Universidade Estadual de Campinas

UNICAMP

Dissertação de Mestrado

Um problema de fronteira livre para um sistema elíptico-hiperbólico: uma aplicação ao crescimento de tumores

Autor:
Meire Fortunato
e-mail:
ra034831@ime.unicamp.br

Orientador:
Prof. Dr. José Luiz Boldrini
e-mail:
boldrini@ime.unicamp.br

Apoio Fapesp

15 de Abril de 2010

Um problema de fronteira livre para um sistema elíptico-hiperbólico: uma aplicação ao crescimento de tumores.

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Meire Fortunato** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 15 de Abril de 2010.

Prof. Dr:. José Luiz Boldrini
Orientador

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. José Luiz Boldrini.
2. Profa. Dra. Bianca Morelli Rodolfo Calsavara.
3. Profa. Dra. Helena Judith Nussenzveig Lopes.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em **Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Miriam Cristina Alves - CRB8/5098

F779p	Fortunato, Meire Um problema de fronteira livre para um sistema elíptico-hiperbólico: uma aplicação ao crescimento de tumores. / Meire Fortunato – Campinas, [S.P.: s.n.], 2010. Orientador : José Luiz Boldrini Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. 1. Problema de Fronteira Livre. 2. Equações diferenciais elípticas. 3. Equações diferenciais hiperbólicas. 4. Tumores-Crescimento. . I. Boldrini, José Luiz. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: A free boundary problem for an elliptic-hyperbolic system: an application to tumor growth.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Free Boundary Problem. 2. Elliptic differential equations. 3. Hyperbolic differential equations 4. Tumor Growth.

Área de concentração: Análise Aplicada

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Prof. Dr. José Luiz Boldrini (IMECC-UNICAMP)
Profa. Dra. Bianca Morelli Rodolfo Calsavara (FT Limeira-UNICAMP)
Profa. Dra. Helena Judith Nussenzveig Lopes (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 15-04-2010

Programa de pós-graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 15 de abril de 2010 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

José Luiz Boldrini

Prof.(a). Dr(a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI

Prof. (a). Dr (a). HELENA JUDITH NUSSENZVEIG LOPES

BCalsavara

Prof. (a). Dr (a). BIANCA MORELLI RODOLFO CALSAVARA

Dedicatória

À minha mãe Lisiane e ao meu pai Bira.

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Boldrini por ter sido um excelente orientador.

À minha família por ter me proporcionado um ambiente muito agradável sempre que estive na assim chamada cidade das flores.

Sou muito grata também aos amigos que conquistei em Campinas e aos que restaram de Corbélia.

Por fim, agradeço o apoio financeiro da FAPESP.

Campinas, 15 de abril de 2010. Meire Fortunato

Abstract

In this dissertation we detail the analysis done in the article by X. Chen, A. Friedman, *A free boundary problem for an elliptic-hyperbolic system: an application to tumor growth*, SIAM J. Math. Anal. 35, 2003, which considers a free boundary value problem for an elliptic-hyperbolic system of partial differential equations related to the Hele-Shaw problem.

The present problem models the growth of a tumor and takes in consideration the following possibilities for the state of a tumor cell: proliferating, quiescent or necrotic; the model also takes in consideration the available nutrient concentration. The equations hold in a time varying domain in such way that the boundary velocity depends on the other variables of the problem.

As a result of the analysis, we obtain the local in time existence, as well as uniqueness, of classical solutions for the system.

Resumo

Nesta dissertação detalhamos a análise matemática feita no artigo de X. Chen, A. Friedman, *A free boundary problem for an elliptic-hyperbolic system: an application to tumor growth*, SIAM J. Math. Anal. 35, 2003, pp. 974-986, o qual considera um problema de fronteira livre para um sistema de equações diferenciais parciais de caráter elíptico-hiperbólico relacionado com o chamado problema de Hele-Shaw. O problema modela o crescimento de um tumor e leva em conta as seguintes possibilidades de estado para suas células: proliferantes, quiescentes ou necróticas; leva-se também em conta a concentração de nutrientes disponível. Estas equações valem em um domínio que varia com o tempo de uma forma em que a velocidade da fronteira depende das outras variáveis do problema. Como resultado da análise tem-se a existência local no tempo e a unicidade de soluções clássicas do sistema.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Nesta dissertação detalhamos a análise matemática feita em um artigo de Chen e Friedman, [17], para um problema de fronteira livre que modela a evolução de certos tipos de tumores.

De forma mais precisa, estamos interessados no seguinte sistema elíptico-hiperbólico não-linear:

$$
\begin{aligned}
&\Delta c - \lambda c = 0 \ \text{ em } \Omega_t,\\
&\frac{\partial p}{\partial t} - \nabla\sigma \cdot \nabla p = f(c,p,q) \ \text{ em } \Omega_t,\\
&\frac{\partial q}{\partial t} - \nabla\sigma \cdot \nabla q = g(c,p,q) \ \text{ em } \Omega_t,\\
&\Delta \sigma = -h(c,p,q) \ \text{ em } \Omega_t,
\end{aligned}
$$

onde as funções incógnitas são c, a qual está relacionada com a concentração de nutrientes no tumor, p e q, as quais denotam respectivamente as densidades das células chamadas proliferantes e quiescentes, e σ, a qual é a pressão interna no tumor. $f(c,p,q)$, $g(c,p,q)$, $h(c,p,q)$ são certas funções dadas de c, p e q, a serem descritas com detalhes posteriormente.

Estas equações valem em domínios Ω_t, para $t \geq 0$, evoluindo no tempo a partir de um domínio inicial dado Ω_0. Estes domínios também devem ser encontrados e a sua evolução é controlada pelas seguintes condições de fronteira:

$$
\begin{aligned}
c &= 1 \text{ em } \Gamma_t, && (1.1)\\
\sigma &= \gamma\kappa \text{ em } \Gamma_t, && (1.2)\\
\frac{\partial \sigma}{\partial n} &= -V_n \text{ em } \Gamma_t. && (1.3)
\end{aligned}
$$

onde $\Gamma_t = \partial\Omega_t$, γ é uma constante positiva (associada ao coeficiente da tensão superficial da fronteira do tumor), κ é a curvatura média em cada ponto, $\frac{\partial}{\partial n}$ denota a derivada na direção $\vec{n}$ da normal unitária exterior e V_n é a velocidade da fronteira livre Γ_t na direção $\vec{n}$.

Finalmente, no domínio inicial Ω_0 são dadas as seguintes condições iniciais para as funções p e q

$$p(x,0) = p_0(x),\ q(x,0) = q_0(x) \text{ em } \Omega_0,$$

com $p_0(x) \geq 0,\quad q_0(x) \geq 0,\quad p_0(x) + q_0(x) \leq 1.$

Descreveremos brevemente a dedução deste modelo no próximo capítulo. Neste momento queremos apenas observar que como os domínios Ω_t dependem das próprias incógnitas, o sistema anterior corresponde a um problema de fronteira livre bastante não-linear.

É interessante notar que se considerarmos apenas a equação

$$\Delta\sigma = 0 \text{ em } \Omega_t$$

com as condições de contorno (1.2) e (1.3), temos o chamado problema de Hele-Shaw ou de Stefan quase-estático. O estudo deste problema é feito em vários casos dependendo da dimensão do domínio Ω_0 (veja, por exemplo, Chen [16], Duchon e Robert [8], Constantin e Pugh [13], Bazaliy [4], Bazaliy e Friedman [3], Esher e Simonett [9], Esher e Simonett [10], Friedman e Reitich [1]).

Portanto, o modelo descrito acima está relacionado com o problema de Hele- Shaw e, de fato, pode ser pensado como uma generalização sua. Tal modelo foi introduzido em Pettet *et al.* [6] no caso de simetria esférica; onde a unicidade e existência global no tempo de solução foram provadas em Cui e Friedman [14]. No caso de Ω_0 arbitrário, a existência local no tempo e a unicidade foram provadas em Chen e Friedman [17]. Outras questões sobre tal modelo, tal como o comportamento assintótico, foram consideradas em Chen e Friedman [20].

Como dissemos anteriormente, o nosso objetivo é o de detalhar a análise matemática deste modelo feita em Chen e Friedman, [17], isto é, queremos provar que sob certas condições temos a existência e a unicidade de soluções. O enunciado preciso do que provaremos está no Teorema 2.5.

Capítulo 2

Derivação do Modelo, Preliminares e Resultado Principal

2.1 Derivação do Modelo

Nesta seção descreveremos as idéias principais utilizadas na derivação do modelo de crescimento tumoral conforme apresentado em Chen e Friedman, [17].

Para isto, faz-se a hipótese de que as células do tumor podem estar em um dos seguintes três estados: proliferante, quiescente ou necrótico, com densidades respectivamente denotadas por p, q e n.

Além disso, denotamos por c a concentração de nutrientes disponíveis para as células no tumor.

Supõe-se que células quiescentes tornam-se proliferantes a uma taxa $K_P(c)$ e necróticas a uma taxa $K_D(c)$. Também, células proliferantes tornam-se quiescentes a uma taxa $K_Q(c)$ e proliferam-se a uma taxa $K_B(c)$. Finalmente, supõe-se também que células necróticas são removidas do tumor a uma taxa constante K_R. Por razões biológicas, $K_P(c)$ e $K_B(c)$ são funções monótonas crescentes em c, enquanto que $K_D(c)$ é monótona decrescente em c.

Supõe-se também que a difusão de nutrientes na região do tumor se dá em uma escala de tempo muito mais rápida do que a dos estágios das células. Mais especificamente, supõe-se que a concentração de nutrientes c satisfaz a equação de difusão

$$\Delta c - \lambda c = 0,$$

onde λ é uma constante positiva suposta conhecida e que depende do meio onde o tumor está.

Devido à proliferação e à remoção de células, existe um deslocamento contínuo das mesmas, e portanto temos um campo de velocidades de deslocamento das células, denotado por $\vec{v}$.

Esta movimentação de células faz com que a região delimitada pelo tumor mude com o tempo a partir de uma região inicial dada Ω_0. Denotamos a região delimitada pelo tumor no instante $t \geq 0$ por Ω_t e supomos que sejam domínios.

As leis de balanço de massa para cada uma das densidades de células p, q e n na região do tumor Ω_t podem então ser escritas da seguinte forma:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(p\vec{v}) = [K_B(c) - K_Q(c)]p + K_P(c)q,$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \operatorname{div}(q\vec{v}) = K_Q(c)p - [K_P(c) + K_D(c)]q,$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\vec{v}) = K_D(c)q - K_R n.$$

A seguir se supõe que o tecido do tumor se comporta de maneira análoga a um meio poroso. Logo, a lei de Darcy, que relaciona a pressão interna σ e a velocidade $\vec{v}$ do fluxo em um meio poroso, pode ser implicada, fornecendo:

$$\vec{v} = -\nabla\sigma.$$

Obviamente esta pressão interna do tumor σ, que é resultante do transporte e da proliferação e morte das células, é uma função incógnita a ser determinada.

Agora, supondo que as todas as células possuem mesmos volume e densidade, devemos ter

$$p + q + n = 1,$$

Somando as equações anteriores para p, q e n e utilizando a igualdade acima, obtemos

$$\operatorname{div} \vec{v} = (K_B(c) + K_R)p + K_R q - K_R.$$

Podemos então substituir a lei de conservação para n por uma equação para a pressão interna do tumor σ.

Assim, temos que o seguinte sistema que modela o crescimento do tumor

$$\Delta c - \lambda c = 0 \text{ em } \Omega_t, \tag{2.1}$$
$$\frac{\partial p}{\partial t} - \nabla\sigma \cdot \nabla p = f(c,p,q) \text{ em } \Omega_t, \tag{2.2}$$
$$\frac{\partial q}{\partial t} - \nabla\sigma \cdot \nabla q = g(c,p,q) \text{ em } \Omega_t, \tag{2.3}$$
$$\Delta \sigma = -h(c,p,q) \text{ em } \Omega_t, \tag{2.4}$$

onde

$$\begin{aligned} f(c,p,q) &= [K_B(c) - K_Q(c)]p + K_P(c)q - h(c,p,q)p, \\ g(c,p,q) &= K_Q(c)p - [K_P(c) + K_D(c)]q - h(c,p,q)q, \\ h(c,p,q) &= -K_R + [K_B(c) + K_R]p + K_R q. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Às equações anteriores deve-se adicionar as seguintes condições de fronteira

$$c = 1 \text{ em } \Gamma_t, \tag{2.6}$$

$$\sigma = \gamma\kappa \text{ em } \Gamma_t, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial n} = -V_n \text{ em } \Gamma_t. \tag{2.8}$$

Aqui, $\Gamma_t = \partial\Omega_t$; a concentração de nutrientes na fronteira da região delimitada pelo tumor foi suposta ser constante e normalizada para ter valor 1; γ é uma constante positiva (associada ao coeficiente da tensão superficial da fronteira do tumor), κ é a curvatura média em cada ponto, $\dfrac{\partial}{\partial n}$ é a derivada na direção $\vec{n}$ da normal unitária exterior e V_n é a velocidade da fronteira livre Γ_t na direção $\vec{n}$.

A condição (2.7) é baseada na hipótese de que a pressão σ na superfície do tumor é proporcional à tensão na superfície (veja Greenspan [7]) e a condição (2.8) é a cinética (ou de continuidade) padrão.

Finalmente, no domínio inicial dado, Ω_0, com fronteira Γ_0 temos as seguintes condições para as funções p e q

$$p(x,0) = p_0(x), \quad q(x,0) = q_0(x) \text{ em } \Omega_0,\ \Gamma_0, \tag{2.9}$$

com

$$p_0(x) \geq 0,\ q_0(x) \geq 0,\ p_0(x) + q_0(x) \leq 1. \tag{2.10}$$

2.2 Preliminares

Nesta seção apresentamos alguns resultados e definições que utilizaremos ao longo desta dissertação.

2.2.1 Espaços de Hölder

Seja $D \subset \mathbb{R}^N$ e $0 < \alpha \leq 1$; dizemos que uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é *Hölder contínua com expoente α em D* se

$$[f]_{\alpha;D} = \sup_{\substack{x,y\in D \\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

Seja U um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$ e k um inteiro não-negativo. Os *Espaços de Hölder* $C^{k+\alpha}(\overline{U})$ $(C^{k+\alpha}(U))$ serão definidos como os subespaços de $C^k(\overline{U})$ $(C^k(U))$ consistindo das funções cujas derivadas parciais de ordem k são Hölder contínuas. Para isso, definamos primeiramente as seguintes seminormas

$$[f]_{k;U} = \|D^k f\|_{0;U} = \sup_{|\beta|=k} \sup_U |D^\beta f|, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$
$$[f]_{k+\alpha;U} = [D^k f]_{\alpha;U} = \sup_{|\beta|=k} [D^\beta f]_{\alpha;U}.$$

Agora, podemos definir as normas $\|\cdot\|_{C^k(\overline{U})}$ e $\|\cdot\|_{C_{k,\alpha}(\overline{U})}$, nos espaços $C^k(\overline{U})$ e $C^{k+\alpha}(\overline{U})$, respectivamente

$$\|f\|_{C^k(\overline{U})} = \|f\|_{k;U} = \sum_{j=0}^{k} [f]_{j;U} = \sum_{j=0}^{k} \|D^j f\|_{0;U},$$
$$\|f\|_{C^{k+\alpha}(\overline{U})} = \|f\|_{k+\alpha;U} = \|f\|_{k;U} + [f]_{k+\alpha;U} = \|f\|_{k;U} + [D^k f]_{\alpha;U},$$

É possível provar que com essas normas $C^k(\overline{U})$ e $C^{k+\alpha}(\overline{U})$ são espaços de Banach (veja Gilbarg-Trudinger [5], Capítulo 5).

Definamos agora os espaços de Hölder no espaço tempo.

Dado $\beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_N)$, onde β_i são inteiros não-negativos, denotaremos por $|\beta| = \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_N$. Para $\varphi : U \times I \to \mathbb{R}$, onde $U \subset \mathbb{R}^N$ e $I \subset \mathbb{R}$, definimos

$$D^\beta \varphi = D^\beta_{(x,t)} \varphi(x,t) = \frac{\partial^{|\beta|} \varphi(x,t)}{(\partial t)^{\beta_0} (\partial x_1)^{\beta_1} \ldots (\partial x_N)^{\beta_N}}$$

Para todo $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 < 1$, $0 < \alpha < 1$ e $m \geq 0$ inteiro definimos

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{0,0} &= \sup_{(x,t)} |\varphi(x,t)|, \\
\|\varphi\|_m &= \sum_{|\beta| \leq m} \|D^\beta \varphi\|_{0,0}, \\
[\varphi]_{\alpha_1,\alpha_2} &= \sup_{\substack{x \neq y \\ \text{ou } t \neq \tau}} \frac{|\varphi(x,t) - \varphi(y,\tau)|}{|x-y|^{\alpha_1} + |t-\tau|^{\alpha_2}}, \\
\|\varphi\|_{m+\alpha_1, m+\alpha_2} &= \|\varphi\|_{0,0} + \sum_{|\beta| = m} [D^\beta \varphi]_{\alpha_1,\alpha_2}, \\
\|\varphi\|_{3+\alpha,(3+\alpha)/3} &= \|\varphi\|_{0,0} + [D^3_x \varphi]_{\alpha,\alpha/3} + [D_t \varphi]_{\alpha,\alpha/3}, \\
\|\varphi\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} &= \|\varphi\|_{0,\frac{2+\alpha}{3}} + [D^2_x \varphi]_{\alpha,\alpha/3}.
\end{aligned}$$

Dizemos que $\varphi \in C^{m+\alpha_1, m+\alpha_2}(U \times I)$ se $\|\varphi\|_{m+\alpha_1,m+\alpha_2} < \infty$. Analogamente, definimos $\varphi \in C^{3+\alpha,(3+\alpha)/3}(U \times I)$ e $\varphi \in C^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}(U \times I)$.

2.2.2 Resultados sobre Equações Diferenciais

O primeiro e segundo teoremas apresentados aqui são resultados clássicos da teoria de equações ordinárias e serão utilizados no Capítulo 3 quando o método das características for aplicado para solucionar o problema auxiliar hiperbólico exposto no Passo 3 da Seção 2.3.2.

Teorema 2.1 (Picard-Lindelöf)**.** *Considere o problema*

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)) \quad \textit{para } t \in [t_0, t_1], \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned}$$

Seja $f : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *contínua e que satisfaz a condição de Lipschitz*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|,$$

para todo $t \in [t_0, t_1]$ *e* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$*, sendo* $L > 0$ *uma constante.*

Então o problema proposto tem solução única.

Demonstração. Consiste em garantir que a transformação T definida por

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

possui um único ponto fixo. Para isso, demonstra-se que T é uma contração no espaço de Banach das funções contínuas de $[t_0, t_1]$ para $\mathbb{R}^N$, com a norma

$$\|x\| = \sup\{e^{-K(t-t_0)}|x(t)| : t \in [t_0, t_1]\}$$

sendo $K > L$ uma constante fixa.

Para mais detalhes veja Guzman [12], Cap. 4.

$\square$

Teorema 2.2 (Guzman [12], Cap. 4.)**.** *Seja* $f : (t, x) \in D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \mapsto f(t, x) \in \mathbb{R}^N$ *uma função contínua no aberto* D *tal que* f_x *existe e é contínua em* D*. Seja, para cada*

$(\tau, \xi) \in D$, $\psi(t, \tau, \xi)$ *a solução do problema*

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$
$$x(\tau) = \xi.$$

Se $\psi(t, t_0, \xi_0)$ *existe num intervalo* $J = [t_0, t_0 + h]$, *para* $(t_0, \xi_0) \in D$, *então* $\psi(t, \tau, \xi)$ *existe e está unicamente determinada em* J *para todo* (τ, ξ) *suficientemente próximo de* (t_0, ξ_0).

Além disso, para todo $t \in J$ *existe* $\psi_\xi(t, t_0, \xi_0)$ *que é a solução da equação matricial*

$$y'(t) = f_x(t, \psi(t, t_0, \xi_0))y(t),$$
$$y(t_0) = I.$$

Finalmente, $\psi_\tau(t, t_0, \xi_0)$ *existe e é igual a* $\psi_\xi(t, t_0, \xi_0)f(t_0, \xi_0)$.

Apresentemos, agora alguns resultados clássicos da Teoria de Equações Elípticas que serão utilizados nos capítulos seguintes.

Suponha que os coeficientes a_{ij}, b_i e c na equação

$$Lu = a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + b_i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x). \tag{2.11}$$

e o termo não-homogêneo f estão definidos numa região limitada Ω e pertençam ao espaço $C^{(l-2)+\alpha}(\overline{\Omega})$ para $l \geq 2$ e $\alpha \in (0, 1)$. Assuma também que $a_{ij} = a_{ji}$ e que a equação (2.11) é elíptica em Ω, isto é

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu \sum_{k=1}^{N} \xi_k^2, \text{ para } \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N \text{ e } x \in \Omega. \tag{2.12}$$

onde $\nu > 0$ é constante.

Vamos considerar o problema de Dirichlet na região Ω para a equação (2.11): encontrar uma função u que satisfaça (2.11) em Ω e também

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi.$$

Teorema 2.3 (Ladyzhenskaya [15], p. 107)**.** *Se f e os coeficientes do operador L pertencem a $C^{(l-2)+\alpha}(\overline{\Omega})$, a_{ij} satisfaz a desigualdade (2.12) e $c \leq 0$. Se $\partial\Omega \in C^{l+\alpha}$ e $\varphi \in C^{l+\alpha}(\partial\Omega)$ então o problema de Dirichlet para a equação (2.11) possui solução única $u \in C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$, $l \geq 2$.*

A demonstração desse teorema foi feita por Schauder e é baseada na desigualdade

$$\|v\|_{l+\alpha;\Omega} \leq k(l)\big[\|Lv\|_{(l-2)+\alpha;\Omega} + \max_{\Omega}|v| + \|v\|_{l+\alpha;\partial\Omega}\big], \quad l \geq 2 \tag{2.13}$$

que é válida para $v \in C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$ e operador elíptico L arbitrários. A constante $k(l)$ dessa desigualdade depende apenas de l, ν, das normas em $C^{(l-2)+\alpha}$ dos coeficientes do operador L e da fronteira de Ω, que assuminos pertencer à classe $C^{l+\alpha}$.

Outro resultado clássico da Teoria de Equações Elípticas é o seguinte:

Teorema 2.4 (Princípio do Máximo Fraco–Gilbarg-Trudinger [5], p. 33)**.** *Seja L o operador dado por (2.11), definido num domínio limitado Ω. Suponha que L satisfaz a condição de elipticidade (2.12) e que possui coeficientes a_{ij}, b_i e c contínuos. Suponha que em Ω*

$$Lu \geq 0 (\leq 0), \qquad c \leq 0.$$

com $u \in C^0(\overline{\Omega})$. Então

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ (\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^-).$$

onde $u^+ = máx(u, 0)$ e $u^- = min(u, 0)$.

Se $Lu = 0$ em Ω, então

$$\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u|$$

Enunciemos agora um lema sobre extensão de funções e apresentemos um esquema da demonstração do mesmo.

Lema 2.1 (Gilbarg-Trudinger [5], p. 136). *Seja $0 < \alpha < 1$, Ω um domínio $C^{k+\alpha}$ em $\mathbb{R}^N$ (com $k \geq 1$) e Ω' aberto contendo Ω. Suponha que $u \in C^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$. Então existe uma função $w \in C^{k+\alpha}(\Omega')$, com suporte compacto em Ω', tal que*

$$w = u \text{ em } \Omega,$$
$$\|w\|_{k+\alpha;\Omega'} \leq C\|u\|_{k+\alpha;\Omega}$$

onde $C = C(k, \Omega, \Omega')$.

Esquema da Demonstração: Seja $y = \psi(x)$ um difeo $C^{k+\alpha}$ que endireita a fronteira próximo a $x_0 \in \partial\Omega$. Sejam G e $G^+ = G \cap \mathbb{R}^N_+$, respectivamente, a bola e a meia-bola na imagem de ψ tal que $\psi(x_0) \in G$. Seja $\tilde{u}(y) = u(\psi^{-1}(y))$ e $y = (y_1, \ldots, y_{N-1}, y_N) = (y', y_N)$, definimos uma extensão de $\tilde{u}(y)$ para $y_N < 0$ por

$$\tilde{u}(y', y_N) = \sum_{i=1}^{k+1} c_i \tilde{u}(y', -y_N/i), \quad y_N < 0,$$

onde $c_1, \ldots, c_{k+1}$ são constantes determinadas pelo sistema de equações

$$\sum_{i=1}^{k+1} c_i(-1/i)^m = 1, \quad m = 0, 1, \ldots, k.$$

É possível verificar que $\tilde{u} \in C^{k+\alpha}(G)$. Então $w = \tilde{u} \circ \psi \in C_{k,\alpha}(\overline{B})$ para alguma bola $B = B(x_0)$ e $w = u$ em $B \cap \Omega$. Segue que w é uma extensão de u para $\Omega \cup B$. Demonstra-se a estimativa

$$\|w\|_{k+\alpha;\Omega\cup B} \leq C\|u\|_{k+\alpha;\Omega},$$

onde C é constante e $C = C(k, \Omega, B)$.

Então toma-se uma cobertura finita do $\partial\Omega$ por bolas B_i, $i = 1, \ldots, l$, como a bola B anterior, e $\{w_i\}$ as extensões $C_{k,\alpha}$ correspondentes. Assume-se que as bolas B_i são pequenas de maneira que $\bigcup_{i=1}^{l} B_i \cup \Omega \subset \Omega'$. Toma-se $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ subconjunto aberto de Ω de forma que $\{\Omega_0, B_i; i = 1, \ldots, l\}$ é uma cobertura aberta de Ω. Considera-se então $\{\eta_i\}, i = 0, 1, \ldots, l$ a partição da unidade subordinada a essa cobertura. Define-se

$$w = u\eta_0 + \sum_{i=1}^{l} w_i\eta_i.$$

Verifica-se que w assim definida satisfaz as condições do lema.

2.3 Resultado Principal

2.3.1 O Teorema de Existência e Unicidade de Soluções

Os resultados de existência local e unicidade de solução para o sistema (2.1)-(2.10) não dependem da dimensão do domínio em questão, portanto iremos considerar Ω_t N-dimensional, com $N \geq 2$.

Também não será necessário utilizar as formas específicas de f, g e h; ao invés disso, assumiremos apenas que

$$f, g \text{ e } h \in C^{m+1} \text{ para algum inteiro m} \geq 0, \tag{2.14}$$

e que

$$f, g \text{ e } h \text{ se anulam se } |c| + |p| + |q| \text{ é suficientemente grande.} \tag{2.15}$$

Podemos supor esta última condição sem perda de generalidade, uma vez que buscamos soluções contínuas locais no tempo e que, portanto, os valores de p, q, c estão respectivamente próximos dos valores de p_0, q_0 e c_0 onde c_0 satisfaz $-\Delta c_0 + \lambda c_0 = 0$ em Ω_0 e $c_0 = 1$ em Γ_0.

O fato de que estamos procurando soluções contínuas que são locais no tempo também nos permite restringir, sem perder a generalidade, o conjunto solução para o problema da seguinte forma: fixar um compacto $K \subset \mathbb{R}^N$ tal que os suportes de f, g e h estejam contidos em K, $\overline{\Omega}_0 \Subset K$ (i.e, $\overline{\Omega}_0 \subset \text{int}K$) e procurar funções c, p, q, σ com suporte compacto contido em K e domínios $\Omega_t, t \in [0, T]$ tais que $\overline{\Omega}_t \Subset K$. Para isso adotaremos a seguinte notação

Notação: Se $\mathcal{C}$ é um espaço vetorial de funções de $\mathbb{R}^N$ para $\mathbb{R}$, denotaremos por $\mathcal{C}_K$ o espaço dado por

$$\mathcal{C}_K := \{f \in \mathcal{C}; f \text{ possui suporte compacto em } K.\}$$

O nosso objetivo é provar que sob certas condições, a serem explicadas a seguir, temos existência e unicidade de solução para (2.1)-(2.10). Além do mais, gostaríamos de determinar a regularidade desta solução. De fato, demonstraremos o seguinte teorema

Teorema 2.5. *Seja $0 < \alpha < 1$ e m um inteiro não-negativo. Se Ω_0 é um domínio N-dimensional, com $N \geq 2$, cuja fronteira $\Gamma_0 \in C^{m+4+\alpha}$; as funções p_0 e q_0 pertencem a $C^{m+1+\alpha}(\overline{\Omega}_0)$, f, g e h satisfazem (2.14) e (2.15).*

Assumindo que Γ_t, $t \in [0, T]$, pode ser representado como

$$\Gamma_t = \{s + \rho(s, t)\vec{n}(s); s \in \Gamma_0\}.$$

onde $\vec{n}(s)$ denota o vetor unitário normal exterior a Γ_0 em s e $\rho \in C^{3+\alpha,(3+\alpha)/3}(\Gamma_0 \times [0, T])$.

