

Universidade Estadual de Campinas Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA



# Um novo Método Preditor-Corretor para Fluxo de Potência Ótimo

Roy Wilhelm Probst

Doutorado em Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira

Trabalho financiado pela FAPESP

Campinas Maio de 2010

### Um novo Método Preditor-Corretor para Fluxo de Potência Ótimo

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Roy Wilhelm Probst** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 5 de maio de 2010.

Amelio R. L de Obriz

Prof. Dr. Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira Orientador

#### Banca examinadora:

Prof. Dr. Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira (IMECC/UNICAMP)
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Márcia Aparecida Gomes Ruggiero (IMECC/UNICAMP)
Prof. Dr. Secundino Soares Filho (FEEC/UNICAMP)
Prof. Dr. Geraldo Roberto Martins da Costa (USP/São Carlos)
Prof. Dr. Leonardo Nepomuceno (UNESP/Bauru)

Tese apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de **Doutor em Matemática Aplicada**.

### FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Crisllene Queiroz Custódio - CRB8 / 7966

4				
	Probst, Roy Wilhelm			
P94n	Um novo método preditor-corretor para fluxo de potência ótimo / Roy			
	Wilhelm Probst Campinas, [S.P. : s.n.], 2010.			
	Orientador : Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira			
	Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de			
	Matemática, Estatística e Computação Científica.			
	1. Métodos de pontos interiores. 2. Sistemas de potência. 3.			
	Programação não-linear. 4. Método preditor-corretor. I. Oliveira, Aurelio			
	Ribeiro Leite de. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de			
	Matemática, Estatística e Computação Científica, III, Título,			

Titulo em inglês: A new predictor-corrector method for optimal power flow.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Interior point methods. 2. Power systems. 3. Nonlinear programming. 4. Predictor-corrector method.

Área de concentração: Pesquisa Operacional

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

Banca examinadora: Prof. Dr. Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira (IMECC-UNICAMP) Profa. Dra. Márcia Aparecida Gomes Ruggiero (IMECC-UNICAMP) Prof. Dr. Secundino Soares Filho (FEEC-UNICAMP) Prof. Dr. Geraldo Roberto Martins da Costa (EESC-USP) Prof. Dr. Leonardo Nepomuceno (FEB-UNESP)

Data da defesa: 05/05/2010

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática Aplicada

Tese de Doutorado defendida em 05 de maio de 2010 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Aucho 1 2 de leire Prof(a). Dr(a). AURELIO RIBEIRO LEITE DE OLIVEIRA

Prof(a). Dr(a). MARCIA APARECIDA GOMES RUGGIERO

Prof(a). Dr(a). SECUNDINO SOARES FILHO

Prof(a). Dr(a). GERALDO ROBERTO MARTINS DA COSTA

~ / comando man Prof(a). Dr(a). LEONARDO NEPOMUCENO

# Agradecimentos

Este trabalho não seria possível sem a ajuda do professor Aurelio. Agradeço-lhe pelas críticas, sugestões e apoio que me possibilitaram um grande crescimento acadêmico e pessoal.

Agradeço à minha família, especialmente meus pais Ingrid e Wilson e minha avó Adélia, por seu amor, sabedoria e orações.

Aos meus amigos, pela ajuda que recebi em várias ocasiões.

- A Deus, por permitir que pudesse realizar meus sonhos.
- À FAPESP, pelo apoio financeiro.

## Resumo

Um método de pontos interiores preditor-corretor é desenvolvido para o problema de fluxo de potência ótimo ativo-reativo. As tensões são representadas em coordenadas cartesianas ao invés de coordenadas polares, pois estas, sendo quadráticas, permitem correções não lineares nas condições de factibilidade primal e dual e não apenas nas de complementaridade como nos métodos tradicionais de programação não-linear. Outra contribuição fornece uma nova heurística para o tratamento das restrições de magnitude das tensões. Experimentos computacionais com sistemas de teste IEEE e um sistema real brasileiro são apresentados e mostram as vantagens do método proposto.

### Abstract

A predictor-corrector interior-point method is developed to the AC active and reactive optimal power flow problem. Voltage rectangular coordinates is adopted instead of polar ones, since, being quadratic, it allows nonlinear corrections for the primal and dual feasibility conditions and not only for the complementary constraints as in the traditional nonlinear programming methods. A new heuristic is proposed to handle voltage magnitude constraints. Computational experiments for IEEE test systems and a real Brazilian system are presented showing the advantages of the proposed approach.

# Sumário

1	Introdução					
	1.1	Fluxo	de Potência Ótimo	1		
	1.2	Métod	os de Pontos Interiores	3		
<b>2</b>	Fluxo de Potência Ótimo					
	2.1	Cálcul	o de Fluxo de Potência	6		
		2.1.1	Modelagem das Linhas de Transmissão	9		
		2.1.2	Fluxos de Potência Ativa e Reativa	10		
		2.1.3	Formulação Matricial	11		
	2.2	Fluxo	de Potência Ótimo	14		
		2.2.1	Fluxo de Potência Ótimo Ativo-Reativo	14		
3	Métodos de Pontos Interiores					
	3.1	Métod	o de Newton	17		
	3.2 Programação Linear					
		3.2.1	Método Primal-Dual Afim-Escala	20		
		3.2.2	Método de Trajetória Central	22		
		3.2.3	Método Preditor-Corretor	23		
		3.2.4	Cálculo da Direção de Newton	27		
	3.3	Progra	ımação Não-Linear	28		

		3.3.1 Método de Trajetória Central	30		
		3.3.2 Método Preditor-Corretor	31		
		3.3.3 Cálculo da Direção de Newton	33		
4	Mé	odo Preditor-Corretor Completo 3	5		
	4.1	Motivação	35		
	4.2	Método Proposto	8		
	4.3	Fluxo de Potência Ótimo	ŧ0		
	4.4	Dedução das Correções	13		
	4.5	Dedução das Derivadas Utilizadas	52		
		4.5.1 Derivadas de Primeira Ordem	53		
		4.5.2 Derivadas de Segunda Ordem	54		
<b>5</b>	Exp	erimentos Computacionais 5	7		
	5.1	Detalhes da Implementação	57		
		5.1.1 Heurística Proposta	58		
	5.2	Resultados Numéricos	30		
6	Cor	clusões e Perspectivas Futuras 6	5		
R	Referências Bibliográficas				

## Capítulo 1

## Introdução

Neste capítulo será feita uma breve introdução sobre o problema de fluxo de potência ótimo e os métodos de pontos interiores.

### 1.1 Fluxo de Potência Ótimo

Em engenharia elétrica, cálculo de fluxo de potência (também conhecido como cálculo de fluxo de carga) é uma importante ferramenta envolvendo análise numérica aplicada à sistemas de potência [17]. A modelagem do sistema é estática e considera que as variações com o tempo são suficientemente lentas para que se possa ignorar os efeitos transitórios, que só poderiam ser levadas em consideração se fosse utilizada uma modelagem dinâmica envolvendo equações diferenciais [30]. Fluxo de potência ótimo é o problema de otimização que tem como função objetivo alguma medida de desempenho da operação dos sistemas elétricos e como restrições as equações de balanço de potência provenientes das leis de Kirchhoff, além das restrições operacionais [27]. A importância do fluxo de potência ótimo consiste em planejar a expansão do sistema de potência, assim como determinar o melhor ponto de operação para os sistemas existentes. A solução do problema fornece a tensão e a injeção de potência ativa e reativa em cada barra. O problema de fluxo de potência ótimo corrente alternada (AC) teve sua primeira formulação nos anos 60, com o problema de despacho econômico de Carpentier [7]. Desde então, vários métodos de otimização foram propostos para resolver este problema, entre eles: o método do gradiente reduzido de Dommel-Tinney [11], gradiente reduzido generalizado [1], o método de injeção diferencial de Carpentier [8], o método do Lagrangiano projetado [31], métodos de programação quadrática sequencial [4, 6, 36], métodos específicos baseados na resolução de uma sequência de problemas de programação linear [3] ou quadrática [19]. Métodos de pontos interiores foram utilizados para este problema pela primeira vez em 1994 [18, 41].

O fluxo de potência ótimo fornece ao planejador ou operador do sistema elétrico uma orientação de como as variáveis de controle devem ser acertadas para que os centros de geração, consumo e equipamentos de transmissão estejam dentro de suas capacidades otimizando algum critério de desempenho do sistema. A implementação deve ser robusta e não necessitar da experiência do operador para ajustar os parâmetros do processo de otimização. O tempo de convergência é fundamental para a operação do sistema, mas não necessariamente para o planejamento [37].

Os geradores e cargas são considerados como a parte externa do sistema elétrico, e são modelados através de injeções de potência nos nós da rede. A parte interna do sistema é composta pelas linhas de transmissão, transformadores, reatores, etc. As equações do fluxo de potência são obtidas impondo-se a primeira lei de Kirchhoff, ou seja, a conservação das potências ativas e reativas em cada nó da rede: a potência líquida injetada deve ser igual à soma das potências que fluem pelos componentes internos ligados a este nó. A segunda lei de Kirchhoff é utilizada para expressar os fluxos de potência nos componentes internos como função das tensões de seus nós terminais [30].

O fluxo de potência ótimo corrente contínua (DC) é uma representação linearizada e obtem maior simplicidade com grau de precisão dos resultados satisfatório. Por exemplo,

o problema de pré-despacho DC pode ser modelado como a minimização de uma função objetivo quadrática, correspondente aos custos de geração e perdas na transmissão do sistema de potência, sujeito às restrições lineares que representam o fluxo de potência ativa [33, 34]. Deve-se observar que o modelo DC não leva em consideração as magnitudes das tensões e as potências reativas, portanto não pode substituir por completo os modelos não lineares de fluxo de potência [30].

### 1.2 Métodos de Pontos Interiores

A programação linear tem sido um assunto dominante em otimização desde que Dantzig [9] desenvolveu o método simplex na década de 40. Em 1984, a publicação do trabalho de Karmarkar [20] iniciou uma nova linha de pesquisa conhecida como métodos de pontos interiores, e uma década depois os métodos primais-duais surgiram como os mais importantes e úteis desta classe de métodos [40].

Em programação linear, a diferença entre os métodos de pontos interiores e o método simplex está na natureza das soluções obtidas em cada iteração. No método simplex, a sequência de pontos gerados pertencem à fronteira da região factível, enquanto que nos métodos de pontos interiores elas estão na região interior. O método simplex pode ser ineficiente para resolver certos problemas patológicos, pois sua complexidade é exponencial [32]. Embora em quase todos os problemas práticos o método simplex seja muito mais eficiente que este limite sugere, em problemas de grande porte os métodos de pontos interiores obtem resultados melhores que o método simplex [2].

Em 1955, surge o primeiro método de pontos interiores, atribuído a Frisch [14]. Este método foi exaustivamente estudado por Fiacco e McCormick [13]. Em 1967, Dikin [10] publicou um método com as mesmas bases de outros trabalhos posteriores na área de pontos interiores, mas que só se tornou conhecido após o trabalho de Karmarkar. Em 1979, surge o primeiro método de programação linear de complexidade polinomial, o método das elipsóides de Khachiyan [22]. No entanto, sua convergência é muito lenta, o método não é robusto na presença de erros de arredondamento e necessita de uma grande quantidade de memória de armazenamento a cada iteração [40]. Este método provou ser inferior ao método simplex na prática.

Mas a maior descoberta na área de métodos de pontos interiores ocorreu em 1984, quando Karmarkar [20] apresentou um novo método de pontos interiores para programação linear, também de complexidade polinomial. O método de Karmarkar é um método primal, ou seja, é descrito, motivado e implementado puramente em termos do problema primal, sem referência ao dual. A cada iteração, o método realiza uma transformação projetiva do conjunto factível primal que leva a solução atual ao centro do conjunto e caminha no espaço transformado [40].

A classe de métodos de pontos interiores que possui as melhores propriedades práticas e teóricas são os chamados métodos primais-duais. Tanto experimentos computacionais como o desenvolvimento teórico mostram que os métodos primais-duais são superiores aos demais métodos de pontos interiores em problemas práticos, chegando a ser melhor que o método simplex em problemas de grande porte [40].

Entre os métodos primais-duais, destaca-se o método preditor-corretor de Mehrotra [26], que passou a ser a base da maioria dos códigos relacionados a pontos interiores. O método utiliza aproximações de segunda ordem para a trajetória primal-dual, conforme sugerido por Megiddo [25] e desenvolvido em [21, 23, 29]. Além disso, o método parte de um ponto interior infactível, conforme implementado com sucesso em [24]. A contribuição de Mehrotra foi combinar estas idéias já existentes e adicionar heurísticas para escolha do parâmetro de centragem, tamanho do passo e ponto inicial.

Embora os métodos de pontos interiores tenham sido originalmente desenvolvidos para resolver problemas de programação linear, o desenvolvimento para programação não-linear tem sido motivado pelo excelente desempenho computacional dos métodos primal-dual para programação convexa [37].

Devido ao tamanho e características especiais dos problemas, os métodos de pontos interiores mostraram-se uma boa alternativa para os problemas de fluxo de potência ótimo. Em 1994, Granville propôs a implementação do método primal-dual barreira logarítmica para o problema de despacho reativo [18]. Também neste ano, Wu, Debs e Marsten apresentam o problema de fluxo de potência ótimo com a variante preditor-corretor do método primaldual [41]. Já em 1998, Torres e Quintana combinaram estes métodos com a utilização de coordenadas cartesianas para representar a tensão [38]. Atualmente os métodos de pontos interiores estão entre os mais utilizados na área de sistemas de potência devido a sua velocidade e robustez [15, 28, 35].

Neste trabalho é proposto um novo método de pontos interiores preditor-corretor com correção em todas as condições de otimalidade para o problema de fluxo de potência ótimo, pois a utilização de coordenadas cartesianas para representar as tensões possibilita o cálculo destas correções. Outra contribuição deste trabalho é a utilização de uma heurística para tratar as restrições operacionais de magnitude das tensões. Para fins de comparação, são implementados os métodos de trajetória central e preditor-corretor tradicional, além do método proposto.

## Capítulo 2

## Fluxo de Potência Ótimo

Neste capítulo será apresentado o problema de cálculo de fluxo de potência e a partir dele será formulado o problema de fluxo de potência ótimo.

### 2.1 Cálculo de Fluxo de Potência

A formulação do problema de cálculo de fluxo de potência será descrita a seguir conforme [30]. Na formulação do problema, cada barra da rede é associada a quatro variáveis, sendo que duas delas entram como dados do problema e duas como incógnitas:

- $v_k$ , magnitude da tensão;
- $\theta_k$ , ângulo da tensão;
- $P_k$ , injeção líquida (geração menos carga) de potência ativa;
- $Q_k$ , injeção líquida de potência reativa.

Dependendo de quais variáveis nodais entram como dados e quais são consideradas incógnitas, definem-se três tipos de barras:

• PQ, são dados  $P_k \in Q_k$  e calculados  $v_k \in \theta_k$ ;

- PV, são dados  $P_k \in v_k$  e calculados  $Q_k \in \theta_k$ ;
- $V\theta$ , são dados  $v_k \in \theta_k$  e calculados  $P_k \in Q_k$ .

As barras do tipo PQ e PV são utilizadas para representar barras de carga e geração, respectivamente. A barra  $V\theta$ , ou barra de referência, tem uma dupla função: fornecer a referência angular do sistema e fechar o balanço de potência do sistema.

A representação mais comum da tensão  $(T_k)$  utilizada nos estudos de sistemas de potência se dá através de coordenadas polares:

$$T_k = v_k(\cos\theta_k + j\sin\theta_k), \qquad (2.1)$$

onde j é a unidade imaginária  $(j = \sqrt{-1})$ .

Podemos também representar a tensão utilizando coordenadas cartesianas:

$$T_k = e_k + jf_k, \tag{2.2}$$

onde  $e_k$  e  $f_k$  são as componentes real e imaginária da tensão, respectivamente.

As relações entre ambas representações são:

$$v_{k} = \sqrt{e_{k}^{2} + f_{k}^{2}}$$

$$\theta_{k} = \arctan(f_{k}/e_{k})$$

$$e_{k} = v_{k}\cos\theta_{k}$$

$$f_{k} = v_{k}\sin\theta_{k}.$$
(2.3)

Neste trabalho serão utilizadas coordenadas cartesianas para representar a tensão, logo as quatro variáveis são:

- $e_k$ , parte real da tensão;
- $f_k$ , parte imaginária da tensão;

- $P_k$ , injeção líquida de potência ativa;
- $Q_k$ , injeção líquida de potência reativa.

