UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

Construção de Imagens Sísmicas em Verdadeira Amplitude por Dados de Reflexão: Formulação Matemática e Construção de Algoritmos

Autor: RODRIGO DE SOUZA PORTUGAL

Orientador: PROF. DR. MARTIN TYGEL

Co-orientador: DR. EDUARDO FILPO

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos pré-requisitos para obtenção do Título de Doutor em Matemática Aplicada.

Abril de 2002

UNICAMP BIBLIOTECA CENTRAL

Construção de Imagens Sísmicas em Verdadeira Amplitude por Dados de Reflexão: Formulação Matemática e Construção de Algoritmos

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Rodrigo de Souza Portugal** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 16 de abril de 2002

Prof. Dr. Martin Tygel Orientador Dr. Eduardo Filpo

Dr. Eduardo Filpo Co-orientador

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computarção Científica, UNICAMP, Como requisito parcial para a obtenção do Título de DOU-TOR em Matemática Aplicada.

> UNICAMP BIBLIOTECA CENTRAL SEÇÃO CIRCULANTE

UNIDADE Nº CHAMA V TOMBO BC PROC 1 C PRECO OATA Nº CPD

CM00167961-7

BIB 10 242097

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Portugal, Rodrigo de Souza

P838c Construção de imagens sísmicas em verdadeira amplitude por dados de reflesão: formulação matemática e construção de algoritmos / Rodrigo de Souza Portugal – Campinas, [S.P.: s.n.], 2002.

Orientadores: Martin Tygel; Eduardo Filpo.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Sismologia – Processamento de dados. 2. Análise numérica. 3. Geofísica.
 Expansões assintóticas. I. Tygel, Martin. II. Filpo, Eduardo. III. Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Tese de Doutorado defendida em 16 de abril de 2002

e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). MARTIN TYGEL

Prof (a). Dr (a). LÚCIO TUNES DOS SANTOS

ins

Prof (a). Dr (a). MARIA CRISTINA DE CASTRO CUNHA

Prof.(a). Dr (a). JOÃO CARLOS RIBEIRO CRUZ

Prof (a). Dr (a). CARLOS ALVES DA CINHA FILHO

À minha esposa Denise

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. Martin Tygel, pela sua confiança e pelo seu padrão de qualidade. Agradeço-lhe os momentos de intensa discussão científica que me motivaram ainda mais a percorrer as trilhas da matemática aplicada;

A toda minha família: minha esposa Denise, meu pais Vera e Paulo, meus irmãos, Bernardo, Ana e Raquel, minha sogra Maria Ester e meus cunhados, Ebinha, Cecília, Solange e Nereu, apenas por serem ótima família;

Ao meu co-orientador Dr. Filpo, e a aos Professores Lúcio, Amélia e Jörg, pelos ótimos conselhos científicos e, sobretudo, pela amizade;

Aos grandes amigos Akiles, Biloti, Cantão, Luís e Serginho, por sua longa amizade e apoio nesta jornada de quase onze anos desde a graduação e também à Valéria, pela nova amizade, apoio e pelas conversas animadas, sem esquecer do suprimento de alfajores para escrever a tese.

A Fátima, por nos zelar como filhos, ajudando a diminuir a burocracia que nos assola e lembrando dos compromissos importantes;

A Unicamp e ao IMECC, por sua estrutura e clima acadêmico motivadores;

À FAPESP, pelo suporte financeiro.

Enfim, a todos aqueles que me ajudaram um pouquinho aqui ou ali

Agradeço

Sumário

.

Dedicatória v										
Aį	grade	cimentos	vii							
St	mári	0	١X							
hearach	Introdução 1									
	1.1	Sísmica de reflexão	1							
	1.2	Organização da tese	3							
2	Teor	ria dos raios	5							
	2.1	Introdução	5							
	2.2	Aproximação assintótica	7							
	2.3	Equações cinemáticas do raio 3D	9							
	2.4	Equações dinâmicas do raio 3D	10							
		2.4.1 Observações	12							
	2.5	Parametrizações mais comuns	13							
		2.5.1 Parâmetro sigma	14							
		2.5.2 Comprimento de arco	15							
		2.5.3 Tempo de trânsito	16							
	2.6	Condições iniciais	17							
		2.6.1 Condições de fonte pontual	17							
		2.6.2 Condições de refletor explosivo	19							
	2.7	Equações do raio 2D e modelo 2.5D	20							
		2.7.1 O modelo 2.5D	21							
		2.7.2 Condições iniciais 2D	23							

	2.8	Exemplos	6
		2.8.1 Meio com velocidade constante	6
		2.8.2 Meio com velocidade dependente da profundidade	9
		2.8.3 Meio com velocidade dependendo linearmente da profundidade	2
	2.9	Aproximação paraxial	3
	2.10	Condições de contorno na interface	4
		2.10.1 Condições de contorno cinemáticas	5
		2.10.2 Condições de contorno dinâmicas	6
		2.10.3 Coeficiente de reflexão	8
	2.11	Espalhamento geométrico	9
	2.12	Raio refletido em uma interface 4	0
	A	Método das características	hund
	В	Identidade de Smirnov	4
	С	Identidade de álgebra linear	7
	D	Condições de contorno dinâmicas	8
3	Cons	strução de frentes de onda 5	3
	3.1	Introdução	3
	3.2	Frentes de onda	4
	3.3	Propagação de frentes de onda 5	6
	3.4	Controle de densidade de raios	8
		3.4.1 Critérios para a criação de novos raios	8
	3.5	Criação de novos raios	1
	3.6	Construção da malha RFO (raios e frentes de onda)	2
	3.7	Interpolação das informações na malha-alvo	3
		3.7.1 Pré-processamento	3
		3.7.2 Conexão entre pontos e células	4
		3.7.3 Criação de painéis de dados	6
	3.8	Resumo do método CFO	6
	3.9	Exemplo	8
	Е	Método de Runge-Kutta de quarta ordem	1
	F	Interpolação de Hermite	12
	G	Ponto-interior-ao-triângulo	'2
	H	Splines bi-cúbicas	14
		H.1 Splines cúbicas	'4

		יזז	A forest D and the							
		п.2 тт о		/3						
		H.3		75						
		H.4	Condições interpolantes	77						
		H.5	Splines bi-cúbicas	78						
4	Isóc	Isócronas e curvas de difração 79								
	4.1	Introdu	ução	80						
	4.2	Isócron	nas	80						
	4.3	Curvas	s de difração	81						
	4.4	Teoren	na da dualidade e aplicações	82						
		4.4.1	Envelope de isócronas	83						
		4.4.2	Envelope de curvas de difração	83						
	4.5	Exemp	plos	85						
		4.5.1	Construção de isócronas	85						
		4.5.2	Construção de uma curva de difração	86						
5	As q	uatro o	operações de Kirchhoff: cinemática	91						
5	As q 5.1	l uatro o Introdi	perações de Kirchhoff: cinemática	91 91						
5	As q 5.1 5.2	uatro o Introdu Formu	perações de Kirchhoff: cinemática ução ução lação clássica: modelamento	91 91 94						
5	As q 5.1 5.2	uatro o Introdu Formu 5.2.1	perações de Kirchhoff: cinemática ução	91 91 94 95						
5	As q 5.1 5.2	Juatro o Introdu Formu 5.2.1 5.2.2	operações de Kirchhoff: cinemática ução ução clássica: modelamento Geometria do modelamento Fórmula do modelamento	91 91 94 95 96						
5	As q 5.1 5.2	Juatro o Introdu Formu 5.2.1 5.2.2 Formu	operações de Kirchhoff: cinemática ução ução clássica: modelamento Geometria do modelamento Fórmula do modelamento Ilação neo-clássica: migração	91 91 94 95 96 97						
5	As q 5.1 5.2 5.3	Introdu Formu 5.2.1 5.2.2 Formu 5.3.1	operações de Kirchhoff: cinemática ução ução clássica: modelamento Geometria do modelamento Fórmula do modelamento Ilação neo-clássica: migração Geometria da migração	91 94 95 96 97						
5	As q 5.1 5.2 5.3	uatro o Introdu Formu 5.2.1 5.2.2 Formu 5.3.1 5.3.2	operações de Kirchhoff: cinemática ução ução clássica: modelamento dação clássica: modelamento Geometria do modelamento Fórmula do modelamento dação neo-clássica: migração Geometria da migração Fórmula da migração	91 94 95 96 97 97						
5	As q 5.1 5.2 5.3	Juatro o Introdu Formu 5.2.1 5.2.2 Formu 5.3.1 5.3.2 Formu	operações de Kirchhoff: cinemática ução ulação clássica: modelamento Geometria do modelamento Fórmula do modelamento Ilação neo-clássica: migração Geometria da migração Fórmula da migração Ilação moderna: demigração	 91 94 95 96 97 97 98 99 						
5	As q 5.1 5.2 5.3	uatro o Introdu Formu 5.2.1 5.2.2 Formu 5.3.1 5.3.2 Formu 5.4.1	operações de Kirchhoff: cinemática ução ulação clássica: modelamento Geometria do modelamento Fórmula do modelamento Ilação neo-clássica: migração Geometria da migração Fórmula da migração Ilação moderna: demigração	 91 94 95 96 97 97 98 99 100 						
5	As q 5.1 5.2 5.3	uatro o Introdu Formu 5.2.1 5.2.2 Formu 5.3.1 5.3.2 Formu 5.4.1 5.4.2	operações de Kirchhoff: cinemática ução ulação clássica: modelamento Geometria do modelamento Fórmula do modelamento ilação neo-clássica: migração Geometria da migração Geometria da migração Ilação moderna: demigração Geometria da demigração	 91 94 95 96 97 97 98 99 100 100 						
ſſ	As q 5.1 5.2 5.3 5.4	uatro o Introdu Formu 5.2.1 5.2.2 Formu 5.3.1 5.3.2 Formu 5.4.1 5.4.2 Formu	operações de Kirchhoff: cinemática ução	 91 94 95 96 97 97 98 99 100 100 101 						
5	As q 5.1 5.2 5.3 5.4 5.5	uatro o Introdu Formu 5.2.1 5.2.2 Formu 5.3.1 5.3.2 Formu 5.4.1 5.4.2 Formu 5.4.2	operações de Kirchhoff: cinemática ução ulação clássica: modelamento Geometria do modelamento Fórmula do modelamento Ilação neo-clássica: migração Geometria da migração Geometria da migração Ilação moderna: demigração Geometria da demigração Ilação contemporânea: demodelamento	 91 94 95 96 97 97 98 99 100 100 101 102 						
5	As q 5.1 5.2 5.3 5.4 5.5	uatro o Introdu Formu 5.2.1 5.2.2 Formu 5.3.1 5.3.2 Formu 5.4.1 5.4.2 Formu 5.5.1 5.5.2	perações de Kirchhoff: cinemática ução ulação clássica: modelamento Geometria do modelamento Fórmula do modelamento ilação neo-clássica: migração Geometria da migração Geometria da migração Ilação moderna: demigração Geometria da demigração Ilação contemporânea: demodelamento Geometria do demodelamento Fórmula do demodelamento	 91 94 95 96 97 97 98 99 100 100 101 102 102 						
5	As q 5.1 5.2 5.3 5.4 5.5	uatro o Introdu Formu 5.2.1 5.2.2 Formu 5.3.1 5.3.2 Formu 5.4.1 5.4.2 Formu 5.5.1 5.5.2 A integ	operações de Kirchhoff: cinemática ução ulação clássica: modelamento Geometria do modelamento Fórmula do modelamento Ilação neo-clássica: migração Geometria da migração Geometria da migração Ilação moderna: demigração Ilação contemporânea: demodelamento Geometria do demodelamento Geometria do demodelamento Ilação contemporânea: demodelamento Geometria do demodelamento Geometria do demodelamento Geometria do demodelamento Ilação contemporânea: demodelamento Geometria do demodelamento Fórmula do demodelamento Geometria do demodelamento Ge	 91 94 95 96 97 97 98 99 100 100 101 102 102 104 						
5	As q 5.1 5.2 5.3 5.4 5.5 I	Juatro o Introdu Formu 5.2.1 5.2.2 Formu 5.3.1 5.3.2 Formu 5.4.1 5.4.2 Formu 5.5.1 5.5.2 A integ	operações de Kirchhoff: cinemática ução	 91 94 95 96 97 97 98 99 100 100 101 102 102 104 						

		6.1.1	Modelamento	108				
		6.1.2	Migração	109				
		6.1.3	Demigração	110				
		6.1.4	Demodelamento	110				
	J	Método	o da fase estacionária	112				
7	Fato	res que	afetam o imageamento sísmico	113				
	7.1	Introdu	ıção	113				
	7.2	Espalh	ando <i>versus</i> somando	114				
	7.3	O prob	lema da abertura	114				
	7.4	O prob	lema do falseamento	115				
	7.5	Escolh	a do modelo de velocidades	117				
	K	Suaviz	ação por média móvel recursiva (MMR)	119				
8	Con	sideraçõ	ões finais e perspectivas futuras	123				
Re	Referências bibliográficas 12							

Introdução

1.1 SÍSMICA DE REFLEXÃO

O método da sísmica de reflexão é um ramo da geofísica que faz uso de ondas acústicas ou elásticas produzidas pelo homem, a fim de inferir as estruturas geológicas que compõem a subsuperfície da Terra. Seu principal uso se dá na indústria extrativista do petróleo, onde imagens que representam as regiões de interesse em profundidades são construídas, mapeando, portanto, grandes estruturas geológicas, a fim de se caracterizar e monitorar reservatórios de hidrocarbonetos. Estas imagens são obtidas através de processamentos de dados sísmicos, que são a resposta a perturbações artificiais, tais como uma detonação de carga explosiva.

O dado sísmico é o registro temporal do campo de ondas produzido artificialmente por meio de fontes sísmicas (explosivas, de vibração ou de pressão), dispostas próximas à superfície. Este registro é feito por vários receptores espalhados sobre (ou perto) da superfície. O campo de ondas registrado é a resposta do interior da Terra à fonte, sendo composto por muitos eventos sísmicos, dos quais se destacam as ondas refletidas primárias, as quais refletiram uma única vez em uma interface na subsuperfícies da Terra. O processo da geração artificial de ondas seguido pelo registro em receptores é chamado de *levantamento sísmico*.

Em cada receptor, o sinal é registrado no tempo e é chamado de *traço sísmico*. Uma coleção de todos os traços resultantes de um levantamento sísmico denomina-se *sismograma*. Após uma reorganização dos traços, são gerados subconjuntos do sismograma, chamados *seções sísmicas*, que ossuem estruturas apropriadas a certos tipos de análises e algoritmos. Diferentes seções sísmicas

são geradas pela escolha sobre a disposição física das fontes sísmicas e receptores, também chamada de *configuração de aquisição*. Várias estratégias podem ser utilizadas dependendo das especificidades da região e dos objetivos a serem atingidos. Muitas vezes também várias fontes podem ser agrupadas para melhor efetividade, assim como vários receptores podem ser agrupados.

Mais especificamente, de cada levantamento sísmico, envolvendo um grande número de fontes e receptores, podem ser extraídas várias seções sísmicas, as quais correspondem a escolhas específicas de pares fonte e receptor obedecendo a determinados critérios. As várias seções que podem ser extraídas de um levantamento sísmico devem "iluminar" uma mesma parte da região em subsuperfície de interesse. Pode-se dizer então que esta parte da subsuperfície é multiplamente coberta pelas várias seções sísmicas.

É comum relacionar cada traço sísmico de uma seção a um par *fonte-receptor*. Portanto uma seção sísmica corresponde a uma determinada coleção de pares fonte-receptor. A distância entre a fonte e receptor de um par é conhecida por *afastamento*. Dentre as seções sísmicas, as mais comuns ao processamento sísmico são: (a) seções de tiro comum (CS, do inglês "common shot"), em que a posição de todas as fontes é fixa e o afastamento dos pares fonte-receptor aumenta linearmente; (b) seções de receptor comum (CR, do ingês "common receiver"), em que a posição de todos os receptores é fixa e o afastamento dos pares fonte-receptor aumenta linearmente; (c) seções de afastamento comun (CO, do inglês "common offset"), em que o afastamento dos pares fonte-receptor permanece constante; (d) seção de ponto médio comum (CMP, do inglês "common mid point"), em que os pares fonte-receptor são posicionados simetricamente a um ponto fixo, com o afastamento crescendo linearmente. Um caso especial da seção do tipo (c) são as seções de afastamento nulo (ZO, do inglês "zero offset"), em que a fonte e o receptor de cada par estão na mesma posição, situação fisicamente impossível, porém muito útil para o processamento.

As imagens a serem contruídas pelo processamento sísmico podem ser classificadas em imagens em tempo ou imagens em profundidade. As imagens em tempo podem ser refinamentos de seções sísmicas já existentes, porém livres de ruídos e outros artefatos que dificultam sua interpretação ou utilização, ou podem ser também combinações apropriadas de várias seções existentes de modo a simular uma nova seção sísmica não contida nos dados sísmicos. As imagens em profundidade consistem no delineamento de estruturas em subsuperfície e de suas propriedades que sejam consistentes com as seções sísmicas originalmente medidas.

Nos últimos anos, o processamento sísmico não se contenta apenas com o aspecto cinemático.

isto é, com o posicionamento correto dos refletores. Hoje em dia, os métodos que relevam o aspecto dinâmico estão cada vez mais ganhando importância, pois além de produzirem imagem com qualidade, fornecem propriedades físicas e geológicas do meio, chamados atributos sísmicos.

Neste contexto, foram desenvolvidos os chamados métodos de imageamento em verdadeira amplitude (do inglês "true amplitude"). A verdadeira amplitude é definida como sendo a amplitude da reflexão primária livre dos efeitos de focagem e desfocagem que a frente de onda sofre ao percorrer meio não-homegêneo, bem como ao transpassar/refletir em interfaces não planas. Estes efeitos são resumidos no conceito de espalhamento geométrico.

Nesta trabalho, são apresentados, desenvolvidos e aprimorados uma série de algoritmos envolvidos no processamento sísmico em verdadeira amplitude. Dentre os quais se destacam a implementação de um traçador de raios por construção de frentes de onda bidimensional (2D), bem como suas aplicações ao imageamento sísmico, tais como modelamento sísmico, migração em profundidade com preservação de amplitude. Além disso, como uma unificação do problema do imageamento sísmico, são apresentadas as quatro operações de Kirchhoff, as quais formam um conjunto completo de operações. Os algoritmos desenvolvidos são aplicados a modelos sintéticos com um grau crescente de complexidade.

1.2 ORGANIZAÇÃO DA TESE

A tese está organizada em sete capítulos, que mostram desde os fundamentos do imageamento sísmico até exemplos sintéticos de aplicações.

O Capítulo 2 traz alguns resultados sobre a Teoria dos Raios que é a base para todos os algoritmos de imageamento sísmico apresentados. Houve a preocupação adicional de se expandir ao máximo a formulação Cartesiana, ao contrário de outros textos, que lançam mão do sistema de coordenadas centradas no raio, para lidar com a parte dinâmica da teoria. A formulação aqui apresentada é a mais adequada ao algoritmo de construção de frentes de onda proposto no Capítulo 3.

O Capítulo 3 mostra os detalhes da implementação do algoritmo de construção de frentes de onda. Este algoritmo, entre outras aplicações, é totalmente adequado aos métodos de imageamento apresentados neste trabalho, pois fornece-lhes as quantidades necessárias para a suas implementações. O Capítulo 4 trata dos fundamentos geométricos que motivam a criação das quatro operações básicas de imageamento descritas nos Capítulos 5 e 6. Mais especificamente, são apresentadas duas superfícies essenciais à elaboração dos algoritmos: a isócrona e a superfície de Huygens.

O Capítulo 5 descreve as quatro operações de Kirchhoff, mostrando seu aspecto cinemático que é baseado nas propriedades das superfícies auxiliares apresentadas no Capítulo 4. Além disso, é ressaltada a unificação teórica que estas operações apresentam, indicando que servem como base para outros processamentos, a partir de combinações adequadas.

O Capítulo 6 se dedica à parte dinâmica destas quatro operações, isto é, ao tratamento das amplitudes e pesos, bem como da análise assintótica das integrais.

O Capítulo 7 aborda os problemas típicos do imageamento, tais como falseamento, abertura, suavização e filtragem, e algumas propostas para enfrentá-los.

Finalmente, no último capítulo, o trabalho é concluído com as considerações finais e perspectivas para trabalhos futuros

No geral, a tese foi concebida para ser auto-contida ao máximo, apenas para evitar o incoveniente do leitor ter que buscar todas as referências a todo momento. Este fato se intensifica na apresentação dos algoritmos numéricos que servem de instrumento para os algoritmos mais "nobres", tais como de construção de frentes de onda e de imageamento. Neste sentido, o uso dos apêndices foi o recurso encontrado para tornar a primeira leitura mais direta e objetiva.

2

Teoria dos raios

Neste capítulo são introduzidos alguns resultados relativos à *Teoria dos Raios* de ordem zero, também chamada de *Óptica Geométrica*. As seções abordam de maneira construtiva a teoria dos raios, mostrando desde as premissas que são feitas sobre o campo de ondas, passando por uma análise dos aspectos cinemáticos e dinâmicos e finalizando com exemplos para meios com distribuição de velocidade mais simples a aplicação em modelagem sísmica de reflexões primárias.

A maneira que o foi organizado o capítulo é tal que as contas mais complicadas e teorias matemáticas que servem de base são deixadas como apêndices do próprio capítulo. Vale lembrar os resultados deste capítulo servem como base tanto para o método da construção de frentes de onda apresentado no próximo capítulo, como para os métodos de imagemento apresentados nos capítulos posteriores. Para uma abordagem completa e detalhada da Teoria dos Raios veja, por exemplo, Červený (2001).

2.1 INTRODUÇÃO

Quando o campo de ondas é investigado, pode-se observar que as perturbações no meio, também chamadas de eventos, são propagadas independentemente. Além disso, se o evento tem curta dura ção, implicando em grande conteúdo de alta freqüência, quase como uma pulso delta de banda limitada, este comportamento se mantém por toda a propagação. Estas observações dão uma boa pista de como a solução deve ser, pelo menos sob a hipótese de alta-freqüência. Se apenas um evento é observado atentamente, a solução deve levar em conta dois aspectos básicos: o cinemático e o dinâmico. A parte cinemática trata das trajetórias dos raios, bem como do tempo de trânsito dos eventos sísmicos. A parte dinâmica, por sua vez, lida com a distribuição espacial da energia propagada, estudando a o comportamento da amplitude dos eventos.

Este dois aspectos podem ser combinados em uma função que representa uma solução aproximada. Este procedimento funciona como uma separação de variáveis, em que uma solução tentativa é inserida na equação original, gerando duas novas equações, esperançosamente mais simples, para serem resolvidas. No caso da teoria dos raios, a função responsável pela parte cinemática é chamada de *tempo de trânsito* e a função que governa a parte dinâmica é chamada de *amplitude*. Uma vez que a função combinada é inserida na equação de Helmholtz, após alguma manipulação e hipóteses adicionais, chega-se a duas novas equações diferenciais parciais (EDP). A primeira é conhecida por *equação iconal*, em que somente o tempo de trânsito aparece como incógnita. A segunda é chamada de *equação de transporte* e tem tanto o tempo de trânsito quanto a amplitude como incógnitas.

Usando a equação iconal como ponto de partida, pode-se derivar um sistema não linear de equações diferenciais ordinárias (EDO) de primeira ordem, chamadas *equações cinemáticas do raio*, cuja solução é o tempo de trânsito. Entretanto, isto é somente a primeira metade do jogo, no qual resta computar a amplitude. Usando o tempo de trânsito previamente computado, converte-se a equação de transporte, que é uma EDP, em uma EDO válida ao longo do raio. Deste modo, ao longo de cada raio, para se obter a solução assintótica de ordem zero, combina-se suas partes constitutivas que são o tempo de trânsito e a amplitude.

Na sísmica de reflexão, grande parte das aplicações desta abordagem é voltada ao modelamento sísmico, isto é, à construção de sismogramas sintéticos, que são o registro de eventos provenientes de um campo de ondas simulado a partir de um modelo físico. Entretanto, como a teoria dos raios proporciona um bom entendimento do campo de ondas, esta também auxilia na construção dos métodos de inversão de dados de campo que, por hipótese, assumem um comportamento assintótico na freqüência. Sendo assim, os resultados apresentados neste capítulo servem como base para os próximos capítulos.

Existem, basicamente, duas abordagens distintas para a Teoria dos Raios, no que diz respeito à amplitude. Sua principal diferença é a escolha das coordenadas para se parametrizar tanto o raio como as quantidades relativas à energia que flui por esse raio. A abordagem "Červený" (Červený, 2001) usa as chamadas coordenadas centradas no raio, enquanto a abordagem "Bleistein" (Bleistein *et al.*, 2001), escolhida para este tese, usa as coordenadas Cartesianas. Como ambas lidam com parametrizações diferentes, há como conectar uma abordagem a outra, por meio de uma transformação de variáveis. O problema é que essa mudança não é explícita, dificultando o cálculo do Jacobiano desta transformação e fazendo com que essa conexão não fique estabelecida de maneira trivial.

2.2 APROXIMAÇÃO ASSINTÓTICA

Em primeiro lugar, como as aproximações assintóticas são realizadas na freqüência, é preferível se trabalhar com a equação da onda reduzida, também chamada de *equação de Helmholtz*,

$$\Delta \hat{u}(\boldsymbol{x},\omega) + \frac{\omega^2}{c(\boldsymbol{x})^2} \hat{u}(\boldsymbol{x},\omega) = -\hat{f}(\omega)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_s), \qquad (2.1)$$

que é obtida através da transformada de Fourier no tempo aplicada à equação da onda acústica com densidade constante. Aqui $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3), \boldsymbol{x}_s$ é a posição da fonte, $c(\boldsymbol{x})$ é o campo de velocidades, ω é a freqüência, Δ é o operador *Laplaciano*, definido por

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, \qquad (2.2)$$

e o par de transformadas de Fourier é definido como

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \, g(t) \,\mathrm{e}^{-i\omega t},$$
 (2.3a)

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \hat{g}(\omega) \, e^{i\omega t}.$$
 (2.3b)

A idéia principal da teoria dos raios é assumir, por hipótese, que a solução do problema de propagação de ondas tem uma expressão assintótica do tipo

$$\hat{u}(\boldsymbol{x},\omega) \approx \sum_{k=0}^{\infty} (-i\omega)^{-k} A_k(\boldsymbol{x}) e^{-i\omega\tau(\boldsymbol{x})}, \qquad (2.4)$$

onde $\tau(x)$ é o tempo de trânsito e $A_k(x)$ são os coeficientes da série relacionados à amplitude. No caso da aproximação de ordem zero, considera-se apenas o primeiro termo da série assintótica, isto é

$$\hat{u}(\boldsymbol{x},\omega) \approx A(\boldsymbol{x})e^{-i\omega\tau(\boldsymbol{x})},$$
(2.5)

onde, por economia de notação, $A \equiv A_0$ é simplesmente chamada de amplitude.

Segundo Bleistein (1984), quando a solução tentativa (2.4) é inserida na equação de Helmholtz, obtém-se uma série de potências em ω . Igualando os coeficientes desta série a zero, duas equações são obtidas

$$2\nabla A(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla \tau(\boldsymbol{x}) + A(\boldsymbol{x}) \Delta \tau(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad (2.6a)$$

$$\|\nabla \tau(\boldsymbol{x})\|^2 = \frac{1}{c(\boldsymbol{x})^2},$$
 (2.6b)

chamadas respectivamente de equação de transporte e equação iconal. Aqui, o operador ∇ é o gradiente, definido por

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)$$
 (2.7)

e ||y|| é a norma do vetor y definida por

$$\|\boldsymbol{y}\|^2 = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{y}$$

Pode-se observar que a equação iconal traz informação somente sobre tempos de trânsito τ . Por outro lado, a equação de transporte relaciona os tempos de trânsito τ com as amplitudes A, mostrando como estas quantidades são transportadas, como diz o próprio nome da equação. Em outras palavras, a equação iconal resolve a parte cinemática do problema enquanto a equação de transporte soluciona a parte dinâmica. Assim, o procedimento natural para achar a solução é buscar uma solução da equação iconal em primeiro lugar, substituí-la na equação de transporte, para em seguida achar uma solução para a amplitude.

Neste trabalho, utiliza-se o método das características para se encontrar soluções da equação iconal. As características, ou raios, são curvas que cobrem toda uma região do espaço, de modo que ao longo cada raio os tempos de trânsito ficam determinados. Estes raios são determinados como a solução de um sistema de EDO's, chamado equações características, ou melhor, equações do raio. Por outro lado, para cada raio, estes tempos de trânsito podem ser inseridos na equação de transporte, determinando-se, portanto, a amplitude correspondente a cada tempo de trânsito, ao longo do raio.

Resumindo, para se computar a solução assintótica do problema de propagação de ondas em uma região do espaço, procede-se do seguinte modo: cobre-se densamente tal região com um feixe de raios que são regidos pelas equações características, derivadas da equação iconal; em seguida, ao longo de cada raio, computa-se o tempo de trânsito e determina-se, através da equação de transporte, a amplitude correspondente a cada tempo de trânsito.

2.3 EQUAÇÕES CINEMÁTICAS DO RAIO 3D

Conforme o método das características apresentado no Apêndice A, pode-se aplicar as equações (A.13a)–(A.13c) à equação iconal (2.6b), transformada convenientemente para ser um Hamiltoniano,

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{x},\tau,\boldsymbol{p}) \equiv \frac{1}{2} \left[||\boldsymbol{p}||^2 - \eta(\boldsymbol{x})^2 \right] = 0, \qquad (2.8)$$

onde $\eta(\mathbf{x}) = 1/c(\mathbf{x})$ é chamada vagarosidade. Obtém-se, portanto, as chamadas equações cinemáticas do raio

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{d\ell} = \lambda \boldsymbol{p} \tag{2.9a}$$

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{d\ell} = \lambda \,\eta(\boldsymbol{x}) \,\nabla\!\eta(\boldsymbol{x}) \tag{2.9b}$$

$$\frac{d\tau}{d\ell} = \lambda \, \eta(\boldsymbol{x})^2 \tag{2.9c}$$

onde $p = \nabla \tau$ é chamado de *vetor vagarosidade* e λ é um número que faz o papel da mudança de parametrização, detalhada na Seção 2.5. Aqui ℓ é um parâmetro monotônico qualquer ao longo do raio.

Para a obtenção da solução completa das equações do raio são necessárias condições iniciais, das quais as mais usadas na propagação de ondas sísmicas são abordadas na Seção 2.6. De modo geral, as equações do raio são integradas numericamente, mas em casos particulares é possível obter soluções semi-analíticas ou até mesmo soluções explicitas. Alguns exemplos de casos particulares são mostrados na Seção 2.8.

O método das características pode ser entendido como uma transformação das coordenadas cartesianas para coordenadas que são as mais naturais ao problema. Neste sentido, as equações do raio podem ser vistas como a regra operacional que faz a mudança das coordenadas do raio $(\ell, \gamma_1, \gamma_2)$ para as coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) . Isto quer dizer que para cada tripla $(\ell_0, \gamma_{10}, \gamma_{20})$, é possível achar uma tripla correspondente (x_{10}, x_{20}, x_{30}) , por meio da integração do sistema (2.9a)-(2.9c).

Neste sentido, pode-se entender as coordenadas cartesianas, assim como qualquer quantidade relacionada ao raio, como uma função de ℓ , γ_1 e γ_2

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\ell, \gamma_1, \gamma_2); \qquad \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(\ell, \gamma_1, \gamma_2); \qquad \tau = \tau(\ell, \gamma_1, \gamma_2). \tag{2.10}$$

Como o método das características pode ser entendido como uma transformação de variáveis, então existe o Jacobiano desta transformação, também chamado por *Jacobiano do raio*, cuja definição é

$$\mathcal{J}(\ell, \gamma_1, \gamma_2) = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\ell, \gamma_1, \gamma_2)} = \det\left[\frac{d\boldsymbol{x}}{d\ell}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \gamma_1}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \gamma_2}\right].$$
(2.11)

Neste caso, a curva característica Λ é denominada raio e é dada por

$$\Lambda(\gamma_1, \gamma_2) = \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\ell, \gamma_1, \gamma_2), \quad \ell \ge 0 \},$$
(2.12)

onde o par (γ_1, γ_2) é fixo e $x(\ell, \gamma_1, \gamma_2)$ satisfaz a equação (2.9a). Com esta definição, pode-se interpretar cada raio Λ sendo "etiquetado" por um par (γ_1, γ_2) .