Sob essas condições, temos que o sistema (2.1)-(2.4), (2.6)-(2.9) admite uma única solução, para $0 \leq t \leq T$*, onde* $T > 0$ *é suficientemente pequeno. A regularidade desta solução é dada por*

$$D_s D^m_{(s,t)} \rho \in C^{3+\alpha,(3+\alpha)/3}(\mathbb{R}^{N-1} \times [0,T]),$$
$$D^2_x D^m_{(x,t)} \sigma \in C^{\alpha,\alpha/3}_K(\mathbb{R}^N \times [0,T]),$$
$$c, p, q \in C^{m+1+\alpha,\, m+1+\alpha/3}_K(\mathbb{R}^N \times [0,T]).$$

2.3.2 Etapas da Demonstração do Teorema

Para demonstrar o teorema enunciado acima definiremos uma transformação não-linear W cujo(s) ponto(s) fixo(s) (que será demonstrado ser único) é (são) solução (ões) para o problema (2.1)-(2.10), essa transformação terá como domínio o seguinte conjunto Y_M.

Definição 1. *Seja* M *um número positivo a ser escolhido. Definimos o conjunto* Y_M *como*

$$Y_M := \{(c,p,q) \in [C^{m+\alpha,m+\alpha/3}_K(\mathbb{R}^N \times [0,T])]^3; \|(c,p,q)\|_{m+\alpha,m+\alpha/3} \leq M$$
$$e\ p|_{\overline{\Omega}_0 \cap \{t=0\}} = p_0,\ q|_{\overline{\Omega}_0 \cap \{t=0\}} = q_0.\}$$

Para cada $(c,p,q) \in Y_M$ seguiremos o roteiro abaixo para definir $W(c,p,q)$ e demonstrar o Teorema 2.5.

Passo 1: Estudo do problema de Hele-Shaw. Na Seção 3.1 do Capítulo 3, mostraremos existência e unicidade de solução para o problema conhecido como problema de Hele-Shaw não-homogêneo, que consiste em encontrar σ e $\{\Omega_t; 0 \leq t \leq T\}$ tais que

$$\Delta\sigma = -h(c,p,q) \equiv -h(x,t) \text{ em } \Omega_t,$$
$$\sigma = \gamma\kappa, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial n} = -V_n \text{ em } \Gamma_t.$$

para $0 \leq t \leq T$, com $\rho_t|_{t=0} = r_0$.

Sendo que $\Gamma_t = \partial\Omega_t$, γ é uma constante positiva (associada ao coeficiente da tensão superficial da fronteira do tumor), κ é a curvatura média em cada ponto, $\frac{\partial}{\partial n}$ é a derivada na direção $\vec{n}$ da normal unitária exterior e V_n é a velocidade da fronteira livre Γ_t na direção $\vec{n}$.

Também estabeleceremos a regularidade desta solução e mostraremos que σ possui extensão para $\mathbb{R}^n \times [0,T]$ com a mesma reguralidade que a função σ original.

Passo 2: Estudo do problema elíptico. Na Seção 3.2 do Capítulo 3, com Ω_t dado pela solução do problema de Hele-Shaw não-homogêneo, mostraremos que o sistema elíptico

$$\begin{gathered}\Delta\bar{c} - \lambda\bar{c} = 0 \text{ em } \Omega_t, t \in [0,T]\\ \bar{c} = 1 \text{ em } \Gamma_t, t \in [0,T].\end{gathered}$$

tem solução única $\bar{c}$ e esta possui extensão para $\mathbb{R}^N \times [0,T]$.

Passo 3: Estudo do problema hiperbólico. Na Seção 3.3 do Capítulo 3, dados $p_0, q_0 \in C^{m+1+\alpha}(\mathbb{R}^N)$, garantiremos existência e unicidade para o sistema hiperbólico para $(\bar{p}, \bar{q})$

$$\bar{p}_t - \nabla\sigma \cdot \nabla\bar{p} = f(c, \bar{p}, \bar{q}) \text{ em } \mathbb{R}^N \times [0,T],$$

$$\bar{q}_t - \nabla\sigma \cdot \nabla\bar{q} = g(c, \bar{p}, \bar{q}) \text{ em } \mathbb{R}^N \times [0,T],$$

$$\bar{p}|_{t=0} = p_0, \ \bar{q}|_{t=0} = q_0 \text{ em } \mathbb{R}^N \times [0,T].$$

onde σ é a solução do problema de Hele-Shaw mencionado no Passo 2.

Passo 4: Caracterização da transformação W. Finalmente, no Capítulo 4, com a mesma notação dos Passos 1, 2 e 3, para cada $(c, p, q) \in Y_M$ definiremos a transformação W por $W(c, p, q) = (\bar{c}, \bar{p}, \bar{q})$.

Mostraremos que W é contínua e mapeia Y_M em um subconjunto compacto de Y_M; portanto, pelo teorema do ponto fixo de Schauder, W tem um ponto fixo. Também será provado que W é uma contração na norma L^∞ para $T > 0$ suficientemente pequeno, fato que determina a unicidade do ponto fixo de W.

Capítulo 3

Problemas Auxiliares

Neste capítulo iremos demonstrar existência, unicidade e regularidade de solução para o problema de Hele-Shaw não-homogêneo e também para os problemas elíptico e hiperbólico expostos nos Passos 2 e 3 do roteiro descrito na Seção 2.3.2.

3.1 O Problema de Hele-Shaw

No que segue, vamos estudar o problema conhecido por Problema de Hele-Shaw não-homogêneo, que consiste em encontrar σ e $\{\Omega_t, t \in [0,T]\}$ tais que

$$\Delta\sigma = -h(c,p,q) \equiv -h(x,t) \text{ em } \Omega_t,$$
$$\sigma = \gamma\kappa, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial n} = -V_n \text{ em } \Gamma_t.$$

para todo t em $[0,T]$. Onde h é uma função dada, $\Gamma_t = \partial\Omega_t$, γ é uma constante positiva, κ é a curvatura média em cada ponto, $\frac{\partial}{\partial n}$ é a derivada na direção $\vec{n}$ da normal unitária exterior e V_n é a velocidade da fronteira livre Γ_t na direção $\vec{n}$.

Assumiremos que

$$\Gamma_t = \{s + \rho(s,t)\vec{n}(s); s \in \Gamma_0\}.$$

onde a função ρ pertencerá a uma classe de funções com certa regularidade a ser determinada posteriormente.

Vamos tomar coordenadas locais a fim de achatar a fronteira Γ_t.

Seja $d = d(x) = d(x, \Gamma_0)$ a distância orientada de x a Γ_0. Então, para x próximo a Γ_0, podemos escrever

$$x = s + d\vec{n}(s)$$

com $s \in \Gamma_0$ unicamente determinado por x. Ou seja, existe L_0 (dependendo apenas de Γ_0) tal que

$$\begin{aligned} X : \Gamma_0 \times (-L_0, L_0) &\to \Gamma_0(L_0) = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / d(x, \Gamma_0) < L_0\} \\ (s, d) &\mapsto s + d\vec{n}(s) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo C^∞. Dado $x \in \Gamma_0(L_0)$ denotaremos por $(P(x), d(x))$ a inversa de X, ou seja, $x = X(P(x), d(x))$.

Dado $s_0 \in \Gamma_0$, seja $S : V' \subset \Gamma_0 \to 0' \in U' \subset \mathbb{R}^{N-1}$ uma carta local para s_0, onde $y' = (y_1, \ldots, y_{N-1})$. Para cada t em um intervalo $[0, T]$, definimos um mapa local $Z^{s_0}(t)$ de uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^N$ em uma vizinhança de s_0, também em $\mathbb{R}^N$, como

$$\begin{aligned} Z^{s_0}(t) = Z^{s_0}(\cdot, t) : U = U' \times (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R}^N &\to V \subset \Gamma_0(L_0) \\ y = (y_1, \ldots, y_{N-1}, y_N) &\mapsto x = s + (\rho(s, t) + y_N)\vec{n}(s) \end{aligned}$$

onde $s = S^{-1}(y_1, \ldots, y_{N-1})$.

Note que $y_N = d(x, \Gamma_0) - \rho(s, t)$ e que $x \in \Gamma_t$ corresponde a $(y', 0)$.

Agora, demonstraremos o teorema que garante a existência de solução única para o Problema de Hele-Shaw e também caracteriza a regularidade desta solução.

Dados $c, p, q \in C_K^{m+\alpha, m+\alpha/3}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$, então

Teorema 3.1. *Se T é suficientemente pequeno, existem ρ e σ tais que*

$$\begin{aligned} \Delta\sigma = -h(c,p,q) \equiv -h(x,t) \ \text{em } \Omega_t, \\ \sigma = \gamma\kappa, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial n} = -V_n \ \text{em } \Gamma_t. \end{aligned} \tag{3.1}$$

para $0 \leq t \leq T$. *Com* $\rho_t|_{t=0} = r_0$ *e*

$$D_s D^m_{(s,t)}\rho \in C^{3+\alpha,(3+\alpha)/3}(\mathbb{R}^{N-1} \times [0,T]), \tag{3.2}$$

$$D^2_x D^m_{(x,t)}\sigma \in C^{\alpha,\alpha/3}_K(\mathbb{R}^N \times [0,T]). \tag{3.3}$$

onde

$$\Gamma_t = \partial\Omega_t, \quad \Gamma_t = \{s + \rho(s,t)\vec{n}(s); s \in \Gamma_0\}, \forall t \in [0,T].$$

Demonstração. Primeiro, observe que as condições (2.14) e (2.15) garantem que $h(x,t)$ tem suporte compacto e que $h(x,t) \in C^{m+\alpha,m+\alpha/3}(\mathbb{R}^N \times [0,T])$.

A prova da existência e unicidade de $\rho \in C^{3+\alpha,(3+\alpha)/3}$ é extensa e por isso está apresentada separadamente no Capítulo 5. Esta é uma adaptação dos resultados apresentados em Chen *et al.* [19] e exige apenas que a fronteira Γ_0 pertença à classe $C^{3+\alpha}$.

Demonstremos agora a regularidade de ρ e σ indicadas em (3.2) e (3.3).

Para cada $t \in [0,T]$, fixamos $s_0 \in \Gamma_0$ e escrevemos (3.1) em termos da variável y definida do início desta seção

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^{N} (a^\rho_{ij}(t)\sigma_{y_i})_{y_j} + \sum_{i=1}^{N} a^\rho_i(t)\sigma_{y_i} = h \text{ em } \{y \in U, y_N > 0\}, \\ &\sigma = \sum_{i,j=1}^{N-1} b_{ij}(t)^\rho \rho_{y_i y_j} + b(t)^\rho \text{ em } \{y \in U; y_N = 0\} \end{aligned}$$

Como $h \in C^{m+\alpha,m+\alpha/3}$, $\rho \in C^{3+\alpha,(3+\alpha)/3}$ e σ é solução do problema elíptico acima segue que $D_y\sigma \in C^{\alpha,\alpha/3}(\overline{U} \times [0,T])$ (na prova do Lema 3.1 da próxima seção, que trata sobre regularidade elíptica, temos a demonstração de tal fato). Por definição, ∂U tem a mesma regularidade de Γ_0, então o Lema 2.1 de extensão apresentado na Seção 2.2, garante que podemos estender a função σ ao $\mathbb{R}^N$ de forma que $\sigma \in C_K^{\alpha,\alpha/3}(\mathbb{R}^N \times [0,T])$, pois uma vez que h possui suporte em K as equações de (3.1) garantem que σ também possui suporte em K. No que segue σ denotará a função estentida.

Denote por G a solução fundamental do operador Laplaciano (veja Evans [11], Cap. 2). Uma vez que h tem suporte compacto, a convolução $G * h$ está bem definida e $D_x^2(G * h) \in C^{m+\alpha,m+\alpha/3}(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ (veja Gilbarg-Trudinger [5], Cap. 4). Seja

$$\tilde{\sigma} = \sigma + G * h$$

Então

$$\Delta\tilde{\sigma} = \gamma\kappa + G * h, \qquad -V_n = \frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial n} - \vec{n} \cdot (\nabla G * h) \text{ em } \Gamma_t,$$

Para cada $t \in [0,T]$, novamente fixando $s_0 \in \Gamma_0$ e escrevendo (3.1) em termos da variável y temos

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{N} (a_{ij}^{\rho}(t)\tilde{\sigma}_{y_i})_{y_j} + \sum_{i=1}^{N} a_i^{\rho}(t)\tilde{\sigma}_{y_i} = 0 \text{ em } \{y_N > 0\}, \\ \tilde{\sigma} = \sum_{i,j=1}^{N-1} b_{ij}(t)^{\rho}\rho_{y_iy_j} + b(t)^{\rho} + G * h \text{ em } \{y_N = 0\}, \\ \rho_t = \sum_{i=1}^{N} l_i^{\rho}(t)\frac{\partial}{\partial y_i}(\tilde{\sigma} - G * h) \text{ em } \{y_N = 0\}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

onde

$$a_{ij}^{\rho}(t) = a_{ij}(D_{y'}\rho), \quad a_i^{\rho}(t) = a_i(D_{y'}^2\rho), \quad b_{ij}^{\rho}(t) = b_{ij}(D_{y'}\rho),$$
$$b^{\rho}(t) = b(D_{y'}\rho), \quad l_i^{\rho}(t) = l_i(D_{y'}\rho).$$

Em particular, para $\rho = 0, y' = 0$ e $y_N = 0$

$$a_{ij}(t) = \delta_{ij}, \quad a_i(t) = 0, \quad b_{ij}(t) = \delta_{ij}, \quad b(t) = \gamma\kappa(s_0), \quad l_i(t) = \delta_{Ni}.$$

Mostremos, por indução, que

$$D_s D_{(s,t)}^{m'}\rho \in C^{3+\alpha,(3+\alpha)/3}(\mathbb{R}^{N-1} \times [0,T]) \text{ e } D_x^2 D_{(x,t)}^{m'}\tilde{\sigma} \in C_K^{\alpha,\alpha/3}(\mathbb{R}^N \times [0,T]) \quad \forall m' \leq m. \tag{3.5}$$

Para $m' = 0$. Seja $\beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_N)$ com $\beta_0 = \beta_N = 0$, $|\beta| = 1$. Como $\rho \in C^{3+\alpha,(3+\alpha)/3}$ e $D_y\sigma \in C_K^{\alpha,\alpha/3}$, podemos derivar o sistema (3.4) e concluir que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{N} [a_{ij}^{\rho}(D^{\beta}\tilde{\sigma}_{y_i})]_{y_j} = div\vec{G}_1 \text{ em } \{y_N > 0\}, \\
&D^{\beta}\tilde{\sigma} = \sum_{i,j=1}^{N-1} b_{ij}^{\rho}(D^{\beta}\rho)_{y_i y_j} + G_2 \text{ em } \{y_N = 0\}, \\
&(D^{\beta}\rho)_t = \sum_{i=1}^{N} l_i^{\rho}\frac{\partial}{\partial y_i}(D^{\beta}\tilde{\sigma}) + G_3 \text{ em } \{y_N = 0\}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

onde

$$\begin{aligned}
&\vec{G}_1 = \vec{G}_1(D_y\sigma, D_{y'}^2\rho) \in C^{\alpha,\alpha/3}, \\
&G_2 = G_2(D_x(G * h), D_{y'}^2\rho) \in C^{1+\alpha,(1+\alpha)/3}, \\
&G_3 = G_3(D_x^2(G * h), D_{y'}^2\rho, \sigma) \in C^{1+\alpha,(1+\alpha)/3}.
\end{aligned}$$

Como $\Gamma_0 \in C^{m+4+\alpha}$, o estudo do Problema Modelo na Seção 5.2 do Capítulo 5 implica que

$$D^\beta \rho \in C^{3+\alpha,(3+\alpha)/3}, \qquad D_y D^\beta \tilde{\sigma} \in C_K^{\alpha,\alpha/3}.$$

A asserção acima junto com as equações de (3.6) implicam que

$$D_s \rho \in C^{3+\alpha,(3+\alpha)/3}(\mathbb{R}^{N-1} \times [0,T]), \qquad D_x^2 \tilde{\sigma} \in C_K^{\alpha,\alpha/3}(\mathbb{R}^N \times [0,T]).$$

o que demonstra (3.5) para $m' = 0$.

Suponha agora que (3.5) seja válido para $0 \le m' - 1 \le m$, ou seja

$$D_s D_{(s,t)}^{(m'-1)} \rho \in C^{3+\alpha,(3+\alpha)/3}(\mathbb{R}^{N-1} \times [0,T]), \qquad D_x^2 D_{(x,t)}^{(m'-1)} \tilde{\sigma} \in C_K^{\alpha,\alpha/3}(\mathbb{R}^N \times [0,T]). \quad (3.7)$$

mostremos que vale também para $m' \le m$.

Seja $\beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_N)$ com $|\beta| = m' + 1$, $\beta_0 \le m'$, $\beta_N = 0$. A reguralidade de ρ e $\tilde{\sigma}$ garantida em (3.7) nos permite concluir, através de (3.4), que $(D^\beta \tilde{\sigma}, D^\beta \rho)$ é solução de

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{N} [a_{ij}^{\rho}(D^\beta \tilde{\sigma}_{y_i})]_{y_j} &= div \vec{G}_1 \text{ em } \{y_N > 0\}, \qquad (3.8)\\ D^\beta \tilde{\sigma} &= \sum_{i,j=1}^{N-1} b_{ij}^{\rho} (D^\beta \rho)_{y_i y_j} + G_2 \text{ em } \{y_N = 0\},\\ (D^\beta \rho)_t &= \sum_{i=1}^{N} l_i^{\rho} \frac{\partial}{\partial y_i}(D^\beta \tilde{\sigma}) + G_3 \text{ em } \{y_N = 0\}. \end{aligned}$$

onde

$$\vec{G}_1 = \vec{G}_1(D_y D^{m'}\sigma, D^2_{y'} D^{m'}\rho),$$
$$G_2 = G_2(D_x D^{m'}(G * h), D^2_{y'} D^{m'}\rho),$$
$$G_3 = G_3(D^2_x D^{m'}(G * h), D^2_{y'} D^{m'}\rho, D^{m'}\sigma),$$

sendo que usamos as abreviações como $D^{m'}\sigma = \{D^\lambda \sigma; |\lambda| \leq m'\}$ para descrever as formas de $\vec{G}_1, G_2$ e G_3.

Novamente pelas estimativas de Hölder para o Problema Modelo apresentado na Seção 5.2 do Capítulo 5, como $\Gamma_0 \in C^{4+m+\alpha}$, $D^2_x(G * h) \in C^{m+\alpha, m+\alpha/3}$ e, por hipótese indutiva, (3.7) é válido, deduzimos que

$$D^\beta \rho \in C^{3+\alpha,(3+\alpha)/3}(\mathbb{R}^{N-1} \times [0,T]), \qquad D_y D^\beta \tilde{\sigma} \in C^{\alpha,\alpha/3}_K(\mathbb{R}^N \times [0,T]),$$

para todo β como acima, então

$$D_s D^{m'}_{(s,t)} \rho \in C^{3+\alpha,(3+\alpha)/3}(\mathbb{R}^{N-1} \times [0,T]), \text{ e } D^2_x D^{m'}_{(x,t)} \tilde{\sigma} \in C^{\alpha,\alpha/3}_K(\mathbb{R}^N \times [0,T]) \quad m' \leq m.$$

o que demonstra (3.2) e (3.3). □

3.2 O Problema Elíptico

Para cada $t \in [0,T]$ considere o seguinte problema elíptico para $\bar{c}$

$$\Delta \bar{c} - \lambda \bar{c} = 0 \text{ em } \Omega_t, \qquad (3.9)$$
$$\bar{c} = 1 \text{ em } \Gamma_t.$$

A teoria de equações elípticas (Teorema 2.3) garante, para cada $t \in [0,T]$, existência de solução única $\bar{c}(t) = \bar{c}(\cdot, t)$ para (3.9) com a mesma regularidade de Γ_t. Porém, dado que o resultado que desejamos demonstrar determina a regularidade no tempo da função $\bar{c} = \bar{c}(x,t)$ é conveniente tomar as cartas locais $Z^{s_0}(t)$, definidas na seção anterior, em torno de $s_0 \in \Gamma_0$, e reescrever (3.9) na forma

$$\sum_{i,j=1}^{N} \hat{a}_{ij}(y,t)\bar{c}_{y_i y_j}(y,t) + \sum_{i=1}^{N} \hat{b}_i(y,t)\bar{c}_{y_i}(y,t) - \lambda\bar{c}(y,t) = 0 \tag{3.10}$$
$$\text{para } \{y \in U, y_N > 0\} \text{ e } t \in [0,T],$$
$$\bar{c}(y,t) = 1 \text{ para } \{y \in U, y_N = 0\} \text{ e } t \in [0,T].$$

onde

$$\hat{a}_{ij}(t) = \hat{a}_{ij}(D_s\rho), \quad \hat{b}_i(t) = \hat{b}_i(D_s^2\rho).$$

Para fórmulas específicas de $\hat{a}_{ij}(t)$ e $\hat{b}_i(t)$ veja Apêndice A.

Note que os coeficientes do operador elíptico $L = -\Delta$ associado ao sistema (3.9) não dependem do tempo, mas as equações do sistema valem em domínios diferentes. Já no sistema (3.10), os coeficientes do operador variam com o tempo mas o domínio em questão é fixo.

Enunciemos agora um resultado sobre a regularidade da solução de (3.10).

Lema 3.1. *O sistema (3.9) possui solução única $\bar{c}$, esta possu iextensão ao $\mathbb{R}^N$ que satisfaz*

$$\bar{c} \in C_K^{m+1+\alpha, m+1+\alpha/3}(\mathbb{R}^N \times [0,T]).$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.1 temos que $D_s D_{(s,t)}^m \rho \in C^{3+\alpha,(3+\alpha)/3}(\mathbb{R}^{N-1} \times [0,T])$. Então os coeficientes $\hat{a}_{ij}(t) = \hat{a}_{ij}(D_s\rho)$ e $\hat{b}_i(t) = \hat{b}_i(D_s^2\rho)$, $i,j = 1,\ldots,N$ (as fórmulas específicas encontram-se no Apêndice A) são uniformementes limitados no tempo e pertencem a $C^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}(U \times [0,T])$.

Por definição, ∂U possui a mesma regularidade de Γ_0, ou seja, pertence à classe $C^{4+m+\alpha}$, como $\hat{a}_{ij}(t), \hat{b}_i(t) \in C^{2+\alpha}(U), \forall t \in [0,T]$, segue do Teorema 2.3 de equações elípticas que para cada $t \in [0,T]$ existe solução única $\bar{c}(t)$ para o problema (3.10) e

$$\bar{c}(t) \in C^{4+\alpha}(\overline{U}).$$

A desigualdade (2.13) implica, para cada $t \in [0,T]$, que

$$\|\bar{c}(t)\|_{4+\alpha;U} \leq k(L_t)\big[\max_{x\in U}|\bar{c}(x,t)|+1\big].$$

Pelo Princípio do Máximo para operadores elípticos (Teorema 2.4, na Seção Preliminares) temos $\|\bar{c}(t)\|_{0;U} \leq 1$ e portanto

$$\|\bar{c}(t)\|_{4+\alpha;U} \leq k(L_t) \quad \forall t \in [0,T],$$

onde $k = k(L_t)$ depende apenas da constante de elipticidade $\nu(t)$ e das normas $C^{2+\alpha}$ dos coeficientes do operador elíptico $L_t u = \sum_{i,j=1}^{N} \hat{a}_{ij}(t) u_{y_i y_j} + \sum_{i=1}^{N} \hat{b}_i(t) u_{y_i} - \lambda u$. Como a constante de elipticidade e as normas dos coeficientes operador L_t são uniformemente limitadas no tempo, segue que

$$\|\bar{c}(t)\|_{4+\alpha;U} \leq K \quad \forall t \in [0,T], \tag{3.11}$$

onde K é uma constante independente do tempo.

Agora vamos obter estimativas de Hölder no tempo para $\bar{c}(y,t) = \bar{c}(t)(y)$. Para isso, tome $t_1 \neq t_2, t_1, t_2 \in [0,T]$. Utilizando o sistema (3.10) e fazendo algumas manipulações algébricas, temos

$$
\begin{gathered}
L_{t_1}\Big[\frac{\bar{c}(y,t_1)-\bar{c}(y,t_2)}{|t_1-t_2|^{\alpha/3}}\Big] = \\
-\sum_{i,j=1}^{N}\Big(\frac{\hat{a}_{ij}(y,t_1)-\hat{a}_{ij}(y,t_2)}{|t_1-t_2|^{\alpha/3}}\Big)\bar{c}(y,t_2)-\sum_{i=1}^{N}\Big(\frac{\hat{b}_i(y,t_1)-\hat{b}_i(y,t_2)}{|t_1-t_2|^{\alpha/3}}\Big)\bar{c}(y,t_2) \\
\frac{\bar{c}(y,t_1)-\bar{c}(y,t_2)}{|t_1-t_2|^{\alpha/3}} = 0 \text{ em } \{y\in U; y_N=0\}.
\end{gathered} \tag{3.12}
$$

Lembrando que $\hat{a}_{ij}, \hat{b}_i \in C^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}$ e que $\|\bar{c}(t)\|_{4+\alpha} \le K$ concluímos

$$
D_x^2\bar{c} \in C^{\alpha,\alpha/3}(\overline{U}\times[0,T]). \tag{3.13}
$$

Agora mostremos por indução que

$$
D_xD^{m'}D_x^2\bar{c}, D_xD^{m'}D_t\bar{c} \in C^{\alpha,\alpha/3}(\overline{U}\times[0,T]) \text{ para } m'=0,\ldots,m. \tag{3.14}
$$

I.1 - Para m'=0: Seja $\beta=(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_{N-1},0)$. Tomando $\beta_0=0$ e $|\beta|=1$, pelo sistema (3.10) temos (lembre que $\bar{c}(t)\in C^{4+\alpha}, \forall t\in[0,T]$)

$$
\begin{gathered}
\sum_{i,j=1}^{N}\hat{a}_{ij}(D^\beta\bar{c})_{y_iy_j} = F(D_s^3\rho, D_y^2\bar{c}) \text{ em } \{y\in U; y_N>0\} \text{ e } t\in[0,T], \\
D^\beta\bar{c} = 0 \text{ em } \{y\in U; y_N=0\} \text{ e } t\in[0,T].
\end{gathered}
$$

Uma vez que $D_sD_{(s,t)}^m\rho \in C^{3+\alpha,(3+\alpha)/3}(\mathbb{R}^{N-1}\times[0,T])$, por (3.13) segue que $F\in C^{\alpha,\alpha/3}(U\times[0,T])$. Usando procedimento análogo ao usado para obter (3.13) concluímos

$$
D_x^2D_x\bar{c}, D_tD_x\bar{c} \in C^{\alpha,\alpha/3}(\overline{U}\times[0,T]).
$$

I.2 - (3.14) para $0 \leq (m'-1) \leq m \Rightarrow$ **(3.14) para** $m' \leq m$**:** Por hipótese, temos

$$D_x D^{(m'-1)} D_x^2 \bar{c}, D_x D^{(m'-1)} D_t \bar{c} \in C^{\alpha,\alpha/3}(\overline{U} \times [0,T]) \text{ para } m' = 0, \dots, m.$$

Seja $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{N-1}, 0)$, com $|\beta| \leq m'+1$ e $|\beta_0| \leq m'$. Pela estimativa acima, podemos derivar o sistema (3.10) e concluir que $D^\beta \bar{c}$ é solução de

$$\sum_{i,j=1}^{N} \hat{a}_{ij} (D^\beta \bar{c})_{y_i y_j} = F(D_s^3 D^{m'} \rho, D_y^2 D^{m'} \bar{c}) \text{ em } \{y \in U; y_N > 0\} \text{ e } t \in [0,T],$$
$$D^\beta \bar{c} = 0 \text{ em } \{y \in U; y_N = 0\} \text{ e } t \in [0,T],$$

com $F \in C^{\alpha,\alpha/3}$. De maneira analoga ao caso $I.1$, obtemos

$$D_x^2 D_x D^{m'} \bar{c}, D_t D_x D^{m'} \bar{c} \in C^{\alpha,\alpha/3}(\overline{U} \times [0,T]).$$

Portanto, pelos passos indutivos $I.1$ e $I.2$, demonstramos que (3.14) é válido. Pelo Lema 2.1 referente a extensão de funções apresentado na Seção 2.2 de Preliminares, segue que (3.9) possui solução única $\bar{c}$ e esta satisfaz

$$D_x D^m D_x^2 \bar{c}, D_x D^m D_t \bar{c} \in C_K^{\alpha,\alpha/3}(\mathbb{R}^N \times [0,T]).$$

pois temos que $\overline{\Omega}_t \Subset K$, para todo $t \in [0,T]$.

