TEOREMAS DE CLASSIFICAÇÃO PARA FORMAS QUADRÁTICAS SOBRE CORPOS

TRAJANO PIRES DA NÓBREGA NETO

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

CAMPINAS - SÃO PAULO
BRASIL

TEOREMAS DE CLASSIFICAÇÃO PARA FORMAS QUADRÁTICAS SOBRE CORPOS

Este exemplar corresponde a redação da tese defendida pelo Sr. Trajano Pires da Nóbrega Neto e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 21 de maio 1984

Prof. Dr. Antonio Paques

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática Pura.

MAIO/1984.

A meus pais

Sebastião e Marta

AGRADEÇO

Ao Prof. Dr. Antonio Paques,pela orientação segura e pelas palavras de incentivo nos momentos difíceis;

ao Tio Celso,pelo apoio dispensado durante meus estudos;

ao Prof. Dr. Antonio Engler,por sua valiosa colaboração;

ao CNPq e à FAPESP, pelo apoio financeiro.

a Lourdes pelo serviço de datilografia e

a todos que direta ou indiretamente contribuiram para a realização deste trabalho.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Nestas notas apresentamos um estudo da teoria algébrica de formas quadráticas sobre corpos quaisquer, com vistas a obter alguns teoremas de classificação.

Este trabalho baseia-se fundamentalmente nos artigos de Elman-Lam [5] para corpos de característica diferente de 2 e Sah [12] para corpos de característica 2.

No Capítulo I, introduzimos apenas aquelas noções e resultados básicos sobre formas quadráticas, necessários à compreensão do texto.

No Capítulo II estudamos a álgebra de Clifford de um espaço quadrático, e seu centro. Estabelecemos as condições sob as quais uma álgebra de Clifford é central simples. Utilizando os resultados obtidos com este estudo, introduzimos os invariantes de Arf e de Witt.

O Capitulo III é totalmente dedicado ao estudo de corpos ordenados e pytagoreanos. Aqui nos baseamos quase que exclusivamente nos resultados do Capítulo 8 de [6].

Finalmente no Capítulo IV apresentamos os teoremas de classificação para formas quadráticas. Trata-se de alguns teoremas que caracterizam os corpos sobre os quais formas quadráticas são classificadas mediante um conjunto de invariantes dado.

CAPÍTULO I

ESPAÇOS QUADRÁTICOS

§1. PRELIMINARES

DEFINIÇÃO 1.1.1. Sejam F um corpo e V um F-espaço vetorial. Dizemos que uma função $q : V \to F$ é uma *forma quadrática* se: (i) $q(\alpha \cdot v) = \alpha^2 \cdot q(v)$ para todo α em F e todo v em V. (ii) a função $B_q : V \times V \to F$ tal que $B_q(x,y) = q(x+y) - q(x) - q(y)$ para todo x,y em V, é bilinear.

A função B_q será chamada de *forma bilinear associada a* q e o par (V,q) será dito um *espaço quadrático*, também denotado por (V,B_q).

DEFINIÇÃO 1.1.2. Sejam (V,q) um espaço quadrático e B_q a bilinear associada a q. Dizemos que o espaço quadrático (V,q), ou a forma quadrática q, é *não singular* se dado $x \in V$ tal que $B_q(x,v) = 0$ para todo v em V, então $x = 0$.

Em todo o texto consideraremos apenas formas quadráticas não singulares; ou seja, o termo forma quadrática (resp. espaço quadrático) significará, em tudo que se seguirá, forma quadrática não singular (resp. espaço quadrático não singular).

DEFINIÇÃO 1.1.3. Sejam (V_1,q_1) e (V_2,q_2) dois espaços quadráticos sobre um corpo F. Dizemos que (V_1,q_1) é *isométrico* a (V_2,q_2) e donotamos $(V_1,q_1) \simeq (V_2,q_2)$, ou simplesmente $q_1 \simeq q_2$, se existe um isomorfismo de espaços vetoriais $\sigma : V_1 \to V_2$ tal que $q_1 = q_2 \circ \sigma$.

É fácil ver que $\simeq$ é uma relação de equivalência e a classe de equivalência de q é o conjunto das formas quadráticas do tipo $q \circ \sigma$, onde $\sigma \in \mathrm{Aut}(V)$.

Outra observação que pode ser feita é que se $(V_1,q_1) \simeq (V_2,q_2)$ então $\dim q_1 = \dim q_2$, onde $\dim q_1 := \dim V_1$; o que nos mostra que a dimensão de um espaço quadrático é invariante por isometrias.

DEFINIÇÃO 1.1.4. Sejam F um corpo, (V,q) um espaço quadrático sobre F e $d \in F^{\cdot}$. Dizemos que q representa d se existe $v \in V$ tal que $q(v) = d$.

É claro que se q_1 e q_2 são duas formas quadráticas, $q_1 \simeq q_2$ e q_1 representa d então q_2 representa d, ou seja, o conjunto $D(q)$ dos elementos de $F^{\cdot}$ representados pela forma quadrática q depende apenas da classe de isometria de q.

Se $a,d \in F^{\cdot}$ e q é uma forma quadrática sobre F então $d \in D(q)$ se e somente se $a^2 \cdot d \in D(q)$. Com isto vemos que $D(q)$ é uma reunião de classes de $F^{\cdot}/F^{\cdot 2}$.

Introduzimos agora o conceito de soma direta ortogonal entre espaços quadráticos.

Se (V,q) é um espaço quadrático e $v_1, v_2 \in V$, dizemos que v_1 é ortogonal a v_2, segundo B_q, se $B_q(v_1,v_2) = 0$.

DEFINIÇÃO 1.1.5. Sejam (V_1,q_1) e (V_2,q_2) dois espaços quadráticos sobre F. Definimos a *soma direta ortogonal* de (V_1,q_1) e (V_2,q_2), e denotamos por $(V_1,q_1) \perp (V_2,q_2)$ como sendo o espaço quadrático (V,q), onde $V = V_1 \oplus V_2$ e $q(x_1 + x_2) = q_1(x_1) + q_2(x_2)$ para todo $x_i \in V_i$, $i = 1,2$.

Neste caso escrevemos $q = q_1 \perp q_2$ e dizemos que q_1 (ou q_2) é uma *subforma* de q. A bilinear B_q associada a q é tal que $B_q(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = B_{q_1}(x_1,y_1) + B_{q_2}(x_2,y_2)$ para todo $x_i, y_i \in V_i$, onde B_{q_i} é a bilinear associada a q_i, $i = 1,2$. Com isto vemos que $B_q(x_1,x_2) = 0$ para todo $x_i \in V_i$, $i = 1,2$; ou séja, todo vetor de V_1 é ortogonal a todo vetor de V_2, segundo B_q. Daí o nome de soma direta ortogonal.

É fácil ver que se q_1 e q_2 são não singulares então $q_1 \perp q_2$ também o é. Além disso se $(V_1,q_1) \simeq (V_1',q_1')$ e $(V_2,q_2) \simeq (V_2',q_2')$ então $(V_1,q_1) \perp (V_2,q_2) \simeq (V_1',q_1') \perp (V_2',q_2')$, ou seja, a soma direta ortogonal é preservada por isometrias.