2.4 EQUAÇÕES DINÂMICAS DO RAIO 3D

Usando os resultados da seção anterior pode-se transformar a equação de transporte (2.6a) em uma EDO. Em outras palavras, pode-se computar a amplitude A ao longo de cada raio descrito pela equações do raio.

A equação de transporte (2.6a) é válida para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Em particular, a equação também é válida para o raio $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$, definido em (2.12). Observando que $p = \nabla \tau$, pode-se reescrever a equação de transporte (2.6a) como

$$2\,\nabla A \cdot \boldsymbol{p} = -A\,\Delta\tau.$$

Multiplicando a equação acima por λA e usando a equação (2.9a), chega-se a

$$2A \nabla A \cdot \frac{d\boldsymbol{x}}{d\ell} = -\lambda A^2 \Delta \tau$$

e observando que o lado esquerdo da equação acima é uma regra da cadeia, obtém-se

$$\frac{d}{d\ell}\log(A^2) = -\lambda\,\Delta\tau.\tag{2.13}$$

O problema da equação acima é que Δ é um operador espacial, contrariando o objetivo de se chegar a uma equação diferencial que dependa somente de quantidades e operadores definidos ao longo do raio Λ . Para resolver este empecilho, é possível usar a identidade de Smirnov (veja Apêndice B), que relaciona o Laplaciano do tempo de trânsito com o Jacobiano do raio da seguinte forma

$$\lambda \,\Delta \tau = \frac{d}{d\ell} \log(\mathcal{J}/\lambda),\tag{2.14}$$

onde \mathcal{J} é Jacobiano da transformação $(x_1, x_2, x_3) \leftrightarrow (\ell, \gamma_1, \gamma_2)$, definido em (2.11).

Sendo assim, usando a equação (2.14) em (2.13), chega-se a

$$\frac{d}{d\ell}\log(A^2) = \frac{d}{d\ell}\log(\lambda/\mathcal{J})$$
(2.15)

que quando integrada de ℓ_0 a ℓ , dá a fórmula para a amplitude ao longo do raio $\Lambda(\gamma_1, \gamma_2)$

$$A(\ell) = A(\ell_0) \sqrt{\frac{\lambda(\ell) \mathcal{J}(\ell_0)}{\lambda(\ell_0) \mathcal{J}(\ell)}}.$$
(2.16)

A fórmula (2.16) mostra como encontrar a amplitude no "instante" ℓ no raio partindo da informação sobre a amplitude e outras quantidades no "instante" ℓ_0 no raio. Sendo assim, para computar a amplitude ao longo de todo um raio são necessárias quatro quantidades, a saber: três condições iniciais: $A(\ell_0)$, $\mathcal{J}(\ell_0) \in \lambda(\ell_0)$; e o jacobiano $\mathcal{J}(\ell, \gamma_1, \gamma_2)$. Portanto, para se computar a amplitude ao longo de um raio, é necessário saber computar o Jacobiano da transformação de variáveis \mathcal{J} em todo o raio.

As deduções das equações e expressões assumiram até então que o meio possui densidade constante. No entanto, segundo Bleistein (2001), isto não constitui um grave problema, pois, no caso de densidade variável, isto é, $\rho \equiv \rho(\mathbf{x})$, basta considerar o seguinte ajuste da amplitude

$$\tilde{A}(\ell) = A(\ell) \sqrt{\frac{\rho(\ell)}{\rho(\ell_0)}}$$
(2.17)

onde $\rho(\ell) = \rho(\boldsymbol{x}(\ell))$ e $A(\ell)$ é amplitude para densidade constante igual a um, dada pela equação (2.16) e \tilde{A} é a amplitude para densidade variável.

Observando que o Jacobiano pode ser reescrito como

$$\mathcal{J}(\ell,\gamma_1,\gamma_2) = \lambda \det \left[\boldsymbol{p}, \, \boldsymbol{u}, \, \bar{\boldsymbol{u}} \right], \tag{2.18}$$

onde u e \bar{u} são definidos por

$$\boldsymbol{u} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \gamma_1} \quad \mathbf{e} \quad \bar{\boldsymbol{u}} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \gamma_2},$$
 (2.19)

deve-se procurar equações que regem o comportamento de $u \in \bar{u}$ ao logo do raio. Para tanto, o procedimento aplicado é desenvolver as derivadas de $u \in \bar{u}$ com relação a ℓ , usando as próprias quações do raio (2.9a)–(2.9b).

Derivando u com relação a l, aplicando a regra da cadeia e usando as equações do raio chegase a

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{d\ell} = \lambda \boldsymbol{v} + (\nabla \lambda \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{p}, \qquad (2.20a)$$

onde $\boldsymbol{v} = \partial \boldsymbol{p} / \partial \gamma_1$. Similarmente, para $\bar{\boldsymbol{u}}$:

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{u}}}{d\ell} = \lambda \bar{\boldsymbol{v}} + (\nabla \lambda \cdot \bar{\boldsymbol{u}})\boldsymbol{p}, \qquad (2.20b)$$

onde $\bar{v} = \partial p / \partial \gamma_2$. As duas equações acima (2.20a) e (2.20b), em conjunto com as equações do raio (2.9a)–(2.9c) seriam suficientes para o cálculo do Jacobiano caso não fossem introduzidas duas novas quantidades $v \in \bar{v}$. Sendo assim, é necessário o desenvolvimento de mais duas equações para definir a propagação dessas duas quantidades ao longo do raio. Como antes, o procedimento adotado é computar as derivadas de $v \in \bar{v}$ com relação a ℓ e usar as equações do raio, para se determinar estas novas equações diferenciais.

Derivando v com relação a ℓ , aplicando a regra da cadeia e usando as equações do raio, chegase a

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{d\ell} = \frac{\partial}{\partial\gamma_1} \frac{d\boldsymbol{p}}{d\ell} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \eta \nabla \eta\right) \frac{dx_i}{d\ell} = \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda \eta) \nabla \eta + \lambda \eta \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \eta)\right] u_i, \qquad (2.21)$$

que usando notação vetorial fica

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{d\ell} = \left[\nabla \eta \nabla (\lambda \eta)^T + \lambda \eta \nabla^2 \eta\right] \boldsymbol{u}.$$
(2.22a)

Similarmente, a equação para \bar{v} é

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{v}}}{d\ell} = \left[\nabla \eta \nabla (\lambda \eta)^T + \lambda \eta \nabla^2 \eta\right] \bar{\boldsymbol{u}}.$$
(2.22b)

Finalmente, o conjunto das equações (2.9a)–(2.9b), (2.20a)–(2.20b) e (2.22a)–(2.22b) fornece o comportamento tanto cinemático quanto dinâmico do raio. Isto é, ao se resolver o sistema de EDO's composto pelas equações mencionadas, obtém-se por completo a solução pela teoria dos raios.

2.4.1 Observações

 No total, para se computar tempos de trânsito e amplitudes ao longo de um raio, além de sua própria trajetória, deve-se integrar dezenove equações diferenciais; A partir da equação iconal, pode-se derivar mais duas equações que relacionam as quantidades dinâmicas às equações cinemáticas. Para isto deriva-se o Hamiltoniano H com relação a γ₁

$$0 = \frac{d\mathcal{H}}{d\gamma_1} = \nabla_x \mathcal{H} \cdot \frac{dx}{d\gamma_1} + \nabla_p \mathcal{H} \cdot \frac{dp}{d\gamma_1} + \nabla_\tau \mathcal{H} \cdot \frac{d\tau}{d\gamma_1}$$

= $-\eta \nabla \eta \cdot u + p \cdot v.$ (2.23a)

Similarmente, derivando-se $\mathcal H$ com relação a γ_2 obtém-se

$$0 = -\eta \nabla \eta \cdot \bar{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{p} \cdot \bar{\boldsymbol{v}}. \tag{2.24}$$

Usando a equação (2.9b) em (2.23a) e (2.24), obtém-se as relações

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{d\ell} \cdot \boldsymbol{u} = \lambda \, \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v}; \qquad (2.25)$$

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{d\ell} \cdot \bar{\boldsymbol{u}} = \lambda \, \boldsymbol{p} \cdot \bar{\boldsymbol{v}}; \qquad (2.26)$$

- Pontos onde o Jacobiano não está bem definido ou onde é nulo são chamados pontos singulares ou pontos de cáustica. Caso contrário, são chamados pontos regulares;
- O número total de equações diferenciais, dezenove, pode ser reduzido a dezesseis se for levada em conta a equação iconal (2.6b), bem como as equações (2.25) e (2.26).

2.5 PARAMETRIZAÇÕES MAIS COMUNS

O número λ foi introduzido na derivação das equações características para que se pudesse permitir uma reparametrização da raio $\Lambda(\gamma_1, \gamma_2)$. Assim, para cada escolha de λ existe interpretação do parâmetro ℓ , de modo que as equações dos raios fiquem alteradas coerentemente, de acordo com tal parâmetro.

Para facilitar a parte algébrica das equações que vêm a seguir, uma nova quantidade matricial (6×3) , responsável pela parte dinâmica das equações, pode ser introduzida:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{v} & \bar{\mathbf{v}} \end{pmatrix}. \tag{2.27}$$

Além disso, a fim de que as equações resultantes estejam melhor adequadas à implementação numérica, é usada a relação

$$\nabla c = -c^2 \nabla \eta. \tag{2.28}$$

onde c é a velocidade e $\eta = 1/c$ é a vagarosidade.

Na literatura, são comuns três escolhas para λ , cada qual mais apropriada para uma finalidade diferente, a saber: $\lambda = 1$, $\lambda = c \in \lambda = c^2$. A seguir, são apresentados os desdobramentos gerados por tais escolhas.

2.5.1 Parâmetro sigma

A escolha mais simples é $\lambda = 1$. Nesse caso, o parâmetro $\ell = \sigma$ não tem um significado físico imediato, entretanto, sua escolha é comum para derivações analíticas de fórmulas que dependem da teoria dos raios. As equações do raio são:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{d\sigma} = \boldsymbol{p}, \qquad (2.29a)$$

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{d\sigma} = \eta \,\nabla\!\eta = \frac{1}{2} \nabla\!\eta^2, \qquad (2.29b)$$

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \eta^2, \qquad (2.29c)$$

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{d\sigma} = \boldsymbol{v}, \qquad \qquad \frac{d\bar{\boldsymbol{u}}}{d\sigma} = \bar{\boldsymbol{v}}, \qquad (2.29d)$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{d\sigma} = \frac{1}{2}\nabla^2[\eta^2]\boldsymbol{u}, \qquad \qquad \frac{d\bar{\boldsymbol{v}}}{d\sigma} = \frac{1}{2}\nabla^2[\eta^2]\bar{\boldsymbol{u}}. \qquad (2.29e)$$

Usando a definição (2.27), as equações (2.29d)-(2.29e) podem ser reescritas na forma matricial

$$\frac{d}{d\sigma} \mathbf{W} = \mathbf{\Pi}(\sigma) \mathbf{W}, \qquad (2.29f)$$

onde a matriz $\Pi(\sigma)$, de dimensão (6 × 6), é definida por

$$\Pi(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{B} & 0 \end{pmatrix}.$$
 (2.29g)

Aqui I indica a matriz identidade e B é a matriz, com dimensões (3 × 3), dada por

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \nabla^2 [\eta^2] \,. \tag{2.29h}$$

Além disso, o tempo de trânsito é a solução da equação

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \eta^2 \tag{2.29i}$$

e a fórmula para a amplitude é

$$A(\sigma) = A(\sigma_0) \sqrt{\frac{\mathcal{J}(\sigma_0)}{\mathcal{J}(\sigma)}}.$$
(2.29j)

2.5.2 Comprimento de arco

A segunda escolha é $\lambda = c(\mathbf{x})$. Neste caso, o parâmetro é o comprimento de arco $\ell = s$, muito utilizado em geometria diferencial. As equações do raio, neste caso, são

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{ds} = c\boldsymbol{p}, \qquad (2.30a)$$

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{ds} = \nabla \eta \,, \tag{2.30b}$$

$$\frac{d\tau}{ds} = \eta \,, \tag{2.30c}$$

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{ds} = c\boldsymbol{v} + (\nabla c \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{p}, \qquad \qquad \frac{d\bar{\boldsymbol{u}}}{ds} = c\bar{\boldsymbol{v}} + (\nabla c \cdot \bar{\boldsymbol{u}})\boldsymbol{p}, \qquad (2.30d)$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{ds} = \nabla^2 \eta \, \boldsymbol{u} \,, \qquad \qquad \frac{d\bar{\boldsymbol{v}}}{ds} = \nabla^2 \eta \, \bar{\boldsymbol{u}} \,. \tag{2.30e}$$

Pós-multiplicando a equação (2.30d) por p, observa-se que

$$\nabla c \cdot \boldsymbol{u} = \frac{1}{\eta^2} \left[\boldsymbol{p} \cdot \frac{d\boldsymbol{u}}{ds} - c\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} \right] = c \left[c\boldsymbol{p} \cdot \frac{\partial(c\boldsymbol{p})}{\partial\gamma_1} - c^2 \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} \right]$$
$$= c \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial\gamma_1} \left(c^2 \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{p} \right) - c^2 \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} \right] = -c^3 \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v}$$
(2.30f)

e, similarmente, $\nabla c \cdot \bar{u} = -c^3 p \cdot \bar{v}$. Portanto, a equação (2.30d) pode ser reescrita como

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{ds} = c \left[I - c^2 \boldsymbol{p} \, \boldsymbol{p}^T \right] \boldsymbol{v}, \qquad \qquad \frac{d\bar{\boldsymbol{u}}}{ds} = c \left[I - c^2 \boldsymbol{p} \, \boldsymbol{p}^T \right] \bar{\boldsymbol{v}}. \qquad (2.30g)$$

Usando a forma matricial, pode-se reescrever as equações (2.30e) e (2.30g) como

$$\frac{d}{ds}\mathbf{W} = \mathbf{\Pi}(s)\mathbf{W}, \qquad (2.30h)$$

onde W está definido em (2.27) e a matriz $\Pi(s)$ (6 × 6) é definida por

$$\Pi(s) = \begin{pmatrix} 0 & C \\ B & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2.30i)$$

onde as matrizes $\mathbf{B} \in \mathbf{C}$, de dimensão (3 × 3), são dadas por

$$\mathbf{B} = \nabla^2 \eta, \qquad (2.30j)$$

$$\boldsymbol{C} = c \left[\boldsymbol{I} - c^2 \boldsymbol{p} \, \boldsymbol{p}^T \right]. \tag{2.30k}$$

Além disso, o tempo de trânsito é a solução da equação

$$\frac{d\tau}{ds} = \eta \tag{2.301}$$

e a fórmula para a amplitude é

$$A(s) = A(s_0) \sqrt{\frac{c(s) \mathcal{J}(s_0)}{c(s_0) \mathcal{J}(s)}}.$$
 (2.30m)

2.5.3 Tempo de trânsito

A terceira escolha é $\lambda = c(x)^2$. Neste caso, o parâmetro é o tempo de trânsito $\ell = \tau$, sendo assim, a equação que determina o tempo de trânsito não é mais necessária. As equações restantes são

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau} = c^2 \boldsymbol{p} \,, \tag{2.31a}$$

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau} = c\nabla\eta, \qquad (2.31b)$$

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{d\tau} = c^2 \boldsymbol{v} + (\nabla c^2 \cdot \boldsymbol{u}) \boldsymbol{p}, \qquad \qquad \frac{d\bar{\boldsymbol{u}}}{d\tau} = c^2 \bar{\boldsymbol{v}} + (\nabla c^2 \cdot \bar{\boldsymbol{u}}) \boldsymbol{p}, \qquad (2.31c)$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{d\tau} = \left[\nabla\eta\nabla c^T + c\nabla^2\eta\right]\boldsymbol{u}, \qquad \qquad \frac{d\bar{\boldsymbol{v}}}{d\tau} = \left[\nabla\eta\nabla c^T + c\nabla^2\eta\right]\bar{\boldsymbol{u}}, \qquad (2.31d)$$

Usando (2.30f), pode-se reescrever a equação (2.31c) como

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{d\tau} = c^2 \left[I - 2c^2 \boldsymbol{p} \boldsymbol{p}^T \right] \boldsymbol{v}, \qquad \qquad \frac{d\bar{\boldsymbol{u}}}{d\tau} = c^2 \left[I - 2c^2 \boldsymbol{p} \boldsymbol{p}^T \right] \bar{\boldsymbol{v}}. \qquad (2.31e)$$

Além disso, usando(2.28), a equação (2.31d) pode ser reescrita como

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{d\tau} = c^2 \left[-\nabla \eta \nabla \eta^T + \eta \nabla^2 \eta \right] \boldsymbol{u}, \qquad \qquad \frac{d\bar{\boldsymbol{v}}}{d\tau} = c^2 \left[-\nabla \eta \nabla \eta^T + \eta \nabla^2 \eta \right] \bar{\boldsymbol{u}}.$$
(2.31f)

Reescrevendo na forma matricial, vem

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{W} = \mathbf{\Pi}(\tau)\mathbf{W}, \qquad (2.31g)$$

onde a matriz $\Pi(\tau)$, de dimensão (6 × 6), é definida por

$$\mathbf{\Pi}(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{C} \\ \mathbf{B} & 0 \end{pmatrix}.$$
(2.31h)

e as matrizes $B \in C$, de dimensão (3 × 3), são dadas por

$$\mathbf{B} = c^2 \left[\eta \nabla^2 \eta - \nabla \eta \nabla \eta^T \right] , \qquad (2.31i)$$

$$\boldsymbol{C} = c^2 \left[I - 2c^2 \boldsymbol{p} \boldsymbol{p}^T \right] . \qquad (2.31j)$$

A fórmula para a amplitude é

$$A(\tau) = A(\tau_0) \frac{c(\tau)}{c(\tau_0)} \sqrt{\frac{\mathcal{J}(\tau_0)}{\mathcal{J}(\tau)}}.$$
(2.31k)

2.6 CONDIÇÕES INICIAIS

Condições iniciais devem ser impostas para que a resolução do sistema de equações do raios possa ser resolvida. Em geral, as condições iniciais podem ser quaisquer, desde que respeitem as unidades. No entanto algumas condições são mais comuns por possuírem algum significado físico. Os dois tipos mais comuns são as condições de fonte pontual e as condições de refletor explosivo.

2.6.1 Condições de fonte pontual

As condições de fonte pontual são obtidas através do experimento físico mais comum que é a pertubação de um meio através de uma pulso com alta energia e de curta duração em um ponto fixo no espaço. Neste caso, como a propagação se dá em meio isotróptico, no instante inicial a radiação da energia se propaga com simetria radial.

Matematicamente, as condições de fonte pontual se traduzem em considerar

$$\boldsymbol{x}(\ell_0,\gamma_1,\gamma_2) = \boldsymbol{x}_0, \qquad (2.32a)$$

$$\boldsymbol{p}(\ell_0, \gamma_1, \gamma_2) = \eta_0 \big(\sin \gamma_1 \cos \gamma_2, \sin \gamma_1 \sin \gamma_2, \cos \gamma_1 \big), \qquad (2.32b)$$

$$\boldsymbol{u}(\ell_0,\gamma_1,\gamma_2) = \boldsymbol{0}, \qquad (2.32c)$$

$$\bar{\boldsymbol{u}}(\ell_0,\gamma_1,\gamma_2) = \boldsymbol{0}, \qquad (2.32d)$$

$$\boldsymbol{v}(\ell_0,\gamma_1,\gamma_2) = \eta_0 \big(\cos\gamma_1\cos\gamma_2,\cos\gamma_1\sin\gamma_2,-\sin\gamma_1\big), \qquad (2.32e)$$

$$\bar{\boldsymbol{v}}(\ell_0, \gamma_1, \gamma_2) = \eta_0 \big(-\sin\gamma_1 \sin\gamma_2, \sin\gamma_1 \cos\gamma_2, \cos\gamma_1 \big), \qquad (2.32f)$$

$$\tau(\ell_0, \gamma_1, \gamma_2) = \tau_0, \tag{2.32g}$$

onde $\eta_0 = 1/c(x_0)$. Neste caso os parâmetros transversais γ_1 e γ_2 podem ser interpretados como o ângulo que o vetor $p(t_0, \gamma_1, \gamma_2)$ faz com a vertical (latitude) e o ângulo que a projeção horizontal do vetor $p(t_0, \gamma_1, \gamma_2)$ faz com o plano y = 0 (longitude). Para visualizar as condições de fonte pontual, veja a Figura 2.1.

O Jacobiano tem como valor inicial

$$\mathcal{J}(\ell_0,\gamma_1,\gamma_2) = \lambda \det \left[\boldsymbol{p}(\ell_0,\gamma_1,\gamma_2), \, \boldsymbol{u}(\ell_0,\gamma_1,\gamma_2), \, \bar{\boldsymbol{u}}(\ell_0,\gamma_1,\gamma_2) \right] = 0. \tag{2.33}$$

Por outro lado, como a fonte pontual representa uma "explosão", isto significa dizer que $A(\ell_0)$ vale "infinito". Observando a fórmula para amplitude, vê-se que há uma indeterminação do tipo " $0 \times \infty$ ". Para resolver este problema, considera-se uma esfera infinitesimal com centro em x_0 , de modo que no seu interior o meio seja homogêneo, isto é, $c(x) = c_0$ constante.



Figura 2.1: Conições iniciais para o raio Λ (em vermelho): à esquerda, fonte pontual, e à direita, refletor explosivo.

Assim, para $d\ell$ suficientemente pequeno, de modo que $\boldsymbol{x}(\ell + \delta\ell, \gamma_1, \gamma_2)$ esteja no interior da esfera, pode-se usar aproximação de Taylor de primeira ordem

$$\boldsymbol{x}(\ell_0 + \delta \ell, \gamma_1, \gamma_2) \approx \boldsymbol{x}(\ell_0, \gamma_1, \gamma_2) + \frac{d\boldsymbol{x}}{d\ell} \,\delta \ell = \boldsymbol{x}_0 + \lambda_0 \boldsymbol{p}_0 \,\delta \ell, \quad (2.34)$$

onde foram usadas as equações (2.32a) e (2.9a). Com a definição (2.11), pode-se computar diretamente o Jacobiano

$$\mathcal{J}(\ell_0 + \delta \ell) \approx \lambda_0^3 \eta_0^3 \sin \gamma_1 \, \delta \ell^2.$$
(2.35)

Por outro lado, pode-se tomar $A(\ell_0 + \delta \ell)$ como sendo a amplitude da função de Green 3D no interior da esfera, isto é,

$$A(\ell_0 + d\ell) \approx \frac{1}{4\pi \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|} = \frac{1}{4\pi \lambda_0 \eta_0 \,\delta\ell},$$
(2.36)

onde foi usada a equação (2.34).

Portanto, pode-se combinar as duas equações acima, obtendo

$$A(\ell_0 + \delta \ell) \sqrt{\mathcal{J}(\ell_0 + \delta \ell)} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\lambda_0 \eta_0 \sin \gamma_1}.$$
 (2.37)

Como o lado direito não depende de $d\ell$, pode-se tomar o limite quando $\delta\ell \rightarrow 0$, obtendo-se

$$A(\ell_0)\sqrt{\mathcal{J}(\ell_0)} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\lambda_0\eta_0\sin\gamma_1},$$
(2.38)

Substituido a expressão acima na fórmula para a amplitude, chega-se a

$$A(\ell) = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\lambda(\ell) \sin \gamma_1}{c_0 \mathcal{J}(\ell)}}.$$
(2.39)

2.6.2 Condições de refletor explosivo

Suponha que se conheça uma superfície no espaço que representa uma frente de onda para um dado τ_0 . Com as condições iniciais de refletor explosivo é possível, portanto, dar continuidade à propagação desta frente de onda com traçamento de raios.

Uma outra maneira de visualizar este problema, é considerar que a frente de onda dada é um refletor a ser explodido em $\tau = \tau_0$, cuja definição é dada por

$$\Sigma = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\phi}(\gamma_1, \gamma_2) \right\}, \qquad (2.40)$$

onde $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é a função que parametriza o refletor. Veja a Figura 2.1.

As condições iniciais para um refletor explosivo são

$$\boldsymbol{x}(\tau_0, \gamma_1, \gamma_2) = \boldsymbol{\phi}(\gamma_1, \gamma_2), \qquad (2.41a)$$

$$\boldsymbol{p}(\tau_0, \gamma_1, \gamma_2) = \epsilon \eta_0(\gamma_1, \gamma_2) \boldsymbol{\nu}(\gamma_1, \gamma_2), \qquad (2.41b)$$

$$\boldsymbol{u}(\tau_0, \gamma_1, \gamma_2) = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\gamma_1, \gamma_2)}{\partial \gamma_1}, \qquad (2.41c)$$

$$\bar{\boldsymbol{u}}(\tau_0, \gamma_1, \gamma_2) = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}(\gamma_1, \gamma_2)}{\partial \gamma_2},$$
 (2.41d)

$$\boldsymbol{v}(\tau_0,\gamma_1,\gamma_2) = \epsilon \frac{\partial}{\partial \gamma_1} \big[\eta_0(\gamma_1,\gamma_2) \boldsymbol{\nu}(\gamma_1,\gamma_2) \big], \qquad (2.41e)$$

$$\bar{\boldsymbol{v}}(\tau_0, \gamma_1, \gamma_2) = \epsilon \frac{\partial}{\partial \gamma_2} [\eta_0(\gamma_1, \gamma_2) \boldsymbol{\nu}(\gamma_1, \gamma_2)]. \qquad (2.41f)$$

onde, ϵ vale -1 ou 1, dependendo para qual lado a propagação da frente de onda vai ser iniciada. Aqui, $\eta_0(\gamma_1, \gamma_2) = 1/c(\phi(\gamma_1, \gamma_2))$ e ν é o vetor normal unitário ao refletor, isto é,

$$\boldsymbol{\nu}(\gamma_1, \gamma_2) = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \gamma_1} \times \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \gamma_2}\right] / \left\|\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \gamma_1} \times \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \gamma_2}\right\|, \qquad (2.42)$$

onde \times denota o produto vetorial.

O valor inicial para o Jacobiano, neste caso, é

$$\mathcal{J}(\tau_{0},\gamma_{1},\gamma_{2}) = \det \left[\boldsymbol{p}(\tau_{0},\gamma_{1},\gamma_{2}), \boldsymbol{u}(\tau_{0},\gamma_{1},\gamma_{2}), \bar{\boldsymbol{u}}(\tau_{0},\gamma_{1},\gamma_{2}) \right]$$

$$= \epsilon \det \left[\eta_{0}(\gamma_{1},\gamma_{2})\boldsymbol{\nu}(\gamma_{1},\gamma_{2}), \frac{\partial \boldsymbol{\phi}(\gamma_{1},\gamma_{2})}{\partial \gamma_{1}}, \frac{\partial \boldsymbol{\phi}(\gamma_{1},\gamma_{2})}{\partial \gamma_{2}} \right]$$

$$= \epsilon \eta_{0}(\gamma_{1},\gamma_{2}) \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \gamma_{1}} \times \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \gamma_{2}} \right\|.$$
(2.43)

Assumindo que $A(\tau_0, \gamma_1, \gamma_2) = 1$, para todo $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, então a fórmula para amplitude fica

$$A(\tau) = \frac{c(\tau)}{c_0} \sqrt{\frac{\eta_0}{\mathcal{J}(\tau)}} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial \gamma_1} \times \frac{\partial \phi}{\partial \gamma_2} \right\|^{1/2}.$$
 (2.44)

2.7 EQUAÇÕES DO RAIO 2D E MODELO 2.5D

Quando se considera o meio bidimensional, isto é, quando os parâmetros são definidos em apenas duas direções, pode-se reduzir o esforço de se computar todas as quantidades em três dimensões. O problema bidimensional, do ponto de vista tridimensional, pode ser considerado uma aplicação de simetria cilíndrica em todas as quantidades estudadas do um problema tridimensional. Por exemplo, uma quantidade bidimensional $a_2(x_1, x_3)$ pode ser entendida como uma quantidade tridimensional $a_3(x_1, x_2, x_3)$ que possui a simetria

$$a_2(x_1, x_3) = a_3(x_1, x_2, x_3)$$
 para todo $x_2 \in \mathbb{R}$.

Como esta observação é válida para todas as quantidades envolvidas no problema bidimensional, em particular, uma fonte pontual 2D equivale a uma fonte em linha no meio 3D (veja a Figura 2.2).



Figura 2.2: A figura à esquerda representa o modelo tridimensional para uma fonte pontual. A figura à direita representa o modelo bidimensional, em que o meio é bidimensional e a fonte é uma linha infinita na direção da simetria.

A distribuição de velocidades é dada por

$$c \equiv c(x_1, x_3). \tag{2.45}$$

Portanto, para o problema bidimensional, as equações do raio se reduzem a

$$\frac{dx}{d\ell} = \lambda p, \qquad \qquad \frac{dp}{d\ell} = \lambda \eta \nabla \eta, \qquad (2.46a)$$

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{d\ell} = \lambda \boldsymbol{v} + (\nabla \lambda \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{p}, \qquad \qquad \frac{d\boldsymbol{v}}{d\ell} = \left[\nabla \eta \nabla (\lambda \eta)^T + \lambda \eta \nabla^2 \eta\right] \boldsymbol{u}, \qquad (2.46b)$$

onde os vetores $x, p, u \in v$ e os operadores $\nabla \in \nabla^2$ são todos bidimensionais.

2.7.1 O modelo 2.5D

Quando se considera que o levantamento sísmico está sobre uma linha reta, em geral na superfície da Terra, então naturalmente espera-se que a maioria dos eventos sísmicos registrados estejam no plano vertical que contém a linha sísmica. Sendo assim, uma simplificação é considerar que todos os eventos sejam gerados e propagados neste plano vertical. Essa hipótese equivale a representar toda a subsuperfície através de um plano seccional vertical, fazendo com que não haja variação dos parâmetros que descrevem o meio na direção ortogonal a este plano. De fato, este modelo de representação do meio é bidimensional, entretanto, é desejável que se mantenha a característica de propagação tridimensional neste modelo.

A junção desta duas características, isto é, representação bidimensional do meio com propagação de ondas tridimensional é a definição de um modelo 2.5-dimensional. Para facilitar, considera-se que o plano vertical que representa o meio e que contém a linha sísmica é o plano $x_2 = 0$.

Vale ressaltar que o modelo 2.5D é, de fato, um problema tridimensional, pois, apesar de quase todas as quantidades serem bidimensionais, a fonte, por sua vez, é 3D e está confinada ao plano vertical $x_2 = 0$. Esta condição quebra a simetria, evitando que o problema seja tratado como bidimensional.

Sob a hipótese do modelo 2.5D, ao analisar a equação (2.9b), para a segunda componente do vetor vagarosidade, chega-se a

$$\frac{dp_2}{d\ell} = \lambda \eta(x_1, x_3) \frac{\partial \eta(x_1, x_3)}{\partial x_2} = 0, \qquad (2.47)$$

onde $\eta = 1/c(x_1, x_3)$. Isto significa que p_2 é constante ao longo do raio, isto é, $p_2(\ell, \gamma_1, \gamma_2) = p_2(\ell_0, \gamma_1, \gamma_2)$, para todo $\ell \ge \ell_0$. Usando a equação (2.9a), conclui-se que

$$x_2(\ell, \gamma_1, \gamma_2) = \lambda \, \ell \, p_2(\ell_0, \gamma_1, \gamma_2) + x_2(\ell_0, \gamma_1, \gamma_2).$$
(2.48)



Figura 2.3: A representação do modelo 2.5D, onde meio é 2D, mas a fonte é 3D e está confinada ao plano de simetria $x_2 = 0$, onde são registrados os eventos sísmicos. Em (a) está representada uma fonte pontual e em (b) está representado um "refletor explosivo". O modelo 2.5D é, de fato, um modelo de propagação de ondas 3D, porém um plano de simetria 2D pode ser escolhido para representar os eventos.

