiomático.

O primeiro conceito básico da teoria newtoniana se refere ao *estado do sistema* (que foi enunciado de maneira mais explícita por Laplace) que, no caso mecânico, se refere às posições espaciais e às velocidades dos pontos materiais do sistema. A descrição do sistema é feita então pela atribuição do seu estado em cada instante do tempo. O tempo, por sua vez, é um conceito primitivo que é o fundamento da estrutura sequencial da teoria newtoniana.

O conceito de espaço de fase para a descrição do *estado* de um sistema é um dos pilares fundamentais da ciência contemporânea que vem sendo generalizado e adaptado com extraordinário sucesso em diversas áreas, particularmente em biologia teórica e mais especialmente em dinâmica de populações onde surge com a designação de *espaço de aspecto* ou *espaço de formas*.

O conceito de espaço de fase está intimamente ligado à dinâmica do sistema como a sua descrição suficiente para que seja concretizado o seu processo de evolução temporal. Isto significa que o espaço de fase como descrição de um sistema é considerado *correto* se nele estiverem as informações suficientes para que a sua dinâmica seja estabelecida. Na mecânica newtoniana, as posições das partículas são insuficientes para descrever o estado do sistema e a descoberta fundamental de Newton foi compreender que as posições e as velocidades formavam o espaço de fase *correto*.

A descrição deste processo temporal é a essência das leis de Newton e se expressa por meio de um instrumento especialmente desenvolvido para este fim; o cálculo diferencial e integral, ou mais especificamente, as equações diferenciais ordinárias.

A história recente da matemática (últimos 300 anos) tem mostrado vários exemplos de sua interação com outras ciências, mas este certamente é o exemplo mais notável e importante de uma ampla e profunda simbiose que vem desde as suas origens comuns até os dias de hoje. Nas últimas décadas a interação entre estas duas teorias gêmeas tem sido refortalecida, com enormes consequências para a física e para a matemática, uma tradição que, vindo de Newton até V.I. Arnold, passa

por Euler, Gauss, Lagrange, Laplace, Cauchi, Jacobi, Lyapunov, Poincaré, Birkhoff, Siegel, Moser, Kolmogorov e outros nomes balizares nas duas ciências.

Considerando-se esta longa e fértil promiscuidade, não é surpreendente que ambas teorias tenham gerado e co-participado de uma mesma estrutura conceitual que, na mecânica, é representada pelo *princípio determinista* e, nas equações diferenciais pela *teoria de existência e unicidade de soluções para o problema de Cauchy*. O princípio determinista é uma *crença* de que, dadas as condições iniciais no espaço de fase, então toda a história futura (e passada) do sistema estaria automaticamente e *objetivamente determinada*.

Observemos que este princípio não fazia parte dos postulados iniciais de Newton e não era resultado de uma demonstração “rigorosa”, mas foi sempre aceita de forma generalizada nos meios científicos e, portanto, como parte do paradigma newtoniano.

A expressão mais famosa deste princípio foi enunciada presunçosamente por Laplace embora com uma esperta dose de cautela incluída no condicional: “se as posições de todas as partículas me forem dadas predirei o futuro do universo”. De onde vem a noção caricata do demônio de Laplace que teria a capacidade de conhecer estes dados iniciais com toda a precisão e conseqüentemente poderia dispor do controle do universo. É claro que o significado principal desta afirmação não está no seu aspecto operacional mas na objetividade que pretende estabelecer para a dinâmica universal.

Não é possível deixar de observar a evidente semelhança conceitual entre o princípio determinista e a crença de que o modelo axiomático, por meio de seus axiomas básicos, teria determinado automaticamente e objetivamente toda a estrutura conceitual da teoria. Os teoremas fundamentais da teoria do problema de Cauchy foram demonstrados pela primeira vez pelo próprio Cauchy (em várias formas) nas primeiras décadas do século XIX e incluídas nas suas famosas notas de aula “Equations Differentielles Ordinaires” de 1823-24 na École Polytechnique de Paris. É interessante observar que as demonstrações de Cauchy nestas notas de aulas foram consideradas na época como excessivamente “geométricas” (isto é, rigorosas no sentido do paradigma euclideano) tendo ele por isso, recebido uma severa admoestação

do ministro de Estado encarregado e, posteriormente, na reincidência, proibido de imprimi-las, (Waterhouse [1982]).

Estas demonstrações, até o trabalhos de Poincaré e Lyapunov, tiveram uma influência reduzida essencialmente à teoria matemática, uma vez que se referiam a um intervalo de tempo finito. É interessante observar aqui o paralelo entre a demonstração de existência de solução que não a exibia “concretamente” pelo método tradicional (formulas geométricas ou séries) e o princípio determinista que supõe a existência da história do sistema sem se referir a um descrição “concreta” dela para efeito do observador. Na mecânica newtoniana há muito que se aceitava implicitamente o princípio determinista e sem nenhuma preocupação na limitação do tempo. De qualquer maneira, podemos constatar mais uma vez o entrelaçamento conceitual denso entre o método axiomático e o determinismo.

Este aspecto não passou despercebido aos cultores do formalismo a julgar pelo que dizia S.C. Kleene no seu livro “Introduction to Metamathematics” (Van Nostrand 1952): *“When the meaning of technical terms are thus left out of account we have arrived at the stand point of final axiomatics. In this structure the theory is no longer a system of meaningful propositions but one sentence as sequence of words which in turn are sequence of letters. We say by reference to one another which sentences are axioms and which sentences follows as immediate consequences from other”*. Ora, se as regras de sintaxe para inferência forem perfeitamente definidas e finitas, nada melhor do que uma máquina newtoniana para realizar estas construções sequenciais que não exigiram um interpretação semântica.

A demonstração mecânica de teoremas poderia desta maneira substituir com muitas vantagens o laborioso e *errático* desenvolvimento científico humano! A procura de uma máquina que reproduzisse o raciocínio lógico é antigo e remonta a G. W. Leibniz [1646-1716] que obteve a sua idéia de um teólogo medieval R. Lull [1235-1315]. (Kline [1974]). A sua expressão mais recente é enunciada pela chamada tese de Church *“Every mathematical process that leads from hypothesis to theorems is effective ... in the sense that can be reproduced by means of a sequence of purely syntactic production rules processing appropriate initially given strings. It can thus be obtained from an algorithm and an algorithm in turn can be embodied in a Turing*

machine” (Rosen [1966 pg. 21]).

A formulação e a demonstração de teoremas supunha-se assim que poderiam ser reduzidos a um programa “finito” construído por regras “finitas”, onde o termo “finito” tem um sentido implícito, mas não ainda entendido, de “realizável na escala humana”.

Como consequência natural do entrelaçamento conceitual do método axiomático formalista e da máquina determinística, surgiu também na década de 1950 um vigoroso esforço no sentido de desenvolver uma máquina de tradução automática com base na regras gramaticais de Chomsky (Pylyshyn [1986]) que não teve o sucesso que poderia se prever inicialmente. (Conrad [1992]). Enfim, era parte do paradigma a crença de que o próprio cérebro humano, mesmo nas suas mais notáveis realizações de criatividade, seria redutível a uma geringonça de polias e engrenagens e eixos bem ajustados. O computador viria apenas tornar este suposto mecanismo um pouco mais rápido e silencioso!

O conceito de espaço de fase, embora de uso disseminado na mecânica, especialmente depois que trabalhos de Lagrange e Hamilton, só foi enfatizado na teoria de equações diferenciais ordinárias pela abordagem geométrica de Poincaré no início do século XX.

O princípio determinista é indissociável e tem também um sentido entrelaçado com o do conceito de espaço de fase, se é que não poderíamos dizer que formam um círculo vicioso. Isto porque consideramos que uma descrição do estado de um sistema só se constitui um espaço de fase se este contém todos os elementos necessários para a determinação de sua dinâmica, não mais e não menos. O estado de um sistema mecânico que descreve posição velocidade e aceleração também não é apropriado pois está sobredeterminado, assim como se fosse constituído apenas pela posição, estaria subdeterminado. A escolha correta e exata do espaço de fase para a descrição do estado de um sistema, neste caso, é equivalente à obtenção de um princípio de determinismo para a sua evolução temporal neste espaço.

A extensão do conceito de espaço de fase e a invenção do simbolismo matemático para a descrição do meio contínuo constitui-se em um salto extraordinário para ampliação da teoria newtoniana, tentada pelo próprio Newton e conseguido por

ninguém menos que Euler no início do século XVIII. A partir daí, o princípio determinista foi automaticamente incorporado também à Hidrodinâmica e à elasticidade através das equações Navier (1821) e Navier Stokes (1854).

A próxima extensão notável do conceito de estado de um sistema e em espaço de fase ocorreu com a Mecânica Quântica que, no sentido reducionista newtoniano aparentemente eliminava de saída a validade de um princípio determinístico. A insistência reducionista em considerar o universo microscópico formado por partículas com uma individualidade caracterizada pela sua delimitação no espaço, impossibilitou a concepção de um estado de fase adequado, uma vez que o estado de um sistema no sentido da mecânica newtoniana seria indefinível microscopicamente. O impasse foi resolvido, a contragosto de muitos, com a introdução do conceito de espaço de fase representado por uma função de onda (ou por uma sequência infinita por Heisenberg) o que matematicamente significava descrever o estado do sistema em um espaço de dimensão infinita. O formalismo matemático não era revolucionário pois já havia sido elaborado por Euler 200 anos antes. Por outro lado, a interpretação física de Born introduziu uma revolução científica pois postulava o *princípio* de que a função de onda representava uma distribuição de probabilidade, o que, de certa forma, dava uma satisfação ao reducionismo ainda à procura de partículas. Entretanto, este conceito reducionista de partícula como fundamental estava irremediavelmente abalado. Uma vez determinado o espaço de fase, seja como um conjunto de funções ou de sequências infinitas, a dinâmica foi imediatamente formulada por Schrodinger e Heisenberg-Born respectivamente, que são representações analíticas da teoria abstrata desenvolvida por Dirac e Von Neumann 1928-1932 onde o estado do sistema é descrito em um espaço de Hilbert.

A história detalhada desta revolução científica, desencadeada no final do século XIX e rapidamente concluída nas primeiras décadas do século XX, já foi amplamente analisada em diversos trabalhos (Feuer[1974], Whittaker, Jammer, Bunge [1979] e etc. e não vem ao caso. Neste exemplo, interessa-nos de maneira especial apenas o processo de reformulação do conceito de espaço de fase como uma definição “*correta*” de estado do sistema que conduziu imediatamente à obtenção de uma teoria determinística *neste contexto*. A lição que podemos retirar do desenvolvimento

da Mecânica Quântica quanto à esta questão é de importância fundamental para o desenvolvimento dos argumentos do presente trabalho.

A desistência (às vezes inevitável) de descrever uma população por meio do critério reducionista, ainda que isto possa parecer natural e necessário, deixa-nos com um impasse quanto à escolha adequada de um espaço de fase. O único critério que nos resta é o de que a descrição do estado do sistema contenha informação suficiente que permita estabelecer uma dinâmica *com determinismo neste espaço*. Tal como acontece na Mecânica Quântica, a dinâmica resultante não será, obviamente determinista quando encarada com uma lente reducionista. Encontramos diversos exemplos em biologia teórica cuja descrição por um modelo matemático enfrenta problemas semelhantes.

Os primeiros modelos matemáticos utilizados para a representação da dinâmica de população de seres vivos (Malthus, Verhulst, Pearl, Kermack-Mackendrick, etc. Bassanezi-Ferreira [1988]) tomavam como descrição do estado da população apenas o número de indivíduos (em escala) e o espaço de fase se limitava à reta real. A utilização de espaços de fase formados por conjuntos de funções (que descrevem os estados da população por meio de densidades) só é iniciado em biologia de forma generalizada na década de 1950 com as equações de Von Foerster (populações com estrutura etária) e as equações com processos de difusão espacial. Os espaços de forma e os espaços de aspecto como conceitos ampliados para a descrição do estudo de uma população foram introduzidos em ecologia (Levin-Segel [1982]) e em imunologia (Segel-Perelson [1988]) não tendo porém alcançado uma disseminação muito grande na literatura. Em todos estes modelos o princípio do determinismo é válido dentro do espaço de fase escolhido.

Para finalizar é bom ressaltar que o princípio do determinismo supõe a existência objetiva da história do sistema dado o seu estado inicial mas não se refere ao aspecto operacional do observador, ou seja, quanto a sua “capacidade” de descrevê-la matematicamente ou sua “capacidade cognitiva” para compreendê-la. Embora a distinção explícita entre estes dois aspectos não fosse feita, talvez por considerá-la inócua, o estudo de certos fenômenos como a turbulência em hidrodinâmica tornou necessária uma análise desta questão. Apesar de se acreditar que as equações de Navier-Stokes

descreviam corretamente a hidrodinâmica dentro do princípio determinista, era óbvio que, no caso turbulento, seria impossível descrever matematicamente o fenômeno dentro dos métodos usuais da mecânica newtoniana isto é, por meio de uma função ou por aproximações “tão boas quanto desejadas” desta. Formava-se assim um conceito mais restrito dentro do princípio determinista que denominaremos de *predictabilidade* que tem um caráter fortemente subjetivo, circunstancial e operacional uma vez que depende de uma escolha do observador e das técnicas e ferramentas disponíveis. De acordo com este princípio qualquer estado “futuro” do sistema que ora parte com dados iniciais conhecidos é *describível* dentro de um critério predefinido. Este critério no paradigma newtoniano é, naturalmente a aproximação numérica tão boa quanto desejável; supondo-se independentemente uma capacidade de obtenção dos dados iniciais na precisão necessária.

O conceito de predictabilidade e sua importância estão obviamente ligados à utilização prática da ciência quanto ao seu aspecto construtivo, como na engenharia, ou de mera precisão, como em astronomia e meteorologia. A impredictabilidade sempre foi considerada como uma das características mais notáveis do ser humano e, com frequência, considerada com um de seus grandes “defeitos”, o que conferia não apenas uma conotação antropomórfica e portanto diametralmente anti-científica mas, para piorar mais ainda, ela estava associada à parte menos nobre do seu caráter. Esta conjunção de fatores dava à predictabilidade estrita uma característica de condição *sine qua non* para a aceitação de uma teoria científica dinâmica e era uma crença indissociável da teoria newtoniana.

A resolução analítica e qualitativa do problema de Kepler foi um selo inicial que deu foros de dogma a esta crença mais tarde ratificada por inúmeras outras previsões acuradas em astronomia, uma ciência com fortes matizes religiosos e portanto, apropriada para este tipo de confirmação.

A não resolução do problema de três corpos por métodos e critérios análogos aos utilizados para o problema de Kepler foi encarado apenas como uma temporária ineficiência matemática (ou analítica) que o desenvolvimento futuro haveria de sanar. Considerando-se que as funções elementares (isto é, as “formulas”) são basicamente algoritmos finitos de cálculo verifica-se mais uma vez como a crença na “completude

finita” do modelo axiomático está intimamente ligada ao determinismo operacional representado pelo conceito de predictabilidade dentro da teoria newtoniana.

Nos últimos anos quando se observou que alguns modelos matemáticos, muito mais simples do que as equações de Navier-Stokes, também apresentavam uma dinâmica “turbulenta” e que a resolução de problemas inversos (tal como determinar uma distribuição original a partir do estado atual de um sistema em difusão) eram “mal postos”, o conceito de predictabilidade ganhou uma nova importância em matemática aplicada. É importante ressaltar que a predictabilidade é um conceito ligado ao espaço de fase do sistema e não tem um sentido geral absoluto. A predictabilidade do movimento de um fluido visto como um meio contínuo (cujo estado é descrito por funções) não pode ser referir ao espaço de fase mecânico das moléculas.

Da mesma maneira a capacidade de descrever (tão bem quanto se desejar”) alguns aspectos do sistema mas que todavia fornecem uma descrição incompleta dos seus estados, não poderá ser considerada como predictabilidade.

A predictabilidade no sentido newtoniano anterior a Lyapunov e Poincaré referia-se fundamentalmente à descrição da trajetória do sistema no espaço de fase em um *tempo finito*, qualquer que fosse seu comprimento (Laplace). Este conceito tem a sua representação matemática na teoria de equações diferenciais, formulada pelos teoremas de Poincaré sobre a dependência da solução com respeito aos parâmetros (e condição iniciais) do problema de Cauchy. Havia naturalmente uma suposição tácita de que todas as informações de interesse sobre o sistema estariam contidas aí. (E, de fato estariam se o modelo matemático fosse uma imagem fiel do fenômeno mecânico o que, obviamente, não é, e isto era plenamente sabido apesar da falta de entusiasmo em reconhecê-lo ou até mesmo uma disposição marota em não enfatizar dúvidas para benefício das crenças^(*)). Com a introdução dos conceitos de estabilidade, recorrência, existencia de oscilações, conjuntos limite e da teoria geométrica em geral, que se preocupam essencialmente com o comportamento limite do sistema (não-decidíveis em tempo finito), novos aspectos, agora de caráter qualitativo) foram naturalmente acrescentados ao âmbito do conceito de predictabilidade. Portanto, predictabilidade

(*) A possibilidade de colisão no problema de N corpos em tempo finito, (e a demonstração da sua ocorrência em situações concretas) aparentemente não abalou esta crença.

inclui a capacidade de descrição operacional de todo e qualquer fenômeno que venha a ocorrer no futuro com base exclusivamente no estado atual do sistema. Detectamos aqui novamente uma analogia entre conceitos relacionados ao modelo axiomático que supõe todos os fatos da teoria expressáveis por algoritmos finitos (e, portanto, programáveis por máquinas sequenciais) e a predictabilidade no sentido generalizado acima.

Curiosamente uma teoria que se pretende objetiva era desta forma rodeada de crenças arraigadas que têm características nitidamente antropomórficas, pois em todas as ocorrências do termo “finito” é inegável que, implicitamente nele se sustentando por “realizáveis na escala humana”. Jamais se aplicaria o termo “finito” com tanta facilidade se houvesse alguma evidência de que o processo não poderia ser realizado em um tempo menor do que 10^{17} seg. (a idade do universo!

Um terceiro conceito que faz parte do paradigma newtoniano e que pretendemos ressaltar será denominado “causalidade” e que será utilizado com um sentido muito restrito a sistemas dinâmicos fechados. Com isto evitamos entrar em um emaranhado de conceitos filosóficos onde não acreditamos ser possível uma percolação em tempo geológico e capacidade restrita como a nossa e que, afinal, já está exemplarmente mapeado em Bunge[1979]. (É verdade que todos estes sentidos tem o seu papel histórico como paradigmas, mas nos interessa aqui apenas o uso do termo no contexto de um universo newtoniano). Neste contexto a causalidade está ligada ao conceito de tempo e precedência ou, como se diz vulgamente “nenhum efeito pode preceder alguma de suas causas”, e que todo efeito tem alguma causa precedente”. Se considerarmos um estado atual dos sistema como o *efeito*, o princípio de causalidade afirma que ele provem de algum outro estado precedente no tempo. Obviamente, não há unicidade de causa uma vez que a trajetória entre o estado precedente determinado e o estado atual passa por vários outros estados precedentes que são igualmente causas do mesmo efeito. (É claro que está implícita aí a continuidade da trajetória). A unicidade aqui se refere à trajetória progressiva do sistema, ou seja, não é possível que duas trajetórias distintas se interceptem em um mesmo estado (atual). Em suma, do ponto de vista das equações diferenciais ordinárias (autônomas) a causalidade é representada pela existência e unicidade de uma trajetória que *atinge* o estado atual.

(Ao contrário da afirmação sobre sua existência a partir do estado atual em diante, que é a representação do princípio ou determinismo). Poderíamos dizer então que o conceito de *causalidade* a que nos referimos, pode ser formulado como um determinismo para tempos anteriores e os princípios de causalidade e determinismo são juntos representados pelo teorema de existência e unicidade da solução que *passa* por um determinado ponto em um determinado instante, que é, de fato, o resultado geralmente encontrado nos teoremas *clássicos* de Cauchy.

A causalidade é frequentemente pensada também como um determinismo operacional, ou seja, como uma predictabilidade para tempos pregressos; a este conceito denominaremos de *causalidade operacional*.

O princípio de causalidade no sentido como adotamos é, a primeira vista, uma consequência lógica do princípio do determinismo desde que se considere também válido o *princípio de simetria do tempo*. As leis de Newton não distinguem de fato a direção do tempo e os teoremas de existência e unicidade para o problema de Cauchy produzem trajetórias que, não apenas inicia mas, *passa* pelo estado atual. Este resultado foi demonstrado por Cauchy para equações diferenciais ordinárias e estendido também para equações diferenciais parciais extremamente gerais por Cauchy mesmo e por S. Kowalewskaya[1850-1891] e outros. [Bers-John-Schechter, 1964]

O princípio de simetria do tempo, ou reversibilidade, sendo um fato demonstrável dentro da dinâmica de Newton passa portanto a ser considerada como princípio universal pelo reducionismo newtoniano. Assim como a possibilidade de colisões no problema de $n \geq 3$ corpos não abalou significativamente a crença no determinismo e na predictabilidade, também as demonstrações de caráter estritamente local dos teoremas de existência não se constituíram em dificuldade para a aceitação destes e do princípio de simetria do tempo.

O princípio de simetria do tempo excluía desta maneira completamente a noção de que o sistema newtoniano universal se dirigia para um alvo ou de que ele teria um fim predeterminado do qual se aproximaria progressivamente. O passado presente e futuro neste sistema teriam apenas um significado subjetivo e seriam uma

Observemos que sistemas que dependem do tempo constitutivamente (ou, por influências exteriores, se não-fechados) podem facilmente se tornar autônomos, bastando para isto utilizar o conhecido artifício de considerar o tempo como uma outra dimensão do espaço de fase.

ilusão no universo newtoniano como diria Einstein^(*)

O teorema de recorrência de Poincaré para sistemas limitados teve também um importante papel como suporte (Zermelo) para o conceito de que um sistema newtoniano “desconhece” o sentido do tempo, pois ele vai além e afirma que o sistema retorna infinitas vezes a vizinhanças tão próximas quanto se queira do estado atual, o que do ponto de vista do observador, significa retornar, literalmente, ao estado atual um número infinito de vezes.

O princípio de simetria do tempo remove naturalmente a distinção entre causa e efeito e, de fato, apenas separa os estados por uma relação de equivalência onde as classes são representadas pelos traços das trajetórias no espaço de fase. Do ponto de vista geométrico, os princípios do determinismo e de reversibilidade produzem uma partição do espaço de fase em folheações. Concluímos assim a exposição enfatizada dos princípios (ou crenças, ou doutrinas) que fazem parte do paradigma newtoniano que serviram de balizas conceituais para o desenvolvimento da ciência, tanto como pontos de apoio como objetos de crítica e análise. As extensas discussões filosóficas em torno destes princípios na interface com, e mesmo exterior às, ciências naturais, atestam a sua influência em um âmbito bem mais amplo da história da cultura.

^(*)A. Einstein - “There is no irreversibility at the basic laws of physics. You have to accept the idea that subjective time with its emphasis on the now has no objective meaning...”

“Michele[Besso] has preceded we a little in leaving this strange world. This is not important. For us who are convinced physicists, the distinction between past, present, and future is only an illusion, however persistent” in Prigogine [1980] pg 203.

CAPÍTULO III

A Emergência de Novos Paradigmas

1. A Emergência do Paralelismo como Método em Contraposição ao Sequencialismo Axiomático-Dedutivo

“This idea [the axiomatized deductive system] has been dominant in European epistemology from Euclides... to that of Newton ... Maxwell, Einstein, Bohr, Schroedinger and Dirac. It is an epistemology that sees the final task an the end of scientific activity in the construction of an axiomatized deductive system. As opposed to this, I now believe that these most admirable deductive systems should be regarded as stepping stones rather than ends: as important stages on our way to richer and better testable scientific knowledge”. Karl Popper [1965 - pg. 221].

O método axiomático dedutivo é frequentemente visto como dotado de três funções distintas mas indissociáveis da sua condição como paradigma: primeiro, como um instrumento de construção ou descobrimento do conhecimento científico, segundo, como uma estrutura para a codificação formal de todo o conhecimento de uma teoria e, em terceiro lugar, fechando o ciclo, como método de transmissão e indução do mesmo conhecimento científico.*

O nosso propósito nesta seção é analisar criticamente estas três funções e expor as suas limitações diante de novos problemas e conceitos que vem se mostrando como novos paradigmas para o desempenho de tais funções.

É notório que o descobrimento e construção do conhecimento científico não é realizado por meio de uma sequência lógica de proposições tal como se apresenta na forma sintática exigida por uma estrutura axiomática. Há aqui uma grande confusão

* É claro que estes três aspectos são interligados através de, e baseados no conceito de conhecimento que por sua vez é inerente ao observador. O problema de definição do conhecimento é difícil e não será tratado com o cuidado que o contexto talvez exigisse.

entre o processo de descobrimento e cognição e a sua codificação formal na estrutura dedutiva.

Como já mencionamos anteriormente, vários matemáticos criativos como Hadamard [1954] e Poincaré [1984], que se preocuparam com o aspecto psicológico do descobrimento em matemática, foram muito claros nas suas opiniões sobre as características de imprevisibilidade e não-sequencialidade deste processo, tanto em pequena quanto em grande escala. A posterior codificação deste conhecimento na estrutura dedutiva é uma outra etapa que pode ser fácil e imediata, ou difícil, e até realizada por indivíduos distintos.

O exemplo de Ramanujan, Hardy e Littlewood é marcante com respeito a este aspecto.

Da mesma maneira, não consideramos também que o modelo axiomático se constitua por si só em um método de transmissão de conhecimento que tenha a capacidade de conduzir à cognição estritamente por processos dedutivos. Preferimos encarar uma demonstração ou uma sequência dedutiva na função de baliza ou catalizador que, de fato, pode levar com quase absoluta segurança à indução do conhecimento. Entretanto, a aquisição do conhecimento é essencialmente um processo emergente e adaptativo no sentido a ser analisado mais adiante, e não resultado de um processo determinístico. Há neste ponto, uma conexão e até uma identificação conceitual entre o processo material no sentido neurológico e o processo formal que, embora carente de melhores estudos, será enfatizada neste trabalho.

O método axiomático, apesar de toda a veneração que a ciência (enquanto comunidade) lhe devotava como modelo perfeito para o descobrimento, codificação e ensino (ou transmissão) de conhecimento, na verdade, sempre se valeu de vários outros artifícios para realizar a primeira e a terceira tarefas. Portanto, não é de se admirar que também a codificação de vários ramos da ciência possam ser realizados por outros meios. O exemplo mais notável, pela sua contraposição na origem ao método axiomático, grego por excelência, é o chamado método Babilônico já citado anteriormente. Neste método é utilizado, de forma deliberada e única, o processo cognitivo tácito [Polanyi] em que o conhecimento é adquirido pela exposição repetida a padrões que são gravados na memória. Estes padrões, em vista da variedade de

exemplos estudados não tem um contorno especificamente definido mas apenas vagamente definido, e é por meio deste equilíbrio entre o estritamente determinado e o vagamente delineado que se dá a emergência do conhecimento. Se este conhecimento produzisse como resultado uma capacidade apenas de reconhecer exatamente aquilo que já foi visto, a sua importância seria extremamente reduzida pois teria um caráter meramente mecânico e automático. O processo de cognição nesta metodologia tem por outro lado, uma surpreendente semelhança com o processo de reconhecimento de padrões tal como é efetuado por sistemas complexos e inteligentes como o são o sistema neurológico responsável pela visão e o sistema imunológico responsável pela defesa do organismo. No primeiro, o reconhecimento de uma fisionomia, por exemplo, não pode ser feito por meio de uma identificação detalhista e sequencial em comparação com uma imagem previamente gravada através de contornos fixos. Se assim o fosse, jamais haveria o reconhecimento pois a imagem não se repete, nem objetivamente e muito menos no córtex cerebral. O reconhecimento se dá por meio de uma avaliação da afinidade, maior ou menor, entre uma imagem (gravada na memória) e a outra (a observada) e esta flexibilidade, ou tolerância, permite que sejam reconhecidas e identificadas um grande número de imagens distintas da original. (Marr [1982]).

O mesmo processo cognitivo também é utilizado pelo sistema imunológico de acordo com a teoria de seleção clonal proposta por N. Jerne (1955) e F. M. Burnet (1959) (Jerne [1973]). Esta teoria parte do pressuposto de que, embora o sistema disponha de uma população de anticorpos distintos da ordem de apenas 10^6 a 10^7 (chamado “tamanho do repertório” pelos imunologistas), ele pode todavia reconhecer uma variedade da ordem de 10^{16} antígenos, e esta extraordinária capacidade seria resultado de uma *flexibilidade* de reconhecimento (Perelson [1980]).

O notável sucesso do modelo axiomático como codificador e síntese do conhecimento científico, ofuscou de certa maneira a sua frequente inadequação como método de descobrimento e ensino. Quanto a este último aspecto, é amplamente conhecido o fracasso contemporâneo experimentado pela chamada matemática moderna, que procurou ingenuamente levar ao ensino elementar o método axiomático tal como exercitado pela escola Bourbakista. (Kline [1979]). O estudo sobre a oti-

mização do processo de transmissão de informação e, principalmente, sobre o processo de cognição do conhecimento matemático, e científico em geral, é um campo vasto e de importância óbvia que poderia ser iluminado em alguns pontos, se abordado pelos conceitos da teoria de seleção clonal ou pelo método babilônico. Entretanto, esta não é a ocasião para tal e interessa-nos particularmente analisar as falhas intrínsecas do modelo axiomático na sua função como método de descobrimento e transmissão.

Como diz Hermann Weyl, a matemática é um empreendimento criativo da mente humana, como a arte e a linguagem, e a estrutura neuropsicológica apropriada para o seu desenvolvimento deve ser parte do patrimônio genético do *homo sapiens*, uma posição também recentemente adotada pela escola linguística de Chomsky. (Lyons [1971]). De fato, o raciocínio lógico dedutivo é associado por alguns neurofisiologistas à atividade do hemisfério esquerdo do córtex e, portanto, (em decorrência do método dedutivo), as funções desta parte, do cérebro são frequentemente associadas às “ciências exatas”, e mais especificamente à matemática (Velichovsky in Makarov [1986]). Por outro lado, as características associadas à atividade do hemisfério direito estão relacionadas à arte, ao reconhecimento visual e à intuição. (Aparentemente a divisão das duas culturas, tal como imaginadas por C.P. Snow, existiriam também ao nível fisiológico individual!) Mas esta não é a opinião de Weyl como também não eram a de Hadamard e Poincaré. Para a nossa argumentação é importante ressaltar que Hermann Weyl pronunciou esta opinião a propósito da recente demonstração de falibilidade do método axiomático como método construtivo do conhecimento, que foi resultado dos trabalhos de Kurt Goedel na década de 1930.

O sistema formal idealizado por Hilbert e que deveria produzir todo o conhecimento matemático a partir de um número finito de axiomas e de regras sintáticas por meio de justaposições sequenciais finitas de símbolos (sentenças), foi tornado inviável por Goedel em 1931. Ele demonstrou, entre outras coisas que, em qualquer sistema axiomático Hilbertiano, sempre existiriam proposições que seriam não decidíveis isto é, que não se poderia demonstrar “sistematicamente” a sua validade ou não. Portanto, existiriam proposições verdadeiras que não seriam *construtíveis* dentro do sistema axiomático. (E, mais, se estas proposições fossem adicionadas como axiomas, outras do mesmo tipo surgiriam no mesmo sistema). É oportuno citar neste

contexto o filósofo-biólogo Robert Rosen [1987, p.21]:

“Goedel’s theorem shows that we cannot formalize arithmetic without thereby losing some truth; that formalization is not a mere rewriting but must actually destroy some of that which it attempts to express... The lesson to be learned from all of this is that we do not in fact live in a purely syntactic, formalizable world.”

O “Ignorabimus” de Hilbert era assim institucionalizado na sua própria matemática formalista.

Restava entretanto a questão sobre a possibilidade de demonstrar, formalisticamente, se, dada uma proposição em um sistema axiomático, ela seria decidível.

Este assunto foi atacado por Alan Turing na esperança de que as proposições não-decidíveis fossem apenas casos patológicos raros que poderiam ser mecanicamente eliminados de qualquer teoria axiomática.

Para isto ele definiu uma noção de máquina que poderia realizar qualquer tarefa dedutiva que fosse governada por regras sintáticas bem definidas em um sistema formal. A sua conclusão foi de que uma tal máquina (chamada máquina universal de Turing) seria impossível ou que a sua construção seria autocontraditória. E, com isto, determinou-se, de uma vez, que a matemática axiomatizada era também *não-mecanizável*.

O paradigma euclideano perdia assim a sua característica dogmática e se transformava em paradigmas de metodologia e não de crenças e princípios absolutos.

Entretanto, ainda não é este o aspecto que de fato nos interessa enfatizar pois, na verdade, o modelo axiomático continuava sendo utilizado com o mesmo enorme sucesso na codificação do conhecimento matemático e, como tal, tem servido como baliza para o seu desenvolvimento e, (com bem menos vantagens), também como método de ensino.

Os trabalhos de Goedel e Turing apresentam impossibilidades definitivas que são filosoficamente importantes mas que não se relacionam às escalas inerentes ao universo físico e, particularmente, ao homem. A máquina universal de Turing embora finita não tem limites de trabalho e de tempo, e as sequências sintáticas do formalismo também não sofriam limitações. Mesmo os construtivistas que exigem

procedimentos finitos em todas as etapas, (e, que não aceitam, por exemplo, o axioma da escolha para uma família infinita de conjuntos), não se preocuparam em fixar limites para o conceito de finito. Várias explicações poderiam ser levantadas a respeito desta negligência, dentre as quais, a percepção de que sem esta restrição já haveria um problema suficientemente difícil e melhor seria adiar esta questão, ou, uma crença de que todos os fatos *relevantes* de uma teoria estruturada pelo modelo axiomático poderiam ser enfim, construtíveis por procedimentos finitos e “curtos”. Nesta última hipótese, temos embutido implicitamente uma crença de que toda demonstração poderia ser suficientemente simplificada até o nível de uma formulação “curta” ou, que, no caso de Turing, não haveria limites para aumentar a velocidade e o tamanho das máquinas.

Esta crença na possibilidade de “finitude humana” do modelo axiomático, que faz parte do paradigma euclideano e newtoniano desde os seus primórdios, é, desta forma, alçada a um primeiro plano em uma atitude de contra-reforma contemporânea frente às dúvidas de Goedel e Turing. Mas, tal como a sua homônima religiosa do século XVI, se por um lado ela evitou um abandono radical do antigo paradigma, por outro, não pôde conter a emergência de novos paradigmas, ou uma *nova aliança* como habilmente se refere Monod [1972, p. 180] em um contexto distinto mas intimamente relacionado ao presente caso como veremos adiante.

As evidências de que a cognição humana poderia “intuir” fatos de uma teoria axiomatizada que se mostravam “inalcançáveis” pelo processo dedutivo foram se acumulando progressivamente na história da matemática e com muito maior força nas teorias físicas que sempre mantiveram vivo o método babilônico de cognição.