Se F é um corpo de característica diferente de 2, V é um espaço F-vetorial de dimensão 1 e q é uma forma quadrática definida sobre V tal que $q(v) = a$, onde $V = F \cdot v$, então $a \in F^{\bullet}$ e q será denotada por $\langle a \rangle$, ou seja, $q(\alpha \cdot v) = a \cdot \alpha^2$

para todo $\alpha \in F$. Com isto vemos que $\langle a \rangle \simeq \langle b \rangle$ se e somente se $a \cdot b \in F^{\cdot 2}$.

Por outro lado, se $car(F) = 2$ e V é um F-espaço vetorial de dimensão 2, podemos encontrar $v_1, v_2 \in V$ tais que $q(v_1) = a$, $q(v_2) = b$ e $B_q(v_1, v_2) = 1$, $a, b \in F$ e $V = Fv_1 + Fv_2$. Neste caso q será denotada por $[a,b]$, isto é, $q(x_1 v_1 + y_1 v_2) = ax_1^2 + x_1 y_1 + by_1^2$, para todo $x_1, y_1 \in F$.

LEMA 1.1.6. Sejam F um corpo, q uma forma quadrática sobre F e $d \in F$. (i) Se $car(F) \neq 2$ então $d \in D(q)$ se e somente se existe uma forma quadrática q, tal que $q \simeq \langle d \rangle \perp q_1$. (ii) Se $car(F) = 2$ então $d \in D(q) \cup \{0\}$ se e somente se existe $c \in F$ e uma forma quadrática q_1 tal que $q \simeq [d,c] \perp q_1$.

DEMONSTRAÇÃO. (i) É lógico que se $q \simeq \langle d \rangle \perp q_1$ então $d \in D(q)$, pois $d \neq 0$ devido ao fato de q ser não singular, e q representa d pois $\langle d \rangle$ representa d. Por outro lado, se $d \in D(q)$ então existe $v \in V$ tal que $q(v) = d$. Se $\dim V = n > 0$, podemos encontrar $v_2, \ldots, v_n \in V$ tais que $V = Fv + Fv_2 + \ldots + Fv_n$. Se $B_q(v_1 v_i) = a_i$, fazemos $v_i' = v_i - \frac{a_i}{d} v$ e assim teremos $B_q(v_1 v_i') = 0$, $i = 2, \ldots, n$ e $V = Fv + Fv_2' + \ldots + Fv_n'$. Fazemos $V_1 = Fv_2' + \ldots + Fv_n'$. Desde que $q|_{V_1}$ é uma forma quadrática sobre V_1, chamamos esta de q_1 e assim teremos $q \simeq \langle d \rangle \perp q_1$.

(ii) Assim como no caso anterior, se $car(F) = 2$ e $q \simeq [d,c] \perp q$, então $d \in D(q) \cup \{0\}$. Suponhamos $d = q(v_1)$ para algum $v_1 \in V$. Desde que $B_q(v_1,v_1) = 0$ e q é não singular, então existe $v_2 \in V$ tal que $B_q(v_1,v_2) = 1$. Sejam $c = q(v_2)$ e $V = Fv_1 + Fv_2 + \dots + Fv_n$. Se $B_q(v_1,v_i) = a_i$ e $B_q(v_2,v_i) = b_i$, $i = 3,4,\dots,n$, sejam $v_i' = v_i + a_iv_2 + b_iv_1$, $i=3,4,\dots,n$. Fazendo $V_1 = Fv_3' + \dots + F_n'$ teremos $V = Fv_1 + Fv_2 + V_1$ e toda combinação linear de v_1 e v_2 é ortogonal, segundo B_q, a todo vetor de V_1. Fazendo $q_1 = q|_{V_1}$, temos $q \simeq [d,c] \perp q_1$.

Se F é um corpo de característica 2 então não existe espaço quadrática (não singular) de dimensão 1 sobre F, pois se q é uma forma quadrática sobre F então $B_q(v,v) = 0$.

Baseado nesta observação e no lema acima demonstrado, podemos provar o seguinte resultado:

COROLÁRIO 1.1.7. Sejam F um corpo e q uma forma quadrática sobre F. (i) Se $car(F) \neq 2$ e $n = \dim q$, então existem $d_1,\dots,d_n \in F^{\cdot}$ tais que $q \simeq \langle d_1 \rangle \perp \dots \perp \langle d_n \rangle$. (ii) Se $car(F) = 2$ e $n = \dim q$ então $n = 2 \cdot m$ e existem $d_1, \dots, d_m$, $c_1,\dots,c_m \in F$ tais que $q \simeq [d_1,c_1] \perp \dots \perp [d_n,c_n]$.

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração deste corolário se faz por indução sobre $n = \dim q$ e é uma consequência imediata do lema 1.1.6.

A forma quadrática $\langle d_1 \rangle \perp \dots \perp \langle d_n \rangle$ será também denotada por $\langle a_1,\dots,a_n \rangle$.

DEFINIÇÃO 1.1.8. Sejam (V,q) um espaço quadrático e $v \in V$.

Dizemos que v é *isotrópico* se $v \neq 0$ e $q(v) = 0$. Se $q(v) \neq 0$ dizemos que v é *anisotrópico*.

Dizemos que (V,q) é um *espaço quadrático isotrópico*, se este contém algum vetor isotrópico. Caso contrário dizemos que este é um *espaço quadrático anisotrópico*.

Tais conceitos se aplicam, de modo natural, às formas quadráticas.

PROPOSIÇÃO 1.1.9. (i) Se F é um corpo de característica 2 e q é uma forma quadrática sobre F, com $q \simeq [1,d]$, então q é isotrópica se e somente se $d \in \wp(F) = \{x^2 + x,\ x \in F^{\cdot}\}$. (ii) Se q_1 e q_2 são duas formas quadráticas sobre um corpo F de característica 2, com $q_1 \simeq [1,c]$ e $q_2 \simeq [1,d]$ então $q_1 \perp q_2 \simeq$ $\simeq [0,0] \perp [1,c+d]$; (iii) Se F é um corpo qualquer e q é uma forma quadrática de dimensão 2 sobre F então q é isotrópica se e somente se $q \simeq \langle 1,-1 \rangle$ se $car(F) \neq 2$ ou $q \simeq [0,0]$ se $car(F) = 2$.

DEMONSTRAÇÃO: (i) Se $d \in \wp(F)$, é claro que $[1,d]$ é isotrópica. Por outro lado, se $[1,d]$ é isotrópica então existem $x,y \in F^{\cdot}$ tais que $x^2 + xy + y^2 d = 0$. E assim temos $d = (x/y)^2 + (x/y) \in \wp(F)$.

(ii) Sejam $V_1 = Fx + Fy$ e $V_2 = Fz + Fw$ os espaços vetoriais sobre os quais q_1 e q_2, respectivamente, estão definidas. Fazendo $q = q_1 \perp q_2$, o espaço vetorial sobre o qual esta nova forma quadrática está definida é $V = Fx + Fy + Fz + Fw$ e a forma quadrática q é tal que $q(x) = q(z) = B_q(x,y) = B_q(z,w) = 1$, $q(y) = c$, $q(w) = d$ e $B_q(x,z) = B_q(x,w) = B_q(y,z) = B_q(y,w) = 0$.

