

Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

**CÁLCULO ESTOCÁSTICO EM VARIEDADES
FINSLER**

por

Rinaldo Vieira da Silva Júnior

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino

Fevereiro/2005

CÁLCULO ESTOCÁSTICO EM VARIEDADES FINSLER

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Rinaldo Vieira da Silva Júnior** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 17 de fevereiro de 2005.



Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino.

Prof. Dr. Pedro José Catuogno.

Prof. Dr. Ali Tahzibi.

Prof. Dr. José Adonai Pereira Seixas.

Profa. Dra. Ketty Abaroa de Rezende.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecário: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Silva Júnior, Rinaldo Vieira da

Si38c Cálculo estocástico em variedades Finsler / Rinaldo Vieira da
Silva Júnior -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2005.

Orientador : Paulo Régis Caron Ruffino

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Análise estocástica. 2. Movimento browniano. 3. Finsler,
Espaços de. 4. Geometria diferencial. 5. Geometria riemaniana. I.
Ruffino, Paulo Régis Caron. II. Universidade Estadual de Campinas.
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Stochastic calculus on Finsler manifolds

Palavras-chave em inglês (keywords): 1. Stochastic analysis, 2. Brownian motions, 3. Finsler spaces, 4. Differential geometry, 5. Geometry, Riemannian.

Área de concentração: Geometria estocástica

Titulação: Mestre em Matemática

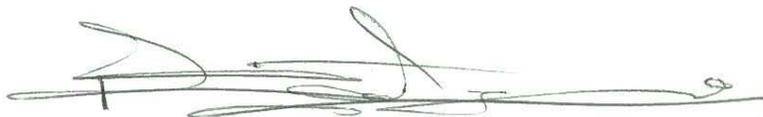
Banca examinadora: Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino (UNICAMP)
Prof. Dr. Pedro José Catuogno (UNICAMP)
Prof. Dr. Ali Tahzibi (USP)
Prof. Dr. José Adonai Pereira Seixas (UFAL)
Profa. Dra. Ketty Abaroa de Rezende (UNICAMP)

Data da defesa: 17/02/2005

Dissertação de Mestrado defendida em 17 de Fevereiro de 2005 e aprovada pela
Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). PAULO REGIS CARON RUFFINO



Prof (a). Dr (a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO



Prof (a). Dr (a). ALI TAHZIBI

“Ô Maceió
É três mulé prum homem só
Ô Maceió
É três mulé prum homem só
Eu fui batizado na capela do farol
Matriz de Santa Rita,
Maceió
Eu fui batizado na capela do farol
Matriz de santa Rita,
Maceió
Mas foi beirando estrada abaixo que eu piquei a mula
Disposto a colar grau na escola da natura
Se alguém me perguntar
Não tenho nada a dizer
Pois eu, pra me realizar
Preciso morrer
Mas foi beirando estrada abaixo que eu piquei a mula
Disposto a colar um grau na escola da natura
Se alguém me perguntar
Não tenho nada a dizer
Pois eu, pra me realizar preciso morrer
Você me deu liberdade
Pra meu destino escolher
E quando sentir saudades
Poder chorar por você
Não vê, minha terra mãe
Que estou a me lamentar
É que eu fui condenado a viver do que cantar
A-la, a-la, ala, Alagoas
A-la, a-la, ala, Alagoas
Eu fui batizado na capela do farol...”

Djavan

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a DEUS, pela presença em todos os momentos de minha vida.

ao Professor e amigo Paulo Ruffino pela sugestão do tema, orientação, diálogo e dedicação com a qual foi oferecida no decorrer deste trabalho.

ao Professor Pedro Catuogno pela atenção constante com o andamento deste trabalho e suas valiosas sugestões.

aos professores do Imecc, em especial Caio Negreiros, Carlos Durán, Claudina Izepe, Francesco Mercuri, Luiz San Martin, Marcelo Firer, Marcelo Santos, Marco Antonio, Paulo Brumati e José Luiz Boldrini.

ao professor Ali Tahzibi do ICMC-USP de São Carlos pelas sugestões e por ter lido este trabalho.

A todos companheiros e companheiras da pós-graduação da matemática que fizeram um ambiente muito agradável, em especial aos do predinho. Também agradeço aos que começaram esta caminhada comigo: Andrielber, Bibiana, Dimas, Fabiano, Fábio Dadam, Fábio Bertoloto, Lauriclécio, Marcelo, Rubão, Vanderson e Viviane.

aos correligionários de Alagoas que encontrei por aqui, ao Professor e companheiro Amauri Barros pelas valiosas dicas e orientações e ao Alcindo Teles, sua esposa Luciana

e o seu herdeiro Luan pelo acolhimento na minha chegada à Campinas, ao casal José Barros e Gina, ao Eriberto e ao Patrick.

a toda minha família em Alagoas, em especial, aos meus tios Tarcízio e Tanuzia e Ivonete. Também agradeço a Tânia e Roberval e sua família e a minha madrinha Diva.

a toda comunidade do conjunto João Sampaio 1 em Maceió.

ao casal Evandro e Lícia e o seu herdeiro Evandrinho e ao casal Marcelo e Aline pela animada convivência em muitos momentos.

aos companheiros do seminário futebolístico do Imecc.

aos companheiros “estocásticos” do Imecc, em especial ao Simão.

a Ingrid, Luciene, Tânia e Irnack, Jamil, Raul, Márcio e o Julião.

a Cidinha, Ednaldo e Tânia, pela ajuda na SPG do IMECC. Destacando o sergipano Ednaldo pelas atualizações constantes sobre política, economia e a cultura nordestina.

ao Programa de Moradia Estudantil-PME da Unicamp.

a PROPEP-UFAL pelo auxílio financeiro concedido no início desta caminhada.

ao companheiro de graduação Steve Wanderson e sua família, pela vontade de vencer em vários momentos de luta em Maceió e grande incentivador da minha vinda para o curso de verão em 2001 aqui em Campinas.

aos professores do departamento de matemática da UFAL, em especial Adroaldo Dorvillé, Antônio Gusmão, Eduardo Perdigão, José Adonai.

à Capes, pelo apoio financeiro.

Aos meus pais Rinaldo e Neíze
e a minha irmã Isaura.

SUMÁRIO

Resumo	vii
Abstract	viii
Introdução	ix
1 CÁLCULO ESTOCÁSTICO	1
1.1 Definições Básicas	1
1.2 Esperança Condicional	3
1.3 Processos Estocásticos	4
1.3.1 Movimento Browniano em \mathbb{R}^n	4
1.4 Filtrações e Martingales	5
1.5 Integração Estocástica	7
1.5.1 Variação Finita e Variação Quadrática	7
1.5.2 Fórmula de Itô	12
1.6 Integral de Stratonovich	16
1.6.1 Fórmula de Itô para Integral de Stratonovich	16
1.7 Equações Diferenciais Estocásticas	17
1.7.1 EDE em \mathbb{R}^n	17
1.7.2 EDE em Variedades	23
1.8 O gerador de uma difusão de Itô	27

2	GEOMETRIA ESTOCÁSTICA RIEMANNIANA	31
2.1	Preliminares Geométricos	31
2.2	Conexões no fibrado principal	33
2.3	Levantamento Horizontal	35
2.4	Geometria Riemanniana	41
2.4.1	Métrica Riemanniana	41
2.4.2	Conexão Afim e Derivada Covariante	42
2.4.3	Geodésicas	46
2.5	Movimento Browniano	52
2.5.1	Preliminares	52
2.5.2	Primeira construção do Movimento Browniano	55
2.5.3	Segunda Construção do Movimento Browniano	59
3	GEOMETRIA ESTOCÁSTICA FINSLER	62
3.1	Variedades Finsler	63
3.2	Conexões Finsler	68
3.2.1	O fibrado vetorial π^*TM e os objetos relacionados	68
3.2.2	A conexão não-linear em $TM \setminus 0$	72
3.2.3	A conexão de Chern em π^*TM	73
3.3	Transporte Paralelo Estocástico	79
3.3.1	h-transporte paralelo determinístico	79
3.3.2	hv-transporte paralelo determinístico	80
3.3.3	h-transporte paralelo estocástico	81
3.3.4	hv-transporte paralelo estocástico	84
3.4	Rolling Finsler sobre curvas diferenciáveis	85
3.4.1	h -Rolando sobre uma curva diferenciável em M	86
3.4.2	hv -Rolando sobre uma curva diferenciável em $\overset{\circ}{TM}$	86
3.5	Rolling Finsler sobre semimartingales	87
3.5.1	h-Rolando sobre um semimartingale em M	87

3.5.2	hv -Rolando sobre um semimartingale em $T\overset{\circ}{M}$	88
3.6	Desenvolvimento Estocástico Finsleriano	89
3.6.1	h -desenvolvimento estocástico Finsleriano	89
3.6.2	hv -desenvolvimento estocástico Finsleriano	90
3.7	Movimento Browniano Finsleriano	91
	Referências Bibliográficas	93
	Índice Remissivo	96

RESUMO

Nesta dissertação fizemos um estudo da teoria de difusão em variedades Finsler, onde abordamos o transporte paralelo estocástico, desenvolvimento estocástico de Cartan e Movimento Browniano. O objetivo principal é obter uma descrição mais geométrica dos objetos citados acima ainda que por enquanto em coordenadas locais e assim termos um paralelo entre o cálculo estocástico em variedades Riemannianas e variedades Finsler.

ABSTRACT

In this work we study diffusion theory in Finsler manifolds. It includes the stochastic parallel transport, stochastic Cartan development and Brownian motion. The main objective is to provide a geometric description of the objects mentioned and so to draw a comparison between stochastic calculus in Riemannian manifolds and stochastic calculus in Finsler manifolds.

Introdução

A teoria de cálculo estocástico foi consolidada ao longo dos anos em decorrência dos trabalhos de Itô, Kunita, Watanabe, Mallivan da escola francesa de Meyer e muitos outros. Hoje é um dos ramos de pesquisa com características próprias. Geometria diferencial estocástica é um ramo que surgiu unindo os objetos do cálculo estocástico com a geometria diferencial clássica. Durante este trabalho, abordamos um tipo de geometria que generaliza a geometria Riemanniana, a qual é chamada geometria Finsler, nome que surge devido a tese de doutorado de Paul Finsler em 1918. Esse tipo de geometria também é motivada pelo cálculo das variações.

Esta dissertação está dividida em três capítulos e está organizada da seguinte forma:

O **Capítulo 1** é dedicado aos conceitos do cálculo estocástico, onde apresentamos alguns resultados clássicos desta teoria. A última seção deste capítulo trata de equações diferenciais estocásticas, as quais aparecerão novamente no capítulo 3. Muitos resultados não são demonstrados pois nosso interesse é fazer com que o texto não fique muito prolixo.

No **Capítulo 2** estudamos como construir o Movimento Browniano numa variedade Riemanniana M , onde a primeira construção é intrínseca enquanto que a segunda depende do mergulho que fazemos na variedade no espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Trazemos alguns conceitos da geometria Riemanniana, como conexão, transporte paralelo e derivada covariante sem se preocupar com as demonstrações. Fazemos também uma abordagem de conexão utilizando fibrados principais. O principal interesse é o Movimento Browniano, o qual surge como um

processo estocástico com gerador infinitesimal $\frac{1}{2}\Delta$, onde Δ é o operador de Laplace-Beltrami de M .

No **Capítulo 3** trataremos da geometria Finsler que surge como generalização da geometria Riemanniana. Trazemos alguns exemplos de variedades Finsler e temos algumas noções de conexões para este tipo de variedade. O nosso principal interesse é o Movimento Browniano Finsleriano. Também trabalhamos com o transporte paralelo finsleriano e desenvolvimento estocástico finsleriano.

CAPÍTULO 1

CÁLCULO ESTOCÁSTICO

No decorrer deste capítulo abordaremos algumas ferramentas do cálculo estocástico em \mathbb{R}^n . Apresentamos os resultados, muitos sem demonstrar, pois não é nosso objetivo neste trabalho. Destacamos a fórmula de Itô, a fórmula de Itô para integral de Stratonovich e as equações diferenciais estocásticas. Boas referências para este capítulo, principalmente para as demonstrações que omitimos, são Hsu [14], Ikeda [15], Revuz [19], San Martin [21].

1.1 Definições Básicas

Escolhemos alguns tópicos sobre cálculo estocástico para compor este capítulo. Lembramos ao leitor que omitimos muitos resultados e algumas demonstrações para que o texto fique com a leitura agradável.

Definição 1.1.1. *Seja (Ω, \mathcal{F}) um espaço mensurável. Uma medida de probabilidade em (Ω, \mathcal{F}) é uma aplicação $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ tal que:*

(i) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;

(ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

(iii) *Se $(A_n)_{n \geq 1}$ é uma seqüência disjunta em \mathcal{F} então $\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$.*

Chamamos a tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de espaço de probabilidade. Os conjuntos $F \in \mathcal{F}$ são chamados eventos. Dizemos que $\mathbb{P}(F)$ é a probabilidade do evento F acontecer. Em particular, quando $\mathbb{P}(F) = 1$, dizemos que F ocorre com probabilidade 1 ou quase certamente.

Definição 1.1.2. *Seja E um espaço métrico completo munido com a σ -álgebra de Borel \mathcal{B} e seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Uma variável aleatória no espaço (E, \mathcal{B}) é uma função mensurável $X : \Omega \rightarrow E$.*

Dada uma variável aleatória X , denotamos por σ_X a sub- σ álgebra gerada por X , isto é, $\sigma_X = \{X^{-1}(B); B \in \mathcal{B}\}$.

Definição 1.1.3. *Seja $X : \Omega \rightarrow E$ uma variável aleatória. X induz uma medida $X_*\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$, para todo $B \in \mathcal{B}$. Dizemos que $X_*\mathbb{P}$ é a distribuição de X , ou lei de X .*

Definição 1.1.4. *Definimos a esperança(ou média) de X pela integral*

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(w) d\mathbb{P}(w).$$

Definição 1.1.5. *Dizemos que uma seqüência $(X_n)_{n \geq 1}$ de variáveis aleatórias converge quase certamente se*

$$\limsup_n X_n = \liminf_n X_n \quad \mathbb{P} - q.c.$$

Definição 1.1.6. *Uma seqüência de variáveis aleatórias $(X_n)_{n \geq 1}$ converge em probabilidade para uma variável aleatória X se, dado $\epsilon > 0$,*

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Definição 1.1.7. *Dizemos que uma seqüência de variáveis aleatórias $(X_n)_{n \geq 1}$ converge em L^p para X se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] = 0.$$

Definição 1.1.8. *Uma seqüência (f_n) de funções mensuráveis é dita convergente quase uniformemente a uma função f se para cada $\delta > 0$ existir um conjunto E_δ em X com $\mathbb{P}(E_\delta) < \delta$ tal que (f_n) converge uniformemente a f em $X \setminus E_\delta$.*

1.2 Esperança Condicional

Definição 1.2.1. *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espaço de probabilidade, X variável aleatória integrável e $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$ sub- σ -álgebra. Definimos a esperança condicional $\mathbb{E}[X|\mathcal{A}]$ de X em relação a \mathcal{A} como a variável aleatória (única $\mathbb{P}|_{\mathcal{A}}$ -quase certamente) que satisfaz:*

(i) $\mathbb{E}[X|\mathcal{A}]$ é \mathcal{A} -mensurável;

(ii) $\int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{A}] d\mathbb{P}|_{\mathcal{A}} = \int_A X d\mathbb{P}$, para todo $A \in \mathcal{A}$.

Proposição 1.2.2. *A esperança condicional satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\mathbb{E}[aX + bY|\mathcal{A}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{A}] + b\mathbb{E}[Y|\mathcal{A}]$;
2. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{A}]] = \mathbb{E}[X]$;
3. $\mathbb{E}[X|\mathcal{A}] = X$ se X for \mathcal{A} -mensurável;
4. $\mathbb{E}[X|\mathcal{A}] = \mathbb{E}[X]$ se X é independente de \mathcal{A} ;
5. $\mathbb{E}[YX|\mathcal{A}] = Y \cdot \mathbb{E}[X|\mathcal{A}]$ se Y for \mathcal{A} -mensurável, onde \cdot denota o produto interno usual em \mathbb{R}^n .

Definição 1.2.3. *Uma função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita convexa se, para todo $x \in \mathbb{R}$, existe α tal que $f(y) \geq f(x) + \alpha(y - x)$.*

Proposição 1.2.4 (Desigualdade de Jensen). *Seja X uma variável aleatória real, integrável e seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Então*

1. $\mathbb{E}[f(X)] \geq f(\mathbb{E}[X])$;
2. $\mathbb{E}[f(X)|\mathcal{A}] \geq f(\mathbb{E}[X|\mathcal{A}])$.

1.3 Processos Estocásticos

Definição 1.3.1. *Seja T um conjunto qualquer (em geral, $\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{N}$, um espaço de Hilbert) e seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Um processo estocástico indexado em T com valores no espaço de estados (E, \mathcal{E}) é uma aplicação*

$$\begin{aligned} X : T \times \Omega &\longrightarrow E \\ (t, w) &\longmapsto X_t(w) \end{aligned}$$

tal que $X_t : \Omega \longrightarrow E$ é variável aleatória mensurável para todo $t \in T$, e $X.(w) : T \longrightarrow E$ é chamada de trajetória de $w \in \Omega$.

Definição 1.3.2. *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ dois espaços de probabilidade. Então, os processos estocásticos $X : T \times \Omega \rightarrow E$ e $X' : T \times \Omega' \rightarrow E$ são equivalentes (ou versão um do outro) se para todo $t_1, \dots, t_n \in T$ e para todo $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$, tem-se*

$$\mathbb{P}(\{X_{t_i} \in A_i, i = 1, \dots, n\}) = \mathbb{P}'(\{X'_{t_i} \in A_i, i = 1, \dots, n\}).$$

Definição 1.3.3. *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Dizemos que os processos estocásticos $X, X' : T \times \Omega \rightarrow E$ são modificações um do outro se $\mathbb{P}(\{X_t = X'_t\}) = 1$ para cada $t \in T$. Dizemos que X e X' são indistinguíveis se $\mathbb{P}(\{X_t = X'_t, \text{ para todo } t \in T\}) = 1$.*

Definição 1.3.4. *Sejam T e E espaços topológicos. Dizemos que $X : T \times \Omega \rightarrow E$ é contínua \mathbb{P} -quase certamente se $\mathbb{P}(\{w : t \mapsto X_t(w) \text{ é contínua}\}) = 1$.*

Proposição 1.3.5 (Desigualdade de Chebichev). *Seja $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma variável aleatória tal que $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$ para algum p , $0 < p < \infty$. Então $\mathbb{P}\{|X| > a\} \leq a^{-p} \mathbb{E}[|X|^p]$, para todo $a > 0$ e para todo $p > 0$.*

1.3.1 Movimento Browniano em \mathbb{R}^n

O movimento browniano é o processo estocástico que mais nos interessa neste trabalho. Aqui, estamos apresentando-o como um processo contínuo \mathbb{P} -q.c. em \mathbb{R}^n , e no capítulo

seguinte trabalharemos em variedades Riemannianas, e no último capítulo apresentamos o movimento browniano Finsleriano. O movimento browniano também é conhecido como Processo de Wiener.

Teorema 1.3.6. *Existe um processo estocástico contínuo \mathbb{P} -q.c. com incrementos independentes tal que, para cada t , a variável aleatória B_t é centrada, gaussiana e tem variância t .*

O leitor interessado na demonstração e em mais detalhes desta seção pode consultar Revuz em [19].

Definição 1.3.7. *O processo estocástico cuja existência é garantida pelo teorema acima é chamado de Movimento Browniano.*

Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, o processo estocástico $B_t^x = x + B_t$ é chamado de movimento browniano inicializado em x . É claro que $\mathbb{P}[B_t^x \in A] = \int_A g_t(y - x) dy$, onde A é um subconjunto de Borel da reta real e $g_t(x) = (2\pi t)^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{x^2}{2t})$.

Se $B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^d$ são d cópias independentes de B_t , definimos um processo estocástico X no espaço de estados \mathbb{R}^d , estipulando que a i -ésima componente de X_t é B_t^i . Este processo estocástico é chamado de movimento browniano d -dimensional., ele é um processo estocástico gaussiano contínuo \mathbb{P} -q.c. tal que $\mathbb{P}[X_0 = 0] = 1$.

1.4 Filtrações e Martingales

Definição 1.4.1. *Uma filtração no espaço mensurável (Ω, \mathcal{F}) é uma família crescente $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, de sub- σ -álgebras \mathcal{F}_t de \mathcal{F} . Um espaço mensurável (Ω, \mathcal{F}) munido de uma filtração $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ é chamado de espaço filtrado.*

Definição 1.4.2. *Dizemos que um processo estocástico X em (Ω, \mathcal{F}) é adaptado à filtração $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ se X_t é \mathcal{F}_t -mensurável para cada t .*

Qualquer processo X é adaptado à sua filtração natural $\mathcal{F}_t^0 = \sigma(X_s, s \leq t)$. A filtração (\mathcal{F}_t^0) é a filtração mínima para a qual X é adaptado. Dizer que X é adaptado a (\mathcal{F}_t^0) significa que $(\mathcal{F}_t^0) \subset (\mathcal{F}_t)$ para cada t .

Definição 1.4.3. Um espaço filtrado sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é dito satisfazer as condições usuais se

(i) \mathcal{F}_0 contém os conjuntos \mathbb{P} -nulos;

(ii) $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$, para todo $t, 0 \leq t \leq \infty$ é contínua á direita.

Definição 1.4.4. Um tempo de parada relativo à filtração $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ é uma variável aleatória

$$T : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$$

tal que, para todo t , o conjunto $\{w : T(w) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Definição 1.4.5. Seja τ um conjunto qualquer (em geral \mathbb{R}_+, \mathbb{N} , espaço de Hilbert). Um processo $(X_t)_{t \in \tau}, (\mathcal{F}_t)$ -adaptado é chamado de martingale com respeito a (\mathcal{F}_t) se

1. $\mathbb{E}[X_t^+] = \mathbb{E}[X_t^+] < \infty$ para todo $t \in \tau$;

2. $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ quase sempre, para todo s, t tais que $s \leq t$.

Um processo (X_t) é um submartingale se $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s$, para todo $s < t$, e (X_t) é um supermartingale se $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s$, para todo $s < t$.

Em outras palavras, um martingale é uma família adaptada de variáveis aleatórias integráveis tal que $\int_A X_s d\mathbb{P} = \int_A X_t d\mathbb{P}$, para todo $s < t$ e $A \in \mathcal{F}_s$.

Observação 1.4.1. Se X_t é martingale e $\mathbb{E}[|X_t|^p] < \infty$ com $p \geq 1$, então $|X_t|^p$ é submartingale, pela desigualdade de Jensen.

Proposição 1.4.6. Seja B o movimento browniano canônico linear BM; então os seguintes processos estocásticos são \mathcal{F}_t^0 -martingales: B_t ; $B_t^2 - t$; $e^{\alpha B_t - \frac{\alpha^2 t}{2}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposição 1.4.7. Seja $(X_n)_n^\infty$ um submartingale com respeito a filtração discreta (\mathcal{F}_n) e $(H_n)_{n=1}^\infty, n = 1, 2, \dots$, um processo limitado positivo tal que $H_n \in \mathcal{F}_{n-1}$ para $n > 1$. Então

$$Y_0 = X_0, Y_n = Y_{n-1} + H_n(X_n - X_{n-1})$$

é um submartingale. Em particular, se T é um tempo de parada (discreto), então o processo estocástico $X^T = X_{n \wedge T}$ é um submartingale.

Observação 1.4.2. $(Y_n)_{n=0}^\infty$ é submartingale se $(X_n)_{n=0}^\infty$ é submartingale.

Proposição 1.4.8 (1ª versão do Teorema do tempo de parada opcional).

1. Sejam S, T tempos de parada discretos, $S \leq T$ e limitados (isto é, existe M tal que $S(w) \leq T(w) \leq M < \infty$) e X um martingale integrável. Então,

$$X_S = \mathbb{E}[X_T \mid \mathcal{F}_S]$$

quase sempre.

2. Um processo estocástico (X_n) adaptado e integrável é martingale se e somente se $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_S]$ para todo par de tempos de parada S, T limitados, $S \leq T$.

Teorema 1.4.9 (Desigualdade L^p de Doob). Se X é um martingale contínuo à direita ou um submartingale positivo indexado pelo intervalo T de \mathbb{R} , então se $X^* = \sup_t |X_t|$, para $p \geq 1$,

$$\lambda^p \mathbb{P}[X^* \geq \lambda] \leq \sup_t \mathbb{E}[|X_t|^p]$$

e para $p > 1$,

$$\|X^*\|_p \leq \frac{p}{p-1} \sup_t \|X_t\|_p.$$

1.5 Integração Estocástica

Nesta seção abordaremos alguns tópicos sobre integração estocástica. Nosso objetivo principal é a fórmula de Itô e a fórmula de Itô para integral de Stratonovich.

1.5.1 Variação Finita e Variação Quadrática

Seja $(A_t)_{t \geq 0} : t \mapsto \mathbb{R}$ uma função contínua à direita, e $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$ uma subdivisão de \mathbb{R}^+ com módulo $|\Delta| = \sup_i |t_{i+1} - t_i|$. Dizemos que $(A_t)_{t \geq 0}$ tem variação finita se para todo t ,

$$S_t = \sup_{\Delta} \sum_i |A_{t_{i+1}} - A_{t_i}| = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_i |A_{t_{i+1}} - A_{t_i}| < \infty.$$

e $t \mapsto S_t$ (crescente) é a variação total de A . Se $\lim_{t \rightarrow \infty} S_t < \infty$ então A tem variação limitada.

Exemplo 1.5.1. Se A_t for derivável, $S_t = \int_0^t |A'_s| ds$

Proposição 1.5.1. Se A tem variação limitada, então $A_t = A_t^+ - A_t^-$ com A_t^+ e A_t^- funções crescentes.

Teorema 1.5.2. Existe bijeção entre medidas com sinal de Radon em $[0, \infty)$ (boreliano, localmente limitado e regular interior) e funções de variação finita A_t contínuas à direita: $A_t = \mu([0, t])$, isto é, $\mu([a, b]) = A_b - A_a$.

Definição 1.5.3 (Integral de Stieltjes). Seja f uma função mensurável e localmente limitada, então

$$\int_0^t f(s) dA(s) = \int_{(0,t]} f(s) d\mu(s) = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f_{t_i} (A_{t_i} - A_{t_{i-1}}).$$

Note que $t \mapsto \int_0^t f dA$ também tem variação finita.

Definição 1.5.4. Um processo A é crescente se este é adaptado e suas trajetórias $t \mapsto A_t(w)$ são finitas, contínuas à direita e não-decrescentes. Também denominamos o processo A como de variação finita se suas trajetórias $t \mapsto A_t(w)$ são finitas, contínuas à direita e de variação finita. Ambas as definições são para quase todo w .

Denotaremos por \mathcal{A}^+ o espaço dos processos crescentes e \mathcal{A} os processos de variação finita. Claramente, $\mathcal{A}^+ \subset \mathcal{A}$, onde $\mathcal{A}_t \in \mathcal{A}^+$ então \mathcal{A}_t é crescente e limitado implicando em \mathcal{A}_t é de variação finita. Por outro lado, dado $A \in \mathcal{A}$, então para todo $t > 0$, podemos escrever $A_t = A_t^+ - A_t^-$ com $A_t^+, A_t^- \in \mathcal{A}^+$. Além disso, podemos escolher A^+ e A^- tal que para quase todo w , $A^+(w) - A^-(w)$ é a decomposição minimal de $A_t(w)$.

O processo $\int_0^t |dA|_s = A_t^+ - A_t^-$ está em \mathcal{A}^+ e para quase todo w a medida associada com tal processo é a variação total da medida associada com $A(w)$, tal processo é chamado variação de A . Agora vamos definir a “integral estocástica”. Seja X um processo progressivamente mensurável, por exemplo, limitado em todo intervalo $[0, t]$ para quase todo w , assim

para quase todo w , podemos definir a integral de Stieltjes

$$(X \cdot A)_t(w) = \int_0^t X_s(w) dA_s(w).$$

Caso w esteja no conjunto onde $A.(w)$ não tem variação finita ou $X.(w)$ não é localmente integrável com respeito a $dA.(w)$, tomamos $(X \cdot A) = 0$. Tal definição é possível pois para cada w , temos definida uma medida, a qual está associada a $A.(w)$.

