

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação - IMECC

UM MÉTODO DE ESTIMAÇÃO PARA A FUNÇÃO
INTENSIDADE DO PROCESSO POISSON
NÃO HOMOGÊNEO

CASSIANA CRESTANA

Prof. Dr. MAURO S. de F. MARQUES
Orientador

9106459/66

CAMPINAS - SÃO PAULO

1991

UM MÉTODO DE ESTIMAÇÃO PARA A FUNÇÃO INTENSIDADE DO PROCESSO POISSON NÃO HOMOGÊNEO

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pela Srta. Cassiana Crestana e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 7 de junho de 1991

Prof. Dr.



Mauro S. de F. Marques

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Estatística.

Gostaria de agradecer a todos aqueles que fizeram que a realização desta fosse possível, fazendo com que cada dia vivido em Campinas e em especial no IMECC se tornasse uma experiência inesquecível, incluindo, é claro, os funcionários, professores e amigos que participaram ativamente deste período. Em especial

Ao Mauro Marques, pela orientação, apoio e amizade.

Ao Antônio, pelo relacionamento intenso de amizade e carinho.

Às companheiras que contribuíram fortemente para o meu amadurecimento dia a dia em todos os aspectos: Adriana, pela paciência; Karla, pelo dinamismo; Socorro, pelo questionamento; Simone, pela humildade; Ritinha, pela humanidade; Júlia, pelo profissionalismo e Vanessa, pela juventude.

Ao Tinho, pelo incentivo, amizade e amor desde os tempos de graduação.

À Inês, pelos “puzões de orelha”, carinho e otimismo.

Ao Rogério e Malu, pelo apoio, força e otimismo, principalmente nas noites “mal dormidas”.

Aos amigos do vôlei que suportaram os meus desabafos.

Ao Sílvio, pelo constante apoio nos programas “SOC”.

Ao pessoal da secretaria: Cidinha, Isabel e Luís, pela boa vontade com que sempre me atenderam.

Às instituições: CAPES, CNPq e FAPESP, pelo apoio financeiro.

Dedico:

Aos meus pais

Lygia e Alberto

Às minha irmãs

Silvana, Luciana e Eliana

Aos meus irmãos

Silvio, Silvestre, Silverio, Lucio e Cassio

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1.
CAPÍTULO 2 - PROCESSO DE POISSON NÃO HOMOGÊNEO	4.
2.1 Simulação do Processo de Poisson não Homogêneo	21.
CAPÍTULO 3 - ESTIMAÇÃO DE FUNÇÃO INTENSIDADE DE UM PRO- CESSO DE POISSON NÃO HOMOGÊNEO	22.
3.1 Estimação da Função Intensidade de um Processo Pontual por Alisamento através de uma Função “kernel”	30.
3.2 Média e Variância do Estimador	37.
3.3 Estimação da Função Intensidade de um Processo de Poisson não Homogêneo .	40.
3.4 Resultados Assintóticos do Estimador da Função “kernel”	41.
3.4.1 Consistência do Estimador de “kernel”	42.
3.5 Adaptação do Método Assintótico ao Processo de Poisson não Homogêneo . . .	44.
CAPÍTULO 4 - ASPECTOS PRÁTICOS NO USO DO ESTIMADOR	49.
4.1 Aspectos Práticos do Estimador de Ramlau-Hansen	51.
4.2 Conclusões	70.
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	71.
APÊNDICE I	75.
APÊNDICE II	80.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A análise estatística da ocorrência de eventos aleatórios no tempo é relevante em áreas como bioestatística, atuária, demografia, epidemiologia e engenharia, entre outras. Por exemplo, em ensaios clínicos, o paciente pode morrer, mudar para outros estados da doença ou abandonar o estudo. Esse tipo de estudo estatístico também é chamado de “Análise Estatística de História de Vida”.

Nesse estudo observa-se o tempo de ocorrência de um ou mais eventos ocorrendo aleatoriamente no tempo ou, o que é equivalente, para cada tempo $t > 0$ observa-se (conta-se) o número de ocorrências de um certo evento até o instante t .

Na análise estatística de história de vida, a razão ou intensidade com que eventos ocorrem no tempo é fundamental. Assim sendo, modelos estatísticos para dados de história de vida, devem incluir especificações dessa intensidade que será o principal objeto da análise.

Um exemplo simples desse tipo de estudo aparece na análise de dados de sobrevivência onde o evento de interesse é a ocorrência de uma “morte”. Nesse exemplo, o interesse é a razão ou intensidade de morte, isto é, a função risco para a

distribuição do tempo de sobrevivência.

A análise estatística de dados de história de vida, pode ser encontrada já no século XVII no trabalho de J. Graunt (1662) (ver Glass (1950) e Benjamin (1978)). Uma das mais importantes contribuições no estudo de história de vida aparece no trabalho de Kaplan e Meier (1958) onde é discutido um estimador para a função distribuição de sobrevivência. Outras importantes contribuições são as generalizações de Wilcoxon, Kruskal Wallis e Savege (Gehan (1965); Brelow (1970); Peto e Peto (1972)).

Um problema que frequentemente é encontrado nesse campo da estatística é que raramente as observações possuem histórias de vida completas, isto é, as observações são censuradas. Durante os anos 60, apareceram muitos trabalhos em modelos de regressão paramétricos com dados de sobrevivência censurados, tornando possível a inclusão de covariáveis na análise (Kalbfleish e Prentice (1980, p.68)). Cox (1972) propôs um modelo de regressão semi-paramétrico em dados de sobrevivência censurados, modelando a função risco. Esse trabalho teve uma grande aceitação e grande influência na pesquisa prática e teórica em bioestatística.

O modelo para o estudo de história de vida mais frequentemente discutido na literatura, considera as variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. No entanto, fenômenos aleatórios ocorrendo no tempo, em geral, surgem segundo uma regra dinâmica. Portanto, parece natural realizarmos essa análise em termos de processos estocásticos, onde podemos estender as metodologias para modelos de histórias de vida mais gerais que incluam dependência.

Os trabalhos de Aalen (1975, 1978) foram fundamentais para o uso da moderna teoria de processos estocásticos na análise estatística da distribuição do tempo de vida. Eles mostram que a teoria de processos de contagem fornece uma estrutura geral, em que, por exemplo, os dados de tempo de falhas censurados com observações de uma cadeia Markov não homogênea podem ser analisados. Foi estudado nesses trabalhos o estimador para intensidade acumulada empírica (Nelson (1969) e Sutshuler (1970)) e testes não paramétricos. Esse estudo, usa fortemente

a moderna teoria de martingale em tempo contínuo e integrais estocásticas e foi mais tarde utilizado para estender outros métodos, como os testes não paramétricos de uma ou k -amostras, modelo de regressão de Cox (Andersen et al. (1982)), alisamento por função "kernel" de intensidades acumuladas (Ramlau-Hansen (1983a,b)), estimação de máxima-verossimilhança em abordagens paramétricas (Borgan (1984)), etc. O enfoque de processos de contagem também tem a vantagem de gerar provas diretas para as propriedades distribucionais dos estimadores e estatísticas de teste sobre os mais gerais padrões de censura (Aalen (1978); Aalen e Johansen (1978); Gill (1980a)).

Neste trabalho estudaremos a estimação da função intensidade de um processo de Poisson não homogêneo, que é um caso particular de processos de contagem. As definições, resultados básicos e o algoritmo de simulação sobre processos de Poisson não homogêneos serão apresentados no Capítulo 2, juntamente com os necessários conceitos da teoria geral de processos pontuais.

No Capítulo 3 a estimação da função intensidade de um processo de Poisson não homogêneo será feita, adaptando o método proposto por Ramlau-Hansen (1983a,b) para a função intensidade de um processo pontual com intensidade multiplicativa. Esse método consiste em fazer o alisamento através de uma função "kernel" do estimador sugerido por Nelson (1965 e 1973) e Aalen (1975 e 1978) para estimar a função intensidade acumulada de um processo pontual.

No capítulo 4, faremos estudos para várias funções intensidades de processos de Poisson não homogêneo para distintas funções "kernel" e aspectos práticos na utilização do método serão discutidos, baseado na simulação do processo de Poisson não homogêneo.

Os resultados gerais da teoria de Martingale e os algoritmos usados no Capítulo 4, serão apresentados nos apêndices I e II, respectivamente.

Capítulo 2

PROCESSO DE POISSON NÃO HOMOGÊNEO

Matematicamente, um processo de Poisson é um processo estocástico $Y = \{Y(t); t \in [0, \infty)\}$, assumindo valores nos inteiros não negativos, que satisfaz:

- i) $Y(0) = 0$;
- ii) $P(Y(t + \Delta t) - Y(t) = 1) = \alpha \Delta t + o(\Delta t)$, quando $\Delta t \rightarrow 0$, $\alpha > 0$;
- iii) $P(Y(t + \Delta t) - Y(t) \geq 2) = o(\Delta t)$;
- iv) Y tem incrementos independentes,

ou equivalentemente

- i) $Y(0) = 0$;
- ii) Y tem incrementos independentes;
- iii) $Y(t) - Y(s)$ tem distribuição de Poisson com parâmetro $(t - s)\alpha$.

A equivalência das definições axiomáticas acima é bem conhecida (ver por exemplo Karlin e Taylor (1974)).

Se interpretarmos $Y(t)$ como o número de ocorrências de um certo evento em $[0, t]$, os axiomas refletem as seguintes propriedades:

- i) no tempo zero, não temos nenhuma ocorrência;
- ii) a ocorrência de um evento em um intervalo pequeno de tempo é proporcional ao tamanho do intervalo;
- iii) a ocorrência de mais de um evento em um pequeno intervalo de tempo tende a zero quando o comprimento do intervalo tende a zero;
- iv) a ocorrência de eventos em intervalos disjuntos é independente.

O parâmetro α de proporcionalidade, pode ser interpretado como a taxa de ocorrência instantânea de um evento, isto é,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P((Y(t + \Delta t) - Y(t) = 1))}{\Delta t} = \alpha.$$

Pode ser mostrado que os tempos entre ocorrência de eventos tem distribuição exponencial com parâmetro α se e somente se o processo é Poisson (Hoel, Port e Stone (1978)).

Um processo de Poisson homogêneo $Y(t)$ possui a função média $\mu_Y(t) = \alpha t$ e função covariância dada por $R_Y(s, t) = \text{Cov}(Y(s), Y(t)) = \alpha s$ para $0 \leq s \leq t$. De uma maneira mais geral temos:

$$R_Y(s, t) = \alpha \min(s, t), \quad s \geq 0 \text{ e } t \geq 0.$$

Uma generalização natural do processo de Poisson homogêneo é aquela em que a razão de ocorrência de eventos varia com o tempo. Consideremos um processo $Y = \{Y(t); t \in [0, \infty)\}$ assumindo valores nos inteiros não negativos que satisfaz:

- a) $Y(0) = 0$;
- b) Y tem incrementos independentes;
- c) $P(Y(t + \Delta t) - Y(t) = 1) = \alpha(t)\Delta t + o(\Delta t)$, quando $\Delta t \rightarrow 0$
onde $\alpha(t)$ é uma função não-negativa e, $\int_0^\infty \alpha(t)dt < \infty$;
- d) $P(Y(t + \Delta t) - Y(t) \geq 2) = o(\Delta t)$ quando $\Delta t \rightarrow 0$.

Um tal processo estocástico é chamado Processo de Poisson não homogêneo com função intensidade $\alpha(t)$.

Proposição 2.1. Se Y é um processo de Poisson não homogêneo com intensidade $\alpha(t)$, então

$$P(Y(t) - Y(0) = k) = \exp \left\{ - \int_0^t \alpha(u)du \right\} \left[\int_0^t \alpha(u)du \right]^k / k!, \quad k = 0, 1, \dots, t \geq 0$$

Demonstração:

Seja $P_k(t) = P(Y(t) = k)$. Então

$$\begin{aligned} P_0(t + \Delta t) &= P(Y(t + \Delta t) = 0) = P(Y(t) = 0, Y(t + \Delta t) - Y(t) = 0) \stackrel{(b)}{=} \\ &= P(Y(t) = 0)P(Y(t + \Delta t) - Y(t) = 0) = \\ &= P_0(t)\{1 - P[Y(t + \Delta t) - Y(t) \geq 1]\} = \\ &= P_0(t)\{1 - P[Y(t + \Delta t) - Y(t) = 1] - P[Y(t + \Delta t) - Y(t) \geq 2]\} = \\ &\stackrel{(c)}{=} P_0(t)\{1 - \alpha(t)\Delta t + o(\Delta t)\}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$P_0(t + \Delta t) - P_0(t) = -\alpha(t)\Delta t P_0(t) + o(\Delta t)$$

e

$$\frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\alpha(t)P_0(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\alpha(t)P_0(t).$$

Temos então que

$$P'_0(t) = -\alpha(t)P_0(t)$$

$$\frac{P'_0(t)}{P_0(t)} = -\alpha(t)$$

$$\frac{d}{dt} \ln P_0(t) = -\alpha(t)$$

$$\ln P_0(t) = -\int_0^t \alpha(s)ds$$

$$P_0(t) = \exp \left\{ -\int_0^t \alpha(s)ds \right\} \quad (2.1.1)$$

Para $k \geq 1$

$$P_k(t + \Delta t) = P(Y(t + \Delta t) = k) = \sum_{i+j=k} P(Y(t) = i, Y(t + \Delta t) - Y(t) = j) =$$

$$= P(Y(t) = k, Y(t + \Delta t) - Y(t) = 0) + P(Y(t) = k - 1, Y(t + \Delta t) - Y(t) = 1) +$$

$$+ \sum_{i=2}^k P(Y(t) = k - i, Y(t + \Delta t) - Y(t) = i) =$$

$$= P(Y(t) = k, Y(t + \Delta t) - Y(t) = 0) + P(Y(t) = k - 1, Y(t + \Delta t) - Y(t) = 1) +$$

$$+ \sum_{i=2}^k P(Y(t) = k-i) P(Y(t+\Delta t) - Y(t) = i) =$$

$$= P(Y(t) = k, Y(t+\Delta t) - Y(t) = 0) + P(Y(t) = k-1, Y(t+\Delta t) - Y(t) = 1) + \\ + \sum_{i=2}^k P(Y(t) = k-i) o(\Delta t) =$$

$$= P(Y(t) = k, Y(t+\Delta t) - Y(t) = 0) + P(Y(t) = k-1, Y(t+\Delta t) - Y(t) = 1) + o(\Delta t) =$$

$$= P(Y(t) = k) P(Y(t+\Delta t) - Y(t) = 0) + P(Y(t) = k-1) P(Y(t+\Delta t) - Y(t) = 1) + o(\Delta t).$$

portanto

$$P_k(t + \Delta t) = P_k(t) \{1 - \alpha(t)\Delta t + o(\Delta t)\} + P_{k-1}(t) \{\alpha(t)\Delta t + o(\Delta t)\}$$

e

$$\frac{P_k(t + \Delta t) - P_k(t)}{\Delta t} = -\alpha(t)P_k(t) + \alpha(t)P_{k-1}(t) + o(\Delta t).$$

Segue que

$$P'_k(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_k(t + \Delta t) - P_k(t)}{\Delta t} = -\alpha(t)P_k(t) + \alpha(t)P_{k-1}(t)$$

ou

$$P'_k(t) + \alpha(t)P_k(t) = \alpha(t)P_{k-1}(t)$$

Multiplicando ambos os termos da expressão acima por $\exp\{\int_0^t \alpha(s)ds\}$ temos:

$$\exp\left\{\int_0^t \alpha(s)ds\right\} \{P'_k(t) + \alpha(t)P_k(t)\} = \exp\left\{\int_0^t \alpha(s)ds\right\} \alpha(t)P_{k-1}(t)$$

e

$$\frac{d}{dt} \left[P_k(t) \exp\left\{\int_0^t \alpha(s)ds\right\} \right] = \alpha(t)P_{k-1}(t) \exp\left\{\int_0^t \alpha(s)ds\right\} \quad (2.1.2)$$

Se $k = 1$

$$\frac{d}{dt} \left[P_1(t) \exp\left\{\int_0^t \alpha(s)ds\right\} \right] = \alpha(t)P_0(t) \exp\left\{\int_0^t \alpha(s)ds\right\}.$$

Utilizando (2.1.1) temos

$$\begin{aligned} & \alpha(t)P_0(t) \exp\left\{\int_0^t \alpha(s)ds\right\} = \\ & = \alpha(t) \exp\left\{-\int_0^t \alpha(s)ds\right\} \exp\left\{\int_0^t \alpha(s)ds\right\} = \alpha(s) \end{aligned}$$

e consequentemente

$$P_1(t) \exp\left\{\int_0^t \alpha(s)ds\right\} = \int_0^t \alpha(s)ds$$

$$P_1(t) = \left(\int_0^t \alpha(s)ds\right) \exp\left\{-\int_0^t \alpha(s)ds\right\}.$$

Induzimos para $k - 1$, temos

$$P_{k-1}(t) = \frac{\left(\int_0^t \alpha(s)ds\right)^{k-1}}{(k-1)!} \exp\left\{-\int_0^t \alpha(s)ds\right\}.$$

Provemos para k . De (2.1.2), temos

$$\frac{d}{dt} \left[P_k(t) \exp \left\{ \int_0^t \alpha(s) ds \right\} \right] = \alpha(t) P_0(t) \exp \left\{ \int_0^t \alpha(s) ds \right\} \times \frac{\left(\int_0^t \alpha(s) ds \right)^{k-1}}{(k-1)!} \exp \left\{ - \int_0^t \alpha(s) ds \right\}$$

$$\frac{d}{dt} \left[P_k(t) \exp \left\{ \int_0^t \alpha(s) ds \right\} \right] = \alpha(t) \frac{\left(\int_0^t \alpha(s) ds \right)^{k-1}}{(k-1)!}$$

Portanto

$$P_k(t) \exp \left\{ \int_0^t \alpha(s) ds \right\} = \frac{\left(\int_0^t \alpha(s) ds \right)^k}{k!}$$

e

$$P_k(t) = \frac{\left(\int_0^t \alpha(s) ds \right)^k}{k!} \exp \left\{ - \int_0^t \alpha(s) ds \right\}$$

□

Um processo de Poisson não homogêneo pode ser obtido através de uma transformação na escala de tempo em um processo de Poisson homogêneo com intensidade 1.

Proposição 2.2. Seja $Y(t)$, $t \geq 0$, um processo de Poisson homogêneo com intensidade 1. Se definimos $X(t) = Y(\Lambda(t))$, $t \geq 0$, onde $\Lambda(t) = \int_0^t \alpha(s) ds$, então $X(t)$, $t \geq 0$ é um processo de Poisson não homogêneo, com função intensidade $\alpha(t)$, $t \geq 0$.

Demonstração:

- 1) $X(0) = 0$, pois $X(t) = Y(\Lambda(t))$ e $\Lambda(0) = 0$.
- 2) Para $0 \leq t_0 < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, temos:

$$P[X(t_0) = w_0, X(t_2) - X(t_1) = w_1, X(t_3) - X(t_2) = w_2, \dots, X(t_n) - X(t_{n-1}) = w_n] = \\ P[Y(Y(\Lambda(t_0)) = w_0, Y(\Lambda(t_1)) - Y(\Lambda(t_0)) = w_1, \dots, Y(\Lambda(t_n)) - Y(\Lambda(t_{n-1})) = w_n] = (*).$$

Como Λ é não decrescente, os intervalos $(\Lambda(t_0) - (\Lambda(t_1)], (\Lambda(t_1) - \Lambda(t_2)], \dots$ são disjuntos e como $Y(t)$ possui incrementos independentes, temos

$$(*) = P(Y(\Lambda(t_0)) = w_0)P(Y(\Lambda(t_1)) - Y(\Lambda(t_0)) = w_1) \dots P(Y(\Lambda(t_n)) - Y(\Lambda(t_{n-1})) = w_n) = \\ P(X(t_0) = w_0)P(X(t_1) - X(t_0) = w_1) \dots P(X(t_n) - X(t_{n-1}) = w_n)$$

Portanto $X(t)$ possui incrementos independentes.

Queremos mostrar que:

$$3) \quad P\{X(t + \Delta t) - X(t) = 1\} = \alpha(t)\Delta t + o(\Delta t).$$

$$P\{X(t + \Delta t) - X(t) = 1\} = P\{Y(\Lambda(t + \Delta t)) - Y(\Lambda(t)) = 1\} = (\Lambda(t + \Delta t) - \Lambda(t)) + o(\Lambda(t + \Delta t) - \Lambda(t)) = \\ = \alpha(t)\Delta t + \Lambda(t + \Delta t) - \Lambda(t) - \alpha(t)\Delta t + o(\Lambda(t + \Delta t) - \Lambda(t)).$$

Claro que $\Lambda(t + \Delta t) - \Lambda(t) - \alpha(t)\Delta t = o(\Delta t)$ quando $\Delta t \rightarrow 0$, pois $\alpha(t) = \Lambda'(t)$.

Seja

$$\varphi(t, \Delta t) = o[\Lambda(t + \Delta t) - \Lambda(t)].$$

Então

$$\varphi(t, \Delta t) = o(\Delta t) \text{ quando } \Delta t \rightarrow 0,$$

pois temos que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t, \Delta t)}{\Lambda(t + \Delta t) - \Lambda(t)} = 0$$

então provemos que $\varphi(t, \Delta t) = o(\Delta t)$, isto é

$$\frac{\varphi(t, \Delta t)}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0.$$

Temos

$$\frac{\varphi(t, \Delta t)}{\Delta t} = \frac{\varphi(t, \Delta t)}{[\Lambda(t + \Delta t) - \Lambda(t)]} \frac{[\Lambda(t + \Delta t) - \Lambda(t)]}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t, \Delta t)}{\Delta t} = 0 \alpha(t) = 0$$

pois

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Lambda(t + \Delta t) - \Lambda(t)}{\Delta t} = \Lambda'(t) = \alpha(t) < \infty$$

portanto

$$o[\Lambda(t + \Delta t) - \Lambda(t)] = o(\Delta t).$$

Agora segue que

$$P\{X(t + \Delta t) - X(t) = 1\} = \alpha(t)\Delta t + o(\Delta t)$$

4) $P\{X(t + \Delta t) - X(t) \geq 2\} = P\{Y(\Lambda(t + \Delta t)) - Y(\Lambda(t)) \geq 2\}$ tomando-se $t' = \Lambda(t)$ para $\Lambda(t)$ inversível, temos

$$P\{[Y(\Lambda(\Lambda^{-1}(t')) + \Delta t') - Y(t')] \geq 2\} =$$

$$P\{[Y(t' + \Lambda(\Delta t')) - Y(t')] \geq 2\} = o(\Lambda(\Delta t)) = o(\Delta t)$$

logo $X(t)$ é um processo de Poisson não homogêneo com função intensidade $\alpha(t)$. $\square$

A Proposição 2.2. é útil principalmente na simulação de processos de Poisson não homogêneos.

Processos de Poisson são casos particulares do que é conhecido na literatura como processos pontuais ou processos de contagem. O trabalho de Aalen (1975 e 1978) permitem que a teoria moderna de processos estocásticos, mais particularmente a teoria de martingale, possa ser usada na análise estatística de processos pontuais.

A seguir faremos uma revisão da teoria básica de processos pontuais e estudaremos os processos de Poisson como casos particulares.

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $\{\tau_n, n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência de variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathcal{F})$ tomando valores em $[0, \infty]$, satisfazendo

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n,$$

com probabilidade 1, isto é, uma sequência de variáveis aleatórias estendidas positivas. Se $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ uma família de sub- σ -álgebras de $\mathcal{F}$, com $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, para $s \leq t$, e se

$$[\tau_n \leq t] = \{w, \tau_n(w) \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad (2.1)$$

então a sequência de variáveis aleatórias τ_n é chamada processo pontual.