Nestas condições podemos ver que:

$$(Fx+Fy) \perp (Fz \quad Fw) \simeq (F(x+z) + F(dx+dz+w)) \perp (Fx + F(y-w)) \ ,$$

ou seja, $[1,c] \perp [1,d] \simeq [0,0] \perp [1,c+d]$.

(iii) É claro que se $q \simeq \langle 1,-1 \rangle$ ou $q \simeq [0,0]$ quando $car(F) \neq 2$ ou $car(F) = 2$ respectivamente, então q é isotrópica. Se $car(F) \neq 2$ e q é uma forma quadrática sobre F com $\dim q = 2$ então existem $a,b \in F^{\bullet}$ tais que $q \simeq \langle a,b \rangle$. Desde que $\langle a,b \rangle$ é isotrópica podemos supor $b = -a$, ou seja, $q \simeq \langle a,-a \rangle$. Visto que $D(\langle a,-a \rangle) = F^{\bullet}$, então podemos supor $q \simeq \langle 1,c \rangle$ para algum $c \in F^{\bullet}$ (cf. 1.1.6(i)). Novamente, pelo fato de $\langle 1,c \rangle$ ser isotrópica, podemos supor $c = -1$. Se $car(F) = 2$ e q é uma forma quadrática isotrópica com $\dim q = 2$, podemos supor $q \simeq [0,c]$ (cf. 1.1.6(ii)). Se $V = Fv_1 + Fv_2$ com $q(v_1) = 0$, $q(v_2) = c$ e $B_q(v_1,v_2) = 1$, fazemos $v_2' = v_2 + cv_1$ e teremos $V = Fv_1 + Fv_2'$ com $q(v_1) = q(v_2') = 0$ e $B_q(v_1,v_2) = 1$, ou seja, $q \simeq [0,0]$, e isto completa nossa demonstração.

Se (V,q) é um espaço quadrático isotrópico de dimensão 2, então dizemos que (V,q) é um *plano hiperbólico* e o denotamos por $\mathbb{H}$, ou seja, $\mathbb{H} \simeq \langle 1,-1 \rangle$ se $car(F) \neq 2$ e $\mathbb{H} \simeq [0,0]$ se $car(F) = 2$.

Seja (V,q) um espaço quadrático. Se $(V,q) \simeq \mathbb{H} \perp \ldots \perp \mathbb{H}$ (n-vezes) então escrevemos $(V,q) \simeq n \cdot \mathbb{H}$ e dizemos que (V,q) é um *espaço hiperbólico*.

Vale a pena mencionar que se (V,q) é um plano hiperbólico então existem vetores $v_1, v_2 \in V$ com $q(v_1) = q(v_2) = 0$ e $B_q(v_1,v_2) = 1$, independentemente da característica do corpo F. Além disso, se (V,q) é um espaço quadrático sobre F, então $(V,q) \perp (v_1(-1)\cdot q) \simeq n \cdot \mathbb{H}$, onde $n = \dim q$ e por $(-1)\cdot q$ entendemos a forma quadrática definida sobre V tal que $((-1)q)(v) = -q(v)$, $\forall v \in V$.

DEFINIÇÃO 1.1.10. Uma forma quadrática q é dita *universal* se $D(q) = F^{\bullet}$.

Um exemplo evidente de forma quadrática universal é o plano hiperbólico.

Se (V,q) é um espaço quadrático e $U \subset V$, dizemos que U é *totalmente isotrópico* se $q(u) = 0$ para todo u em U.

TEOREMA 1.1.11. Se (V,q) é um espaço quadrático, então: (i) todo subespaço totalmente isotrópico $U \subset V$, de dimensão $r > 0$ está contido em um subespaço hiperbólico $T \subset V$ de dimensão $2 \cdot r$. (ii) q é isotrópica se e somente se $q \simeq \mathbb{H} \perp q_1$ e (iii) se q é isotrópica então q é universal.

DEMONSTRAÇÃO: É claro que (i) $\Longrightarrow$ (ii) e (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Logo só precisamos mostrar (i), fato este que será feito por indução sobre $r = \dim U$. Se $r = 1$, temos $U = Fu$ e $V_1 = Fv_1 + \ldots + Fv_n$, com $V = Fu + V_1$, $q(u) = 0$ e $B_q(u,v) = 1$ para algum $v \in V_1$. Sem perda de generalidade, podemos supor $v = v_1$. Se $B_q(u,v_i) = a_i$, fazemos $v_i' = v_i - a_i v_1$, $i = 2,\dots,s$ e ainda teremos $V = F u + V_1'$, onde $V_1' = Fv_1 + Fv_2' + \dots + Fv_s'$. Se $B_q(v_1,v_i') = b_i$, fazemos $v_i'' = v_i' - b_i u$, $i = 2,\dots,s$ e teremos $V = Fu + Fv_1 + Fv_2'' + \dots + Fv_3''$ com $B_q(u,v_1) = 1$, $B_q(u,v_i'') = B_q(v_1,v_i'') = 0$, $i = 2,\dots,s$. Neste caso podemos considerar $(V,q) \simeq (v_2,q_2) \perp (V_3,q_3)$ onde $V_2 = Fu + Fv_1$, $V_3 = Fv_2'' + \dots + Fv_s''$, $q_2 = q|_{V_2}$ e $q_3 = q|_{V_3}$. Desde que (V_2,q_2) é um espaço quadrático isotrópico de dimensão 2 então $(V_2,q_2) \simeq \mathbb{H}$ (cf. 1.1.9 (iii)).

Suponhamos $r > 1$. Sejam $U = Fu_1 + \dots + Fu_r$ e $V_1 = Fv_1 + \dots + Fv_s$ de modo que $V = U + V_1$, $q(u) = 0$, $\forall u \in U$ e $B_q(u_1,v_1) = 1$. Se $B_q(u_1,v_i) = a_i$, fazemos $v_i' = v_i - a_i v_1$, $i = 2,\dots,s$. Se $B_q(v_1,u_i) = b_i$, fazemos $u_i' = u_i - b_i u_1$, $i = 2,\dots,3$; de modo que teremos $V = Fu_1 + Fu_2' + \dots + Fu_r' + Fv_1 + Fv_2' + \dots + Fv_i'$. Se $B_q(v_1,v_i') = c_i$ fazemos $v_i'' = v_i' - c_i u_i$ e teremos $(V,q) = (V_2,q_2) \perp (V_3,q_3)$ onde $V_2 = Fu_1 + Fv_1$, $V_3 = Fu_2' + \dots + Fu_r' + Fv_2'' + \dots + Fv_s''$, $q_2 = q|_{V_2}$ e $q_3|_{V_3}$. Desde que (V_2,q_2) é um espaço quadrático isotrópico de dimensão 2 então $(V_2,q_2) \simeq \mathbb{H}$. Visto que V_3 contém um subespaço totalmente isotrópico de dimensão $r-1$, aplicamos a hipótese de indução para concluir a demonstração.