O conjunto de equações do problema de fluxo de potência é formado por duas equações para cada barra, correspondendo à imposição da primeira lei de Kirchhoff: as potências ativas e reativas injetadas em cada barra são iguais à soma dos fluxos correspondentes que deixam a barra. Isto pode ser expresso matematicamente como:

$$P_{k} = \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km}(e_{k}, f_{k}, e_{m}, f_{m})$$

$$Q_{k} + Q_{k}^{sh}(v_{k}) = \sum_{m \in \Omega_{k}} Q_{km}(e_{k}, f_{k}, e_{m}, f_{m}),$$
(2.4)

onde:  $\Omega_k$  representa o conjunto de barras vizinhas da barra k,  $P_{km} \in Q_{km}$  são os fluxos de potência ativa e reativa no ramo k - m, respectivamente e  $Q_k^{sh}$  é o componente da injeção devida ao elemento shunt da barra k ( $Q_k^{sh} = b_k^{sh} v_k^2$ ).

As expressões (2.4) consideram a seguinte convenção de sinais: as injeções líquidas de potência são positivas quando entram na barra (geração) e negativas quando saem da barra (carga); os fluxos de potência são positivos quando saem da barra e negativos quando entram; para os elementos *shunt* das barras é adotada a mesma convenção que a usada para as injeções.

O conjunto de inequações de problema de fluxo de potência é formado pelas restrições nas magnitudes das tensões e pelos limites nas injeções de potência das barras:

$$\begin{array}{rcl}
v_k^{\min} &\leq v_k &\leq v_k^{\max} \\
P_k^{\min} &\leq P_k &\leq P_k^{\max} \\
Q_k^{\min} &\leq Q_k &\leq Q_k^{\max}.
\end{array}$$
(2.5)

As tensões são limitadas em todas as barras, enquanto que as injeções de potência são limitadas apenas nas barras geradoras.

Neste momento identificamos uma diferença nas formulações em coordenadas polares e cartesianas. Os limites impostos às magnitudes das tensões estão na forma de uma simples canalização de variáveis, enquanto que na forma cartesiana passa a ser uma restrição funcional da forma:

$$(v_k^{\min})^2 \le e_k^2 + f_k^2 \le (v_k^{\max})^2.$$
(2.6)

Essa é a única desvantagem da formulação cartesiana em relação à polar, e ela perde importância devido ao tratamento eficiente de desigualdades proporcionado pelos métodos de pontos interiores [28, 35].

#### 2.1.1 Modelagem das Linhas de Transmissão

As linhas de transmissão são representadas por um modelo definido por três parâmetros: resistência série  $(r_{km})$ , reatância série  $(x_{km})$  e susceptância shunt  $(b_{km}^{sh})$  [30]. A impedância série  $(z_{km})$  do elemento é:

$$z_{km} = r_{km} + jx_{km}, \qquad (2.7)$$

enquanto a admitância série  $(y_{km})$  é:

$$y_{km} = g_{km} + jb_{km} = z_{km}^{-1} = \frac{r_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2} - j\frac{x_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2},$$
(2.8)

ou seja, a condutância série  $(g_{km})$  e a susceptância série  $(b_{km})$  são dadas respectivamente por:

$$g_{km} = \frac{r_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2}$$
 e  $b_{km} = -\frac{x_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2}$  (2.9)

A corrente  $I_{km}$  é formada de uma componente série e uma *shunt*, podendo ser calculada a partir das tensões  $T_k$  e  $T_m$  e dos parâmetro da linha de transmissão:

$$I_{km} = y_{km}(T_k - T_m) + jb_{km}^{sh}T_k, (2.10)$$

onde, por definição:  $T_k = e_k + jf_k$  e  $T_m = e_m + jf_m$ . Analogamente, a corrente  $I_{mk}$  é dada por:

$$I_{mk} = y_{mk}(T_m - T_k) + jb_{km}^{sh}T_m.$$
(2.11)

### 2.1.2 Fluxos de Potência Ativa e Reativa

As expressões dos fluxos de potência ativa  $(P_{km})$  e reativa  $(Q_{km})$  podem ser obtidas a partir do modelo da subseção anterior. A corrente  $I_{km}$  de uma linha de transmissão é dada pela equação (2.10). O fluxo de potência complexa correspondente é:

$$S_{km} = P_{km} + jQ_{km} = T_k \overline{I_{km}}$$

$$= (e_k + jf_k)[(g_{km} - jb_{km})(e_k - jf_k - e_m + jf_m) - jb_{km}^{sh}(e_k - jf_k)].$$
(2.12)

Os fluxos  $P_{km}$  e  $Q_{km}$  são obtidos identificando-se as partes reais e imaginárias dessa equação, resultando:

$$P_{km} = g_{km}(e_k^2 + f_k^2 - e_k e_m - f_k f_m) + b_{km}(e_k f_m - e_m f_k)$$

$$Q_{km} = -b_{km}(e_k^2 + f_k^2 - e_k e_m - f_k f_m) + g_{km}(e_k f_m - e_m f_k) - b_{km}^{sh}(e_k^2 + f_k^2).$$
(2.13)

Os fluxos  $P_{mk}$  e  $Q_{mk}$  são obtidos de forma análoga:

$$P_{mk} = g_{km}(e_m^2 + f_m^2 - e_m e_k - f_m f_k) + b_{km}(e_m f_k - e_k f_m)$$

$$Q_{mk} = -b_{km}(e_m^2 + f_m^2 - e_m e_k - f_m f_k) + g_{km}(e_m f_k - e_k f_m) - b_{km}^{sh}(e_m^2 + f_m^2).$$
(2.14)

As perdas de potência ativa e reativa na linha são dadas, respectivamente, por:

$$P_{km} + P_{mk} = g_{km}[(e_k - e_m)^2 + (f_k - f_m)^2]$$

$$Q_{km} + Q_{mk} = -b_{km}[(e_k - e_m)^2 + (f_k - f_m)^2] - b_{km}^{sh}(e_k^2 + f_k^2 + e_m^2 + f_m^2).$$
(2.15)

Assim como foram desenvolvidas para as linhas de transmissão, as expressões dos fluxos de potência podem ser generalizadas para transformadores [30]:

$$P_{km} = a_{km}^2 g_{km} (e_k^2 + f_k^2) - a_{km} g_{km} (e_k e_m + f_k f_m) + a_{km} b_{km} (e_k f_m - e_m f_k)$$

$$Q_{km} = -a_{km}^2 (b_{km} + b_{km}^{sh}) (e_k^2 + f_k^2) + a_{km} g_{km} (e_k f_m - e_m f_k) + a_{km} b_{km} (e_k e_m - f_k f_m).$$
(2.16)

Para os transformadores em-fase o número real  $a_{km}$  é a relação de transformação, conhecida como tap. No caso das linhas de transmissão, temos  $a_{km} = 1$ . Neste trabalho não consideraremos transformadores defasadores, onde  $a_{km}$  é um número complexo.

### 2.1.3 Formulação Matricial

A injeção líquida de corrente na barra k pode ser obtida aplicando-se a primeira lei de Kirchhoff a este modelo:

$$I_k + I_k^{sh} = \sum_{m \in \Omega_k} I_{km}.$$
(2.17)

A corrente  $I_{km}$  pode ser expressa de forma geral como:

$$I_{km} = (a_{km}^2 y_{km} + j b_{km}^{sh}) T_k - a_{km} y_{km} T_m.$$
(2.18)

Considerando  $I_{km}$  dado em (2.18), a expressão (2.17) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$I_{k} = \left[ jb_{k}^{sh} + \sum_{m \in \Omega_{k}} (jb_{km}^{sh} + a_{km}^{2}y_{km}) \right] T_{k} + \sum_{m \in \Omega_{k}} (-a_{km}y_{km})T_{m}.$$
 (2.19)

Considerando todas as barras, a fórmula (2.19) pode ser representada na forma matricial:

$$I = YT, (2.20)$$

onde:

I é o vetor das correntes, cujas componentes são  $I_k$ ;

Té o vetor das tensões, cujas componentes são  $T_k;$ 

Y = G + jB é a matriz admitância nodal, sendo G a matriz condutância e B a matriz susceptância.

Desconsiderando transformadores defasadores, os elementos da matriz Y são:

$$Y_{km} = -a_{km}y_{km} \quad (\text{para } k \neq m),$$
  

$$Y_{kk} = jb_{k}^{sh} + \sum_{m \in \Omega_{k}} (jb_{km}^{sh} + a_{km}^{2}y_{km}).$$
(2.21)

Em geral, essa matriz é esparsa, pois  $Y_{km} = 0$  sempre que não existirem linhas ou transformadores entre as barras  $k \in m$ . Se a rede for formada apenas por linhas de transmissão e transformadores em fase, a matriz Y será simétrica. A presença de transformadores defasadores torna a matriz assimétrica [30].

A injeção de corrente  $I_k$ , que é a k-ésima componente do vetor I, pode ser escrita na forma:

$$I_k = Y_{kk}T_k + \sum_{m \in \Omega_k} Y_{km}T_m = \sum_{m \in K} Y_{km}T_m, \qquad (2.22)$$

onde K é o conjunto de todas as barras m adjacentes à barra k, incluindo ela própria $(K = \{k\} \cup \Omega_k).$ 

Considerando-se que  $Y_{km} = G_{km} + jB_{km}$  e  $T_m = e_m + jf_m$ , a expressão (2.22) pode ser

reescrita da seguinte forma:

$$I_k = \sum_{m \in K} (G_{km} + jB_{km})(e_m + jf_m).$$
(2.23)

A injeção de potência complexa é:

$$S_k = P_k + jQ_k = T_k\overline{I_k}.$$
(2.24)

Substituindo-se (2.23) em (2.24) obtem-se:

$$S_k = (e_k + jf_k) \sum_{m \in K} (G_{km} - jB_{km})(e_m - jf_m).$$
(2.25)

As injeções de potência ativa e reativa podem ser obtidas identificando-se as partes reais e imaginárias de (2.25):

$$P_{k} = \sum_{m \in K} (e_{k}G_{km}e_{m} + f_{k}G_{km}f_{m} + f_{k}B_{km}e_{m} - e_{k}B_{km}f_{m}),$$

$$Q_{k} = \sum_{m \in K} (f_{k}G_{km}e_{m} - e_{k}G_{km}f_{m} - e_{k}B_{km}e_{m} - f_{k}B_{km}f_{m}).$$
(2.26)

Considerando todas as barras, (2.26) pode ser representada na forma matricial:

$$P = EGe + FGf + FBe - EBf,$$
  

$$Q = FGe - EGf - EBe - FBf,$$
(2.27)

onde:

Prepresenta o vetor de injeções de potência ativa, cujas componentes são  $P_k;$ 

Qrepresenta o vetor de injeções de potência reativa, cujas componentes são  $Q_k;$ 

e representa o vetor da parte real das tensões, cujas componentes são  $e_k$ ;

f representa o vetor da parte imaginária das tensões, cujas componentes são  $f_k$ ;

 $E = diaq(e) \in F = diaq(f).$ 

#### Fluxo de Potência Ótimo 2.2

O problema de fluxo de potência ótimo consiste em determinar o estado de operação ótimo de um sistema elétrico de geração/transmissão de potência. A função objetivo representa algum critério de desempenho da operação dos sistemas elétricos e as restrições são dadas pelas equações de fluxo de potência da seção anterior e pelos limites das variáveis [37].

A definição dos conjuntos de índices a seguir será útil para a formulação do problema:

N representa todas as barras do sistema;

C representa as barras de carga;

 $\mathbf{S}$ 

G representa as barras de geração de potência ativa;

**R** representa as barras de controle de potência reativa.

Considerando os vetores da parte real (e) e imaginária (f) da tensão, será definido o vetor:

$$x = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}.$$
 (2.28)

)

#### Fluxo de Potência Ótimo Ativo-Reativo 2.2.1

Um problema de fluxo de potência ótimo ativo-reativo pode ser formulado como:

$$\begin{array}{ll} \min & \phi(x) \\ \text{s.a} & P_k(x) + P_{C_k} - P_{G_k} = 0 & \forall k \in \mathbf{C} \\ & Q_k(x) + Q_{C_k} - Q_{G_k} = 0 & \forall k \in \mathbf{C} \\ & (v_k^{\min})^2 \leq V_k(x) \leq (v_k^{\max})^2 & \forall k \in \mathbf{N} \\ & P_k^{\min} \leq P_k(x) \leq P_k^{\max} & \forall k \in \mathbf{G} \\ & Q_k^{\min} \leq Q_k(x) \leq Q_k^{\max} & \forall k \in \mathbf{R}, \end{array}$$

$$(2.29)$$

onde:

 $V_k$  representa o quadrado da magnitude da tensão na barra k;  $P_{C_k}$  representa a demanda de potência ativa na barra k;  $Q_{C_k}$  representa a demanda de potência reativa na barra k;  $P_{G_k}$  representa a geração de potência ativa na barra k;  $Q_{G_k}$  representa a geração de potência reativa na barra k;  $w_k^{\min}$  e  $w_k^{\max}$  representam os limites da tensão na barra k;  $P_k^{\min}$  e  $P_k^{\max}$  representam os limites da tensão na barra k;  $Q_k^{\min}$  e  $Q_k^{\max}$  representam os limites de injeção de potência ativa na barra k;  $Q_k^{\min}$  e  $Q_k^{\max}$  representam os limites de injeção de potência reativa na barra k. A função  $V_k$ , que representa o quadrado da magnitude da tensão na barra k, é dada por:

$$V_k(x) = e_k^2 + f_k^2, (2.30)$$

ou ainda, na forma matricial:

$$V = Ee + Ff. \tag{2.31}$$

A função objetivo representa critérios de desempenho da operação dos sistemas elétricos, tais como: diferença entre a injeção de potência ativa e uma dada injeção desejada ( $\phi_1$ ), injeção de potência ativa na barra de referência ( $\phi_2$ ), perdas de potência ativa nas linhas ( $\phi_3$ ), entre outros [37].

As funções objetivo acima são dadas por:

$$\phi_{1}(x) = \frac{1}{2} \sum_{k} h_{k} \left[ \sum_{m \in K} P_{km} - P_{k}^{esp} \right]^{2} \quad \forall k \in \mathbf{G}$$
  

$$\phi_{2}(x) = \sum_{m \in K} P_{km} \quad k = \tilde{\mathbf{N}}$$
  

$$\phi_{3}(x) = \sum_{m \in K} (P_{km} + P_{mk}) \quad \forall k \in \mathbf{N},$$
(2.32)

onde  $h_k$  é o peso relacionado com a geração na barra k,  $P_k^{esp}$  representa a injeção líquida de potência ativa especificada para a barra  $k \in \tilde{N}$  é o índice que representa a barra de referência.

Ou ainda, na forma matricial:

$$\phi_1(x) = \frac{1}{2} [P(x) - P^{esp}]^t H[P(x) - P^{esp}]$$
  

$$\phi_2(x) = (EGe + FGf + FBe - EBf)_{\tilde{N}}$$
  

$$\phi_3(x) = e^t Ge + f^t Gf$$
(2.33)

onde H é a matriz diagonal formada a partir do vetor h.

## Capítulo 3

## Métodos de Pontos Interiores

Neste capítulo serão apresentados os métodos de pontos interiores. Os métodos primaisduais afim-escala, de trajetória central e preditor-corretor são desenvolvidos para problemas de programação linear. Em seguida, os métodos de trajetória central e preditor-corretor são generalizados para o problema de programação não-linear.

### 3.1 Método de Newton

O método de Newton consiste na forma mais simples de desenvolver os métodos de pontos interiores do tipo primal-dual [40]. Nesta seção o método será descrito brevemente conforme [39].

Dada a função:

$$F(x) = \begin{bmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_n(x) \end{bmatrix} \quad e \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ , um problema comum é encontrar um ponto  $x^* \in \mathbb{R}^n$  tal que  $F(x^*) = 0$ , ou seja, encontrar uma raiz de F. O método de Newton é um método iterativo desenvolvido para resolver este problema. Dado qualquer  $x \in \mathbb{R}^n$ , o objetivo é encontrar uma direção de busca d tal que F(x+d) = 0. Assim, buscamos aproximar esta direção pelos dois primeiros termos da expansão da série de Taylor:

$$F(x+d) \approx F(x) + J(x)d, \qquad (3.1)$$

onde J(x) é a matriz Jacobiana de F no ponto x:

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

A aproximação é linear em d. Logo, igualando (3.1) a zero, temos um sistema linear cuja solução corresponde a direção de busca:

$$J(x)d = -F(x). \tag{3.2}$$

Calculado  $d = -[J(x)]^{-1}F(x)$ , o método de Newton atualiza a aproximação atual substituindo x por x + d. Este processo continua até obter uma solução suficientemente próxima de uma raiz ( $F(x) \approx 0$ ). Assim temos um método iterativo da forma:

$$x^{k+1} = x^k - \left[J(x^k)\right]^{-1} F(x^k).$$
(3.3)

### 3.2 Programação Linear

Em um problema de programação linear o objetivo é minimizar uma função linear, cujas variáveis estão sujeitas à restrições também lineares. Um ponto interior é aquele em que todas as variáveis não negativas se encontram estritamente dentro de seus limites.