Para que o raio fique confinado ao plano $x_2 = 0$, isto é, $x_2(\ell, \gamma_1, \gamma_2) = 0$ para todo $\ell > \ell_0$, basta impor esta condição na expressão acima, isto é,

$$0 = \lambda \ell p_2(\ell_0, \gamma_1, \gamma_2) + x_2(\ell_0, \gamma_1, \gamma_2), \quad \text{para todo } \ell > \ell_0.$$
 (2.49)

Para que a equação acima seja satisfeita, são necessárias condições adicionais. Sabendo que a fonte está necessariamente no plano $x_2 = 0$, isto é,

$$x_2(\ell_0, \gamma_1, \gamma_2) = 0, \tag{2.50}$$

então chega-se a

$$0 = \lambda \, \ell \, p_2(\ell_0, \gamma_1, \gamma_2). \tag{2.51}$$

Por outro lado, usando as condições iniciais de fonte pontual (2.32),

$$p_2(\ell, \gamma_1, \gamma_2) = p_2(\ell_0, \gamma_1, \gamma_2) = \eta(\boldsymbol{x}_0) \sin \gamma_1 \sin \gamma_2, \qquad (2.52)$$

implicando que a condição para que o raio fique confinado ao plano $x_2 = 0$, para quaisquer $\ell e \gamma_1$, seja

Sob a premissa do modelo 2.5D, há ainda a simplificação no cálculo do Jacobiano no plano $x_2 = 0$. Computando a segunda linha da matriz Jacobiana, chega-se a

$$\frac{\partial x_2}{\partial \ell}\Big|_{\gamma_2=0} = \lambda \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \Big|_{\gamma_2=0} = 0$$
 (2.54a)

$$\frac{\partial x_2}{\partial \gamma_1}\Big|_{\gamma_2=0} = \lambda \,\ell \,\cos\gamma_1 \,\sin\gamma_2\Big|_{\gamma_2=0} = 0$$
(2.54b)

$$\frac{\partial x_2}{\partial \gamma_2}\Big|_{\gamma_2=0} = \lambda \,\ell \,\sin\gamma_1 \,\cos\gamma_2\Big|_{\gamma_2=0} = \lambda \,\ell \,\sin\gamma_1 \tag{2.54c}$$

Portanto, o Jacobiano para a situação 2.5D pode ser definido como

$$\mathcal{J}_{2.5}(\ell,\gamma_1) = \lambda \,\ell \,\sin\gamma_1 \,\det\left[\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \ell}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \gamma_1}\right] = \lambda \,\ell \,\sin\gamma_1 \,\mathcal{J}_2(\ell,\gamma_1), \tag{2.55}$$

onde foi usada a redefinição dos vetor $x = (x_1, x_3)$. Portanto, as expressões para o Jacobiano 2.5D nas três parametrizações são:

$$\mathcal{J}_{2.5}(\sigma,\gamma_1) = \sigma \sin \gamma_1 \, \mathcal{J}_2(\sigma,\gamma_1), \qquad (2.56a)$$

$$\mathcal{J}_{2.5}(s,\gamma_1) = c(s)s\,\sin\gamma_1\,\mathcal{J}_2(s,\gamma_1), \qquad (2.56b)$$

$$\mathcal{J}_{2.5}(\tau,\gamma_1) = c(\tau)^2 \tau \sin \gamma_1 \mathcal{J}_2(\tau,\gamma_1), \qquad (2.56c)$$

onde o fator σ é chamado de fator de espalhamento geométrico fora-do-plano. Para computá-lo basta computar a solução de uma das EDO's (dependendo da parametrização)

$$\frac{d\sigma(s)}{ds} = c(s) \quad \text{ou} \quad \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} = c(\tau)^2.$$
(2.57)

2.7.2 Condições iniciais 2D

As condições iniciais também devem ser adaptadas ao problema 2.5D. No caso das condições iniciais de fonte pontual, esta adaptação se faz naturalmente. Entretanto, quando se considera as condições iniciais de refletor explosivo restritas ao modelo 2.5D, ocorre uma redundância que proporciona a criação de uma nova condição inicial, chamada condição de linha "explosiva".

Vale lembrar ainda que a parte cinemática do problema 2.5D é idêntica ao problema 2D, isto é, tanto as trajetórias dos raios quanto o traçado das frentes de onda são os mesmos nos dois problemas. Portanto, a distinção entre condições se dá através dos vetores dinâmicos u e v e conseqüentemente no jacobiano.

No que se segue, não são considerados os vetores $\bar{u} \in \bar{v}$ e assume-se todos os outros vetores dependem de $\ell \in \gamma = \gamma_1$, apenas por economia de notação.

Condições de fonte pontual

As condições de fonte pontual 2D são obtidas através das própias condições iniciais de fonte pontual 3D. Neste caso basta aplicar $\gamma_2 = 0$ às equações (2.32a)–(2.32c), (2.32e) e (2.32g), para chegar a

$$\boldsymbol{x}(\ell_0,\gamma) = \boldsymbol{x}_0, \qquad \boldsymbol{p}(\ell_0,\gamma) = \eta_0(\sin\gamma,\cos\gamma)^T, \qquad (2.58a)$$

$$\boldsymbol{u}(\ell_0,\gamma) = 0,$$
 $\boldsymbol{v}(\ell_0,\gamma) = \eta_0(\cos\gamma,-\sin\gamma)^T,$ (2.58b)

$$\tau(\ell_0, \gamma) = \tau_0, \tag{2.58c}$$

onde $\eta_0 = 1/c(x_0)$. Neste caso o parâmetro transversal γ pode ser interpretado como o ângulo que o vetor $p(\ell_0, \gamma)$ faz com a vertical.

O Jacobiano bidimensional tem como valor inicial

$$\mathcal{J}_2(\ell_0,\gamma) = \lambda_0 \det \left[\boldsymbol{p}(\ell_0,\gamma), \, \boldsymbol{u}(\ell_0,\gamma) \right] = 0, \qquad (2.59)$$

fazendo com que o Jacobiano 2.5-dimensional seja $\mathcal{J}_{2.5}(\ell_0, \gamma) = 0.$

Condições de refletor explosivo

Considere que o refletor a ser "explodido" tem a seguinte definição

$$\Sigma = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = \phi_1(\gamma); \, x_3 = \phi_3(\gamma), x_2 = \phi_2(\gamma_2) = \gamma_2, \, \gamma_2 \in \mathbb{R} \} \,,$$
(2.60)

onde $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Portanto, Σ possui uma simetria cilíndrica, isto é, o refletor não apresenta variação para γ fixo, com γ_2 variando. Isto quer dizer que, a derivada parcial de ϕ com relação a γ_2 é o vetor constante

$$\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \gamma_2} = (0, 1, 0)^T.$$

Usando a equação (), conclui-se que o vetor normal ao refletor é

$$\boldsymbol{\nu}(\gamma) = (-\phi'_3, \, 0, \, \phi'_1)^T,$$

onde (') representa a derivação com relação a γ . Sendo assim, escolhendo $\gamma_2 = 0$ o raio fica confinado ao plano $x_2 = 0$.

Portanto, as condições iniciais de refletor explosivo para o caso 2.5D são

$$\boldsymbol{x}(\tau_0,\gamma) = \boldsymbol{\phi}(\gamma), \qquad \boldsymbol{p}(\tau_0,\gamma) = \epsilon \eta_0(\gamma) \boldsymbol{\nu}(\gamma), \qquad (2.61a)$$

$$\boldsymbol{u}(\tau_0,\gamma) = \boldsymbol{\phi}'(\gamma), \qquad \boldsymbol{v}(\tau_0,\gamma) = \epsilon \left[\eta_0'(\gamma) \,\boldsymbol{\nu}(\gamma) - \eta_0(\gamma)\kappa(\gamma)\boldsymbol{\phi}'(\gamma)\right]. \tag{2.61b}$$

Aqui, $\eta_0(\gamma) = 1/c(\boldsymbol{\phi}(\gamma)), \boldsymbol{\nu}$ é o vetor normal unitário ao refletor

$$\boldsymbol{\nu}(\gamma) = \frac{(-\phi'_3, \phi'_1)^T}{\|\boldsymbol{\phi}'\|}$$
(2.62)

e $\kappa(\gamma)$ é a curvatura do refletor no plano $x_2 = 0$

$$\kappa(\gamma) = \frac{-\phi_1''\phi_3' + \phi_1'\phi_3''}{\|\phi'\|^3}.$$
(2.63)

Neste caso o Jacobiano bidimensional tem o seguinte valor inicial

$$\mathcal{J}_{2}(\tau_{0},\gamma) = c_{0}(\gamma)^{2} \det \left[\boldsymbol{p}(\tau_{0},\gamma), \, \boldsymbol{u}(\tau_{0},\gamma) \right] = \epsilon c_{0}(\gamma)^{2} \det \left[\eta_{0}(\gamma)\boldsymbol{\nu}(\gamma), \, \boldsymbol{\phi}'(\gamma) \right]$$

$$= -\epsilon c_{0}(\gamma) \|\boldsymbol{\phi}'(\gamma)\|, \qquad (2.64)$$

fazendo com que o Jacobiano 2.5-dimensional seja

$$\mathcal{J}_{2.5}(\tau_0, \gamma) = -\epsilon \,\tau c_0(\gamma)^3 \sin \gamma \, \| \boldsymbol{\phi}'(\gamma) \|. \tag{2.65}$$

Aqui ϵ vale -1 ou 1, determinando a direção para onde o refletor é propagado.

Condições mistas

Pode-se combinar as condições de fonte pontual com as condições de refletor explosivo. Para isto, basta impor que cada ponto ao longo do refletor se comporte como uma fonte pontual. Isto equivale a exigir que o vetor u seja nulo em $\tau = \tau_0$. Portanto as condições inicias mistas são

$$\boldsymbol{x}(\tau_0,\gamma) = \boldsymbol{\phi}(\gamma), \qquad \boldsymbol{p}(\tau_0,\gamma) = -\eta_0(\gamma)\,\hat{\boldsymbol{n}}(\gamma), \qquad (2.66a)$$

$$\boldsymbol{u}(\tau_0,\gamma) = 0, \qquad \boldsymbol{v}(\tau_0,\gamma) = -\eta_0'(\gamma)\,\boldsymbol{\nu}(\gamma) + \eta_0(\gamma)\kappa(\gamma)\boldsymbol{\phi}'(\gamma), \qquad (2.66b)$$

$$\tau(\tau_0, \gamma) = \tau_0, \qquad \qquad \mathcal{J}_2(\tau_0, \gamma) = 0.$$
 (2.66c)

Tanto as condições de refletor explosivo quanto as condições mistas produzem a mesma trajetória do raio. No entanto, cada condição irá gerar diferentes valores para o Jacobiano ao longo das frentes de onda.

2.8 EXEMPLOS

Os exemplos que são mostrados a seguir são aplicações da teoria dos raios para casos particulares de distribuição de velocidade do meio, na situação do modelo 2.5D. Em todos eles, a escolha feita para λ é

$$\lambda = c(\boldsymbol{x})^2,$$

fazendo com que a parametrização seja no tempo de trânsito, isto é, $\ell = \tau$.

2.8.1 Meio com velocidade constante

O meio com velocidade constante é a primeira aproximação do campo de velocidades. Além disso, é possível achar as soluções analíticas para todas as quantidades do raio.

Neste caso considera-se que o campo de velocidade é constante, isto é,

$$c(x,z) = c_0.$$
 (2.67)

Como a velocidade é constante, pela equação (2.29b), observa-se que o vetor vagarosidade p



Figura 2.4: Raios (linhas pontilhadas) e frentes de onda (linhas cheias) para meio homogêneo com condições iniciais de fonte pontual (a) e refletor exposivo (b).

também é constante ao longo do raio

$$\boldsymbol{p}(\tau,\gamma) = \boldsymbol{p}(\tau_0,\gamma) \equiv \boldsymbol{p}_0(\gamma). \tag{2.68}$$
Usando essa informação na equação (2.29a), conclui-se que o raio é uma linha reta, (veja Figura 2.4), isto é, para γ fixo, tem-se que

$$\boldsymbol{x}(\tau,\gamma) = c_0^2 \tau \, \boldsymbol{p}_0(\gamma) + \boldsymbol{x}_0(\gamma), \qquad (2.69)$$

onde $\boldsymbol{x}_0(\gamma) \equiv \boldsymbol{x}(\tau_0, \gamma).$

Além disso, pelas sua própria definição, v deve ser constante com relação a τ , isto é,

$$\boldsymbol{v}(\tau,\gamma) = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \gamma} = \frac{\partial \boldsymbol{p}_0}{\partial \gamma} \equiv \boldsymbol{v}_0(\gamma),$$
 (2.70)

onde $v_0(\gamma) = v(\tau_0, \gamma)$. Por outro lado, o vetor u também pode ser calculado diretamente através da equação (2.19). Sendo assim,

$$\boldsymbol{u}(\tau,\gamma) = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \gamma} = c_0^2 \tau \, \frac{d\boldsymbol{p}_0}{d\gamma} + \frac{d\boldsymbol{x}_0}{d\gamma} = c_0^2 \tau \, \boldsymbol{v}_0(\gamma) + \boldsymbol{u}_0(\gamma), \qquad (2.71)$$

onde $\boldsymbol{u}_0(\gamma) = \boldsymbol{u}(\tau_0, \gamma)$. Neste caso, o Jacobiano tem a seguinte expressão

$$\mathcal{J}_2(\tau,\gamma) = c_0^2 \det \left[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}\right] = c_0^4 \tau \det \left[\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{v}_0\right] + c_0^2 \det \left[\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{u}_0\right].$$
(2.72)

E o fator σ é igual a

$$\sigma(\tau) = c_0^2 \tau, \tag{2.73}$$

fazendo com que o Jacobiano 2.5-dimensional seja dado por

$$\mathcal{J}_{2.5}(\tau,\gamma) = \sigma \sin \gamma \, \mathcal{J}_2(\tau,\gamma) = c_0^4 \tau \sin \gamma \left[c_0^2 \tau \, \det \left[\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{v}_0 \right] + \det \left[\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{u}_0 \right] \right].$$
(2.74)

A) Fonte pontual - Caso as condições iniciais de fonte pontual sejam impostas, isto é,

$$\boldsymbol{x}_0(\gamma_1) = \boldsymbol{x}_s, \qquad (2.75a)$$

$$\boldsymbol{p}_0(\gamma_1) = \eta_0 (\sin \gamma, \cos \gamma)^T, \qquad (2.75b)$$

então as condições iniciais para u e v são

$$\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{\gamma}_1) = \boldsymbol{0} \tag{2.75c}$$

$$\boldsymbol{v}_0(\gamma_1) = \eta_0 \left(\cos\gamma, -\sin\gamma\right)^T. \tag{2.75d}$$

onde $\eta_0 = 1/c_0$.

Portanto a solução para as equações do raio são os vetores

$$\boldsymbol{x}(\tau,\gamma) = c_0^2 \tau \, \boldsymbol{p}_0(\gamma) + \boldsymbol{x}_s, \qquad (2.76a)$$

$$\boldsymbol{p}(\tau,\gamma) = \boldsymbol{p}_0(\gamma), \qquad (2.76b)$$

$$\boldsymbol{u}(\tau,\gamma) = c_0^2 \tau \, \boldsymbol{v}_0(\gamma), \qquad (2.76c)$$

$$\boldsymbol{v}(\tau,\gamma) = \boldsymbol{v}_0(\gamma),$$
 (2.76d)

o Jacobiano 2D assume a expressão

$$\mathcal{J}_2(\tau,\gamma) = c_0 \tau \tag{2.77}$$

e o Jacobiano 2.5D é dado por

$$\mathcal{J}_{2.5}(\tau,\gamma) = c_0^3 \tau^2 \sin \gamma.$$
 (2.78)

B) Refletor explosivo - Caso condições de refletor explosivo sejam consideradas, isto é,

$$\boldsymbol{x}_0(\gamma) = \boldsymbol{\phi}(\gamma) \tag{2.79}$$

$$\boldsymbol{p}_0(\boldsymbol{\gamma}) = -\eta_0 \, \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\gamma}), \qquad (2.80)$$

onde $oldsymbol{
u}(\gamma)$ é o vetor normal unitário em cada ponto do refletor, isto é

$$\nu(\gamma) = (-\phi'_3, \phi'_1) / ||\phi'||.$$
(2.81)

Os valores iniciais para os vetores u e v são

$$\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{0} \tag{2.82}$$

$$\boldsymbol{v}_0(\gamma) = -\eta_0 \, \boldsymbol{\nu}'(\gamma) = \eta_0 \kappa(\gamma) \, \boldsymbol{\phi}'(\gamma). \tag{2.83}$$

Portanto a solução das equações do raio são

$$\boldsymbol{x}(\tau,\gamma) = -c_0 \tau \, \boldsymbol{\nu}(\gamma) + \boldsymbol{\phi}(\gamma), \qquad (2.84a)$$

$$\boldsymbol{p}(\tau,\gamma) = -\eta_0 \, \boldsymbol{\nu}(\gamma), \qquad (2.84b)$$

$$\boldsymbol{u}(\tau,\gamma) = [c_0\tau\kappa(\gamma)+1]\boldsymbol{\phi}'(\gamma), \qquad (2.84c)$$

$$\boldsymbol{v}(\tau,\gamma) = \eta_0 \kappa(\gamma) \, \boldsymbol{\phi}'(\gamma) \tag{2.84d}$$

e o Jacobiano do raio 2D assume a expressão

$$\mathcal{J}_{2}(\tau,\gamma) = c_{0}^{2} \det \left[\boldsymbol{p},\boldsymbol{u}\right] = -\left[\tau\kappa(\gamma) + \eta_{0}\right] \det \left[\boldsymbol{\nu}(\gamma),\boldsymbol{\phi}'(\gamma)\right]$$
$$= \left[\tau\kappa(\gamma) + \eta_{0}\right] \|\boldsymbol{\phi}'(\gamma)\|.$$
(2.85)

e o Jacobiano 2.5D é dado por

$$\mathcal{J}_{2.5}(\tau,\gamma) = c_0^2 \tau \sin \gamma \left[\tau \kappa(\gamma) + \eta_0\right] \|\boldsymbol{\phi}'(\gamma)\|.$$
(2.86)

2.8.2 Meio com velocidade dependente da profundidade

Na sísmica de reflexão, uma razoável aproximação para o campo de velocidades é considerá-lo dependente somente da profundidade, representada pela variável z. Esta premissa torna possível a obtenção de soluções semi-analíticas, que podem ser computadas numericamente através de quadraturas.

Neste caso considera-se que o campo de velocidade tem a expressão

$$c(x,z) \equiv c(z), \tag{2.87}$$

onde, por economia de notação, assume-se $x = x_1$ e $z = x_3$.

Uma maneira de encontrar solução para este caso é escolher como parametrização do raio a própria profundidade, isto é, todas as quantidades, x, τ , p_1 e p_3 , devem ficar em função de z. Sendo assim, deve-se recomputar as equações do raio, usando z como parâmetro

$$\frac{dx}{dz} = \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dz} = c^2 p_1 \frac{1}{c^2 p_3} = \frac{p_1}{p_3},$$
(2.88a)

$$\frac{dp_1}{dz} = \frac{dp_1}{d\tau}\frac{d\tau}{dz} = c^2\eta\,\nabla\!\eta\frac{1}{c^2p_3} = 0,$$
(2.88b)

onde $\eta=\eta(z)=1/c(z))$ e

$$\frac{d\tau}{dz} = \frac{\eta^2}{p_3}.$$
 (2.88c)

$$\frac{d\sigma}{dz} = \frac{1}{p_3}.$$
 (2.88d)

Pela equação (2.88b), observa-se que p_1 é constante para γ fixo, isto é, p_1 é igual ao seu valor inicial em $z = z_0$,

$$p_1(z,\gamma) = p_1(z_0,\gamma).$$
 (2.89)

Por outro lado, usando a própria equação iconal (2.6b), obtém-se a expressão para p_3

$$p_3(z,\gamma) = \epsilon \left[\eta(z)^2 - p_1(z_0,\gamma)^2 \right]^{1/2}, \qquad (2.90)$$

onde ϵ vale -1 ou 1 dependendo do problema. Para raios que propagam para baixo, escolhe-se $\epsilon = 1$, caso contrário assume-se $\epsilon = -1$. Sem perda de generalidade, deste ponto em diante assume-se $\epsilon = 1$.

Integrando as novas equações do raio (2.88a), (2.88c) e (2.88d), obtém-se as soluções para x, $\tau \in \sigma$:

$$x(z,\gamma) = x_0(\gamma) + \int_{z_0}^{z} \frac{p_1(z_0,\gamma)}{p_3(\zeta,\gamma)} d\zeta$$
 (2.91)

$$\tau(z,\gamma) = \tau_0(\gamma) + \int_{z_0}^z \frac{\eta(\zeta)^2}{p_3(\zeta,\gamma)} d\zeta$$
(2.92)

$$\sigma(z,\gamma) = \sigma_0(\gamma) + \int_{z_0}^z \frac{1}{p_3(\zeta,\gamma)} d\zeta$$
(2.93)

onde $x_0(\gamma) = x(z_0, \gamma), \tau_0(\gamma) = \tau(z_0, \gamma)$ e $p_3(\zeta, \gamma)$ é dado por (2.90).

Com relação às quantidades dinâmicas, observa-se pela equação (2.46b) que v_1 também é constante ao longo do raio

$$v_1(z,\gamma) = v_1(z_0,\gamma).$$
 (2.94)

Além disso v_3 pode ser diretamente computado pela equação (2.90)

$$v_{3}(z,\gamma) = \frac{\partial p_{3}(\zeta,\gamma)}{\partial \gamma} = \frac{-p_{1}(z_{0},\gamma)p_{1}'(z_{0},\gamma)}{p_{3}(\zeta,\gamma)} = \frac{-p_{1}(z_{0},\gamma)v_{1}(z_{0},\gamma)}{p_{3}(\zeta,\gamma)}.$$
 (2.95)

Por outro lado, a quantidade u_1 também pode ser computada diretamente pela equação (2.91),

$$u_1(z,\gamma) = \frac{\partial x(z,\gamma)}{\partial \gamma} = u_1(z_0,\gamma) + \int_{z_0}^{z} \left(\frac{\partial p_1}{\partial \gamma} p_3 - p_1 \frac{\partial p_3}{\partial \gamma}\right) \frac{1}{p_3^2} d\zeta.$$
(2.96)

Sabendo que $v_1 = \partial p_1 / \partial \gamma$ e usando a equação (2.95), chega-se a

$$u_{1}(z,\gamma) = u_{1}(z_{0},\gamma) + \int_{z_{0}}^{z} \left(v_{1} p_{3} + \frac{p_{1}^{2} v_{1}}{p_{3}}\right) \frac{1}{p_{3}^{2}} d\zeta$$

$$= u_{1}(z_{0},\gamma) + v_{1}(z_{0},\gamma) \int_{z_{0}}^{z} \frac{p_{3}^{2} + p_{1}^{2}}{p_{3}^{3}} d\zeta$$

$$= u_{1}(z_{0},\gamma) + v_{1}(z_{0},\gamma) \int_{z_{0}}^{z} \frac{\eta(\zeta)^{2}}{p_{3}(\zeta,\gamma)^{3}} d\zeta.$$
(2.97)

O Jacobiano $\mathcal{J}_2(z,\gamma)$ assume a seguinte expressão

$$\mathcal{J}_{2}(z,\gamma) = \det\left[\frac{d\boldsymbol{x}}{dz},\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\gamma}\right] = \det\left[\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau}\frac{d\tau}{dz},\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\gamma}\right] = \frac{d\tau}{dz}\det\left[\frac{d\boldsymbol{x}}{dz},\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\gamma}\right] \\ = \frac{d\tau}{dz}\det\left[\frac{d\boldsymbol{x}}{dz},\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\gamma}\right] = \frac{1}{p_{3}(z,\gamma)}\det\left[\frac{d\boldsymbol{x}}{dz},\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\gamma}\right].$$
(2.98)

Como $\partial z/\partial \gamma = 0$, pois z e γ são parâmetros independentes, o Jacobiano fica como

$$\mathcal{J}_2(z,\gamma) = -\frac{1}{p_3(z,\gamma)} \frac{\partial x(z,\gamma)}{\partial \gamma} = -\frac{u_1(z,\gamma)}{p_3(z,\gamma)}.$$
(2.99)

Utilizando a equação (2.97), o Jacobiano assume a expressão

$$\mathcal{J}_2(z,\gamma) = -\frac{1}{p_3(z,\gamma)} \left[u_1(z_0,\gamma) + v_1(z_0,\gamma) \int_{z_0}^z \frac{\eta(\zeta)^2}{p_3(\zeta,\gamma)^3} d\zeta \right].$$
 (2.100)

A) Fonte pontual - Caso as condições iniciais de fonte pontual sejam impostas, isto é,

$$\boldsymbol{x}(z_0, \gamma) = (x_0, z_0)^T,$$
 (2.101a)

$$\boldsymbol{p}(z_0,\gamma) = \eta_0 (\sin\gamma,\,\cos\gamma)^T, \qquad (2.101b)$$

então as condições iniciais para u e v são

$$u(z_0, \gamma) = 0,$$
 (2.101c)

$$\boldsymbol{v}(z_0,\gamma) = \eta_0 \left(\cos\gamma, -\sin\gamma\right)^T, \qquad (2.101d)$$

onde $\eta_0 = 1/c(x_0, z_0)$.

Neste caso o Jacobiano bidimensional é

$$\mathcal{J}_{2}(z,\gamma) = -\frac{\eta_{0}\cos\gamma}{p_{3}(z,\gamma)} \int_{z_{0}}^{z} \frac{\eta(\zeta)^{2}}{p_{3}(\zeta,\gamma)^{3}} d\zeta, \qquad (2.102)$$

onde $p_3(z, \gamma) = \epsilon [\eta(z)^2 - (\eta_0 \sin \gamma)^2]^{1/2}$.

B) Refletor explosivo - Caso condições de refletor explosivo sejam tomadas, isto é,

$$\boldsymbol{x}(z_0, \gamma) = \boldsymbol{\phi}(\gamma) \tag{2.103a}$$

$$\boldsymbol{p}(z_0,\gamma) = -\eta_0(\gamma) \,\boldsymbol{\nu}(\gamma), \qquad (2.103b)$$

onde $\boldsymbol{\nu}(\gamma)$ é o vetor normal unitário em cada ponto do refletor, Os valores iniciais para os vetores \boldsymbol{u} e \boldsymbol{v} são

$$\boldsymbol{u}(z_0,\gamma) = \boldsymbol{\phi}'(\gamma) \tag{2.104a}$$

$$\boldsymbol{v}(z_0,\gamma) = -\eta_0 \, \boldsymbol{\nu}'(\gamma) = \eta_0 \kappa(\gamma) \, \boldsymbol{\phi}'(\gamma). \tag{2.104b}$$

O Jacobiano do raio é

$$\mathcal{J}_{2}(z,\gamma) = -\frac{1}{p_{3}(z,\gamma)} \left\{ \phi_{1}'(\gamma) - \left[\eta_{0}'(\gamma)\phi_{3}'(\gamma) + \eta_{0}(\gamma)\kappa(\gamma)\phi_{1}'(\gamma) \right] \int_{\phi_{3}(\gamma)}^{z} \frac{\eta(\zeta)^{2}}{p_{3}(\zeta,\gamma)^{3}} d\zeta \right\}, \quad (2.105)$$

onde $\eta_{0}(\gamma) = \eta(\boldsymbol{\phi}(\gamma)).$

2.8.3 Meio com velocidade dependendo linearmente da profundidade

Na sísmica de reflexão, sabe-se por experiência empírica que, em geral, as velocidades das rochas que formam as camadas da Terra aumentam com a profundidade. Aliado a este fato, para um modelo que represente o campo de velocidades com a propriedade de ser afim na profundidade, ainda é possível obter fórmulas fechadas para as quantidades do raio. Por estas razões, o meio afim na profundidade é consideração como uma aproximação boa para os processos de imageamento sísmico.

De fato, este exemplo é um caso particular do exemplo anterior, onde se considera que o campo de velocidade é expresso por

$$c(x,z) = c(z) = c_0 (1 + \beta (z - z_0)),$$
 (2.106)

onde c_0 é a velocidade medida no ponto inicial do raio e β é o fator linear de crescimento (ou decrescimento) da velocidade.

Assumindo que as equações do raio estejam parametrizadas por z, pode-se usar (2.106) nas equações (2.91) e (2.92), para exprimir as soluções, isto é,

$$x(z,\gamma) = x_0(\gamma) + \int_{z_0}^{z} \frac{p_1(z_0,\gamma)}{p_3(\zeta,\gamma)} d\zeta$$
 (2.107)

$$\tau(z,\gamma) = \tau_0(\gamma) + \int_{z_0}^z \frac{\eta(\zeta)^2}{p_3(\zeta,\gamma)} d\zeta, \qquad (2.108)$$

onde $p_3 = \epsilon \eta(z) \sqrt{1 - [c(z)p_1(z_0, \gamma)]^2}$.

As integrais acima podem ser computadas analiticamente, fornecendo as soluções

$$x(z,\gamma) = x_0(\gamma) + \frac{\epsilon}{c_0\beta p_1(z_0,\gamma)} \left[\sqrt{1-\mu(z_0)} - \sqrt{1-\mu(z)}\right]$$
(2.109)

$$\tau(z,\gamma) = \tau_0 + \frac{\epsilon}{c_0\beta} \ln\left[\frac{c(z)}{c_0} \frac{1+\sqrt{1-\mu(z_0)}}{1+\sqrt{1-\mu(z)}}\right],$$
(2.110)

onde $\mu(z) = [c(z)p_1(z_0, \gamma)]^2$.

Neste caso, considerando condições iniciais de fonte pontual, basta integrar (2.102) para achar o Jacobiano bidimensional:

$$\mathcal{J}_2(z,\gamma) = -\frac{\cos\gamma}{\beta\mu(z_0)} \frac{c(z)}{\sqrt{1-\mu(z)}} \left[\frac{1}{\sqrt{1-\mu(z)}} - \frac{1}{\sqrt{1-\mu(z_0)}} \right].$$
 (2.111)

Para computar o Jacobiano 2.5-dimensional é necessário achar a expressão para σ , integrando a equação (2.93)

$$\sigma(z,\gamma) = \sigma_0(\gamma) + \int_{z_0}^z \frac{1}{p_3(\zeta,\gamma)} d\zeta = \frac{\epsilon}{c_0 \beta p_1(z_0,\gamma)^2} \left[\sqrt{1 - \mu(z_0)} - \sqrt{1 - \mu(z)} \right].$$
(2.112)

Portanto,

$$\mathcal{J}_{2.5}(z,\gamma) = \sigma(z,\gamma) \sin \gamma \, \mathcal{J}_2(z,\gamma), \qquad (2.113)$$

onde σ é dado por (2.112) e \mathcal{J}_2 é dado por (2.111).

Na Figura 2.5, é mostrado o traçado de raios e frentes de onda para um meio afim na profundidade. Segundo Sheriff (1982), é possível mostrar que as tanto os raios como as frentes de onda, nas condições de fonte pontual, são arcos de circunferência (oberve a Figura 2.5a).



Figura 2.5: Raios (linhas pontilhadas) e frentes de onda (linhas cheias) para meio com velocidade dependendo linearmente da profundidade com condição inicial de fonte pontual (a) e de refletor exposivo (b).

2.9 APROXIMAÇÃO PARAXIAL

Dado um raio previamente computado, chamado de *raio central* e denotado por Λ , é possível determinar aproximadamente quantidades tais como vetor vagarosidade e jacobiano do raio para toda

uma vizinhança tubular deste raio central. Estas aproximações são agrupadas na chamada *aproximação paraxial* que faz uso da expansão de Taylor e das equações do raio para fazer extrapolações em torno do raio central.

Matematicamente, o raio central pode ser definido pelos conjunto de pontos

$$\Lambda(\gamma) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\tau, \gamma) \right\}$$
(2.114)

onde $x(\tau, \gamma)$ é solução das equações do raio. Supondo que o campo de vagarosidade seja suave, pode-se usar a seguinte aproximação de Taylor de primeira ordem

$$\bar{\boldsymbol{x}} \equiv \boldsymbol{x}(\tau + \delta\tau, \gamma + \delta\gamma) \approx \boldsymbol{x}(\tau, \gamma) + \frac{\partial \boldsymbol{x}(\tau, \gamma)}{\partial \tau} \delta\tau + \frac{\partial \boldsymbol{x}(\tau, \gamma)}{\partial \gamma} \delta\gamma.$$
(2.115)

Usando $\frac{\partial x}{\partial \tau} = c^2 p \, e \, \frac{\partial x}{\partial \gamma} = u$, pode ser reescrita como $\bar{x} = x + c^2 p \, \delta \tau + u \, \delta \gamma.$ (2.116)

Além disso, há a aproximação para o vetor vagarosidade

$$\bar{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}(\tau + \delta \tau, \gamma + \delta \gamma) \approx \boldsymbol{p}(\tau, \gamma) + \frac{\partial \boldsymbol{p}(\tau, \gamma)}{\partial \tau} \delta \tau + \frac{\partial \boldsymbol{p}(\tau, \gamma)}{\partial \gamma} \delta \gamma,$$
 (2.117)

que, usando $\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \tau} = c \nabla \eta$ e $\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \gamma} = \boldsymbol{v}$, é reescrita como

$$\bar{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p} + c\nabla\eta\,\delta\tau + \boldsymbol{v}\,\delta\gamma. \tag{2.118}$$

2.10 CONDIÇÕES DE CONTORNO NA INTERFACE

Em meios acústicos, quando uma frente de onda incide sobre uma interface que representa uma descontinuidade no campo de velocidade observa-se, na prática, que duas novas frentes de onda são geradas. A primeira é chamada de onda refletida e a outra de onda transmitida. Em termos matemáticos, pode-se considerar que dois novos problemas de propagação de ondas são gerados.