Teorema 1.5.5. *Um martingale contínuo X não pode estar em \mathcal{A} a menos que ele seja constante.*

O leitor interessado na demonstração pode consultar Revuz em [19].

Deste teorema vemos a impossibilidade de definir uma integral estocástica para martingale via caminhos ou caminhos por partes. Por isso, faremos tal construção globalmente. Para tal, façamos as seguintes definições:

Definição 1.5.6. *Se $\Delta = \{t_0 = 0 < t_i < \dots\}$ é uma partição de \mathbb{R}^+ com somente um número finito de pontos em cada intervalo $[0, t]$, nós definimos para um processo X ,*

$$T_t^\Delta = \sum_{i=0}^{k-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 + (X_t - X_{t_k})^2$$

com k tal que $t_k \leq t \leq t_{k+1}$.

Definição 1.5.7. *Um processo estocástico X de valores reais é de variação quadrática finita se existe um processo finito $\langle X, X \rangle$ tal que para todo t e toda seqüência $\{\Delta_n\}$ de partições de $[0, t]$ tal que $|\Delta_n| \rightarrow 0$,*

$$\lim T_t^{\Delta_n} = \langle X, X \rangle_t$$

em probabilidade. O processo $\langle X, X \rangle$ é chamado variação quadrática de X .

Proposição 1.5.8. *Se $(B_t)_{t \geq 0}$ é o movimento browniano, então $\langle B, B \rangle_t = t$.*

Teorema 1.5.9 (Decomposição de Doob). *Se $(X_t)_{t \geq 0}$ é um submartingale, então $X = M + A$ onde M é martingale e A é um processo adaptado crescente.*

Definição 1.5.10. Um processo adaptado contínuo à direita $(X_t)_{t \geq 0}$ é um martingale local se existe uma seqüência de tempos de parada $(T_n)_{n \geq 1}$ tal que

- (i) T_n é crescente e $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$ quase sempre;
- (ii) Para todo n , X^{T_n} é martingale uniformemente integrável.

Observação 1.5.1. Martingale uniformemente integrável implica em martingale local, e $(X_t)_{t \geq 0}$ uniformemente integrável e martingale local implica em martingale.

Teorema 1.5.11. Se M é um martingale local contínuo, existe um único $\langle M, M \rangle$ processo adaptado crescente, $\langle M, M \rangle_{t=0} = 0$ tal que $M^2 - \langle M, M \rangle$ é martingale local contínuo.

Teorema 1.5.12. Sejam M, N martingales local contínuos, existe um único processo $\langle M, N \rangle \in \mathcal{A}$, $\langle M, N \rangle_{t=0} = 0$ tal que $MN - \langle M, N \rangle$ é martingale local.

Definição 1.5.13. Um processo $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é um processo mensurável se X é $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}_\infty$ -mensurável.

Definição 1.5.14. Um processo $(X_t)_{t \geq 0}$ é \mathcal{F}_t -semimartingale se $X = M + A$, onde M é um \mathcal{F}_t -martingale local e $A \in \mathcal{A}$ adaptado.

Proposição 1.5.15. Se $X = M + A$ é um semi-martingale contínuo, então $\langle X, X \rangle = \langle M, M \rangle$.

Definição 1.5.16. Se $X = M + A$ e $Y = N + B$ são dois semi-martingales contínuos, definimos o colchete de X e Y por

$$\langle X, Y \rangle = \langle X, Y \rangle = \frac{1}{4}[\langle X + Y, X + Y \rangle - \langle X - Y, X - Y \rangle].$$

Estamos interessados nas classes de martingales limitados, e daremos destaque na confusão usual entre processos e classes de processos indistinguíveis para obter normas e não apenas semi-normas na discussão abaixo.

Definição 1.5.17. Denotamos por \mathbb{H}^2 o espaço dos L^2 martingales limitados, isto é, o espaço dos $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ -martingales M tais que

$$\sup_t \mathbb{E}[M_t^2] < +\infty.$$

Denotaremos por H^2 o subconjunto de L^2 -martingales contínuos limitados, e H_0^2 o subconjunto de elementos de H^2 que desaparecem no zero.

Proposição 1.5.18. O espaço \mathbb{H}^2 é um espaço de Hilbert com a norma

$$\|M\|_{\mathbb{H}^2} = \mathbb{E}[M_\infty^2]^{\frac{1}{2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[M_t^2],$$

e o conjunto H^2 é fechado em \mathbb{H}^2 .

DEMONSTRAÇÃO: Temos que \mathbb{H}^2 é um espaço vetorial e com o produto interno $\langle M, N \rangle_{\mathbb{H}^2} = \mathbb{E}[M_\infty N_\infty]^{\frac{1}{2}}$ concluímos que \mathbb{H}^2 é um espaço de Hilbert e a primeira parte da proposição fica demonstrada. Agora, seja $\{M_n\}$ uma seqüência em H^2 convergindo para M em \mathbb{H}^2 . Pela desigualdade de Doob,

$$\mathbb{E}[(\sup_t |M_t^n - M_t|)^2] \leq 4 \sup_t \mathbb{E}[(M_t^n - M_t)^2] = 4\|M^n - M\|_{\mathbb{H}^2}^2 \longrightarrow 0$$

quando $n \uparrow \infty$, e portanto $M^n \longrightarrow M$ uniformemente em t . Logo, M é contínuo e daí concluímos que $M \in H^2$. ■

Proposição 1.5.19. Se $M \in H^2$ então $\langle M, M \rangle_t$ é integrável, isto é, $\mathbb{E}[\langle M, M \rangle_\infty] < \infty$. Em particular, se $M \in H_0^2$ então $\|M_\infty\|_{\mathbb{H}^2}^2 = \mathbb{E}[\langle M, M \rangle_\infty]$.

Definição 1.5.20 (Classe de Integrandos). Dado $M \in H^2$, seja $L^2(M)$ o espaço dos processos progressivamente mensuráveis tais que $\|K\|_M^2 = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty K_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right] < \infty$.

Observação 1.5.2. Se $(K_s)_{s \geq 0}$ é contínua (à direita) e limitado $\implies K \in L^2(M)$.

Teorema 1.5.21 (Integração Estocástica). Seja $M \in H^2$. Se $K \in L^2(M)$, existe um único elemento $K \cdot M$ em H_0^2 tal que

$$\langle K \cdot M, N \rangle = K \cdot \langle M, N \rangle, \forall N \in H^2.$$

Além disso, a aplicação $K \longrightarrow K \cdot M$ é isometria de $L^2(M)$ em H_0^2 .

A próxima proposição será útil para demonstrarmos a fórmula de Itô na seção seguinte.

Proposição 1.5.22. *Se K é um processo contínuo à esquerda e (Δ^n) é uma seqüência de subdivisões de $[0, t]$ tal que $|\Delta^n| \rightarrow 0$, então*

$$\int_0^t K_s dX_s = \mathbb{P} - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_i \in \Delta^n} K_{t_i} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}).$$

1.5.2 Fórmula de Itô

Iniciamos agora um dos tópicos mais importantes do nosso trabalho. No **Capítulo 2** relacionaremos a fórmula de Itô com o nosso principal objeto da análise estocástica: o movimento browniano. A fórmula de Itô tem revolucionado o estudo do movimento browniano e outras classes importantes de processos podem ser pensadas como a regra da cadeia para o cálculo estocástico. Apresentaremos as fórmulas de Itô e de Stratonovich, pois a geometria só precisa dos termos de segunda ordem e neste sentido usaremos a fórmula de Itô para integral de Stratonovich.

Definição 1.5.23. *Um martingale vetorial local d dimensional (respectivamente: semimartingale vetorial local) é um processo com valores em \mathbb{R}^d $X = (X^1, \dots, X^d)$ tal que cada $X^j, j = 1, \dots, d$ é um martingale local (respectivamente: semimartingale contínuo). Um martingale local (respectivamente: semimartingale contínuo complexo) é um processo com valores em \mathbb{C} cujas partes real e imaginária são martingales local (respectivamente: semimartingales contínuos).*

Agora apresentaremos a fórmula de Itô, seguindo Revuz em [19].

Teorema 1.5.24 (Fórmula de Itô). *Seja $F \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ e $X = (X^1, \dots, X^d)$ um semimartingale vetorial contínuo; então $F(X)$ é um semimartingale contínuo e*

$$F(X_t) = F(X_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_s) d\langle X^i, X^j \rangle_s. \quad (1.1)$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$ uma partição do intervalo $[0, t]$.

Assim, como $F \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, pela fórmula de Taylor

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} F(X_{t_{k+1}}) &= \sum_{k=0}^{n-1} F(X_{t_k}) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_{t_k})(X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\xi_k)(X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i)(X_{t_{k+1}}^j - X_{t_k}^j) \end{aligned}$$

onde $\xi_k = X_{t_k} + \theta(X_{t_{k+1}} - X_{t_k})$, com $\theta \in [0, 1]$. Então, por cancelamento telescópico,

$$\begin{aligned} F(X_{t_k}) &= F(X_0) + \overbrace{\sum_{i=1}^d \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_{t_k})(X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i)}^{I_1^{(n)}} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{i,j=1}^d \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\xi_k)(X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i)(X_{t_{k+1}}^j - X_{t_k}^j)}_{I_2^{(n)}} \end{aligned}$$

Pela proposição anterior, $\mathbb{P} - \lim_{n \rightarrow \infty} I_1^{(n)} = \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s) dX_s^i$. Para garantir a convergência

de $I_2^{(n)}$, considere a função $h(x) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ e $k_t = \int_0^t h(X_s) dX_s^i$. Seja $h(X_s^{\Delta_n}) = h(X_{t_k})$ se

$t_k \leq s < t_{k+1}$ e defina $K_t^n = \int_0^t h(X_s^{\Delta_n}) dX_s^i = \sum_{k=0}^{n-1} h(X_{t_k})(X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i)$. Observe que K_t^n converge em probabilidade para K_t . Assim, fazendo $n \rightarrow \infty$, temos que

$\langle K^n, X^j \rangle_t = \int_0^t h(X_s^{\Delta_n}) d\langle X^i, X^j \rangle_{ds}$ converge para $\int_0^t h(X_s) d\langle X^i, X^j \rangle_s$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} &\left| \langle K^n, X^j \rangle_t - \sum_{k=0}^{n-1} h(\xi_k)(X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i)(X_{t_{k+1}}^j - X_{t_k}^j) \right| = \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} h(X_{t_k})(\langle X^i, X^j \rangle_{t_{k+1}} - \langle X^i, X^j \rangle_{t_k}) - h(\xi_k)(\langle X^i, X^j \rangle_{t_{k+1}} - \langle X^i, X^j \rangle_{t_k}) \right. \\ &\quad \left. + h(\xi_k)(\langle X^i, X^j \rangle_{t_{k+1}} - \langle X^i, X^j \rangle_{t_k}) - h(\xi_k)(X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i)(X_{t_{k+1}}^j - X_{t_k}^j) \right| \\ &\leq \sup_k \left| h(X_{t_k}) - h(\xi_k) \right| \langle X^i, X^j \rangle_t + M \left(\langle X^i, X^j \rangle_t - \sum_{k=0}^{n-1} (X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i)(X_{t_{k+1}}^j - X_{t_k}^j) \right) \end{aligned}$$

onde os dois últimos termos vão para zero quando n tende ao infinito, sendo que o último termo vai a zero em probabilidade. Logo, $I_2^{(n)}$ converge para $\int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_s) d\langle X^i, X^j \rangle$ e o teorema fica demonstrado. ■

Como caso particular deste teorema, temos a seguinte proposição:

Proposição 1.5.25 (Fórmula de Integração por partes). *Se X e Y são dois semimartingales contínuos, então*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t.$$

Em particular,

$$X_t^2 = X_0^2 + 2 \int_0^t X_s dX_s + \langle X, X \rangle_t.$$

Se X e Y são de variação finita, esta fórmula encurta a integração pela fórmula por partes para integrais de Stieltjes. Se M é um martingale local, pela proposição anterior, temos que

$$M_t^2 - \langle M, M \rangle_t = M_0^2 + 2 \int_0^t M_s dM_s;$$

já conhecemos que $M^2 - \langle M, M \rangle$ é um martingale local mas a fórmula acima dá uma expressão explícita deste martingale local.

Exemplo 1.5.2. *Calcular $\int_0^t B_s dB_s$, onde B_s é o Movimento Browniano. Pela fórmula da proposição anterior temos que $B_t^2 = B_0^2 + 2 \int_0^t B_s dB_s + \langle B, B \rangle_t$, mas como $B_0 = 0$ concluímos que $\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$.*

Se X^i tem variação finita, isto é, $\langle X^i, X^j \rangle = 0$, para todo j , podemos enfraquecer a hipótese da diferenciabilidade de f .

Exemplo 1.5.3. *Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, com $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ contínuas, então*

$$F(X, A) = F(X_0, A_0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x} dX + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial y} dA + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} d\langle X, X \rangle,$$

onde X é um semimartingale e A é um processo de variação finita.

Podemos escrever a fórmula de Itô na forma diferencial, a saber

$$dF(X_t) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial F}{\partial x_i} dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} d\langle X^i, X^j \rangle_t.$$

Mais geralmente, se X é um semimartingale vetorial, $dY_t = \sum_{i=1}^d H_t^i dX_t^i$ teremos

$$Y_t = Y_0 + \sum_{i=1}^d \int_0^t H_s^i dX_s^i.$$

A fórmula de Itô mostra que a classe dos semimartingales é invariante por composição com funções C^2 , a qual dá outra razão à introdução de semimartingales.

Proposição 1.5.26. *Se f é uma função com valores em \mathbb{C} , definida em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, e tal que $\frac{\partial^2 f}{dx^2}$ e $\frac{\partial f}{dy}$ existem, são contínuas e satisfazem $\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, então para qualquer martingale local contínuo M , o processo $f(M_t, \langle M, M \rangle_t)$ é um martingale local. Em particular para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$, o processo*

$$\mathcal{E}^\lambda(M)_t = \exp\{\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} \langle M, M \rangle_t\}$$

é um martingale local. Para $\lambda = 1$, escrevemos simplesmente $\mathcal{E}(M)$ e chamamos de a exponencial de M .

Proposição 1.5.27. *Se B é um movimento browniano d dimensional e $f \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$, então*

$$M_t^f = f(t, B_t) - \int_0^t \left(\frac{1}{2} \Delta f + \frac{\partial f}{\partial t} \right) (s, B_s) ds$$

é um martingale local. Em particular, se f é harmônica em \mathbb{R}^d então $f(B)$ é um martingale local.

Teorema 1.5.28 (Caracterização de Levy). *Para um processo X , contínuo, de dimensão d , (\mathcal{F}_t) - adaptado e desaparecendo no zero, as três seguintes condições são equivalentes:*

(i) X é um \mathcal{F}_t -movimento browniano;

(ii) X é um martingale local contínuo e $\langle X^i, X^j \rangle_t = \delta_{ij}t$ para todo $1 \leq i, j \leq d$;

(iii) X é um martingale contínuo local e para toda d -upla $f = (f_1, \dots, f_d)$ de funções em $L^2(\mathbb{R}_+)$, o processo

$$\mathcal{E}_t^{if} = \exp \left\{ i \sum_{k=1}^d \int_0^t f_k(s) dX_s^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \int_0^t f_k^2(s) ds \right\}$$

é um martingale complexo.

Corolário 1.5.29. *O movimento browniano é o único martingale local contínuo (a menos de versões desse processo) com variação quadrática t .*

1.6 Integral de Stratonovich

Esta seção foi colocada para destacar a fórmula de Itô para integral de Stratonovich, a qual será definida a seguir. Lembramos ao leitor que no restante do texto, o símbolo “ \circ ” sempre representará a integral estocástica no sentido de Stratonovich.

Definição 1.6.1 (Integral de Stratonovich). *Seja X_t um semimartingale contínuo, e f_t um processo $\sigma(X_t)$ -adaptado. Seja $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$ uma partição de $[0, t]$.*

Definimos

$$\int_0^t f_s \circ dX_s = \mathbb{P} - \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{f_{t_{k+1}} + f_{t_k}}{2} \right) (X_{t_{k+1}} - X_{t_k}),$$

quando existe.

Teorema 1.6.2. *Se $(f_t)_{t \geq 0}$ é um semimartingale, então a integral acima existe e temos*

$$\int_0^t f_s \circ dX_s = \int_0^t f_s dX_s + \frac{1}{2} \langle f, X \rangle_t.$$

1.6.1 Fórmula de Itô para Integral de Stratonovich

Esta fórmula será útil na próxima seção quando trataremos de equações diferenciais estocásticas, mais precisamente equações diferenciais estocásticas em variedades.

Teorema 1.6.3. *Seja $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^3 e $X = (X^1, \dots, X^d)$ um semimartingale de dimensão d . Então,*

$$F(X) = F(X_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x^i}(X_s) \circ dX_s^i.$$

DEMONSTRAÇÃO: Usando a definição de Integral de Stratonovich, temos

$$\sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x^i}(X_s) \circ dX_s^i = \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x^i}(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \underbrace{\left\langle \frac{\partial F}{\partial x^i}(X_t), X_t^i \right\rangle}_t. \quad (*)$$

Mas pela fórmula de Itô,

$$\frac{\partial F}{\partial x^i}(X_t) = \frac{\partial F}{\partial x^i}(X_0) + \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}(X_s) dX_s^j + \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^d \int_0^t \frac{\partial^3 F}{\partial x^j \partial x^l \partial x^i}(X_s) d\langle X^l, X^j \rangle_s.$$

Agora,

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial x^i}(X_t), X_t^i \right\rangle_t = \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}(X_s) dX_s^j d\langle X^i, X^j \rangle_s. \quad (**)$$

O resultado segue substituindo (**) em (*) e aplicando a fórmula de Itô. Daí, obtemos

$$\sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x^i}(X_s) \circ dX_s^i = F(X) - F(X_0) \text{ o que conclui a demonstração.} \quad \blacksquare$$

1.7 Equações Diferenciais Estocásticas

Nesta seção trabalharemos com equações diferenciais estocásticas onde estaremos interessados nestas equações em variedades. Trazemos alguns resultados, muitos sem demonstrar. No restante do nosso trabalho sempre nos referiremos a uma EDE sendo uma equação diferencial estocástica. Seguimos bem de perto a boa referência de Hsu em [14].

1.7.1 EDE em \mathbb{R}^n

Aqui trabalharemos EDE do tipo Itô no espaço euclidiano com coeficientes localmente Lipschitz dirigido por semimartingales contínuos. O principal resultado desta seção é a existência e unicidade da solução de tal equação até seu tempo de explosão. Primeiro, formularemos

o tipo das equações que queremos resolver em \mathbb{R}^n , o espaço euclidiano de dimensão n . Tal equação é dada pela matriz dos coeficientes da difusão e dirigida pelo semimartingale Z . Assumimos que a matriz dos coeficientes da difusão $\sigma = \{\sigma_\alpha^i\} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{M}(N, l)$ (o espaço das matrizes $N \times l$) é *localmente Lipschitz*, isto é, para todo $z \in \mathbb{R}^n$, existem constantes $R > 0$ e $C(R)$, onde $C(R)$ depende de R , tal que

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq C(R)|x - y|,$$

para todo $x, y \in B_R(z)$, onde $B_R(z) = \{w \in \mathbb{R}^n : |w - z| \leq R\}$. Dizemos que σ é *globalmente Lipschitz* se $C(R)$ pode ser escolhido independente de R . Assumimos que o processo $Z = \{Z_t, t \geq 0\}$ é um \mathcal{F}_* -semimartingale com valores em \mathbb{R}^l (adaptado pela filtração \mathcal{F}_*) definido num espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}_*, \mathbb{P})$. Ele é visto como uma coluna dos l -semimartingales reais $Z_t = (Z_t^1, \dots, Z_t^l)$. Por definição, $Z = M + A$, aqui M é um \mathcal{F}_* -martingale e A um \mathcal{F}_* processo adaptado de variação finita tal que $A_0 = 0$.

Seja $X_0 \in \mathcal{F}_0$ uma variável aleatória mensurável em \mathbb{R}^n com respeito a \mathcal{F}_0 . Seja τ um \mathcal{F}_* -tempo de parada e considere a seguinte equação diferencial estocástica para um semimartingale $X = \{X_t; 0 \leq t < \tau\}$ em \mathbb{R}^n definido até τ :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s) dZ_t, \quad 0 \leq t < \tau. \quad (1.2)$$

Aqui a integral estocástica é no sentido de Itô. Numa situação típica onde $Z_t = (W_t, t)$ com W um Movimento Browniano euclidiano de dimensão $l - 1$ e $\sigma = (\sigma_1, b)$ com $\sigma_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{M}(N, l - 1)$ e $b : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, a equação toma uma forma mais familiar:

$$dX_t = \sigma_1(X_t) dW_t + b(X_t) dt.$$

Note que permitindo que uma solução exista somente até um tempo de parada, estamos incorporando a possibilidade que uma solução pode explodir num tempo finito. Nosso objetivo nesta seção é provar a existência e unicidade de uma solução até seu tempo de explosão para o tipo de equações diferenciais estocásticas devidamente formuladas. Para esta finalidade precisamos estimar no que se refere a integrais de Itô com respeito a semimartingales. Seja $Z = M + A$ a decomposição canônica do semimartingale Z num martingale local e um

processo de variação localmente limitada. Defina

$$Q_t = \sum_{i=1}^l \langle M^i, M^i \rangle_t + \sum_{i=1}^l (|A^i|_t^3 + |A^i|_t) + t, \quad (1.3)$$

onde $|A^i|_t$ representa a variação total de A^i em $[0, t]$. Adicionando t na definição deixa Q estritamente crescente, assim que ele possui uma inversa estritamente crescente, contínua $\eta = \{\eta_s, t \geq 0\}$. Portanto $\{\eta_s \leq t\} = \{s \leq Q_t\}$, cada η_s é um \mathcal{F}_* -tempo de parada.

Lema 1.7.1. *Existe uma constante C dependendo somente de m e l tal que para qualquer $\mathcal{M}(m, l)$ -processo contínuo \mathcal{F}_* -adaptado F e um \mathcal{F}_* -tempo de parada τ ,*

$$\mathbb{E} \left[\max_{0 \leq t \leq \tau} \left| \int_0^t F_s dZ_s \right|^2 \right] \leq C \mathbb{E} \left[\int_0^\tau |F_s|^2 dQ_s \right]. \quad (1.4)$$

Agora retornando a equação diferencial estocástica (1.2), vamos considerar primeiramente um caso sem explosão.

Teorema 1.7.2. *Suponha que σ é globalmente Lipschitz e X_0 quadrado integrável. Então a equação diferencial estocástica (1.2) possui uma única solução $X = \{X_t, t \geq 0\}$.*

No teorema acima, a solução X ocorre para todo tempo porque assumimos que a matriz dos coeficientes σ é globalmente Lipschitz, o qual implica que ela pode crescer no máximo linearmente. Quando a matriz σ é somente localmente Lipschitz, admitimos a possibilidade de explosão. Para aplicações futuras, tomaremos um ponto de vista mais geral e definimos o tempo de explosão de uma trajetória num espaço métrico localmente compacto M . Usamos $\hat{M} = M \cup \{\partial_M\}$ para denotar a compactificação de um ponto de M .

Definição 1.7.3. *Uma trajetória x com valores em M com tempo de explosão $e = e(x) > 0$ é uma aplicação contínua $x : [0, \infty) \rightarrow \hat{M}$ tal que $x_t \in M$ para $0 \leq t \leq e$ e $x_t = \partial_M$ para todo $t \geq e$ se $e < \infty$. O espaço das trajetórias com valores em M com tempo de explosão é chamado o espaço trajetórias de M e é denotado por $W(M)$.*

Estabelecemos alguns fatos básicos sobre tempos de explosão. Lembrando que uma exaustão de um espaço métrico localmente compacto é uma seqüência de conjuntos abertos relativamente compactos $\{O_N\}$ tais que $\bar{O}_N \subseteq O_{N+1}$ e $M = \bigcup_{N=1}^{\infty} O_N$.

Proposição 1.7.4. (1) Se $\{O_N\}$ é uma exaustão e τ_{O_N} o primeiro tempo de saída de O_N .

Então $\tau_{O_N} \uparrow$ e quando $N \uparrow \infty$;

(2) Suponha que $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma métrica em M com a propriedade que todo conjunto fechado e limitado é compacto. Fixe um ponto $o \in M$. Seja τ_R o primeiro tempo de saída da bola $B(R) = \{x \in M : d(x, o) \leq R\}$. Então $\tau_R \uparrow$ e quando $R \uparrow \infty$.

Usaremos a parte (2) da proposição acima em duas situações típicas: (i) M é uma variedade Riemanniana completa e d é a função distância Riemanniana; (ii) M é mergulhada como uma subvariedade fechada em outra variedade Riemanniana e d é a métrica Riemanniana do espaço ambiente. Seja $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}_t(W(M))$ a σ -álgebra gerada pelas aplicações coordenadas até o tempo t . Então temos um espaço mensurável filtrado $(W(M), \mathcal{B}_*)$, e o tempo de vida $e : W(M) \rightarrow (0, \infty]$ é um \mathcal{B}_* -tempo de parada. Para uma matriz dos coeficientes localmente Lipschitz σ , uma solução de (1.2) é naturalmente um semimartingale definido até um tempo de parada.

Definição 1.7.5. Seja $(\Omega, \mathcal{F}_*, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade filtrado e τ um \mathcal{F}_* -tempo de parada. Um processo contínuo X definido num intervalo de tempo estocástico $[0, \tau)$ é chamado um \mathcal{F}_* -semimartingale até τ se existe uma seqüência de \mathcal{F}_* -tempos de parada $\tau_n \uparrow \tau$ tal que para cada n os processos parados $X^{\tau_n} = \{X_{t \wedge \tau_n}, t \geq 0\}$ é um semimartingale no sentido usual.

Definição 1.7.6. Um semimartingale X até um tempo de parada τ é uma solução da EDE (1.2) se existe uma seqüência de tempos de parada $\tau_n \uparrow \tau$ tal que para cada n o processo parado X^{τ_n} é um semimartingale e

$$X_{t \wedge \tau_n} = X_0 + \int_0^{t \wedge \tau_n} \sigma(X_s) dZ_s, \quad t \geq 0.$$

O teorema abaixo mostra que existe uma única solução X para a EDE (1.2) até seu tempo de explosão $e(X)$.

Teorema 1.7.7. Suponha que são dados (i) uma matriz de coeficientes localmente Lipschitz $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}(n, l)$; (ii) um \mathcal{F}_* -semimartingale $Z = \{Z_t, t \geq 0\}$ com valores em \mathbb{R}^l num

espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}_*, \mathbb{P})$; (iii) uma variável aleatória X_0 \mathcal{F}_0 -mensurável com valores em \mathbb{R}^n . Então existe uma única variável aleatória X com valores em $W(\mathbb{R}^n)$ a qual é uma solução da EDE (1.2) até o seu tempo de explosão $e(X)$.

A demonstração deste teorema será omitida, o leitor interessado pode vê-la em Hsu [14]. Para futuras referências precisamos da seguinte forma de unicidade um pouco mais geral. A unicidade ocorre a menos de indistinguibilidade.

Proposição 1.7.8. *Suponha que σ é localmente Lipschitz. Seja X e Y duas soluções da EDE (1.2) até seus tempos de paradas τ e η respectivamente. Então $X_t = Y_t$ para $0 \leq t < \tau \wedge \eta$. Em particular, se X é uma solução até seu tempo de explosão $e(X)$, então $\eta \leq e(X)$ e $X_t = Y_t$ para $0 \leq t < \eta$.*

Diferentemente da unicidade trajetória a trajetória \mathbb{P} -q.c. mostrada nos resultados anteriores, a unicidade fraca (também chamada unicidade em lei) afirma que se (Z, X_0) e (\hat{Z}, \hat{X}_0) (possivelmente em espaços de probabilidade filtrados diferentes) tem a mesma lei, então as soluções X e \hat{X} da EDE (1.2) e da sua correspondente também tem a mesma lei. Para simplificar, nos restringimos a nossa situação típica onde o semimartingale dirigível possui a forma especial $Z_t = (W_t, t)$ com um \mathcal{F}_* -movimento browniano euclidiano W de dimensão l , e correspondentemente a matriz dos coeficientes possui a forma (σ, b) . Neste caso a equação transforma-se em

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s + \int_0^t b(X_s) ds. \quad (1.5)$$

A unicidade fraca para este tipo de equações é usada quando discutimos a unicidade de medidas de difusão geradas por um operador elíptico de segunda ordem. Note que W é um \mathcal{F}_* -movimento browniano se ele é um movimento browniano adaptado a \mathcal{F}_* tal que \mathcal{F}_t é independente de $\{W_{s+t} - W_t, t \geq 0\}$; ou equivalentemente, W possui a propriedade de Markov com respeito a filtração \mathcal{F}_* .