$\square$

3.3 O Problema Hiperbólico

Tome $c \in C_K^{m+\alpha, m+\alpha/3}(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ e seja σ a solução do problema de Hele-Shaw exposto na Seção 3.1, cuja regularidade garantida pelo Teorema 3.1 é

$$D_x^2 D_{(x,t)}^m \sigma \in C_K^{\alpha,\alpha/3}(\mathbb{R}^N \times [0,T]).$$

Nesta seção, resolveremos o seguinte sistema hiperbólico para $(\bar{p},\bar{q})$

$$\begin{aligned} &\bar{p}_t - \nabla\sigma\cdot\nabla\bar{p} = f(c,\bar{p},\bar{q}) \text{ em } \mathbb{R}^N \times [0,T], \\ &\bar{q}_t - \nabla\sigma\cdot\nabla\bar{q} = g(c,\bar{p},\bar{q}) \text{ em } \mathbb{R}^N \times [0,T], \\ &\bar{p}|_{t=0} = p_0,\ \bar{q}|_{t=0} = q_0 \text{ em } \mathbb{R}^N \times [0,T]. \end{aligned} \tag{3.15}$$

com

$$p_0, q_0 \in C_K^{m+1+\alpha}(\mathbb{R}^N).$$

De fato, o lema abaixo garante existência de solução única para o sistema e o lema seguinte determina a regularidade da mesma.

Lema 3.2. *Seja $\vec{w} = (w_1, w_2)$. Considere o sistema hiperbólico de duas equações*

$$\begin{aligned} &\vec{w}_t + (\vec{b}\cdot\nabla_x)\vec{w} = G(x,t,\vec{w}) \ \textit{em } \mathbb{R}^N \times [0,T]. \\ &\vec{w}|_{t=0} = \vec{w}_0 \ \textit{em } \mathbb{R}^N, \end{aligned} \tag{3.16}$$

e assuma que

$$\begin{aligned} &D_x\vec{b}, D_x G \in C^{\alpha_1,\alpha_2}(\mathbb{R}^N \times [0,T]), \\ &D_{\vec{w}} G \in L^\infty(\mathbb{R}^N \times [0,T]), \\ &D_x \vec{w}_0 \in C^{\alpha_1}(\mathbb{R}^N), \end{aligned}$$

com $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1)$ e também que $\vec{b}$ e G possuem suporte compacto.

Então existe solução única de (3.16) e esta é tal que

$$\vec{w}_t, D\vec{w} \in C^{\alpha_1,\alpha_2}(\mathbb{R}^N \times [0,T]).$$

Demonstração. É feita utilizando o Método das Características.

Seja $\overline{V}$ tal que $supp\{\vec{b}\} \subset\subset \overline{V} \times [0,T]$, onde $supp\{\vec{b}\}$ é o suporte de $\vec{b}$. Para cada $x \in \overline{V}$ seja $X(x,\cdot)$ a solução de

$$\frac{d}{dt}X(x,t) = \vec{b}(X(x,t),t), \qquad X(x,0) = x.$$

O Teorema 2.1 de Picard-Lindelöf de existência e unicidade para equações ordinárias garante que X está bem definida para $t \in [0,T]$. Já o Teorema 2.2 de regularidade de solução de uma EDO em relação aos dados iniciais garante que a função $X = X(x,t)$ tem a mesma regularidade do que $\vec{b}$ em $V_x \times [0,T]$ onde V_x é uma vizinhança de x. Tomando subcobertura finita $\{V_{x_1},\ldots,V_{x_k}\}$ de $\overline{V}$, novamente pelos teoremas de existência e regularidade de solução para uma EDO, segue que $X = X(x,t)$ tem a mesma regularidade que $\vec{b}$ em $V \times [0,T]$ e

$$\frac{d}{dt}X(x,t) = \vec{b}(X(x,t),t), \qquad X(x,0) = x, \text{ para } x \in V, t \in [0,T].$$

Seja $\xi = \xi(\cdot,t)$ a inversa de $X(\cdot,t)$, ie, $x = X(\xi(x,t),t)$. (Como X tem a mesma regularidade de $\vec{b}$, $DX(x,0) = I$ e $D_x\vec{b} \in C^{\alpha_1,\alpha_2}(\mathbb{R}^N \times [0,T])$, o teorema da função inversa garante que ξ está bem definida para $t \in [0,T]$ suficientemente pequeno).

Então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial X}{\partial \xi}\Big) &= D_s\vec{b}\frac{\partial X}{\partial \xi}, \quad 0 \le t \le T, \\ \frac{\partial X}{\partial \xi}\Big|_{t=0} &= I. \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\Big(\frac{\partial X}{\partial \xi}\Big)^{-1}\right) = -\Big(\frac{\partial X}{\partial \xi}\Big)D_x\vec{b}.$$

E também,

$$\left\|\frac{\partial X}{\partial \xi}\right\|_{L^\infty}, \left\|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial X}{\partial \xi}\right\|_{L^\infty}, \left\|\frac{\partial \xi}{\partial X}\right\|_{L^\infty} \le C.$$

Similarmente, seja $\vec{U}(x,\cdot)$ a solução de

$$\frac{d}{dt}\vec{U}(x,t) = \vec{G}(x,t,\vec{U}(x,t)), \qquad \vec{U}(x,0) = \vec{w}_0(x).$$

Então

$$\left\|\frac{\partial \vec{U}}{\partial \xi}\right\|_{L^\infty}, \left\|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{U}}{\partial \xi}\right\|_{L^\infty} \le C.$$

Defina $w(x,t) = U(\xi(x,t),t)$, ou seja, $w(X(x,t),t) = U(x,t)$. Então w satisfaz o sistema (3.16).

Agora vamos estabelecer as estimativas de Hölder para X, U e, portanto, para w.

Primeiro consideremos a variável espacial. Para $\xi_1 \neq \xi_2$ temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(X_\xi(\xi_1,t) - X_\xi(\xi_2,t)) &= D_x\vec{b}(X(\xi_1,t),t)\{X_\xi(\xi_1,t) - X_\xi(\xi_2,t)\}\\ &+X_\xi(\xi_2,t)\{D_x\vec{b}(X(\xi_1,t),t) - D_x\vec{b}(X(\xi_2,t),t)\}.\end{aligned}$$

Usando o teorema do valor médio para X temos

$$\begin{aligned}|D_x\vec{b}(X(\xi_2,t),t) - D_x\vec{b}(X(\xi_1,t),t)| &\le \|D_x\vec{b}\|_{\alpha_1,0}|X(\xi_2,t) - X(\xi_1,t)|^{\alpha_1}\\ &\le K\|X_\xi\|_{L^\infty}|\xi_2 - \xi_1|^{\alpha_1} \le C|\xi_2 - \xi_1|^{\alpha_1}.\end{aligned}$$

Pelas duas relações acima segue que

$$\frac{d}{dt}(X_\xi(\xi_1,t) - X_\xi(\xi_2,t)) \le C_1(X_\xi(\xi_1,t) - X_\xi(\xi_2,t)) + C_2|\xi_2 - \xi_1|^{\alpha_1}.$$

Utilizando a desigualdade de Gronwall e o fato de que $X_\xi|_{t=0} = I$, concluímos que

$$|(X_\xi(\xi_1,t) - X_\xi(\xi_2,t))| \leq K(|\xi_2 - \xi_1| + |\xi_2 - \xi_1|^{\alpha_1}).$$

Como X tem suporte compacto e $0 < \alpha_1 < 1$ segue que

$$|(X_\xi(\xi_1,t) - X_\xi(\xi_2,t))| \leq \tilde{K}|\xi_2 - \xi_1|^{\alpha_1}. \tag{3.18}$$

Agora tome $t_1, t_2 \in [0,T]$, $t_1 < t_2$ e integre a equação (3.17) de t_1 a t_2. Temos

$$\begin{aligned} |X_\xi(\xi,t_2) - X_\xi(\xi,t_1)| &= \left|\int_{t_1}^{t_2} D_x\vec{b}(X(\xi,t),t)X_\xi(\xi,t)dt\right| \\ &\leq (t_2 - t_1)\|D_x\vec{b}\|_0\|X_\xi\|_{L^\infty} \leq K|t_1 - t_2|^{\alpha_2}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Por (3.18) e (3.19) segue que

$$|X_\xi(\xi_2,t_2) - X_\xi(\xi_1,t_1)| \leq K(|\xi_1 - \xi_2|^{\alpha_1} + |t_1 - t_2|^{\alpha_2}).$$

Usando os fatos de que $\|\frac{\partial \xi}{\partial X}\|_{L^\infty} \leq C$, $\xi_x = X_\xi^{-1}$ e a relação matricial

$$A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1}, \qquad ,$$

obtemos

$$|\xi_x(x_1,t_1) - \xi_x(x_2,t_2)| \leq K(|\xi_1 - \xi_2|^{\alpha_1} + |t_1 - t_2|^{\alpha_2}). \tag{3.20}$$

Afirmação: $|\xi_2 - \xi_1| = |\xi(x_1,t_1) - \xi(x_2,t_2)| \leq C(|x_1 - x_2| + |t_1 - t_2|)$.

Segue da equação (3.20) e da afirmação (que está demonstrada abaixo) que

$$|\xi_x(x_1,t_1) - \xi_x(x_2,t_2)| \leq K(|x_1 - x_2|^{\alpha_1} + |t_1 - t_2|^{\alpha_2}).$$

De maneira análoga, prova-se que

$$|\vec{U}_\xi(\xi_1,t_1) - \vec{U}_\xi(\xi_2,t_2)| \leq K(|\xi_1 - \xi_2|^{\alpha_1} + |t_1 - t_2|^{\alpha_2}).$$

E portanto

$$\vec{w}_x = \vec{U}_\xi \xi_x \in C^{\alpha_1,\alpha_2}(\mathbb{R}^N \times [0,T]), \qquad \vec{w}_t = \vec{G} - (\vec{b} \cdot \nabla_x)\vec{w} \in C^{\alpha_1,\alpha_2}(\mathbb{R}^N \times [0,T]).$$

Demonstração da afirmação: Seja $\xi_1 \neq \xi_2$, $\xi_1 = \xi(x_1,t_1)$ e $\xi_2 = \xi(x_2,t_2)$. Integrando de 0 a t_1 a equação

$$\frac{d}{dt}X(\xi_1,t) = \vec{b}(X(\xi_1,t),t),$$

temos

$$x_1 - \xi_1 = \int_0^{t_1} \vec{b}(X(\xi_1,t),t)dt. \tag{3.21}$$

Integrando de 0 a t_2 a equação

$$\frac{d}{dt}X(\xi_2,t) = \vec{b}(X(\xi_2,t),t),$$

temos

$$x_2 - \xi_2 = \int_0^{t_2} \vec{b}(X(\xi_2,t),t)dt. \tag{3.22}$$

Subtraindo (3.21) de (3.22) temos

$$\xi_1 - \xi_2 = x_1 - x_2 + \int_0^{t_1} [\vec{b}(X(\xi_2,t),t) - \vec{b}(X(\xi_1,t),t)]dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{b}(X(\xi_2,t),t)dt. \tag{3.23}$$

O teorema do valor médio e o fato de que $\|\frac{\partial X}{\partial \xi}\|_{L^\infty} \leq C$ implicam

$$\begin{aligned} &\|\vec{b}(X(\xi_2,t),t) - \vec{b}(X(\xi_1,t),t)\| = \\ &= \frac{\|\vec{b}(X(\xi_2,t),t) - \vec{b}(X(\xi_1,t),t)\|}{|X(\xi_2,t) - X(\xi_1,t)|} \frac{|X(\xi_2,t) - X(\xi_1,t)|}{|\xi_2 - \xi_1|} |\xi_2 - \xi_1| \\ &\leq \|D_x \vec{b}\|_0 \|X_\xi\|_{L^\infty} |\xi_2 - \xi_1| \\ &\leq C|\xi_2 - \xi_1|. \end{aligned}$$

Pela desigualdade acima e a igualdade (3.23) temos

$$|\xi_1 - \xi_2| \leq |x_1 - x_2| + TC|\xi_1 - \xi_2| + |t_2 - t_1| \|\vec{b}\|_0.$$

Tomando T suficientemente pequeno de forma que $TC \leq 1/2$ conclui-se a demonstração da afirmação. □

O lema que segue tem o propósito de determinar a regularidade da solução $(\bar{p}, \bar{q})$ do Problema Hiperbólico (3.15) exposto no início desta seção.

Lema 3.3. *Seja $(\bar{p}, \bar{q})$ solução para o Problema Hiperbólico (3.15), então*

$$\bar{p}, \bar{q} \in C_K^{m+1+\alpha, m+1+\alpha/3}(\mathbb{R}^N \times [0,T]).$$

Demonstração. Usando (2.14) e (3.3), ou seja, que $f, g \in C_K^{m+1}$ e σ é tal que $D_x^2 D^m \sigma \in C_K^{\alpha,\alpha/3}(\mathbb{R}^N \times [0,T])$, aplicaremos o resultado do Lema 3.2 indutivamente para mostrar que

$$D^\beta \bar{p}_t, D^\beta D_x \bar{p}, D^\beta \bar{q}_t, D^\beta D_x \bar{q} \in C_K^{\alpha,\alpha/3}(\mathbb{R}^N \times [0,T]), \tag{3.24}$$

para $|\beta| \leq m$. E, portanto

$$\bar{p}, \bar{q} \in C_K^{m+1+\alpha, m+1+\alpha/3}(\mathbb{R}^N \times [0,T]).$$

De fato, para $|\beta| = 0$ o resultado é aplicação imediata do Lema 3.2 para $\alpha_1 = \alpha$ e $\alpha_2 = \alpha/3$.

Agora suponha que o resultado seja válido para $|\gamma| \leq m-1$, mostremos que vale para $|\beta| = m$.

Como, por hipótese, $D^\gamma \bar{p}_t, D^\gamma D_x \bar{p}, D^\gamma \bar{q}_t, D^\gamma D_x \bar{q} \in C_K^{\alpha,\alpha/3}(\mathbb{R}^N \times [0,T])$, podemos derivar as equações de (3.15). Obtemos:

$$\begin{aligned}
&(D^\gamma \bar{p})_t - \nabla\sigma \cdot \nabla(D^\gamma \bar{p}) = \overline{F}_1 \text{ em } \mathbb{R}^N \times [0,T],\\
&(D^\gamma \bar{q})_t - \nabla\sigma \cdot \nabla(D^\gamma \bar{q}) = \overline{F}_2 \text{ em } \mathbb{R}^N \times [0,T],\\
&D^\gamma \bar{p}|_{t=0} = 0, \quad D^\gamma \bar{q}|_{t=0} = 0 \text{ em } \mathbb{R}^N.
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\overline{F}_1 &= D^\gamma f - \sum_{\substack{|\mu|\geq 1\\ \mu\leq\gamma}} \binom{\gamma}{\mu} \nabla D^\mu \sigma \cdot \nabla D^{\gamma-\mu}\bar{p},\\
\overline{F}_2 &= D^\gamma g - \sum_{\substack{|\mu|\geq 1\\ \mu\leq\gamma}} \binom{\gamma}{\mu} \nabla D^\mu \sigma \cdot \nabla D^{\gamma-\mu}\bar{q}.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.2 para $\alpha_1 = \alpha$ e $\alpha_2 = \alpha/3$ segue que

$$(D^\gamma \bar{p})_t, D(D^\gamma \bar{p}), (D^\gamma \bar{q})_t, D(D^\gamma \bar{q}) \in C_K^{\alpha,\alpha/3}(\mathbb{R}^N \times [0,T]).$$

portanto, (3.24) é válido para $|\beta| = m$, conforme desejado. $\square$

Capítulo 4

Existência e Unicidade de Soluções do Problema de Fronteira Livre

Conforme discutido na Introdução, estamos interessados em encontrar domínios $\{\Omega_t, t \in [0,T]\}$ e funções c, p, q e σ que satisfaçam o sistema

$$
\begin{aligned}
&\Delta c - \lambda c = 0 \ \text{ em } \Omega_t,\\
&\frac{\partial p}{\partial t} - \nabla\sigma \cdot \nabla p = f(c,p,q) \ \text{ em } \Omega_t,\\
&\frac{\partial q}{\partial t} - \nabla\sigma \cdot \nabla q = g(c,p,q) \ \text{ em } \Omega_t,\\
&\Delta \sigma = -h(c,p,q) \ \text{ em } \Omega_t,
\end{aligned}
$$

com as seguintes condições de fronteira e iniciais:

$$
\begin{gathered}
c = 1 \ \text{ em } \Gamma_t,\\
\sigma = \gamma\kappa \ \text{ em } \Gamma_t,\\
\frac{\partial \sigma}{\partial n} = -V_n \ \text{ em } \Gamma_t,\\
p(x,0) = p_0(x), \ q(x,0) = q_0(x).
\end{gathered}
$$

onde como antes $\Gamma_t = \partial\Omega_t$, γ é uma constante positiva, κ é a curvatura média, $\dfrac{\partial}{\partial n}$ é a derivada na direção $\vec{n}$ da normal unitária exterior e V_n é a velocidade da fronteira livre Γ_t na direção $\vec{n}$ e f, g e h funções dadas como no enunciado do Teorema 2.5.

Uma técnica bastante comum para encontrar solução de um sistema de equações diferenciais, é dividi-lo em subsistemas, encontrar solução única para cada um desses e depois, utilizando resultados de ponto fixo, provar que o sistema original possui solução. De fato, iremos utilizar essa técnica e definir uma transformação não-linear W cujos pontos fixos, que serão demonstrados únicos, são solução para o problema original.

O primeiro subsistema é o Problema de Hele-Shaw não-homogêneo que consiste em, dada uma função h, encontrar $\{\sigma, \Omega_t, t \in [0,T]\}$ tais que

$$\begin{aligned}
&\Delta\sigma = -h(x,t) \text{ em } \Omega_t,\\
&\sigma = \gamma\kappa \text{ em } \Gamma_t,\\
&\frac{\partial\sigma}{\partial n} = -V_n \text{ em } \Gamma_t.
\end{aligned}$$

Não por coincidência, este foi o problema considerado na Seção 3.1. O segundo subsistema, que foi considerado na Seção 3.2, é o problema elíptico que consiste em dado $\Omega_t, t \in [0,T]$, encontrar c tal que

$$\begin{aligned}
&\Delta c - \lambda c = 0 \text{ em } \Omega_t,\\
&c = 1 \text{ em } \Gamma_t = \partial\Omega_t.
\end{aligned}$$

Finalmente, o terceiro subsistema é o problema hiperbólico para (p,q), estudado na Seção 3.3, dado por

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial p}{\partial t} - \nabla\sigma \cdot \nabla p = f(c,p,q) \text{ em } \Omega_t,\\
&\frac{\partial q}{\partial t} - \nabla\sigma \cdot \nabla q = g(c,p,q) \text{ em } \Omega_t,\\
&p(x,0) = p_0(x),\ q(x,0) = q_0(x).
\end{aligned}$$

4.1 Definição da transformação W para a qual procuramos ponto fixo

A fim de definir a transformação W, vamos resumir os resultados do Teorema 3.1 e também dos Lemas 3.1 e 3.2 do Capítulo 3 através do seguinte teorema.

Teorema 4.1. *Dados* $\Gamma_0 \in C^{m+4+\alpha}$, $p_0, q_0 \in C_K^{m+1+\alpha}(\mathbb{R}^N)$. *Assumindo que* Γ_t, $t \in [0,T]$, *pode ser representado como*

$$\Gamma_t = \{s + \rho(s,t)\vec{n}(s); s \in \Gamma_0\}.$$

onde $\vec{n}(s)$ *denota o vetor unitário normal exterior a* Γ_0 *em* s *e* $\rho \in C^{3+\alpha,(3+\alpha)/3}(\Gamma_0 \times [0,T])$.

Então existe solução única $\{\sigma, \Omega_t\}_{0 \leq t \leq T}$ *de*

$$\begin{aligned} \Delta\sigma = -h(c,p,q) \equiv -h(x,t) \ \text{em } \Omega_t, \\ \sigma = \gamma\kappa, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial n} = -V_n \ \text{em } \Gamma_t. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Esta solução satisfaz

$$\begin{aligned} D_s D^m_{(s,t)}\rho \in C^{3+\alpha,(3+\alpha)/3}(\mathbb{R}^{N-1} \times [0,T]), \\ D^2_x D^m_{(x,t)}\sigma \in C_K^{\alpha,\alpha/3}(\mathbb{R}^N \times [0,T]). \end{aligned}$$

Também existe solução única $(\bar{c}, \bar{p}, \bar{q})$ *de*

$$\begin{aligned} \Delta\bar{c} - \lambda\bar{c} = 0 \ \text{em } \Omega_t, \\ \bar{c} = 1 \ \text{em } \Gamma_t. \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\bar{p}_t - \nabla\sigma \cdot \nabla\bar{p} = f(c, \bar{p}, \bar{q}) \ \ em\ \mathbb{R}^N \times [0,T],$$

$$\bar{q}_t - \nabla\sigma \cdot \nabla\bar{q} = g(c, \bar{p}, \bar{q}) \ \ em\ \mathbb{R}^N \times [0,T], \tag{4.3}$$

$$\bar{p}|_{t=0} = p_0,\ \bar{q}|_{t=0} = q_0 \ \ em\ \mathbb{R}^N \times [0,T].$$

e esta satisfaz

$$\bar{c}, \bar{p}, \bar{q} \in C_K^{m+1+\alpha, m+1+\alpha/3}(\mathbb{R}^N \times [0,T]).$$

Agora, com a mesma notação do teorema anterior, podemos definir a transformação W.

Definição 2. *Para* $(c,p,q) \in Y_M$ *temos*

$$W((c,p,q)) = (\bar{c}, \bar{p}, \bar{q}),$$

onde $(\bar{c}, \bar{p}, \bar{q})$ *estão definidas no Teorema 4.1.*

Lembrando que Y_M para $M > 0$ (Definição 1), é o cunjunto das funções $(c,p,q) \in [C_K^{m+\alpha,m+\alpha/3}(\mathbb{R}^N \times [0,T])]^3$ tais que

$$\|(c,p,q)\|_{m+\alpha,m+\alpha/3} \leq M$$
$$p|_{\overline{\Omega}_0 \cap \{t=0\}} = p_0,\ q|_{\overline{\Omega}_0 \cap \{t=0\}} = q_0.$$

Os lemas que serão apresentados nas seções a seguir têm como propósito demonstrar que a transformação W possui um único ponto fixo em Y_M.

4.2 Propriedades de W

A primeira propriedade da transformação W que iremos demonstrar é que W mapeia o conjunto Y_M nele mesmo.

Lema 4.1. *$W : Y_M \to Y_M$.*

Demonstração. O Teorema 4.1 garante que $(\bar{c}, \bar{p}, \bar{q}) \in [C_K^{m+1+\alpha, m+1+\alpha/3}(\mathbb{R}^N \times [0, T])]^3$.

Uma vez que $\|(c, p, q)\|_{m+\alpha, m+\alpha/3} \leq M$, da demonstração do Lemas 3.1 e 3.2 segue que

$$\|(\bar{c}, \bar{p}, \bar{q})\|_{m+1+\alpha, m+1+\alpha/3} \leq C(M), \tag{4.4}$$

onde $C(M)$ é uma constante dependendo de M.

Escrevendo $w(x,t) = w(x,0) + \int_0^t w_s(x,s)ds$ para $w = (\bar{c}, \bar{p}, \bar{q})$, temos

$$\begin{aligned} \|(\bar{c}, \bar{p}, \bar{q})\|_{m+\alpha, m+\alpha/3} &\leq \|(\bar{c}(x,0), p_0, q_0)\|_{m+\alpha, m+\alpha/3} + T\|(\bar{c}_t, \bar{p}_t, \bar{q}_t)\|_{m+\alpha, m+\alpha/3} \\ &\leq \|(\bar{c}(x,0), p_0, q_0)\|_{m+\alpha, m+\alpha/3} + T\|(\bar{c}, \bar{p}, \bar{q})\|_{m+1+\alpha, m+1+\alpha/3} \end{aligned}$$

Sendo que a última desigualdade usa o que as funções $\bar{c}, \bar{p}$ e $\bar{q}$ tem suporte compacto no $\mathbb{R}^N$. Segue pelo Princípio do Máximo para operadores elípticos (Teorema 2.4, na Seção Preliminares) que

$$0 \leq \bar{c} \leq 1.$$

Assim, usando a desigualdade (4.4), concluímos que

$$\|(\bar{c}, \bar{p}, \bar{q})\|_{m+\alpha, m+\alpha/3} \leq B(A + TC(M)),$$

onde $A = 1 + \|(p_0, q_0)\|_{C^{m+\alpha}(\mathbb{R}^N)}$ e B é uma constante.

Escolhendo $M = BA + 1$ e tomando $T > 0$ suficientemente pequeno de forma que $BTC(M) < 1$, temos que W mapeia Y_M em Y_M. □

A próxima propriedade de W que iremos verificar é que W é uma contração na norma L^∞. Para isso, vamos introduzir a seguinte notação:

Dados $(c_1, p_1, q_1), (c_2, p_2, q_2) \in Y_M$ sejam

$$h_i = h(c_i, p_i, q_i) \quad (i = 1, 2),$$
$$\hat{h} = h_1 - h_2.$$

Denote por $(\sigma_i, \Omega_{i,t}; 0 \leq t \leq T)$ a solução do Problema de Hele-Shaw não-homogêneo (4.1) referente a (c_i, p_i, q_i) e por $\rho_i(s,t)$ as funções distância associadas a $\Omega_{i,t}, i = 1, 2$. Sejam $\bar{c}_i$ e$(\bar{p}_i, \bar{q}_i)$ as soluções correspondentes dos problemas elíptico (4.2) e hiperbólico (4.3), respectivamente.

A proposição abaixo estima a norma da diferença das funções distância $\rho_1(s,t)$ e $\rho_2(s,t)$ em termos de $\hat{h} = h_1 - h_2$.