Analogamente, se um raio correspontente à frente de onda incidente atinge uma interface, dois novos raios são gerados, a saber: *o raio refletido e o transmitido*. Estes novos raios podem ser novamente modelados através das suas correspondentes equações do raio. No entanto, são necessárias novas condições iniciais fisicamente viáveis para ambos os raios. Estas condições iniciais, por sua vez, derivam de condições de contorno que os três raios (incidente, refletido e transmitido) satisfazem no ponto de incidência na interface, estabelecendo-lhes um vínculo.

Considere Σ uma curva que representa uma interface suave e ν o vetor normal à curva. Podese dividir as condições de contorno em três partes. Existem as condições que dizem respeito somente à trajetória do raio, envolvendo as quantidades $x \in p$, por isso são chamadas *condições de contorno cinemáticas*. Existem também condições que mostram como o Jacobiano do raio é transformado na interface, isto é, como o tubo de raios é focado ou desfocado após a incidência do raio na interface, chamadas *condições de contorno dinâmicas*. Finalmente existem condições que mostram como a energia que o raio transporta deve ser partictionada, quando o raio atinge a interface, denominadas *condições de amplitude*. No desenvolvimento a seguir, adota-se as notações (´) e (`) para indicar as quantidades do raio refletido e transmitido, respectivamente.

2.10.1 Condições de contorno cinemáticas

As condições de contorno cinemáticas são derivadas da lei de Snell, que por sua vez é uma conseqüência do princípio de Fermat. A lei de Snell é descrita através da seguinte equação

$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2},\tag{2.119}$$

onde θ_1 é o ângulo de incidência do raio, medido com relação à normal à superfície. A velocidade c_1 é a velocidade medida infinitesimalmente acima do ponto de incidência. O ângulo θ_2 é o ângulo de reflexão (ou transmissão) medido com relação à normal à superfície. Para o caso da reflexão, a velocidade c_2 é medida infinitesimalmente acima do ponto de incidência e para o caso da transmissão, c_2 é medida infinitesimalmente abaixo (Veja Figura 2.6).

Quando um raio incide sobre uma interface, o ponto de incidência acaba se transformando numa fonte tanto para o raio refletido qunto para o raio transmitido. Esta condição pode ser entendida como

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}, \qquad (2.120)$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}. \tag{2.121}$$

A lei de Snell mostra que as projeções dos vetores vagarosidade do raio incidente e do raio refletido/transmitido em Σ são iguais (veja Figura 2.6). Esta propriedade pode ser descrita através



Figura 2.6: Lei de Snell para: (a) raio refletido e (b) raio transmitido.

de equações vetoriais envolvendo os vetores vagarosidade p e normal ν ao refletor

$$\acute{\boldsymbol{p}} = [\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^T]\boldsymbol{p}, \qquad (2.122)$$

$$\dot{\boldsymbol{p}} = [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\nu}^T] \boldsymbol{p} + \alpha \boldsymbol{\nu}, \qquad (2.123)$$

onde $\alpha = (c_2^{-2} - c_1^{-2} \sin^2 \theta_1)^{1/2}$.

2.10.2 Condições de contorno dinâmicas

As condições de contorno dinâmicas dizem às relações que vetores dinâmicos u e v para os raios incidente e refletido/transmitido satisfazem. De modo geral, tanto os vetores u e v do raio refletido, quanto os vetores u e v do raio transmitido são descritos explicitamente através de equações vetorias de quantidades previamente conhecidas, tais como p, u, v e a normal ao refletor ν .

O procedimento adotado é estudar o efeito de uma perturbação de $\delta\gamma$ do raio central, para em seguida tomar o limite quando $\delta\gamma \rightarrow 0$. Em outras palavras, considera-se um raio paraxial $\Lambda(\gamma + \delta\gamma)$ ao raio central $\Lambda(\gamma)$, conforme mostrado na Figura 2.7.

Segundo o Apêndice D, as condições de contorno dinâmicas para o raio refletido são

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \left[\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^T\right]\boldsymbol{u}$$
(2.124a)

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \left[\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^T\right]\boldsymbol{v} + 2\beta_0 \boldsymbol{N}\boldsymbol{p}. \tag{2.124b}$$

Aqui o escalar β_0 é

$$\beta_0 = \frac{\|\boldsymbol{u}\|}{r\,\sin\theta_1}$$



Figura 2.7: Raio paraxial (em azul) como uma pertubação de $\delta\gamma$ do raio central (em vermelho).

onde r é o raio de curvatura do refletor e θ_1 satisfaz a lei de Snell. Além disso a matriz N é definida como

$$N = Q_1 \nu \nu^T Q_2 + Q_2 \nu \nu^T Q_1,$$

onde

$$\boldsymbol{Q}_{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q}_{2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
(2.124c)

As condições de contorno dinâmicas para o raio transmitido são

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \left[\boldsymbol{I} - (\beta_1 \boldsymbol{\nu} + \beta_2 \boldsymbol{p}) \boldsymbol{\nu}^T\right] \boldsymbol{u}, \qquad (2.124d)$$

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \left[I - 2\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^T\right]\boldsymbol{v} + 2\beta_0 \boldsymbol{N}\boldsymbol{p} + \frac{\beta_0}{2\alpha}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\nu},$$
 (2.124e)

Aqui os escalares β_1, β_2 e α são

$$\beta_{1} = (c_{2}/c_{1})^{2} \left[1 - \alpha / \boldsymbol{\nu}^{T} \boldsymbol{p} \right],$$

$$\beta_{2} = \left[1 - (c_{2}/c_{1})^{2} \right] / \boldsymbol{\nu}^{T} \boldsymbol{p},$$

$$\alpha = (c_{2}^{-2} - c_{1}^{-2} \sin^{2} \theta_{1})^{1/2}.$$

A matriz M é definida por

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} c_1^{-2} \sin 2\theta_1 & \alpha^2 \\ -\alpha^2 & c_1^{-2} \sin 2\theta_1 \end{bmatrix}.$$
 (2.124f)

onde θ_1 satisfaz a lei de Snell.

2.10.3 Coeficiente de reflexão

As condições de contorno cinemáticas indicam como é a trajetória do raio na vizinhança do refletor. As condições de contorno dinâmicas mostram como o Jacobiano se comporta na vizinhança do refletor e, portanto, como afeta a amplitude nesta vizinhança devido ao focamento ou desfocamento de raios.

Entretanto, as condições dinâmicas ainda não são o suficiente para descrever todo o comportamento da amplitude. Como o raio incidente é dividido em dois raios novos, regidos pelas condições iniciais anteriores, pode-se entender que a energia transportada pelo raio incidente deve ser dividida. Isto quer dizer que uma parte da energia é refletida e a outra parte é transmitida, dando origem a duas condições iniciais novas sobre a amplitude de cada raio novo.

Matematicamente, estas duas condições iniciais novas são resultado de uma condição de contorno que as ondas incidente, refletida e transmitida devem satisfazer. A idéia básica é considerar as frentes de onda planas e o refletor plano no ponto de incidência. Estas hipóteses levam à conclusão de que a amplitude refletida e a amplitude transmitida são diretamente proporcionais à amplitude incidente A, isto é,

$$\hat{A} = \mathcal{R}A, \qquad (2.125)$$

$$\dot{A} = SA, \qquad (2.126)$$

onde R é chamado de *coeficiente de reflexão* e S é chamado de *coeficiente de transmissão*. Segundo Bleistein (2001), estes coeficientes são

$$\Re = \frac{c_2 \cos \theta_1 - c_1 \cos \theta_2}{c_2 \cos \theta_1 + c_1 \cos \theta_2},$$
(2.127)

$$S = \frac{2c_2 \cos \theta_1}{c_2 \cos \theta_1 + c_1 \cos \theta_2},$$
 (2.128)

onde $\theta_1 e \theta_2$ satisfazem a lei de Snell (2.119) no ponto de incidência. É importante ressaltar que para que as fórmulas acima contemplem ângulos pós-críticos o co-seno deve ter a definição complexa, isto é,

$$\cos\theta = \cos(\pi/2 + i\varphi) = i\cosh\varphi.$$

2.11 ESPALHAMENTO GEOMÉTRICO

Dentre os Jacobianos relativos às várias parametrizações, um tem um papel mais importante. O Jacobiano $\mathcal{J}(s, \gamma_1, \gamma_2)$ possui a propriedade geométrica de representar o estreitamento ou o alargamente do tubo de raios ao longo do raio. Por sua importância, é denotado diferentemente como

$$\mathcal{J}_2(\boldsymbol{x}) \equiv \mathcal{J}_2(s, \gamma_1, \gamma_2),$$

onde $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s, \gamma_1, \gamma_2)$ é solução das equações do raio. Os outros dois Jacobianos (parametrizados em $\tau \in \sigma$) se relacionam a \mathcal{J} através das equações:

$$\mathcal{J}(\tau, \gamma_1, \gamma_2) = \eta(\boldsymbol{x}) \mathcal{J}(\boldsymbol{x})$$
(2.129)

$$\mathcal{J}(\sigma, \gamma_1, \gamma_2) = c(\boldsymbol{x}) \mathcal{J}(\boldsymbol{x})$$
(2.130)

Pela equação (??), observa-se que a raiz quadrada do Jacobiano tem papel fundamental na determinação da amplitude. Definindo a quantidade chamada *espalhamento geométrico* como sendo

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}) = |\mathcal{J}(\boldsymbol{x})|^{1/2}, \qquad (2.131)$$

é possível reescrever (??) como

$$A(\boldsymbol{x}_2) = A(\boldsymbol{x}_1) \sqrt{\frac{c(\boldsymbol{x}_2)}{c(\boldsymbol{x}_1)}} \frac{\mathcal{L}(\boldsymbol{x}_1)}{\mathcal{L}(\boldsymbol{x}_2)},$$
(2.132)

Por outro lado, a amplitude em x_1 é dada por

$$A(\boldsymbol{x}_1) = A(\boldsymbol{x}_2) \sqrt{\frac{c(\boldsymbol{x}_1)}{c(\boldsymbol{x}_2)}} \frac{\mathcal{L}(\boldsymbol{x}_2)}{\mathcal{L}(\boldsymbol{x}_1)}.$$
(2.133)

Devido à propriedade da reciprocidade das funções de Green, as amplitudes $A(x_1) e A(x_2)$ devem ser iguais, quando fontes pontuais são consideradas em $x_2 e x_1$, respectivamente. Esta condição quando imposta às duas equações anteriores, leva a

$$\sqrt{c(\boldsymbol{x}_2)}\mathcal{L}(\boldsymbol{x}_1) = \sqrt{c(\boldsymbol{x}_1)}\mathcal{L}(\boldsymbol{x}_2), \qquad (2.134)$$

mostrando que o espalhamento geométrico não é recíproco.

Definindo o espalhamento geométrico relativo como sendo

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \sqrt{c(\boldsymbol{x}_2)} \mathcal{L}(\boldsymbol{x}_1), \qquad (2.135)$$

então a equação () fica

$$\sqrt{c(\boldsymbol{x}_2)}\mathcal{L}(\boldsymbol{x}_1) = \sqrt{c(\boldsymbol{x}_1)}\mathcal{L}(\boldsymbol{x}_2), \qquad (2.136)$$

mostrando que o espalhamento geométrico relativo tem reciprocidade no caso de fontes pontuais.

Além disso, a equação geral para a amplitude fica

$$A(\boldsymbol{x}_2) = A(\boldsymbol{x}_1) \frac{\mathcal{L}(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1)}{\mathcal{L}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)},$$
(2.137)

onde não necessariamente há fonte pontual.

2.12 RAIO REFLETIDO EM UMA INTERFACE

Nesta seção é abordado o problema canônico da modelagem por teoria dos raios do sinal registrado em um refletor G, refletido por uma interface suave Σ e que foi gerado inicialmente em uma fonte S.

A solução da teoria dos raios de ordem zero para uma reflexão primária 3D é dada por

$$u(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}_{s}) = \mathscr{D} \frac{\mathcal{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_{s})}{\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_{s})} F(t - \tau(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_{s}))$$
(2.138)

onde \mathscr{D} é um fator que contempla os efeitos de dispersão e absorção. A função complexa F descreve o pulso incidente, \mathcal{R} é o coeficiente de reflexão e \mathcal{L} é o espalhamento geométrico relativo. Neste trabalho assume-se que não há perda da amplitude do sinal por dispersão ou absorção, portanto \mathscr{D} é igual a unidade.

APÊNDICES

A MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

Este método é usado na resolução de equações diferenciais parciais (EDPs) de primeira ordem. Seu objetivo principal é converter uma EDP em um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs), através da introdução de quantidades auxiliares que não pertencem às quantidades originais do problema.



Figura 2.8: Conecta-se o ponto \boldsymbol{x} a $\boldsymbol{x}_0 \in \Sigma$ através de uma curva Λ .

Mais especificamente, é procurada a solução $\tau(x)$ de um problema de EDP de primeira ordem na sua forma mais geral

$$\begin{cases} \mathcal{H}(\boldsymbol{x},\tau,\boldsymbol{p}) = 0 , & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3, \\ \tau(\boldsymbol{x}_0) &= g(\boldsymbol{x}_0) , & \boldsymbol{x}_0 \in \Sigma, \end{cases}$$
(A.1)

onde $\boldsymbol{x} = (x_1, \, x_2, \, x_3)^T$ e $\boldsymbol{p} = (p_1, \, p_2, \, p_3)^T$ é definido por

$$\boldsymbol{p} = \nabla \tau(\boldsymbol{x}) \tag{A.2}$$

e $\Sigma = \Sigma(\gamma_1, \gamma_2)$ é uma superfície onde se conhece a solução (veja Figura 2.8).

O método das características pode ser esquematizado da seguinte forma:

- 1. Considera-se que a solução $\tau(x)$ de (A.1) exista;
- Dado um ponto x ∈ R³, procura-se uma curva Λ que conecte x a algum ponto x₀ ∈ Σ e sobre a qual a quantidade H(x, τ, p) seja conservada;
- 3. Uma vez que sabe-se o valor de τ no extremo x_0 , isto é, $\tau(x_0) = g(x_0)$, espera-se saber computar $\tau(x)$ para $x \in \Lambda$.

Em outras palavras, uma vez que se assume a existência da solução do problema (A.1), dado um ponto x no espaço, constrói-se uma curva Λ de x até $x_0 \in \Sigma$, de modo que a informação contida em $x_0 \in \Sigma$ seja transmitida até x. Considere a descrição paramétrica da curva Λ como sendo

$$\boldsymbol{x}(\ell) = \left(x_1(\ell), \ x_2(\ell), \ x_3(\ell)\right)^T,\tag{A.3}$$

onde ℓ é um parâmetro monótono crescente qualquer, como por exemplo, o comprimento de arco. Introduzindo a notação acima em (A.1), define-se

$$\mathcal{H}(\ell) = \mathcal{H}(\boldsymbol{x}(\ell), \tau(\boldsymbol{x}(\ell)), \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}(\ell))) = 0.$$
(A.4)

Existem infinitas curvas que passam pelos pontos $x \in x_0$, como por exemplo um arco de circunferência ou uma linha reta. No entanto, o método das características procura uma curva Λ especial, de modo que a quantidade $\tilde{\mathcal{H}}(\ell)$ seja conservada ao longo da curva. Impor esta condição equivale a exigir que a derivada de $\tilde{\mathcal{H}}(\ell)$ com relação a ℓ seja nula, isto é

$$0 = \frac{d\tilde{\mathcal{H}}(\ell)}{d\ell} = \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial x_i} \right] \frac{dx_i}{d\ell}.$$
 (A.5)

Neste ponto, assume-se que

$$\|\boldsymbol{x}'(\ell)\|^2 = x_1'(\ell)^2 + x_2'(\ell)^2 + x_3'(\ell)^2 \neq 0,$$

onde a operação (') indica a derivada com relação a ℓ . Em outras palavras, assume-se que as componentes do vetor $\mathbf{x}'(\ell)$ não se anulam ao mesmo tempo, pois se $x'_i(\ell) = 0$ ao mesmo tempo, para i = 1, 2, 3, isto implicaria que $\mathbf{x}(\ell) = \mathbf{x}_0$ para todo ℓ , isto é, a curva Λ se degenenaria em um ponto, o que não é desejado.

Portanto, a equação (A.5) é levada a

$$\left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x_i}\right] = -\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}\frac{\partial p_i}{\partial x_j}, \qquad \text{para } i = 1, 2, 3.$$
(A.6)

onde foi usada a seguinte propriedade

$$\frac{\partial p_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \tau}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tau}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial p_i}{\partial x_j}.$$
 (A.7)

Por outro lado, computando a derivada com relação a ℓ das quantidades $p \in \tau$, obtém-se

$$\frac{dp_i}{d\ell} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial p_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{d\ell}, \qquad \text{para } i = 1, 2, 3; \qquad (A.8)$$

$$\frac{d\tau}{d\ell} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \frac{dx_j}{d\ell} = p_j \frac{dx_j}{d\ell}.$$
(A.9)

Se a curva $\boldsymbol{x}(\ell)$ procurada é tal que

$$\frac{dx_j}{d\ell} = \lambda \; \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j},\tag{A.10}$$

onde $\lambda = \lambda(\boldsymbol{x}(\ell))$, então, combinando a expressão acima com a equação (A.6), obtém-se

$$\lambda \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x_i} \right] = -\frac{dx_j}{d\ell} \frac{\partial p_i}{\partial x_j} = -\frac{dp_i}{d\ell}, \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \quad (A.11)$$

onde foi usada a equação (A.8) na última igualdade. Além disso, combinando a expressão (A.10) com a equação (A.9), obtém-se

$$\frac{d\tau}{d\ell} = \lambda p_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}.$$
 (A.12)

Reunindo as equações (A.10), (A.11) e (A.12), e usando notação vetorial, obtém-se as equações características para o problema (A.1)

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{d\ell} = \lambda \nabla_{\boldsymbol{p}} \mathcal{H}$$
(A.13a)
$$\frac{d\boldsymbol{p}}{d\ell} = -\lambda \left[\nabla_{\boldsymbol{x}} \mathcal{H} + \boldsymbol{p} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tau} \right]$$
(A.13b)

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{d\ell} = -\lambda \left[\nabla_{\boldsymbol{x}} \mathcal{H} + \boldsymbol{p} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tau} \right]$$
(A.13b)

$$\frac{d\tau}{d\ell} = \lambda \boldsymbol{p} \cdot \nabla_{\boldsymbol{p}} \mathcal{H}$$
(A.13c)

onde a operação (\cdot) denota o produto escalar entre dois vetores e os gradientes $\nabla_p \mathcal{H}$ e $\nabla_x \mathcal{H}$ são definidos por

$$\nabla_{p}\mathcal{H} = \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_{1}}, \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_{2}}, \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_{3}}\right) \qquad e \qquad \nabla_{x}\mathcal{H} = \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x_{1}}, \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x_{2}}, \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x_{3}}\right)$$

Observações sobre o Método das Características

- Na derivação das equações características, foi mostrado como construir a curva Λ e, subseqüentemente, como chegar às equações características usando como hipótese principal a existência da solução τ(x) para o problema (A.1). O problema inverso, isto é, se curva Λ satisfaz às equações do características, então τ(x) é solução para (A.1), não foi abordado. Para esta segunda parte veja Evans (1998).
- 2. Este método tem validade local, isto é, podem ocorrer pontos no espaço onde mais de uma curva Λ , ou mesmo nenhuma, alcancem o ponto \boldsymbol{x} , causando uma não unicidade ou uma não existência da solução $\tau(\boldsymbol{x})$, respectivamente.
- A curva Λ' = {(x, p) ∈ ℝ⁶ | x = x(ℓ), p = p(ℓ)} é chamada de curva característica do problema (A.1).

B IDENTIDADE DE SMIRNOV

Neste apêndice, é apresentada uma prova alternativa (porém similar) a de Bleistein (1984) para a identidade de Smirnov, a qual relaciona o tempo de trânsito τ e o Jacobiano \mathcal{J} ao longo de um raio parametrizado por ℓ

$$\lambda \Delta \tau = \frac{d}{d\ell} \log(\mathcal{J}/\lambda). \tag{B.1}$$

Para exemplificar, tomando-se $\lambda = c^2$, obtém-se, uma versão da identidade de Smirnov,

$$\Delta \tau = \frac{1}{c^2} \frac{d}{d\tau} \log(\mathcal{J}/c^2).$$

A maneira usual de se comprovar a validade de (B.1) é integrar a equação de transporte em um tubo de raios, usando o teorema de Green e argumentos geométricos. Há ainda uma demostração algébrica dada por Bleistein (2001), na qual são usados argumentos de álgebra linear aplicados diretamente às equações do raio (2.9a)–(2.9b).

O caminho escolhido para provar a identidade (B.1) é usar o lema de Smirnov que pode ser aplicado a qualquer sistema não-linear *n*-dimensional de EDOs e em particular às equações do raio (2.9a)-(2.9b).

Lema de Smirnov:

Seja $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ uma solução do sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{d\ell} = F(\boldsymbol{x}), \tag{B.2}$$

onde $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma função suave. Se a transformação de variáveis

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n), \tag{B.3}$$

é realizada, então

$$\frac{d}{d\ell} \Big[\log \mathcal{J} \Big] = \nabla \cdot F, \tag{B.4}$$

onde \mathcal{J} é o Jacobiano da transformação, definido por

$$\mathcal{J} = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)} = \det \left[\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \gamma_1}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \gamma_2}, \dots, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \gamma_n} \right].$$
(B.5)

Prova: Computando a derivada do Jacobiano na equação (B.5) com relação a ℓ e usando a regra para diferenciação de determinantes (Golub & Van Loan (1996); Bleistein *et al.* (2001)), obtém-se

$$\frac{d\mathcal{J}}{d\ell} = \frac{d}{d\ell} \det \left[\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \gamma_1}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \gamma_2}, \dots, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \gamma_n} \right] \\ = \sum_{k=1}^n \det \left[\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \gamma_1}, \dots, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \gamma_{k-1}}, \frac{d}{d\ell} \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \gamma_k} \right), \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \gamma_{k+1}}, \dots, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \gamma_n} \right].$$
(B.6)

Usando a equação (B.2), tem-se que

$$\frac{d}{d\ell} \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \gamma_k} \right) = \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \left(\frac{d\boldsymbol{x}}{d\ell} \right) = \frac{\partial}{\partial \gamma_k} F(\boldsymbol{x}) = F'(\boldsymbol{x}) \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \gamma_k}, \quad (B.7)$$

onde $F'(\boldsymbol{x})$ é a matriz Jacobiana definida por

$$\left[F'(\boldsymbol{x})\right]_{ij} = \frac{\partial F_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}.$$
 (B.8)

 \Box

Substituindo a equação (B.7) em (B.6), obtém-se

- -

$$\frac{d\mathcal{J}}{d\ell} = \sum_{k=1}^{n} \det \left[\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \gamma_{1}}, \dots, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \gamma_{k-1}}, F'(\boldsymbol{x}) \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \gamma_{k}}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \gamma_{k+1}}, \dots, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \gamma_{n}} \right]$$
(B.9)

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_k}\right) \det\left[\frac{\partial x}{\partial \gamma_1}, \frac{\partial x}{\partial \gamma_2}, \dots, \frac{\partial x}{\partial \gamma_n}\right].$$
(B.10)

onde foi usado o resultado de álgebra linear (C.1) apresentado no Apêndice C. Portanto,

$$\frac{d\mathcal{J}}{d\ell} = (\nabla \cdot F) \mathcal{J}, \qquad (B.11)$$

Aplicação: Usando o lema de Smirnov, para $F(x) = \lambda p = \lambda \nabla \tau$, obtém-se

$$\frac{d}{d\ell} \Big[\log \mathcal{J} \Big] = \nabla \cdot (\lambda \nabla \tau), \qquad (B.12)$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{d}{d\ell} \Big[\log \mathcal{J}/\lambda \Big] = \lambda \Delta \tau, \tag{B.13}$$

onde τ é a solução tempo de trânsito das equações do raio (2.9a)–(2.9c) e o Jacobiano $\mathcal J$ é dado por

$$\mathcal{J} = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)} = \det\left[\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \gamma_0}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \gamma_1}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \gamma_2}\right], \quad (B.14)$$

 $\operatorname{com} \gamma_0 = \ell.$

C IDENTIDADE DE ÁLGEBRA LINEAR

A identidade de álgebra linear abaixo foi introduzida por Greub (1975) como uma maneira aternativa de se definir o traço de uma matriz, a partir da definição de determinantes.

Identidade de álgebra linear:

Dadas duas matrizes quadradas
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^n \end{bmatrix} e \ \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n \end{bmatrix}$$
, então
 $\operatorname{tr}[\mathbf{A}] \operatorname{det}[\mathbf{X}] = \operatorname{det} \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n \end{bmatrix} + \operatorname{det} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^1, \mathbf{A}\mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n \end{bmatrix} + \cdots$
 $\cdots + \operatorname{det} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{A}\mathbf{x}^n \end{bmatrix}$, (C.1)

onde tr[A] é o traço de A, definido por

$$tr[A] = \sum_{k=1}^{n} a_k^k.$$
 (C.2)

Prova: Em primeiro lugar, o resultado é provado para uma matriz não-singular X. Considere $Y = \begin{bmatrix} y^1, y^2, \dots, y^n \end{bmatrix}$ uma matriz similar a A, definida por

$$Y = X^{-1}AX. (C.3)$$

Portanto A e Y têm os mesmos autovalores, o que implica em

$$tr[A] = \sum_{k=1}^{n} a_{k}^{k} = \sum_{k=1}^{n} y_{k}^{k} = tr[Y].$$
(C.4)

Pode-se reescrever a equação (C.3) como a solução dos sistemas lineares

$$Xy^k = Ax^k, \qquad k = 1, 2, \dots, n,$$
 (C.5)

onde x^k and y^k são as colunas de X e Y, respectivamente. Usando a regra de Cramer, obtém-se

$$y_j^k = \frac{1}{\det[\boldsymbol{X}]} \det \left[\boldsymbol{x}^1, \dots, \boldsymbol{x}^{j-1}, \boldsymbol{M} \boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{x}^{j+1}, \dots, \boldsymbol{x}^n \right].$$
(C.6)

Substituindo a equação (C.6) em (C.4), obtém-se finalmente que

$$tr[\mathbf{A}] = tr[\mathbf{Y}] = \sum_{k=1}^{n} y_{k}^{k} = \frac{1}{\det[\mathbf{X}]} \sum_{k=1}^{n} \det\left[\mathbf{x}^{1}, \dots, \mathbf{x}^{k-1}, \mathbf{A}\mathbf{x}^{k}, \mathbf{x}^{k+1}, \dots, \mathbf{x}^{n}\right], \quad (C.7)$$

provando o resultado (C.1).

Para uma matriz singular X, é possível construir uma seqüência de matrizes não-singulares $\{X^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ que converge a X. Após a aplicação de todos os resultados acima a cada membro da seqüência, pode-se avaliar o limite, uma vez que todas as operações são contínuas. Portanto, no limite, o resultado (C.1) também é valido para X singular.

D CONDIÇÕES DE CONTORNO DINÂMICAS

Condições para o raio refletido —

Suponha que $\mathbf{x} \in \tilde{\mathbf{x}}$ estejam sobre a mesma frente de onda $\tau = \tau_0$ e que $\tilde{\mathbf{y}} \in \tilde{\mathbf{x}}$ estejam sobre o raio paraxial. Sob a hipótese da perturbação $\delta\gamma$ ser suficientemente pequena é possível considerar as seguintes expressões de primeira ordem

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}\,\delta\boldsymbol{\gamma},\tag{D.8}$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}} = \tilde{\boldsymbol{x}} + c_1 (\tilde{\boldsymbol{x}})^2 \tilde{\boldsymbol{p}} \,\delta\tau, \tag{D.9}$$

onde foi usada a aproximação paraxial dada por (2.116). Além disso, usando a aproximação paraxial dada por (2.118)

$$\tilde{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{v}\,\delta\boldsymbol{\gamma}.\tag{D.10}$$

Logo, usando (D.10) em (D.9), obtém-se

$$\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}\,\delta\gamma + c_1(\tilde{\boldsymbol{x}})^2 \left(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{v}\,\delta\gamma\right)\delta\tau. \tag{D.11}$$

Por outro lado, assumindo que y esteja sobre raio central e também sobre a frente de onda de tempo $\tau = \tau_0 + \delta \tau$, chega-se às equações

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + c_1(\boldsymbol{x})^2 \boldsymbol{\dot{p}} \,\delta\tau, \qquad (D.12)$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{\acute{u}}\,\delta\boldsymbol{\gamma},\tag{D.13}$$

que, quando combinadas, levam a

$$\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}\,\delta\gamma + c_1(\boldsymbol{x})^2 \boldsymbol{\dot{p}}\,\delta\tau. \tag{D.14}$$

Comparando as equações (D.11) e (D.14), obtém-se a equação

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u} + \frac{\delta\tau}{\delta\gamma} \Big[c_1(\tilde{\boldsymbol{x}})^2 (\boldsymbol{p} + \boldsymbol{v}\delta\gamma) - c_1(\boldsymbol{x})^2 \dot{\boldsymbol{p}} \Big], \qquad (D.15)$$

que, após a substituição $\mathbf{\acute{p}} = [\mathbf{I} - 2\mathbf{\nu}\mathbf{\nu}^T]\mathbf{p}$, torna-se

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u} + 2c_1^2 \frac{\delta\tau}{\delta\gamma} \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{p} + c_1^2 \boldsymbol{v} \,\delta\tau, \qquad (D.16)$$

onde se considerou $c_1(\tilde{\boldsymbol{x}}) \approx c_1(\boldsymbol{x})$.

