

**Universidade Estadual de Campinas**

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

**Dissertação de Mestrado**

**DISPERSÃO DE POLUENTES NUM TRECHO URBANO  
DO RIO PARAGUAI**

Por

**Anderson Dias Lima**

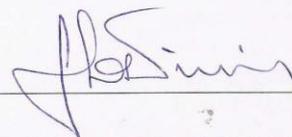
Mestrado Profissional em Matemática – Campinas – SP

**Orientador: Prof. Dr. Geraldo Lúcio Diniz**

## DISPERSÃO DE POLUENTES NUM TRECHO URBANO DO RIO PARAGUAI

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Anderson Dias Lima** e aprovada pela Comissão Julgadora

Campinas, 28 abril / 2010



Prof. Dr. Geraldo Lúcio Diniz  
Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. João Frederico C. A. Meyer – UNICAMP

Profa. Dr(a). Rosane Ferreira de Oliveira – UFRRJ

Profa. Dr(a). Vera Lúcia da Rocha Lopes – UNICAMP (suplente).

Profa. Dr(a). Mariângela Amêndola – UNICAMP (suplente).

Prof. Dr. Geraldo Lúcio Diniz – UFMT

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**  
Bibliotecária: Crislene Queiroz Custódio – CRB8 / 7966

Lima, Anderson Dias

L628d Dispersão de poluentes num trecho urbano do rio Paraguai / Anderson  
Dias Lima – Campinas, [S.P. : s.n.], 2010.

Orientador : Geraldo Lúcio Diniz

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Estadual de  
Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Dispersão de poluentes. 2. Equação difusão-advecção. 3. Método  
dos elementos finitos. I. Diniz, Geraldo Lúcio . II. Universidade Estadual  
de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação  
Científica. III. Título.

Título em inglês: Pollutant dispersion in an urban part of the Paraguai river.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Polluant dispersion. 2. Diffusion advection equation. 3. Finite  
element method.

Área de concentração: Biomatemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Geraldo Lúcio Diniz (UFMT)  
Prof. Dr. João Frederico C. A. Meyer (IMECC-Unicamp)  
Profa. Dra. Rosane Ferreira de Oliveira (UFRRJ)

Data da defesa: 04/03/2010

Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática

**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 04 de março de 2010 e  
aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



---

**Prof. (a). Dr (a). GERALDO LUCIO DINIZ**



---

**Prof. (a). Dr (a). ROSANE FERREIRA DE OLIVEIRA**



---

**Prof. (a). Dr (a). JOÃO FREDERICO DA COSTA AZEVEDO MEYER**

## RESUMO

Neste trabalho é estudado um problema de dispersão de poluentes num trecho do rio Paraguai, na cidade de Cáceres, onde desemboca o córrego Sangradouro. Feita a modelagem do problema para um sistema bi-dimensional, é obtida a formulação variacional, introduzindo uma solução denominada solução fraca, para a qual se tem demonstrada a existência e unicidade de solução. Em seguida, são definidos os processos de aproximação da solução fraca, com a discretização espacial (via método de Galerkin) e temporal (via método de Cranck-Nicolson). Por fim, são apresentadas algumas simulações de cenários para teste do código numérico, implementado em ambiente MATLAB®.

**Palavras-chave:** dispersão de poluentes, equação de difusão-advecção, método dos elementos finitos.

## **ABSTRACT**

In this thesis, a problem of pollutant dispersion in an urban part of the Paraguay River is presented. The studied part of the river is in the city of Caceres-MT, Brazil, where the Sangradouro creek flows. The mathematical model is made for a bi-dimensional system, and the weak formulation of the problem is developed, for which existence and uniqueness of solution are obtained. Furthermore, the approximations of weak solution by the Galerkin scheme, for spatial discretization, and Crank-Nicolson scheme, for the time discretization are defined. Finally, some simulations of scenarios are presented in order to test the numerical code which was implemented in the MATLAB<sup>®</sup> environment.

## Sumário

RESUMO .....	iv
ABSTRACT .....	v
Lista de Figuras .....	vii
Lista de Tabelas .....	viii
INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO 1 .....	3
O PROBLEMA E SUA MODELAGEM .....	3
CAPÍTULO 2 .....	12
2.1 FORMULAÇÃO VARIACIONAL. ....	12
CAPÍTULO 3 .....	20
RESULTADOS, ANÁLISE E DISCUSSÃO .....	20
3.1 INTRODUÇÃO .....	20
3.2 CENÁRIOS: .....	21
3.3 CONCLUSÕES: .....	28
3.4 TRABALHOS FUTUROS: .....	29
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS: .....	31
APÊNDICE .....	33

## Lista de Figuras

Figura 1: Detalhe do deságue do córrego Sangradouro no rio Paraguai .....	4
Figura 2: Localização do deságue do córrego Sangradouro no rio Paraguai. ....	4
Figura 3: Delimitação do domínio.....	10
Figura 4: Simplificação do domínio. ....	11
Figura 6: Malha sobre o domínio com 1000 nós.....	19
Figura 5: Pirâmide dos triângulos inferiores e superiores. ....	18
Figura 7: Indicação dos nós para os quais serão apresentados o resultado do processo evolutivo. .....	20
Figura 8: Cenário 1 - distribuição da concentração em 4 instantes de tempo. ....	22
Figura 9: Cenário 1- concentração de esgoto ao longo do tempo em 4 nós. ....	23
Figura 10: Cenário 2 - distribuição da concentração em 4 instantes de tempo. ....	24
Figura 11: Cenário 2- concentração de esgoto ao longo do tempo em 4 nós. ....	24
Figura 12: Cenário 3 - distribuição da concentração em 4 instantes de tempo. ....	25
Figura 13: Cenário 3 - concentração de esgoto ao longo do tempo em 4 nós. ....	26
Figura 14: Cenário 4 - distribuição da concentração em 4 instantes de tempo. ....	27
Figura 15: Cenário 4 - concentração de esgoto ao longo do tempo em 4 nós. ....	27

## **Lista de Tabelas**

Tabela 1: Parâmetros utilizados na simulação do cenário 1.....	21
--	----

## INTRODUÇÃO

São perceptíveis, através de estudos ocorridos nos últimos tempos, as mudanças significativas que vêm acontecendo no globo terrestre. O desequilíbrio desse sistema natural acarreta a necessidade de ações para impedir um desenvolvimento predatório.

A rapidez com que tudo isso vem ocorrendo, tem levado a uma reflexão, a nível mundial, no sentido da necessidade de novos padrões de desenvolvimento, em que não haja uma destruição progressiva num ritmo vertiginoso. O aumento na taxa de urbanização, frente à falta de cuidado ambiental e planejamento sustentável, tornaram as grandes cidades espaços de degradação social e ambiental, contribuindo assim para aumento nos níveis de poluição da água, do ar e do solo (Rebouças, 1997).

A água é um dos recursos vitais para os seres vivos, desempenhando funções de extrema importância na qualidade de vida. O seu consumo aumenta de acordo com o desenvolvimento social e econômico. Desta forma, a expansão industrial e urbana, bem como o avanço no desenvolvimento da agricultura, leva a um crescimento no consumo de água.

Paralelo a preocupação em relação ao aumento do consumo da água, o seu consumo passa a ser motivo de cuidado por causa da poluição, quando, em especial nas áreas de grandes concentrações urbanas torna-se carregada de matéria orgânica, nutrientes e microrganismos.

As águas residuais e esgotos são lançados nos rios, lagos, muitas vezes sem tratamentos prévios. A contaminação dos rios por esgoto é um problema preocupante em nossa sociedade.

Normalmente, o rio é habitado por muitos tipos de bactérias, assim como por peixes e outros tipos da biota. Dentre estes, as bactérias desempenham um papel importante nos rios, são elas que fazem a limpeza (autodepuração) do rio, ao alimentar-se de matéria orgânica.

Contudo, quando o rio recebe esgoto, ele passa a conter outros tipos de bactérias que não fazem parte do meio ambiente aquático, que podem ou não trazer doenças às pessoas que beberem ou tiverem contato com esta água. Um grupo importante de bactérias a serem consideradas são as bactérias coliformes que vivem no interior do nosso intestino, auxiliando a digestão. Quando os rios recebem esgoto sem tratamento, recebem coliformes fecais, que podem ser provenientes de pessoas doentes transmitindo, assim, doença para os que ingerirem a água contaminada com estes coliformes fecais (Alegria, 2006).

Visões mais amplas permitem compreender a evolução das componentes ambientais e equacionar, quer as inter-relações entre as diferentes formas e agentes da sua degradação, quer as conseqüências da implementação de projetos de uso sustentável nos ecossistemas.

Assim, quanto maior for o esforço no sentido da preservação dos recursos hídricos, de forma geral e, em específico, de um rio, melhor e mais barato será o tratamento deste valioso recurso. É no intuito de contribuir para um desenvolvimento não destrutivo, ou mesmo na preservação da água, que se propõe um estudo sobre a dispersão de esgoto num trecho urbano do rio Paraguai, através da modelagem e análise, de modo adequar os modelos matemáticos ao fenômeno de forma mais realista.

No primeiro capítulo, é apresentado o problema e sua modelagem na formulação clássica. Em seguida, no segundo capítulo, é feita a formulação variacional, assim como as discretizações (espacial e temporal) do problema em sua formulação fraca. Por fim, no terceiro e último capítulo, são apresentados os resultados para algumas simulações de cenários para teste do código numérico.

## **CAPÍTULO 1**

### **O PROBLEMA E SUA MODELAGEM**

#### **1.1 INTRODUÇÃO**

O trabalho proposto consiste em estudar como se dá a dispersão de poluentes provenientes do córrego Sangradouro num trecho do rio Paraguai na cidade de Cáceres-MT.

Na figura 1, está detalhada uma imagem do deságue do córrego Sangradouro no rio Paraguai e, na figura 2, em seguida, é possível localizar melhor este deságue na cidade de Cáceres-MT.