Teorema 1.7.9. *Suponha que σ e b são localmente Lipschitz. Então a unicidade fraca é verificada pela equação (1.5). Mais precisamente, suponha que \hat{X} é a solução de*

$$\hat{X}_t = \hat{X}_0 + \int_0^t \sigma(\hat{X}_s) d\hat{W}_s + \int_0^t b(\hat{X}_s) ds, \quad (1.6)$$

onde \hat{W} é um movimento browniano definido em outro espaço de probabilidade filtrado $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}_*, \hat{\mathbb{P}})$ e $\hat{X}_0 \in \hat{\mathcal{F}}_0$ possui a mesma lei que X_0 . Então \hat{X} e X tem a mesma lei.

O seguinte critério da não-explosão é bastante conhecido.

Proposição 1.7.10. *Suponha que Z é definido em $[0, \infty)$. Se σ é localmente Lipschitz e existe uma constante C tal que $|\sigma(x)| \leq C(1 + |x|)$, então a solução da EDE (1.2) não explode.*

Se o semimartingale dirigível Z é definido somente até um tempo de parada τ , podemos considerar a equação diferencial estocástica (1.2) com o semimartingale Z^{τ_n} para uma seqüência de tempos de parada $\tau_n \uparrow \tau$. Então temos o seguinte teorema:

Teorema 1.7.11. *Seja Z um semimartingale definido até um tempo de parada τ . Então existe uma única solução X para a equação diferencial estocástica (1.2) até o tempo de parada $e(X) \wedge \tau$. Se Y é outra solução até um tempo de parada $\eta \leq \tau$, então $\eta \leq e(X) \wedge \tau$ e $X_t = Y_t$ para $0 \leq t < e(X) \wedge \eta$.*

Retomando a formulação da integral de Stratonovich das equações diferenciais estocásticas. A vantagem desta formulação é que a fórmula de Itô aparece na mesma forma como o teorema fundamental do cálculo; portanto cálculo estocástico nesta formulação toma uma forma muito familiar, basta comparar (1.1) com (1.8) abaixo. Isto é uma característica muito conveniente quando estudamos equações diferenciais estocásticas em variedades, a qual será abordada na próxima seção. Entretanto, acontece frequentemente que as informações probabilísticas e geométricas se mostram úteis após a separação em martingale e componentes de variação limitada. Suponha que $V_\alpha, \alpha = 1, \dots, l$, são campos vetoriais diferenciáveis em \mathbb{R}^n . Cada V_α pode ser considerado como uma função $V_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ assim que $V = (V_1, \dots, V_l)$ é um função com valores em $\mathcal{M}(n, l)$ em \mathbb{R}^d . Sejam Z e X_0 como antes e considere a equação diferencial estocástica de Stratonovich

$$X_t = X_0 + \int_0^t V(X_s) \circ dZ_s,$$

onde a integral estocástica é no sentido de Stratonovich. Para enfatizar o fato que V é um conjunto de l campos vetoriais, reescrevemos as equações como

$$X_t = X_0 + \int_0^t V_\alpha(X_s) \circ dZ_s^\alpha. \quad (1.7)$$

Convertendo a integral de Stratonovich para a integral de Itô equivalente, obtemos a formulação de Itô equivalente da equação:

$$X_t = X_0 + \int_0^t V_\alpha(X_s) dZ_s^\alpha + \frac{1}{2} \int_0^t \nabla_{V_\beta} V_\alpha(X_s) d\langle Z^\alpha, Z^\beta \rangle_s.$$

Aqui $\nabla_{V_\beta} V_\alpha$ é a derivada de V_α sobre V_β . Para referências futuras recordamos aqui a fórmula de Itô neste ambiente na seguinte proposição.

Proposição 1.7.12. *Seja X uma solução da equação (1.7) e $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$. Então*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t V_\alpha f(X_s) \circ dZ_s, \quad 0 \leq s < e(X). \quad (1.8)$$

1.7.2 EDE em Variedades

A discussão na seção anterior deixa claro que soluções de equações diferenciais estocásticas em variedades devem estar no espaço dos semimartingales com valores na variedade.

Definição 1.7.13. *Seja M uma variedade diferenciável e $(\Omega, \mathcal{F}_*, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade filtrado. Seja τ um \mathcal{F}_* -tempo de parada. Um processo X contínuo, com valores em M definido em $[0, \tau)$ é chamado um M -semimartingale se $f(X)$ é um semimartingale em $[0, \tau)$ para toda $f \in C^\infty(M)$.*

Pela fórmula de Itô é fácil ver que quando $M = \mathbb{R}^n$ dá o semimartingale usual em \mathbb{R}^n . Pode-se mostrar que se $f(X)$ é um martingale real para toda $f \in C_K^\infty(M)$, isto é, funções diferenciáveis em M com suporte compacto, então X é um M -semimartingale; ou seja, o conjunto das funções teste pode ser reduzido para $C_K^\infty(M)$. Por outro lado, se X é um M -semimartingale, então pela fórmula de Itô, $f(X)$ é um semimartingale real para toda $f \in C^2(M)$, veremos isto na proposição 1.7.18 a seguir.

Uma equação diferencial estocástica numa variedade M é definida pelos l campos vetoriais V_1, \dots, V_l em M , e um semimartingale Z em \mathbb{R}^l , e uma M -variável aleatória $X_0 \in \mathcal{F}_0$, funcionando como o valor inicial da solução. Escrevemos a equação como

$$dX_t = V_\alpha(X_t) \circ dZ_s^\alpha$$

e nos referirmos a ela como $EDE(V_1, \dots, V_l; Z, X_0)$. Temos a seguinte definição, em vista da proposição 1.7.12.

Definição 1.7.14. *Um M -semimartingale X definido até um tempo de parada τ é uma solução da $EDE(V_1, \dots, V_l; Z, X_0)$ até τ se para toda $f \in C^\infty(M)$,*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t V_\alpha f(X_s) \circ dZ_s^\alpha, \quad 0 \leq t < \tau. \quad (1.9)$$

Ela é uma consequência da fórmula de Itô (1.8) que se (1.9) é verificada para f_1, \dots, f_k , então ela automaticamente é verificada para qualquer função diferenciável delas. Vemos depois que se M é mergulhada num espaço euclidiano \mathbb{R}^n , então é necessário verificar (1.9) pelas funções coordenadas. A vantagem da formulação via Stratonovich é que equações diferenciais estocásticas em variedades nesta formulação transforma consistentemente sobre difeomorfismos entre variedades. Se $\Gamma(TM)$ denota o espaço dos campos vetoriais diferenciáveis numa variedade M (o espaço das seções do fibrado tangente TM). Um difeomorfismo $\phi : M \rightarrow N$ entre duas variedades induz uma aplicação $\phi_* : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TN)$ entre campos vetoriais nas variedades respectivas pela prescrição

$$(\phi_* V)f(y) = V(f \circ \phi)(x), \quad y = \phi(x), \quad f \in C^\infty(N).$$

Equivalentemente, se V é o vetor tangente da curva C em M , então $\phi_* V$ é o vetor tangente da curva $\phi \circ C$ em N .

Proposição 1.7.15. *Suponha que $\phi : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo e X uma solução da $EDE(V_1, \dots, V_l; Z, X_0)$. Então $\phi(X)$ é uma solução da $EDE(\phi_* V_1, \dots, \phi_* V_l; Z, \phi(X_0))$ em N .*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $Y = \phi(X)$ e $f \in C^\infty(N)$. Aplicando (1.9) para $f \circ \phi \in C^\infty(M)$ e

usando $V_\alpha(f \circ \phi)(X_s) = (\phi_* V_\alpha)f(Y_s)$, obtemos

$$\begin{aligned} f(Y_t) &= f(Y_0) + \int_0^t V_\alpha(f \circ \phi)(X_s) \circ dZ_s^\alpha \\ &= f(Y_0) + \int_0^t (\phi_* V_\alpha)f(Y_s) \circ dZ_s^\alpha. \end{aligned}$$

Portanto $Y = \phi(X)$ é uma solução da EDE $(\phi_* V_1, \dots, \phi_* V_i; Z, \phi(X_0))$. ■

Mostraremos que a EDE $(V_1, \dots, V_i; Z, X_0)$ possui uma única solução até seu tempo de explosão. Usando o teorema do mergulho de Whitney, reduziremos a nossa equação para o espaço euclidiano.

Teorema 1.7.16 (Teorema do mergulho de Whitney). *Suponha que M é uma variedade diferenciável. Então existe um mergulho $i : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ para algum n tal que a imagem $i(M)$ é um subconjunto fechado de \mathbb{R}^n .*

É bastante conhecido da topologia diferencial que $n \geq 2(\dim M) + 1$. Geralmente identificamos M com a imagem $i(M)$ e assumimos que M é uma subvariedade fechada de \mathbb{R}^n . Note que assumimos que M não tem bordo. O fato que M é uma subvariedade fechada de \mathbb{R}^n , isto é, M é um subconjunto fechado de \mathbb{R}^n é muito importante, para isto vamos identificar o ponto no infinito de M como que de \mathbb{R}^n .

Proposição 1.7.17. *Seja M uma subvariedade fechada (não-compacta) de \mathbb{R}^n e $\hat{M} = M \cup \{\partial_M\}$ sua compactificação de um ponto. Uma seqüência de pontos $\{x^n\}$ em M converge para ∂_M em \hat{M} se e somente se $|x^n| \rightarrow \infty$ em \mathbb{R}^n .*

Suponha que M é uma subvariedade fechada de \mathbb{R}^n . Um ponto $x \in M$ possui n coordenadas $\{x^1, \dots, x^n\}$ como um ponto de \mathbb{R}^n . A proposição seguinte mostra que as n funções coordenadas $f^i(x) = x^i$ podem servir como um conjunto natural de funções teste para a fórmula de Itô em M .

Proposição 1.7.18. *Suponha que M é uma subvariedade fechada de \mathbb{R}^n . Sejam f^1, \dots, f^n funções coordenadas. Seja X um processo contínuo tomando valores em M .*

- (i) X é um semimartingale em M se e somente se ele é um semimartingale em \mathbb{R}^n , ou equivalentemente, se e somente se $f^i(X)$ é um semimartingale real para cada $i = 1, \dots, n$.
- (ii) X é uma solução da EDE $(V_1, \dots, V_i; Z, X_0)$ até um tempo de parada σ se e somente se para cada $i = 1, \dots, n$,

$$f^i(X_t) = f^i(X_0) + \int_0^t V_\alpha f^i(X_s) \circ dZ_s^\alpha, \quad 0 \leq t < \sigma. \quad (1.10)$$

DEMONSTRAÇÃO:

- (i) Suponha que X é um semimartingale em M . Cada f^i é uma função diferenciável em M , assim por definição $f^i(X) = X^i$ é um semimartingale real. Isto significa que X é um semimartingale em \mathbb{R}^n . Reciprocamente, suponha que X está em M e é um semimartingale em \mathbb{R}^n . Como M é fechada em \mathbb{R}^n , uma função $f \in C^\infty(M)$ pode ser estendida para uma função $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Portanto $f(X) = \tilde{f}(X)$ é um semimartingale real, e por definição X é um semimartingale em M .
- (ii) Se X é uma solução, então (1.10) é verificada porque cada $f^i \in C^\infty(M)$. Agora suponha que (1.10) é verificada e $f \in C^\infty(M)$. Tome uma extensão $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ de f . Então $f(X_t) = \tilde{f}(f^1(X_t), \dots, f^n(X_t))$. Pela fórmula de Itô,

$$\begin{aligned} d\{f(X_t)\} &= f_{x_i}(f^1(X_t), \dots, f^n(X_t)) \circ d\{f^i(X_t)\} \\ &= f_{x_i}(f^1(X_t), \dots, f^n(X_t)) \circ V_\alpha f^i(X_t) \circ dZ_t^\alpha \\ &= \{f_{x_i}(X_t^1, \dots, X_t^n) V_\alpha f^i(X_t)\} \circ dZ_t^\alpha \\ &= V_\alpha f(X_t) \circ dZ^\alpha. \end{aligned}$$

Na última passagem acima usamos a regra da cadeia para diferenciação de funções compostas. ■

Retornando a EDE $(V_1, \dots, V_i; Z, X_0)$, fixamos um mergulho de M em \mathbb{R}^n e consideramos M como uma subvariedade fechada de \mathbb{R}^n . Cada campo vetorial V_α é ao mesmo tempo, uma

função diferenciável em M com valores em \mathbb{R}^n e pode ser estendida para um campo vetorial \tilde{V}_α em \mathbb{R}^n . Da discussão na última seção a equação

$$X_t = X_0 + \int_0^t \tilde{V}_\alpha(X_s) \circ dZ_s^\alpha \quad (1.11)$$

em \mathbb{R}^n possui uma única solução X até seu tempo de explosão $e(X)$. Como X começa de M e os campos vetoriais \tilde{V}_α são tangentes de M em M , ele é esperado, como em equações diferenciais ordinárias, que X nunca está M . Uma vez que este fato é estabelecido, $e(X)$ é também o tempo de explosão de X como um semimartingale em M pela proposição 1.7.17.

Proposição 1.7.19. *Seja X a solução da equação estendida (1.11) até seu tempo de explosão $e(X)$ e $X_0 \in M$. Então $X_t \in M$ para $0 \leq t < e(X)$.*

A prova deste teorema será omitida, o leitor poderá consultar Hsu em [14] para maiores detalhes. Desta forma enunciamos o resultado principal desta seção.

Teorema 1.7.20. *Existe uma única solução da EDE $(V_1, \dots, V_l; Z, X_0)$ até seu tempo de explosão.*

DEMONSTRAÇÃO: Pela proposição 1.7.19 a solução X da EDE $(\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_l; Z, X_0)$ fica em M até seu tempo de explosão e satisfaz (1.11). Mas (1.11) é nada mais que uma versão de (1.10); portanto X é uma solução da EDE $(V_1, \dots, V_l; Z, X_0)$ pela proposição 1.7.18(ii). Se Y é outra solução até um tempo de parada τ , então, considerada como um semimartingale em \mathbb{R}^n , ela é também uma solução da EDE $(\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_l; Z, X_0)$ até τ . Pela unicidade estabelecida na proposição 1.7.8, Y deve coincidir com X em $[0, \tau)$. ■

Finalmente, no caso em que o semimartingale que dirige a equação percorre até um tempo de parada pode ser discutido como no caso euclidiano, como no teorema 1.7.11.

1.8 O gerador de uma difusão de Itô

Apresentamos nesta seção o gerador infinitesimal de uma difusão o qual é fundamental para muitas aplicações. Primeiro definimos o que se entende por uma difusão de Itô. Trazemos

algumas definições e não demonstraremos os resultados aqui. O leitor interessado poderá consultar a boa referência Øksendal em [18].

Definição 1.8.1. *Um processo estocástico $\{X_t\}_{t \geq 0}$ em \mathbb{R}^n é uma difusão de Itô se satisfaz uma equação diferencial estocástica homogênea no tempo*

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad t \geq s; \quad X_s = x \quad (1.12)$$

onde B_t é o movimento browniano de dimensão m e $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ satisfazem as condições do teorema 1.7.7 da seção anterior, o qual neste caso simplifica por:

$$|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq D |x - y|; \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \text{onde } |\sigma|^2 = \sum |\sigma_{ij}|^2$$

Podemos associar um operador diferencial parcial de segunda ordem \mathcal{A} a uma difusão de Itô X_t . A conexão entre \mathcal{A} e X_t é que \mathcal{A} é o gerador do processo X_t .

Definição 1.8.2. *Seja $\{X_t\}$ uma difusão de Itô em \mathbb{R}^n . O gerador (infinitesimal) \mathcal{A} de X_t é definido por*

$$\mathcal{A}f(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}^x[f(X_t)] - f(x)}{t};$$

$x \in \mathbb{R}^n$. O conjunto das funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que o limite existe em x é denotado por $\mathcal{D}_A(x)$, enquanto \mathcal{D}_A denota o conjunto das funções para as quais o limite existe para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Para encontrar a relação entre \mathcal{A} e os coeficientes b, σ na EDE definindo X_t precisamos do seguinte resultado, o qual é útil em muitas conexões:

Lema 1.8.3. *Seja Y_t um processo de Itô em \mathbb{R}^n da forma*

$$Y_t(w) = x + \int_0^t u(s, w)ds + \int_0^t v(s, w)dB_s$$

onde B é m -dimensional. Seja $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, isto é $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e f possui suporte compacto, e seja τ um tempo de parada com respeito a $\{\mathcal{F}_t^{(m)}\}$, e assumimos que $\mathbb{E}^x[\tau] < \infty$. Assumimos que $u(t, w)$ e $v(t, w)$ são limitados no conjunto dos (t, w) tais que $Y(t, w)$ pertence ao suporte de f . Então

$$\mathbb{E}^x[f(Y_\tau)] = f(x) + \mathbb{E}^x \left[\int_0^\tau \left(\sum_{i=1}^n u_i(s, w) \frac{\partial f}{\partial x_i}(Y_s) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (vv^T)_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Y_s) \right) ds \right],$$

onde \mathbb{E}^x é a esperança com respeito a lei de probabilidade natural R^x para Y_t começando em x , $R^x[Y_{t_1} \in F_1, \dots, Y_{t_k} \in F_k] = \mathbb{P}^0[Y_{t_1}^x \in F_1, \dots, Y_{t_k}^x \in F_k]$, onde F_i são os conjuntos borelianos.

A demonstração deste lema será omitida. O leitor pode consultar Øksendal em [18]. Agora temos condições de expressar o gerador infinitesimal \mathcal{A} de uma difusão de Itô.

Teorema 1.8.4. *Seja X_t a difusão de Itô*

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t.$$

Se $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ então $f \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ e

$$\mathcal{A}f(x) = \sum_i b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma \sigma^T)_{i,j}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (1.13)$$

DEMONSTRAÇÃO: A demonstração deste teorema segue do lema anterior com $t = \tau$ e a definição de \mathcal{A} . ■

Como exemplo importante, mostraremos o gerador infinitesimal do movimento browniano n -dimensional.

Exemplo 1.8.1 (Movimento Browniano). *O movimento browniano n -dimensional pode ser considerado como a solução da equação diferencial estocástica*

$$dX_t = dB_t,$$

ou seja, comparando com a difusão de Itô do teorema anterior temos que $b = 0$ e $\sigma = I_n$, a matriz identidade n -dimensional. Assim o gerador de B_t é

$$\mathcal{A}f = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad (1.14)$$

onde $f = f(x_1, \dots, x_n) \in C_0^2$, isto é, $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \Delta$, onde Δ é o operador de Laplace.

Finalizamos este capítulo lembrando que a equação (1.14) será usada no capítulo 2 quando estivermos tratando de conexão afim. Nosso objetivo será escrever uma nova forma para fórmula de Itô e assim escrever uma equação análoga a (1.14) para o gerador infinitesimal \mathcal{A} .

Agora daremos um exemplo de um processo de difusão que vamos precisar no capítulo 3 quando estivermos tratando de geometria estocástica Finsler.

Exemplo 1.8.2 (Difusões de Bessel). *Seja $B = (B_1, \dots, B_n)$ o movimento browniano em \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, e considere*

$$R(t, w) = |B(t, w)| = (B_1^2(t, w) + \dots + B_n^2(t, w))^{\frac{1}{2}},$$

ou seja, a distância da origem a $B(t, w)$. Pela fórmula de Itô, obtemos

$$dR = \sum_{i=1}^n \frac{B_i dB_i}{R} + \frac{n-1}{2R} dt.$$

O processo R é chamado o processo de Bessel n -dimensional pois seu gerador é o operador diferencial de Bessel

$$\mathcal{A}f(x) = \frac{1}{2}f''(x) + \frac{n-1}{2x}f'(x).$$

Para mais detalhes sobre processos de Bessel o leitor pode consultar Ikeda em [15] e Oksendal em [18].

CAPÍTULO 2

GEOMETRIA ESTOCÁSTICA RIEMANNIANA

Neste capítulo trataremos de cálculo estocástico em variedades Riemannianas, trazendo alguns resultados de geometria Riemanniana clássica. Lembramos ao leitor que muitos resultados não estão demonstrados. Nas primeiras seções fazemos os preliminares geométricos onde trazemos duas abordagens sobre conexões. No final do capítulo trazemos duas construções do movimento browniano, onde somente a primeira é intrínseca. Ao leitor interessado em mais detalhes e nas demonstrações omitidas indicamos as referências do Carmo [8], Kobayashi & Nomizu [16] e Elworthy [11].

2.1 Preliminares Geométricos

Nesta seção apresentamos alguns conceitos básicos sobre variedades, os quais serão utilizados no decorrer deste capítulo. A estrutura diferenciável da variedade é determinada por algum atlas $\{(U_\alpha; \varphi_\alpha) : \alpha \in A\}$, onde A é algum conjunto de índices, $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ é uma cobertura aberta, e cada φ_α é um homeomorfismo de U_α sobre algum subconjunto aberto de \mathbb{R}^n , tal que no domínio de definição em \mathbb{R}^n cada mudança de coordenada $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ é de classe C^∞ . Os pares $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ são cartas de classe C^∞ , como são qualquer outra tal que quando adicionada

pelo atlas original ela será uma atlas de classe C^∞ . Um vetor tangente em $x \in M$ pode ser considerado com uma classe de equivalência de curvas diferenciáveis $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ para algum $\epsilon > 0$ com $\sigma(0) = x$ onde $\sigma_1 \sim \sigma_2$ se $\frac{d}{dt}\varphi_\alpha(\sigma_1(t))$ e $\frac{d}{dt}\varphi_\alpha(\sigma_2(t))$ coincidem em $t = 0$ para algum (e portanto todas) cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ com $x \in U_\alpha$. O conjunto de tais vetores formam o *espaço tangente* $T_x M$ a M em x . Qualquer carta sobre x dá uma bijeção a qual é usada para dar a $T_x M$ uma estrutura de espaço vetorial, independente da escolha da carta.

Definição 2.1.1. *Um grupo de Lie G é uma variedade diferenciável com uma estrutura de grupo tal que as aplicações*

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g_1, g_2) &\longmapsto g_1 g_2. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g^{-1}. \end{aligned}$$

são de classe C^∞ .

Exemplos canônicos incluem o círculo S^1 , a esfera tridimensional S^3 (o grupo multiplicativo dos quatérnios com norma 1), o grupo ortogonal $O(n)$ o qual tem $SO(n)$ como componente conexa da identidade, e os grupos não compactos $(\mathbb{R}^n, +)$ e $GL(n)$.

Uma ação à direita de G numa variedade M é uma aplicação diferenciável $M \times G \rightarrow M$ usualmente escrita $(x, g) \mapsto xg$ tal que $x \cdot 1 = x$ (para 1 o elemento identidade), e

$$(x \cdot g_1) \cdot g_2 = x \cdot (g_1 \cdot g_2).$$

Exemplos são a ação de G em si mesmo pela multiplicação à direita. A ação natural de $GL(n)$ em \mathbb{R}^n é a ação à esquerda, definida similarmente. Note que $x \rightarrow x \cdot g$ é um difeomorfismo de M , o qual escrevemos como $R_g : M \rightarrow M$, com $L_g : M \rightarrow M$ para uma ação à esquerda.

Seja \mathfrak{g} a álgebra de Lie, isto é, o espaço tangente de G em 1. Então a ação à esquerda dá um difeomorfismo (trivialização de TG)

$$\begin{aligned} Y : G \times \mathfrak{g} &\longrightarrow G \\ Y(g)(v) &\longmapsto T_1 L_g(v). \end{aligned}$$

Assim um semimartingale z em \mathfrak{g} dá uma EDE em G .

A aplicação $v \mapsto Y_v := Y(\cdot)v$ dá uma bijeção entre \mathfrak{g} e o espaço dos campos vetoriais invariantes à esquerda em G . Para qualquer dois campos vetoriais X^1, X^2 numa variedade M existe outro campo vetorial $[X^1, X^2]$, o colchete de Lie, determinado por

$$[X^1, X^2]f = X^1X^2f - X^2X^1f$$

para $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Isto dá uma estrutura de álgebra de Lie. Para um grupo de Lie o colchete de dois vetores invariantes à esquerda ainda é invariante à esquerda, assim existe um colchete de Lie induzido em \mathfrak{g} tal que

$$Y_{[v_1, v_2]} = [Y_{v_1}, Y_{v_2}].$$

Seja $\{\sigma(t) : t \in \mathbb{R}\}$ uma curva em G com $\sigma(0) = 1$ e $\frac{d\sigma}{dt} = Y_v(\sigma t)$. Isto é um subgrupo a um parâmetro e usualmente escrevemos $\sigma t = \exp(tv)$. Isto determina

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\longrightarrow G \\ v &\longmapsto \exp(v), \end{aligned}$$

não fazer confusão com outra aplicação exponencial dada por geodésicas, a qual veremos a seguir.

2.2 Conexões no fibrado principal

Um G -fibrado principal sobre M é uma aplicação $\pi : B \rightarrow M$ entre variedades diferenciáveis a qual é sobrejetiva, onde B possui uma G -ação tal que $\pi(b \cdot g) = \pi(b)$, para todo $b \in B$, $g \in G$, e tal que existe difeomorfismos de classe C^∞ (trivializações locais)

$$\begin{aligned} \theta_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) &\longrightarrow U_\alpha \times G \\ b &\longmapsto \theta_\alpha(b) = (\pi(b), \theta_{\alpha, x}(b)), \end{aligned}$$

$$x = \pi(b) \text{ com } \theta_{\alpha, x}(b \cdot g) = \theta_{\alpha, x}(b) \cdot g.$$

Exemplo 2.2.1. *Um exemplo importante é o fibrado linear das bases de M , $\pi : GLM \rightarrow M$, onde GLM consiste de todos isomorfismos lineares $u : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$ para algum $x \in M$, com*

π aplicando u sobre x . A ação à direita é a composição $u \cdot g(e) = u(ge)$ para $e \in \mathbb{R}^n$. Cada elemento u é chamado uma base desde que possa ser identificada com a base $\{u_1, \dots, u_n\}$ de $T_x M$ onde $u_p = u(e_p)$ para $\{e_1, \dots, e_n\}$ a base canônica de \mathbb{R}^n .

Para um G -fibrado principal $\pi : B \rightarrow M$ o espaço tangente TB possui um subconjunto definido naturalmente: o *fibrado tangente vertical*, ou fibrado sobre as fibras,

$$TB \supset VTB = \{v \in TB : d\pi(v) = 0\}.$$

Uma conexão em B é uma escolha de um fibrado tangente “horizontal” complementar, HTB , invariante sobre a ação de G . Uma maneira para fazer isto é tomar uma 1-forma \tilde{w} com valores em \mathfrak{g} , isto é, $\tilde{w} : TB \rightarrow \mathfrak{g}$ é diferenciável, e cada restrição $\tilde{w}_b : T_b B \rightarrow \mathfrak{g}$, $b \in B$ é linear, com

(i) $\tilde{w} \circ dR_g = ad(g^{-1}) \circ \tilde{w}$, $g \in G$ onde $ad(g^{-1}) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é a ação adjunta, a saber a derivada em 1 da aplicação

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ a &\longmapsto g^{-1} \cdot a \cdot g; \end{aligned}$$

(ii) $\tilde{w}(A^*(b)) = A$, $b \in B$, $A \in \mathfrak{g}$ onde A^* é o campo vetorial (vertical) em B definido por

$$A^*(b) = \left. \frac{d}{dt}(b \cdot \exp tA) \right|_{t=0}.$$

Tal \tilde{w} é chamada uma *forma conexão*. Dada tal forma, pode-se definir um fibrado tangente horizontal por

$$HTB = \{v \in TB : \tilde{w}(v) = 0\}.$$

Então,

(a) $T_b B = HT_b B \oplus VT_b B$ para cada $b \in B$ e

(b) $dR_g(HT_b B) = HT_{b \cdot g} B$, $b \in B$, $g \in G$.