Proposição 1. *Seja $\hat{\rho} = \rho_1 - \rho_2$, então existe constante $C > 0$ tal que*

$$\|D_s\hat{\rho}\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} \leq C\|\hat{h}\|_{0,0}.$$

Demonstração. Usando as mesmas coordenadas locais, definidas na Seção 3.1 do Capítulo 3, $Z^{s_0}(t)$ para $i = 1, 2$ e a mesma notação da demonstração do Teorema 3.1, seja

$$\hat{\sigma} = \tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_2.$$

ou seja, para cada $i = 1, 2$ $(\tilde{\sigma}_i, \rho_i)$ satisfaz

$$\sum_{i,j=1}^{N}(a_{ij}^{\rho}(t)\tilde{\sigma}_{y_i})_{y_j} + \sum_{i=1}^{N} a_i^{\rho}(t)\tilde{\sigma}_{y_i} = 0 \text{ em } \{y_N > 0\},$$
$$\tilde{\sigma} = \sum_{i,j=1}^{N-1} b_{ij}(t)^{\rho}\rho_{y_iy_j} + b(t)^{\rho} + G * h \text{ em } \{y_N = 0\},$$
$$\rho_t = \sum_{i=1}^{N} l_i^{\rho}(t)\frac{\partial}{\partial y_i}(\tilde{\sigma} - G * h) \text{ em } \{y_N = 0\}.$$

onde

$$a_{ij}^{\rho}(t) = a_{ij}(D_{y'}\rho), \quad a_i^{\rho}(t) = a_i(D_{y'}^2\rho), \quad b_{ij}^{\rho}(t) = b_{ij}(D_{y'}\rho),$$
$$b^{\rho}(t) = b(D_{y'}\rho), \quad l_i^{\rho}(t) = l_i(D_{y'}\rho).$$

Subtraindo os sistemas acima para $i = 1, 2$ concluímos

$$\sum_{i,j=1}^{N}(a_{ij}^{\rho_1}\hat{\sigma}_{y_i})_{y_j} + \sum_{i=1}^{N} a_i^{\rho_1}\hat{\sigma}_{y_i} = div\vec{f_1} + f_2 \text{ em } \{y_N > 0\}, \tag{4.5}$$
$$\hat{\sigma} = \sum_{i,j=1}^{N-1} b_{ij}^{\rho_1}\hat{\rho}_{y_iy_j} + f_3 \text{ em } \{y_N = 0\},$$
$$\hat{\rho}_t = \sum_{i=1}^{N} l_i^{\rho_1}\frac{\partial}{\partial y_i}\hat{\sigma} + f_4 \text{ em } \{y_N = 0\}.$$

onde

$$
\begin{aligned}
\vec{f}_1 &= \Big(\sum_{i=1}^{N}(a_{i1}^{\rho_2}-a_{i1}^{\rho_1})\tilde{\sigma}_{2y_i},\ldots,\sum_{i=1}^{N}(a_{iN}^{\rho_2}-a_{iN}^{\rho_1})\tilde{\sigma}_{2y_i}\Big),\\
f_2 &= \sum_{i=1}^{N}(a_{i}^{\rho_2}-a_{i}^{\rho_1})\tilde{\sigma}_{2y_i},\\
f_3 &= \sum_{i,j=1}^{N-1}(b_{ij}^{\rho_1}-b_{ij}^{\rho_2})\rho_{2y_iy_j}+G*\hat{h}+(b^{\rho_1}-b^{\rho_2}),\\
f_4 &= \sum_{i=1}^{N}(l_i^{\rho_1}-l_i^{\rho_2})\frac{\partial}{\partial y_i}(\tilde{\sigma}_2-G*h_1)-\sum_{i=1}^{N}l_i^{\rho_2}\frac{\partial}{\partial y_i}(G*\hat{h}).
\end{aligned}
$$

e portanto

$$\|\vec{f}_1\|_{\alpha,0}\leq\|D_{y'}\hat{\rho}\cdot D\tilde{\sigma}_2\|_{\alpha,0}\leq C\|\hat{\rho}\|_{1+\alpha,0}, \tag{4.6}$$

$$\|f_2\|_{0,0}\leq\|(D^2_{y'}\hat{\rho})\tilde{\sigma}_2\|_{0}\leq C\|\hat{\rho}\|_{2,0}, \tag{4.7}$$

$$\|f_3\|_{1+\alpha,0}\leq\|D_{y'}\hat{\rho}\|_{1+\alpha,0}+\|G*\hat{h}\|_{1+\alpha,0}\leq C\|\hat{\rho}\|_{2+\alpha,0}+C\|\hat{h}\|_{0,0}, \tag{4.8}$$

$$\|f_4\|_{\alpha,0}\leq C\|\hat{\rho}\|_{1+\alpha,0}+C\|\hat{h}\|_{0,0}. \tag{4.9}$$

Todas essas normas são tomadas numa vizinhança V_{s_0} de $s=s_0\in\Gamma_0$. Utilizando o Lema 5.4 do próximo capítulo para $\epsilon=0$, referente ao estudo do Problema Modelo exposto na Seção 5.2, e também a Observação 5.2 apresentada no final da mesma seção temos

$$
\begin{aligned}
\|D_s\hat{\rho}\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3;V_{s_0}\times[0,T]} &\leq C(\|\vec{f}_1\|_{\alpha,0}+\|f_2\|_{0,0}+\|f_3\|_{1+\alpha,0}+\|f\|_{\alpha,0})\\
&\leq C(\|\hat{\rho}\|_{2+\alpha,0;V_{s_0}\times[0,T]}+\|\hat{h}\|_{0,0;V_{s_0}\times[0,T]}).
\end{aligned}
$$

Aplicando argumentos de partição da unidade (análogos aos feitos na demonstração do Lema 5.7 do próximo capítulo), através das estimativas locais acima concluímos

$$\|D_s\hat{\rho}\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3}\leq C\|\hat{\rho}\|_{2+\alpha,0}+\|\hat{h}\|_{0,0}\text{ em }V\times[0,T] \tag{4.10}$$

Agora gostaríamos de estimar $\|\hat{\rho}\|_{2+\alpha,0}$ em termos de $\|D_s\hat{\rho}\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3}$. Para isso, lembre que $\hat{\rho}(x,0)=0$ e também que, uma vez que $\hat{\rho}$ possui suporte compacto, é possível escolher $x_0' \in \mathbb{R}^{N-1}$ tal que $\hat{\rho}(x_0,x_N,t)=0$ para $t\in[0,T], x_N\in\mathbb{R}$. Assim, é possível estabelecer a relação

$$\begin{gathered}\hat{\rho}(x',x_N,t)=\hat{\rho}(x',x_N,t)-\hat{\rho}(x_0',x_N,t)=\\ \int_{x_0'}^{x'} D_s\hat{\rho}(s,x_N,t)ds=\\ \int_{x_0'}^{x'}\frac{D_s\hat{\rho}(s,x_N,t)-D_s\hat{\rho}(s,x_N,0)}{t^{(2+\alpha)/3}}t^{(2+\alpha)/3}ds.\end{gathered}$$

e concluir que $\|\hat{\rho}\|_0 \le KT^{(2+\alpha)/3}\|D_s\hat{\rho}\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3}$, onde K é uma constante independente de T. De maneira análoga temos $[D^\beta\hat{\rho}]_{\alpha,0}\le KT^{(2+\alpha)/3}\|D_s\hat{\rho}\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3}$, para β tal que $|\beta|=2$. Portanto

$$\|\hat{\rho}\|_{2+\alpha,0}\le KT^{(2+\alpha)/3}\|D_s\hat{\rho}\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3}. \tag{4.11}$$

Tomando $T>0$ suficientemente pequeno e tendo em vista a desigualdade (4.10), temos

$$\|D_s\hat{\rho}\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3}\le C\|\hat{h}\|_{0,0} \text{ em } V\times[0,T].$$

$\square$

Ainda com a intenção de demonstrar que a transformação W é uma contração na norma L^∞, a proposição a seguir estima a norma das funções $\hat{c}:=\bar{c}_1-\bar{c}_2$, $\hat{p}:=\bar{p}_1-\bar{p}_2$ e $\hat{q}:=\bar{q}_1-\bar{q}_2$ em termos de $\hat{h}=\bar{h}_1-\bar{h}_2$.

Proposição 2. *Existe constante $C>0$ tal que*

$$\|\hat{c}\|_{\alpha,\alpha/3}+\|\hat{p}\|_{\alpha,\alpha/3}+\|\hat{q}\|_{\alpha,\alpha/3}\le C\|\hat{h}\|_{0,0}.$$

Demonstração. Tomando as mesmas coordenadas locais para $i = 1, 2$. Por definição, c_i é solução de (3.10), ou seja, satisfaz

$$
\begin{gathered}
\sum_{i,j=1}^{N} \hat{a}_{ij}^{\rho_i}(y,t)\bar{c}_{iy_iy_j}(y,t) + \sum_{i=1}^{N} \hat{b}_i^{\rho_i}(y,t)\bar{c}_{iy_i}(y,t) - \lambda\bar{c}_i(y,t) = 0 \\
\text{para } \{y \in U, y_N > 0\} \text{ e } t \in [0,T], \\
\bar{c}_i(y,t) = 1 \text{ para } \{y \in U, y_N = 0\} \text{ e } t \in [0,T].
\end{gathered}
$$

com $\hat{a}_{ij}^{\rho_i}(t) = \hat{a}_{ij}^{\rho_i}(D_s\rho_i)$ e $\hat{b}_i^{\rho_i}(t) = \hat{b}_i^{\rho_i}(D_s^2\rho_i)$.

Subtraindo os sistemas acima para $i = 1$ e $i = 2$ concluímos

$$
\begin{gathered}
\sum_{i,j=1}^{N} \hat{a}_{ij}^{\rho_1}(t)\hat{c}_{y_iy_j}(t) + \sum_{i=1}^{N} \hat{b}_i^{\rho_1}(t)\hat{c}_{y_i}(t) - \lambda\bar{c}(t) = \\
div\vec{g}_1(t) + g_2(t) \text{ em } \{y_N > 0\}, \\
\bar{c}(t) = 0 \text{ em } \{y_N = 0\}.
\end{gathered}
\tag{4.12}
$$

para cada $t \in [0,T]$. Onde

$$
\begin{aligned}
\vec{g}_1(t) &= \Big(\sum_{i=1}^{N}(\hat{a}_{i1}^{\rho_2}(t) - \hat{a}_{i1}^{\rho_1}(t))\bar{c}_{2y_i}(t), \ldots, \sum_{i=1}^{N}(\hat{a}_{iN}^{\rho_2}(t) - \hat{a}_{iN}^{\rho_1}(t))\bar{c}_{2y_i}(t)\Big), \\
g_2(t) &= \sum_{i=1}^{N}(\hat{b}_i^{\rho_2}(t) - \hat{b}_i^{\rho_1}(t))\bar{c}_{2y_i}(t).
\end{aligned}
$$

Por estimativas elípticas (Gilbarg-Trudinger [5], demonstração do Teorema 8.34, Cap. 8) e a proposição anterior

$$
\begin{aligned}
\|\hat{c}\|_{1+\alpha,0} &\leq C(\|g_1\|_{\alpha,0} + \|g_2\|_{0,0}) && (4.13)\\
&\leq C(\|D_s\hat{\rho}\|_{\alpha,0}\|c_2\|_{1+\alpha,0} + \|D_s^2\hat{\rho}\|_{0,0}\|c_2\|_{1,0}) && (4.14)\\
&\leq C\|\hat{h}\|_{0,0}.
\end{aligned}
$$

Seja $t_1 \neq t_2, t_1, t_2 \in [0,T]$. O sistema elípitico (4.12) implica que

$$\begin{aligned}
&L_{t_1}\Big[\frac{\hat{c}(t_1)\hat{c}(t_2)}{|t_1-t_2|^{(1+\alpha)/3}}\Big] = \frac{(L_{t_2}-L_{t_1})}{|t_1-t_2|^{(1+\alpha)/3}}c(t_2)+ \\
&+div\Big(\frac{\vec{g}_1(t_1)-\vec{g}_1(t_2)}{|t_1-t_2|^{(1+\alpha)/3}}\Big)+\frac{g_2(t_1)-g_2(t_2)}{|t_1-t_2|^{(1+\alpha)/3}} \text{ em } \{y_N>0\}, \\
&\frac{\hat{c}(t_1)-\hat{c}(t_2)}{|t_1-t_2|^{(1+\alpha)/3}} = 0 \text{ em } \{y_N=0\},
\end{aligned}$$

onde o operador L_t é dado por $L_t[v] = \sum_{i,j=1}^N \hat{a}_{ij}^{\rho_1}(t)v_{y_iy_j} + \sum_{i=1}^N \hat{b}_i^{\rho_1}(t)v_{y_i} - \lambda v$. Com as mesmas estimativas elípticas usadas para obter (4.13) e também pela proposição anterior temos

$$\|\hat{c}\|_{0,(1+\alpha)/3} \leq C|D_s^2\hat{\rho}\|_{1+\alpha,(1+\alpha)/3} \leq C\|\hat{h}\|_{0,0}.$$

Portanto

$$\|\hat{c}\|_{1+\alpha,0} + \|\hat{c}\|_{0,(1+\alpha)/3} \leq C\|\hat{h}\|_{0,0}. \tag{4.15}$$

Notamos que

$$\begin{aligned}
&\frac{|\hat{c}(x,t)-\hat{c}(y,\tau)|}{|x-y|^{\alpha}+|t-\tau|^{\alpha/3}} \leq \\
&\frac{|\hat{c}(x,t)-\hat{c}(y,t)|^{\alpha}}{|x-y|^{\alpha}}|\hat{c}(x,t)-\hat{c}(y,t)|^{1-\alpha} + \frac{|\hat{c}(y,t)-\hat{c}(y,\tau)|}{|t-\tau|^{\alpha/3+1/3}}|t-\tau|^{1/3}.
\end{aligned}$$

Pelo teorema do valor médio e as estimativas acima temos

$$\|\hat{c}\|_{\alpha,\alpha/3} \leq C\|\hat{h}\|_{0,0}. \tag{4.16}$$

Realizando procedimento análogo ao utilizado para estabelecer a desigualdade (4.11), podemos estimar as normas $\|\hat{\rho}\|_{1+\alpha,0}$ e $\|\hat{\rho}\|_{2,0}$ em termos de $\|D_s\hat{\rho}\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3}$. Tendo em vista a Proposição 1, as estimativas (4.6)-(4.9) e as estimativas elípticas para a solução $\hat{\sigma}$

de (4.5), temos

$$\|\hat{\sigma}\|_{1+\alpha,0} \leq C\|\hat{h}\|_{0,0}, \qquad \|\hat{\sigma}\|_{0,(1+\alpha)/3} \leq C\|\hat{h}\|_{0,0}. \tag{4.17}$$

Estimamos $\hat{p} := \bar{p}_1 - \bar{p}_2$ e $\hat{q} := \bar{q}_1 - \bar{q}_2$ usando (4.17), (4.15) e os argumentos do Lema 3.2. Concluímos

$$\|\hat{p}\|_{\alpha,\alpha/3} + \|\hat{q}\|_{\alpha,\alpha/3} \leq C\|\hat{h}\|_{0,0}. \tag{4.18}$$

Esta desigualdade, juntamente com (4.16) finaliza a demonstração da proposição. □

Agora estamos aptos a demonstrar que W é uma contração na norma L^∞.

Lema 4.2. *$W : (Y_M, \|\cdot\|_{L^\infty}) \to (Y_M, \|\cdot\|_{L^\infty})$ é uma contração.*

Demonstração. A Proposição 2 implica que

$$\|W(c_1,p_1,q_1) - W(c_2,p_2,q_2)\|_{\alpha,\alpha/3} = \|(\bar{c}_1,\bar{p}_1,\bar{q}_1) - (\bar{c}_2,\bar{p}_2,\bar{q}_2)\|_{\alpha,\alpha/3}$$
$$\leq C\|\hat{h}\|_{0,0} = C\|h(c_1,p_1,q_1) - h(c_2,p_2,q_2)\|_{0,0} \leq C\|(c_1,p_1,q_1) - (c_2,p_2,q_2)\|_{0,0}.$$

Dado que $\bar{c}_1(x,0) - \bar{c}_2(x,0) = 0$, temos

$$\bar{c}_1(x,t) - \bar{c}_2(x,t) = \frac{[\bar{c}_1(x,t) - \bar{c}_2(x,t)] - [\bar{c}_1(x,0) - \bar{c}_2(x,0)]}{t^{\alpha/3}} t^{\alpha/3},$$

portanto

$$\|\bar{c}_1 - \bar{c}_2\|_{0,0} \leq T^{\alpha/3}\|\bar{c}_1 - \bar{c}_2\|_{\alpha,\alpha/3}.$$

Como $\bar{p}_1(x,0) - \bar{p}_2(x,0) = 0$ e $\bar{q}_1(x,0) - \bar{q}_2(x,0) = 0$, com o mesmo argumento acima concluímos

$$
\begin{aligned}
\|W(c_1,p_1,q_1) - W(c_2,p_2,q_2)\|_{0,0} &\leq T^{\alpha/3}\|W(c_1,p_1,q_1) - W(c_2,p_2,q_2)\|_{\alpha,\alpha/3} \\
&\leq CT^{\alpha/3}\|(c_1,p_1,q_1) - (c_2,p_2,q_2)\|_{0,0}.
\end{aligned}
$$

Segue que W é uma contração na norma L^∞ para T suficientemente pequeno. □

4.3 Existência e unicidade de ponto fixo para W: Existência e Unicidade de Soluções do Problema de Fronteira Livre

Os Lemas 4.1 e 4.2 provam que $W : Y_M \to Y_M$ e também que W é uma contração na norma L^∞, mas estes fatos ainda não são suficientes para garantir a existência de um ponto fixo de W em Y_M pois Y_M não é um espaço de Banach com a norma L^∞. Para garantir a existência deste ponto fixo, mostremos agora que W é contínuo.

Lema 4.3. $W : (Y_M, \|\cdot\|_{m+\alpha,m+\alpha/3}) \to (Y_M, \|\cdot\|_{m+\alpha,m+\alpha/3})$ *é contínuo.*

Demonstração. Vamos mostrar que se $Y_M \supset \{y_n\}_{n=1}^\infty \to y$ então $W(y_n) \to W(y)$, ambas convergências na norma $C^{m+\alpha,m+\alpha/3}$. Para isso, enunciemos o seguinte resultado sobre convergência de sequências

Afirmação: Se $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ é uma sequência tal que toda subsequência $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ possui subsubsequência que converge ao mesmo limite L então $x_n \to L$.

A demonstração desse fato é obtida trivialmente por argumento de contradição. Portanto, basta mostrar que $\{W(y_n)\}_{n=1}^\infty$ satisfaz as hipóteses da afirmação acima com $L = W(y)$.

De fato, seja $\{W(y_{n_k})\}_{k=1}^\infty$ uma subsequência de $\{W(y_n)\}_{n=1}^\infty$. Como $W(Y_M) \subset Y_M$ e

Y_M é compacto segue que $\{W(y_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ possui uma subsequência convergente $W(y_{n_{k_j}}) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} z_k$.

Por outro lado, pelo lema anterior segue que $W : (Y_M, \|\cdot\|_{L^\infty}) \to (Y_M, \|\cdot\|_{L^\infty})$ é contínuo e, portanto

$$W(y_{n_{k_j}}) \underset{\|\cdot\|_{L^\infty}}{\overset{j\to\infty}{\longrightarrow}} W(y).$$

Pois $y_n \to y \Rightarrow y_n \underset{\|\cdot\|_{L^\infty}}{\longrightarrow} y \Rightarrow y_{n_{k_j}} \underset{\|\cdot\|_{L^\infty}}{\overset{j\to\infty}{\longrightarrow}} y$. Mas $W(y_{n_{k_j}}) \underset{\|\cdot\|_{L^\infty}}{\overset{j\to\infty}{\longrightarrow}} z_k$ (pois $W(y_{n_{k_j}}) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} z_k$), por unicidade de limites segue que $z_k = W(y)$. Concluímos que

$$W(y_{n_{k_j}}) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} W(y).$$

$\square$

Portanto, temos que $W : Y_M \to Y_M$ é contínuo, com Y_M espaço de Banach convexo e compacto. O teorema do ponto fixo de Schauder (veja Gilbarg-Trudinger [5], Cap. 11) garante que W possui um ponto fixo em Y_M. O fato de W ser uma contração na norma L^∞ garante a unicidade do ponto fixo. Seja $(c, p, q) \in Y_M$ este ponto fixo, isto é, $W((c, p, q)) = (\bar{c}, \bar{p}, \bar{q}) = (c, p, q)$; então pelo Teorema 4.1 temos que o seguinte resultado é válido.

Teorema 4.2. *Seja $0 < \alpha < 1$ e m um inteiro não-negativo. Se Ω_0 é um domínio N-dimensional, com $N \geq 2$, cuja fronteira $\Gamma_0 \in C^{m+4+\alpha}$; p_0 e q_0 pertencem a $C^{m+1+\alpha}(\overline{\Omega}_0)$ e as funções f, g e h são tais que*

$$f, g \text{ e } h \in C_K^{m+1} \text{ para algum inteiro } m \geq 0,$$

Assumindo que Γ_t, $t \in [0, T]$, pode ser representado como

$$\Gamma_t = \{s + \rho(s, t)\vec{n}(s); s \in \Gamma_0\}.$$

onde $\vec{n}(s)$ *denota o vetor unitário normal exterior a* Γ_0 *em* s *e* $\rho \in C^{3+\alpha,(3+\alpha)/3}(\Gamma_0 \times [0,T])$.

Sob essas condições, temos que

$$\begin{aligned}
&\Delta c - \lambda c = 0 \ \ \text{em } \Omega_t,\\
&\frac{\partial p}{\partial t} - \nabla\sigma \cdot \nabla p = f(c,p,q) \ \ \text{em } \Omega_t,\\
&\frac{\partial q}{\partial t} - \nabla\sigma \cdot \nabla q = g(c,p,q) \ \ \text{em } \Omega_t,\\
&\Delta\sigma = -h(c,p,q) \ \ \text{em } \Omega_t,
\end{aligned}$$

com as seguintes condições de fronteira

$$\begin{aligned}
c &= 1 \ \ \text{em } \Gamma_t,\\
\sigma &= \gamma\kappa \ \ \text{em } \Gamma_t,\\
\frac{\partial \sigma}{\partial n} &= -V_n \ \ \text{em } \Gamma_t,
\end{aligned}$$

$$p(x,0) = p_0(x),\ q(x,0) = q_0(x),$$
$$p_0(x) \geq 0,\ q_0(x) \geq 0,\ p_0(x) + q_0(x) \leq 1.$$

admite uma única solução, para $0 \leq t \leq T$, *onde* $T > 0$ *é suficientemente pequeno. A regularidade desta solução é*

$$D_s D^m_{(s,t)}\rho \in C^{3+\alpha,(3+\alpha)/3}(\mathbb{R}^{N-1} \times [0,T]),$$
$$D^2_x D^m_{(x,t)}\sigma \in C^{\alpha,\alpha/3}_K(\mathbb{R}^N \times [0,T]),$$
$$c,p,q \in C^{m+1+\alpha,\, m+1+\alpha/3}_K(\mathbb{R}^N \times [0,T]).$$

Capítulo 5

Análise do Problema de Hele-Shaw

O objetivo desse capítulo é estudar o problema conhecido como de Hele-Shaw não-homogêneo que consiste em, dado um domínio limitado $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, com $\partial\Omega_0 = \Gamma_0$, encontrar uma função u e uma fronteira livre $\Gamma = \bigcup_{t\in[0,T]}(\Gamma_t \times \{t\})$ que satisfaçam o sistema

$$
\begin{aligned}
&\Delta u(x,t) = -h(x,t) \text{ em } \Omega_t \times [0,T],\\
&u = -\gamma\kappa \text{ em } \Gamma_t \times [0,T],\\
&\partial_n u = -V_n \text{ em } \Gamma_t \times [0,T],\\
&\Gamma \cap \{t=0\} = \Gamma_0.
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

onde $\Gamma_t = \partial\Omega_t$, γ é uma constante positiva, κ é a curvatura média, $\partial_n u$ é a derivada na direção $\vec{n}$ da normal unitária exterior e V_n é a velocidade da fronteira livre Γ_t na direção $\vec{n}$ e $h \in C^{\alpha,\alpha/3}(\mathbb{R}^N \times [0,T])$, $0 < \alpha < 1$, é uma função dada com suporte compacto.

De fato, queremos provar que

Se $\Gamma_0 \in C^{3+\alpha}$ então existe $T > 0$ tal que o problema descrito acima admite solução única e Γ pertence a $C^{3+\alpha,(3+\alpha)/3}$.

A asserção sobre a regularidade de u é omitida pois estamos apenas interessados na fronteira livre. Porém, note que a Teoria de Equações Elípticas nos garante que se Γ_t é suficientemente suave, então u também o é.

5.1 Reformulação do Problema

No que segue, iremos reformular o problema de Hele-Shaw e reduzí-lo a garantir existência e unicidade de ponto fixo para um operador $\mathcal{F}$.

Primeiramente, vamos representar Γ_t como um gráfico sobre a fronteira Γ_0, que será vista como uma variedade $(N-1)$-dimensional mergulhada em $\mathbb{R}^N$. Denote por $s \in \mathbb{R}^N$ um ponto genérico em Γ_0 e por $\vec{n}(s)$ a normal unitária exterior a Γ_0.

Seja $d = d(x) = d(x, \Gamma_0)$ a distância orientada de x a Γ_0. Então, para x próximo a Γ_0, podemos escrever

$$x = s + d\vec{n}(s),$$

com $s \in \Gamma_0$ unicamente determinado por x. Ou seja, existe L_0 (dependendo apenas de Γ_0) tal que

$$\begin{gathered} X : \Gamma_0 \times (-L_0, L_0) \to \Gamma_0(L_0) = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / d(x, \Gamma_0) < L_0\} \\ (s, d) \mapsto s + d\vec{n}(s) \end{gathered}$$

é um difeomorfismo C^∞.

Dado $x \in \Gamma_0(L_0)$ denotaremos por $(P(x), d(x))$ a inversa de X, ou seja, $x = X(P(x), d(x))$.

Agora vamos definir os espaços de funções nos quais procuraremos soluções para o problema em questão.

Definição 3. *Seja $T > 0$ uma constante fixa. para todo domínio G e função definida em $G \times [0, T]$. Então, o espaço de Hölder $C^{\beta,\beta/3}$, para $\beta \in [0, \infty)$, é o fêcho do espaço das funções C^∞ na norma $\| \cdot \|_{\beta,\beta/3}$, onde*

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\beta,0} &:= \|f\|_{C^0([0,T];C^\beta(G))},\\
\|f\|_{0,\beta} &:= \|f\|_{C^\beta([0,T];C^0(G))},\\
\|f\|_{\beta,\beta/3} &:= \|f\|_{0,0} + \sum_{0\le\beta-|m|-3n<3} \big\{\|D_x^m D_t^n f\|_{\beta-|m|-3n,0} + \\
&\qquad \|D_x^m D_t^n f\|_{0,(\beta-|m|-3n)/3}\big\}\\
\|f\|_{\beta,\beta/4} &:= \|f\|_{0,0} + \sum_{0\le\beta-|m|-4n<4} \big\{\|D_x^m D_t^n f\|_{\beta-|m|-4n,0} + \\
&\qquad \|D_x^m D_t^n f\|_{0,(\beta-|m|-4n)/4}\big\}
\end{aligned}$$

onde n é um inteiro não-negativo e m é um multi-índice tal que $|m| \geq 0$. Se não especificado, a norma $\|f\|_{\beta,\beta/3}$ se refere ao domínio de f. É fácil verificar que se $f \in C^{\beta,\beta/3}$ então $D_x^m D_t^n f \in C^{\beta-|m|-3n,(\beta-|m|-3n)/3}$ para m e n satisfazendo $|m| + 3n \leq \beta$.

Definição e observações similares também valem para o espaço $C^{\beta,\beta/4}$.

Nota: As definições das normas dos espaços $C^{(3+\alpha),(3+\alpha)/3}$ e $C^{(2+\alpha),(2+\alpha)/3}$ apresentadas aqui são diferentes das presentes na Seção 2.2 de Preliminares, porém estas normas são equivalentes (demonstração no Apêndice B). Uma vez que os resultados deste capítulo são uma adaptação de Chen *et al.* [19] e neste artigo os espaços $C^{(3+\alpha),(3+\alpha)/3}$ e $C^{(2+\alpha),(2+\alpha)/3}$ são definidos com as normas acima, por conveniência, também acataremos esta definição.

Assuma que $\Gamma = \bigcup_{t\in[0,T]}(\Gamma_t \times \{t\})$ tem a seguinte representação

$$\Gamma := \{s + \rho(s,t); s \in \Gamma_0, t \in [0,T]\},$$

onde $\rho : \Gamma_0 \times [0,T] \to [-2\delta, 2\delta]$, $\delta > 0$, pertence a $C^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}$.