COROLÁRIO 1.1.12. Se q é uma forma quadrática sobre F então

q admite uma única decomposição ortogonal, a menos de isometrias, do tipo $q \simeq q_a \perp q_h$, onde q_a é anisotrópica e q_h é hiperbólica.

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração será feita por indução sobre $n = \dim q$. Se $n=1$ ou se $n>1$ e q é anisotrópico o resultado é imediato. Assim suponhamos $n > 1$ e q isotrópica. Neste caso $q \simeq \mathbb{H} \perp q_1$ (cf. 1.1.11(ii)). Aplicando a hipótese de indução sobre $\dim q_1$, vemos que $q \simeq n \cdot \mathbb{H} \perp q_a$, onde q_a é anisotrópica. Com isto teremos provado a existência da decomposição. Para mostrar a unicidade, precisamos do seguinte

TEOREMA 1.1.13. (do cancelamento de Witt). Sejam q, q_1 e q_2 formas quadráticas sobre F. Se $q \perp q_1 \simeq q \perp q_2$ então $q_1 \simeq q_2$.

Se q é uma forma quadrática tal que $q \simeq q_a \perp n \cdot \mathbb{H}$ e $q \simeq q_a' \perp m \cdot \mathbb{H}$ onde q_a e q_a' são anisotrópicas e $n \leq m$ então, pelo teorema acima, $q_a \simeq (m-n)\mathbb{H} \perp q_a'$. Visto que q_a é anisotrópica, concluimos que $m = n$, ou seja, a unicidade do corolário 1.1.12 fica demonstrada.

Antes de demonstrarmos o teorema 1.1.13, vejamos alguns resultados auxiliares.

LEMA 1.1.14. Sejam (V,q) um espaço quadrático e U um subespaço não nulo de V. Se $q|_U$ é não singular então $V = U \oplus U^{\perp}$, onde $U^{\perp} = \{x \in V;\ B_q(x,u) = 0,\ \forall u \in U\}$.

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração deste resultado se faz utilizando o mesmo raciocínio usado para a demonstração de 1.1.6.

Dados um espaço quadrático (V,q) e U um subespaço de V, nas condições do lema acima, o subespaço $U^{\perp}$ será chamado o *complemento ortogonal de* U.

Sejam (V,q) um espaço quadrático e $x,y \in V$ tais que $q(x) = B_q(x,y) = 0$. É fácil ver que a função $E(x,y): V \to V$ tal que $E(x,y)(z) = z + B_q(z,x)\cdot y - B_q(z,y)\cdot x - q(y)\cdot B_q(z,x)\cdot x$ é uma isometria.

LEMA 1.1.15. Se (V,q) é um espaço quadrático tal que $V = (Fe_1 + Fe_2) \perp V_1 = (Fw_1 + Fw_2) \perp V_2$ com $B_q(e_1,e_2)=B_q(w_1,w_2) = 1$ e $q(e_i) = q(w_i) = 0$, $i = 1,2$ então existe uma isometria $\theta : V \to V$ tal que $\theta(e_1) = w_1$ e $\theta(e_2) = w_2$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $w_1 = \alpha e_1 + \beta e_2 + u$, com $u \in V_1$, $\alpha,\beta \in F$. Se $\alpha = \beta = 0$ então existe $z \in V_1$ tal que $B_q(u,z) \neq 0$, pois

q é não singular. Neste caso teremos $E(e_1,z)(w_1) = \alpha' e_1 + \beta' e_2 + u_1'$ com $u' \in V_1$ e $\alpha' \neq 0$. Assim podemos supor $w_1 = \alpha e_1 + \beta e_2 + u$ com $u \in V_1$ e $\alpha \neq 0$. Logo a isometria $E(e_2, \alpha^{-1}u)$ leva e_1 em $\alpha^{-1}w_1$ e $\beta = \alpha^{-1}q(u)$. Seja $P(\alpha) : V \to V$ tal que $P(\alpha)(e_1) = \alpha e_1$, $P(\alpha)(e_2) = \alpha^{-1}e_2$ e $P(\alpha)(z) = z$ para todo $z \in V_1$. A aplicação $P(\alpha)$ é uma isometria e $\theta = E(e_2,\alpha^{-1}u) \circ P(\alpha)$ é uma isometria de V em V que leva e_1 em w_1. Agora sejam $w = \sigma(e_2)$, $V = (Fw_1 + Fw) \perp V_3$ e $w_2 = \gamma w_1 + \lambda u + t$, com $t \in V_3$, $\gamma, \lambda \in F$. Desde que $B_q(w_1,w) = 1$, temos $\lambda = 1$ e $q(t) = -\gamma$. Um simples cálculo mostra que $E(w_1,t)(w) = w_2$ e $E(w_1,t)(w_1) = w_1$. Finalmente, fazemos $\theta = E(e_1,t) \circ E(e_2,-\alpha^{-1}u) \circ P(\alpha)$ e o problema está resolvido.

TEOREMA 1.1.16. Sejam (V,q) e (V_1,q_1) espaços quadráticos sobre F, com $V_1 \subset V$ e $q_1 = q|_{V_1}$. Se $\theta : (V_1,q_1) \to (V,q)$ é uma aplicação F-linear tal que $q_1(x) = q(\theta(x))$ para todo $x \in V_1$ então existe uma isometria $\sigma : V \to V$ tal que $\sigma|_{V_1} = \theta$.

DEMONSTRAÇÃO. Fazemos $(V,q) = (V_1,q_1) \perp (V_1,q_1)^{\perp}$ e assim temos: $(V,q) \perp (V_1,-q_1) \simeq (V_1,q_1) \perp (V_1,-q_1) \perp (V_1,q_1)^{\perp} \simeq \mathbb{H}(V_1) \perp (V_1,q_1)$, onde $\mathbb{H}(V_1) = (\dim V_1)\cdot\mathbb{H}$. Se $\theta : V_1 \to V$ é tal que $q_1(x) = q(\theta(x))$ para todo x em V_1 então $\theta' = \theta \oplus \oplus \mathrm{Id}_{(V_1,-q_1)} : (V_1,q_1) \perp (V_1,-q_1) \to (V,q) \perp (V_1,-q_1)$ também satisfaz a equação acima. Agora uma extensão $\tilde{\theta}' : (V,q) \perp (V_1,-q_1) \to (V,q) \perp (V_1,-q_1)$ de θ' induz uma extensão $\tilde{\theta}$ de θ visto que $\tilde{\theta}'|_{(V_1,-q_1)} = \mathrm{Id}_{(V_1,-q_1)}$. Asim sendo, podemos supor que $(V_1,q_1) \simeq n\cdot\mathbb{H}$. Neste caso a demonstração será feita por recorrência sobre n. Sejam $(V_1,q_1) = \mathbb{H}_1 \perp \ldots \perp \mathbb{H}_n$ onde $\mathbb{H}_i \simeq \mathbb{H}$, $i = 1,\ldots,n$ e $\theta : (V_1,q_1) \to (V,q)$ é tal que $q_1(x) = q(\theta(x))$ $\forall x \in V_1$. Neste caso o lema 1.1.14 nos garante a existência de uma isometria $\sigma : V \to V$ tal que $\sigma(\mathbb{H}_1) = \theta(\mathbb{H}_1)$. Sejam V_2 o complemento ortogonal de $\mathbb{H}_1$ em V e V_3 o complemento ortogonal de $\theta(\mathbb{H}_1)$ em V. Desde que $\mathbb{H}_2 \subset V_2$ e $\theta(\mathbb{H}_2) \subset V_3$, podemos aplicar o lema 1.1.13 para garantir a existência de uma isometria $\sigma_1 : V_3 \to V_3$ tal que $\sigma_1(\sigma(\mathbb{H}_2)) = \theta(\mathbb{H}_2)$. Fazendo $\sigma_1' = \mathrm{Id}_{\theta(\mathbb{H}_1)} \perp \sigma_1 : V \to V$ teremos uma isometria tal que $\sigma_1'|_{\mathbb{H}_1 \perp \mathbb{H}_2} = \theta|_{\mathbb{H}_1 \perp \mathbb{H}_2}$. Repetindo este processo n-vezes teremos encontrado a extensão de θ.