Podemos interpretar $\mathcal{F}_t$ como sendo a σ -álgebra contendo todos os eventos observados até o instante t , isto é, representando toda a informação obtida durante o período $[0, t]$. Por exemplo, se $X = \{X(t); t \geq 0\}$ é um processo estocástico definido em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, podemos tomar $\mathcal{F}_t = \sigma(X(s); 0 \leq s \leq t)$.

Associado a um processo pontual podemos definir um processo de contagem. Para tanto consideramos $\{\tau_n; n \geq 1\}$ um processo pontual e para cada $t \geq 0$, seja $\{N(t); t \geq 0\}$ o processo estocástico definido por

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{[0,t]}(\tau_n) \equiv \text{número de } \tau_n \text{ menores ou iguais a } t. \quad (2.2)$$

Então $N = \{N(t); t \geq 0\}$ é chamado de processo de contagem associado ao processo pontual $\{\tau_n; n \geq 1\}$. Notamos que $N(t)$ é um processo estocástico adaptado a $\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$, isto é, $N(t)$ é uma variável aleatória em $(\Omega, \mathcal{F}_t)$. Cada trajetória amostral é uma função escada contínua à direita, com limites à esquerda, $N(0) = 0$ e com número contável de saltos de tamanho 1.

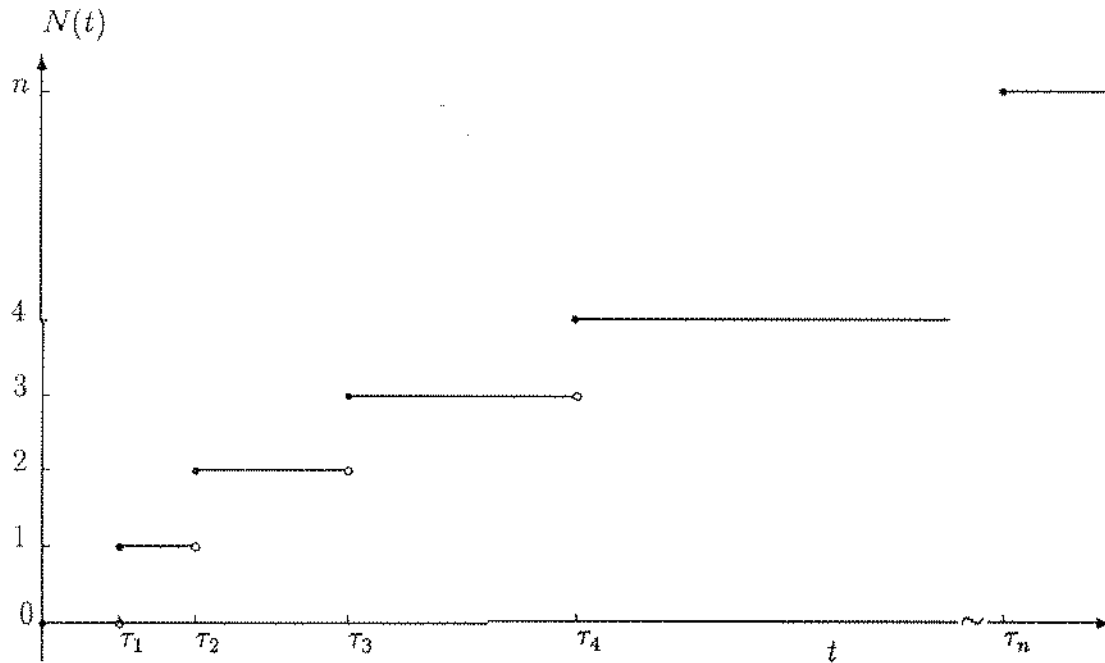
Observamos que um processo pontual pode ser interpretado como uma sequência de variáveis aleatórias que indica o tempo de ocorrência de um evento no tempo e o processo de contagem associado, como o número de eventos que ocorreram até o tempo $t > 0$.

O processo pontual pode ser obtido do processo de contagem. Para tanto consideramos

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \inf\{t, N(t) > 0\} \\ \tau_2 &= \inf\{t \geq \tau_1, N(t) - N(\tau_1) > 0\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

A relação entre o processo de contagem e o processo pontual é ilus-

trada através da Figura 1, dada a seguir.



A teoria de processos de contagem pode ser usada para definir processo de Poisson homogêneo e não homogêneo.

Seja $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ uma sequência de variáveis aleatórias, independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com função densidade $f(t) = \alpha e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$, $t > 0$. E sejam

$$\begin{aligned}\tau_0 &= 0, \\ \tau_1 &= T_1, \\ \tau_2 &= T_1 + T_2 = \tau_1 + T_2, \\ &\vdots \\ \tau_n &= \sum_{i=1}^n T_i = \tau_{n-1} + T_n.\end{aligned}$$

Neste caso, como foi comentado anteriormente, se o tempo entre ocorrências de eventos são i.i.d. exponenciais com parâmetro α ,

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{[0,t]}(\tau_n)$$

é o processo de Poisson homogêneo com intensidade α .

Para obtermos o processo de Poisson não homogêneo como um processo pontual, utilizaremos a mesma idéia da Proposição 2.2. Consideremos $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ a sequência de variáveis aleatórias dada anteriormente e seja $\Lambda(t) = \int_0^t \alpha(s)ds$ onde $\alpha(t)$ é uma função integrável, então $\tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_n$ são pontos de um processo de Poisson não homogêneo com função intensidade acumulada $\Lambda(t)$, se e somente se

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \Lambda(\tau'_1) \\ \tau_2 &= \Lambda(\tau'_2) \\ &\vdots \\ \tau_n &= \Lambda(\tau'_n)\end{aligned}$$

são pontos de um processo de Poisson homogêneo com taxa 1. No caso em que $\Lambda(t)$ é inversível, podemos tomar a seguinte sequência de variáveis aleatórias

$$\begin{aligned}\tau'_1 &= \Lambda^{-1}(\tau_1) \\ \tau'_2 &= \Lambda^{-1}(\tau_2) \\ &\vdots \\ \tau'_n &= \Lambda^{-1}(\tau_n)\end{aligned}$$

Então temos que $\tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_n$ são pontos de um processo de Poisson não homogêneo com função intensidade $\alpha(t)$. Esse método de transformação na escala de tempo é análogo ao método da transformação da probabilidade inversa para geração (contínua) de números aleatórios não uniformes. Para o caso em que $\Lambda(t)$ é não inversível, não podemos utilizar a inversa de $\Lambda(t)$ e o método para obtenção de processo de Poisson não homogêneo pode ser encontrado em Lewis e Shedler (1979).

A decomposição de “Doob-Meyer”(ver Apêndice I), nos auxiliará na definição da função intensidade de um processo de contagem $N = \{N(t); t \in [0, T]\}$. Para tanto assumimos que $E(N(t)) < \infty$. Como $N(t)$ é não decrescente, pode ser mostrado ser submartingale. De fato

$$N(t) \geq N(s) \text{ para } 0 \leq s \leq t$$

$$E[N(t)/\mathcal{F}_s] \geq E[N(s)/\mathcal{F}_s] = N(s)$$

A decomposição de “Doob-Meyer” diz que

$$N(t) = \Lambda(t) + M(t), \quad (2.3)$$

onde $\Lambda(t)$ é um processo estocástico não decrescente e $M(t)$ é uma martingale (ver Apêndice I).

Assumimos (e pode ser mostrado que esta suposição é razoável (ver Aallen (1978))) existir um processo não negativo contínuo à direita $\lambda(t)$, adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}$, com limite à esquerda, tal que

$$\Lambda(t, w) = \int_0^t \lambda(s, w) ds, \quad (2.4)$$

e que

$$M(t) = N(t) - \int_0^t \lambda(s, w) ds \quad (2.5)$$

é martingale quadrado integrável.

A variação quadrática de M (ver Apêndice I) ou também chamado processo de variância de M é dado por

$$\langle M \rangle (t, w) = \int_0^t \lambda(s, w) ds. \quad (2.6)$$

O processo $\lambda(t)$ é chamado de processo intensidade de $N(t)$. Esse nome é justificado pois tomando a média de (2.5) temos

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E [N(t + \Delta t) - N(t) | \mathcal{F}_t] =$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E \left[\int_t^{t+\Delta t} \lambda(s) ds | \mathcal{F}_t \right].$$

Em particular se $\lambda(s)$ é contínua à direita e limitada

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E \left[\int_t^{t+\Delta t} \lambda(s) ds | \mathcal{F}_t \right] = \lambda(s) \quad q.c.$$

Pode ser mostrado, mas a prova envolve resultados mais delicados sobre a teoria de Martingale, que sob a suposição de $\lambda(s)$ limitada

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} Var [N(t + \Delta t) - N(t) | \mathcal{F}_t] = \lambda(s) \quad q.c.$$

Isto sugere que $N(t)$ se comporta similarmente a um “processo de Poisson” com intensidade estocástica $\lambda(t)$. Pela unicidade da decomposição de “Doob-Meyer”, $\Lambda(t)$ caracteriza o processo de contagem $N(t)$.

Consideremos, por exemplo o processo estocástico $N = \{N(t); t \geq 0\}$, associado ao processo pontual $\tau_1 < \infty$ e $\tau_n = \infty, n \geq 2$, isto é, N tem dois estados 0 e 1 e o estado 1 é absorvente. Seja $\mathcal{F}_t = \sigma(N(s) : s \leq t)$, logo

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P(N(t + \Delta t) - N(t) = 1 / \mathcal{F}_t) = \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P(t \leq \tau_1 \leq t + \Delta t / \mathcal{F}_t) = \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P(t \leq \tau_1 \leq t + \Delta t / \sigma(N(s); 0 \leq s \leq t)) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P[t \leq \tau_1 \leq t + \Delta t / \tau_1 > t) = \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P((t \leq \tau_1 \leq t + \Delta t) \cap \tau_1 > t) / P(\tau_1 > t) = \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f(s) ds / (1 - P(\tau_1 \leq t)) = \\
&= \frac{f(t)}{1 - F(t)}.
\end{aligned}$$

Observamos então que a intensidade do processo de contagem acima é exatamente o que em análise de sobrevivência é chamado função risco instantânea.

Um caso particular do processo, por exemplo, é utilizado em análise de sobrevivência definido por: $N = \{N(t), t \in [0, T]\}$, um processo estocástico definido como 0 se o indivíduo está vivo no tempo t e 1 caso contrário. Seja $\tau = \inf\{t, N(t) = 1\}$, a variável aleatória que representa o tempo de sobrevivência do indivíduo na população. Então $\alpha(t)$ mede a taxa de risco instantânea.

Notamos que processos de contagem generalizam os processos de Poisson, permitindo não só que a intensidade varie com o tempo mas também de maneira aleatória. Além disso, os tempos entre ocorrência de eventos, isto é $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \dots, \tau_n - \tau_{n-1}$, não são necessariamente assumidos serem independentes.

Processos de contagem com processo intensidade da forma

$$\lambda(t, w) = \alpha(t)Y(t), \quad (2.7)$$

onde $\alpha(t)$ é uma função determinística e $Y(t)$ um processo estocástico adaptado a $\mathcal{F}_t$, são chamados processos de contagem com intensidade multiplicativa ou modelos multiplicativos. A função determinística $\alpha(t)$ é chamada função intensidade. A estimação da função intensidade α para este tipo de processo de contagem será objeto de estudo no próximo capítulo.

2.1. Simulação do Processo de Poisson não Homogêneo

Faremos aqui uma breve discussão sobre o método de simulação de um processo de Poisson não homogêneo baseado no trabalho de Lewis e Sheldetler (1979).

O método consiste em tomarmos a inversa da função distribuição exponencial(1), aplicada em uma distribuição uniforme $[0, 1](U(0, 1))$ para obtermos pontos $T_1, T_2, \dots, T_n$ com distribuição exponencial. Tomando $\tau_1 = T_1, \tau_2 = \tau_1 + T_2, \dots, \tau_n = \tau_{n-1} + T_n$, geramos um processo de Poisson homogêneo e através desse processo, simularemos o processo de Poisson não homogêneo através de dois diferentes métodos: quando a função intensidade acumulada $\Lambda(t)$ é inversível, e quando $\Lambda(t)$ é não inversível. Para o primeiro caso basta tomarmos a inversa da função intensidade acumulada como dado na Proposição 2.2. Quando a função intensidade acumulada $\Lambda(t)$ não possui inversa, o método consiste em utilizar uma função intensidade acumulada inversível que se aproxime da função intensidade acumulada não inversível, e então é comparada ao quociente das funções intensidade

$\alpha^*(\tau_i)/\alpha(\tau_i)$ (onde $\alpha(\tau_i)$ é a função intensidade do processo de Poisson não homogêneo com função $\Lambda(t)$ não inversível e $\alpha^*(\tau_i)$ é a função intensidade do processo, cuja $\Lambda(t)$ se aproxima da não inversível) com um número gerado de uma $U(0, 1)$, se o quociente for menor que o ponto ($U(0, 1)$), τ_i será conservado, e então os pontos τ_i que não forem desconsiderados serão pontos de um processo de Poisson não homogêneo cuja função intensidade é $\alpha(t)$, onde $\Lambda(t) = \int_0^t \alpha(s)ds$ é não inversível. A prova encontra-se em Lewis e Sheldetler (1979). A seguir daremos o algoritmo da obtenção do processo de Poisson não homogêneo no segundo caso.

Algoritmo:

- 1- Gerar pontos $\tau_1, \tau_2, \dots$, de um processo de Poisson não homogêneo $\{N^*(t) : t \geq 0\}$ com função intensidade $\alpha^*(t)$, em um intervalo fixo $(0, t]$. Gerar um número de pontos iguais a n .
- 2- Denotar os pontos ordenados por $\tau_1^*, \tau_2^*, \dots, \tau_n^*$. Faça $i = 1$ e $k = 0$.
- 3- Gerar U_i , uniformemente distribuídos entre 0 e 1. Se $u_i \leq \alpha^*(\tau_i^*)/\alpha(\tau_i^*)$, faça $k = k + 1$ e $\tau_k = \tau_i^*$.
- 4- Faça $i = i + 1$. Se $i \leq n$, vá para 3.
- 5- Retorne $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, quando $n = k$ incluindo também n .

Este algoritmo e outro utilizados para a obtenção do processo de Poisson não homogêneo, foram desenvolvidos no pacote estatístico SOC (EMBRAPA), e encontrados no Apêndice II.

Capítulo 3

ESTIMAÇÃO DE FUNÇÃO INTENSIDADE DE UM PROCESSO DE POISSON NÃO HOMOGÊNEO

Neste capítulo estudaremos a estimação da função de intensidade de um processo de Poisson não homogêneo.

Nosso principal objetivo, como foi dito na Introdução, é a adaptação do método não paramétrico proposto por Ramlau-Hansen (1983) para estimação da função intensidade de um processo pontual com intensidade multiplicativa para a estimação da função intensidade de processos de Poisson não homogêneo. Como os métodos de estimação paramétricos para processos de Poisson não homogêneos aparecem de maneira dispersa na literatura, discutiremos inicialmente alguns aspectos desse enfoque como um complemento ao nosso estudo.

No caso paramétrico, isto é, quando a função intensidade da forma $\alpha(t, \theta)$, é conhecida exceto pelo valor de um parâmetro $\theta \in \mathbb{R}$, o problema de obtenção do estimador de máxima-verossimilhança foi estudado por exemplo por Kutoyants (1975), Nandy (1983), Basawa & Prakasa Rao (1980), Svensson (1990),

onde diferentes esquemas de amostragem foram considerados.

Por exemplo, seja $\{N(t); t \in [0, T)\}$ um processo de Poisson não homogêneo com função intensidade $\alpha(t, \theta)$. O intervalo $[0, T)$ pode ser particionado em k subintervalos $[t_0 = 0), [t_1, t_2) \dots [t_{k-1}, t_k = T)$ e o número de eventos observados em cada subintervalo é respectivamente $n_1, n_2, \dots, n_k$. Nesse caso as variáveis aleatórias observadas são $N_i = N(t_i) - N(t_{i-1})$, $i = 1, 2, \dots, k$. Como o processo de Poisson não homogêneo tem incrementos independentes e N_i tem distribuição de Poisson com parâmetro $\int_{t_{j-1}}^{t_j} \alpha(u, \theta) du$, temos que a função de verossimilhança é dada por:

$$L(\theta) = P_\theta(N_1 = n_1, N_2 = n_2, \dots, N_k = n_k) = \\ = \prod_{j=1}^k (n_k!)^{-1} \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \alpha(u, \theta) du \right)^{n_j} \cdot \exp \left(- \int_{t_{j-1}}^{t_j} \alpha(u, \theta) du \right).$$

O estimador de máxima-verossimilhança é então obtido através da maximização de $L(\theta)$ com respeito a θ .

No caso em que $\alpha(t, \theta) = \theta Y(t)$, onde θ é um parâmetro a ser estimado e $Y(t)$ uma função conhecida de t , usando o esquema de amostragem descrito no parágrafo anterior, a função de verossimilhança se reduz a

$$L(\theta) = \prod_{j=1}^k (n_k!)^{-1} \exp \left\{ - \int_{t_{j-1}}^{t_j} \theta Y(u) du \right\} \times \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \theta du \right)^{n_j} = \\ = \prod_{j=1}^k (n_k!)^{-1} \exp \left\{ - \theta \int_0^T Y(u) du \times \sum_{j=1}^k n_j \right\} \prod_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} Y(u) du$$

temos então que

$$\log L(\theta) = C + \sum_{j=1}^k n_j \log \theta - \theta \int_0^T Y(u) du$$

onde C é independente de θ . Segue que o estimador de máxima-verossimilhança de θ é dado por

$$\hat{\theta} = \left(\sum_{j=1}^k N_j \right) \left(\int_0^T Y(u) du \right)^{-1} = N(T) \left(\int_0^T Y(u) du \right)^{-1}.$$

Note que somente o número total de eventos $N(T) = \sum_{j=1}^k N_j$, no intervalo $[0, T)$ é necessário e não o número de eventos nos subintervalos.

Se $Y(t) \equiv 1$, então o processo é de Poisson homogêneo com parâmetro θ . O estimador de máxima-verossimilhança de θ , nesse caso, é:

$$\hat{\theta} = \sum_{j=1}^k N_j / T = N(T) / T.$$

O esquema de amostragem descrito anteriormente não leva em conta o instante de ocorrência de cada evento. Um esquema alternativo é aquele em que durante um intervalo de tempo pré-determinado, digamos $[0, T)$, observamos o processo continuamente, o que é equivalente a observarmos o instante de ocorrência de cada evento e o número de eventos ocorridos durante o intervalo $[0, T)$. Nesse caso, nossas observações consistem de valores das variáveis aleatórias, $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{N(T)}, N(T)$.

A obtenção da função de verossimilhança baseada na amostra $N(T) = n, \tau_1 = t_1, \dots, \tau_{N(T)} = t_n$ é mais delicada. Para tanto consideramos o evento

$$\{N(T) = n, \tau_i \in (t_i - \Delta t_i, t_i + \Delta t_i), \dots, \tau_n \in (t_n - \Delta t_n, t_n + \Delta t_n)\}$$

para Δt_i suficientemente pequeno, $t_0 = 0$ e $\Delta t_0 = 0$. Temos então que

$$P\{N(T) = n, \tau_i \in (t_i - \Delta t_i, t_i + \Delta t_i], \dots, \tau_n \in (t_n - \Delta t_n, t_n + \Delta t_n]\} =$$

$$\begin{aligned}
& P[N(t) = n, \cap_{i=1}^n \tau_i \in (t_i - \Delta t_i, t_i + \Delta t_i)] = \\
& = P[t_1 - \Delta t_1 < \tau_1 \leq t_1 + \Delta t_1, \dots, t_n - \Delta t_n < \tau_n \leq t_n + \Delta t_n, N(T) = n] = \\
& = P[t_1 - \Delta t_1 < \tau_1 \leq t_1 + \Delta t_1, \dots, t_n - \Delta t_n < \tau_n \leq t_n + \Delta t_n, N(T) - N(t_n + \Delta t_n) = 0] = \\
& = P[N(t_1 - \Delta t_1) = 0, N(t_1 + \Delta t_1) - N(t_1 - \Delta t_1) = 1, N(t_2 - \Delta t_2) - N(t_1 + \Delta t_1) = 0, \\
& N(t_3 - \Delta t_3) - N(t_2 - \Delta t_2) = 1, \dots, N(t_n - \Delta t_n) - N(t_{n-1} + \Delta t_{n-1}) = 0, N(t_n + \Delta t_n) - \\
& - N(t_n - \Delta t_n) = 1, N(T) - N(t_n + \Delta t_n) = 0] = (\text{incrementos independientes}) \\
& = \prod_{i=1}^n P[N(t_i - \Delta t_i) - N(t_{i-1} + \Delta t_{i-1}) = 0] \times \prod_{i=1}^n P[N(t_i + \Delta t_i) - N(t_i - \Delta t_i) = 1] \times \\
& \times P[N(T) - N(t_n + \Delta t_n) = 0] = \\
& = \prod_{i=1}^n \exp\left(-\int_{t_{i-1} + \Delta t_{i-1}}^{t_i - \Delta t_i} \alpha(u, \theta) du\right) \prod_{i=1}^n P[N(t_i + \Delta t_i) - N(t_i - \Delta t_i) = 1] \times \\
& = \exp\left(-\int_{t_n + \Delta t_n}^T \alpha(u, \theta) du\right) = (1)
\end{aligned}$$

temos que

$$\lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \frac{P[N(t_i + \Delta t_i) - N(t_i - \Delta t_i) = 1]}{2\Delta t_i} = \alpha(\theta, t_i)$$

logo para Δt_i pequenos $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\begin{aligned} (1) &= \prod_{i=1}^n \left(\exp \left(- \int_{t_{i-1} + \Delta t_{i-1}}^{t_i - \Delta t_i} \alpha(u, \theta) du \right) 2\Delta t_i \alpha(\theta, t_i) \right) \exp \left(- \sum_{i=1}^n \int_{t_i + \Delta t_{i-1}}^{t_i - \Delta t_i} \alpha(u, \theta) du \right) = \\ &= \prod_{i=1}^n \alpha(t_i, \theta) 2\Delta t_i \exp \left(- \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i - \Delta t_i} \alpha(u, \theta) du + \int_{t_n + \Delta t_n}^T \alpha(u, \theta) du \right) = (2) \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i - \Delta t_i} \alpha(u, \theta) du + \int_{t_n + \Delta t_n}^T \alpha(u, \theta) du = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1} + \Delta t_{i-1}}^{t_i - \Delta t_i} \alpha(u, \theta) du + \int_{t_n + \Delta t_n}^T \alpha(u, \theta) du + \sum_{i=1}^n \int_{t_i - \Delta t_i}^{t_i + \Delta t_i} \alpha(u, \theta) du - \sum_{i=1}^n \int_{t_i - \Delta t_i}^{t_i + \Delta t_i} \alpha(u, \theta) du = \\ &= \int_0^T \alpha(u, \theta) du - \int_{\cup [t_i - \Delta t_i, t_i + \Delta t_i]} \alpha(u, \theta) du. \end{aligned}$$

Portanto

$$(2) = \prod_{i=1}^n \alpha(t_i, \theta) 2\Delta t_i \exp \left(\int_0^T \alpha(u, \theta) du - \int_{\cup [t_i - \Delta t_i, t_i + \Delta t_i]} \alpha(u, \theta) du \right)$$

dividindo por $2\Delta t_i$ e fazendo $\Delta t_i \rightarrow \infty$, no limite temos

$$\prod_{i=1}^n \alpha(t_i, \theta) \exp \left(\int_0^T \alpha(u, \theta) du - \int_{\{t_1, t_2, \dots, t_n\}} \alpha(u, \theta) du \right) =$$

$$= \prod_{i=1}^n \alpha(t_i, \theta) \exp \left(\int_0^T \alpha(u, \theta) du \right).$$

que é a função de verossimilhança para o esquema de amostragem e que pode ser escrito, usando integral estocástica com respeito ao processo $\{N(t); t \in [0, T]\}$, na forma

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \exp \left(\log \prod_{i=1}^n \alpha(t_i, \theta) \right) \exp \left(- \int_0^T \alpha(\mu, \theta) d\mu \right) = \\ &= \exp \left(\sum \log \alpha(t_i, \theta) \right) \exp \left(- \int_0^T \alpha(\mu, \theta) d\mu \right) = \\ &= \exp \left(\int_0^T \log \alpha(t_i, \theta) dN(t) \right) \exp \left(- \int_0^T \alpha(\mu, \theta) d\mu \right) = \\ &= \exp \left(\int_0^T \log \alpha(t, \theta) dN(t) - \int_0^T \alpha(\mu, \theta) d\mu \right) \end{aligned}$$

Se $\alpha(t, \theta) = \theta Y(t)$ temos que

$$\begin{aligned} \log L(\theta) &= \left(\int_0^T \log(\theta Y(t)) dN(t) - \int_0^T \theta Y(t) dt \right) = \\ &= \left(\int_0^T (\log \theta + \log Y(\mu)) dN(\mu) - \theta \int_0^T Y(t) dt \right) = \\ &= \left(\log \theta \int_0^T dN(t) + \int_0^T Y(t) dN(t) - \theta \int_0^T Y(t) d(t) \right) = \end{aligned}$$

$$= \left(\log \theta N(T) + \int_0^T \log Y(t) dN(t) + \theta \int_0^T Y(t) dt \right)$$

e

$$\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \theta} = \frac{N(t)}{\theta} - \int_0^T Y(t) dt,$$

portanto

$$\hat{\theta} = \frac{N(T)}{\int_0^T Y(t) dt}.$$

Um outro tipo de amostragem é a que considera observações contínuas durante um período aleatório de tempo. Esse delineamento amostral é comum na prática em experimentos que contam até que um pré-determinado número de eventos tenha ocorrido. Suponhamos que estamos observando o processo a partir do tempo $t = 0$ e prosseguimos até que um número pré-fixado n_0 de eventos tenha ocorrido. Assumindo que eventos ocorram em $t_1, t_2, \dots, t_{n_0}$, temos que nosso período final de observação é t_{n_0} . Usando a argumentação similar ao caso anterior, obtemos a função de verossimilhança baseada em $\{N(t) = n_0, \tau_1 = t_1, \tau_2 = t_2, \dots, \tau_n = t_n\}$ por

$$L(\theta) = \left(\prod_{i=1}^n \alpha(t_i, \theta) \right) \exp \left(- \int_0^{t_0} \alpha(\mu, \theta) d\mu \right).$$

A estimação não paramétrica para a intensidade de certos processos de contagem, quando o processo é observado continuamente em um intervalo de tempo pré-fixado $[0, T]$, foi estudado por Aalen (1975 e 1978), que generalizou o estimador proposto independentemente por Nelson (1969 e 1972) para a função intensidade acumulada.