Cáceres foi fundada em 6 de outubro de 1778 pelo Tenente de Dragões Antônio Pinto do Rego e Carvalho, por ordem do Capitão-General Luiz de Albuquerque de Mello Pereira e Cáceres, 4º Governador de Mato Grosso (Pref. Municipal de Cáceres, 2008).

Os motivos da fundação do povoado foram os seguintes: a fertilidade do solo regado de abundantes águas; a necessidade de defesa e incremento da fronteira sudoeste de Mato Grosso; comunicação entre Vila Bela da Santíssima Trindade e Cuiabá e, pelo Rio Paraguai, com São Paulo (Ibidem, 2008).

A navegação pelo Rio Paraguai desenvolveu o comércio com Corumbá-MS e outras praças, e o incremento das atividades agropecuárias e extrativistas fez surgirem os estabelecimentos industriais representados pelas usinas de açúcar e as charqueadas de Descalvados e Barranco Vermelho, de grande expressão em suas épocas (Ibidem, 2008).

Nos últimos anos, Cáceres procurou estruturar-se como importante porto fluvial no contexto mato-grossense, incorporando-se à política de integração Latino-Americana, buscando a implantação do sistema de transporte intermodal, e a ligação por rodovia com a Bolívia e o Chile, conseqüentemente, levando uma saída para o Pacífico, evidenciando-se como grande opção para profundas transformações, não só para sua economia, como para Mato Grosso (Ibidem, 2008).

O município de Cáceres volta também as suas ações para o turismo, pois se encontra situada numa das regiões mais privilegiadas do Pantanal mato-grossense, visto que ostenta uma das maiores potencialidades turísticas do Estado, ou seja, a grandiosidade e a beleza do Rio Paraguai e seus afluentes.

No dia 20 de junho de 2007, o então prefeito, Ricardo Henry, apresentou um diagnóstico para a construção de um plano diretor, ou seja, a cidade tinha até então um crescimento desordenado (Ibidem, 2008).

A cidade de Cáceres está situada nas coordenadas: Latitude 16°13'42''S e Longitude 57°40'51''W, tem uma altitude de 118,00m. O clima predominante é tropical, com temperatura média 25,2°C, a precipitação pluviométrica anual é 1348,3mm, cujo regime de chuvas é de Novembro a Março, a média anual da umidade relativa é 80,4% (Ibidem, 2008).

Seu relevo é predominantemente plano e/ou levemente ondulado à direita do Rio Paraguai, com topografia predominante acidentada à esquerda e a presença de região montanhosa em cordilheiras com escarpas. Ao sul apresenta extensa área de planície pantanosa (Ibidem, 2008).

A cidade encontra-se na bacia hidrográfica do Rio Paraguai e seus principais cursos d'água são os rios: Paraguai e seus afluentes Jauru, Sepotuba e Cabaçal. O grande potencial da cidade é a possibilidade de irrigação, com exceção da sub-região do Limão, a qual possui recursos hídricos mais escassos (Ibidem, 2008).

A vegetação é constituída por 30% de cerrado, 20% de floresta e 50% de pantanal (Ibidem, 2008).

De acordo com a Prefeitura Municipal de Cáceres (Ibidem, 2008), o solo é constituído por:

A - Principais classes predominantes: podzólicos latossolos, areias quartzosas, litólicos, plintossolos e planossolos

B - Aptidão agrícola das terras: arroz, milho, banana, feijão, algodão, seringueira, soja, mandioca, café, pastagens e outras.

A população urbana é de 66457 hab., e a rural é de 19400 hab., com densidade demográfica de, aproximadamente, 3,47 hab/km<sup>2</sup> (Ibidem, 2008).

A apresentação destes dados serve para indicar geo-político-econômicamente a área de estudo, de modo a justificar a escolha do tema.

## **1.2 A MODELAGEM**

O modelo que representa um problema de dispersão de poluentes em um rio pode ser unidimensional, bidimensional ou tridimensional como descrito em (Kachiashvili e Melikdhanian, 2006). Como o interesse deste trabalho é a dispersão no trecho do rio e, devido a relação entre as dimensões do trecho e sua baixa profundidade, será utilizado um modelo bidimensional para descrever o problema.

Com diversos objetivos, se tem estudado a dispersão de poluentes. Determinar fontes de poluição é muito importante, por exemplo, para resolver problemas em diversos setores de engenharia, embora não seja sua única aplicação (El Badia e Hamdi, 2007).

Este trabalho tem o objetivo de estudar a dispersão de esgoto, para possibilitar a tomada de decisão, que resultem em medidas para ajudar na preservação dos recursos hídricos e, assim, na melhoria da qualidade do meio ambiente.

Em alguns estudos, a equação de advecção-difusão é considerada estática, sendo analisada momentaneamente para determinação e medição da fonte poluidora (Hamdi 2007).

Frequentemente, são utilizados softwares para análises numéricas e posterior apresentação de resultados, como em Kachiashvili e Melikdhanian (2006).

Neste trabalho, serão estudados os fenômenos de difusão efetiva, transporte advectivo, decaimento e fonte poluidora.

-Difusão Efetiva: será considerada aqui difusão efetiva no sentido de (OKUBO, 1980).

- Advecção: transporte realizado pelo meio condutor.

- Decaimento: degradação dos poluentes.

- Fonte: ponto de descarga dos efluentes.

Nesta primeira abordagem, a fonte de efluentes a ser considerada será única (córrego Sangradouro).

Usualmente, para equações evolutivas, são dadas as condições inicial e de contorno do problema. Por hipótese, será considerado, inicialmente ( $t = 0$ ) que a poluição no trecho onde o córrego desemboca no rio Paraguai é nula.

Denotando por  $C(x,y,t)$  a concentração partes por milhar (ppm) de esgoto no ponto  $(x,y)$  no instante  $t$ , o modelo pode ser descrito por:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\text{difusão} - \text{advecção} - \text{decaimento} + \text{fonte} \quad (\text{Diniz, 2003})$$

Em termos de modelagem clássica destes fenômenos, se tem que:

$$\begin{aligned} \{difusão\} &= \text{div}[-\alpha \nabla C] && \text{(cf.Okubo (1980));} \\ \{transporte\} &= \text{div}[\vec{V}C] && \text{(cf.Edelstein - Keshet (1988));} \\ \{decaimento\} &= \sigma C && \text{(cf.Bassanezi (2002))} \\ \{fonte\} &= f \end{aligned}$$

Portanto, a equação evolutiva que modela a concentração de esgoto num ponto  $(x,y)$  do rio em um determinado instante  $t$ , é dada por:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\text{div}[-\alpha \nabla C] - \text{div}[\vec{V}C] - \sigma C + f, \quad (1.1)$$

sendo

$$C = C(x, y, t), (x, y) \in \Omega \text{ e } t \in (0, T]$$

$\alpha$  a constante de difusibilidade efetiva no meio aquático;

$\vec{V}$  o campo de velocidades no meio aquático;

$\sigma$  a taxa de decaimento global no meio aquático;

e  $f$  será dada pelas condições de descarga de efluentes para o domínio  $\Omega$ , cuja fronteira será denotada por  $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ .

As condições de contorno serão do tipo

$$\frac{\partial C}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_0} = 0; \quad \alpha \frac{\partial C}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_1} = -\beta_1(x, y)C; \quad \frac{\partial C}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_2} = 0; \quad \alpha \frac{\partial C}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_3} = k; \quad C \Big|_{\Gamma_4} = 0; \quad (1.2)$$

sendo  $\eta$  o vetor unitário normal à parte externa da fronteira  $\partial\Omega$ , que modela as interfaces do trecho do rio,  $\Gamma_1$  é a jusante do trecho considerado,  $\Gamma_3$  é a interface do ponto de deságüe do córrego Sangradouro com o rio Paraguai,  $\Gamma_4$  é a montante do rio,  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_2$  são, respectivamente, as

margens direita e esquerda do rio. A constante  $\beta_1$  é a permeabilidade do rio e  $k$  é a carga de despejo de esgoto no rio, considerada como constante, nesta primeira abordagem.

Na figura 3, vê-se a delimitação do domínio que é o trecho do rio onde será modelada a dispersão de esgoto. Na figura 4, se pode observar o domínio simplificado para, posteriormente, ser feita a sua discretização.



Figura 3: Delimitação do domínio.

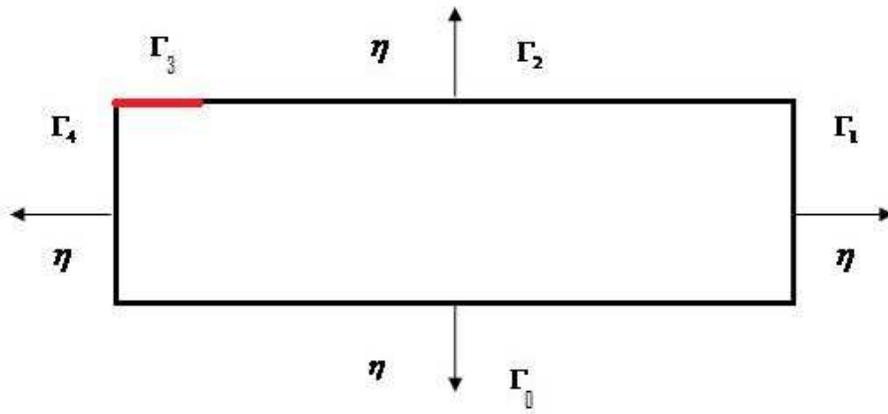


Figura 4: Simplificação do domínio.

## CAPÍTULO 2

### FORMULAÇÃO VARIACIONAL E DISCRETIZAÇÃO

Neste capítulo será proposta a formulação variacional, introduzindo uma solução denominada solução fraca, ou seja, introduzir as derivadas no sentido das distribuições, que no campo variacional, possibilitam obter os resultados de existência e unicidade de solução, a ser procurada em um espaço métrico conveniente (Diniz, 2003).