Um problema de programação linear pode ser representado por [32]:

$$\begin{array}{ll} \min & c^t x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \ge 0, \end{array}$$
 (3.4)

onde  $c, x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $b \in \mathbb{R}^m$ .

O problema (3.4) está associado ao problema dual, dado por:

$$\begin{array}{ll} \max & b^t y \\ \text{s.a} & A^t y + z = c \\ & z \ge 0, \ y \ \text{livre}, \end{array} \tag{3.5}$$

onde  $y \in \mathbb{R}^m$  e  $z \in \mathbb{R}^n$ . Por definição, um ponto (x, z, y) é interior se (x, z) > 0.

Um ponto (x, z, y) é ótimo para os problemas (3.4) e (3.5) se, e somente se, as seguintes condições de otimalidade são satisfeitas [32]:

- factibilidade primal:  $Ax b = 0, x \ge 0,$
- factibilidade dual:  $A^ty + z c = 0, \ z \ge 0$  e
- complementaridade:  $x_i z_i = 0, i = 1, \dots, n$ .

Definimos  $\gamma$  como a diferença entre os valores da função objetivo do problema primal e dual. No caso das formulações dadas por (3.4) e (3.5), temos:  $\gamma = c^t x - b^t y = x^t z$ , se o ponto (x, y, z) for primal e dual factível.

### 3.2.1 Método Primal-Dual Afim-Escala

Seja o problema com a formulação primal e dual dada por (3.4) e (3.5), respectivamente. A idéia para construir um método de pontos interiores consiste em aplicar o método de Newton ao sistema formado pelas condições de otimalidade. Temos que F(x, y, z) é dada por:

$$F(x, z, y) = \begin{bmatrix} Ax - b \\ A^t y + z - c \\ XZu \end{bmatrix} = 0,$$
(3.6)

onde X = diag(x), Z = diag(z) e u representa o vetor em que todos os elementos tem valor unitário. Usando essa notação, as equações  $x_i z_i = 0$  são representadas por XZu = 0.

Dado um ponto inicial  $(x^0, z^0, y^0)$  e desconsiderando as restrições  $x \ge 0$  e  $z \ge 0$ , calculamos o ponto  $(x^1, z^1, y^1)$  utilizando o método de Newton:

$$(x^{1}, z^{1}, y^{1}) = (x^{0}, z^{0}, y^{0}) - \left[J(x^{0}, z^{0}, y^{0})\right]^{-1} F(x^{0}, z^{0}, y^{0}),$$
(3.7)

onde:

$$J(x^{0}, z^{0}, y^{0}) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & I & A^{t} \\ Z & X & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim,  $d^0$  é solução do sistema linear:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & I & A^{t} \\ Z^{0} & X^{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x^{0} \\ \Delta z^{0} \\ \Delta y^{0} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} r_{1}^{0} \\ r_{2}^{0} \\ r_{3}^{0} \end{bmatrix}.$$
 (3.8)

Generalizando, dado  $(x^k, z^k, y^k)$ , a direção de Newton  $d^k$  é dada pela solução do sistema:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & I & A^{t} \\ Z^{k} & X^{k} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x^{k} \\ \Delta z^{k} \\ \Delta y^{k} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} r_{1}^{k} \\ r_{2}^{k} \\ r_{3}^{k} \end{bmatrix}, \qquad (3.9)$$

onde:

$$r_1^k = Ax^k - b$$
$$r_2^k = A^t y^k + z^k - c$$
$$r_3^k = X^k Z^k u.$$

Método 3.1 Método Primal-Dual Afim-Escala

**Entradas:**  $(x^0, z^0) > 0, y^0 \in \tau \in (0, 1).$ 

Para $k=0,1,2,\ldots$ faça

**[1]** Calcule  $r_1^k$ ,  $r_2^k \in r_3^k$ .

[2] Resolva (3.9) para obter a direção de Newton  $d^k$ .

[3] Calcule o tamanho do passo  $\alpha^k$  tal que  $(x^{k+1}, z^{k+1}) > 0$ .

[4] Calcule  $(x^{k+1}, z^{k+1}, y^{k+1}) = (x^k, z^k, y^k) + \alpha^k (\Delta x^k, \Delta z^k, \Delta y^k).$ 

 $\mathbf{Fim}$ 

Observe que  $\alpha^k$  é calculado de forma que  $(x^{k+1}, z^{k+1})$  seja interior. Assim:

$$\alpha^k = \min(1, \tau \alpha_1^k, \tau \alpha_2^k), \tag{3.10}$$

onde:

$$\alpha_1^k = \min_i \left\{ \frac{-x_i^k}{\Delta x_i^k} \mid \Delta x_i^k < 0 \right\}$$

$$\alpha_2^k = \min_i \left\{ \frac{-z_i^k}{\Delta z_i^k} \mid \Delta z_i^k < 0 \right\}$$

e  $\tau \in (0,1)$ . O cálculo separado do tamanho dos passos primal e dual pode implicar na convergência em menos iterações [24]. Na prática, adota-se o tamanho máximo do passo  $\alpha^k = 1$  porque este é o tamanho de passo natural do método de Newton.

#### 3.2.2 Método de Trajetória Central

O método afim-escala apresentado na seção anterior possui uma grande desvantagem, pois permite que os pontos (x, z) calculados se aproximem de seus limites muito rapidamente. Consequentemente, as direções obtidas perto destes limites são muito distorcidas, pois o valor de alguns pares  $x_i z_i$  se torna próximo de zero rapidamente e o método progride lentamente, podendo inclusive não convergir. Para evitar que isto aconteça, acrescentamos a cada iteração k uma perturbação  $\mu^k > 0$  nas condições de complementaridade.

Dada as formulações primal (3.4) e dual (3.5) do problema, podemos escrever as condições de otimalidade, adicionando uma perturbação  $\mu$  nas condições de complementaridade:

- factibilidade primal:  $Ax b = 0, x \ge 0$ ,
- factibilidade dual:  $A^ty+z-c=0, z\geq 0$ e
- complementaridade:  $XZu = \mu u$ .

Dado  $(x^k, z^k, y^k)$ , a direção de Newton  $d^k$  é a solução do sistema:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & I & A^t \\ Z^k & X^k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x^k \\ \Delta z^k \\ \Delta y^k \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} r_1^k \\ r_2^k \\ \overline{r}_3^k \end{bmatrix}, \qquad (3.11)$$

onde:

$$\overline{r}_3^k = X^k Z^k u - \mu^k u.$$

#### Método 3.2 Método de Trajetória Central

Entradas:  $(x^0, z^0) > 0, y^0$  livre,  $\sigma \in (0, 1)$  e  $\tau \in (0, 1)$ . Para k = 0, 1, 2, ... faça [1] Calcule  $\mu^k$ . [2] Calcule os resíduos  $r_1^k, r_2^k \in \overline{r}_3^k$ . [3] Resolva (3.11) para obter a direção de Newton  $d^k$ . [4] Calcule o tamanho do passo  $\alpha^k$  tal que  $(x^{k+1}, z^{k+1}) > 0$ . [5] Calcule  $(x^{k+1}, z^{k+1}, y^{k+1}) = (x^k, z^k, y^k) + \alpha^k (\Delta x^k, \Delta z^k, \Delta y^k)$ . Fim

O valor de  $\mu^k$  é dado pela fórmula [32]:

$$\mu^k = \sigma \rho^k, \tag{3.12}$$

onde  $\rho^k$  representa a média dos produtos  $x_i^k z_i^k,$ isto é,  $\rho^k = \gamma^k/n = (x^k)^t z^k/n.$ 

#### 3.2.3 Método Preditor-Corretor

O método preditor-corretor desenvolvido por Mehrotra [26] consiste em utilizar uma direção que contempla três componentes:

- direção afim-escala (direção preditora ou de Newton),
- direção de centragem, cujo tamanho é determinado pela perturbação  $\mu$  e
- direção de correção, que compensa a aproximação linear do método de Newton.

Ao calcular a direção afim verificamos o progresso do método ao longo desta direção. Se o progresso for grande, a perturbação  $\mu$  é pequena. Caso contrário, é conveniente aumentar o peso da direção de centragem, tal que a perturbação  $\mu$  seja maior.

Uma vez que uma segunda direção é calculada, também calculamos a correção não linear utilizando a mesma matriz Jacobiana, para que o esforço computacional por iteração não duplique.

Dado  $(x^k, z^k, y^k)$ , primeiro encontramos a direção afim  $\tilde{d}^k$   $(\mu = 0)$ :

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & I & A^{t} \\ Z^{k} & X^{k} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \tilde{x}^{k} \\ \Delta \tilde{z}^{k} \\ \Delta \tilde{y}^{k} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_{1}^{k} \\ r_{2}^{k} \\ r_{3}^{k} \end{bmatrix}.$$
(3.13)

Em seguida calculamos a correção no ponto  $(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{y}) = (x + \Delta \tilde{x}, z + \Delta \tilde{z}, y + \Delta \tilde{y})$ . Para as equações primais:

$$A\tilde{x} - b = A(x + \Delta \tilde{x}) - b$$
$$= Ax + A\Delta \tilde{x} - b$$
$$= Ax - b - (Ax - b)$$
$$= 0.$$

Para as equações duais:

$$A^{t}\tilde{y} + \tilde{z} - c = A^{t}(y + \Delta \tilde{y}) + (z + \Delta \tilde{z}) - c$$
$$= A^{t}y + A^{t}\Delta \tilde{y} + z + \Delta \tilde{z} - c$$
$$= A^{t}y + z - c - (A^{t}y + z - c)$$
$$= 0.$$

E para as equações de complementaridade:

$$\begin{split} \tilde{X}\tilde{Z}u &= (X + \Delta \tilde{X})(Z + \Delta \tilde{Z})u \\ &= XZu + X\Delta \tilde{Z}u + \Delta \tilde{X}Zu + \Delta \tilde{X}\Delta \tilde{Z}u \\ &= XZu + X\Delta \tilde{z} + Z\Delta \tilde{x} + \Delta \tilde{X}\Delta \tilde{Z}u \\ &= XZu - XZu + \Delta \tilde{X}\Delta \tilde{Z}u \\ &= \Delta \tilde{X}\Delta \tilde{Z}u. \end{split}$$

Usando a mesma Jacobiana para calcular a direção de correção  $\hat{d}^k = (\Delta \hat{x}, \Delta \hat{z}, \Delta \hat{y})$  no ponto  $(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{y})$  e também introduzindo a perturbação de centragem  $\mu$ , temos:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & I & A^{t} \\ Z^{k} & X^{k} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{x}^{k} \\ \Delta \hat{z}^{k} \\ \Delta \hat{y}^{k} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta \tilde{X}^{k} \Delta \tilde{Z}^{k} u - \mu^{k} u \end{bmatrix}.$$
 (3.14)

A direção  $d^k$  a ser usada é a soma das duas direções:  $d^k = \tilde{d}^k + \hat{d}^k$ . Ao invés de calcular (3.14) e depois somar as direções, podemos somar os dois sistemas [40]:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & I & A^{t} \\ Z^{k} & X^{k} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x^{k} \\ \Delta z^{k} \\ \Delta y^{k} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} r_{1}^{k} \\ r_{2}^{k} \\ \tilde{r}_{3}^{k} \end{bmatrix}, \qquad (3.15)$$

onde:

$$\tilde{r}_3^k = X^k Z^k u + \Delta \tilde{X}^k \Delta \tilde{Z}^k u - \mu^k u.$$

Para o cálculo de  $\mu^k$ , definimos  $\tilde{\rho}^k$  como sendo o valor médio dos produtos  $\tilde{x}_i \tilde{z}_i$  se usarmos a direção afim. Se  $\tilde{\rho}^k \ll \rho^k$ , a direção afim é uma boa direção de busca e tomamos  $\mu^k$  próximo

#### Método 3.3 Método Preditor-Corretor

**Entradas:**  $(x^0, z^0) > 0, y^0$  livre e  $\tau \in (0, 1)$ .

- Para  $k = 0, 1, 2, \dots$  faça
  - **[1]** Calcule os resíduos  $r_1^k$ ,  $r_2^k$  e  $r_3^k$ .
  - [2] Resolva (3.13) para obter a direção afim-escala  $\tilde{d}^k$ .
  - [3] Calcule o tamanho do passo  $\tilde{\alpha}^k$  tal que  $(\tilde{x}^{k+1}, \tilde{z}^{k+1}) > 0$ .
  - [4] Calcule  $\mu^k$ .
  - [5] Calcule o resíduo  $\tilde{r}_3^k$ .
  - [6] Resolva (3.15) para obter a direção de Newton  $d^k$ .
  - [7] Calcule o tamanho do passo  $\alpha^k$  tal que  $(x^{k+1}, z^{k+1}) > 0$ .
  - [8] Calcule  $(x^{k+1}, z^{k+1}, y^{k+1}) = (x^k, z^k, y^k) + \alpha^k (\Delta x^k, \Delta z^k, \Delta y^k).$

#### $\mathbf{Fim}$

de 0. Se  $\tilde{\rho}^k$  é apenas un pouco menor que  $\rho^k$ , tomamos  $\mu^k$  próximo de 1 [40]. Para isto, Mehrotra sugere a seguinte heurística [26]:

$$\mu^k = \sigma^k \rho^k, \tag{3.16}$$

onde:

$$\sigma^{k} = \left(\frac{\tilde{\rho}^{k}}{\rho^{k}}\right)^{3}$$
$$\tilde{\rho}^{k} = (x^{k} + \tilde{\alpha}\Delta\tilde{x})^{t}(z^{k} + \tilde{\alpha}\Delta\tilde{z})/n.$$

Apenas uma decomposição é calculada a cada iteração, pois a mesma matriz Jacobiana é utilizada na resolução dos dois sistemas lineares. Assim, o método preditor-corretor pode ser obtido com uma pequena modificação do método de trajetória central, com custo computacional adicional relativamente baixo, mas com ganho significativo no número de iterações para problemas de programação linear. Cabe ressaltar que o sistema a ser resolvido na prática, para o cálculo das direções de busca, envolve uma eliminação de variáveis, resultando na maioria das implementações em um sistema simétrico definido positivo de dimensão menor [40]. Além disso, todos os métodos apresentados nesta seção podem ser facilmente generalizados para problemas com variáveis canalizadas na formulação (3.4).

### 3.2.4 Cálculo da Direção de Newton

A direção de Newton pode ser obtida resolvendo diretamente o sistema:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & I & A^{t} \\ Z & X & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta z \\ \Delta y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_{1} \\ r_{2} \\ r_{3} \end{bmatrix}, \qquad (3.17)$$

ou resolvendo o sistema reduzido:

$$A(Z^{-1}X)A^{t}\Delta y = -r_{1} + A(-Z^{-1}Xr_{2} + Z^{-1}r_{3})$$
(3.18)

e depois calculando:

$$\Delta z = -r_2 - A^t \Delta y$$
$$\Delta x = -Z^{-1}(r_3 + X\Delta z)$$

Esta eliminação de variáveis obtem um sistema definido positivo de dimensão menor e portanto reduz o esforço computacional por iteração.
## 3.3 Programação Não-Linear

Um problema de programação não-linear pode ser representado por:

min 
$$f(x)$$
  
s.a  $g(x) = 0$  (3.19)  
 $h^{\min} \le h(x) \le h^{\max},$ 

onde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $h^{\min}, h^{\max} \in \mathbb{R}^p$  e  $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$  e  $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$  são funções contínuas e deriváveis.

Introduzindo as variáveis de folga nas inequações, temos:

min 
$$f(x)$$
  
s.a  $g(x) = 0$   
 $h(x) + s_1 = h^{\max}$  (3.20)  
 $h(x) - s_2 = h^{\min}$   
 $(s_1, s_2) \ge 0,$ 

onde  $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^p$ .

A condição de não negatividade das variáveis de folga pode ser imposta adicionando uma barreira logarítmica à função objetivo [32]:

min 
$$f(x) - \mu \sum_{i=1}^{p} (\ln s_{1i} + \ln s_{2i})$$
  
s.a  $g(x) = 0$  (3.21)  
 $s_1 + h(x) - h^{\max} = 0$   
 $s_2 - h(x) + h^{\min} = 0.$ 

O problema (3.20) está associado ao problema de barreira (3.21), pois a sequência de

soluções do problema perturbado tende a solução do problema original conforme a sequência de parâmetros de barreira positivos  $\mu$  converge para zero.