As hipóteses famosas de Riemann e Fermat na teoria de números foram estudadas por mais de um e mais de três séculos respectivamente sem que fosse possível incorporá-las a estrutura dedutiva da aritmética. A possibilidade de que estas e outras proposições sejam não-decidíveis no sentido de Goedel sempre esteve no ar mas não tem convencido de fato os especialistas. A hipótese do contínuo formulada por Cantor no final do século XIX foi resolvida em 1963 por P. Cohen que demonstrou a sua independência dos axiomas dentro da “finitude humana”. Ao mesmo tempo, as demonstrações das hipóteses de Burnside sobre grupos finitos por Thompson e Feit

na década de 1970, ocupavam cada uma, cerca de 500 páginas de um periódico, e a demonstração afirmativa sobre o problema das quatro cores por K. Appel e W. Haken na década de 1970, exige não apenas longas construções formais mas também um longo tempo de computação. Com estes exemplos ficava claro que a codificação de conhecimento em teorias cujas estruturas são exclusivamente construídas por seqüências dedutivas, e onde algumas delas tem um comprimento finito mas extrapolando por várias ordens o limite cognitivo humano, não se enquadra dentro das antigas crenças que envolviam o modelo axiomático e exigem uma análise adequada. A demonstração nestes casos, deixa de ser um ato social cujo formalismo, dizia-se, poderia ser verificado até por um idiota, contanto que o processo dedutivo fosse suficientemente detalhado. (Neste caso, certamente seria mais adequado substituir a partícula “até” por “somente”, uma vez que ninguém além de um “idiot savant” se disporia a realizar semelhante tarefa, equivalente a verificar a correção de uma lista telefônica com vários milhões de entradas).

Ainda que estas demonstrações sejam “socialmente” aceitas, elas perdem totalmente uma das características originais que lhe são atribuídas pelos paradigmas euclideano e newtoniano e que consiste na sua capacidade de transmissão (ou construção cognitiva) do conhecimento. A construção formal e sintaticamente correta destas proposições dentro da estrutura dedutiva não pode ser aproveitável como construção do conhecimento humano por uma questão fundamentalmente de *disparidade de escalas*. A conexão dedutiva entre fatos conhecidos da teoria e este novo fato, tem um comprimento dedutivo que escapa completamente à cognição humana e não pode ser considerada como método para a construção (ou transmissão) do conhecimento.

O avanço sistemático das fronteiras da massa de conhecimentos, ou um encolhimento da conexão, poderia ser visto como remediação da dificuldade, mas é importante ressaltar que estamos nos referindo a várias ordens de disparidade cujo significado será melhor entendido no que se segue.

O nosso objetivo é abordar estas questões sob o ponto de vista da finitude humana (ou mesmo histórica, geológica, cósmica) que tem limites absolutos, tanto inferiores, (tal como o mínimo pacote de energia possível determinado pelo quantum de Planck), quanto superiores, como a idade do universo ($\sim 10^{17}$ segundos) ou a

velocidade da luz no vácuo ($3 \cdot 10^8$ m/seg).

A máquina de Turing que conceitualmente não dispõe de limites finitos, quando encarada como um artefato material, é inexoravelmente confinada às fronteiras ditadas pelo universo físico, mesmo que a consideremos formada por todas as partículas existentes e dispor de um tempo comparável à idade do universo para o seu funcionamento. Esta limitação física absoluta é uma questão que vem ganhando uma crescente importância ultimamente no confronto com problemas, principalmente biológicos, onde o número de possibilidades e de interações pode alcançar cifras da ordem de 10^{100} , ou muito mais, como na construção de árvores filogenéticas (Cavalli-Sforza [1964], V. D. Bekenstein-M. Schiffer- Quantum Limitations on the Storage and Transmission of Information, Int. J. of Mod. Phys. C-1, 1990; 355-422).

Para que o comprimento de uma construção formal dedutiva de um objeto dentro de uma teoria axiomatizada não dependa de fatores contingenciais históricos (existência de uma demonstração mais curta ou de um computador mais rápido), A. N. Kolmogorov definiu o conceito de complexidade intrínseca de um objeto como o menor número de dígitos binários que é suficiente para a sua decodificação ou, o comprimento medido em BITS do menor algoritmo que gera o referido objeto (Chaitin [1975]).

Este conceito nos ajuda a compreender a possibilidade de existência de proposições verdadeiras (e “relevantes”) dentro de uma teoria axiomática e que ao mesmo tempo sejam dotadas de uma enorme complexidade no sentido de Kolmogorov, de tal forma, que qualquer algoritmo destinado a reproduzi-las é materialmente impossível de ser implementado.

É razoável supor que 1 BIT de informação necessite de um mínimo quântico irreduzível de energia para a sua realização física e, portanto, a complexidade de Kolmogorov pode ser também medida fisicamente e encarada como um mínimo de energia suficiente para implementar um determinado algoritmo, ou um objeto. Este mínimo pode parecer à primeira vista estar à uma distância segura que possibilite um aperfeiçoamento praticamente ilimitado da capacidade computacional da matéria em comparação aos processos estudados cientificamente.

Entretanto, pelo contrário, ele está muito próximo (Conrad [1987]) e pra-

ticamente ao alcance, enquanto que a complexidade de proposições em um sistema axiomático não tem limites determinados e, na verdade, uma parte considerável e significativa da estrutura axiomática certamente estará além dos limites físicos computacionais.

Se esta parte inalcançável, do ponto de vista da implementação material de algoritmos formais do sistema dedutivo, não tivesse qualquer significado cognitivo, a atitude mais sensata seria expressa pelo provérbio popular “O que não tem remédio, remediado está”.

Entretanto, há fortes indícios de que a capacidade cognitiva do cérebro humano alcança regiões inatingíveis pela estrutura dedutiva fisicamente implementável.

Esta observação não tem um caráter estático e absoluto, mas se refere à uma comparação entre a capacidade cognitiva humana que determina uma região de conhecimento, e o alcance computacional de uma estrutura dedutiva, considerando-se que ambos partam dos mesmos conhecimentos básicos, sejam eles quais forem, axiomas ou proposições “secundárias”.

O que é importante enfatizar neste ponto é a inexistência de inclusão entre o que poderíamos chamar de região cognoscível e estrutura dedutiva computacional. Como já havíamos ressaltado anteriormente, uma proposição demonstrada computacionalmente não é necessariamente incorporada (ou incorporável) à região cognoscível através do processo dedutivo e, agora, por outro lado, argumentamos que, nem todos os fatos nesta região são alcançáveis por aquela estrutura.

Com isto, chegamos às duas limitações principais do método axiomático considerando-o sob a perspectiva de sua implementação computacional física; em primeiro lugar, quanto à sua capacidade de *transmissão* (ou *indução*) do *conhecimento cognitivo* e, em segundo lugar, quanto à sua capacidade de *construção* do *conhecimento formalizado*. Assim, distinguimos aqui as duas esferas de conhecimento, a *cognoscível*, que é inerente e subjetiva ao observador, e a *formalizável* que é parte da estrutura dedutiva, fisicamente implementável, não havendo uma relação de inclusão entre elas.

Mas aqui surge a questão fundamental: como representar formalmente (e graficamente!) o conhecimento não formalizável pelas estruturas dedutivas, e como

dispor de mecanismos objetivos para construí-lo?

A opção mais sensata é analisar o comportamento do sistema cognitivo que tem a capacidade de construção, codificação e reprodução deste conhecimento que é, obviamente, representado pelo sistema neurológico. (De acordo com alguns neurofisiologistas, esta seria a atividade especificamente da parte direita do cérebro que se relacionaria com maior intensidade aos processos intelectuais complementares àqueles que são marcadamente dedutivos e sequenciais, e que seria atributo principal da parte esquerda. Velichovsky in Makarov [1986]).

O processo de reconhecimento visual é uma das principais funções do cérebro humano (que ocupa a maior parte do seu córtex) e se constitui no caso exemplar em que uma construção sequencial algorítmica é caracterizada por uma extraordinária complexidade (no sentido de Kolmogorov) e que no entanto, é executada com relativa facilidade pelo cérebro.

A impossibilidade de descrição de uma imagem por meios linguísticos, um processo *sequencial* por excelência, é notória e faz com que este conhecimento tenha um caráter subjetivo e não comunicável por métodos formais da escrita.

Observemos que o termo “impossibilidade” se refere à implementação física (ou *humana*) do processo, e não à uma restrição de ordem lógica.

Este é um exemplo do conhecimento que existe mas que está fora da esfera alcançada pelos instrumentos sequenciais se restritos à uma escala mínima. Isto é, embora a representação sequencial (linguística, ou outra qualquer) do conhecimento seja possível em comprimento finito, (basta dar as coordenadas de todas as partículas de um objeto no dado instante!), ela é dotada de uma complexidade que o torna inalcançável à cognição humana por este processo.

O modelo axiomático é intimamente ligado à linguagem escrita pelos seus aspectos sequenciais comuns; e em menor grau com a linguagem falada, pois esta admite também outras dimensões como a entonação, inflexão da voz, ritmo e etc.

A construção de um modelo formal, isto é, construído por símbolos, que possa representar e servir de instrumento de investigação desta classe dos conhecimentos é uma perspectiva razoável que deve surgir do estudo do mecanismo que o sistema

neurofisiológico utiliza para este fim. (*)

É importante observar que a capacidade do cérebro em realizar um conhecimento sequencialmente complexo com muito mais eficiência do que um super-computador, *não* é devida ao seu tamanho e à velocidade computacional de seus componentes. A explicação desta maior capacidade está na organização e na inter-relação entre estes componentes.(Hillis [1985]).

Um super-computador moderno consta de aproximadamente 10^9 transistores que são capazes de efetuar 10^9 mudanças de estado por segundo, resultando portanto em 10^{18} dessas mudanças. O cérebro por sua vez dispõe de 10^{10} neurônios, cada um podendo efetuar 10^3 mudanças de estados por segundo, o que significam um total de 10^{13} mudanças.

A grosso modo, a capacidade de produzir eventos por segundo é maior no computador por uma ordem de 10^4 .

A grande diferença entre estes dois dispositivos vem do fato de que o cérebro é constituído por uma população que dispõe de uma enorme rede de conexão entre seus componentes que funcionam simultaneamente por um mecanismo paralelo, enquanto o computador é essencialmente sequencial o que significa um grande desperdício de tempo durante o repouso de seus componentes.

Desta forma, começavam a aparecer as diferenças fundamentais entre o instrumento cognitivo que resulta do modelo axiomatizado e tem características sequenciais (como a máquina de Turing e os computadores comuns) e o instrumento neurológico que tem uma dinâmica essencialmente *paralela* e desponta como um novo paradigma para o desenvolvimento do conhecimento científico.

É interessante apontar o fato de que esta atitude representa uma retomada da importância do observador no desenvolvimento do conhecimento científico, ou seja, o conhecimento agora deve abranger não somente o objeto de estudo mas o observador. Esta atitude representa uma revolução científica quando se considera que um dos requisitos fundamentais para a perfeição de uma teoria científica clássica era exatamente a eliminação completa do antropomorfismo e das influências do observador.

A teoria quântica tem a precedência na introdução da importância do ob-

(*) Este talvez seja o sistema previsto por K. Popper na citação no início deste capítulo.

servador mas, naquele caso, ele comparece como um mero agente físico. Aqui, é a própria essência da natureza humana que comparece influenciando decisivamente a estrutura científica.

O aparecimento destes novos conceitos e atitudes não vem desacompanhado de paradigmas que lhes sirvam de invólucros concretos e exemplares. O sistema neurológico que tem primazia sob vários aspectos como paradigma desta nova era científica não é todavia o exemplo único e, certamente, não é o mais simples.

O sistema imunológico dispõe de características cognitivas de grande sofisticação e tem sido nos últimos 10 anos uma fonte de conceitos, assim como também uma área de representação material de conceitos de origem cognitiva (Perelson [1988], Varela et al. [1988]).

As características do sistema imunológico, tais como o fato de ser uma população com um número finito de espécies em que os indivíduos em si não são as peças conceituais fundamentais mas sim as suas posições em espaços de aspecto (forma) e as interações não-locais que existem neste espaço, sugere que outras populações com características semelhantes possam desenvolver fenômenos semelhantes e se constituírem também em novos paradigmas.

Observações sobre o “comportamento inteligente” em populações com espécies distribuídas em espaços de aspecto e dotadas de interações não-locais, são antigas e precedem à esta comparação; na verdade, são anteriores à teoria de seleção clonal (décadas 1950-60).

Os trabalhos de E. O. Wilson e outros sobre a dinâmica de populações de insetos, e formigas em particular, resultou em uma ciência que extrapola e se abstrai das características peculiares dos indivíduos de cada população se fixando com maior atenção nas suas interações e que tem sido denominada de sociobiologia (Wilson [1972], Wilson [1977], Holdöbler-Wilson [1992], Oster-Wilson [1978], Franks [1989], Gordon et al [1992]). Esta abstração é curiosamente uma das tendências atuais em imunologia e neurologia teóricas, isto é, uma focalização das atenções com maior ênfase nos aspectos funcionais do que bioquímicos dos sistemas.

O conceito comum e predominante da neurologia, imunologia e sociobiologia é de que as características principais destes sistemas, representadas respectivamente

pelas memórias visual e imunológica e pelas estruturas sociais provem não de particularidades individuais bioquímicas ou fisiológicas inatas mas das redes de interrelação funcional entre os indivíduos da população.

A memória neurológica visual é, de acordo com este conceito, distribuída em uma rede abstrata de interrelações e não localizada de tal forma, que a eliminação de algumas células que não modifique esta estrutura funcional, manterá intacta a memória.

Analogamente, o sistema imunológico pode guardar informações em sua memória por mais de 50 anos apesar de que seus componentes são totalmente substituídos em um período de poucas semanas. Portanto, a memória imunológica de doenças infecciosas é um conceito abstrato que o sistema representa por meio de uma organização distribuída. A formação de estruturas em populações e a morfogênese, mesmo nas suas situações mais simples, não são tampouco resultados de uma sequência de ordens centralizadas em um indivíduo da população ou em algum dispositivo, mas fruto de um processo em paralelo realizado simultaneamente pelos indivíduos da população como função de suas interrelações de vizinhança.

O trabalho seminal de L. Segel e E. Keller em 1970 sobre o fenômeno de morfogênese em populações de *Dictyostelium Discoideum* representa uma notável aplicação do conceito de redes de intercomunicação funcional como explicação para a formação de estruturas e foi um dos pontos de partida para o desenvolvimento deste conceito em teoria de populações. (A intercomunicação neste caso é feita por meio da concentração de CAMP-monofosfato de adenosina cíclico, que, a propósito, é um sinalizador celular universal, importante inclusive no funcionamento do organismo humano)

A conclusão que tiramos de toda esta argumentação é a de que o método axiomático é um instrumento ineficiente para descobrir, codificar e transmitir, dentro da *finitude humana* vários tipos de conhecimentos que, todavia, estão disponíveis à cognição humana. Mas um conhecimento humano não alcançável por representação sequencial, deve ser processado pelo cérebro por outros mecanismos que não sequenciais.

Quais seriam estes mecanismos?

Veremos mais adiante que de uma forma geral, estes processos terão uma característica dinâmica comum que denominaremos de *paralelismo*.

O estudo destes processos deve ser fundamentado no funcionamento de sistemas cujos comportamentos apresentam características marcantes de cognição e “inteligência” tais como o sistema imunológico e as populações biológicas com interação individual, além, é claro do sistema neurológico.*

Considerando-se que a cognição visual é o paradigma exemplar do paralelismo, é razoável esperar que um formalismo para a representação simbólica destes processos tenha uma forte componente de origem visual bi ou tridimensional em substituição ao formalismo sequencial que representa tradicionalmente o método axiomático-dedutivo.

A utilização informal desta capacidade cognitiva é antiga e amplamente disseminada através de gráficos, esboços, esquemas e figuras sugestivas. Entretanto, este procedimento não é considerado como parte formal de uma teoria axiomática dedutiva mas apenas um artifício frequentemente encarado como não-científico e impróprio, principalmente em matemática.

Em outras áreas científicas, a potencialidade da cognição visual é aceita como um processo útil e perfeitamente válido como parte da estrutura de conhecimento da teoria como podemos entender da seguinte citação:

“The human observer is very good at recognizing patterns...

Analytical chemists are humans and so they take advantage of this faculty in interpreting data they obtain”. in p.336, D.L. Massart et. al. [1988] - Chemometrics: A text Book, Elsevier, Amsterdam.

Como última consequência do reconhecimento do fato de que áreas cognitivas importantes seriam construídas pelo método axiomático-dedutivo somente ao custo de uma inalcançável complexidade, conclui-se que o reducionismo axiomático não pode se constituir em um alvo dogmático e absoluto da perfeição para uma teoria científica, é necessário procurar alternativas, isto é, novos paradigmas.

* É interessante observar a natureza de auto-referência deste estudo uma vez que estaremos utilizando da matemática contemporânea, que é resultado do sucesso do método axiomático dedutivo, e o próprio método, para analisar sistemas com o objetivo final de obter uma descrição de mecanismos cognitivos que virão produzir novos instrumentos formais, simbólicos, e extrapolar o alcance do mesmo instrumento axiomático-dedutivo.

Na próxima seção trataremos do reducionismo como princípio fenomenológico.

2. A Emergência do Conceito de Escalas Frente ao Reduccionismo e a Ampliação do Conceito de Espaço de Fase

“There is no single correct scale of observation and the insights one achieves from any investigation are contingent on the choices of scales... Thus, the central challenge in ecological theory must be an elaboration of the understanding of how scales relate and how systems behave on multiple scales... Overly detailed and reductionist models of populations and systems obscure any pattern by introducing irrelevant detail, often on the specious premises that some how more detail and more reduction assures greater truth... This point of view is predicated in part on the fallacious notion that there is some exact system description possible...” S. Levin [1992].

O reducionismo é uma parte do paradigma newtoniano clássico que supõe ser possível realizar a descrição de fenômenos macroscópicos a partir de teorias microscópicas.

As dificuldades encontradas para a explicação de fenômenos macroscópicos a partir de teorias microscópicas fundamentadas na mecânica newtoniana, foram sentidas logo no princípio do século XVIII mas quase sempre eram encaradas como uma questão técnica e não de natureza conceitual intransponível.

A primeira questão que abalou com certa gravidade o princípio reducionista, (embora por outro lado fosse um triunfo parcial dele), surgiu com a controvérsia sobre a teoria de Boltzmann que visava explicar a termodinâmica macroscópica por meio da mecânica newtoniana das partículas. A teoria de Boltzmann não pode ser considerada estritamente, reducionista, uma vez que introduz uma hipótese (“stosszahlansatz”) estranha à teoria newtoniana, que relaciona aspectos microscópicos a aspectos macroscópicos no que diz respeito ao comportamento coletivo no sistema de partículas (Thompson [1972]). Entretanto, mesmo assim ela era vista como parte na teoria newtoniana e deveria portanto ser analisada como tal.

Um dos principais resultados de Boltzmann afirmava que, se um sistema de partículas fosse mantido isolado e com energia constante, ele se aproximaria de forma progressiva e sistemática de um estado macroscópico de equilíbrio, (Teorema H de Boltzmann), o que de certa forma distingue uma direção para o tempo. Entretanto, uma direção para o tempo é completamente incompatível com o teorema de recorrência de Poincaré que a “grosso modo” estabelece como certa a volta do sistema a qualquer estado mecânico (na verdade, tão próximo quanto se queira dele, o que para efeito macroscópico significaria idêntico) infinitas vezes no futuro. Esta questão ficou conhecida na época como “Paradoxo de Recorrência”, até que Boltzmann mostrou que o tempo necessário para um sistema de N partículas retornar ao estado inicial é de ordem de e^N o que para qualquer quantidade macroscópica de gás (para a qual a teoria é dirigida) levaria várias vezes a idade do universo! (O número de moléculas em 1 cm^3 de ar é da ordem de $10^{26} = N$).

A crença construtivista de que o finito, qualquer que seja a sua magnitude, é real e cognoscível não tem fundamento para uma ciência que é estudada e desenvolvida e existe de fato apenas por intermédio da cognição humana.

No exemplo acima verificamos que os tempos *finitos* de observação de Boltzmann e Poincaré levavam à conclusões completamente diversas sendo que a primeira, se situava dentro da escala natural e de interesse do observador (humano), enquanto que a segunda, era completamente discrepante desta. A conclusão de Boltzmann é de que uma teoria sobre fenômenos naturais não pode se ocupar de fatos que ocorreriam separados por um período de tempo incomensurável com o tempo do observador, isto é, a teoria depende do interesse (e capacidade) do observador.

O estudo da dinâmica de gases sob o ponto de vista macroscópico significa considerar observações e medidas no tempo e no espaço das escalas subjetivas do observador. Entretanto, não é o observador que determina se o espaço de fase necessário para a construção do modelo matemático pode ser constituído de medidas em uma mesma escala. No caso presente, a termodinâmica é uma teoria que faz uso de um espaço de fase macroscópico em uma única escala que se basta a si mesmo para a descrição do fenômeno.

Nesta teoria não há uma transposição de escalas.

O reducionismo por outro lado tem um objetivo direcionado no sentido de buscar “explicações” sempre em uma decrescente escala microscópica baseado em uma crença, implícita ou explícita, de que a descrição mais detalhada é a mais correta. A falácia desta crença está, fundamentalmente ligada a um aumento inevitável da complexidade além da finitude humana (ou mesmo na finitude física do universo) que este detalhamento acarreta.

As propriedades macroscópicas, mesmo que sejam consequências lógicas das propriedades microscópicas, são resultados de um processo algoritmico-dedutivo cuja complexidade (no sentido de Kolmogorov) é extraordinariamente grande e, frequentemente, muito maior do que a capacidade computacional da matéria.

A descrição das propriedades macroscópicas de um gás por meio do cálculo das trajetória de 10^{26} partículas em um espaço de fase de 6 dimensões é, não apenas ineficiente, mas é certamente não-computável fisicamente na escala humana de tempo (10^{15} seg = 150 milhões de anos!) ou talvez, em nenhuma escala física (isto é, em tempo menor do que a idade do universo). A possibilidade, neste caso, de se considerar o fenômeno isolado na sua escala macroscópica é a razão pela qual a ciência pôde progredir no estudo da dinâmica de gases.

Entretanto, nem sempre há esta possibilidade pois, genericamente, em um mesmo fenômeno estão sempre acoplados efeitos de várias escalas que colaboram decisivamente para o comportamento resultante do sistema e portanto, não podem ser evitados.

Poderíamos descrever esta situação metaforicamente como uma espécie de *permeabilidade* entre as escalas.

O exemplo mais antigo desta dificuldade também ocorreu na dinâmica de fluidos, e mais especificamente no fenômeno de turbulência. As equações de Navier-Stokes que descrevem a dinâmica do ponto de vista exclusivamente macroscópico, são fortes indícios de que fenômenos em escala molecular podem eventualmente contribuir decisivamente na emergência de fenômenos macroscópicos. A permeabilidade entre estas escalas é atribuída à instabilidade dos fluxos que permite a amplificação

É interessante observar que o mesmo A. N. Kolmogorov contribuiu significativamente para o estudo de turbulência e para o estudo atual do caos determinístico na mecânica clássica.

sucessiva de perturbações, de ordem molecular até à escala macroscópica.

A turbulência é um fenómeno de origem essencialmente microscópica e que se faz aparente macroscopicamente devido à enorme *permeabilidade* das escalas, isto é, murmúrios moleculares são ouvidos na escala do meio contínuo como resultado da amplificação por instabilidades.

É interessante observar que a hidrodinâmica em regime laminar não tem estas características e as influências em pequenas escalas são dissipadas de tal forma que apenas uma contribuição coletiva média tem um significado macroscópico.

A dinâmica de sistemas em que escalas “incomensuráveis” são igualmente necessárias para a sua descrição devem portanto apresentar características de complexidade em um sentido análogo ao de Kolmogorov uma vez que a descrição de uma escala microscópica ao nível de uma escala macroscópica exige um algoritmo de enorme complexidade.

Por este motivo usaremos o termo *complexo* para designar teorias de populações em que estão envolvidas, acopladamente, fenómenos de múltiplas escalas distintas.

O conceito de escalas surge desta maneira como parte importante dos novos paradigmas representados pela dinâmica de populações. Para o estudo destes sistemas é necessário que seja preliminarmente escolhida a escala de interesse do observador para a descrição do sistema. Como decorrência desta escolha, a estrutura dinâmica do fenómeno estabelecerá as outras escalas que são acopladas à escala de observação e que, portanto, deverão também ser consideradas para a sua descrição.

A complexidade de um sistema depende portanto do observador na forma da indicação que êle faz para a escala de observação. Se a escala determinada pelo observador se bastar para a descrição do sistema como espaço de fase, não há múltiplas escalas e o sistema não apresentará a complexidade que resulta destas situações.

Estas escalas “autônomas” se apresentam como *janelas* simplificadas de observação e são de grande importância em virtude da menor dificuldade encontrada para o seu estudo matemático.

Não há obviamente nenhuma escala de observação absoluta; é o interesse do observador que a determina.

A focalização de um fenômeno em teoria de populações na escala de interesse do observador é, as vezes tão difícil quanto o seu análogo ótico devido à extraordinária variedade em que elas se apresentam.

Como a estrutura dinâmica do sistema frequentemente exige que outras escalas sejam acrescentadas para a sua descrição, é importante tratar das suas inter-relações, ou seja, do mecanismo de transmissão de informações de uma escala para outra, especialmente para a escala de observação.

Um modelo matemático já formulado que engloba mais de uma escala de descrição de um fenômeno pode ser frequentemente simplificado por procedimentos de aproximação assintótica, que de certa forma se constituem no método clássico para transportar analiticamente as informações de uma para outra escala.

O importante conceito de camada limite que é originário da análise de transição entre diferentes escalas da dinâmica de fluidos, será analisado com maior detalhe no capítulo IV – “ A Superposição Assintótica na Transição de Escalas”.

Diversos métodos matemáticos de aproximação assintótica, como o Método de Múltiplas Escalas (Kevorkian-Cole [1978]), o Método da Média (Bogolyubov-Mitrosolskii [1963]), o Método de Homogeneização (Bensoussan-Lions-Papanicolau [1978]), o Método de Aproximação Quase Clássica (Maslov [1987]), o Método de Fase Estacionária (Maslov-Fedoriuk [1978]) e outros, foram originados do estudo do fluxo de informações através de uma interface de escalas na descrição do mesmo fenômeno como a dinâmica de circuitos com regimes de funcionamento superpostos, a mecânica de meios contínuos com estrutura mesoscópica (por exemplo, fluxo de líquido com bolhas de ar e partículas suspensas), na dinâmica clássica-quântica de partículas, a propagação geométrica-ondulatória da luz e etc.

A teoria sinérgica desenvolvida por H. Haken (Haken [1985], Haken [1982]) baseia-se no fato de que vários exemplos de dinâmica de populações em física, química, biologia e meio contínuo, que são considerados sistemas complexos no seu aspecto global, quando observados restritamente nas imediações de determinados pontos críticos de transição, tornam-se simplificados e admitem uma descrição com um número reduzido de escalas. Analogamente, o Método da Projeção de uma Dinâmica com múltiplas escalas em uma variedade central de dimensão 2 nas imediações de um

ponto de equilíbrio, é também uma forma de redução de complexidade por meio de uma análise das interfaces de escalas distintas [Ruelle-Takens [1971]].

A dinâmica de populações dotadas de interações de caráter individual são estudadas do ponto de vista macroscópico, o que significa considerá-las compostas por um grande número de indivíduos. Por outro lado, devido à estruturas interativa individual, também é necessário considerar pequenos grupos de indivíduos que se intercomunicam o que introduz pelo menos duas escalas distintas quanto às medidas da população. A representação macroscópica destas interações é um ponto crucial para a construção do modelo matemático destas populações.

O reducionismo predominante em biologia nas últimas décadas representado pela bioquímica e pela biologia celular, apesar dos seus sucessos extraordinários, não são suficientes para analisar inúmeras questões importantes cujos observáveis se encontram a nível macroscópico e são de caráter funcional e abstrato. Esta situação é tipicamente encontrada em neurobiologia, em imunologia e na ecologia, onde os observáveis estão localizados na estrutura e não na substância.*

O conceito de espaço de fase é extremamente generalizado no estudo de sistemas complexos com a finalidade de buscar janelas de observações simplificadas e detectar novos fenômenos que se representam em outros contextos.

Um dos aspectos mais notáveis das populações biológicas (mas também presente de maneira rudimentar na matéria física) é a formação de estruturas “organizadas”, tanto no espaço físico como no tempo, e tem um enorme impacto cognitivo pela sua manifestação visual. A importância destes fenômenos deve-se naturalmente ao fato de que todo organismo vivo é um exemplo de morfogênese e, na verdade, é resultado de uma grande quantidade de morfogêneses em diversos níveis.

Entretanto, como já foi dito, em várias populações a rede abstrata de interrelações entre os seus indivíduos é tão ou mais importante do que as suas características puramente materiais, isto é, uma forma abstrata tende a ser, nestes casos, mais representativa que a substância concreta. Os exemplos paradigmáticos fornecidos por sistemas neurológicos, imunológicos e sociobiológicos no que dizem respeito às características de “memória” é sem dúvida a manifestação mais notável da estrutura

* A.Lwoff: Life can only be the appanage of the organism as a whole. Only organisms are alive.

enquanto forma abstrata em lugar da substância.

Para analisar a dinâmica de uma população por estes ângulos é necessário descrevê-la por meio de atributos apropriados que extrapolam os atributos utilizados em espaços de fase clássicos como a posição, a velocidade e etc.

Uma extensão deliberada do conceito de espaço de fase para a formulação de um modelo matemático (e não apenas com intuito de classificação) foi dada por H. Von Foerster (1959) (Edelstein-Keshet [1988]) que considerou uma população de bactérias distribuídas por *idade* e obteve a sua conhecida equação de conservação.

A dinâmica de populações com estrutura etária é todavia um assunto importante em demografia e tem origens mais antigas em trabalhos do início deste século em epidemiologia por W. O. Kermack e A.G. Mac Kendrick (1926).

No estudo da dinâmica de espécies biológicas em ecologia é conhecida a influência de características como tamanho, forma, cor, distribuição de manchas, enfim, os aspectos importantes na relação entre os indivíduos. É, portanto necessário classificá-los em um espaço destas características para poder descrever apropriadamente as suas interações. Estas considerações foram introduzidas como modelo matemático por S.A. Levin e L.A. Segel em 1982 (Levin-Segel [1982-1985]), para descrever a preferência de um predador por "imagens ideais" da sua presa.*

Os trabalhos de Leah Edelstein-Keshet e G. Ermentrout (Edelstein-Keshet-Ermentrout [1990-1991]) abordam a dinâmica de crescimento filamentar muito comum em organismos (fungos, vasos capilares, brônquios, esqueleto foliar e etc) definindo como indivíduos os ápices e as unidades de comprimento filamentar que se situam em um espaço de fase que contempla não apenas a posição espacial mas a *direção* que é indispensável para a definição da dinâmica interativa microscópica. Estes conceitos tem sido posteriormente utilizados na descrição de populações de insetos que marcam trilhas químicas detectáveis por outros indivíduos e que desempenham um papel intermediário de comunicação. A população de insetos propriamente dita interage desta forma com uma rede filamentar que também é encarada como uma população.

* S.M. Rocklin- G.F. Oster - "To regard a population as a collection of identical individuals is to overlook the central fact of evolutionary theory: natural selection acts on phenotypic variability amongst the individuals" J. Math. Biol. 3 (1976), 225-276.

Estes espaços de fase em dinâmica de populações são denominados *espaços de aspecto* e tem desempenhado um importante papel na formulação de novos modelos matemáticos e no descobrimento de fenômenos de organização que, de outra maneira, passariam completamente despercebidos pela impossibilidade de descrevê-los.

O número e características necessárias para descrever os indivíduos de uma população, e que se constitui no seu espaço de fase, pode se tornar muito grande, e conseqüentemente ser a origem da complexidade de sua dinâmica. Mesmo considerando características discretas, não há limites (na finitude computacional) para se descrever um organismo vivo e, no caso de se considerar aspectos tal como, por exemplo, a *forma* bidimensional do indivíduo, estaremos diante de um contínuo de características que só poderão ser representadas por funções.

Cada *indivíduo* seria então caracterizado por um ponto em um espaço de funções e a descrição da população pelo método de Euler seria feita por meio de uma função densidade neste espaço de dimensão infinita. Isto traz como consequência inevitável uma enorme complicação ao modelo matemático.

Apesar desta dificuldade na sua representação matemática, o conceito de forma é um instrumento importante no desenvolvimento de modelos para a dinâmica do sistema imunológico e foi introduzido neste contexto por Segel-Perelson [1988]. A afinidade entre antígenos e anticorpos é de fato dependente da forma tridimensional dos sítios moleculares onde se processam as ligações químicas, mas também depende de vários outros parâmetros como distribuição molecular de carga, momento dipolar e etc. Diante desta extraordinária complexidade, Segel e Perelson decidiram considerar uma *forma* generalizada mas discreta, que seria caracterizada em um espaço de N dimensões onde algumas coordenadas se referem a parâmetros geométricos. Com esta representação e um argumento de relativa simplicidade foi possível então elaborar uma explicação para a notável capacidade de reconhecimento de 10^{16} tipos de antígenos por um sistema que "somente" dispõe de um repertório de $10^6 - 10^7$ células do tipo *B*. *

O conceito de espaço de forma generalizada foi utilizado também por Levin-

* Uma célula do tipo *B* quando estimulada por antígenos produz anticorpos com a mesma especificidade da célula e, portanto, a variedade de anticorpos é a mesma das células *B*, chamada *repertório* do sistema.

Segel-Adler [1991] para a elaboração de um modelo de evolução entre plantas e herbívoros que são caracterizados respectivamente pelas toxinas e anti-toxinas que seus organismos contém. O efeito de uma toxina é descrito por um conjunto de medidas de natureza química que determinam a sua “forma” em um *espaço químico*.

A generalização do conceito de espaço de fase e a emergência do conceito de escalas frente ao antigo ideal reducionista, apresentam uma perspectiva de que novas janelas de observação possam ser determinadas para a descrição da dinâmica de populações em suas variadas manifestações.

Um sistema complexo *irreduzível* é aquele em que suas múltiplas escalas são tão permeáveis entre si que tornam impossível uma descrição parcial através de uma faixa isolada das escalas. Nestes casos a única simulação possível do sistema é realizada por ele mesmo, isto é, não há redundância a ser simplificada e a única maneira de descrever a dinâmica do sistema é observar a sua própria evolução.

3. A Dinâmica em Paralelo Frente ao Sequencialismo

O conceito de complexidade foi apresentado em duas situações distintas mas relacionadas; a primeira, objetiva, aplicável a processos sequenciais (Kolmogorov) e, a segunda, como decorrência da multiplicidade de escalas e, portanto, dependente da escolha do observador e de caráter aparentemente subjetivo.

Conforme já analisamos, alguns objetos formais (ou conceituais) quando construídos sequencialmente, ainda que por um processo finito, manifestam uma tal complexidade no sentido de Kolmogorov, que os tornam fisicamente (ou, materialmente) não computáveis. Isto poderia nos levar a considerar a existência concreta de tais objetos como impossível. Entretanto, em várias situações é aparente que a dificuldade reside no método de construção e não em alguma característica intrínseca do objeto. Como a complexidade de Kolmogorov se refere ao menor comprimento (em BITS) possível para a construção *sequencial*, é claro que a alternativa não pode ser procurada nesta forma. A questão é: existem outros métodos, não sequenciais, que tenham um escopo razoavelmente geral e que possam ser mais eficientes do que os métodos sequenciais em situações relevantes?