#### 2.1 FORMULAÇÃO VARIACIONAL.

Para obter a formulação variacional, se faz os seguintes procedimentos:

- 1) Multiplicar ambos os termos da equação (1.1) por uma função teste não nula  $v$  pertencente ao seguinte espaço:  $V = \{ (x, y) \in L^2(x, y) : \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(\Omega) \} \subset H^1(\Omega)$ , o que produz a seguinte equação

$$\frac{\partial C}{\partial t} v = -(\operatorname{div}(-\alpha \nabla C))v - \operatorname{div}(\vec{V}C)v - \sigma C v + f v$$

2) Integrar no sentido de Lebesgue, que resulta em

$$\int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} v d\mu = \int_{\Omega} -(\operatorname{div}(-\alpha \nabla C)) v d\mu - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{V}C) v d\mu - \int_{\Omega} \sigma C v d\mu + \int_{\Omega} f v d\mu. \quad (2.1)$$

No meio aquático o coeficiente de difusão tem sido considerado como constante (Diniz, 2003). Assim a equação (2.1) se torna

$$\int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} v d\mu = \alpha \int_{\Omega} \Delta C v d\mu - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{V}C) v d\mu - \sigma \int_{\Omega} C v d\mu + \int_{\Omega} f v d\mu. \quad (2.2)$$

Considerando que o modelo escolhido é bidimensional e que o campo vetorial,  $V=(V_x, V_y)$  que descreve a velocidade de transporte no meio aquático, é a velocidade do rio, sendo  $\vec{V}_x$  a velocidade do rio no sentido longitudinal do rio Paraguai, aqui considerada constante, e  $\vec{V}_y$  constante em  $\Gamma_3$  que é a velocidade com que o córrego chega ao rio Paraguai, e  $\vec{V}_y$  igual a zero no restante do domínio. Logo a equação (2.2) se torna:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} v d\mu - \alpha \int_{\Omega} \Delta C v d\mu + V_x \int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial x} v d\mu + V_y \int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial y} v d\mu + \sigma \int_{\Omega} C v d\mu = \int_{\Omega} f v d\mu$$

Usando a primeira identidade de Green (Iório Jr. e Iório, 1988), segue-se que:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} v d\mu + \alpha \int_{\Omega} (\nabla C \cdot \nabla v) d\mu - \alpha \int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial \eta} v d\gamma + V_x \int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial x} v d\mu + V_y \int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial y} v d\mu + \sigma \int_{\Omega} C v d\mu = \int_{\Omega} f v d\mu$$

Usando as condições de contorno que são

$$\left. \frac{\partial C}{\partial \eta} \right|_{\Gamma_0} = 0; \quad \alpha \left. \frac{\partial C}{\partial \eta} \right|_{\Gamma_1} = -\beta_1(x, y)C; \quad \left. \frac{\partial C}{\partial \eta} \right|_{\Gamma_2} = 0; \quad \alpha \left. \frac{\partial C}{\partial \eta} \right|_{\Gamma_3} = k; \quad C|_{\Gamma_4} = 0;$$

se obtém

$$\int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} v d\mu + \alpha \int_{\Omega} (\nabla C \cdot \nabla v) v d\mu + \int_{\Omega} \beta_1 C + k \tilde{v} d\gamma + V_x \int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial x} v d\mu + V_y \int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial y} v d\mu + \sigma \int_{\Omega} C v d\mu = \int_{\Omega} f v d\mu. \quad (2.3)$$

Na formulação variacional do modelo, é preciso considerar um subespaço conveniente para as funções admissíveis de solução, a saber

$$V = \left\{ v(x, y) \in L^2((0, T], U) : \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(\mathbf{Q}) \right\},$$

onde  $L^2$  é o espaço das funções de quadrado integrável no sentido de Lebesgue, sendo  $U$

definido por

$$U = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \left. \frac{\partial v}{\partial \eta} \right|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_2} = 0 \right\} \subset H^1(\Omega)$$

Usando agora as notações de produto interno dados por

$$(f|g)_{0,\Omega} := \iint_{\Omega} f g d\mu,$$

$$(\vec{f} \parallel \vec{g})_{0;\Omega} := \iint_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{g} d\mu,$$

$$\langle f | g \rangle_{0;\Gamma} := \int_{\Gamma} f g d\gamma,$$

a equação (2.3) torna-se

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial C}{\partial t} | v \right)_{0;\Omega} + \alpha \langle C | \nabla v \rangle_{\sigma;\Omega} + v_x \left( \frac{\partial C}{\partial x} | v \right)_{0;\Omega} + v_y \left( \frac{\partial C}{\partial y} | v \right)_{0;\Omega} + \sigma \langle v \rangle_{\sigma;\Omega} = \\ = -\beta_1 \langle C | v \rangle_{0;\Gamma} - \langle k | v \rangle_{0;\Gamma} + \langle v \rangle_{\sigma;\Omega}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Na equação (2.4) aparecem apenas derivadas de primeira ordem, no sentido de distribuições, tendo, portanto, um aumento da classe de possíveis funções para a solução do problema, em relação à equação (1.1), onde aparecem derivadas de segunda ordem no sentido clássico. Desta forma, se tornam fracas as hipóteses de regularidade da solução.

## 2.2 EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO.

A demonstração de existência e unicidade da solução, para problema semelhante, pode ser encontrada em Diniz (2003).

## 2.3 DISCRETIZAÇÃO DO MODELO.

Na construção de soluções aproximadas para equações diferenciais parciais, em primeiro lugar, é feita a discretização do domínio, através do método dos elementos finitos (discretização

espacial), seguida pela discretização temporal, no caso, a opção foi pelo método de Crank-Nicolson, como em Diniz (2003) e Alegria (2006).

Agora, será considerado o subespaço (das funções teste) para a construção das aproximações da solução  $C(x,y,t)$ , dado por:

$$V_h = \left\{ v_h \in L^2[(0,T];U) : \frac{\partial v_h}{\partial t} \in L^2(\Omega) \right\}$$

Assim, se pode escrever a equação (2.8) na forma:

$$\left( \frac{dC}{dt} | v_h \right)_{0;\Omega} + \left( \frac{\partial C}{\partial t} | v_h \right)_{0;\Omega} = -\beta \langle C_f | v_h \rangle_{\Gamma_3} + \langle f | v_h \rangle_{0;\Omega} \quad (2.11)$$

$$\forall v_h \in V_h, \forall t \in (0,T]$$

sendo  $V_h$  o subespaço de  $V$  gerado pelas  $N_h$  funções  $\varphi_i$  (chamadas de funções base).

Agora, mediante as escolhas feitas anteriormente de  $A_j, A_i$  e  $A_0$ , se obtém a seguinte equação diferencial ordinária

$$\begin{aligned} \left( \frac{dC}{dt} \varphi_j | \varphi_i \right)_{0;\Omega} + \alpha \sum_{j=1}^{N_h} C_j \nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i \rangle_{0;\Omega} + V_x \sum_{j=1}^{N_h} C_j \left( \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right)_{0;\Omega} + V_y \sum_{j=1}^{N_h} C_j \left( \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right)_{0;\Omega} + \dots \\ \dots + \sigma \sum_{j=1}^{N_h} C_j \varphi_j | \varphi_i \rangle_{0;\Omega} = -\beta_1 \langle C | v_h \rangle_{\Gamma_1} - \langle k | v_h \rangle_{\Gamma_3} + \langle f | v_h \rangle_{0;\Omega} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$\forall \varphi_i$  da base de  $V_h$ .

A discretização temporal é feita pelo método de Crank-Nicolson, com diferenças centradas em  $t_n + \frac{\Delta t}{2}$ , fazendo as seguintes aproximações:

$$\frac{dC_j}{dt} \left( t_n + \frac{\Delta t}{2} \right) \cong \frac{C_j^{n+1} - C_j^n}{\Delta t} \quad (2.13)$$

$$C_j \left( t_n + \frac{\Delta t}{2} \right) \cong \frac{C_j^{n+1} + C_j^n}{2} \quad (2.14)$$

onde  $C_j^{n+1} = C_j(t_{n+1})$

Usando (2.13) e (2.14) em (2.12), resulta em:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N_h} \left( \frac{C_j^{n+1} - C_j^n}{\Delta t} \right) \varphi_j | \varphi_i \rangle_{0,\Omega} + \alpha \sum_{j=1}^{N_h} \left( \frac{C_j^{n+1} + C_j^n}{2} \right) \nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i \rangle_{0,\Omega} + V_x \sum_{j=1}^{N_h} \left( \frac{C_j^{n+1} + C_j^n}{2} \right) \left( \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \rangle \right)_{0,\Omega} + \dots \\ & \dots + V_y \sum_{j=1}^{N_h} \left( \frac{C_j^{n+1} + C_j^n}{2} \right) \left( \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \rangle \right)_{0,\Omega} + \sigma \sum_{j=1}^{N_h} \left( \frac{C_j^{n+1} + C_j^n}{2} \right) \varphi_j | \varphi_i \rangle_{0,\Omega} = -\beta_1 \langle C | \varphi_i \rangle_{\Gamma_1} - \langle k | \varphi_i \rangle_{\Gamma_3} + \langle f | \varphi_i \rangle_{0,\Omega} \end{aligned} \quad (2.15)$$

$\forall \varphi_i$  da base de  $V_h$ .

Obtendo assim o sistema linear:

$$AC^{(n+1)} = BC^{(n)} + d^{(n+1/2)}, \text{ dado } C^0, \text{ onde:}$$

A matriz  $A$  é chamada de matriz de rigidez e o vetor resultante das operações

$BC^{(n)} + d^{(n+1/2)}$  para cada instante  $t_n$ , é denominado vetor carga.

A escolha das funções teste  $\varphi_i$  será de elementos finitos triangulares de primeira ordem, que consiste em

1- Construir uma malha (dos Elementos Finitos) sobre o domínio  $\Omega$ , conforme Diniz (2003).

2- A escolha das funções base  $\varphi_i$ , definidas globalmente, são do tipo linear por partes e satisfazendo a seguinte condição:

$$\varphi_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

onde  $(x_j, y_j)$  são as coordenadas do nó  $j$  da malha.

Desta forma se obtém em cada nó da malha, uma função pirâmide que é linear por partes, assumindo o valor 1 no  $j$ -ésimo nó e zero nos demais, conforme mostra a figura 5.