Mais recentemente o método de "Sieves" proposto por Grenander (1981) foi estudado para a estimação da intensidade de certos processos pontuais por Karr (1987).

Estudaremos a seguir o método de estimação não paramétrica da função intensidade proposto por Ramlau-Hansen (1983a).

3.1. Estimação da Função Intensidade de um Processo Pontual por Alisamento através de uma Função “Kernel”

Ramlau-Hansen (1983a), introduziu um estimador para a intensidade de um processo de contagem generalizando o estimador proposto por Watson e Leadbetter (1964) para funções risco, que por sua vez foi motivado pelo estimador introduzido por Rosenblatt (1956) para funções densidades de probabilidade.

Assim como os estimadores de Rosenblatt para densidade são obtidos através de alisamento da função distribuição empírica, que é um estimador da função distribuição, o estimador proposto por Ramlau-Hansen é produzido pelo alisamento dos estimadores de Nelson-Aalen para a intensidade acumulada de processos pontuais.

Rosenblatt (1956) considerou a seguinte situação: Sejam $X_1, \dots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com densidade f e função distribuição F . Um estimador não viciado de F é dado pela função distribuição empírica $\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{(-\infty, x]}(X_i)$. Rosenblatt introduziu o seguinte estimador para a densidade f :

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{x-t}{b}\right) d\hat{F}_n(t) = \frac{1}{nb} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-X_{(i)}}{b}\right), \quad (3.1)$$

onde $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ denotam as estatísticas de ordem correspondentes à amostra $X_1, X_2, \dots, X_n$. K é uma função chamada “kernel” que satisfaz $\int_{-\infty}^{\infty} K(s)ds = 1$ e b um parâmetro positivo (“window”).

Watson e Leadbetter (1964) estudaram estimadores para a função de risco ao invés da função de densidade. Isto é, para F uma função de distribuição concentrada em $[0, \infty)$ com densidade f e função risco

$$\alpha(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

com $t \geq 0$ e $F(t) < 1$, o seguinte estimador foi proposto:

$$\hat{\alpha}(t) = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^n K \frac{\left(\frac{t - X_{(i)}}{b}\right)}{(n - i + 1)}, \quad (3.2)$$

onde $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$, K e b são respectivamente, as estatísticas de ordem de uma amostra $X_1, X_2, \dots, X_n$ de F com $F(0) = 0$, a função "kernel" e "window".

Consideremos agora um processo de contagem $N = \{N(t), 0 \leq t \leq 1\}$ com intensidade multiplicativa:

$$N(t) = \int_0^t \alpha(s) Y(s) ds + M(t), \quad (3.3)$$

onde $M(t)$ é uma martingale com média zero. Simbolicamente e de forma não rigorosa podemos escrever (3.3) como

$$dN(t) = \alpha(t) Y(t) dt + dM(t) \quad (3.4)$$

e

$$E(dN(t) - \alpha(t) Y(t) dt) = 0 \quad (3.5)$$

Assim sendo

$$\frac{1}{Y(t)} dN(t) \simeq \alpha(t) dt \quad (3.6)$$

A expressão (3.6) sugere que um estimador natural da intensidade acumulada

$$\beta(t) = \int_0^t \alpha(s) ds \quad (3.7)$$

é dado por

$$\hat{\beta}(t) = \int_0^t \frac{1}{Y(s)} dN(s) \quad (3.8)$$

Como $Y(t)$ pode ser igual a zero, definimos $J(t) = \mathbb{I}_{\{0\}^c}(Y(t))$ e redefinimos (3.8) por

$$\beta^*(t) = \int_0^t \alpha(s) J(s) ds \quad (3.9)$$

Nós assumimos que $E\left\{\int_0^1 \left\{\frac{J(s)}{Y(s)}\right\} ds\right\} < \infty$, isso garante que a integral estocástica abaixo existe. O estimador natural de $\beta^*(t)$ é

$$\hat{\beta}^*(t) = \int_0^t \left\{\frac{J(s)}{Y(s)}\right\} dN(s) \quad (3.10)$$

quando $Y(s) = 0$, nós definimos $J(s)/Y(s) = 0$.

O estimador em (3.10) foi proposto e estudado de forma rigorosa por Aalen (1975 e 1978). Ele generaliza o estimador sugerido por Nelson (1965 e 1973) e Alfshiles (1950) no estudo da função risco com dados censurados. O estimador em (3.10) é chamado estimador de Nelson-Aalen.

Devemos observar que a integral estocástica que aparece no estimador de Nelson-Aalen é simplesmente a soma

$$\sum_{j: \tau_j \leq t} [J(\tau_j)/Y(\tau_j)].$$

Da teoria de integral estocástica (ver Apêndice I) segue que $\hat{\beta}^* - \beta^*$ é martingale integrável com processo de variância

$$< \hat{\beta}^* - \beta^* > (t) = \int_0^t \left\{ \frac{\alpha(s)}{Y(s)} J(s) \right\} ds. \quad (3.11)$$

De fato:

$$(\hat{\beta}^* - \beta^*)(t) = \int_0^t \frac{J(s)}{Y(s)} dN(s) - \int_0^t \alpha(s) J(s) ds =$$

$$= \int_0^t \frac{J(s)}{Y(s)} dN(s) - \int_0^t \frac{\alpha(s) J(s)}{Y(s)} Y(s) ds =$$

$$= \int_0^t \frac{J(s)}{Y(s)} [dN(s) - \alpha(s) Y(s) ds] =$$

$$= \int_0^t \frac{J(s)}{Y(s)} dM(s)$$

$$< \hat{\beta}^* - \beta^* > (t) = < \hat{\beta}^* - \beta^*, \hat{\beta}^* - \beta^* > (t) =$$

$$= < \int_0^t \frac{J(s)}{Y(s)} dM(s), \int_0^t \frac{J(s)}{Y(s)} dM(s) > (t) =$$

$$= \int_0^t \frac{J^2(s)}{Y^2(s)} d < M, M > = \int_0^t \frac{J^2}{Y^2} d < M >$$

onde a última igualdade segue da teoria da integração estocástica (ver Apêndice I)

como

$$< M > (t) = \int_0^t \lambda(s) ds = \int_0^t \alpha(s) Y(s) ds$$

temos que

$$d < M > (t) = \alpha(t) Y(t) dt$$

logo

$$< \hat{\beta}^* - \beta^* > (t) = \int_0^t \frac{J(s)}{Y^2(s)} \alpha(s) Y(s) ds =$$

$$= \int_0^t \left\{ \frac{J(s)}{Y(s)} \alpha(s) \right\} ds.$$

□

Usando (3.11) podemos obter a função erro médio quadrático

$$\eta(t) = E \left\{ \hat{\beta}^*(t) - \beta^* \right\}^2 = E \int_0^t \left\{ \frac{\alpha(s) J(s)}{Y(s)} \right\} ds. \quad (3.12)$$

A seguir exibiremos um estimador não viciado de $\eta(t)$. Para tanto definiremos

$$\hat{\eta}(t) = \int_0^t \left\{ \frac{J(s)}{Y^2(s)} \right\} dN(s).$$

De (3.3) e (3.4) segue que

$$\begin{aligned}
\hat{\eta}(t) &= \int_0^t \left\{ \frac{J(s)}{Y^2(s)} \right\} \{ \alpha(s)Y(s)ds + dM(s) \} = \\
&= \int_0^t \left\{ \frac{\alpha(s)J(s)}{Y(s)} ds \right\} + \int_0^t \frac{J(s)}{Y^2(s)} dM(s),
\end{aligned} \tag{3.13}$$

o qual, é fácil notar, ser não viciado para $\eta(t)$, pois basta tomarmos a esperança e o segundo termo à direita da expressão será zero, pois $E(M(t)) = 0$.

O estimador de Ramlau-Hansen é obtido do estimador da função intensidade acumulada $\hat{\beta}^*(t) = \int_0^t \{J(s)/Y(s)\} dN(s)$ pelo alisamento através de uma função “kernel” K .

Este processo produz um estimador da intensidade $\alpha(t)$ ao invés da densidade acumulada $\beta(t)$. Isto foi uma evolução na teoria da estimação não paramétrica, que por razões técnicas considerava somente estimadores de $\beta(t)$, quando em várias situações o objeto de real interesse é a função intensidade $\alpha(t)$.

Definição 3.1. (Ramlau-Hansen (1983a)) Seja K uma função limitada, com integral igual a 1, e seja b (window) um parâmetro positivo. O correspondente estimador de “kernel” para a intensidade $\alpha(t)$ é dado por

$$\hat{\alpha}(t) = \frac{1}{b} \int_0^1 K\left(\frac{t-s}{b}\right) d\hat{\beta}^*(s), \tag{3.14}$$

onde $d\hat{\beta}^*(s) = \{J(s)/Y(s)\} dN(s)$.

Notamos que se os tempos de saltos de $N(t)$ são $\tau_1, \tau_2, \dots$ então podemos reescrever (3.14) da seguinte maneira

$$\hat{\alpha}(t) = \frac{1}{b} \int_0^1 K\left(\frac{t-s}{b}\right) \left\{ \frac{J(s)}{Y(s)} \right\} dN(s) =$$

$$= \frac{1}{b} \sum_i K\left(\frac{t - \tau_i}{b}\right) J(\tau_i)/Y(\tau_i) \quad (3.15)$$

que é melhor do ponto de vista computacional.

O estimador de Ramlau-Hansen (1983a) é chamado de estimador de "kernel" para a função intensidade $\alpha(t)$ de um processo de contagem N com intensidade multiplicativa, isto é, um processo da forma

$$N(t) = \int_0^t \alpha(s)Y(s)ds + M(t) \quad (3.16)$$

Retornando ao estimador (3.2) de Watson e Leadbetter para a função risco podemos verificar que temos um caso particular do estimador de Ramlau-Hansen. Para tanto definimos o processo de contagem

$$Y(t) = n - N(t-)$$

e

$$N(t) = n\hat{F}_n(t) = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{[0,t]}(X_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{[0,t]}(X_{(i)}) \quad (3.17)$$

como anteriormente, temos que $X_1, X_2, \dots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição F , concentrada nos reais não negativos e densidade f . Seja $\mathcal{F}_t = \sigma\{N(s); s \leq t\}$ e $\mathcal{F}_t = \cap_{s < t} \mathcal{F}_s$, a função intensidade do processo pode ser mostrada ser:

$$\lambda(t) = \alpha(t)Y(t)$$

e o correspondente estimador

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}^*(t) &= \int_0^t \frac{J(s)}{Y(s)} dN(s) = \int_0^t \frac{J(s)}{Y(s)} d(n\hat{F}_n(s)) = \\
&= \sum_s \frac{J(s)}{Y(s)} (n\hat{f}(s)) = \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{J(X_{(i)})}{Y(X_{(i)})} n \frac{1}{nb} K\left(\frac{s - X_{(i)}}{b}\right) = \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{b} K\left(\frac{s - X_{(i)}}{b}\right) / Y(X_{(i)}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{b} K\left(\frac{s - X_{(i)}}{b}\right) / n - N(X_{(i)}) = \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{b} K\left(\frac{s - X_{(i)}}{b}\right) / (n - i + 1).
\end{aligned}$$

3.2. Média e Variância do Estimador

Para simplificação matemática, nós assumiremos que a função “kernel” tem suporte em $[-1, 1]$, o qual, para propósitos práticos não é uma restrição real. Se $0 < b < 1/2$ e introduzirmos

$$\begin{aligned}
\alpha^*(t) &= \frac{1}{b} \int K\left(\frac{t-s}{b}\right) d\beta^*(s) = \\
&= \int K(t-bu) \alpha(t-bu) J(t-bu) du
\end{aligned} \tag{3.18}$$

para $t \in [b, 1 - b]$.

A média de $\hat{\alpha}(t)$, variância e um estimador não viciado da variância estão contidos na seguinte proposição:

Proposição 3.1: (Ramlau-Hansen (1983a)). Seja

$$K_b(s) = \frac{1}{b}K(s/b) \quad \text{e} \quad j(s) = E(J(s))$$

Então

$$E(\hat{\alpha}(t)) = E(\alpha^*(t)) = (K_b * (\alpha j))(t) \quad (3.19)$$

onde $*$ denota convolução ordinária.

E além disso, temos

$$\begin{aligned} \sigma^2(t) &= E\{\hat{\alpha}(t) - \alpha^*(t)\}^2 = \\ &= \frac{1}{b} \int_{-1}^1 K^2(u) \alpha(t - bu) E\left\{ \frac{J(t - bu)}{Y(t - bu)} \right\} du \end{aligned} \quad (3.20)$$

para $t \in [b, 1 - b]$. Um estimador não viciado para $\sigma^2(t)$ é

$$\hat{\sigma}^2(t) = \frac{1}{b^2} \int_0^1 K^2\left(\frac{t-s}{b}\right) \left\{ \frac{J(s)}{Y^2(s)} \right\} dN(s) \quad (3.21)$$

para $t \in [b, 1 - b]$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}
E(\hat{\alpha}(t)) &= E(\alpha^*) = E\left(\frac{1}{b} \int_0^1 K\left(\frac{t-s}{b}\right) d\beta^*(s)\right) = \\
&= E\left(\frac{1}{b} \int_{-1}^1 K(u/b) \hat{\alpha}(t-u) du\right) = \\
&= E \int_{-1}^1 \frac{K(u/b)}{b} \hat{\alpha}(t-u) J(t-u) du = \\
&= \int_{-1}^1 K_b(u) \alpha(t-u) J(t-u) du = \\
&= K_b * (\alpha j)(t)
\end{aligned}$$

$$E(\hat{\alpha}(t)) = E(\alpha^*(t)) = \frac{K}{b} * (\alpha j)(t)$$

□

Para provarmos (3.20) segue pela definição de $\hat{\alpha}$ e α^* , que

$$\hat{\alpha}(t) - \alpha^*(t) = \frac{1}{b} \int_0^1 K\left(\frac{t-s}{b}\right) d(\hat{\beta}^* - \beta^*)(s)$$

e por (3.18) temos que $\hat{\beta}^* - \beta^*$ é martingale. Pela equação (3.11),

$$\begin{aligned}
E\{\hat{\alpha}(t) - \alpha^*(t)\}^2 &= \frac{1}{b^2} E \int_0^1 K^2\left(\frac{t-s}{b}\right) \left\{ \frac{\alpha(s) J(s)}{Y^2(s)} \right\} ds \\
&= \frac{1}{b^2} \int_{-1}^1 K^2(u) \alpha(t-bu) E\left\{ \frac{J(t-bu)}{Y(t-bu)} \right\} du.
\end{aligned}$$

□

3.3 Estimação da Função Intensidade de um Processo de Poisson não Homogêneo

Como vimos no Capítulo 2, um processo de Poisson não homogêneo é um processo pontual com processo intensidade determinístico e pode ser visto como um processo de contagem com intensidade multiplicativa onde o processo $Y(t)$ é constante e igual a 1, isto é, o processo intensidade igual a função intensidade $\alpha(t)$. Nesse caso os estimadores de Nelson-Aallen para a intensidade acumulada se reduzem a

$$\hat{\beta}^*(t) = \int_0^t \left\{ \frac{J(s)}{Y(s)} \right\} dN(s) = N(t) \quad (3.22)$$

pois $J(s) = \mathbb{I}_{\{0\}^c}$, $Y(s) = \mathbb{I}_{\{0\}^c}(s) = 1$ e $N(s)$ é uma função crescente de saltos de tamanho 1.

O estimador de “kernel” para α é

$$\hat{\alpha}(t) = \frac{1}{b} \sum_{\tau_i} K\left(\frac{t - \tau_i}{b}\right) \quad (3.23)$$

onde τ_i denota os saltos de $N(t)$.

A média de $\hat{\alpha}(t)$, variância e um estimador não viciado da variância para a função intensidade $\alpha(t)$ de um processo de Poisson não homogêneo são dados por

$$E(\hat{\alpha}(t)) = \sum_{\tau_i} K_b(\tau_i) \alpha(t - \tau_i) = (K_b * \alpha)(\tau_i), \quad (3.24)$$

onde $K_b(t) = \frac{1}{b} K\left(\frac{t}{b}\right)$.

$$\sigma^2(t) = \frac{1}{b} \int_0^1 K^2(s) \alpha(t - bs) \quad \text{para } t \in [b, 1 - b], \quad (3.25)$$

$$\hat{\sigma}^2(t) = \frac{1}{b^2} \sum_{\tau_i} K^2\left(\frac{t - \tau_i}{b}\right) \quad \text{para } t \in [b, 1 - b]. \quad (3.26)$$

3.4. Resultados Assintóticos do Estimador de Função “kernel”

Em geral, o estimador de “kernel” dado na definição 3.1, é um estimador viciado de $\alpha(t)$ como mostra a proposição 3.1. Entretanto, é possível mostrar que é assintoticamente não viciado e apresentaremos a seguir, a expressão assintótica para a variância. Para ilustrarmos nosso trabalho comentaremos as demonstrações que aparecem no trabalho de Ramlau-Hansen.

Se nós considerarmos uma sequência $\{N_n(t); n \in \mathbb{N}\}$ de processos de contagem unidimensionais, cada qual com processo intensidade da forma $\lambda_n(t) = \alpha(t)Y_n(t)$. Podemos construir uma sequência correspondente de estimadores de “kernel”, que denotaremos por $\hat{\alpha}_n(t)$. Nós usaremos o índice “ n ” para indicar a dependência do processo de contagem. Note que nós assumiremos que a função “kernel” é fixa (i.é, independente de n), com “window” b dependendo de n , isto é usual na literatura. Tomemos N_n um processo de contagem quando o estudo consiste de n indivíduos por itens. Então consideremos a seguinte proposição:

Proposição 3.2: (Ramlau-Hansen (1983a)). Seja $n \rightarrow \infty$. (a) Se a intensidade α de $N_n(t)$ é contínua no ponto t e se $j_n = EJ_n \rightarrow 1$ uniformemente na vizinhança de t , onde $J_n = \mathbb{I}_{(0)} \circ (Y_n(t))$, então

$$E\hat{\alpha}_n(t) \rightarrow \alpha(t) \quad (3.27)$$

(b) Se (i) $nE\{J_n(s)/Y_n(s)\} \rightarrow 1/\tau(s)$ uniformemente na vizinhança do ponto t , e (ii) α e τ são contínuas no ponto t , então quando $b_n \rightarrow 0$

$$\sigma_n^2(t) = E\{\hat{\alpha}_n(t) - \alpha_n^*(t)\}^2 = (nb_n)^{-1} \left\{ \frac{\alpha(t)}{\tau(t)} \right\} \int_{-1}^1 K^2(u) du + o((nb_n)^{-1}) \quad (3.28)$$

A prova dessa proposição envolve conceitos não triviais de análise matemática.

3.4.1. Consistência do Estimador de “kernel”

Sob certas condições o estimador de “kernel” é consistente. Os resultados a seguir mostram a consistência em média quadrática fraca e uniforme.

Proposição 3.3: (Ramlau-Hansen (1983a)) Consideremos a sequência $\{N_n\}$ de um processo de contagem uni-dimensional como na Proposição 3.2. Assumimos que as condições da Proposição 3.2 (b) são válidas. Então

$$E[\hat{\alpha}_n(t) - \alpha(t)]^2 \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$, $b_n \rightarrow 0$ e $nb_n \rightarrow \infty$.

A prova da Proposição 3.3, segue da Proposição 3.2 (b) que $\sigma_n^2(t) \rightarrow 0$. É suficiente mostrar que $E\{\alpha_n^*(t) - \alpha(t)\}^2 \rightarrow 0$. Visto que $J_n \xrightarrow{P} 1$ uniformemente em torno de t e já que

$$\alpha_n^*(t) - \alpha(t) = \int_{-1}^1 K(u) \{ \alpha(t - b_n u) J_n(t - b_n u) - \alpha(t) \} du \quad (3.29)$$

segue que $\alpha_n^*(t) - \alpha(t) \xrightarrow{P} 0$, de tal maneira que exista constante $c > 0$, tal que $\|\alpha_n^*(t) - \alpha(t)\| \leq c$. Portanto, nós concluímos que $E\{\alpha_n^*(t) - \alpha(t)\} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Para anunciarmos um resultado mais forte sobre a consistência uniforme em média quadrática, consideremos o intervalo fixo $[Z_0, Z_1]$ com $0 < Z_0 < Z_1 < 1$.