Por outro lado, pode-se observar pela Figura 2.7 que

$$\boldsymbol{\nu}^T(\tilde{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{x}) = 0, \qquad (D.17)$$

implicando, pela equação (D.11), que

$$\boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{p} = -\boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{u} \, \frac{\delta \gamma}{c_1^2 \delta \tau} - \boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{v} \, \delta \gamma, \qquad (D.18)$$

que, por sua vez, quando inserida em (D.16), leva a

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \left[\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^{T}\right]\boldsymbol{u} + c_{1}^{2}\delta\tau \left[\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^{T}\right]\boldsymbol{v}.$$
(D.19)

Quando $\delta \gamma \rightarrow 0$, isto implica em $\delta \tau \rightarrow 0$. Portanto, no limite $\delta \gamma \rightarrow 0$, obtém-se

$$\acute{\boldsymbol{u}} = \left[\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^{T}\right]\boldsymbol{u}. \tag{D.20}$$

Usando a condição cinemática (2.122), tanto para o raio central, quanto para raio paraxial, obtém-se

$$\dot{\boldsymbol{p}} = [\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^T]\boldsymbol{p}, \qquad (D.21)$$

$$\hat{\tilde{\boldsymbol{p}}} = [\boldsymbol{I} - 2\tilde{\boldsymbol{\nu}}\tilde{\boldsymbol{\nu}}^T]\tilde{\boldsymbol{p}}, \qquad (D.22)$$

que leva a seguinte equação

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{p}}} - \dot{\boldsymbol{p}} = \tilde{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{p} - 2\tilde{\boldsymbol{\nu}}\tilde{\boldsymbol{\nu}}^T\tilde{\boldsymbol{p}} + 2\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^T\boldsymbol{p}.$$
(D.23)

Por outro lado assumindo que $\tilde{\nu} = Q\nu$, onde Q é uma matriz de rotação, e usando a aproximação paraxial (D.10), obtém-se

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{p}}} - \dot{\boldsymbol{p}} = \delta \gamma [\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^{T}\boldsymbol{Q}^{T}]\boldsymbol{v} + 2[\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^{T} - \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^{T}\boldsymbol{Q}^{T}]\boldsymbol{p}.$$
(D.24)

Ou ainda

$$\frac{\dot{\tilde{\boldsymbol{p}}} - \dot{\boldsymbol{p}}}{\delta \gamma} = [\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^T]\boldsymbol{v} + \frac{2}{\delta \gamma} [\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^T - \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{Q}^T]\boldsymbol{p}.$$
(D.25)

Quando $\delta\gamma \rightarrow 0$, o lado esquerdo da equação acima converge para \dot{v} . Por outro lado, a matriz de rotação converge para a identidade, isto é, $Q \rightarrow I$, fazendo com que a segunda parcela do lado direito tenha uma indeterminação do tipo 0/0. O que resta é estudar o limite da segunda parcela quando $\delta\gamma \rightarrow 0$, isto é

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \left[I - 2\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^{T}\boldsymbol{Q}^{T}\right]\boldsymbol{v} + 2\lim_{\delta\gamma\to0}\frac{\left[\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^{T} - \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^{T}\boldsymbol{Q}^{T}\right]}{\delta\gamma}\boldsymbol{p}.$$
 (D.26)

Pode-se mostrar que

$$\lim_{\delta\gamma\to 0} \frac{\left[\nu\nu^T - Q\nu\nu^T Q^T\right]}{\delta\gamma} = \frac{\|\boldsymbol{u}\|}{r\sin\theta_1} \left[Q_1\nu\nu^T Q_2 + Q_2\nu\nu^T Q_1 \right], \quad (D.27)$$

onde r é o raio de curvatura do refletor e as matrizes Q_1 e Q_2 são

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad (D.28)$$

Portanto,

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \left[I - 2\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^{T}\boldsymbol{Q}^{T}\right]\boldsymbol{v} + \frac{2\|\boldsymbol{u}\|}{r\sin\theta_{1}}\boldsymbol{N}\boldsymbol{p}, \qquad (D.29)$$

onde a matriz N é definida como

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{Q}_1 \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{Q}_2 + \boldsymbol{Q}_2 \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{Q}_1, \qquad (D.30)$$

Condições para o raio transmitido —

De modo análogo a sequência de equações (D.12)–(D.14) e com auxílio da Figura 2.7b, chega-se a seguinte expressão para o raio transmitido

$$\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\dot{u}}\,\delta\gamma + c_2(\boldsymbol{x})^2\boldsymbol{\dot{p}}\,\delta\tau,\tag{D.31}$$

onde $c_2(x)$ é a velocidade medida abaixo do refletor. Observando que a expressão (D.11) também é válida para o raio transmitido, pode-se compará-la com (D.31), obtendo-se a equação

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u} + \frac{\delta\tau}{\delta\gamma} \Big[c_1(\tilde{\boldsymbol{x}})^2 (\boldsymbol{p} + \boldsymbol{v}\delta\gamma) - c_2(\boldsymbol{x})^2 \dot{\boldsymbol{p}} \Big], \qquad (D.32)$$

que, após a substituição $\dot{\boldsymbol{p}} = [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\nu}^T] \boldsymbol{p} + \alpha \boldsymbol{\nu}$, torna-se

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u} + \frac{\delta\tau}{\delta\gamma} \Big[(c_1^2 - c_2^2) \boldsymbol{p} + c_2^2 \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{p} - c_2^2 \alpha \boldsymbol{\nu} \Big] + c_1^2 \boldsymbol{v} \,\delta\tau.$$
(D.33)

Reescrevendo a equação (D.18)

$$\frac{\delta\tau}{\delta\gamma} = -c_1^{-2} \frac{\boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{u}}{\boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{p}},\tag{D.34}$$

onde foi desprezado o termo de ordem superior. Substituindo (D.34) em D.33, obtém-se

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u} - c_1^{-2} \frac{\boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{u}}{\boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{p}} \Big[(c_1^2 - c_2^2) \boldsymbol{p} + c_2^2 \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{p} - c_2^2 \alpha \boldsymbol{\nu} \Big] + c_1^2 \boldsymbol{v} \, \delta \tau.$$
(D.35)

No limite quando $\delta\gamma \rightarrow 0$, chega-se finalmente a

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \left[\boldsymbol{I} - (\beta_1 \boldsymbol{\nu} + \beta_2 \boldsymbol{p}) \boldsymbol{\nu}^T \right] \boldsymbol{u},$$
 (D.36)

onde

$$\beta_{1} = (c_{2}/c_{1})^{2} \Big[1 - \alpha/\nu^{T} p \Big]; \qquad \beta_{2} = \Big[1 - (c_{2}/c_{1})^{2} \Big] \Big/ \nu^{T} p \qquad (D.37)$$

$$e^{-2} \sin^{2} \theta \Big)^{1/2}$$

e $\alpha = \left(c_2^{-2} - c_1^{-2}\sin^2\theta_1\right)^{1/2}$.

Usando a condição cinemática (2.123), tanto para o raio central, quanto para raio paraxial, obtém-se

$$\dot{\boldsymbol{p}} = [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\nu}^T] \boldsymbol{p} + \alpha \boldsymbol{\nu},$$
 (D.38)

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{p}}} = [\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{\nu}}\tilde{\boldsymbol{\nu}}^T]\tilde{\boldsymbol{p}} + \tilde{\alpha}\tilde{\boldsymbol{\nu}}, \qquad (D.39)$$

onde $\alpha = (c_2^{-2} - c_1^{-2} \sin^2 \theta_1)^{1/2}$ e $\tilde{\alpha} = (\tilde{c}_2^{-2} - \tilde{c}_1^{-2} \sin^2 \tilde{\theta}_1)^{1/2}$, levando à seguinte equação

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{p}}} - \dot{\boldsymbol{p}} = \tilde{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{p} - \tilde{\boldsymbol{\nu}}\tilde{\boldsymbol{\nu}}^T\tilde{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^T\boldsymbol{p} + \tilde{\alpha}\tilde{\boldsymbol{\nu}} - \alpha\boldsymbol{\nu}.$$
(D.40)

Por outro lado, assumindo que $\tilde{\nu} = Q\nu$ e usando a aproximação (D.10), obtém-se

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{p}}} - \dot{\boldsymbol{p}} = \delta \gamma [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q} \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{Q}^T] \boldsymbol{v} + [\boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\nu}^T - \boldsymbol{Q} \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{Q}^T] \boldsymbol{p} + [\tilde{\alpha} \boldsymbol{Q} - \alpha \boldsymbol{I}] \boldsymbol{\nu}.$$
(D.41)

Ou ainda

$$\frac{\dot{\tilde{\boldsymbol{p}}} - \dot{\boldsymbol{p}}}{\delta\gamma} = [\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^T]\boldsymbol{v} + \frac{1}{\delta\gamma}[\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^T - \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^T\boldsymbol{Q}^T]\boldsymbol{p} + \frac{1}{\delta\gamma}[\tilde{\alpha}\boldsymbol{Q} - \alpha\boldsymbol{I}]\boldsymbol{\nu}.$$
(D.42)

Quando $\delta \gamma \rightarrow 0$, o lado esquerdo da equação acima converge para \dot{v} . Por outro lado, a matriz de rotação converge para a identidade, isto é, $Q \rightarrow I$, como também $\tilde{\alpha} \rightarrow \alpha$, fazendo com que a terceira parcela do lado direito tenha uma indeterminação do tipo "0/0". O limite da segunda parcela está computado em (D.27). O que resta é estudar o limite da terceira parcela quando $\delta \gamma \rightarrow 0$, isto é

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \left[I - 2\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^{T}\boldsymbol{Q}^{T}\right]\boldsymbol{v} + \frac{2\|\boldsymbol{u}\|}{r\sin\theta_{1}}\boldsymbol{N}\boldsymbol{p} + \lim_{\delta\gamma\to0}\frac{\left[\tilde{\alpha}\boldsymbol{Q} - \alpha\boldsymbol{I}\right]}{\delta\gamma}\boldsymbol{\nu}.$$
 (D.43)

onde N está definida em (D.30).

Pode-se mostrar que

$$\lim_{\delta\gamma\to 0} \frac{\left[\tilde{\alpha} \boldsymbol{Q} - \alpha \boldsymbol{I}\right]}{\delta\gamma} = -\frac{\|\boldsymbol{u}\|}{2\alpha r \sin\theta_1} \boldsymbol{M}, \qquad (D.44)$$

onde M é definida por

$$M = \begin{bmatrix} c_1^{-2} \sin 2\theta_1 & \alpha^2 \\ -\alpha^2 & c_1^{-2} \sin 2\theta_1 \end{bmatrix}.$$
 (D.45)

Portanto,

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \left[I - 2\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^{T}\right]\boldsymbol{v} + \frac{2\|\boldsymbol{u}\|}{r\sin\theta_{1}}\boldsymbol{N}\boldsymbol{p} + \frac{\|\boldsymbol{u}\|}{2\alpha r\sin\theta_{1}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\nu}, \qquad (D.46)$$

onde r é a curvatura do refletor, o ângulo θ_1 satisfaz à lei de Snell e $\alpha = (c_2^{-2} - c_1^{-2} \sin^2 \theta_1)^{1/2}$.

Construção de frentes de onda

Neste capítulo é apresentado o método da *construção de frentes de onda* (CFO), cuja principal finalidade é produzir as quantidades necessárias aos processos de empilhamento de tipo Kirchhoff, tais como a migração e a demigração descritas nos capítulos 5 e 6. O método CFO foi originalmente introduzido por Vinje *et al.* (1993, 1996a e 1996b), e algumas modificações foram propostas por Lucio *et al.* (1996), Lambaré *et al.* (1996) entre outros.

O capítulo está dividido em seções que mostram em detalhes o funcionamento do processo CFO. A última seção contém um resumo esquemático do algoritmo CFO. Para manter o texto autocontido, sem prejudicar o fluxo da leitura, são apresentados em anexos alguns resultados básicos de análise numérica, a saber: método de Runge-Kutta de quarta ordem, interpolação de Hermite, o teste ponto-interior-ao-triângulo e splines bi-cúbicas. Maiores detalhes podem ser encontrados em livros dedicados aos temas, tais como Hämmerlin & Hoffmann (1991) e Preparata & Shamos (1991).

3.1 INTRODUÇÃO

Nos processos de empilhamento de tipo Kirchhoff, tais como migração e demigração descritas nos Capítulos 5 e 6, são necessárias basicamente a construção de superfícies auxiliares, ao longo das quais os dados sísmicos serão somados (ou empilhados). Além disso, o empilhamento pode ser ponderado através de pesos específicos associados a cada ponto a superfície de empilhamento. A determinação destas superfícies de empilhamento, bem como dos pesos associados, pode ser obtida,

nos processos de Kirchhoff, através da construção de frentes de ondas em modelos previamente fornecidos.

O método CFO usa, internamente, um traçador de raios parametrizado pelo tempo de trânsito, no entanto seu foco reside sobre as frentes de onda. Mas especificamente, a cada iteração, um feixe de raios é propagado de modo a construir uma nova frente de onda baseada nas informações do meio e na frente de onda da iteração anterior. Para o traçamento de raios o método assume que o modelo de velocidades seja suave e que seja fornecido através de splines bi-cúbicas. Em seguida, com o auxílio de interpolação por splines bi-cúbicas, constrói-se um modelo super-amostrado de velocidades, de modo que o processo de integração por Runge-Kutta de quarta ordem fique mais rápido.

Durante o traçamento dos raios, pode se tornar necessária, segundo um critério de densidade dos raios, a criação de novos raios, por meio de interpolação de Hermite. Este controle tem por finalidade assegurar uma mínima regularidade da frente de onda, a fim de preencher zonas com baixa densidade de raios, fazendo com que quantidades, tais como tempos de trânsito e abertura geométrica, fiquem bem amostradas em todo o meio.

Finalmente, após a contrução de todas as frentes de onda e raios, é construída uma malha irregular, cujos nós são formados pela interseção de raios e frentes de onda. Nesta contrução é estabelecida uma topologia que indica para um dado nós quais são os seus nós vizinhos. Por fim, as informações contidas nesta malha irregular, denomindada *malha RFO* (raios e frentes de onda), são projetadas para a *malha-alvo*, que é uma malha regular previamente definida.

3.2 FRENTES DE ONDA

De acordo com a óptica geométrica a parte cinemática do problema da propagação de eventos sísmicos é controlada pela função tempo de trânsito $\tau(\mathbf{x})$. Em outras palavras, $\tau(\mathbf{x})$ mede o tempo que o evento sísmico em questão leva para atingir o ponto \mathbf{x} .

Para um tempo de trânsito τ_0 dado, uma *frente de onda* pode ser definida como o conjunto de pontos x que possuem o mesmo tempo de trânsito. Isto é, uma frente de onda pode ser definida

implicitamente como a superfície de nível

$$\Psi(\tau_0) = \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \tau(\boldsymbol{x}) = \tau_0 \}.$$
(3.1)

No que se segue, aborda-se o problema na sua forma bidimensional, isto é, considera-se que as frentes de onda são curvas no plano.

Por outro lado, as equações do raio quando parametrizadas pelo próprio tempo de trânsito, induzem a transformação de variáveis $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\tau, \gamma)$. Relembrando, as equações do raio parametrizadas pelo tempo de trânsito são dadas por

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau} = c^2 \boldsymbol{p}, \qquad (3.2a)$$

$$\frac{dp}{d\tau} = c \,\nabla\eta, \tag{3.2b}$$

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = c^2, \qquad (3.2c)$$

$$\frac{dW}{d\tau} = \Pi W \tag{3.2d}$$

onde W e II são definidos por

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$
(3.2e)

e as matrizes $B \in C$, de dimensão (3 \times 3), são dadas por

$$\boldsymbol{B} = c^2 \Big[\eta \nabla^2 \eta - \nabla \eta \nabla \eta^T \Big], \qquad (3.2f)$$

$$\boldsymbol{C} = c^2 \left[I - 2c^2 \boldsymbol{p} \boldsymbol{p}^T \right]. \tag{3.2g}$$

Assumindo a transformação de variáveis induzida pelas equações do raio dadas acima, pode-se de maneira alternativa definir uma frente de onda diretamente como uma curva parametrizada $\Psi(\tau_0)$, isto é,

$$\Psi(\tau_0) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\tau_0, \gamma), \ \gamma \in \mathbb{R} \right\},$$
(3.3)

e x é a solução de (3.2a).

Combinando a definição acima (3.3), com a definição implícita (3.1), obtém-se a equação

$$\tau(\boldsymbol{x}(\tau_0,\gamma)) = \tau_0, \qquad (3.4)$$

que, quando diferenciada com relação a γ , dá origem à expressão

$$\nabla \tau \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \gamma} = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{u} = 0, \qquad (3.5)$$

onde foi usada a regra da cadeia para derivadas. Esta equação mostra que os raios são ortogonais às frentes de onda (veja Figura 3.1).



3.3 PROPAGAÇÃO DE FRENTES DE ONDA

Assumindo que uma frente de onda $\Psi(\tau)$ já esteja amostrada, pode-se construir uma nova frente de onda $\Psi(\tau + d\tau)$, usando $\Psi(\tau)$ e a velocidade do meio. Para isto, basta considerar cada ponto amostrado da frente de onda $\Psi(\tau)$ como um ponto inicial de propagação de um raio que parte perpendicular à própria frente de onda. O método numérico usado para propagar cada raio é o a integração numérica das equações do raio (3.2a)–(3.2d), usando o método de Runge-Kutta de quarta ordem (veja Apêndice E).

A coleção de todos os pontos finais dos raios propagados por $d\tau$ unidades de tempo é a nova frente de onda. Este processo pode ser visualizado com o auxílio da Figura 3.2

Um conceito essencial na construção de frentes de onda é a *célula*, um quadrilátero composto pelos nós que são as interseções de raios vizinhos e frentes de ondas consecutivas. Isto é, uma célula C da malha RFO pode ser definida pelos seus quatro vértices $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$, sendo denotada por

$$\mathcal{C} = \Box[ABCD]. \tag{3.6}$$

Observe pela Figura 3.3 que as células não necessariamente precisam ser convexas. Se C é uma célula convexa, então ela pode ser considerada como a união de dois triângulos, $\triangle[ABC] \in \triangle[CBD]$,





Figura 3.2: Uma nova frente de onda no instante $\tau + d\tau$ é construída usando traçamento de raios usando a frente de onda no instante anterior τ como condição inicial.

isto é,

$$\mathcal{C} = \triangle[ABC] \cup \triangle[BCD].$$

Por outro lado, se C é não-convexa, então pode ser vista como a união de outros dois triângulos, $\triangle[ABM] \in \triangle[CDM]$, isto é,

$$\mathcal{C} = \triangle[ABM] \cup \triangle[CDM].$$

No processo CFO, é construído uma emaranhado de células que lembra uma teia de aranha. Entretanto, da forma que são construídas, estas células possuem uma topologia, no sentido em que para cada célula está bem definido quais são suas células vizinhas. Sendo assim, pode-se interpretar esta coleção de células como uma malha irregular, sobre a qual certas quantidades possam estar amostradas.

O problema consiste em que esta malha pode dobrar sobre si mesma, comprometendo a unicidade da solução. Ainda assim, para problemas em propagação de ondas sísmicas, isto é possível existir. O que se faz é ir guardando separadamente as várias instâncias, isto é, a um ponto na malhaalvo pode estar associado um vetor de quantidades, oriundas de diferentes células. Usualmente, este vetor está ordenado em ordem crescente pelo tempo de trânsito interpolado.



Figura 3.3: Uma célula é um quadrilátero composto pelos vértices que são as interseções de raios vizinhos (em azul) e frentes de ondas consecutivas (em vermelho). À esquerda está representada uma célula convexa; à direita é mostrada uma célula não convexa, originada pela existência de uma cáustica em M.

3.4 CONTROLE DE DENSIDADE DE RAIOS

A principal finalidade de um controle de densidade de raios ao longo das frentes de onda é assegurar que as quantidades necessárias aos processos de imageamento sísmico baseado em teoria dos raios, tais como as quatro operações de Kirchhoff, bem como à conversões tempo-profundidade, estejam bem amostradas. A regularidade de raios está diretamente ligada ao grau de confiabilidade que se deseja obter das interpolações no processo de projeção das células para o malha regular. Sua importância pode ser visualizada com o auxílio da Figura 3.4, onde pode-se ver a zona de sombra resultante da falta do controle de densidade

3.4.1 Critérios para a criação de novos raios

Assim que uma nova frente de onda é construída, através de nós que foram propagados pelos raios, deve-se avaliar se estes nós estão, ou não, densamente distribuídos ao longo desta nova frente de onda.

Em geral, estipula-se um critério de densidade mínima a ser cumprida, mas, no entanto, também é possível estabelecer um critério de densidade máxima. Em termos computacionais, o citério de densidade mínima estimula a criação de novos nós na frente de onda, enquanto a densi-



Figura 3.4: Exemplo de construção de frentes de onda, usando: (a) controle de densidade e (b) sem controle de densidade. Com o controle de densidade, novos raios são criados somente quando se torna necessária a manutenção de uma regularidade suficente.

dade máxima age no sentido oposto, eliminando nós desnecessários.

Os critérios mais usuais são quatro:

Distância euclidiana — Este critério, que foi originalmente introduzido por Vinje et al. (1993), é o mais simples, porém bastante eficaz. Trata-se de verificar se dois nós estão próximos, ou não, segundo alguma tolerância dada. Matematicamente, basta verificar

$$\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\| \le h_{\max},$$

onde $h_{máx}$ é distância máxima permitida que, em geral, deve ser da ordem de grandeza do espaçamento da malha-alvo.

Ângulo do vetor vagarosidade — Este critério (Lucio *et al.*, 1996) considera que o ângulo entre os vetores vagarosidade de raios vizinhos, p_1 e p_2 , deve satisfazer

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2}{\|\boldsymbol{p}_1\| \|\boldsymbol{p}_2\|} = c_1 c_2 \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 \le \cos\theta_{\text{máx}}$$

onde $\theta_{máx}$ é o ângulo máximo permitido.

Em geral, o critério de ângulo entre vetores vagarosidade é aplicado em conjunto com o critério anterior, pois dois raios vizinhos podem se separar muito, mesmo satisfazendo o critério de

ângulo entre vetores vagarosidade. Por outro lado, este critério pode detectar uma grande divergência (ou convergência) potencial entre raios que estejam cumprindo o critério de distância euclidiana.

Distância paraxial absoluta — Este critério, apresentado em Lucio *et al.* (1996), é o mais sofisticado. Trata-se de verificar se dois nós estão na zona paraxial um do outro, e vice-versa. Matematicamente, basta verificar

$$egin{array}{lll} \|oldsymbol{x}_1 - oldsymbol{ar{x}}_2\| &\leq e_{ ext{máx}} \ \|oldsymbol{ar{x}}_1 - oldsymbol{x}_2\| &\leq e_{ ext{máx}} \end{array}$$

onde \bar{x}_1 e \bar{x}_2 são as aproximações paraxiais com relação ao nó 1 e ao nó 2, respectivamente

$$\bar{\boldsymbol{x}}_1 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{u}_1 \,\delta \gamma_1 \tag{3.7}$$

$$\bar{\boldsymbol{x}}_2 = \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{u}_2 \,\delta\gamma_1 \tag{3.8}$$

O critério de distância paraxial engloba os dois critérios anteriores, mas é algo mais. A zona de paraxialidade é uma região em torno do raio, na qual as quantidades podem ser aproximadas linearmente a partir do raio central. Isto quer dizer que se um raio está na região de paraxialidade do outro, as quantidades interpoladas linearmente entre os dois raios têm um grande grau de confiabilidade.

Distância paraxial relativa — Trata-se somente de uma sofisticação do critério anterior. Neste caso, considera-se o ângulo entre os vetores genéricos q_1 e q_2

$$\cos \psi = \frac{q_1 \cdot \bar{q}_2}{\|q_1\| \|\bar{q}_2\|} \le \cos \psi_{\max}, \qquad (3.9)$$

$$\cos \psi = \frac{\bar{q}_1 \cdot q_2}{\|\bar{q}_1\| \|q_2\|} \le \cos \psi_{\text{máx}}, \qquad (3.10)$$

onde $\psi_{\text{máx}}$ é o ângulo máximo permitido. O vetor genérico é definido como $q_j = (x_j, p_j)$, para j = 1, 2 e suas aproximações paraxiais são dadas por

$$\bar{\boldsymbol{q}}_1 = \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{x}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{p}}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{p}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{v}_1 \end{pmatrix} \delta \gamma_1$$
(3.11)

e similarmente para $ar{q}_2$.

3.5 CRIAÇÃO DE NOVOS RAIOS

A criação de um novo raio é uma indicação do critério de densidade de raios. Quando o critério de densidade falha para dois raios vizinhos Λ_1 e Λ_2 , na frente de onda $\tau + 2d\tau$, deve-se iniciar a propagação de um novo raio Λ_3 na frente de onda $\tau + d\tau$ entre os raios vizinhos. Entretanto, as condições iniciais deste novo raios são especiais, pois dependem basicamente das quantidades dos raios vizinhos e do meio. Observe este procedimento com auxílio da Figura 3.5.



Figura 3.5: Quando o critério de densidade de raios falha na frente de onda $\tau + 2d\tau$, é necessário criar um novo raio (raio 3) entre dois raios já existentes (raios 1 e 2), na frente de onda $\tau + d\tau$.

Nos dois nós correspondentes à frente de onda em $\tau + d\tau$ estão disponíveis oito quantidades, a saber: as coordenadas dos nós (quatro) e os vetores vagarosidade nos dois nós (quatro componentes).

Para uma interpolação de Hermite (veja Apêndice E) pode-se exigir que a frente de onda passe pelos dois nós $x_1 e x_2 e$ que seja ortogonal aos vetores vagarosidade dos dois nós, $p_1 e p_2$. Isto é, impondo que a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ seja tal que

$$\varphi(\gamma_1) = \boldsymbol{x}_1, \quad (3.12)$$

$$\varphi(\gamma_2) = \boldsymbol{x}_2, \qquad (3.13)$$

$$\varphi'(\gamma_1) = u_1, \qquad (3.14)$$

$$\varphi'(\gamma_2) = u_2. \tag{3.15}$$

Aqui, a função vetorial $\varphi = (\varphi_1, \varphi_3)$ é uma função polinomial de terceiro grau em γ . A posição e

vagarosidade iniciais do novo raio são, portanto, escolhidas como

$$\boldsymbol{x}_n = \varphi(\bar{\gamma}) \tag{3.16}$$

$$\boldsymbol{p}_{n} = c(\boldsymbol{x}_{n})(-\varphi_{3}',\varphi_{1}')/||\varphi'|||_{\gamma=\bar{\gamma}}$$
(3.17)

onde $\bar{\gamma} = (\gamma_1 + \gamma_2)/2\,$ e (') denota diferenciação com relação a γ .

3.6 CONSTRUÇÃO DA MALHA RFO (RAIOS E FRENTES DE ONDA)

O coleção de todos os nós das frentes de onda forma um conjunto que pode ser considerado uma malha irregular. Devido a forma como foram construídos, estes nós formam uma topologia, isto é, para cada nó, fica bem estabelecido quem são os nós vizinhos, baseado em frentes de onda e raios. Esta topologia tem como base os pontos cardeais em relação ao nó. O exemplo da Figura 3.6



Figura 3.6: Exemplo da topologia dos nós.

pode ser expresso através das seguintes atribuições :

 $n \delta[200].norte = 130,$ $n \delta[200].leste = 201,$ $n \delta[200].sul = 245,$ $n \delta[200].oeste = 199.$

Quando o nó não possui vizinhos em uma direção, é atruibuído o valor -1 naquela direção. Isto indica que o nó está na borda da malha irregular.

A partir desta topologia entre os nós, o emaranhado de células é construído, denominado malha RFO (raios e frentes de onda), criando uma nova topologia que identifica a vizinhança entre


as células (veja Figura 3.7). Mais especificamente, dado o nó n da malha irregular de raios e frentes

Figura 3.7: À esquerda: exemplo de montagem de uma célula $\Box[A, B, C, D]$. À direita: em azul claro a vizinhança de uma célula $\Box[A, B, C, D]$.

de onda, uma célula $\Box[A, B, C, D]$ relacionada a este nó é construída como

$$A = n\delta[n],$$

$$B = n\delta[A.leste],$$

$$C = n\delta[A.sul],$$

$$D = n\delta[B.sul].$$

3.7 INTERPOLAÇÃO DAS INFORMAÇÕES NA MALHA-ALVO

Após a construção da malha RFO, é necessário projetar as informações dos seus nós para a malha-alvo, que pode ser uma malha regular, uma seqüência de pontos ou até mesmo uma malha irregular. O algoritmo de projeção pode ser divido em três etapas: pré processamento, conexão dos pontos da malha-alvo às células e interpolação.

3.7.1 Pré-processamento

Na prática, a projeção somente deve levar em conta os nós que estão dentro da interseção entre os contornos das duas malhas. Sendo assim a rotina de pré-processamento deve levar em conta quatro casos (veja Figura 3.8):

1. A interseção é vazia. Neste caso a rotina retorna uma mensagem de erro;

- 2. A interseção é a própria malha-alvo. Neste caso a rotina rejeita os nós da malha RFO que estejam fora do contorno da malha-alvo;
- A interseção é a própria malha RFO. Neste caso a rotina rejeita os nós da malha-alvo que estejam fora do contorno da malha RFO;
- A interseção não é a malha RFO nem a malha-alvo. Neste caso a rotina rejeita os nós da malha RFO e da malha-alvo que estejam fora do contorno da interseção;



Figura 3.8: Pré-processamento. A malha-alvo está em azul e a malha RFO está em amarelo. À esquerda e acima: as duas malhas não se interceptam (caso 1); À esquerda e abaixo: a interseção é a malha-alvo (caso 2); À direita e acima: a interseção é a malha RFO (caso 3); À direita e abaixo: a interseção é não vazia (caso 4).

3.7.2 Conexão entre pontos e células

Após o pré-processamento, há a geração de um subconjunto de células da malha-alvo que se interceptam. É nesse subconjunto que é realizado o processo de conexão entre os pontos da malhaalvo e células. O critério desta conexão é saber se um dado ponto da malha-alvo pertence ou não ao interior de uma célula. Isto quer dizer que um ponto está conectado à uma célula se ele está no interior desta célula. Como a malha RFO pode dobrar sobre si mesma, um mesmo ponto pode estar conectado a mais de uma célula. Além disso, pode ocorrer que a uma mesma célula estejam conectados vários pontos da malha-alvo (veja Figura 3.9).



Figura 3.9: À esquerda: exemplo de uma célula conectada a vários pontos da malha-alvo: os pontos pretos estão no interior da célula enquanto os brancos, não; À direita: exemplo de um ponto da malha-alvo conectado a mais de uma célula.

Dadas estas características, optou-se pelo desenvolvimento do algoritmo como uma busca por células, isto é, uma varredura por células é realizada, a fim de estabelecer a conexão entre células e malha-alvo. O algoritmo usa o teste do ponto-interior-ao-triângulo, apresentado no Apêndice G. **Algoritmo ponto-interior-à-célula:**

- 1. Para cada célula \mathcal{C} da malha RFO faça:
 - (a) Escolha os pontos x que pertencem à caixa \mathcal{B} que contém \mathcal{C} ;
 - (b) Se C é convexa: Se x pertence ao interior do triângulo $\triangle[ABC]$ ou ao interior do triângulo $\triangle[BCD]$, então x pertence ao interior de C;
 - (c) Se C é não-convexa: Computar o ponto M, a interseção dos segmentos AC e BD;
 Se x pertence ao interior do triângulo △[ABM] ou ao interior do triângulo △[CDM], então x pertence ao interior de C.

3.7.3 Criação de painéis de dados

Após a estabelecida a conexão entre os pontos da malha-alvo e células, entra em ação a interpolação dos dados presentes nos nós de cada célula para os pontos da malha alvo que lhe estejam conectados. O método usado é a interpolação linear tendo como base os triângulos que formam as células.

No algoritmo CFO, a criação de painéis de dados é a parte que consome maior tempo de execuçao, constituindo o "gargalo" do algoritmo. Isto se deve ao fato dos subalgoritmos nucleares da projeção serem ineficientes. Mais especificamente, o algoritmo do ponto-interior-ao-triângulo é o principal responsável pelo consumo de tempo. Aliado a isto, o fato da malha RFO não ter um comportamento de unicidade na projeção sobre a malha-regular faz com que o tempo seja ainda maior, pois não se pode aproveitar a topologia de vizinhança das células para a elaboração de heurísticas que acelerem a projeção. Em outras palavras, é necessário fazer testes com todas as células para todos os nós da malha-alvo.

Como uma tentativa de otimizar o código, foi considerada uma versão do algoritmo do pontointerior-à-célula destinada a números inteiros. Para isto, durante o processo de projeção, coordenadas espaciais em metros representadas por reais são convertidas e truncadas para centímetros, sendo, portanto, representadas por inteiros. Este procedimento reduziu em cerca de 70% o tempo de execução. Como o algoritmo é nuclear, esta porcentagem se repetiu em todo o processo CFO.

3.8 RESUMO DO MÉTODO CFO

1. Dados de entrada e condições iniciais

- (a) Deve-se definir a malha-alvo: uma malha bidimensional regular de pontos ou até mesmo um conjunto qualquer de pontos no plano, como por exemplo uma curva;
- (b) Deve-se fornecer um modelo de macro-velocidade amostrado em uma malha bidimensioanl regular, não necessariamente a malha-alvo. Para este modelo uma spline bi-cúbica é constuída. Em seguida um novo modelo superamostrado é criado usando a spline bicúbica;
- (c) Deve-se impor as condições inicias: de fonte pontual ou de refletor explosivo. Fonte

pontual: deve-se fornecer a posição da fonte e os ângulos dos vetores vagarosidade. Refletor explosivo: deve-se fornecer o refletor amostrado; os vetores vagarosidade são computados automaticamente;

- (d) Deve-se fornecer os parâmetros que controlam a densidade dos raios;
- (e) Deve-se escolher tempo máximo de propagação e amostragem temporal $d\tau$;
- 2. Propagação de frentes de onda
 - (a) Dada a frente de onda de tempo n dτ, amostrada em nós no plano, achar a nova frente de onda (n+1) dτ, através de traçamento de raios usando Runge-Kutta de quarta ordem (cf. Apêndice E);
 - (b) Analisar a nova frente de onda amostrada segundo o critério de densidade de raios (*cf.* Seção 3.7). Quando necessário, criar raios novos usando interpolação de Hermite (*cf.* Apêndice F), ou até mesmo eliminar raios (não está implementado);

3. Criação da malha RFO através de células

- (a) Após a construção de todos os raios e frentes de onda. Tomar as interseções entre raios e frentes de onda, chamados nós, e construir as células;
- (b) Montar uma topologia entre as células, isto é, para cada célula deve-se saber quais são as células vizinhas;
- 4. Projeção das quantidades da malha RFO para malha-alvo
 - (a) Realizar o pré-processamento descrito na Subseção 3.7.1;
 - (b) Para cada célula descobrir o(s) ponto(s) que a seu interior pertencem;
 - (c) Para cada ponto da malha-alvo, realizar uma interpolação linear, usando os três vértices do triângulo ao qual o ponto pertence (*cf.* Apêndice G). Se o ponto pertencer a mais de uma célula, repetir tantas vezes quanto necessário, ou até um número máximo de vezes fornecido pelo usuário.