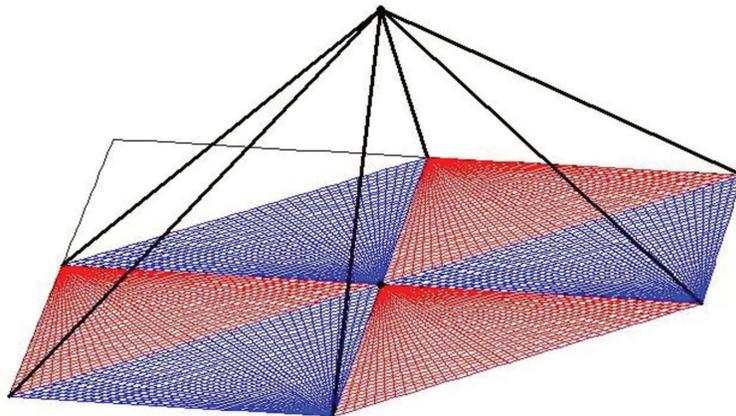


Figura 5: Pirâmide dos triângulos inferiores e superiores.

O gráfico abaixo apresenta como uma malha no domínio estudado com 1000 nós, visto que com os 20451 nós que foram feitos a malha sobre o domínio fica com uma visualização ruim, devido a grande quantidade de nós.

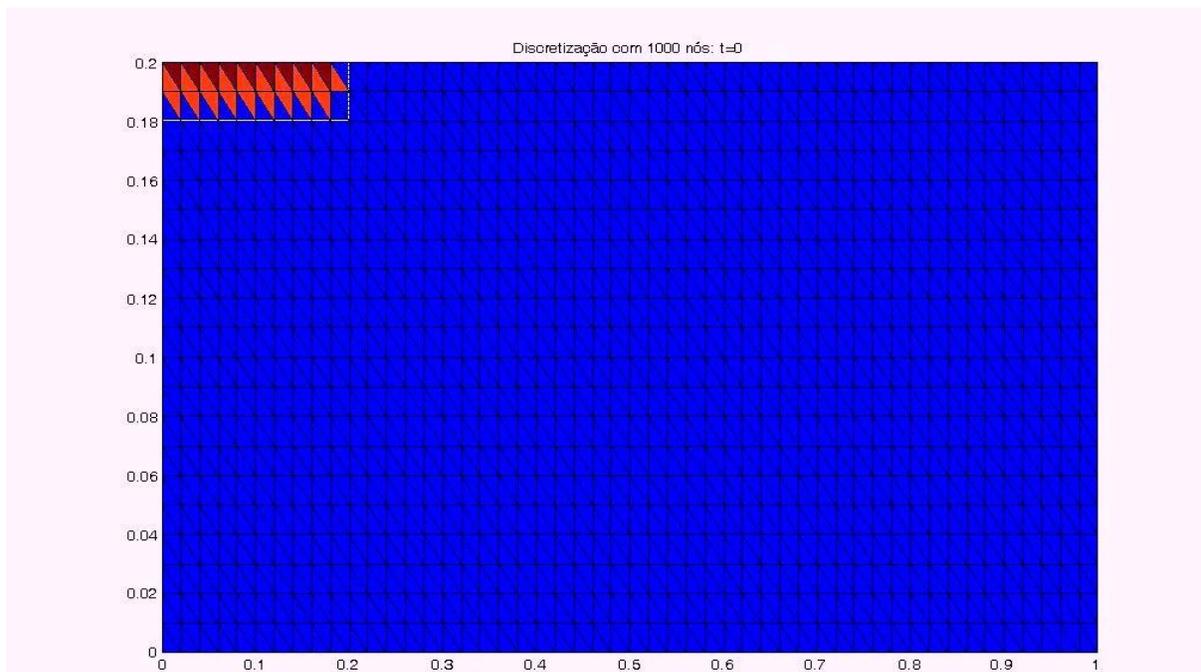


Figura 6: Malha sobre o domínio com 1000 nós.

## CAPÍTULO 3

### RESULTADOS, ANÁLISE E DISCUSSÃO

#### 3.1 INTRODUÇÃO

Será feita, agora, a apresentação dos resultados desta pesquisa, utilizando dados encontrados na bibliografia, se espera encontrar simulações próximas da realidade, com preferência para a análise dos gráficos em duas dimensões por considerar de mais fácil visualização. Serão mostrados dois tipos de gráficos, um deles mostra a pluma de dispersão do esgoto em quatro momentos distintos previamente determinados, e o outro mostra a concentração do esgoto ao longo do tempo em quatro nós distintos do domínio, possibilitando a análise da evolução da concentração do esgoto.

Na figura 6, logo abaixo, se pode ver o posicionamento dos pontos A, B, C e D no domínio. Cada unidade na figura corresponde a 0,1 Km.

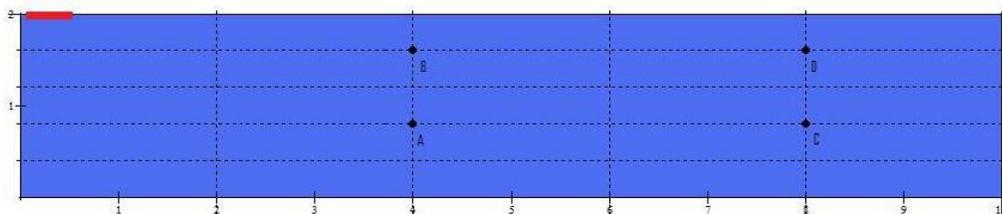


Figura 7: Indicação dos nós para os quais serão apresentados o resultado do processo evolutivo.

Os códigos foram desenvolvidos para utilização no ambiente MATLAB®, devido a sua facilidade e qualidade de apresentação gráfica (Diniz, 2003).

### 3.2 CENÁRIOS:

Serão apresentados quatro cenários, em que os dois primeiros cenários simulam a estação seca e os dois últimos a estação chuvosa, para simular a estação da seca será considerada a velocidade do rio menor do que na estação úmida.

Se optou por alterar a partir do cenário 1, um único parâmetro para formar o cenário 2, tornando possível a análise mais precisa da influência deste parâmetro, tanto para a formação da pluma, quanto para a concentração dos poluentes nos quatro pontos fixos.

Foi feito o mesmo a partir do cenário 3, mudando um único parâmetro, o que possibilita também fazer a análise das influências da taxa de degradação sob a condição de maior velocidade do rio.

Para o primeiro cenário foram utilizados os parâmetros descritos na tabela 1, a seguir.

Tabela 1: Parâmetros utilizados na simulação do cenário 1.

Parâmetro	Valor	Unidade
Coeficiente de difusão ( $\alpha$ )	0,23	km <sup>2</sup> /h
Coeficiente de degradação do esgoto ( $\sigma$ )	0,46	h <sup>-1</sup>
Concentração da carga de esgoto na fonte (k)	0,316	(ppm)
Velocidade do rio no sentido longitudinal do rio Paraguai (Vx)	1,7	km/h
Velocidade com que o córrego chega no rio (Vy)	-0,1	Km/h

Varição de distância no sentido longitudinal do rio ( $\Delta x$ )	0,0025	Km
Varição de distância no sentido transversal do rio ( $\Delta y$ )	0,004	Km
Varição do tempo ( $\Delta t$ )	0,025	H

Os coeficientes de difusão, e de degradação do esgoto foram obtidos em Carreraz e Menéndez (1990), o índice de concentração de esgoto na fonte e as velocidades (na estação da chuva e seca) do rio foram retirados de Rocha (2003), também em Rocha (2003) foi calculada a velocidade do rio Coxipó nas estações seca e chuvosa, esta velocidade é aproximadamente a velocidade dos rios em geral na região, por isto foi utilizado este parâmetro neste trabalho.

A partir destes parâmetros foram obtidos os gráficos das figuras 8 e 9:

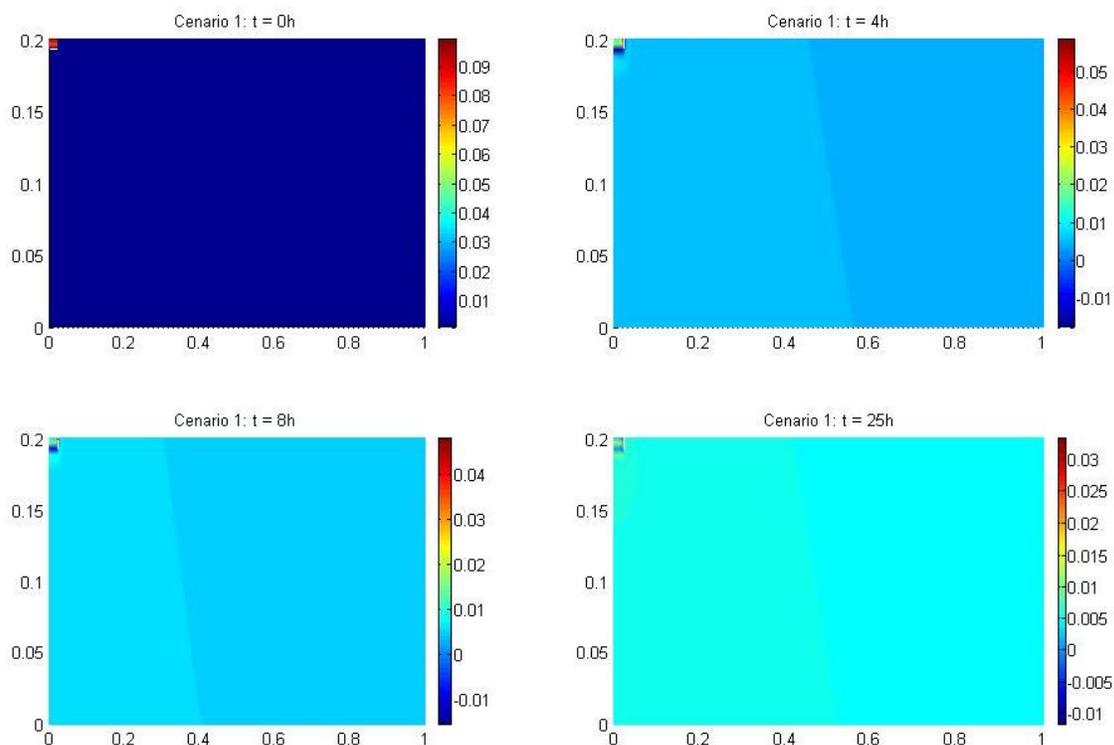


Figura 8: Cenário 1 - distribuição da concentração em 4 instantes de tempo.