Teorema 3.1. (Ramlau-Hansen (1983a)) Se assumimos que

- (i) $J_n \rightarrow 1$ uniformemente em $[0, 1]$ quando $n \rightarrow \infty$,
- (ii) α é contínua em $[0, 1]$,
- (iii) $n\eta(1) = n \int_0^1 E\{J_n(s)/Y_n(s)\}\alpha(s)ds$ é finita quando $n \rightarrow \infty$, e
- (iv) a função “kernel” K tem variação finita.

Então

$$E \left\{ \sup_{t \in [Z_0, Z_1]} |\hat{\alpha}_n(t) - \alpha(t)|^2 \right\} \rightarrow 0 \quad (3.30)$$

quando $n \rightarrow \infty$, $b_n \rightarrow 0$ e $nb_n^2 \rightarrow \infty$.

A prova do Teorema 3.1. requer desigualdades estudadas na teoria avançada de Martingale.

3.5. Adaptação do Método Assintótico ao Processo de Poisson não Homogêneo

Nosso objetivo é estimar a função intensidade $\alpha(t)$ de um processo de Poisson não homogêneo através da observação de n trajetórias independentes $N^{(1)}, N^{(2)}, \dots, N^{(n)}$ do processo em $[0, T]$. Sejam $\hat{\alpha}^{(1)}(t), \hat{\alpha}^{(2)}(t), \dots, \hat{\alpha}^{(n)}(t)$ os correspondentes estimadores de Ramlau-Hansen para cada trajetória observada, recordemos que $N^{(i)}(t)$ pode ser vista como um processo pontual com intensidade multiplicativa $\lambda(t) = \alpha(t)$ 1.

Um estimador natural de $\alpha(t)$ utilizando todas as trajetórias é:

$$\hat{\alpha}(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \hat{\alpha}^{(k)}(t) \quad (3.31)$$

Sejam $N^{(1)}, N^{(2)}, \dots, N^{(n)}$ as realizações independentes de um processo de Poisson não homogêneo com função intensidade $\alpha(t)$ e definamos

$$\begin{aligned} N_1 &= N^{(1)} \\ N_2 &= N^{(1)} + N^{(2)} \\ &\vdots \\ N_n &= N^{(1)} + N^{(2)} + \dots + N^{(n)}. \end{aligned}$$

Temos que N_n é um processo pontual com intensidade $\alpha_n(t) = \alpha(t)n = \alpha(t)Y_n(t)$ onde $Y_n(t) = n$, isto é, um processo de Poisson não homogêneo com intensidade $n\alpha(t)$. De fato:

Sabemos que $N^{(i)}(t)$ para $i = 1, \dots, n$ são processos de Poisson não homogêneo independentes, com densidade $\alpha(t)$, então:

- i) $N^{(i)}(0) = 0$
- ii) $N^{(i)}(t)$ possui incrementos independentes e
- iii) $N^{(i)}(t) - N^{(i)}(s) \sim \text{Poisson} \left[\int_s^t \alpha(u) du \right]$

Agora:

- i) $N_n(0) = \sum_{i=1}^n N^{(i)}(0) = 0$
- ii) $N_n(t)$ possui incrementos independentes, pois como $N^{(i)}(t)$ possui incrementos independentes temos que $N_n(t_i) - N_n(t_{i-1}) = \sum_{j=1}^n (N^{(j)}(t_i) - N^{(j)}(t_{i-1}))$ são independentes, logo

$$P(N_n(t_0) = y_0, N_n(t_1) - N_n(t_0) = y_1, \dots, N_n(t_n) - N_n(t_{n-1}) = y_n) =$$

$$P(\sum_j N^{(j)}(t_0) = y_0, \sum_j (N^{(j)}(t_1) - N^{(j)}(t_0)) = y_1, \dots, \sum_j (N^{(j)}(t_n) - N^{(j)}(t_{n-1})) = y_n)$$

$$= P(N_n(t_0) = y_0) P(N_n(t_1) - N_n(t_0) = y_1) \dots P(N_n(t_n) - N_n(t_{n-1}) = y_n) \text{ e}$$

- iii) $N_n(t) - N_n(s) = \sum_{i=1}^n N^{(i)}(t) - \sum_{i=1}^n N^{(i)}(s) = \sum_{i=1}^n (N^{(i)}(t) - N^{(i)}(s))$ é distribuído como soma de Poisson independentes, isto é

$$\sum_{i=1}^n \text{Poisson} \left(\int \alpha(u) du \right) = \text{Poisson} \left[\sum_{i=1}^n \int_s^t \alpha(u) du \right] = \text{Poisson} \left[n \int_s^t \alpha(u) du \right]$$

então

$$N_n(t) - N_n(s) \sim \text{Poisson} \left[\int_s^t n \alpha(u) du \right]$$

portanto,

$$N_n(t) = \left\{ \sum_{i=1}^n N^{(i)}(t); t \in [0, T] \right\}$$

é um processo de Poisson não homogêneo função intensidade $n\alpha(t)$ ou equivalentemente um processo de contagem com intensidade multiplicativo $\lambda_n(t) = n\alpha(t) = \alpha(t)Y_n$. $\square$

Note que a sequência $\{N_n; n \in \mathbb{N}\}$ é do tipo proposto na teoria assintótica, vista na Seção 3.4.

Agora seja $\hat{\alpha}_n(t)$ o estimador de Ramlau-Hansen correspondente ao processo $N_n = \sum_{i=1}^n N^{(i)}$. Comparando os estimadores $\hat{\alpha}_n(t)$ e $\hat{\alpha}_n(t)$ com o mesmo parâmetro b_n temos que:

$$\hat{\alpha}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \hat{\alpha}^{(k)}(t) \quad (3.32)$$

De fato, para $k = 1$

$$b_n \hat{\alpha}^{(1)}(t) = \sum_{i=1}^{N_1} K \left(\frac{t - \tau_{1i}}{b_n} \right) = \sum_{i=1}^{N_1} A_{1i} = A_{11} + A_{12} + \dots + A_{1N_1};$$

para $k = 2$

$$b_n \hat{\alpha}^{(2)}(t) = \sum_{i=1}^{N_2} K \left(\frac{t - \tau_{2i}}{b_n} \right) = \sum_{i=1}^{N_2} A_{2i} = A_{21} + A_{22} + \dots + A_{2N_2};$$

$\vdots$

para $k = n$

$$b_n \hat{\alpha}_n^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^{N_1} K\left(\frac{t - \tau_{ni}}{b_n}\right) = \sum_{i=1}^{N_n} A_{ni} = A_{n1} + A_{n2} + \dots + A_{nN_n}$$

onde $A_{ij} = K((t - \tau_{ji})/b_n)$ e n_i o número de saltos na trajetória i em $[0, T]$. Então somando para k de 1 até n , temos,

$$nb_n \hat{\alpha}_n(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{N_1 + N_2 + \dots + N_n} A_{ij}$$

e se $N_1 + N_2 + \dots + N_n = r$

$$nb_n \hat{\alpha}_n(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^r A_{ij} \quad (3.33)$$

Seja agora $\hat{\alpha}_n(t)$ o estimador de “kernel” correspondente ao processo $N_n = \sum_{i=1}^n N^{(i)}$. É claro, que os tempos de salto $\tau_j^{(n)}$, de N_n são obtidos através da ordenação dos τ_{ji} .

$$\hat{\alpha}_n(t) = \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{N_1 + N_2 + \dots + N_n} K\left(\frac{t - \tau_j^{(n)}}{b_n}\right) / N_n = \frac{1}{nb_n} \sum_{j=1}^r K\left(\frac{t - \tau_j^{(n)}}{b_n}\right) = \frac{1}{nb_n} \sum_j B_j$$

$$nb_n \hat{\alpha}_n(t) = \sum_{j=1}^r B_j \quad (3.34)$$

onde $B_j = K\left(\frac{t - \tau_j^{(n)}}{b_n}\right)$, $j = 1, 2, \dots, r$.

Como os B_k são obtidos através de um rearranjo dos A_{ij} , então temos que (3.33) é igual a (3.34), logo

$$nb_n \hat{\alpha}_n(t) = nb_n \hat{\alpha}_n(t)$$

portanto, temos que $\hat{\alpha}_n(t) = \hat{\alpha}_n(t)$.

Para que $b_n \rightarrow 0$, $nb_n \rightarrow \infty$ e $nb_n^2 \rightarrow \infty$, tomemos por exemplo $b_n = b/n^\delta$, $b > 0$ e $\delta \leq 1/2$. Então as condições exigidas na teoria assintótica dada na Proposição 3.2, Proposição 3.3. e Teorema 3.1, continuam sendo satisfeitas, pois no nosso caso $J_n = \mathbb{I}_{\{0\}^c}(N_n(t)) = \mathbb{I}_{\{0\}^c}(n) = 1$ para $\forall n$.

Temos portanto:

- i) $j_n = EJ_n = E(1) \rightarrow 1$ uniformemente na vizinhança de t ,
- ii) $nE\{J_n(s)/N_n(s)\} = nE\{1/n\} = 1$, portanto $nE\{J_n(s)/N_n(s)\} \rightarrow 1$ uniformemente na vizinhança de t e
- iii) $n\eta(1) = n \int_0^1 E\{J_n(s)/N_n(s)\}\alpha(s)ds = \int_0^1 \alpha(s)ds$ é finita quando $n \rightarrow \infty$.

Capítulo 4

ASPECTOS PRÁTICOS NO USO DO ESTIMADOR

Como já foi dito anteriormente, analisaremos aspectos práticos do método usando simulações de processos de Poisson não homogêneos. Utilizaremos três tipos de funções intensidades: crescente e decrescente cujas funções intensidades acumuladas são inversíveis e uma onde a função intensidade acumulada é não inversível.

Os algoritmos para a simulação do processo de Poisson não homogêneo e para o estimador de “kernel” estão descritos no Apêndice II. Aqui discutiremos aspectos práticos no uso do proposto estimador de Ramlau-Hansen, na estimação da função intensidade de um processo de Poisson não homogêneo.

Consideremos processos de Poisson não homogêneos, com funções intensidades escolhidas através de estudos empíricos nossos as quais são dadas a seguir:

$$1- \quad \alpha_1(t) = 13 \exp \{-0.6t\} \quad 0 \leq t \leq 1;$$

$$2- \quad \alpha_2(t) = \begin{cases} 3 & 0 \leq t < 1/4 \\ 12t & 1/4 \leq t < 3/4 \\ 9 & 3/4 \leq t < 1 \text{ e} \end{cases}$$

$$3- \quad \alpha_3(t) = \begin{cases} 3 & 0 \leq t < 1/4 \\ 12t & 1/4 \leq t < 3/4 \\ 0 & 3/4 \leq t < 1. \end{cases}$$

as correspondentes funções intensidades acumuladas são:

$$1- \quad \Lambda_1(t) = 13/0.6 (1 - \exp \{-0.6t\}) \quad 0 \leq t \leq 1;$$

$$2- \quad \Lambda_2(t) = \begin{cases} 3t & 0 \leq t < 1/4 \\ 3/4 + 6t^2 & 1/4 \leq t < 3/4 \\ 33/8 + 9t & 3/4 \leq t < 1 \text{ e} \end{cases}$$

$$3- \quad \Lambda_3(t) = \begin{cases} 3t & 0 \leq t < 1/4 \\ 3/4 + 6t^2 & 1/4 \leq t < 3/4 \\ 15/4 & 3/4 \leq t < 1. \end{cases}$$

Para as intensidades acima, simulamos os processos de Poisson não homogêneos para amostras de tamanho 10, 25 e 50. As trajetórias simuladas são apresentadas através dos respectivos τ_i , no Apêndice II.

4.1. Aspectos Práticos do Estimador de Ramlau-Hansen

A estimação das funções intensidades dos processos simulados (dadas anteriormente) serão feitas através do estimador (de “kernel”) proposto na Seção 3.5 em (3.32) que foi visto ser um caso particular do estimador de Ramlau-Hansen, estudado no Capítulo 3. Para estimar a função intensidade $\alpha(t)$, fixamos uma função “kernel” e um parâmetro “window” b_n . O correspondente estimador será baseado nos τ_i gerados.

Utilizaremos três tipos de funções “kernel”: a função “kernel” de Epanechnikov's (muito citada na literatura, por exemplo: Ramlau-Hansen (1983a,b), Andersen e Borgan (1984)), $K(t) = 0.75(1 - t^2)$ para $|t| \leq 1$, que no nosso caso será transladada para $[0, 1]$, sendo então expressa por:

$$1 - \quad K_3(t) = 0.75(1 - (1 - 2t)^2) \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1;$$

e outras duas funções “kernel” sugeridas por Rohrer⁽¹⁾, que são:

$$2 - \quad K_2(t) = 6 | -t || t - 1 | \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1$$

$$3 - \quad K_1(t) = 30(-t)^2(t - 1)^2 \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1$$

Essas funções estão ilustradas no Gráfico 1 dado a seguir.

Nota (1): Prof. Dr. do IMECC - UNICAMP.

O primeiro fato observado no nosso estudo, fazendo uma análise através das Tabelas 1 a 9, é que a influência da função “kernel” é deveras importante. Isso contradiz o trabalho de Abdous (1990), onde existe a seguinte afirmação “a escolha da função “kernel” é não crucial”. Por exemplo no nosso caso, a função intensidade $\alpha_1(t)$ estimada através das funções “kernel” $K_2(t)$ e $K_1(t)$, parecem ser mais apropriadas que a função “kernel” $K_3(t)$, ver Tabelas 1 a 3 e note através do Gráfico 1 que os formatos das três funções “kernel” são semelhantes.

A Tabela 10 e os Gráficos 2 e 3 dadas a seguir, ilustram a influência da função “kernel”.

Tabela 10 - $\hat{\alpha}_1(t)$, $K_3(t)$, $K_2(t)$, $n = 50$, $b = 1.70$ e $\alpha_1(t)$

$n = 50$							
t	$K_3(t)$			$K_2(t)$			
	$\hat{\alpha}(t)$	$\hat{\sigma}(t)$	$\alpha(t)$	$\hat{\alpha}(t)$	$\hat{\sigma}(t)$	$\alpha(t)$	
$b = 1.70$	0.0	0.00	0.00	13.00	12.96	5.15	13.00
	0.1	0.05	0.55	12.24	10.24	4.25	12.24
	0.2	0.11	0.72	11.53	8.10	3.46	11.53
	0.3	0.13	0.85	10.86	6.50	2.77	10.86
	0.4	0.15	0.91	10.23	5.41	2.23	10.23
	0.5	0.17	0.95	9.63	4.74	1.85	9.63
	0.6	0.17	0.95	9.07	4.48	1.67	9.07
	0.7	0.16	0.99	8.54	4.52	1.67	8.54
	0.8	0.19	0.95	8.04	4.87	1.80	8.44
	0.9	0.22	0.90	7.58	5.36	1.96	7.58
	1.0	0.17	0.93	7.13	6.01	2.13	7.13

Gráfico 2 - $\hat{\alpha}_1(t)$, $\pm 2.0\hat{\sigma}(t)$, $K_3(t)$, $n = 50$, $b = 1.70$ e $\alpha_1(t)$

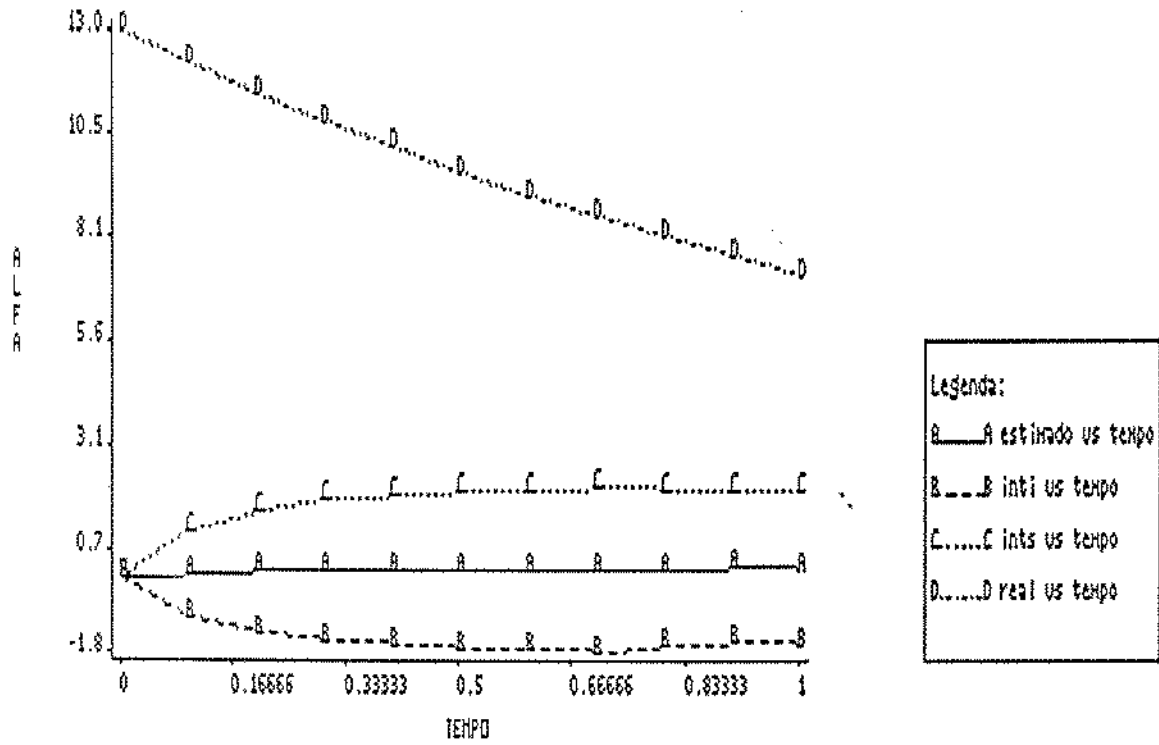
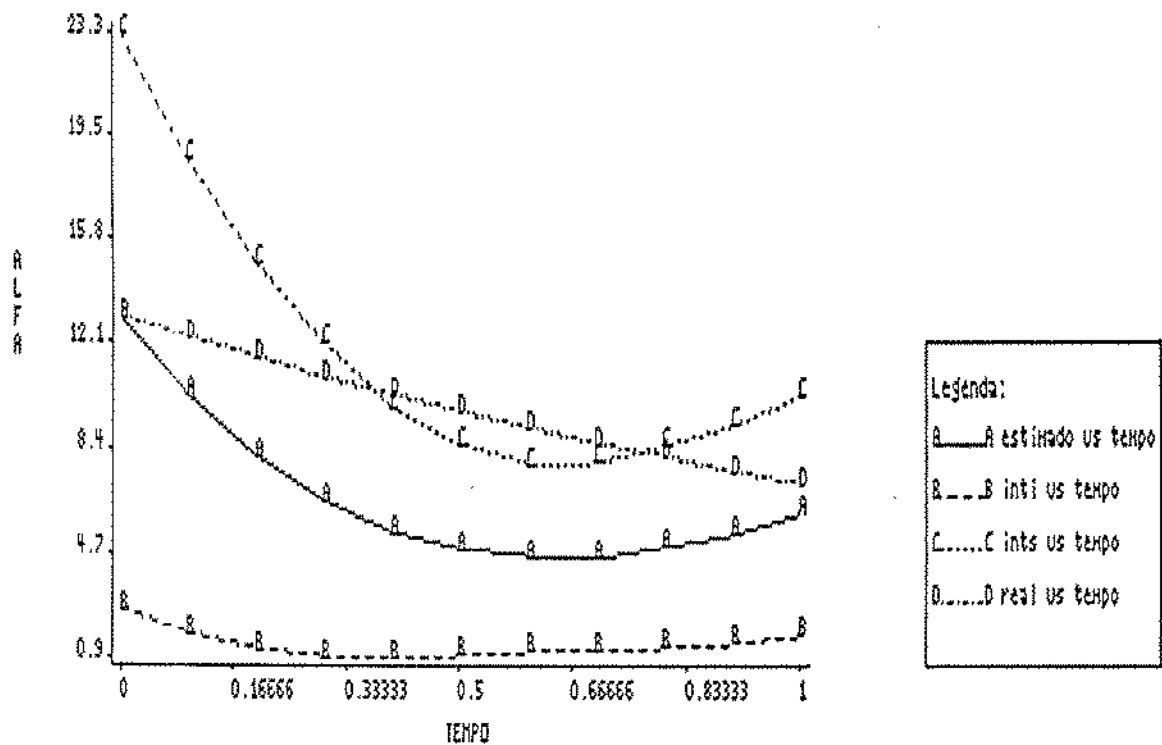


Gráfico 3 - $\hat{\alpha}_1(t)$, $\pm 2.0\hat{\sigma}(t)$, $K_2(t)$, $n = 50$, $b = 1.70$ e $\alpha_1(t)$



Existem vários trabalhos [tais como: Epanechnikov (1969), Scott (1979), Ramlaui-Hansen (1983b), Bowman (1985), Abdous (1990)] que sugerem a escolha do parâmetro “window” b . No nosso estudo essas sugestões não foram satisfatórias. Isso indica que a escolha desse parâmetro depende fortemente da situação considerada. Por exemplo, o trabalho de Scott (1979), sugere que a escolha “ótima” de b seria $b_n = 3.49 S n^{-1/3}$ onde s é o desvio padrão dos τ_i , isto é,

$$S = \left(\sum_{i=1}^n \frac{(\tau_i - \bar{\tau})^2}{n-1} \right)^{1/2}$$

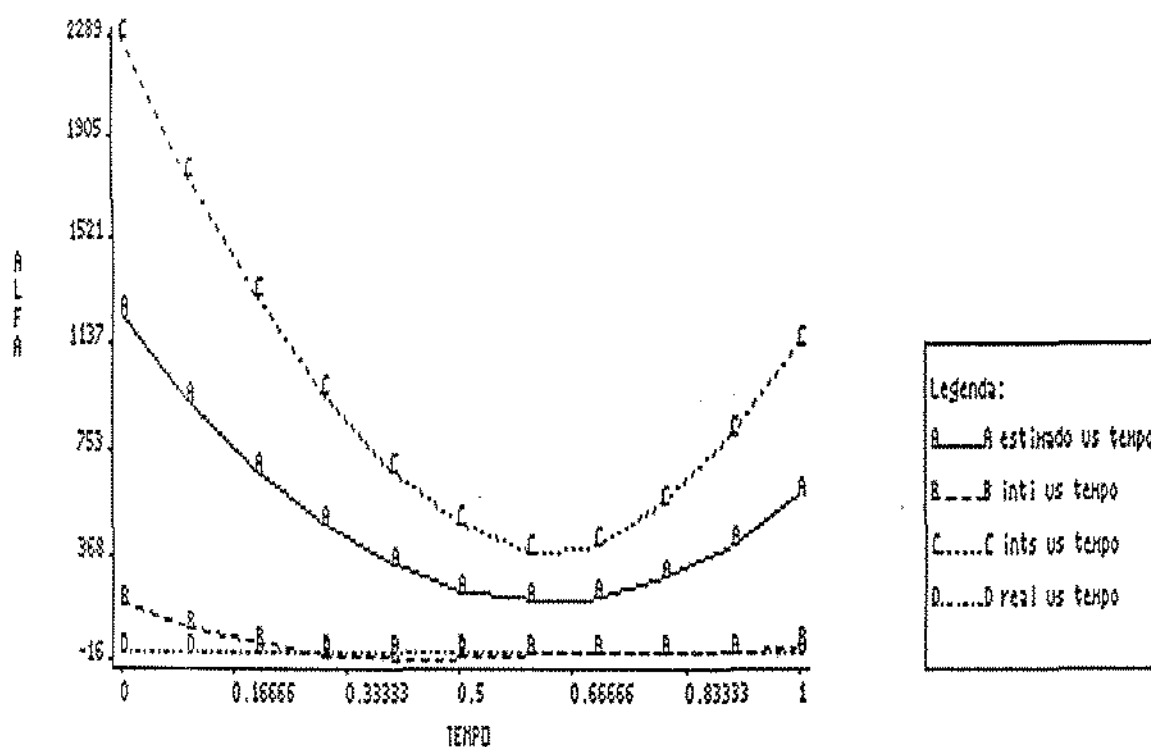
onde $\bar{\tau} = \sum_{i=1}^n \tau_i / n$. Onde os τ_i são os tempos de ocorrência de eventos gerados através do processo de Poisson não homogêneo com intensidades $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ e $\alpha_3(t)$ dadas anteriormente.