DEMONSTRAÇÃO de 1.1.13. Sejam $\lambda : V \perp V_1 \to V \perp V_2$ uma isometria e $i : V \to V \perp V_1$ a inclusão natural. Tomamos $\alpha = \lambda \circ i : V \to V \perp V_2$ e extendemos α para uma isometria

$\beta : V \perp V_2 \to V \perp V_2$ (cf. 1.1.14). Desde que $\gamma = \lambda^{-1} \circ \beta : V \perp V_2 \to V \perp V_1$ tem a propriedade de $\gamma|_V = id_V$ então $\gamma|_{V_2} : V_2 \to V_1$ é uma isometria.

§2. O GRUPO E O ANEL DE WITT

Seja $M(F)$ o conjunto de todas as formas quadráticas sobre o corpo F. Se $q_1, q_2 \in M(F)$, dizemos que q_1 está relacionada com q_2, e denotamos $q_1 \sim q_2$, se existem inteiros não negativos n,m tais que $q_1 \perp n \cdot \mathbb{H} \simeq q_2 \perp m \cdot \mathbb{H}$.

Esta relação é evidentemente de equivalência e o cociente $M(F)/\sim$ será denotado por $W(F)$. Se $q \in M(F)$, denotaremos a classe de q em $W(F)$ por q mesmo, quando não houver ambiguidade de notação. A soma direta ortogonal pode ser extendida naturalmente a $W(F)$ e a classe de equivalência dos espaços hiperbólicos, a qual indicaremos simplesmente por 0, representa o elemento neutro para esta operação.

Se q é uma forma quadrática sobre F e $a \in F^{\bullet}$, indicaremos por $a \cdot q$ a forma quadrática tal que $(aq)(x) = a \cdot q(x)$. Assim sendo, se q $W(F)$ então $-q = (-1)q$ é seu inverso aditivo em $W(F)$.

Desde que a soma direta ortogonal é associativa e comutativa, podemos ver que $(W(F), \perp)$ é um grupo, que em geral será denotado só por $W(F)$, chamado o *grupo de Witt das formas quadráticas* *sobre* F.

Se V é um F-espaço vetorial e $B : V \times V \to F$ é uma função bilinear simétrica tal que se $x \in V$ e $B(x,v) = 0$, para todo v em V, então $x = 0$, dizemos que B é uma *forma bilinear não singular* e que o par (V,B) é um *espaço bilinear não singular*.

Sempre que nos referirmos a um espaço bilinear este será considerado não singular a menos que se diga o contrário.

Assim como no caso dos espaços quadráticos, introduzimos o conceito de isometria entre espaços bilineares, ou seja, se (V_1,B_1) e (V_2,B_2) são espaços bilineares, dizemos que (V_1,B_1) é isométrico a (V_2,B_2), e denotamos $(V_1,B_1) \simeq (V_2,B_2)$ ou $B_1 \simeq B_2$, se existe um isomorfismo de espaços vetoriais $\sigma : V_1 \to V_2$ tal que $B_2(\sigma(x),\sigma(y)) = B_1(x,y)$ para todo x e y em V_1.

Se (V_1,B_1) e (V_2,B_2) são espaços bilineares, definimos a soma direta ortogonal de (V_1,B_1) e (V_2,B_2) e denotamos por $(V_1,B_1) \perp (V_2,B_2)$, como sendo o espaço bilinear (V,B), onde $V = V_1 \oplus V_2$ e $B : V \to V$ é tal que $B(x_1+x_2,y_1+y_2) = B_1(x_1,y_1)+B_2(x_2,y_2)$. Assim sendo, a forma bilinear obtida será denotada por $B_1 \perp B_2$ e é caracterizada por $B|_{V_i \times V_i} = B_i$ e $B(v_1,v_2) = 0$, $\forall v_i \in V_i$, $i = 1,2,$. Em outras palavras, todo vetor de V_1 é ortogonal, segundo B, a todo vetor de V_2.

Sejam (V,B) um espaço bilinear e $U \subset V$ um subespaço. A restrição $B|_U$ é uma forma bilinear simétrica, que pode, ou não, ser não singular. Entretanto, se $V = V_1 + V_2$ e $B(v_1,v_2) = 0$ para todo v_i em V_i, $i = 1,2$ então $(V_i, B|_{V_i})$, $i = 1,2$ são espaços bilineares não singulares.

Se V é um F-espaço vetorial de dimensão 1 e B é uma forma bilinear definida sobre V então $V = F\cdot v$ e B fica completamente determinada por $B(v,v) = a \in F^{\bullet}$. Neste caso, denotamos, $B = \langle a \rangle$ e se $B' \simeq B$ então $B' = \langle b \rangle$ com $ab \in F^{\bullet 2}$.

LEMA 1.2.1. Se (V,B) é um espaço bilinear e $v \in V$ é tal que $B(v,v) = a \neq 0$ então existe um espaço bilinear (V_1, B_1) tal que $(V,B) \simeq (F\cdot v, \langle a \rangle) \perp (V_1, B_1)$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\{v, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base para V. Se $B(v,v_i) = a_i$, fazemos $v_i' = v_i - \frac{a_i}{a} v$, $i = 2,\ldots,n$. Com este procedimento obtemos uma nova base $\{v, v_2', \ldots, v_n'\}$ para V. Fazendo $V_1 = Fv_2' + \ldots + Fv_n'$ e $B_1 = B|_{V_1 \times V_1}$ concluimos a demonstração.

COROLÁRIO 1.2.2. Se (V,B) é um espaço bilinear, então $(V,B) \simeq$ $\simeq (V_1,B_1) \perp (V_2,B_2)$ onde $B_1 \simeq \langle a_1 \rangle \perp \ldots \perp \langle a_n \rangle$, $a_i \in F^{\bullet}$ e $B_2(x,x) = 0$, $\forall x \in V_2$.

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração deste corolário é feita por indução sobre dim V e é consequência imediata do lema anterior.

DEFINIÇÃO 1.2.3. Seja (V,B) um espaço bilinear sobre F. Dizemos que (V,B) é um *plano metabólico* se $\dim V = 2$ e existe um vetor v não nulo de V tal que $B(v,v) = 0$.