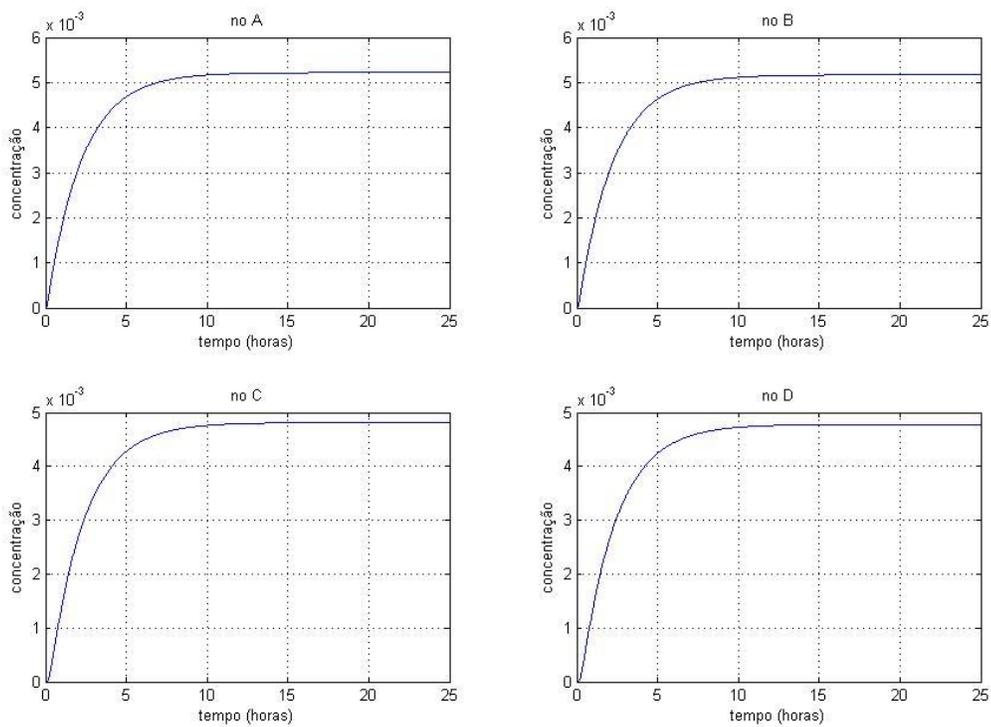


Figura 9: Cenário 1- concentração de esgoto ao longo do tempo em 4 nós.

Para o segundo cenário, se manteve os mesmos parâmetros, exceto o coeficiente de degradação ( $\sigma$ ) que foi reduzido para 0,23 para que se tenha uma idéia do efeito deste parâmetro sobre os resultados. Então, se obteve os gráficos das figuras 10 e 11:

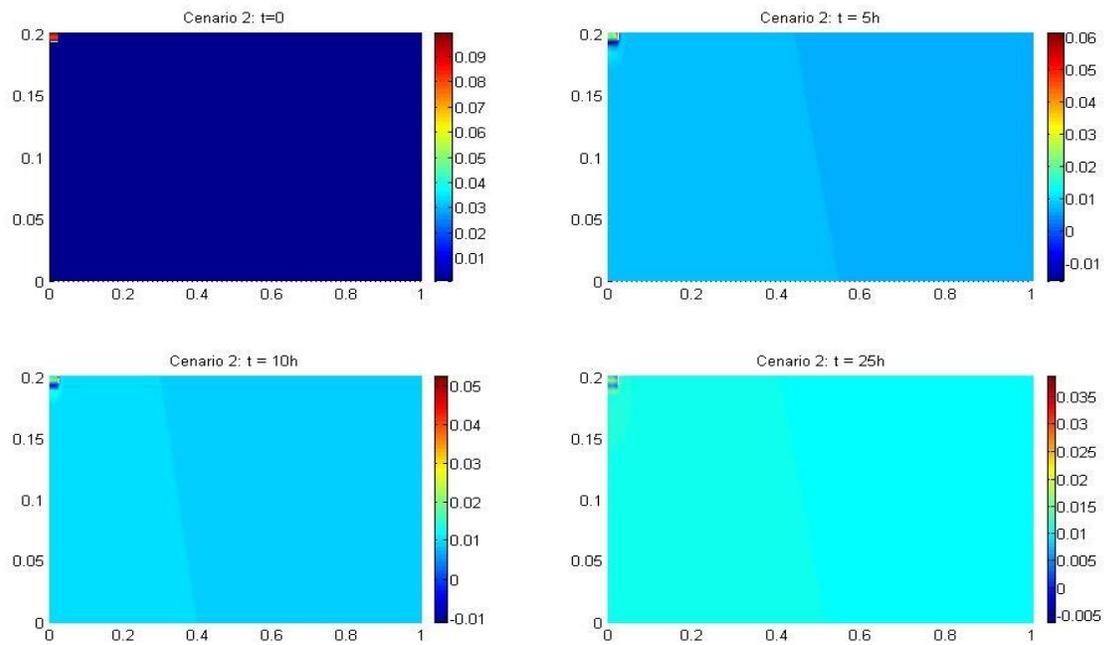


Figura 10: Cenário 2 - distribuição da concentração em 4 instantes de tempo.

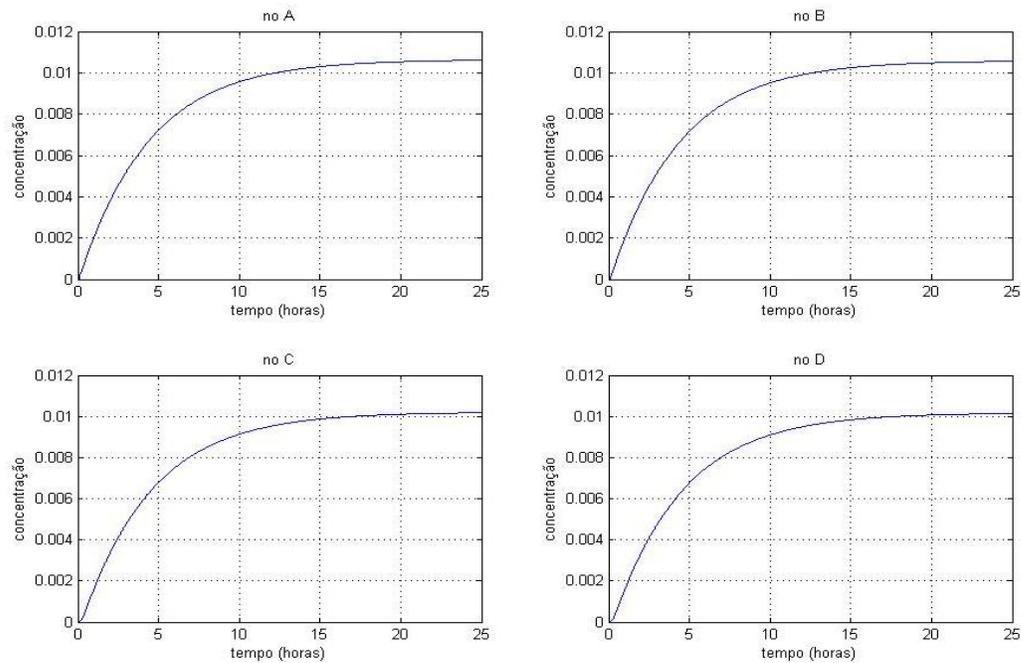
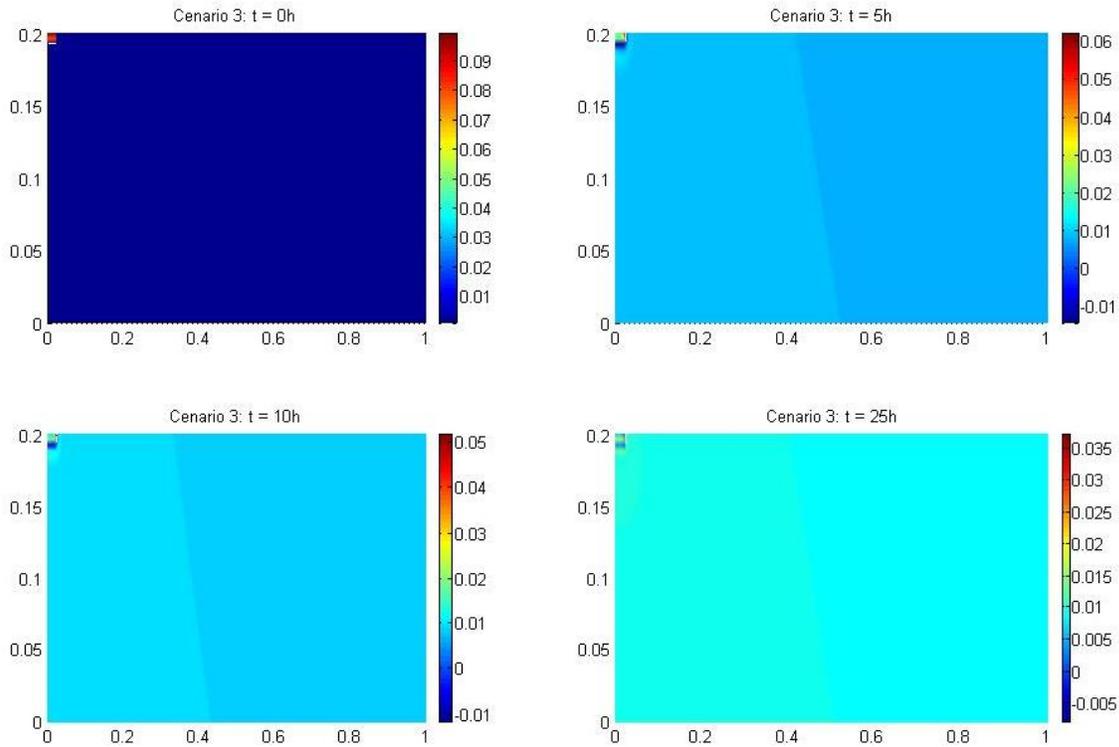


Figura 11: Cenário 2- concentração de esgoto ao longo do tempo em 4 nós.