Assim, a função Lagrangiana do problema (3.21) é:

$$L = f(x) - \mu \sum_{i=1}^{p} (\ln s_{1i} + \ln s_{2i}) + y^{t}g(x) + z_{1}^{t}(s_{1} + h(x) - h^{\max}) + z_{2}^{t}(s_{2} - h(x) + h^{\min}), \qquad (3.22)$$

onde  $y\in\mathbb{R}^m$  e  $z_1,z_2\in\mathbb{R}^p$ são as variáveis duais chamadas de multiplicadores de Lagrange.

Um mínimo local de (3.21) pode ser expresso como um ponto estacionário de L e deve satisfazer as condições necessárias de primeira ordem (KKT):

$$\begin{aligned}
\nabla_{x}L &= \nabla_{x}f(x) + J_{g}(x)^{t}y + J_{h}(x)^{t}z_{1} - J_{h}(x)^{t}z_{2} = 0 \\
\nabla_{s_{1}}L &= z_{1} - \mu S_{1}^{-1}u = 0 \\
\nabla_{s_{2}}L &= z_{2} - \mu S_{2}^{-1}u = 0 \\
\nabla_{y}L &= g(x) = 0 \\
\nabla_{z_{1}}L &= s_{1} + h(x) - h^{\max} = 0 \\
\nabla_{z_{2}}L &= s_{2} - h(x) + h^{\min} = 0,
\end{aligned}$$
(3.23)

onde  $\nabla_x f(x) \in \mathbb{R}^n$  é o gradiente de f(x),  $J_g(x) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é a matriz Jacobiana de g(x) e  $J_h(x) \in \mathbb{R}^{p \times n}$  é a matriz Jacobiana de h(x). Assim  $J_g(x)^t y = \sum_{i=1}^m y_i \nabla g_i(x)$ ,  $J_h(x)^t z_1 = \sum_{i=1}^p z_{1_i} \nabla h_i(x)$  e  $J_h(x)^t z_2 = \sum_{i=1}^p z_{2_i} \nabla h_i(x)$ . Novamente a notação  $S_1 = \text{diag}(s_1)$ ,  $S_2 = \text{diag}(s_2)$ ,  $Z_1 = \text{diag}(z_1)$  e  $Z_2 = \text{diag}(z_2)$  é utilizada e  $u \in \mathbb{R}^p$  representa o vetor em que todos os elementos tem valor unitário.

Reescalando as equações referentes à complementaridade, podemos expressar as condições

de otimalidade da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \nabla_x f(x) + J_g(x)^t y + J_h(x)^t z_1 - J_h(x)^t z_2 \\ S_1 Z_1 u - \mu u \\ S_2 Z_2 u - \mu u \\ g(x) \\ s_1 + h(x) - h^{\max} \\ s_2 - h(x) + h^{\min} \end{bmatrix} = 0, \qquad (3.24)$$

 $\operatorname{com}(s_1, s_2) > 0$  e consequentemente  $(z_1, z_2) > 0$ .

#### 3.3.1 Método de Trajetória Central

Analogamente à programação linear, aplicamos o método de Newton ao sistema (3.24):

$$\begin{bmatrix} \nabla_{xx}^{2}L & 0 & 0 & J_{g}(x)^{t} & J_{h}(x)^{t} & -J_{h}(x)^{t} \\ 0 & Z_{1} & 0 & 0 & S_{1} & 0 \\ 0 & 0 & Z_{2} & 0 & 0 & S_{2} \\ J_{g}(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_{h}(x) & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J_{h}(x) & 0 & I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta s_{1} \\ \Delta s_{2} \\ \Delta y \\ \Delta z_{1} \\ \Delta z_{2} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} r_{1} \\ \overline{r}_{2} \\ \overline{r}_{3} \\ r_{4} \\ r_{5} \\ r_{6} \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

onde:

$$\begin{split} \nabla_{xx}^{2}L &= \nabla_{xx}^{2}f(x) + \sum_{i=1}^{m} \nabla_{xx}^{2}g_{i}(x)y_{i} + \sum_{i=1}^{p} \nabla_{xx}^{2}h_{i}(x)z_{1_{i}} - \sum_{i=1}^{p} \nabla_{xx}^{2}h_{i}(x)z_{2_{i}} \\ r_{1} &= \nabla_{x}f(x) + J_{g}(x)^{t}y + J_{h}(x)^{t}z_{1} - J_{h}(x)^{t}z_{2} \\ \overline{r}_{2} &= S_{1}Z_{1}u - \mu u \\ \overline{r}_{3} &= S_{2}Z_{2}u - \mu u \\ r_{4} &= g(x) \\ r_{5} &= s_{1} + h(x) - h^{\max} \\ r_{6} &= s_{2} - h(x) + h^{\min}. \end{split}$$

Ao contrário de programação linear (onde  $\sigma$  é fixo), o parâmetro  $\sigma^k$  pode ser atualizado na fórmula (3.16) em função do gap de complementaridade  $s_1^t z_1 + s_2^t z_2$  após cada iteração. Neste trabalho, a atualização será feita através da heurística [12]:

$$\sigma^k = \min(0, 2; 100(s_1^t z_1 + s_2^t z_2)). \tag{3.26}$$

#### 3.3.2 Método Preditor-Corretor

Analogamente à programação linear, calculamos inicialmente a direção afim  $\tilde{d}^k$  ( $\mu = 0$ ):

$$\begin{bmatrix} \nabla_{xx}^{2}L & 0 & 0 & J_{g}(x)^{t} & J_{h}(x)^{t} & -J_{h}(x)^{t} \\ 0 & Z_{1} & 0 & 0 & S_{1} & 0 \\ 0 & 0 & Z_{2} & 0 & 0 & S_{2} \\ J_{g}(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_{h}(x) & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J_{h}(x) & 0 & I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \tilde{x} \\ \Delta \tilde{s_{1}} \\ \Delta \tilde{s_{2}} \\ \Delta \tilde{y} \\ \Delta \tilde{z_{1}} \\ \Delta \tilde{z_{2}} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} r_{1} \\ r_{2} \\ r_{3} \\ r_{4} \\ r_{5} \\ r_{6} \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

onde:

$$\begin{split} \nabla_{xx}^{2}L &= \nabla_{xx}^{2}f(x) + \sum_{i=1}^{m} \nabla_{xx}^{2}g_{i}(x)y_{i} + \sum_{i=1}^{p} \nabla_{xx}^{2}h_{i}(x)z_{1_{i}} - \sum_{i=1}^{p} \nabla_{xx}^{2}h_{i}(x)z_{2_{i}} \\ r_{1} &= \nabla_{x}f(x) + J_{g}(x)^{t}y + J_{h}(x)^{t}z_{1} - J_{h}(x)^{t}z_{2} \\ r_{2} &= S_{1}Z_{1}u \\ r_{3} &= S_{2}Z_{2}u \\ r_{4} &= g(x) \\ r_{5} &= s_{1} + h(x) - h^{\max} \\ r_{6} &= s_{2} - h(x) + h^{\min}. \end{split}$$

Em seguida, a mesma matriz Jacobiana do sistema não-linear (3.24) é usada para calcular a direção de correção. Como a expressão analítica geral das correções referentes às condições de factibilidade primal e dual não é conhecida, considera-se que estas são iguais a 0:

$$\begin{bmatrix} \nabla_{xx}^{2}L & 0 & 0 & J_{g}(x)^{t} & J_{h}(x)^{t} & -J_{h}(x)^{t} \\ 0 & Z_{1} & 0 & 0 & S_{1} & 0 \\ 0 & 0 & Z_{2} & 0 & 0 & S_{2} \\ J_{g}(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_{h}(x) & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J_{h}(x) & 0 & I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{x} \\ \Delta \hat{s_{1}} \\ \Delta \hat{s_{2}} \\ \Delta \hat{y} \\ \Delta \hat{z_{1}} \\ \Delta \hat{z_{2}} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ \hat{r}_{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

onde:

$$\hat{r}_2 = \Delta \tilde{S}_1 \Delta \tilde{Z}_1 u - \mu u$$
$$\hat{r}_3 = \Delta \tilde{S}_2 \Delta \tilde{Z}_2 u - \mu u.$$

Finalmente, a direção  $d^k$  a ser usada é a soma das duas direções:

$$\begin{bmatrix} \nabla_{xx}^{2}L & 0 & 0 & J_{g}(x)^{t} & J_{h}(x)^{t} & -J_{h}(x)^{t} \\ 0 & Z_{1} & 0 & 0 & S_{1} & 0 \\ 0 & 0 & Z_{2} & 0 & 0 & S_{2} \\ J_{g}(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_{h}(x) & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J_{h}(x) & 0 & I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta s_{1} \\ \Delta s_{2} \\ \Delta y \\ \Delta z_{1} \\ \Delta z_{2} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} r_{1} \\ \tilde{r}_{2} \\ \tilde{r}_{3} \\ r_{4} \\ r_{5} \\ r_{6} \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

onde:

$$\tilde{r}_2 = S_1 Z_1 u + \Delta \tilde{S}_1 \Delta \tilde{Z}_1 u - \mu u$$
  
$$\tilde{r}_3 = S_2 Z_2 u + \Delta \tilde{S}_2 \Delta \tilde{Z}_2 u - \mu u.$$

Ao invés de considerar que as correções das condições de factibilidade primal e dual são iguais a 0, no próximo capítulo será proposto um método preditor-corretor com correções em todas as condições de otimalidade para o problema de fluxo de potência ótimo.

#### 3.3.3 Cálculo da Direção de Newton

A direção de Newton pode ser obtida resolvendo diretamente o sistema:

$$\begin{bmatrix} \nabla_{xx}^{2}L & 0 & 0 & J_{g}(x)^{t} & J_{h}(x)^{t} & -J_{h}(x)^{t} \\ 0 & Z_{1} & 0 & 0 & S_{1} & 0 \\ 0 & 0 & Z_{2} & 0 & 0 & S_{2} \\ J_{g}(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_{h}(x) & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J_{h}(x) & 0 & I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta s_{1} \\ \Delta s_{2} \\ \Delta y \\ \Delta z_{1} \\ \Delta z_{2} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} r_{1} \\ r_{2} \\ r_{3} \\ r_{4} \\ r_{5} \\ r_{6} \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

ou resolvendo o sistema aumentado [40] em função de <br/>  $\Delta x$  e  $\Delta y :$ 

$$\begin{bmatrix} M & J_g(x)^t \\ J_g(x) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} r \\ r_4 \end{bmatrix},$$
(3.31)

e depois calculando:

$$\Delta s_1 = -r_5 - J_h(x)\Delta x$$
  

$$\Delta s_2 = -r_6 + J_h(x)\Delta x$$
  

$$\Delta z_1 = -S_1^{-1}(r_2 + Z_1\Delta s_1)$$
  

$$\Delta z_2 = -S_2^{-1}(r_3 + Z_2\Delta s_2),$$

onde:

$$M = \nabla_{xx}^2 L + J_h(x)^t (S_1^{-1} Z_1 + S_2^{-1} Z_2) J_h(x)$$
  

$$r = r_1 + J_h(x)^t (-S_1^{-1} (r_2 - Z_1 r_5) + S_2^{-1} (r_3 - Z_2 r_6)).$$

# Capítulo 4

# Método Preditor-Corretor Completo

Neste capítulo será desenvolvido um método preditor-corretor com correções não lineares em todas as equações das condições de otimalidade para ser aplicado ao problema de fluxo de potência ótimo.

### 4.1 Motivação

No método preditor-corretor tradicional para programação não-linear as correções são aplicadas somente nas equações oriundas das condições de complementaridade. Em programação linear as restrições de factibilidade primal e dual não necessitam correção, pois são lineares, e em programação não-linear as correções não são aplicadas a estas restrições, porque geralmente resultam em expressões complexas ou impossíveis de obter analiticamente. No entanto, ao utilizarmos o modelo em coordenadas cartesianas para o problema de fluxo de potência ótimo, estas correções podem ser obtidas analiticamente pois todas as restrições são quadráticas.

Os métodos primais-duais sem correção tendem a não obter convergência para muitos problemas onde o método preditor-corretor obtem sucesso [38]. Parte deste melhor desempenho se deve ao termo de correção não linear. Neste trabalho propomos a aplicação do termo de correção não linear do método preditor-corretor à todas as equações.

Utilizando novamente a notação X = diag(x), as restrições de balanço de potência podem ser expressas de forma geral como:

$$XAx - b = 0. (4.1)$$

Aplicando o método de Newton, temos:

$$(XA + diag(Ax))\Delta \tilde{x} = b - XAx.$$
(4.2)

Substituindo  $\tilde{x}=x+\Delta\tilde{x}$ nas equações originais, temos:

$$\tilde{X}A\tilde{x} - b = (X + \Delta \tilde{X})A(x + \Delta \tilde{x}) - b$$

$$= XAx + XA\Delta \tilde{x} + \Delta \tilde{X}Ax + \Delta \tilde{X}A\Delta \tilde{x} - b$$

$$= XAx + \Delta \tilde{X}A\Delta \tilde{x} - b + (b - XAx)$$

$$= \Delta \tilde{X}A\Delta \tilde{x},$$
(4.3)

pois  $\Delta \tilde{X}Ax = diag(Ax)\Delta \tilde{x}$ . Assim, a correção não linear para (4.1) é:

$$\Delta \tilde{X} A \Delta \tilde{x}. \tag{4.4}$$

Para obter as equações duais de um problema com restrições quadráticas é necessário definir a função objetivo. No problema de fluxo de potência ótimo esta função geralmente é quadrática, por exemplo:  $\phi(x) = x^t H x$ . Assim, desprezando as canalizações, a função Lagrangiana do problema é:

$$L(x,y) = x^{t}Hx + y^{t}(XAx - b).$$
(4.5)

As equações duais ( $\nabla_x L = 0$ ) podem ser obtidas a partir da Lagrangiana:

$$2Hx + A^tYx + YAx = 0. (4.6)$$

Aplicando o método de Newton, temos:

$$(2H + A^tY + YA)\Delta\tilde{x} + (A^tX + diag(Ax))\Delta\tilde{y} = -2Hx - A^tYx - YAx.$$

$$(4.7)$$

Substituindo  $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, y) + (\Delta \tilde{x}, \Delta \tilde{y})$  nas equações originais, temos:

$$2H\tilde{x} + A^{t}\tilde{Y}\tilde{x} + \tilde{Y}A\tilde{x} = 2H(x + \Delta\tilde{x}) + A^{t}(Y + \Delta\tilde{Y})(x + \Delta\tilde{x}) + +(Y + \Delta\tilde{Y})A(x + \Delta\tilde{x})$$

$$= 2Hx + A^{t}Yx + YAx + +2H\Delta\tilde{x} + A^{t}Y\Delta\tilde{x} + A^{t}\Delta\tilde{Y}x + YA\Delta\tilde{x} + \Delta\tilde{Y}Ax + +A^{t}\Delta\tilde{Y}\Delta\tilde{x} + \Delta\tilde{Y}A\Delta\tilde{x}$$
(4.8)
$$= 2Hx + A^{t}Yx + YAx + +(-2Hx - A^{t}Yx - YAx) + +A^{t}\Delta\tilde{Y}\Delta\tilde{x} + \Delta\tilde{Y}A\Delta\tilde{x}$$

$$= A^{t}\Delta\tilde{Y}\Delta\tilde{x} + \Delta\tilde{Y}A\Delta\tilde{x},$$

pois  $\Delta \tilde{Y}Ax = diag(Ax)\Delta \tilde{y}$  e  $A^t\Delta \tilde{Y}x = A^tX\Delta \tilde{y}$ . Assim, a correção não linear para as equações duais (4.6) é:

$$A^{t}\Delta \tilde{Y}\Delta \tilde{x} + \Delta \tilde{Y}A\Delta \tilde{x}.$$
(4.9)