Ilustraremos este fato tomando a função $\alpha_1(t)$ para $n = 50$ onde o método de “Scott” nos dá $b_n = 3.49S n^{-1/3}$ igual a 0.272794. Utilizando a função “kernel” $K_2(t)$, obtivemos as seguintes estimativas para $\hat{\alpha}(t)$, ± 2.0 do desvio padrão de $\hat{\alpha}(t)$ e $\alpha(t)$ para $0 \leq t \leq 1$, ilustradas na Tabela 11 e no Gráfico 4 dados a seguir, indicando que a escolha de b_n é não apropriada.

Tabela 11 - $\hat{\alpha}_1(t)$, $\hat{\sigma}_1(t)$, $K_2(t)$, $n = 50$, $b_n = 0.272794$ e $\alpha_1(t)$

$n = 50$				
t	$K_2(t)$			$\alpha(t)$
	$\hat{\alpha}_1(t)$	$\hat{\sigma}_1(t)$		
0.0	1235.72	526.45		13.00
0.1	927.67	415.85		12.24
0.2	679.04	320.58		11.53
0.3	478.50	239.78		10.86
0.4	330.08	172.82		10.23
$b = 0.272794$ 0.5	236.00	120.86		9.63
0.6	197.07	91.65		9.07
0.7	213.00	99.36		8.54
0.8	284.61	140.03		8.04
0.9	408.66	200.38		7.58
1.0	590.07	375.06		7.13

Gráfico 4 - $\hat{\alpha}_1(t)$, $\pm 2.0\hat{\sigma}_1(t)$, $K_2(t)$, $n = 50$, $b =$ e $\alpha_1(t)$



O mesmo foi observado para outras funções intensidades e outras funções “kernel”.

Fazendo-se estudos por tentativas e erros, os valores da “window” b , utilizados na estimação da função intensidade $\alpha(t)$, que se mostraram satisfatórios para as funções “kernel” $K_1(t)$ e $K_3(t)$, foram $b^* = 1.48$, $b^{**} = 1.90$ e $b^{***} = 2.28$.

Uma observação a ser feita é que, como foi visto da teoria assintótica do estimador de Ramlau-Hansen dada na Seção 3.5, que o parâmetro t tem suporte entre b e $1 - b$, e no caso das intensidades $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ e $\alpha_3(t)$, t varia de 0 a 1, parecendo ser contraditório, mas continua sendo válido, pois tomando $b_n = b/n^\delta$, $\delta < 1/2$, temos quando $n \rightarrow \infty$, que $b/n^\delta \leq t \leq 1 - b/n^\delta$ implica em $0 \leq t \leq 1$.

As Tabelas 1 a 9, evidenciam que a variância estimada de $\hat{\alpha}(t)$ também é fortemente influenciada pela escolha do parâmetro “window” b . Notamos também que não existem diferenças significativas nas estimativas de $\hat{\alpha}(t)$ e $\hat{\sigma}(t)$ para os diferentes tamanhos de amostra ($n = 10, 25$ e 50).

As Tabelas 1 a 3, por exemplo, para a função intensidade $\alpha_1(t)$ sugerem que se escolhermos b entre 1.48 e 1.90 e a função “kernel” $K_2(t)$, as estimativas de $\hat{\alpha}(t)$ serão mais apropriadas. Para $b = 1.55$, o intervalo $\hat{\alpha}_1(t) \pm 2.0 \hat{\sigma}(t)$ contém o valor real de $\alpha_1(t)$. Isto é ilustrado no Gráfico 5, a seguir.

Para a função “kernel” $K_1(t)$, se tomarmos b em torno de 1.48, para a função intensidade $\alpha_1(t)$, podemos melhorar os valores das estimativas, e nesse caso para $b = 1.65$, temos os valores de $\hat{\alpha}_1(t)$, ± 2.0 do desvio padrão de $\hat{\alpha}(t)$ e o valor real de $\alpha_1(t)$, ilustrados no Gráfico 6, a seguir.

Gráfico 5 - $\hat{\alpha}_1(t) \pm 2.0\hat{\sigma}(t)$, $K_2(t)$, $n = 50$, $b = 1.55$ e $\alpha_1(t)$

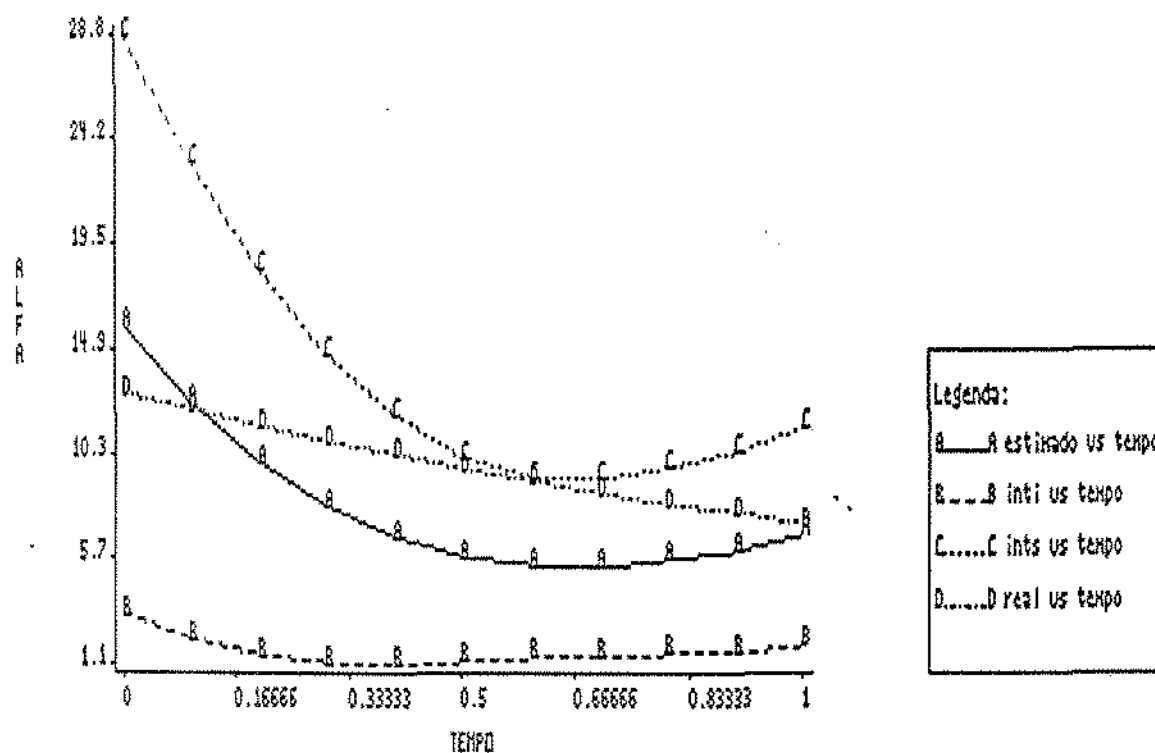
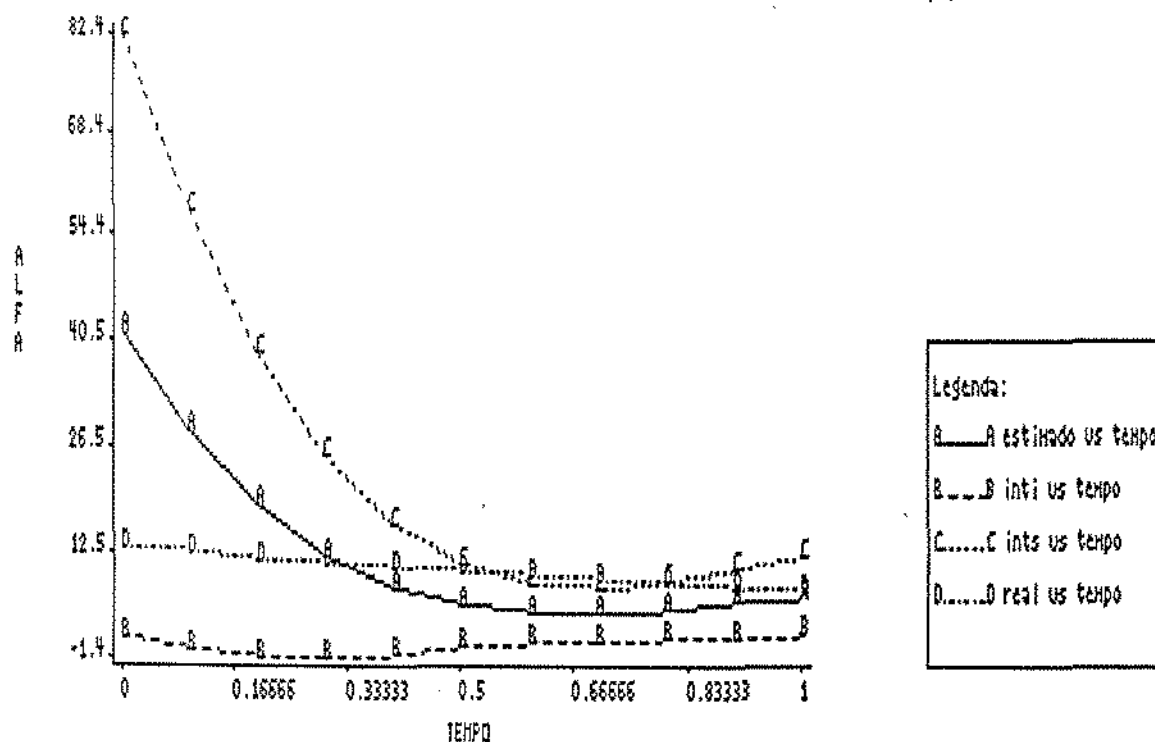
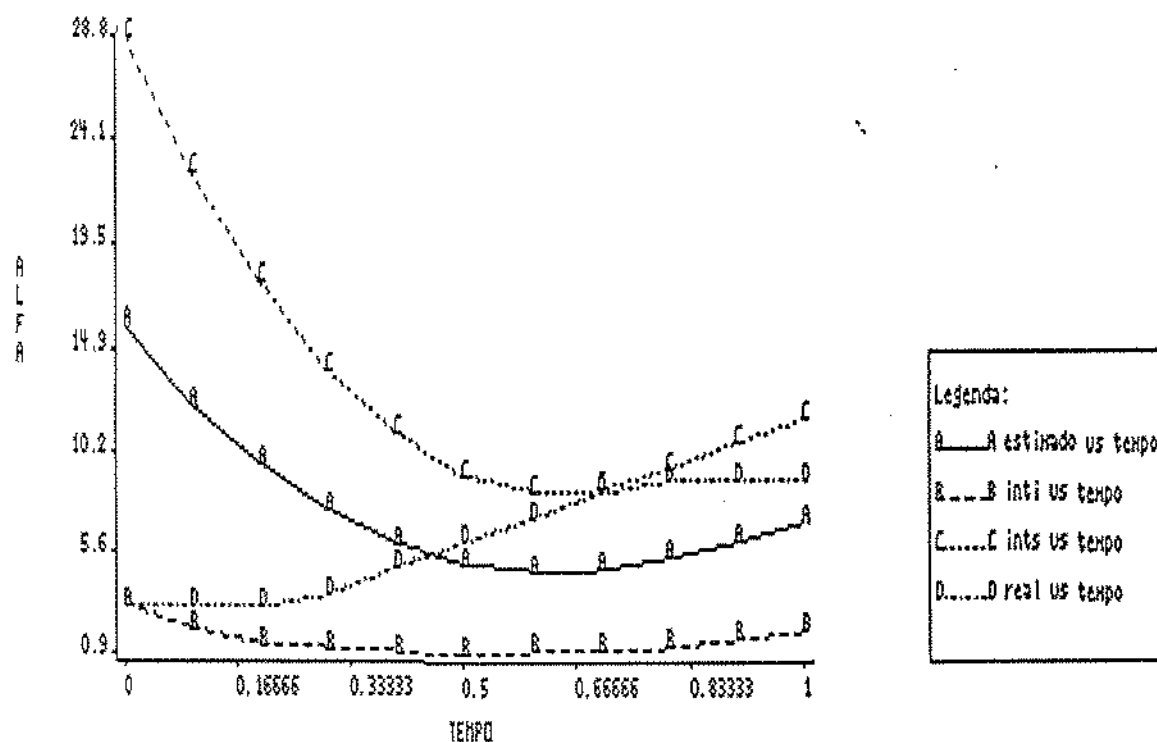


Gráfico 6 - $\hat{\alpha}_1(t)$, $\pm 2.0\hat{\sigma}(t)$, $K_1(t)$, $n = 50$, $b = 1.65$ e $\alpha_1(t)$



Também no caso da função crescente $\alpha_2(t)$, observamos através das Tabelas 4 a 6, que as funções "kernel" $K_2(t)$ e $K_1(t)$, parecem ser melhores do que a função "kernel" $K_3(t)$ e fazendo um refinamento em b , com função "kernel" $K_2(t)$, notamos que para $b = 1.60$, o estimador parece ser mais apropriado, ver Gráfico 7, abaixo.

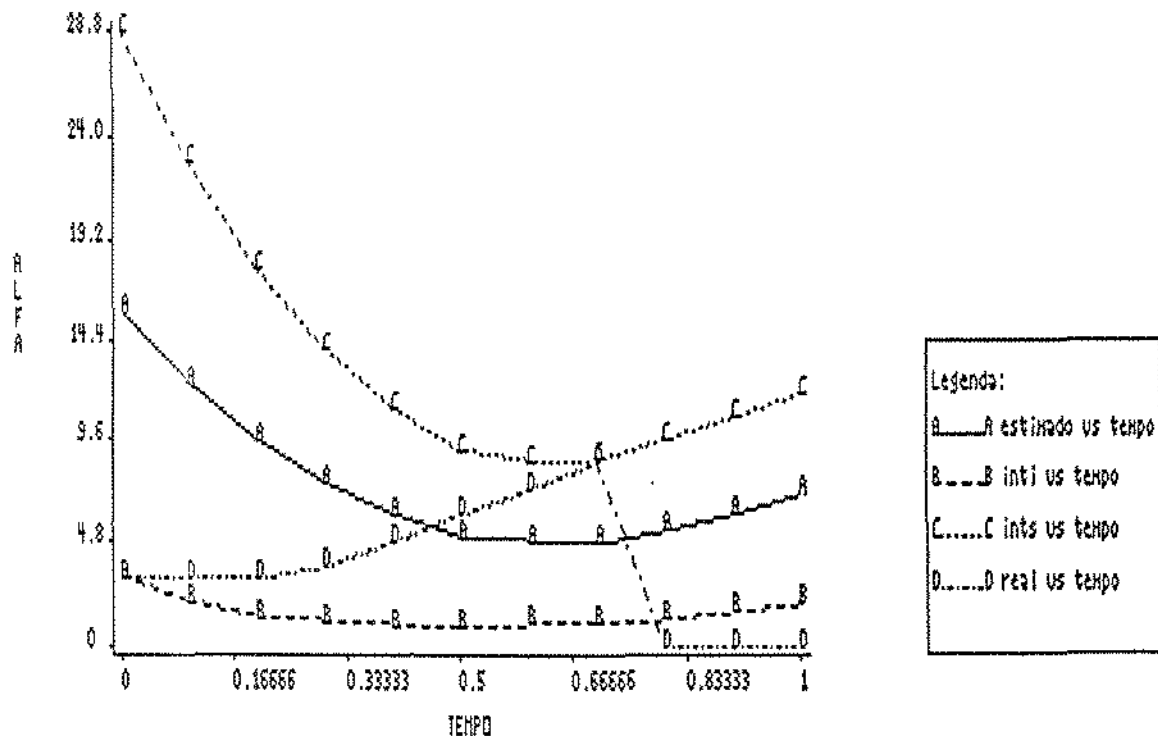
Gráfico 7 - $\hat{\alpha}_2(t)$, $\pm 2.0\hat{\sigma}(t)$, $K_2(t)$, $n = 50$, $b = 1.60$ e $\alpha_2(t)$



Para a função intensidade $\alpha_3(t)$, onde a função intensidade acumulada não possui inversa (foi utilizado o algoritmo de simulação 2, dado no Capítulo 2), foi observado também que as funções "kernel" $K_2(t)$ e $K_3(t)$ parecem ser mais apropriadas, ver Tabelas 7 a 9.

Através das tabelas citadas acima, notamos para a função "kernel" $K_2(t)$ que se tomarmos $b = 1.48$, o estimador parece ser mais apropriado. Ilustramos a função $\hat{\alpha}_3(t)$, ± 2.0 do desvio padrão de $\hat{\alpha}(t)$ e o valor real de $\alpha_3(t)$, através do Gráfico 8, dado a seguir.

Gráfico 8 - $\hat{\alpha}_3(t)$, $\pm 2.0\hat{\sigma}(t)$, $K_2(t)$, $n = 50$, $b = 1.48$ e $\alpha_3(t)$



Através dos Gráficos 4 a 8 observamos a grande influência de b nas estimativas da variância de $\hat{\alpha}(t)$, pois a partir de $t > 0.5$ elas diminuem, isto é, a amplitude do intervalo de confiança para $\hat{\alpha}(t)$ com $0.5 \leq t < 1$ é menor do que para $0 \leq t \leq 0.5$

Tabela 1 - Função intensidade $\alpha_1(t)$ com $n = 10$

$n = 10$										
	t	$K_3(t)$			$K_2(t)$			$K_1(t)$		
		$\hat{\alpha}(t)$	$\hat{\sigma}(t)$	$\alpha(t)$	$\hat{\alpha}(t)$	$\hat{\sigma}(t)$	$\alpha(t)$	$\hat{\alpha}(t)$	$\hat{\sigma}(t)$	$\alpha(t)$
$b^* = 1.48$	0.0	0.00	0.00	13.00	19.02	7.50	13.00	69.44	33.24	13.00
	0.1	0.02	0.65	12.24	15.00	6.21	12.24	47.63	23.88	12.24
	0.2	0.14	1.03	11.53	11.92	5.06	11.53	31.64	16.61	11.53
	0.3	0.15	0.95	10.86	9.51	4.07	10.86	20.43	11.09	10.86
	0.4	0.10	1.09	10.23	7.84	3.25	10.23	13.05	7.06	10.23
	0.5	0.17	1.05	9.63	6.79	2.64	9.63	8.62	4.29	9.63
	0.6	0.18	1.03	9.07	6.22	2.28	9.07	6.34	2.71	9.07
	0.7	0.26	1.00	8.54	6.03	2.15	8.54	5.71	2.25	8.54
	0.8	0.22	0.98	8.04	6.09	2.20	8.44	5.98	2.40	8.44
	0.9	0.26	0.94	7.58	6.40	2.33	7.58	6.75	2.67	7.58
	1.0	0.16	1.05	7.13	7.06	2.49	7.13	7.63	2.86	7.13
$b^{**} = 1.90$	0.0	0.00	0.00	13.00	10.74	4.21	13.00	27.98	13.26	13.00
	0.1	0.02	0.51	12.24	8.51	3.50	12.24	19.40	9.62	12.24
	0.2	0.11	0.65	11.53	6.82	2.87	11.53	13.05	6.77	11.53
	0.3	0.12	0.78	10.86	5.51	2.33	10.86	8.58	4.59	10.86
	0.4	0.08	0.90	10.23	4.62	1.89	10.23	5.64	2.97	10.23
	0.5	0.14	0.89	9.63	4.11	1.58	9.63	3.94	1.87	9.63
	0.6	0.15	0.89	9.07	3.89	1.42	9.07	3.19	1.82	9.07
	0.7	0.21	0.84	8.54	3.90	1.41	8.54	3.16	1.29	8.54
	0.8	0.18	0.88	8.04	4.09	1.51	8.04	3.62	1.52	8.04
	0.9	0.21	0.85	7.58	4.47	1.66	7.58	4.36	1.79	7.58
	1.0	0.13	0.92	7.13	5.08	1.82	7.13	5.24	2.03	7.13
$b^{***} = 2.28$	0.0	0.00	0.00	13.00	7.13	2.78	13.00	14.66	6.87	13.00
	0.1	0.01	0.42	12.24	5.67	2.32	12.24	10.24	5.07	12.24
	0.2	0.09	0.55	11.53	4.57	1.91	11.53	6.94	3.58	11.53
	0.3	0.10	0.67	10.86	3.72	1.56	10.86	4.61	2.45	10.86
	0.4	0.07	0.77	10.23	3.16	1.27	10.23	3.09	1.60	10.23
	0.5	0.12	0.78	2.63	2.84	1.08	9.63	2.24	1.04	9.63
	0.6	0.12	0.79	2.07	2.75	1.00	9.07	1.91	0.79	9.07
	0.7	0.18	0.79	2.54	2.81	1.02	8.54	2.00	0.84	8.54
	0.8	0.15	0.79	2.04	3.00	1.12	8.04	2.39	1.02	8.04
	0.9	0.18	0.78	2.58	3.33	1.25	7.58	2.98	1.24	7.58
	1.0	0.11	0.84	2.13	3.85	1.39	7.13	3.69	1.46	7.13