Tome $s_0 \in \Gamma_0$ seja $Z = Z^{s_0}(y')$ uma carta local de uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^{N-1}$ para uma vizinhança de s_0 em Γ_0 tal que $Z^{s_0}(0') = s_0$ e $\frac{\partial}{\partial y_i} Z^{s_0}(0')$, $i = 1, \ldots, N-1$, são vetores unitários na direção da curvatura principal de Γ_0 em s_0. Denote por $y' = S^{s_0}(x)$ a inversa de $P(x) = Z^{s_0}(y')$. Para f definida em Γ_0, denote por $f^{s_0}(y')$ a função $f(Z^{s_0}(y'))$. Assim

$$X^{s_0}(y', \rho^{s_0}(y', t)) = Z^{s_0}(y') + \vec{n}(Z^{s_0}(y'))\rho(Z^{s_0}(y'), t)$$
$$X^{s_0}(0', \rho^{s_0}(0', t)) = s_0$$

Afirmação: Com esta carta local, a velocidade normal V_n e a curvatura média κ de Γ_t em $X^{s_0}(y', \rho(y', t))$ são dadas por

$$V_n^{s_0}(y', t) = -\rho_t^{s_0}(y', t)(1 + |\sum_{k=1}^{N-1} \rho_{y'_k}^{s_0} \nabla_x S_k^{s_0}|^2)^{-1/2}$$
$$\kappa^{s_0}(y', t) = -\sum_{k,l=1}^{N-1} (A_{kl}^{\rho})^{s_0} \rho_{y'_k y'_l}^{s_0} - (B^{\rho})^{s_0}$$

onde

$$(A_{kl}^{\rho})^{s_0} = A_{kl}^{\rho}(y', \rho^{s_0}, D_{y'}\rho^{s_0})$$
$$(B^{\rho})^{s_0} = B^{s_0}(y', \rho^{s_0}, D_{y'}\rho^{s_0})$$

em particular, em $y' = 0$

$$(A_{kl}^{\rho})^{s_0}|_{\rho\equiv 0} = \delta_{kl}, \qquad (B^{\rho})^{s_0}|_{\rho\equiv 0} = \kappa_{\Gamma_0}.$$

onde κ_{Γ_0} é a curvatura média de Γ_0 em s_0. Para fórmulas explícitas de A_{kl}^{ρ} e B^{ρ} ver Chen e Retich [18].

Agora, para endireitar a fronteira de $\Omega_t \times [0, T], t \in [0, T]$ vamos definir a transformação de Hanzawa Y_ρ. Para isso, tome $\xi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ função corte tal que

$$\xi(r) = 1 \text{ se } |r| \leq 1/2$$
$$\xi(r) = 0 \text{ se } |r| \geq 1$$
$$|\xi'| \leq 3$$

Definição 4. *Para $\rho \in C^{2+\alpha,(2+\alpha/3)}(\Gamma_0 \times [0,T])$ satisfazendo $\|\rho\|_0 \leq 2\delta$, definimos a tranformação de Hanzawa $Y_\rho : \mathbb{R}^N \times [0,T] \to \mathbb{R}^N$ por*

$$Y_\rho(x,t) = \begin{cases} x & \text{se } d(x) = d(x,\Gamma_0) \geq L_0, \\ x - \xi(d(x)/L_0)\rho(P(x),t)\vec{n}(P(x)) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

1. $Y_\rho(x,t)$ é contínua.

   Se $x \in \partial(\Gamma_0(L_0))$ temos que $|d(x)| = L_0$ e, portanto, $\xi(x) = 0$.

   $$\Rightarrow Y_\rho(x,t) \text{ é contínua.}$$

2. $Y_\rho(\cdot,t) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é difeo para cada $t \in [0,T]$ fixo.

   Note que em $\Gamma_0(L_0)$

   $$Y_\rho(x,t) = X(P(x), d(x)\xi(d/L_0)\rho(P(x),t)),$$

   uma vez que

   $$\frac{\partial}{\partial d}[d - \xi(d/L_0)\rho(P(x),t)] = 1 - \frac{\xi'(d(x)/L_0)}{L_0}\rho(P(x),t) > 1 - 6\delta/L_0 > 0,$$

   utilizando a Regra da Cadeia e o teorema da função inversa concluímos que $Y_\rho(\cdot,t) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é difeo para cada $t \in [0,T]$ fixo.

3. $Y_\rho(\cdot,t) : \Gamma_t \to \Gamma_0$.

   De fato, tome $x \in \Gamma_t$ então $x = P(x) + \rho(P(x),t)\vec{n}(P(x)), d(x) = \rho(P(x),t)$. Portanto, $|d(x)/L_0| \leq 1/8 \Rightarrow \xi(d(x)/L_0) = 1$.

   $$\Rightarrow Y_\rho(x,t) = x - \rho(P(x),t)\vec{n}(P(x)) = P(x) \in \Gamma_0.$$

Seja u a solução de (5.1). Definimos

$$v(y,t) = u((Y_\rho)^{-1}(y,t),t) \quad (y,t) \in \overline{\Omega}_t \times [0,T],$$

Então as duas primeiras equações de (5.1) serão dadas por

$$
\begin{aligned}
L^\rho v(y,t) &= \sum_{i,j=1}^{N} (a_{ij}^\rho v_{y_i})_{y_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i^\rho v_{y_i} = -h(y,t) \text{ em } \Omega_0,\\
v(s,t) &= \sum_{k,l=1}^{N-1} A_{kl}^\rho \rho_{y'_k y'_l} + B^\rho \text{ em } \Gamma_0 \times [0,T].
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
a_{ij}^\rho &= a_{ij}(y,\rho,D\rho) := \nabla_x Y_\rho^i \cdot \nabla_x Y_\rho^j\\
b_i^\rho &= b_i(y,\rho,D\rho,D^2\rho) := \sum_{j=1}^{N} (\nabla_x Y_\rho^j)_{y_j} \cdot \nabla_x Y_\rho^i
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

Em termos de cartas locais, temos

$$
\partial_n u(x,t) = (1 + |\sum_{k=1}^{N-1} \rho_{y'_k}^{s_0} \nabla_x S_k^{s_0}|)^{1/2} \partial_n v(Y_\rho(x,t),t).
$$

onde ∂_n no lado esquerdo denota a derivada normal exterior a Γ_t e n no lado direito a derivada normal exterior a Γ_0.

Como $V_n^{s_0}(y',t) = -\rho_t(Z^{s_0}(y'),t)(1 + |\sum_{k=1}^{N-1} \rho_{y'_k}^{s_0} \nabla_x S_k^{s_0}|^2)^{-1/2}$, a equação $\partial_n u = -V_n$ em Γ_t pode ser escrita como

$$
\rho_t(s,t) - l^\rho(\partial_n v) = 0 \text{ em } \Gamma_0 \times [0,T].
$$

onde, em coordenadas locais

$$
(l^\rho)^{s_0}(y',t) = 1 + |\sum_{k=1}^{N-1} \rho_{y'_k}^{s_0} \nabla S_k^{s_0}|^2.
$$

Definição 5. *Seja $T \in (0, \delta^{1/(2+\alpha)}]$ constante, definimos*

$$\mathcal{A}_T := \{\rho \in C^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}(\Gamma_0 \times [0,T]); \rho(\cdot,0) = 0 \ e \ \|\rho\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} \leq 1\}$$

Observação: Usando o teorema do valor médio e o fato de que $\rho \in \mathcal{A}_T \Rightarrow \rho(s,0) = 0$ segue que

$$\|\rho\|_0 \leq \|\rho\|_{0,(2+\alpha)/3} T^{(2+\alpha)/3} \leq 2\delta \tag{5.3}$$

Note também que Y_ρ e l^ρ estão bem definidos para $\rho \in \mathcal{A}_T$.

Agora, para todo $\rho \in \mathcal{A}_T$, considere o seguinte problema linear para (ϕ, v)

$$\begin{aligned}
&L^\rho v(y,t) = -h(y,t) \text{ em } \Omega_0 \times [0,T], \\
&v(s,t) = \sum_{k,l=1}^{N-1} A_{kl}^\rho \phi_{y_k' y_l'} + B^\rho(s,t) \text{ em } \Gamma_0 \times [0,T], \\
&\phi_t - l^\rho(\partial_n v) = 0 \text{ em } \Gamma_0 \times [0,T], \\
&\phi(s,0) = 0 \text{ em } \Gamma_0.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Assuma que para cada $\rho \in \mathcal{A}_T$ o problema acima tenha solução única (ϕ, v). Definimos $\mathcal{F}(\rho) = \phi$. Então o problema de Hele-Shaw tem solução clássica única se, e somente se, $\mathcal{F}$ tem único ponto fixo em $\mathcal{A}_T$.

A solução para (5.4) é obtida como o limite de soluções de problemas regularizados para $\epsilon \in (0,1]$, nos quais adicionamos ao lado direito da terceira equação de (5.4) o termo $\epsilon(\Delta_{\Gamma_0})^2\phi$, onde Δ_{Γ_0} é operador de Laplace-Beltrami (veja, por exemplo, Gilbarg-Trudinger [5], Cap. 16) em Γ_0. A fim de resolver os problemas regularizados, primeiro garantimos existência e unicidade, por meio de Transformadas de Fourier, para o problema modelo que está exposto na Seção 5.2. Em seguida, na Seção 5.3, utilizando a caracterização da solução para o problema modelo e a técnica do congelamento de coeficientes, estabelecemos existência e unicidade de solução para (5.4) e, portanto, mostramos que o operador $\mathcal{F}$ está bem definido. Na Seção 5.4, provamos que $\mathcal{F}$ mapeia $\mathcal{A}_T$ em $\mathcal{A}_T$ e que $\mathcal{F}$ é uma contração, o que é suficiente para determinar existência e unicidade de solução clássica para o problema de Hele-Shaw não-homogêneo, conforme discutido no parágrafo acima.

5.2 Problema Modelo

Nesta seção, vamos procurar soluções para o problema (5.4) no caso especial em que $\Omega_0 = \mathbb{R}^N_+$ e $\Gamma_0 = \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$.

Primeiramente, consideremos o seguinte problema modelo regularizado, para todo $\epsilon \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
&\Delta v(y', y_N, t) = div \vec{f_1} + f_2, \quad y' \in \mathbb{R}^{N-1}, y_N > 0, t \geq 0, \\
&v(y', 0, t) - \Delta_{y'} \phi(y', t) = f_3, \quad y' \in \mathbb{R}^{N-1}, t \geq 0, \\
&\phi_t(y', t) + \partial_{y_N} v(y', 0, t) + \epsilon(\Delta_{y'})^2 \phi(y', t) = f, \quad y' \in \mathbb{R}^{N-1}, t > 0, \\
&\phi(y', 0) = 0, \quad y' \in \mathbb{R}^{N-1}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Note que, nesse caso, $\partial_n v = -\partial_{y_N} v$ em Γ_0, pois $\partial_n v$ é a derivada na direção $\vec{n}$ da normal unitária exterior a Γ_0.

No lema que segue, tomando Transformadas de Fourier na variável y' (veja Evans [11], Cap. 4), vamos obter uma expressão para a solução ϕ do sistema acima para o caso em que $\vec{f_1} \equiv 0$, $f_2 = f_3 = 0$.

Lema 5.1. *A solução ϕ para (5.5) no caso em que $\vec{f_1} \equiv 0$, $f_2 = f_3 = 0$ é dada por*

$$\phi(y', t) = \mathcal{N}[f](y', t),$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^t[g](y') &:= K_\epsilon(t) * g(y') = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K_\epsilon(\sigma, t) g(y' - \sigma) d\sigma, && (5.6)\\
\mathcal{N}[f](y', t) &:= \int_0^t \mathcal{S}^\tau [f(t-\tau)] d\tau = && (5.7)\\
&= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K_\epsilon(z', \tau) f(y' - z', t - \tau) dz' d\tau, \\
K_\epsilon(y', t) &:= (2\pi)^{1-N} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-i\xi \cdot y'} e^{-(|\xi|^3 + \epsilon|\xi|^4)t} d\xi. && (5.8)
\end{aligned}$$

Demonstração. Tomando a transformada de Fourier na variável y' no sistema (5.5) com $\vec{f_1} \equiv 0$, $f_2 = f_3 = 0$, obtemos

$$\begin{gathered}
-|y'|^2 \hat{v}(y', y_N) + \partial_{y_N y_N} \hat{v}(y', y_N, t) = 0 \quad y' \in \mathbb{R}^{N-1}, y_N > 0, t \geq 0, \\
\hat{v}(y', 0, t) = -|y'|^2 \hat{\phi}(y', t) \quad y' \in \mathbb{R}^{N-1}, t \geq 0, \\
\hat{\phi}_t(y', t) + \partial_{y_N} \hat{v}(y', 0, t) + \epsilon |y'|^4 \hat{\phi}(y', t) = \hat{f}(y', t), \quad y' \in \mathbb{R}^{N-1}, t > 0, \\
\hat{\phi}(y', 0) = 0, \quad y' \in \mathbb{R}^{N-1}.
\end{gathered} \tag{5.9}$$

onde $\hat{\phi}$, $\hat{v}$ e $\hat{f}$ são, respectivamente, as transformadas de Fourier de ϕ, v e f.

Da primeira equação de (5.9) concluímos que

$$\hat{v}(y', y_N, t) = A e^{|y'| y_N} + B e^{-|y'| y_N} \text{ para } y' \in \mathbb{R}^{N-1}, y_N > 0, t \geq 0. \tag{5.10}$$

Como desejamos $\hat{v} \in L^2$, tomamos $A = 0$. Utilizamos a segunda equação de (5.9) para determinar B e obtemos

$$\begin{gathered}
\hat{v}(y', y_N, t) = -|y'|^2 \hat{\phi}(y', t) e^{-|y'| y_N} \text{ para } y' \in \mathbb{R}^{N-1}, y_N \geq 0, t \geq 0. \\
\Rightarrow \partial_{y_N} \hat{v}(y', 0, t) = |y'|^3 \hat{\phi}(y', t).
\end{gathered}$$

Substituindo a igualdade acima na terceira equação de (5.9), temos

$$\hat{\phi}_t(y', t) + (\epsilon |y'|^4 + |y'|^3) \hat{\phi}(y', t) = \hat{f}(y', t).$$

Como $\hat{\phi}(y',0)=0$ concluímos que

$$\hat{\phi}(y',t)=\int_0^t e^{-(|y'|^3+\epsilon|y'|^4)\tau}\hat{f}(y',t-\tau)d\tau.$$

Tomando a Transformada de Fourier inversa na expressão acima, lembrando que $(u*v)(y')=(2\pi)^{(N-1)/2}(\hat{u}\hat{v})^{\vee}(y')$, onde o símbolo $\vee$ denota a transformada inversa, temos

$$\phi(y',t)=\mathcal{N}[f](y',t),$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{N}[f](y',t)&:=\int_0^t \mathcal{S}^{\tau}[f(t-\tau)]d\tau=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^{N-1}}K_{\epsilon}(z',\tau)f(y'-z',t-\tau)dz'd\tau,\\ K_{\epsilon}(y',t)&:=(2\pi)^{1-N}\int_{\mathbb{R}^{N-1}}e^{-i\xi\cdot y'}e^{-(|\xi|^3+\epsilon|\xi|^4)t}d\xi.\end{aligned}$$

□

No lema anterior, encontramos uma fórmula explícita para ϕ da solução (v,ϕ) de (5.5), esta expressão depende de K_ϵ, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{N}$. Com o propósito de estimar a solução (v,ϕ), nos próximos dois lemas, iremos estudar as funções K_ϵ e os operadores $\mathcal{S}$ e $\mathcal{N}$.

No que segue, não será adotada notação distinta para um inteiro m e um multi-índice de ordem $|m|$.

Lema 5.2. *Seja $K_\epsilon(y',t)$ definido como em (5.7). Então $K_\epsilon\in C^{\infty}(\mathbb{R}^{N-1}\times(0,\infty))$ e para todo $\beta\in[0,1)$ e inteiros não-negativos m e n,*

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}}|y'|^{\beta}|D_{y'}^{m}D_t^{n}K_{\epsilon}(y',t)|dy'\leq C(m,n,\beta)t^{-n}[t^{4/3}+\epsilon t]^{\frac{\beta-m}{4}}. \tag{5.11}$$

Mais ainda, $\int_{\mathbb{R}^{N-1}}K_\epsilon(y',t)dy'=1$ para todo $t>0$.

Demonstração. Fazendo a mudança de variáveis $\xi \mapsto \xi t^{-1/3}$ na integral de (5.7) que define K_ϵ, podemos escrever

$$K_\epsilon(y',t) = t^{-(N-1)/3}\overline{K}_\epsilon(y't^{-1/3}, \epsilon t^{-1/3}) = t^{-(N-1)/3}\overline{K}_\epsilon(\lambda,\mu)$$

onde

$$\overline{K}_\epsilon(\lambda,\mu) = (2\pi)^{1-N}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-i\lambda\cdot\xi}e^{-|\xi|^3-\mu|\xi|^4}d\xi.$$

Seja $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_{N-1}) \neq 0$ um vetor. Sem perda de generalidade, assumimos que $\lambda_1 \geq \frac{|\lambda|}{N-1}$. Para quaisquer inteiros $i,j \geq 0$ e $l \in [0, i+4j+N+1]$, usando a fórmula de integração por partes e a notação $\xi^i = \xi_1^{i_1}\xi_2^{i_2}\ldots\xi_{N-1}^{i_{N-1}}$ com $i_1+i_2+\cdots+i_{N-1} = i$, temos

$$\begin{aligned}|D^i_\lambda D^j_\mu \overline{K}_\epsilon(\lambda,\mu)| &= (2\pi)^{1-N}\Big|\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \xi^i|\xi|^{4j}e^{-i\xi\cdot\lambda-|\xi|^3-\mu|\xi|^4}d\xi\Big| \\ &= (2\pi)^{1-N}\Big|\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{e^{-i\lambda\cdot\xi}}{\lambda_1^l}\frac{\partial^l}{\partial\xi_1^l}\{\xi^i|\xi|^{4j}e^{-|\xi|^3-\mu|\xi|^4}\}d\xi\Big| \\ &\leq C|\lambda|^{-l}\int_{\mathbb{R}^{N-1}}|\xi|^{i+4j-l}\sum_{k=\bar{l}}^{l}(|\xi|^3+\mu|\xi|^4)^k e^{-|\xi|^3-\mu|\xi|^4}d\xi,\end{aligned} \tag{5.12}$$

onde $\bar{l} = 0$ se $l \leq i+4j$ e $\bar{l} = 1$ se $l \geq i+4j+1$.

A afirmação enunciada abaixo será provada logo após a demonstração deste lema.

Afirmação: Para todo $\mu \in [0,\infty)$, i,j inteiros não-negativos, l inteiro $l \in [0, i+4j+N+1]$, temos

$$|D^i_\lambda D^j_\mu \overline{K}_\epsilon(\lambda,\mu)| \leq C(1+\mu)^{(l-i-4j-N+1)/4}|\lambda|^{-l}. \tag{5.13}$$

Lembrando que $\lambda = y't^{-1/3}$, $\mu = \epsilon t^{-1/3}$ e $K_\epsilon(y',t) = t^{(1-N)/3}\overline{K}_\epsilon(\lambda,\mu)$, temos

$$
\begin{aligned}
|D_{y'}^m D_t^n K_\epsilon(y',t)| &= |D_t^n\{t^{(1-N-m)/3} D_\lambda^m \overline{K}_\epsilon(y't^{-1/3}, \epsilon t^{-1/3})\}| \\
&= |\sum_{\beta \le n} t^{(1-N-m-3\beta)/3} D_t^\beta (D_\lambda^m \overline{K}_\epsilon(\lambda(t), \mu(t)))| \\
&\le C t^{(1-N-m-3n)/3} \sum_{k+j \le n} |\lambda|^k \mu^j |D_\lambda^{m+k} D_\mu^j \overline{K}_\epsilon(\lambda,\mu)|.
\end{aligned}
$$

Segue de $\mu^j \le (1+\mu)^j$ e (5.13) com $i = m+k$ e $l = k+N-1+\hat{l}$ ($\hat{l} = -1$ ou 1) que

$$
|D_{y'}^m D_t^n K_\epsilon(y',t)| \le C(1+\mu)^{(\hat{l}-m)/4} t^{(1-N-m-3n)/3} |\lambda|^{1-N-\hat{l}}.
$$

Fazendo novamente a mudança de variáveis $\lambda = y't^{-1/3}$ e $\mu = \epsilon t^{-1/3}$, tomando $\hat{l} = 1$ para $|\lambda| \ge (1+\mu)^{1/4}$ e $\hat{l} = -1$ para $|\lambda| \le (1+\mu)^{1/4}$, da desigualdade acima obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |y'|^\beta |D_{y'}^m D_t^n K_\epsilon(y',t)| dy' \\
&\le C t^{(\beta-m-3n)/3} \Big\{ \int_{|\lambda| \ge (1+\mu)^{1/4}} (1+\mu)^{(1-m)/4} |\lambda|^{\beta-N} d\lambda + \\
&+ \int_{|\lambda| \le (1+\mu)^{1/4}} (1+\mu)^{(-1-m)/4} |\lambda|^{\beta-N+2} d\lambda \Big\} \\
&= \tilde{C} t^{(\beta-m-3n)/3} \Big\{ (1+\mu)^{(1-m)/4} \int_{(1+\mu)^{1/4}}^\infty r^{\beta-N+N-2} dr + \\
&+ (1+\mu)^{(-1-m)/4} \int_0^{(1+\mu)^{1/4}} r^{\beta-N+2+N-2} dr \Big\} \\
&\le C t^{(\beta-m-3n)/3} (1+\mu)^{(\beta-m)/4} = C t^{-n} (t^{4/3} + \epsilon t)^{(\beta-m)/4}.
\end{aligned}
$$

O que demonstra (5.11). Tomando $m = n = \beta = 0$, segue que K_ϵ pertence a $L^\infty((0,\infty), L^1(\mathbb{R}^{N-1}))$. Uma vez que $\hat{K}_\epsilon(\xi,t) = e^{-(|\xi|^3+\epsilon|\xi|^4)t}$, temos $\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K_\epsilon(y',t) dy'$ $= \hat{K}_\epsilon(0,t) = 1$, $\forall t > 0$. Portanto, só restou provar a afirmação feita pouco acima. $\square$

Demonstração da Afirmação: O objetivo é provar que para todo $\mu \in [0,\infty)$, i, j inteiros não-negativos, l inteiro, $l \in [0, i+4j+N+1]$, temos

$$
|D_\lambda^i D_\mu^j \overline{K}_\epsilon(\lambda,\mu)| \le C(1+\mu)^{(l-i-4j-N+1)/4} |\lambda|^{-l}.
$$

Tendo em vista a relação (5.12), é suficiente verificar que

$$\int_{\xi\in\mathbb{R}^{N-1}} |\xi|^{i+4j-l}\sum_{k=\bar{l}}^{l}(|\xi|^3+\mu|\xi|^4)^k e^{-|\xi|^3-\mu|\xi|^4}d\xi \leq C(1+\mu)^{(l-i-4j-N+1)/4}.$$

Iremos dividir a integral acima em duas partes, quando $\xi\in\mathbb{R}^{N-1}$ é tal que $|\xi|\geq 1$ e quando $|\xi|\leq 1$.

Caso I: se $|\xi|\geq 1$ temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^{N-1}\\ |\xi|\geq 1}} |\xi|^{i+4j-l}\sum_{k=\bar{l}}^{l}(|\xi|^3+\mu|\xi|^4)^k e^{-|\xi|^3-\mu|\xi|^4}d\xi\\
&\leq \int_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^{N-1}\\ |\xi|\geq 1}} |\xi|^{i+4j-l}\sum_{k=\bar{l}}^{l}(1+\mu)^k|\xi|^{4k} e^{-|\xi|^3-\mu|\xi|^4}d\xi\\
&\leq C\int_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^{N-1}\\ |\xi|\geq 1}} |\xi|^{i+4j-l}(1+\mu)^l|\xi|^{4l} e^{-|\xi|^3-\mu|\xi|^4}d\xi\\
&\leq C(1+\mu)^l\int_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^{N-1}\\ |\xi|\geq 1}} |\xi|^{i+4j+3l} e^{-|\xi|^3(1+\mu)}d\xi\\
&\leq C(1+\mu)^l e^{-\mu}\int_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^{N-1}\\ |\xi|\geq 1}} |\xi|^{i+4j+3l} e^{-|\xi|^3}d\xi\\
&\leq C(1+\mu)^l e^{-\mu}\\
&\leq C(1+\mu)^{(l-i-4j-N+1)/4},
\end{aligned}$$

sendo que a última desigualdade é obtida utilizando o fato de que a função $f(\mu)=e^{-\mu}(1+\mu)^{(i+4j+N-1)/4}$ é limitada para $\mu\in[0,\infty)$.

Caso II: se $|\xi|\leq 1$.

Lembrando que $\bar{l}=0$ se $l\leq i+4j$ e $\bar{l}=1$ se $l\geq i+4j+1$, $l\in[0,i+4j+N+1]$; consideremos separadamente o caso em que $\bar{l}=1$ e $\bar{l}=0$.

Caso II.1: se $|\xi|\leq 1$ e $\bar{l}=1$, ou seja, $l-i-4j\geq 1$.

$$\begin{aligned}
&\int_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^{N-1}\\|\xi|\leq 1}} |\xi|^{i+4j-l}\sum_{k=\bar{l}}^{l}(|\xi|^3+\mu|\xi|^4)^k e^{-|\xi|^3-\mu|\xi|^4}d\xi\\
&\leq \int_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^{N-1}\\|\xi|\leq 1}} |\xi|^{i+4j-l}\sum_{k=1}^{l}(1+\mu)^k|\xi|^{3k}e^{-(1+\mu)|\xi|^4}d\xi\\
&\leq \int_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^{N-1}\\|\xi|\leq 1}} |\xi|^{i+4j-l+3}e^{-\frac{(1+\mu)|\xi|^4}{2}}\sum_{k=1}^{l}(1+\mu)^k e^{-\frac{(1+\mu)|\xi|^4}{2}}d\xi\\
&\leq C\int_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^{N-1}\\|\xi|\leq 1}} |\xi|^{i+4j-l+3-1/2}e^{-\frac{(1+\mu)|\xi|^4}{2}}d\xi,
\end{aligned} \tag{5.14}$$

sendo que na última desigualdade acima usamos o fato de que, para $k=1,\ldots,l$, as funções $g_k(\xi,\mu)=|\xi|^{1/2}(1+\mu)^k e^{-\frac{(1+\mu)|\xi|^4}{2}}$, com $|\xi|\leq 1, \mu\in[0,\infty)$ são limitadas. Continuando as estimativas

$$\begin{aligned}
&\int_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^{N-1}\\|\xi|\leq 1}} |\xi|^{i+4j-l+3-1/2}e^{-\frac{(1+\mu)|\xi|^4}{2}}d\xi\\
&\leq C\int_0^1 r^{i+4j-l+1/2+N}e^{-\frac{(1+\mu)r^4}{2}}dr\\
&= C(1+\mu)^{(l-i-4j-N+1-2+\frac{1}{2})/4}\int_0^{(1+\mu)^{1/4}} s^{i+4j-l+N+1/2}e^{-s^4/2}ds\\
&\leq C(1+\mu)^{(l-i-4j-N+1)/4}(1+\mu)^{-3/8}\int_0^{\infty} s^{i+4j-l+N+1/2}e^{-s^4/2}ds\\
&\leq C(1+\mu)^{(l-i-4j-N+1)/4},
\end{aligned} \tag{5.15}$$

sendo que na última desigualdade acima usamos que $l\leq i+4j+N+1$ implica que $\int_0^\infty s^{i+4j-l+N+1/2}e^{-s^4/2}ds\leq C$. De fato, como $N\geq 2$, se $l\leq i+4j+N$ então $i+4j-l+N+1/2\geq 0$ e portanto $\int_0^\infty s^{i+4j-l+N+1/2}e^{-s^4/2}ds\leq C$; se $l=i+4j+N+1$ $\int_0^\infty s^{i+4j-l+N+1/2}e^{-s^4/2}ds=\int_0^\infty s^{-1/2}e^{-s^4/2}ds=\int_0^1 s^{-1/2}e^{-s^4/2}ds+\int_1^\infty s^{-1/2}e^{-s^4/2}ds\leq \tilde{C}+\int_1^\infty e^{-s^4/2}ds\leq\tilde{C}+\int_1^\infty s^3e^{-s^4/2}ds\leq C$. Utilizando (5.14) concluímos, para $\bar{l}=1$, que

$$\begin{aligned}
&\int_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^{N-1}\\|\xi|\leq 1}} |\xi|^{i+4j-l}\sum_{k=\bar{l}}^{l}(|\xi|^3+\mu|\xi|^4)^k e^{-|\xi|^3-\mu|\xi|^4}d\xi\\
&\leq C(1+\mu)^{(l-i-4j-N+1)/4}.
\end{aligned}$$

Caso II.2: se $|\xi| \leq 1$ e $\bar{l} = 0$, ou seja, $l - i - 4j \leq 0$.

$$
\begin{aligned}
&\int_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^{N-1}\\|\xi|\leq 1}} |\xi|^{i+4j-l} \sum_{k=\bar{l}}^{l} (|\xi|^3 + \mu|\xi|^4)^k e^{-|\xi|^3-\mu|\xi|^4} d\xi \\
&\leq \int_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^{N-1}\\|\xi|\leq 1}} |\xi|^{i+4j-l} \sum_{k=0}^{l} (1+\mu)^k |\xi|^{3k} e^{-(1+\mu)|\xi|^4} d\xi \\
&\leq \int_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^{N-1}\\|\xi|\leq 1}} |\xi|^{i+4j-l} e^{-(1+\mu)|\xi|^4} d\xi + \int_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^{N-1}\\|\xi|\leq 1}} |\xi|^{i+4j-l} \sum_{k=1}^{l} (1+\mu)^k |\xi|^{3k} e^{-(1+\mu)|\xi|^4} d\xi.
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

Como $i + 4j - l + N - 2 \geq 0$, temos

$$
\begin{aligned}
\int_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^{N-1}\\|\xi|\leq 1}} |\xi|^{i+4j-l} e^{-(1+\mu)|\xi|^4} d\xi &\leq C \int_0^1 r^{i+4j-l+N-2} e^{-(1+\mu)r^4} dr \\
&\leq C(1+\mu)^{(l-i-4j-N+1)/4} \int_0^{(1+\mu)^{1/4}} s^{i+4j-l+N-2} e^{-s^4} ds \\
&\leq C(1+\mu)^{(l-i-4j-N+1)/4} \int_0^{\infty} s^{i+4j-l+N-2} e^{-s^4} ds \\
&\leq C(1+\mu)^{(l-i-4j-N+1)/4}.
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

Repetindo as contas feitas em (5.14) e (5.15), mas agora utilizando que $i + 4j - l + N + 1/2 \geq 0$ temos

$$
\begin{aligned}
&\int_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^{N-1}\\|\xi|\leq 1}} |\xi|^{i+4j-l} \sum_{k=1}^{l} (1+\mu)^k |\xi|^{3k} e^{-(1+\mu)|\xi|^4} d\xi \\
&\leq C(1+\mu)^{(l-i-4j-N+1)/4} (1+\mu)^{-3/8} \int_0^{\infty} s^{i+4j-l+N+1/2} e^{-s^4/2} ds \\
&\leq C(1+\mu)^{(l-i-4j-N+1)/4}.
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

As relações (5.16), (5.17) e (5.18) implicam, para $\bar{l} = 0$, que

$$\int_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^{N-1}\\|\xi|\leq 1}} |\xi|^{i+4j-l}\sum_{k=\bar{l}}^{l}(|\xi|^3+\mu|\xi|^4)^k e^{-|\xi|^3-\mu|\xi|^4}d\xi \leq C(1+\mu)^{(l-i-4j-N+1)/4}.$$

O que conclui a demonstração da Afirmação.