O exemplo mais conhecido e que, de fato, representa tipicamente várias facetas desta questão, é o reconhecimento de padrões visuais que tem sido motivo de interesse antigo mas que ganhou maior importância nos últimos anos devido ao seu significado tecnológico em robotização e também como um paradigma em inteligência artificial (Marr [1982], Haken [1990], Holden [1991], Krinsky [1991] e etc.).

A relativa facilidade com que o cérebro humano realiza esta tarefa comparada com a extrema complexidade de descrever (sequencialmente) um padrão visual e com as dificuldades encontradas para programá-la por algoritmos (sequenciais), faz deste exemplo um tópico de especial interesse teórico.

Se não houvesse nenhum exemplo concreto destes métodos, esta questão poderia ser apenas uma motivação para especulações vazias. Mas, como já vimos, há vários candidatos biológicos, construídos por uma longa história evolutiva, que realizam tarefas de cognição de extraordinária complexidade notadamente os sistemas neurológico e imunológico e populações de alguns insetos. É interessante enfatizar que todos estes exemplos são constituídos de populações (em um sentido geral) que apresentam como características comuns, não a substância ou a estrutura microscópica de seus indivíduos, mas as interrelações que se apresentam como uma *rede abstrata e variável*, e dotada de grande plasticidade.

É óbvio que objetos “complexos” não poderiam ser representados (ou seja, “conhecidos” em uma memória, e reconhecíveis) por meio de uma estrutura simples. Mas, por outro lado, não há necessidade de se restringir o conceito de estrutura à “matéria” que apresenta uma complexidade “apenas” física, (isto é, materialmente computável), mesmo porque os objetos a serem construídos tem complexidade determinada por grandeza de origem combinatória e, portanto, de ordem fatorial!

Com isto fica claro a razão pela qual as estruturas “virtuais” são mais eficientes que a matéria no volume de informações que podem armazenar.

A conclusão que nos resta é de que os dispositivos mais adequados para a representação de objetos complexos são formados por estruturas análogas às deles e a construção destes objetos é realizada por meio da dinâmica destas estruturas. Esta é a razão que, a “grosso modo”, motiva o interesse extraordinário no estudo da dinâmica de populações com mecanismos de interação individual.

A representação formal sequencial e a dinâmica determinística têm raízes na estrutura sequencial que é o fundamento para o conhecimento humano: o *tempo*. Esta forma de representação gráfica é originária da linguagem que, por sua vez, extraindo-se os aspectos espaciais dos gestos e da entonação, difíceis de incorporar à sintaxe, é totalmente fundamentadas no fluxo unidimensional do tempo.

A dinâmica sequencial tem duas desvantagens críticas, que são, a *vulnerabilidade* e o *custo*; a “falha” de um dos elementos de uma cadeia sequencial (dedutiva ou determinística) representa uma falha de todo o sistema, e, a dinâmica sequencial “excita” apenas um elo de cada vez enquanto todos os outros elos permanecem inativos.

Estes aspectos são analisados de maneira elucidativa por W. D. Hillis [1985] em seu livro “The Connection Machine” que aborda o assunto sob o ponto de vista das arquiteturas utilizadas na fabricação de computadores.

Se considerarmos que a “complexidade material” (isto é, o número de indivíduos) das populações que produzem estruturas de grande complexidade não é maior do que a apresentada por um super computador atual, (v. tabela abaixo), concluímos rapidamente que a diferença crucial entre a dinâmica sequencial e a efetuada por estes sistemas está fundamentalmente baseada na melhor “utilização” dos seus componentes pelos últimos.

População	Ordem de Grandeza da População
Língua Moderna	$\sim 10^6$ vocábulos (Oxford English Dictionary)
Sociedade Humana	$\sim 10^{10}$ indivíduos
Supercomputador	$\sim 10^{11}$ transistores
Sistema Neurológico	$\sim 10^{11}$ neurônios
Sistema Imunológico	$\sim 10^{11}$ tipos de anticorpos
Organismo	$\sim 10^{14}$ células
Sistema Sociobiológico (formigas)	$\sim 10^{15}$ formigas (Wilson [1972])
Laser	$\sim 10^{18}$ átomos
Fluido (Ar)	$\sim 10^{23}$ átomos
Universo	$\sim 10^{100}$ estrelas (10^{10} galáxias)

Mas se todos os componentes “funcionam” ao mesmo tempo, há duas

hipóteses possíveis: existe um comando central (ou, pelo menos um comando por região) que governa o funcionamento de todos ou, a dinâmica individual de cada componente é autônoma e se baseia apenas nas informações recebidas das interações com os seus "vizinhos".

A segunda alternativa é amplamente favorecida não só por observações experimentais como do ponto de vista conceitual, uma vez que um dispositivo central de comando não poderia ser considerado um componente da população mas um sistema a parte.

Portanto, a característica dinâmica destes sistemas capazes de construir estruturas de grande complexidade é o *paralelismo* onde cada indivíduo realiza uma trajetória no espaço de *aspecto* que, (no caso contínuo), é determinada "instantaneamente"* pela sua rede de conexões atuais com o resto da população.

É importante observar que a rede de conexões de um determinado indivíduo em um determinado instante é uma característica que depende unicamente das posições relativas da população no espaço de *aspecto*. Isto significa que todas as informações necessárias (e, disponíveis) de cada indivíduo estão completamente (e, necessariamente) expressas pela sua posição no espaço de *aspecto*.

O comportamento inteligente não é exemplificado na natureza por características de centralização e determinismo mas, invariavelmente, por paralelismo e conexionalismo.

Se em outras épocas, não tão distantes, a máquina determinística era encarada como um instrumento que futuramente substituiria o homem no desenvolvimento de teorias matemáticas e na construção de conhecimento, ou, pelo menos na verificação de sua validade, não é de se surpreender que, agora, dispositivos com uma dinâmica que mimetizam os paradigmas do paralelismo (sistemas neurológicos, imunológicos e sociobiológicos) venham a ser considerados como "máquinas de cognição", o que de fato vem sendo vigorosamente estudado (Hillis [1985]), Hertz [1989, Krinsky

* É possível, e ocorre também, casos de recursão finita, isto é, em que há dependência com retardamento, mas não consideraremos esta possibilidade aqui.

[1991], Hoppensteadt [1992] e etc.).

4. A Emergência de Estruturas e a Predictabilidade

N. Bohr - "It is very hard to predict, especially the future"

A predictabilidade na dinâmica de um sistema é parte do paradigma clássico newtoniano que prevê a possibilidade de descrever completamente a sua trajetória sem limites de precisão. As dificuldades (inesperadas) que surgiram com o problema newtoniano de $N \geq 3$ corpos eram inicialmente encaradas do ponto de vista técnico e de contingência. Entretanto, o próprio desenvolvimento levado a efeito no estudo da mecânica por Poincaré e Lyapunov no princípio do século, demonstrou mais tarde que estas dificuldades eram fundamentais e irremovíveis.

Se em uma dinâmica com poucos componentes e uma interação relativamente simples apresentava uma quebra das expectativas de predictabilidade, era inevitável que, com muito mais razão, o mesmo acontecesse com populações muitíssimo mais numerosas. A turbulência e a meteorologia dinâmica são os exemplos representativos desta imprevisibilidade.

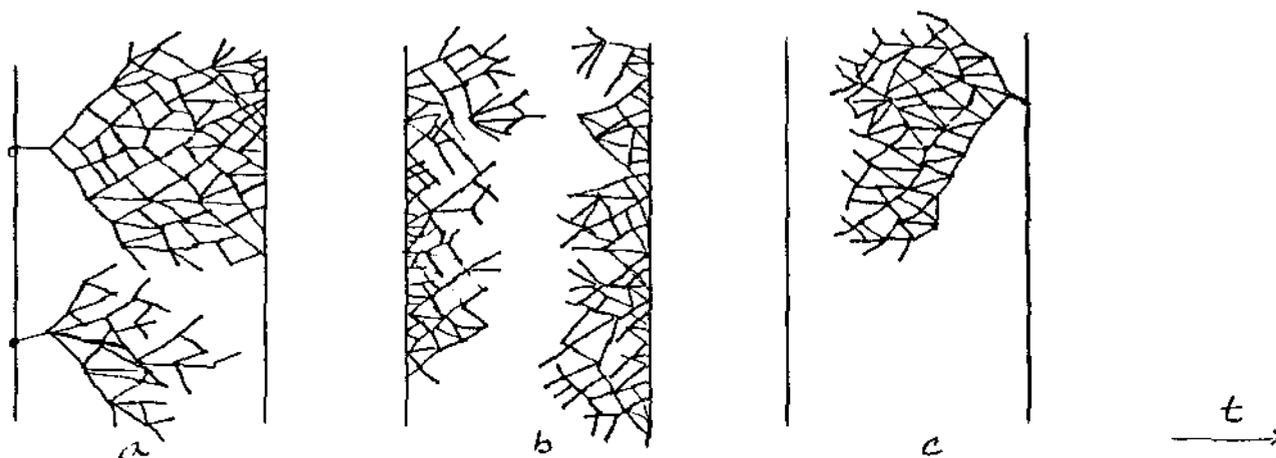
A teoria de evolução, que Darwin desenvolveu no século passado, tinha características essencialmente descritivas e explicativas dos fatos que a natureza apresentava, ela não se propunha em momento algum a prever o futuro das espécies. O próprio mecanismo de variação e seleção que Darwin propôs impedia claramente que a trajetória evolutiva fosse prevista com exatidão, uma vez que flutuações aleatórias eram capazes de influenciar macroscopicamente no resultado final.

Ainda nesta época não estava estabelecida no meio científico a teoria genética de Mendel e as suas bases moleculares só vieram a ser descobertas mais tarde. Sob esta nova perspectiva, a imprevisibilidade do processo evolutivo ganha uma notável semelhança conceitual com a dinâmica de turbulência no sentido de que as suas manifestações macroscópicas são decisivamente influenciadas por exemplos a nível molecular o que demonstra uma extraordinária permeabilidade entre as suas múltiplas

escalas. A grande diferença de escalas com respeito ao tempo e número de componentes entre estes dois fenômenos dificulta esta analogia, mas a teoria de Landau-Hopf (~ 1950) que procurou descrever a turbulência como uma sucessão de bifurcações causadas por instabilidades, (apesar de ser apenas parcialmente correta), é um atestado da existência de uma origem conceitual comum para a abordagem desta classe de fenômenos.

A dependência de fenômenos macroscópicos em eventos de natureza molecular poderia sugerir que a imprevisibilidade das trajetórias seria uma consequência lógica da incerteza a nível quântico, mas não é este ponto de vista reducionista que desejamos enfatizar. A imprevisibilidade que nos interessa é também de certa forma relacionada à finitude material (ou computacional) do observador frente à enorme (mas ainda finita) complexidade apresentada pelas estruturas ramificadas da dinâmica do sistema.

O conceito de instabilidade da dinâmica contínua é melhor apreendido por meio da imagem de uma árvore de "decisões" que apresenta todas as possíveis trajetórias de um sistema discreto (v. fig. 1 a, b, c)



O ponto fundamental da imprevisibilidade em sistemas com uma dinâmica desta natureza está na complexidade (não-computacional) resultante do número de decisões necessárias para descrever a trajetória em todos os seus detalhes para um intervalo de tempo macroscópico (mesmo que estas decisões sejam determinísticas em cada nó).

Esta situação não é tão desesperadora do ponto de vista cognitivo desde que

abandonemos a posição reducionista e analisemos melhor alguns casos exemplificados pictoricamente pelos esboços 1a, 1b, 1c.

A figura 1b representa uma situação de complexidade que elimina qualquer predictabilidade no sentido estrito e está muito próxima do que a turbulência provavelmente significa, isto é, o regime de caos em que a impredictabilidade atinge ou se aproxima da irreducibilidade.

Esta perspectiva negativa com respeito à predictabilidade em diversos fenômenos complexos e, particularmente a turbulência, tem sido abordada com maior cuidado e insistência nos últimos dez anos, tanto como uma impossibilidade lógica, como também do ponto de vista da sua não-computabilidade física. É oportuno citar aqui as opiniões de Stephen Wolfram e Uriel Frisch que representam duas correntes de investigação nestas questões:

S. Wolfram [1986 p. 388] – “It is typical of complex systems that to determine their behaviour requires extensive computation. This is consequence of the fact that the evolution of the systems themselves typically corresponds to a sophisticated computation. In fact, the evolution of many complex systems is probably computationally irreducible: it can be found essentially only by direct simulation and cannot be predicted by any short-cut procedure. Such computational irreducibility is a necessary consequence of the efficient use of computational resources in a system. Any computational reducibility is a sign of inefficiency, since it implies that some other system can determine the outcome more efficiently. Many systems in nature may well be computationally irreducible, so that no general predictions can be made about their behavior”

U. Frisch (Brasília, Julho de 1989) - “ At the present time we know less about fine scale turbulence than about the structure of atomic nuclei... We cannot rule out indeed that some of the central questions of turbulence are undecidable in the sense of Goedel and Turing. If this is true, it just indicates that we are on the wrong path by insisting on a purely deterministic description of turbulence”.

Interessa-nos abordar os casos 1a e 1c que são o reverso, um do outro, com relação ao tempo. Um exemplo simples mas elucidativo é dado pelo fenômeno de difusão de uma carga unitária em um plano. Neste caso, teríamos uma dinâmica representada pelo esquema 1c com apenas um nó (ou vizinhanças dele) na extremidade direita, o que significaria o estado uniforme; isto é, qualquer que fosse a distribuição

unitária inicial o sistema acabaria por se dirigir para um estado bem determinado e totalmente previsível.

Se, por outro lado, tentarmos reverter esta dinâmica, tal como representada na figura 1a, verificaremos que há uma imprevisibilidade não somente quanto à trajetória mas, principalmente, (e isto é muito mais grave) quanto ao estado final.*

A dinâmica representada pela figura 1a, tal como no caso da teoria evolutiva, pode explicar um estado final reconstruindo-se a trajetória realizada (pelo menos em curta escala de tempo), e é esta a tarefa a que se propõe no estudo das árvores filogenéticas (Edwards-Cavalli-Sforza [1964]). Entretanto, é computacionalmente impossível descrever deterministicamente a trajetória futura ao longo destas ramificações devido ao número de *decisões* necessárias. Observe que o retorno não exige decisões; a trajetória flui automaticamente através dos nós sem necessidade de realizar um processo computacional de decisão em cada um deles.

As dinâmicas representadas pelo esquema 1c, se não possibilitam uma descrição detalhada de suas trajetórias (que seria necessário para a sua predictabilidade estrita), também não são completamente imprevisíveis em todos os seus aspectos.

Se os pontos de chegada são em número relativamente pequeno, é razoável procurar uma função entre eles e as condições iniciais, o que representa na maioria das vezes toda a informação procurada para a análise do sistema.

Portanto, a predictabilidade no seu sentido estrito deve ser substituída nestes casos por uma predictabilidade de estados finais em função dos estados iniciais.

A determinação destes “estados finais” não passa necessariamente pela descrição da trajetória assim como o estado estacionário no problema de difusão não é necessariamente obtido pelo limite da solução temporal; é possível caracterizá-lo por meio da equação estacionária.

Esta estratégia matemática tem sido utilizada na determinação clássica de estruturas notáveis que são “construídas” por situações deste tipo, principalmente em mecânica ao meio contínuo, tal como as estruturas convectivas de Bernard, Taylor

* A dificuldade numérica do problema inverso para a equação do calor é um fato conhecido e estudado desde a teoria clássica. Curiosamente, este problema, numericamente instável (mal-posto, como se diz), é importante para a reconstrução de imagens e, portanto, para o reconhecimento de padrões.

e Couette em fluidos e a forma de flambagem de uma coluna ou de uma lâmina em elasticidade (Drazin [1979], Chandrasekar [1961], Joseph [1976]).

A utilização destas idéias em dinâmica de populações teve início na década de 1960-1970 com os estudos sobre a emergência de estruturas organizadas em cinéticas da físico-química, como nas reações de Belousov-Zhabotinskii, na precipitação dos anéis de Liesegang, e outros, (Murray [1989], Nicolis-Prigogine [1977]), que foram influenciados pela enorme atividade que existia na época dirigida para os processos de auto organização em dinâmica dos fluidos.

O trabalho de L. Segel e E. Keller em 1970 sobre a previsão de morfogênese em populações de *Dictyostelium discoideum* como estados emergentes de uma dinâmica interativa, marcou um início destas investigações em biologia e se constituiu em um paradigma local no estudo da morfogênese em seus diversos aspectos da teoria geral de populações com distribuição e com interatividade (Murray [1989], Keshet [1988], Segel [1980-1984], Meinhardt [1982]).

A predictabilidade no estudo de sistemas complexos tem sido substituída pelo novo conceito de emergência com um sentido de previsão de formas e estruturas, e que não contempla a descrição detalhada da trajetória que a constrói no sistema original (que, em geral, apresenta mesmo uma complexidade não-computável).

Uma outra imagem que contém uma melhor descrição figurativa desde conceito é a de uma superfície com poços cujos pontos mínimos representam os estados emergentes e onde a dinâmica seria representada pelo movimento de uma esfera sob ação da gravidade apoiada sobre a superfície.

Esta imagem nos fornece uma idéia de complexidade se considerarmos uma topografia extraordinariamente acidentada para a superfície, e também sugere que entre uma estrutura e outra várias trajetórias podem ser percorridas e que apenas os poços mais profundos (mais estáveis) dispõem de algum interesse por serem reprodutíveis e observáveis.

Embora uma análise do novo conceito de emergência de estruturas em contraposição do clássico conceito de predictabilidade tenha ainda um campo fértil a ser explorado, decidimos passar ao último aspecto que abordaremos com respeito à dinâmica de populações como o novo paradigma, que é o conceito de modelo ma-

temático e simulação.

5. Modelo Matemático e Simulação Versus Teoria Axiomática Reducionista

O conceito clássico de teoria para o estudo de fenômenos naturais inclui tacitamente a suposição de que ela representa uma descrição exata (em potencial, pelo menos) baseada em “Leis” que, portanto, devem ser *obedecidas pela natureza*. A crença na existência de teorias que sintetizem toda a informação é, como já vimos, parte do paradigma clássico representado pelo modelo axiomático.

A quebra da crença na predictabilidade clássica ou o abandono dela por questões computacionais (práticas ou materiais) especialmente em se tratando de problemas em biologia (e, também, economia e muitas outras ciências de caráter fortemente antropomórfico) fez com que surgissem novas atitudes e abordagens para a descrição dos fenômenos naturais. Abria-se mão do inalcançável e procurava-se aperfeiçoar o método para uma descrição apenas das observações que fossem interessantes, ou possíveis. É claro que aqui voltamos às questões sobre a suficiência dos observáveis para a sua própria descrição.

A estratégia adotada é então construir um modelo (matemático ou computacional) que mimetize o fenômeno nas suas principais características observáveis macroscópicas sem compromisso rígido “a priori” com uma concordância a nível microscópico.

Poderíamos dizer que esta atitude é, sob alguns aspectos, exatamente reversa à do princípio reducionista, pois um dos seus possíveis objetivos, ou subprodutos, seria uma melhor compreensão dos fenômenos microscópicos com base em informação macroscópicas.*

Entretanto esta não é a missão principal na construção de modelos matemáticos que tem por princípio prático utilizar das hipóteses microscópicas mais simples que macroscopicamente produzam os fenômenos observados. Este ‘princípio’

* Em algumas situações em que este procedimento é deliberadamente adotado a questão estudada é denominada de “Problema Inverso”, em uma clara alusão ao princípio reducionista.

tem sido adotado com progressiva frequência (Langton [1989], Av-Ron-Parnas-Segel [1991]) tanto para a construção de modelos contínuos como discretos e pode ser denominado de *princípio minimalista*.

É curioso observar que uma das características do reducionismo é a crença na simplicidade objetiva dos fenômenos microscópicos ao contrário do presente caso em que se procura uma representação microscópica simples, independentemente da sua “validade” nesta escala; a “validade” só é exigida em escala macroscópica.

Esta atitude tem mostrado que em inúmeras situações, de fato, comportamentos extremamente simples na escala microscópica podem produzir na escala macroscópica fenômenos de enorme complexidade.

Com isto, tem se desenvolvido com grande vigor na última década a construção de modelos discretos simulativos com algum sucesso na descrição dos sistemas complexos paradigmáticos neurológico (Hertz-Krogh-Palmer [1991], Hoppens-teadt [1992]), imunológico (Doyne [1986], Bagley [1989]), e sociobiológico (Langton [1988], Hogeweg [1988]), e também para a turbulência (Frisch [1989]).

Todos estes modelos têm a característica comum de uma dinâmica em paralelo, isto é, dotada de interação individual.

Utilizando a imagem do final da seção anterior, diríamos que um modelo matemático procura construir uma tal superfície suavizando as rugosidades e detalhes que a tornam complexa do ponto de vista microscópico e que são irrelevantes do ponto de vista macroscópico.

Desta forma, o modelo matemático pode ter uma dinâmica com predictabilidade mas que não descreve, obviamente, os detalhes de complexidade das trajetórias do fenômeno estudado.

CAPÍTULO IV

Modelos Matemáticos: Formulação Intrínseca, Espaços de Parâmetros e Complexidade

1. Introdução

Neste capítulo apresentamos uma definição generalizada de *modelo matemático* juntamente com o conceito de complexidade do modelo a partir de uma abordagem abstrata e simples dos conceitos básicos de dimensão, unidade e medida.

A origem dos argumentos é fundamentalmente baseada nas idéias clássicas de “adimensionalização”, e isto se enfatiza através da análise de um exemplo heurístico simplificado na primeira parte do capítulo.

A formulação de um modelo matemático para descrever e representar quantitativamente um fenômeno não matemático (seja ele físico, químico, biológico etc.) baseia-se em medidas de algumas “grandezas” pre-estabelecidas e passa necessariamente pela escolha de um sistema de unidades^(*). É a especificação “a priori” destas “grandezas” e suas unidades o que nos possibilita tratar quantitativa e analiticamente um fenômeno; razão mais do que suficiente para atribuir uma importância fundamental a esta questão.

Por outro lado, em qualquer tipo de medida, a escolha da unidade fica inteiramente a critério do observador. Obviamente, há restrições fortes à utilização da unidade quilômetro (ou anos luz!) para a medida de comprimento, se, por exemplo, o modelo matemático em estudo descreve um fenômeno de dinâmica celular! Mas este é um critério puramente prático e tem por objetivo simplesmente evitar manipulações aritméticas com números muito grandes ou muito pequenos. Na verdade, o sistema de unidades é completamente independente do fenômeno estudado e tem um caráter extrínseco ao modelo matemático. A inexistência de um critério teórico quanto a sua

^(*) (Um modelo matemático não necessita ser quantitativo no sentido de que, eventualmente, seus observáveis possam ser elementos de conjuntos definíveis independentemente do conceito de número)

escolha, introduz, inevitavelmente, um aspecto subjetivo e, portanto, impróprio na formulação do modelo matemático.

Esta questão, que nem sempre é apreciada ou sequer abordada em trabalhos de matemática aplicada, será o tema central do presente artigo, cujo objetivo será distinguir de forma clara, esperamos, os diversos conceitos envolvidos na construção geral de um modelo matemático; primeiro, através de um exemplo simples e didático, e segundo, com uma apresentação formal e definições rigorosas. Na segunda parte, introduziremos os conceitos de *Grupo de dimensões*, *Grupo de Unidades e Medidas*, para então desenvolver uma abordagem abstrata do conceito de *Modelo Matemático Invariante*. As formulações analíticas de um modelo matemático serão encaradas como representações do modelo. Mostraremos como a escolha do grupo de dimensões é parte fundamental e integrante do modelo matemático enquanto que o sistema de unidades é independente do modelo e diz respeito apenas à sua formulação analítica e à conveniência do observador. Um resultado relativamente simples, o princípio de redução, mostrará como o grupo de dimensões impõe severas restrições ao modelo matemático o que, naturalmente, significa que esta escolha contém hipóteses fundamentais sobre o modelo.

Isto não deve ser uma surpresa se considerarmos que para um sistema mecânico, onde as dimensões básicas são MLT , uma dimensão composta, como a da força, é definida com base na 2ª lei de Newton ($F = ma$, $[F] = MLT^{-2}$), estando desta forma carregada de um significado Físico. O grupo de dimensões é portanto intimamente ligado a pressupostos sobre o modelo matemático.

A utilização deste princípio nos levará a uma formulação analítica simplificada do modelo matemático por meio de um procedimento que é heurísticamente empregado em matemática aplicada sob o nome de *adimensionalização*. O esclarecimento destas questões básicas possibilita a introdução de outros conceitos importantes como o de espaço de parâmetros, complexidade de um modelo matemático, escalas e sistemas de unidades intrínsecas, bem como a sua generalização para outros contextos.

2. Exemplo e introdução dos conceitos

Para exemplificar concretamente os conceitos, ainda que não rigorosamente, analisaremos o conhecido e didático modelo matemático para um sistema mecânico massa-mola-viscosidade. Seguindo a abordagem usual para problemas mecânicos, utilizaremos a *base de dimensões* $\{M$ (massa), L (comprimento), T (tempo) $\}$, sendo que as dimensões serão dadas por expressões formais do tipo

$$D = M^a L^b T^c \quad \text{onde } a, b, c \in \mathbb{Z}$$

As unidades básicas (ou, o sistema de unidades) são também escolhidas por uma das maneiras usuais, como por exemplo, quilograma (K), centímetro (C), segundo (S), e as unidades referentes às unidades compostas, $U(D)$, serão dadas por $U(D) = K^a C^b S^c$. Escreveremos então a formulação do modelo matemático para o fenômeno mecânico, de acordo com Newton, Stokes e Hooke, como a solução $x = \varphi(t, m, c, k, x_0, v_0)$ do seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} \quad 1$$

A função $x = \varphi(t, m, c, k, x_0, v_0)$, (ou a equação $x - \varphi(t, m, c, k, x_0, v_0) = 0$) será encarada como uma relação matemática entre *medidas* nas variáveis x, t, m, c, k, x_0, v_0 para as dimensões $(L, T, M, MT^{-1}, MT^{-2}, L, LT^{-1})$, e que tem por objetivo fornecer um critério para determinar se um conjunto ordenado de sete medidas resultam ou não, de um *evento* do fenômeno estudado. A representação dessas medidas se dá em uma região de \mathbb{R}^7 que denominamos espaço de fase. Sob este ponto de vista generalizado não discriminaremos as variáveis dependentes e independentes e os parâmetros; todas as medidas que fazem parte do modelo são consideradas *variáveis*. Entretanto, seguindo a prática comum, nesta abordagem inicial faremos uma distinção entre as variáveis e os parâmetros que serão denominados *constitutivos*. Os valores atribuídos à estes parâmetros (isto é, suas medidas) serão ajustes circunstanciais do modelo matemático para a descrição de um determinado experimento do fenômeno, cujo observável será uma função, $\varphi(t)$. Ressaltamos todavia que o conceito de modelo

matemático que iremos utilizar precede à escolha dos parâmetros constitutivos e das variáveis independentes e dependentes que são de caráter essencialmente técnico (e, portanto subjetivo), embora de grande importância para a análise matemática do modelo.

No exemplo em questão, como estamos interessados em analisar o movimento do sistema mecânico, escolheremos as variáveis m, c, k, x_0, v_0 que denotaremos vetorialmente por $(m, c, k, x_0, v_0) = \mu \in \mathbb{R}^5$, como os parâmetros constitutivos, e que serão considerados como estrutura do modelo matemático formulado como em I. Estes parâmetros se destinam a ajustá-lo à representação de experimentos (eventos) específicos para um mesmo fenômeno mecânico, qual seja, o movimento de um sistema massa-mola-viscosidade. Uma vez ajustada a estrutura $\mu \in \mathbb{R}^5$ do modelo, o seu observável passará a ser uma função $\varphi(t, \mu)$.

Introduzimos desta maneira o conceito de *espaço de parâmetros* μ para a formulação matemática I do modelo para o movimento de um sistema mecânico.

O conceito de espaço de parâmetros constitutivos é fundamental para o estudo de um modelo matemático pois é nele onde se faz o mapeamento qualitativo dos variados comportamentos do modelo.

A comparação destes diversos comportamentos frente ao conhecimento experimental ou factual do fenômeno estudado é um teste preliminar indispensável para a avaliação da representatividade do modelo matemático.

A região do espaço de parâmetros constituída dos pontos que ajustam experimentos do fenômeno para os quais a representatividade do modelo é aceitável, é frequentemente (ainda que impropriamente) denominada região de validade do modelo. (Sob qualquer critério razoável esta região de validade tem delimitações difusas e vale muito mais como um conceito do que como objeto de cálculo exato). A exploração do comportamento qualitativo do modelo matemático é realizada através do estudo de problemas específicos ditados por amostras “críticas” de pontos do espaço de parâmetros. Os instrumentos matemáticos mais importantes para este estudo são a análise numérica e a teoria de perturbação (que não é uma teoria mas uma rede de métodos analíticos de aproximação assintótica), usados de forma complementar e interativa.

Para ser minimamente abrangente nesta exploração, cada parâmetro escalar deve ser testado com pelo menos três valores representativos (digamos, pequeno médio e grande) o que nos levará a $3^5 = 243$ comparações entre resultados experimentais e matemáticos para o exemplo mecânico. Este número mede, de certa forma, a complexidade do modelo matemático e, como podemos ver, cresce exponencialmente com o número de parâmetros constitutivos.

É claro que esta situação não é inteiramente satisfatória, nem do ponto de vista prático, dado o enorme número de casos a serem analisados, nem do ponto de vista teórico, em virtude da sua completa subjetividade com relação ao espaço de parâmetros constitutivos que dependem da escolha das unidades. O conceito de complexidade, se definido assim, ficaria muito mais como uma característica da formulação matemática do que um atributo intrínseco do modelo.

Felizmente estas duas dificuldades se complementam no sentido de podermos utilizar da arbitrariedade na escolha das unidades para simplificar o espaço de parâmetros.

A origem rudimentar desta ideia é muito antiga remontando, pelo menos, aos trabalhos de Galileu sobre elasticidade e biomecânica (~ 1673), a partir de quando ela se desenvolveu (Fourier, Rayleigh, Sedov) em um método prático amplamente utilizado em mecânica sob o nome de análise dimensional, Sedov [1975]. O objetivo principal do método é obter uma formulação do modelo, de tal forma que seja invariante com respeito ao sistema de unidades e, para o qual, os conceitos de espaço de parâmetros, complexidade e outros tenham significado inteiramente fundamentados no modelo matemático e independente do observador.

O método da análise dimensional aplicado ao nosso exemplo baseia-se no seguinte argumento heurístico. Observamos inicialmente que a variável composta $\xi = x/x_0$ é "adimensional" no sentido de que sua dimensão é $[\xi] = D = M^0 L^0 T^0$. (*) Portanto, os valores desta variável independem do sistema de unidades, dependem apenas das medidas. Ora, uma variável com estas características não pode ser dependente de variáveis "dimensionais" que podem assumir quaisquer valores por uma mera mudança de unidades, embora representando a mesma medida (ver conceito de

(*) Para uma variável ξ , denotaremos a dimensão a qual sua medida se refere por $[\xi]$.

medida II.4). Portanto, conclui-se, ξ só deverá ser função das variáveis também “adimensionais”, que, por ventura, se possam escrever a partir de x, t, m, c, k, x_0, v_0 .

Se $[\xi_i] = D_i = L^{\alpha_i} M^{\beta_i} T^{\gamma_i}$ ($1 \leq i \leq 7$) forem suas respectivas dimensões, as variáveis adimensionais serão obtidas como produtos correspondentes aos produtos dimensionais

$$\prod D_i^{d_i} = L^{\sum \alpha_i d_i} M^{\sum \beta_i d_i} T^{\sum \gamma_i d_i}$$

para os quais $\sum \alpha_i d_i = 0, \sum \beta_i d_i = 0, \sum \gamma_i d_i = 0$. Não é difícil concluir que dispomos de 4 variáveis adimensionais “essencialmente diferentes” e, portanto, $\xi = x/x_0$ pode ser escrita como função de três variáveis adimensionais; uma independente e dois parâmetros constitutivos.

O espaço de parâmetros fica assim reduzido a \mathbb{R}^2 e a complexidade a $3^2 = 9$, o que significa um ganho considerável se comparado a $3^5 = 243$.

Neste trabalho, optaremos por abordar estas idéias sob um ponto de vista alternativo que servirá para esclarecê-las e generalizá-las para outros contextos.

Argumentando de uma maneira análoga à busca de invariância das leis mecânicas quanto a sistemas referenciais (cuja origem remota também é devida a Galileu), obteremos sistemas de unidades, que denominaremos *intrínsecas*, para os quais a formulação matemática do modelo não depende do sistema de unidades original, e para o qual o espaço de parâmetros é reduzido a um número com significado intrínseco ao modelo.

Para ilustrar estas idéias voltamos ao nosso exemplo e observamos inicialmente que a formulação matemática I do modelo, explícita de forma natural algumas unidades *intrínsecas* para as dimensões de M (massa) e comprimento (L), a saber, m e x_0 . As unidades intrínsecas para tempo, por outro lado, não são tão explícitas mas podemos facilmente determiná-las a partir dos parâmetros constitutivos, como por exemplo,

$$\frac{c}{k}, \sqrt{\frac{m}{k}}, \frac{m}{c}, \frac{x_0}{v_0} \text{ e etc.}$$

$$\left(\left[\frac{c}{k} \right] = \left[\sqrt{\frac{m}{k}} \right] = \left[\frac{m}{c} \right] = \left[\frac{x_0}{v_0} \right] \right)$$

Outras unidades intrínsecas de massa e comprimento também podem ser facilmente determinadas desta forma. Não é difícil concluir que existe apenas um número finito de unidades intrínsecas “essencialmente distintas” para cada dimensão, o que de certa maneira, ainda mantém alguma dose de arbitrariedade. Ao invés de imediatamente procurarmos estabelecer um critério para a eliminação desta arbitrariedade, mostraremos que, qualquer que seja a escolha do sistema de unidades intrínsecas, o número de variáveis adimensionais será sempre o mesmo, ou seja, o conceito de espaço de parâmetros adimensionais é mais do que um jogo de palavras, é uma medida intrínseca da complexidade do modelo matemático. Por outro lado, é exatamente a partir desta arbitrariedade que podemos diferenciar o conceito de unidade intrínseca, (que é qualquer medida obtida dimensionalmente a partir dos parâmetros constitutivos), do conceito de escalas intrínsecas (ou naturais), que se refere a unidades intrínsecas escolhidas criticamente com base no comportamento qualitativo do modelo para uma classe específica de problemas.

O conceito de escalas naturais, que é indispensável para a utilização dos métodos de perturbação, será desenvolvido em um próximo artigo.