É fácil ver que se F é um corpo de característica 2 e (V,B) é um espaço bilinear de dimensão 2, onde B é uma forma bilinear associada a alguma forma quadrática então (V,B) é um plano metabólico.

Dizemos que um espaço bilinear (V,B) é um *esnaco metabólico* se este pode ser escrito como uma soma direta ortogonal de planos metabólicos.

DEFINIÇÃO 1.2.4. Se (V,B) é um espaço bilinear e $U \subset V$, dizemos que U é *totalmente isotrópico* se $B(u_1,u_2) = 0$, $\forall u_1,u_2 \in U$.

TEOREMA 1.2.5. Sejam (V,B) um espaço bilinear, e $U \subset V$ é um subespaço de dimensão $r > 0$. Se U é totalmente isotrópico então U está contido em um subespaço matebólico de dimensão $2 \cdot r$, de (V,B).

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração deste teorema é idêntica à demonstração do teorema 1.1.11(i).

Se (V_1,B_1) e (V_2,B_2) são dois espaços bilineares, definimos o produto tensorial de (V_1,B_1) e (V_2,B_2) sobre F e denotamos por $(V_1,B_1) \otimes \otimes (V_2,B_2)$, como sendo o espaço bilinear (V,B) onde $V = V_1 \otimes V_2$ e $B = B_1 \otimes B_2$, com $B_1 \otimes B_2(x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2) = B_1(x_1,y_1) \cdot B_2(x_2,y_2)$, $\forall x_i,y_i \in V_i$, $i = 1,2$. Por simplicidade de notação indicamos B simplesmente por $B_1 \cdot B_2$.

É fácil ver que se (V_1,B_1) e (V_2,B_2) são espaços bilineares não singulares, então $(V_1,B_1) \otimes (V_2,B_2)$ também o é.

Se (V_1,B_1) e (V_2,B_2) são espaços bilineares, dizemos que (V_1,B_1) está relacionado com (V_2,B_2), e escrevemos $(V_1,B_1) \sim$ $\sim (V_2,B_2)$ ou simplesmente $B_1 \sim B_2$, se existem espaços metabólicos (V_1',B_1'), (V_2',B_2') tais que $(V_1,B_1) \perp (V_1',B_1') \simeq (V_2,B_2) \perp$ $\perp (V_2',B_2')$. É claro que tal relação é de equivalência.

Seja $N(F)$ o conjunto das formas bilineares (não singulares) sobre o corpo F. As operações $\perp$ e $\otimes$ introduzidas em $N(F)$ se estendem naturalmente ao cociente $N(F)/\sim$, que será denotado por $W_B(F)$.

O conjunto $W_B(F)$, com as operações $\perp$ e $\otimes$, tem uma estrutura de anel, cujo elemento neutro de adição é representado pela classe dos espaços metabólicos, o simétrico de um elemento (V,B), para a adição é a classes representada pelo espaço $(V,(-1)\cdot B)$, onde $((-1)\cdot B)(u,v) = -(B(u,v))$, $\forall u,v \in V$ e o elemento neutro da multiplicação é o espaço $(F, \langle 1 \rangle)$. O anel $W_B(F)$ será denominado *o anel de Witt das formas bilineares sobre o corpo* F.

Se (V_1,B) é um espaço bilinear e (V_2,q) é um espaço quadrático, definimos o produto tensorial de (V_1,B) e (V_2,q), e o denotamos por $(V_1,B) \otimes$ $\otimes (V_2,q)$, como sendo o espaço quadrático (V,Q) onde $V=V_1 \otimes V_2$, $Q(x \otimes y) =$ $= B(x,x)\cdot q(y)$ e $B_Q(x \otimes y, x' \otimes y') = B(x,x')\cdot B_q(y,y')$, $\forall x,x' \in V_1$, $y,y' \in V_2$. Por simplicidade de notação indicamos B simplesmente por $B\cdot q$. É evidente que se (V_1,B) e (V_2,q) são espaços não singulares, então $(V_1,B) \otimes (V_2,q)$ também o é.

Desde que $(V_1,B) \otimes (V_2,q)$ é hiperbólico, se (V_1,B) é metabólico ou se (V_2,q) é hiperbólico, segue que o produto de espaços bilineares por espaços quadráticos se estende, de modo natural, a $W_B(F) \times W(F)$, ou seja, a função $P: W_B(F) \times W(F) \to W(F)$ que associa a cada par $([(V_1,B)], [(V_2,q)])$ de $W_B(F) \times W(F)$ a classe $[(V_1,B_1) \otimes (V_2,q)]$ de $W(F)$ está bem definida

Com isto podemos considerar $W(F)$ como sendo um $W_B(F)$-módulo.

Se F é um corpo de característica diferente de 2, podemos indetificar $W_B(F)$ com $W(F)$ da seguinte maneira: dado um espaço bilinear (V,B) definimos a função $q_B : V \to F$ tal que $q_B(x) = B(x,x)$ e vice-versa, dado um espaço quadrático (V,q) definimos a função $B_q : V \times V \to F$ tal que $B_q(u,v) = \frac{1}{2}(q(u+v) - q(u) - q(v))$. Neste caso, tanto o espaço quadrático (V,q_B) quanto o espaço bilinear (V,B_q) são não singulares.

§3. FORMAS DE PFISTER

Sejam F um corpo e (V,q) um espaço quadrático. Indicaremos por $G(q)$ o conjunto $\{a \in F^{\bullet} ; a \cdot q \simeq q\}$.

DEFINIÇÃO 1.3.1. Uma forma quadrática q será dita *redonda* se $G(q) = D(q)$.

LEMA 1.3.2. As seguintes formas quadráticas são redondas.

(i) $\langle 1,a \rangle$ se $car(F) \neq 2$ e (ii) $[1,a]$ se $car(F) = 2$.

DEMONSTRAÇÃO. Desde que $\langle 1,a\rangle$ e $[1,a]$ representam 1 então $G(q) \subset D(q)$ em ambos os casos. Assim sendo, é suficiente mostrar que $D(q) \subset G(q)$. Sejam $V = Fv_1 + Fv_2$ o espaço vetorial no qual q está definida e $d = q(a_1v_1 + b_1v_2)$. No caso (i) seja $x = a_1v_1 + b_1v_2$, $y = ab_1v_1 + a_1v_2$ e $\sigma : V \to V$ tal que $\sigma(v_1) = \frac{1}{d}x$ e $\sigma(v_2) = \frac{1}{d}y$ com isto vemos que $\langle 1,a\rangle \simeq d\cdot\langle 1,a\rangle$. No caso (ii) sejam $x = a_1v_1 + b_1v_1$, $y = ab_1v_1 + (a_1+b_1)v_2$ e $\sigma : V \to V$ tal que $\sigma(v_1) = \frac{1}{d}x$ e $\sigma(v_2) = \frac{1}{d}y$. Com isto provamos que $[1,a] \simeq d\cdot[1,a]$.

LEMA 1.3.3. Sejam F um corpo de característica diferente de 2 e q_1,q_2 duas formas quadráticas sobre F com diagonalização $\langle a_1,b_1\rangle$ e $\langle a_2,b_2\rangle$, respectivamente. Se q_1 e q_2 representam um elemento em comum e $a_1b_1a_2b_2 \in F^{\cdot 2}$ então $q_1 \simeq q_2$.