Agora, façamos as estimativas para o operador $\mathcal{N}$ definido em (5.7). Note que a primeira estimativa do lema a seguir não depende da continuidade de Hölder de f na direção do tempo t.

Lema 5.3. *Seja $\mathcal{N}$ definido como em (5.7). Temos as seguintes estimativas*

$$\|D_{y'}\mathcal{N}[f]\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3}+\|D_t\mathcal{N}[f]-f\|_{\alpha,\alpha/4}+\epsilon\|D^4_{y'}\mathcal{N}[f]\|_{\alpha,\alpha/4}\leq C\|f\|_{\alpha,0}. \tag{5.19}$$

Além disso, se $\epsilon=0$, para todo inteiro k não-negativo temos

$$\|\mathcal{N}[f]\|_{k+3+\alpha,(k+3+\alpha)/3}\leq C\|f\|_{k+\alpha,(k+\alpha)/3}. \tag{5.20}$$

Demonstração. Primeiro vamos estimar a norma L^∞ de $\mathcal{N}[f]$.

Temos que $\int_{\mathbb{R}^{N-1}} D^m_{y'}D^n_t K_\epsilon(y',t)dy'=\delta_{m+n,0}$ onde δ é o delta de Kronecker; por (5.11) temos para toda $g\in C^\alpha(\mathbb{R}^{N-1})$

$$\begin{aligned}
&\left|D^m_{y'}D^n_t\mathcal{S}^t[g](y')-\delta_{m+n,0}g(y')\right|\\
=&\left|\int_{\mathbb{R}^{N-1}} D^m_\sigma D^n_t K_\epsilon(\sigma,t)[g(y'-\sigma)-g(y')]d\sigma\right|\\
\leq&\ \|g\|_\alpha\int_{\mathbb{R}^{N-1}}|\sigma|^\alpha\|D^m_\sigma D^n_t K_\epsilon(\sigma,t)|d\sigma\\
\leq&\ Ct^{-n}(t^{4/3}+\epsilon t)^{(\alpha-m)/4}\|g\|_\alpha.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Dado que $\mathcal{N}[f](y',t)-\int_0^t f(y',\tau)d\tau=\int_0^t(\mathcal{S}^\tau-id)[f(y',t-\tau)]d\tau$, a relação acima para

$m = n = 0$ implica, para cada $t \in [0, T]$

$$\|\mathcal{N}[f] - \int_0^t f\|_0 \leq C \int_0^t (\tau^{4/3} + \epsilon\tau)^{\alpha/4} \|f(t-\tau)\|_\alpha d\tau \leq Ct(t^{4/3} + \epsilon t)^{\alpha/4} \|f\|_{\alpha,0}.$$

Tomemos agora as normas de Hölder na variável espacial y'.

Sejam $y_1', y_2' \in \mathbb{R}^{N-1}$, $y_1' \neq y_2'$. Defina $d = |y_1' - y_2'|$ e seja $\delta > 0$ constante a ser determinada. Para $m = 3$ ou $m = 4$, utilizando (5.21), a fórmula $D_{y'}^m \mathcal{N}[f](y', t) = \int_0^t D_{y'}^m \mathcal{S}^\tau [f(t-\tau)] d\tau$ e o teorema do valor médio temos

$$\begin{aligned} &|D_{y'}^m \mathcal{N}[f](y_1', t) - D_{y'}^m \mathcal{N}[f](y_2', t)| \\ &\leq 2 \int_0^{\min(t,\delta)} \|D_{y'}^m \mathcal{S}^\tau [f(t-\tau)]\|_0 d\tau + d \int_{\min(t,\delta)}^t \|D_{y'}^{m+1} \mathcal{S}^\tau [f(t-\tau)]\|_0 d\tau \\ &\leq C \Big\{ \int_0^{\min(t,\delta)} [\tau^{4/3} + \epsilon\tau]^{(\alpha-m)/4} \|f(t-\tau)\|_\alpha d\tau + \\ &2d \int_{\min(t,\delta)}^t [\tau^{4/3} + \epsilon\tau]^{(\alpha-1-m)/4} \|f(t-\tau)\|_\alpha d\tau \Big\}. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Tomando $\delta = d^3$ e $m = 3$ nas desigualdades acima temos

- Se min(t,δ)=t, ou seja, $t \leq d^3$.

$$\begin{aligned} &|D_{y'}^3 \mathcal{N}[f](y_1', t) - D_{y'}^3 \mathcal{N}[f](y_2', t)| \\ &\leq C \int_0^{\min(t,\delta)} [\tau^{4/3} + \epsilon\tau]^{(\alpha-3)/4} \|f(t-\tau)\|_\alpha d\tau + \\ &C2d \int_{\min(t,\delta)}^t [\tau^{4/3} + \epsilon\tau]^{(\alpha-4)/4} \|f(t-\tau)\|_\alpha d\tau \\ &= C \int_0^t [\tau^{4/3} + \epsilon\tau]^{(\alpha-3)/4} \|f(t-\tau)\|_\alpha d\tau \\ &\leq C\|f\|_{\alpha,0} \int_0^t \tau^{\alpha/3-1} d\tau = C\|f\|_{\alpha,0} t^{\alpha/3} \leq C\|f\|_{\alpha,0} d^\alpha = C\|f\|_{\alpha,0} |y_1' - y_2'|^\alpha. \end{aligned}$$

- Se min(t,δ)=δ, ou seja, $t \geq d^3$.

$$
\begin{aligned}
&|D^3_{y'}\mathcal{N}[f](y'_1,t) - D^3_{y'}\mathcal{N}[f](y'_2,t)| \\
&\leq C\int_0^{\min(t,\delta)} [\tau^{4/3}+\epsilon\tau]^{(\alpha-3)/4}\|f(t-\tau)\|_\alpha d\tau + \\
&+C2d\int_{\min(t,\delta)}^{t} [\tau^{4/3}+\epsilon\tau]^{(\alpha-4)/4}\|f(t-\tau)\|_\alpha d\tau \\
&= \int_0^{\delta} [\tau^{4/3}+\epsilon\tau]^{(\alpha-3)/4}\|f(t-\tau)\|_\alpha d\tau + \\
&+2d\int_{\delta}^{t} [\tau^{4/3}+\epsilon\tau]^{(\alpha-4)/4}\|f(t-\tau)\|_\alpha d\tau \\
&\leq \|f\|_{\alpha,0}\int_0^{\delta}\tau^{\alpha/3-1}d\tau + 2d\|f\|_{\alpha,0}\int_{\delta}^{t}\tau^{(\alpha-4)/3}d\tau \\
&\leq C\|f\|_{\alpha,0}d^\alpha + C\|f\|_{\alpha,0}(d^{\alpha-1}+t^{(\alpha-1)/3}) \leq C\|f\|_{\alpha,0}d^\alpha = C\|f\|_{\alpha,0}|y'_1-y'_2|^\alpha.
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow |D^3_{y'}\mathcal{N}[f](y'_1,t) - D^3_{y'}\mathcal{N}[f](y'_2,t)| \leq C\|f\|_{\alpha,0}|y'_1-y'_2|^\alpha. \tag{5.23}
$$

De maneira análoga ao caso $m = 3$, usando que $[\tau^{4/3}+\epsilon\tau]^{(\alpha-4)/4} \leq (\epsilon\tau)^{\alpha/4-1}$, tomamos $m = 4$ e $\delta = \epsilon^{-1}d^4$ em (5.22) e concluímos que

$$
\epsilon|D^4_{y'}\mathcal{N}[f](y'_1,t) - D^4_{y'}\mathcal{N}[f](y'_2,t)| \leq C\|f\|_{\alpha,0}|y'_1-y'_2|^\alpha. \tag{5.24}
$$

Estimemos agora as normas de Hölder de $D_t\mathcal{N}[f]$.

Tomando $\delta > 0$ tal que $\delta^{4/3}+\epsilon\delta = d^4 = |y'_1-y'_2|^4$, pelo teorema do valor médio, (5.21) e usando que para $0 < \gamma < 1, a, b \geq 0$ $(a+b)^\gamma \leq a^\gamma + b^\gamma \leq 2(a+b)^\gamma$, temos

$$
\begin{aligned}
&|D_t\mathcal{N}[f](y_1',t) - D_t\mathcal{N}[f](y_2',t)| \\
&\leq \int_0^{\min(\delta,t)} \tau^{-1}(\tau^{4/3}+\epsilon\tau)^{\alpha/4}\|f(t-\tau)\|_\alpha d\tau + \\
&+d\int_{\min(\delta,t)}^t \tau^{-1}(\tau^{4/3}+\epsilon\tau)^{(\alpha-1)/4}\|f(t-\tau)\|_\alpha d\tau \\
&\leq C\|f\|_{\alpha,0}[\min(\delta,t)^{4/3}+\epsilon\min(\delta,t)]^{\alpha/4} + \\
&+d\|f\|_{\alpha,0}\int_{\min(\delta,t)}^t \tau^{-1}(\tau^{4/3}+\epsilon\tau)^{(\alpha-1)/4}d\tau \\
&\leq C\|f\|_{\alpha,0}[\delta^{4/3}+\epsilon\delta]^{\alpha/4} + \\
&+d\|f\|_{\alpha,0}\int_{\min(\delta,t)}^t \tau^{-1}(\tau^{4/3}+\epsilon\tau)^{(\alpha-1)/4}d\tau.
\end{aligned}
$$

Portanto, no caso em que $\min(t,\delta)=t$ segue das desigualdades acima que

$$|D_t\mathcal{N}[f](y_1',t) - D_t\mathcal{N}[f](y_2',t)| \leq C\|f\|_{\alpha,0}|y_1'-y_2'|^\alpha.$$

Agora, se $\min(t,\delta)=\delta$, temos (lembrando que $\delta^{4/3}+\epsilon\delta = d^4$)

$$
\begin{aligned}
\int_{\min(\delta,t)}^t \tau^{-1}(\tau^{4/3}+\epsilon\tau)^{(\alpha-1)/4}d\tau &\leq \min\Big(\int_\delta^t \tau^{-1}\tau^{(\alpha-1)/3}d\tau, \int_\delta^t \tau^{-1}(\epsilon\tau)^{(\alpha-1)/4}d\tau\Big) \\
&\leq C\min(\delta^{(\alpha-1)/3}, (\epsilon\delta)^{(\alpha-1)/4}) \leq Cd^\alpha.
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow |D_t\mathcal{N}[f](y_1',t) - D_t\mathcal{N}[f](y_2',t)| \leq C\|f\|_{\alpha,0}|y_1'-y_2'|^\alpha. \tag{5.25}$$

Agora vamos fazer estimativas de Hölder para $\mathcal{N}$ na variável temporal t. Sejam $t_1, t_2 \in [0,T]$, $t_1 < t_2$ e $y' \in \mathbb{R}^{N-1}$. Defina $\delta = t_2 - t_1$. Segue de (5.21), para $m = 1,2,3,4$, que

$$
\begin{aligned}
&|D_{y'}^m \mathcal{N}[f](y',t_1) - D_{y'}^m \mathcal{N}[f](y',t_2)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{2} \int_{\max(0,t_1-2\delta)}^{t_i} \|D_{y'}^m \mathcal{S}^{t_i-\tau}[f(\tau)]\|_0 d\tau + \\
&+ \int_0^{\max(0,t_1-2\delta)} \int_{t_1}^{t_2} \|D_{\bar{\tau}} D_{y'}^m \mathcal{S}^{\bar{\tau}+t_1-\tau}[f(\tau)]\|_0 d\bar{\tau} d\tau \\
&\leq C\Big\{ \sum_{i=1}^{2} \int_0^{\min(t_i,t_i-t_1+2\delta)} [\tau^{4/3}+\epsilon\tau]^{(\alpha-m)/4} \|f(t_i-\tau)\|_\alpha d\tau + \\
&+\delta \int_{min(2\delta,t_1)}^{t_1} \tau^{-1}[\tau^{4/3}+\epsilon\tau]^{(\alpha-m)/4} \|f(t_1-\tau)\|_\alpha d\tau \Big\}
\end{aligned}
$$

Com argumentos análogos aos utilizados quando fizemos as estimativas de Hölder no espaço, obtemos

$$
|D_{y'}^m \mathcal{N}[f](y',t_1) - D_{y'}^m \mathcal{N}[f](y',t_2)| \leq C\|f\|_{\alpha,0}|t_1-t_2|^{(3-m+\alpha)/3} \quad m=1,2,3. \tag{5.26}
$$

e

$$
\epsilon|D_{y'}^4 \mathcal{N}[f](y',t_1) - D_{y'}^4 \mathcal{N}[f](y',t_2)| \leq C\epsilon^{\alpha/4}\|f\|_{\alpha,0}|t_1-t_2|^{\alpha/4} \tag{5.27}
$$

Uma vez que $D_t\mathcal{N}[f] = f + \int_0^t D_t\mathcal{S}^{(t-\tau)}[f(\tau)]d\tau$, também verifica-se que

$$
|(D_t\mathcal{N}[f]-f)(y',t_1) - (D_t\mathcal{N}[f]-f)(y',t_2)| \leq C\|f\|_{\alpha,0}(|t_2-t_1|^{4/3}+\epsilon|t_2-t_1|)^{\alpha/4} \tag{5.28}
$$

As estimativas (5.23) - (5.28) implicam que (5.19) é válido, ou seja

$$
\|D_{y'}\mathcal{N}[f]\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} + \|D_t\mathcal{N}[f]-f\|_{\alpha,\alpha/4} + \epsilon\|D_{y'}^4\mathcal{N}[f]\|_{\alpha,\alpha/4} \leq C\|f\|_{\alpha,0}.
$$

Finalmente, considere o caso em que $\epsilon = 0$. Por (5.28) segue que (5.20) é válido para $k=0$. Usando a relação $D_{y'}^m\mathcal{N}[f] = \mathcal{N}[D_{y'}^m f]$ e o Lema 5.1 verifica-se que (5.20) é válido para $k \geq 0$.

□

Agora que já estabelecemos, pelos Lemas 5.2 e 5.3, estimativas para K_ϵ e $\mathcal{N}$, vamos demonstrar a existência e regularidade de solução para o Problema Modelo (5.5) considerado no início desta seção.

Lema 5.4. *Assuma que $\vec{f_1}$ e f_2 se anulam fora de $B_1(0) \times [0,T]$. Então o problema (5.5) possui uma solução (v, ϕ) satisfazendo*

$$\begin{aligned}&\|D_{y'}\phi\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} + \|D_t\phi\|_{\alpha,\alpha/4} + \epsilon\|D^4_{y'}\phi\|_{\alpha,\alpha/4} \leq \\ &\leq C(\|\vec{f_1}\|_{\alpha,0} + \|f_2\|_{0,0} + \|f_3\|_{1+\alpha,0} + \|f\|_{\alpha,0})\end{aligned}$$

Demonstração. Seja w a solução de

$$\begin{aligned}&\Delta w = div\vec{f_1} + f_2 \text{ em } \mathbb{R}^{N-1} \times \{y_N > 0\} \times [0,T],\\ &w = f_3 \text{ em } \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\} \times [0,T].\end{aligned}$$

Como $\vec{f_1}$ e f_2 tem suporte compacto, por estimativas elípticas (Gilbarg-Trudinger [5], demonstração do Teorema 8.34, Cap. 8) temos

$$\|w\|_{1+\alpha,0} \leq C(\|\vec{f_1}\|_{\alpha,0} + \|f_2\|_{0,0} + \|f_3\|_{1+\alpha,0}) \tag{5.29}$$

Considere o problema

$$\begin{aligned}&\Delta\bar{v}(y', y_N, t) = 0, \text{ em } \mathbb{R}^{N-1} \times \{y_N > 0\} \times \{t \geq 0\},\\ &\bar{v}(y', 0, t) = \Delta_{y'}\phi(y', t), \text{ em } \mathbb{R}^{N-1} \times \{t \geq 0\},\\ &\phi_t + \partial_{y_N}\bar{v} + \epsilon(\Delta_{y'})^2\phi = f - \partial_{y_N}w, \text{ em } \mathbb{R}^{N-1} \times \{t > 0\},\\ &\phi(y', 0) = 0, \text{ em } \mathbb{R}^{N-1}.\end{aligned}$$

Ele possui solução $(\bar{v}, \phi)$ (encontrada por transformada de Fourier, $\vec{f_1} \equiv 0, f_2 = f_3 = 0$ e $f = f - \partial_{y_N}w$).

$$\phi(y',t) = \mathcal{N}[f - \partial_{y_N} w](y',t)$$

Do Lema 5.3 e , e também do fato que $D_t\mathcal{N}[f] = f + \int_0^t D_t\mathcal{S}^{(t-\tau)}[f(\tau)]d\tau$ segue

$$\begin{aligned}
&\|D_{y'}\phi\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} + \|D_t\phi\|_{\alpha,\alpha/4} + \epsilon\|D^4_{y'}\phi\|_{\alpha,\alpha/4} \leq \\
&\leq \|D_{y'}\mathcal{N}[f - \partial_{y_N} w]\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} + \|(f - \partial_{y_N} w) + D_t\mathcal{N}[f - \partial_{y_N}]\|_{\alpha,\alpha/4} + \\
&\quad + \epsilon\|D^4_{y'}\mathcal{N}[f - \partial_{y_N} w]\|_{\alpha,\alpha/4} \\
&\leq C\|f - \partial_{y_N} w\|_{\alpha,0} \leq C(\|f\|_{\alpha,0} + \|w\|_{1+\alpha,0}) \\
&\leq C(\|f\|_{\alpha,0} + \|\vec{f_1}\|_{\alpha,0} + \|f_2\|_{0,0} + \|f_3\|_{1+\alpha,0}).
\end{aligned}$$

sendo que a última desigualdade segue de (5.29).

Considere $v = w + \bar{v}$. Então (v,ϕ) é solução de (5.5) e satisfaz as condições do lema.

□

Lema 5.5. *Assuma que (v,ϕ) é solução de (5.5) e que v e ϕ possuem suporte compacto. Então (v,ϕ) é a única solução para (5.5).*

Demonstração. Dada a linearidade do problema, basta mostrar que se $\vec{f_1} \equiv 0$, $f_2 = f_3 = f = 0$, então o fato de que v, ϕ possuem suporte compacto implica que $v = \phi = 0$.

Por hipótese, seguinte sistema é satisfeito por v e ϕ

$$\begin{aligned}
&\Delta v(y', y_N, t) = 0, \quad y' \in \mathbb{R}^{N-1}, y_N > 0, \\
&v(y',0,t) - \Delta_{y'}\phi(y',t) = 0, \quad y' \in \mathbb{R}^{N-1}, t \geq 0, \\
&\phi'_t + \partial_{y_N} v(y',0,t) + \epsilon(\Delta_{y'})^2\phi = 0, \quad y' \in \mathbb{R}^{N-1}, t > 0, \\
&\phi(y',0) = 0, \quad y' \in \mathbb{R}^{N-1}.
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Integrando a primeira equação acima multiplicada por v, utilizando o teorema de Fubini e integração por partes temos, para cada $t \in [0,T]$

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Delta_{y'} v(y', y_N, t) v(y', y_N, t) dy' dy_N + \\
&+ \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \partial_{y_N y_N} v(y', y_N, t) v(y', y_N, t) dy' dy_N \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla v(y,t)|^2 dy + \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\partial_{y_N} v(y', y_N, t) v(y', y_N, t) \vec{n}_N\right)\Big|_{\{y_N=0\}} dy' \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla v(y,t)|^2 dy - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \partial_{y_N} v(y', 0, t) v(y', 0, t) dy',
\end{aligned}
$$

onde $\vec{n}_N = -1$ é a N-ésima componente da normal $\vec{n}$ exterior a $\mathbb{R}^N_+$.

Agora, utilizando a segunda e a terceira equação de (5.30)

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla v(y,t)|^2 dy &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} [\phi_t(y',t) + \epsilon(\Delta_{y'})^2 \phi(y',t)] \Delta_{y'} \phi(y',t) dy' \\
= -\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \nabla_{y'} \phi(y',t) \cdot \nabla_{y'} \phi_t(y',t) dy' &- \epsilon \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \nabla_{y'} \phi(y',t) \cdot \nabla_{y'} ((\Delta_{y'})^2 \phi(y',t)) dy' \\
= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\nabla_{y'} \phi(y',t)|^2 dy' &- \epsilon \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \nabla_{y'} \phi(y',t) \Delta_{y'} (\nabla_{y'} \Delta_{y'} \phi(y',t)) dy' \\
= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\nabla_{y'} \phi(y',t)|^2 dy' &+ \epsilon \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Delta_{y'} \phi(y',t) \nabla_{y'} (\nabla_{y'} \Delta_{y'} \phi(y',t)) dy' \\
= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\nabla_{y'} \phi(y',t)|^2 dy' &- \epsilon \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\nabla_{y'} \Delta_{y'} \phi(y',t)|^2 dy'
\end{aligned}
$$

Integrando de 0 a t, e usando que $\phi(y', 0) = 0$

$$
0 \leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla v(y,t)|^2 dy dt =
$$

$$
-\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\nabla_{y'} \phi(y',t)|^2 dy' - \epsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\nabla_{y'} \Delta_{y'} \phi(y',t)|^2 dy' dt \leq 0
$$

O que implica que $\nabla v(y,t) = 0, y \in \mathbb{R}^N_+$, portanto $v(y,t) = p(t)$, ou seja, v só depende da variável t. Como, por hipótese, v tem suporte compacto, segue que $v \equiv 0$. Colocando $v = 0$ na segunda e na quarta equação de (5.30), temos

$$\begin{aligned}
&\Delta_{y'}\phi(y',t) = 0, \quad y' \in \mathbb{R}^{N-1}, t \geq 0,\\
&\phi(y',0) = 0, \quad y' \in \mathbb{R}^{N-1}.
\end{aligned}$$

como ϕ satisfaz o problema acima e, por hipótese, tem suporte compacto, segue que $\phi \equiv 0$. □

Observação 5.2: Note que (5.21) é o único lugar onde precisamos das propriedades específicas de K_ϵ, isto é, da estimativa (5.11) do Lema 5.2. Se substituirmos na primeira equação do Problema Modelo 5.5 Δv por $\sum_{i,j=1}^{N} \tilde{a}_{ij}\partial_{y_i y_j}$ e na segunda equação $\Delta_{y'}$ por $\sum_{k,l=1}^{N-1} \tilde{A}_{kl}\partial_{y'_k y'_l}$, onde ambas as matrizes $(\tilde{a}_{ij})_{N\times N}$ e $(\tilde{A}_{kl})_{(N-1)\times(N-1)}$ são constantes e positivas definidas, argumentos análogos aos utilizados nessa seção mostram que as afirmações nos Lemas 5.1-5.4 continuam valendo. A única diferença é que $|\xi|^3$ na definição de K_ϵ é substituido por

$$\frac{1}{\tilde{a}_{NN}}\Big(\sum_{k,l=1}^{N-1}\tilde{A}_{kl}\xi_k\xi_l\Big)\Big(2\tilde{a}_{NN}(\sum_{i,j=1}^{N-1}\tilde{a}_{ij}\xi_i\xi_j) + (\sum_{i=1}^{N-1}(\tilde{a}_{iN}+\tilde{a}_{Ni})\xi_i)^2\Big)^{1/2}.$$

5.3 Problema Linear

Tome $\rho \in \mathcal{A}_T = \{\rho \in C^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}(\Gamma_0 \times [0,T]); \rho(\cdot,0) = 0 \text{ e } \|\rho\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} \leq 1\}$. A fim de caracterizar a solução do problema (5.4), vamos analisar o seguinte problema regularizado para $(v^\epsilon, \phi^\epsilon)$

$$\begin{aligned}
&L^\rho v^\epsilon(y,t) = -h(y,t) \text{ em } \Omega_0 \times [0,T],\\
&v^\epsilon(s,t) = \sum_{k,l=1}^{N-1} A^\rho_{kl}\phi^\epsilon_{y'_k y'_l} + B^\rho(s,t) \text{ em } \Gamma_0 \times [0,T],\\
&\phi^\epsilon_t(s,t) - l^\rho(\partial_n v^\epsilon(s,t)) + \epsilon(\Delta_{\Gamma_0})^2\phi^\epsilon(s,t) = 0 \text{ em } \Gamma_0 \times [0,T],\\
&\phi^\epsilon(s,0) = 0 \text{ em } \Gamma_0.
\end{aligned} \tag{5.31}$$

onde $\epsilon \in (0,1]$ é um parâmetro fixo e Δ_{Γ_0} é o operador de Laplace-Beltrami em Γ_0.

Na sequência, funções de y' são entendidas tomando as cartas locais $Z = Z^{s_0}(y')$ introduzidas na Seção 5.1. Por simplicidade, os superíndices s_0 serão omitidos.