Deixando então provisoriamente de lado esta questão, tomemos, arbitrariamente, as seguintes unidades intrínsecas para M (massa) L (comprimento) e T (tempo)

$$m, x_0, \sqrt{\frac{m}{k}} = t_0,$$

nas quais as variáveis dependente e independente serão medidas por

$$\bar{x} = x/x_0 \quad \bar{t} = t/t_0.$$

O modelo matemático pode ser escrito nestas novas variáveis como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x_0 m}{t_0^2} \frac{d^2 \bar{x}}{d\bar{t}^2} + \frac{cx_0}{t_0} \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} + kx_0 \bar{x} = 0 \\ x_0 \bar{x}(0) = x_0 \\ \frac{x_0}{t_0} \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}(0) = v_0 \end{array} \right.$$

ou, definindo $\alpha = \frac{c}{\sqrt{mk}}$ e $\beta = \frac{v_0}{x_0} \sqrt{\frac{m}{k}}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\bar{x}} + \alpha \dot{\bar{x}} + \bar{x} = 0 \\ \bar{x}(0) = 1 \\ \dot{\bar{x}} = \beta \end{array} \right. \quad \text{II}$$

$$\left(\cdot = \frac{d}{dt} \right)$$

cuja solução $\bar{\varphi}(\bar{t}, \alpha, \beta)$ depende apenas de dois parâmetros constitutivos.

É claro que

$$\bar{\varphi}(\bar{t}, \alpha, \beta) = \varphi(\bar{t}, 1, \alpha, 1, 1, \beta)$$

ou,

$$\varphi(t, m, c, k, x_0, v_0) = x_0 \bar{\varphi} \left(\sqrt{\frac{k}{m}}, \frac{c}{\sqrt{mk}}, \frac{v_0}{x_0} \sqrt{\frac{m}{k}} \right)$$

Observemos que, na formulação II do modelo matemático, a massa e o deslocamento inicial são unitários, como era de se esperar pela escolha das unidades, mas, além disso, ainda temos um bônus extra com a normalização da constante da mola.

Analizemos agora algumas das vantagens da formulação do modelo matemático pela função $\bar{\varphi}(\bar{t}, \alpha, \beta)$.

A formulação II é adimensional porque todas as suas variáveis $(\bar{x}, \bar{t}, \alpha, \beta)$ são *adimensionais* e, portanto, invariantes com o sistema de unidades extrínseco original. Em particular, concluímos que os valores numéricos (medidas) dos parâmetros α e β dispõe de um significado intrínseco e dependem exclusivamente da estrutura interna do modelo. Um ponto $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ no espaço de parâmetros determina completamente uma estrutura do modelo.

O espaço de fase na formulação I se situa agora em \mathbb{R}^4 . A análise qualitativa do modelo matemático na sua formulação adimensional II exige portanto apenas um mapeamento em \mathbb{R}^2 , o que resulta em uma simplificação drástica (em ordens de grandeza) com relação ao modelo na sua formulação dimensional I. A “grosso modo” reduzimos a (pseudo) complexidade do modelo em I de $3^5 = 243$ para a sua (real) complexidade em II dada por $3^2 = 9$.

A redução no espaço de parâmetros implica em uma correspondente redução no espaço de fase. Em outras palavras, descobrimos que os problemas matemáticos

definidos em I podem ser agrupados em classes de equivalência, bastando portanto que seja analisado apenas *um* em cada classe. Cada ponto (α, β) no espaço de parâmetros adimensionais, corresponde a um contínuo tridimensional

$$\frac{c}{\sqrt{mk}} = \alpha \quad \frac{v_0}{x_0} \sqrt{\frac{m}{k}} = \beta$$

do espaço de parâmetros dimensionais $(m, c, k, x_0, v_0) \in \mathbb{R}^5$, e representa qualitativamente o mesmo experimento do fenômeno.

É fácil concluir também que para a simulação numérica de um modelo, a escolha dos parâmetros deve ser feita no espaço reduzido. O analista numérico de um modelo matemático que não atinar para este fato elementar, possivelmente estará ocupando o precioso e dispendioso tempo computacional de outros e estará, certamente, perdendo o seu próprio tempo na contemplação de uma inútil digitorragia.

Para o analista assintótico sequer iniciar o seu trabalho, a formulação do modelo matemático deverá ser, não apenas adimensionalizado mas, criticamente adimensionalizado, o que implicará na escolha apropriada de *escalas intrínsecas*.

Além dos aspectos vantajosos que a formulação invariante oferece quanto a análise do modelo matemático, é interessante também mencionar a sua importância na teoria de *modelos físicos* que é amplamente utilizada na dinâmica de meios contínuos (mecânicos ou biológicos).

A dificuldade de testar experimentalmente fenômenos de grande porte (como a dinâmica de aviões, navios ou represas) ou muito pequenos (como o movimento de glóbulos vermelhos em um capilar) levanta naturalmente a seguinte questão: qual o modelo físico de “tamanho factível”, (um protótipo), que representaria o fenômeno, e como?

A simples redução (ou a ampliação) geométrica não representa fielmente o fenômeno original, e Galileo já sabia muito bem disto no século XVII.

Pelos argumentos que acabamos de apresentar, dois experimentos do fenômeno representado pelo modelo I são qualitativamente equivalentes se os seus respectivos parâmetros dimensionais $(m, c, k, x_0, v_0) = \mu$ e $(m', c', k', x'_0, v'_0) = \mu'$ estiverem na mesma classe de equivalência, isto é, se

$$\alpha = \frac{c}{\sqrt{mk}} = \frac{c'}{\sqrt{m'k'}}$$

$$\beta = \frac{v_0}{x_0} \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{v'_0}{x'_0} \sqrt{\frac{m'}{k'}}$$

Neste caso, ambos os experimentos serão descritos pela mesma função

$$\bar{\varphi}(t, \alpha, \beta).$$

Portanto, experimentos em que os parâmetros constitutivos adimensionais se mantêm inalterados apresentam comportamentos qualitativamente semelhantes.

Este é o princípio fundamental da construção de modelos físicos.

A título de exemplo, suponha que um modelo físico reduzido do sistema massa-mola-viscosidade deva ser construído para representar o fenômeno caracterizado pelos parâmetros constitutivos $(m, c, k, x_0, v_0) = \mu$, de tal forma que,

$$m' = 10^{-3}m \quad (\text{redução da massa por um milionésimo})$$

$$x'_0 = 10^{-1}x_0 \quad (\text{redução do deslocamento e da}$$

$$v'_0 = 10^{-1}v_0 \quad \text{velocidade inicial por um décimo})$$

Questão: quais devem ser as especificações para a mola (k') e para a viscosidade (c') do modelo físico?

Para que o experimento determinado por $\mu' = (m', c', k', x'_0, v'_0)$ apresente o mesmo comportamento qualitativo devemos ter

$$\alpha = \frac{c'}{\sqrt{m'k'}} = \frac{c}{\sqrt{mk}} \quad \text{de onde} \quad \frac{c'}{\sqrt{10^{-3}mk'}} = \frac{c}{\sqrt{mk}}$$

$$\text{ou} \quad \frac{c'}{\sqrt{10^{-3}k'}} = \frac{c}{\sqrt{k}}$$

e

$$\beta = \frac{v'_0}{x'_0} \sqrt{\frac{m'}{k'}} = \frac{v_0}{x_0} \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{ou} \quad \frac{10^{-1}v_0}{10^{-1}x_0} \sqrt{\frac{10^{-3}m}{k'}} = \frac{v_0}{x_0} \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\text{ou, } k' = 10^{-3}k$$

$$\text{e, portanto, } c' = 10^{-3}c$$

Todavia, nem sempre é possível conseguir uma redução tão drástica na resistência à viscosidade quanto a requerida pela relação $c' = 10^{-3}c$ e isto impõe uma considerável restrição à redução geométrica do modelo físico.

As idéias envolvidas no método de adimensionalização, embora antigas, não esgotaram as suas aplicações e o leitor interessado poderá encontrar diversos exemplos da sua notável eficácia em dinâmica dos fluidos (Birkhoff [1960], Sedov, [1975] Monin [1968], Frisch [1990]), e em biologia (Schmidt-Nielsen [1984], McMahon [1983], Lin [1990], Pritchard [1993], Hardt [1980], Vogel [1983]).^(*)

Além disto, sob o ponto de vista matemático, estas idéias também não se esgotam com uma simples mudança de variáveis por homotetia, mas se constituem na origem e ponto de partida da importante e ativa teoria de similaridade e grupos para equações diferenciais (Ovsiannikov [1982], Blumant [1974], Bluman [1984], Dressner [1983], Barenblatt [1979]). Na verdade, a teoria de grupos contínuos pode ser utilizada para a formalização dos vários resultados apresentados, entretanto, optaremos por uma argumentação mais natural e própria do ponto de vista da teoria de modelos matemáticos.

O procedimento heurístico utilizado até aqui para a obtenção da formulação invariante (adimensional) é “ad hoc” e não fornece garantia de que possa ser sempre bem sucedida, ou que os resultados finais, tal como o número de parâmetros adimensionais, possa ser determinado de antemão independentemente do método empregado.

Na próxima seção, adotaremos uma abordagem mais abstrata que nos ajudará a desenvolver um método sistemático aplicável a situações muito mais gerais do que as descritas por equações diferenciais e a demonstrar que o número de parâmetros invariantes é uma característica intrínseca do modelo matemático facilmente obtido.

^(*) West-Bhargava-Goldberger). Consulte também a curiosa aplicação destas idéias no ensino do cálculo em B. Cipra - Mistakes, A Calculus Supplement, Academic Press, 1989, (capítulo 6).

3. Definição de Modelo Matemático

1 - Grupo de Dimensões

Consideremos um conjunto de símbolos que denominaremos *base fundamental de dimensões*

$$D = \{D_1, \dots, D_k\}$$

onde cada símbolo D_i é chamado de dimensão fundamental, e o conjunto de produtos formais gerados por D

$$\{N = \prod_{i=1}^k D_i^{n_i}, \quad n_i \in \mathbb{Z}\} = \{D\},$$

que serão chamados de dimensões compostas.

Representando as dimensões da base como um conjunto ordenado (D_1, \dots, D_k) denotaremos por D^n , $n \in \mathbb{Z}^k$, o produto formal (dimensão composta)

$$D^n = \prod_{i=1}^k D_i^{n_i} \quad n = (n_1, \dots, n_k) \quad \text{onde}$$

$$D_j = \prod_{i=1}^k D_i^{\delta_{ji}}.$$

O elemento

$$I = D^0 = \prod_{i=1}^k D_i^0$$

será chamado adimensional.

Com a definição natural de produtos entre dimensões

$$D^n \cdot D^m = D^{m+n}$$

obtemos o *grupo de dimensões* (homogêneas) $G(D)$, com unidade I .

Um subconjunto de $\{D\}$, $\Delta = \{\Delta_1, \dots, \Delta_\mu\}$ é dito *completo* no grupo $G(D)$ se para toda dimensão $A \in G(D)$ existe uma forma de escreve-la como

$$A = \Delta^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{Z}^\mu, \quad (A = \Delta_1^{\alpha_1} \dots \Delta_\mu^{\alpha_\mu}).$$

Δ é dito uma *base*, se for completo e se cada dimensão composta for gerada de uma única forma.

Teorema: Todas as bases de $G(D)$ têm um mesmo número de elementos, k .

Dem: Como $\Delta_\eta \in G(D)$ $\Delta_\eta = \prod_{i=1}^k D_i^{\lambda_{\eta i}}$: $(1 \leq \eta \leq \mu)$ e como $D_i \in \{\Delta\}$ temos

$$D_j = \prod_{\eta=1}^{\mu} \Delta_\eta^{d_{j\eta}} \quad 1 \leq j \leq k.$$

$$\begin{aligned} \text{Portanto, } D_j &= \prod_{i=1}^k D_i^{\delta_{ij}} = \prod_{j=1}^{\mu} \left(\prod_{i=1}^k D_i^{\lambda_{\eta i}} \right)^{d_{j\eta}} = \\ &= \prod_{j=1}^k \prod_i^{\mu} D_i^{\lambda_{\eta i} d_{j\eta}} = \prod_{i=1}^k D_i^{\left(\sum_{\eta=1}^{\mu} d_{j\eta} \lambda_{\eta i} \right)} \end{aligned}$$

Pela unicidade da representação em D concluímos que

$$\sum_{\eta=1}^{\mu} d_{j\eta} \lambda_{\eta i} = \delta_{ij}.$$

Analogamente, $\Delta_\eta = \prod_{\xi=1}^{\mu} \Delta_\xi^{\left(\sum_{i=1}^k \lambda_{\eta i} d_{i\xi} \right)}$ e, portanto

$$\sum_{i=1}^k \lambda_{\eta i} d_{i\xi} = \delta_{\eta\xi}.$$

Consequentemente, as matrizes $\lambda = (\lambda_{\eta i})$ e $d = (d_{j\eta})$ satisfazem às igualdades

$$\lambda d = I_{\mu \times \mu}$$

$$d \lambda = I_{k \times k}$$

o que nos leva a concluir que $\mu = k$.

2 – Princípio de redução: índice dimensional do modelo

Consideremos agora um conjunto *completo* de dimensões $N = (N_1, \dots, N_p)$ em $G(D)$, tal que

$$N_j = \prod_{i=1}^k D_i^{a_{ij}}.$$

Então $p \geq k$, e é possível escolher uma base como subconjunto de N . As dimensões geradas por N são expressas na forma

$$\begin{aligned} N^\gamma &= \prod_{j=1}^p N_j^{\gamma_j} = \prod_{j=1}^p \left(\prod_{i=1}^k D_i^{a_{ij}} \right)^{\gamma_j} = \\ &= \prod_{i=1}^k D_i^{\left(\sum_{j=1}^p a_{ij} \gamma_j \right)} \quad \text{para } \forall \gamma \in \mathbb{Z}^p \end{aligned}$$

ou seja, $N^\gamma = D^{a\gamma}$ onde $a = (a_{ij})$ é uma matriz $k \times p$.

Os produtos N^γ tais que $a\gamma = 0$ são iguais ao elemento adimensional e serão denominados *Produtos Adimensionais* de N .

Como N é completo, concluímos que $p \geq k$ e que a dimensão vetorial do núcleo de a em \mathbb{Q}^p é igual a $p - k$. (Este núcleo pode, obviamente, dispor de uma base com coordenadas inteiras).

Por outro lado, como o posto da matriz a é igual a k podemos escolher k colunas linearmente independentes j^1, \dots, j^k .

Desta forma o conjunto de dimensões $\{N_{j^1}, \dots, N_{j^k}\} = \overline{N}$ será uma *base* de $G(D)$. O número $p - k$ será chamado *índice dimensional* do conjunto de dimensões N de $G(D)$.

3 – Grupo de Sistemas de Unidades

Um *sistema de unidades* no grupo $G(D)$ é uma função $u : G(D) \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $u\left(\prod_{i=1}^k D_i^{n_i}\right) = \prod_{i=1}^k u(D_i)^{n_i}$ isto é, u é um homomorfismo de grupos.

O conjunto de sistemas de unidades em $G(D)$ pode receber também uma estrutura natural de grupo com a operação $uv(N) = u(N)v(N)$ e será denotado por $G^*(D)$.

Os valores $u(D_i), i \leq i \leq k$, são chamados unidades básicas (ou valores fundamentais) do sistema de unidades e o determinam completamente.

$$u(I) = 1 \quad \forall u \in G^*(D)$$

O *sistema unitário* $i, i(N) = 1 \quad \forall N \in G(D)$, pode ser encarado como a origem; todos os outros sistemas serão múltiplos (em $G^*(D)$ de i e portanto $u \in G^*(D)$ pode ser também visto como uma *mudança* do sistema de unidades.

A mudança do sistema u para o sistema v é feito por meio do sistema $u^{-1}v = w$, onde $v = wu = (vu^{-1})u$.

Observamos que $G^*(D)$ não é construído arbitrariamente mas existe como uma consequência imediata de $G(D)$.

4 – Medidas

Denominaremos *medidas* de uma dimensão $N \in G(D)$ a uma função $m_N : G^*(D) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$m_N(u) = \frac{v(N)}{u(N)} m_N(v)$$

isto é, satisfaz à “regra de mudança de unidades”.

Observamos imediatamente que o número

$$m_N^0 = u(N)m_N(u)$$

é constante com $u \in G^*(D)$ e será denominado *invariante* da medida m_N , e também que

$$m_N^0 = m_N(i).$$

A medida

$$\begin{aligned} N : G^*(D) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longrightarrow N(u) = u(N)^{-1} \end{aligned}$$

será chamada *medida unitária* de N e tem invariante igual a 1.

Portanto, toda medida de N é simplesmente um múltiplo da medida unitária de N

$$m_N(u) = \frac{m_N^0}{u(N)}$$

Se μ for uma medida, denotaremos por $[\mu] = N$ a dimensão a que ela corresponde.

Medida de uma n -upla de dimensões $N = (N_1, \dots, N_n)$ é uma função $\mu : G^*(D) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ constituída de uma n -upla $(\mu_1, \dots, \mu_n) = \mu$ de medidas; $\mu^0 = (\mu_1^0, \dots, \mu_n^0)$ é o invariante de μ . A definição apresentada acima para medidas de dimensão, embora fazendo uso de todo o grupo de sistema de unidades, caracteriza um conceito que independe de um sistema particular e poderia ser dada independentemente de $G^*(D)$ através de seus invariantes. De fato, um objeto que depende de $G^*(D)$ depende, em última análise, de $G(D)$, ou seja, da base fundamental de dimensões $D = \{D_1, \dots, D_k\}$. Concluindo, reafirmamos que esta definição de medida se relaciona ao conceito de *função* e não aos seus valores numéricos que assume aqui o papel de representações da medida nos diversos sistemas de unidades.

4. Modelo Matemático – Formulação Analítica Reduzida

G. Vollmer: "Descriptions of systems may be rather lengthy. But they may be shortened by the elimination of redundancy. If a system is not redundant at all, if

no detail of its structure can be inferred from any other, then it is its own simplest description”.

Consideremos uma n -upla completa de dimensões de $G(D)$

$$N = (N_1, \dots, N_n) \quad (\text{i.e. } \{N\} = \{D\} \text{ e } n \geq k)$$

a qual está associado um conjunto M de medidas

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n), \quad \text{onde } [\mu_i] = N_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Definiremos M como um modelo matemático e a cada medida $\mu \in M$ como um evento do modelo.

Esta definição coloca o conceito de modelo matemático em uma perspectiva formal especial e abstrata mas que é intuitivamente razoável.

Observemos que a definição não faz uso de um sistema de unidades particular mas, implicitamente, se refere a todo o grupo $G^*(D)$ de sistemas de unidades que é determinado, em suma, por $G(D)$.

O grupo de dimensões $G(D)$ e a n -upla completa $N = (N_1, \dots, N_n)$ consiste, portanto, na estrutura básica sobre a qual está definido o conceito de modelo como um conjunto M de medidas (eventos). N será chamada n -upla de dimensões mensuráveis do modelo.

A representação dos eventos pode ser agora feita por métodos analíticos, o que nos levará ao conceito clássico de modelo matemático.

Como cada medida μ , é caracterizada pelo seu invariante $\mu^0 = \mu_n(u) = (\mu_1^0, \dots, \mu_n^0)$, o conjunto M pode ser biunivocamente associado a um subconjunto E^0 de \mathbb{R}^n que será chamado *espaço de fase* do modelo M . Se, por outro lado, utilizarmos um sistema de unidades u , os eventos de M também podem ser caracterizados como um subconjunto $E(u)$ de \mathbb{R}^n na forma

$$\mu \in M \xrightarrow{u} \mu(u) = (\mu_1^0 u(N_1)^{-1}, \dots, \mu_n^0 u(N_n)^{-1}) \in E(u)$$

O conjunto dos pontos de \mathbb{R}^n que representam uma medida μ de M pode ser descrito como

$$S_\mu = \{(\mu_1^0 u(N_1)^{-1}, \dots, \mu_n^0 u(N_n)^{-1}), u \in G^*(D)\}$$

Suponha que N_1, \dots, N_k formem uma base extraída de $N = \{N_1, \dots, N_k, N_{k+1}, \dots, N_n\}$ segundo o princípio de redução. Portanto, o sistema de unidades $u \in G^*(D)$ é completamente caracterizado por seus valores $u(N_1), \dots, u(N_k)$ e, se

$$N_{k+j} = \prod_{i=1}^k N_i^{\alpha_{ij}} \quad (1 \leq j \leq n-k)$$

temos

$$u(N_{k+1}) = u\left(\prod_{i=1}^k N_i^{\alpha_{i1}}\right) = \prod_{i=1}^k u(N_i)^{\alpha_{i1}}.$$

Assim, cada medida $\mu \in M$, terá sua representação no espaço de fase \mathbb{R}^n feita por uma hipersuperfície algébrica de dimensão k parametrizado pelos valores $u(N_1), \dots, u(N_k)$.

Além disto, esta representação é feita sem ambiguidade pois, se $\mu(u) = \bar{\mu}(v)$ (i.e. se $S_\mu \cap S_{\bar{\mu}} \neq \emptyset$) para $u, v \in G^*(D)$ então

$$\mu_i(u) = \bar{\mu}_i(v) \quad 1 \leq i \leq k.$$

Dado $w \in G^*(n)$, temos

$$\begin{aligned} \mu_i(w) &= w(N_i)^{-1} u(N_i) \quad \mu_i(u) = w(N_i)^{-1} u(N_i) \bar{\mu}_i(v) = \\ &= w(N_i)^{-1} u(N_i) v(N_i)^{-1} v(N_i) \bar{\mu}_i(v) = \bar{\mu}_i(w^{-1} u v^{-1}) \end{aligned}$$

ou seja, existe uma medida $w^{-1} u v^{-1} = \bar{w}$ tal que

$$\bar{\mu}_i(\bar{w}) = \mu_i(w),$$

logo, $S_\mu = S_{\bar{\mu}}$.

Portanto, a representação do modelo M em \mathbb{R}^n é feita por meio de uma correspondência entre os eventos $m_N \in M$ e os elementos S_{m_N} de uma família disjunta de hipersuperfícies de dimensão k em \mathbb{R}^n .

Se estas hipersuperfícies determinarem uma folheação de uma região no espaço de fase em \mathbb{R}^n a caracterização da família pode ser feita pela sua co-dimensão, isto é, por meio de uma hipersuperfície de dimensão $n-k$ transversal à família. Em outras palavras, suponha que os pontos $\bigcup_{\mu \in M} S_\mu$ sejam representados como zeros de uma função $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, isto é,

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = 0 \iff \exists \mu \in M \text{ e } u \in G^*(D) \text{ tal que } x_i = \mu_i(u), 1 \leq i \leq n.$$

Por meio desta identificação a representação dos eventos μ do modelo M é feita por meio das raízes de ϕ mas sem necessidade de todas elas; basta que encontremos uma raiz em cada hipersuperfície. Se $\mu \in M$ é tal que $\mu_i^0 \neq 0$; $1 \leq i \leq n$, então

$$\phi(\mu_1(u), \dots, \mu_n(u)) = 0$$

ou,

$$\phi(\mu_1^0 u(N_1)^{-1}, \dots, \mu_k^0 u(N_k)^{-1}, \mu_{k+1}^0 u(N_{k+1})^{-1}, \dots, \mu_n^0 u(N_n)^{-1}) = 0$$

Tomando agora o sistema de unidades (*intrínsecas*) u tal que $u(N_1) = \mu_1^0 \dots u(N_k) = \mu_k^0$ teremos

$$\phi(1, \dots, 1, \mu_{k+1}^0 u(N_{k+1})^{-1}, \dots, \mu_n^0 u(N_n)^{-1}) = 0$$

ou

$$\phi\left(1, \dots, 1, \frac{\mu_{k+1}^0}{\prod_{i=1}^k (\mu_i^0)^{\alpha_{i1}}}, \dots, \frac{\mu_{k+1}^0}{\prod_{i=1}^k (\mu_i^0)^{\alpha_{ij}}}\right) = 0.$$

Observemos agora que

$$\forall v \in G^*(D), \quad \frac{\mu_{k+1}(v)}{\prod_{i=1}^k (\mu_i(v))^{\alpha_{ij}}} = \frac{\mu_{k+j}^0}{\prod_{i=1}^k (\mu_i^0)^{\alpha_{ij}}} \quad \text{pois,}$$

$$N_{k+j} = \prod_{i=1}^k (N_i)^{\alpha_{ij}} \quad (1 \leq j \leq n-k) \text{ e}$$

$$\frac{v(N_{k+j})}{\prod_{i=1}^k (v(N_i))^{\alpha_{ij}}} = 1, \quad \forall v \in G^*(D).$$

Portanto,

$$\mu \in M \iff \phi\left(1, \dots, 1, \dots, \frac{\mu_{k+j}^0}{\prod_{i=1}^k (\mu_i^0)^{\alpha_{ij}}}, \dots\right) = 0.$$

Concluimos então que a busca das soluções de $\phi(x_1, \dots, x_n) = 0$ que determinam os eventos μ do modelo matemático M é equivalente à busca das raízes de

$$\psi(\eta_1, \dots, \eta_{n-k}) = 0$$

onde

$$\eta_j = \frac{x_{k+1}}{\prod_{i=1}^k (x_i)^{\alpha_{ij}}}$$

e

$$\psi(\eta_1, \dots, \eta_{n-k}) = \phi(1, \dots, 1, \eta_1, \dots, \eta_{n-k}).$$

Os agrupamentos η_j são chamados *adimensionais* pois não dependem do sistema de unidades usado para avaliar μ .

A formulação matemática

$$\psi(\eta_1, \dots, \eta_{n-k}) = 0$$

do modelo M será chamada *formulação adimensional*, ou *formulação analítica reduzida*, ou *invariante*.

A caracterização da função ψ , seja por um problema de equação diferencial ou por qualquer outro critério, significa a determinação do conjunto de eventos possíveis M através de sua formulação analítica reduzida.

A formulação invariante obtida por meio da escolha de unidades intrínsecas utiliza a base de dimensões N_1, \dots, N_k extraída do sistema completo $N = (N_1, \dots, N_k, N_{k+1} \dots N_n)$, pelo princípio de redução, ou seja, utiliza k colunas linearmente independentes da matriz a , enquanto que o método de adimensionalização faz uso imediato dos produtos adimensionais de N , ou seja utiliza uma base do núcleo de a .

A formulação invariante analítica é descrita portanto através de uma função ψ com $n - k$ variáveis $\eta_1, \dots, \eta_{n-k}$ que representarão os $n - k$ "agrupamentos adimensionais" de N_1, \dots, N_n dados por

$$\prod_{i=1}^n N_i^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^k D_j^{a_{ji}} \right)^{\alpha_i} = \prod_{j=1}^k D_j^{\left(\sum_{i=1}^n a_{ji} \alpha_i \right)}$$

ou seja, tomando uma base qualquer de $\text{Ker}(a)$, $\{\alpha^1, \dots, \alpha^{n-k}\}$, consideramos as dimensões

$$\Delta_m = \prod_{i=1}^n N_i^{\alpha_i^m} \quad 1 \leq m \leq n - k$$

e as variáveis $\eta_m = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i^m}$

O conjunto de variáveis adimensionais não é único, obviamente, mas tem sempre o mesmo número, $n - k$, de elementos. As variáveis de um conjunto, sempre podem ser escritas algebricamente em termos das variáveis de outro conjunto.

Se $\beta^1, \dots, \beta^{n-k}$ formam uma outra base de $\text{Ker}(a)$,

$$\beta^j = \sum_i T_{ji} \alpha^i \quad \left(\beta_s^j = \sum_i T_{ji} \alpha_s^i \right),$$

a variável adimensional correspondente a β^j é γ_j , e

$$\begin{aligned} [\gamma_j]^i &= \prod_s N_s^{\beta_s^j} = \prod_s N_s^{\sum_i T_{ji} \alpha_s^i} = \prod_i \prod_s N^{T_{ji} \alpha_s^i} = \\ &= \prod_i \left(\prod_s N_s^{\alpha_s^i} \right)^{T_{ji}} = \prod_i [\eta_i]^{T_{ji}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\gamma_j = \prod_{i=1}^{n-k} \eta_i^{T_{ji}}.$$

Por este motivo poderemos considerar que estas duas abordagens são de fato pontos de vista *duais* de um mesmo princípio.

A *complexidade do modelo* pode agora ser definida numericamente por e^{n-k} , que representa um crescimento exponencial com relação ao seu índice dimensional, $i(M) = n - k$, o que concorda qualitativamente com o conceito intuitivo apresentado anteriormente.

O índice dimensional é portanto, uma característica fundamental da estrutura do modelo matemático e pode ser facilmente calculado a partir do conjunto de suas dimensões mensuráveis ([Montroll [1986], Wolfram [1986]).

Esta é uma dentre das várias maneiras que tem sido propostos para medir a complexidade de um fenômeno mas, observemos que neste caso, não nos referimos ao fenômeno em si mas ao modelo matemático o que de certa maneira atrela o conceito de complexidade ao observador.

A dinâmica de populações com interações sociais se constituem naturalmente em sistemas com uma enorme complexidade em vários sentidos (Kolmogorov, Múltiplas Escalas e Espaços de Parâmetros). A descrição destas populações por

modelos matemáticos que utilizam o conceito de espaço de aspecto assume que as interações sociais são completamente caracterizadas pelas posições relativas entre indivíduos neste espaço ou por meio de uma métrica.

Como as dimensões espaciais tem dimensões de medida distintas, e a interação envolve em geral informações cruzadas entre todas elas, é razoável esperar uma grande complexidade destes sistemas com respeito ao seu espaço de parâmetros.

Uma discussão sobre as conexões entre estes três conceitos de complexidade não será tentada neste trabalho.

Se $i(m) = 1$, a formulação analítica do modelo é feita por meio de uma função de uma variável $\psi(\eta_1) = 0$, ou seja, ela se reduz a determinação de constantes $C = \eta_1$, e conseqüentemente à uma relação algébrica entre as variáveis dimensionais.

Consideremos o exemplo clássico fornecido pelo modelo matemático de um pêndulo oscilante sem atrito cujas dimensões mensuráveis são (T_0, g, l, m, A) , respectivamente, período, aceleração da gravidade, comprimento da haste, massa e amplitude da oscilação.

Como a base fundamental de dimensões é (T, M, L) (isto é, massa, comprimento) e

$$[T_0] = T, \quad [g] = LT^{-2}, \quad [l] = L, \quad [m] = M, \quad [A] = L$$

concluimos que $i(M) = 2$ e, portanto, podemos tomar como variáveis adimensionais $\eta_1 = T_0 l^{-1/2} g^{1/2}$, $\eta_2 = Al^{-1}$. A formulação analítica $\psi(\eta_1, \eta_2) = 0$ pode ser escrita como

$$\eta_1 = f(\eta_2)$$

ou

$$T_0 = \sqrt{\frac{l}{g}} f(A/l).$$

Se $A/l \ll 1$, podemos aproximar $f(A/l) \approx f(0)$, (pequenas oscilações), e obtemos

$$T_0 = f(0) \sqrt{\frac{l}{g}}$$

A resolução de um *problema particular* ou a medida de um evento nos dá então a conhecida fórmula para o período de oscilação de um pêndulo com pequena amplitude

$$T_0 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Para outros exemplos consulte Birkhoff, Sedov, McMahon-Bonner.

O caso limite $i(m) = 0$ (de complexidade mínima) significaria que a matriz a seria quadrada inversível

$$(\dim \text{Ker}(a) = 0 \quad \text{e} \quad n = k)$$

Portanto, do ponto de vista do modelo matemático, teríamos um conjunto de dimensões $N = (N_1, \dots, N_n)$ independentes entre si e formando uma base de $G(D)$. Neste caso seria impossível obter uma formulação matemática não trivial. Suponha que $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ seja uma formulação matemática com φ analítica. Então $\varphi(x_1 \dots x_n) = \sum c_\alpha x^\alpha$ onde c_α são adimensionais. Mas pelo princípio de homogeneidade todos os termos devem ter medidas da mesma dimensão e isto só seria possível com uma *única* potência $\alpha = (i_1, \dots, i_n)$ ($\alpha = 0$, se adimensional) o que resultaria em uma equação trivial.

Diversos aspectos conceituais sobre os fundamentos de modelos matemáticos e suas generalizações estão ainda inexplorados e abrangem um amplo espectro de pontos de vista que vão desde questões de cunho essencialmente filosófico e especulativo a outras questões práticas de grande importância na aplicação da matemática ao estudo de fenômenos naturais.

5. Tempo de Difusão

O processo clássico de difusão é um dos modelos mais comuns para o estudo da dinâmica de populações distribuídas pela sua simplicidade, e é importante conhecer algumas de suas propriedades que serão utilizadas mais adiante. A propósito, estas propriedades podem ser facilmente obtidas e se constituem em um bom exemplo para os conceitos de escalas.

Começemos pelo problema fundamental de difusão na reta com uma fonte pontual com N_0 indivíduos no instante inicial na origem. A densidade da população será a função incógnita dada por $u(x, t)$. As dimensões necessárias para o problema são:

$$\begin{aligned} [x] &= L \equiv \text{comprimento} \\ [t] &= T \equiv \text{tempo} \\ N &\equiv \text{número relativo de indivíduos contados com a unidade } N_0 \\ [u] &= NL^{-1}. \end{aligned}$$

Os únicos parâmetros serão $[D] = L^2T^{-1}$, $[N_0] = N$. Portanto, $\xi = x/\sqrt{Dt}$ é adimensional assim como $\frac{\sqrt{Dt}u}{N_0} = \rho$, e, necessariamente, temos $\rho = f(\xi)$ ou, $u(x, t) = \frac{N_0}{\sqrt{Dt}} f\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right)$.

Considerando o problema $\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x, 0) = N_0 \delta(x)$ obtemos uma equação ordinária para f cuja solução imediata nos dá $f(\xi) = Ce^{-(\xi^2/4)}$ e, finalmente,

$$u(x, t) = \frac{N_0}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\left(\frac{x^2}{4Dt}\right)}.$$

Se considerarmos o problema em duas e três dimensões continuaremos tendo a mesma variável adimensional $z = \frac{x^2}{Dt}$ e um novo agrupamento, respectivamente, $\rho_2 = Dt u_2$ e $\rho_3 = (Dt)^{3/2} u_3$ e, portanto,

$$u_2(x, t) = \frac{1}{4\pi Dt} e^{-\left(\frac{x^2}{4Dt}\right)}, \quad u_3(x, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} e^{-\left(\frac{x^2}{4Dt}\right)}$$

onde x é a distância radial à origem.

Como se sabe, a equação de difusão dispõe de uma velocidade infinita de sinalização o que sob alguns pontos de vista é enganoso. Sob o ponto de vista experimental, uma população N_0 colocada na origem, fará "sentir" a sua presença em um ponto $x_0 > 0$ somente quando a densidade $u(x_0, t)$ estiver acima de uma medida detectável, digamos $\varepsilon > 0$, isto é, só para o instante t no qual

$$u(x_0, t) \geq \varepsilon.$$

Levando em conta apenas o termo dominante exponencial concluímos que isto se dá apenas depois que

$$\frac{x^2}{4Dt} < \bar{\varepsilon}.$$

Ou seja, o tempo necessário para que o sinal seja detectável em x_0 é da ordem de $\frac{x_0^2}{D}$, e esta medida de tempo $\bar{t}_0 = \frac{x_0^2}{D}$ é chamada de tempo de difusão.

Invertendo o argumento, podemos obter uma avaliação da distância alcançada pela influência de uma difusão pontual depois de um tempo t na forma $x \sim \sqrt{Dt}$.

Para o caso bi e tridimensional as velocidades de propagação são avaliadas mais adequadamente por meio da área e volume, respectivamente, que são influenciadas depois de um tempo t , e que, naturalmente são descritos por

$$\begin{aligned} \text{Área} &\sim Dt && \text{(bidimensional)} \\ \text{Volume} &\sim (Dt)^{3/2} && \text{(tridimensional)} \end{aligned}$$

Estas avaliações são de importância fundamental para uma primeira abordagem de modelos matemáticos que contemplam o processo de difusão clássica em sua dinâmica, tal como na análise de ativação e inibição em populações com reação (Levin-Segel [1976], Segel [1990]).