Reciprocamente dado HTB satisfazendo (a) e (b) existe uma forma conexão diferenciável induzida. Deve-se construir conexões por partições da unidade, mas sem estrutura adicional não existe escolha canônica.

Para cada trivialização $(U_\alpha, \theta_\alpha)$ existe uma seção local

$$\begin{aligned} s_\alpha : U_\alpha &\longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha) \subset B \\ x &\longmapsto s_\alpha(x) = \theta_{\alpha,x}^{-1}(1) \end{aligned}$$

Isto pode ser usado para puxar de volta uma forma conexão \tilde{w} para uma 1-forma $\tilde{w}_\alpha = s_\alpha^*(\tilde{w})$ com valores em \mathfrak{g} dada pela composição

$$\tilde{w}_\alpha = \tilde{w} \circ ds_\alpha : TU_\alpha \longrightarrow \mathfrak{g}.$$

Para uma conexão em $GL(M)$ as componentes desta dão os símbolos de Christoffel. De fato, uma carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ para M determina uma trivialização a qual aplicam u a $(T_x\varphi_\alpha) \circ u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de uma base u em x . Então $s_\alpha(x) = (d_x\varphi_\alpha)^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_xM$. Defina

$$\Gamma : \varphi_\alpha(U_\alpha) \longrightarrow \mathbb{L}(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g}) = \mathbb{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n))$$

por

$$\Gamma(\varphi_\alpha(x))v = s_\alpha^*(\tilde{w})(d_x\varphi_\alpha^{-1}(v)),$$

$v \in \mathbb{R}^n$ obtendo os símbolos de Christoffel Γ_{jk}^i ,

$$\Gamma_{jk}^i(y) = \langle \Gamma(y)(e_j)(e_k), e_i \rangle$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^n . A conexão é sem torsão se

$$\Gamma(y)(v_1)(v_2) = \Gamma(y)(v_2)(v_1)$$

ou equivalentemente se $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$.

2.3 Levantamento Horizontal

Uma conexão para $\pi : B \longrightarrow M$ determina uma aplicação levantamento horizontal

$$H_b : T_{\pi(b)}M \longrightarrow T_bB$$

a qual é a inversa da restrição de $d_b\pi$ a HT_bB , é um isomorfismo linear.

Também temos uma maneira de levantar horizontalmente curvas diferenciáveis em M para curvas em B .

Definição 2.3.1. *Uma curva diferenciável σ em B é horizontal se $\dot{\sigma}(t) \in HTB$, para todo t ou equivalentemente se $\tilde{w}(\dot{\sigma}(t)) = 0$, para todo t .*

Para uma curva C^1 por partes $\sigma : [0, T) \rightarrow M$ e $b_0 \in \pi^{-1}(\sigma(0))$ existe uma única curva horizontal $\tilde{\sigma}$ em B com $\tilde{\sigma}(0) = b_0$ e $\pi(\tilde{\sigma}(t)) = \sigma(t)$, para todo t (isto é $\tilde{\sigma}$ é o levantamento de σ .)

De fato dada uma trivialização $(U_\alpha, \theta_\alpha)$, cuja $\sigma(t)$ está em U_α , para $\tilde{\sigma}$ ser um levantamento $\theta_\alpha(\tilde{\sigma}(t)) = (\sigma(t), g(t)) \in U_\alpha \times G$ e então será horizontal se e somente se

$$\frac{d}{dt}g(t) = -dR_{g(t)}(\tilde{w}_\alpha(\sigma(t))(\dot{\sigma}(t))) \quad (2.1)$$

assim que a existência e unicidade local seguem imediatamente da teoria clássica de EDO em G . Para mostrar (2.1) note que os axiomas para \tilde{w} implicam que para (v, A) em $T_{(x,a)}(U_\alpha \times G)$

$$\tilde{w} \circ (T\theta_\alpha)^{-1}(v, A) = ad(a^{-1})\tilde{w}_{\alpha(x)}v + dL_{a^{-1}}A \quad (2.2)$$

Note que pela unicidade e invariância, se $g \in G$ o levantamento horizontal de σ começando em b_0g é justamente $t \rightarrow \tilde{\sigma}(t)g$.

A única dificuldade real é estender esta construção para levantamentos de semimartingales y_t (tratando (2.1) como uma EDE de Stratonovich quando $\sigma(t)$ é trocado por y_t) é para assegurar que o processo levantado não explode. Por simplicidade restringimos atenção agora para uma conexão afim em M , isto é uma conexão em GLM .

Definição 2.3.2. *Dada uma curva C^1 por partes $\sigma : [0, T) \rightarrow M$ e um vetor $v_0 \in T_{\sigma(0)}M$ definimos o transporte paralelo*

$$\parallel_t(v_0) \in T_{\sigma(t)}M, \quad 0 \leq t \leq T$$

de v_0 sobre σ por

$$//_t v_0 = \tilde{\sigma}(t) b_0^{-1}(v_0) \quad (2.3)$$

onde $\tilde{\sigma}(t)$ é o levantamento horizontal de σ por $b_0 \in \pi^{-1}(\sigma(0))$, o resultado sendo independente da escolha de b_0 .

Temos agora um campo vetorial W sobre σ , isto é $W : [0, T] \longrightarrow TM$ com $W(t) \in T_{\sigma(t)}M$ para cada t , e assim definimos:

Definição 2.3.3. *A derivada covariante de W sobre σ é definida por*

$$\nabla W(X) = \frac{DW}{\partial t} = //_t \frac{d}{dt} \left(//_t^{-1} W(t) \right) \quad (2.4)$$

Assim W é paralelo sobre σ , isto é $W(t) = //_t W(0)$ se e somente se $\frac{DW}{\partial t} \equiv 0$. Sobre uma carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ para M , com trivialização induzida de $\pi^{-1}(U_\alpha)$, usando a mesma notação de (2.1)

$$d_{\sigma(t)\varphi_\alpha} \left(\frac{DW}{\partial t} \right) = g(t) \frac{d}{dt} (g(t)^{-1} v(t))$$

onde $v(t) = T_{\sigma(t)\varphi_\alpha}(W(t))$, e assim por (2.1) a representação local $T_{\sigma(t)\varphi_\alpha} \left(\frac{DW}{\partial t} \right)$ é dada por

$$\frac{dv}{dt} + \Gamma(\sigma_\alpha(t))(\dot{\sigma}_\alpha(t))(v(t)) \quad (2.5)$$

para $\sigma_\alpha(t) = \phi_\alpha(\sigma(t))$ ou, se $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ denota o campo vetorial sobre U_α dado por

$$T_x \varphi_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = e_i,$$

o i -ésimo elemento da base canônica de \mathbb{R}^n e se $W(x) = \sum_{i=1}^n W^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$, e

$$\left(\frac{DW}{\partial t} \right)^i = \frac{dW^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i(\sigma_\alpha(t))(\dot{\sigma}(t)^j)(W^k(t)) \quad (2.6)$$

onde temos somatório nos índices repetidos.

Definição 2.3.4. *Por definição uma curva σ em M é uma geodésica se seu campo velocidade $\dot{\sigma}$ é paralelo sobre σ , isto é,*

$$\frac{D\dot{\sigma}}{\partial t} \equiv 0.$$

A substituição disto em (2.3) dá a equação clássica local.

Exemplo 2.3.1. *Seja $\mathbb{L}(TM; TM) = \bigcup_{x \in M} \mathbb{L}(T_x M; T_x M)$, um fibrado que chamaremos de fibrado das transformações lineares. Esse fibrado tem naturalmente uma estrutura de variedade diferenciável com cartas induzidas pelas cartas de M , e uma projeção diferenciável sobre M , como outros fibrados tensoriais e.g. o fibrado cotangente*

$$T^*M = \bigcup \{ \mathbb{L}(T_x M; \mathbb{R}) \},$$

os fibrados exteriores $\bigwedge^p TM$, e os fibrados das aplicações p -lineares

$$\mathbb{L}(TM, \dots, TM; \mathbb{R}) \simeq \bigotimes^p T^*M.$$

Note que uma base u em x determina um isomorfismo

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbb{L}}(u) : \mathbb{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{L}(T_x M; T_x M) \\ T &\longmapsto \rho_{\mathbb{L}}(u)(T) = uTu^{-1} \end{aligned}$$

e similarmente para os outros fibrados mencionados:

$$\begin{aligned} \rho^*(u) : \mathbb{R}^{n^*} &\longrightarrow T_x^*M \\ l &\longmapsto \rho^*(u)(l) = l \circ u^{-1}, \end{aligned}$$

e também

$$\rho_{\bigwedge}(u)(v_1 \wedge \dots \wedge v_p) = (uv_1) \wedge \dots \wedge (uv_p)$$

e

$$\rho_{\otimes}(u)T = T(u^{-1}(-), \dots, u^{-1}(-)).$$

Estas equações também determinam representações de $GL(n)$ em $\mathbb{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $\bigwedge TM$, etc. os quais também são denotadas por $\rho_{\mathbb{L}}$, ρ_{\bigwedge} , etc.

Um campo vetorial A em M determina uma aplicação

$$\begin{aligned} A^\sim : GLM &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\longmapsto A^\sim(u) = u^{-1}A(\pi(u)). \end{aligned}$$

Similarmente uma seção B de $\mathbb{L}(TM; TM)$, isto é uma aplicação $B : M \longrightarrow \mathbb{L}(TM; TM)$ tal que $B(x) \in \mathbb{L}(T_x M; T_x M)$ para cada x dá

$$\begin{aligned} B^\sim : GLM &\longrightarrow \mathbb{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ u &\longmapsto B^\sim(u) = \rho_{\mathbb{L}} u^{-1} B. \end{aligned}$$

A derivada covariante ∇A de A é a seção de $\mathbb{L}(TM; TM)$ definida por

$$\nabla A(x)(v) = u dA^\sim(v^\sim) \quad (2.7)$$

onde v^\sim é o levantamento horizontal $H_u v$ de v para $HT_u GLM$, para $v \in T_x M$. Isto é frequentemente escrito $\nabla A(v)$ ou $\nabla_v A$.

Derivadas covariantes de outros campos tensoriais *e.g.* seções B de $\mathbb{L}(TM; TM)$ são definidas similarmente: ∇B é a seção de $\mathbb{L}(TM; \mathbb{L}(TM; TM))$ dada por

$$\nabla B(x)(v) = \rho_{\mathbb{L}}(u) dB^\sim(v^\sim) \in \mathbb{L}(T_x M; T_x M) \quad (2.8)$$

para v^\sim como acima. Em particular as derivadas covariantes de ordem maior são definidas desta maneira, *e.g.*

$$\nabla^2 A = \nabla(\nabla A)$$

é a seção de

$$\mathbb{L}(TM; \mathbb{L}(TM; TM)) \cong \mathbb{L}(TM, TM; TM).$$

Para uma carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ para M perto de x , usando a trivialização induzida de $\pi^{-1}(U_\alpha)$ nosso campo tensorial C , dizemos, quando levantado dá uma aplicação \tilde{C}' em $U_\alpha \times GL(n)$ dado por $\tilde{C}'(x, g) = \rho(g)^{-1} C'(x)$ onde C' é C no nosso sistema de coordenadas, e ρ é a representação relevante, *e.g.* $\rho(g) = g$ para campos vetoriais, $\rho = \rho_{\mathbb{L}}$, etc. Nestas coordenadas $v^\sim = (v, -\Gamma(x)(v))$ assim $\nabla C(x)(v)$ é dado por

$$dC'(v) + d_I \rho(\Gamma(x)(v)) C'(x) \quad (2.9)$$

onde $d_I\rho$ significa a diferencial de ρ na identidade *e.g.*

$$d_I\rho^*(\Gamma(x)(v)) = -(\Gamma(x)v)^*.$$

Em particular se o nosso campo vetorial A é dado sobre U_α por

$$A = \sum_{i=1}^n A^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

etc. então somando repetidamente, se $x_\alpha = \varphi_\alpha(x)$

$$[\nabla A(v)]^i = dA^i(v) + \Gamma_{jk}^i(x_\alpha)(v^j)(A^k(x)) = \left(\frac{\partial A^i}{\partial X^j} \right) v^j + \Gamma_{jk}^i(x_\alpha)(v^j)(A^k(x)), \quad (2.10)$$

onde formalmente $\frac{\partial A^i}{\partial X^j} : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ significa o resultado da ação em A^i pelo campo vetorial $\frac{\partial}{\partial x^j}$. Na prática tudo é transportado para o conjunto aberto $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ de \mathbb{R}^n para os cálculos assim que $\frac{\partial A^i}{\partial X^j}$ é calculado como $\frac{\partial}{\partial x^j} A^i(\varphi_\alpha(x^1, \dots, x^n))$ no sentido do cálculo elementar.

Comparando (2.6) com (2.10) vemos que se V é um campo vetorial tomando valores v no ponto x , e se σ é uma curva integral de V , assim $\dot{\sigma}(t) = V(\sigma(t))$, com $\sigma(0) = x$ então

$$\left. \frac{DA}{dt} \right|_{t=0} = \nabla A(v) = \nabla_v A. \quad (2.11)$$

Note que se V é um campo vetorial podemos formar um novo campo vetorial $\nabla_V A$ ou $\nabla A(V)$ por

$$\nabla_V A(X) := \nabla A(V(X))$$

vimos de (2.8), ou trabalhando no centro das coordenadas normais que para uma conexão sem torsão

$$\nabla_V A - \nabla_A V = [V, A]. \quad (2.12)$$

Como último comentário, a diferenciação covariante comporta-se similarmente a diferenciação ordinária. Por exemplo se α é uma 1-forma (i.e. uma seção de T^*M) e A é um campo vetorial então para $v \in T_x M$

$$d(\alpha(A(\cdot)))(v) = \nabla_V \alpha(A(x)) + \alpha(\nabla_V A(x)) \quad (2.13)$$

Uma maneira para ver isto é escrever $\alpha(A(\pi(u))) = (\alpha_X \circ u) \circ u^{-1} A(\pi(u))$ para $u \in GLM$, $x = \pi(u)$, e assim derivamos ambos os lados na direção $H_u(v)$.

2.4 Geometria Riemanniana

Apresentamos nesta seção alguns conceitos de Geometria Riemanniana, dos quais alguns serão utilizados no decorrer do texto e quando estivermos definindo os conceitos de geometria estocástica. Aqui, trazemos outra abordagem sobre conexões como na seção 2.2, onde uma conexão no fibrado OM é chamada uma conexão Riemanniana no sentido que foi visto na seção 2.2 deste capítulo. Seguimos de perto a boa referência de Carmo [8].

2.4.1 Métrica Riemanniana

Definição 2.4.1. *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M de dimensão n é uma correspondência diferenciável g que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente de M em p , $T_p M$. Ou seja,*

$$\begin{aligned} g : M &\longrightarrow (\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}) \\ p &\longmapsto g(p)(u, v) = \langle u, v \rangle_p \end{aligned}$$

onde $u, v \in T_p M$.

A propriedade positiva definida garante que g é não degenerada. Uma métrica que seja simétrica e não degenerada (não necessariamente positiva definida) é dita uma métrica pseudo-Riemanniana.

Uma variedade munida de uma métrica Riemanniana é dita uma variedade Riemanniana.

Seja uma carta (U, φ) em M , $U \subseteq M$, com funções coordenadas $\varphi(u) = (x^1, \dots, x^n)$, $u \in U$. Se $\{X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\}$ é a base natural de TU então as componentes da métrica Riemanniana g são as funções $g_{ij} = g(X_i, X_j)$. Denotamos os elementos da matriz inversa de $[g_{ij}]$ por g^{ij} .

Podemos induzir uma métrica Riemanniana em uma subvariedade M de \mathbb{R}^k restringindo o produto interno de \mathbb{R}^k ao espaço tangente TM . O famoso teorema de J. Nash afirma que toda variedade Riemanniana pode ser obtida dessa forma.

Com uma métrica Riemanniana podemos calcular comprimentos de curvas. Seja M uma variedade Riemanniana com métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $c : I \rightarrow M$, com $I = [0, 1]$, uma curva diferenciável, então definimos o comprimento dessa curva por

$$l(c) = \int_0^1 \left\langle \frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt} \right\rangle^{\frac{1}{2}} dt.$$

Uma métrica Riemanniana determina uma medida em M , que denotaremos por μ , tal que se (U, φ) é uma carta para M então o pull-back μ de $\mu|_U$ por φ é equivalente à medida de Lebesgue no conjunto aberto $\varphi(U)$ de \mathbb{R}^n com

$$\mu(dx) = \sqrt{\det G(\varphi^{-1}(x))} \lambda(dx)$$

onde λ é a medida de Lebesgue e G é a representação local da métrica. Usualmente escrevemos dx por $\mu(dx)$ ou $\lambda(dx)$ e escrevemos $g(x)$ para $\det G(x)$. Note que $\sqrt{g(x)} = |\det d_y \varphi^{-1}|$ para $y = \varphi(x)$, onde \det refere-se ao determinante obtido usando $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$.

Proposição 2.4.2. *Toda variedade diferenciável M (de Hausdorff e com base enumerável) possui uma métrica Riemanniana.*

2.4.2 Conexão Afim e Derivada Covariante

Seja $c : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável, com $I = [0, 1]$ em uma variedade M mergulhada em \mathbb{R}^k . Seja também $V(t) \in T_{c(t)}M$ um campo de vetores ao longo da curva $c(t)$. A derivada $\frac{dV}{dt}(t)$ é um vetor que em geral não pertence ao espaço tangente $T_{c(t)}M$. Portanto a derivada $\frac{dV}{dt}(t)$ não é uma noção da geometria intrínseca da variedade. Com a estrutura de uma conexão afim é possível definir a derivada covariante $\frac{DV}{dt}$ que pertence ao espaço tangente TM e portanto é consistente. Com a derivada covariante poderemos definir campos de vetores paralelos ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$, a aceleração de uma curva e geodésicas.

Lembramos que $X(M)$ denota o espaço vetorial dos campos de vetores de classe C^∞ em M , e $F(M)$ denota o anel das funções de classe C^∞ em M .

Definição 2.4.3. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\begin{aligned}\nabla : X(M) \times X(M) &\longrightarrow X(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y\end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;
- (ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;
- (iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ onde $X, Y, Z \in X(M)$ e $f, g \in F(M)$.

Isto é equivalente a definir $TOM = HTOM \oplus VTOM$, no sentido que fizemos para conexões no fibrado principal na seção 2.2. Lembrando que se $X \in X(M)$, $f \in F(M)$ e $p \in M$ então $X(f)$ é definido da seguinte forma

$$X(f)(p) = df_p(X(p)).$$

Seja uma carta (U, φ) em M , $U \subseteq M$, com funções coordenadas $\varphi(u) = (x^1, \dots, x^n)$, $u \in U$. Se $\{X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\}$ é a base natural de TU então podemos escrever dois campos de vetores X, Y como combinação linear dos elementos da base natural, ou seja,

$$X = v^i X_i, Y = w^i X_i$$

assim obtemos

$$\nabla_X Y = \nabla_{v^i X_i} w^j X_j = v^i \nabla_{X_i} w^j X_j = v^i w^j \nabla_{X_i} X_j + v^i X_i(w^j) X_j.$$

Definimos as funções diferenciáveis Γ_{ij}^k , associados a carta (U, φ) , da seguinte forma

$$\nabla_{X_i} X_j = \Gamma_{ij}^k X_k.$$

As funções acima definidas são chamadas de símbolos de Christoffel de uma conexão associados a uma carta. Com os símbolos de Christoffel podemos escrever

$$\nabla_X Y = v^i w^j \Gamma_{ij}^k X_k + v^i X_i(w^j) X_j = (v^i w^j \Gamma_{ij}^k + X(w^j)) X_k.$$

Proposição 2.4.4. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma curva diferenciável $c : I \rightarrow M$. Então existe uma única correspondência $\frac{D}{dt}$ que associa a uma campo vetorial diferenciável $V(t) \in T_{c(t)}M$ ao longo da curva diferenciável $c(t)$ outro campo vetorial diferenciável $\frac{DV}{dt}(t) \in T_{c(t)}M$ ao longo de $c(t)$, denominada derivada covariante de V ao longo de c , tal que*

$$(i) \quad \frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt};$$

$$(ii) \quad \frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt};$$

(iii) *Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in X(M)$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}}Y$, onde V, W são campos de vetores ao longo de c , e f é uma função diferenciável ao longo de c .*

Seja novamente uma carta (U, φ) em M , $U \subseteq M$, com funções coordenadas $(x^1, \dots, x^n) = \varphi(u)$, $u \in U$. Seja também $\{X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\}$ a base natural de TU . Seja $c : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável e $V(t) \in T_{c(t)}M$ um campo vetorial diferenciável ao longo da curva diferenciável $c(t)$. Podemos escrever

$$V(t) = v^i X_i(c(t)) \text{ e } \frac{dc(t)}{dt} = \dot{x}^j(t) X_j(c(t))$$

e portanto $\frac{DV}{dt}(t) \in T_{c(t)}M$ pode ser escrito dessa forma

$$\begin{aligned} \frac{DV}{dt}(t) &= \frac{D}{dt}(v^i(t)X_i(c(t))) = \frac{dv^i(t)}{dt}X_i(c(t)) + v^i(t)\frac{D}{dt}(X_i(c(t))) \\ &= \frac{dv^i(t)}{dt}X_i(c(t)) + v^i(t)\nabla_{\frac{dc(t)}{dt}}X_i(c(t)) \\ &= \frac{dv^i(t)}{dt}X_i(c(t)) + v^i(t)\nabla_{\dot{x}^j(t)X_j(c(t))}X_i(c(t)) \\ &= \frac{dv^i(t)}{dt}X_i(c(t)) + v^i(t)\dot{x}^j(t)(\nabla_{X_j}X_i)(c(t)) \\ &= \frac{dv^i(t)}{dt}X_i(c(t)) + v^i(t)\dot{x}^j(t)\Gamma_{ij}^k(c(t))X_k(c(t)) \end{aligned}$$

que numa notação mais enxuta fica

$$\frac{DV}{dt} = \left(\frac{dv^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k v^i \frac{dx^j}{dt} \right) X_k.$$

Definição 2.4.5. *Seja M uma variedade Riemanniana com uma conexão afim ∇ . Um campo vetorial $V(t)$ ao longo de uma curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ é dito paralelo se $\frac{DV}{dt} = 0$ para todo $t \in I$.*

A definição de campo paralelo é equivalente a um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem em $v^k(t)$,

$$\frac{dv^k}{dt} + \Gamma_{ji}^k v^i \frac{dx^j}{dt} = 0, k = 1, \dots, n.$$

Como o sistema de equações é linear em $v^k(t)$ então existe uma única solução satisfazendo a condição inicial $v^k(0) = v_0^k$ definida em todo $t \in I$. Portanto dado um vetor $V_0 \in T_{c(0)}M$ existe um único vetor paralelo $V(t)$ ao longo de $c : I \rightarrow M$.

Definição 2.4.6. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$. A conexão é dita compatível com a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, quando para toda curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ e quaisquer pares de campos paralelos P e Q ao longo de c , tivermos $\langle P, Q \rangle$ constante, ou seja,*

$$\frac{d}{dt} \langle P(t), Q(t) \rangle_{c(t)} = 0.$$

Proposição 2.4.7. *Seja M uma variedade Riemanniana. Uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica se, e somente se, para todo par de campos de vetores P e Q ao longo de uma curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ temos*

$$\frac{d}{dt} \langle P, Q \rangle = \left\langle \frac{DP}{dt}, Q \right\rangle + \left\langle P, \frac{DQ}{dt} \right\rangle, \forall t \in I.$$

Corolário 2.4.8. *Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se, e somente se $X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$, para todo $X, Y, Z \in X(M)$.*

Definição 2.4.9. *Seja uma conexão afim ∇ em uma variedade Riemanniana M . Definamos a aplicação torsão*

$$\begin{aligned} \text{Tor} : X(M) \times X(M) &\longrightarrow X(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \end{aligned}$$

A conexão afim ∇ é dita simétrica se $\text{Tor} \equiv 0$, ou seja, $\text{Tor}(X, Y) = 0$, para todo $X, Y \in X(M)$.

Teorema 2.4.10. *Dada uma variedade Riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições*

- (i) ∇ é simétrica;
- (ii) ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

Esta conexão é chamada de conexão Riemanniana, ou conexão de Levi-Civita de M .

Na conexão Riemanniana, os símbolos de Christoffel são dados em função da métrica g_{ij} ,

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}g^{km} \left\{ \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right\}.$$

2.4.3 Geodésicas

Em \mathbb{R}^n , dados dois pontos p e q , existe uma única curva $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ que minimiza a distância entre os eles. Essa curva é uma reta a qual tem a seguinte propriedade

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dc}{dt} \right) = 0.$$

Uma abordagem natural seria definir as geodésicas como as curvas que minimizam o comprimento entre dois pontos. Porém, ao trabalhar em variedades diferentes de \mathbb{R}^n , a nossa abordagem para geodésicas é de definí-las através de uma generalização da equação acima

$$\frac{D}{dt} \left(\frac{dc}{dt} \right) = 0$$

onde $\frac{D}{dt}$ é a derivada covariante. É possível então mostrar que as geodésicas definidas dessa forma minimizam, localmente, o comprimento entre dois pontos da variedade.

É evidente que as duas equações anteriores são equivalentes em \mathbb{R}^n .

Definição 2.4.11. *Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow M$ em uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ é uma geodésica em $t_0 \in I$ se*

$$\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$$

no ponto t_0 . Se γ é geodésica em t , para todo $t \in I$ dizemos que γ é uma geodésica. Se $[a, b] \subset I$ e $\gamma : I \rightarrow M$, a restrição de γ a $[a, b]$ é chamada (segmento de) geodésica ligando $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$.

Portanto o campo de vetores tangentes $\frac{d\gamma}{dt}$ à geodésica γ é um campo de vetores paralelos ao longo de γ .

Se $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uma métrica Riemanniana então

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0.$$

Logo

$$\left| \frac{d\gamma}{dt} \right|^{\frac{1}{2}} = \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle^{\frac{1}{2}} = c$$

é constante ao longo de γ . Portanto o comprimento de arco s da curva γ é dado por

$$s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^t \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle^{\frac{1}{2}} dt = c(t - t_0)$$

e portanto o parâmetro de uma geodésica γ é proporcional ao comprimento de arco. Quando o parâmetro é o próprio comprimento de arco, ou seja, $c = 1$, dizemos que a geodésica está normalizada.

Seja uma carta (U, φ) na variedade M , dando origem a um sistema de coordenadas $(x^1, \dots, x^n) = \varphi(u)$. Suponha que $\gamma(t_0) \in U \subseteq M$ e portanto nesta carta temos a representação local de γ

$$\bar{\gamma}(t) = \varphi \circ \gamma(t) = x(t) = (x^1, \dots, x^n)$$

e portanto

$$\gamma(t) = \varphi^{-1} \circ \bar{\gamma}(t) = \varphi^{-1}(x^1(t), \dots, x^n(t))$$

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt}(t) &= d\varphi^{-1} \Big|_{x(t)} \left(\frac{dx}{dt}(t) \right) = d\varphi^{-1} \Big|_{x(t)} (\dot{x}^i(t) e_i) \\ &= \dot{x}^i(t) d\varphi^{-1} \Big|_{x(t)} (e_i) = \dot{x}^i(t) X_i(\gamma(t)). \end{aligned}$$

Nesta carta podemos então escrever a geodésica como

$$\begin{aligned}
0 = \frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) &= \frac{D}{dt} (\dot{x}^i(t) X_i) = \ddot{x}^i X_i + \dot{x}^i \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} X_i \\
&= \ddot{x}^i X_i + \dot{x}^i \nabla_{\dot{x}^j X_j} X_i \\
&= \ddot{x}^i X_i + \dot{x}^i \dot{x}^j \nabla_{X_j} X_i \\
&= \ddot{x}^i X_i + \dot{x}^i \dot{x}^j \Gamma_{ji}^k X_k \\
&= (\ddot{x}^k + \dot{x}^i \dot{x}^j \Gamma_{ji}^k) X_k.
\end{aligned}$$

e portanto a condição geodésica, em coordenadas locais, é equivalente ao sistema de n equações diferenciais

$$\ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

chamadas de equações geodésicas.