Tabela 2 - Função intensidade $\alpha_1(t)$ com $n = 25$

$n = 25$										
	t	$K_3(t)$			$K_2(t)$			$K_1(t)$		
		$\hat{\alpha}(t)$	$\hat{\sigma}(t)$	$\alpha(t)$	$\hat{\alpha}(t)$	$\hat{\sigma}(t)$	$\alpha(t)$	$\hat{\alpha}(t)$	$\hat{\sigma}(t)$	$\alpha(t)$
$b^* = 1.48$	0.0	0.00	0.00	13.00	18.49	7.37	13.00	67.12	32.42	13.00
	0.1	0.05	0.63	12.24	14.60	6.10	12.24	45.96	23.27	12.24
	0.2	0.12	0.83	11.53	11.61	4.97	11.53	30.48	16.15	11.53
	0.3	0.15	0.95	10.86	9.34	3.99	10.86	19.65	10.78	10.86
	0.4	0.15	1.00	10.23	7.71	3.19	10.23	12.53	6.86	10.23
	0.5	0.20	1.00	9.63	6.64	2.59	9.63	8.29	4.19	9.63
	0.6	0.19	1.00	9.07	6.01	2.24	9.07	6.18	2.69	9.07
	0.7	0.19	1.03	8.54	5.76	2.12	8.54	5.55	2.25	8.54
	0.8	0.20	1.00	8.04	5.95	2.18	8.44	5.85	2.29	8.44
	0.9	0.26	0.95	7.58	6.33	2.32	7.58	6.62	2.64	7.58
	1.0	0.16	1.04	7.13	6.95	2.46	7.13	7.48	2.81	7.13
$b^{**} = 1.90$	0.0	0.00	0.00	13.00	10.44	1.14	13.00	27.06	12.91	13.00
	0.1	0.04	0.49	12.24	8.29	3.44	12.24	18.74	9.37	12.24
	0.2	0.10	0.67	11.53	6.65	2.82	11.53	12.59	6.59	11.53
	0.3	0.12	0.77	10.86	5.42	2.28	10.86	8.26	4.46	10.86
	0.4	0.12	0.84	10.23	4.55	1.85	10.23	5.43	2.88	10.23
	0.5	0.16	0.86	9.63	4.03	1.55	9.63	3.80	1.83	9.63
	0.6	0.15	0.87	9.07	3.77	1.40	9.07	3.10	1.31	9.07
	0.7	0.16	0.91	8.54	3.76	1.40	8.54	3.09	1.29	8.54
	0.8	0.16	0.89	8.04	4.01	1.50	8.04	3.56	1.52	8.04
	0.9	0.21	0.85	7.58	4.42	1.65	7.58	4.30	1.77	7.58
	1.0	0.13	0.91	7.13	5.01	1.80	7.13	5.16	2.01	7.13
$b^{***} = 2.28$	0.0	0.00	0.00	13.00	6.94	2.73	13.00	14.18	6.87	13.00
	0.1	0.03	0.42	12.24	5.52	2.28	12.24	9.89	5.07	12.24
	0.2	0.08	0.56	11.53	4.45	1.88	11.53	6.70	3.58	11.53
	0.3	0.10	0.67	10.86	3.66	1.53	10.86	4.45	2.45	10.86
	0.4	0.10	0.73	10.23	3.11	1.22	10.23	2.99	1.60	10.23
	0.5	0.14	0.75	2.63	2.80	1.07	9.63	2.17	1.04	9.63
	0.6	0.13	0.77	2.07	2.66	0.99	9.07	1.87	0.79	9.07
	0.7	0.13	0.81	2.54	2.71	1.02	8.54	1.97	0.84	8.54
	0.8	0.14	0.81	2.04	2.95	1.12	8.04	2.36	1.02	8.04
	0.9	0.18	0.78	2.58	3.30	1.24	7.58	2.95	1.24	7.58
	1.0	0.11	0.83	2.13	3.80	1.39	7.13	3.64	1.46	7.13

Tabela 3 - Função intensidade $\alpha_1(t)$ com $n = 50$

$n = 50$										
	t	$K_3(t)$			$K_2(t)$			$K_1(t)$		
		$\hat{\alpha}(t)$	$\hat{\sigma}(t)$	$\alpha(t)$	$\hat{\alpha}(t)$	$\hat{\sigma}(t)$	$\alpha(t)$	$\hat{\alpha}(t)$	$\hat{\sigma}(t)$	$\alpha(t)$
$b^* = 1.48$	0.0	0.00	0.00	13.00	17.81	7.10	13.00	62.19	30.36	13.00
	0.1	0.05	0.64	12.24	14.02	5.85	12.24	42.18	21.68	12.24
	0.2	0.13	0.82	11.53	11.04	4.74	11.53	27.67	14.98	11.53
	0.3	0.16	0.96	10.86	8.80	3.78	10.86	17.64	9.94	10.86
	0.4	0.16	1.02	10.23	7.23	3.01	10.23	11.19	6.30	10.23
	0.5	0.19	1.05	9.63	6.25	2.46	9.63	7.47	3.85	9.63
	0.6	0.19	1.03	9.07	5.78	2.16	9.07	5.77	2.52	9.07
	0.7	0.20	1.05	8.54	5.71	2.10	8.54	5.44	2.21	8.54
	0.8	0.22	1.00	8.04	6.02	2.19	8.44	5.94	2.40	8.44
	0.9	0.26	0.95	7.58	4.50	2.35	7.58	6.83	2.67	7.58
	1.0	0.19	0.98	7.13	7.16	2.50	7.13	7.74	2.86	7.13
$b^{**} = 1.90$	0.0	0.00	0.00	13.00	10.07	3.99	13.00	25.15	12.12	13.00
	0.1	0.04	0.50	12.24	7.97	9.30	12.24	17.24	8.75	12.24
	0.2	0.10	0.66	11.53	6.33	2.69	11.53	11.45	6.12	11.53
	0.3	0.12	0.78	10.86	5.11	2.17	10.86	7.44	4.12	10.86
	0.4	0.13	0.83	10.23	4.29	1.75	10.23	4.87	2.66	10.23
	0.5	0.16	0.88	9.63	3.81	1.48	9.63	3.46	1.70	9.63
	0.6	0.16	0.89	9.07	3.64	1.36	9.07	2.93	1.26	9.07
	0.7	0.15	0.93	8.54	3.73	1.39	8.54	3.05	1.29	8.54
	0.8	0.17	0.90	8.04	4.06	1.51	8.04	3.61	1.53	8.04
	0.9	0.20	0.86	7.58	4.53	1.67	7.58	4.42	1.80	7.58
	1.0	0.16	0.88	7.13	5.15	1.83	7.13	5.32	2.04	7.13
$b^{***} = 2.28$	0.0	0.00	0.00	13.00	6.70	2.64	13.00	13.20	6.30	13.00
	0.1	0.04	0.41	12.24	5.32	2.19	12.24	9.12	4.59	12.24
	0.2	0.08	0.56	11.53	4.24	1.80	11.53	6.11	3.24	11.53
	0.3	0.10	0.66	10.86	3.46	1.46	10.86	4.02	2.20	10.86
	0.4	0.11	0.73	10.23	2.93	1.19	10.23	2.69	1.43	10.23
	0.5	0.13	0.71	2.63	2.65	1.02	9.63	1.98	0.95	9.63
	0.6	0.14	0.80	2.07	2.59	0.97	9.07	1.78	0.76	9.07
	0.7	0.13	0.83	2.54	2.70	1.01	8.54	1.95	0.84	8.54
	0.8	0.15	0.81	2.04	2.99	1.12	8.04	2.40	1.04	8.04
	0.9	0.17	0.80	2.58	3.39	1.26	7.58	3.03	1.26	7.58
	1.0	0.14	0.81	2.13	3.91	1.41	7.13	3.75	1.47	7.13

Tabela 4 - Função intensidade $\alpha_2(t)$ com $n = 10$

$n = 10$										
t	$K_3(t)$			$K_2(t)$			$K_1(t)$			$\alpha(t)$
	$\hat{\alpha}(t)$	$\hat{\sigma}(t)$	$\alpha(t)$	$\hat{\alpha}(t)$	$\hat{\sigma}(t)$	$\alpha(t)$	$\hat{\alpha}(t)$	$\hat{\sigma}(t)$	$\alpha(t)$	
$b^* = 1.48$	0.0	0.00	0.00	3.00	16.71	6.65	3.00	54.44	25.66	3.00
	0.1	0.04	0.63	3.00	13.10	5.42	3.00	36.14	17.88	3.00
	0.2	0.09	0.82	3.00	10.21	4.32	3.00	22.99	11.98	3.00
	0.3	0.10	0.87	3.60	7.95	3.37	3.60	14.04	7.65	3.60
	0.4	0.14	0.86	4.80	6.25	2.61	4.80	8.42	4.62	4.80
	0.5	0.15	0.98	6.00	5.12	2.08	6.00	5.35	2.71	6.00
	0.6	0.14	0.96	7.20	4.68	1.83	7.20	4.15	1.87	7.20
	0.7	0.23	0.91	8.40	4.78	1.85	8.40	4.21	1.89	8.40
	0.8	0.25	0.82	9.00	5.19	2.01	9.00	5.02	2.18	9.00
	0.9	0.19	0.84	9.00	5.99	2.23	9.00	6.15	2.48	9.00
	1.0	0.22	0.77	9.00	6.85	2.42	9.00	7.27	2.72	9.00
$b^{**} = 1.90$	0.0	0.00	0.00	3.00	9.47	3.74	3.00	22.17	10.32	3.00
	0.1	0.04	0.44	3.00	7.47	3.07	3.00	14.90	7.28	3.00
	0.2	0.09	0.60	3.00	8.88	2.46	3.00	9.61	4.94	3.00
	0.3	0.11	0.69	3.60	4.63	1.94	3.60	5.98	3.20	3.60
	0.4	0.19	0.70	4.80	3.71	1.53	4.80	3.71	1.97	4.80
	0.5	0.15	0.83	6.00	3.12	1.26	6.00	2.52	1.23	6.00
	0.6	0.10	0.91	7.20	2.95	1.17	7.20	2.15	0.99	7.20
	0.7	0.15	0.95	8.40	3.12	1.23	8.40	2.39	1.12	8.40
	0.8	0.17	0.90	9.00	3.50	1.39	9.00	3.04	1.38	9.00
	0.9	0.15	0.94	9.00	4.14	1.57	9.00	3.91	1.65	9.00
	1.0	0.22	0.84	9.00	4.87	1.75	9.00	4.86	1.90	9.00
$b^{***} = 2.28$	0.0	0.00	0.00	3.00	5.03	2.18	3.00	11.69	5.40	3.00
	0.1	0.03	0.37	3.00	3.89	1.79	3.00	7.92	3.85	3.00
	0.2	0.08	0.51	3.00	3.15	1.45	3.00	5.16	2.63	3.00
	0.3	0.09	0.59	3.60	2.63	1.17	3.60	3.25	1.72	3.60
	0.4	0.16	0.61	4.80	2.29	0.98	4.80	2.06	1.05	4.80
	0.5	0.12	0.72	6.00	2.19	0.90	6.00	1.46	0.70	6.00
	0.6	0.08	0.80	7.20	2.33	0.92	7.20	1.32	0.61	7.20
	0.7	0.13	0.84	8.40	2.58	1.01	8.40	1.54	0.74	8.40
	0.8	0.15	0.81	9.00	2.91	1.14	9.00	2.01	0.93	9.00
	0.9	0.13	0.85	9.00	3.30	1.27	9.00	2.66	1.15	9.00
	1.0	0.17	0.78	9.00	3.77	1.41	9.00	3.39	1.36	9.00

Tabela 5 - Função intensidade $\alpha_2(t)$ com $n = 25$

$n = 25$										
	t	$K_3(t)$			$K_2(t)$			$K_1(t)$		
		$\hat{\alpha}(t)$	$\hat{\sigma}(t)$	$\alpha(t)$	$\hat{\alpha}(t)$	$\hat{\sigma}(t)$	$\alpha(t)$	$\hat{\alpha}(t)$	$\hat{\sigma}(t)$	$\alpha(t)$
$b^* = 1.48$	0.0	0.00	0.00	3.00	16.27	6.65	3.00	52.82	25.41	3.00
	0.1	0.04	0.61	3.00	12.69	5.32	3.00	35.05	17.68	3.00
	0.2	0.11	0.76	3.00	9.89	4.26	3.00	22.32	11.92	3.00
	0.3	0.14	0.87	3.60	7.78	3.33	3.60	13.68	7.64	3.60
	0.4	0.22	0.87	4.80	6.16	2.56	4.80	8.28	4.64	4.80
	0.5	0.16	1.00	6.00	5.11	2.09	6.00	5.37	2.75	6.00
	0.6	0.15	1.05	7.20	4.75	1.86	7.20	4.25	1.93	7.20
	0.7	0.18	1.06	8.40	4.84	1.89	8.40	4.35	1.94	8.40
	0.8	0.20	1.05	9.00	5.29	2.04	9.00	5.15	2.23	9.00
	0.9	0.21	1.03	9.00	6.05	2.25	9.00	6.25	2.52	9.00
	1.0	0.30	0.91	9.00	6.85	2.44	9.00	7.32	2.74	9.00
$b^{**} = 1.90$	0.0	0.00	0.00	3.00	9.22	3.69	3.00	21.51	10.22	3.00
	0.1	0.03	0.49	3.00	7.24	3.02	3.00	14.44	7.22	3.00
	0.2	0.09	0.61	3.00	5.69	2.42	3.00	9.32	4.91	3.00
	0.3	0.11	0.71	3.60	4.54	1.92	3.60	5.83	3.20	3.60
	0.4	0.17	0.73	4.80	3.66	1.52	4.80	3.65	1.98	4.80
	0.5	0.13	0.84	6.00	3.12	1.27	6.00	2.53	1.24	6.00
	0.6	0.12	0.90	7.20	3.00	1.18	7.20	2.21	1.01	7.20
	0.7	0.15	0.92	8.40	3.16	1.25	8.40	2.48	1.15	8.40
	0.8	0.16	0.92	9.00	3.57	1.41	9.00	3.13	1.41	9.00
	0.9	0.17	0.92	9.00	4.19	1.59	9.00	3.99	1.68	9.00
	1.0	0.24	0.83	9.00	4.88	1.77	9.00	4.93	1.93	9.00
$b^{***} = 2.28$	0.0	0.00	0.00	3.00	6.14	2.45	3.00	11.34	5.35	3.00
	0.1	0.03	0.41	3.00	4.84	2.01	3.00	7.68	3.81	3.00
	0.2	0.07	0.52	3.00	3.83	1.62	3.00	5.00	2.62	3.00
	0.3	0.09	0.61	3.60	3.08	1.29	3.60	3.16	1.72	3.60
	0.4	0.15	0.64	4.80	2.51	1.03	4.80	2.03	1.08	4.80
	0.5	0.11	0.73	6.00	2.18	0.88	6.00	1.46	0.71	6.00
	0.6	0.10	0.78	7.20	2.13	0.84	7.20	1.36	0.63	7.20
	0.7	0.12	0.82	8.40	2.29	0.91	8.40	1.59	0.76	8.40
	0.8	0.13	0.83	9.00	2.62	1.05	9.00	2.07	0.96	9.00
	0.9	0.15	0.83	9.00	3.12	1.20	9.00	2.72	1.17	9.00
	1.0	0.21	0.76	9.00	3.68	1.34	9.00	3.44	1.38	9.00

Tabela 6 - Função intensidade $\alpha_2(t)$ com $n = 50$

$n = 50$										
	t	$K_3(t)$			$K_2(t)$			$K_1(t)$		
		$\hat{\alpha}(t)$	$\hat{\sigma}(t)$	$\alpha(t)$	$\hat{\alpha}(t)$	$\hat{\sigma}(t)$	$\alpha(t)$	$\hat{\alpha}(t)$	$\hat{\sigma}(t)$	$\alpha(t)$
$b^* = 1.48$	0.0	0.00	0.00	3.00	15.94	6.42	3.00	50.83	24.58	3.00
	0.1	0.05	0.57	3.00	12.40	5.22	3.00	33.56	17.11	3.00
	0.2	0.12	0.76	3.00	9.62	4.15	3.00	21.25	11.46	3.00
	0.3	0.15	0.90	3.60	7.52	3.24	3.60	12.96	7.31	3.60
	0.4	0.18	0.93	4.80	5.98	2.53	4.80	7.84	4.42	4.80
	0.5	0.16	1.02	6.00	5.02	2.04	6.00	5.13	2.62	6.00
	0.6	0.17	1.06	7.20	4.72	1.84	7.20	4.18	1.89	7.20
	0.7	0.20	1.06	8.40	4.85	1.89	8.40	4.38	1.95	8.40
	0.8	0.21	1.05	9.00	5.36	2.06	9.00	5.25	2.25	9.00
	0.9	0.22	1.01	9.00	6.14	2.28	9.00	6.38	2.55	9.00
	1.0	0.32	0.88	9.00	6.94	2.46	9.00	7.45	2.78	9.00
$b^{**} = 1.90$	0.0	0.00	0.00	3.00	9.05	3.62	3.00	20.72	9.89	3.00
	0.1	0.04	0.45	3.00	7.08	2.96	3.00	13.85	6.97	3.00
	0.2	0.09	0.61	3.00	5.54	2.37	3.00	8.89	4.73	3.00
	0.3	0.12	0.73	3.60	4.39	1.87	3.60	5.23	3.06	3.60
	0.4	0.15	0.78	4.80	3.56	1.48	4.80	3.46	1.89	4.80
	0.5	0.13	0.86	6.00	3.07	1.24	6.00	2.43	1.20	6.00
	0.6	0.14	0.91	7.20	2.99	1.17	7.20	2.18	1.00	7.20
	0.7	0.16	0.92	8.40	3.17	1.27	8.40	2.50	1.16	8.40
	0.8	0.17	0.92	9.00	3.62	1.42	9.00	3.19	1.42	9.00
	0.9	0.18	0.90	9.00	4.26	1.58	9.00	4.07	1.70	9.00
	1.0	0.26	0.81	9.00	4.94	1.78	9.00	5.01	1.95	9.00
$b^{***} = 2.28$	0.0	0.00	0.00	3.00	6.02	2.40	3.00	10.94	5.18	3.00
	0.1	0.03	0.37	3.00	4.73	1.97	3.00	7.37	3.68	3.00
	0.2	0.08	0.52	3.00	3.72	1.58	3.00	4.77	2.52	3.00
	0.3	0.10	0.62	3.60	2.98	1.26	3.60	3.01	1.65	3.60
	0.4	0.13	0.67	4.80	2.44	1.00	4.80	1.93	1.03	4.80
	0.5	0.11	0.75	6.00	2.14	0.86	6.00	1.41	0.68	6.00
	0.6	0.12	0.80	7.20	2.13	0.84	7.20	1.34	0.62	7.20
	0.7	0.13	0.82	8.40	2.30	0.92	8.40	1.61	0.76	8.40
	0.8	0.15	0.83	9.00	2.66	1.05	9.00	2.11	0.96	9.00
	0.9	0.15	0.82	9.00	3.17	1.21	9.00	2.77	1.18	9.00
	1.0	0.22	0.76	9.00	3.73	1.36	9.00	3.50	1.39	9.00

Tabela 7 - Função intensidade $\alpha_3(t)$ com $n = 10$

$n = 10$										
	t	$K_3(t)$			$K_2(t)$			$K_1(t)$		
		$\hat{\alpha}(t)$	$\hat{\sigma}(t)$	$\alpha(t)$	$\hat{\alpha}(t)$	$\hat{\sigma}(t)$	$\alpha(t)$	$\hat{\alpha}(t)$	$\hat{\sigma}(t)$	$\alpha(t)$
$b^* = 1.48$	0.0	0.00	0.00	3.00	16.71	6.65	3.00	54.44	25.66	3.00
	0.1	0.05	0.57	3.00	13.10	5.42	3.00	36.14	17.88	3.00
	0.2	0.11	0.74	3.00	10.21	4.32	3.00	22.99	11.98	3.00
	0.3	0.14	0.84	3.60	7.95	3.38	3.60	14.04	7.65	3.60
	0.4	0.24	0.83	4.80	6.25	2.61	4.80	8.42	4.62	4.80
	0.5	0.18	0.98	6.00	5.12	2.09	6.00	5.35	2.71	6.00
	0.6	0.12	1.08	7.20	4.68	1.83	7.20	4.15	1.87	7.20
	0.7	0.19	1.10	8.40	4.78	1.85	8.40	4.21	1.89	8.40
	0.8	0.22	1.02	0.00	5.19	2.01	0.00	5.02	2.18	0.00
	0.9	0.19	1.07	0.00	5.99	2.23	0.00	6.15	2.48	0.00
	1.0	0.27	0.92	0.00	6.86	2.42	0.00	7.27	2.72	0.00
$b^{**} = 1.90$	0.0	0.00	0.00	3.00	9.47	3.74	3.00	22.17	10.32	3.00
	0.1	0.04	0.44	3.00	7.47	3.07	3.00	14.90	7.28	3.00
	0.2	0.09	0.60	3.00	5.88	2.46	3.00	9.61	4.94	3.00
	0.3	0.11	0.69	3.60	4.63	1.94	3.60	5.98	3.20	3.60
	0.4	0.19	0.70	4.80	3.71	1.53	4.80	3.71	1.97	4.80
	0.5	0.15	0.83	6.00	3.12	1.26	6.00	2.52	1.23	6.00
	0.6	0.10	0.91	7.20	2.95	1.17	7.20	2.15	0.99	7.20
	0.7	0.15	0.95	8.40	3.12	1.23	8.40	2.39	1.12	8.40
	0.8	0.17	0.90	0.00	3.50	1.39	0.00	3.04	1.38	0.00
	0.9	0.15	0.94	0.00	4.14	1.57	0.00	3.91	1.65	0.00
	1.0	0.22	0.84	0.00	4.87	1.75	0.00	4.86	1.90	0.00
$b^{***} = 2.28$	0.0	0.00	0.00	3.00	6.03	2.48	3.00	11.69	5.40	3.00
	0.1	0.03	0.37	3.00	5.00	2.04	3.00	7.92	3.85	3.00
	0.2	0.08	0.51	3.00	3.95	1.65	3.00	5.16	2.63	3.00
	0.3	0.09	0.59	3.60	2.54	1.31	3.60	3.25	1.72	3.60
	0.4	0.16	0.61	4.80	2.17	1.04	4.80	2.06	1.05	4.80
	0.5	0.12	0.72	6.00	2.10	0.88	6.00	1.46	0.70	6.00
	0.6	0.08	0.80	7.20	2.26	0.83	7.20	1.32	0.61	7.20
	0.7	0.13	0.84	8.40	2.57	0.90	8.40	1.54	0.74	8.40
	0.8	0.15	0.81	0.00	3.08	1.03	0.00	2.01	0.93	0.00
	0.9	0.13	0.85	0.00	3.67	1.18	0.00	2.66	1.15	0.00
	1.0	0.19	0.78	0.00	3.77	1.34	0.00	3.39	1.36	0.00

Tabela 8 - Função intensidade $\alpha_3(t)$ com $n = 25$

$n = 25$										
t	$K_3(t)$			$K_2(t)$			$K_1(t)$			$\alpha(t)$
	$\hat{\alpha}(t)$	$\hat{\sigma}(t)$	$\alpha(t)$	$\hat{\alpha}(t)$	$\hat{\sigma}(t)$	$\alpha(t)$	$\hat{\alpha}(t)$	$\hat{\sigma}(t)$	$\alpha(t)$	
$b^* = 1.48$	0.0	0.00	0.00	3.00	16.27	6.55	3.00	52.82	25.41	3.00
	0.1	0.04	0.61	3.00	12.69	5.33	3.00	35.05	17.68	3.00
	0.2	0.11	0.76	3.00	9.89	4.26	3.00	22.32	11.92	3.00
	0.3	0.14	0.87	3.60	7.78	3.33	3.60	13.68	7.64	3.60
	0.4	0.22	0.87	4.80	6.16	2.60	4.80	8.28	4.64	4.80
	0.5	0.16	1.00	6.00	5.11	2.09	6.00	5.37	2.75	6.00
	0.6	0.15	1.05	7.20	4.75	1.86	7.20	4.25	1.93	7.20
	0.7	0.18	1.06	8.40	4.84	1.89	8.40	4.35	1.94	8.40
	0.8	0.20	1.05	0.00	5.29	2.04	0.00	5.15	1.23	0.00
	0.9	0.21	1.03	0.00	6.05	2.25	0.00	6.25	2.52	0.00
	1.0	0.30	0.90	0.00	6.85	2.44	0.00	7.32	2.74	0.00
$b^{**} = 1.90$	0.0	0.00	0.00	3.00	9.22	3.68	3.00	21.51	10.22	3.00
	0.1	0.03	0.49	3.00	7.24	3.02	3.00	14.44	7.22	3.00
	0.2	0.09	0.61	3.00	5.69	2.42	3.00	9.32	4.91	3.00
	0.3	0.11	0.71	3.60	4.54	1.92	3.60	5.83	3.20	3.60
	0.4	0.17	0.73	4.80	3.66	1.52	4.80	3.65	1.98	4.80
	0.5	0.13	0.84	6.00	3.12	1.27	6.00	2.53	1.24	6.00
	0.6	0.12	0.89	7.20	3.00	1.18	7.20	2.21	1.01	7.20
	0.7	0.15	0.92	8.40	3.16	1.25	8.40	2.48	1.15	8.40
	0.8	0.16	0.92	0.00	3.57	1.41	0.00	3.13	1.41	0.00
	0.9	0.17	0.92	0.00	4.19	1.59	0.00	3.99	1.68	0.00
	1.0	0.24	0.83	0.00	4.88	1.77	0.00	4.93	1.93	0.00
$b^{***} = 2.28$	0.0	0.00	0.00	3.00	6.14	2.45	3.00	11.34	5.35	3.00
	0.1	0.03	0.41	3.00	4.84	2.01	3.00	7.68	3.81	3.00
	0.2	0.07	0.52	3.00	3.83	1.62	3.00	5.00	2.62	3.00
	0.3	0.09	0.61	3.60	3.08	1.30	3.60	3.16	1.72	3.60
	0.4	0.15	0.64	4.80	2.51	1.03	4.80	2.03	1.08	4.80
	0.5	0.11	0.73	6.00	2.18	0.88	6.00	1.46	0.71	6.00
	0.6	0.10	0.78	7.20	2.13	0.84	7.20	1.36	0.63	7.20
	0.7	0.12	0.82	8.40	2.29	0.91	8.40	1.59	0.76	8.40
	0.8	0.13	0.83	0.00	2.62	1.05	0.00	2.07	0.95	0.00
	0.9	0.15	0.83	0.00	3.12	1.19	0.00	2.72	1.17	0.00
	1.0	0.21	0.76	0.00	3.68	1.34	0.00	3.44	1.38	0.00