Se considerarmos por exemplo, que D (sucrose em H_2O a $20^\circ C$) = $4.58 \cdot 10^{-6}$ $cm^2/seg.$, a ordem de grandeza para o tempo de difusão é $\bar{t}_0 \cong x_0^2 \cdot 2 \cdot 10^5$ seg com ($[x_0] = cm$), e portanto, se $x_0 = 10^2$ cm temos

$$\bar{t}_0 \cong 10^2 \cdot 2 \cdot 10^8 = 2 \cdot 10^{10} \text{seg} \sim 30 \text{anos.}$$

Esta estimativa nos mostra facilmente que o transporte ou a sinalização por difusão é completamente ineficiente para longas distâncias.

No artigo Murray-Seward [1992] sobre a dispersão espacial da raiva entre raposas na Europa, estima-se que o coeficiente de difusão para estes animais quando infectados pela doença (o que aumenta o seu movimento aleatório consideravelmente) é da ordem de $D = 200 \text{ Km}^2/\text{ano}$.

Os tempos de difusão para 100 Km e 1000 Km são

$$\bar{t}_{100} = \frac{(100\text{Km})^2}{200(\text{Km})^2/\text{ano}} \cong 50 \text{ anos}$$

$$\bar{t}_{1000} = \frac{(10^3\text{Km})^2}{200(\text{Km})^2/\text{ano}} \cong 5000 \text{ anos}$$

o que significa claramente que o processo interativo da população é fortemente responsável pela sua mais rápida propagação, que pode ser da ordem de 100Km/ano (Murray-Stanley-Brown [1986]).

Os organismos vivos utilizam-se de estratégias diversas para compensar esta baixa velocidade de “propagação” da difusão. Além do processo interativo já citado, a geometria também é utilizada pelas células cujo intercâmbio bioquímico com o exterior é feito por meio de difusão. Para facilitar este intercâmbio a célula toma formas achatadas onde há um aumento da superfície de contacto e uma diminuição da distância entre o núcleo e a membrana para o transporte de substâncias. Uma das estratégias mais utilizadas é a formação de redes de convecção como as de vascularização que se ramificam até escalas muito pequenas. Quando abordadas sob um ponto de vista macroscópico, tal como feito no capítulo VI, o transporte por ramificação pode ser tomado como um processo de difusão aperfeiçoada, encontrada no desenvolvimento tumoral (Folkman [1976], Balding [1986]), no metabolismo foliar (Mitchison [1981]), no crescimento de fungos (Eldelstein [1982]), no sistema bronquio pulmonar e outros (La Barbera-Vogel [1982], West-Goldberger [1987]).

Uma outra importante questão que exige a avaliação do tempo de difusão está relacionada à capacidade de predadores encontrar suas presas por meio de uma busca completamente aleatória que, macroscopicamente, ou probabilisticamente, é representada por um processo de difusão. Em situações como a procura de invasores do corpo por meio das células macrófagicas (que possuem mobilidade própria), a otimização do tempo de encontro é crucial para a defesa do organismo. O processo de

difusão pura neste caso seria totalmente ineficiente e é compensada por uma estratégia associada de *quimiotaxia* (Keshet [1988]).

CAPÍTULO V

Transição de Escalas e a Superposição Assintótica

“Construction in successive stages is the principal governing the formation of all living systems, whatever their degree of organization... Organisms are built by a series of integrations to form a set of the level just above...” François Jacob.

1. Introdução

Em qualquer investigação sobre um fenômeno natural feita com o objetivo de descrevê-lo quantitativa ou qualitativamente, é necessário concentrar e focalizar a atenção em uns poucos aspectos previamente escolhidos em detrimento de outros.

A própria caracterização de um fenômeno particular como objeto de estudo, assim com a escolha de suas variáveis mensuráveis são resultados de uma restrição preliminar da observação a um universo reduzido.

A escolha preliminar dos objetos concretos ou conceituais a serem focalizados surge de avaliações baseadas em experiências quando estes objetos se evidenciam, parte, como resultado da limitação natural do observador e parte de sua própria iniciativa. Este procedimento é, na verdade, a essência do método analítico que foi responsável pelo rompimento da metodologia científica com a estratégia filosófica da idade média, e que fundamentou o extraordinário desenvolvimento da ciência moderna.

A idéia de focalização ótica tem interessantes analogias com o procedimento analítico, a começar naturalmente pela atenção concentrada a um campo de observação (difusamente) restrito, não tanto no que se refere à delimitação espacial mas, principalmente, com respeito ao ajuste do foco que restringe a nitidez da observação a uma faixa de escalas de comprimento.

Uma observação microscópica do movimento de um organismo celular, por exemplo, exclui, de um lado, observações do movimento molecular do meio adjacente

e, do outro, aspectos macroscópicos realçando, no caso, processos da ordem de $10\mu m$. Já uma observação telescópica astronômica será focalizada em uma faixa de escalas completamente distinta.

O método analítico é caracterizado, genericamente pela redução do universo observável, isolando-o (em um amplo sentido) das interações com o "exterior". A consideração de um conjunto de objetos observáveis isoladamente como um universo a parte é, obviamente, uma abstração idealizada, e um reconhecimento não só tácito mas operacional deste fato, é indispensável para o tratamento matemático do fenômeno.

Obviamente o método só poderá produzir uma descrição caricata do fenômeno natural mas, de qualquer forma a natureza é mesmo muito complexa frente à nossa capacidade de compreensão para que possamos descrevê-la por mais que uma simples caricatura (Von Neumann). Entretanto, isto não significa que a única direção possível para a ampliação e aprofundamento do conhecimento científico seja a da progressiva redução do campo de observação, embora esta tenha sido uma tendência predominante na ciência contemporânea.

É notório que nos últimos anos houve um ressurgimento vigoroso de uma visão mais fenomenológica e menos reducionista na ciência no sentido de interrelacionar as numerosas e isoladas partes "microscópicas" do conhecimento por meio de modelos "macroscópicos". E, ao contrário do que ingenuamente se poderia prever, o macroscópico não é simplesmente tratável como uma superposição das partes microscópicas. Há de fato um salto qualitativo como resultado precípua da quantidade e da complexidade de interação entre diversas escalas.

A verdade é que no estudo de qualquer fenômeno natural estamos diante de um espectro contínuo de escalas simultâneas que são *permeáveis* e admitem interações entre seus diversos níveis, mesmo que a nossa observação se restrinja a universos extremamente reduzidos.

A *permeabilidade* através dos diversos níveis mesoscópicos de escalas quanto a interações mútuas é uma preocupação antiga na formulação de modelos matemáticos e é bem representada pela conhecida descrição que L. Richardsson (1922) fez sobre o mecanismo da turbulência em fluidos parafraseando um verso de J. Swift (1733)

“So naturalists observe, a flea,
Hath smaller fleas that on him prey,
and these have smaller yet to bite’ em,
and so proceed ‘ ad infinitum”

A origem do conceito de escalas de observação deve muito à dinâmica do meio contínuo e pode ser exemplificada pelo estudo do fenômeno de ondas de superfície da hidrodinâmica. Para uma abordagem deste fenômeno com o intuito de utilizar o instrumento de modelo matemático, é indispensável que seja estabelecida uma escala de observação “a priori” para diferenciar situações tão díspares quanto as que se mostram no oceano (da ordem de quilômetros) das que ocorrem em um copo d’ água (da ordem de centímetros).

O próprio oceano pode ser considerado como muito profundo, se observado na escala humana ou como uma película delgada sobre uma esfera, se visto em um contexto planetário.

Mesmo a escolha do fenômeno das ondas de superfície como objeto de estudos subentende um isolamento tácito do universo de observação com respeito a várias “fronteiras”, tanto espaciais, quanto temporais (tempo de observação) ou físicas (onde consideram-se algumas forças mecânicas mas descartam-se outras, como as magnéticas, térmicas e etc.).

A restrição preliminar do universo de investigação é feita, a “grosso modo”, com base na percepção experimental do observador e lhe é imposta pelas suas limitações naturais de cognição.

Entretanto, o prosseguimento da focalização em regiões com fronteiras mais restritas, e menos conhecidas, exige uma argumentação progressivamente mais cuidadosa do que uma percepção experimental.

A turbulência, que talvez seja o fenômeno mais conhecido e estudado onde ocorre uma intensa e extensa *permeabilidade* entre diversas escalas, é causada pelas inúmeras formas de instabilidades da dinâmica dos fluidos. Este mecanismo possibilita que fenômenos de natureza essencialmente molecular sejam fortemente ligados a fenômenos em escalas planetárias, ou seja, podemos dizer que os murmúrios moleculares são ouvidos em dimensões continentais (e esta é uma explicação razoável para a extrema complexidade que é uma característica da meteorologia).

A formulação de modelos matemáticos para fenômenos *relacionados* à dinâmica de populações de organismos, exige uma redução severa do universo de observação com respeito às escalas de tempo, comprimento e variedade de indivíduos.

A dinâmica de populações tal como de fluidos, apresenta uma grande permeabilidade entre as suas escalas e, portanto, modelos matemáticos com um mínimo de representatividade abrangem processos simultâneos em diversas escalas de tempo, comprimento e variedade de indivíduos.

A multiplicidade e a permeabilidade das escalas em ecologia, particularmente, é um fato notório que exige um tratamento cuidadoso tanto no que diz respeito às escalas de observação quanto às escalas naturais intrínsecas do modelo matemático.

Trabalhos recentes, como os de P. Kareiva [1988], têm abordado a questão de escalas de observação por meio da análise de experimentos controlados com populações de insetos, e, S. Levin [1992], tem discutido teoricamente o assunto sob vários aspectos.

No estudo da dinâmica de populações sob o ponto de vista sociobiológico (Jäger-Segel [1992], Hogeweg [1988], Schelling [1979]), o problema fundamental é relacionar os comportamentos e interações individuais que a etologia oferece (Lorenz, Tinbergen, Frisch) com as estruturas macroscópicas por meio de modelos matemáticos que façam esta transição. Em situações análogas, temos também as informações de natureza bioquímica relacionadas ao comportamento do sistema imunológico e a dinâmica eletroquímica dos íons neurotransmissores através da membrana celular dos neurônios com o sistema neurológico como um todo.

A dinâmica de redes filamentosas, a ser tratada no próximo capítulo, tem por objetivo a mesma conexão.

É importante observar que, (ao contrário do pressuposto pelo reducionismo), em diversos estudos o objetivo é obter informações sobre escalas microscópicas a partir dos modelos de escalas relativamente macroscópicas, mas, na quase totalidade dos casos o resultado é uma melhor compreensão de todas as escalas envolvidas em um fenômeno.

A interface entre modelos microscópicos e macroscópicos de um mesmo fenômeno é uma região de difícil análise e a estratégia mais comum para o seu estudo

é a formulação de um modelo abrangente. Na verdade, qualquer modelo matemático razoavelmente representativo contém na sua abrangência fenômenos de escalas muito diversas, e o estudo destas interfaces de transição e dos submodelos é de grande importância geral.

A transição destas descrições entre submodelos se faz de uma maneira singular e não como uma conexão “fixa” ou por uma passagem “suave”. A convivência necessária de escalas enormemente distintas em um mesmo modelo matemático axiomático exige que técnicas com um caráter mais operacional sejam desenvolvidas (no lugar de um critério exclusivamente experimental) para que se proceda não apenas ao isolamento de escalas de observações mas também ao estudo de suas inter-relações e transições.

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos relativos ao processo de transição entre escalas de um modelo matemático. Para isto, faremos uso de um modelo analítico no qual serão demonstrados alguns teoremas e técnicas que têm por finalidade a construção de aproximações assintóticas uniformes para soluções dos problemas.

A transição de escalas em um modelo matemático ocorre quando um parâmetro adimensional, que representa a relação entre duas medidas de mesma dimensão se aproxima de zero. (Isto significa uma discrepância entre duas medidas que exprimem duas escalas de mesma dimensão do modelo).

O limite nulo deste parâmetro adimensional é frequentemente singular o que indica uma concentração de informações nas vizinhanças deste limite; de uma maneira semelhante ao que acontece às singularidades de uma função analítica e, tal como também ocorre para estes casos, a aproximação da solução é feita *assintoticamente* por meio de uma série de funções básicas com respeito ao parâmetro ε .

Assim, se $u(\varepsilon)$ for a solução do problema em um espaço de funções E com norma $\|\cdot\|$, a aproximação assintótica de $u(\varepsilon)$ em séries de potências de ε ,

$$U_n(\varepsilon) = u_0 + \varepsilon u_1 + \cdots + \varepsilon^n u_n, \quad (u_k(\varepsilon) \in E),$$

deve satisfazer a uma estimativa do tipo

$$\|u(\varepsilon) - U_n(\varepsilon)\| \leq C_n \varepsilon^{n+1} \quad (C_n \text{ constante}).$$

Portanto, a aproximação (para a norma $\|\cdot\|$) depende não apenas de n como também de ε .

Em geral, a série $\sum u_k \varepsilon^k$ é divergente e o maior significado da aproximação provém do limite $\varepsilon \downarrow 0$; e na maioria das vezes, a primeira aproximação $U_0(\varepsilon) = u_0$ é suficiente, razão pela qual, enfatizaremos esta etapa inicial da construção.

É importante observar que, mesmo para modelos cujas equações são não lineares, os cálculos das funções $u_k(\varepsilon)$ são feitos por meio de operações lineares e de forma recursiva, onde cada etapa exige a inversão do mesmo operador linear. Neste aspecto, os métodos de aproximação assintótica para problemas de perturbação singular são semelhantes ao método de Newton e, em alguns tratamentos, esta semelhança conceitual pode se tornar concreta (Alexander [1991], Boglaev [1976]). Embora a aproximação assintótica aparentemente só seria de “valor prático” para ε no limite, na verdade, elas são excelentes representações analíticas da solução em uma região muito mais ampla do espaço de parâmetros.

Todas estas características fazem dos métodos de aproximação assintótica instrumentos indispensáveis para a análise de múltiplas escalas (Keller [1978]).

A origem conceitual do método que apresentaremos, assim como grande parte dos métodos de aproximação assintótica, está nos problemas da mecânica do meio contínuo e, particularmente, da dinâmica dos fluidos. Numa adimensionalização das equações de Navier-Stokes, o parâmetro (número de Reynolds)

$$Re = \frac{V_0 L_0}{\nu} \quad (\text{onde, } \nu = \text{coeficiente de viscosidade,} \\ V_0 = \text{escala de velocidade, } L_0 = \text{escala de comprimento})$$

representa de certa maneira uma relação entre uma escala de força inercial V_0^2/L_0 e uma força dissipativa $\nu V_0/L_0^2$ e, se $Re \gg 1$, estamos diante de uma preponderância da primeira sobre a segunda.

Portanto, se $Re \gg 1$, na equação adimensionalizada estacionária

$$v \nabla v = -\pi \nabla p + \frac{1}{Re} \Delta v,$$

é razoável desprezar o termo $\frac{1}{Re} \Delta v$ em regiões onde v não sofre variações muito rápidas, o que nos leva às equações de Euler. Entretanto isto modifica a equação de forma essencial, uma vez que as derivadas de maior ordem são eliminadas; o termo $\frac{1}{Re} \Delta v$ é, portanto uma perturbação singular da equação reduzida de Euler.

Como a viscosidade da água é muito pequena acreditava-se que as equações de Euler seriam uma boa descrição para a hidrodinâmica. Entretanto, a resistência calculada para o movimento de um sólido através do líquido pelas equações de Euler, resultava nula. Este “paradoxo” foi resolvido por L. Prandtl em 1904 quando ele observou que em uma finíssima camada sobre uma fronteira estacionária em que se escoava o líquido, havia uma variação extremamente rápida da velocidade entre as condições nulas sobre a fronteira e a velocidade “típica” do fluido a distância.

Portanto, as equações de Euler eram um bom modelo para regiões distantes da fronteira mas na região que ele denominou de “camada limite”, o termo de viscosidade era preponderante.

As equações de Navier-Stokes apresentam uma grande dificuldade para a análise e uma aproximação simplificada era altamente desejável nesta camada, a exemplo do que as equações de Euler representavam fora dela.

Com argumentos desta natureza, Prandtl propôs as equações da camada limite que são simplificações adequadas das equações de Navier-Stokes válidas para regiões vizinhas à fronteira.

A conexão entre as soluções das equações de camada limite (interiores) e das equações de Euler (exteriores) representou uma extraordinária contribuição de Prandtl para as técnicas heurísticas da matemática aplicada e, na sua generalização, este método recebe o nome de “matching” que tem uma enorme utilidade em vários ramos da Análise Aplicada (Kevorkian-Cole [1978], O’Malley [1974], Bender-Orszag [1978], Van Dyke [1974]).

O método “matching”, que é muito difundido na literatura contemporânea da matemática aplicada, tem ainda uma base conceitual herdada dos antigos trabalhos de

Prandtl e é suportada quase sempre por argumentos heurísticos e sem respaldo teórico (Vandyke [1975], Lin-Segel [1990], Bender-Orszag [1978], Kevorkian-Cole [1978]).

A própria aproximação que Prandtl obteve para as equações de Navier-Stokes na camada limite em 1904, só recentemente recebeu um embasamento teórico rigoroso, apesar de continuados esforços neste sentido desde àquela época.

Os métodos de Tikhonov-Vasileva e Vishik-Liusternik, embora disponham de demonstrações rigorosas para diversos problemas de perturbação singular em equações diferenciais ordinárias (Vasileva [1963], Vishik-Liusternik [1962], O'Malley [1974]) e parciais (Hoppensteadt [1971], Krein [1971], Vishik-Liusternik [1962]), as suas interpretações não correspondem perfeitamente à descrição do processo de transição de escalas tal como ele é observado em fenômenos naturais.

Por este motivo, é interessante e útil desenvolver uma interpretação analítica do processo de transição na forma descrita pelo "matching", que é o mais intuitivo.

As exposições existentes na literatura que pretendem oferecer uma descrição matemática mais rigorosa deste método não o fazem em toda a sua extensão, mesmo para exemplos mais simples (Lagerstrom [1985]).

O nosso intuito não é demonstrar rigorosamente que a solução obtida pelo método "matching" é de fato uma aproximação assintótica, mas acompanhar os argumentos do método analiticamente e verificar passo a passo a sua validade junto com as interpretações correspondentes no processo de transição.

No que se segue apresentaremos este procedimento para alguns casos de problemas de Cauchy de equações diferenciais ordinárias. Sob algumas hipóteses adequadas, estes procedimentos podem ser estendidos para equações em espaços de Banach, ou seja, equações diferenciais parciais, mas isto não será feito aqui.

Nestes casos (problemas de valor inicial) a região de transição rápida (camada limite) estará localizada na fronteira do domínio, mais precisamente, nas vizinhanças da origem. Entretanto, em diversos outros problemas importantes em biomatemática, como em dinâmicas com reação rápida e difusão lenta e meios excitáveis, a região de transição rápida surge como uma fina película viajante e tem características de propagação de uma frente de onda.

Este fenômeno tem uma grande importância no estudo de morfogênese,

reações químicas, epidemia dinâmica, transmissão de impulsos elétricos no músculo do coração e no cérebro, e etc. (Murray [1989], Tyson-Keener [1988], Fife [1988], Zykov [1987], Winfree [1987], Murray-Stanley-Brown [1986]).

2. O Princípio de Superposição Assintótica

Consideremos a função $e^{-\lambda(t/\varepsilon)}$, com $\lambda > 0$ e $\varepsilon > 0$, que representa o típico comportamento de camada limite à direita da origem no intervalo $[0, T]$.

Observamos que esta função se aproxima pontualmente de zero para $\varepsilon \rightarrow 0$ (em $t > 0$), mas não uniformemente. Ela apresenta uma variação extremamente rápida nas “vizinhanças” da origem e um comportamento quase constante fora destas vizinhanças. Para tornar este conceito mais claro, tomemos um ε -intervalo $[\varphi(\varepsilon), T]$ onde $\varphi(\varepsilon) \downarrow 0$ para $\varepsilon \downarrow 0$ e verificamos que se $\varphi(\varepsilon) \succ \varepsilon |\log \varepsilon|$, então $e^{-\lambda(t/\varepsilon)} = o(\varepsilon)$ para $t \in (\varphi(\varepsilon), T]$, ou seja, se $\psi(\varepsilon) = \varepsilon \log |\log \varepsilon| \prec \varepsilon |\log \varepsilon|$ a aproximação será uniforme em $(\psi(\varepsilon), T]$ mas não de ordem ε .

Consideremos inicialmente o exemplo

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = Ax + f(t) \\ x(0) = \alpha \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T], \varepsilon > 0)$$

onde A é uma matriz $n \times n$ assintoticamente estável, isto é, $\|e^{tA}\| \leq Ce^{-\lambda t}$ com $C > 0$ e $\lambda > 0$ e $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua diferenciável (tantas vezes quanto necessárias no contexto).

A solução fundamental do sistema, ou seja, o semigrupo gerado por A , é da forma

$$e^{(t/\varepsilon)A} = U(t, \varepsilon)$$

e satisfaz à estimativa

$$\|e^{(t/\varepsilon)A}\| \leq C e^{-\lambda(t/\varepsilon)}.$$

As soluções da equação homogênea

$$H(t, \varepsilon) = e^{(t/\varepsilon)A} \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}^n)$$

convergem pontualmente para zero no intervalo $(0, T]$, mas não uniformemente, (a menos que $\alpha = 0$), e caracterizam tipicamente o “fenômeno” de camada limite nas vizinhanças da origem.

Analisando melhor esta convergência verificamos que, se considerarmos o intervalo “móvel” $[\varphi(\varepsilon), T]$, (que será chamado um ε -intervalo), onde $\varphi(\varepsilon) \downarrow 0$ monotonicamente para $\varepsilon \downarrow 0$, a estimativa

$$\|H(t, \varepsilon)\| \leq C e^{-\lambda(t/\varepsilon)} \|\alpha\| \leq C \alpha \|e^{-\lambda(\varphi(\varepsilon)/\varepsilon)}\|$$

nos garante que podemos obter uma convergência uniforme no intervalo $[\varphi(\varepsilon), T]$, desde que $\frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow \infty$ para $\varepsilon \rightarrow 0$, ou, na notação da análise assintótica, $\varepsilon = o(\varphi(\varepsilon))$.

A solução do problema não-homogêneo pode ser representada na forma integral (Bassanezi-Ferreira [1988])

$$x(t, \varepsilon, \alpha) = \exp\left(\frac{tA}{\varepsilon}\right) \alpha + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \exp\left(\frac{t-s}{\varepsilon} A\right) f(s) ds =$$

ou fazendo-se a mudança $\varepsilon z = t - s$,

$$= \exp\left(\frac{tA}{\varepsilon}\right) \alpha - \int_0^{t/\varepsilon} \exp(zA) f(t - \varepsilon z) dz.$$

Observamos que o limite pontual desta expressão para $t > 0$ e $\varepsilon \downarrow 0$ é

$$\int_0^\infty \exp(zA) f(t) dz = -A^{-1} f(t) = \bar{x}_0(t)$$

que é a solução da *equação não perturbada* (também chamada reduzida ou degenerada) que se obtém fazendo formalmente $\varepsilon = 0$ na equação diferencial:

$$0 = Ax + f(t).$$

$\bar{x}_0(t)$ é solução degenerada, reduzida ou *exterior* (por motivos que serão expostos).

De acordo com o argumento de Prandtl, $\bar{x}_0(t)$ deve ser uma “boa” aproximação de $x(t, \varepsilon, \alpha)$ nas regiões exteriores à camada limite, onde $\frac{dx}{dt}$ é da ordem menor do que $1/\varepsilon$.

Passemos a verificar esta hipótese e determinar que $\bar{x}_0(t)$ é uma aproximação de ordem ε fora de um ε -intervalo do tipo $[0, \varepsilon |\log \varepsilon|]$.

Para isto escrevemos

$$\Delta(t, \varepsilon) = x(t, \varepsilon, \alpha) - \bar{x}_0(t) = \exp\left(\frac{tA}{\varepsilon}\right)\alpha + \int_0^{t/\varepsilon} \exp(zA)f(t - \varepsilon z) + \\ - \int_0^\infty \exp(zA)f(t)dz$$

ou,

$$\Delta(t, \varepsilon) = \exp\left(\frac{tA}{\varepsilon}\right)\alpha + \int_0^{t/\varepsilon} \exp(zA)(f(t - \varepsilon z) - f(t))dz + \\ \int_{t/\varepsilon}^\infty \exp(zA)f(t)dz.$$

Analisando termo a termo esta expressão temos:

$$\|\exp\left(\frac{tA}{\varepsilon}\right)\alpha\| \leq C_1 e^{-\lambda t/\varepsilon} \quad \text{onde } C_1 = C\|\alpha\| \quad (1)$$

$$\|\int_0^{t/\varepsilon} \exp(zA)(f(t - \varepsilon z) - f(t))dz\| \leq \int_0^{t/\varepsilon} e^{-\lambda z} K \varepsilon z dz \leq C_2 \varepsilon \quad (2)$$

$$\text{onde } K = \|f'\|_\infty \quad \text{e } C_2 = K \int_0^\infty e^{-\lambda z} z dz$$

$$\|\int_{t/\varepsilon}^\infty \exp(zA)f(t)dz\| \leq M \int_{t/\varepsilon}^\infty e^{-\lambda z} dz = \frac{M}{\lambda} e^{-\lambda t/\varepsilon} \quad (3)$$

$$\text{onde } M = \|f\|_\infty$$

e portanto fica provada a afirmação.

É necessário agora obter uma aproximação para a solução $x(t, \varepsilon, \alpha)$ em um ε -intervalo $[0, \phi(\varepsilon)]$ de tal forma que, assintoticamente, haja uma superposição dele com $(\varepsilon|\log \varepsilon|, T]$, isto é, que $(\varepsilon|\log \varepsilon|) = \phi(\varepsilon)$.

Para isto, fazemos a transformação "microscópica" que amplia a camada limite tomando $\tau = t/\varepsilon$.

A equação se torna então da forma

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\tau} = AX + f(\varepsilon\tau) \\ X(0) = \alpha \quad , \quad \text{onde } X(t/\varepsilon, \varepsilon, \alpha) = x(t, \varepsilon, \alpha). \end{cases}$$

Nesta equação podemos utilizar o teorema de perturbação regular (Bassanezi-Ferreira [1988]) e obter uma aproximação de ordem ε em um intervalo $[0, \tau_0]$ de $X(\tau, \varepsilon, \alpha)$ dada por $\bar{X}_0(\tau) = X(\tau, 0)$ que é a solução de

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{X} = AX + f(0) \\ X(0) = \alpha \end{cases}$$

e que pode ser escrita como

$$\bar{X}_0(\tau) = \exp(\tau A)[\alpha - A^{-1}f(0)] + A^{-1}f(0).$$

Entretanto, $X_0(t/\varepsilon)$ é uma aproximação de ordem ε de $x(t, \varepsilon, \alpha) = X(t/\varepsilon, \varepsilon, \alpha)$ somente no ε -intervalo de t de ordem ε , pois

$$\begin{aligned} 0 \leq \tau = t/\varepsilon \leq \tau_0 & \quad , \quad \text{de onde vem} \\ 0 \leq t \leq \tau_0 \varepsilon & . \end{aligned}$$

Isto significa que, em geral, *não há superposição* assintótica dos intervalos de aproximação interior e exterior na ordem ε com estas funções.

Se o requisito da aproximação de ordem ε for relaxada, para ordem $\varepsilon^{1/2}$ por exemplo, então, da estimativa

$$X(\tau, \varepsilon, \alpha) = \bar{X}_0(\tau) = \varepsilon \tau R_0(\tau, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \varepsilon^{1/2} \tau R_0(\tau, \varepsilon)$$

$$\begin{array}{ll} \text{temos} & 0 \leq \varepsilon^{1/2} \tau \leq \tau_0 \\ \text{e} & 0 \leq t \leq \tau_0 \varepsilon^{1/2} \end{array}$$

e, como $\varepsilon |\log \varepsilon| = o(\varepsilon^{1/2})$, teríamos a superposição. Mas não nos interessa este decréscimo de precisão, e, portanto, para haver superposição é necessário modificar os intervalos de aproximação nas suas ordens; ou diminuindo a ordem do interior, ou aumentando a do exterior.

O exemplo $\varepsilon \dot{x} = -\lambda x$ mostra claramente que não é possível em geral aumentar a ordem do intervalo exterior se insistimos na solução reduzida.

Consequentemente, devemos focalizar a nossa atenção na solução interior, o que faremos acrescentando um termo à expansão regular

$$\begin{aligned} X(\tau, \varepsilon) &= X(\tau, 0) + \varepsilon \frac{\partial X}{\partial \varepsilon}(\tau, 0) + \varepsilon^2 R(\tau, \varepsilon) \\ &= X(\tau, 0) + \varepsilon X_1(\tau) + \varepsilon^2 R(\tau, \varepsilon) \end{aligned}$$

onde $X_1(\tau)$ é a solução de $\begin{cases} \dot{X}_1 = AX_1 + \tau f'(0) \\ X_1(0) = 0 \end{cases}$ e, portanto,

$$X_1(\tau) = -\tau A^{-1} f'(0) - A^{-2}(1 - e^{\tau A}) f'(0)$$

$$X(\tau, \varepsilon) = X(\tau, 0) - \varepsilon \tau A^{-1} f'(0) + \varepsilon A^{-2}(1 - e^{\tau A}) f'(0) + \varepsilon^2 R(\varepsilon, \tau)$$

Como $\|R(\varepsilon, \tau)\| \leq C_0 \tau^N$, temos

$$\|\varepsilon^2 R(\varepsilon, \tau)\| \leq C_0 (\varepsilon^{1/N} \tau)^N,$$

e, portanto,

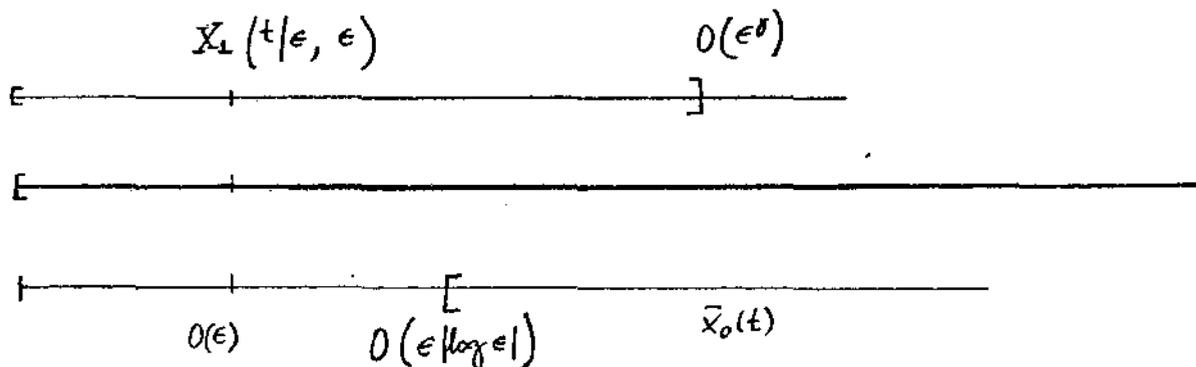
$$\begin{aligned} \varepsilon^2 R(\varepsilon, t/\varepsilon) &= o(\varepsilon) \quad \text{em um intervalo} \\ 0 \leq t \leq \tau_0 \varepsilon^\gamma &\quad (\gamma = 1 - \frac{1}{N} < 1) \end{aligned}$$

e $\varepsilon |\log \varepsilon| \prec \varepsilon \varepsilon^{(-1/N)} = \varepsilon^\gamma$. (No caso, temos $N = 2$ e $\gamma = 1/2$).

Portanto,

$$\bar{X}_0(t, \varepsilon) = X(t/\varepsilon, 0) - t A^{-1} f'(0)$$

é uma aproximação de $x(t, \varepsilon, \alpha)$ na ordem ε em um intervalo $[0, 0(\varepsilon^\gamma)]$ e há sobreposição assintótica com o intervalo $(\varepsilon |\log \varepsilon|, T]$.



A função $X_1(t/\varepsilon, \varepsilon)$ é uma aproximação de ordem ε no intervalo $[0, 0(\varepsilon^\gamma)]$ e é constituída de uma parte que é $o(\varepsilon)$ em $(\varepsilon |\log \varepsilon|, T]$, $e^{t/\varepsilon A}(\alpha + A^{-1} f(0))$, e outra que não decresce que denominaremos

$$X_m(t, \varepsilon) = -A^{-1} f(0) - t A^{-1} f'(0)$$

Por outro lado

$$x_0(t) - X_m(t) = -A^{-1}f(t) + A^{-1}f(0) - tA^{-1}f'(0) = 0(t^2)$$

é de $0(\varepsilon)$ no intervalo $[0, \varepsilon^{1/2})$.

Portanto podemos escrever

$$\begin{aligned} X_1(t, \varepsilon) &= X_0(t) + \bar{X}_0(t) - X_m(t) \\ &= -A^{-1}f(t) + e^{(t/\varepsilon)A}[\alpha + A^{-1}f(0)] \end{aligned}$$

e temos o seguinte esquema de aproximação

1) em $t \in [0, e^\gamma)$

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon, \alpha) - X_1(t, \varepsilon) &= X(t, \varepsilon, \alpha) - X_0(t) + \bar{x}_0(t) - X_m(t) \\ &= 0(\varepsilon) + 0(\varepsilon) = 0(\varepsilon) \end{aligned}$$

2) em $t \in (\varepsilon|\log \varepsilon|, T]$

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon, \alpha) - X_1(t, \varepsilon) &= X(t, \varepsilon, \alpha) - \bar{x}_0(t) + X_0(t) - X_m(t) \\ &= 0(\varepsilon) + 0(\varepsilon) = 0(\varepsilon) \end{aligned}$$

Concluimos assim que a construção por superposição assintótica

$$X_1(t, \varepsilon) = \bar{x}_0(t) + \bar{X}_0(t) - X_m(t)$$

é uma aproximação de $x(t, \varepsilon, \alpha)$ na ordem ε uniforme em $[0, T]$.

É interessante observar que o método “matching” heurístico, em geral se contenta em obter a aproximação interna como $X(\tau, 0)$, a aproximação externa como $\bar{x}_0(t) = -A^{-1}f(t)$ e a verificar a condição de “matching” dada pela igualdade, chamada *princípio do “matching” limite*,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} X(\tau, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \bar{x}_0(t) = -A^{-1}f(0) = x_i(t)$$

onde $x_i(t)$ é denominada função intermediária.

A aproximação é obtida pela superposição

$$X(\tau, 0) + \bar{x}_0(t) + A^{-1}f(0)$$

de acordo com o “argumento” de que foram somadas a aproximação interior à exterior e subtraída a parte intermediária comum, o que, por coincidência, é a mesma obtida anteriormente.

Entretanto, observa-se que não há sobreposição dos intervalos e o argumento não é válido nesta forma apesar da correção do resultado.

Com a análise acima podemos compreender a fundamentação teórica para o princípio de *superposição* e a razão pela qual o método “matching” produz a aproximação correta neste caso.