Considere o espaço tangente TM da variedade M em questão. Então dada uma carta (U, φ) na variedade M com funções coordenadas (x^1, \dots, x^n) induzimos de forma natural uma carta $(TU, T\varphi)$ em TM com funções coordenadas $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$. Nesse sistema de coordenadas locais de TM definimos o sistema dinâmico

$$\begin{aligned}
\frac{dx^k}{dt} &= y^k \\
\frac{dy^k}{dt} &= -\Gamma_{ij}^k y^i y^j, \quad k = 1, \dots, n
\end{aligned}$$

que é equivalente às equações geodésicas. O sistema dinâmico acima nos define um campo de vetores X em $T(TM)$ que é uma equação de segunda ordem no sentido definido anteriormente, isto é, em coordenadas locais

$$\bar{X}(x, y) = (x, y, \bar{X}_1(x, y), \bar{X}_2(x, y))$$

com

$$\bar{X}_1(x, y) = y \text{ e } \bar{X}_2^k(x, y) = -\Gamma_{ij}^k y^i y^j.$$

É possível mostrar que o campo vetorial G em TM definido acima é o único cujas trajetórias (soluções $c(t) = (x(t), y(t))$) do sistema dinâmico

$$\frac{dc}{dt} = \bar{X}(c)$$

são da forma $t \mapsto (\gamma(t), \gamma'(t))$, ou seja, o campo é uma equação de segunda ordem e $\gamma(t)$ é uma geodésica em M .

Definição 2.4.12. *O campo vetorial G definido a partir das equações geodésicas é chamado de campo geodésico em TM e seu fluxo é o fluxo geodésico em TM .*

Estamos indo em direção para definir a aplicação exponencial, $\exp : TM \rightarrow M$ a qual tem relação direta com geodésica da variedade M .

O campo vetorial G é de classe C^∞ e portanto existem soluções locais únicas garantidas pelo teorema acima. De fato, dado o sistema dinâmico $\frac{c(t)}{dt} = G(c(t))$, então para cada $p \in M$, e dado um aberto $B \subseteq TM$, existe um aberto A , com $0_p \in A \subseteq B \subseteq TM$ (onde $0_p \in T_pM$ é o vetor nulo do espaço tangente T_pM), um número $\delta > 0$, e uma aplicação C^∞ , $\varphi : (-\delta, \delta) \times A \rightarrow B$ tal que a curva $t \mapsto \varphi(t, v_p)$, $t \in (-\delta, \delta)$, $v_p \in A$, é a única trajetória de G que satisfaz a condição inicial $\varphi(0, v_p) = v_p$.

É possível escolher A da forma

$$A = \{v_p \in TU; p \in U \text{ e } |v_p| < \varepsilon\}$$

onde $p \in U \subseteq V \subseteq M$, com $V = \pi(B)$, onde $\pi : TM \rightarrow M$ é a projeção canônica. Podemos então reescrever esse resultado da seguinte forma:

Proposição 2.4.13. *Dado $p \in M$, existem um aberto $U \subseteq M$, $p \in U$, números $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ e uma aplicação C^∞*

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times A \rightarrow M \text{ onde } A = \{v_p \in TM; p \in U \text{ e } |v_p| < \varepsilon\}$$

tal que a curva $t \mapsto \gamma(t, v_p)$, $t \in (-\delta, \delta)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por p com velocidade v_p , para cada $p \in U$ e cada $v_p \in T_pM$ com $|v_p| < \varepsilon$.

Proposição 2.4.14. *Se a geodésica $\gamma(t, v_p)$ está definida no intervalo $(-\delta, \delta)$, então a geodésica $\gamma(t, av_p)$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, está definida no intervalo $(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a})$ e*

$$\gamma(at, v_p) = \gamma(t, av_p).$$

A igualdade apresentada na última proposição é chamada de propriedade de homogeneidade das geodésicas. Com essa propriedade e o teorema de existência e unicidade das geodésicas temos a seguinte proposição.

Proposição 2.4.15. *Dado $p \in M$, existem uma vizinhança V de p em M , um número $\varepsilon > 0$ e uma aplicação C^∞ , $\gamma : (-2, 2) \times U \rightarrow M$,*

$$U = \{w_q \in TM; q \in V, w_q \in T_qM, |w_q| < \varepsilon\}$$

tal que $t \mapsto \gamma(t, w_q)$, $t \in (-2, 2)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade w_q , para cada $q \in V$ e cada $w_q \in T_qM$, com $|w_q| < \varepsilon$.

Com essa proposição podemos definir a aplicação exponencial.

Definição 2.4.16. *Seja $p \in M$ e $U \subseteq TM$ um aberto garantido pela proposição anterior. Então definimos a aplicação*

$$\exp : U \rightarrow M$$

$$\exp(v_q) = \gamma(1, v_q) = \gamma(|v_q|, \frac{v_q}{|v_q|}),$$

onde $v_q \in U$ que é chamada de aplicação exponencial em U .

A aplicação exponencial é claramente diferenciável. Definimos a restrição da aplicação exponencial a um aberto do espaço tangente T_qM da seguinte forma

$$\begin{aligned} \exp_q : U \subseteq T_qM &\rightarrow M \\ v_q &\mapsto \exp_q(v_q) = \exp(v_q) \end{aligned}$$

Definida a restrição da aplicação exponencial ao espaço tangente, temos os seguintes resultados.

Lema 2.4.17. *$d(\exp_q)_0 = \text{Identidade}$.*

Proposição 2.4.18. *Dado $q \in M$, existem um $\varepsilon > 0$ e um aberto $V \subseteq T_qM$ tal que a aplicação $\exp_q : V \subseteq T_qM \rightarrow M$ é um difeomorfismo entre V e o aberto $U = \exp_q(V)$.*

O aberto $U = \exp_q(V)$ é chamado de vizinhança normal de q . Se $B_\varepsilon(0) \subseteq V$, então $B_\varepsilon(q) = \exp_q(B_\varepsilon(0))$ é chamada de bola normal, ou bola geodésica.

Definição 2.4.19. *Uma curva diferenciável por partes é uma aplicação contínua $c : [a, b] \rightarrow M$ de um intervalo fechado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ em M satisfazendo a seguinte condição: existe uma partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$ de $[a, b]$ tal que as restrições $c|_{[t_i, t_{i+1}]}$, $i = 0, \dots, k-1$ são diferenciáveis.*

Definição 2.4.20. *Um segmento de geodésica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é chamado minimizante se $l(\gamma) \leq l(c)$, onde $l(\cdot)$ indica o comprimento de uma curva e c é qualquer curva diferenciável por partes ligando $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$.*

Lema 2.4.21. *Seja $p \in M$ e seja $v \in T_p M$ tal que $\exp_p v$ esteja definida. Seja $w \in T_p M \approx T_v(T_p M)$. Então*

$$\langle (d \exp_p)_v(v), (d \exp_p)_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

Tendo em mãos estas definições, obtemos a seguinte propriedade minimizante das geodésicas.

Proposição 2.4.22. *Sejam $p \in M$, U uma vizinhança normal de p , e $B \subseteq U$ uma bola normal de centro p . Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ um segmento de geodésica com $\gamma(0) = p$. Se $c : [0, 1] \rightarrow M$ é qualquer outra curva diferenciável por partes ligando $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$ então temos a seguinte relação entre os comprimentos das curvas γ e c : $l(\gamma) \leq l(c)$ e se a igualdade vale, então $\gamma([0, 1]) = c([0, 1])$.*

Teorema 2.4.23. *Para cada $p \in M$ existe uma vizinhança W de p e um número $\delta > 0$, tal que, para cada $q \in W$, \exp_q é um difeomorfismo entre $B_\delta(0) \subseteq T_q M$ e $\exp_q(B_\delta(0)) \supseteq W$, isto é, W é vizinhança normal de cada um de seus pontos.*

Chamamos W de vizinhança totalmente normal de $p \in M$.

Corolário 2.4.24. *Se uma curva diferenciável por partes $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, com parâmetro proporcional ao comprimento de arco, tem comprimento menor ou igual ao comprimento de qualquer outra curva diferenciável por partes ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$ então γ é uma geodésica.*

2.5 Movimento Browniano

Agora vamos em direção ao principal objetivo deste capítulo: apresentar as duas construções do movimento browniano numa variedade Riemanniana. Mostraremos dois teoremas, onde o primeiro teorema devido a Eells-Elworthy-Malliavin, é uma construção intrínseca. A segunda construção não é intrínseca pois depende do mergulho da variedade. Colocamos apenas a demonstração da segunda construção usando o chamado sistema browniano gradiente.

2.5.1 Preliminares

Dada uma métrica numa variedade M podemos considerar bases ortonormais, onde $u : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$ são isomorfismos e preservam produtos internos, isto é,

$$\langle u(e), u(e') \rangle_x = \langle e, e' \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

O espaço OM de tais bases é um subconjunto de GLM , e conservando $\pi : OM \rightarrow M$ para denotar a projeção ela forma um fibrado principal com grupo $O(n)$.

Uma conexão em OM é chamada uma conexão Riemanniana no sentido que foi visto na seção anterior. A 1-forma \tilde{w} toma valores na álgebra de Lie $\mathfrak{o}(n)$ de $O(n)$ a qual pode ser identificada com o espaço das matrizes anti-simétricas $n \times n$, pode ser estendida sobre todo GLM pela ação de $GL(n)$ em GLM , insistindo na condição: (i) para uma forma conexão (ou (b) para os subespaços horizontais correspondentes). Assim se determina uma conexão em GLM e assim estão associadas coordenadas locais aos símbolos de Christoffel, os quais podem ser usados para calcular derivadas covariantes como vimos anteriormente.

Um ponto importante é que para esta conexão induzida em GLM , dada uma curva σ em M , o levantamento horizontal $\tilde{\sigma}$ de σ para GLM iniciando da base ortonormal que está em OM é o mesmo que o levantamento horizontal para a conexão original em OM . Uma consequência imediata das definições, e das equações (2.3) e (2.4) é que o transporte paralelo preserva produto interno,

$$\left\langle //_{/t}v, //_{/t}v' \right\rangle_{\sigma(t)} = \left\langle v, v' \right\rangle_{\sigma(0)} \quad (2.14)$$

para $v, v' \in T_{\sigma(0)}M$, e para campos vetoriais W, W' sobre σ

$$\frac{d}{dt} \left\langle W(t), W'(t) \right\rangle_{\sigma(t)} = \left\langle \frac{DW}{\partial t}, W'(t) \right\rangle_{\sigma(t)} + \left\langle W(t), \frac{W'}{\partial t} \right\rangle_{\sigma(t)} \quad (2.15)$$

Consequentemente, por (2.11), se W_1, W_2 são campos vetoriais e $v \in T_xM$ então

$$d \left\langle W_1(-), W_2(-) \right\rangle_{(-)}(v) = \left\langle \nabla W_1(v), W_2(x) \right\rangle_x + \left\langle W_1(x), \nabla W_2(v) \right\rangle_x \quad (2.16)$$

Agora façamos os últimos detalhes antes de iniciarmos com a parte estocástica deste capítulo. Uma métrica em M dá uma identificação de T_xM com o seu dual T_x^*M por

$$\begin{aligned} \sharp : T_xM &\longrightarrow T_x^*M \\ v &\longmapsto v^\sharp : T_xM \longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto v^\sharp(w) = \langle v, w \rangle_x. \end{aligned}$$

Em coordenadas locais $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, seja $\varphi_\alpha(y) = (x^1(y), \dots, x^n(y))$ para $y \in U_\alpha$ então $\{d_y^1, \dots, d_y^n\}$ forma uma base dual para $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$, calculado em y . Se $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ em y então $v^\sharp = v_i d_y x^i$ onde $v_i = g_{ij}(y)v^j$.

Escrevemos $l \longrightarrow l^\sharp$ para a inversa deste isomorfismo também. Escolhendo o campo vetorial A tal que para $x \in M$ e $v \in T_xM$, $A(x) = v$ e $\nabla A(x) = 0$, a equação (2.11) mostra que para uma 1-forma α

$$(\nabla_v \alpha)^\sharp = \nabla_v \alpha^\sharp$$

Similarmente ∇_v comuta com o “sobe” e “desce” dos índices em outros campos tensoriais.

O gradiente, $\text{grad}f$, ou ∇f , de uma função $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , é o campo vetorial $(df)^\sharp$ que

$$\langle \nabla f(x), v \rangle_x = df(v), \text{ para todo } x \in T_xM.$$

Em coordenadas locais

$$\nabla f(x) = \nabla f(x)^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (2.17)$$

onde

$$\nabla g^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (2.18)$$

com $[g^{ij}(x)]_{i,j}$ é a matriz inversa $G(x)^{-1}$ de $[g_{ij}(x)]$.

Para um campo vetorial A de classe C^1 , em M , o divergente, $\text{div}A : M \longrightarrow \mathbb{R}$, é dado por

$$\text{div}A(x) = \frac{d}{dt} \det d_x F_t \Big|_{t=0} \quad (2.19)$$

onde $(t, x) \longrightarrow F_t(x) \in M$ é o fluxo solução de A , no domínio da definição em $\mathbb{R} \times M$. Ele representa a taxa de mudança de volume pelo fluxo. Ele é dado por

$$\text{div}A(x) = \text{traço} \nabla A(x). \quad (2.20)$$

De (2.22), usando a fórmula de mudança de variáveis para medida de Lebesgue obtêm-se o teorema da divergência

$$\int_M \text{div}A(x) dx = 0$$

para M compacta e sem bordo. Portanto, por (2.8), se $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\text{div}fA(x) = \langle \nabla f(x), A(x) \rangle_x + f(x) \text{div}A(x)$$

vimos disto que div e $-\nabla$ são adjuntas.

O operador de Laplace-Beltrami Δ em funções de classe C^2 , $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é definido por

$$\Delta f = \text{div} \nabla f,$$

ou equivalentemente,

$$\Delta f = \text{traço} \nabla df = \sum_{i=1}^n \nabla(df)(e_i)(e_i)$$

onde e_1, \dots, e_n são ortonormais. Ele determina um operador auto-adjunto Δ em $\mathbb{L}^2(M; \mathbb{R})$.

Em coordenadas locais possui a fórmula

$$\Delta f(x) = g^{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - g^{ij}(x) \Gamma_{ij}^k(x) \frac{\partial f}{\partial x^k} \quad (2.21)$$

e

$$\Delta f(x) = g(x)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ g(x)^{\frac{1}{2}} g^{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x^j} \right\} \quad (2.22)$$

as quais são vistas usando (2.7) e (2.18) para (2.19), e (2.21) e (2.17) para (2.20).

2.5.2 Primeira construção do Movimento Browniano

Fazemos aqui a construção intrínseca do movimento browniano numa variedade Riemanniana. Trazemos algumas definições e o teorema principal, o qual omitimos a demonstração. Esta construção corresponde ao que se conhece por “desenvolvimento de Cartan” ou “rolling” estocástico em variedades Riemannianas. O leitor interessado em mais detalhes pode consultar a referência Elworthy [11].

Definição 2.5.1. *Seja M uma variedade Riemanniana com sua conexão de Levi-Civita. Por um movimento browniano em M entendemos um processo estocástico contínuo $\{x_t : 0 \leq t \leq \xi\}$, definido até um tempo de parada, o qual é Markov com gerador infinitesimal $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\Delta$, no sentido da equação (1.14) do capítulo 1.*

Agora passemos a lembrar da fórmula de Itô e da equação do gerador infinitesimal vistas no capítulo anterior. Aqui, apresentamos outra versão para as duas, preparando o leitor para os próximos resultados. Tendo em mãos uma conexão afim qualquer, via definição 2.4.3, podemos escrever uma segunda versão para fórmula de Itô (1.1). Assim temos

$$f(x_t) = f(x_s) + \int_s^t df(X(x_r)dz_r) + \frac{1}{2} \int_s^t \left\{ \nabla(df)(Y(x_r)dz_r)(Y(x_r)dz_r) + df(\nabla Y(Y(x)dz_r)dz_r) \right\} \quad (2.23)$$

a qual dá outra forma para o gerador infinitesimal \mathcal{A} ,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \{ \nabla(df)(X^p(x))(X^p(x)) + df(\nabla X^p(X^p(x))) \} + df(A(x)). \quad (2.24)$$

Portanto, da fórmula (2.24) temos a seguinte proposição:

Proposição 2.5.2. *Uma solução de*

$$dx_t = X(x_t) \circ dB_t + A(x_t)dt$$

é um Movimento Browniano se, e somente se,

(i) $X(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_x M$ é a projeção sobre $T_x M$ para cada x em M , isto é, $X(x) \circ X(x)^* = Id$;

(ii) $A(x) = -\frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \nabla X^p(X^p(x))$.

Definição 2.5.3. *Seja $dx_t = X(x_t) \circ dB_t + A(x_t)dt$ uma EDE no sentido de Stratonovich. O drift (ou coeficiente drift) é o campo vetorial*

$$x \longrightarrow A(x) + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \nabla X^p(X^p(x)).$$

Na proposição acima quando (i) é verificada mas (ii) não, dizemos que $\{x_t : 0 \leq t \leq \xi\}$ é um movimento browniano com *drift*.

Também de (2.24), para uma conexão afim arbitrária, que em geral o gerador \mathcal{A} para nossa solução é elíptico se, e somente se, $X(x)$ é sobrejetivo (neste caso a EDE é dita ser não-degenerada). Neste caso cada $X(x)$ induz um produto interno em $T_x M$, o produto interno quociente, e assim determina uma métrica Riemanniana em M . Assim as soluções para uma EDE não-degenerada são movimentos brownianos com drift para alguma métrica (unicamente definida) em M , e equivalentemente qualquer operador elíptico \mathcal{A} pode ser escrito como $\frac{1}{2} \Delta + B$ para algum operador de primeira ordem, isto é, um campo vetorial B . Ainda trabalhando em \mathbb{R}^n , deseja-se tratar com geradores elípticos \mathcal{A} , a geometria diferencial da métrica associada não será em geral trivial e pode iniciar uma regra importante.

Embora sempre existem coeficientes X e A satisfazendo (i) e (ii) não existe escolha natural a qual pode ser aplicada para variedades Riemannianas gerais. Além disso existe uma EDE canônica no fibrado das bases ortonormais OM de M , e resulta que as soluções desta construção projetadas em M são movimentos brownianos. A construção devido a Eells-Elworthy-Malliavin corresponde ao “desenvolvimento” ou “rolling” estocástico em variedades Riemannianas e é encontrada nas referências Hsu [14] e Elworthy [11]. Utilizando os campos standard H_u , definimos

$$\begin{aligned} X : OM \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow TOM \\ (u, e) &\longmapsto X(u)e = H_u(u(e)) \end{aligned}$$

Para $u_0 \in OM$ seja $\{u_t : 0 \leq t < \xi\}$ a solução máxima para

$$du_t = X(u_t) \circ dB_t \quad (2.25)$$

onde $\{B_t : 0 \leq t < \xi\}$ é movimento browniano em \mathbb{R}^n ($m = n$).

Teorema 2.5.4. *Seja $x_t = \pi(u_t)$, temos que $\{x_t : 0 \leq t < \xi\}$ é um movimento browniano em M definido até o seu tempo de explosão.*

A demonstração deste teorema será omitida, o leitor pode consultar as referências Hsu [14] ou Elworthy [11].

O clássico desenvolvimento de Cartan aplica uma curva diferenciável $\{\sigma_t : 0 \leq t < \infty\}$ em \mathbb{R}^n (ou $T_{x_0}M$), começando na origem, para uma curva em M começando em x_0 . Matematicamente ele é justamente como descrito acima com B_t trocado por $\sigma(t)$ em (2.25) para produzir a equação determinística

$$\frac{du}{dt} = X(u(t)) \left(\frac{d\sigma}{dt} \right) \quad (2.26)$$

com $u(0) = 0$ uma base dada em x_0 . A curva resultante $x(t)$ em M , é definida para todo tempo se M é completa, é que a qual é obtida pelo procedimento mecânico clássico de “colocando M numa cópia de \mathbb{R}^n (por u_0), então rolando M ao longo de $\{\sigma_t : 0 \leq t < \infty\}$ sem deslizar e tomando $x(t)$ sendo o ponto de contato de M com \mathbb{R}^n no tempo t ”. A base $u(t) : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_{x(t)}M$ representa a maneira que M é tocada em \mathbb{R}^n no tempo t . Quando

tentamos visualizar, ou esboçar, a situação torna-se claro que os objetos naturais usados são bases afim, como faz Kobayashi & Nomizu em [16], antes mesmo que as bases lineares as quais temos usado.

Destacamos que a construção dada no teorema acima é intrínseca, não depende do mergulho.

Como cada $X(u) \in T_u OM$, as considerações feitas na seção 2.3 sugerem chamar a solução $\{u_t : 0 \leq t < \xi\}$ o levantamento horizontal do movimento browniano $\{x_t : 0 \leq t < \xi\}$ de u_0 . De fato, é fácil ver que ele satisfaz localmente a equação local (2.1) considerada como uma equação de Stratonovich com x_t trocada por σ_t .

Podemos então definir o transporte paralelo ao longo das trajetórias do nosso movimento browniano:

Definição 2.5.5. *O transporte paralelo sobre as trajetórias do movimento browniano é dado por*

$$\begin{aligned} //_t : T_{x_0} M &\longrightarrow T_{x_t(w)} M \\ v_0 &\longmapsto //_t(w) v_0 = u_t(w) u_0^{-1}(v_0), \quad w \in \Omega. \end{aligned}$$

Também se $\{W_t : 0 \leq t < \xi\}$ é um campo vetorial sobre $\{x_t : 0 \leq t < \xi\}$, isto é,

$$W_t(w) \in T_{x_t(w)} M, \quad w \in \Omega.$$

Definição 2.5.6. *A derivada covariante de W ao longo das trajetórias brownianas é o campo vetorial sobre $\{x_t : 0 \leq t < \xi\}$ dado por*

$$\frac{DW_t}{\partial t} = //_t \frac{d}{dt} \left(//_t^{-1} W_t \right) \quad (2.27)$$

Podemos pensar que qualquer movimento browniano em M num ponto x_0 pode ser considerado como obtido do desenvolvimento estocástico de um movimento browniano em \mathbb{R}^n . Para fazer isto temos o anti-desenvolvimento o nosso Movimento Browniano dado em M , o leitor interessado em ver mais detalhes sobre o anti-desenvolvimento pode consultar a referência Elworthy em [11].

2.5.3 Segunda Construção do Movimento Browniano

Suponhamos agora que M possa ser mergulhada em \mathbb{R}^{n+p} , onde M terá a métrica Riemanniana induzida. Então existe um Sistema Dinâmico Estocástico natural (X, B) em M onde $\{B_t : t \geq 0\}$ é um movimento browniano em \mathbb{R}^{n+p} e X é justamente a aplicação projeção ortogonal

$$\begin{aligned} X : M \times \mathbb{R}^{n+p} &\longrightarrow T_x M \\ (x, v) &\longmapsto X_x(v) \in T_x M. \end{aligned}$$

Assim $P(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_x M$ é a projeção ortogonal, pois tendo um processo estocástico $\{y_t : 0 \leq t < s\}$ em M e tomando algum mergulho $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+p}$, para algum p e fazendo $z_t = \varphi(y_t)$ teremos que z é semimartingale, e se $X : M \times \mathbb{R}^{n+p} \longrightarrow TM$ é a aplicação projeção ortogonal, como acima, então y é uma solução para

$$dx_t = X(x_t) \circ dz_t \quad (2.28)$$

Suponha que $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 . Seja $f_0 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ alguma extensão diferenciável de f . Usando ∇ para o operador gradiente de funções em \mathbb{R}^n temos

$$df(v) = df_0(v)$$

para $v \in T_x M$ e assim

$$\nabla f(x) = X(x) \nabla f_0(x),$$

para $x \in M$. Assim se $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é o mergulho de M em \mathbb{R}^n , escrevemos

$$\varphi(x) = (\varphi^1(x), \dots, \varphi^m(x))$$

vemos que

$$X^p(x) = \nabla \varphi^p(x), \quad x \in M, \quad p = 1, \dots, m. \quad (2.29)$$

Esse sistema dinâmico estocástico será chamado *Sistema Browniano Gradiente* pelo mergulho φ . Nosso objetivo é mostrar que as suas soluções são movimentos brownianos em M . Para isto pela proposição 2.5.2 temos que verificar que:

$$\sum_{p=1}^m \nabla X^p(X^p(x)) = 0, \quad \text{para todo } x \in M.$$

Antes de provar o teorema que queremos, passamos por algumas considerações da geometria diferencial. Suponha que Z é um campo vetorial em M . Tome alguma extensão diferenciável a qual escrevemos $Z_0 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. Para $\nu_x M = (T_x M)^\perp$ em \mathbb{R}^n , como está em [11], existe uma aplicação bilinear simétrica

$$\alpha_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \nu_x M$$

chamada segunda forma fundamental de M em x , tal que a fórmula de Gauss é verificada:

$$DZ_0(x)(v) = \nabla Z(v) + \alpha_x(Z(x), v). \quad (2.30)$$

Uma maneira para provar isto é definir $\nabla Z(v)$ sendo a componente tangencial de $DZ_0(x)(v)$ e escrevemos $\nu_x(Z_0, v)$ para a sua componente normal. Então pode-se verificar que $(Z, v) \mapsto \nabla Z(v)$ satisfaz as condições que asseguram que ela é o operador derivada covariante para a conexão de Levi-Civita em M e além disso mostrar que $\nu_x(Z_0, v)$ possui a forma dada para α_x simétrica. Assim existe a aplicação bilinear para cada $x \in M$, $A_x : T_x M \times \nu_x M \rightarrow T_x M$ definida por

$$\langle A_x(u, \xi), v \rangle = \langle \alpha_x(u, v), \xi \rangle. \quad (2.31)$$

Se $\xi : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^1 com $\xi(x) \in \nu_x M$ para todo $x \in M$ e ξ_0 é uma extensão de classe C^1 então a fórmula de Weingarten dá

$$D\xi_0(x)(v) = -A_x(v, \xi(x)) + \text{componente normal}. \quad (2.32)$$

De fato, para $x \in M$,

$$\langle Z_0(x), \xi_0(x) \rangle = 0$$

para Z e Z_0 acima. Portanto se $v \in T_x M$

$$\langle DZ_0(x)v, \xi_0(x) \rangle + \langle Z_0(x), D\xi_0(x)v \rangle = 0,$$

isto é,

$$\langle \alpha_x(Z_0(x), v), \xi_0(x) \rangle + \langle Z_0(x), \text{componente tangente de } D\xi_0(x)v \rangle = 0$$

provando (2.30).

Agora enunciaremos o teorema que caracteriza o movimento browniano em M . Esse resultado é devido a K. Itô em 1950.

Teorema 2.5.7. *As soluções do sistema browniano gradiente para uma subvariedade M de \mathbb{R}^m são movimentos brownianos em M .*

DEMONSTRAÇÃO: Pela proposição 2.5.2 a condição (i) do movimento browniano já está verificada. Estamos interessados em mostrar que

$$\sum_{p=1}^m \nabla X^p(X^p(x)) = 0.$$

Devemos recordar a fórmula do gerador infinitesimal (2.24) e concluir a igualdade vista na definição 2.5.1 de movimento browniano.

Sejam $E^1 = (1, 0, \dots, 0)$, $E^2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $E^m = (0, 0, \dots, 0, 1)$ campos vetoriais constantes em \mathbb{R}^m . Então

$$E^j(x) = X(x)E^j + Q(x)E^j$$

para $Q(x) = Id - X(x)$, onde $Q(x)$ é a projeção em $\nu_x M = (T_x M)^\perp$. Daí, diferenciando esta igualdade e tomando a componente tangencial, para $v \in T_x M$, temos

$$0 = dE^j(x)(v) = -A_x(v, Q(x)E^j) + \nabla X^j(v).$$

Agora escolhamos uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_m\}$ de \mathbb{R}^m tal que $\{e_1, \dots, e_n\}$ é tangente a M em x . Então, $Q(x)e_j = 0$ para $j = 1, \dots, n$ o que implica em

$$0 = -A_x(v, 0) + \nabla X^j(v) = \nabla X^j(X^j)$$

e pela definição da aplicação bilinear A_x concluímos que $\nabla X^j(X^j) = 0$, para $j = 1, \dots, n$.