3.9 EXEMPLO

Nesta seção é apresentado um exemplo da construção da malha RFO, bem como da interpolação de algumas quantidades usadas em imageamento na malha-alvo. Mais especificamente, são mostrados painéis do tempo de trânsito e do espalhamento geométrico.

O exemplo é tal que as frentes de onda encontram uma cáustica, fazendo com que a malha RFO dobre sobre si mesma. Isto quer dizer que existe uma região da malha-alvo onde existem três amostras de cada quantidade interpolada para cada ponto nesta região.

O modelo de velocidades considerado pode ser conferido na Figura 3.10. Trata-se de um meio não homogêneo, contendo um foco enterrado de baixa velocidade.



Figura 3.10: Modelo de velocidades para a construção de frentes de onda. O quadro branco indica a fronteira da malha-alvo, onde as informações serão interpoladas.

A Figura 3.11 mostra a malha RFO restrita à caixa definida pela fronteira da malha-alvo. Podese observar que a para a região aproximadamente abaixo e à direita, a unicidade da interpolação das quantidades da malha RFO na malha-alvo passa a não existir. Isto se deve a cáustica localizada aproximadamente em (50,1000)m.

A Figura 3.12 mostra os três painéis de tempos de trânsito, ordenados de modo crescente. Isto quer dizer que no painel (a) os tempos equivalem à primeira chegada de frente de onda; em (b) são os tempos da segunda chegada e em (c) da terceira chegada.



Figura 3.11: A malha RFO restrita à caixa definida pela fronteira da malha-alvo. Na região aproximadamente abaixo e à direita, a malha RFO dobra sobre si mesma, como resultado da cáustica localizada aproximadamente em (50,1000)m.



Figura 3.12: Painéis de tempo de trânsito ordenados de maneira crescente para cada ponto da malha-alvo: (a) primeira chegada, (b) segunda chegada e (c) terceira chegada.

A Figura 3.13 mostra os três painéis do espalhamento geométrico ordenados segundo a chegada da frente de onda. Isto quer dizer que no painel (a) os valores equivalem à primeira chegada de frente de onda; em (b) são os valores da segunda chegada e em (c) da terceira chegada. Observe no



Figura 3.13: Painéis de espalhamento geométrico ordenados pelo tempo de trânsito: (a) primeira chegada, (b) segunda chegada e (c) terceira chegada.

painel (a) que na região anterior à cáustica (área azul escuro), o Jacobiano é próximo de zero, pois a cáustica é uma região onde o vetor u se anula, uma vez que para uma variação em γ há uma pequena variação em x na frente de onda (veja Figura 3.11).

Sendo assim, como o Jacobiano se anula, a transformação de variáveis $(\tau, \gamma) \leftrightarrow (x_1, x_3)$ passa a não ter unicidade, implicando que na cáustica haja uma superposição de raios com condições iniciais distintas. Como uma infinidade de raios atinge a cáustica ao mesmo tempo, isto implica que na vizinhança anterior e posterior à caustica, a amplitude assume um valor alto, chegando a ter uma singularidade (do tipo " ∞ ") exatamente sobre a cáustica.

APÊNDICES

E MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM

Como pode ser encontrado em Cunha (1993), o método de Runge-Kutta de quarta ordem pode ser aplicado ao sistema de equações do raio, parametrizado pelo tempo de trânsito,

$$\frac{d\boldsymbol{q}}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{q}) \tag{3.18}$$

onde q = (x; p; u; v) e

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} c^2 \boldsymbol{p} \\ c \nabla \eta \\ c^2 \left[I - c^2 \boldsymbol{p} \boldsymbol{p}^T \right] \boldsymbol{v} \\ c^2 \left[- \nabla \eta \nabla \eta^T + \eta \nabla^2 \eta \right] \boldsymbol{u} \end{pmatrix},$$

 $\operatorname{com} c = c(\boldsymbol{x}) e \eta = \eta(\boldsymbol{x}) = 1/c(\boldsymbol{x}).$

Runge-Kutta de quarta ordem para o sistema dos raios (3.18):

F INTERPOLAÇÃO DE HERMITE

A interpolação de Hermite é utilizado no algoritmo de construção de um novo raio entre dois raios vizinhos. Suponha que sejam dados dois valores (y_1, y_2) amostrados em dois pontos distintos, (x_1, x_2) , e deseja-se interpolar estes pontos por meio de um polinômio cúbico. Suponha ainda que a forma deste polinômio cúbico seja

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2) + a_3(x - x_1)(x - x_2)^2.$$
 (3.19)

Impondo as condições de interpolação puras, obtém-se o sistema

$$y_1 = p(x_1) = a_0,$$
 (3.20)

$$y_2 = p(x_2) = a_0 + a_1 h,$$
 (3.21)

cuja solução é $a_0 = y_1$ e $a_1 = (y_2 - y_1)/h$, onde $h = (x_2 - x_1)$.

Entretanto falta determinar os valores de a_2 e a_3 para que o polinômio interpolador seja único. Existem inúmeras maneiras de se impor condições ao polinômio interpolador.

A interpolação de Hermite faz uso das derivadas nos extremos. Suponha que além dos dados y_1 e y_2 , também sejam conhecidos os valores das derivadas nestes pontos, isto é, $y'_1 e y'_2$. O polinômio interpolador de Hermite é obtido através da imposição de que a derivada do polinômio nos pontos $x_1 e x_2$ sejam iguais a $y'_1 e y'_2$ respectivamente. Sendo assim, é obtido o sistema

$$y'_1 = p'(x_1) = a_1 - a_2 h + a_3 h^3,$$
 (3.22)

$$y'_2 = p'(x_2) = a_1 + a_2 h,$$
 (3.23)

cuja solução é $a_2 = (a_1 - y_1')/h$ e $a_3 = (y_1' + y_2' - 2a_1)/h^2$, onde $h = (x_2 - x_1)$.

G PONTO-INTERIOR-AO-TRIÂNGULO

O problema de se determinar se um ponto pertence ou não ao interior de um triângulo é comum no âmbito da geometria computacional e existem várias maneiras de se chegar a uma solução satisfatória. Aliás, pode-se mostrar que todas estas maneiras são equivalentes entre si. No entanto, modos diferentes de se resolver este problema geram algoritmos que podem ser mais, ou menos, eficientes. Dados três pontos não alinhados no plano, $A, B, C \in \mathbb{R}^2$, (formando um triângulo) deseja-se saber se um quarto ponto $P \in \mathbb{R}^2$, pertence ou não ao interior do triângulo (veja Figura G.1b).



Figura G.1: Em (a) o vetor y está à esquerda do vetor x. Em (b) o ponto P é interior ao triângulo $\triangle[A, B, C]$.

Para resolver este problema considere a solução do seguinte subproblema: dados dois vetores, $x \in y$ decidir se y está à esquerda ou à direita de x. Solução (veja Figura G.1a):

Vetor à esquerda: s = esquerda(x, y)

- 1. Dados $x = (x_1, x_2) e y = (y_1, y_2);$
- 2. Computar $e = x_1y_2 x_2y_1$;
- 3. Caso e > 0 retorne s = 1 (y está à esquerda de x), caso e > 0 retorne s = -1 (y está à direita de x), caso contrário retorne s = 0 (y está sobre x).

Para a solução do problema original considere o algoritmo (veja Figura G.1b):

Ponto interior-ao-triângulo: i = triangulo(A, B, C, P)

- 1. Dados $A, B, C \in P$;
- 2. Construir os vetores \vec{AB} , \vec{AP} , \vec{BC} , \vec{BP} , $\vec{CA} \in \vec{CP}$;
- 3. Se \vec{AB} está à esquerda de \vec{AP} , \vec{BC} está à esquerda de \vec{BP} e \vec{CA} está à esquerda de \vec{CP} , então P está no interior de $\triangle[A, B, C]$. Caso contrário P não é ponto interior de $\triangle[A, B, C]$.

H SPLINES BI-CÚBICAS

Neste apêndice é apresentada a interpolação de dados usando splines bi-cúbicas, com a premissa de que estes dados estejam amostrados regularmente. A escolha de índices bem como aspectos algorítmicos são escolhidos de modo a parecerem o máximo possível com a linguagem C.

O problema bidimensional da interpolação com splines bi-cúbicas pode ser reduzido a vários problemas de interpolação unidimensionais com splines cúbicas. Sendo assim, neste apêndice uma abordagem mais aprofundada é dada às splines cúbicas usadas neste trabalho. Em seguida é apresentado o algoritmo que trata da interpolação bi-cúbica.

H.1 Splines cúbicas

Considere os pontos amostrados: (x_k, y_k) , para k = 0, ..., n - 1, onde $x_k = x_0 + kh$. Uma spline cúbica é uma função polinomial de terceiro grau por partes que tem dois compromissos básicos: (a) interpolar os dados e (b) ser C^2 em todo o domínio, isto é, possuir derivadas de primeira e segunda ordens contínuas. Em geral, a expressão da spline interpolante é dada por

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k \mathcal{B}_k(x), \qquad (3.24)$$

onde os n + 2 coeficientes a_k dependem dos n dados e de duas condições nas extremidades. A Figura H.1 mostra um exemplo de interpolação por spline cúbica de dados amostrados.



Figura H.2: Um exemplo de interpolação por spline cúbica. Os pontos pretos são os dados e a curva com linha cheia é a spline cúbica interpolante.

H.2 A função B-spline cúbica

A função B-spline cúbica, também chamada de *função sino*, é a base para a construção da splines cúbicas. É composta pela colagem de quatros funções polinomiais de terceiro grau:

$$\mathcal{B}_{k}(x) = \begin{cases} \mathcal{B}_{k}^{\mathrm{I}}(x) = \frac{1}{6} \left(\frac{x - x_{k-3}}{h}\right)^{3} \\ \mathcal{B}_{k}^{\mathrm{I}}(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{x - x_{k-2}}{h}\right)^{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{x - x_{k-2}}{h}\right)^{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{x - x_{k-2}}{h}\right) + \frac{1}{6} \\ \mathcal{B}_{k}^{\mathrm{II}}(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{x_{k} - x}{h}\right)^{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{x_{k} - x}{h}\right)^{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{x_{k} - x}{h}\right) + \frac{1}{6} \\ \mathcal{B}_{k}^{\mathrm{IV}}(x) = \frac{1}{6} \left(\frac{x_{k+1} - x}{h}\right)^{3} \end{cases}$$

$$(3.25)$$

onde h é o espaçamento da malha, isto é, $x_n = x_0 + n h$. O gráfico da função B_k pode ser visualizado na figura abaixo. Repare que o ponto x_k não é o ponto onde a função B_k atinge seu máximo; isto se deve à escolha de numeração de índices para que a implementação computacional na linguagem C fosse imediata. A função sino pode ser vista através da Figura H.2



Figura H.3: A função sino $\mathcal{B}_k(x)$.

H.3 Base local

Suponha que os coeficientes a_k sejam conhecidos. O próximo passo é avaliar a função interpolante, isto é, a spline em dado um ponto x. Para isto, é necessário descobrir, em primeiro lugar, a que subintervalo $[x_k, x_{k+1})$ o ponto x pertence. Como é assumido que a malha é regular, este é um problema simples de ser resolvido, no entanto, para malhas irregulares, é necessário fazer uma busca. Para descobrir o itervalo, basta computar

$$k = \texttt{floor}((x - x_0)/h),$$

onde h é espaçamento da malha e floor(r) é a operação que retorna a parte inteira do número real r.

Assumindo que $x \in [x_k, x_{k+1})$, para avaliar p(x), considera-se seja uma combinação linear de partes de funções sinos, isto é,

$$p(x) = a_k \mathcal{B}_k^{\mathbb{N}}(x) + a_{k+1} \mathcal{B}_{k+1}^{\mathbb{II}}(x) + a_{k+2} \mathcal{B}_{k+2}^{\mathbb{I}}(x) + a_{k+3} \mathcal{B}_{k+3}^{\mathbb{I}}(x).$$
(3.26)

Para o intervalo $[x_k, x_{k+1})$, as quatro partes de funções sinos diferentes formam a base local associada a $[x_k, x_{k+1})$. A base local pode ser visualisada com auxílio da Figura H.3.



Figura H.4: A k-ésima base local.

Escrevendo (3.26) ainda mais explicitamente, obtém-se

$$p(x) = \frac{a_k}{6} \left(\frac{x_{k+1} - x}{h}\right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{x_{k+1} - x}{h}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{x_{k+1} - x}{h}\right) + \frac{1}{6} \\ + a_{k+2} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - x_k}{h}\right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{x - x_k}{h}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{x - x_k}{h}\right) + \frac{1}{6} \right]$$
(3.27)
$$+ \frac{a_{k+3}}{6} \left(\frac{x - x_k}{h}\right)^3.$$

Vale lembrar que a fórmula apresentada acima não é computacionalmente a mais eficiente. Neste caso, de avaliação polinomial, deve-se usar a técnica de parênteses encaixantes, isto é,

$$p(x) = \frac{a_{k+1}}{6} + \left(\frac{x_{k+1} - x}{h}\right) \left\{ \frac{a_{k+1}}{2} + \left(\frac{x_{k+1} - x}{h}\right) \left[\frac{a_{k+1}}{2} + \left(\frac{a_k}{6} - \frac{a_{k+1}}{2}\right) \left(\frac{x_{k+1} - x}{h}\right) \right] \right\} + \frac{a_{k+2}}{6} + \left(\frac{x - x_k}{h}\right) \left\{ \frac{a_{k+2}}{2} + \left(\frac{x - x_k}{h}\right) \left[\frac{a_{k+2}}{2} + \left(\frac{a_{k+3}}{6} - \frac{a_{k+2}}{2}\right) \left(\frac{x - x_k}{h}\right) \right] \right\}.$$

H.4 Condições interpolantes

A interpolação por splines requer as usuais restrições de interpolação, isto é, a spline interpolante deve passar pelos pontos dados. Matematicamente, essa condição se traduz em impor

$$p(x_k) = f(x_k),$$
 para $k = 0, ..., n-1.$ (3.28)

Entretanto, ainda faltam duas restrições adicionais, pois no caso de n amostras a serem interpoladas, a spline é construída com n+2 coeficientes a_k , k = 0, ..., n+1. Qualquer condição pode ser imposta, mas, em geral, são escolhidas três tipos de condições: condições de Hermite, condições periódicas e, finalmente, condições de extremo natural. Estas últimas são as condições escolhidas para este trabalho e são descritas matematicamente em exigir que a derivada segunda nos extremos seja nula, isto é,

$$p''(x_0) = p''(x_{n-1}) = 0. (3.29)$$

H.5 Splines bi-cúbicas

Uma vez dominada a construção de splines cúbicas, é possível usar o algoritmo para se construir splines bi-cúbicas, pois o problema da interpolação bi-cúbica pode ser resolvido com várias interpolações por splines cúbicas. Para este trabalho considerou-se somente as condições de extremo natural.

Considere uma malha regular $R = \{(x_k, z_j) \in \mathbb{R}^2 | k = 0, ..., n - 1, j = 0, ..., m - 1\},$ sobre a qual existem dados amostrados f_{jk} .

Interpolação por splines bi-cúbicas:

 Construção de coeficientes α_{jk}: para cada j, resolva um problema de interpolação por spline cúbica,

$$a_j(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_{jk} \mathcal{B}_k(x),$$
 (3.30)

com condições interpolantes $a_j(x_k) = f_{jk}$, para todo k = 0, ..., n - 1, e condição de extremo natural;

- 2. Avaliação : para um ponto $(\bar{x}, \bar{z}) \in R$ a ser avaliado,
 - (a) Construa o vetor φ_j = a_j(x̄), para j = 0, ..., n − 1 e x_k ≤ x̄ < x_{k+1}, usando a spline (3.30).
 - (b) Para os valores φ_j , resolva o problema de interpolação por spline cúbica

$$p(\bar{x}, z) = \sum_{j=0}^{m+1} \beta_j \mathcal{B}_j(z),$$
 (3.31)

com condições interpolantes $p(\bar{x}, z_j) = \varphi_j$ para todo j = 1, ..., m - 1 e condições de extremo natural.

(c) Em seguida avalie $p(\bar{x}, \bar{z})$ segunda a spline dada em (3.31).

Isócronas e curvas de difração

Neste capítulo são apresentadas as quatro superfícies mais comuns que aparacem nos processos de imageamento sísmico, ou mais precisamente, na teoria que fundamenta tais processos. O material apresentado aqui, além de servir como base para a teoria apresentada nos próximos capítulos, pode ser encarado como um estudo independente de como se relacionam as quatro superfícies básicas do processamento a saber: o refletor, a isócrona, a superficie de tempo de reflexão e a superfície de tempo de difração (ou de Huygens).

Além disso, são estudadas as relações geométricas que essas curvas possuem e como essas relações são usadas no imageamento sísmico. Estas relações são sumarizadas no teorema da dualidade, bem como nos seus corolários e sua utilização é indicada pelos exemplos sintéticos simples. No que se segue, entretanto, é abordada somente a versão bidimensional destas relações, isto é, as superfícies são tratadas como curvas.

Finalmente, são apresentados dois exemplos sobre a utilização do método CFO, descrito no capítulo anterior, para a a construção de isócronas e curvas de difração.

Nas expressões deste capítulo, a seguinte notação é adotada:

Profundidade			Tempo				
М	_	(x,z);	N	<u></u>	$(\xi,t);$		
Σ		refletor;	Γ		curva de tempo de reflexão;		
Z		isócrona;	T		curva de tempo de difração.		

4.1 INTRODUÇÃO

Das quatro curvas, duas são as mais fáceis de se entender: o refletor e a curva do tempo de reflexão. Em geral, o refletor, denotado por Σ , é o que se busca no imageamento sísmico, enquanto a curva de tempo de reflexão Γ , que é o dado de entrada. Nem sempre é fácil a identificação de uma curva de tempo de reflexão no dado sísmico, devido a ruídos e outros eventos tais como, múltiplas, refrações e difrações. Supõe-se que ambas as curvas estejam identificadas e sejam suaves, isto é, possuem derivadas de no mínimo segunda ordem.

Uma isócrona \mathcal{Z} é uma curva no domínio da profundidade que está relacionada a um ponto do domínio do tempo, isto é, para cada ponto $N = (\xi, t)$ é possível construir uma isócrona. Esta relação pode ser definida pela sentença: "Uma isócrona é o lugar geométrico dos pontos que possuem mesmo tempo de trânsito". Em outras palavras, para um dado par $N = (\xi, t)$, a isócrona $\mathcal{Z}(N)$ pode ser definida implicitamente por

$$\mathcal{Z}(N) = \left\{ M \in \mathbb{R}^2 \mid \mathcal{T}(S(\xi), M) + \mathcal{T}(M, G(\xi)) = t \right\},\tag{4.1}$$

onde $\mathcal{T}(P,Q)$ é a função que descreve o tempo de trânsito do raio entre os pontos $P \in Q$, onde $S \in G$ são a posição da fonte e do geofone, respectivamente. Uma representação de uma isócrona pode ser vista na Figura 4.1a.

Analogamente, uma curva de difração \mathcal{T} é uma curva no domínio do tempo que está relacionada a um ponto do domínio da profundidade, isto é, para cada ponto M = (x, z) corresponde uma curva de difração $\mathcal{T}(M)$, definida implicitamente por

$$\mathcal{T}(M) = \left\{ N \in \mathbb{R}^2 \mid t = \mathcal{T}(M, S(\xi)) + \mathcal{T}(M, G(\xi)) \right\}.$$
(4.2)

Uma representação de uma curva de difração pode ser conferida na Figura 4.1b.

4.2 ISÓCRONAS

Isócronas têm uma importância fundamental nos processos de imageamento sísmico. Uma isócrona pode ser vista como a imagem resposta na profundidade a um impulso do tipo delta (um "spike") na seção sísmica.



Figura 4.1: (a) Representação de uma isócrona $\mathcal{Z}(N)$; (b) Representação de uma curva de difração $\mathcal{T}(M)$ (Mais explicações no texto).

Quando um traço sísmico é processado, pode-se considerá-lo como uma seqüência de pulsos convoluído com a resposta do meio, incluindo reflexões primárias. Sendo assim, cada traço gera uma família de isócronas na profundidade, todas com os mesmos pares fonte-geofones como focos.

Traços sísmicos vizinhos produzem famílias de isócronas vizinhas. Quando há alguma coerência de dados de reflexão, isto produz uma espécie de envelope coerente dentre as famílias de isócronas. Esta propriedade é mostrada mais rigorosamente na Seção 4.4 e serve como base para os procedimentos de imageamento descritos no Capítulos 4 e 5.

Segundo Bleistein (2001), para um meio não homogêneo, a curvatura de uma isócrona, denotada por κ_{I} pode ser computada usando os atributos dos raios que saem dos focos S e G e atingem a isócrona em um mesmo ponto M. A curvatura κ_{I} pode ser escrita como

$$\kappa_{\rm I} = \frac{\cos\theta}{2} \left(\kappa_{\rm s} + \kappa_{\rm g} + \tan^2\theta\,\nabla c \cdot \nabla \tau \right) \tag{4.3}$$

onde $\kappa_s \in \kappa_g$ são as curvaturas da frentes de onda com fonte pontual em $S \in G$ respectivamente e 2θ é o ângulo entre os vetores vagarosidade $p_s \in p_g$. Note que $\nabla \tau = \nabla \tau_s + \nabla \tau_g = p_s + p_g$.

4.3 CURVAS DE DIFRAÇÃO

As curvas de difração são de grande importância para o processamento sísmico. Uma curva de difração pode ser considerada como o tempo registrado na superfície de uma onda gerada por um pulso do tipo delta em um ponto da profundidade.

4.4 TEOREMA DA DUALIDADE E APLICAÇÕES

O primeiro teorema da dualidade descreve a interação geométrica entre as quatro curvas: curva de tempo de trânsito, refletor, curva de difração e isócrona. Sua demonstração pode ser encontrada em Tygel *et al.* (1995).

Primeiro teorema da dualidade

Considere a curva de tempo de difração T(M) associada ao ponto M = (x, z), a curva de tempo de reflexão Γ , a isócrona $\mathcal{Z}(N)$ associada ao ponto $N = (\xi, t)$ e o refletor Σ . Então são válidas as seguintes propriedades:

- 1. A curva de tempo difração $T(M_R)$ é tangente à curva de tempo de reflexão Γ no ponto N_R (veja Figura 4.2).
- 2. A isócrona $\mathcal{Z}(N_{\rm R})$ e o refletor Σ são tangentes no ponto $M_{\rm R}$ (veja Figura 4.2).



Figura 4.2: Representação gráfica do primeiro teorema da dualidade.

4.4.1 Envelope de isócronas

Pode-se usar o primeiro teorema da dualidade para concluir que o envelope das isócronas relativas a pontos de uma curva de tempo de trânsito é o refletor que a gerou. Este resultado serve como base para os processos de imageamento de dados em tempo para a profundidade, tais como o demodelamento Kirchhoff e a migração Kirchhoff (veja Capiítulo 5).

O exemplo apresentado a seguir mostra o funcionamento da parte cinemática do demodelamento, que faz uso do resultado sobre o envelope de isócronas. O modelo de velocidade consiste em duas camadas homogêneas separadas por uma interface suave (veja Figura 4.3). A velocidade acima da interface é de 2.5m/ms e abaixo da interface é de 3.0m/ms



Figura 4.3: Modelo de velocidade com uma duas camadas homogêneas, separadas por uma interface suave.

Para a construção da seção sísmica, foram considerados pares fonte-geofones na configuração de afastamento constante (2h = 260m) e o modelamento utilizado foi por teoria dos raios (veja Figura 4.4).

Na Figura 4.5 são construídas isócronas relativas à curva do tempo de reflexão mostrada na Figura 4.4. Este procedimento comprova graficamente o fato de que o envelope formado por estas isócronas é exatamente o refletor.

4.4.2 Envelope de curvas de difração

Analogamente ao resultado da seção anterior, pode-se usar o primeiro teorema da dualidade para concluir que o envelope das curvas de difração relativas a pontos de um refletor é a curva de tempo de trânsito. Este resultado também serve como base para os processos de imageamento de



Figura 4.4: Seção sísmica sintética de afastamento constante (2h = 260m), gerada por teoria dos raios, usando o modelo da Figura 4.3.



Figura 4.5: Isócronas relativas à curva de tempo de reflexão construídas em ordem aleatória. Da esquerda para direita, de cima para baixo, o número de isócronas aumenta. Pode-se notar que aumentando exaustivamente o número de isócronas, o envelope formado é igual ao refletor mostrado na Figura 4.3.

dados em profundidade para o tempo, tais como o modelamento Kirchhoff e a demigração Kirchhoff (veja Capítulo 5).

Tomando como base os dados do exemplo da seção anterior, pode-se construir para cada ponto do refletor a sua curva de difração correspondente. O procedimento aqui mostrado é a parte cinemática do modelamento Kirchhoff. Tanto o modelo como o dado sísmico utilizados são os mesmos do exemplo da subseção anterior.

Na Figura 4.6 são construídas as curvas de difração, cujos pontos difratores estão sobre o refletor mostrado na Figura 4.3. Este procedimento mostra graficamente o fato de que o envelope formado por estas curvas de difração é a curva de tempo de reflexão mostrada na Figura 4.4.



Figura 4.6: Curvas de difração relativas a refletor construídas em ordem aleatória. Da esquerda para direita, de cima para baixo, o número de curvas de difração aumenta. Pode-se notar que aumentando exaustivamente o número de curvas de difração o envelope formado é igual a curva de tempo de reflexão mostrada na Figura 4.4.

4.5 EXEMPLOS

Nesta seção são apresentados dois exemplos de como o método CFO, apresentado no capítulo anterior, pode ser usado para se construir isócronas e curvas de tempo de difração.

4.5.1 Construção de isócronas

Neste exemplo é mostrado como construir isócronas usando o método CFO apresentado no Capítulo 3. A Figura 4.7 exibe o modelo de velocidades usado, onde o retângulo branco indica a fronteira da malha-alvo considerada.

Os focos das isócronas, isto é, o par fonte-receptor está localizado sobre o eixo x, mais espe-



Figura 4.7: Modelo de velocidade não homogêneo e suave. O retângulo fronteira indica a borda da malhaalvo considerada

cificamente em S = (-500, 0) m e G = (500, 0) m. Para o traçador de raios do método CFO, foram adotadas as condições iniciais de fonte pontual. Além disso é realizado um procedimento heurístico para escolha do ângulos iniciais, a fim de que o feixe de raios passe completamente pela malha alvo. Porém com os raios limítrofes bem perto da fronteira. Estas características podem ser conferidas na Figura 4.8, que em (a) mostra a malha RFO gerada para a fonte S e em (b) mostra a malha RFO gerada para o receptor G.

Em seguida as informações contidas nos nós da malha RFO devem ser interpoladas para a malha-alvo. Neste caso a informação interpolada é o tempo de trânsito, que é o ingrediente essencial para a construção de isócronas. Na Figura 4.9 são mostrados, como curvas de nível, os tempos de trânsito já interpolados sobre a malha alvo.

Finalmente, basta somar os dois painéis de tempo de trânsito para obter o tempo de trânsito total, cujas curvas de nível são as isócronas.

4.5.2 Construção de uma curva de difração

Neste exemplo é mostrado como construir uma curva de difração associada a um ponto da subsuperfície, usando o método CFO. A Figura 4.11 mostra o modelo de velocidades usado. Neste caso, a malha alvo se restringe à linha sísmica.

O ponto difrator está localizado a 1800m de profundidade, com abcissa zero. Para o traçador de raios do método CFO, foram adotadas as condições iniciais de fonte pontual. Além disso foi realizado um procedimento heurístico para escolha do ângulos iniciais, a fim de que o feixe de raios



Figura 4.8: Raios e frentes de ondas: (a) para fonte pontual localizada na fonte S = (-500, 0)m e (b) para fonte pontual localizada no receptor G = (500, 0)m.

passe completamente pela malha alvo, porém com os raios limítrofes bem perto da borda. Estas características podem ser conferidas na Figura 4.12b.

O tempo de difração é simplesmente interpolado da malha RFO para os receptores localizados na linha sísmica. Graficando os tempos contra as abcissas dos receptores, obtém-se a curva de tempo de difração, mostrada na Figura 4.12a.



Figura 4.9: Tempos de trânsito projetados. (a) para fonte pontual localizada na fonte S = (-500, 0)m e (b) para fonte pontual localizada no receptor G = (500, 0)m.



Figura 4.10: Tempo de trânsito total, cujas curvas de nível são as isócronas.



Figura 4.11: Modelo de velocidade não homogêneo e suave. A malha-alvo é a linha sísmica que está na superfícies (z = 0) e varia horizontalmente de -1200m a 1200m.



Figura 4.12: Em (a) é mostrada a curva de difração para o ponto difrator M = (0, 1800)m; em (b) é mostrada a malha RFO, com condição inicial de fonte pontual em M.

As quatro operações de Kirchhoff: cinemática

Neste capítulo é apresentada a integral de Kirchhoff, que tem um papel fundamental no imageamento sísmico por empilhamento (ou espalhamento) de dados. Sua dedução completa pode ser encontrada em Bleistein (1984) e Tygel *et al.* (1995). Além disso, são apresentados os desdobramentos da integral de Kirchhoff, as chamadas *quatro operações de Kirchhoff*, a saber: o modelamento, a migração, a demigração e o demodelamento. Estas operações têm entre si relações que levam à conclusão de que formam um conjunto completo de operações.

5.1 INTRODUÇÃO

As chamadas seções em tempo são aquelas em que o domínio é parametrizado pela coordenadas espaciais do receptores, (ξ), e pelo tempo de registro, (t). Tais seções constituem os dados colhidos originalmente em levantamentos sísmicos, mas também podem representar seções que já sofreram algum tipo de processamento no tempo, tais como filtragem de ruído, ganho de sinal, etc. Existem também as seções sísmicas em profundidade, as quais jamais são obtidas originalmente por experimentos sísmicos. As seções em profundidade são parametrizadas por coordenadas espaciais (x, z) e são produtos de transformações e processamentos de seções sísmicas no tempo. Como exemplo pode-se citar a própria migração em profundidade. A primeira aplicação da integral de Kirchhoff é o modelamento. Neste caso, todas as propriedades do meio são conhecidas a priori e, portanto, objetiva-se construir aproximadamente o campo de ondas espalhado por um refletor ou difrator. O modelamento Kirchhoff aplicado ao problema de reflexão sísmica produz seções sísmicas compostas somente pelas *superfícies de tempo de trânsito de reflexão*, as quais são a aproximação do sinal registrado das ondas de reflexões primárias, isto é, ondas que são refletidas uma única vez. Sendo assim, o modelamento não contempla outros eventos, tais como reflexões múltiplas, ondas refratadas, entre outros.

A migração sísmica tem por objetivo imagear os refletores na subsuperfície usando como dado de entrada uma seção sísmica. Apesar de operar no sentido inverso do modelamento, a migração não é a sua operação inversa, pois possuem estruturas diferentes: a migração transforma todos os pontos de uma seção sísmica, enquanto o modelamento tem como dado de entrada apenas um refletor por vez. A migração Kirchhoff considera que todos os pontos da subsuperfície são potenciais candidatos a pertencerem a refletores. Sobre aqueles que confirmam esta hipótese, uma função indicadora sobre o ponto adquire um valor alto. Caso contrário, sobre os pontos que não estejam sobre refletores, a função indicadora assume um valor baixo. Combinando estas características, uma seção sísmica no tempo é imageada (migrada) em outra seção na profundidade que, por meio do contraste das amplitudes dadas pela função indicadora, revela a posição dos refletores. Quando se trata de migração Kirchhoff em amplitude verdadeira, a função indicadora assume um papel físico, que é mostrar o valor do coeficiente de reflexão do raio refletido.