Consideremos agora a aproximação de segunda ordem. Para isto tomemos a função auxiliar

$$x_1(t, \varepsilon) = \frac{\bar{x}(t, \varepsilon) - \bar{x}_0(t)}{\varepsilon}$$

que satisfaz à seguinte equação

$$\varepsilon \dot{x}_1 = \dot{\bar{x}} - \dot{\bar{x}}_0 = \frac{1}{\varepsilon} A \bar{x} + \frac{1}{\varepsilon} f(t) + \frac{d}{dt} (A^{-1} f(t))$$

e, como $A \bar{x}_0(t) = -f(t)$ temos

$$\varepsilon \dot{x}_1 = \frac{1}{\varepsilon} (A \bar{x} - \bar{x}_0) + \frac{d}{dt} (A^{-1} f(t)) = A x_1 + \frac{d}{dt} (A^{-1} f(t)).$$

De acordo com o teorema já provado, a solução do problema

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x}_1 = A x_1 + \frac{d}{dt} (A^{-1} f(t)) \\ x_1(0) = -A^{-1} \frac{d}{dt} A^{-1} f(t)|_{t=0} \end{cases}$$

é aproximada (na ordem ε) pela respectiva solução degenerada

$$x_1(t, \varepsilon) = A^{-1} \frac{d}{dt} A^{-1} f(t) + O(\varepsilon) = \bar{x}_1(t) + O(\varepsilon) \quad \text{em } [0, t],$$

e, portanto,

$$\bar{x}(t, \varepsilon) = \bar{x}_0(t) + \varepsilon \bar{x}_1(t) + \varepsilon O(\varepsilon).$$

ou, considerando a expressão para $\bar{x}_1(t)$, temos

$$\bar{x}(t, \varepsilon) = -A^{-1} f(t) - \varepsilon A^{-1} \frac{d}{dt} A^{-1} f(t) + O(\varepsilon^2).$$

A solução de um problema geral de Cauchy

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = Ax + f(t) \\ x(0) = \alpha \end{cases},$$

pode ser escrita então como

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon, \alpha) &= \bar{x}(t, \varepsilon) + e^{(t/\varepsilon)A}(\alpha - x(0, \varepsilon)) = \\ &= \bar{x}(t, \varepsilon) + e^{(t/\varepsilon)A}(\alpha - [\bar{x}_0(0) + \varepsilon \bar{x}_1(0) + O(\varepsilon^2)]) \end{aligned}$$

e como $e^{(t/\varepsilon)A}O(\varepsilon^2) = O(\varepsilon^2)$, temos

$$x(t, \varepsilon, \alpha) = -A^{-1}f(t) - \varepsilon A^{-1} \frac{d}{dt} A^{-1}f(t) + e^{(t/\varepsilon)A}(\alpha + A^{-1}f(0) + \varepsilon A^{-2}f'(0)) + O(\varepsilon^2)$$

Observações:

Se indutivamente designarmos por $\bar{x}_k(t)$ a solução degenerada de ordem k para a equação

$$\varepsilon \dot{x} = Ax + f(t)$$

escrita como

$$\bar{x}_k(t) = \sum_{j=0}^k - \left(A^{-1} \frac{d}{dt} \right)^j A^{-1} f(t) \varepsilon^j,$$

então podemos enunciar o seguinte teorema (que tem apenas uma importância formal e teórica):

$$\text{A solução de } \begin{cases} \varepsilon \dot{x} = Ax + f(t) \\ x(0) = \alpha \end{cases}$$

pode ser assintoticamente aproximada até ordem de ε^k pela expressão

$$x(t, \varepsilon, \alpha) = e^{(t/\varepsilon)A}(\alpha - \bar{x}_k(0, \varepsilon)) + \bar{x}_k(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{k+1})$$

no intervalo $[0, T]$.

A demonstração (indutiva) deste teorema não é instrutiva e é formalmente muito trabalhosa.

É interessante observar que a melhor aproximação no desenvolvimento assintótico não modifica a camada limite, apenas aperfeiçoa esta aproximação dentro,

$$e^{(t/\varepsilon)A}(\alpha - \bar{x}_k(0, \varepsilon)),$$

e fora dela: $\bar{x}_k(t, \varepsilon)$.

O intervalo onde valem estas aproximações uniformes que foi considerado finito $[0, T]$ pode ser facilmente generalizado com condições apropriadas em f para ε -intervalos do tipo $[0, t/\varepsilon]$ e o intervalo $[0, \infty)$.

Argumentos análogos podem ser feitos para o caso em que a matriz $A(t)$ é variável, desde que o semigrupo $U(t, s)$ solução de

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{U} = AU \\ U(s) = I \end{cases}$$

satisfaça as estimativas análogas

$$\|U(t, s, \varepsilon)\| \leq Ce^{-\lambda(\frac{t-s}{\varepsilon})} \quad (C > 0, \lambda > 0, \varepsilon > 0).$$

(Ferreira-Rodrigues [1993]).

O formalismo utilizado pode ser repetido adequadamente no caso em que A é um operador linear em um espaço de Banach gerador de um semigrupo do tipo negativo o que inclui equações diferenciais parciais parabólicas. Este problema foi tratado pelos métodos de Tikhonov-Vasileva e Vishik-Lyusternik em Hoppensteadt [1971] e Krein [1971].

Analisaremos em seguida o caso de equações não lineares que apresentam algumas novidades e mostraremos com um certo rigor a forma pela qual o princípio de superposição pode ser realizado. Problemas do tipo a ser analisado são de grande importância no estudo de reações enzimáticas e outros processos dinâmicos homogêneos em biologia (Segel [1988], Segel-Slemrod [1990], Ferreira-Rodrigues [1993]), e tem sido tratados assintoticamente por outros métodos (O'Malley [1974]-[1988]).

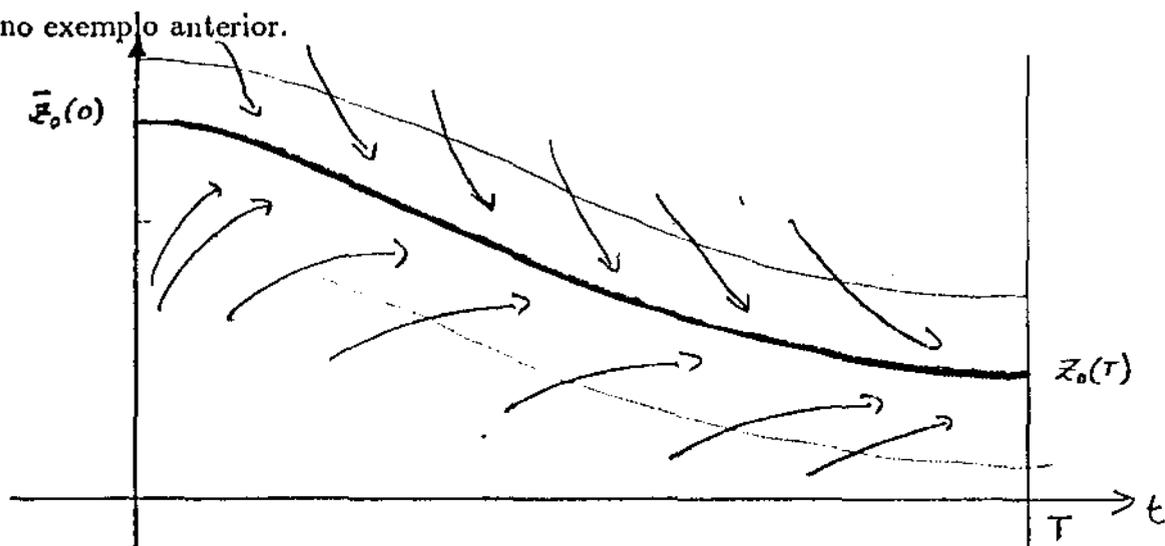
Consideremos então o problema modelo

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{z} = F(z, t) \\ z(0) = \alpha \end{cases}$$

onde $F : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável e $F(z, t) = 0$ tem uma solução $\bar{z}_0(t)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial z}(\bar{z}_0(t), t) < \lambda_0 \quad \lambda_0 > 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Esta última condição tem a interpretação geométrica dada pela atratividade da curva $\bar{z}_0(t)$ (ou de um tubo em torno dela) com relação às soluções da equação diferencial e desempenha um papel semelhante à estabilidade assintótica da matriz A no exemplo anterior.



O mecanismo de camada limite neste caso é manifestado pela atratividade que um tubo de largura $O(\epsilon)$ em torno da solução degenerada $\bar{z}_0(t)$ exerce sobre as soluções capturando-as rapidamente após a condição inicial.

Os argumentos para a superposição assintótica para este problema seguem os mesmos princípios do caso linear com algumas pequenas extensões de natureza técnica.

Comecemos pela aproximação "exterior", de $z(t, \epsilon, \alpha)$, solução de

$$\begin{cases} \epsilon \dot{z} = F(z, t) \\ z(0) = \alpha \end{cases}$$

com relação à $\bar{z}_0(t)$, solução de $F(z, t) = 0$. É necessário que α esteja na região de "atração" caracterizada pela condição $\frac{\partial F}{\partial z}(z, t) < -\lambda < 0$ em torno de $\bar{z}_0(t)$.

Consideremos então

$$\begin{aligned} \Delta(t, \epsilon) &= z(t, \epsilon, \alpha) - \bar{z}_0(t) & e \\ \epsilon \dot{\Delta} &= F(z, t) - \epsilon \dot{\bar{z}}_0(t). \end{aligned}$$

Tomamos agora

$$\begin{aligned} F(z, t) &= F(\bar{z}_0, t) + \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial z}(\bar{z}_0 + s(z - \bar{z}_0), t) ds (z - \bar{z}_0) \\ &= \varphi(z, t)(z - \bar{z}_0), \end{aligned}$$

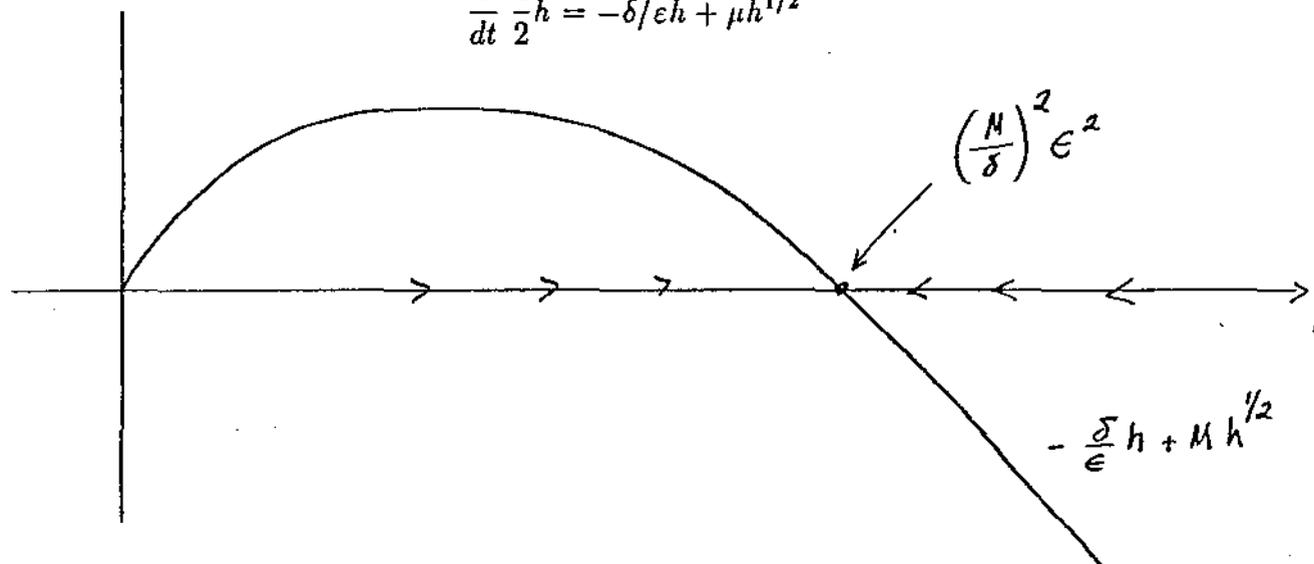
onde $F(\bar{z}_0, t) = 0$ e $\varphi(z, t)$ é o termo da integral com $\varphi(z, t) < \delta < 0$ na região atratora.

Se $\|\dot{z}\| \leq \mu$ em $[0, T]$, então

$$\frac{d}{dt} \Delta^2 / 2 = \frac{1}{\varepsilon} \varphi(z, t) \Delta - \dot{z}_0 \Delta \leq -\frac{\delta}{\varepsilon} \Delta + \mu \Delta$$

e, tomando a equação de comparação

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} h = -\delta / \varepsilon h + \mu h^{1/2}$$



concluimos que há uma vizinhança atratora de $\bar{z}_0(t)$ com raio da ordem ε . (A demonstração exige argumentos clássicos de comparação que estão sendo utilizados em outros lugares e não serão repetidas aqui). Todas as soluções h da equação de comparação para Δ^2 são atraídas para uma vizinhança de ordem ε^2 da origem, e, portanto, de ordem ε para Δ). Portanto, qualquer vizinhança de $\bar{z}_0(t)$ com raio $C\varepsilon$ e $C > \mu/\delta$ é atrativa no sentido acima.

A questão que surge agora é sobre o tempo que $z(t, \varepsilon, \alpha)$ leva para penetrar a região atratora. Analisemos então a solução sob uma transformação microscópica

de escalas, isto é, tomando $\tau = t/\varepsilon$,

$$\begin{cases} \frac{dZ}{d\tau} = F(Z, \varepsilon\tau) \\ Z(0) = \alpha \end{cases}$$

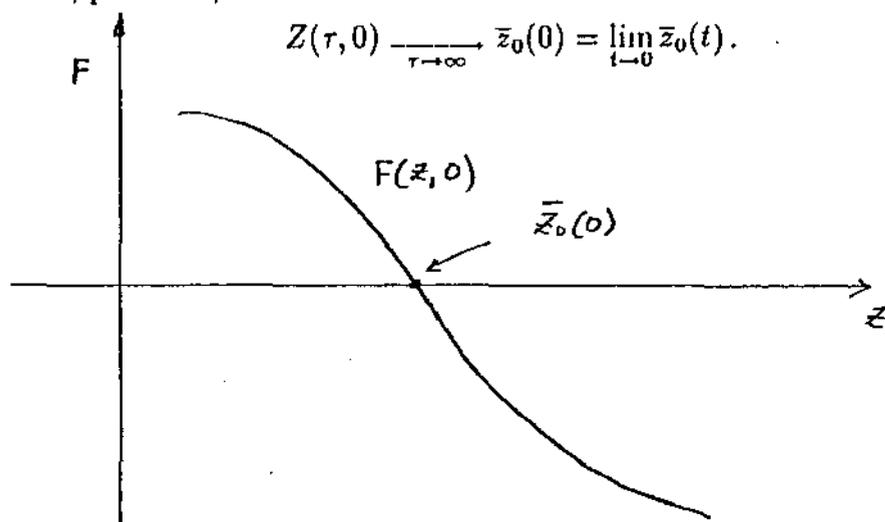
Utilizando a teoria de perturbação regular, temos

$$Z(\tau, \varepsilon) = Z(\tau, 0) + O(\varepsilon) \quad \text{uniformemente} \\ \text{em intervalos } [0, \tau_0] \quad (\tau_0 \text{ fixo } < T/\varepsilon).$$

onde $Z(\tau, 0) = Z_0(\tau)$ é solução de

$$\begin{cases} \frac{dZ_0}{d\tau} = F(Z_0, 0) \\ Z_0(0) = \alpha \end{cases}$$

Como $F(\bar{z}_0(0), 0) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial Z}(\bar{z}_0(0), 0) < 0$, observamos que o ponto $\bar{z}_0(0)$ é atrator e, portanto,



Observamos ainda que $Z_0(\tau) = O(e^{-\lambda\tau})$, ($t \rightarrow \infty$), ou seja, $Z_0(t/\varepsilon) - \bar{z}_0(0) = O(e^{-\lambda(t/\varepsilon)})$, pois $\frac{\partial F}{\partial Z}(\bar{z}_0(0), 0) < -\lambda$.

Esta é a condição de ajuste (ou "matching") pelo método heurístico, que, daí, "recomenda" a seguinte aproximação (correta)

$$z(t, \varepsilon) = \bar{z}_0(t) + Z_0(t/\varepsilon) - \bar{z}_0(0) + O(\varepsilon).$$

Entretanto, a superposição assintótica de intervalos *não* é verificada em geral, como vimos no exemplo linear, e é necessário, desta forma, analisar o processo de transição.

Não está claro que a aproximação de ordem ε nas vizinhanças da origem $Z(t/\varepsilon, 0)$ atinge o tubo atrator em um intervalo de ordem ε , pois, em geral,

$$\bar{z}_0(t) = \bar{z}_0(0) = 0(\varepsilon) \quad \text{apenas em } 0 \leq t \leq 0(\varepsilon)$$

(Observação: Se $\dot{\bar{z}}_0(0)$, ou seja, $\frac{\partial F}{\partial z}(\bar{z}_0(0), 0) = 0$, então $\bar{z}_0(t) - \bar{z}(0) = 0(t^2)$ e

$$\bar{z}_0(t) - \bar{z}_0(0) = 0(\varepsilon) \quad \text{em } t \in [0, \sqrt{\varepsilon}).$$

mas esta é uma situação excepcional cuja análoga do caso linear já foi mencionada; ($-A^{-1}f'(0) = 0$).

Seguindo os mesmos argumentos anteriores tomamos a aproximação regular $Z(\tau, \varepsilon)$ até ordem ε^2 :

$$Z(\tau, \varepsilon) = Z(\tau, 0) + \varepsilon \frac{\partial Z}{\partial \varepsilon}(\tau, 0) + \varepsilon^2 R(\tau, \varepsilon)$$

Para analisar esta aproximação é necessário analisar o comportamento de $\frac{\partial Z}{\partial \tau}(\tau, 0)$ que satisfaz à equação variacional

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tau} Z_1 = \frac{\partial F}{\partial z}(Z_0, 0) Z_1 + \tau \frac{\partial F}{\partial t}(Z_0, 0) \\ Z_1(0) = 0 \end{cases}$$

Se $U(\tau, s)$ for a solução fundamental de

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial F}{\partial z}(Z_0(\tau), 0) U \\ U(s, s) = I \end{cases},$$

pela condição em $\frac{\partial F}{\partial z}$ temos a estimativa

$$\|U(\tau, s)\| \leq C_0 e^{-\lambda(\tau-s)}.$$

Necessitamos agora do seguinte lema:

Lema: Se $A(\tau)$ for uma matriz assintoticamente estável e existir $\lim_{\tau \rightarrow \infty} A(\tau) = A(\infty)$ e $B(\tau)$ vetor com limite $\lim_{\tau \rightarrow \infty} B(\tau) = B(\infty)$, então as soluções de

$$\frac{dw}{d\tau} = A(\tau)w + \tau B(\tau)$$

satisfazem ao limite

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{w(\tau)}{\tau} = -A^{-1}(\infty)B(\infty)$$

ou seja, $w(\tau) = -A^{-1}(\infty)B(\infty)\tau + o(1/\tau)$ ($\tau \rightarrow \infty$).

Demonstração: Seja $U(\tau, s)$ o semigrupo gerado por $A(\tau)$. Então

$$w(\tau) = U(\tau, 0)w(0) + \int_0^\tau U(\tau, s)sB(s)ds$$

$$\text{Obviamente } \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{U(\tau, 0)w(0)}{\tau} = 0.$$

Como (Bassanezi-Ferreira cap. 4)

$$\frac{\partial U}{\partial s}(\tau, s) = -U(\tau, s)A \quad \text{temos}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau U(\tau, s)sB(s)ds &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{-\partial U}{\partial s} A^{-1}(s)sB(s)ds = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\tau} \int_0^\tau -\frac{\partial}{\partial s}(sU)A^{-1}(s)B(s)ds + \frac{1}{\tau} \int_0^\tau U(\tau, s)A^{-1}(s)B(s)ds \right\} = \end{aligned}$$

$$\text{(e, como } \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau U(\tau, s)A^{-1}(s)B(s)ds = 0$$

uma vez que a integral converge para $\tau \rightarrow \infty$)

$$= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau -\frac{\partial}{\partial s}(sU)A^{-1}(s)B(s)ds.$$

Mas,

$$\int_0^\tau \frac{\partial(sU)}{\partial s} ds = sU(\tau, s) \Big|_0^\tau = \tau I \quad \text{e, portanto}$$

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau -\frac{\partial}{\partial s}(sU)A^{-1}(\infty)B(\infty)ds = -A^{-1}(\infty)B(\infty).$$

Logo

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\tau} w(\tau) + A^{-1}(\infty)B(\infty) \right] = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{\partial sU}{\partial s} (A^{-1}(s)B(s) - A^{-1}(\infty)B(\infty)) ds$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^N + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_N^\tau = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_N^\tau .$$

e esta última integral pode ser avaliada como

$$\left\| \frac{1}{\tau} \int_N^\tau \right\| \leq \frac{1}{\tau} \left(\int_N^\infty \left\| \frac{\partial(sU)}{\partial s} \right\| ds \right) .$$

$$\cdot \max_{N \leq \tau \leq \infty} \|A^{-1}(s)B(s) - A^{-1}(\infty)B(\infty)\| ,$$

e portanto, está demonstrado o lema.

Voltando à equação satisfeita por $Z_1(\tau)$, que é do tipo considerado no lema, concluímos que

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{Z_1(\tau)}{\tau} = -\frac{\partial F}{\partial z}(\bar{z}_0(0), 0)^{-1} \frac{\partial F}{\partial t}(\bar{z}_0(0), 0) = -A^{-1}(\infty)B(\infty)$$

pois, como vimos, $Z_0(\tau) - \bar{z}_0(0) = O\left(\frac{-\lambda\tau}{e}\right) \rightarrow 0(\tau \rightarrow \infty)$.

Portanto, o resto de segunda ordem na expansão interior é constituído de uma parte linear em τ e uma parte $O(1/\tau)$ e podemos então escrever:

$$Z(\tau, \varepsilon) = Z_0(\tau) + \varepsilon R_1(\tau, \varepsilon)$$

na forma

$$Z(\tau, \varepsilon) = Z_0(\tau) + \varepsilon\tau(-A^{-1}(\infty)B(\infty)) + \varepsilon\bar{R}_1(\tau, \varepsilon)$$

$$\text{onde } \bar{R}_1(\tau, \varepsilon) = O(1/\tau) .$$

É interessante observar que a aproximação até 1ª ordem em ε da expansão regular interior, é restrita à τ finito, em virtude de um termo linear em τ que, desta forma, é explicitado. Este resultado é crucial para a verificação da superposição assintótica.

Como $F(\bar{z}_0(t), t) = 0$, temos

$$\dot{\bar{z}}(t) = -\frac{\partial F}{\partial Z}(\bar{z}_0(t), t)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial t}(\bar{z}_0(t), t)$$

e

$$\bar{z}_0(t) = \bar{z}_0(0) + (-A^{-1}(\infty)B(\infty))t + O(t^2) .$$

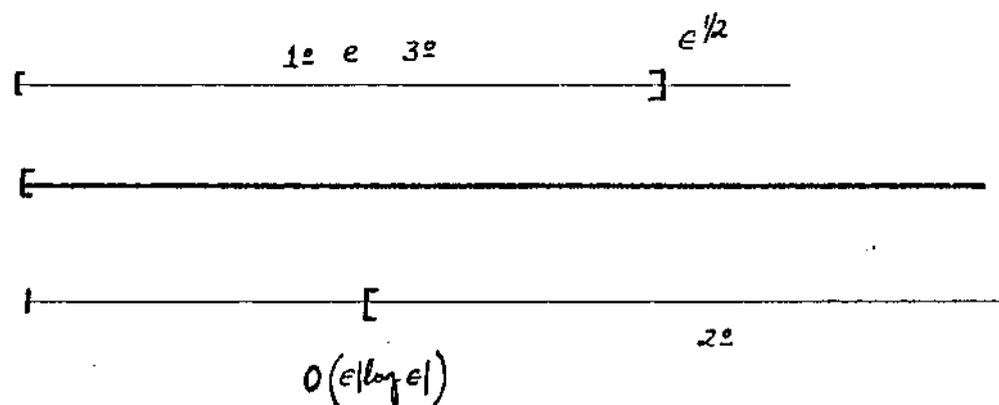
Com estas estimativas em mão, podemos agora verificar a superposição assintótica dos ε -intervalos seguintes:

1º) Em um ε -intervalo $[0, \varepsilon^\gamma)$ onde $\gamma < 1$ temos

$$z(t, \varepsilon, \alpha) = Z(t/\varepsilon, \varepsilon) = Z_0(t/\varepsilon) + (-A^{-1}(\infty)B(\infty))t + O(\varepsilon)$$

2º) $Z_0(t/\varepsilon) - \bar{z}_0(0) = O(\varepsilon)$ em $(\varepsilon|\log \varepsilon|, T]$

3º) $\bar{z}_0(t) = \bar{z}_0(0) + (-A^{-1}(\infty)B(\infty))t + O(t^2) = \bar{z}_0(0) + (-A^{-1}(\infty)B(\infty))t + O(\varepsilon)$ em $t \in [0, \varepsilon^{(1/2)})$.



Podemos então considerar a superposição assintótica das funções da seguinte maneira

$$z(t, \varepsilon, \alpha) = Z_0(t/\varepsilon) + (-A^{-1}(\infty)B(\infty))t + \bar{z}_0(t) - (\bar{z}_0(0) + (-A^{-1}(\infty)B(\infty))t) + O(\varepsilon)$$

ou,

$$z(t, \varepsilon, \alpha) = Z_0(t/\varepsilon) + \bar{z}_0(t) - \bar{z}_0(0) + O(\varepsilon).$$

A aproximação

$$z(t, \varepsilon, \alpha) \sim Z_0(t/\varepsilon) + \bar{z}_0(t) - \bar{z}_0(0)$$

é prescrita pelo método "matching" com base na verificação (sem estimativas) dos limites

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} Z_0(\tau) = \bar{z}_0(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \bar{z}_0(t)$$

ou, como se diz, “no infinito, o intervalo $[0, \tau)$ encontra o intervalo $(t, T]$ para $t \rightarrow 0$ e as funções que representam $Z(t, \varepsilon, \alpha)$ se *ajustam* (“match”) na transição; subtraindo-se a parte *intermediária* comum $\bar{z}_0(0)$ obtém-se a aproximação *uniforme*”.

Entretanto se, por um lado, a idéia intuitiva é correta neste caso, por outro lado, há diversos processos a serem ressaltados e analisados que ocorrem durante o fenômeno de transição e que nos interessam pela sua interpretação no modelo matemático.

Os conceitos de superposição assintótica de ε -intervalos e de *funções* na forma acima foram introduzidos em L. A. D. Rodrigues [1993] – Tese de Mestrado IMECC, UNICAMP, 1992.

O resultado acima pode ser amoldado tecnicamente dentro do estilo telegráfico do rigor contemporâneo na matemática, mas preferimos expô-lo enfatizando os conceitos envolvidos.

A importância de uma abordagem mais cuidadosa destes processos tem sido apontada recentemente nos trabalhos de Segel (Segel [1988], Segel-Slemrod [1989], Av-Ron-Parnas-Segel [1991]) e interessam particularmente ao estudo da formulação de modelos matemáticos e da sua representação.

CAPÍTULO VI

As Afinidades Eletivas: Modelos Matemáticos para Populações Interativas

“Models may in some instances be taken literally and used for prediction, but their more usual and more powerful role is metaphorical: as organizers of thought, as aids to explanation, and as guides to experimental design”.

Simon A. Levin

1. Modelos de Populações Homogêneas e a Difusão Clássica

A homogeneidade de uma população biológica é uma hipótese simplificadora que tem sido utilizada desde os primeiros estudos de dinâmica populacional, em demografia, ecologia, epidemiologia e etc. até contemporaneamente. Os modelos matemáticos neste caso descrevem a dinâmica da população em um espaço de fase que representa unicamente o número de indivíduos que, em geral, é uma informação muito restritiva e rudimentar para fornecer argumentações plausíveis para a formulação da sua “lei dinâmica”. A introdução de um número finito (e pequeno) de subpopulações em compartimentos fixos, intercomunicáveis e com interações, possibilita a consideração de características importantes, e em alguns casos indispensáveis, para o estabelecimento da sua dinâmica.

Esta dinâmica exprime basicamente uma contagem dos indivíduos, que também é conhecida por “lei de conservação”, e relaciona a taxa de variação do número de indivíduos da população com a fonte; taxas de natalidade-mortalidade e imigração-emigração. No caso em que esta relação é autônoma (isto é, independe do tempo) a expressão matemática da dinâmica é dada na forma

$$\frac{dN}{dt} = F(N) \quad , \quad (N = (N_1, \dots, N_k) ,$$

onde k = número de espécies compartimentais. Para Malthus e Verhulst $k = 1$ e

$F(N) = \mu N$ e $F(N) = \mu \left(1 - \frac{N}{N_0}\right) N$, respectivamente. Para Lotka-Volterra $k = 2$ e $F(N_1, N_2) = ((a - bN_2)N_1, (cN_1 - d)N_2)$.

Tal como em qualquer modelo matemático, estas hipóteses são restritivas mas de grande utilidade dentro de escalas de observação adequadamente avaliadas. A dificuldade quanto à representação de um fenômeno por modelos matemáticos de populações homogêneas surge quando estas escalas são extrapoladas.

A interação entre os indivíduos de diferentes compartimentos é comumente representada por meio de conceitos herdados da teoria da cinética química e, basicamente pela chamada “lei de ação das massas” que pressupõe uma mistura espacial homogênea. Um modelo matemático de dois compartimentos homogêneos como, por exemplo, o modelo de presa-predador de Lotka-Volterra que faz uso da “lei das massas”, admite tacitamente que a população de ambos se distribui uniformemente no espaço. O mesmo acontece com modelos de epidemia em que se distinguem subpopulações de infectados e susceptíveis e um processo de transmissão por encontros no espaço físico.

Estas hipóteses de homogeneidade na distribuição espacial são razoáveis desde que a escala de comprimento com respeito à extensão da região considerada seja relativamente pequena, isto é, se a dinâmica for tratada *localmente*.

É claro que, neste caso, o fenômeno de propagação geográfica, que é uma das características mais importantes das epidemias, não poderá ser descrito, uma vez que ele é resultado exatamente de uma não-homogeneidade na distribuição espacial dos indivíduos.

Da mesma maneira, os fenômenos de formação de estruturas e de morfogênese que são essenciais na descrição de populações biológicas e moleculares, e se constituem nos processos pelos quais surge a própria diversidade biológica, só poderão ser estudados com modelos que permitam a representação da heterogeneidade.

Portanto, apesar, e também em decorrência, do razoável sucesso dos modelos de Malthus, Verhulst, Lotka-Volterra, Kermack-McKendrick e outros, para a descrição *local* da dinâmica de populações, tornou-se necessário que a distribuição espacial fosse também considerada o que motivou a introdução do conceito de *densidade espacial* representado por uma função real positiva $\rho(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$.

Cada espécie compartimental i , dispõe desta maneira de uma distribuição espacial $\rho_i(x, t)$, e os indivíduos são portanto classificados discretamente segundo um critério biológico e continuamente segundo a sua posição espacial.

A dinâmica local passa a ser descrita então por fontes $F(\rho_1, \dots, \rho_k)$ que são também densidades no sentido de que são as taxas com relação ao tempo e ao espaço. Assim,

$$\int_R F(\rho_1, \dots, \rho_k) dx$$

é a fonte, como taxa de produção de indivíduos com relação ao tempo, na região R do espaço. (No caso geral, F pode ser também função direta de x e t .)

Este conceito foi claramente herdado da dinâmica dos meios contínuos na formulação de Euler.

Como a dinâmica populacional admitida tinha uma validade apenas local, o seu acoplamento com uma distribuição espacial exigiu uma hipótese sobre o processo migratório da população, o que foi feito mais uma vez recorrendo-se às analogias com a dinâmica molecular. Utilizou-se neste caso do conceito de *tensor de fluxo* que descreve a taxa (com relação ao tempo e à área) de migração através de uma superfície orientada no espaço.

Supondo-se que os indivíduos se movimentam microscopicamente de maneira completamente aleatória, a expressão para o tensor de fluxo é dada pela “lei de Fick” (~ 1850) que o relaciona constitutivamente ao gradiente da densidade espacial da população. O tensor da *difusão clássica* é

$$J = -D \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} = \nabla = \text{grad} \right),$$

onde D em geral, é uma matriz simétrica e, no caso isotrópico uma matriz diagonal, ou simplesmente um número.

A taxa de migração (número de indivíduos por unidade de tempo que passa) através de uma superfície S orientada no espaço, é então

$$\int_S -D \frac{\partial \rho}{\partial x} d\vec{s} = \int_S J d\vec{s}.$$

A lei de conservação geral toma a forma de um balanceamento expressa matematicamente pela seguinte igualdade, válida para qualquer região interna fechada

R do espaço considerado,

$$\frac{d}{dt} \int_R \rho_i(x, t) dx = \int_R F_i(\rho) dx + \int_{\partial R} J \vec{ds},$$

supondo-se, naturalmente, que as funções e a região R sejam matematicamente adequadas.

Esta formulação integral pode ser transformada em uma formulação local supondo-se que ρ, F, J sejam continuamente diferenciáveis (uma hipótese que em certas situações deve ser analisada com cuidado), de onde vem

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = F_i(\rho) - \nabla J \quad (i = 1, \dots, k)$$

considerando-se a “lei de Fick”, obtém-se as equações de reação e difusão

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = F_i(\rho) + \nabla \left(D \frac{\partial \rho_i}{\partial x} \right).$$

ou, se D for constante,

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = F_i(\rho) + D \Delta \rho_i.$$

A dinâmica de Verhulst e a “lei das massas”, que envolve o produto de densidades, fazem com que estas sejam, em geral, equações essencialmente não-lineares.

Os estudos pioneiros sobre dinâmica de populações biológicas que consideraram a distribuição espacial e sua movimentação pela difusão clássica, são relativamente recentes e podem ser representados pelos trabalhos fundamentais de R. A. Fisher sobre genética na década de 1930, de J. G. Skellam, na década de 1950, sobre a dispersão de populações de animais e plantas, (Okubo [1980]), e de A. M. Turing sobre morfogênese, (Turing [1952]). Nas décadas de 1960 e 1970, o enorme interesse despertado pelos fenômenos de auto-organização em química (relacionados às reações do tipo Belousov-Zhabotinski, anéis de Liesegang e etc.) e em dinâmica dos fluidos (convecção de Bénard, vórtices de Rayleigh-Taylor), provocaram um grande desenvolvimento de técnicas e teorias matemáticas (teorias de perturbação e bifurcação) que, por sua vez, se interfertilizaram com diversos problemas de dispersão espacial em populações biológicas.

Uma das mais graves restrições do modelo de difusão clássico está na hipótese implícita de que os indivíduos da população realizam movimentos microscópicos estatisticamente independentes, ou seja, não existe absolutamente nenhuma interação entre os indivíduos, o que é uma hipótese razoável para moléculas dispersas.

Entretanto, uma das características mais notáveis das populações biológicas é exatamente a existência de mecanismos de comunicação e, portanto, de interação entre seus indivíduos, o que invalida em princípio o modelo de difusão clássico.