Por outro lado, $\nabla X^j(X^j) = 0$, para $j = n+1, \dots, m$ porque $X^j = 0$, para $j = n+1, \dots, m$ e assim obtemos $\sum_{j=n+1}^m \nabla X^j(X^j) = \sum_{j=n+1}^m \nabla X^j(0) = 0$. Logo, $\sum_{j=1}^m \nabla X^j(X^j(x)) = 0$.

Portanto, o gerador infinitesimal definido por (2.24) $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \Delta$, o que mostra que as soluções do nosso sistema browniano gradiente são movimentos brownianos em M . ■

CAPÍTULO 3

GEOMETRIA ESTOCÁSTICA FINSLER

Chegamos no último capítulo deste trabalho. Como citamos anteriormente, o nome “geometria Finsler” surgiu da tese de doutorado de Paul Finsler em 1918. Segundo Chern em [9], geometria Riemanniana sem a restrição quadrática $L^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ tem sido conhecida como geometria Finsler, isto é, geometria Finsler seria a generalização da geometria Riemanniana. Geometria Finsler também pode ser considerada como a geometria da simples integral

$$S = \int_a^b L(x^i, \frac{dx^i}{dt}), \quad (3.1)$$

com $1 \leq i \leq n$ e os x^i são as coordenadas do espaço. Considerando $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $L : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. O problema básico do cálculo das variações é estudar as curvas $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \Omega$, ligando dois pontos fixados, tal que a integral acima é mínima. Curvas que minimizam esta integral, para pontos próximos, são chamadas geodésicas no sentido do que foi exposto no capítulo anterior. Historicamente, a integral (3.1) é o objeto primário do cálculo das variações, cujo estudo começou no século XVII com grandes nomes tais como Newton, Leibniz, os irmãos Bernoulli, Euler, Lagrange. O principal problema é a geometria da integral (3.1) e o problema fundamental é o problema da equivalência: decidir quando duas integrais diferem por uma mudança de coordenadas. Isto é uma generalização do problema forma em geometria Riemanniana, a qual foi resolvida por Christoffel e Lipschitz em 1870 e conduziu Christoffel para os seus símbolos e a derivação

covariante. Nosso principal objetivo neste capítulo é obter o movimento browniano finsler, mas antes passamos por algumas definições importantes na apresentação deste tipo de geometria que colocamos no trabalho. Destacamos o transporte paralelo e “rolling” os quais fizemos no capítulo anterior em variedades Riemannianas. É importante ressaltar que os artigos encontrados em Antonelli [2] trazem expressões em coordenadas locais, mas com uma notação muito carregada e de difícil compreensão. Falta na literatura noções intrínsecas adaptadas ao cálculo estocástico. Esperamos ter editado um texto que ajude em trabalhos futuros na tentativa de obter expressões intrínsecas, o que tornaria o trabalho mais agradável. Temos também algumas noções sobre o laplaciano Finsler as quais são feitas por Antonelli em [2]. Como textos introdutórios para geometria Finsler, indicamos Alvarez em [1] e Rund em [20].

3.1 Variedades Finsler

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n . Denotamos por $T_x M$ o espaço tangente e $x \in M$, e por $TM := \bigcup_{x \in M} T_x M$ o fibrado tangente de M . Cada elemento de TM é da forma (x, y) , onde $x \in M$ e $y \in T_x M$. A projeção natural $\pi : TM \rightarrow M$ é dada por $\pi(x, y) := x$. O espaço dual de $T_x M$ é $T_x^* M$, chamado o espaço cotangente em x . A união $T^* := \bigcup_{x \in M} T_x^* M$ é o fibrado cotangente de M .

Definição 3.1.1. *Uma **estrutura Finsler** de M , globalmente definida, **estrutura Finsler** é uma função*

$$L : TM \rightarrow [0, \infty)$$

com as seguintes propriedades:

- (i) **Regularidade:** L é de classe C^∞ no fibrado tangente furado $TM \setminus 0$;
- (ii) **Positivamente Homogênea:** $L(x, \lambda y) = \lambda L(x, y)$ para todo $\lambda > 0$;
- (iii) **Conexidade Forte:** A matriz Hessiana $n \times n$

$$(g_{ij}) := \left(\left[\frac{1}{2} L^2 \right]_{y^i y^j} \right)$$

é positiva definida em todo ponto de $TM \setminus 0$.

Em algumas situações, a estrutura Finsler L satisfaz o critério $L(x, -y) = L(x, y)$. Neste caso temos **homogeneidade absoluta**: $L(x, \lambda y) = |\lambda|L(x, y)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Em geral, descobriremos que esta propriedade também é restritiva, porque excluía imediatamente alguns exemplos interessantes tais como Espaços de Randers.

Definição 3.1.2. *Dada uma variedade diferenciável M e uma estrutura Finsler L em TM , o par (M, L) é conhecido como uma **variedade Finsler**.*

A restrição da estrutura Finsler L a qualquer espaço tangente específico $T_x M$ dá o que é conhecido como uma **norma de Minkowski** em $T_x M$. Assim uma estrutura Finsler de M pode ser vista como uma família de várias normas de Minkowski, onde esta família é bastante limitada, não mais que de classe C^1 . Não existe perda de generalidade em limitar nossa discussão para normas de Minkowski em \mathbb{R}^n , pois todo espaço vetorial n -dimensional é linearmente isomorfo a \mathbb{R}^n . O próximo teorema nos diz que a positividade e a desigualdade triangular são de fato consequências da definição das propriedades das normas de Minkowski.

Teorema 3.1.3. *Seja L uma função real não-negativa em \mathbb{R}^n com as propriedades:*

- (1) L é de classe C^∞ no espaço furado $\mathbb{R}^n \setminus 0$;
- (2) $L(\lambda y) = \lambda L(y)$ para todo $\lambda > 0$;
- (3) A matriz $n \times n$ (g_{ij}) , onde $g_{ij}(y) := \left[\frac{1}{2} L^2 \right]_{y^i y^j}(y)$, é positiva definida em todo $y \neq 0$.

Então temos as seguintes conclusões:

- (i) (Positividade) $L(y) > 0$ quando $y \neq 0$;
- (ii) (Desigualdade Triangular) $L(y_1 + y_2) \leq L(y_1) + L(y_2)$, onde a igualdade ocorre se e somente se $y_2 = \alpha y_1$ ou $y_1 = \alpha y_2$ para algum $\alpha \geq 0$;
- (iii) (Desigualdade Fundamental) $w^i L_{y^i}(y) \leq L(w)$ para todo $y \neq 0$, e a igualdade ocorre se e somente se $w = \alpha y$ para algum $\alpha \geq 0$.

DEMONSTRAÇÃO: Omitimos a demonstração, o leitor pode consultar em Bao-Chern-Shen em [6]. ■

As hipóteses do teorema acima definem o que significa por uma **norma de Minkowski** em \mathbb{R}^n . Como consequência deste teorema temos o seguinte exemplo:

Exemplo 3.1.1 (Norma Euclidiana). *Com a homogeneidade absoluta em mãos, temos um exemplo de uma norma de Minkowski absolutamente homogênea em \mathbb{R}^n ,*

$$L(y) := \sqrt{\langle y, y \rangle},$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno canônico. Esta L é chamada a **norma Euclidiana** de \mathbb{R}^n .

Lembramos que toda norma de Minkowski absolutamente homogênea é uma norma no sentido da análise funcional.

Antes de iniciarmos com os exemplos, passemos a uma importante definição em geometria Finsler.

Definição 3.1.4 (Indictriz). *Seja M uma variedade e $x \in M$ um ponto fixado. Considere a superfície $L(x, y) = 1$ em $T_x M$ e denotamos por $\gamma(x)$. Então $\gamma(x)$ é uma subvariedade diferenciável de codimensão 1 de $T_x M$ difeomorfa a S^{n-1} , chamada a **indictriz** de L em x .*

Vejamos agora alguns exemplos de variedades Finsler:

Exemplo 3.1.2 (Espaços localmente de Minkowski). *Uma variedade Finsler (M, L) é dita ser localmente Minkowski se, em todo ponto $x \in M$, existe um sistema de coordenadas locais (x^i) , com coordenadas do espaço tangente induzidas y^i , tal que L não depende de x^i . Em termos da fórmula, temos*

$$L(y, v) = L\left(y, v^i \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_y\right) := L\left(v^i \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_0\right).$$

Não daremos mais detalhes, mas exemplos de espaços localmente de Minkowski são, de fato, normas de Minkowski disfarçadas. Na prática, isto não diminui o fato que tais exemplos

estão entre os mais importantes. Para efeito de cálculo, apresentamos uma família de normas de Minkowski particularmente instrutiva, onde λ pode ser qualquer constante não negativa

$$L(x, y) := \sqrt{\sqrt{(x)^4 + (y)^4} + \lambda[(x)^2 + (y)^2]}.$$

Isto pode ser visto como uma perturbação de métrica quarta. Sem aprofundar muito, a perturbação serve para regularizar a singularidade na métrica quarta.

Exemplo 3.1.3 (Variedades Riemannianas). *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n . Uma métrica Riemanniana diferenciável g em M é uma família $\{g_x\}_{x \in M}$ de produtos internos, um para cada espaço tangente $T_x M$, tal que as funções $g_{ij(x)} := g_x(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$ são de classe C^∞ . Como cada g_x é um produto interno, a matriz (g_{ij}) é positiva definida em todo $x \in M$. Podemos escrever*

$$g = g_{ij(x)} dx^i \otimes dx^j.$$

Este g define uma estrutura Finsler simétrica L em TM pelo mecanismo

$$L(x, y) := \sqrt{g_x(y, y)}.$$

Toda variedade Riemanniana (M, g) é portanto uma variedade Finsler. Uma estrutura Finsler L é dita ser **Riemanniana** se ela provém de uma métrica Riemanniana g justamente da maneira que descrevemos. Na prática verifica-se isto mostrando que o tensor fundamental calculado de L não depende de y . Na verdade,

$$g_{ij} := \left(\frac{1}{2} L^2 \right)_{y^i y^j} = g_{ij(x)}.$$

Isto apenas reforça o que encontramos no artigo de Chern em [10]. Como consequência do teorema de Kakutani, uma métrica Finsler regular é Riemanniana se, e somente se, as indicatrizes são todas elipsóides.

Exemplo 3.1.4 (Espaço de Randers). *Seja M uma variedade n -dimensional. Uma métrica Randers é uma estrutura Finsler L em TM que possui a forma*

$$L(x, y) := \alpha(x, y) + \beta(x, y),$$

onde $\alpha(x, y) := \sqrt{\tilde{a}_{ij}(x)y^i y^j}$, e $\beta(x, y) := \tilde{b}_i(x)y^i$. Os \tilde{a}_{ij} são as componentes da métrica Riemanniana e os \tilde{b}_i são aqueles da 1-forma. Ambos objetos estão em M , e estão fixados. Observamos também que devido a presença do termo β , métricas de Randers não satisfazem $L(x, -y) = L(x, y)$ quando $\tilde{b} \neq 0$. De fato, a função Finsler de um espaço de Randers é absolutamente homogênea se e somente se ela é Riemanniana.

Como um exemplo explícito, sem entrar em detalhes, temos:

Exemplo 3.1.5. *Seja $M := \mathbb{R}^2 \setminus 0$. Em cada ponto $x \in M$, a indicatriz tem as seguintes propriedades:*

- (1) *Ela é uma elipse com excentricidade e , possivelmente dependendo de x , no plano tangente $T_x M$;*
- (ii) *Um de seus focos está localizado na origem $y = 0$ de $T_x M$;*
- (iii) *A diretriz, correspondente ao foco acima, passa sobre o ponto retirado 0 de M , e é perpendicular ao segmento de reta de 0 a x .*

Usando a técnica de Okubo, como está em [6], pode-se mostrar que a fórmula para L é

$$L(x^1, x^2, y^1, y^2) := \frac{1}{e} \sqrt{\frac{|y|^2}{|x|^2} - \frac{x \bullet y}{|x|^2}},$$

onde $|y| := \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2}$ e $x \bullet y := x^1 y^1 + x^2 y^2$.

Para finalizar esta seção, destacamos um resultado interessante sobre espaços normados. Se um espaço normado \mathbb{E} é estritamente convexo temos que a geodésica é única. Podemos assim tomar como um exemplo uma variedade Finsler sendo $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ e tomando como norma, a norma do espaço l_1 . Neste caso tomando duas esferas tangentes, vemos que a geodésica não é única. O leitor interessado em mais detalhes pode consultar Mercuri em [3]. Como último comentário, destacamos que essa norma faz com que a variedade citada acima não seja Riemanniana, pois essa norma não satisfaz a lei do paralelogramo.

3.2 Conexões Finsler

Nesta seção apresentamos algumas noções sobre conexões em variedades Finsler, utilizando os fibrados Finsler. No capítulo anterior fizemos duas abordagens sobre conexões em variedades Riemannianas, e aqui pretendemos apresentar de uma maneira clara as noções sobre conexões Finsler. Conexões em geometria Finsler foram introduzidas por J.L. Synge, J.H. Taylor, L. Berwald e, o mais importante, Elie Cartan. Ele deu interpretações geométricas para os desenvolvimentos analíticos. A conexão que estamos interessados é a conexão de Chern, a qual daremos a definição e mais alguns exemplos de conexões Finsler. Essa conexão provém da derivada exterior da forma conexão, a forma de Hilbert. Sua diferenciação exterior dá imediatamente uma conexão, que se reduz a conexão de Levi-Civita no caso Riemanniano.

A conexão de Chern que apresentamos aqui é uma conexão linear que age no fibrado vetorial distinguido π^*TM , situado sobre a variedade $TM \setminus 0$ ou no fibrado esférico projetivo SM . Ela não é uma conexão no fibrado TM sobre M . No entanto, ela tem utilidade de uma maneira equivalente que a conexão de Levi-Civita em geometria Riemanniana. A conexão de Chern serve para induzir derivadas covariantes não-lineares em M . Nossas derivações covariantes são não-lineares no ambiente Finsler geral porque os ditos coeficientes da conexão tem uma dependência ou do sentido da derivação ou no vetor que está sendo diferenciado. Tais coeficientes reduzem-se aos símbolos de Christoffel usuais quando a estrutura Finsler é Riemanniana. Neste caso, a derivada covariante correspondente em M torna-se familiar devido a Levi-Civita.

3.2.1 O fibrado vetorial π^*TM e os objetos relacionados

Lembrando que o tensor métrico g_{ij} como está na definição 3.1.1 está definido para todo $(x, y) \in TM \setminus 0$ e é invariante sobre múltiplo positivo em y . Isso comporta-se como um produto interno no espaço tangente T_xM , se não fosse pela dependência em $y \neq 0$. Vamos considerar o fibrado tangente furado $TM \setminus 0$ como um espaço de parâmetros, e sobre cada ponto (x, y) neste espaço de parâmetros erguemos uma cópia de T_xM . Então formamos

$$g_{ij(x,y)} dx^i \otimes dx^j$$

e o declaramos o seu produto interno em $T_x M$. Destacamos que o espaço vetorial $T_x M$ é determinado unicamente pelos parâmetros da posição x em (x, y) , enquanto os parâmetros direcionais y não dizem nada sobre isto. E é assim que trabalha a geometria Finsler, sempre tendo em mãos a posição e a velocidade. Alertamos o leitor sobre alguma redundância que possa existir no esquema acima. Considerando todos os pontos em $TM \setminus 0$ da forma $(x, \lambda y)$, com x , e y fixados e λ um número positivo arbitrário. Sobre cada ponto, erguemos o mesmo espaço vetorial $T_x M$. Como $g_{ij(x,y)}$ é invariante sobre a homotetia $y \mapsto \lambda y$, os produtos internos indicados para estas cópias de $T_x M$ são também idênticos.

O **fibrado tangente pull-back** $\pi^* TM$ é um fibrado vetorial sobre o fibrado tangente $TM \setminus 0$. A fibra sobre um ponto típico (x, y) é uma cópia de $T_x M$. A parte pontilhada representa a retirada da seção nula. Existe uma maneira simples tratar com isso. Podemos, primeiro, tratar o raio $\{(x, \lambda y) : \lambda > 0\}$ como um único ponto no fibrado esférico projetivo SM . Então, sobre tal ponto, erguemos uma única cópia de $T_x M$ e dotamos ele com o produto interno $g_{ij(x,y)} dx^i \otimes dx^j$. O fibrado vetorial resultante possui fibra de dimensão n como antes, mas agora ele está sobre o fibrado esférico SM de dimensão $2n - 1$. No caso a estrutura Finsler é absolutamente homogênea mais que positivamente homogênea, podemos economizar mais trocando SM pelo fibrado tangente projetivo PTM . O último trata cada reta $\{(x, \lambda y) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ como um único ponto. Agora apresentamos uma técnica equivalente de que destacamos. Seguimos de perto Chern em [6]. Sobre M , temos o fibrado tangente TM e o fibrado cotangente T^*M . Muitos cálculos de tensores em geometria Finsler podem ser tratados em qualquer um dos dois seguintes ambientes: **Por motivos analíticos e globais**, é vantajosa para trabalhar com um espaço dos parâmetros compacto. Neste caso, a variedade base da escolha é o fibrado esférico SM , ou PTM quando L é absolutamente homogênea (de grau 1). Seja $p : SM \rightarrow M$ a aplicação projeção canônica. Um bom número dos nossos objetos geométricos são seções do fibrado pull-back $p^* TM$ ou seu dual $p^* T^* M$, ou os produtos deles. Estes fibrados estão sobre SM e não sobre M .

Pela facilidade dos cálculos locais, tem a vantagem para trabalhar num espaço dos parâmetros afim, onde as coordenadas naturais são facilmente calculadas. Neste caso, a variedade base preferida é o fibrado tangente furado $TM \setminus 0$. Um bom número dos nossos

objetos geométricos são seções do fibrado tangente pull-back π^*TM ou do seu dual π^*T^*M , ou dos produtos deles. Estes estão sobre $TM \setminus 0$ e não sobre M . Concentramos o trabalho em $TM \setminus 0$, sempre interessados nos objetos que são invariantes sob múltiplos positivos. A abordagem feita por Antonelli em [2], onde os coeficientes da conexão estão expressos em coordenadas locais. Coordenadas locais (x^i) em M produzem as seções bases $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ e $\{dx^i\}$, respectivamente, para TM e T^*M . Assim, sobre cada ponto (x, y) na variedade $TM \setminus 0$, a fibra de π^*TM é o espaço vetorial T_xM enquanto que de π^*T^*M é o espaço vetorial T_x^*M . Assim, os $\frac{\partial}{\partial x^i}$ e os dx^i dão ascensão para as seções dos fibrados pull-back, de uma maneira bastante simples. Estas **seções transplantadas** são definidas localmente em x e globalmente em y . Esta natureza global em y é automática porque uma vez que x é fixado, as seções transplantadas não mudam quando variamos y . Alertamos o leitor que no sentido de fixar uma notação, também usamos os símbolos $\frac{\partial}{\partial x^i}$ e dx^i para denotar as seções transplantadas. Estamos indo em direção a definir a forma de Hilbert como citamos no início desta seção. Existe uma seção distinguida l de π^*TM . Ela é definida por

Definição 3.2.1. *A seção distinguida l de π^*TM é a seção*

$$l = l_{(x,y)} := \frac{y^i}{L(y)} \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{y^i}{L} \frac{\partial}{\partial x^i} =: l^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (3.2)$$

onde L é a estrutura Finsler.

Sua seção dual natural é a forma de Hilbert w , a qual é uma seção de π^*T^*M . Assim definimos,

Definição 3.2.2 (forma de Hilbert). *A forma de Hilbert é a 1-forma*

$$w = w_{(x,y)} := L_{y^i}(x, y) dx^i = L_{y^i} dx^i. \quad (3.3)$$

Ambas seções l e w são globalmente definidas na variedade $TM \setminus 0$. A dualidade afirmada acima significa que

$$w(l) = \frac{y^i}{L} L_{y^i} = 1,$$

a qual é uma consequência do teorema de Euler. Para mais detalhes o leitor pode consultar [6]. Antes de definirmos o tensor fundamental e o tensor de Cartan, colocamos duas definições sobre suas componentes. Desta forma, temos a seguinte definição:

Definição 3.2.3.

$$g_{ij} := \left(\frac{1}{2} L^2 \right)_{y^i y^j} = L L_{y^i y^j} + L_{y^i} L_{y^j}. \quad (3.4)$$

Esta função é uma componente do tensor fundamental que definiremos em breve. E da mesma forma temos a seguinte definição:

Definição 3.2.4.

$$A_{ijk} := \frac{L}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = \frac{L}{4} (L^2)_{y^i y^j y^k}. \quad (3.5)$$

Esta função é uma componente do tensor de Cartan que definiremos a seguir. Ambas são simétricas nos três índices i, j, k . Todas essas funções são homogêneas de grau zero, ou seja, elas são invariantes sob múltiplo escalar $y \mapsto \lambda y$.

Definição 3.2.5. *O fibrado pull-back π^*TM admite uma métrica Riemanniana natural*

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

*este é o que denominamos o **tensor fundamental** que temos citado acima.*

Ele é uma seção simétrica de $\pi^*TM \otimes \pi^*T^*M$. Da mesma forma, definimos:

Definição 3.2.6. *O **tensor de Cartan** é definido como*

$$A = A_{ijk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k,$$

*o qual é uma seção simétrica de $\pi^*T^*M \otimes \pi^*T^*M \otimes \pi^*T^*M$.*

Lembramos que temos suprimido o ponto (x, y) dos cálculos para evitar confusão. Como mencionamos antes, o objeto

$$C_{ijk} := \frac{1}{L} A_{ijk}$$

é chamado o tensor de Cartan na literatura em geral. Trabalhamos com quantidades que são homogêneas de grau 0 porque elas fazem sentido no fibrado esférico (projetivo) SM . Um outra consequência do teorema de Euler, encontrada em Chern [6] é que a seção distinta l possui norma 1 com respeito a métrica Riemanniana, ou seja,

$$g(l, l) = g_{ij} \frac{y^i}{L} \frac{y^j}{L} = 1.$$

3.2.2 A conexão não-linear em $TM \setminus 0$

Aqui apresentamos, brevemente, algumas equações que aparecem em conexões Finsler. Estamos interessados em descrever a conexão não-linear em $TM \setminus 0$. As componentes g_{ij} do tensor fundamental são funções em $TM \setminus 0$ e são invariantes sob múltiplo escalar em y . Usamos elas para definir:

Definição 3.2.7. *Os símbolos de Christoffel formais do segundo tipo são definidos por*

$$\gamma_{jk}^i := g^{is} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial x^j} \right). \quad (3.6)$$

Definimos também as quantidades:

Definição 3.2.8. *A conexão não-linear N_j^i em $TM \setminus 0$ é definida por*

$$N_j^i := \gamma_{jk}^i y^k - C_{jk}^i \gamma_{rs}^k y^r y^s. \quad (3.7)$$

A preferência pelos objetos invariantes sobre $y \mapsto \lambda y$ direciona que trabalhemos com

$$\frac{N_j^i}{L} := \gamma_{jk}^i l^k - A_{jk}^i \gamma_{rs}^k l^r l^s$$

em vez do outro. Aqui enfatizamos que em Antonelli [2] a conexão Finsler é tratada como uma tripla de coeficientes $(N_j^i, F_{jk}^i, C_{jk}^i)$, onde N_j^i é o coeficiente não-linear, F_{jk}^i é o coeficiente horizontal e C_{jk}^i é o coeficiente vertical da conexão. Mais adiante mostraremos suas expressões em coordenadas no caso da conexão de Cartan. O fibrado tangente da variedade TM possui uma base de coordenadas locais que consiste dos $\frac{\partial}{\partial x^i}$ e $\frac{\partial}{\partial y^j}$. Destacamos que na transformação em TM induzida pela mudança de coordenadas em M , os vetores $\frac{\partial}{\partial x^i}$ transformam-se de uma maneira um tanto complicada, como está em [6]. Por outro lado os $\frac{\partial}{\partial y^j}$ não tem este problema. O fibrado cotangente de TM possui uma base coordenada local $\{dx^i, dy^i\}$. Novamente, os dx^i comportam-se simplesmente, enquanto dy^i não. A solução está trocando $\frac{\partial}{\partial x^i}$ por

$$\frac{\delta}{\delta x^j} := \frac{\partial}{\partial x^j} - N_j^i \frac{\partial}{\partial y^i},$$

e dy^i por

$$\delta y^i := dy^i + N_j^i dx^j.$$

Como antes, prefere-se trabalhar com

$$\frac{\delta y^i}{L} = \frac{1}{L}(dy^i + N_j^i dx^j),$$

o qual é invariante sob múltiplo em y . Notemos que $\frac{\delta}{\delta x^j}$ tem seu dual dx^j e $L\frac{\partial}{\partial y^i}$ tem seu dual $\frac{\delta y^i}{L}$. Estes objetos somente têm sentido em $TM \setminus 0$. Apresenta-se que a variedade $TM \setminus 0$ possui uma métrica Riemanniana natural

$$g_{ij} dx^i \otimes dx^j + g_{ij} \frac{\delta y^i}{L} \otimes \frac{\delta y^j}{L},$$

conhecida como uma **métrica (tipo) Sasaki**. Com respeito a esta métrica, o subespaço horizontal gerado por $\frac{\delta}{\delta x^j}$ é ortogonal ao subespaço vertical gerado por $L\frac{\partial}{\partial y^i}$. A variedade $TM \setminus 0$ admite portanto uma **conexão de Ehresmann** sobre $TM \setminus 0$, e está última deve sua existência diretamente as quantidades N_j^i . Isto é porque os N_j^i são coletivamente conhecidos como a conexão não-linear. Agora, introduzimos duas novas bases (locais) que são duais uma da outra: $\{\frac{\delta}{\delta x^j}, L\frac{\partial}{\partial y^i}\}$ para o fibrado tangente de $TM \setminus 0$ e $\{dx^i, \frac{\delta y^i}{L}\}$ para o fibrado cotangente de $TM \setminus 0$. Como $TM \setminus 0$ é uma variedade Riemanniana com a métrica (tipo) Sasaki, as bases acima possuem ortonormalidade análoga. O leitor interessado em mais detalhes pode consultar a referência [6].