## 4.2 Método Proposto

O método preditor-corretor proposto para o problema de fluxo de potência ótimo tem correções em todas as condições de otimalidade, graças à formulação das tensões em coordenadas cartesianas. Conforme o método da subseção 3.3.2, calculamos inicialmente a direção afim  $\tilde{d}^k$  ( $\mu = 0$ ):

$$\begin{bmatrix} \nabla_{xx}^{2}L & 0 & 0 & J_{g}(x)^{t} & J_{h}(x)^{t} & -J_{h}(x)^{t} \\ 0 & Z_{1} & 0 & 0 & S_{1} & 0 \\ 0 & 0 & Z_{2} & 0 & 0 & S_{2} \\ J_{g}(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_{h}(x) & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J_{h}(x) & 0 & I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \tilde{x} \\ \Delta \tilde{s}_{1} \\ \Delta \tilde{s}_{2} \\ \Delta \tilde{y} \\ \Delta \tilde{z}_{1} \\ \Delta \tilde{z}_{2} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} r_{1} \\ r_{2} \\ r_{3} \\ r_{4} \\ r_{5} \\ r_{6} \end{bmatrix}.$$
(4.10)

Em seguida usamos a mesma matriz Jacobiana para calcular a direção de correção:

$$\begin{bmatrix} \nabla_{xx}^{2}L & 0 & 0 & J_{g}(x)^{t} & J_{h}(x)^{t} & -J_{h}(x)^{t} \\ 0 & Z_{1} & 0 & 0 & S_{1} & 0 \\ 0 & 0 & Z_{2} & 0 & 0 & S_{2} \\ J_{g}(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_{h}(x) & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J_{h}(x) & 0 & I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{x} \\ \Delta \hat{s_{1}} \\ \Delta \hat{s_{2}} \\ \Delta \hat{y} \\ \Delta \hat{z_{1}} \\ \Delta \hat{z_{2}} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \hat{r}_{1} \\ \hat{r}_{2} \\ \hat{r}_{3} \\ \hat{r}_{4} \\ \hat{r}_{5} \\ \hat{r}_{6} \end{bmatrix}.$$
(4.11)

Finalmente, a direção  $d^k$  a ser usada é a soma das duas direções:

ſ	$\nabla_{xx}^2 L$	0	0	$J_g(x)^t$	$J_h(x)^t$	$-J_h(x)^t$	$\Delta x$		$\tilde{r}_1$		
	0	$Z_1$	0	0	$S_1$	0	$\Delta s_1$		$\tilde{r}_2$		
	0	0	$Z_2$	0	0	$S_2$	$\Delta s_2$	_	$\tilde{r}_3$		(1 1 2)
	$J_g(x)$	0	0	0	0	0	$\Delta y$		$\tilde{r}_4$	,	(4.12)
	$J_h(x)$	Ι	0	0	0	0	$\Delta z_1$		$\tilde{r}_5$		
Ĺ	$-J_h(x)$	0	Ι	0	0	0	$\Delta z_2$		$\tilde{r}_6$		

onde  $\tilde{r}_i = r_i + \hat{r}_i$ . As correções não lineares  $(\hat{r}_i)$  para o problema de fluxo de potência ótimo serão deduzidas na seção 4.4.

A seguir é apresentado um resumo do método proposto.

Método 4.1 Método Preditor-Corretor Completo						
Entradas: $(s_1^0, s_2^0, z_1^0, z_2^0) > 0$ , $(x^0, y^0)$ livre e $\tau \in (0, 1)$ .						
Para $k = 0, 1, 2, \dots$ faça						
<b>[1]</b> Calcule os resíduos $r_1^k$ a $r_6^k$ .						
<b>[2]</b> Resolva (4.10) para obter a direção afim-escala $\tilde{d}^k$ .						
<b>[3]</b> Calcule o tamanho do passo $\tilde{\alpha}^k$ tal que $(\tilde{s}_1^{k+1}, \tilde{s}_2^{k+1}, \tilde{z}_1^{k+1}, \tilde{z}_2^{k+1}) > 0.$						
<b>[4]</b> Calcule $\mu^k$ .						
[5] Calcule os resíduos $\tilde{r}_1^k$ a $\tilde{r}_6^k$ .						
<b>[6]</b> Resolva (4.12) para obter a direção de Newton $d^k$ .						
<b>[7]</b> Calcule o tamanho do passo $\alpha^k$ tal que $(s_1^{k+1}, s_2^{k+1}, z_1^{k+1}, z_2^{k+1}) > 0$ .						
[8] Calcule $(x^{k+1}, s_1^{k+1}, s_2^{k+1}, y^{k+1}, z_1^{k+1}, z_2^{k+1}) = (x^k, s_1^k, s_2^k, y^k, z_1^k, z_2^k) + \alpha^k d^k$ .						

Fim

## 4.3 Fluxo de Potência Ótimo

Relembrando a formulação do problema de fluxo de potência ótimo (seção 2.2), temos:

$$\begin{array}{ll} \min & \phi(x) \\ \text{s.a} & P_k(x) + P_{C_k} - P_{G_k} = 0 & \forall k \in \mathbf{C} \\ & Q_k(x) + Q_{C_k} - Q_{G_k} = 0 & \forall k \in \mathbf{C} \\ & (v_k^{\min})^2 \leq V_k(x) \leq (v_k^{\max})^2 & \forall k \in \mathbf{N} \\ & P_k^{\min} \leq P_k(x) \leq P_k^{\max} & \forall k \in \mathbf{G} \\ & Q_k^{\min} \leq Q_k(x) \leq Q_k^{\max} & \forall k \in \mathbf{R}. \end{array}$$

$$(4.13)$$

A função objetivo deve permitir o cálculo das correções não lineares. As funções apresentadas na subseção 2.2.1 possuem essa propriedade, pois são todas quadráticas. Porém, todas elas tem desempenho similar na implementação dos métodos de pontos interiores [37]. Assim, neste trabalho será utilizada apenas uma função objetivo: a minimização das perdas de potência ativa nas linhas. Esta função é definida como:

$$\phi(x) = \sum_{m \in K} (P_{km} + P_{mk}) \qquad \forall k \in \mathbf{N},$$
(4.14)

que pode ser expressa de forma matricial como:

$$\phi(x) = e^t G e + f^t G f. \tag{4.15}$$

Comparando com a formulação da seção 3.3, temos:

$$g(x) = \begin{bmatrix} g_p(x) \\ g_q(x) \end{bmatrix} \quad e \quad h(x) = \begin{bmatrix} h_v(x) \\ h_p(x) \\ h_q(x) \end{bmatrix},$$
(4.16)

onde:

$$g_p(x) = P(x) + P_C - P_G \qquad (\mathbf{C})$$
  

$$g_q(x) = Q(x) + Q_C - Q_G \qquad (\mathbf{C})$$
  

$$h_v(x) = V(x) \qquad (\mathbf{N})$$

$$h_p(x) = P(x) \tag{G}$$

$$h_q(x) = Q(x) \tag{R}$$

 $\operatorname{com}$ 

$$P(x) = EGe + FGf + FBe - EBf$$
$$Q(x) = FGe - EGf - EBe - FBf$$
$$V(x) = Ee + Ff.$$

Na formulação, as restrições são consideradas apenas no conjunto de índices apropriados. Por exemplo, P(x) está definido apenas para as barras de carga em  $g_p(x)$  e apenas para as barras de geração de potência ativa em  $h_p(x)$ , embora a expressão de P(x) seja a mesma para os dois casos. Para evitar uma notação muito carregada, os índices serão omitidos a partir de agora.

A forma explícita da matriz Jacobiana para o problema de fluxo de potência ótimo é apresentada na próxima página. Por abuso de notação, será escrito  $\nabla_e g_p$  como sendo a parte da matriz Jacobiana de  $g_p(x)$  derivada em relação à variável e, e analogamente para as demais matrizes Jacobianas.

$\nabla^2_{ee}L$	$\nabla_{ef}^2 L$	0	0	0	0	0	0	$\nabla_e g_p^t$	$\nabla_e g_q^t$	$\nabla_e h_v^t$	$\nabla_e h_p^t$	$\nabla_e h_q^t$	$-\nabla_e h_v^t$	$-\nabla_e h_p^t$	$-\nabla_e h_q^t$
$\nabla_{fe}^2 L$	$\nabla_{ff}^2 L$	0	0	0	0	0	0	$\nabla_f g_p^t$	$\nabla_f g_q^t$	$\nabla_f h_v^t$	$\nabla_f h_p^t$	$ abla_f h_q^t$	$-\nabla_f h_v^t$	$-\nabla_f h_p^t$	$-\nabla_f h_q^t$
0	0	$Z_{1_v}$	0	0	0	0	0	0	0	$S_{1_v}$	0	0	0	0	0
0	0	0	$Z_{1_p}$	0	0	0	0	0	0	0	$S_{1_p}$	0	0	0	0
0	0	0	0	$Z_{1_q}$	0	0	0	0	0	0	0	$S_{1q}$	0	0	0
0	0	0	0	0	$Z_{2v}$	0	0	0	0	0	0	0	$S_{2v}$	0	0
0	0	0	0	0	0	$Z_{2_p}$	0	0	0	0	0	0	0	$S_{2p}$	0
0	0	0	0	0	0	0	$Z_{2q}$	0	0	0	0	0	0	0	$S_{2q}$
$\nabla_e g_p$	$\nabla_f g_p$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\nabla_e g_q$	$ abla_f g_q$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\nabla_e h_v$	$\nabla_f h_v$	Ι	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\nabla_e h_p$	$\nabla_f h_p$	0	Ι	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\nabla_e h_q$	$\nabla_f h_q$	0	0	Ι	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$-\nabla_e h_v$	$-\nabla_f h_v$	0	0	0	Ι	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$-\nabla_e h_p$	$-\nabla_f h_p$	0	0	0	0	Ι	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\left[ -\nabla_e h_q \right]$	$-\nabla_f h_q$	0	0	0	0	0	Ι	0	0	0	0	0	0	0	0

# 4.4 Dedução das Correções

Dado o ponto  $(x, s_1, s_2, y, z_1, z_2)$  e a direção afim  $(\Delta \tilde{x}, \Delta \tilde{s}_1, \Delta \tilde{s}_2, \Delta \tilde{y}, \Delta \tilde{z}_1, \Delta \tilde{z}_2)$ , a correção é calculada em  $(\tilde{x}, \tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \tilde{y}, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = (x, s_1, s_2, y, z_1, z_2) + (\Delta \tilde{x}, \Delta \tilde{s}_1, \Delta \tilde{s}_2, \Delta \tilde{y}, \Delta \tilde{z}_1, \Delta \tilde{z}_2)$ .

Para as equações de complementaridade:

$$\begin{split} \tilde{S}_{i_j} \tilde{Z}_{i_j} u &= (S_{i_j} + \Delta \tilde{S}_{i_j}) (Z_{i_j} + \Delta \tilde{Z}_{i_j}) u \\ &= S_{i_j} Z_{i_j} u + S_{i_j} \Delta \tilde{Z}_{i_j} u + \Delta \tilde{S}_{i_j} Z_{i_j} u + \Delta \tilde{S}_{i_j} \Delta \tilde{Z}_{i_j} u \\ &= S_{i_j} Z_{i_j} u + S_{i_j} \Delta \tilde{z}_{i_j} + Z_{i_j} \Delta \tilde{s}_{i_j} + \Delta \tilde{S}_{i_j} \Delta \tilde{Z}_{i_j} u \\ &= S_{i_j} Z_{i_j} u - S_{i_j} Z_{i_j} u + \Delta \tilde{S}_{i_j} \Delta \tilde{Z}_{i_j} u \\ &= \Delta \tilde{S}_{i_j} \Delta \tilde{Z}_{i_j} u, \end{split}$$

parai=1ou 2 <br/>ej=v,pou q.

Para  $g_p(x) = 0$ :

$$\begin{split} P(\tilde{x}) + P_C - P_G &= P(x + \Delta \tilde{x}) + P_C - P_G \\ &= (E + \Delta \tilde{E})G(e + \Delta \tilde{e}) + (F + \Delta \tilde{F})G(f + \Delta \tilde{f}) + \\ &+ (F + \Delta \tilde{F})B(e + \Delta \tilde{e}) - (E + \Delta \tilde{E})B(f + \Delta \tilde{f}) + P_C - P_G \\ &= EGe + FGf + FBe - EBf + P_C - P_G + \\ &+ EG\Delta \tilde{e} + FG\Delta \tilde{f} + FB\Delta \tilde{e} - EB\Delta \tilde{f} + \\ &+ \Delta \tilde{E}Ge + \Delta \tilde{F}Gf + \Delta \tilde{F}Be - \Delta \tilde{E}Bf + \\ &+ \Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{F}G\Delta \tilde{f} + \Delta \tilde{F}B\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{f} \\ &= EGe + FGf + FBe - EBf + P_C - P_G + \\ &+ [EG + FB + diag(Ge - Bf)]\Delta \tilde{e} + \\ &+ [FG - EB + diag(Gf + Be)]\Delta \tilde{f} + \\ &+ \Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{F}G\Delta \tilde{f} + \Delta \tilde{F}B\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{f} \\ &= \Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{F}G\Delta \tilde{f} + \Delta \tilde{F}B\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{f} \\ &= D(\Delta \tilde{x}). \end{split}$$

Para  $g_q(x) = 0$ :

$$\begin{split} Q(\tilde{x}) + Q_C - Q_G &= Q(x + \Delta \tilde{x}) + Q_C - Q_G \\ &= (F + \Delta \tilde{F})G(e + \Delta \tilde{e}) - (E + \Delta \tilde{E})G(f + \Delta \tilde{f}) + \\ -(E + \Delta \tilde{E})B(e + \Delta \tilde{e}) - (F + \Delta \tilde{F})B(f + \Delta \tilde{f}) + Q_C - Q_G \\ &= FGe - EGf - EBe - FBf + Q_C - Q_G + \\ +FG\Delta \tilde{e} - EG\Delta \tilde{f} - EB\Delta \tilde{e} - FB\Delta \tilde{f} + \\ +\Delta \tilde{F}Ge - \Delta \tilde{E}Gf - \Delta \tilde{E}Be - \Delta \tilde{F}Bf + \\ +\Delta \tilde{F}G\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{f} - \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{F}B\Delta \tilde{f} \\ &= FGe - EGf - EBe - FBf + Q_C - Q_G + \\ [FG - EB - diag(Gf + Be)]\Delta \tilde{e} + \\ [-EG - FB + diag(Ge - Bf)]\Delta \tilde{f} + \\ +\Delta \tilde{F}G\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{f} - \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{F}B\Delta \tilde{f} \\ &= \Delta \tilde{F}G\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{f} - \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{F}B\Delta \tilde{f} \\ &= Q(\Delta \tilde{x}). \end{split}$$

Para  $s_{1_v} + h_v(x) - h_v^{\max} = 0$ :

$$\begin{split} s_{1_v} + V(\tilde{x}) - h_v^{\max} &= s_{1_v} + V(x + \Delta \tilde{x}) - h_v^{\max} \\ &= s_{1_v} + (E + \Delta \tilde{E})(e + \Delta \tilde{e}) + (F + \Delta \tilde{F})(f + \Delta \tilde{f}) - h_v^{\max} \\ &= s_{1_v} + Ee + Ff - h_v^{\max} + \\ &+ 2E\Delta \tilde{e} + 2F\Delta \tilde{f} + \\ &+ \Delta \tilde{E}\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{F}\Delta \tilde{f} \\ &= \Delta \tilde{E}\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{F}\Delta \tilde{f} \\ &= V(\Delta \tilde{x}). \end{split}$$

Para  $s_{1_p} + h_p(x) - h_p^{\max} = 0$ :

$$\begin{split} s_{1_p} + P(\tilde{x}) - h_p^{\max} &= s_{1_p} + P(x + \Delta \tilde{x}) - h_p^{\max} \\ &= s_{1_p} + (E + \Delta \tilde{E})G(e + \Delta \tilde{e}) + (F + \Delta \tilde{F})G(f + \Delta \tilde{f}) + \\ &+ (F + \Delta \tilde{F})B(e + \Delta \tilde{e}) - (E + \Delta \tilde{E})B(f + \Delta \tilde{f}) - h_p^{\max} \\ &= s_{1_p} + EGe + FGf + FBe - EBf - h_p^{\max} + \\ &+ EG\Delta \tilde{e} + FG\Delta \tilde{f} + FB\Delta \tilde{e} - EB\Delta \tilde{f} + \\ &+ \Delta \tilde{E}Ge + \Delta \tilde{F}Gf + \Delta \tilde{F}Be - \Delta \tilde{E}Bf + \\ &+ \Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{F}G\Delta \tilde{f} + \Delta \tilde{F}B\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{f} \\ &= s_{1_p} + EGe + FGf + FBe - EBf - h_p^{\max} + \\ &+ [EG + FB + diag(Ge - Bf)]\Delta \tilde{e} + \\ &+ [EG - EB + diag(Gf + Be)]\Delta \tilde{f} + \\ &+ \Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{F}G\Delta \tilde{f} + \Delta \tilde{F}B\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{f} \\ &= \Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{F}G\Delta \tilde{f} + \Delta \tilde{F}B\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{f} \\ &= \Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{F}G\Delta \tilde{f} + \Delta \tilde{F}B\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{f} \end{split}$$