A demigração tem o objetivo contrário ao da migração, isto é, construir seções sísmicas a partir de seções em profundidade. Porém, seu princípio é igual ao da migração, isto é, considera que todos os pontos da seção sísmica a ser construída são candidatos potenciais a pertencerem a superfícies de reflexões. Sobre os quais esta hipótese se confirma a função indicadora toma um valor alto, caso contrário, a função assume um valor baixo. Finalmente, analisando as amplitudes fornecidas pela função indicadora no conjunto de todos os pontos da seção sísmica, consegue-se através do contraste determinar a posição das superfícies de reflexão. Portanto, a demigração constitui-se na verdadeira operação inversa da migração, pois além de operarem em sentido opostos, possuem a mesma estrutura.

O demodelamento Kirchhoff tem como dado de entrada somente uma superfície de tempo reflexão por vez e seu objetivo é reconstruir o refletor correspondente à superfície dada. Seu procedimento é análogo ao modelamento, isto é, são realizadas integrais de superfície, uma para cada coordenada da seção em profundidade. Sendo assim o modelamento e demodelamento são operações inversas uma da outra. A pricipal dificuldade, entretanto, é que no demodelamento é necessária a identificação da superfície de tempo de reflexão no dado sísmico, operação chamada de *picagem* (do inglês "piking"), a qual nem sempre é bem sucedida ou fácil de ser realizada.

Estrutura das operações — A migração e a demigração possuem estruturas semelhantes: toda uma seção em um domínio é levada em outra seção do outro domínio. Neste caso, são realizadas várias integrais de superfícies, especificamente, uma para cada ponto na seção de saída. A este tipo de operação denomina-se *imageamento*. Por outro lado, o modelamento e o demodelamento também possuem estruturas semelhantes, pois somente uma superfície por vez em um domínio é mapeada em outra superfície, no outro domínio. Neste caso, também são realizadas integrais de superfície, porém somente uma para cada abcissa do domínio de saída. Neste caso, este tipo de operação, que transforma uma superfície por vez, denomina-se *mapeamento*.

Domínio das operações — A migração e o demodelamento operam no mesmo sentido, isto é, transformam seções em tempo para a profundidade. Isto quer dizer que em ambos os casos, o domínio da operação são as seções sísmicas. Por outro lado, a demigração e o modelamento também operam no mesmo sentido, transformando os dados em profundidade para o tempo. Neste caso, o domínio de ambas operações são seções em profundidade.

Todas estas relações entre as operações podem ser resumidas com o auxílio do diagrama apresentado na Figura 5.1.

Uma vantagem de ter em mãos o conjunto das quatro operações de Kirchhoff é a possibilidade de construção de novas operações de imageamento através de combinações ou encadeamentos de algumas das operações. Alguns exemplos são: a migração para afastamento nulo (MZO) (Tygel *et al.*, 1998), continuação de afastamento (OCO) (Santos *et al.*, 1997), remigração (Schleicher *et al.*, 1997), modelamento por demigração (Santos *et al.*, 2000), entre outros.

Relembrando, a seguinte notação é adotada:

Profundidade			Tempo			
M	_	$(\boldsymbol{x},z);$	N		$(\boldsymbol{\xi},t);$	
x		(x,y);	ξ	=	$(\xi_1,\xi_2);$	
Σ	=	refletor;	Γ		curva de tempo de reflexão;	
Z		isócrona;	T	=	curva de tempo de difração.	



Figura 5.1: Diagrama que mostra um resumo esquemático das relações entre as quatro operações de Kirchhoff. As caixas de mesma cor indicam que as operações possuem possuem a mesma estrutura operacional. Os nomes escritos com letras de mesma cor indicam que as operações possuem o mesmo domínio. Sendo assim, os pares modelamento-demodelamento (caixas azuis) e migraçãodemigração (caixas laranjas) possuem a mesma estrutura, enquanto os pares modelamentodemigração (letras vermelhas) e demodelamento-migração (letras verdes) possuem o mesmo domínio.

As funções pesos são denotadas por

\mathcal{W}_{M}	 peso da migração ;	\mathcal{W}_{D}		peso da demigração ;
\mathcal{W}_{K}	 peso do modelamento;	\mathcal{W}_{I}	=	peso do demodelamento.

5.2 FORMULAÇÃO CLÁSSICA: MODELAMENTO

O modelamento Kirchhoff é a mais direta aplicação da integral de Kirchhoff, cuja dedução é feita resumidamente no Apêndice I. De fato, historicamente toda a elaboração da integral de Kirchhoff teve como principal motivação a realização de um modelamento do campo de ondas. Isto significa que, por muito tempo, a integral de Kirchhoff e o modelamento Kirchhoff representavam a mesma coisa. Maiores detalhes sobre o modelamento Kirchhoff podem ser encontrados em Tygel *et al.* (1994) e Bleistein *et al.* (2001).

O modelamento Kirchhoff leva em conta que o refletor é um conjunto de pontos difratores que são excitados pela onda incidente. Portanto, cada ponto do refletor dá a sua contribuição ao campo de ondas refletidas registrado no receptor. Todas estas contribuições são somadas, ou melhor, integradas com pesos adequados de modo a obter o resultado final que é a superfície de tempo de reflexão.

É de se esperar que a maior contribuição venha dos pontos de reflexão sobre o refletor. De fato, assintoticamente o modelamento pela integral de Kirchhoff é igual ao modelamento por teoria dos raios. Entretanto, pela sua característica de somar difrações, o campo de ondas refletidas modelado pela integral de Kirchhoff traz efeitos de difrações, causadas por irregularidades do refletor, tais como quinas e falhas, que não são modelados pela Teoria dos Raios de ordem zero.

5.2.1 Geometria do modelamento

O modelamento Kirchhoff de reflexão sísmica considera que todos os pontos do refletor são fontes secundárias. Portanto, para cada ponto M sobre o refletor Σ , é construída a superfície de tempo difração, que pode ser computada através da teoria dos raios, com condições de fonte pontual em cada ponto M. No final, o envelope de todas as superfícies de difração é a própria superfície de tempo de reflexão procurada, constituindo um resultado direto do teorema da dualidade.

Mais especificamente, deve-se traçar um raio ligando M à fonte $S(\boldsymbol{\xi})$ e outro ligando M ao receptor $G(\boldsymbol{\xi})$. Como condição inicial para a amplitude do raio MG, usa-se o coeficiente de reflexão $\mathcal{R}(\theta)$ (veja a equação (2.127)), onde θ é o ângulo que o raio MG faz com a normal ao refletor Σ em $M_{\rm R}$. O tempo de difração é simplesmente a soma dos tempos de propagação do raios MS e MG e é denotado por T(S, G). Além disso, a amplitude final de cada raio deve levar em conta fatores como o espalhamento geométrico devido à não-homogeinidade do meio, bem como efeitos da curvatura do refletor medida em M. Todos estes fatores são agrupados em uma função peso $\mathcal{W}_{\rm K}(M; \boldsymbol{\xi})$ associada ao par de raios MS e MG. Finalmente, a função F(t) que dá forma ao pulso deve ser modificada através de uma diferenciação com respeito ao seu argumento.

Para cada coordenada $\boldsymbol{\xi}$ da seção de saída, correspondendo ao par fonte-receptor $S(\boldsymbol{\xi})$ - $G(\boldsymbol{\xi})$, considera-se os tempos de difração a todos os pontos M do refletor Σ . No traço de saída, acumula-se cada pulso $\partial_t F(t-T)$ deslocado do tempo de difração T e multiplicado pelo fator $\mathcal{R}(\theta)\mathcal{W}_{\mathrm{K}}(M;\boldsymbol{\xi})$. Este processo pode ser visualisado com o auxílio da Figura 5.2.



Figura 5.2: À esquerda: contribuição de cada ponto difrator M sobre o refletor Σ : cada superfície de difração (linhas laranjas) intercepta a linha vertical em ξ . À direita: A superfície de tempo de trânsito Γ (linha vermelha) como o resultado final da sobreposição (integral) de todas as contibuições das difrações.

5.2.2 Fórmula do modelamento

O resultado do processo de modelamento Kirchhoff $U(\boldsymbol{\xi}, t)$ é descrito através da seguinte integral de superfície

$$U(\boldsymbol{\xi},t) = \iint d\Sigma \, \mathcal{W}_{\mathrm{K}}(M;\boldsymbol{\xi}) \, \partial_{t} u\big(M;\boldsymbol{\xi},t-T(M;\boldsymbol{\xi})\big)\Big|_{M \in \Sigma},$$
(5.1)

onde

$$T(M;\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{T}(M, S(\boldsymbol{\xi})) + \mathcal{T}(M, G(\boldsymbol{\xi})), \qquad (5.2)$$

$$u(M;\boldsymbol{\xi},t) = \mathcal{R}(\theta)F(t), \qquad (5.3)$$

onde $\theta = \theta(M; \boldsymbol{\xi})$. Os pontos $M = (\boldsymbol{x}, z)$ definem o refletor Σ e $N = (\boldsymbol{\xi}, t)$ são os pontos da seção sísmica modelada. As quantidades $W_{K}(M; \boldsymbol{\xi})$ e $T(M; \boldsymbol{\xi})$ são, respectivamente, o peso e tempo de difração como funções de $\boldsymbol{\xi}$, associadas ao ponto M. Repare que na integral do modelamento (5.1), o vetor $\boldsymbol{\xi}$ permanece fixo enquanto somente $M = (\boldsymbol{x}, z)$ varia.

Se tanto o peso $W_{K}(M; \boldsymbol{\xi})$ como o coeficiente de reflexão $\mathcal{R}(M; \boldsymbol{\xi})$ forem forçados a ser unitárias, mesmo assim, o modelamento constrói a superfície de reflexão Γ . Entretanto, a fim de modelar completamente o campo de ondas refletido, estes fatores devem ser escolhidos adequadamente. A escolha para o peso $W_{K}(M; \boldsymbol{\xi})$, bem como a análise assintótica da integral (5.1) são discutidos no próximo capítulo.

5.3 FORMULAÇÃO NEO-CLÁSSICA: MIGRAÇÃO

A migração é a peça fundamental no conjunto dos métodos de tipo Kirchhoff por duas razões. Em primeiro lugar, a migração é o processo que fornece o resultado cinemático final de todo processamento sísmico: a imagem dos refletores de interesse em profundidade. Em segundo lugar, a migração permite ter acesso à parte dinâmica do processamento sísmico, a saber, aos coeficientes de reflexão das reflexões primárias. Uma descrição detalhada da migração de Kirchhoff em amplitude verdadeira pode ser encontrada em Hubral *et al.* (1996) e Tygel *et al.* (1996).

A migração Kirchhoff em amplitude verdadeira além posicionar corretamente em profundidade os refletores sísmicos de interesse, recupera os coeficientes de reflexão dos raios de reflexão primárias. Para diferentes seções sísmicas de entrada geradas a partir de um mesmo levantamento sísmico, a posição dos refletores deve se manter a mesma, variando apenas os coefientes de reflexão que dependem do ângulo de incidência. Isto significa que a painéis de seções migradas para diferentes configurações, por exemplo referentes a vários afastamentos comuns, fornecem para os diversos refletores, a variação dos coeficientes de reflexão com respeito ao ângulo de incidência. Esta propriedade é fundamentalmente útil nos chamados estudos de amplitude versus afastamento (AVO) ou amplitude versus ângulo (AVA), veja, por exemplo, Tygel *et al.* (1999a).

5.3.1 Geometria da migração

Como no modelamento, a migração Kirchhoff considera que os refletores a serem imageados são, cada um, um conjunto de pontos difratores que são excitados pela onda incidente. Sendo assim, cada ponto do refletor dá a sua contribuição ao campo medido no receptor, na forma de uma superfície de difração. Quando todas estas contribuições são somadas, ou melhor, integradas ao longo das superfícies de difrações, com pesos adequados, os refletores são imageados.

O algoritmo da migração Kirchhoff é do tipo otimista, pois considera que todos pontos da subsuperfície podem pertencer a algum refletor. Quando de fato isto se realiza, prova-se pelo primeiro teorema da dualidade que a superfície de tempo de difração é tangente à superfície de tempo de reflexão correspondente ao refletor procurado. Com isto, a contribuição deste ponto difrator é bem mais alta que a de qualquer outro, afinal estando sobre o refletor, este ponto difrator é, de fato, um ponto de reflexão.

Quando o processo de somar as contribuições ao longo das superfícies de difração é feito para

todos os pontos da profundidade, aqueles pontos que estiverem sobre refletores vão alcançar um valor sensivelmente mais alto do que aqueles que não estão. Pelo contrastes de valores é possível visualizar a posição dos refletores. Além disso, com pesos adequados o valor das integrais relativas aso pontos do refletor podem assumir algum significado físico, tal como o valor do coeficiente de reflexão do raio refletido.

Mais especificamente, para cada ponto da profundidade M, deve-se traçar um raio ligando Mà fonte $S(\xi)$ e outro ligando M ao receptor $G(\xi)$. O tempo de difração é simplesmente a soma dos tempos de propagação do raios MS e MG. Com isso constrói-se a superfície de tempo de difração T, sobre a qual os dados sísmicos vão sendo acumulados através de uma integral de superfície. Este processo pode ser visualisado com o auxílio da Figura 5.3.



Figura 5.3: À esquerda: contribuição da superfície de difração T associada a um ponto M qualquer na malha na profundidade. À direita: o refletor Σ como resultado final da sobreposição (integral) de todas as contibuições das superfícies de difração T que tangenciam a superfície de tempo reflexão Γ .

5.3.2 Fórmula da migração

O resultado do processo da migração V(M) para cada ponto da seção em profundidade M = (x, z) é dado pela integral de superfície

$$V(M) = \iint_{\mathcal{T}(M)} d\mathcal{T} \mathcal{W}_{M}(\boldsymbol{\xi}; M) \left. \partial_{t} U(N) \right|_{N \in \mathcal{T}(M)},$$
(5.4)

onde $\mathcal{T}(M)$ é a superfície de difração associada ao ponto M, lembrando que na integral, $N = (\boldsymbol{\xi}, t) \in \mathcal{T}(M)$. A seção sísmica de entrada U(N) é diferenciada com relação a t. A quantidade
$\mathcal{W}_{M}(\boldsymbol{\xi}; M)$ é o peso como função de $\boldsymbol{\xi}$ associada ao ponto M. Observe na migração, uma integral de superfície em $\boldsymbol{\xi}$ é feita para cada M da subsuperfície.

Se o peso $\mathcal{W}_{M}(\boldsymbol{\xi}; M)$ é tomado como constante unitária, ainda assim, a migração reconstrói os refletores Σ . Entretanto, a fim de se obter os coeficientes de reflexão sobre estes refletores, o fator peso deve ser escolhido adequadamente. A escolha para o peso $\mathcal{W}_{M}(\boldsymbol{\xi}; M)$, bem como a análise assintótica da integral (5.4) são discutidos no próximo capítulo.

5.4 FORMULAÇÃO MODERNA: DEMIGRAÇÃO

O processo inverso da migração Kirchhoff é a chamada demigração Kirchhoff, conforme introduzido por Hubral *et al.* (1996) e Tygel *et al.* (1996). Aplicada a uma seção migrada, a demigração tem por finalidade reconstruir a seção sísmica. Como a demigração é o processo inverso da migração, os papéis das superfícies de empilhamento e distribuição são invertidos, isto é, a isócrona é a superfície de empilhamento e a superfície de Huygens a de distribuição.

Uma aplicação direta da demigração é a *identificação* de imagens de refletores nos dados originais. De modo geral, mesmo que o modelo de velocidades não seja muito preciso, o processo de migração consegue aumentar a coerência dos eventos, permitindo uma identificação mais ampla do refletor. Após a aplicação da demigração, os eventos separados podem ser reconhecidos nos dados originais.

O processo de demigração Kirchhoff tem aplicação importante na determinação de modelos de velocidade adequados ao imageamento, chamado na literatura de *análise de velocidades*. Comparando-se uma seção demigrada com a correspondente seção medida no campo, pode se obter uma informação qualitativa e quantitativa sobre possíveis erros no modelo de velocidade utilizado.

Finalmente, a demigração, apesar de não ser uma técnica de modelamento, pode ser modificada para tal fim. Gerando-se implicitamente uma seção artificial, como a obtida através de uma migração. Aplicando-se simultaneamente a demigração a esta seção artificial, que não é de fato construída explicitamente, cria-se um novo processo de modelamento por demigração. Tal procedimento é descrito em Santos *et al.*. (2000).

5.4.1 Geometria da demigração

Como em todos processos que usam a integral de Kirchhoff, a demigração Kirchhoff considera que os refletores dados são, cada um, um conjunto de pontos difratores que são excitados pela onda incidente.

De modo geral, cada ponto difrator da subsuperfície dá a sua contribuição ao campo medido. Como no domínio da profundidade, não se sabe quais são os pontos que pertencem a refletores, o processo da demigração soma a contribuição de todos os pontos difratores que têm em comum um mesmo tempo de difração.

Sendo assim, o algoritmo da demigração Kirchhoff também é do tipo otimista, pois considera que todos pontos da seção em tempo podem pertencer a alguma superfície de tempo de reflexão. Quando isto de fato se realiza, prova-se pelo teorema da dualidade que a isócrona é tangente ao refletor correspondente à superfície de tempo de reflexão procurada. Com isto, a contribuição deste ponto difrator é bem mais alta que a de qualquer outro, afinal o ponto difrator sobre o refletor é, de fato, um ponto de reflexão.

Quando o processo de somar as contribuições ao longo das isócronas é feito para todos os pontos da seção sísmica, aqueles pontos que estiverem sobre superfícies de tempo de reflexão vão alcançar um valor sensivelmente mais alto do que aqueles que não estão. Pelo contrastes de valores é possível visualizar as superfícies de tempo de reflexão. Além disso, com pesos adequados o valor das integrais relativas aos pontos do refletor podem assumir algum significado físico, tal como o valor do coeficiente de reflexão do raio refletido.

Mais especificamente, para cada ponto da seção em tempo N, deve-se construir uma isócrona cujos focos são a fonte $S(\boldsymbol{\xi})$ e o receptor $G(\boldsymbol{\xi})$, sobre a qual os dados sísmicos em profundidade vão sendo acumulados através de uma integral de superfície. Este processo pode ser visualisado com o auxílio da Figura 5.4.

5.4.2 Fórmula da demigração

O resultado do processo da demigração U(N) para cada ponto da seção em tempo $N = (\xi, t)$ é dado pela integral de superfície

$$U(N) = \iint_{\mathcal{Z}(N)} d\mathcal{Z} \, \mathcal{W}_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x}; N) \, \partial_{z} V(M) \Big|_{M \in \mathcal{Z}(N)},$$
(5.5)



Figura 5.4: À esquerda: contribuição da isócrona \mathcal{Z} associada a um ponto N qualquer da seção sísmica. À direita: a superfície Γ como resultado final da sobreposição (integral) de todas as contibuições das isócronas \mathcal{Z} que tangenciam o refletor Σ .

onde $\mathcal{Z}(N)$ é a superfície de difração associada ao ponto N, lembrando que na integral, $M = (x, z) \in \mathcal{Z}(N)$. A seção migrada de entrada V(x, z) deve ser diferenciada com relação a z. A quantidade $\mathcal{W}_{D}(x, N)$ é o peso associado ao ponto N. Observe que na demigração, uma integral de superfície é feita para cada N do domínio do tempo.

Se o peso $W_D(\boldsymbol{x}; N)$ é tomando como constante unitária, ainda assim, a demigração reconstrói as superfícies de tempo de reflexão Γ . Entretanto, a fim de obter corretamente os coeficientes de reflexão bem como os fatores de espalhamento geométrico sobre estas superfícies, o fator peso deve ser escolhido adequadamente. A escolha para o peso $W_D(\boldsymbol{x}; N)$, bem como a análise assintótica da integral (5.5) são discutidos no próximo capítulo.

5.5 FORMULAÇÃO CONTEMPORÂNEA: DEMODELAMENTO

Um método alternativo de migração de dados sísmicos, denominado demodelamento de Kirchhoff, é a operação inversa do modelamento, recentemente introduzido em Tygel *et al.*, (2000). Este método se baseia na inversão da integral de Kirchhoff do modelamento direto.

Além de ser um processo menos dispendioso do que a migração Kirchhoff, o demodelamento tem o benefício adicional de não provocar a distorção do pulso na seção de saída. A desvantagem, entretanto, é que o demodelamento opera sobre cada superfície de tempo de reflexão por vez e além

disso, o processo de identificação desta superfície no dado sísmico ("piking") não é um processo trivial.

5.5.1 Geometria do demodelamento

Da mesma forma em que a integral de modelamento de Kirchhoff pode ser intepretada como a superposição de todas as fontes secundárias de Huygens ao longo do refletor, o demodelamento Kirchhoff sobrepõe os campos medidos nos receptores para reconstruir todas estas fontes secundárias.

Portanto, para cada ponto N sobre a superfície de tempo de reflexão Γ , a sua isócrona pode ser vista como o conjunto de todos os pontos de difração que contribuíram para o sinal refletido. Construindo todas as isócronas correspondentes, o envelope gerado será constituído pelos pontos difratores que estiverem sobre o refletor.

Sendo assim, para uma abcissa x da seção de saída, deve-se procurar todos pontos difratores (x, z) e a quais isócronas estes possíveis pontos difratores pertencem. Quando a busca fôr bem sucedida, nestas coordenadas acumular o valor correspondente ao quanto este ponto contribuiu para alguma reflexão. Por isto, para cada abcissa x, procura-se para todos N quais isócronas $\mathcal{Z}(N)$ são tais que $(x, z_{I}) \in \mathcal{Z}(N)$. Isto é, procura-se as interseções da linha vertical em x com todas as isócronas correspondentes aos pontos N da superfície de tempo de reflexão.

Chamando o ponto $M_{\rm I} = (\boldsymbol{x}, z_{\rm I})$ como a interseção da linha vertical \boldsymbol{x} com a isócrona $\mathcal{Z}(N)$. Constrói-se por teoria dos raios, a isócrona $\mathcal{Z}(N)$. No ponto N acumular o valor da amplitude em $\Gamma(N)$, multiplicado pelo fator peso $\mathcal{W}_{\rm I}(N; \boldsymbol{x})$. Este processo pode ser visualisado com o auxílio da Figura 5.5.

5.5.2 Fórmula do demodelamento

O resultado do processo do demodelamento Kirchhoff u(x, z) é descrito através da seguinte integral de superfície

$$V(\boldsymbol{x}, z) = \iint d\Gamma \ \mathcal{W}_{\mathrm{I}}(N; \boldsymbol{x}) \ \partial_{\boldsymbol{z}} v \big(N; \boldsymbol{x}, z - z_{\mathrm{I}} \big) \Big|_{N \in \Gamma},$$
(5.6)

onde

$$v(N; \boldsymbol{x}, z) = \mathcal{A}(N; \boldsymbol{x}) F(z), \qquad (5.7)$$



Figura 5.5: À esquerda: contribuição de cada ponto da superfície de tempo de trânsito Γ : cada isócrona \mathcal{Z} associada a N intercepta a linha vertical em x. À direita: o refletor Σ (linha violeta) como o resultado final da sobreposição (integral) de todas as contibuições das isócronas.

e z_{I} é tal que $(\boldsymbol{x}, z_{I}) \in \mathcal{Z}(N)$. A quantidade $\mathcal{A}(N; \boldsymbol{x})$ é o quociente do coeficiente de reflexão pelo espalhamento geométrico, isto é

$$\mathcal{A}(N; \boldsymbol{x}) = \frac{\mathcal{R}(N; \boldsymbol{x})}{\mathcal{L}(N; \boldsymbol{x})}.$$
(5.8)

Os pontos $N = (\boldsymbol{\xi}, t)$ definem a superfície de reflexão Γ e $M = (\boldsymbol{x}, z)$ são os pontos da seção em profundidade. A quantidade $\mathcal{W}_{I}(N; \boldsymbol{x})$ é o peso como função de \boldsymbol{x} , associada ao ponto N. Observe que na integral do demodelamento (5.6), o vetor \boldsymbol{x} permanece fixo enquanto somente $N = (\boldsymbol{\xi}, t)$ varia.

Se o peso $W_{I}(N; \boldsymbol{x})$ é forçado a ser constante igual a um, mesmo assim, o demodelamento reconstrói o refletor Σ . Entretanto, a fim de ter acesso ao coeficiente de reflexão, este fator devem ser construído apropriadamente. A escolha para o peso $W_{I}(N; \boldsymbol{x})$, bem como a análise assintótica da integral (5.6) são discutidos no próximo capítulo.

APÊNDICE

A INTEGRAL DE KIRCHHOFF

Neste apêndice é mostrado resumidamente a derivação da integral de Kirchhoff. Mais detalhes podem ser encontrados em Tygel *et al.* (1994) e em Bleistein *et al.* (2001).

Assuma que um campo de ondas u(P, t; Q) seja gerado por uma fonte pontual em Q e medido no ponto P. Considerando um objeto que difrata o campo de ondas, então o campo de ondas medido pode a ser decomposto em

$$u(P,t;Q) = u_i(P,t;Q) + u_s(P,t;Q),$$
(5.9)

onde $u_i(P, t; Q)$ é o campo de ondas incidente e $u_s(P, t; Q)$ é o campo de ondas espalhado pela a borda exterior Σ do objeto.

Dados os pontos $S \in G$, localizados no exterior do objeto, deseja-se medir em G o campo de ondas gerado por uma fonte pontual em S. A solução para este problema pode ser dada através da seguinte representação integral (Bleistein, 2001)

$$\hat{u}_s(G;S) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} d\Sigma \Big[\hat{u}_s(M;S) \partial_n \mathcal{G}(M;G) + \mathcal{G}(M;G) \partial_n \hat{u}_s(M;S). \Big]$$
(5.10)

Aqui \hat{u} denota a trasformada de Fourier de u(t), além disso, para economizar a notação foi omitida a dependência de ω . A função $\mathcal{G}(P;Q)$ denota a função de Green na freqüência em medida P com fonte pontual em Q. O operador ∂_n é a derivada normal, definida pela expressão

$$\partial_n f = \nabla f \cdot \boldsymbol{\nu}, \tag{5.11}$$

onde ν é a normal à superfície Σ .

A equação (5.10) é uma equação integral, isto é, é uma equação implícita em \hat{u}_s . Para solucionar este problema, considera-se as aproximações de Kirchhoff: O campo de ondas espalhado û_s(M; Q), para M ∈ Σ é igual ao campo de ondas incidente û_i(M; Q), multiplicado por um fator que só depende localmente do refletor Σ. Em outras palavras:

$$\hat{u}_s(M;Q) = \mathcal{R}(M)\hat{u}_i(M;Q), \qquad M \in \Sigma.$$

O fator $\mathcal{R}(M)$ geralmente é escolhido como o coeficiente de reflexão de onda plana;

2. A derivada normal do campo de ondas espalhado $\partial_n \hat{u}_s(M; Q)$ com relação a normal ao refletor é igual à derivada campo de ondas incidente $\partial_n \hat{u}_i(M; Q)$, (com sinal contrário), multiplicado por um fator que só depende localmente do refletor Σ . Em outras palavras:

$$\partial_n \hat{u}_s(M;Q) = -\mathcal{R}(M;Q) \partial_n \hat{u}_i(M;Q), \qquad M \in \Sigma$$

3. O campo de ondas incidente é proporcional à função de Green $\mathcal{G}(M;Q)$, isto é,

$$\hat{u}_i(M;Q) = \hat{F}(\omega) \mathfrak{G}(M;Q).$$

Aplicando as aproximações acima na equação integral de Kirchhoff, obtém-se

$$\hat{u}_s(G;S) = -\frac{\hat{F}(\omega)}{4\pi} \iint_{\Sigma} d\Sigma \,\mathcal{R}(M;S) \Big[\mathcal{G}(M,S)\partial_n \mathcal{G}(M;G) + \mathcal{G}(M;G)\partial_n \mathcal{G}(M;S) \Big].$$
(5.12)

A aproximação de ordem zero para a função de Green dada pela Teoria dos Raios é

$$\mathcal{G}(P;Q) = A(P;Q) \exp\left[-i\omega\mathcal{T}(P;Q)\right], \tag{5.13}$$

onde $\mathcal{T}(P;Q)$ e A(P;Q) são as funções que descrevem o tempo de trânsito e amplitude para o raio que passa pelos pontos $P \in Q$, respectivamente. Além disso, a aproximação para a derivada normal da função de Green é dada por

$$\partial_n \mathcal{G}(P;Q) \approx -i\omega \,\partial_n \mathcal{T}(P;Q) \,A(P;Q) \exp\left[-i\omega \mathcal{T}(P;Q)\right].$$
 (5.14)

Inserindo as duas aproximações acima na integral de Kirchhoff, chega-se à expressão

$$\hat{u}_{s}(G;S) = -\frac{i\omega \,\dot{F}(\omega)}{4\pi} \iint_{\Sigma} d\Sigma \,\mathcal{R}(M;S) A(M;S) A(M;G) \partial_{n} \left[\mathcal{T}(M;S) + \mathcal{T}(M;G)\right] \\ \times \exp\left\{-i\omega \left[\mathcal{T}(M;S) + \mathcal{T}(M;G)\right]\right\},$$
(5.15)

que, após a aplicação da transformada de Fourier inversa, passa a ser

$$u_{s}(G;S) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} d\Sigma \ \mathcal{R}(M;S) A(M;S) A(M;G) \partial_{n} \left[\mathcal{T}(M;S) + \mathcal{T}(M;G) \right] \\ \times \partial_{t} F \left(t - \mathcal{T}(M;S) - \mathcal{T}(M;G) \right).$$
(5.16)

Finalmente, introduzindo as parametrizações $S = S(\boldsymbol{\xi}), G = G(\boldsymbol{\xi})$ e as notações

$$T(M;\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{T}(M;S(\boldsymbol{\xi})) + \mathcal{T}(M;G(\boldsymbol{\xi})), \qquad (5.17)$$

$$\mathcal{W}_{K}(M;\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi} A(M;S(\boldsymbol{\xi})) A(M;G(\boldsymbol{\xi})) \partial_{n} T(M;\boldsymbol{\xi}), \qquad (5.18)$$

$$u(M;\boldsymbol{\xi},t) = \mathcal{R}(M;S(\boldsymbol{\xi}))F(t), \qquad (5.19)$$

obtém-se a expressão final para a integral de Kirchhoff

$$U(\boldsymbol{\xi},t) = \iint_{\Sigma} d\Sigma \, \mathcal{W}_{\mathrm{K}}(M;\boldsymbol{\xi}) \partial_t u\big(M;\boldsymbol{\xi},t-T(M;\boldsymbol{\xi})\big), \qquad (5.20)$$

onde foi introduzida a notação $U(\boldsymbol{\xi}, t) = u_s (G(\boldsymbol{\xi}); S(\boldsymbol{\xi})).$

As quatro operações de Kirchhoff: dinâmica

Neste capítulo são apresentadas as expressões dos pesos para as integrais das quatro operações de Kirchhoff, a fim de que sejam operações em amplitude verdadeira.

O instrumento essencial para a construção dos pesos é a avaliação assintótica de integrais, através do método da fase estacionária. Com esta ferramenta, o procedimento genérico para a construção de pesos consiste em duas etapas: (a) assumir qual quantidade se deseja obter como amplitude do dado de saída e (b) avaliar assintoticamente da integral da operação. Fazendo uma comparação entre (a) e (b), chega-se a uma expressão adequada para o peso da integral.

6.1 ESCOLHA DOS PESOS PARA VERDADEIRA AMPLITUDE

As quatro operações de imageamento descritas no capítulo anterior estão baseadas em integrais de superfície. Até então, o peso incluído em cada uma destas integrais não foi explicitamente descrito. A razão disso é que o peso pode ser convenientemente construído para diferentes finalidades, bastando mudar o critério do que se deseja obter como resultado final da amplitude do dado de saída.

Nesta seção, o critério escolhindo é da verdadeira amplitude é utilizado para construir os pesos. O conceito de verdadeira amplitude é simplesmente considerar que o dado sísmico de reflexão está livre do fator de espalhamento geométrico, que mede a focagem/desfocagem de raios devido tanto à não-homogeneidade do meio quanto à geometria do refletor. Sendo assim, os pesos serão compostos, em geral, por combinações de espalhamentos geométricos, entre outros fatores.

O critério da verdadeira amplitude é importante, pois em se tratando de um problema inverso, o coeficiente de reflexão é o fator que dá o melhor contribução para se determinar os parâmetros que compõem o meio, uma vez que depende localmente das propriedades da interface que separa duas estruturas distintas.