DEMONSTRAÇÃO. Se q_1 e q_2 representam um elemento em comum d, então $q_1 \simeq \langle d,c_1\rangle$ e $q_2 \simeq \langle d,c_2\rangle$ (cf. 1.1.6(i)). Um simples cálculo mostra que $a_1b_1dc_1$, $a_2b_2dc_2 \in F^{\cdot 2}$. Assim podemos ver que $c_1c_2 \in F^{\cdot 2}$ e neste caso $\langle c_1\rangle \simeq \langle c_2\rangle$ ou seja, $q_1 \simeq q_2$.

PROPOSIÇÃO 1.3.4. Se q é uma forma quadrática redonda, então $\langle 1,a\rangle\cdot q$ também o é.

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração será feita por indução sobre $n = \dim q$. Se $n=1$ então $\mathrm{car}(F) \neq 2$ e $q \simeq \langle 1\rangle$. Logo a proposição se reduz ao lema 1.3.2. Assim, suponhamos $n \geq 2$. Sejam V e W os espaços vetoriais sobre os quais q e $\langle 1,a \rangle \cdot q$, respectivamente, estão definidas. Vemos que $W = V \oplus (t \otimes V)$, com $B_{\overline{q}}(t,t) = a$ e $\overline{q}(x + t \otimes y) = q(x) + aq(y)$, $\forall x,y \in V$, onde $\overline{q} = \langle 1,a \rangle \cdot q$. Se $d = q(x) + aq(y) \in F^{\cdot}$ queremos mostrar que $d \cdot \overline{q} \simeq \overline{q}$. se $q(x) \cdot q(y) = 0$ o problema fica trivial. Assim sendo, podemos supor que $q(x), q(y) \in F^{\cdot}$. Desde que q é redonda, temos $q(x) \cdot q \simeq q(y) \cdot q \simeq q$. Portanto $\langle 1,a \rangle \cdot q \simeq \langle 1,aq(x) \cdot q(y) \rangle \cdot q$. Por outro lado $(q(x) + aq(y)) \langle 1,aq(x) \cdot q(y) \rangle \simeq \langle q(x), aq(y) \rangle$. (cf. 1.3.3). Logo $d \cdot \overline{q} \simeq d \langle 1,aq(x) \cdot q(y) \rangle \cdot q \simeq \langle q(x), aq(y) \rangle \cdot q \simeq$ $\simeq \langle 1,a \rangle \cdot q = \overline{q}$.

DEFINIÇÃO 1.3.5. Sejam $a_1,\dots,a_n \in F^{\cdot}$. A forma quadrática $\prod_{i=1}^{n} \langle 1,a_i \rangle$ se $car(F) \neq 2$ (resp. $(\prod_{i=1}^{n-1} \langle 1,a_i \rangle)[1,a_n]$ se $car(F) = 2$) será denotada por $\langle\langle a_1,\dots,a_n \rangle\rangle$ (resp. $\langle\langle a_1,\dots,a_n]]$) e será denominada uma *n-forma de Pfister*. Se $car(F) \neq 2$ e $n = 0$, definimos a forma quadrática $\langle 1 \rangle$ como sendo uma 0-forma de Pfister.

Se F é um corpo de característica diferente de 2 e q é uma n-forma de Pfister sobre F então $q \simeq \langle 1 \rangle \perp q'$, onde q' é única (cf. 1.1.12) e será denominada a *parte pura de* q.

COROLÁRIO 1.3.6. Toda n-forma de Pfister é redonda.

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração será feita por indução sobre n. Se $n = 1$

caimos no lema 1.3.2. Se $n > 1$ e q é uma n-forma de Pfister, podemos fazer $q = \langle 1,a \rangle \cdot q_1$ onde q_1 é uma (n-1)-forma de Pfister. Aplicando a hipótese de indução e a Proposição 1.3.4., concluimos a demonstração.

TEOREMA 1.3.7. Se q é uma n-forma de Pfister então q é anisotrópica ou q é hiperbólica.

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração será feita por indução sobre n. Se $n = 1$ então $q = \langle 1,a \rangle$ ou $q = [1,a]$ e neste caso a conclusão é imediata (cf. 1.1.9.(iii)). Suponhamos $n \geq 2$ e $q = \langle 1,a \rangle \cdot q_1$ uma n-forma de Pfister isotrópica. Isto nos garante que a equação $q_1(x) + aq(y) = 0$ tem solução não trivial. Se $q_1(y) = 0$ então $q_1(x) = 0$. Desde que os vetores x e y não são ambos nulos, concluimos que q_1 é isotrópica. Aplicando a hipótese de indução podemos assumir que q_1 é hiperbólica e consequentemente q é hiperbólica. Se $q_1(y) \neq 0$ então $q_1(x) \neq 0$,

$a = -\dfrac{q_1(x)}{q_1(y)}$ e $\dfrac{q_1(x)}{q_1(y)} \cdot q_1 \simeq q_1$, pois q_1 é redonda.

$$\text{Portanto } q = \langle 1,a \rangle \cdot q_1 = \langle 1, -\frac{q_1(x)}{q_1(y)} \rangle \cdot q_1 =$$

$$= q_1 \perp -\frac{q_1(x)}{q_1(y)} \cdot q_1 \simeq q_1 \perp -q_1 \simeq \mathbb{H}(q_1), \quad \text{onde}$$

$\mathbb{H}(q_1) = (\dim q_1) \cdot \mathbb{H}$.

COROLÁRIO 1.3.8. Sejam q uma forma quadrática e $a \in F^{\bullet}$. Se $b \in F^{\bullet}$ então $\langle 1,b\rangle \cdot q \simeq \langle 1,ab\rangle \cdot q$ se e somente se $a \in G(q)$.

DEMONSTRAÇÃO. Sabemos que $a \in G(q)$ se e somente se $a \cdot q \simeq q$. Multiplicando à esquerda por b e somando q em ambos os lados, concluimos que $a \in G(q)$ se e somente se $\langle 1,b\rangle \cdot q \simeq \langle 1,ab\rangle \cdot q$.

Como exemplos de formas de Pfister podemos citar a norma de determinadas F-álgebras.

EXEMPLO 1.3.9. Uma extensão quadrática (separável) de F é uma F-álgebra de dimensão 2 do tipo $F[x]$, com $x^2 = bx + c$, $d,c \in F$ e $b^2 + 4c \neq 0$.

Toda extensão quadrática de F é isomorfa a um F-álgebra do tipo $F[x]/(x^2-a) := F[\sqrt{a}]$ se $car(F) \neq 2$ ou $F[x]/(x^2+x+a) := F(\wp^{-1}(a))$ se $car(F)=2$. Toda extensão quadrática de um corpo F é um corpo ou é do tipo $F \times F$. No caso de ser um corpo também a indicamos por $F(\sqrt{a})$ se $car(F) \neq 2$ ou $F(\wp^{-1}(a))$ se $car(F) = 2$.