3.2.3 A conexão de Chern em π^*TM

Trazemos aqui uma abordagem sobre a conexão de Chern onde pretendemos esclarecer alguns resultados. Lembramos que a seção distinta

$$l := \frac{y^i}{L(y)} \frac{\partial}{\partial x^i} = l^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

e o tensor fundamental

$$g := (LL_{y^i y^j} + L_{y^i} L_{y^j}) dx^i \otimes dx^j = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

são ambos seções dos fibrados tensoriais que estão sobre a variedade $TM \setminus 0$. Como um move-se em TM , fazem com que não somente os componentes l^i e g_{ij} variar, mas seções base

$\frac{\partial}{\partial x^i}$ e dx^i também. Assim, quando calculamos a taxa de variação $\nabla_v E$ de qualquer campo tensorial E sobre uma direção dada v no ponto p , devemos invocar a regra do produto. Como por exemplo,

$$\nabla_v^l = (dl^j)(v)\frac{\partial}{\partial x^j} + l^j\nabla_v\frac{\partial}{\partial x^j}$$

e

$$\nabla_v g = (dg_{ij})(v)dx^i \otimes dx^j + g_{ij}(\nabla_v dx^i) \otimes dx^j + g_{ij}dx^i \otimes (\nabla_v dx^j).$$

Os termos do lado direito destas fórmulas dividem-se em dois grupos: o primeiro, consiste dos $(dl^j)(v)\frac{\partial}{\partial x^j}$ e $(dg_{ij})(v)dx^i \otimes dx^j$. Eles vêm da derivada direcional ordinária das componentes, as quais são escalares, mas deixando as seções bases sozinhas. No segundo grupo, as componentes da esquerda são invariantes, mas temos que fazer sentido das quantidades $\nabla_v\frac{\partial}{\partial x^j}$ e $\nabla_v dx^i$. Intuitivamente, isto é feito calculando os valores das seções bases $\frac{\partial}{\partial x^j}$ ou dx^i como movemos sempre de p na direção de v . Estes são então comparados pelo seu valor em p no sentido de produzir a taxa de variação requisitada. Entretanto, antes que uma comparação possa ser realizada, os valores calculados devem primeiramente ser transportados de volta a p . Em geral, numa variedade não existe uma maneira canônica para cumprir o nosso transporte. O melhor que podemos fazer é especificar um que não age sem estrago de qualquer restrição geométrica ou topológica. Estas especificações são usualmente explicadas na forma das assim chamadas equações estruturais. Então resolve-se estas equações para obter as 1-formas conexão w_j^i , usando as derivadas covariantes $\nabla_v\frac{\partial}{\partial x^j}$ e $\nabla_v dx^i$ podem ser explicitamente escritas como:

$$\nabla_v\frac{\partial}{\partial x^j} := w_j^i(v)\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (3.8)$$

$$\nabla_v dx^i := -w_j^i(v)dx^j \quad (3.9)$$

Para detalhes sobre o aparecimento do sinal negativo na equação (3.9) ver Chern em [6]. Finalmente, vamos supor que as equações estruturais estão bem propostas, e as formas conexão estão bem resolvidas. Vamos substituir (3.8) e (3.9) nas nossas fórmulas para $\nabla_v l$ e $\nabla_v g$, remarcando alguns índices somatórios, e suprimindo v . O resultado é:

$$\nabla l = (dl^i + l^j w_j^i) \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (3.10)$$

$$\nabla g = (dg_{ij} - g_{kj} w_i^k - g_{ik} w_j^k) \otimes dx^i \otimes dx^j. \quad (3.11)$$

O operador ∇ , ou o w_j^i coletivamente, define o que é chamada uma **conexão linear** em π^*TM e seus produtos tensoriais associados. Cada conexão linear, por exemplo, a conexão de Chern que introduzimos, é completamente caracterizada pelas suas equações estruturais. No entanto, existe um conjunto geral de axiomas que **todas** conexões linear devem satisfazer. Elas são:

- (i) $\nabla_v(fE) = (df)(v)E + f\nabla_v E$;
- (ii) $\nabla_v(E_1 + E_2) = \nabla_v E_1 + \nabla_v E_2$;
- (iii) $\nabla_{\lambda v} E = \lambda \nabla_v E$ para todas constantes λ ;
- (iv) $\nabla_{v_1+v_2} E = \nabla_{v_1} E + \nabla_{v_2} E$.

Agora enunciamos o teorema sobre a conexão de Chern:

Teorema 3.2.9 (Chern). *Seja (M, L) uma variedade Finsler. O fibrado pull-back π^*TM admite uma única conexão linear, chamada **conexão de Chern**. Suas formas conexão são caracterizadas pelas equações estruturais:*

* **Sem torsão:** $d(dx^i) - dx^j \wedge w_j^i = -dx^j \wedge w_j^i = 0$;

* **Quase g -compatível:** $dg_{ij} - g_{kj} w_i^k - g_{ik} w_j^k = 2A_{ijs} \frac{\delta y^s}{L}$.

De fato, sem torsão é equivalente a ausência dos termos dy^k em w_j^i ; a saber,

$$w_j^i = \Gamma_{jk}^i dx^k, \quad (3.12)$$

junto com a simetria

$$\Gamma_{kj}^i = \Gamma_{jk}^i. \quad (3.13)$$

Quase compatível com a métrica então implica que

$$\Gamma_{jk}^l = \gamma_{jk}^l - g^{li} \left(A_{ijs} \frac{N_k^s}{L} - A_{jks} \frac{N_i^s}{L} + A_{kis} \frac{N_j^s}{L} \right) \quad (3.14)$$

Equivalentemente,

$$\Gamma_{jk}^l = \frac{g^{is}}{2} \left(\frac{\delta g_{sj}}{\delta x^k} - \frac{\delta g_{jk}}{\delta x^s} + \frac{\delta g_{ks}}{\delta x^j} \right). \quad (3.15)$$

Observamos que g é a fibra métrica Riemanniana de π^*TM . Ela não é para ser confundida com a métrica (tipo) Sasaki. Os símbolos γ_{jk}^l , definidos em (3.6), são os símbolos de Christoffel do segundo tipo, associados com o tensor fundamental. Os N_j^i estão definidos em (3.7). Eles representam a conexão não-linear de Ehresmann no fibrado tangente de $TM \setminus 0$. A fórmula (3.15) é a razão de ser da conexão de Chern. Note sua similaridade estrutural com os símbolos de Christoffel em (3.6). Entretanto, existem três conexões famosas na literatura, cada qual com seu mérito. Expressamos-as em termos da conexão de Chern.

Exemplo 3.2.1 (Conexão de Cartan). *A conexão de Cartan é dada por*

$$w_j^i + A_{jk}^i \frac{\delta y^k}{L}.$$

Ela é compatível com a métrica mas possui torsão.

Agora trazemos uma abordagem feita por Antonelli em [2]. A conexão de Cartan acima sem deflexão, h -métrica e v -métrica é dada pelos coeficientes definidos por

$$\begin{aligned} N_j^i &= \partial_{(j)}(\gamma_{kl}^i y^k y^l), \\ F_{jk}^i &= \frac{1}{2} g^{il} (\delta_j g_{lk} + \delta_k g_{jl} - \delta_l g_{jk}), \\ C_{jk}^i &= \frac{1}{2} g^{il} (\partial_{(j)} g_{lk} + \partial_{(k)} g_{jl} - \partial_{(l)} g_{jk}) = \frac{1}{2} g^{il} \partial_{(j)} g_{lk}, \end{aligned}$$

onde g^{ij} é a matriz inversa de g_{ij} , e

$$\gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{il} (\partial_j g_{lk} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk}).$$

Lembramos que na notação acima temos que $\partial_{(i)} = \frac{\partial}{\partial y^i}$ e $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Note que a fórmula acima para F_{jk}^i e C_{jk}^i parece com a expressão conhecida para os coeficientes da conexão de Levi-Civita em geometria Riemanniana. Além disso, os coeficientes da conexão horizontal F_{jk}^i são simétricos em j, k . A conexão de Cartan pode, de fato, ser considerada como uma generalização da conexão de Levi-Civita.

Exemplo 3.2.2 (Conexão de Hashiguchi). *A conexão de Hashiguchi é dada por*

$$w_j^i + A_{jk}^i \frac{\delta y^k}{L} + \dot{A}_{jk}^i dx^k.$$

Aqui, $\dot{A} = \nabla_{\hat{l}} A$ é a derivada covariante horizontal do tensor de Cartan sobre a direção (horizontal) distinta $\hat{l} := l^i \frac{\delta}{\delta x^i}$.

Exemplo 3.2.3 (Conexão de Berwald). *A conexão de Berwald é dada por*

$$w_j^i + \dot{A}_{jk}^i dx^k.$$

Como a conexão de Chern, ela não possui torção. Ela relaciona-se mais diretamente com a conexão não-linear N_j^i , e mais adequada com o estudo da geometria das curvas.

O leitor interessado em ver um tratamento mais sistemático destas conexões pode consultar a referência [6]. Especialistas em geometria Finsler podem se questionar porque a **conexão de Rund** é visivelmente ausente no que foi visto antes. A razão é que ela coincide com a conexão de Chern, como apontado por Anastasiei.

Vamos descrever a conexão de Chern para duas importantes famílias de espaços Finsler: as variedades Riemannianas são caracterizadas pelo L^2 tendo somente uma dependência quadrática explícita em y . Como um resultado, dependência y será ausente do tensor fundamental, o qual então coincide com a métrica Riemanniana sobre a variedade M . Como o tensor de Cartan A se anula neste caso, a fórmula (3.14) reduz-se a $\Gamma_{jk}^i = \gamma_{jk}^i$. Assim, em variedades Riemannianas, os coeficientes da conexão de Chern Γ_{jk}^i são simplesmente os símbolos de Christoffel da métrica Riemanniana do segundo tipo. Os espaços localmente de Minkowski são caracterizados pelo L não tendo dependência em x em algumas cartas coordenadas privilegiadas. Consequentemente o tensor fundamental se anula e assim seus

símbolos de Christoffel formais. Olhando para (3.7) vemos que a conexão não-linear N_j^i também é zero. Isto reduz a fórmula (3.14) para $\Gamma_{jk}^i = 0$. Assim, para espaços localmente de Minkowski, os coeficientes da conexão de Chern completamente se anulam em certas coordenadas naturais. Em coordenadas naturais arbitrárias, asseguramos que estes coeficientes da conexão podem não ter em sua maioria dependência em x (mas nenhuma em y).

Depois dessas considerações sobre conexões Finsler, direcionamos o trabalho para o que Antonelli faz em [2]. Seja M equipada com uma conexão Finsler $(N_j^i, F_{jk}^i, C_{jk}^i)$, N_j^i sendo não-linear, F_{jk}^i o horizontal, e C_{jk}^i o vertical coeficientes da conexão. Estabelecemos

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

e

$$\delta_i = \partial_i - N_i^j \partial_{(j)}.$$

Assumimos que a conexão Finsler é h -métrico e v -métrico, isto é,

$$\begin{aligned} \delta_i g_{jk} &= F_{ij}^l g_{lk} + F_{ik}^l g_{jl}, \\ \partial_{(i)} g_{jk} &= C_{ij}^l g_{lk} + C_{ik}^l g_{jl}, \end{aligned}$$

sem deflexão, isto é,

$$N_j^i = F_{jk}^i y^k$$

e v -simétrica, isto é,

$$C_{jk}^i = C_{kj}^i.$$

Segue, em particular, que $C_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} \partial_{(j)} g_{lk}$ são os coeficientes da conexão vertical canônicos.

Neste trabalho descrevemos nossa generalização da teoria de difusões em variedades Riemannianas para o caso de variedades Finsler segundo Antonelli em [2]. A teoria de processos de difusão em variedades Riemannianas está nos artigos pioneiros de Elworthy em [11], Emery em [12] por Itô e possui agora uma expansão clássica de cálculo estocástico com várias aplicações na matemática e física (veja, por exemplo, Emery em [12]). Encerramos esta seção destacando que nos textos de Chern em [6] entre outros autores, a estrutura Finsler é denotada por F em vez de L . Nossa preocupação é de evitar confusão com os coeficientes da conexão Finsler.

3.3 Transporte Paralelo Estocástico

Numa variedade Finsler a noção de paralelismo ao longo de uma curva dada dividi-se em dois conceitos alternativos, os quais serão referidos como h -paralelismo e hv -paralelismo. Começamos introduzindo estas duas noções de paralelismo sobre uma curva diferenciável no caso determinístico. O caso determinístico então usará um processo de aproximação indo para a definição de h e hv -paralelismo sobre um semimartingale.

Nesta seção, M denotará uma variedade Finsler de dimensão n com função métrica fundamental L , tensor métrico g_{ij} , e a conexão de Cartan $(N_j^i, F_{jk}^i, C_{jk}^i)$. Qualquer conexão Finsler sem deflexão h e v -métrico pode ser usada em vez da conexão de Cartan.

3.3.1 h -transporte paralelo determinístico

Seja $x(t) \in M$, onde $t \in [0, T]$, uma curva diferenciável em M .

Definição 3.3.1. Dizemos que um campo vetorial $y(t) \in TM_{x(t)}$ é h -paralelo sobre $x(t)$ se

$$\frac{dy^i}{dt} = -N_j^i(x, y) \frac{dx^j}{dt}, \quad (3.16)$$

$N_j^i(x, y)$ sendo os coeficientes da conexão não-linear em M .

Em particular, se M é uma variedade Riemanniana com a conexão de Levi-Civita γ_{jk}^i , então $N_j^i(x, y) = \gamma_{jk}^i(x)y^k$ é função linear de y e (3.16) é justamente a equação diferencial linear padrão para um campo vetorial sobre $x(t)$. Mas no caso geral (3.16) é uma equação diferencial não-linear em y . Por isto, o h -transporte paralelo regido por (3.16) também será referido como o *transporte paralelo não-linear*.

É fácil verificar que se (3.16) é satisfeita, então $L(x(t), y(t)) = k$, onde k é uma constante. Segue-se que se $y(0) \neq 0$, então $y(t) \neq 0$ para todo t . Esta simples propriedade é essencial, porque a maioria dos objetos em geometria Finsler não são definidos (ou pelo menos não são diferenciáveis) em $y = 0$ devido a homogeneidade em y . Como $L(x(t), y(t)) = k$, segue-se também que a solução $y(t)$ para (3.16) com condição inicial arbitrária $y(0) = y_0 \neq 0$ não pode explodir no tempo finito (i.e. para todo intervalo de tempo finito, a trajetória da

solução está contida num subconjunto compacto de $\overset{\circ}{TM}$, o qual significa que isto pode ser estendido para todo $t \in [0, T]$.

No caso $0 \neq y(t) \in TM_{x(t)}$ é h -paralelo sobre $x(t)$ dizemos também que a curva $(x(t), y(t))$ é um h -levantamento da curva $x(t)$ de M para o fibrado tangente furado $\overset{\circ}{TM}$. O h -levantamento é definido unicamente, se a condição inicial $0 \neq y_0 \in TM_{x(0)}$ é especificada.

3.3.2 hv -transporte paralelo determinístico

Ao contrário do caso anterior, consideremos uma curva diferenciável arbitrária $(x(t), y(t))$ no fibrado tangente furado $\overset{\circ}{TM}$ ao invés de em M . Aqui $x(t) \in M$ e $0 \neq y \in TM_{x(t)}$ para todo $t \in [0, T]$.

Definição 3.3.2. *Um campo vetorial $u(t) \in TM_{x(t)}$ é dito ser hv -paralelo ao longo de $(x(t), y(t))$ se*

$$\frac{du^i}{dt} = -F_{jk}^i(x, y)u^k \frac{dx^j}{dt} - C_{jk}^i(x, y)u^k \frac{\delta y^j}{dt}, \quad (3.17)$$

onde

$$\frac{\delta y^j}{dt} = \frac{dy^j}{dt} + N_j^i(x, y) \frac{dx^i}{dt}.$$

Uma consequência simples do fato que a conexão é h e v -métrica e sem deflexão é que se $u(t)$ e $v(t)$ são duas soluções para (3.17), então

$$g_{ij}(x(t), y(t))u^i(t)v^j(t) = k, \quad (3.18)$$

onde k é constante. Segue-se que uma solução $u(t)$ para (3.17) não pode explodir num tempo finito, i.e., pode ser estendida para todo $t \in [0, T]$, e se $u(0) \neq 0$, então $u(t) \neq 0$ para todo $t \in [0, T]$.

Comparando (3.16) com (3.17) e considerando que $F_{jk}^i(x, y)y^k = N_j^i(x, y)$ e $C_{jk}^i(x, y)y^k = 0$, pode-se facilmente ver uma relação entre os dois tipos de paralelismo: numa variedade Finsler M um campo vetorial $0 \neq y(t) \in TM_{x(t)}$ é h -paralelo sobre $x(t) \in M$ se e somente se $y(t)$ é hv -paralelo sobre $(x(t), y(t))$.

Suponha que para todo $t \in [0, T]$, $z(t) = (z_1(t), \dots, z_n(t))$ é uma base linear em $TM_{x(t)}$ tal que cada elemento das bases vetoriais $z_j(t) \in TM_{x(t)}$ é hv -paralelo sobre $(x(t), y(t))$,

i.e., satisfaz (3.17). Por (3.18), se a base $z(t)$ é ortonormal relativa a forma quadrática $g(x(t), y(t)) \in T_2^0 M_{x(t)}$ para qualquer $t \in [0, T]$ fixado, então isto é assim para todo $t \in [0, T]$. Dizemos que a curva $(x(t), y(t), z(t))$ é um hv -levantamento de $(x(t), y(t))$ de $\overset{\circ}{TM}$ para o assim chamado *fibrado Finsler ortonormal OTM*. Este último é definido como um fibrado principal sobre $\overset{\circ}{TM}$ cujo espaço total consiste dos elementos (x, y, z) , onde $x \in M$, $0 \neq y \in TM_x$, e $z = (z_1, \dots, z_n)$ é uma base ortonormal em TM_x relativa a forma quadrática $g(x, y) \in T_2^0 M_x$, i.e.,

$$g_{ij}(x, y) z_k^i z_l^j = \delta_{kl},$$

com projeção $\pi : OTM \ni (x, y, z) \mapsto (x, y) \in \overset{\circ}{TM}$. A estrutura diferenciável de OTM pode ser obtida de M . A saber, se (x^i) são coordenadas locais num conjunto aberto $U \subset M$, então podemos escrever $y = y^i \partial_i$ para qualquer $y \in TM_x$ e $z_j = z_j^i \partial_i$ para cada vetor z_j de qualquer base linear $z = (z_1, \dots, z_n)$ em TM_x , onde $x \in U$, e usando (x^i, y^i, z_j^i) como coordenadas locais em $\pi^{-1}(U) \subset OTM$. O grupo estrutural de OTM é o grupo $O(n)$ das transformações ortogonais de \mathbb{R}^n com a ação à esquerda $R_h(x, y, z) = (x, y, zh)$, onde $(zh)_i = h_i^j z_j$, para qualquer $h \in O(n)$ e $(x, y, z) \in OTM$.

3.3.3 h-transporte paralelo estocástico

Seja $x(t)$ um semimartingale em M definido para todo $t \in [0, T]$, onde $T > 0$ é um tempo de parada. Aproximaremos $x(t)$ por processos com trajetórias aleatórias diferenciáveis por partes, para as quais o h -transporte paralelo é definido pela equação diferencial ordinária (3.16). Tomando o limite quando a aproximação tende a $x(t)$ no sentido descrito acima obteremos uma EDE estendendo (3.16) para o caso dos semimartingales. Fazendo assim devemos contar com os resultados bem conhecidos de aproximações de EDE's em variedades pelas equações diferenciais ordinárias (ver, por exemplo, Emery em [12]).

Definição 3.3.3. *Uma regra de interpolação em M é uma aplicação mensurável I de $M \times M \times [0, 1]$ em M tal que $I(x, x, t) = x$, que $t \mapsto I(x, y, t)$ é uma curva diferenciável ligando x (para $t = 0$) a y (para $t = 1$) e que, uniformemente em cada compacto de M , $\frac{\partial^m}{\partial t^m} I(x, y, t) \in O(\|x - y\|^m)$ para $m = 1, 2$ e 3 .*

A última condição acima significa que se d é uma distância Riemanniana em M , ou a distância induzida por qualquer mergulho próprio em \mathbb{R}^n (em conjuntos compactos, todas estas distâncias são equivalentes, no sentido que raios são limitados por cima e por baixo), e se $\|\cdot\|$ é qualquer norma no espaço vetorial $T_x M$ (ou $\tau_x M$, ou o espaço dos operadores diferenciais de terceira ordem em x) que dependem diferenciavelmente sobre x (se x varia num compacto, elas são equivalentes também), quando $\frac{\|I^{(m)}(x, y, t)\|}{d^m(x, y)}$ continua limitado quando (x, y) varia sobre uma vizinhança de um subconjunto compacto da diagonal em $M \times M$ e t em $[0, 1]$. Claramente, as equivalências acima mencionadas implicam que esta definição é intrínseca: regras de interpolação continuam sendo tais quando transferidas através de difeomorfismos.

Integrais de Stratonovich e integrais determinísticas tem um comportamento muito similar; isto explica o fato que Malliavin chama princípio de transferência. Muitas construções geométricas clássicas envolvendo curvas diferenciáveis estendem para semimartingales via integrais de Stratonovich. Mais detalhes são estão feitos por Emery em [13].

O que vamos descrever agora é um exemplo do princípio de transferência (usado em várias outras situações). Uma aproximação diferenciável por partes de um semimartingale $x(t)$ em M pode ser obtida tomando uma divisão $\pi : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ do intervalo de tempo e juntando os pontos $x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_n)$ por curvas diferenciáveis por partes convenientes. Isto pode ser realizado por meio de uma *regra de interpolação* segundo a definição 3.3.3 acima.

Dada uma regra de interpolação I e uma divisão π do intervalo de tempo, definimos a aproximação $x_\pi(t)$ do processo $x(t)$ por

$$x_\pi(t) = I \left(x(t_{i-1}), x(t_i), \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right) \text{ para } t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.19)$$

Se $x(t_{i-1})$ e $x(t_i)$ também são distantes um do outro, assim que $(x(t_{i-1}), x(t_i)) \notin V$, então podemos, por exemplo, estender I para uma função mensurável em $M \times M \times [0, 1]$, ou deixando $x_\pi(t)$ indefinida para $t \geq t_{i-1}$. Isto é, de qualquer maneira, apenas o comportamento de I nas proximidades da diagonal que interessa no limite quando

$$|\pi| = \max_i |t_i - t_{i-1}|$$

tende a zero.

Cada trajetória aleatória da aproximação $x_\pi(t)$ é uma curva diferenciável por partes em M e pode ser h -levantada para $\overset{\circ}{TM}$ assim produzindo um processo $y_\pi(t) \in TM_{x_\pi(t)}$, do qual as trajetórias aleatórias satisfazem a equação diferencial ordinária (3.16) para o h -transporte paralelo, o qual agora tem a forma

$$\frac{dy_\pi^i}{dt} = -N_j^i(x_\pi, y_\pi) \frac{dx_\pi^j}{dt}.$$

Fazemos $x(0) = x_0$ e fixando a mesma condição inicial $y_\pi(0) = y_0$ para toda partição π , onde $0 \neq y_0 \in TM_{x_0}$ é um F_0 -vetor aleatório mensurável (note que $x_\pi(0) = x_0$ para toda partição π). Anunciamos agora dois teoremas retirados de Emery em [12].

Teorema 3.3.4. *Em M , seja I uma regra de interpolação e X um semimartingale. Se $\sigma = (0 = T_0 \leq T_1 \dots \leq T_l \leq \dots)$ é uma subdivisão do tempo $[0, \infty)$, defina o processo interpolado X^σ por*

$$X_t^\sigma = I \left(X_{T_l}, X_{T_{l+1}}, \frac{t - T_l}{T_{l+1} - T_l} \right)$$

para $T_l \leq t \leq T_{l+1}$ (ele não é adaptado, mas contínuo e diferenciável por partes). Para toda forma (primeira ordem) α em M , quando $|\sigma| = \sup(T_{l+1} - T_l)$ vai a zero, a integral calculada caminho a caminho

$$\int \langle \alpha, dX^\sigma \rangle = \int \langle \alpha, \dot{X}^\sigma \rangle dt$$

converge em probabilidade para a integral de Stratonovich $\int \langle \alpha, \delta X \rangle$ uniformemente em conjuntos compactos em probabilidade.

Este teorema pode ser considerado como um caso particular de soluções aproximadas para EDE de Stratonovich como está em Emery [12].

Teorema 3.3.5. *Seja X um M -semimartingale, Y_0 uma N -variável aleatória \mathfrak{F}_0 mensurável e uma EDE de Stratonovich como em (1.7); seja além disso I uma regra de interpolação em M , e para toda subdivisão $\sigma = (0 = T_0 \leq \dots \leq T_l \leq \dots)$ de $[0, \infty)$, defina o processo interpolado X^σ como está no teorema acima. Denote por Y (respectivamente Y^σ) a solução de (1.7) (respectivamente $\delta Y^\sigma = e(X^\sigma, Y^\sigma)\delta^\sigma$) com valor inicial Y^0 , definida no*

intervalo maximal $[0, \zeta)$ (respectivamente $[0, \zeta^\sigma)$). Quando $|\sigma| = \sup_l |T_{l+1} - T_l|$ vai a zero, $\zeta^\sigma \wedge \zeta$ converge em probabilidade a ζ e, em $[0, \zeta)$, Y^σ tende a Y uniformemente em conjuntos compactos em probabilidade.

Estamos agora em condições de aplicar o Teorema 3.3.5 acima como está em Emery [12]. Segue-se que $y_\pi(t)$ converge em uniformemente em probabilidade com respeito a t em qualquer conjunto compacto quando $|\pi|$ converge para 0 para a solução $y(t) \in TM_{x(t)}$ para a EDE de Stratonovich

$$dy^i = -N_j^i(x, y) \circ dx^j \quad (3.20)$$

com condição inicial $y(0) = y_0$.

Definição 3.3.6. O processo limitante $y(t)$ será chamado o h -transporte paralelo estocástico de y_0 sobre $x(t)$ e o semimartingale $(x(t), y(t))$ em TM será chamado o h -levantamento do semimartingale $x(t) \in M$.

3.3.4 hv-transporte paralelo estocástico

A construção é similar ao caso do h -transporte paralelo, exceto que agora começamos com um semimartingale arbitrário $(x(t), y(t))$ em $\overset{\circ}{TM}$ e usamos a regra de interpolação I em $\overset{\circ}{TM}$, antes que em M . Uma interpolação natural pode ser escolhida usando o levantamento diagonal G do tensor métrica Finsler g para o fibrado cortado $\overset{\circ}{TM}$ definido por

$$G(x, y) = g_{ij}(x, y) dx^i \otimes dx^j + g_{ij}(x, y) \delta y^i \otimes \delta y^j \quad (3.21)$$

para qualquer $x \in M$ e $0 \neq y \in TM_x$, onde $\delta y^i = dy^i + N_j^i(x, y) dx^j$. O levantamento diagonal G é uma métrica Riemanniana em $\overset{\circ}{TM}$ e podemos tomar a regra de interpolação geodésica correspondente I . Então, para qualquer partição π , tomamos a aproximação diferenciável por partes $(x_\pi(t), y_\pi(t))$ de $(x(t), y(t))$ definida pela fórmula análoga a (3.19). Seja $u_\pi(t) \in TM_{x_\pi(t)}$ um processo cujas trajetórias aleatórias satisfazem a equação diferencial (3.17) para o hv -transporte paralelo, i.e.,

$$\frac{du_\pi^i}{dt} = -F_{jk}^i(x_\pi, y_\pi) u_\pi^k \frac{dx_\pi^j}{dt} - C_{jk}^i(x_\pi, y_\pi) u_\pi^k \frac{\delta y_\pi^j}{dt},$$

onde

$$\frac{\delta y_\pi^j}{dt} = \frac{dy_\pi^j}{dt} + N_j^i(x_\pi, y_\pi) \frac{dx_\pi^i}{dt}.$$

Também assumimos que $u_\pi(t)$ satisfaz a condição inicial $u_\pi(0) = u_0 \in TM_{x_0}$ para toda partição π , onde u_0 é um \mathcal{F}_0 -vetor aleatório mensurável. Então, pelo Teorema 3.3.5 acima, $u_\pi(t)$ converge uniformemente em probabilidade com respeito a t em qualquer conjunto compacto quando $|\pi| \rightarrow 0$ para a solução $u(t) \in TM_{x(t)}$ da EDE de Stratonovich

$$du^i = -F_{jk}^i(x, y)u^k \circ dx^j - C_{jk}^i(x, y)u^k \circ \delta y^j, \quad (3.22)$$

onde

$$\delta y^i = dy^i + N_j^i(x, y) \circ dx^j,$$

com condição inicial $u(0) = u_0$.

Definição 3.3.7. Dizemos então que $u(t)$ é o $h\nu$ -transporte paralelo estocástico de u_0 sobre o semimartingale $(x(t), y(t))$.

3.4 Rolling Finsler sobre curvas diferenciáveis

Consideremos duas variedades de Finsler M e \widetilde{M} com tensores métricos g_{ij} e \widetilde{g}_{ij} e coeficientes da conexão de Cartan $(N_j^i, F_{jk}^i, C_{jk}^i)$ e $(\widetilde{N}_j^i, \widetilde{F}_{jk}^i, \widetilde{C}_{jk}^i)$, respectivamente. Vamos imaginar que as variedades rolam, sem deslizar, ao longo de uma curva diferenciável traçada em cada um delas. Para construir este conceito precisamos especificar um sistema de equações diferenciais apropriado. Estas equações diferenciais serão estendidas para equações diferenciais estocásticas para cobrir o caso do “rolling” sobre um semimartingale. O fato que o tensor métrico e os coeficientes da conexão não dependem somente de um ponto na variedade, mas também de um vetor tangente num ponto que sugere que o processo de “rolling” é determinado não somente pela curva de contato $x(t)$ em M (ou $\widetilde{x}(t)$ em \widetilde{M}), mas também por um campo tangente $y(t) \in$ (ou $\widetilde{y}(t) \in T\widetilde{M}_{\widetilde{x}(t)}$) sobre a curva. Os vetores $y(t)$ podem ser obtidos levantando a curva $x(t)$ de M para $T\overset{\circ}{M}$, ou definidos arbitrariamente, os quais conduzem a dois conceitos de rolling, o h e o $h\nu$ -rolling. Para este momento do trabalho, seguimos de perto Antonelli em [2].