Tabela 9 - Função intensidade $\alpha_3(t)$ com $n = 50$

$n = 50$										
	t	$K_3(t)$			$K_2(t)$			$K_1(t)$		
		$\hat{\alpha}(t)$	$\hat{\sigma}(t)$	$\alpha(t)$	$\hat{\alpha}(t)$	$\hat{\sigma}(t)$	$\alpha(t)$	$\hat{\alpha}(t)$	$\hat{\sigma}(t)$	$\alpha(t)$
$b^* = 1.48$	0.0	0.00	0.00	3.00	15.94	6.42	3.00	50.83	24.58	3.00
	0.1	0.05	0.57	3.00	12.40	5.22	3.00	33.56	17.11	3.00
	0.2	0.12	0.76	3.00	9.62	4.15	3.00	21.25	11.45	3.00
	0.3	0.15	0.90	3.60	7.52	3.24	3.60	12.96	7.31	3.60
	0.4	0.18	0.93	4.80	5.98	2.52	4.80	7.84	4.42	4.80
	0.5	0.16	1.02	6.00	5.02	2.05	6.00	5.13	2.62	6.00
	0.6	0.17	1.06	7.20	4.72	1.84	7.20	4.18	1.89	7.20
	0.7	0.20	1.06	8.40	4.85	1.89	8.40	4.38	1.94	8.40
	0.8	0.21	1.05	0.00	5.36	2.06	0.00	5.25	2.25	0.00
	0.9	0.22	1.01	0.00	6.14	2.28	0.00	6.38	2.55	0.00
	1.0	0.32	0.84	0.00	6.94	2.46	0.00	7.45	2.78	0.00
$b^{**} = 1.90$	0.0	0.00	0.00	3.00	9.05	3.62	3.00	20.72	9.89	3.00
	0.1	0.04	0.45	3.00	7.08	2.96	3.00	13.85	6.97	3.00
	0.2	0.09	0.61	3.00	5.54	2.37	3.00	8.89	4.73	3.00
	0.3	0.12	0.73	3.60	4.39	1.87	3.60	5.23	3.06	3.60
	0.4	0.15	0.78	4.80	3.56	1.48	4.80	3.46	1.89	4.80
	0.5	0.13	0.86	6.00	3.07	1.24	6.00	2.43	1.19	6.00
	0.6	0.14	0.90	7.20	2.99	1.17	7.20	2.18	1.00	7.20
	0.7	0.16	0.92	8.40	3.17	1.26	8.40	2.50	1.16	8.40
	0.8	0.17	0.92	0.00	3.62	1.42	0.00	3.19	1.42	0.00
	0.9	0.18	0.90	0.00	4.26	1.58	0.00	4.07	1.70	0.00
	1.0	0.26	0.81	0.00	4.94	1.78	0.00	5.01	1.95	0.00
$b^{***} = 2.28$	0.0	0.00	0.00	3.00	6.02	2.40	3.00	10.94	5.18	3.00
	0.1	0.03	0.37	3.00	4.73	1.97	3.00	7.37	3.68	3.00
	0.2	0.08	0.52	3.00	3.72	1.58	3.00	4.77	2.52	3.00
	0.3	0.10	0.62	3.60	2.98	1.26	3.60	3.01	1.65	3.60
	0.4	0.13	0.67	4.80	2.44	1.00	4.80	1.93	1.03	4.80
	0.5	0.11	0.75	6.00	2.14	0.86	6.00	1.41	0.68	6.00
	0.6	0.12	0.80	7.20	2.13	0.84	7.20	1.34	0.62	7.20
	0.7	0.13	0.82	8.40	2.30	0.92	8.40	1.61	0.76	8.40
	0.8	0.15	0.83	0.00	2.66	1.05	0.00	2.11	0.96	0.00
	0.9	0.15	0.82	0.00	3.17	1.21	0.00	2.77	1.18	0.00
	1.0	0.22	0.76	0.00	3.73	1.36	0.00	3.50	1.39	0.00

4.2. Conclusões

O trabalho de Abdous (1990) diz que a escolha da função “kernel” não é crucial, mas através das análises feitas neste capítulo, podemos observar e concluir que a escolha da função “kernel” é muito importante, pois houve casos em que o estimador de Ramlau-Hansen para uma escolha apropriada de b foi satisfatório, enquanto outros não, devido à influência da função “kernel”.

Observamos também que a escolha de b é de extrema importância. Grandes variações foram observadas para distintos valores de b , tanto no estimador $\hat{\alpha}(t)$ quanto para a variância de $\hat{\alpha}(t)$, conforme foi notado na análise anterior. Notamos também um efeito local de b , isto é, valores de b podem produzir bons resultados numa região de observação e serem desastrosos em outros. Portanto se tomássemos apropriadamente b 's distintos para distintos intervalos, as estimativas de $\hat{\alpha}(t)$ e variância de $\hat{\alpha}(t)$ poderiam ser bem melhores.

Nosso estudo sugere que para “melhores” resultados na aplicação do estimador de Ramlau-Hansen para a função intensidade de Poisson não homogêneo, devem ser feitos novos estudos teóricos onde a escolha de b esteja intimamente ligada à função “kernel” e o ponto t . Isto é, além da dependência em K a escolha de b deve ser local. Estudos sobre a escolha de b e K baseados nos dados parecem ser a solução indicada. Recentemente uma proposta neste sentido foi feita por Brooks e Marroon (1989) onde técnicas de “Cross validation” foram propostos para serem utilizadas na escolha de b .

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (1) Aalen, O.O. (1975). Statistical inference for a family of counting process. Ph.D. Dissertation, Dept. of Stat., Univ. of Calif. Berkeley.
- (2) Aalen, O.O. (1978). Nonparametric inference for a family of counting process. *Ann. Statistic.* 6, 701-726.
- (3) Aalen, O.O. & Johansen, S. (1978). An empirical transition matrix for non-homogenius Markov chains os censored observation. *Scand. J. Statistic.* 5, 141-150.
- (4) Abdous, B. (1980). Adapting the classical Kernel density estimator to data. *Computacional Statistics & Data Analysis* 9, 169-178.
- (5) Altshuler, B. (1970). Theory for the measurement of competing risks in animal experiments. *Math. Biosc.* 6, 1-11.
- (6) Andersen, P.K., Borgan, ϕ ., Gill, R.D. & Keiding, N. (1982). Linear nonparametric tests for comparison of counting process, with applications to censored survival data (with discusion). *Int. Statist. Rev.* 50, 219-258.
- (7) Basawa, I.V. & Prakasa Rao, B.L.S. (1980). *Statistical inference for stochastic process*. Academic Press.

- (8) Benjamin, B. (1978). Graunt, J. Pp. 435-437 in **International Encyclopedia of Statistics, Vol 1**. Eds. W.H. Kruskal and J.M. Tanur. Free Press, Macmillan Publishing Co., New York.
- (9) Borgan, ϕ . (1984). Maximum likelihood estimation in parametric counting process models, with application to censored failure time data. **Scand. J. Statist.** 11, 1-16.
- (10) Breslow, N.E. (1970). A generalized Kruskal-Walles for comparing K samples subject to unequal patterns of censorship. **Biometrika**. 57, 579-594.
- (11) Brooks, M.M. & Marron, J.S. (1989). Asymptotic optimality of the least squares cross-validation bandwidth for Kernel estimates of intensity functions. **The institute of statistics, Mimeo Series 2012**. Department of Statistics. University of North Caroline. Chapel Hill.
- (12) Bowman, A.W. (1985). A comparative study of some Kernel - Based nonparametric density estimators. **J. Statist. Comput. Simul.** 21, 313-327.
- (13) Cox, D.R. (1972). Regression models and life tables (with discussion). **J. Roy. Statist. Soc. B**. 34, 187-220.
- (14) Epanechnikov, V.A. (1969). Non-parametric estimation of a multivariate probability density. **Theory Prob. Appl.** 14, 153-158.
- (15) Gehan, E.A. (1965). A generalized Wilcoxon test for comparing arbitrarily singly - censored samples. **Biometrika** 52, 203-223.
- (16) Gill, R.D. (1980a). **Censoring and stochastics integrals**. Math. Centre Tracs 124, Mathematical Centre, Amsterdam.
- (17) Glass, D.V. (1950). Graunt's life table. **J. Inst. Actuaries** 76, 60-64.
- (18) Grenander, U. (1981). **Abstract Inference** John Wiley & Sons. New York.
- (19) Hoel, P.G., Port, S.C. & Stone, C.I. (1971). **Introduction to probability theory**. Houghton Mifflin Company. Boston.

- (20) Kaplan, E.L. & Meier, P. (1958). Nonparametric estimation from incomplete observations. **J. Amer. Statist. Assoc.** 53, 457-481.
- (21) Kalbfleish, J.D. & Prentice, R.L. (1980). **The statistical analysis of failure time data.** Wiley, New York.
- (22) Karlin, S. & Taylor, H.M. (1974). **A first course in stochastic process.** Academic Press, INC. New York.
- (23) Karr, A.F. (1987). Maximum likelihood estimation in the multiplicative intensity model via sieves. **The Annals of Statistics** 15, 473-490.
- (24) Kutoyants, Y.A. (1979). Parametric estimation of intensity for nonhomogeneous Poisson processes. **Problems of control and information theory** 8, 137-149.
- (25) Lewis, P.A.W. & Shedler, G.S. (1975). Simulation of nonhomogeneous Poisson process by thinning. **Naval Res. Logistics Quart.** 26; 3, 403-413.
- (26) Marques, M.S.F. & San Martin, L. (1991). **Cálculo Estocástico.** 18^o Colóquio Brasileiro de Matemática (a ser publicado).
- (27) Nandy, K. (1983). Statistical estimation for stochastic process. **Queen's papers in pure and applied mathematics** 62. Ontario.
- (28) Nelson, W. (1969). Hazard plotting for incomplete failure data. **J. Qual. Technol.** 1, 27-52.
- (29) Nelson, W. (1972). Theory and application of hazard plotting for censored failure data. **Technometric** 14, 945-966.
- (30) Peto, R. & Peto, J. (1972). Asymptotically efficient rank invariant test procedures (with discussion). **J. Roy Statist. Soc. Ser. A.** 65, 167-179.
- (31) Ramlau-Hansen, H. (1983a). Smoothing counting process intensities by means of Kernel functions. **The Annals of Statist.** 11, 453-466.

- (32) Ramlau-Hansen, H. (1983b). The choice of Kernel function in the graduation of counting process intensities. **Scand. Actuarial J.** 165-182.
- (33) Rosenblatt, M. (1956). Remarks on some nonparametric estimates of a density function. **Ann Math. Statist.** 17, 832-837.
- (34) Scoot, D.W. (1979). On optimal and databased histograms. **Biometrika** 66, 605-610.
- (35) Watson, G.S. & Leadbetter, M.R. (1964a). Hazard Analysis I. **Biometrika** 51, 175-184.
- (36) Watson, G.S. & Leadbetter, M.R. (1964b). Hazard Analysis II. **Sankhya Ser. A** 26, 101-116.

APÊNDICE I

Este Apêndice apresenta as definições e resultados básicos sobre a teoria de Martingale e integração estocástica utilizados nos Capítulos 2 e 3. Um tratamento sistemático sobre estes tópicos pode ser encontrado em Marques e San Martin (1991). No que segue $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é um espaço de probabilidade fixo.

Definição 1. (Esperança Condicional com respeito a uma σ -álgebra). Em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ seja $\mathcal{G}$ um σ -álgebra contida em $\mathcal{F}$ e X uma variável aleatória com esperança finita. A esperança condicional de X com respeito a $\mathcal{G}$ é definida como sendo qualquer variável aleatória Y que satisfaz:

- i) Y é uma variável aleatória $(\Omega, \mathcal{G})$
- ii) Para todo $A \in \mathcal{G}$

$$E(Y\mathbb{1}_A) = E(X\mathbb{1}_A).$$

Uma tal variável Y é denotada por $E(X/\mathcal{G})$ e sua existência é garantida pelo Teorema de Radon-Nikodym estudado em teoria da medida.

Definição 2. (Filtração). Uma família $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ de sub- σ -álgebras de $\mathcal{F}$ é chamada uma filtração (ou filtragem) se

- i) $\mathcal{F}_s < \mathcal{F}_t$, se $s < t$
- ii) $\mathcal{F}_0$ contém todos os subconjuntos com probabilidade zero de $\mathcal{F}$

A filtração é dita ser contínua à direita se $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$.

Definição 3. (Martingale). Um processo estocástico $M = \{M(t) : t \geq 0\}$ é chamado um Martingale com respeito a uma filtração $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ se

- i) $E | M(t) | < \infty$, para todo $t \geq 0$
- ii) $M(t)$ é adaptado a $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$, isto é, $M(t)$ é uma variável aleatória com respeito a $(\Omega, \mathcal{F}_t)$
- iii) $E(X(t)/\mathcal{F}_s) = X(s)$ q.c. para $0 \leq s \leq t$.

Quando a filtração é fixa, digamos resumidamente que M é um Martingale.

Se a igualdade em (iii) é substituída por $\leq$ ou $\geq$ M é chamado de supermartingale e submartingale respectivamente.

Teorema 1. (Decomposição de Doob-Meyer para submartigales não negativos). Seja $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ uma filtragem contínua à direita e $N = \{N(t) : t \geq 0\}$ um submartingale com respeito a $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$, não negativa e contínua à direita. Então

$$N(t) = \Lambda(t) + M(t),$$

onde M é um Martingale com $EM(t) = 0$ e Λ é um processo estocástico que satisfaz:

- i) Λ é adaptado pela $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$,
- ii) Λ tem trajetórias não decrescentes q.c.,
- iii) $\Lambda(0) = 0$ q.c. $E | \Lambda(t) | < \infty$ para cada $t \geq 0$ e
- iv) Λ é único com probabilidade 1.

O processo Λ é algumas vezes chamado compensador de N .

Definição 4. Um Martingale M é chamado quadrado integrável se

$$\sup_t \{E(M^2(t))\} < \infty.$$

Para uma Martingale M quadrado integrável e contínua à direita, temos que $M^2 = \{M^2(t) : t \geq 0\}$ é um submartingale não negativo e contínuo à direita. Se a filtração associada a M^2 é contínua à direita, temos pelo Teorema 1 que existe um único (*q.c.*) processo não decrescente, nesse caso denotado por $\langle M, M \rangle = \langle M \rangle$, tal que

$$M^2 - \langle M \rangle$$

é um Martingale.

Definição 5. O processo $\langle M \rangle = \langle M, M \rangle$ é chamado variação quadrática de M ou processo variância de M . Para M_1 e M_2 Martingales quadrado integráveis definimos

$$\langle M_1, M_2 \rangle = \frac{1}{2} \langle M_1 + M_2 \rangle - \langle M_1 \rangle - \langle M_2 \rangle.$$

$\langle M_1, M_2 \rangle$ é chamado variação cruzada de M_1 e M_2 .

Os resultados até aqui apresentados permanecem válidos se restringirmos t a um intervalo finito $[0, T]$.

Para uma filtração $\{\mathcal{F}_t : t \in [0, T]\}$, seja $\mathcal{D}$ a classe de todas as funções $f : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz:

- i) f é $\mathcal{B}([0, T]) \times \mathcal{F}$ - mensurável,
- ii) $f(t_i)$ é $\mathcal{F}_{t_i}$ - mensurável e
- iii) $f(t_i)$ é contínua à esquerda.

Definição 6. Seja $\mathcal{P}$ a menor sub- σ -álgebra de $\mathcal{B}([0, T]) \times \mathcal{F}$ para qual todas as funções de $\mathcal{D}$ são mensuráveis. Um processo estocástico $X = \{X(t) : t \in [0, T]\}$ é chamado predizível se a aplicação

$$(t, w) \longrightarrow X(t, w) \quad \text{é } \mathcal{P} \text{ - mensurável}$$

Definição 7. (Integral Estocástica). Se X é um processo predizível e M é um Martingale quadrado integrável, a integral estocástica

$$\int_0^T X(s) dM(s)$$

é definida como o limite em probabilidade de

$$\sum_{k=0}^{N_n} X(t_{n,k}) (M(t_{n,k+1}) - M(t_{n,k})),$$

onde $0 = t_{n,0} < t_{n,1} < \dots < t_{n,N_n} = T$ é uma partição de $[0, T]$ e $\max_k |t_{n,k+1} - t_{n,k}| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Se M é um Martingale de variação limitada, o limite na definição de integral estocástica pode ser tomado com probabilidade 1 e a integral é uma integral de Riemann-Stieltjes.

Definição 8. Para $t \in \mathbb{I}$, definimos

$$Y(t) = \int_0^t X(s) dM(s) \equiv \int_0^T X(s) \mathbb{1}_{[0,t]}(s) dM(s)$$

Proposição 1.

- i) O processo estocástico definido na Definição 8 é um Martingale quadrado integrável e

$$\langle Y \rangle (t) = \int_0^t X^2(s) d \langle M_i \rangle (s).$$

- ii) Se $Y_i = \int_0^t X_i(s) dM_i(s)$, $i = 1, 2$, então

$$\langle Y_1, Y_2 \rangle (t) = \int_0^t X_1 X_2(s) d \langle M_1, M_2 \rangle (s).$$

APÊNDICE II

Apresentaremos aqui os programas feitos no pacote estatístico SOC, para a simulação de um processo de Poisson não homogêneo e para o estimador de Ramlau-Hansen ($\alpha(t)$).

As Tabelas 12 (a,b e c), Tabelas 13 (a,b e c) e Tabelas 14 (a,b e c), apresentam as trajetórias com os respectivos τ_i gerados para tamanhos de amostra $n = 10, 25$ e 50 .

Programa 1. Simulação do Processo de Poisson não Homogêneo

```
func descobre()
{
    _i = 1;
    enquanto(_i <= nlin(&l)) {
        se (&l[_i,1] == &2) {
            return(1);
        }
        _i = _i + 1;
    }
    return(0);
}

poisson=;

se (!t) {
    anote "Falta valor de T";
}
se (!w) {
    anote "Falta valor de W";
}

i = 1;
j = 0;
l = 1;
assuma semente=2.1345;
enquanto(i <= w) {
    x=criarnd(1,1);
    y = -log(1 - x);
    j = j + y;

    p = lambdai(j);

    se (p > t) {
        j = 0;
        i = i + 1;
    }
    cc {
        if (l == 1) {
            amostra = {i p};
        }
        else {
            amostra = {amostra , i p};
        }
    }
    l = l + 1;
}
```

```

e (inverte==1) {
    i = 1;
    enquanto( i <= w) {

        if (descobre(amostra[,1], i) == 1) {
            t1 = cata(amostra,1,i,"==");
            ui = criarnd(nlin(t1), 1);

            l = 1;
            enquanto(l < nlin(t1)) {
                se(ui[1,1]<= lambda(t1[1,2])/lambdas(t1[1,2])) {
                    se (!poisson)
                        poisson = {i t1[1,2]};
                    cc
                        poisson = {poisson, i t1[1,2]};
                }
                l = l + 1;
            }
        }
        else {
            anote "Nao existe valores para esta trajetoria";
        }
        i = i + 1;
    }
    if (poisson) {
        simula = {poisson };
        grave simula;
    }
    else {
        anote "Nao existe valores para nenhuma trajetoria";
    }
}

se {
    simula = {amostra };
    grave simula;
}

prime simula;
poisson=;
amostra=;
s=simula[,2];
n=nlin(s);
tm=csoma(s)/n;
i=1; sn_2=0;
    enquanto (i <=n){
        sn_2=sn_2+((s[i,1]-tm))^2/(n-1);
        i=i+1;
    }
s=sqrt(sn_2);
b=3.49*s*w#(-1/3);
imprime s;
imprime b;

```

Programa 2. Estimador de Ramlau-Hansen

```

inc descobre( )

i = 1;
quanto(_i <= nlin(&1)) {
  se (&1[_i,1]== &2) {
    return(1);
  }
  i = _i + 1;
}
return(0);

simula=leia "simula";
i=1; s=0;ntt=0;s2=0;
quanto (i<= w ) {
  tc=t;cont=1;
  se (descobre(simula[,1],i)==1) {
    ntt=ntt+1;
    ti=cata(simula[,1 2],1,i,"==");
    while(cont <=11) {
      s=0;s2=0;
      j=1;
      while(j <=nlin(ti)) {
        s=s+k(tc,ti[j,2])/b;
        s2=s2+(k(tc,ti[j,2])#2)/b#2;
        j=j+1;
      }
      se (!estimador) {
        estimador={i tc s s2 lambda(tc)};
      }
      cc {
        estimador={estimador,i tc s s2 lambda(tc)};
      }
      tc=tc+delta;
      cont=cont+1;
    }
    i=i+1;
  }
}
cc {
  anote "nao existe valor para trajetoria ";
  i=i+1;
}

```

```

func trajeto() {
    _ini=(&2-1)*&3+1;
    _fim=(&2*&3);
    fora=&1[_ini:_fim,1];
    return(fora);
}

cont=cont-1;
m1=criamat(cont,w,0);
m2=criamat(cont,w,0);
var1=criamat(cont,w,0);
i=1; enquanto (i <=ntt) {
    m1[,i]=trajeto(estimador[,3],i,cont);
    m2[,i]=trajeto(estimador[,5],i,cont);
    var1[,i]=trajeto(estimador[,4],i,cont);
    i=i+1;
}
medial=lsoma(m1)/ntt;
media2=lsoma(m2)/ntt;
var1=lsoma(var1)/ntt;
var1=sqrt(var1);
valor=estimador[1:cont,2];
m_est={valor medial var1 media2 };
grave m_est "a:graf" ("valor,medial,var1,media2");
imprime m_est;
m_est=;
m1=;
m2=;
medial=;
media2=;
estimador=;
valor=;

```

Tabela 12.a Função intensidade $\alpha_1(t)$, $n = 10, 25$ e 50 .