Para  $s_{1_q} + h_q(x) - h_q^{\max} = 0$ :

$$\begin{split} s_{1q} + Q(\tilde{x}) - h_q^{\max} &= s_{1q} + Q(x + \Delta \tilde{x}) - h_q^{\max} \\ &= s_{1q} + (F + \Delta \tilde{F})G(e + \Delta \tilde{e}) - (E + \Delta \tilde{E})G(f + \Delta \tilde{f}) + \\ -(E + \Delta \tilde{E})B(e + \Delta \tilde{e}) - (F + \Delta \tilde{F})B(f + \Delta \tilde{f}) - h_q^{\max} \\ &= s_{1q} + FGe - EGf - EBe - FBf - h_q^{\max} \\ +FG\Delta \tilde{e} - EG\Delta \tilde{f} - EB\Delta \tilde{e} - FB\Delta \tilde{f} + \\ +\Delta \tilde{F}Ge - \Delta \tilde{E}Gf - \Delta \tilde{E}Be - \Delta \tilde{F}Bf + \\ +\Delta \tilde{F}G\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{f} - \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{F}B\Delta \tilde{f} \\ &= s_{1q} + FGe - EGf - EBe - FBf - h_q^{\max} \\ [FG - EB - diag(Gf + Be)]\Delta \tilde{e} + \\ [-EG - FB + diag(Ge - Bf)]\Delta \tilde{f} + \\ +\Delta \tilde{F}G\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{f} - \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{F}B\Delta \tilde{f} \\ &= \Delta \tilde{F}G\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{f} - \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{F}B\Delta \tilde{f} \\ &= \Delta \tilde{F}G\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{f} - \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{F}B\Delta \tilde{f} \\ &= 2(\Delta \tilde{x}). \end{split}$$

Para  $s_{2_v} - h_v(x) + h_v^{\min} = 0$ :

$$s_{2v} - V(x) + h_v^{\min} = s_{2v} - V(x + \Delta \tilde{x}) + h_v^{\min}$$

$$= s_{2v} - (E + \Delta \tilde{E})(e + \Delta \tilde{e}) - (F + \Delta \tilde{F})(f + \Delta \tilde{f}) + h_v^{\min}$$

$$= s_{2v} - Ee - Ff + h_v^{\min} + -2E\Delta \tilde{e} - 2F\Delta \tilde{f} + -\Delta \tilde{E}\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{F}\Delta \tilde{f}$$

$$= -\Delta \tilde{E}\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{F}\Delta \tilde{f}$$

$$= -V(\Delta \tilde{x}).$$

Para  $s_{2_p} - h_p(x) + h_p^{\min} = 0$ :

$$\begin{split} s_{2p} - P(\tilde{x}) + h_p^{\min} &= s_{2p} - P(x + \Delta \tilde{x}) + h_p^{\min} \\ &= s_{2p} - (E + \Delta \tilde{E})G(e + \Delta \tilde{e}) - (F + \Delta \tilde{F})G(f + \Delta \tilde{f}) + \\ &- (F + \Delta \tilde{F})B(e + \Delta \tilde{e}) + (E + \Delta \tilde{E})B(f + \Delta \tilde{f}) + h_p^{\min} \\ &= s_{2p} - EGe - FGf - FBe + EBf + h_p^{\min} + \\ &- EG\Delta \tilde{e} - FG\Delta \tilde{f} - FB\Delta \tilde{e} + EB\Delta \tilde{f} + \\ &- \Delta \tilde{E}Ge - \Delta \tilde{F}Gf - \Delta \tilde{F}Be + \Delta \tilde{E}Bf + \\ &- \Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{F}G\Delta \tilde{f} - \Delta \tilde{F}B\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{f} \\ &= s_{2p} - EGe - FGf - FBe + EBf + h_p^{\min} + \\ &- [EG + FB + diag(Ge - Bf)]\Delta \tilde{e} + \\ &- [FG - EB + diag(Gf + Be)]\Delta \tilde{f} + \\ &- \Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{F}G\Delta \tilde{f} - \Delta \tilde{F}B\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{f} \\ &= -\Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{F}G\Delta \tilde{f} - \Delta \tilde{F}B\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{f} \\ &= -\Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{F}G\Delta \tilde{f} - \Delta \tilde{F}B\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{f} \\ &= -\Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{F}G\Delta \tilde{f} - \Delta \tilde{F}B\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{f} \\ &= -D \tilde{E}G\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{F}G\Delta \tilde{f} - \Delta \tilde{F}B\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{f} \\ &= -D \tilde{E}G\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{F}G\Delta \tilde{f} - \Delta \tilde{F}B\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{f} \\ &= -D \tilde{E}G\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{F}G\Delta \tilde{f} - \Delta \tilde{F}B\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{f} \\ &= -D \tilde{E}G\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{F}G\Delta \tilde{f} - \Delta \tilde{F}B\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{f} \\ &= -D \tilde{E}G\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{F}G\Delta \tilde{f} - \Delta \tilde{F}B\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{f} \\ &= -D \tilde{E}G\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{F}G\Delta \tilde{f} - \Delta \tilde{F}B\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{f} \\ &= -D \tilde{E}G\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{F}G\Delta \tilde{f} - \Delta \tilde{F}B\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{f} \\ &= -D \tilde{E}G\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{F}G\Delta \tilde{f} - \Delta \tilde{F}B\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{f} \\ &= -D \tilde{E}G\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{F}G\Delta \tilde{f} - \Delta \tilde{F}B\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{f} \\ &= -D \tilde{E}G\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{F}G\Delta \tilde{f} - \Delta \tilde{F}B\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{f} \\ &= -D \tilde{E}G\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{F}G\Delta \tilde{f} - \Delta \tilde{F}B\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{f} \\ &= -D \tilde{E}G\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{f} - \Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{f} \\ &= -D \tilde{E}G\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{f} - \Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{f} \\ &= -D \tilde{E}G\Delta \tilde{e} - \Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{f} - \Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{f} \\ &= -D \tilde{E}G\Delta \tilde{E} + \Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{f} \\ &= -D \tilde{E}G\Delta \tilde{E} + D \tilde{E}G\Delta \tilde{E} + D \tilde{E}G\Delta \tilde{E} + \Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{E} + D \tilde{E}G\Delta \tilde{E$$

Para  $s_{2_q} - h_q(x) + h_q^{\min} = 0$ :

$$\begin{split} s_{2_q} - Q(\hat{x}) + h_q^{\min} &= s_{2_q} - Q(x + \Delta \tilde{x}) + h_q^{\min} \\ &= s_{2_q} - (F + \Delta \tilde{F})G(e + \Delta \tilde{e}) + (E + \Delta \tilde{E})G(f + \Delta \tilde{f}) + \\ &+ (E + \Delta \tilde{E})B(e + \Delta \tilde{e}) + (F + \Delta \tilde{F})B(f + \Delta \tilde{f}) + h_q^{\min} \\ &= s_{2_q} - FGe + EGf + EBe + FBf + h_q^{\min} \\ &- FG\Delta \tilde{e} + EG\Delta \tilde{f} + EB\Delta \tilde{e} + FB\Delta \tilde{f} + \\ &- \Delta \tilde{F}Ge + \Delta \tilde{E}Gf + \Delta \tilde{E}Be + \Delta \tilde{F}Bf + \\ &- \Delta \tilde{F}G\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{f} + \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{F}B\Delta \tilde{f} \\ &= s_{2_q} - FGe + EGf + EBe + FBf + h_q^{\min} \\ &- [FG - EB - diag(Gf + Be)]\Delta \tilde{e} + \\ &- [-EG - FB + diag(Ge - Bf)]\Delta \tilde{f} + \\ &- \Delta \tilde{F}G\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{f} + \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{F}B\Delta \tilde{f} \\ &= -\Delta \tilde{F}G\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{f} + \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{F}B\Delta \tilde{f} \\ &= -\Delta \tilde{F}G\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{E}G\Delta \tilde{f} + \Delta \tilde{E}B\Delta \tilde{e} + \Delta \tilde{F}B\Delta \tilde{f} \\ &= -Q(\Delta \tilde{x}). \end{split}$$

Para a equação dual  $\nabla_e \phi(x)^t + \nabla_e g(x)^t y + \nabla_e h(x)^t z_1 - \nabla_e h(x)^t z_2 = 0$ , ou seja,  $\nabla_e \phi^t + \nabla_e g_p^t y_p + \nabla_e g_q^t y_q + \nabla_e h_v^t (z_{1_v} - z_{2_v}) + \nabla_e h_p^t (z_{1_v} - z_{2_v}) + \nabla_e h_q^t (z_{1_v} - z_{2_v}) = 0$ :

$$\begin{split} & 2G^t \tilde{e} + \\ & + [\tilde{E}G + \tilde{F}B + diag(G\tilde{e} - B\tilde{f})]^t \tilde{y}_p + \\ & + [\tilde{F}G - \tilde{E}B - diag(G\tilde{f} + B\tilde{e})]^t \tilde{y}_q + \\ & + 2\tilde{E}^t (\tilde{z}_{1v} - \tilde{z}_{2v}) + \\ & + [\tilde{E}G + \tilde{F}B + diag(G\tilde{e} - B\tilde{f})]^t (\tilde{z}_{1p} - \tilde{z}_{2p}) + \\ & + [\tilde{F}G - \tilde{E}B - diag(G\tilde{f} + B\tilde{e})]^t (\tilde{z}_{1q} - \tilde{z}_{2q}) \\ = & [\Delta \tilde{E}G + \Delta \tilde{F}B + diag(G\Delta \tilde{e} - B\Delta \tilde{f})]^t \Delta \tilde{y}_p + \\ & + [\Delta \tilde{F}G - \Delta \tilde{E}B - diag(G\Delta \tilde{f} + B\Delta \tilde{e})]^t \Delta \tilde{y}_q + \\ & + 2\Delta \tilde{E}^t (\Delta \tilde{z}_{1v} - \Delta \tilde{z}_{2v}) + \\ & + [\Delta \tilde{E}G + \Delta \tilde{F}B + diag(G\Delta \tilde{e} - B\Delta \tilde{f})]^t (\Delta \tilde{z}_{1p} - \Delta \tilde{z}_{2p}) + \\ & + [\Delta \tilde{F}G - \Delta \tilde{E}B - diag(G\Delta \tilde{f} + B\Delta \tilde{e})]^t (\Delta \tilde{z}_{1q} - \Delta \tilde{z}_{2q}) \\ = & \nabla_e g_p (\Delta \tilde{x})^t \Delta \tilde{y}_p + \nabla_e g_q (\Delta \tilde{x})^t \Delta \tilde{y}_q + \\ & + \nabla_e h_v (\Delta \tilde{x})^t \Delta \tilde{z}_{1v} + \nabla_e h_p (\Delta \tilde{x})^t \Delta \tilde{z}_{1p} + \nabla_e h_q (\Delta \tilde{x})^t \Delta \tilde{z}_{1q} + \\ & - \nabla_e h_v (\Delta \tilde{x})^t \Delta \tilde{z}_{2v} - \nabla_e h_p (\Delta \tilde{x})^t \Delta \tilde{z}_{2p} - \nabla_e h_q (\Delta \tilde{x})^t \Delta \tilde{z}_{2q} \\ = & \nabla_e g (\Delta \tilde{x})^t \Delta \tilde{y} + \nabla_e h (\Delta \tilde{x})^t \Delta \tilde{z}_1 - \nabla_e h (\Delta \tilde{x})^t \Delta \tilde{z}_2. \end{split}$$

Para a equação dual  $\nabla_f \phi(x)^t + \nabla_f g(x)^t y + \nabla_f h(x)^t z_1 - \nabla_f h(x)^t z_2 = 0$ , ou seja,  $\nabla_f \phi^t + \nabla_f g_p^t y_p + \nabla_f g_q^t y_q + \nabla_f h_v^t (z_{1_v} - z_{2_v}) + \nabla_f h_p^t (z_{1_v} - z_{2_v}) + \nabla_f h_q^t (z_{1_v} - z_{2_v}) = 0$ :

$$\begin{split} & 2G^t \tilde{f} + \\ & + [\tilde{F}G - \tilde{E}B + diag(G\tilde{f} + B\tilde{e})]^t \tilde{y}_p + \\ & + [-\tilde{E}G - \tilde{F}B + diag(G\tilde{e} - B\tilde{f})]^t \tilde{y}_q + \\ & + 2\tilde{F}^t (\tilde{z}_{1_v} - \tilde{z}_{2_v}) + \\ & + [\tilde{F}G - \tilde{E}B + diag(G\tilde{f} + B\tilde{e})]^t (\tilde{z}_{1_p} - \tilde{z}_{2_p}) + \\ & + [-\tilde{E}G - \tilde{F}B + diag(G\tilde{e} - B\tilde{f})]^t (\tilde{z}_{1_q} - \tilde{z}_{2_q}) \\ = & [\Delta \tilde{F}G - \Delta \tilde{E}B + diag(G\Delta \tilde{f} + B\Delta \tilde{e})]^t \Delta \tilde{y}_p + \\ & + [-\Delta \tilde{E}G - \Delta \tilde{F}B + diag(G\Delta \tilde{e} - B\Delta \tilde{f})]^t \Delta \tilde{y}_q + \\ & + 2\Delta \tilde{F}^t (\Delta \tilde{z}_{1_v} - \Delta \tilde{z}_{2_v}) + \\ & + [\Delta \tilde{F}G - \Delta \tilde{E}B + diag(G\Delta \tilde{f} + B\Delta \tilde{e})]^t (\Delta \tilde{z}_{1_p} - \Delta \tilde{z}_{2_p}) + \\ & + [-\Delta \tilde{E}G - \Delta \tilde{F}B + diag(G\Delta \tilde{f} - B\Delta \tilde{f})]^t (\Delta \tilde{z}_{1_q} - \Delta \tilde{z}_{2_q}) \\ = & \nabla_f g_p (\Delta \tilde{x})^t \Delta \tilde{y}_p + \nabla_f g_q (\Delta \tilde{x})^t \Delta \tilde{y}_q + \\ & + \nabla_f h_v (\Delta \tilde{x})^t \Delta \tilde{z}_{1_v} + \nabla_f h_p (\Delta \tilde{x})^t \Delta \tilde{z}_{1_p} + \nabla_f h_q (\Delta \tilde{x})^t \Delta \tilde{z}_{2_q} \\ = & \nabla_f g (\Delta \tilde{x})^t \Delta \tilde{y}_q + \nabla_f h_p (\Delta \tilde{x})^t \Delta \tilde{z}_{2_p} + \nabla_f h_q (\Delta \tilde{x})^t \Delta \tilde{z}_{2_q} \\ = & \nabla_f g (\Delta \tilde{x})^t \Delta \tilde{y} + \nabla_f h_p (\Delta \tilde{x})^t \Delta \tilde{z}_{2_p} + \nabla_f h_q (\Delta \tilde{x})^t \Delta \tilde{z}_{2_q} . \end{split}$$

Introduzindo também a perturbação de centragem  $\mu$ , as correções não lineares para o problema de fluxo de potência ótimo são:

$$\hat{r}_1 = \begin{bmatrix} \nabla_e g(\Delta \tilde{x})^t \Delta \tilde{y} + \nabla_e h(\Delta \tilde{x})^t \Delta \tilde{z}_1 - \nabla_e h(\Delta \tilde{x})^t \Delta \tilde{z}_2 \\ \nabla_f g(\Delta \tilde{x})^t \Delta \tilde{y} + \nabla_f h(\Delta \tilde{x})^t \Delta \tilde{z}_1 - \nabla_f h(\Delta \tilde{x})^t \Delta \tilde{z}_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{r}_{2} = \begin{bmatrix} \Delta \tilde{S}_{1_{v}} \Delta \tilde{z}_{1_{v}} - \mu u \\ \Delta \tilde{S}_{1_{p}} \Delta \tilde{z}_{1_{p}} - \mu u \\ \Delta \tilde{S}_{1_{q}} \Delta \tilde{z}_{1_{q}} - \mu u \end{bmatrix}$$

$$\hat{r}_{3} = \begin{bmatrix} \Delta \tilde{S}_{2_{v}} \Delta \tilde{z}_{2_{v}} - \mu u \\ \Delta \tilde{S}_{2_{p}} \Delta \tilde{z}_{2_{p}} - \mu u \\ \Delta \tilde{S}_{2_{q}} \Delta \tilde{z}_{2_{q}} - \mu u \end{bmatrix}$$

$$\hat{r}_4 = \left[ \begin{array}{c} P(\Delta \tilde{x}) \\ Q(\Delta \tilde{x}) \end{array} \right]$$

$$\hat{r}_5 = \begin{bmatrix} V(\Delta \tilde{x}) \\ P(\Delta \tilde{x}) \\ Q(\Delta \tilde{x}) \end{bmatrix}$$

$$\hat{r}_6 = \begin{bmatrix} -V(\Delta \tilde{x}) \\ -P(\Delta \tilde{x}) \\ -Q(\Delta \tilde{x}) \end{bmatrix},$$

onde:

$$\nabla_e g(\Delta \tilde{x}) = \begin{bmatrix} \Delta \tilde{E}G + \Delta \tilde{F}B + diag(G\Delta \tilde{e} - B\Delta \tilde{f}) \\ \Delta \tilde{F}G - \Delta \tilde{E}B - diag(G\Delta \tilde{f} + B\Delta \tilde{e}) \end{bmatrix}$$

$$\nabla_f g(\Delta \tilde{x}) = \begin{bmatrix} \Delta \tilde{F}G - \Delta \tilde{E}B + diag(G\Delta \tilde{f} + B\Delta \tilde{e}) \\ -\Delta \tilde{E}G - \Delta \tilde{F}B + diag(G\Delta \tilde{e} - B\Delta \tilde{f}) \end{bmatrix}$$

$$\nabla_e h(\Delta \tilde{x}) = \begin{bmatrix} 2\Delta \tilde{E} \\ \Delta \tilde{E}G + \Delta \tilde{F}B + diag(G\Delta \tilde{e} - B\Delta \tilde{f}) \\ \Delta \tilde{F}G - \Delta \tilde{E}B - diag(G\Delta \tilde{f} + B\Delta \tilde{e}) \end{bmatrix}$$

$$\nabla_f h(\Delta \tilde{x}) = \begin{bmatrix} 2\Delta \tilde{F} \\ \Delta \tilde{F}G - \Delta \tilde{E}B + diag(G\Delta \tilde{f} + B\Delta \tilde{e}) \\ -\Delta \tilde{E}G - \Delta \tilde{F}B + diag(G\Delta \tilde{e} - B\Delta \tilde{f}) \end{bmatrix}$$

As correções também devem considerar o conjunto de índices apropriados.