Lema 5.6. *Se $\rho \in \mathcal{A}_T$ então o problema (5.31) admite solução única $(v^\epsilon, \phi^\epsilon)$, com $\phi^\epsilon \in C^{4+\alpha,(4+\alpha)/4}(\Gamma_0 \times [0,T])$.*

Demonstração. Para cada $\phi^\epsilon \in C^{3+\alpha,(3+\alpha)/4}(\Gamma_0 \times [0,T])$, seja $v^\epsilon(t)$ a solução das duas primeiras equações de (5.31), pela teoria de equações elípticas (Gilbarg-Trudinger [5], demonstração do Teorema 8.34, Cap. 8), temos a seguinte estimativa para $v^\epsilon(t)$, para cada $t \in [0,T]$

$$\|v^\epsilon(t)\|_{1+\alpha} \leq C(L^\rho(t))\Big\{(\|h(t)\|_0 + \|\sum_{k,l=1}^{N-1} A^\rho_{kl}\phi^\epsilon_{y'_k y'_l}(t) + B^\rho(t)\|_{1+\alpha}\Big\}.$$

Como $\rho \in \mathcal{A}_T$, temos que L^ρ é uniformemente elíptico com coeficientes Hölder contínuos e uniformemente limitados em t (lembre que, por (5.3), $\rho \in \mathcal{A}_T \Rightarrow \|\rho\|_0 \leq 2\delta$ e que $A^\rho_{kl} = A_{kl}(y', \rho^{s_0}, D_{y'}\rho^{s_0})$). Portanto

$$\|v^\epsilon\|_{1+\alpha,0;\Gamma_0(L_0)} \leq C(\|B^\rho\|_{1+\alpha,0} + \|h\|_0 + \|\phi\|_{3+\alpha,0}) \leq C(M_0 + \|\phi^\epsilon\|_{3+\alpha,0}), \tag{5.32}$$

onde

$$M_0 := \sup_{\rho\in\mathcal{A}_T} \|B^\rho\|_{1+\alpha,(1+\alpha)/3} + \|h\|_{0,0}. \tag{5.33}$$

Sejam $t_1, t_2 \in [0,T]$, $t_1 \neq t_2$. Defina $w^\epsilon = v^\epsilon(t_1) - v^\epsilon(t_2)$, então

$$
\begin{aligned}
&L^{\rho(t_1)}w^\epsilon = \sum_{j=1}^{N}\Big(\sum_{i=1}^{N}(a_{ij}^{\rho(t_2)} - a_{ij}^{\rho(t_1)})v^\epsilon_{y_i}(t_2)\Big)_{y_j} + \\
&+\sum_{j=1}^{N}(b_j^{\rho(t_2)} - b_j^{\rho(t_1)})v^\epsilon_{y_j}(t_2) + h(t_2) - h(t_1) = div\vec{F}_1 + F_2 \text{ em } \Omega, \\
&w^\epsilon = \sum_{k,l=1}^{N-1}\Big(A_{kl}^{\rho(t_1)}(\phi^\epsilon_{y'_k y'_l}(t_1) - \phi^\epsilon_{y'_k y'_l}(t_2)) + \\
&+(A_{kl}^{\rho(t_1)} - A_{kl}^{\rho(t_2)})\phi^\epsilon_{y'_k y'_l}(t_2)\Big) + B^{\rho(t_1)} - B^{\rho(t_2)} \text{ em } \Gamma_0.
\end{aligned}
$$

Por estimativas elípticas (Gilbarg-Trudinger [5], demonstração do Teorema 8.34, Cap. 8) temos

$$
\begin{aligned}
\|v^\epsilon(t_1) - v^\epsilon(t_2)\|_{1+\alpha} \leq C\Big\{\|\sum_{i,j=1}^{N}(a_{ij}^{\rho(t_2)} - a_{ij}^{\rho(t_1)})v_{y_i}(t_2)\|_\alpha + \\
+\|\sum_{j=1}^{N}(b_j^{\rho(t_2)} - b_j^{\rho(t_1)})v^\epsilon_{y_j}(t_2) + h(t_2) - h(t_1)\|_0 + \\
+\|\sum_{k,l=1}^{N-1}\Big(A_{kl}^{\rho(t_1)}(\phi_{y'_k y'_l}(t_1) - \phi^\epsilon_{y'_k y'_l}(t_2)) + (A_{kl}^{\rho(t_1)} - A_{kl}^{\rho(t_2)})\phi^\epsilon_{y'_k y'_l}(t_2)\Big)\|_{1+\alpha} + \\
+\|B^{\rho(t_1)} - B^{\rho(t_2)}\|_{1+\alpha}\Big\},
\end{aligned}
$$

com C independente do tempo pois os coeficientes a_{ij}, b_i são uniformemente limitados em t. Lembrando que $\rho \in \mathcal{A}_T \Rightarrow \|\rho\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} \leq 1+\delta$, que $h \in C^{\alpha,\alpha/3}$, $\phi^\epsilon \in C^{3+\alpha,(3+\alpha)/4}$, da definição dos coeficientes $a_{ij}(y,\rho,D\rho)$ e $b_i(y,\rho,D\rho,D^2\rho)$ apresentadas em (5.2), $A^\rho_{kl} = A_{kl}(y',\rho,D\rho)$ especificada em Chen e Retich [18] e da desigualdade (5.32); depois de uma série de manipulações algébricas simples, porém trabalhosas, concluímos

$$
\begin{aligned}
\|v^\epsilon(t_1) - v^\epsilon(t_2)\|_{1+\alpha} \leq C\Big\{C_1|t_2 - t_1|^{(1+\alpha)/3}(M_0 + \|\phi^\epsilon\|_{3+\alpha,0}) + \\
+C_2|t_2 - t_1|^{\alpha/3}(M_0 + \|\phi^\epsilon\|_{3+\alpha,0}) + C_3|t_2 - t_1|^{\alpha/3} + \\
+C_4|t_2 - t_1|^{(1+\alpha)/4}\|D^2\phi^\epsilon\|_{1+\alpha,(1+\alpha)/4} + C_5|t_2 - t_1|^{\alpha/3}\|\phi^\epsilon\|_{3+\alpha,0} + \\
+C_6 M_0|t_2 - t_1|^{(1+\alpha)/3}\Big\} \leq C|t_2 - t_1|^{\alpha/3}(M_0 + \|\phi^\epsilon\|_{3+\alpha,(3+\alpha)/4}) \\
\leq C|t_2 - t_1|^{\alpha/4}(M_0 + \|\phi^\epsilon\|_{3+\alpha,(3+\alpha)/4}),
\end{aligned}
$$

onde M_0 é dado por (5.33). Portanto, temos

$$\|D_y v^\epsilon\|_{\alpha,\alpha/4;\Gamma_0(L_0)} \leq C(M_0 + \|\phi^\epsilon\|_{3+\alpha,(3+\alpha)/4})$$

e

$$\|l^\rho \partial_n v^\epsilon\|_{\alpha,\alpha/4} \leq C(M_0 + \|\phi^\epsilon\|_{3+\alpha,(3+\alpha)/4}).$$

Agora, seja $\bar{\phi}^\epsilon$ a solução de

$$\bar{\phi}^\epsilon_t(s,t) + \epsilon(\Delta_{\Gamma_0})^2 \bar{\phi}^\epsilon(s,t) = l^\rho(\partial_n v^\epsilon(s,t)) \text{ em } \Gamma_0 \times [0,T],$$
$$\bar{\phi}^\epsilon(s,0) = 0 \text{ em } \Gamma_0.$$

Por estimativas parabólicas (veja, por exemplo, A. Solonnikov [2])

$$\begin{aligned} \|\bar{\phi}^\epsilon\|_{4+\alpha,(4+\alpha)/4} &\leq C_\epsilon \|l^\rho \partial_n v^\epsilon\|_{\alpha,\alpha/4;\Gamma_0\times[0,T]} \\ &\leq C_\epsilon(M_0 + \|\phi^\epsilon\|_{3+\alpha,(3+\alpha)/4}). \end{aligned} \tag{5.34}$$

Defina $L(\phi^\epsilon) = \bar{\phi}^\epsilon$. Então L é linear e por uma estimativa similar a feita para v^ϵ e $\bar{\phi}^\epsilon$ temos

$$\|L\phi^\epsilon_1 - L\phi^\epsilon_2\|_{4+\alpha,(4+\alpha)/4} \leq C_\epsilon \|\phi^\epsilon_1 - \phi^\epsilon_2\|_{3+\alpha,(3+\alpha)/4}.$$

Uma vez que, (veja Apêndice C)

$$\|L\phi^\epsilon_1 - L\phi^\epsilon_2\|_{3+\alpha,(3+\alpha)/4} \leq \|L\phi^\epsilon_1 - L\phi^\epsilon_2\|_{4,1} T^{(1-\alpha)/4},$$

tomando $T_\epsilon \in (0,T]$ tal que $C_\epsilon T_\epsilon^{(1-\alpha)/4} \leq 1/2$, concluímos que L é uma contração e, portanto, possui um único ponto fixo em $C^{3+\alpha,(3+\alpha)/4}(\Gamma_0 \times [0,T_\epsilon])$, que é uma solução de (5.31) em $[0,T_\epsilon]$. Este ponto fixo satisfaz (5.34) e portanto pertence a $C^{4+\alpha,(4+\alpha)/4}(\Gamma_0 \times [0,T_\epsilon])$

Podemos estabelecer, passo a passo, existência e unicidade de solução para (5.31) em

$[jT_\epsilon, (j+1)T_\epsilon]$ para todos os inteiros j até que $(j+1)T_\epsilon > T$. Então garantimos que (5.31) possui solução única em $C^{4+\alpha,(4+\alpha)/4}(\Gamma_0 \times [0,T])$, uma vez que

$$\|\cdot\|_{4+\alpha,(4+\alpha)/4;U\times[a,c]} \leq C(\|\cdot\|_{4+\alpha,(4+\alpha)/4;U\times[a,b]} + \|\cdot\|_{4+\alpha,(4+\alpha)/4;U\times[b,c]}),$$

onde $a \leq b \leq c$ são números reais.

□

Agora, vamos estabelecer estimativas uniformes para a solução de (5.31) a fim de tomarmos o limite quando $\epsilon \to 0$ e obter soluções de (5.4).

Lema 5.7. *Existem constantes positivas T_0 e C_0 tais que para todo $\epsilon \in (0,1]$ e $\rho \in \mathcal{A}_{T_0}$, a solução de (5.31) satisfaz (em $[0,T_0]$)*

$$\|D_{y'}\phi^\epsilon\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} + \|D_t\phi^\epsilon\|_{\alpha,\alpha/4} + \epsilon\|D^4_{y'}\phi^\epsilon\|_{\alpha,\alpha/4} \leq C_0M,$$

onde M_0 é dado por (5.33).

Demonstração. Para $\beta \in (0,1)$, por estimativas elípticas e pelos mesmos argumentos utilizados no início da demonstração do lema anterior temos que

$$\|v^\epsilon\|_{1+\beta,0;\Gamma_0(L_0)} \leq C_\beta(M_0 + |\phi^\epsilon\|_{3+\beta,0}), \tag{5.35}$$

onde C_β é constante apenas dependendo de β.

Vamos demonstrar este lema usando as estimativas para o problema modelo estudado na Seção 5.2, partição da unidade e a técnica do congelamento de coeficientes.

Seja $R_0 \in (0, L_0)$ uma constante pequena a ser determinada. Seja $\{B(p_l, R_0), p_l \in \Gamma_0, l = 1, \ldots, L\}$ cobertura finita de Γ_0 e $\{\zeta_l(\cdot)\}_{l=1}^L$ funções em $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ com as seguintes propriedades

1. $\sum_{l=1}^{L} \zeta_l(y) = 1$ para todo $y \in \Gamma_0(R_0/10)$;

2. $\zeta_l \geq 0$ e $\zeta_l = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus B(p_l, R_0)$, para $l = 1, \ldots, L$. E também $\|\zeta_l\|_{C^m(\mathbb{R}^N)} \leq C(m)R_0^{-m}$ para todo $m = 1, 2, 3, 4, 5$.

Para cada $l = 1, \ldots, L$, seja $v_l^\epsilon = \zeta_l v^\epsilon$ e $\phi_l^\epsilon = \zeta_l \phi^\epsilon$. Seja $y = Y^l(y', y_N)$ uma função C^∞ que leva $B(0, R_0)$ em $B(p_l, R_0)$, $B(0, R_0) \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\})$ em $\Gamma_0 \cap B(p_l, R_0)$ e também satisfaz $D_{y'_i} Y^j(0) = \delta_{ij}$, $\|D_{y'_i} Y^j(y', y_N) - \delta_{ij}\|_{C^0(B(0,R_0))} \leq CR_0$. Uma vez que $a_{ij}^\rho = \delta_{ij} + O(\|\rho\|_{1,0})$, $A_{kl}^\rho = \delta_{kl} + O(\|\rho\|_{1,0})$ e $l^\rho = 1 + O(\|\rho\|_{1,0})$, com esta transformação $(v_l^\epsilon(Y^l(y', y_N)), \phi_l^\epsilon(Y^l(y', y_N)))$ satisfaz o problema modelo (5.5) , ou seja, é solução do sistema

$$
\begin{aligned}
&\Delta v_l^\epsilon(y', y_N, t) = div \vec{f_1} + f_2, \quad y' \in \mathbb{R}^{N-1}, y_N > 0, t \geq 0 \\
&v_l^\epsilon(y', 0, t) - \Delta_{y'} \phi_l^\epsilon(y', t) = f_3, \quad y' \in \mathbb{R}^{N-1}, t \geq 0, \\
&(\phi_l^\epsilon)_t(y', t) + \partial_{y_N} v_l^\epsilon(y', 0, t) + \epsilon(\Delta_{y'})^2 \phi_l^\epsilon(y', t) = f, \quad y' \in \mathbb{R}^{N-1}, t > 0, \\
&\phi_l^\epsilon(y', 0) = 0, \quad y' \in \mathbb{R}^{N-1}.
\end{aligned}
$$

sendo que as funções $\vec{f_1}, f_2, f_3$ e f possuem suporte em $B(0, R_0) \times [0, T]$ e satisfazem a estimativa

$$
\begin{aligned}
&\|\vec{f_1}\|_{\alpha,0} + \|f_2\|_{0,0} + \|f_3\|_{1+\alpha,0} + \|f\|_{\alpha,0} \\
&\leq C_1(R_0 + \|\rho\|_{1,0})(\|v^\epsilon\|_{1+\alpha,0;\Gamma_0(R_0)\times[0,T]} + \|\phi^\epsilon\|_{3+\alpha,0} + \epsilon\|\phi^\epsilon\|_{4+\alpha,0}) + \\
&+C(R_0)(M_0 + \|v^\epsilon\|_{1,0;\Gamma_0(R_0)\times[0,T]} + \|\phi^\epsilon\|_{3,0} + \epsilon\|\phi^\epsilon\|_{4,0}) =: M,
\end{aligned}
\tag{5.36}
$$

onde C_1 é uma constante independente de R_0 e $\rho \in \mathcal{A}_T$.

Portanto, pela estimativa do Lema 5.4, para cada $l = 1, \ldots, L$, segue que

$$
\begin{aligned}
&\|D_{y'} \phi_l^\epsilon\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} + \|D_t \phi_l^\epsilon\|_{\alpha,\alpha/4} + \epsilon\|D_{y'}^4 \phi_l^\epsilon\|_{\alpha,\alpha/4} \leq \\
&\leq C(\|\vec{f_1}\|_{\alpha,0} + \|f_2\|_{0,0} + \|f_3\|_{1+\alpha,0} + \|f\|_{\alpha,0}) \leq CM.
\end{aligned}
$$

Como $\phi^\epsilon = \phi^\epsilon \sum_{l=1}^{L} \zeta_l = \sum_{l=1}^{L} \phi_l^\epsilon$, obtemos

$$\begin{aligned} &\|D_{y'}\phi^\epsilon\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} + \|D_t\phi^\epsilon\|_{\alpha,\alpha/4} + \epsilon\|D_{y'}^4\phi^\epsilon\|_{\alpha,\alpha/4} \leq \\ &\leq C(\|\vec{f}_1\|_{\alpha,0} + \|f_2\|_{0,0} + \|f_3\|_{1+\alpha,0} + \|f\|_{\alpha,0}) \leq CM. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Usando a estimativa (5.35) com $\beta = \alpha$ para substituir $\|v^\epsilon\|_{1+\alpha,0}$ por $\|\phi^\epsilon\|_{3+\alpha,0}$, com $\beta = \alpha/2$ para substituir $\|v^\epsilon\|_{1,0} \leq \|v^\epsilon\|_{1+\alpha/2,0}$ por $\|\phi^\epsilon\|_{3+\alpha/2,0}$ e lembrando da definição de M, dada em (5.36), temos

$$\begin{aligned} M \leq\ & C_2(R_0 + \|\rho\|_{1,0})(\|\phi^\epsilon\|_{3+\alpha,0} + \epsilon\|\phi^\epsilon\|_{4+\alpha,0}) \\ & + C(R_0)(M_0 + \|\phi^\epsilon\|_{3+\alpha/2,0} + \epsilon\|\phi^\epsilon\|_{4,0}), \end{aligned}$$

onde C_2 é uma constante independente de R_0 e $\rho \in \mathcal{A}_T$.

Segue da desigualdade acima, da estimativa (5.37) e das duas interpolações (veja Gilbarg-Trudinger [5], p. 130) $\|\phi^\epsilon\|_{3+\alpha/2,0} \leq \mu\|\phi^\epsilon\|_{3+\alpha,0} + C_\mu\|\phi^\epsilon\|_{0,0}$ e $\|\phi^\epsilon\|_{4,0} \leq \mu\|\phi^\epsilon\|_{4+\alpha,0} + C_\mu\|\phi^\epsilon\|_{0,0}$, para $\mu > 0$, que

$$\begin{aligned} &\|D_{y'}\phi^\epsilon\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} + \|D_t\phi^\epsilon\|_{\alpha,\alpha/4} + \epsilon\|D_{y'}^4\phi^\epsilon\|_{\alpha,\alpha/4} \leq \\ &C_3(R_0 + \|\rho\|_{1,0} + \mu)(\|\phi^\epsilon\|_{3+\alpha,0} + \epsilon\|\phi^\epsilon\|_{4+\alpha,0}) + C(R_0,\mu)(M_0 + \|\phi^\epsilon\|_{0,0}), \end{aligned}$$

onde C_3 é uma constante independente de ϵ, μ e $\rho \in \mathcal{A}_T$.

Uma vez que $\rho \in \mathcal{A}_T$ implica $\rho(\cdot,0) = 0$ e $\|\rho\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} \leq 1$ temos $\|\rho\|_{1,0} \leq T^{\alpha/3}\|\rho\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} \leq T^{\alpha/3}$. Tomando T, R_0 e μ suficientemente pequenos de forma que $C_3(R_0 + |\rho\|_{1,0} + \mu) \leq 1/2$, da expressão acima temos que

$$\|D_{y'}\phi^\epsilon\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} + \|D_t\phi^\epsilon\|_{\alpha,\alpha/4} + \epsilon\|D_{y'}^4\phi^\epsilon\|_{\alpha,\alpha/4} \leq C_4(M_0 + \|\phi^\epsilon\|_{0,0}),$$

com C_4 independente de $\epsilon \in (0,1]$ e $\rho \in \mathcal{A}_T$. Finalmente, usando que $\phi^\epsilon(\cdot,0) = 0$ implica que $\|\phi^\epsilon\|_{0,0} \leq \|D_t\phi^\epsilon\|_{0,0}T$, tomando $T > 0$ suficientemente pequeno se necessário, segue que

$$\|D_{y'}\phi^\epsilon\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} + \|D_t\phi^\epsilon\|_{\alpha,\alpha/4} + \epsilon\|D^4_{y'}\phi^\epsilon\|_{\alpha,\alpha/4} \leq C_0M_0.$$

□

Ao longo desta seção nós estudamos o problema regularizado (5.31) para cada $\epsilon \in (0,1]$. Agora, utilizando os Lemas 5.8 e 5.7, estamos aptos a provar a existência e unicidade de solução (que será o limite de soluções dos problemas regularizados) para o problema (5.4), ou seja, encontrar únicas funções (v,ϕ) satisfazendo

$$\begin{aligned}
&L^\rho v(y,t) = -h(y,t) \text{ em } \Omega_0 \times [0,T],\\
&v(s,t) = \sum_{k,l=1}^{N-1} A^\rho_{kl}\phi_{y'_k y'_l} + B^\rho(s,t) \text{ em } \Gamma_0 \times [0,T],\\
&\phi_t - l^\rho(\partial_n v) = 0 \text{ em } \Gamma_0 \times [0,T],\\
&\phi(s,0) = 0 \text{ em } \Gamma_0.
\end{aligned}$$

Lema 5.8. *Seja T_0 como no lema anterior. Então existe uma constante positiva C tal que para todo $\rho \in \mathcal{A}_{T_0}$, o problema (5.4) tem solução única e esta satisfaz*

$$\|\phi|_{3+\alpha,(3+\alpha)/3;\Gamma_0\times[0,T_0]} \leq C$$

Demonstração. Primeiro vamos estabelecer a existência de solução satisfazendo a estimativa acima e, em seguida, a unicidade.

Existência: Para cada $\epsilon \in (0,1]$ seja $(v^\epsilon,\phi^\epsilon)$ a solução de (5.31), pela estimativa $\|D_{y'}\phi^\epsilon\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} + \|D_t\phi^\epsilon\|_{\alpha,\alpha/4} + \epsilon\|D^4_{y'}\phi^\epsilon\|_{\alpha,\alpha/4} \leq C_0M_0$ do Lema 5.7, segue que podemos extrair uma subsequência $\{\epsilon_k\}_{k=1}^\infty$, $\epsilon_k \to 0$, tal que $(v^{\epsilon_k},\phi^{\epsilon_k}) \to (v,\phi)$, onde (v,ϕ) é solução de (5.4) e satisfaz

$$\|D_{y'}\phi\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} + \|D_t\phi\|_{\alpha,\alpha/4} \leq C_0M_0 \leq C, \tag{5.38}$$

sendo que a última desigualdade é válida pois a função h em $C^{\alpha,\alpha/3}$ está fixa, $M_0 := \sup_{\rho\in\mathcal{A}_T}\|B^\rho\|_{1+\alpha,(1+\alpha)/3} + \|h\|_{0,0}$ e, pela observação da Definição 5, $\rho \in \mathcal{A}_T$ implica que

$\|\rho\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} \leq 1+\delta \Rightarrow \sup_{\rho\in\mathcal{A}_T} \|B^\rho\|_{1+\alpha,(1+\alpha)/3} \leq C.$

Fazendo estimativas elípticas como na demonstração do Lema 5.6 concluímos que $\|D_y v\|_{\alpha,\alpha/3;\Gamma_0(L_0)\times[0,T]} \leq C(1+\|D^2_{y'}\phi|_{1+\alpha,(1+\alpha)/3}) \Rightarrow \|D_y v\|_{\alpha,\alpha/3;\Gamma_0(L_0)\times[0,T]} \leq C$ (por (5.38)). Pela terceira equação de (5.4), $\phi_t - l^\rho(\partial_n v) = 0$, segue que $\|D_t\phi\|_{\alpha,\alpha/3} \leq C$. Portanto

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{3+\alpha,(3+\alpha)/3} &\leq \|\phi\|_{0,0} + \|D_{y'}\phi\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} + \|D_t\phi\|_{\alpha,\alpha/3} \\ &\leq \|D_{y'}\phi\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} + 2\|D_t\phi\|_{\alpha,\alpha/3} \leq C. \end{aligned}$$

Unicidade: Seja (v,ϕ) uma solução de (5.4), seguindo os passos da demonstração da estimativa do Lema 5.7, mas agora com $\epsilon = 0$, concluímos que

$$\|D_{y'}\phi\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} + \|D_t\phi\|_{\alpha,\alpha/4} \leq C. \tag{5.39}$$

Sejam (v_1,ϕ_1) e (v_2,ϕ_2) soluções de (5.4). Defina $v = v_1 - v_2$ e $\phi = \phi_1 - \phi_2$. Como (5.4) é linear segue que (v,ϕ) é solução do sistema homogêneo associado, ou seja, (v,ϕ) satisfaz

$$\begin{aligned} &L^\rho v(y,t) = 0 \text{ em } \Omega_0 \times [0,T], \\ &v(s,t) = \sum_{k,l=1}^{N-1} A_l^\rho \phi_{y'_k y'_l} \text{ em } \Gamma_0 \times [0,T], \\ &(\phi)_t - l^\rho(\partial_n(v)) = 0 \text{ em } \Gamma_0 \times [0,T], \\ &\phi(s,0) = 0 \text{ em } \Gamma_0. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Uma vez que Ω_0 é limitado, o problema elíptico dado pelas duas primeiras equações do sistema acima, garante que se $\phi = 0$ então $v = 0$. Então para garantirmos a unicidade de solução para (5.4), basta provar que $\phi = 0$.

Suponha que $\phi \neq 0$. Então $\left(\frac{2C}{\|\phi\|_{0,0}}(\phi,v)\right)$ também é solução de (5.40). Como ϕ_1, por definição, é solução do sistema linear não-homogêneo (5.4) temos que $(\tilde{\phi} = \phi_1 + \frac{2C}{\|\phi\|_{0,0}}\phi, \tilde{v} =$

$v_1 + \frac{2C}{\|\phi\|_{0,0}}v)$ também é solução de (5.4) e

$$\|\tilde{\phi}\|_{0,0} \geq \frac{2C}{\|\phi\|_{0,0}}\|\phi\|_{0,0} - \|\phi_1\|_{0,0} > 2C - C = C$$

o que contradiz (5.39).

$\square$

5.4 Existência e unicidade de solução para o problema de Hele-Shaw

Nesta seção iremos mostrar unicidade e regularidade de solução para problema o Problema de Hele-Shaw não-homogêneo, ou seja, dado um domínio limitado $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, com $\partial\Omega_0 = \Gamma_0$, encontrar uma única função u e uma única fronteira livre $\Gamma = \bigcup_{t\in[0,T]}(\Gamma_t \times \{t\})$ que satisfaçam o sistema abaixo e determinar a reguralidade das mesmas.

$$\begin{aligned}
&\Delta u(x,t) = -h(x,t) \text{ em } \Omega_t \times [0,T],\\
&u = -\gamma\kappa \text{ em } \Gamma_t,\\
&\partial_n u = -V_n \text{ em } \Gamma_t,\\
&\Gamma \cap \{t = 0\} = \Gamma_0.
\end{aligned}$$

onde $\Gamma_t = \partial\Omega_t$, γ é uma constante positiva, κ é a curvatura média, $\partial_n u$ é a derivada na direção $\vec{n}$ da normal unitária exterior e V_n é a velocidade da fronteira livre Γ_t na direção $\vec{n}$ e $h \in C^{\alpha,\alpha/3}(\mathbb{R}^N \times [0,T])$, $0 < \alpha < 1$, é uma função dada com suporte compacto.

Demonstraremos que

Teorema 5.1. *Se $\Gamma_0 \in C^{3+\alpha}$ então existe $T > 0$ tal que o problema descrito acima admite solução única e Γ pertence a $C^{3+\alpha,(3+\alpha)/3}$.*

Assuma que $\Gamma = \bigcup_{t\in[0,T]}(\Gamma_t \times \{t\})$ tem a seguinte representação

$$\Gamma := \{s + \rho(s,t); s \in \Gamma_0, t \in [0,T]\}$$

onde $\rho : \Gamma_0 \times [0,T] \Rightarrow \times[-2\delta, 2\delta]$ pertence a $C^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}$ e $\delta \in (0, L_0/8)$ é uma constante pequena a ser escolhida.

Para $T \in (0, \delta^{1/(2+\alpha)}]$ lembremos da Definição 5 do conjunto $\mathcal{A}_T$, que é dada por

$$\mathcal{A}_T := \{\rho \in C^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}(\Gamma_0 \times [0,T]); \rho(\cdot, 0) = 0 \text{ e } \|\rho\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} \leq 1\}$$

Agora, para todo $\rho \in \mathcal{A}_T$, considere o seguinte problema linear para (ϕ, v)

$$\begin{aligned}
&L^\rho v(y,t) = \sum_{i,j=1}^{N} (a_{ij}^\rho v_{y_i})_{y_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i^\rho v_{y_i} = -h(y,t) \text{ em } \Omega_0 \times [0,T],\\
&v(s,t) = \sum_{k,l=1}^{N-1} A_{kl}^\rho \phi_{y'_k y'_l} + B^\rho(s,t) \text{ em } \Gamma_0 \times [0,T],\\
&\phi_t - l^\rho(\partial_n v) = 0 \text{ em } \Gamma_0 \times [0,T],\\
&\phi(s,0) = 0 \text{ em } \Gamma_0.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

sendo que L^ρ é um operador uniformemente elíptico cujos coeficientes a_{ij} e b_i foram definidos em (5.2); l^ρ, adotando as coordenadas locais descritas em 5.1, é dado por $(l^\rho)^{s_0}(y',t) = 1 + |\sum_{k=1}^{N-1} \rho_{y'_k}^{s_0} \nabla S_k^{s_0}|^2$; e os coeficientes $(A_{kl}^\rho)^{s_0} = A_{kl}^\rho(y', \rho^{s_0}, D_{y'}\rho^{s_0})$ e $(B^\rho)^{s_0} = B^{s_0}(y', \rho^{s_0}, D_{y'}\rho^{s_0})$ têm suas expressões explicitadas em Chen e Retich [18].