O comportamento social de populações de alguns insetos, notadamente de algumas espécies de formigas e abelhas (Wilson [1972]-[1977], Okubo [1980]-[1986], Deneubourg [1989]-[1991]-[1993]) assim como de animais superiores (Wilson [1977], Lorenz [1971], Okubo [1986]) da espécie humana e mesmo de organismos celulares, tornam necessário o estudo sobre a formulação de novos modelos matemáticos para descrever a influência destes mecanismos.

O trabalho de Keller-Segel [1970] sobre populações de amebas (*dictyostelium discoideum*) que dispõem de um mecanismo de comunicação bioquímica através do sinalizador universal CAMP (Monofosfato de Adenosina Cíclica), foi um marco fundamental no desenvolvimento de modelos matemáticos com taxia (quimiotaxia, no caso) para a descrição de fenômenos de morfogênese.

Neste trabalho, ao fluxo de difusão clássico $-D \frac{\partial \rho}{\partial x} = J_A$, que representa o movimento aleatório de busca das amebas, é adicionado um termo de convecção na direção de maior concentração do sinalizador, que representa a quimiotaxia,

$$\chi \rho \frac{\partial a}{\partial x} = J_Q, \quad \left(\begin{array}{l} \rho(x,t) = \text{densidade de amebas} \\ a(x,t) = \text{densidade de CAMP} \end{array} \right),$$

o que produz o tensor de fluxo resultante

$$J = J_A + J_Q.$$

A introdução de termos de convecção e, particularmente, de taxia, tem sido utilizada como um esforço para corrigir o modelo clássico de difusão. Por outro lado, diversos trabalhos tem sido feitos no sentido de produzir tensores de fluxo macroscópicos que representem movimentos microscópicos que satisfazem diversas hipóteses estatísticas (Othmer [1988], Cohen [1981], Okubo [1980]-[1986], Berg [1983]).

Outras modificações constitutivas têm sido tentadas sob um ponto de vista heurístico e fenomenológico para adaptar o modelo de difusão clássico a populações biológicas, introduzindo-se uma dependência do coeficiente de difusão com relação a densidade da população $D(\rho)$.

O argumento de suporte para estes modelos é vago e parte do pressuposto de que um aumento da densidade da população deve implicar em um aumento da mobilidade microscópica dos indivíduos monotonicamente mas com um nível de saturação logística ou Michaelis-Menten. (Okubo [1980], Shigesada [1990])

Em outros casos o fluxo é tomado como o gradiente da densidade corrigido por um coeficiente que depende da densidade

$$J = -\frac{\partial}{\partial x}[D(\rho)\rho] = -\rho D'(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} - D(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

que pode ser visto como um termo de convecção adicionado de uma difusão com mobilidade variável (Okubo [1980]).

O fenômeno de agregação é também introduzido na expressão do fluxo pela adição de um termo convectivo do tipo

$$-U_0 \text{sign}(x) \rho$$

que representa uma mobilidade direcionada para a origem (Murray [1989], Okubo [1980]).

Uma análise crítica sobre estas tentativas heurísticas foi feita por Simon Levin em várias ocasiões, notadamente em Levin [1981]-[1982].

Para sanar as dificuldades do modelo clássico com respeito ao seu caráter local infinitesimal (que é razoável na ausência de intercomunicações entre os indivíduos), Cohen-Murray [1981] propuzeram um modelo generalizado de difusão (inspirados ainda em trabalhos de físico-química sobre solidificação; equações de Landau-Ginzburg e Cahn-Hilliard) que contempla uma interação com uma vizinhança próxima do ponto por meio do truncamento de uma expansão de Taylor (Murray [1988]). Entretanto, mais uma vez, os aspectos específicos dos mecanismos de interação sociobiológica são desprezados e o modelo é proposto com poucas argumentações biológicas. (v. Apêndice I).

A interação entre indivíduos de uma população não pode, obviamente, ser bem descrita sem que haja mais informações explícitas no modelo sobre as características biológicas que configuram e determinam o mecanismo de intercomunicação.

Isto significa que, para a introdução de alguns elementos destes mecanismos de interação no modelo matemático, é necessário que o espaço de fase seja muito mais abrangente do que o simples espaço físico. A distribuição espacial (geográfica) pode ser importante para a interação mas, certamente, em todas as situações onde a intercomunicação é forte e decisiva, ela não é suficiente.

Portanto, a generalização do espaço de fase e os mecanismos de interação sociobiológica são aspectos acoplados que devem ser considerados em conjunto.

Todavia, sob o ponto de vista da formulação do modelo matemático em biologia, a descrição dos indivíduos de uma população por meio de compartimentos discretos para algumas poucas características biológicas é muito restritiva. O exemplo mais notável deste fato é a descrição de uma população por faixas etárias. Em determinados modelos, a localização de um indivíduo ao longo do intervalo etário é crucial para qualificar (e quantificar) a sua influência no termo de fonte como, por exemplo, em demografia (quanto à taxa de natalidade e mortalidade) e em epidemiologia (quanto à susceptibilidade e mortalidade).

Portanto, em várias situações é necessário também considerar a distribuição dos indivíduos de uma população no intervalo etário, o que é feito de forma semelhante ao caso espacial: por meio de uma função densidade

$$\rho(z) \quad , \quad z \in \mathbb{R} \quad ,$$

onde

$$\int_{z_1}^{z_2} \rho(z) dz = \text{número de indivíduos na faixa etária } [z_1, z_2] \quad .$$

(desconsiderando as outras variáveis momentaneamente.)

Continuando a analogia que encara o intervalo etário como um espaço físico em que se movimentam os indivíduos, verificamos que todos eles em qualquer instante estão dotados de uma velocidade positiva unitária. Como o espaço é unidimensional, o fluxo é por convecção

$$J_e = \rho \quad .$$

Portanto, a lei de conservação neste “espaço”, com o fluxo Je e uma função de fonte $F(\rho)$ é dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial z} = F(\rho)$$

que é chamada equação de von Foerster, proposta na década de 1950 para a descrição de uma população de células sanguíneas por J. von Foerster.

Equações do mesmo tipo já haviam sido propostas por A. G. Mc Kendrick na década de 1920 em seus trabalhos fundamentais sobre modelos matemático aplicado ao estudo de dinâmica de populações humanas com ênfase em epidemiologia. (Mc Kendrick [1926], Murray [1989]).

A notória influência da distribuição etária de uma população no desenvolvimento de diversas epidemias (e, obviamente, na dinâmica da própria população) motivou a introdução desta característica em modelos contínuos o que generalizou consideravelmente o conceito de espaço de fase.

Conforme discutidos no Capítulo III o espaço de fase de um sistema deve conter as informações suficientes para que a sua dinâmica possa ser definida intrinsecamente e para isto, a generalização deste conceito se torna indispensável para o tratamento de populações biológicas que dispõem de mecanismos de interação individual.

2. A Dinâmica Emergente com Difusão Clássica: Ativação Rápida e Inibição Lenta

O processo de difusão clássico sempre foi considerado um mecanismo de uniformização e homogeneização e responsável portanto, pelo aumento de entropia de um sistema, o que em termodinâmica significa a quebra de estruturas e a desorganização. Este princípio que tinha status de dogma ou crença suportada por fenômenos simples da físico-química, não era todavia, desprovida de situações isoladas que o desafiassem frontalmente, desde a observação dos anéis de precipitação por R. Liesegang em 1896 (Keller [1980]) e de ondas químicas em 1906 por R. L. Luther (Murray [1989]), até às reações oscilantes de B. P. Belousov em 1951 (Murray [1989]).

Uma medida da solidez com que a crença no princípio de uniformização da difusão estava firmada nos meios científicos, pode ser avaliada pelo episódio protagonizado por Belousov, que teve o seu trabalho sumariamente rejeitado pela Academia de Ciências da União Soviética em 1951 por ser *impossível*, e que, postumamente, foi reconhecido como um marco científico e agraciado com a medalha de Lênin em 1980. Nos últimos 30 anos presenciamos uma quebra extremamente rápida do antigo e sólido paradigma termodinâmico de Fourier (que, curiosamente, está fundamentado na “Lei” de transmissão de calor do ubíquo Isaac Newton) e sua substituição pelo conceito de auto organização (Levin-Segel [1985]), exemplificados em dinâmica de fluidos (Joseph [1977], química (Nicolis-Prigogine [1977], Prigogine [1980]), física (Haken [1979], [1981], [1983]) e bioquímica (Eigen [1988]-[1979]).

O trabalho que estabeleceu o marco fundamental para o desenvolvimento dos modelos matemáticos de auto organização em biologia de populações, foi sem dúvida o artigo de Alan Turing em 1952 (Turing [1952]) que tratou especificamente do fenômeno de morfogênese. Neste trabalho, Turing propôs que a morfogênese seria resultado de um processo de reação distribuída no espaço em que a difusão clássica desempenharia um papel *desestabilizador* da uniformidade resultando em uma dinâmica que levaria à formação de estruturas espaciais.

A aplicação sistemática desta idéia a vários modelos matemáticos por H. Meinhardt [1982] nas décadas de 1960-1970, mostrou que, de fato, estes modelos podiam auto construir diversas formas biologicamente relevantes.

O trabalho de Evelyn Keller e Lee Segel sobre a agregação de *dictyostelium discoideum* (Keller-Segel [1970], Edelstein-Keshet [1988]) que empregou um modelo com difusão clássica e quimiotaxia, representou um grande reforço ao conceito de dinâmica emergente como explicação da formação de estruturas biológicas.

Os trabalhos de Segel-Jackson [1972] e Segel-Levin [1976] apresentaram uma explicação matemática e intuitiva para a inicialização do fenômeno de emergência de estruturas em populações com reação e difusão clássicas baseada em uma comparação de escalas intrínsecas: em uma população com duas espécies interativas o fenômeno de emergência (ou, a instabilidade dos estados uniformes) ocorre quando uma das espécies é ativadora e a outra inibidora e o primeiro efeito tem um alcance curto

comparado com o do segundo.

É interessante observar como os conceitos de escala e de tempo de difusão apresentados no Capítulo IV são essenciais para o desenvolvimento deste argumento.

A explicação matemática para a formação dos anéis de Liesegang foi apresentada por J. B. Keller em 1980 (Keller [1980]) por meio de um modelo de reação e difusão onde também ocorrem duas escalas de tempo discrepantes que o levou a formular uma teoria assintótica (um método de múltiplas escalas) para processos de reação *rápida* e difusão *lenta*.

A existência de múltiplas escalas é portanto frequente em modelos matemáticos que descrevem a formação de estruturas por dinâmicas emergentes.

Verificamos assim que, mesmo estes mecanismos tão simples do ponto de vista sociobiológico como são os processo de reação pela lei das massas e difusão pela lei de Fick (cuja natureza é essencialmente molecular), têm a capacidade de representar dinâmicas emergentes e produzir autonomamente estruturas organizadas.

A dinâmica destes sistemas pode ser vista como um processo em paralelo em que o estado de cada indivíduo (ou ponto) evolui segundo uma avaliação, ainda que infinitesimal, dos estados de sua vizinhança.

O operador laplaceano que aparece na equação de difusão clássica tem o significado de uma média local que, neste contexto, pode ser interpretado como um critério de estimativa da vizinhança. (Veja Apêndice I).

A simulação discretizada, ou por automata celulares desta dinâmica (Zykov [1987], Wolfram [1984]) enfatiza claramente este aspecto paralelo.

A predictabilidade da estrutura final para estes sistemas é de uma grande complexidade no sentido analisado no Capítulo III, mas a predictabilidade *da ocorrência* de uma estrutura final e a simulação de um representante desta classe de estruturas que manifeste os aspectos qualitativos compartilhados para todas elas, é computável materialmente.

É irresistível a comparação destes conceitos com a própria dinâmica evolutiva onde cada indivíduo de uma espécie é único e *irreprodutível* mas, por outro lado, ele representa qualitativamente toda a sua espécie.

A teoria matemática da dinâmica de populações entra atualmente em um

terreno com características muito próprias e liberta-se das analogias restritivas que a prendiam às populações inertes da físico-química. Os extraordinários resultados obtidos até aqui com os modelos clássicos são apenas sombras dos fenômenos que serão representados pelos modelos matemáticos destas populações biológicas quando estes incorporarem à sua formulação alguns dos mecanismos de intercomunicação e interação entre os seus indivíduos.

A grande massa de informações e de teoria descritiva sobre o comportamento sociobiológico de organismos vivos (desde células, bactérias e pequenos insetos, até animais superiores e a própria espécie humana) aguarda a formulação de modelos matemáticos que até o momento apenas arranhou levemente a sua superfície sendo notáveis os trabalhos pioneiros dos grupos liderados por J. Deneubourg (Bruxelas), L. Segel (Weizmann Inst.), P. Hogeweg (Utrecht) e E. O. Wilson (Harvard).

Na próxima seção trataremos deste tópico.

3. Espaços de Aspecto

“The recognition and study of emergent properties is holism, once a burning subject for philosophical discussion... But later, in 1940's and 1950,s, temporarily eclipsed by the triumphant reductionism of molecular biology. The new holism is much more quantitative in nature supplanting the unaided intuition of the old theories with mathematical models. Unlike the old it does not stop at philosophical retrospectives but states assumptions explicitly and extends them in mathematical models that can be used to test their validity.”
Edward O. Wilson (1977).

O conceito de espaço de aspecto ou espaço de caracteres é antigo e de uso comum em biologia de populações como uma forma de descrever graficamente a distribuição dos indivíduos segundo algumas características biológicas. (Wilson [1972-1977]).

Entretanto, a motivação para esta representação é quase sempre no sentido de descrever e/ou classificar a população, e não com o objetivo de definir um espaço de fase com uma dinâmica.

No caso de uma variação discreta das características biológicas, a distribuição pode ser dada por uma tabela matricial ou por meio de subpopulações; para um número maior ou discretização mais fina, esta representação torna-se impraticável e, pelo menos teoricamente, a descrição contínua é mais conveniente.

Portanto, se as características forem em número finito k , e continuamente mensuráveis, (como idade, peso, volume, quantidade de uma determinada substância no organismo, coordenadas de localização e etc.), então o espaço de aspecto será representado por \mathbb{R}^k , cujas coordenadas $(x_1, \dots, x_k) = x$, serão as respectivas medidas. Neste caso, a distribuição da população em \mathbb{R}^k será descrita pelo método inventado por Euler para modelos do meio contínuo, isto é, por uma função densidade $\rho(x, t)$. A função $\rho(x, t)$ será definida pelo significado das integrais

$$\int_R \rho(x, t) dx \quad , \quad \text{para toda região } R \subset \mathbb{R}^k ,$$

como o número de indivíduos da população cujas medidas das suas características $(x_1, \dots, x_k) = x$ formam um ponto de R .

Naturalmente, várias populações podem estar distribuídas no mesmo espaço de aspecto com funções de densidade $\rho_1(x, t) \dots \rho_m(x, t)$. Os sub-índices i de $\rho_i(x, t)$ representam assim a variação discreta de uma característica da população global que significa pertencer a uma ou outra subpopulação.

A quantidade de uma determinada substância no organismo dos indivíduos é uma forma generalizada de medir características biológicas de grande diversidade como toxicidade, cor, grau de infecção, resistência imunológica específica e etc. Esta é uma maneira conveniente, tanto do ponto de vista teórico como prático e experimental, de classificar indivíduos em uma população por medidas contínuas.

Em ecologia, há várias circunstâncias de processos interativos do tipo presa-predador, em que a coloração do primeiro é importante; e como medi-la se não por concentração de pigmentos? (Levin-Segel [1982]).

A preferência de herbívoros por certas plantas é associada à concentrações de substâncias atrativas ou tóxicas que, portanto, determinam uma característica mensurável importante na interação. (Keshet [1988]). As medidas de dimensão também podem ser importantes e necessárias como características de classificação.

Estas são todavia, extensões naturais e imediatas do conceito do espaço de fase da mecânica. Trabalhos recentes, por outro lado tem considerado características estritamente biológicas de grande importância representadas em espaços de aspectos e, que introduzem conceitos essencialmente novos na teoria de populações.

O primeiro exemplo destes que abordaremos é o *Espaço de Forma* introduzido por Segel-Perelson [1988] para o estudo da interação entre os constituintes do sistema imunológico.

Se pensarmos em um objeto bi ou tri dimensional, uma de suas principais características é a sua *forma* geométrica que, em duas dimensões, poderia ser representada por duas funções reais definidas em $[0,1]$ e periódicas; a parametrização do seu contorno.

Até o momento, todas as características mencionadas tinham suas medidas representadas por números. A forma bi-dimensional entretanto, só pode ser determinada por uma função, o que nos leva a medidas em um espaço de dimensão infinita. Isto significa uma extraordinária dificuldade para a formulação do modelo matemático que ainda não foi tentada. Segel-Perelson [1988] construíram um modelo onde a *forma* é determinada por uma única medida, ou seja, em um espaço unidimensional, o que é uma drástica simplificação mas que ainda assim pode ser útil para uma análise do conceito. Neste caso a imagem de forma é sugerido por eles como as de triângulos isósceles como bases iguais e alturas livres.

A reatividade entre anticorpos e antígenos no sistema imunológico, de fato, tem a ver com a forma espacial das moléculas, além de outras características, que se constituem em um padrão chamado epitopo.

Uma medida x positiva da forma significaria um triângulo protuberante e, negativa um triângulo reentrante. A reatividade entre um indivíduo com forma x e outro com forma y é maior quanto maior for a complementaridade isto é, quanto mais próximo de zero for $x + y$.

Isto significa naturalmente uma interação de longo alcance no espaço de aspecto dada por um funcional do tipo

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(x, t) \rho(y, t) w(x - y) dy$$

onde $w(z)$ é uma função peso com pico na origem, uma gaussiana, em geral.

Estes modelos tem sido estudados ultimamente também sob o ponto de vista de complexidade, dinâmica emergente. (de Boer [1992], Langton [1988] e etc.).

Uma outra generalização importante do conceito de espaço de aspecto foi introduzida por Hogeweg [1988] e Jager-Segel [1992] para estudar a etologia de populações animais com respeito a dominância. Neste modelo o *aspecto* a ser (teoricamente) medido seria um conceito hierárquico de dominação cujo valor estaria no intervalo real $[0,1]$.

O ponto crucial do modelo é a formulação do mecanismo de interação nos encontros (no espaço físico) entre dois indivíduos. Esta interação ocorre mesmo entre indivíduos que se encontram em pontos distantes do espaço de aspecto e modifica ou reforça a hierarquia.

Analisaremos a seguir exemplos que darão origem a um modelo específico que apresenta um espaço de fase completamente inusitado e uma interação não-local.

4. Redes Filamentares

Como já tivemos oportunidade de frisar, o processo clássico de difusão é extremamente ineficiente para o transporte de substâncias com respeito ao tempo e distância apesar do seu importante papel em quase todos os fenômenos biológicos.

Em vista disto, a evolução tem encontrado estratégias para aumentar a eficiência no transporte de substâncias vitais em todas as escalas e, bem sucedida nisto, tem possibilitado a emergência de organismos de grande complexidade.

O processo clássico de difusão é realizado através de superfícies e, portanto, o transporte entre uma região e outra, se realizado desta forma, só pode ser melhorado como consequência do aumento da área de interface. Daí provém a fisiologia “fractal” do sistema brônquio-pulmonar com seus $3 \cdot 10^6$ pequenos sacos de ar que têm por objetivo facilitar o intercâmbio de gases através de difusão.

O transporte de nutrientes, de sinalizadores e agentes diversos do sistema imunológico entre a rede vascular e as células do corpo também é realizado por uma

interface “fractalizada” que favorece a difusão.

Portanto, a construção e a morfogênese destas estruturas é um passo crucial para a implementação desta estratégia.

A principal arquitetura utilizada para este fim é a que chamaremos de *rede filamentar*, e que tem exemplificações nos mais diversos contextos fisiológicos, como a vascularização sanguínea, o sistema nervoso, os brônquios, os veios foliares, o sistema de coleta urinária nos rins, os dutos biliares, a placenta e a estrutura de alguns fungos. (Keshet [1988], West-Goldberger [1986], Meinhardt [1982], Labarbera-Vogel [1982], Mitchison [1981]).

Um exemplo dramático da importância da formação de redes filamentosas em organismos é a recente descoberta do processo de vascularização que ocorre durante o início do crescimento exponencial dos tumores (Folkman [1975]). Observou-se inicialmente que um tumor esferoidal, cujas células recebem nutrientes por difusão através da superfície não passa normalmente de 1–2 milímetros de raio e com cerca de 10^6 células. A explicação para isto provém do fato de que a superfície da esfera cresce na ordem de R^2 ($R =$ raio) e o seu volume, que é proporcional ao número de células e portanto à taxa de consumo de nutrientes, cresce na ordem de R^3 . Desta forma, em algum ponto o crescimento do tumor é estabilizado devido à sua impossibilidade de suprir, por difusão, os nutrientes em uma taxa necessária às suas células. Por outro lado, tumores *in vitro* mantidos em uma forma aproximadamente bidimensional (quando a superfície da interface é proporcional ao volume), o crescimento tumoral é praticamente ilimitado e atinge rapidamente uma população de 10^9 células.

Nos seus trabalhos experimentais na década de 1970, J. Folkman [1975] mostrou que o crescimento exponencial do tumor se iniciava após um intenso processo de vascularização que o envolvia, e que aumentava assim enormemente a eficiência na distribuição de nutrientes às células tumorais.

Este processo de vascularização, observou-se, era induzido pela secreção de uma substância sinalizadora chamada TAF (“Tumor Angiogenesis Factor”) que ocorre no organismo normal em processos inflamatórios e na região de obstruções de vasos sanguíneos, (isquemia). Portanto, o estudo do crescimento de tumores na sua fase mais perigosa deve considerar um acoplamento com o processo de formação da rede

vascular (angiogênese). Um trabalho inicial e partindo de hipóteses drasticamente simplificadoras, foi publicado por Balding-Mc Elwain [1985] que fez uso da teoria de L. Edelstein-Keshet (Keshet [1982]) para redes filamentosas unidimensionais e da difusão clássica, para o sinalizador TAF.

Um fenômeno estruturalmente semelhante, mas bem menos conhecido, é o crescimento de conexões dentríticas do sistema neurológico que, aparentemente é também estimulado por uma substância sinalizadora chamada NGF (“Nerve Growth Factor”) descoberta na década de 1950 por R. Levi-Montalcini. (D. Purves [1988] - *Body and Brain; A Trophic Theory of Neural Connections*, Harv. U. P., USA).

Nas próximas seções trataremos de um modelo matemático que descreve macroscopicamente a dinâmica de uma rede filamentar que, no seu comportamento microscópico, apresenta algumas características normalmente encontradas nos exemplos mencionados como crescimento, bifurcação e anastomose (conexão) dos ápices e ramificação lateral dos filamentos.

Até agora discutimos a ocorrência de redes filamentosas como estruturas fisiológicas em organismos, o que se constitui em um vasto campo de investigação aberto para o ponto de vista de modelos matemáticos, mas que não esgota suas interpretações.

O termo “redes de comunicação” é utilizado frequentemente para designar uma estrutura de linhas (materiais ou virtuais), que representam canais de interação entre um conjunto de nós, cuja estrutura interna não vem ao caso neste contexto.

A existência prévia destes nós faz com que a estrutura tenha em geral, um caráter estático.

No estudo de dinâmica de populações que dispõem de um processo de interação individual, é razoável imaginar uma rede de comunicação entre os indivíduos através da qual ocorre o mecanismo sociobiológico.

As populações humanas são naturalmente o exemplo mais evidente destas estruturas. Entretanto, os seus nós, (nós), dispõem de uma estrutura interna de processamento destas informações dotada de grande complexidade que não poderiam ser facilmente representadas.

Há todavia inúmeros exemplos de grandes populações cujos indivíduos tem

uma estrutura interna *extremamente simples no que diz respeito à sua capacidade de processar informações*, mas que desenvolvem uma rede de intercomunicação densa e eficiente. (O computador é uma implementação tecnológica óbvia desta idéia).

Observações experimentais exaustivas tem mostrado que um coletivo sofisticado, que poderíamos até de chamar *inteligente* (Franks [1989], Gordon [1992]) *não é* necessariamente resultado da complexidade dos indivíduos da população mas de sua rede de intercomunicação. Este é um fato notório, mesmo ao observador casual que pode comparar as extraordinárias organizações sociais e as sofisticadas arquiteturas construídas por populações de insetos, com as suas correspondentes por animais individualmente muito “superiores” como os primatas. (Okubo [1986], Lorenz [1971], Wilson [1972]1977)). (A estrutura complexa de comportamento destes últimos, na verdade, é uma manifestação dos seus sistemas neurológicos que também podem ser pensados como redes de intercomunicação complexa entre componentes simples).

Estas populações são mais amenas à experimentação e oferecem maior facilidade para o tratamento matemático.

Particularmente interessante sob este ponto de vista são os comportamentos coletivos de grandes populações de invertebrados que se utilizam de comunicação por meio da marcação química de trilhas, tal como várias espécies de formigas, alguns moluscos e abelhas, e até mesmo organismos celulares. (Deneubourg [1989], Wilson [1971]).

A comunicação por meio de sinalizadores químicos é um processamento universal em populações biológicas especialmente a nível celular como no paradigmático exemplo estudado por Keller-Segel [1970]. Mas neste caso, a substância química é dispersa em todo o meio ambiente para um processo de difusão clássica e a orientação é resultado de uma quimiotaxia.

No caso em questão, os indivíduos da população percorrem caminhos lineares que sob certas condições, (como na ocorrência de uma fonte de alimentos), é marcada pelo depósito de *feromônios*, substâncias químicas detectáveis pelo sistema olfativo dos insetos da mesma população.

Estas substâncias sofrem um processo de evaporação e de degradação natural que diminui a intensidade do sinal até um nível imperceptível aos indivíduos.

Indivíduos trafegando em trilhas antigas, por sua vez, reforçam a marcação. Isto poderia indicar um enrijecimento da estrutura mas isto não ocorre em virtude do desvio aleatório de alguns indivíduos assim como a saturação olfativa pode causar a não percepção das trilhas por um determinado indivíduo. (Deneubourg [1989-1991-1993]).

A exploração de um ambiente em busca de nutrientes tem que necessariamente dispor desta componente aleatória de uma forma muito semelhante à estratégia de algoritmos adaptativos e do processo criativo mental.

A intensidade da marcação química da trilha descrita para um indivíduo, depende das circunstâncias e é uma componente importante da comunicação.

O encontro de um indivíduo como uma trilha (marcada) resulta em um processo de avaliação de informações baseado em três aspectos.

- 1 - Intensidade do sinal (concentração de feromônio)
- 2 - Inclinação da trilha (com relação à sua trajetória)
- 3 - Gradiente do sinal ao longo da trilha,

que os entomólogos chamam de osmotropotaxis (1-3) e clinotaxis (2). (Deneubourg [1993]).

A forte tendência de um indivíduo adotar uma nova trilha marcada é denominado alelominesis e tem um efeito auto catalítico da dinâmica da estrutura.

Passaremos agora a construir um modelo para a descrição da dinâmica de redes filamentosas de uma forma geral.

5. Dinâmica de Redes Filamentares

Consideraremos aqui a construção de um modelo matemático macroscópico para redes filamentares que iremos supor formadas essencialmente por *filamentos retilíneos* em duas dimensões orientados e por suas pontas.

A ponta do filamento, que será também denominada de *ápice*, é orientada pelo mesmo ângulo que o filamento.

A estrutura de uma rede de filamentos é descrita pela densidade de plantas e de filamentos no espaço físico \mathbb{R}^2 .

Entretanto, para que a dinâmica desta estrutura seja estabelecida, a localização em um espaço de fase físico é insuficiente uma vez que outros dados, por exemplo, sobre a orientação dos filamentos, são indispensáveis para determinar o processo interativo.

Admitiremos os seguintes tipos de interação:

- a - Bifurcação (ou multibifurcação) de ápices - Y
- b - Decaimento natural de ápices
- c - Ramificação lateral - F
- d - Anastomose (conexão) ápice filamento - H
- e - Anastomose ápice-ápice - W

seguindo a simbologia de Keshet [1988-1989] iremos denotar cada processo acima pela letra correspondente à direita.

Além da distribuição espacial, outras características dos próprios filamentos podem ser igualmente importantes para determinar a dinâmica microscópica. Iremos denominar esta outra característica genericamente de *a*.

No estudo das redes de trilhas de comunicação química, a concentração de feromônio ao longo da trajetória é essencial para a dinâmica e, portanto é necessário descrever em que grau de concentração desta ou daquela substância se “situa” o filamento.

Em redes de vascularização, como o transporte de nutrientes é o seu papel principal, é necessário também incluir no modelo descritivo o “grau” de espessura do filamento, ou seja, qual a sua *posição* com respeito a esta medida.

Portanto estas medidas devem fazer parte do espaço de aspecto.

Portanto, o espaço de fase será um espaço de aspecto formado pelas medidas de localização espacial $(x_1, x_2) = x$, do ângulo θ e da característica a , o que é representado matematicamente por \mathbb{R}^4 .

A população de ápices será representada pela função densidade

$$A(x, \theta, a, t)$$

cujo significado é dado pela integral

$$\int_0^{\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} A(x, \theta, a, t) d\theta da = \bar{A}(x, t)$$

que dá a sua densidade espacial em \mathbb{R}^2 no instante t .

Observemos que a direção é dada por $\theta \in [-\pi, \pi]$, um vez que o sentido também nos interessa neste caso.

Para descrevermos os filamentos, seguiremos os argumentos de Keshet [1982-1988-1989] e representaremos esta população pela densidade do comprimento

$$\rho(x, \theta, a, t)$$

no espaço de aspecto $(x_1, x_2, \theta, a) \in \mathbb{R}^4$.

Para estabelecermos a dinâmica de ápices e filamentos, é necessário especificarmos os fluxos e as interações.

Como hipótese simplificadora suponhamos que os ápices movimentem-se em linha reta com velocidade constante v .

Portanto, cada ápice causará o aparecimento de uma unidade de comprimento do filamento por unidade de tempo na forma

$$vA,$$

uma função de fonte.

Também, como termo de fonte, iremos supor uma taxa de decaimento natural na forma malthusiana:

$$-\gamma\rho$$

A dinâmica filamentar pode desta forma ser escrita como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = vA - \gamma\rho.$$

Se a característica a for sujeita a uma variação temporal u que produzirá uma convecção de fundo em ρ , teríamos acrescentado à equação anterior um termo de fluxo ρu e assim

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = vA - \gamma\rho - \frac{\partial}{\partial a}(\rho u).$$

Se, por exemplo, a for a concentração de uma substância com fonte localizada nos ápices, $\varphi(A)$, e com decaimento malthusiano

$$\frac{da}{dt} = \varphi(A) - Ka = u.$$

De qualquer maneira, observamos que, quanto à localização e à orientação *não serão consideradas* variações dos filamentos, isto é, eles estarão fixos na posição e na inclinação.

Consideremos agora os ápices, que dispõem de uma dinâmica mais rica uma vez que eles se movimentam no *espaço físico* por convecção com velocidade v e no espaço de orientação por efeito de bifurcação, e também apresentam diversas formas e interação.

Começando pela convecção espacial, o fluxo no espaço de aspecto $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é dado por

$$J_e = A(v \cos \theta, v \sin \theta, 0, 0)$$

ou seja, a velocidade de um ápice que se encontra no ponto (x_1, x_2, θ, a) do espaço de aspecto por conta do seu crescimento é $(v \cos \theta, v \sin \theta, 0, 0)$.

A movimentação dos ápices quanto à orientação será resultado do processo de multifurcação.

A bifurcação é o evento mais comum nos exemplos de estruturas, talvez porque uma multifurcação signifique uma simultaneidade de eventos que por si mesmos são relativamente raros. Desprezaremos portanto a sua ocorrência.

Por outro lado, a mudança de orientação, que poderia ser enquadrada como uma “unifurcação”, é um evento relativamente frequente em algumas situações, como, por exemplo, nas redes de trilhas de comunicação química.

Para representar estes fenômenos, definiremos funções no espaço de aspecto (eventualmente, podendo também depender da densidade de ápices) que para cada ângulo $\alpha \in [-\pi, \pi]$ nos dão a taxa média de desvio $Y(x, \theta, a, \alpha)$.

Assim, a taxa, com relação ao tempo, com que ápices de outras orientações surgirão na orientação θ no ponto $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ será dada por

$$\int_{-\pi}^{\pi} A(x, \theta - \alpha, a, t) Y(x, \theta - \alpha, a, \alpha) d\alpha$$

e a perda de ápices no ponto $(x, \theta, a) \in \mathbb{R}^4$ é

$$\int_{-\pi}^{\pi} A(x, \theta, a, t) Y(x, \theta, a, \alpha) d\alpha = d(x, \theta, a) A(x, \theta, a, t)$$

Portanto, a taxa de variação (com relação ao tempo) dos ápices no ponto (x, θ) do espaço de aspecto por conta deste fenômeno será

$$\bar{\phi}_Y = \int_{-\pi}^{\pi} (A(x, \theta - \alpha, a, t) Y(x, \theta - \alpha, a, \alpha) - A(x, \theta, a, t) Y(x, \theta, a, \alpha)) d\alpha.$$

Esta expressão em toda a sua generalidade é muito complicada e requer o auxílio de hipóteses simplificadoras para a formulação de um modelo matemático mais tratável e mais facilmente testável experimentalmente.

Um primeiro passo seria considerar $Y(\alpha)$ como função unicamente da variável α . Neste caso poderíamos interpretá-la como uma distribuição que teria os seus picos nas direções mais frequentes. Por exemplo, se a bifurcação for o evento típico do sistema, $Y(\alpha)$ seria simétrica com picos em $-\alpha_0$ e α_0 , onde α_0 representa o ângulo de desvio de θ preferencial.

Neste caso, o termo acima poderia ser escrito como

$$\bar{\phi}_Y = \int_{-\pi}^{\pi} (A(x, \theta - \alpha, a, t) - A(x, \theta, a, t)) Y(\alpha) d\alpha.$$

De uma forma geral, este termo será sempre um funcional não-local e representará uma interação de longa distância (no espaço de aspecto).

Em um caso limite, em que a distribuição $Y(\alpha)$ tiver um comportamento de Delta de Dirac em $-\alpha_0$ e α_0 nos restringiremos a uma expressão do tipo

$$d_0(A(x, \theta - \alpha_0, a, t) + A(x, \theta + \alpha_0, a, t) - A(x, \theta, a, t)).$$

se ainda α_0 for considerado pequeno, podemos escrever o termo acima como

$$d_0[A(x, \theta - \alpha_0, a, t) + A(x, \theta + \alpha_0, a, t) - 2A(x, \theta, a, t)] + dA(x, \theta, a, t)$$

e aproximar a diferença por

$$d_0\alpha_0^2 \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2}(x, \theta, a, t) + d_0A = \phi_Y.$$

Observemos que com esta aproximação o termo de bifurcação é a soma de uma fonte linear e uma difusão clássica na orientação.

De acordo com a interpretação clássica, o termo ϕ_Y teria uma influência uniformizadora nas orientações dos filamentos e contribuiria para um crescimento exponencial dos ápices. Observemos também que na aproximação infinitesimal o coeficiente de difusão $d_0\alpha_0^2$ é muito pequeno e portanto de curto alcance.

Uma orientação uniformizadora significa um *emaranhado* sem estruturas de orientação.

O tempo de decaimento natural dos ápices pode ser representado por um simples termo linear com coeficiente negativo.