# 4.5 Dedução das Derivadas Utilizadas

Nesta seção serão apresentadas as derivadas das restrições e da função objetivo utilizada. Será utilizado o fato das matrizes  $G \in B$  serem simétricas.

Matricialmente:

$$\phi(x) = e^t G e + f^t G f$$
  

$$g_p(x) = E G e + F G f + F B e - E B f + P_C - P_G$$
(C)

$$g_q(x) = FGe - EGf - EBe - FBf + Q_C - Q_G$$
 (C)

$$h_v(x) = Ee + Ff \tag{N}$$

$$h_p(x) = EGe + FGf + FBe - EBf$$
 (G)

$$h_q(x) = FGe - EGf - EBe - FBf$$
 (**R**).

## 4.5.1 Derivadas de Primeira Ordem

As derivadas de primeira ordem são:

$$abla_e \phi(x) = 2Ge$$
  
 $abla_f \phi(x) = 2Gf$ 

$$\nabla_e g_p(x) = EG + FB + diag(Ge - Bf) \qquad (\mathbf{C})$$

$$\nabla_f g_p(x) = FG - EB + diag(Gf + Be) \qquad (\mathbf{C})$$

$$\nabla_e g_q(x) = FG - EB - diag(Gf + Be) \tag{C}$$

$$\nabla_f g_q(x) = -EG - FB + diag(Ge - Bf)$$
 (C)

$$\nabla_e h_v(x) = 2E \qquad (\mathbf{N})$$
$$\nabla_f h_v(x) = 2F \qquad (\mathbf{N})$$

$$\nabla_e h_p(x) = EG + FB + diag(Ge - Bf) \tag{G}$$

$$\nabla_f h_p(x) = FG - EB + diag(Gf + Be)$$
 (G)

$$\nabla_e h_q(x) = FG - EB - diag(Gf + Be) \tag{R}$$

$$\nabla_f h_q(x) = -EG - FB + diag(Ge - Bf) \qquad (\mathbf{R}).$$

# 4.5.2 Derivadas de Segunda Ordem

As derivadas de segunda ordem são:

$$\begin{aligned} \nabla^2_{ee}\phi(x) &= 2G\\ \nabla^2_{ef}\phi(x) &= 0\\ \nabla^2_{fe}\phi(x) &= 0\\ \nabla^2_{ff}\phi(x) &= 2G \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{ee}^2 g_p(x) y_p &= GY_p + Y_p G \\ \nabla_{ef}^2 g_p(x) y_p &= BY_p - Y_p B \\ \nabla_{fe}^2 g_p(x) y_p &= -BY_p + Y_p B \\ \nabla_{ff}^2 g_p(x) y_p &= GY_p + Y_p G \end{aligned}$$

$$\nabla_{ee}^2 g_q(x) y_q = -BY_q - Y_q B$$
  

$$\nabla_{ef}^2 g_q(x) y_q = GY_q - Y_q G$$
  

$$\nabla_{fe}^2 g_q(x) y_q = -GY_q + Y_q G$$
  

$$\nabla_{ff}^2 g_q(x) y_q = -BY_q - Y_q B$$

$$\begin{aligned} \nabla^2_{ee} h_v(x) z_{1v} &= 2 Z_{1v} \\ \nabla^2_{ef} h_v(x) z_{1v} &= 0 \\ \nabla^2_{fe} h_v(x) z_{1v} &= 0 \\ \nabla^2_{ff} h_v(x) z_{1v} &= 2 Z_{1v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{ee}^{2}h_{p}(x)z_{1_{p}} &= GZ_{1_{p}} + Z_{1_{p}}G \\
\nabla_{ef}^{2}h_{p}(x)z_{1_{p}} &= BZ_{1_{p}} - Z_{1_{p}}B \\
\nabla_{fe}^{2}h_{p}(x)z_{1_{p}} &= -BZ_{1_{p}} + Z_{1_{p}}B \\
\nabla_{ff}^{2}h_{p}(x)z_{1_{p}} &= GZ_{1_{p}} + Z_{1_{p}}G
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{ee}^{2}h_{q}(x)z_{1_{q}} &= -BZ_{1_{q}} - Z_{1_{q}}B \\ \nabla_{ef}^{2}h_{q}(x)z_{1_{q}} &= GZ_{1_{q}} - Z_{1_{q}}G \\ \nabla_{fe}^{2}h_{q}(x)z_{1_{q}} &= -GZ_{1_{q}} + Z_{1_{q}}G \\ \nabla_{ff}^{2}h_{q}(x)z_{1_{q}} &= -BZ_{1_{q}} - Z_{1_{q}}B \end{aligned}$$

$$\nabla_{ee}^{2}h_{v}(x)z_{2v} = 2Z_{2v}$$
$$\nabla_{ef}^{2}h_{v}(x)z_{2v} = 0$$
$$\nabla_{fe}^{2}h_{v}(x)z_{2v} = 0$$
$$\nabla_{fe}^{2}h_{v}(x)z_{2v} = 2Z_{2v}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{ee}^{2} h_{p}(x) z_{2p} &= G Z_{2p} + Z_{2p} G \\
\nabla_{ef}^{2} h_{p}(x) z_{2p} &= B Z_{2p} - Z_{2p} B \\
\nabla_{fe}^{2} h_{p}(x) z_{2p} &= -B Z_{2p} + Z_{2p} B \\
\nabla_{ff}^{2} h_{p}(x) z_{2p} &= G Z_{2p} + Z_{2p} G
\end{aligned}$$

$$\nabla_{ee}^{2}h_{q}(x)z_{2q} = -BZ_{2q} - Z_{2q}B$$
  

$$\nabla_{ef}^{2}h_{q}(x)z_{2q} = GZ_{2q} - Z_{2q}G$$
  

$$\nabla_{fe}^{2}h_{q}(x)z_{2q} = -GZ_{2q} + Z_{2q}G$$
  

$$\nabla_{ff}^{2}h_{q}(x)z_{2q} = -BZ_{2q} - Z_{2q}B$$

onde  $Y_p$ ,  $Y_q$ ,  $Z_{1_v}$ ,  $Z_{1_p}$ ,  $Z_{1_q}$ ,  $Z_{2_v}$ ,  $Z_{2_p}$ ,  $Z_{2_q} \in \mathbb{R}^{|n| \times |n|}$  (|n| representa a quantidade de barras do sistema) tais que:

A utilização dos conjuntos de índices na formulação matricial do problema facilita a implementação dos métodos, pois permite a identificação das restrições de forma rápida e simples.

# Capítulo 5

# **Experimentos Computacionais**

Neste capítulo serão apresentados os detalhes da implementação dos métodos de pontos interiores para o problema de fluxo de potência ótimo e os resultados numéricos obtidos.

### 5.1 Detalhes da Implementação

Os testes foram implementados na linguagem de programação MATLAB 7.8 (R2009a) em um computador com processador Intel Core 2 Quad Q9550 2,83 GHz, com 3,23 GB de memória RAM e sistema operacional MS Windows XP.

A Tabela 5.1 resume as dimensões dos sistemas de potência utilizados nos testes (|B| representa a quantidade de linhas de transmissão e transformadores). O sistema BRASIL é uma versão do sistema interconectado brasileiro e os demais são sistemas de teste do IEEE de diferentes dimensões.

		Barras e linhas						
$\operatorname{Sistema}$	N	G	$\mathbf{R}$	$ \mathbf{C} $	B			
IEEE14	14	5	5	9	20			
IEEE30	30	6	6	24	41			
IEEE118	118	54	54	64	186			
BRASIL	2257	201	201	2056	3509			

Tabela 5.1: Sistemas de Potência

Os valores dos *tap*'s são considerados fixos e obtidos nos dados dos sistemas, assim como os limites de geração de potência reativa. A soma das capacidades de geração de potência ativa é 25% maior que a soma das cargas ativas. A precisão adotada no critério de parada é a norma do resíduo menor que  $10^{-6}$ . O fator de segurança para o tamanho do passo é  $\tau = 0,9995$ . As direções de busca são calculadas através do sistema aumentado (subseção 3.3.3) e utilizam a fatoração LU com permutação de linhas e reordenação de colunas para matrizes esparsas do MATLAB.

Nos sistemas IEEE são considerados dois casos para os limites da magnitude de tensão:  $v_k \in [0, 90; 1, 10]$  e  $v_k \in [0, 95; 1, 05]$ . O ponto inicial utilizado para as variáveis primais é  $e_k = 1$  e  $f_k = 0$  e as demais variáveis também são inicializadas com valor 1.

No sistema BRASIL apenas o caso  $v_k \in [0, 90; 1, 10]$  é considerado e para simular diferentes situações, a soma das capacidades de geração de potência ativa assume os valores 10%, 15% e 20% maiores do que a soma das cargas ativas. O ponto inicial utilizado para as variáveis primais também é  $e_k = 1$  e  $f_k = 0$ , mas as variáveis de folga primais são inicializadas com  $s_1 = \max(0, 01; h^{\max} - h(x))$  e  $s_2 = \max(0, 01; h(x) - h^{\min})$ , enquanto que as demais  $(z_1, z_2 \in y)$  são inicializadas com valor 0, 1.

#### 5.1.1 Heurística Proposta

Embora as tensões sejam limitadas em todas as barras do sistema, é comum a utilização de heurísticas para restringir o conjunto de barras com limite de tensão. Estas heurísticas

obtêm bons resultados porque apenas uma pequena quantidade destas restrições está ativa na solução ótima. A Tabela 5.2 mostra a quantidade de restrições ativas nos problemas IEEE.

	$v_k \in [0]$	0, 90; 1, 10]	$v_k \in [0, 95; 1, 0]$		
$\operatorname{Sistema}$	$v^{\max}$	$v^{\min}$	$v^{\max}$	$v^{\min}$	
IEEE14	0	0	0	0	
IEEE30	1	0	1	0	
IEEE118	0	0	1	10	

Tabela 5.2: Restrições em  $v_k$  ativas na solução ótima

Uma heurística comum [3] é desconsiderar inicialmente todas as restrições de tensão e verificar na solução encontrada quais seriam violadas se as restrições estivessem presentes. Em seguida, as restrições violadas são adicionadas ao modelo e uma nova solução é calculada. O processo continua até que nenhuma restrição desconsiderada seja violada, de forma que a solução encontrada é a solução ótima do problema original considerando todas as restrições de tensão. A grande desvantagem desta heurística é repetir o processo de otimização várias vezes, apenas para encontrar o conjunto de restrições de tensão ativas na solução ótima. Por exemplo, nos testes realizados com o sistema BRASIL o processo seria repetido 2 vezes. Ao desconsiderar todas as restrições, 5 delas seriam violadas na solução encontrada; incluindo estas 5 restrições e repetindo o processo, estas restrições estariam ativas e outras 2 estariam violadas na solução encontrada; repetindo novamente o processo com essas 7 restrições, finalmente chegaríamos à solução ótima. A Tabela 5.3 mostra o tempo de processamento total para o sistema interconectado brasileiro utilizando esta heurística.

		Métodos	
$\sum P^{\max} / \sum P_C$	TC	$\mathbf{PC}$	$\mathbf{PCC}$
1,10	181,42	$517,\!66$	128,53
$1,\!15$	$187,\!07$	$183,\!68$	$127,\!87$
1,20	$165,\!98$	$197,\!82$	$120,\!40$

Tabela 5.3: Tempo (s) para o sistema BRASIL com heurística existente

Outra heurística comum é limitar a tensão somente nas barras de geração [16, 37], embora isso não seja suficiente para garantir que as barras de carga também estejam dentro de seus limites. Por exemplo, na solução encontrada na heurística anterior, das 7 restrições ativas na solução ótima apenas 4 correspondem à barras de geração. Assim, seria necessário repetir o processo de otimização para incluir as 3 restrições referentes às barras de cargas que foram desconsideradas.

Neste trabalho, propomos uma heurística diferente na implementação para o sistema BRASIL. Inicialmente nenhuma restrição de limite de tensão é considerada, mas logo após cada iteração elas são verificadas. Se algumas das restrições descartadas se tornarem violadas após uma iteração, estas restrições são incluídas no modelo já a partir da próxima iteração. As variáveis de folga primais e variáveis duais correspondentes à estas restrições são atribuídas com valores iguais a média das variáveis deste tipo já introduzidas anteriormente. No caso de serem as primeiras a serem introduzidas, recebem o valor correspondente como se estivessem presentes na primeira iteração. Cabe ressaltar que as restrições incluídas permanecem no modelo mesmo que se tornem inativas após uma iteração.

A heurística proposta é vantajosa, pois não é necessário repetir todo o processo de otimização e garante que todas as restrições desconsideradas não são violadas na solução ótima.

#### 5.2 Resultados Numéricos

Nas Tabelas 5.4 e 5.5 encontram-se o número de iterações e o tempo de processamento pelos métodos de trajetória central (TC), preditor-corretor (PC) e preditor-corretor completo (PCC) com  $v_k \in [0, 90; 1, 10]$ .

	Métodos				
$\operatorname{Sistema}$	$\mathrm{TC}$	$\mathbf{PC}$	$\mathbf{PCC}$		
IEEE14	11	11	8		
IEEE30	12	9	8		
IEEE118	17	17	15		

Tabela 5.4: Número de iterações com  $v_k \in [0, 90; 1, 10]$ 

	Métodos				
$\operatorname{Sistema}$	TC	$\mathbf{PC}$	$\mathbf{PCC}$		
IEEE14	0,03	0,03	0,02		
IEEE30	$0,\!04$	$0,\!03$	$^{0,03}$		
IEEE118	$0,\!44$	$0,\!46$	$^{0,41}$		

Tabela 5.5: Tempo de processamento (s) com  $v_k \in [0, 90; 1, 10]$ 

As Tabelas 5.6 e 5.7 contem os resultados obtidos pelos métodos com  $v_k \in [0, 95; 1, 05]$ .

	Métodos				
Sistema	$\mathrm{TC}$	$\mathbf{PC}$	$\mathbf{PCC}$		
IEEE14	12	10	9		
IEEE30	12	9	9		
IEEE118	23	24	18		

Tabela 5.6: Número de iterações com  $v_k \in [0, 95; 1, 05]$ 

	l	Métodos				
Sistema	TC	$\mathbf{PC}$	PCC			
IEEE14	0,03	$0,\!02$	$0,\!02$			
IEEE30	$0,\!04$	$0,\!03$	$0,\!03$			
IEEE118	$0,\!60$	$0,\!65$	$0,\!49$			

Tabela 5.7: Tempo de processamento (s) com  $v_k \in [0, 95; 1, 05]$ 

As Tabelas 5.8 e 5.9 estão os resultados obtidos pelos métodos para o sistema interconectado brasileiro com a heurística proposta para as restrições de tensão.