Pelo Lema 5.8, para cada $\rho \in \mathcal{A}_T$ o problema acima tem solução única (ϕ, v). Definimos $\mathcal{F}(\rho) = \phi$. Então, conforme discutido na Seção 5.1, demonstrar o Teorema 5.1 é equivalente a mostrar que o operador $\mathcal{F}$ tem um único ponto fixo em $\mathcal{A}_T$, ou ainda, provar o teorema

Teorema 5.2. *Para $T > 0$ suficientemente pequeno $\mathcal{F} : \mathcal{A}_T \to \mathcal{A}_T$ e $\mathcal{F}$ é uma contração.*

Demonstração. Seja $T \in (0, T_0]$ constante a ser determinada. Para cada $\rho \in \mathcal{A}_T$, seja $\mathcal{F}(\rho) = \phi$ a solução de (5.41). Pelo Lema 5.8, $\|\phi\|_{3+\alpha,(3+\alpha)/3} \leq C$. Consequentemente,

$\|\phi\|_{0,0} \leq \|\phi\|_{3,1} T \leq CT$ (basta usar o fato que $\phi(y',0) = 0$ e o teorema do valor médio). Pela interpolação $\|\cdot\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} \leq 2\|\cdot\|_{0,0}^{(1-\alpha)/3}\|\cdot\|_{3,1}^{(2+\alpha)/3}$ segue que $\|\phi\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} \leq 2CT^{(1-\alpha)/3}$. Então, se tomarmos T suficientemente pequeno, temos $\phi = \mathcal{F}(\rho) \in \mathcal{A}_T$; ou seja; $\mathcal{F}$ mapeia $\mathcal{A}_T$ em $\mathcal{A}_T$.

Agora mostremos que $\mathcal{F}$ é uma contração.

Sejam ρ_1 e ρ_2 funções em $\mathcal{A}_T$. Seja $\phi_i = \mathcal{F}(\rho_i), i = 1,2,$ $\phi = \phi_2 - \phi_1$ e $v = v_2 - v_1$. Então (ϕ, v) satisfaz o seguinte sistema

$$
\begin{aligned}
&L^{\rho_2} v(y,t) = div\vec{F}_1 + F_2, \text{ em } \Omega_0 \times [0,T],\\
&v(s,t) - \sum_{k,l=1}^{N-1} A_{kl}^{\rho_2} \phi_{y'_k y'_l} = F_3, \text{ em } \Gamma_0 \times [0,T],\\
&\phi_t - l^{\rho_2}(\partial_n v) = F_4, \text{ em } \Gamma_0 \times [0,T],\\
&\phi(s,0) = 0 \text{ em } \Gamma_0.
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
&div\vec{F}_1 + F_2 = (L^{\rho_1} - L^{\rho_2}) v_1,\\
&F_3 = \sum_{k,l=1}^{N-1} (A_{k,l}^{\rho_2} - A_{k,l}^{\rho_1})(\phi_1)_{y'_k y'_l} + (B^{\rho_2} - B^{\rho_1}),\\
&F_4 = (l^{\rho_2} - l^{\rho_1})\partial_n v_1.
\end{aligned}
\tag{5.42}
$$

Por definição, v_1 satisfaz

$$
\begin{gathered}
L^{\rho_1} v_1 = h \text{ em } \Omega_0 \times [0,T]\\
v_1 = \sum_{k,l=1}^{N-1} A_{kl}^{\rho_1} (\phi_1)_{y'_k y'_l} + B^{\rho_1} \text{ em } \Gamma_0 \times [0,T]
\end{gathered}
$$

Por estimativas elípticas iguais às feitas no início da demonstração do Lema 5.6 temos que $\|v_1\|_{1+\alpha,0;\Gamma_0(L_0)} \leq C(M_0 + \|\phi_1\|_{3+\alpha,0})$; como o Lema 5.8 implica que $\|\phi_1\|_{3+\alpha,0} \leq C$ temos $\|v_1\|_{1+\alpha,0;\Gamma_0(L_0)} \leq C$. Segue das definições de $\vec{F}_1, F_2, F_3$ e F_4 em (5.42) que

$$\|\vec{F}_1\|_{\alpha,0} + \|F_2\|_{0,0} + \|F_3\|_{1+\alpha,0} + \|F_4\|_{\alpha,0} \leq C\|\rho_1 - \rho_2\|_{2+\alpha,0}.$$

Usando o mesmo procedimento do Lema 5.7, mas agora com $\epsilon = 0$, concluímos que

$$\begin{aligned}
\|D_{y'}\phi\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} + \|D_t\phi\|_{\alpha,0} &\leq C(\|\vec{F}_1\|_{\alpha,0} + \|F_2\|_{0,0} + \|F_3\|_{1+\alpha,0} + \|F_4\|_{\alpha,0}) \\
&\leq C\|\rho_1 - \rho_2\|_{2+\alpha,0}.
\end{aligned}$$

onde C é independente de $\phi_i \in \mathcal{A}_T$.

Como $\phi(s,0) = 0$, pelo teorema do valor médio, segue que $\|\phi\|_{0,0} \leq \|\phi\|_{3,1}$; usando novamente a interpolação $\|\cdot\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} \leq 2\|\cdot\|_{0,0}^{(1-\alpha)/3}\|\cdot\|_{3,1}^{(2+\alpha)/3}$ segue que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}(\rho_1) - \mathcal{F}(\rho_2)\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} &\leq 2T^{(1-\alpha)/3}\|\mathcal{F}(\rho_1) - \mathcal{F}(\rho_2)\|_{3,1} \\
&= 2T^{(1-\alpha)/3}\|\phi\|_{3,1} \\
&\leq CT^{(1-\alpha)/3}(\|D_{y'}\phi\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} + \|D_t\phi\|_{\alpha,0}) \\
&\leq CT^{(1-\alpha)/3}\|\rho_1 - \rho_2\|_{2+\alpha,0} \\
&\leq CT^{(1-\alpha)/3}\|\rho_1 - \rho_2\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3}
\end{aligned}$$

Pela desigualdade acima segue que $\mathcal{F}$ é uma contração para $T > 0$ suficientemente pequeno.

$\square$

Capítulo 6

Conclusões

Nesta dissertação analisamos um problema de fronteira livre para um sistema de caráter elíptico-hiperbólico que modela o crescimento de um tumor conforme o modelo descrito em X. Chen, A. Friedman, *A free boundary problem for an elliptic-hyperbolic system: an application to tumor growth*, SIAM J. Math. Anal. 35, 2003, pp. 974-986.

O modelo levava em conta três estados para suas células: proliferantes, quiescentes e necróticas. Assim como a quantidade de nutrientes disponível no tumor. As equações do sistema valiam em domínios que variavam com o tempo a partir de um domínio inicial dado.

Para tal modelo, foi demonstrado existência e unicidade de solução clássica que é local no tempo. Também foi caracterizada a regularidade de tal solução.

O fato da solução encontrada ser local no tempo está ligada com a técnica utilizada para a resolução do problema. Mas, de maneira natural, ficam as perguntas sobre existência de solução global e regularidade da mesma.

Referências Bibliográficas

[1] A. Friedman, F. Reitich, Nonlinear stability of a quasi-static Stefan problem with surface tension: a continuation approach, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 30 (4), 2001, pp. 341-403.

[2] A. Solonnikov, On Boundary Value Problem for Linear General Parabolic System of Differential Equations, Proceedings of the Steklov Institute of Math. 83, 1967.

[3] B. Bazaliy, A. Friedman, A free boundary problem for elliptic-parabolic system: application to a model of tumor growth, Commun. Partial Differential Equations 28, 2003, pp. 517-560.

[4] B.V. Bazaliy, Stefan problem for the Laplace equation with regard for the curvature of the free boundary, Ukrainian Math. J. 49, 1997, pp. 1465-1484.

[5] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Spriger, New York, 2001.

[6] G. Pettet, C.P. Please, M.J. Tindall, D. McElwain, The migration of cells in multicell tumor spheroids, Bull. Math. Biol. 63, 2001. pp. 231- 257.

[7] H. Greenspan, On the growth and stability of cell cultures and solid tumors, J. Theor. Biology, 56, 1976, pp. 229-242.

[8] J. Duchon, R. Robert, Evolution dune interface par capillarit et diffusion de volume I. Existence locale en temps, Ann. Inst. H. Poincar, Anal. non Linaire 1, 1984, pp. 361-378.

[9] J. Escher, G. Simonett, Classical solutions of multidimensional Hele- Shaw models, SIAM J. Math. Anal. 28, 1997, pp. 1028-1047.

[10] J. Esher, G. Simonett, A center manifold analysis for the Mullins- Sekerka model, J. Differential Equations 143, 1998, pp. 267-292.

[11] L.C. Evans, Partial Differential Equations, American Mathematical Society, 1998.

[12] M. de Guzman, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias - Teoría de estabilidad y control, Alhambra, Madrid, 1975.

[13] P. Constantin, M. Pugh, Global solutions for small data to the HeleShaw problem, Nonlinearity 6, 1993, pp. 393-415.

[14] S. Cui, A. Friedman, A hyperbolic free boundary problem modeling tumor growth, Interfaces Free Boundaries 5, 2003, pp. 159-182.

[15] U. Ladyzhenskaya, Linear and Quasilinear Elliptic Equations, Academic Press Inc, New York, 1968.

[16] X. Chen, The Hele-Shaw problem and area-preserving curve-shortening motions, Arch. Rat. Mech. Anal. 123, 1993, pp. 117-151.

[17] X. Chen, A. Friedman, A free boundary problem for an elliptic-hyperbolic system: an application to tumor growth, SIAM J. Math. Anal. 35, 2003, pp. 974-986.

[18] X. Chen, F. Retich, Local Existence and uniqueness of solutions of the Stefan problem with surface tension and kinetic undercooling, J. Math. Anal. Appl., 164, 1992, pp. 350-363.

[19] X. Chen, J. Hong, F. Yi, Existence, uniqueness and regularity of classical solutions of the Mullins-Sekerka problem, Comm. Partial Differential Equations, 21, 1996, pp. 1705-1727.

[20] X. Chen, S. Cui, A. Friedman, A hyperbolic free boundary problem modeling tumor growth: asymptotic behavior, A Trans. Ams., to appear.

Apêndice A

Coeficientes

Vamos estabelecer os coeficientes $\hat{a}_{ij}(t)$ e $\hat{b}_i(t)$ da equação (3.10). Considere $t \in [0,T]$, $s_0 \in \Gamma_0$ e $Z^{s_0}(t)$ as coordenadas locais de uma vizinhança U da origem em $\mathbb{R}^N$ para uma vizinhança V de s_0 em $\mathbb{R}^N$.

Para $x \in V \subset \Omega_t$ temos:

$$\bar{c}(x,t) = \bar{c}(y(x),t) = \bar{c}(y_1(x),\dots,y_N(x),t) \text{ com } y \in U$$

onde

$$(y(x),t) = ([S(P(x)), d(x,\Gamma_0) - \rho(P(x),t)],t), \text{ com } S(P(x)) \in \mathbb{R}^{N-1} \tag{A.1}$$

Portanto, para $1 \leq k \leq N$

$$\partial_{x_k}\bar{c}(x,t) = \sum_{i=1}^{N} \partial_{y_i}\bar{c}(y(x),t)\partial_{x_k}y_i(x,t)$$
$$\partial^2_{x_k}\bar{c}(x,t) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \partial^2_{y_iy_j}\bar{c}(y(x),t)\partial_{x_k}y_j(x,t)\partial_{x_k}y_i(x,t) + \\ + \sum_{i=1}^{N} \partial_{y_i}\bar{c}(y(x),t)\partial^2_{x_k}y_i(x,t)$$

Somando a segunda equação acima de $k = 1$ a $k = N$ e usando o fato de que $\Delta\bar{c}(x,t) - \lambda\bar{c}(x,t) = 0, \forall t \in [0,T]$, temos

$$\sum_{i,j=1}^{N} \hat{a}_{ij}(y(x),t)\partial_{y_i y_j}\bar{c}(y(x),t) + \sum_{i=1}^{N} \hat{b}_i(y(x),t)\partial_{y_i}\bar{c}(y(x),t) - \lambda\bar{c}(y(x),t) = 0$$

com

$$\hat{a}_{ij}(y(x),t) = \sum_{k=1}^{N} \partial_{x_k} y_i(x,t)\partial_{x_k} y_j(x,t) = \nabla y_i(x,t) \cdot \nabla y_j(x,t),$$

$$\hat{b}_i(y(x),t) = \sum_{k=1}^{N} \partial^2_{x_k} y_i(x,t).$$

e y_i, para $i = 1, \ldots, N$, é determinado por (A.1).

Portanto, segue das igualdades acima e também da relação (A.1) que

$$\hat{a}_{ij}(t) = \hat{a}_{ij}(D_s\rho), \hat{b}_i(t) = \hat{b}_i(D^2_s\rho).$$

Apêndice B

Equivalência entre normas

O objetivo deste Apêndice é demonstrar que as normas dos espaços $C_K^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ e $C_K^{3+\alpha,(3+\alpha)/3}(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ definidas nas Seções 2.2 e 5.1 são equivalentes, aqui estas serão denotadas por $\|\cdot\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3}$, $\|\cdot\|^*_{2+\alpha,(2+\alpha)/3}$ e $\|\cdot\|_{3+\alpha,(3+\alpha)/3}$, $\|\cdot\|^*_{3+\alpha,(3+\alpha)/3}$, respectivamente. Lembrando que o sub-índice K indica que as funções dos espaços $C_K^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ e $C_K^{3+\alpha,(3+\alpha)/3}(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ possuem suporte num compacto $K \subset \mathbb{R}^N$ dado e que as definições normas são

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{3+\alpha,(3+\alpha)/3} &= \|f\|_{0,0} + [D_x^3 f]_{\alpha,\alpha/3} + [D_t f]_{\alpha,\alpha/3},\\
\|f\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} &= \|f\|_{0,\frac{2+\alpha}{3}} + [D_x^2 f]_{\alpha,\alpha/3}.\\
[f]_{\alpha_1,\alpha_2} &= \sup_{\substack{x\neq y \\ \text{ou } t\neq\tau}} \frac{|f(x,t)-f(y,\tau)|}{|x-y|^{\alpha_1}+|t-\tau|^{\alpha_2}},
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\|f\|^*_{\beta,0} &= \|f\|_{C^0([0,T];C^\beta(G))}, \text{ para } \beta \in [0,\infty),\\
\|f\|^*_{0,\beta} &= \|f\|_{C^\beta([0,T];C^0(G))}, \text{ para } \beta \in [0,\infty),\\
\|f\|^*_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} &= \|f\|_{0,0} + \|f\|^*_{2+\alpha,0} + \|f\|^*_{0,(2+\alpha)/3} + \|D_x f\|^*_{1+\alpha,0} + \|D_x f\|^*_{0,(1+\alpha)/3} +\\
&\quad + \|D_x^2 f\|^*_{\alpha,0} + \|D_x^2 f\|^*_{0,\alpha/3},\\
\|f\|^*_{3+\alpha,(3+\alpha)/3} &= \|f\|_{0,0} + \|D_x f\|^*_{2+\alpha,0} + \|D_x f\|^*_{0,(2+\alpha)/3} + \|D_x^2 f\|^*_{1+\alpha,0} +\\
&\quad + \|D_x^2 f\|^*_{0,(1+\alpha)/3} + \|D_x^3 f\|^*_{\alpha,0} + \|D_x^3 f\|^*_{0,\alpha/3} + \|D_t f\|^*_{\alpha,0} + \|D_t f\|^*_{0,\alpha/3}.
\end{aligned}
$$

As desigualdades $\|\cdot\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} \leq \|\cdot\|^*_{2+\alpha,(2+\alpha)/3}$ e $\|\cdot\|_{3+\alpha,(3+\alpha)/3} \leq \|\cdot\|^*_{3+\alpha,(3+\alpha)/3}$ são óbvias, portanto, para provar a equivalência entre as normas basta provar que existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$\|\cdot\|^*_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} \leq C_1\|\cdot\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3}, \qquad \|\cdot\|^*_{3+\alpha,(3+\alpha)/3} \leq C_2\|\cdot\|_{3+\alpha,(3+\alpha)/3}.$$

Lema B.1. *Existe $C_1 > 0$ tal que para toda função f com suporte contido no compacto K e cujas normas $\|\cdot\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3}$ e $\|\cdot\|^*_{2+\alpha,(2+\alpha)/3}$ estão definidas temos*

$$\|f\|^*_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} \leq C_1\|f\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3}. \tag{B.1}$$

Demonstração. Tome $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus K$, tal que dist$(x_0, K)$=$d(x_0, K) = 1$ e seja f como nas hipóteses do lema.

Uma vez que f possui suporte em K e $d(x_0, K) = 1$ temos que $f(x_0, t) = D_x f(x_0, t) = D_x^2 f(x_0, t) = 0$ para todo $t \in [0, T]$. A fim de estabelecer (B.1), abaixo iremos demonstrar uma série de estimativas; sendo a primeira a seguinte

$$\begin{aligned} \|D_x^2 f\|_{0,0} &= \sup_{t\in[0,T]}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|D_x^2 f(x,t)| = \sup_{t\in[0,T]}\sup_{x\in K}|D_x^2 f(x,t)| = \\ &= \sup_{t\in[0,T]}\sup_{x\in K}\frac{|D_x^2 f(x,t) - D_x^2 f(x_0,t)|}{|x-x_0|^\alpha}|x-x_0|^\alpha \\ &\leq [D_x^2 f]_{\alpha,0}\sup_{x\in K}|x-x_0|^\alpha \leq C[D_x^2 f]_{\alpha,0}. \end{aligned} \tag{B.2}$$

Utilizando a desigualdade acima e o teorema do valor médio temos

$$\begin{aligned} \|D_x f\|_{0,0} &= \sup_{t\in[0,T]}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|D_x f(x,t)| = \sup_{t\in[0,T]}\sup_{x\in K}|D_x f(x,t)| = \\ &= \sup_{t\in[0,T]}\sup_{x\in K}\frac{|D_x f(x,t) - D_x f(x_0,t)|}{|x-x_0|}|x-x_0| \\ &\leq \|D_x^2 f\|_{0,0}\sup_{x\in K}|x-x_0| \leq C[D_x^2 f]_{\alpha,0}. \end{aligned} \tag{B.3}$$

É imediato das definições de $\|\cdot\|^*_{2+\alpha,(2+\alpha)/3}$ e $\|\cdot\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3}$ que

$$\begin{aligned}
\|f\|^*_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} &\leq C\Big(\|f\|_{0,0} + \|D_x f\|_{0,0} + \|D_x^2 f\|_{0,0} + \|D_x^2 f\|^*_{\alpha,0} + \|f\|^*_{0,(2+\alpha)/3} + \\
&\quad + \|D_x f\|^*_{0,(1+\alpha)/3} + \|D_x^2 f\|^*_{0,\alpha/3}\Big) \\
&\leq C\Big(\|f\|_{0,(2+\alpha)/3} + [D_x^2 f]_{\alpha,\alpha/3} + \|D_x f\|_{0,0} + \\
&\quad \|D_x^2 f\|_{0,0} + \|D_x f\|^*_{0,(1+\alpha)/3}\Big) \\
&\leq C\Big(\|f\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} + \|D_x f\|_{0,0} + \|D_x^2 f\|_{0,0} + \|D_x f\|^*_{0,(1+\alpha)/3}\Big),
\end{aligned}$$

Segundo Chen e Friedman [17], p. 977, a norma $\|f\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3}$ domina o termo $\|D_x f\|^*_{0,(1+\alpha)/3}$, assim, segue da observação acima e das desigualdades (B.2)-(B.3) que existe $C_1 > 0$ tal que, para toda $f \in C_K^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ temos

$$\|f\|^*_{2+\alpha,(2+\alpha)/3} \leq C_1 \|f\|_{2+\alpha,(2+\alpha)/3}.$$

□

Lema B.2. *Existe $C_2 > 0$ tal que para toda função f com suporte contido no compacto K e cujas normas $\|\cdot\|_{3+\alpha,(3+\alpha)/3}$ e $\|\cdot\|^*_{3+\alpha,(3+\alpha)/3}$ estão definidas temos*

$$\|f\|^*_{3+\alpha,(3+\alpha)/3} \leq C_2 \|f\|_{3+\alpha,(3+\alpha)/3}. \tag{B.4}$$

Demonstração. De maneira análoga à demonstração do lema anterior (escolhendo $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus K$, tal que $f(x_0,t) = D_x f(x_0,t) = D_x^2 f(x_0,t) = D_x^3 f(x_0,t) = D_t f(x_0,t) = 0$ para todo $t \in [0,T]$ e f nas condições deste lema) provamos que existe constante $C > 0$ tal que

$$\|D_x^3 f\|_{0,0} \leq C[D_x^3 f]_{\alpha,0}, \quad \|D_x^2 f\|_{0,0} \leq C[D_x^3 f]_{\alpha,0}, \quad \|D_x f\|_{0,0} \leq C[D_x^3 f]_{\alpha,0}. \tag{B.5}$$

É imediato das definições de $\|\cdot\|^*_{3+\alpha,(3+\alpha)/3}$ e $\|\cdot\|_{3+\alpha,(3+\alpha)/3}$ que

$$\begin{aligned}
\|f\|^*_{3+\alpha,(3+\alpha)/3} &\leq C\Big(\|f\|_{0,0} + \|D_x f\|_{0,0} + \|D_x^2 f\|_{0,0} + \|D_x^3 f\|_{0,0} + \\
&\quad \|D_x f\|^*_{0,(2+\alpha)/3} + \|D_x^2 f\|^*_{0,(1+\alpha)/3} + \|D_x^3 f\|^*_{0,\alpha/3} + \\
&\quad \|D_x^3 f\|^*_{\alpha,0} + \|D_t f\|^*_{\alpha,0} + \|D_t f\|^*_{0,\alpha/3}\Big) \\
&\leq C\Big(\|f\|_{0,0} + [D_x^3 f]_{\alpha,\alpha/3} + [D_t f]_{\alpha,\alpha/3} + \|D_x f\|_{0,0} + \|D_x^2 f\|_{0,0} + \\
&\quad \|D_x^3 f\|_{0,0} + \|D_x f\|^*_{0,(2+\alpha)/3} + \|D_x^2 f\|^*_{0,(1+\alpha)/3}\Big) \\
&\leq C\Big(\|f\|_{3+\alpha,(3+\alpha)/3} + \|D_x f\|_{0,0} + \|D_x^2 f\|_{0,0} + \|D_x^3 f\|_{0,0} + \\
&\quad \|D_x f\|^*_{0,(2+\alpha)/3} + \|D_x^2 f\|^*_{0,(1+\alpha)/3}\Big),
\end{aligned}$$

Segundo Chen e Friedman [17], p. 977, a norma $\|f\|_{3+\alpha,(3+\alpha)/3}$ domina os termos $\|D_x f\|^*_{0,(2+\alpha)/3}$ e $\|D_x^2 f\|^*_{0,(1+\alpha)/3}$. Portanto, segue de (B.5) que existe constante $C_2 > 0$ tal que para toda $f \in C_K^{3+\alpha,(3+\alpha)/3}(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ temos

$$\|f\|^*_{3+\alpha,(3+\alpha)/3} \leq C_2 \|f\|_{3+\alpha,(3+\alpha)/3}.$$

□

Conforme discutido anteriormente, os Lemas B.1 e B.2 garantem as equivalências de normas desejadas.

Apêndice C

Desigualdade entre normas

Queremos mostrar que se $f : U \times [0,T] \to R$, $U \subset \mathbb{R}^N$ aberto, é uma função tal que $f(x,0) = 0, \forall x \in U$ então

$$\|f\|_{3+\alpha,(3+\alpha)/4} \leq CT^{(1-\alpha)/4}\|f\|_{4,1},$$

para alguma constante $C > 0$, onde as normas $\|\cdot\|_{3+\alpha,(3+\alpha)/4}$ e $\|\cdot\|_{4,1}$ são dadas pela Definição 3 da Seção 5.1. De fato, é de verificação imediata que

$$\|\cdot\|_{3+\alpha,(3+\alpha)/4} \leq 5\Big(\sum_{j=0}^{3}\|D_x^j\|_{0,0} + [D_x^3]_{\alpha,0} + \sum_{j=0}^{3}[D_x^j]_{0,(3-j+\alpha)/4}\Big). \tag{C.1}$$

Se f é tal que $f(x,0) = 0$ para $x \in U$, temos para todo $t \in [0,T]$, $0 < \beta_j \leq 1$ e $j = 0,1,2,3$ que

$$D_x^j f(x,t) = \frac{D_x^j f(x,t) - D_x^j f(x,0)}{t^{\beta_j}} t^{\beta_j},$$

donde segue as desigualdades $\|f\|_{0,0} \leq \|D_t f\|_{0,0}T$, $\|D_x f\|_{0,0} \leq \|D_x f\|_{0,3/4}T^{3/4}$, $\|D_x^2 f\|_{0,0} \leq \|D_x^2 f\|_{0,2/4}T^{2/4}$ e também $\|D_x^3 f\|_{0,0} \leq \|D_x^3 f\|_{0,1/4}T^{1/4}$. Portanto, temos

$$\sum_{j=0}^{3}\|D_x^j f\|_{0,0} \leq CT^{(1-\alpha)/4}\|f\|_{4,1} \text{ para toda } f \text{ tal que } f(\cdot,0) = 0. \tag{C.2}$$

Observe que para $t, \tau \in [0, T]$, $t \neq \tau$, $x \in U$ e $j = 0, 1, 2, 3$ temos

$$\frac{D_x^j f(x,t) - D_x^j f(x,\tau)}{|t-\tau|^{(3-j+\alpha)/4}} = \frac{D_x^j f(x,t) - D_x^j f(x,\tau)}{|t-\tau|^{(4-j)/4}} |t-\tau|^{(1-\alpha)/4},$$

e, portanto

$$\sum_{j=0}^{3} [D_x^j f]_{0,(3-j+\alpha)/4} \leq 2T^{(1-\alpha)/4} \|f\|_{4,1}. \tag{C.3}$$

Finalmente, note que para todos $x, y \in U, x \neq y$ e $t \in [0, T]$

$$\frac{D_x^3 f(x,t) - D_x^3 f(y,t)}{|x-y|^\alpha} = \Big(\frac{D_x^3 f(x,t) - D_x^3 f(y,t)}{|x-y|} \Big)^\alpha \big(D_x^3 f(x,t) - D_x^3 f(y,t) \big)^{1-\alpha},$$

e também que, para toda f tal que $f(\cdot, 0) = 0$, temos

$$|D_x^3 f(x,t)|^{1-\alpha} = \Big| \frac{D_x^3 f(x,t) - D_x^3 f(x,0)}{t^{1/4}} \Big|^{1-\alpha} t^{(1-\alpha)/4}.$$

Utilizando as duas igualdades acima, junto ao teorema do valor médio e ao fato de que $(a+b)^\gamma \leq a^\gamma + b^\gamma, \forall a, b \geq 0$, $0 < \gamma < 1$; concluímos que

$$[D_x^3 f]_{\alpha,0} \leq T^{(1-\alpha)/4} \|f\|_{4,1} \text{ para toda } f \text{ tal que } f(\cdot, 0) = 0. \tag{C.4}$$

Pelas relações (C.1)-(C.4) segue que

$$\|f\|_{3+\alpha,(3+\alpha)/4} \leq CT^{(1-\alpha)/4} \|f\|_{4,1} \text{ para toda } f \text{ tal que } f(\cdot, 0) = 0,$$

como queríamos demonstrar.