Trajectoria	τ_i		Trajectoria	τ_i		Trajectoria	τ_i
1	0.0948		7	0.1757		12	0.2047
1	0.1335		7	0.3541		12	0.4101
1	0.2065		7	0.3746		12	0.6704
1	0.2204		7	0.7859		12	0.6832
1	0.3742		7	0.8822		12	0.7982
1	0.4386		8	0.1072		12	0.9796
1	0.5269		8	0.1418		12	0.9908
1	0.5490		8	0.2836		13	0.2835
1	0.6371		8	0.4821		13	0.7302
1	0.7751		8	0.4904		13	0.7744
1	0.8944		8	0.5433		13	0.8222
1	0.9343		8	0.6450		13	0.9165
1	0.9945		8	0.6534		13	0.9551
2	0.0300		8	0.6739		14	0.1285
2	0.0407		8	0.7819		14	0.1742
2	0.0695		8	0.7910		14	0.2305
2	0.1229		8	0.8074		14	0.2404
2	0.2820		8	0.9500		14	0.3389
2	0.3569		8	0.9555		14	0.4346
2	0.3742		8	0.9750		14	0.5025
2	0.3987		8	0.9863		14	0.5251
2	0.4536		9	0.0743		15	0.4006
2	0.9509		9	0.0933		15	0.5801
3	0.0432		9	0.3494		15	0.6228
3	0.3698		9	0.3634		15	0.9280
3	0.4702		9	0.5809		15	0.9450
3	0.4923		9	0.6962		15	0.9928
3	0.9112		9	0.7030		16	0.0626
4	0.0457		9	0.7319		16	0.0673
4	0.0958		9	0.8298		16	0.0720
4	0.1001		9	0.9151		16	0.1121
4	0.2480		9	0.9595		16	0.1325
4	0.5808		10	0.0965		16	0.1619
4	0.6580		10	0.2543		16	0.2776
4	0.7394		10	0.3530		16	0.4494
4	0.9018		10	0.3658		16	0.5294
5	0.1785		10	0.4844		16	0.5464
5	0.2122		10	0.5386		16	0.5978
5	0.2713		10	0.6021		16	0.6446
5	0.2925		10	0.6086		16	0.7340
5	0.3026		10	0.8708		16	0.7381
5	0.3985		10	0.9167		16	0.9257
5	0.5054		10	0.9370		17	0.0453
5	0.5681		11	0.0053		17	0.1406
6	0.1649		11	0.2572		17	0.3542
6	0.2715		11	0.3209		17	0.4404
6	0.2988		11	0.4812		17	0.4829
6	0.7462		11	0.6649		17	0.6889
6	0.8221		11	0.6849		17	0.6999
6	0.8313		11	0.6932		17	0.7505
6	0.9601		11	0.9182		17	0.8023
7	0.1445		12	0.1771		17	0.8666

Tabela 12.b Função intensidade $\alpha_1(t)$, $n = 10, 25$ e 50 .

Trajectoria	τ_i		Trajectoria	τ_i		Trajectoria	τ_i
17	0.9732		23	0.2393		29	0.4443
18	0.0360		23	0.2439		29	0.6215
18	0.1067		23	0.3989		29	0.6708
18	0.5808		23	0.5321		29	0.6781
18	0.6679		23	0.9527		29	0.8661
18	0.7077		24	0.0077		29	0.8729
18	0.7446		24	0.1651		29	0.9590
19	0.0620		24	0.1763		30	0.1097
19	0.1208		24	0.2338		30	0.1369
19	0.2361		24	0.6609		30	0.2234
19	0.2943		24	0.6654		30	0.3818
19	0.3082		24	0.8491		30	0.5034
19	0.4302		24	0.9809		30	0.6191
19	0.4538		24	0.9866		30	0.7847
19	0.5857		25	0.0955		30	0.9640
19	0.7581		25	0.2291		31	0.3298
20	0.0387		25	0.3216		31	0.4566
20	0.0780		25	0.3438		31	0.4862
20	0.1063		25	0.3686		31	0.5449
20	0.1115		25	0.4027		32	0.0649
20	0.1419		25	0.4329		32	0.0712
20	0.1937		25	0.5700		32	0.1053
20	0.2211		25	0.5794		32	0.4588
20	0.3549		25	0.7014		32	0.5794
20	0.5052		25	0.9207		32	0.6424
20	0.6543		26	0.0681		32	0.6442
20	0.8481		26	0.1339		32	0.6466
20	0.9223		26	0.4352		32	0.7237
21	0.0326		26	0.4398		33	0.1034
21	0.3330		26	0.5022		33	0.1539
21	0.3619		26	0.8507		33	0.3233
21	0.4264		26	0.9999		33	0.4314
21	0.4420		27	0.2425		33	0.4913
21	0.6211		27	0.3140		33	0.5011
21	0.6961		27	0.3385		33	0.6519
21	0.6996		27	0.6658		33	0.6599
21	0.7821		27	0.7004		33	0.7392
21	0.7859		28	0.1239		33	0.9370
21	0.8323		28	0.2119		34	0.0389
21	0.8697		28	0.2234		34	0.5605
21	0.9205		28	0.2863		34	0.7186
21	0.9542		28	0.3568		34	0.8002
22	0.0935		28	0.4438		34	0.9306
22	0.1752		28	0.5297		35	0.0269
22	0.5528		28	0.9838		35	0.0346
22	0.6070		29	0.0124		35	0.1133
22	0.6714		29	0.0739		35	0.2245
22	0.8830		29	0.2490		35	0.2625
22	0.9991		29	0.2839		35	0.2756
23	0.0501		29	0.3063		35	0.2771
23	0.1647		29	0.3985		35	0.3699
23	0.2255		29	0.4233		35	0.4498

Tabela 12.c Função intensidade $\alpha_1(t)$, $n = 10, 25$ e 50 .

Trajectoria	τ_i		Trajectoria	τ_i		Trajectoria	τ_i
35	0.5095		39	0.6599		44	0.6465
35	0.5206		39	0.6637		44	0.9102
35	0.5370		39	0.6845		45	0.0132
35	0.8602		39	0.6953		45	0.0701
35	0.8990		39	0.8295		45	0.1147
35	0.9452		39	0.8999		45	0.3025
36	0.0190		40	0.1744		45	0.3080
36	0.0385		40	0.2239		46	0.1657
36	0.1373		40	0.2782		46	0.2112
36	0.1494		40	0.2879		46	0.2202
36	0.2310		40	0.3292		46	0.2540
36	0.2443		40	0.4064		46	0.3782
36	0.2880		40	0.6507		46	0.7707
36	0.3647		40	0.6559		46	0.7797
36	0.4678		40	0.7765		47	0.0242
36	0.4685		40	0.8671		47	0.2827
36	0.4828		40	0.8995		47	0.6045
36	0.5439		41	0.0137		47	0.6267
36	0.5561		41	0.0449		47	0.6284
36	0.7879		41	0.2161		47	0.8679
36	0.8063		41	0.3229		47	0.9027
36	0.9845		41	0.4199		48	0.1398
36	0.9847		41	0.5946		48	0.1971
37	0.2590		41	0.6084		48	0.2009
37	0.2989		41	0.7253		48	0.4144
37	0.3644		41	0.7933		48	0.5794
37	0.4115		41	0.8855		48	0.5980
37	0.4326		42	0.1714		48	0.6061
37	0.5366		42	0.1907		48	0.6711
37	0.6148		42	0.5273		48	0.7016
37	0.6588		42	0.5741		49	0.0321
37	0.8979		42	0.9199		49	0.1709
38	0.0014		42	0.9251		49	0.1807
38	0.0315		42	0.9994		49	0.2658
38	0.1473		43	0.0264		49	0.3910
38	0.1782		43	0.1938		49	0.4607
38	0.3629		43	0.2874		49	0.4735
38	0.4783		43	0.3049		49	0.4984
38	0.6857		43	0.3226		49	0.5875
38	0.7848		43	0.3842		49	0.7298
38	0.8084		43	0.3995		49	0.9212
38	0.9118		43	0.4563		49	0.9575
39	0.0280		43	0.4656		50	0.0589
39	0.2412		43	0.6628		50	0.1542
39	0.3165		43	0.6788		50	0.3212
39	0.4175		43	0.6927		50	0.4968
39	0.4575		43	0.8113		50	0.6925
39	0.4622		43	0.8278		50	0.7508
39	0.5138		44	0.0308		50	0.8088
39	0.5269		44	0.0515		50	0.8163
39	0.5796		44	0.0582		50	0.9436

Tabela 13.a Função intensidade $\alpha_2(t)$, $n = 10, 25$ e 50 .

Trajectoria	τ_i		Trajectoria	τ_i		Trajectoria	τ_i
1	0.1198		7	0.2194		12	0.2561
1	0.1668		7	0.5979		12	0.3519
1	0.2525		7	0.6738		12	0.4904
1	0.2684		8	0.0417		12	0.4984
1	0.4357		8	0.2040		12	0.5237
1	0.5013		8	0.4092		13	0.0366
1	0.5873		8	0.4173		13	0.0751
1	0.6081		8	0.4677		13	0.1478
1	0.6883		8	0.5603		13	0.1765
1	0.8058		8	0.5677		13	0.2419
1	0.8998		8	0.5857		13	0.4026
1	0.9298		8	0.6763		13	0.4569
2	0.0387		8	0.6837		13	0.5217
2	0.0522		8	0.6970		13	0.5329
2	0.0884		8	0.8064		13	0.6406
2	0.1540		8	0.8104		13	0.7392
2	0.3373		8	0.8246		13	0.8058
2	0.4177		8	0.8328		14	0.4629
2	0.4357		8	0.8914		14	0.6368
2	0.4610		9	0.2918		14	0.6755
2	0.5163		9	0.3065		14	0.9250
2	0.9420		9	0.5197		14	0.9377
3	0.3756		9	0.6219		15	0.0799
3	0.4771		9	0.6277		15	0.0858
3	0.4987		9	0.6521		15	0.0916
3	0.8570		9	0.7318		15	0.1409
4	0.0625		9	0.7975		15	0.1656
4	0.0677		9	0.8304		15	0.2006
4	0.2410		10	0.1847		15	0.3324
4	0.5789		10	0.2916		15	0.5120
4	0.6481		10	0.3050		15	0.5896
4	0.7177		10	0.4246		15	0.6056
4	0.8468		10	0.4764		15	0.6530
5	0.0390		10	0.5350		15	0.6949
5	0.1054		10	0.5409		15	0.7718
5	0.1288		10	0.7598		15	0.7752
5	0.1397		10	0.7947		16	0.0581
5	0.2408		10	0.8099		16	0.1753
5	0.3467		10	0.9038		16	0.4148
5	0.4058		11	0.0696		16	0.5031
5	0.7598		11	0.2335		16	0.5450
6	0.0299		11	0.4029		16	0.7335
6	0.4562		11	0.4203		16	0.7429
6	0.5179		11	0.4274		16	0.7856
6	0.5252		11	0.6079		16	0.8278
6	0.6230		11	0.7022		16	0.8785
6	0.8174		11	0.9206		16	0.9583
7	0.1980		12	0.2450		17	0.0882

Tabela 13.b Função intensidade $\alpha_2(t)$, $n = 10, 25$ e 50 .

Trajatória	τ_i		Trajatória	τ_i		Trajatória	τ_i
17	0.5913		23	0.0100		28	0.9319
17	0.6691		23	0.2043		29	0.0328
17	0.7034		23	0.2175		29	0.1338
18	0.0792		23	0.2836		29	0.3056
18	0.1515		23	0.7093		29	0.4267
18	0.2862		23	0.7132		29	0.5342
18	0.3508		23	0.8649		29	0.6755
18	0.3658		23	0.9639		30	0.3890
18	0.4930		24	0.1206		30	0.5192
18	0.5165		24	0.2783		30	0.5482
18	0.6420		24	0.3802		31	0.0828
18	0.7918		24	0.4039		31	0.0906
19	0.0493		24	0.4299		31	0.1327
19	0.0841		24	0.4651		31	0.5214
19	0.0904		24	0.4956		31	0.6362
19	0.1270		24	0.6276		31	0.6930
19	0.1879		24	0.6363		31	0.6946
19	0.2194		24	0.7442		31	0.6967
19	0.3657		25	0.0868		32	0.1304
19	0.5168		25	0.1672		32	0.1911
19	0.6537		25	0.4979		32	0.3821
19	0.8143		25	0.5026		32	0.4941
19	0.8711		25	0.5636		32	0.5532
20	0.3504		25	0.8662		32	0.5627
20	0.3809		26	0.2934		32	0.7014
20	0.4471		26	0.3721		32	0.7084
20	0.4627		26	0.3982		32	0.7761
20	0.6321		26	0.7135		33	0.0500
20	0.6978		26	0.7434		33	0.6187
20	0.7007		27	0.1035		33	0.7589
20	0.7695		27	0.1166		33	0.8261
20	0.7726		27	0.1867		33	0.9270
20	0.8097		27	0.2623		34	0.0099
20	0.8389		27	0.3513		34	0.1077
20	0.8775		27	0.4346		34	0.2383
20	0.9024		27	0.8108		34	0.2810
21	0.0979		28	0.0780		34	0.2955
21	0.4934		28	0.2847		34	0.2971
21	0.5431		28	0.3233		34	0.3966
21	0.6002		28	0.3477		34	0.4778
21	0.7728		28	0.4447		34	0.5206
21	0.8587		28	0.4699		34	0.5359
22	0.1396		28	0.4909		34	0.5466
22	0.2099		28	0.6584		34	0.5621
22	0.2255		28	0.7019		34	0.8388
22	0.2308		28	0.7082		34	0.8686
22	0.3970		28	0.8620		34	0.9031
22	0.5280		28	0.8673		34	0.9570

Tabela 13.c Função intensidade $\alpha_2(t)$, $n = 10, 25$ e 50 .

Trajectoria	τ_i		Trajectoria	τ_i		Trajectoria	τ_i
35	0.1218		39	0.1284		44	0.3063
35	0.1363		39	0.1730		44	0.4399
35	0.2310		39	0.2535		44	0.8022
35	0.2460		39	0.4851		45	0.0312
35	0.2944		39	0.4896		45	0.3381
35	0.3764		39	0.5916		45	0.6591
35	0.4808		39	0.6636		45	0.6791
35	0.4815		39	0.6884		45	0.6806
35	0.4954		39	0.8111		45	0.8795
35	0.5538		39	0.8288		46	0.1743
35	0.5653		40	0.1181		46	0.2417
35	0.7667		40	0.2190		46	0.2461
35	0.7816		40	0.3866		46	0.4770
35	0.9170		40	0.3991		46	0.6362
35	0.9172		40	0.5010		46	0.6532
36	0.0439		40	0.5571		46	0.6605
36	0.1136		40	0.6295		46	0.7181
36	0.1621		41	0.0226		47	0.0414
36	0.1834		41	0.3759		47	0.2112
36	0.2845		41	0.4196		47	0.2227
36	0.3565		41	0.7073		47	0.3194
36	0.3956		41	0.7112		47	0.4531
37	0.0019		41	0.7654		47	0.5233
37	0.0405		41	0.7674		47	0.5358
37	0.1832		42	0.1053		47	0.5600
37	0.2198		42	0.1244		47	0.6437
37	0.4240		42	0.1434		47	0.7683
37	0.5405		42	0.2082		47	0.9200
37	0.7308		42	0.2239		48	0.0752
37	0.8137		42	0.2811		48	0.1915
37	0.8327		42	0.2902		48	0.3798
38	0.0361		42	0.4731		48	0.5604
38	0.2919		42	0.4869		48	0.7366
38	0.3747		42	0.4989		48	0.7858
38	0.4801		42	0.5971		48	0.8331
38	0.5201		42	0.6103		48	0.8390
38	0.5248		42	0.7497		49	0.1262
38	0.5748		42	0.7894		49	0.3875
38	0.5873		42	0.8156		49	0.3887
38	0.6365		43	0.2151		49	0.5591
38	0.7084		43	0.3370		49	0.5704
38	0.7117		43	0.3540		49	0.8510
38	0.7297		43	0.4262		50	0.0181
38	0.7391		43	0.4811		50	0.0410
38	0.8495		43	0.6966		50	0.4472
38	0.9040		44	0.2051		50	0.5085
39	0.0570		44	0.2579		50	0.6020
39	0.1179		44	0.2681		50	0.8654

Tabela 14.a Função intensidade $\alpha_3(t)$, $n = 10, 25$ e 50 .

Trajatória	τ_i		Trajatória	τ_i		Trajatória	τ_i
1	0.1198		7	0.2194		12	0.2561
1	0.1668		7	0.5979		12	0.3519
1	0.2525		7	0.6738		12	0.4904
1	0.2684		8	0.0417		12	0.4984
1	0.4357		8	0.2040		12	0.5237
1	0.5013		8	0.4092		13	0.0366
1	0.5873		8	0.4173		13	0.0751
1	0.6081		8	0.4677		13	0.1478
1	0.6883		8	0.5603		13	0.1765
1	0.8058		8	0.5677		13	0.2419
1	0.8998		8	0.5857		13	0.4026
1	0.9298		8	0.6763		13	0.4569
2	0.0387		8	0.6837		13	0.5217
2	0.0522		8	0.6970		13	0.5329
2	0.0884		8	0.8064		13	0.6406
2	0.1540		8	0.8104		13	0.7392
2	0.3373		8	0.8246		13	0.8058
2	0.4177		8	0.8328		14	0.4629
2	0.4357		8	0.8914		14	0.6368
2	0.4610		9	0.2918		14	0.6755
2	0.5163		9	0.3065		14	0.9250
2	0.9420		9	0.5197		14	0.9377
3	0.3756		9	0.6219		15	0.0799
3	0.4771		9	0.6277		15	0.0858
3	0.4987		9	0.6521		15	0.0916
3	0.8570		9	0.7318		15	0.1409
4	0.0625		9	0.7975		15	0.1656
4	0.0677		9	0.8304		15	0.2006
4	0.2410		10	0.1847		15	0.3324
4	0.5789		10	0.2916		15	0.5120
4	0.6481		10	0.3050		15	0.5896
4	0.7177		10	0.4246		15	0.6056
4	0.8468		10	0.4764		15	0.6530
5	0.0390		10	0.5350		15	0.6949
5	0.1054		10	0.5409		15	0.7718
5	0.1288		10	0.7598		15	0.7752
5	0.1397		10	0.7947		16	0.0581
5	0.2408		10	0.8099		16	0.1753
5	0.3467		10	0.9038		16	0.4148
5	0.4058		11	0.0696		16	0.5031
5	0.7598		11	0.2335		16	0.5450
6	0.0299		11	0.4029		16	0.7335
6	0.4562		11	0.4203		16	0.7429
6	0.5179		11	0.4274		16	0.7856
6	0.5252		11	0.6079		16	0.8278
6	0.6230		11	0.7022		16	0.8785
6	0.8174		11	0.9206		16	0.9583
7	0.1980		12	0.2450		17	0.0882

Tabela 14.b Função intensidade $\alpha_3(t)$, $n = 10, 25$ e 50 .

Trajatória	τ_i		Trajatória	τ_i		Trajatória	τ_i
17	0.5913		23	0.0100		28	0.9319
17	0.6691		23	0.2043		29	0.0328
17	0.7034		23	0.2175		29	0.1338
18	0.0792		23	0.2836		29	0.3056
18	0.1515		23	0.7093		29	0.4267
18	0.2862		23	0.7132		29	0.5342
18	0.3508		23	0.8649		29	0.6755
18	0.3658		23	0.9639		30	0.3890
18	0.4930		24	0.1206		30	0.5192
18	0.5165		24	0.2783		30	0.5482
18	0.6420		24	0.3802		31	0.0828
18	0.7918		24	0.4039		31	0.0906
19	0.0493		24	0.4299		31	0.1327
19	0.0841		24	0.4651		31	0.5214
19	0.0904		24	0.4956		31	0.6362
19	0.1270		24	0.6276		31	0.6930
19	0.1879		24	0.6363		31	0.6946
19	0.2194		24	0.7442		31	0.6967
19	0.3657		25	0.0868		32	0.1304
19	0.5168		25	0.1672		32	0.1911
19	0.6537		25	0.4979		32	0.3821
19	0.8143		25	0.5026		32	0.4941
19	0.8711		25	0.5636		32	0.5532
20	0.3504		25	0.8662		32	0.5627
20	0.3809		26	0.2934		32	0.7014
20	0.4471		26	0.3721		32	0.7084
20	0.4627		26	0.3982		32	0.7761
20	0.6321		26	0.7135		33	0.0500
20	0.6978		26	0.7434		33	0.6187
20	0.7007		27	0.1035		33	0.7589
20	0.7695		27	0.1166		33	0.8261
20	0.7726		27	0.1867		33	0.9270
20	0.8097		27	0.2623		34	0.0099
20	0.8389		27	0.3513		34	0.1077
20	0.8775		27	0.4346		34	0.2383
20	0.9024		27	0.8108		34	0.2810
21	0.0979		28	0.0780		34	0.2955
21	0.4934		28	0.2847		34	0.2971
21	0.5431		28	0.3233		34	0.3966
21	0.6002		28	0.3477		34	0.4778
21	0.7728		28	0.4447		34	0.5206
21	0.8587		28	0.4699		34	0.5359
22	0.1396		28	0.4909		34	0.5466
22	0.2099		28	0.6584		34	0.5621
22	0.2255		28	0.7019		34	0.8388
22	0.2308		28	0.7082		34	0.8686
22	0.3970		28	0.8620		34	0.9031
22	0.5280		28	0.8673		34	0.9570

Tabela 14.c Função intensidade $\alpha_3(t)$, $n = 10, 25$ e 50 .

Trajatória	τ_i		Trajatória	τ_i		Trajatória	τ_i
35	0.1218		39	0.1284		44	0.3063
35	0.1363		39	0.1730		44	0.4399
35	0.2310		39	0.2535		44	0.8022
35	0.2460		39	0.4851		45	0.0312
35	0.2944		39	0.4896		45	0.3381
35	0.3764		39	0.5916		45	0.6591
35	0.4808		39	0.6636		45	0.6791
35	0.4815		39	0.6884		45	0.6806
35	0.4954		39	0.8111		45	0.8795
35	0.5538		39	0.8288		46	0.1743
35	0.5653		40	0.1181		46	0.2417
35	0.7667		40	0.2190		46	0.2461
35	0.7816		40	0.3866		46	0.4770
35	0.9170		40	0.3991		46	0.6362
35	0.9172		40	0.5010		46	0.6532
36	0.0439		40	0.5571		46	0.6605
36	0.1136		40	0.6295		46	0.7181
36	0.1621		41	0.0226		47	0.0414
36	0.1834		41	0.3759		47	0.2112
36	0.2845		41	0.4196		47	0.2227
36	0.3565		41	0.7073		47	0.3194
36	0.3956		41	0.7112		47	0.4531
37	0.0019		41	0.7654		47	0.5233
37	0.0405		41	0.7674		47	0.5358
37	0.1832		42	0.1053		47	0.5600
37	0.2198		42	0.1244		47	0.6437
37	0.4240		42	0.1434		47	0.7683
37	0.5405		42	0.2082		47	0.9200
37	0.7308		42	0.2239		48	0.0752
37	0.8137		42	0.2811		48	0.1915
37	0.8327		42	0.2902		48	0.3798
38	0.0361		42	0.4731		48	0.5604
38	0.2919		42	0.4869		48	0.7366
38	0.3747		42	0.4989		48	0.7858
38	0.4801		42	0.5971		48	0.8331
38	0.5201		42	0.6103		48	0.8390
38	0.5248		42	0.7497		49	0.1262
38	0.5748		42	0.7894		49	0.3875
38	0.5873		42	0.8156		49	0.3887
38	0.6365		43	0.2151		49	0.5591
38	0.7084		43	0.3370		49	0.5704
38	0.7117		43	0.3540		49	0.8510
38	0.7297		43	0.4262		50	0.0181
38	0.7391		43	0.4811		50	0.0410
38	0.8495		43	0.6966		50	0.4472
38	0.9040		44	0.2051		50	0.5085
39	0.0570		44	0.2579		50	0.6020
39	0.1179		44	0.2681		50	0.8654