6.1.1 Modelamento

Relembrando, a fórmula para o modelamento Kirchhoff é

$$U(\boldsymbol{\xi},t) = \iint d\Sigma \ \mathcal{W}_{\mathrm{K}}(M;\boldsymbol{\xi}) \ \partial_{t} u(M;\boldsymbol{\xi},t-T(M;\boldsymbol{\xi}))\Big|_{M\in\Sigma},$$
(6.1)

onde

$$T(M;\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{T}(M, S(\boldsymbol{\xi})) + \mathcal{T}(M, G(\boldsymbol{\xi})), \qquad (6.2)$$

$$u(M;\boldsymbol{\xi},t) = \mathcal{R}(\theta)F(t), \qquad (6.3)$$

onde $\theta = \theta(M; \boldsymbol{\xi})$. Os pontos $M = (\boldsymbol{x}, z)$ são os aqueles que definem o refletor Σ e $N = (\boldsymbol{\xi}, t)$ são os pontos da seção sísmica modelada.

Para que o modelamento produza uma seção sísmica contendo uma supefície de tempo de reflexão Γ representando o registro de uma onda refletida primária em Σ , a função peso $\mathcal{W}_{K}(M;\boldsymbol{\xi})$ e deve ser escolhida como

$$\mathcal{W}_{\mathrm{K}}(M;\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi} A(M;S(\boldsymbol{\xi})) A(M;G(\boldsymbol{\xi})) \partial_n T(M;\boldsymbol{\xi}), \qquad (6.4)$$

onde a amplitude é escolhida como a da teoria dos raios de ordem zero, isto é,

$$A(M;P) = \frac{1}{4\pi \mathcal{L}(M;P)},$$
 (6.5)

para $P = S(\boldsymbol{\xi}), G(\boldsymbol{\xi})$. Além disso, sabe-se que

$$\partial_n T(M; \boldsymbol{\xi}) = \|\boldsymbol{\nu}\| \|\nabla T(M; \boldsymbol{\xi})\| \cos \theta = \frac{\cos \theta}{c(M)}, \tag{6.6}$$

onde θ é o ângulo que o vetor vagarosidade p_s (ou p_g) faz com o vetor normal ν ao refletor. Portanto

$$\mathcal{W}_{\mathrm{K}}(M;\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\cos\theta_{S} + \cos\theta_{G}}{16\pi^{2}c(M)L(M;\boldsymbol{\xi})},\tag{6.7}$$

onde $L(M; \boldsymbol{\xi}) = \mathcal{L}(M, S(\boldsymbol{\xi}))\mathcal{L}(M, G(\boldsymbol{\xi})).$

Além disso o coeficiente de reflexão deve ser tomado como

$$\mathcal{R} = \frac{c_2 \cos \theta_1 - c_1 \cos \theta_2}{c_2 \cos \theta_1 + c_1 \cos \theta_2},\tag{6.8}$$

onde $\theta_1 \in \theta_2$ satisfazem a lei de Snell (2.119) no ponto $M \in \Sigma$.

6.1.2 Migração

Relembrando, a fórmula para a migração Kirchhoff é dada por

$$V(M) = \iint_{\mathcal{T}(M)} d\mathcal{T} \mathcal{W}_{M}(\boldsymbol{\xi}; M) \left. \partial_{t} U(N) \right|_{N \in \mathcal{T}(M)},$$
(6.9)

onde V(M) denota o resultado do processo da migração parametrizado pelos pontos da seção em profundidade M = (x, z). O objeto T(M) é a superfície auxiliar de tempo de difração associada ao ponto M.

Para escolher o peso $\mathcal{W}_M(\boldsymbol{\xi}; M)$ de modo que o processamento seja em verdadeira amplitude, deve-se fazer uma hipótese sobre a saída V(M). Suponha o dado sísmico seja resultado de uma reflexão primária, que segundo a teoria dos raios tem a expressão

$$U(\boldsymbol{\xi},t) = A(\boldsymbol{\xi})F(t-\tau(\boldsymbol{\xi})), \qquad (6.10)$$

onde

$$A(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\mathcal{R}(\boldsymbol{\xi})\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})}{\mathcal{L}(\boldsymbol{\xi})}.$$
(6.11)

Aqui, $\tau(\boldsymbol{\xi})$ representa o tempo de trânsito de reflexão, \mathscr{A} é o fator de perda de amplitude, $\mathcal{L}(\boldsymbol{\xi})$ é o fator de espalhamento geométrico e $\mathcal{R}(\boldsymbol{\xi})$ é o coeficiente de reflexão. Assumindo que não haja perda de amplitude por outros fatores, isto é fazendo $\mathscr{A} = 1$, a quantidade que se deseja obter como saída é o coeficiente de reflexão \mathcal{R} .

Resumindo, deseja-se que as amplitudes resultantes da migração em amplitude verdadeira tenham as características: (a) sejam livres dos efeitos do espalhamento geométrico; (b) forneçam uma medida do coeficiente de reflexão dependente do ângulo de reflexão; e (c) outros fatores, tais como efeitos de transmissão e atenuação, permaneçam intocados.

O procedimento é avaliar a integral (6.9) assintoticamente usando o método da fase estacionária (Apêndice J). Em seguida compara-se o resultado assintótico com o valor que se deseja obter na saída V(M), a fim de se impor uma expressão para o peso \mathcal{W}_M . Sendo assim, o peso para a migração em amplitude verdadeira é (Tygel *et al.*, 1996)

$$W_{\rm M}(\boldsymbol{\xi}; M) = \frac{c(M)^2 \, \mathrm{h}(\boldsymbol{\xi}; M)}{4\pi \, \cos^2 \theta_{\rm M}} \mathcal{L}(M, S) \mathcal{L}(M, G), \qquad (6.12)$$

onde $h(\boldsymbol{\xi}; M)$ é o determinante de Beylkin, definido por

$$\ln(\boldsymbol{\xi}; M) = \det\left[\boldsymbol{p}, \frac{d\boldsymbol{p}}{d\xi_1}, \frac{d\boldsymbol{p}}{d\xi_2}\right], \qquad (6.13)$$

onde $p \equiv p(\xi) = p_s(\xi) + p_g(\xi)$. A função \mathcal{L} é o espalhamento geométrico definido por

$$\mathcal{L} = \sqrt{|\mathcal{J}|} \exp(i \kappa \pi/2). \tag{6.14}$$

6.1.3 Demigração

Relembrando, a integral usada na demigração Kirchhoff é dada por

$$U(N) = \iint_{\mathcal{Z}(N)} d\mathcal{Z} \mathcal{W}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{x}; N) \partial_{\boldsymbol{z}} V(M) \Big|_{M \in \mathcal{Z}(N)},$$
(6.15)

onde U(N) denota o resultado do processo da demigração para cada ponto $N = (\boldsymbol{\xi}, t)$ da seção sísmica em tempo. A superfície $\mathcal{Z}(N)$ é a isócrona auxiliar associada ao ponto N.

O critério para construção dos pesos da demigração em amplitude verdadeira é considerar que as amplitudes resultantes possuam as características: (a) contenham os fatores de espalhamento geométrico corretos; (b) mantenham a medida do coeficiente de reflexão original; e (c) outros fatores, tais como efeitos de transmissão e atenuação, permaneçam intocados.

Avaliando a integral (6.15) assintoticamente, usando o método da fase estacionária (veja Apêndice J), e comparando-se o resultado assintótico com o valor desejado para a saída U(N), determinase a expressão para o peso W_D . Sendo assim, o peso para a demigração em amplitude verdadeira é (Tygel *et al.*, 1996)

$$W_{\rm D}(\boldsymbol{x};N) = \frac{1}{2\mathcal{L}(M,S)\mathcal{L}(M,G)\cos^2\beta_{\rm M}},$$
(6.16)

e L é espalhamento geométrico definido pela equação (6.14)

6.1.4 Demodelamento

Relembrando, a fórmula para o demodelamento Kirchhoff é dada por

$$V(\boldsymbol{x}, z) = \iint d\Gamma \ \mathcal{W}_{\mathrm{I}}(N; \boldsymbol{x}) \ \partial_{\boldsymbol{z}} v \left(N; \boldsymbol{x}, z - z_{\mathrm{I}}\right)\Big|_{N \in \Gamma},$$
(6.17)

onde

$$v(N; \boldsymbol{x}, z) = \mathcal{A}(N; \boldsymbol{x}) F(z), \qquad (6.18)$$

e z_i é tal que $(\boldsymbol{x}, z_i) \in \mathcal{Z}(N)$. A quantidade $\mathcal{A}(N; \boldsymbol{x})$ é o quociente do coeficiente de reflexão pelo espalhamento geométrico, isto é

$$\mathcal{A}(N; \boldsymbol{x}) = \frac{\mathcal{R}(N; \boldsymbol{x})}{\mathcal{L}(N; \boldsymbol{x})}.$$
(6.19)

Aqui a superfície de é denotada por reflexão $\Gamma \in \mathcal{W}_{\mathrm{I}}(N; \boldsymbol{x})$ é a função peso.

O critério para construção dos pesos do demodelamento em amplitude verdadeira é considerar que as amplitudes resultantes possuam as características: (a) sejam livres dos efeitos do espalhamento geométrico; (b) forneçam uma medida do coeficiente de reflexão dependente do ângulo de reflexão; e (c) outros fatores, tais como efeitos de transmissão e atenuação, permaneçam intocados.

Avaliando assintoticamente a integral (6.17), constrói-se o peso para o demodelamento em verdadeira amplitude (Tygel et al., 1999b)

$$\mathcal{W}_{\mathbf{I}}(\boldsymbol{\xi}; M) = -\frac{c(M)^3 \operatorname{lh}(\boldsymbol{\xi}; M) \cos^2 \theta_{\mathrm{M}}}{4\pi \cos^2 \alpha_{\mathrm{M}}} \mathcal{L}(M, S) \mathcal{L}(M, G), \qquad (6.20)$$

APÊNDICE

J MÉTODO DA FASE ESTACIONÁRIA

Neste apêndice são apresentados as apréoximações assintóticas de integrais simples e duplas, como resultado do *método da fase estacionária* apresentado em Bleistein *et al.* (1975) e Bleistein (1984). As integrais a serem aproximadas possuem um núcleo oscilatório, dependente de um parâmetro (em geral a freqüência), que deve ser grande o suficiente a fim de que a aproximação seja boa.

A integral dupla a ser avaliada assintoticamente é

$$I_2(\omega) = \iint_D d^2 \boldsymbol{y} \ g(\boldsymbol{y}) \ \exp\left[i\omega\phi(\boldsymbol{y})\right],\tag{6.21}$$

onde $|\omega| \gg 1$. O resultado do método da fase estacionária é

$$I_2(\omega) \sim \frac{2\pi}{\omega} \frac{1}{\left|\det[\Phi(\boldsymbol{y}_*)]\right|^{1/2}} g(\boldsymbol{y}_*) \exp\left[i\omega\phi(\boldsymbol{y}_*) + i\pi\,\operatorname{sgn}\big(\Phi(\boldsymbol{y}_*)\big)\big/4\right], \quad (6.22)$$

onde y_* é um ponto estacionário isolado de ϕ , isto é, $\nabla \phi(y_*) = 0$ e $\Phi(y_*)$ é não singular. A matriz Φ é definida como

$$\left[\Phi(\boldsymbol{y})\right]_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi(\boldsymbol{y})}{\partial y_i \partial y_j}$$
(6.23)

e a função sgn (Φ) é assinatura de Φ definida por

$$\operatorname{sgn}(\Phi) = \operatorname{sign}(\lambda_1) + \operatorname{sign}(\lambda_2)$$
(6.24)

onde λ_1 e λ_2 são os autovalores de Φ e sign é chamada *função sinal* e é definida por

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \operatorname{para} x \ge 0, \\ -1 & \operatorname{para} x < 0. \end{cases}$$
(6.25)

7

Fatores que afetam o imageamento sísmico

7.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são discutidos alguns dos problemas mais comuns do imagemento, bem como algumas de suas soluções. Tais problemas têm origem na discretização dos diversos fatores que estão presentes em todo o processo sísmico. Por exemplo, o dado sísmico tem uma taxa de amostragem, o número de traços sísmicos é finito e o campo de velocidades é uma matriz. Estas discretizações induzem a própria discretização das operações no processamento sísmico. Por exemplo, as equações do raio são resolvidas numericamente por algum método iterativo, as integrais devem ser computadas numericamente, dados devem ser interpolados, etc.

Mais especificamente, são discutidos os problemas do falseamento e da abertura, bem como as diferenças que ocorrem quando se faz o processo de imageamento por espalhamento ou por somação. Finalmente é discutido como e por quê realizar a suavização do modelo de velocidades.

No intuito de deixar o texto auto-contido, são apresentadas na forma de apêndices algumas técnicas de processamento de sinais como a filtragem e a suavização pela média móvel recursiva.

7.2 ESPALHANDO VERSUS SOMANDO

Todas operações de imageamento apresentadas nos Capítulos 5 e 6 têm duas versões operacionais. Ambas as versões são equivalentes para cada problema, na prática, porém, produzem resultados diferentes, pois numericamente cada versão interpola dados em domínios diferentes.

Para exemplificar, considere o caso da migração Kirchhoff. Como foi apresentada, para cada ponto M na profundidade, é realizada uma integral de superfície no domínio do tempo. Esta é a chamada migração por somação.

A principal vantagen da migração por espalhamento é que apenas um traço sísmico é processado por vez. Esta propriedade leva a vários desdobramentos:

- 1. Não é necessário manter todo o dado sísmico na memória;
- O algoritmo fica altamente paralelizável, pois cada traço pode ser processado independentemente;
- Não é necessário construir as tabelas GFT (tabelas de função de Green, do ingês "Green function tables"), que contêm os tempos de trânsito e espalhamento geométrico para cada ponto em profundidade, para cada par fonte-receptor.

7.3 O PROBLEMA DA ABERTURA

A abertura é o número de traços de entrada que são processados para cada integral auxiliar. Por exemplo, no caso da migração Kirchhoff, se a velocidade é constante, a abertura do algoritmo na versão por somação são todos os traços, enquanto na versão por espalhamento, a abertura corresponde ao semi-eixo horizontal de cada isócrona.

Por outro lado, sabe-se que a maior contribuição destas integrais vem da vizinhança que inclui o ponto de reflexão. Sendo assim, uma soma com abertura total além de parecer desperdício, ao longo do operador (curva de difração ou isócrona) o ruído não é tão aleatório quanto se deseja, afetando, portanto, a contribuição do ponto de reflexão na integral.

Em muitos casos, os refletores a serem imageados têm uma inclinação máxima, que depende

de fatores tais como a região a ser estudada, tipos de estruturas, entre outros. Em geral, antes e durante todo o processamento, o usuário é capaz de fornecer uma estimativa da inclinação máxima esperada dos refletores procurados. Com esta informação, denotada por θ_m , é possível diminuir a abertura, numa tentativa de evitar os problemas mencionados.

Existem métodos sofisticados para se lidar com a abertura, como por exemplo aqueles baseados na zona de Fresnel. No entanto, a técnica adotada neste trabalho é atribuir um peso simples a cada ponto da isócrona, de modo que nos pontos onde a inclinação da isócrona é alta o peso ali é diminuíido podendo até ser nulo.

Para cada ponto da isócrona, é possível determinar sua inclinação através dos vetores vagarosidade $p_s e p_g$ dos raios que ali se encontram. Atribuindo um ângulo de inclinação em cada ponto, o procedimento é aplicar uma função de "tapering" ao longo de cada isócrona em função de θ , como mostrado na Figura 7.1.



Figura 7.1: A função de "tapering".

7.4 O PROBLEMA DO FALSEAMENTO

O problema do falseamento (do inglês "aliasing") é inerente a qualquer processamento de sinais, pois os dados a serem processados têm uma taxa de amostragem. Algumas operações de imageamento alteram a freqüência dos sinais e como a taxa de amostragem (tanto em tempo como em profundidade) não é alterada, o falseamento acontece.

O problema do falseamento está ligado ao problema da abertura abordado na seção anterior, pois nas regiões extremas dos operadores, isócronas ou curvas de difração, a inclinação é muito alta. Isto quer dizer que para um pequeno incremento horizontal, há um grande incremento vertical, fazendo com que se perca a coerência do sinais em traços vizinhos.

Para os algoritmos do tipo espalhamento, uma maneira de se solucionar este problema é construir um banco constituído de versões do traço a ser processado. Cada versão é o resultado de uma filtragem passa-baixa do traço original (comunicação pessoal com Dr. Eduardo Filpo).

Para construir este banco de n_f traços, pode-se aproveitar a estimativa de ângulo máximo de inclinação θ_m usada no problema da abertura. Para isto considera-se o intervalo $[0, \theta_m]$ dividido em $n_f - 1$ subintervalos. Para cada ângulo $j\delta\theta_m$, para $j = 0, \ldots, n_f - 1$, constrói-se um traço filtrado. No decorrer do processamento, verifica-se a qual subintervalo o ângulo da isócrona pertence, implicando na escolha correspondente do traço filtrado. Veja um exemplo de um banco de traços com o auxílio da Figura 7.2.



Figura 7.2: Exemplo de um banco de traços. Cada versão do traço está associada a um ângulo.

O exemplo da Figura 7.3 mostra a isócrona que é a resposta de um traço sísmico composto por um único pulso. Repare que à medida que se afastam do ponto de mínimo da isócrona os traços filtrados diminuem de amplitude e ficam mais alongados, fazendo com que perdure a coerência entre os traços vizinhos



Figura 7.3: Efeito do falseamento: (a) a isócrona que é a resposta a um traço sísmico composto por um pulso;
(b) a mesma isócrona construída com o banco de traços. Repare que este procedimento também ajuda no problema da abertura.

7.5 ESCOLHA DO MODELO DE VELOCIDADES

Um bom modelo de velocidades é essencial em todo processo de imageamento sísmico em profundidade. Quando está disponível os algoritmos funcionam bem e a imagem final que mapeia as estruturas geológicas tem uma boa correspondência com a realidade. Este fato leva à conclusão de que quanto melhor o modelo melhor será o imageamento. Entretanto, é impossível ter em mãos o modelo exato, uma vez que obtê-lo é justamente um dos objetivos do processamento. Ora, isto leva

ao grande paradoxo do processamento sísmico que diz que para se obter o melhor modelo deve-se ter em mãos o melhor modelo.

Sendo assim, deve-se rever o conceito do que seja o melhor modelo para o imageamento. A primeira restrição imposta pela metodologia desta tese é que o modelo de velocidade que é usado no imageamento deve ser suave, a fim de que a construção de frentes de onda não falhe.

Existem vários métodos para suavizar dados. O método escolhido foi usar a média móvel recursiva (MMR), apresentado no Apêndice K. A Figura 7.4 mostra um exemplo do resultado do algoritmo MMR aplicado a um modelo de velocidades.



Figura 7.4: Suavização pelo algoritmo MMR: (a) o modelo original; (b) o modelo suavizado.

APÊNDICES

K SUAVIZAÇÃO POR MÉDIA MÓVEL RECURSIVA (MMR)

A suavização por média móvel recursiva (MMR) é uma operação que pode ser utilizada para suavizar dados amostrados em tempo ou espaço. A duas principais vantagens deste método são: é realizado no domínio da amostragem, isto é, não necessita de transformada de Fourier, e é muito rápido, por envolver muitas poucas e multiplicações.

A operação da média móvel aplicada a um vetor $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ é definida pela equação

$$w_k = \frac{1}{2d+1} \sum_{j=k-d}^{k+d} y_j, \quad \text{para } k = d+1, \dots, n-d,$$
 (7.1)

onde w é o resultado da operação MMR, chamado vetor de saída, e o fator (2d + 1) é chamado o tamanho da janela. Observe que o elemento w_k é apenas a média aritmética dos elementos que estão na janela de tamanho (2d + 1), centrada em y_k . Na linguagem de processamento de sinais, o vetor de saída w é o resultado da convolução do vetor y com o operador m, isto é

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{m} \ast \boldsymbol{y}. \tag{7.2}$$

Economia de operações –

Aplicando a fórmula (7.1) para w_{k+1} , obtém-se a seguinte relação iterativa

$$w_{k+1} = \frac{1}{2d+1} \sum_{j=k+1-d}^{k+1+d} y_j = \frac{1}{2d+1} \left[\sum_{j=k-d}^{k+d} y_j - y_{k-d} + y_{k+d+1} \right]$$

= $w_k + \frac{1}{2d+1} \left[-y_{k-d} + y_{k+d+1} \right].$ (7.3)



Figura K.1: Em (a) é mostrado o operador média móvel com janela da tamanho 11. Em (b) é mostrado o mesmo operador de (a) aplicado a si mesmo quatro vezes. Note que o operador resultante em (b) se assemelha a uma gaussiana.

A equação acima mostra que para cada elemento do vetor de saída w, com exceção do primeiro, são necessárias somente três somas e uma multiplicação. Por ser tão simples e rápido, o algoritmo pode ser aplicado repetidas vezes, aumentando o grau de suavização no vetor de saída. Por exemplo se o número de repetições é r, o resultado final é

$$w = \mathbf{m} * \mathbf{m} * \cdots * \mathbf{m} * \mathbf{y} = \mathbf{m}_r * \mathbf{y}. \tag{7.4}$$

onde $\mathbf{m}_r = \mathbf{m} * \mathbf{m} * \cdots * \mathbf{m}$ é operador convoluído consigo mesmo r vezes. Com o exemplo mostrado na Figura K.1, é possível visualizar tanto o operador como a sua convolução recursiva.

A média móvel recursiva está descrita em forma de algoritmo, onde a notação escolhida para vetores é a mesma do MATLAB, isto é, $y(k) \equiv y_k$.

Algoritmo MMR:

- 1. Defina o tamanho da janela 2d + 1 e o número de repetições r;
- 2. Repetir r vezes:

(a)
$$w(d+1) \leftarrow \sum_{j=1}^{2d+1} y(j);;$$

(b) Para $k = d+1, \dots, n-d$, faça
 $w(k+1) \leftarrow w(k) + y(k+d+1) - y(k-d);$
(c) $w(k) \leftarrow w(k)/(2d+1)$, para $k = d+1, \dots, n-d;$

Média móvel recursiva 2D

O algoritmo MMR pode ser estendido para matrizes de dimensões $(n \times n)$. A idéia é a mesma,

isto é cada elemento da matriz de saída w_{ij} recebe a média aritmética dos elementos que estejam em uma janela quadrada com dimensões $(2d + 1) \times (2d + 1)$, com centro em y_{jk} . Novamente, o algoritmo possui a propriedade iterativa, e portanto, o número de somas e multiplicações fica bastante reduzido. Na Figura K.2 é mostrado um exemplo de um operador de dimensões (11×11) , bem como o resultado da autoconvolução repetida quatro vezes.



Figura K.2: Em (a) é mostrado o operador média móvel 2D com janela de tamanho (11 × 11). Em (b) é mostrado o mesmo operador de (a) aplicado a si mesmo quatro vezes. Note que o operador resultante em (b) se assemelha a uma gaussiana.

A média móvel recursiva bidimensional está descrita abaixo em forma de algoritmo, onde a notação escolhida para matrizes é a mesma do MATLAB, isto é, $y(i, j) \equiv y_{ij}$.

Algoritmo MMR2:

- 1. Defina o tamanho da janela 2d + 1 e o número de repetições r;
- 2. Repetir r vezes:

(a)
$$w(d+1, d+1) \leftarrow \sum_{i=1}^{2d+1} \sum_{j=1}^{2d+1} y(i, j);$$

(b) Para $k = d+1, \dots, m-d$, faca

i. Para
$$\ell = d + 1, ..., n - d$$
, faça
 $w(k, \ell + 1) \leftarrow w(k, \ell) + \sum_{i=1}^{2d+1} \left[y(k+i, \ell + d + 1) - y(k+i, \ell - d) \right];$

ii.
$$w(k+1,\ell) \leftarrow w(k,\ell) + y(k+d+1,\ell) - y(k-d,\ell)$$
;
(c) $w(k,\ell) \leftarrow w(k,\ell)/(2d+1)^{-2}$, para $k = d+1, \dots, m-d$, $\ell = d+1, \dots, n-d$;

Considerações finais e perspectivas futuras

O objetivo geral deste trabalho é apresentar os fundamentos e algumas ferramentas necessárias ao imageamento sísmico por empilhamento de integrais de tipo Kirchhoff. Duas abordagens distintas e complementares foram apresentadas: a teórica, onde a ênfase se situa na descrição e desenvolvimento matemáticos dos métodos de imageamento estudados, e a algorítmica, onde os aspectos numéricos e computacionais da efetiva implementação desses métodos são abordados.

Os aspectos teóricos da tese estão representados na *Teoria dos Raios*, apresentada no Capítulo 2 e nas *Quatro Operações de Kirchhoff*, apresentadas nos Capítulos 5 e 6. Por outro lado, A ênfase agorítmica se concentra no *Método de Construção de Frentes de Onda (CFO)*, descrita no Capítulo 3, bem como nos *Fatores que Afetam o Imageamento Sísmico*, conforme a exposto no Capítulo 7.

No mesmo contexto, é possível classificar os objetivos alcançados na tese também como teóricos e algorítmicos. Os objetivos teóricos podem ser sumarizados:

- A teoria dos raios, segundo o paradigma de Bleistein (isto é, sem a mudança de coordenadas para as coordenadas centradas no raio), foi ampliada, com a inclusão de novas condições iniciais e das condições de contorno para as quantidades dinâmicas;
- Na conversão da equação de transporte em uma equação diferencial ordinária, foi apresentada uma demonstração, mais natural e simples, do lema de Smirnov, para o caso n-dimensional. A demonstração apresentada pode representar uma interessante contribuição de interesse para

alicações mais gerais em Álgebra Linear;

 As quatro operações de Kirchhoff são rigorosamente definidas e apresentadas como um conjunto unificado de operações, apresentando relações estruturais entre si, tendo como base as isócronas e superfícies de difração;

No que se refere aos objetivos algorítmicos alcançados na tese, a principal contribuição foi a cuidadosa e didática análise e descrição do método CFO. O método CFO constitui-se numa ferramenta versátil, que pode ser usada tanto para o modelamento sísmico (incluindo o modelamento pela teoria dos raios e o modelamento Kirchhoff), quanto para o imageamento sísmico (incluindo a migração, demigração e demodelamento de Kirchhoff). Conforme detalhado na tese, o método CFO apresenta várias características desejáveis ao processamento sísmico. As principais estão listadas abaixo.

- Possibilidade de se consideração de várias condições iniciais alternativas, como por exemplo condições iniciais de fonte pontual, de refletor explosivo e condições mistas. Uma aplicação desta característica é a modelagem com afastamento nulo do tempo de reflexão para um refletor, usando condições de refletor explosivo;
- Os raios são traçados tanto cinematicamente quanto dinamicamente, isto quer dizer que quantidades tais como o Jacobiano do raio são acessíveis na malha raios e frentes de onda (RFO). Estas quantidades são necessárias para a construção dos pesos das integrais para amplitude verdadeira nas quatro operações de Kirchhoff;
- Graças ao controle de densidade dos raios, zonas de sombra passam a não existir e regiões com cáusticas são bem amostradas;
- Possibilidade de se considerar uma malha-alvo qualquer, não-cartesiana, como por exemplo, um refletor amostrado;
- Maior rapidez na interpolação da malha RFO na malha-alvo, graças ao paradigma de se mudar a escala de metros para centímetros, seguida da conversão de números inteiros;
- Maior rapidez na geração da malha RFO, graças à superamostragem do macro-modelo de velocidades, dado por splines bi-cúbicas;

Perspectivas futuras:

O material descrito no presente trabalho é objeto, na atualidade, de ativos estudos nas áreas de Matemática Aplicada e Geofísica. Indicados abaixo estão vários tópicos de pesquisa que podem ser considerados como de interesse para futuros desenvolvimentos. A classificação dos desenvolvimentos futuros é feita de acordo com o seu caráter teórico ou algorítmico.

Como contribuições teóricas, pode-se destacar os seguintes possíveis trabalhos futuros

- Uso da Teoria dos Raios, segundo o paradigma Bleistein, para a obtenção de expressões alternativas para as curvaturas das frentes de onda N ("Normal-wave") e NIP e ("Normal-incidentpoint-wave");
- Utilização das quatro operações de Kirchhoff para estudar a construção de novas operações de imageamento, como por exemplo, a demigração seguida por demodelamento e o remodelamento (análogo à remigração) que é o modelamento seguido de demodelamento;

As contribuições de caráter algorítmico estão relacionadas ao método CFO. Os seguinte ítens podem ser vistos como trabalhos futuros:

- Utilização do critério de densidade de raios para a destruição de raios desnecessários, implicando na aceleração da interpolação da malha RFO na malha-alvo;
- Utilização de um integrador simplético, como método numérico para a resolução das equações do raio, a fim de diminuir o erro numérico no traçado dos raios, sem aumentar muito o tempo de execução;
- Utilização de um algoritmo de detecção de colisões, a fim de se considerar meios com descontinuidades em interfaces. Assim, é possível o traçamento de raios em meios blocados, isto é, meios com super-estruturas separadas por interfaces;
- Como no método CFO, o tempo computacional da interpolação da malha RFO na malha-alvo supera em muito qualquer outra parte, deve-se investir na otimização deste algoritmo. Uma sugestão é a utilização do paradigma "lazy" para o algoritmo ponto-interior-ao-triângulo, em que o sinal dos determinantes é computados de maneira otimizada, usando algoritmos da teoria dos números;
- Utilização do paradigma dividir-para-conquistar na interpolação da malha RFO na malhaalvo, a fim de acelerar o tempo de exeução do algoritmo;

- Bleistein, N., 1975, Asymptotic expansion of integrals: Dover.
- Bleistein, N., 1984, Mathematical methods for wave phenomena: Academic Press.
- Červený, V., 2001, Seismic ray theory: Cambridge University Press.
- Evans, L. C., 1998, Partial Differential Equations: AMS Press.
- Greub, W., 1975, Linear Algrebra: Springer, New York.
- Hämmerlin, G., e Hoffmann, K.-H., 1991, Numerical mathematics: Springer.
- Hubral, P., Schleicher, J., e Tygel, M., 1996a, A unified approach to 3-D seismic reflection imaging, part I: Basic concepts: Gephysics, **61**, 742–758.
- Hubral, P., 1983, Computing true amplitude reflections in a laterally inhomogeneous earth: Geophysics, **48**, no. 8, 1051–1062.
- Hubral, P., 1984, Simulating true amplitude reflections by stacking shot records: Geophysics, 49, no. 8, 303–306.
- Preparata, F. P., e Shamos, M. I., 1991, Computational Geometry : An Introduction. Texts and Monographs in Computer Science: Springer.
- Santos, L. T., Schleicher, J., Tygel, M., e Hubral, P., 2000, Modeling by demigration: Geophysics, 65, 1281–1289.
- Santos, L. T., Schleicher, J. e Tygel, M., 1997, 2.5-D true-amplitude offset continuation: J. of Seismic Exploration, no. 06, 103–116.
- Schleicher, J., Hubral, P., Hocht, G., e Liptow, F., 1997, Seismic constant-velocity remigration: Geophysics, 62, no. 02, 589–597.

- Sheriff, R. E., e Geldart, L. P., 1982, Exploration seismology. vol. 1: History, theory & data acquisition: Cambridge University Press, Cambridge.
- Tygel, M., Schleicher, J., e Hubral, P., 1996b, A unified approach to 3-D seismic reflection imaging. Part II: Theory: Geophysics, **61**, no. 3, 742–758.
- Tygel, M., Schleicher, J., Hubral, P., e Santos, L. T., 1998, 2.5-d true-amplitude kirchhoff migration to zero offset in laterally inhomogeneous media: Geophysics, **63**, no. 02, 557–573.
- Tygel, M., Santos, L. T., Schleicher, J., e Hubral, P., 1999a, Kirchhoff imaging as a tool for ava/avo analysis: The Leading Edge, 18, 940–945.
- Tygel, M., Schleicher, J., Santos, L. T., e Hubral, P., 1999b, An asymptotic inverse to the Kirchoff-Helmholtz integral: Inverse Problems, 16, 425–445.
- Vinje, V., Iversen, E., e Gjoystdal, H., 1993, Traveltime and amplitude estimation using wavefront construction: Geophysics, 58, no. 08, 1157–1166.
- Vinje, V., Lecomte, I., Astebol, K., Iverson, E., e Gjoystdal, H., 1994, Efficient green's functions calculation for improved 3d seismic imaging in complex areas: 56th Mtg. Eur. Assn. of Expl. Geophys., Eur. Assn. of Expl. Geophys., Extended Abstracts, Session:B043.
- Vinje, V., 1997, A new interpolation criterion for controlling accuracy in wavefront construction: 67th Meeting of Eur. Assn. of Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 1723–1726.
- Yilmaz, Ö., 1987, Seismic data processing:, volume 2 of Investigations in Geophysics Soc. Expl. Geophys., Tulsa.