Para compor o cenário 3, foram mantidos todos os parâmetros do cenário 1 exceto a velocidade do rio, que foi alterado de 1,7km/h para 3km/h simulando desta forma a estação chuvosa. Obtendo os gráficos das figuras 12 e 13.



Figura

12: Cenário 3 - distribuição da concentração em 4 instantes de tempo.

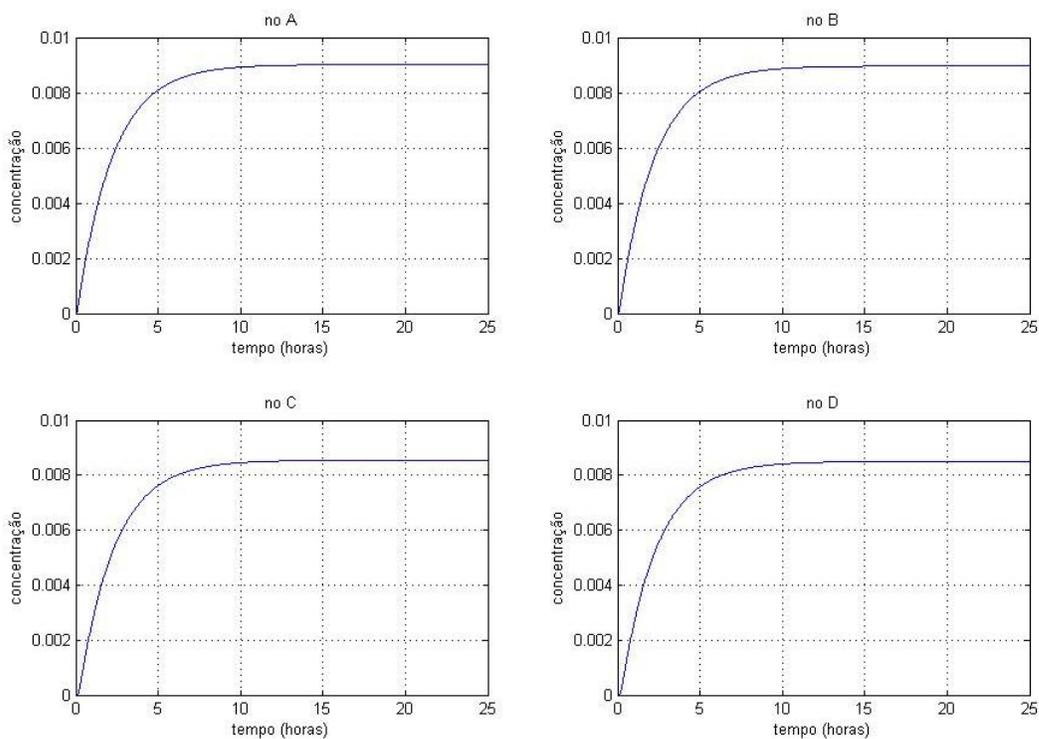


Figura 13: Cenário 3 - concentração de esgoto ao longo do tempo em 4 nós.

Cenário 4, parâmetros iguais ao do cenário 2, exceto velocidade do rio ( $V_r$ ) aumentada para 3km/h, de acordo com o exposto acima, para simular a estação chuvosa, conforme os gráficos das figuras 14 e 15:

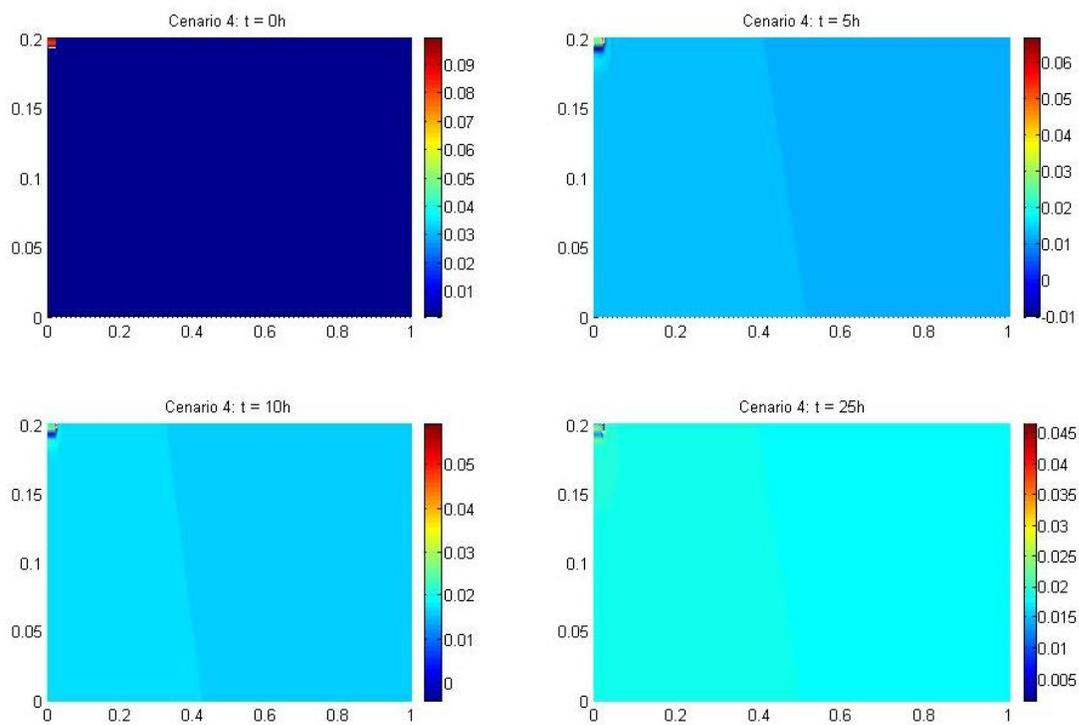


Figura 14: Cenário 4 - distribuição da concentração em 4 instantes de tempo.

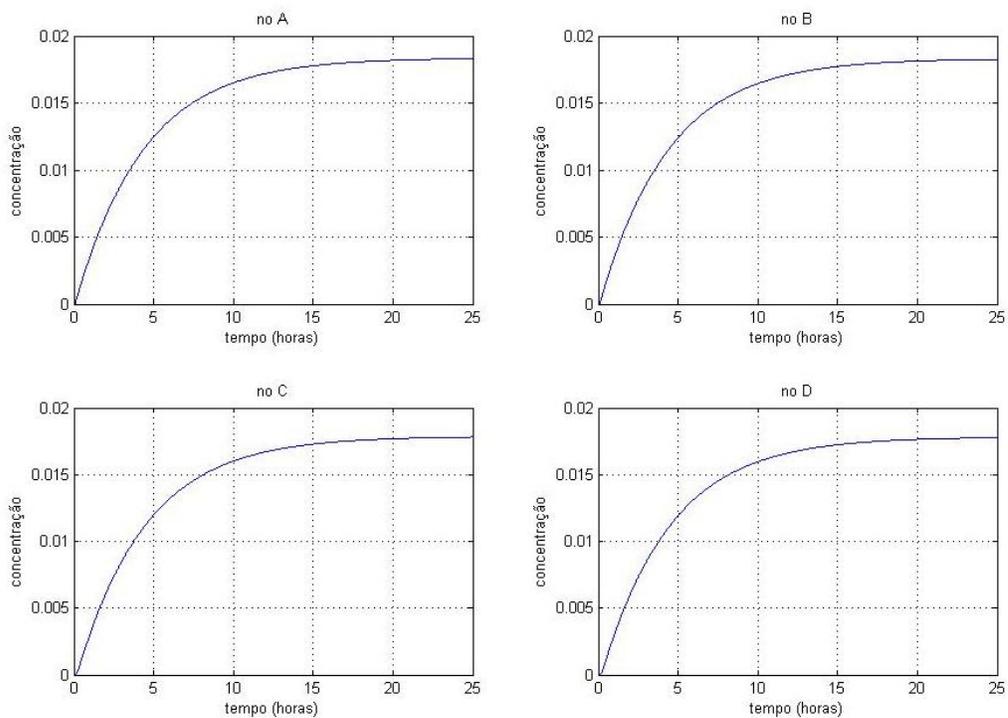


Figura 15: Cenário 4 - concentração de esgoto ao longo do tempo em 4 nós.

### 3.3 CONCLUSÕES:

No cenário 1, pela figura 8, se pode notar que o esgoto se espalha rapidamente sobre o domínio devido sua pequena extensão, mesmo na margem oposta à margem onde o córrego Sangradouro desemboca tem-se concentração de esgoto, não fica claro através do gráfico 8 o aumento da concentração ao longo do tempo. Ao analisar o gráfico 9, não é possível notar diferença entre o tempo em que os nós começam a receber a carga de esgoto devido ao tempo estipulado de 25h, mas é possível perceber que os nós A e B acumulam uma concentração de esgoto maior que os nós C e D, devido a sua maior proximidade em relação ao deságüe do córrego Sangradouro.

No cenário 2, é difícil notar pela figura 10 que com um coeficiente de degradação menor, a concentração de esgoto aumenta, ficando evidente apenas ao analisar os gráficos da concentração de esgoto ao longo do tempo nos nós separados, no nó A por exemplo, que alcançava uma concentração de um pouco mais que 0,006 ppm de esgoto dentro das 25 horas, passa acumular 0,012 ppm de esgoto, a concentração de esgoto que antes se estabilizava com algo em torno de 5 horas, agora só após 20 horas começa a estabilizar.