Consideremos agora a ramificação lateral em que a fonte de ápices depende da concentração de filamentos. Para um filamento com orientação $\theta - \alpha$ a ramificação com um ângulo α produz um ápice na orientação θ . Portanto escrevemos este termo da seguinte maneira

$$\bar{\phi}_F = \int_{-\pi}^{\pi} \rho(x, \theta - \alpha, a, t) F(\alpha) d\alpha.$$

Analogamente ao que argumentamos no caso anterior se F tiver um pico em α_1 temos, por simetria,

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_F &= (\rho(x, \theta - \alpha_1, a, t) + \rho(x, \theta + \alpha_1, a, t)) f_0 \\ &= f_0(\rho(x, \theta - \alpha_1, a, t) - 2\rho(x, \theta, a, t) + \rho(x, \theta + \alpha_1, a, t)) + 2f_0\rho(x, \theta, a, t) \end{aligned}$$

e se $\alpha_1 \cong 0$,

$$\phi_F = \alpha_1^2 f_0 \frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta^2} + 2f_0 \rho \cong 2f_0 \rho .$$

Consideremos agora a anastomose ápice-filamento. A chance de conexão entre ápices e filamentos depende, em todos os exemplos citados, do ângulo de encontro, em geral, aumentando consideravelmente com a perpendicularidade (vascularização) ou, paralelismo (trilhas). Este é um termo ϕ_H de fonte negativa (uma vez que há uma perda de ápices) e se

$$H(\alpha)$$

é o termo que representa a taxa de probabilidade (ou a frequência) com que um ápice e um filamento disposto de um ângulo relativo α se conectem, escrevemos

$$\phi_H = \int_{-\pi}^{\pi} H(\alpha) A(x, \theta, a, t) \rho(x, \theta + \alpha, a, t) d\alpha .$$

Como em geral não há picos pronunciados para efeito de conexão este funcional é necessariamente *não-local*, e *não-linear*.

A anastomose ápice-ápice pode parecer extremamente difícil (assim como a ápice-filamento em 3 dimensões). Entretanto, é frequentemente observado na dinâmica destas estruturas que há um processo de quimiotaxia entre estes elementos através de um sinalizador químico. Esta quimiotaxia pode ser positiva e, neste caso, facilita a anastomose consideravelmente mais do que a chance geométrica poderia justificar. Isto acontece quando a rede filamentar é um meio de transporte e irrigação; nestes casos, obviamente a formação de laços aumenta a eficiência do sistema. (Folkman [1975], Meinhardt [1982]). No caso de rede de trilhas a difusão clássica do feromônio em torno das trilhas exerce um papel osmotropotático sobre os insetos que estão na liderança de um ápice (Deneubourg [1993]). Em outras situações a quimiotaxia é negativa e o ápice é repellido (Mitchison [1981]).

Em geral, a anastomose W pode ser representada na forma

$$\phi_W = \left(\int_{-\pi}^{\pi} W(\alpha) A(x, \theta - \alpha, a, t) d\alpha \right) A(x, \theta, a, t) .$$

onde $W(\alpha)$ representa o coeficiente de interação.

Este funcional de interação também é essencialmente não local e não-linear.

Se todos estes efeitos forem considerados as equações para ρ e A podem ser resumidas na forma

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = vA - \gamma\rho - \frac{\partial}{\partial a}[\rho(\varphi(A) - Ka)] \\ \frac{\partial A}{\partial t} = \text{div}_x(Av) + \phi_Y + \phi_F - \phi_H - \phi_W. \end{cases}$$

Keshet [1982] considerou este problema em uma dimensão (sem orientação, portanto) e com aproximação de bifurcação e ramificação infinitesimal. Keshet-Ermentrout [1989] consideram o problema em duas dimensões e aproximação infinitesimal, em ambos os casos tratando de um espaço de aspecto orientado e sem outras características.

O problema de trilhas que envolve a concentração de ferômonio é amplamente descrito na literatura e tratado apenas microscopicamente.

É interessante observar que na dinâmica de ápices os termos positivos de fonte ϕ_Y e ϕ_F têm efeitos difusivos na orientação (considerando a sua interpretação infinitesimal) e uma dinâmica emergente só será possível por ação dos termos negativos ϕ_H e ϕ_W .

O termo ϕ_Y é auto catalítico (ou auto ativador) e o termo ϕ_F é ativador cruzado. Estes são ingredientes clássicos para a emergência de estruturas de ordem de acordo com a argumentação de Segel-Jackson [1972].

Keshet-Ermentrout [1989-1990] demonstraram que, de fato, simulações por modelos discretos suportam o conceito de que o fenômeno de emergência ocorre nos modelos elementares.

As soluções homogêneas, que na dimensão de orientação significam "caóticas" satisfazem

$$\begin{aligned} 0 &= vA - \gamma\rho \\ 0 &= d_0A - 2f_0\rho - H_0A\rho - W_0A^2, \end{aligned}$$

e, portanto, podem dispor de até duas soluções. A instabilidade destas soluções significam a inicialização de uma dinâmica emergente, cuja estrutura só uma simulação pode exemplificar.

As redes filamentosas como modelos de trilhas de exploração para insetos devem ser analisadas com respeito a soluções do tipo frentes de ondas (Murray et al. [1986]) que representam o avanço da população por meio de seus líderes (ápices) com a marcação do território percorrido reforçada pelos indivíduos que os seguem.

Diversas outras questões sobre a dinâmica de redes de intercomunicação em populações formadas por indivíduos de estrutura intrínseca simples (ou simplificada) podem ser analisadas através do modelo generalizado exposto acima.

Particularmente interessante é o estudo macroscópico da difusão realizada por uma rede filamentar microscópica (onde a espessura dos filamentos é uma das coordenadas do espaço do espectro). Estes assuntos serão tratados em futuras publicações.

When the Lord created the world and people to live in it – an enterprise which, according to modern science, took a very long time – I could well imagine that He reasoned with Himself as follows: ‘If I make everything predictable, these human beings, whom I have endowed with pretty good brains, will undoubtedly learn to predict everything, and they will thereupon have no motive to do anything at all, because they will recognise that the future is totally determined and cannot be influenced by any human action. On the other hand, if I make everything unpredictable, they will gradually discover that there is no rational basis for any decision whatsoever and, as in the first case, they will thereupon have no motive to do anything at all. Neither scheme would make sense. I must therefore create a mixture of the two. Let some things be predictable and let others be unpredictable. They will then, amongst many other things, have the very important task of finding out which is which.’

E. F. Schumacher pg. 211.

APÊNDICE I

Efeitos Quase-Locais em Difusão'

O tensor de difusão clássico é obtido a partir de argumentos que pressupõem um efeito local representado pela derivada e não contempla, desta forma, a possibilidade de “comunicação entre vizinhos além de uma adjacência infinitesimal”.

Trataremos aqui apenas algumas generalizações dos argumentos do modelo clássico, que estendem ligeiramente a vizinhança de interação.

Iniciamos por considerar o termo do laplaciano na equação de difusão clássica

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \Delta \rho$$

como o desvio da média dos valores de ρ em uma vizinhança infinitesimal ao seu valor em x , o que pode ser verificado através da fórmula de Maxwell (Murray [1989]).

Fórmula de Maxwell

$$\int_{\|z\| \leq R} \rho(x_0 + z) dz = \int_{\|z\| \leq 1} \left(\rho(x_0) + \frac{\partial \rho}{\partial x}(x_0)z + \sum_{i,j} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) z_i z_j + O(r^3) \right) dz .$$

Mas,

$$\int_{\|z\| \leq R} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}(x_0)z \right) dz = 0$$

por anti-simetria com relação ao plano que passa pela origem e é perpendicular ao vetor $\frac{\partial \rho}{\partial x}(x_0)$.

Se, $S = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$ então, S é uma matriz simétrica e $OSO^{-1} = D$ para uma O ortogonal e D diagonal. Então:

$$\begin{aligned} \int_{\|z\| \leq R} \langle Sz, z \rangle dz &= \int_{\|z\| \leq R} \langle O^{-1}DOz, z \rangle dz = \int_{\|z\| \leq R} \langle DOz, Oz \rangle dz = \\ & \left(Z = Oz, \left| \frac{\partial Z}{\partial z} \right| = \det O = 1 \right) = \int_{\|z\| \leq R} \langle DZ, Z \rangle DZ = \\ &= \sum_i \int_{\|z\| \leq R} \lambda_i Z_i^2 dZ . \text{ Mas, } \int_{\|z\| \leq R} Z_i^2 dZ = \int_{\|z\| \leq R} z_j^2 dz = \frac{1}{n} \int_{\|z\| \leq R} \|z\|^2 dz . \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\|z\| \leq R} \langle Sz, z \rangle dz = \left(\sum_i \lambda_i \right) \int_{\|z\| \leq R} \|z\|^2 dz = \text{Tr}(S) \int_{\|z\| \leq R} \|z\|^2 dz.$$

Usando coordenadas polares, $dZ = R^2 d\Omega dr$ ($d\Omega =$ elemento de superfície da esfera unitária).

$$\int_{\|z\| \leq R} \|z\|^2 dz = \int_{S^2} \int_0^R r^2 r^2 d\Omega dr = \frac{R^5}{5} \quad (\text{área da esfera unitária } S^2) = \frac{4\pi R^5}{5}$$

Logo:

$$\sum_{i,j} \frac{1}{2} \int_{\|z\| \leq R} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j} (x_0) z_i z_j dz = \text{Tr} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j} (x_0) \right) \frac{2\pi R^5}{5} = \Delta \rho(x_0) \frac{2\pi R^5}{5}$$

e

$$\langle \rho(x_0) \rangle_R = \rho(x_0) + \frac{3}{10} R^2 \Delta \rho(x_0) + O(R^6).$$

Portanto, obtemos a fórmula de Maxwell:

$$\Delta \rho(x) = \frac{3}{10} \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\langle \rho(x) \rangle_R - \rho(x)}{R^2}$$

onde a média (isotrópica) é dada por

$$\langle \rho(x) \rangle_R = \frac{1}{1/3\pi R^3} \int_{\|z\| \leq R} \rho(x + \xi) dz$$

a) A primeira estratégia para estender o alcance da difusão clássica será acrescentar ao fluxo (local) $-D_1 \frac{\partial}{\partial x} \rho$ um termo de correção proporcional ao desvio da média, que pela fórmula de Maxwell nos dá

$$\frac{\langle \frac{\partial \rho}{\partial x} \rangle_R - \frac{\partial \rho}{\partial x}}{R^2} \approx \Delta \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} (x_0) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \Delta \rho(x_0)$$

ou seja,

$$J = -D_1 \frac{\partial \rho}{\partial x} + D_2 \frac{\partial}{\partial x} \Delta \rho$$

de onde virá a equação de Cahn-Hilliard:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(-D_1 \frac{\partial \rho}{\partial x} + D_2 \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \rho) \right) = D_1 \Delta \rho - D_2 \Delta^2 \rho$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D_1 \Delta \rho - D_2 \Delta^2 \rho$$

b) A segunda estratégia (que faremos em dimensão 1) será considerar a cinética de ρ no ponto x (instante t) dada por uma média ponderada das influências de todos os outros pontos na forma

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi) \rho(x + \xi, t) d\xi + f(\rho)$$

onde naturalmente a função da influência (núcleo) $w(\xi)$ é simétrica e tem um pico acentuado nas vizinhanças da origem (claro, não descartamos o fato de que a influência preponderante vem dos vizinhos mais próximos).

Neste caso, usando uma aproximação de Taylor

$$\begin{aligned} \rho(x + \xi) &= \rho(x) + \frac{\partial \rho}{\partial x}(x) \xi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}(x) \xi^2 + \\ &+ \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3}(x) \xi^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 \rho}{\partial x^4}(x) \xi^4 + O(\xi^4) \end{aligned}$$

temos até 4^a ordem

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = f(\rho) + w_0 \rho + w_2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + w_4 \frac{\partial^4 \rho}{\partial x^4}$$

lembrando que

$$w_{2m} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} w(\xi) \xi^{2m} d\xi$$

e que os termos de ordem ímpar se anulam devido à simetria de w .

Obtemos assim, novamente uma equação biquadrada como generalização da difusão clássica (local). A expansão de Taylor nos sugere que, apesar da localidade infinitesimal do operador diferencial

$$D_1 \Delta - D_2 \Delta^2,$$

a inclusão do termo de maior ordem significa, de certa maneira, uma ampliação da vizinhança de interação. Este fato é mais aparente na discretização por diferenças finitas.

Bibliografia

- R. Alexander [1991] - The Modified Newton Method in the Solution of Stiff Ordinary Differential Equations, *Math. of Comp.* **57**, 673-701.
- U. D'Ambrosio [1992] - Comunicação Oral.
- W. D'Arcy Thompson [1942] - *On Growth and Form*, Cambridge U. P. U.K..
- K. J. Arrow [1963] - *Social Choice and Individual Values*, Yale U.P., USA.
- R. J. Bagley - J.D. Farmer - S.A. Kauffman - N.H. Packard - A.S. Perelson - I.M. Stadnyk [1989] - Modeling Adaptive Biological Systems, *Byosystems* **23**, 113-137.
- D. Balding - D.L.S. Mc Elwain [1983] - A Mathematical Model of Tumor-Induced Cappilarity Growth, *J. Th. Biol.* **114**, 53-73.
- G. I. Barenblatt [1979] - *Similarity, Self-Similarity and Intermediate Asymptotics*, Plenum, USA.
- J. D. Bekenstein - M. Schiffer [1990] - Quantum Limitations on the Storage and transmission of Information, *Int. J. Mod. Phys. C* **1**, 355-422.
- H. C. Berg [1983] - *Random Walks in Biology*, Princeton U. P., USA.
- L. Bers - F. John - M. Schechter [1964] - *Partial Differential Equations*, Wiley, USA.
- G. D. Birkhoff [1960] - *Hydrodynamics, a Study in Logic Fact and Similitude*, Princeton U. P., USA.
- G. W. Bluman - J. D. Cole [1974] - *Similarity Methods for Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin.
- S. Bochner [1968] - *Eclosion and Synthesis*, W. Benjaim, USA.

- G. W. Bluman - S. Kumei [1989] - *Symmetries and Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin.
- R. de Boer - A. Perelson [1991] - Size and Connectivity as Emergent Properties of a Developing Immune Network, *J. Th. Biol.* **149**, 381-424.
- R. de Boer - L. A. Segel - A. S. Perelson [1992] - Pattern Formation in one and Two-Dimensional Shape-Space Models of the Immune System, *J. Th. Biol.*, **155**, 295-333.
- J. P. Boglaev [1976] - An Iterative Method for the Approximate Solution of Singularly Perturbed Problems, *Soviet Mat. Doklady*, **17**, 543-547.
- J. T. Bonner [1952] - *Morphogenesis*, Princeton U. P., USA.
- J. T. Bonner [1955] - *Cells and Societes*, Princeton U. P., USA.
- M. Bunge [1979] - *Causality and Modern Science*, Dover, USA.
- N. F. Briton [1986] - *Reaction-Diffusion Equations and their Applications to Biology*, Acad. P. USA.
- E. Broda [1983] - *Ludwig Boltzmann: Man, Physicist, Philosopher*, Ox. Bow P., USA.
- G. Chaitin [1975] - Randomness and Mathematical Proof, *Sci. Am.* **232**, 47-52.
- J. L. Casti - A. Karlquist Ed [1986] - *Complexity Language and the Life: Mathematical Approach*, Springer-Verlag, Berlin.
- C. Castillo-Chavez - H. Hetchcote - V. Andreasen - S.A. Levin - W-M Liu [1989a] - Epidemiological Models with Age Structure, Proportionate Mixing and Cross-Immunity, *J. Math. Biol.* **27**, 233-258.
- L. L. Cavalli-Sforza - M.W. Feldman [1981] - *Cultural Transmition and Evolution: A Quantitative Approach*, Princeton U.P., USA.

- D. S. Cohen - J. D. Murray [1981] - A Generalized Diffusion Model for Growth and Dispersal in a Population, *J. Math. Biol.*, **12**, 237-249.
- M. Conrad [1987] - Molecular Computer Design: A Synthetic Approach to Brain Theory, 197-226 in Casti-Karlquist [1987].
- F. Crick - C. Koch [1992] - The Problem of Consciousness, *Sci. Am.* **267**, 153-159.
- P. J. Davis - R. Hersh [1981] - *The Mathematical Experience*, Birkhauser, USA.
- P. J. Davis - R. Hersh [1986] - *O Sonho de Descartes*, Francisco Alves, Rio.
- J. L. Deneubourg - S. Goss [1989] - Collective Patterns and Decision - Making, *Ethology, Ecology and Evolution* **1**, 295-311.
- J. L. Deneubourg - G. Theroulaz - R. T. Beckers [1991] - Swarm-Made Architectures, *Proc. of First European Conf. on Artificial Life*, Paris.
- J. L. Deneubourg et al [1993] - The Dynamics of Collective Sorting Robot-Like Ants and Ant-Like Robots, Preprint.
- J. Dillenberger [1960] - *Protestant Thought and Natural Science*, Univ. of Notre Dame Press, USA.
- J. Doyne et. alli. [1986] - The Immune System, Adaptation and Machine Learning, *Physica*, **22D**, 187-204.
- L. Edelstein [1982] - The Propagation of Fungal Colonies: A Model for Tissue Growth, *J. Th. Biol.* **98**, 679, 701.
- L. Edelstein - Keshet [1988] - *Mathematical Models in Biology*, McGraw-Hill, USA.
- L. Edelstein-Keshet - G. B. Ermentrout [1989] - Models for Networks in Two Dimensions, *SIAM J. Appl. Math.* **49**, 1136-1157.
- L. Edelstein-Keshet - G. B. Ermentrout [1990] - Models for Contact-Mediated Pattern Formation: Cells that Form Parallel Arrays, *J. Math. Biol.* **29**, 33-58.

- M. Eigen - P. Schuster [1979] - *The Hypercycle: A Principle of Natural Self Organization*, Springer, Berlin.
- M. Eigen - R. Winkler [1988] - *O Jogo*, Gradiva, Lisboa.
- J. D. Farmer - N. H. Packard - A. S. Perelson [1986] - *The Immune System, Adaptation and Machine Learning*, *Physica* **22 D**, 187-204.
- W. C. Ferreira Jr. - Luiz A. D. Rodrigues [1993] - *O Princípio de Superposição Assintótica em Perturbação Singular*, (a ser publicado).
- L. S. Feuer [1974] - *Einstein and the Generations of Science*, Basic Books, USA.
- P. C. Fife [1988] - *Dynamics of Internal Layers and Diffusive Interfaces*, SIAM, USA.
- J. Folkman [1976] - *Vascularization of Tumors*, *Sci. Am.* **234**, 58-73.
- N. R. Franks - N. Gomez - S. Goss - J. L. Deneubourg [1991] - *The Blind Leading the Blind in the Army Ant Raid Patterns: testing a model of Self-Organization*, *J. of Insect Behaviour* **4**, 583-607.
- N. R. Franks [1989] - *Army Ants: A Collective Intelligence*, *Am. Sci.* **77**, 138-45.
- U. Frisch - S. A. Orszag [1989] - *Turbulence: Challenges for Theory and Experiment*, *Lecture Notes*, Winter Inst. Nonlinear Phenomena, UnB, Brasília.
- D. M. Gordon - B. C. Goodwin - L. E. Trainor [1992] - *A Parallel Distributed Model of the Behaviour of Ant Colonies*, *J. Th. Biol.*, **156**, 293-307.
- J. Hadamard [1954] - *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*, Dover, USA.
- H. Haken [1979] - *Synergetics, An Introduction*, Springer, Berlin.
- H. Haken [1981] *The Science of Structure: Synergetics*, Van Nostrand, USA.
- H. Haken [1983] - *Advanced Synergetics*, Springer, Berlin.

- T. G. Hallam - S.A. Levin Ed [1986] - *Mathematical Ecology: AN Introduction*, Springer-Verlag, Berlin.
- S. Hardt [1980] - Transit Times, in Segel [1980], 451-457.
- A. Hastings Ed [1986] - *Community Ecology*, Springer-Verlag, USA.
- R. Hightower [1991] - Emergent Computation and Learning from Nature, Bulletin of SFI **6**, 25-26.
- J. Hertz - A. Krogh - R. G. Palmer [1991] - *Introduction to the Theory of Neural Computation*, Addison-Wesley, USA.
- W. D. Hillis [1985] - *The Connection Machine*, MIT Press, USA.
- P. Hogeweg - Hesper [1983] - The Ontogeny of the Interaction Structure in Bumble Bee Colonies; A *MIRROR* Model, *Behav. Ecol. Sociobiol.* **12**, 271-283.
- P. Hogeweg [1988] - Cellular Automata as a Paradigm for Ecological Modeling, *Applied Math. and Comput.* **27**, 81-100.
- P. Hogeweg [1988] - *MIRROR* Beyond *MIRROR*, Puddles of Life, in C. Langton [1988], 297-316.
- P. Hogeweg - B. Hesper [1990] - Individual-Oriented Modeling in Ecology, *Math. Comput. Modelling* **13**, 83-90.
- A. V. Holden [1991] - Can Excitable Media be Considered as Computational Systems?, *Physica*, **D49**, 240-246.
- B. Holldöbler - E. O. Wilson [1992] - *The Ants*, Springer, USA.
- R. Hooykaas [1988] - *A Religião e o Desenvolvimento da Ciência Moderna*, Ed. UnB, Brasília.
- F. C. Hoppensteadt [1971] - On Quasilinear Parabolic Equations with a small Parameter, *Comm. Pure Appl. Math.* **24**, 17-38.

- F. C. Hoppensteadt [1991] - The Search Light Hypothesis, *J. Math. Biol.* **29**, 689-691.
- E. Jager - L. A. Segel [1992] - On the Distribuion of Dominance in Populations of Social Organisms, *SIAM J. Appl. Math.* **52**, 1442-1468.
- N. K. Jerne [1973] - The Immune System, *Sci. Am.* **229**, 52-60.
- D. D. Joseph [1976] - *Stability of Fluid Motion*, 2 vol., Springer, Berlin.
- P. Kareiva [1990] - Population Dynamics in Spatially Complex Environments: Theory and Data, *Phil. Th. R. Soc. London B* **330**, 175-190.
- E. F. Keller - L.A. Segel [1970] - The Initiation of Slime Molds Aggregation View as an Instability, *J. Th. Biol.* **26**, 399-415.
- J. B. Keller [1978] - Rays waves and Asymptotics, *Bull. Am. Math. Soc.*, **84** (5), 727-750.
- J. B. Keller [1980] - Liesegang Rings and a Theory of Fast Reaction and Slow Diffusion in W. H. Ray et. al. editors - *Dynamics and Modelling of Reactive Systems*, Acad. Press, USA, 211-224.
- J. B. Keller [1985] - *Lectures on Perturbation Theory LNCC*, Rio.
- K. Kelly [1992] - A Distributed Santa Fe System, *Bulletin of SFI* **7**, 4-6.
- M. Kline [1974] - *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford U.P., U.K.
- M. Kline [1979] - *Why Johnny can't Add*, A. Knopf, USA.
- A. Kolmogorov - I. Petrovsky - N. Piscounov [1937] - Etude de l'equation de la Diffusion avec Croissance de la Quantite de Matiere et son Application a un Probleme Biologique, *Bull. Univ. Moscow A* **1**, 1-25.
- T. S. Kuhn [1970] - *The Structure of Scientific Revolutions*, The Univ. Chicago Press, USA.

- S. G. Krein [1971] - Linear Differential Equations in Banach Space, Am. Math. Soc. USA.
- M. Labarbera - S. Vogel [1982] - The Design of Fluid Transport Systems in Organisms, Am. Sci. **70**, 54-60.
- P. Lagerstrom [1985] - Matched Asymptotic Expansions, Springer, Berlin.
- F. Lara Ochoa [1984] - A Generalized Reaction Diffusion Model for Spatial Structure formed by Motile Cells, Biosyst., **17**, 35-50.
- C. G. Langton ed. [1988] *Artificial Life*, Santa Fe Institute Studies in the Sciences of Complexity, Addison-Wesley, USA.
- C. G. Langton [1986] - Studying Artificial Life with Cellular Automata, Physica **22 D**, 120-149.
- S. A. Levin [1981] - The Role of Theoretical Ecology in the Description and Understanding of Populations in Heterogeneous Environments, Amer. Zool., **21**, 865-75.
- S. A. Levin Ed [1992] - *Mathematics and Biology: The Interface*, Lawrence B. Lab., Univ. Cal. .
- S. A. Levin [1988] - Pattern, Scale and Variability: an Ecological Perspective, pg. 1-12 in Lecture in Biomath. **77**, Springer, Berlin.
- S. A. Levin - L. A. Segel [1982] - Models of the Influence of Predation on Aspect Diversity in Prey Populations, J. Math. Biol., **14**, 253-284.
- S. A. Levin - L. A. Segel [1985] - Pattern Generation in Space and Aspect, SIAM Rev. **27**, 45-67.
- S. A. Levin [1992] - Ecology in Theory and Application, Preprint ICTP, Itália.
- S. A. Levin [1992] - The Problem of Pattern and Scale in Ecology, Preprint.

- C. C. Lin - L. A. Segel [1990] - *Mathematics Applied to Deterministic Problems in Natural Sciences*, SIAM, USA.
- J. Lyons [1971] - Noam Chomsky, Vintage Books, USA.
- K. Lorenz [1971] - *Studies in Animal and Human Behaviour* 2nd Vol., Harv. U. P., Cambridge.
- A. G. McKendrick [1926] - Applications of Mathematics to Medical Problems, Proc. Edinb. Math. Soc., **44**, 98-130.
- Th. A. MacMahon - J. T. Bonner [1983] - *On Size and Life*, Scientific American Books, USA.
- I. M. Makarov Ed [1986] - *Cybernetics of Living Matter: Nature Man Information*, Ed. MIR, Moscou.
- Y. I. Manin [1981] - *Lo Demostrable e Indemostrable*, MIR, Moscou.
- D. Marr [1982] - *Vision*, W. H. Freeman, USA.
- V. P. Maslov [1987] - *Méthodes Opératorielles*, MIR, Moscou.
- V. P. Maslov, M. V. Fedoriuk [1981] - *Semi-Classical Approximations in Quantum Mechanics*, Reidel, Holland.
- H. Meinhardt [1982] - *Models of Biological Pattern Formation*, Academic Press, USA.
- G. J. Michison [1981] - The Polar Transport of Auxin and Vein Pattern in Plants, Phil. Tr. R. Soc. London **B 295**, 461-471.
- Y. Monin - Y. Yaglom [1968] - *Statistical Theory of Fluid Mechanics: Turbulence*, 2 Vol., MIT P., USA.
- J. Monod [1972] - *Chance and Necessity: An Essay on the Natural Philosophy of Modern Biology*, Random House, USA.

- E. W. Montroll [1978] - Social Dynamics and the Quantifying of Social Forces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **75**, 4633-4637.
- E. W. Montroll [1987] - On the Dynamics and Evolution of Some Complex Systems, Gibbs Lecture 1986, Bull. Am. Math. Soc. **16**, 1-46.
- J. D. Murray [1977] - *Nonlinear Differential Equation Models in Biology*, Oxford U. P., Oxford.
- J. D. Murray [1982] - Parameter Space for Turing Instability in Reaction Diffusion Mechanisms: A Comparison of Models, J. Th. Biol., **98**, 143-63.
- J. D. Murray - E. A. Stanley - D. L. Brown [1986] - On the Spatial Spread of Rabies Among Foxes, Proc. R. Soc. London **B 229**, 111-150.
- J. D. Murray [1988] - How the Leopard Gets its Spots, Sci. Am., **258**, 80-87.
- J. D. Murray [1989] - *Mathematical Biology*, Springer-Verlag Berlin.
- J. D. Murray - W.L. Seward [1992] - On the Spatial Spread of Rabies Among Foxes with Immunity, J. Th. Biology **156**, 327-348.
- J. D. Murray - M. M. Myerscough [1992] - Analysis of Propagating Patterns in a Chemotaxis system, Bull. Mat. Biol. **54** (1), 97-99.
- G. Nicolis - I. Prigogine [1977] - Self Organization in Non-Equilibrium Systems, J. Wiley, USA.
- O. Neugebauer [1969] - *The Exact Sciences in Antiquity*, Dover, USA.
- Amy Novick-Cohen - L. A. Segel [1984] - Nonlinear Aspects of the Cahn-Hilliard Equation, Physica **10 D**, 277-298.
- A. Okubo [1980] - *Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models*, Springer-Verlag, USA.
- A. Okubo [1986] - Dynamical Aspects of Animal Grouping: Swarms, Schools, Flocks and Herds, Adv. Biophys., **22**, 1-94.

- R. E. O'Malley [1974] - Introduction to Singular Perturbation, Academic Press, USA.
- R. E. O'Malley [1988] - On Nonlinear Singularly Perturbed Initial Value Problems, SIAM Rev. **30**, 193-212.
- G. F. Oster - J.D. Murray [1989] - Pattern Formation Models and Developmental Constraints, J. Exp. Zool **251**, 186-202.
- H. G. Othmer - S. R. Dunbar - W. Alt [1988] - Models of Dispersal in Biological Systems, J. Math. Biol., **26**, 263-298.
- L. V. Ovsiannikov [1982] - *Group Analysis of Differential Equations*, Acad. P., USA.
- M. Polanyi [1987] - The Tacit Dimension, Anchor Books, USA.
- A. S. Perelson [1980] - Mathematical Immunology, *in* Segel [1980], 365-438.
- I. Prigogine [1980] - From Being to Becoming, W. Freeman, USA.
- I. Prigogine - I. Stengers [1984] - A Nova Aliança, Editora UnB, Brasília.
- W. Pritchard [1973] - Scaling in the Animal Kingdom, Bull. Math. Biol. **55**, 111-129.
- C. Reid [1970] - *Hilbert*, Springer-Verlag, USA.
- D. Ruelle - F. Takens [1971] - On the Nature of Turbulence, Comm. Math. Phys., **20**, 167.
- Th. C. Schelling [1978] - *Micromotives and Macrobehavior*, W. W. Norton, USA.
- K. Schmidt - Nielsen [1984] - *Scaling*, Cambridge U. P., Cambridge.
- E. Schroedinger [1946] - *What is Life? The Physical Aspect of the Living Cell*, Cambridge U. P. .
- E. F. Schumacher [1973] - *Small is Beautiful: Economics as if People Mattered*, Harper, USA.

- L. I. Sedov [1975] - *Mecanique de Milleux Continus 2 Vol*, MIR, Moscou.
- L. A. Segel - J.L. Jackson [1972] - Dissipative Structure: An Explanation and an Ecological Example, *J. Th. Biol*, **37**, 545-559.
- L. A. Segel - S. A. Levin [1976] - Application of Nonlinear Stability Theory to the Study of the Effects of Diufusion on Predator-Prey Interactions, *in AIP Conf. Proc. No. 27*, editor R. Piccirelli, pg. 123-152.
- L. A. Segel Ed. [1980] - *Mathematical Models in Molecular and Cellular Biology*, Cambridge U.P., U.K..
- L. A. Segel - A. S. Perelson [1989] - Shape Space: An Approach to the Evaluation of Cross-Reactivity Effects, Stability and Controllability in the Immune System, *Immunl. Lett.* **22**, 91-99.
- L. A. Segel [1988] - On the Validity of the Steady State Assumption if Enzyme Kinetics, *Bull. Math. Biol.* **50**, 579-593.
- L. A. Segel - M. Slemrod [1990] - The Quasi-Steady State Assumption: A Case Study in Perturbation, Preprint.
- L. A. Segel - A. S. Perelson [1989] - Computations in Shape Space: A New Approach to Immune Network Theory, *in Theoretical Immunology II*, Ed A. S. Perelson, Addison-Wesley.
- L. A. Segel - A.S. Perelson [1990] - Some Reflections on Memory in Shape Space, *in H. Atlan editor - Theoretical Immune Networks*, Springer, Berlin.
- Nanako Shigesada [1990] - On the Spatial Distributions of Dispersing Animals *in Lectures in Applied Math.* edited by L. Ricciardi, Manchester U.P., U.K. pg. 170-205.
- C. P. Snow [1969] - *The Two Cultures*, Cambridge U. P., U.K..
- SWARM [1992] - Simulation System Focuses on Roots of Complexity, *Bulletin of SFI* **7**, 28-29.

- R. Thom [1986] - *Organs and Tools: A Common Theory of Morphogenesis*, in Casti-Karlqvist [1986]
- C. J. Thompson [1972] - *Mathematical Statistical Mechanics*, Macmillan Co., USA.
- N. Tinbergen [1974] - *The Study of Instinct*, Oxford U. P., USA.
- T. Toffoli N. Margulis [1991] - Programmable Matter: Concepts and Realization, *Physica D* **47**, 263-272.
- V. A. Trenogin [1970] - The Development and Applications of the Asymptotic Method of Lyusternik and Vishik, *Russian Math. Surveys* **25**, 119-156.
- A. M. Turing [1952] - The Chemical Basis of Morphogenesis, *Phil. Tr. R. Soc. London B* **237**, 37-73.
- J. J. Tyson - J. P. Keener [1988] - Singular Perturbation Theory of Travelling Waves in Excitable Media, *Physica D* **32**, 327-361.
- F. J. Varela - A. Coutinho - B. Dupire - N. N. Vaz [1983] - Cognitive Networks: Immune, Neural and Otherwise, in *Theoretical Immunology II*, A. S. Perelson Ed., 359-375, Addison-Wesley, USA.
- A. B. Vasileva [1976] - The Development of the Theory of Ordinary Differential Equations with a Small Parameter, *Russian Math. Surveys* **31**, 109-131.
- G. Y. Vichniac [1984] - Simulating Physics with Cellular Automata *Physica* **10 D**, 96-116.
- M. I. Vishik - L. A. Lyusternik [1962] - Regular Degeneration and Boundary Layer for Linear Differential Equations with Small Parameter, *Am. Math. Soc. Transl.* **20**, 239-364.
- W. C. Waterhouse [1982] - Review, *Bull. Am. Math. Soc.*, **7**, 634-638.
- B. J. West - A.L. Goldberger [1987] - Physiology in Fractal Dimensions, *Am. Sci.* **75**, 354-365.

- B. West - V. Bhargava - A. L. Golderberger [1987] - Beyond the Principle of Similitude, *J. Appl. Physics* **60**, 1089-1097.
- E. O. Wilson [1987] - *The Insect Society*, Harv. U. P., Cambridge.
- A. T. Winfree [1987] - *When Time Breaks Down*, Princeton, U.P., USA.
- E. O. Wilson [1977] - *Sociobiology: The New Syntheses*, Harv. U. P., Cambridge.
- S. Wolfram [1984] - Cellular Automata as Models for Complexity, *Nature* **311** (4), 419-424.
- S. Wolfram [1984] - Computer Software in Science and Mathematics, *Sci. Am.*, September, 140-151.
- S. Wolfram [1986] - Approaches to Complexity Engineering, *Physica* **22 D**, 385-399.
- J. H. Woodger [1937] - *The Axiomatic Method in Biology*, Londres, U.K..
- V. S. Zykov [1987] - *Simulation of Wave Processes in Excitable Media*, Manchester U. P., U. K.

“Demais filho meu atenta, não há limite para fazer livros, e o muito estudar é enfado da carne”. Eclesiastes 12:12.