3.4.1 h -Rolando sobre uma curva diferenciável em M

Assumimos que $x(t)$, onde $t \in [0, T]$, é uma curva diferenciável em M . Similarmente, $\tilde{x}(t)$ será uma curva diferenciável em \widetilde{M} . Usando as conexões não-lineares N_j^i e \widetilde{N}_j^i , podemos levantar as curvas de M e \widetilde{M} para $T\overset{\circ}{M}$ e $T\overset{\circ}{\widetilde{M}}$, respectivamente. Como um resultado, obtemos campos vetoriais $0 \neq y(t) \in TM_{x(t)}$ e $0 \neq \tilde{y}(t) \in T\overset{\circ}{\widetilde{M}}_{\tilde{x}(t)}$ satisfazendo as equações diferenciais não-lineares

$$\frac{dy^i}{dt} = -N_j^i(x, y) \frac{dx^j}{dt} \quad \text{e} \quad \frac{d\tilde{y}^i}{dt} = -\widetilde{N}_j^i(\tilde{x}, \tilde{y}) \frac{d\tilde{x}^j}{dt}. \quad (3.23)$$

Depois, levantamos as curvas $(x(t), y(t)) \in T\overset{\circ}{M}$ e $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) \in T\overset{\circ}{\widetilde{M}}$ para OTM e $OT\overset{\circ}{\widetilde{M}}$, respectivamente. Assim obtemos bases ortonormais $z(t) = (z_1(t), \dots, z_n(t))$ em $TM_{x(t)}$ e $\tilde{z}(t) = (\tilde{z}_1(t), \dots, \tilde{z}_n(t))$ em $T\overset{\circ}{\widetilde{M}}_{\tilde{x}(t)}$ satisfazendo (3.17), i.e.,

$$\frac{dz_j^i}{dt} = -F_{kl}^i(x, y) z_j^l \frac{dx^k}{dt} \quad \text{e} \quad \frac{d\tilde{z}_j^i}{dt} = -\widetilde{F}_{kl}^i(\tilde{x}, \tilde{y}) \tilde{z}_j^l \frac{d\tilde{x}^k}{dt}. \quad (3.24)$$

Os termos envolvendo C_{kl}^i e \widetilde{C}_{kl}^i (cf. (3.17)) desaparecem, pois $\frac{\delta y^k}{dt} = 0$ e $\frac{\delta \tilde{y}^k}{dt} = 0$ por (3.23). Seja $\zeta(t) = (\zeta^1(t), \dots, \zeta^n(t))$ e $\tilde{\zeta}(t) = (\tilde{\zeta}^1(t), \dots, \tilde{\zeta}^n(t))$ as bases duais de $z(t) = (z_1(t), \dots, z_n(t))$ e $\tilde{z}(t) = (\tilde{z}_1(t), \dots, \tilde{z}_n(t))$, respectivamente.

Definição 3.4.1. *Então dizemos que as variedades M e \widetilde{M} h -rolam sobre a curva $x(t)$ em M (ou, equivalentemente, $\tilde{x}(t)$ em \widetilde{M}) se*

$$\zeta_j^i \frac{dx^j}{dt} = \tilde{\zeta}_j^i \frac{d\tilde{x}^j}{dt}. \quad (3.25)$$

As equações diferenciais (3.24) e (3.25) estendem o conceito de “rolling” do caso de variedades Riemannianas como descrito por Ikeda em [15] para variedades Finsler.

3.4.2 $h\nu$ -Rolando sobre uma curva diferenciável em $T\overset{\circ}{M}$

Assumimos agora que $x(t)$, onde $t \in [0, T]$, é uma curva diferenciável em M e $0 \neq y(t) \in TM_{x(t)}$ é um campo vetorial diferenciável arbitrário sobre $x(t)$. Similarmente, $\tilde{x}(t)$ denotará uma curva diferenciável em \widetilde{M} e $0 \neq \tilde{y}(t) \in T\overset{\circ}{\widetilde{M}}_{\tilde{x}(t)}$ denotará um campo vetorial diferenciável arbitrário sobre $\tilde{x}(t)$. Levantando as curvas $(x(t), y(t))$ e $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ de $T\overset{\circ}{M}$ e $T\overset{\circ}{\widetilde{M}}$ para OTM

e $OT\widetilde{M}$, respectivamente. Como um resultado, obtemos bases $z(t) = (z_1(t), \dots, z_n(t))$ em $TM_{x(t)}$ e $\widetilde{z}(t) = (\widetilde{z}_1(t), \dots, \widetilde{z}_n(t))$ em $T\widetilde{M}_{\widetilde{x}(t)}$ tais que

$$\frac{dz_j^i}{dt} = -F_{kl}^i(x, y)z_j^l \frac{dx^k}{dt} - C_{kl}^i(x, y)z_j^l \frac{\delta y^k}{dt}, \quad (3.26)$$

$$\frac{d\widetilde{z}_j^i}{dt} = -\widetilde{F}_{kl}^i(\widetilde{x}, \widetilde{y})\widetilde{z}_j^l \frac{d\widetilde{x}^k}{dt} - \widetilde{C}_{kl}^i(\widetilde{x}, \widetilde{y})\widetilde{z}_j^l \frac{\delta \widetilde{y}^k}{dt}, \quad (3.27)$$

onde

$$\frac{\delta y^k}{dt} = \frac{dy^k}{dt} + N_m^k(x, y) \frac{dx^m}{dt} \quad \text{e} \quad \frac{\delta \widetilde{y}^k}{dt} = \frac{d\widetilde{y}^k}{dt} + \widetilde{N}_m^k(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \frac{d\widetilde{x}^m}{dt}.$$

Definição 3.4.2. Dizemos que as variedades M e \widetilde{M} *hv*-rolam sobre a curva $(x(t), y(t))$ (ou equivalentemente, sobre $(\widetilde{x}(t), \widetilde{y}(t))$) se

$$\zeta_j^i \frac{dx^j}{dt} = \widetilde{\zeta}_j^i \frac{d\widetilde{x}^j}{dt} \quad \text{e} \quad \zeta_j^i \frac{\delta y^j}{dt} = \widetilde{\zeta}_j^i \frac{\delta \widetilde{y}^j}{dt}, \quad (3.28)$$

onde $\zeta(t) = (\zeta^1(t), \dots, \zeta^n(t))$ e $\widetilde{\zeta}(t) = (\widetilde{\zeta}^1(t), \dots, \widetilde{\zeta}^n(t))$ são as bases duais de $z(t) = (z_1(t), \dots, z_n(t))$ e $\widetilde{z}(t) = (\widetilde{z}_1(t), \dots, \widetilde{z}_n(t))$, respectivamente.

3.5 Rolling Finsler sobre semimartingales

Nesta seção trazemos duas definições de “rolling” Finsler sobre semimartingales. O *h*-rolling será realizado por um semimartingale que está em M , enquanto o *hv*-rolling por um semimartingale no fibrado tangente furado $TM \setminus 0$. Novamente seguimos de perto Antonelli em [2].

3.5.1 h-Rolando sobre um semimartingale em M

Suponha que $x(t)$ é um semimartingale em M e $\widetilde{x}(t)$ é um semimartingale em \widetilde{M} para $t \in [0, T]$, onde $T > 0$ é um tempo de parada. Podemos usar a EDE (3.20) para levantar $x(t)$ de M para $\overset{\circ}{TM}$ e $\widetilde{x}(t)$ de \widetilde{M} para $\overset{\circ}{T\widetilde{M}}$. As EDEs resultantes, as quais generalizam (3.23), escrevem-se

$$dy^i = -N_j^i(x, y) \circ dx^j \quad \text{e} \quad d\widetilde{y}^i = -\widetilde{N}_j^i(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \circ d\widetilde{x}^j. \quad (3.29)$$

Os semimartingales $(x(t), y(t))$ e $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ podem, por sua vez, ser levantados de $T\overset{\circ}{M}$ e $T\overset{\circ}{\widetilde{M}}$ para OTM e $OT\overset{\circ}{\widetilde{M}}$, respectivamente, os semimartingales levantados $(x(t), y(t), z(t))$ e $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t))$ sendo definidos pelas EDEs

$$dz_j^i = -F_{kl}^i(x, y)z_j^l \circ dx^k \quad \text{e} \quad d\tilde{z}_j^i = -\tilde{F}_{kl}^i(\tilde{x}, \tilde{y})\tilde{z}_j^l \circ d\tilde{x}^k, \quad (3.30)$$

as quais generalizam (3.24).

Definição 3.5.1. *Então, em analogia com (3.25) dizemos que as variedades M e \widetilde{M} h-rolam sobre o semimartingale $x(t)$ em M (ou, equivalentemente, sobre $\tilde{x}(t)$ em \widetilde{M}) se*

$$\zeta_j^i \circ dx^j = \tilde{\zeta}_j^i \circ d\tilde{x}^j, \quad (3.31)$$

$\zeta(t) = (\zeta^1(t), \dots, \zeta^n(t))$ e $\tilde{\zeta}(t) = (\tilde{\zeta}^1(t), \dots, \tilde{\zeta}^n(t))$ sendo as bases duais de $z(t) = (z_1(t), \dots, z_n(t))$ e $\tilde{z}(t) = (\tilde{z}_1(t), \dots, \tilde{z}_n(t))$, respectivamente.

3.5.2 hv-Rolando sobre um semimartingale em $T\overset{\circ}{M}$

Tomamos um semimartingale arbitrário $(x(t), y(t))$ em $T\overset{\circ}{M}$, onde $x(t) \in M$ e $0 \neq y(t) \in TM_{x(t)}$ para $t \in [0, T], T > 0$ sendo um tempo de parada. Similarmente, $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ será um semimartingale em $T\overset{\circ}{\widetilde{M}}$. Levantamos os semimartingales de $T\overset{\circ}{M}$ e $T\overset{\circ}{\widetilde{M}}$ para OTM e $OT\overset{\circ}{\widetilde{M}}$, respectivamente. Os semimartingales levantados $(x(t), y(t), z(t))$ e $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t))$ são definidos pelas EDEs

$$dz_j^i = -F_{kl}^i(x, y)z_j^l \circ dx^k - C_{kl}^i(x, y)z_j^l \circ \delta y^k, \quad (3.32)$$

$$d\tilde{z}_j^i = -\tilde{F}_{kl}^i(\tilde{x}, \tilde{y})\tilde{z}_j^l \circ d\tilde{x}^k - \tilde{C}_{kl}^i(\tilde{x}, \tilde{y})\tilde{z}_j^l \circ \delta \tilde{y}^k, \quad (3.33)$$

obtido de (3.22), o qual generaliza (3.26) e (3.27). Aqui

$$\delta y^k = dy^k + N_m^k(x, y) \circ dx^m \quad \text{e} \quad \delta \tilde{y}^k = d\tilde{y}^k + \tilde{N}_m^k(\tilde{x}, \tilde{y}) \circ d\tilde{x}^m.$$

Seja $\zeta(t) = (\zeta^1(t), \dots, \zeta^n(t))$ e $\tilde{\zeta}(t) = (\tilde{\zeta}^1(t), \dots, \tilde{\zeta}^n(t))$ as bases duais de $z(t) = (z_1(t), \dots, z_n(t))$ e $\tilde{z}(t) = (\tilde{z}_1(t), \dots, \tilde{z}_n(t))$, respectivamente.

Definição 3.5.2. *Este sendo o caso, dizemos que as variedades hv -rolam sobre o semimartingale $(x(t), y(t))$ em $\overset{\circ}{T}M$ (ou, equivalentemente, $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ em $\overset{\circ}{T}\tilde{M}$) se*

$$\zeta_j^i \circ dx^j = \tilde{\zeta}_j^i \circ d\tilde{x}^j \quad e \quad \zeta_j^i \circ \delta y^j = \tilde{\zeta}_j^i \circ \delta \tilde{y}^j, \quad (3.34)$$

as duas últimas EDEs sendo generalizações de (3.28).

3.6 Desenvolvimento Estocástico Finsleriano

Devemos aplicar os conceitos introduzidos na seção anterior para o caso de “rolling” de uma variedade Finsler ao longo de um movimento browniano canônico no espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Seja M uma variedade Finsler de dimensão n . Então \mathbb{R}^n com a métrica euclidiana usual pode desempenhar o papel de outra variedade Finsler. Denotamos por $v(t)$ e $w(t)$ dois movimentos brownianos canônicos independentes em \mathbb{R}^n . De acordo com a discussão na seção anterior, M pode ou ser h -rolada sobre $w(t)$, o qual é um semimartingale em \mathbb{R}^n , ou hv -rolada sobre $(w(t), v(t))$, o último sendo um semimartingale em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Isto conduz para as duas seguintes aproximações alternativas para o desenvolvimento estocástico Finsleriano.

3.6.1 h -desenvolvimento estocástico Finsleriano

Adaptamos as equações (3.29), (3.30), e (3.31) para o caso do h -rolling M sobre o semimartingale $w(t)$ em \mathbb{R}^n .

Definição 3.6.1. *O semimartingale resultante $(x(t), y(t), z(t))$ em OTM definido pelo sistema de EDEs*

$$\begin{cases} dx^i = z_j^i \circ dw^j, \\ dy^i = -N_j^i(x, y) \circ dx^j \\ dz_j^i = -F_{kl}^i(x, y) z_j^l \circ dx^k \end{cases} \quad (3.35)$$

é chamado um h -desenvolvimento estocástico Finsleriano sobre M .

3.6.2 hv -desenvolvimento estocástico Finsleriano

No caso quando a variedade M hv -rola sobre o semimartingale $(w(t), v(t))$ em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ as EDEs correspondentes (3.32)-(3.34) reduzem-se ao sistema

$$\begin{cases} dx^i = z_j^i \circ dw^j, \\ \delta y^i = z_j^i \circ dv^j, \\ dz_j^i = -F_{kl}^i(x, y) z_j^l \circ dx^k - C_{kl}^i(x, y) z_j^l \circ \delta y^k. \end{cases} \quad (3.36)$$

Assim temos a seguinte definição:

Definição 3.6.2. *Um semimartingale $(x(t), y(t), z(t))$ em OTM definido pelo sistema acima é chamado um hv -desenvolvimento estocástico Finsleriano.*

Teorema 3.6.3. *Se $(x(t), y(t), z(t))$ é uma solução de (3.35) ou (3.36) começando em $(x_0, y_0, z_0) \in OTM$, então a lei de probabilidade de $(x(t), y(t))$ é independente da escolha da base ortonormal inicial z_0 . Além disso, se $(x(t), y(t), z(t))$ é uma solução de (3.35), então $(x(t), y(t))$ é uma difusão de Markov em $\overset{\circ}{TM}$ com gerador*

$$2^{-1} g^{ij} \nabla_i^h \nabla_j^h = 2^{-1} g^{ij} (\delta_i \delta_j - F_{ij}^k \delta_k), \quad (3.37)$$

e se $(x(t), y(t), z(t))$ é uma solução de (3.36), então $(x(t), y(t))$ é uma difusão de Markov em $\overset{\circ}{TM}$ com gerador

$$2^{-1} g^{ij} \nabla_i^h \nabla_j^h + 2^{-1} g^{ij} \nabla_i^v \nabla_j^v = 2^{-1} g^{ij} (\delta_i \delta_j - F_{ij}^k \delta_k) + 2^{-1} g^{ij} (\dot{\partial}_i \dot{\partial}_j - C_{ij}^k \dot{\partial}_k). \quad (3.38)$$

DEMONSTRAÇÃO: Trataremos com o caso quando $(x(t), y(t), z(t))$ é uma solução de (3.35). No caso de uma solução de (3.36) a prova é similar. Seja \tilde{z}_0 uma outra base ortonormal qualquer em TM_{x_0} . É fácil ver que $(x(t), y(t), \tilde{z}(t))$ é uma solução de (3.35) com w^i trocado por \tilde{w}^i tal que $w^j = h_i^j \tilde{w}^i$ e com condições iniciais (x_0, y_0, \tilde{z}_0) . Mas \tilde{w} é também um movimento browniano em \mathbb{R}^n , assim ele tem a mesma lei de probabilidade como w . Segue-se que a lei de probabilidade de $(x(t), y(t))$ é independente de z_0 . Por isto, segue-se que $(x(t), y(t))$ possui a propriedade de Markov, desde que $(x(t), y(t), z(t))$ possui a propriedade de Markov como uma solução para (3.35).

Para calcular o gerador de $(x(t), y(t))$ expressamos a diferencial estocástica dx^i de (3.16) e o produto $dx^i dx^j$ como

$$\begin{aligned} dx^i &= z_j^i dw^j - 2^{-1} g^{jk}(x, y) F_{jk}^i(x, y) dt, \\ dx^i dx^j &= g^{ij}(x, y) dt. \end{aligned}$$

Em seguida, calculamos a diferencial estocástica $df(x, y)$ de qualquer função diferenciável f em TM com a ajuda da fórmula de Itô:

$$df(x, y) = (\delta_i f) dx^i + 2^{-1} (\delta_i \delta_j f) dx^i dx^j = (\delta_i f) z_j^i dw^j + 2^{-1} g^{ij} [\delta_i \delta_j f - F_{ij}^k \delta_k f] dt.$$

O gerador é dado pela expressão que multiplica dt acima. ■

As expressões (3.37) e (3.38) podem ser consideradas como generalizações do operador de Laplace-Beltrami para o caso Finsler. Assim, em vista do Teorema 3.6.3, a projeção $(x(t), y(t))$ de um h ou hv -desenvolvimento estocástico Finsleriano $(x(t), y(t), z(t))$ de OTM para $\overset{\circ}{TM}$ será chamado um h ou hv -movimento browniano, respectivamente.

3.7 Movimento Browniano Finsleriano

Antes de apresentarmos dois teoremas sobre o movimento browniano Finsler, mostramos as duas definições de movimento browniano, o h e hv -movimento browniano Finsler. Assim, em vista do Teorema 3.6.3, para o h -rolling M sobre o movimento browniano $w(t)$ em \mathbb{R}^n , temos:

Definição 3.7.1 (*h -Movimento Browniano*). *A projeção $(x(t), y(t))$ de um h -desenvolvimento estocástico Finsler $(x(t), y(t), z(t))$ de OTM para $\overset{\circ}{TM}$ é chamado um h -movimento browniano Finsler.*

E para o hv -rolling M sobre o movimento browniano $(w(t), v(t))$ em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ temos:

Definição 3.7.2 (*hv -Movimento Browniano*). *A projeção $(x(t), y(t))$ de um hv -desenvolvimento estocástico Finsler $(x(t), y(t), z(t))$ de OTM para $\overset{\circ}{TM}$ é chamado um hv -movimento browniano Finsler.*

O hv -movimento browniano definido por (3.36) pode também ser descrito como um movimento browniano com drift no fibrado tangente furado $\overset{\circ}{TM}$ com o tensor métrica Riemanniana levantado diagonalmente G definido por (3.21), e o drift sendo expressado em termos dos tensores torsão da conexão Finsler $(N_j^i, F_{jk}^i, C_{jk}^i)$.

Os Teoremas abaixo estão relacionados com o comportamento da função métrica fundamental L de uma variedade Finsler M sobre um h ou hv -movimento browniano sobre M .

Teorema 3.7.3. *Se $(x(t), y(t))$ é um h -movimento browniano sobre M , então $L(x(t), y(t)) = k$ quase certamente, onde k é uma constante.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $(x(t), y(t), z(t))$ um processo em OTM que satisfaz o sistema (3.35) de EDEs para o h -desenvolvimento estocástico Finsleriano. Da fórmula de Itô encontramos que

$$dL^2(x, y) = \delta_i L^2(x, y) \circ dx^i + \dot{\partial}_i L^2(x, y) \circ \delta y^i. \quad (3.39)$$

Mas $\delta y^i = 0$ pela segunda equação em (3.35). Calculamos $\delta_i L^2$ usando o fato que a conexão é sem deflexão e h -métrica, i.e., $N_j^i(x, y) = F_{jk}^i(x, y)y^k$ e $\delta_i g_{jk} = F_{ij}^l g_{lk} + F_{ik}^l g_{jl}$:

$$\begin{aligned} \delta_i L^2 &= \delta_i [y^j y^k g_{jk}] = y^j y^k \delta_i g_{jk} - N_i^j y^k g_{jk} - y^j N_i^k g_{jk} \\ &= y^j y^k (\delta_i g_{jk} - F_{ij}^l g_{lk} - F_{ik}^l g_{jl}) = 0. \end{aligned}$$

Segue-se que $dL^2(x, y) = 0$, e assim também $L^2(x, y) = k$, quase certamente o que prova o teorema. ■

Observação 3.7.1. *Uma consequência interessante do Teorema 3.7.3 é que um h -movimento browniano Finsleriano que começa no fibrado indicatriz $IM = \{(x, y) \in TM : F(x, y) = 1\}$ estará em IM para todo $t \in [0, T]$ quase certamente.*

Teorema 3.7.4. *Se $(x(t), y(t))$ é um hv -movimento browniano Finsleriano sobre M , então $L(x(t), y(t))$ é um processo de Bessel, exemplo 1.8.2 com índice $n = \dim M$.*

DEMONSTRAÇÃO: Agora assumimos que $(x(t), y(t), z(t)) \in OTM$ satisfaz o sistema (3.36) de EDEs para o hv -desenvolvimento estocástico. Expressamos a derivada estocástica $dL^2(x, y)$ usando (3.39) e aplicamos a identidade $\delta_i L^2 \equiv 0$ provado acima. Portanto

$$dL^2 = \dot{\partial}_i F^2 \circ \delta y^i = \dot{\partial}_i F^2 \delta y^i + 2^{-1} \dot{\partial}_i \dot{\partial}_j F^2 \delta y^i \delta y^j = 2y_i \delta y^i + g_{ij} \delta y^i \delta y^j. \quad (3.40)$$

Segue-se de (3.36) que

$$\begin{aligned} \delta y^i &= z_j^i \circ dv^j = z_j^i dv^j - 2^{-1} g^{jk} C_{jk}^i dt, \\ \delta y^i \delta y^j &= g^{ij} dt. \end{aligned}$$

Como $y^i C_{jk}^i(x, y) = 0$ e $g_{ij} g^{ij} = n = \dim M$, encontramos de (3.40) que

$$dL^2 = 2y_i z_j^i dv^j + n dt.$$

Fazendo $n_j = \dot{\partial}_i L z_j^i$ e $du = n_j = dv^j$. Desde que $Ln_j = L \dot{\partial}_i L z_j^i = y_i z_j^i$, podemos escrever

$$dL^2 = 2L du + n dt. \quad (3.41)$$

Exigimos que $u(t)$ seja um movimento browniano canônico em \mathbb{R} . Se isto é assim, então a prova está completa, porque $L(x, y)$ é um processo de Bessel com índice n como uma solução da EDE (3.41).

Podemos usar o Teorema de Lévy 1.5.28 para provar que $u(t)$ é um movimento browniano. Assim é suficiente verificar que $u(t)$ e $u^2(t) - t$ são martingales. Primeiro notemos que $L^2 n_i n_j \delta^{ij} = y_k y_l z_i^k z_j^l \delta^{ij} = y_k y_l g^{kl} = L^2$, o qual implica que $n_i n_j \delta^{ij} = 1$. Segue-se que $u = \int n_i dv^i$ é um martingale quadrado integrável. Pela fórmula de Itô, encontramos que $du^2 = 2u n_i dv^i + n_i n_j \delta^{ij} dt = 2u n_i dv^i + dt$. Assim $u^2(t) - t$ é um martingale, o que prova que $u(t)$ é um movimento browniano canônico em \mathbb{R} . ■

Observação 3.7.2. *O Teorema 3.7.4 quer dizer que o comportamento da função fundamental L sobre um hv -movimento browniano Finsler é o mesmo que o comportamento radial do movimento browniano canônico em \mathbb{R}^n .*

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ÁLVAREZ, J.C. & DURÁN, C. *An Introduction to Finsler Geometry*, Undecima Escuela Venezolana de Matematicas.
- [2] ANTONELLI, P. L. & LACKEY, B.C. *The Theory of Finslerian Laplacians and Applications*, Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [3] ASPERTI, A. C. & MERCURI, F. & SEIXAS, J. A. P. *On The Linearity of Isometric Immersions Between Normed Spaces*, preprint, 2004.
- [4] BAO, D. & LACKEY, B. *A Hodge Decomposition Theorem for Finsler Spaces*, C. R. Acad. Sc. Paris, 223, 51-56 (1996).
- [5] BAO, D. & CHERN, S. S. & SHEN, Z. *Finsler Geometry*, Contemporary Mathematics, AMS, vol. 196, 1996.
- [6] BAO, D. & CHERN, S.-S. & SHEN, Z. *An Introduction to Riemann-Finsler geometry*, Springer-Verlag, New York, Inc., 2000.
- [7] BARTLE, R. G. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John Wiley & Sons, Inc., 1966.
- [8] CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, 1988.
- [9] CHERN, S. S. *Remarks on Hilbert's 23rd Problem*, The Mathematical Intelligencer, Springer-Verlag, vol. 18, no. 4 (1996).

- [10] CHERN, S. S. *Finsler Geometry is just the Riemannian Geometry without the Quadratic restriction*, Notices AMS, vol. 43, 959-963 (1996).
- [11] ELWORTHY, K. D. *Geometric Aspects of Diffusions on Manifolds*, Ecole d'Été de Probabilités de Saint Flour XVII, LNM, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, no.1362, 277-425 (1987).
- [12] EMERY, M. *Stochastic Calculus in Manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989.
- [13] Emery, M. *On two transfer principles in stochastic differential geometry*, LNM, Springer-Verlag, no.1426, 407-441 (1990).
- [14] HSU, E.P. *Stochastic Analysis on Manifolds*, AMS, 2002.
- [15] IKEDA, N. & WATANABE, S. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North Holland, Amsterdam, Kodansha, Tokyo, 1989.
- [16] KOBAYASHI, S. & NOMIZU, K. *Foundations of differential geometry*, Interscience Publishers, vol. 1, 1969.
- [17] MERCURI, F. *The Critical Points Theory for the Closed Geodesics Problem*, Mathematische Zeitschrift, Springer-Verlag, vol. 156, 231-245 (1977).
- [18] ØKSENDAL, B. *Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1998.
- [19] REVUZ, D. & YOR, M. *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.
- [20] RUND, H. *The Differential Geometry of Finsler Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1959.
- [21] SAN MARTIN, L. A. B. & MARQUES, M. S. F. *Cálculo Estocástico*, 18º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1991.

ÍNDICE REMISSIVO

h–

- , Movimento Browniano Finsler, 91
- , desenvolvimento estocástico Finsleriano, 89
- , rolam, 86
- , rolam sobre o semimartingale, 88
- , levantamento, 80
- , paralelo, 79
- , transporte paralelo estocástico, 84

hv–

- , Movimento Browniano Finsler, 91
- , desenvolvimento estocástico Finsleriano, 90
- , paralelo, 80
- , rolam sobre a curva, 87
- , rolam sobre o semimartingale, 89
- , transporte paralelo estocástico, 85
- levantamento, 81

Finsler

- , estrutura, 63

aplicação exponencial, 50

campo paralelo, 45

Conexão

- de Berwald, 77
- de Hashiguchi, 77

conexão

- , de Cartan, 76
- de Chern, 73
- de Rund, 77
- linear, 75
- não-linear, 72
- Riemanniana, 46

Decomposição de Doob, 9

- desenvolvimento de Cartan, 57
- desenvolvimento estocástico, 58

EDE

- em \mathbb{R}^n , 17

fibrado tangente pull-back, 69

Finsler

- , conexão, 68

forma de Hilbert, 70

geodésica, 46

indicatriz, 65

Integração Estocástica, 11

levantamento horizontal, 37

levantamento horizontal,
 Movimento Browniano, 58

Movimento Browniano
 d -dimensional, 5

operador de Laplace-Beltrami, 54

seção distinguida, 70

tensor
 de Cartan, 71
 fundamental, 71

transporte paralelo
 das trajetórias do M. B., 58

variação
 finita, 7
 quadrática finita, 9

Weingarten
 fórmula de, 60