	Métodos			
$\sum P^{\max} / \sum P_C$	TC	$\mathbf{PC}$	$\mathbf{PCC}$	
1,10	26	26	17	
$1,\!15$	24	28	16	
1,20	20	35	18	

Tabela 5.8: Iterações para o sistema BRASIL e uso da heurística proposta

		Métodos	
$\sum P^{\max} / \sum P_C$	$\mathrm{TC}$	$\mathbf{PC}$	$\mathbf{PCC}$
1,10	$80,\!61$	$83,\!30$	$55,\!46$
$1,\!15$	$74,\!39$	$90,\!68$	$52,\!41$
1,20	62, 59	$113,\!59$	$58,\!99$

Tabela 5.9: Tempo (s) para o sistema BRASIL e uso da heurística proposta

Comparando o tempo de processamento para o sistema BRASIL utilizando a heurística proposta (Tabela 5.9) e a heurística existente (Tabela 5.3), a heurística proposta obteve um desempenho muito superior.

A Tabela 5.10 mostra a quantidade de restrições em  $v_k$  incluídas pela heurística proposta durante o processo de otimização e sugere que a maioria das restrições são incluídas logo nas primeiras iterações.

$\sum P^{\max} / \sum P_C$		1,10			$1,\!15$			1,20	
iteração	$\mathrm{TC}$	$\mathbf{PC}$	$\mathbf{PCC}$	TC	$\mathbf{PC}$	$\mathbf{PCC}$	$\mathrm{TC}$	$\mathbf{PC}$	$\mathbf{PCC}$
5	25	61	43	24	59	35	23	56	29
10	33	64	75	32	60	39	31	56	32
15	36	64	75	34	63	39	33	56	32
final	37	64	75	35	63	39	33	72	32

Tabela 5.10: Restrições em  $v_k$  incluídas por iteração

Na solução ótima, apenas 7 restrições estão ativas, sendo 2 no limite superior e 5 no limite inferior. As barras cujas restrições estão ativas são as mesmas para os três casos: as barras de geração 172, 175, 177 e 1556 e as barras de carga 331, 629 e 635. A Tabela 5.11 mostra

$\sum P^{\max} / \sum P_C$		1,10			$1,\!15$			1,20	
barra	TC	$\mathbf{PC}$	$\mathbf{PCC}$	TC	$\mathbf{PC}$	$\mathbf{PCC}$	TC	$\mathbf{PC}$	$\mathbf{PCC}$
172	15	10	10	12	12	9	11	26	9
175	14	9	10	11	12	9	10	22	8
177	5	3	6	5	4	5	5	3	4
331	4	3	5	4	4	4	5	3	4
629	4	3	5	4	4	4	5	3	5
635	18	10	8	16	12	9	14	28	9
1556	4	4	4	4	4	4	4	3	4

em que iteração as restrições ativas na solução ótima são incluídas.

Tabela 5.11: Iteração da inclusão das restrições em  $v_k$ ativas na solução ótima

A heurística de desconsiderar inicialmente as restrições de tensão é fundamental para a implementação do sistema BRASIL, pois cada uma das 2257 barras geraria duas restrições de desigualdade no modelo. Embora esta heurística não seja necessária para os sistemas IEEE, sua implementação também foi testada para estes sistemas. A Tabela 5.12, 5.13, 5.14 e 5.15 mostram esses resultados.

	Métodos					
$\operatorname{Sistema}$	$\mathrm{TC}$	$\mathbf{PC}$	$\mathbf{PCC}$			
IEEE14	11	8	7			
IEEE30	16	16	12			
IEEE118	33	27	20			

Tabela 5.12: Iterações com  $v_k \in [0,90;1,10]$ e uso da heurística proposta

	Métodos					
$\operatorname{Sistema}$	TC	$\mathbf{PC}$	$\mathbf{PCC}$			
IEEE14	0,03	$0,\!02$	$0,\!02$			
IEEE30	$0,\!05$	$0,\!05$	$0,\!04$			
IEEE118	$0,\!85$	0,72	$0,\!54$			

Tabela 5.13: Tempo (s) com  $v_k \in [0, 90; 1, 10]$  e uso da heurística proposta
Métodos		

Tabela 5.14: Iterações com  $v_k \in [0, 95; 1, 05]$  e uso da heurística proposta

	Métodos		
$\operatorname{Sistema}$	TC	$\mathbf{PC}$	$\mathbf{PCC}$
IEEE14	$0,\!02$	$0,\!03$	$0,\!02$
IEEE30	$0,\!05$	$0,\!06$	$0,\!04$
IEEE118	$0,\!64$	$0,\!61$	$^{0,62}$

Tabela 5.15: Tempo (s) com  $v_k \in [0, 95; 1, 05]$  e uso da heurística proposta

Para os sistemas IEEE testados, a heurística proposta não apresenta vantagem quanto ao número de iterações, embora ela seja fundamental para a implementação de um sistema de grande porte como o BRASIL.

Comparando o método preditor-corretor completo proposto neste trabalho (PCC) com o método de trajetória central (TC), o PCC obteve desempenho superior em todos os casos testados, conseguindo um tempo computacional menor mesmo considerando o maior esforço computacional por iteração.

Na comparação com o método preditor-corretor tradicional (PC), onde o esforço computacional por iteração é praticamente igual ao método proposto, o PCC obteve um desempenho superior na quantidade de iterações. Em alguns casos testados o PC obteve desempenho inferior até mesmo que o TC, devido à não utilização das correções em todas as equações.

O tempo de processamento para os sistemas IEEE é similar, pois os sistemas são considerados de pequeno porte e o custo computacional de cada iteração é baixo. Já em um sistema maior, como o sistema interconectado brasileiro, a diferença é significativa e a utilização do método proposto torna-se ainda mais vantajosa.

## Capítulo 6

## Conclusões e Perspectivas Futuras

Neste trabalho desenvolvemos um método de pontos interiores preditor-corretor para o problema de fluxo de potência ótimo. Com a utilização de coordenadas cartesianas para representar as tensões, foi possível obter correções não lineares também nas condições de factibilidade primal e dual e não apenas nas condições de complementaridade como é tradicionalmente feito. Além disso, uma nova heurística que acrescenta as restrições de limite de tensão somente na medida que elas são realmente necessárias proporciona eficiência aos métodos de pontos interiores, permitindo resolver sistemas de grande porte com um pequeno número de iterações. Esta heurística tem a vantagem adicional de reduzir o esforço computacional por iteração. Assim, foi desenvolvido um método preditor-corretor específico para o problema de fluxo de potência ótimo, aproveitando características do modelo.

A nova heurística proposta mostrou ser fundamental na implementação de sistemas de grande porte, pois reduz a quantidade de restrições do problema primal, permitindo a busca de direções mais promissoras para os métodos de pontos interiores. Outra característica a ser destacada pelo método de pontos interiores é a velocidade, pois o maior número de iterações para o método proposto é 22 e considerando todos os casos e métodos testados este valor atinge 35. Além disso, as iterações são rápidas, permitindo a solução de problemas de grande porte como o sistema interconectado brasileiro em poucos minutos, mesmo usando o MATLAB.

Comparando o método preditor-corretor completo com os métodos de trajetória central e preditor-corretor tradicional, o método proposto obteve desempenho superior nos casos testados, conseguindo um tempo computacional menor mesmo considerando o maior esforço computacional por iteração.

O objetivo geral desse trabalho foi alcançado, pois o método proposto é capaz de resolver problemas de fluxo de potência ótimo de diferentes portes e características.

O ponto inicial é crucial nos métodos de pontos interiores, pois ajuda a reduzir o número de iterações. Como sugestão de melhoria, é necessário um estudo mais detalhado sobre a obtenção de melhores parâmetros e pontos iniciais adequados para cada sistema. Para aprimorar a heurística proposta também é necessário um estudo mais aprofundado sobre os valores atribuídos às variáveis duais e primais correspondentes às restrições incluídas.

Seria conveniente traduzir a implementação dos métodos para outra linguagem (C ou FORTRAN, por exemplo), a fim de reduzir o tempo computacional e explorar com maior profundidade as características especiais do problema. Para isso, podem ser utilizadas técnicas específicas para resolução de sistemas lineares simétricos indefinidos [5].

O método também pode ser adaptado para outras funções objetivo alternativas, pois para isso não são necessárias alterações significativas no desenvolvimento apresentado neste trabalho. Para tanto, basta que seja possível calcular as correções não lineares da função objetivo escolhida.

Outra sugestão é incluir no modelo restrições operacionais de limite no fluxo de potência ativa nas linhas de transmissão. É possível calcular as correções destas restrições, pois elas são quadráticas quando a tensão é representada em coordenadas polares. Além disso, estas restrições podem ser tratadas utilizando a mesma heurística proposta para as restrições de limite de tensão.

## **Referências Bibliográficas**

- [1] J. ABADIE AND J. CARPENTIER, Generalization of the Wolfe gradient method to the case of nonlinear contraints, Optimization Academic Press, London, (1969), pp. 37–47.
- [2] I. ADLER, M. G. C. RESENDE, G. VEIGA, AND N. KARMARKAR, An implementation of Karmarkar's algorithm for linear programming, Mathematical Programming, 44 (1989), pp. 297–335.
- [3] O. ALSAÇ, J. BRIGHT, M. PRAIS, AND B. STOTT, Further developments in LP-based optimal power flow, IEEE Transaction on PAS, 5 (1990), pp. 697–711.
- [4] M. C. BIGGS AND M. A. LAUGHTON, Optimal electric power scheduling: a large nonlinear programming test problem solved by recursive quadratic programming, Mathemathical Programming, 13 (1977), pp. 167–182.
- [5] J. R. BUNCH AND B. N. PARLETT, Direct methods for solving symmetric indefinite systems of linear equations, SIAM J. Num. Anal., 8 (1971), pp. 639–655.
- [6] R. C. BURCHETT, H. H. HAPP, AND D. R. VIERATH, Quadratically convergent optimal power flow, IEEE Transaction on PAS, 103 (1984), pp. 3267–3275.
- [7] J. CARPENTIER, Contribution a l'etude du dispatching economique, Bulletin de la Societe Francaise des Electriciens, 3 (1962), pp. 431–447.

- [8] —, Diferential injection methods: a general method for secure and optimal load flows,
  Proc. of IEEE PICA Conference, Minneapolis, (1973), pp. 225–262.
- [9] G. B. DANTZIG, Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, Princeton, 1963.
- [10] I. I. DIKIN, Iterative solution of problems of linear and quadratic programming, Soviets Math. Doklady, 8 (1967), pp. 674–675.
- [11] H. W. DOMMEL AND W. F. TINNEY, Optimal power flow solution, IEEE Transactions on PAS, 87 (1968), pp. 1866–1876.
- [12] A. S. EL-BAKRY, R. A. TAPIA, T. TSUCHIYA, AND Y. ZHANG, On the formulation and the theory of the Newton interior-point method for nonlinear programming, Journal of Optimization Theory and Applications, 89 (1996), pp. 507–541.
- [13] A. V. FIACCO AND G. P. MCCORMICK, Nonlinear programming: sequential unconstrained minimization techniques, John Willey & Sons, Inc., 1968.
- [14] K. R. FRISCH, The logarithmic potential method of convex programming, Technical report, University Institute of Economics, Oslo, (1955).
- [15] A. GARZILLO, M. INNORTA, AND R. RICCI, The flexibility of interior point based power flow algorithms facing critical network situations, Electrical Power & Energy Systems, 21 (1999), pp. 579–584.
- [16] M. O. GONÇALVES, Perdas Aparentes Série como Critério a Ser Minimizado no Fluxo de Potência Ótimo Reativo. Dissertação de mestrado, FEEC – UNICAMP, Campinas, 2006.
- [17] J. GRAINGER AND W. STEVENSON, Power System Analysis, McGraw-Hill, New York, 1994.

- [18] S. GRANVILLE, Optimal reactive power dispatch through interior point methods, IEEE Transactions on Power Systems, 9 (1994), pp. 136–146.
- [19] S. GRANVILLE, M. C. LIMA, L. C. LIMA, AND S. PRADO, Planvar an optimization software for VAR sources planning, Symposium in Mathematical Programming – Amsterdam, (1991).
- [20] N. KARMARKAR, A new polynomial-time algorithm for linear programming, Combinatorica, 4 (1984), pp. 373–395.
- [21] N. KARMARKAR, J. C. LAGARIAS, L. SLUTSMAN, AND P. WANG, A parallel formulation of interior-point algorithms, AT&T Technical Journal, 68 (1989), pp. 20–36.
- [22] L. G. KHACHIYAN, A polynomial algorithm in linear programming, Soviet Mathematics Doklady, 20 (1979), pp. 191–194.
- [23] M. KOJIMA, S. MIZUNO, AND A. YOSHISE, A primal-dual interior point algorithm for linear programming. Progress in Mathematical Programming: Interior Point and related Methods, Springer Verlag, New York, 1989.
- [24] I. J. LUSTIG, R. E. MARSTEN, AND D. F. SHANNO, Computational experience with a primal-dual interior-point method for linear programming, Linear Algebra Appl., 152 (1991), pp. 191–222.
- [25] N. MEGIDDO, Pathways to the optimal set in linear programming, Mathemathical Programming, (1986), pp. 131–158.
- [26] S. MEHROTRA, On the implementation of a primal-dual interior point method, SIAM Journal on Optimization, 2 (1992), pp. 575–601.

- [27] J. A. MOMOH, M. E. EL-HAWARY, AND R. ADAPA, A review of selected optimal power flow literature to 1993, part I: Nonlinear and quadratic programming approaches, IEEE Transactions on Power Systems, 14 (1999), pp. 96–104.
- [28] \_\_\_\_\_, A review of selected optimal power flow literature to 1993, part II: Newton, linear programming and interior point methods, IEEE Transactions on Power Systems, 14 (1999), pp. 105–111.
- [29] R. D. C. MONTEIRO, I. ADLER, AND M. G. C. RESENDE, A polynomial-time primaldual affine scaling algorithm for linear and convex quadratic programming and its power series extension, Mathematics of Operations Research, 15 (1990), pp. 191–214.
- [30] A. J. MONTICELLI, Fluxo de Carga Em Redes de Energia Elétrica, Edgar Blucher LTDA, São Paulo, 1983.
- [31] B. A. MURTAGH AND M. A. SAUNDERS, A projected lagrangian algorithm and its implementation for sparse nonlinear contraints, Mathemathical Programming Study, 16 (1982), pp. 84–117.
- [32] J. NOCEDAL AND S. J. WRIGHT, Numerical Optimization, Springer Verlag, New York, 1999.
- [33] A. R. L. OLIVEIRA, S. SOARES, AND L. NEPOMUCENO, Optimal active power dispatch combining network flow and interior point approaches, IEEE Transactions on Power Systems, 18 (2003), pp. 1235–1240.
- [34] —, Short term hydroelectric scheduling combining network flow and interior point approaches, Electrical Power & Energy Systems, 27 (2005), pp. 91–99.

- [35] V. H. QUINTANA, G. L. TORRES, AND J. MEDINA-PALOMO, Interior point methods and their applications to power systems: A classification of publications and software codes, IEEE Transactions on Power Systems, 15 (2000), pp. 170–176.
- [36] D. J. SUN, B. ASHLEY, B. BREWER, A. HUGHES, AND W. F. TINNEY, Optimal power flow by Newton approach, IEEE Transaction on PAS, 103 (1984), pp. 2864–2880.
- [37] A. THOMAZ, Métodos de Pontos Interiores Aplicados ao Fluxo de Carga Ótimo Utilizando Coordenadas Cartesianas. Tese de doutorado, FEEC – UNICAMP, Campinas, 2007.
- [38] G. L. TORRES AND V. H. QUINTANA, An interior point method for nonlinear optimal power flow using voltage rectangular coordinates, IEEE Transactions on Power Systems, 13 (1998), pp. 1211–1218.
- [39] R. J. VANDERBEI, Linear Programming Foundations and Extensions, Kluwer Academics Publishers, Boston, 1996.
- [40] S. J. WRIGHT, Primal-Dual Interior-Point Methods, SIAM Publications, SIAM, Philadelphia, 1996.
- [41] Y. C. WU, A. S. DEBS, AND R. E. MARSTEN, A direct nonlinear predictor-corrector primal-dual interior point algorithm for optimal power flows, IEEE Transactions on Power Systems, 9 (1994), pp. 876–883.