No cenário 3, com a velocidade do rio maior, não é visível a mudança no gráfico da figura 12, mas ao comparar os gráficos das figuras 8 e 13, que possuem os mesmos parâmetros exceto a velocidade do rio, verificamos que a concentração de esgoto é maior no cenário 3, pois com a maior velocidade do rio, a quantidade de poluentes levada aos nós é maior.

Ao analisar o último cenário através dos gráficos da figura 14, também não é possível notar diferença significativa em relação aos gráficos nos 4 instantes de tempo dos outros cenários, diferença esta que fica clara ao comparar os gráficos dos nós separados na figura 15 com os gráficos dos outros cenários, pois a concentração de esgoto no cenário 4 é maior do que em qualquer um dos outros cenários.

A qualidade gráfica é muito boa, e o código é bem eficiente, levando em consideração que, utilizando um Pentium 4 com 1 giga de ram com 30 Ghz de velocidade de CPU, o programa demorou aproximadamente 210 segundos para fazer 1000 iterações com 20451 nós.

### **3.4 TRABALHOS FUTUROS:**

Ao invés de utilizar funções lineares para construção dos nós, poderão ser utilizados elementos quadráticos ou uma mescla de quadráticos com lineares para a construção dos nós na malha para se eliminar possíveis oscilações numéricas, que não foi o caso do presente trabalho, já que ao analisar o número de Peclet (Brooks e Hughes, 1982; Heinrich *et al.*, 1977; Christie *et al.*, 1976 in Diniz 2003) que avalia a estabilidade do método, verifica-se que não se tem variações numéricas.

O número de Peclet que é dado por:  $\frac{V_i \Delta x_i}{\alpha}$ , sendo:

$V_i$  a componente do termo advectivo na direção  $x_i$

$\Delta x_i$  é o comprimento máximo do intervalo na direção  $x_i$

E  $\alpha$  é o coeficiente de difusão

deve ser menor que 2, nos cenários 1 e 2, o número de Peclet foi aproximadamente 0,02 e nos cenários 3 e 4, foi aproximadamente 0,03.

Obter os parâmetros para compor os cenários através da ferramenta Fuzzy, devido a incertezas dos dados obtidos.

Usar softwares que permitem trabalhar sem a simplificação da área do domínio.

Construir um campo de vetores, ao invés de considerar a velocidade do rio constante em todos os pontos, já que a velocidade do rio no meio é maior do que perto das margens.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

Alegria, S. A. F. 2006 Dispersão de poluentes em um trecho do rio Coxipó: Modelagem e aproximação numérica. Dissertação (Mestrado) Instituto de Ciências Exatas e da Terra. Universidade Federal de Mato Grosso Cuiabá-MT.

Bassanezi, R. C., 2002. Ensino-apredizagem com modelagem matemática. Ed. Contexto, S.Paulo.

Brooks, A. N., T. J. R. Hughes, 1982, Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* - *apud* Diniz, G. L. 2003. Dispersão de poluentes num sistema ar-água: modelagem, aproximação e aplicações. Tese de Doutorado (FEEC-UNICAMP). Campinas: São Paulo.

Carreras, P. E.; Menéndez, A. N. Mathematical simulation of pollutant dispersion. *Ecological Modelling*, 1990.

Diniz, G. L. 2003. Dispersão de poluentes num sistema ar-água: modelagem, aproximação e aplicações. Tese de Doutorado (FEEC-UNICAMP). Campinas: São Paulo.

Edelstein-Keshet, L., 1988. *Mathematical Models in Biology*. Random-House, N. York.

El Badia A. e Hamdi A. 2007. Inverse source problem in an advection–dispersion–reaction system: application to water pollution.

Hamdi A. 2007. *Inverse Problems In Science And Eengineering*.

Iório Jr., R. J. e Iório, V. 1988. *Equações diferenciais parciais: uma introdução*. Rio de Janeiro: IMPA, CNPq.

Kachiashvili K. J. e Melikdhanian D. I 2006 International Journal of Information Technology & Decision Making Vol. 5, No. 2 (2006) 397–417 - Identification Of River Water Excessive Pollution Sources

Okubo, A., 1980. Difusion and Ecological Problems: Mathematical Models. Springer, Berlim.

Pref. Municipal de Cáceres. 2008. <http://www.caceres.mt.gov.br/>. acesso: 11 de abril de 2008.

Rebouças, A. C. 1997. Panoramas da degradação ambiental do ar, da água doce e da terra no Brasil. Academia Brasileira de Ciências (Ed.). R. Janeiro.

ROCHA, J. P. G. Avaliação das ações antrópicas no meio físico a partir dos impactos sedimentológicos na bacia do rio Coxipó. 2003. 129f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Ambiental) - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2003.

## APÊNDICE

Serão apresentados agora os códigos usados para aproximação numérica em ambiente MATLAB®.

Códigos utilizados para fazer os gráficos dos cenários em 4 instantes distintos de tempo.

```
1 %
2 % Aproximacao de um sistema linear para simular a dispersao
3 % de esgoto num dominio retangular horizontal
4 %
5 clear all; t0=clock; %format long;
6 %
7 % parâmetros do modelo
8 %
9 a=0.015; % coef. do termo difusivo
10 sig=1.5e-3; % coef. de degradação
11 Vx= 2.5; % componente advectiva longitudinal
12 Vy= -0.1; % componente advectiva em Gama_3
13 be= 0.1; % permeabilidade de passagem para o dominio
14 Cf= 0.8; % carga de esgoto que entra em Gama_3 do domínio
15 %
16 % parametros do dominio (espaco e tempo)
17 %
18 xmax=1.0; ymax=0.2; % distancia em Km
19 tfinal=1.0; % tempo em horas
20 %
21 % parametros da discretizacao
```

```

22  %
23  nx=400;  % no. de subintervalos em x
24  ny=50;  % no. de subintervalos em y
25  ng3=10;  % no. de nos em Gama_3
26  nnx=nx+1;  % no. de nos na direcao x
27  nny=ny+1;  % no. de nos na direcao y
28  npt=1000  % no. de passos no tempo
29  dx=xmax/nx;  % comprimento do subintervalo na direcao x
30  dy=ymax/ny;  % comprimento do subintervalo na direcao y
31  %
32  % parametros auxiliares da discretizacao
33  %
34  dxy=dx*dy;
35  dxdy=dx/dy;
36  dydx=dy/dx;
37  dt=tfinal/npt;
38  mdt=dt/2;
39  nn=nnx*nny;  % no. total de nos nao-nulos
40  ntr=2*nx*ny;  % no. total de triangulos
41  nty=2*ny;  % no. de triangulos na direcao y
42  %
43  % calculo do no. de Peclet
44  %
45  npec1 = abs(Vx*dx/a);
46  npec2 = abs(Vy*dy/a);
47  %
48  % montagem da malha de elementos finitos
49  %
50  malha=zeros(nn,3);
51  k=0;
52  for i=1:nx;
53      for j=1:nny-1;
54          k=k+1;
55          ind = (i-1)*nny + j;

```

```

56     malha(k,1)=ind;
57     malha(k,2)=ind+nny;
58     malha(k,3)=ind+1;
59     k=k+1;
60     malha(k,1)=ind+nny+1;
61     malha(k,2)=ind+1;
62     malha(k,3)=ind+nny;
63     end;
64 end;
65 %
66 %     montagem da malha de coordenadas dos nos
67 %
68 k=0;
69 for i=1:nx
70     x = (i-1)*dx;
71     for j = 1:nny
72     y = (j-1)*dy;
73     k = k + 1;
74     coord(k,1) = x;
75     coord(k,2) = y;
76     end;
77 end;
78 %
79 %     condição inicial
80 %
81 u0 = zeros(nn,1);
82 for i = nny:nny:ng3*nny
83     u0(i)=0.1;
84     u0(i-1)=0.08;
85 end;
86 %
87 %     submatrizes de rigidez
88 %
89 %     (fi-j)*(fi-i)

```

```

90 %
91 mm=(dxy/24)*[2 1 1; 1 2 1; 1 1 2];
92 %
93 %      alpha * (grad(fi-j) | grad(fi-i) )
94 %
95 mn=[(dx^2+dy^2)/(2*dx*dy) -dydx/2 -dxdy/2; -dydx dydx 0; -dxdy 0 dxdy];
96 %
97 %      [(dfi-j/dx)*fi-i] e [(dfi-j/dy)*fi-i]
98 %      para os triangulos inferiores e superiores
99 %
100 mp_i=(dy/6)*[-1 1 0;-1 1 0;-1 1 0];
101 mp_s=(dy/6)*[ 1 -1 0; 1 -1 0; 1 -1 0];
102 %
103 mq =(dx/6)*[ 1 0 -1; 1 0 -1; 1 0 -1];
104 %
105 %      preparacao dos parametros que independem das coordenadas
106 %
107 crs = mdt*sig;          % coef. (fi-j | fi-i)
108 cgs = mdt*a;           % coef. (grad fi-j | grad fi-i)
109 vpx = mdt*Vx;          % coef. Vx dt/2 (dfi-j/dx | fi-i)
110 vpy = mdt*Vy;          % coef. Vy dt/2 (dfi-j/dy | fi-i)
111 fon = be*Cf*mdt*dx     % coef. de entrada em Gama_3
112 %
113 %      montagem das matrizes do sistema
114 %
115 A = sparse(nn,nn);
116 B = sparse(nn,nn);
117 d = zeros(nn,1);
118 usep = zeros(npt,1);
119 %
120 for iel=1:ntr;
121     for il=1:3
122         ig=malha(iel,il);
123         for jl=1:3;

```

```

124         jg=malha(iel,jl);
125         if mod(iel,2)==1
126             A(ig,jg)=A(ig,jg)+(1+crs)*mm(il,jl)+cgs*mn(il,jl)+vpx*mp_i(il,jl);
127             B(ig,jg)=B(ig,jg)+(1-crs)*mm(il,jl)-cgs*mn(il,jl)-vpx*mp_i(il,jl);
128         else
129             A(ig,jg)=A(ig,jg)+(1+crs)*mm(il,jl)+cgs*mn(il,jl)+vpx*mp_s(il,jl);
130             B(ig,jg)=B(ig,jg)+(1-crs)*mm(il,jl)-cgs*mn(il,jl)-vpx*mp_s(il,jl);
131         end;
132     end;
133 end;
134 end;
135 %
136 % inclusão do termo advectivo na fronteira Gama_3
137 %
138 for iel=2*ny:2*ny:20*ny;
139     for il=1:3
140         ig=malha(iel,il);
141         for jl=1:3;
142             jg=malha(iel,jl);
143             A(ig,jg) = A(ig,jg) + vpy*mq(il,jl);
144             B(ig,jg) = B(ig,jg) - vpy*mq(il,jl);
145         end;
146     end;
147 end;
148 %
149 % inclusao do termo independente.
150 %
151 for j = nny:nny:ng3*nny
152     d(j) = fon;
153 end;
154 %r = rcond(full(A));
155 %
156 % Fatoracao L U da matriz de rigidez
157 %

```

```

158     [ll uu] = lu(A);
159     %
160     % grafico do vetor condicao inicial
161     %
162     subplot(2,2,1)
163     h = trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),u0),title('Cenario 1: t = 0h'),view(0,90),shading interp;
164     ti = zeros(npt,1);
165     %
166     %
167     %
168     nosep = nx*ny/2;
169     for it = 1:npt
170         ti(it) = it*dt;
171         usep(it) = u0(nosep);
172         ys = ll\ (B*u0+d);
173         s = uu\ys;
174         %
175         % visualizacao
176         %
177         if (it==250)
178             subplot(2,2,2)
179             trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),s),title('Cenario 1: t = 0.25h'),view(0,90),shading interp;%axis([0
xmax 0 ymax 0 mm]);
180         end;
181         if (it==500)
182             subplot(2,2,3)
183             trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),s),title('Cenario 1: t = 0.5h'),view(0,90),shading interp;%axis([0
xmax 0 ymax 0 mm]);
184         end;
185         if (it==1000)
186             subplot(2,2,4)
187             trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),s),title('Cenario 1: t = 1h'),view(0,90),shading interp;%axis([0 xmax
0 ymax 0 mm]);
188         end;
189         u0=s;

```

```
190 end;
191 etime(clock,t0)
```

Códigos para representação em gráfico dos 4 nós separados ao longo do tempo.

```
1 %
2 %      Aproximacao de um sistema linear para simular a dispersao
3 %      de esgoto num dominio retangular horizontal
4 %
5 clear all; t0=clock; %format long;
6 %
7 %      parâmetros do modelo
8 %
9 a=0.015;      % coef. do termo difusivo
10 sig=1.5e-3;  % coef. de degradação
11 Vx= 2.5;     % componente advectiva longitudinal
12 Vy= -0.1;   % componente advectiva em Gama_3
13 be= 0.1;    % permeabilidade de passagem para o dominio
14 Cf= 0.8;    % carga de esgoto que entra em Gama_3 do domínio
15 %
16 %      parametros do dominio (espaco e tempo)
17 %
18 xmax=1.0; ymax=0.2; % distancia em Km
19 tfinal=1.0;      % tempo em horas
20 %
21 %      parametros da discretizacao
22 %
23 nx=400;  % no. de subintervalos em x
24 ny=50;   % no. de subintervalos em y
25 ng3=10;  % no. de nos em Gama_3
26 nnx=nx+1; % no. de nos na direcao x
27 nny=ny+1; % no. de nos na direcao y
28 npt=1000; % no. de passos no tempo
29 dx=xmax/nx; % comprimento do subintervalo na direcao x
30 dy=ymax/ny; % comprimento do subintervalo na direcao y
```

```

31 %
32 % parametros auxiliares da discretizacao
33 %
34 dxy=dx*dy;
35 dxdy=dx/dy;
36 dydx=dy/dx;
37 dt=tfinal/npt;
38 mdt=dt/2;
39 nn=nnx*nny; % no. total de nos nao-nulos
40 ntr=2*nx*nny; % no. total de triangulos
41 nty=2*nny; % no. de triangulos na direcao y
42 %
43 % calculo do no. de Peclet
44 %
45 npec1 = abs(Vx*dx/a);
46 npec2 = abs(Vy*dy/a);
47 %
48 % montagem da malha de elementos finitos
49 %
50 malha=zeros(nn,3);
51 k=0;
52 for i=1:nx;
53     for j=1:nny-1;
54         k=k+1;
55         ind = (i-1)*nny + j;
56         malha(k,1)=ind;
57         malha(k,2)=ind+nny;
58         malha(k,3)=ind+1;
59         k=k+1;
60         malha(k,1)=ind+nny+1;
61         malha(k,2)=ind+1;
62         malha(k,3)=ind+nny;
63     end;
64 end;

```

```

65 %
66 %      montagem da malha de coordenadas dos nos
67 %
68 k=0;
69 for i=1:nxx
70     x = (i-1)*dx;
71     for j = 1:nny
72         y = (j-1)*dy;
73         k = k + 1;
74         coord(k,1) = x;
75         coord(k,2) = y;
76     end;
77 end;
78 %
79 %      condição inicial
80 %
81 u0 = zeros(nn,1);
82 for i = nny:nny:ng3*nny
83     u0(i)=0.1;
84     u0(i-1)=0.08;
85 end;
86 %
87 %      submatrizes de rigidez
88 %
89 %      (fi-j)*(fi-i)
90 %
91 mm=(dxy/24)*[2 1 1; 1 2 1; 1 1 2];
92 %
93 %      alpha * (grad(fi-j) | grad(fi-i) )
94 %
95 mn=[(dx^2+dy^2)/(2*dx*dy) -dydx/2 -dxdy/2; -dydx dydx 0; -dxdy 0 dxdy];
96 %
97 %      [(dfi-j/dx)*fi-i] e [(dfi-j/dy)*fi-i]
98 %      para os triangulos inferiores e superiores

```

```

99     %
100    mp_i=(dy/6)*[-1 1 0;-1 1 0;-1 1 0];
101    mp_s=(dy/6)*[ 1 -1 0; 1 -1 0; 1 -1 0];
102    %
103    mq =(dx/6)*[ 1 0 -1; 1 0 -1; 1 0 -1];
104    %
105    %      preparacao dos parametros que independem das coordenadas
106    %
107    crs = mdt*sig;          % coef. (fi-j | fi-i)
108    cgs = mdt*a;          % coef. (grad fi-j | grad fi-i)
109    vpx = mdt*Vx;         % coef. Vx dt/2 (dfi-j/dx | fi-i)
110    vpy = mdt*Vy;         % coef. Vy dt/2 (dfi-j/dy | fi-i)
111    fon = be*Cf*mdt*dx;   % coef. de entrada em Gama_3
112    %
113    %      montagem das matrizes do sistema
114    %
115    A = sparse(nn,nn);
116    B = sparse(nn,nn);
117    d = zeros(nn,1);
118    usep1 = zeros(npt,1);
119    usep2 = zeros(npt,1);
120    usep3 = zeros(npt,1);
121    usep4 = zeros(npt,1);
122    %
123    for iel=1:ntr;
124        for il=1:3
125            ig=malha(iel,il);
126            for jl=1:3;
127                jg=malha(iel,jl);
128                if mod(iel,2)==1
129                    A(ig,jg)=A(ig,jg)+(1+crs)*mm(il,jl)+cgs*mn(il,jl)+vpx*mp_i(il,jl);
130                    B(ig,jg)=B(ig,jg)+(1-crs)*mm(il,jl)-cgs*mn(il,jl)-vpx*mp_i(il,jl);
131                else
132                    A(ig,jg)=A(ig,jg)+(1+crs)*mm(il,jl)+cgs*mn(il,jl)+vpx*mp_s(il,jl);

```

```

133         B(ig,jg)=B(ig,jg)+(1-crs)*mm(il,jl)-cgs*mn(il,jl)-vpx*mp_s(il,jl);
134     end;
135     end;
136     end;
137 end;
138 %
139 % inclusão do termo advectivo na fronteira Gama_3
140 %
141 for iel=2*ny:2*ny:20*ny;
142     for il=1:3
143         ig=malha(iel,il);
144         for jl=1:3;
145             jg=malha(iel,jl);
146             A(ig,jg) = A(ig,jg) + vpy*mq(il,jl);
147             B(ig,jg) = B(ig,jg) - vpy*mq(il,jl);
148         end;
149     end;
150 end;
151 %
152 % inclusão do termo independente.
153 %
154 for j = nny:nny:ng3*nny
155     d(j) = fon;
156 end;
157 %r = rcond(full(A));
158 %
159 % Fatoracao L U da matriz de rigidez
160 %
161 [ll uu] = lu(A);
162 %
163 % resolução dos sucessivos sistemas.
164 %
165 nosep1 = 2*ny*nx/5 + 2*ny/5;
166 nosep2 = nosep1 + 2*ny/5;

```

```

167     nose3 = 4*ny*nx/5 + 2*ny/5;
168     nose4 = nose3 + 2*ny/5;
169     %
170     for it = 1:npt
171         ti(it) = it*dt;
172         usep1(it) = u0(nose1);
173         usep2(it) = u0(nose2);
174         usep3(it) = u0(nose3);
175         usep4(it) = u0(nose4);
176         ys = ll\ (B*u0+d);
177         s = uu\ys;
178         u0=s;
179     end;
180     subplot(2,2,1)
181     plot(ti,usep1),title('no A'),xlabel('tempo (horas)'),ylabel('concentração'),grid on;
182     subplot(2,2,2)
183     plot(ti,usep2),title('no B'),xlabel('tempo (horas)'),ylabel('concentração'),grid on;
184     subplot(2,2,3)
185     plot(ti,usep3),title('no C'),xlabel('tempo (horas)'),ylabel('concentração'),grid on;
186     subplot(2,2,4)
187     plot(ti,usep4),title('no D'),xlabel('tempo (horas)'),ylabel('concentração'),grid on;
188     etime(clock,t0)

```