Pode ser visto claramente que as extensões quadráticas $F[\sqrt{a}]$ e $F[\sqrt{b}]$ são isomorfas como F-álgebras se e somente se $ab \in F^{\bullet 2}$. Analogamente, $F[\wp^{-1}(a)]$ e $F[\wp^{-1}(b)]$ são isomorfas se e somente se $a - b \in \wp(F) = \{x^2 + x \; ; \; x \in F^{\bullet}\}$.

Em resumo podemos afirmar que toda extensão quadrática (separável) de F é do tipo $K = F[u]$ com $u^2 = a$ se $car(F) \neq 2$ e $u^2 = u + a$ se $car(F) = 2$, $a \in F$.

Dada uma extensão quadrática $K = F[u]$ de F, esta tem um único automorfismo não trivial $\sigma_k : K \to K$ tal que $\sigma(1) = 1$, $\sigma(u) = -u$ se $car(F) \neq 2$ e $\sigma(u) = u+1$ se $car(F) = 2$. É evidente que a função $N_k : K \to K$ definida por $N_k(x) = x \cdot \sigma_k(x)$, a qual denominamos de *norma* de K, é uma forma quadrática sobre o F-espaço vetorial K, isométrica a $\langle 1,-a \rangle$ se $car(F) \neq 2$ ou $[1,-a]$ se $car(F) = 2$.

EXEMPLO 1.3.10. Sejam $K = F[u]$ uma extensão quadrática de F e $b \in F^{\bullet}$. O F-espaço vetorial $H = K \oplus Kv$ munido da estrutura de F-álgebra definida por $v^2 = b$ e $w \cdot v = v \cdot \sigma_k(w)$, para todo $w \in K$ é chamado uma *álgebra de quatérnios sobre* F, a qual denotaremos por (b,a).

Como F-espaço vetorial H é gerado pelos vetores $1,u,v$ e vu. Com isto vemos que se $z \in H$ então $z = x + y \cdot v$ onde $x,y \in K$.

Em H definimos a função *conjugado* que leva $z = x + yv$ em $\sigma_k(x) - v\sigma_k(y) = \bar{z}$, onde $x,y \in K$ e σ_k é o único automorfismo não trivial de K.

A partir do conjugado definimos outra função, que chamaremos de *norma* de H, $N_H : H \to F$ tal que $N(z) = z \cdot \bar{z}$, É fácil ver que:

(1) se $z \in H$ então z é inversível se e somente se $N_H(z) \neq 0$;

(2) N_H é uma forma quadrática sobre o F-espaço vetorial H.

(3) como forma quadrática, $N_H \simeq \langle\langle -b,-a \rangle\rangle$ se $car(F) \neq 2$ ou $N_H \simeq \langle\langle -b,-a]]$ se $car(F) = 2$;

(4) $N_H(x+y\cdot v) = N_k(x) - bN_k(y)$, $\forall x,y \in K$, onde N_k é a norma de K.

EXEMPLO 1.3.11. A partir de uma álgebra de quatérnios podemos construir outra F-álgebra, do seguinte modo: dados H uma F-álgebra de quartérnios e $c \in F^{\cdot}$, construimos a F-álgebra de dimensão 8 $C = H \times H$ munida das seguintes operações: $(h_1,h_2) + (h_3,h_4) = (h_1 + h_3,\ h_2 + h_4)$, $\alpha(h_1,h_2) = (\alpha\cdot h_1,\ \alpha\cdot h_2)$ e $(h_1,h_2)\cdot(h_3,h_4) = (h_1\cdot h_3 + c\cdot h_4\cdot \bar{h}_2,\ \bar{h}_1 h_4 + h_3\cdot h_2)$, $\forall \alpha \in F$, $\forall h_i \in H_i$, $i = 1,2,3,4,$ onde $\bar{h}_i$ é o conjugado de h_i em H (ver exemplo anterior). Nestas condições C será denominada uma F-álgebra de *Cayley*. Sobre C definimos a função $N_C: C \to C$ com $N_C(h_1,h_2) = N_H(h_1) - c\ N_H(h_2)$, onde N_H é a norma de H. Neste caso N_C é uma forma quadrática definida sobre C e teremos $N_C \simeq \langle\langle -c,-b,-a\rangle\rangle$ se $car(F) \neq 2$ ou $N_C \simeq \langle\langle -c,-b,-a]]$ se $car(F) = 2$.

Denotaremos por I o ideal de $W_B(F)$ das formas bilineares de dimensão par. Assim sendo, podemos ver que todo elemento de I pode ser escrito na forma $B_1 \perp (-1)\cdot B_2$, onde tanto B_1 como B_2 pode ser escrito na forma $\underset{i=1}{\overset{n}{\perp}} \langle a_i,1\rangle$ com $a_i \in F^{\cdot}$, pois $\langle 1\rangle \perp \langle -1\rangle = 0$ em $W_B(F)$.

Neste caso, se $W(F)_o$ denota o subgrupo de $W(F)$ das formas quadráticas de dimensão par, então podemos demonstrar o seguinte resultado:

LEMA 1.3.12. Sobre um corpo F, $I^nW(F)_o$ é aditivamente gerado pelas $(n+1)$-formas de Pfister.

DEMONSTRAÇÃO. Imediata.

CAPÍTULO II

GRUPO DE BRAUER E ÁLGEBRAS DE CLIFFORD *

§1. ÁLGEBRAS CENTRAIS SIMPLES

Seja F um corpo. Por uma F-álgebra entendemos sempre uma álgebra de dimensão finita sobre F, associativa (não necessariamente comutativa) e com elemento identidade. Todo homomorfismo de álgebras será suposto unitário, isto é, leva identidade em identidade. Um isomorfismo entre duas F-álgebras A e B será denotado simplesmente por $A \simeq B$. O produto tensorial de duas F-álgebras A,B será sempre considerado sobre F e denotado por $A \otimes B$.

DEFINIÇÃO 2.1.1. Dados uma F-álgebra A e S um subconjunto não vazio de A, o conjunto $C_A(S) = \{x \in A;\ x \cdot s = s \cdot x,\ \forall s \in S\}$ será chamado o *centralizador de* S *em* A. É imediato que $C_A(S)$ é uma subálgebra de A. No caso específico em que $S = A$, a subálgebra $C_A(A)$ será chamada o *centro de* A e a denotaremos por $Z(A)$. Quando $Z(A) = F$ dizemos que A é uma *F-álgebra central*.

Uma F-álgebra A que não possui ideais bilaterais será chamada *simples*.

(*) Os resultados dos parágrafos 1 e 2 deste capítulo constam da dissertação de Irês Dias sob o título "Formas Quadráticas Sobre Corpos Hilbertianos". Nós o reproduzimos aqui simplesmente por pretendermos que o texto seja o mais auto-suficiente possível.

EXEMPLO 2.1.2. A F-álgebra $M_n(F)$ das matrizes de ordem n a coeficientes no corpo F é uma F-álgebra central simples. Mais geralmente se D é uma F-álgebra central com divisão, então $M_n(D)$ é uma F-álgebra central simples.

EXEMPLO 2.1.3. (Teorema de Wedderburn, [3] Theor. 2.4.1 Cap.3)
(a) Se A é uma F-álgebra central simples então existe uma F-álgebra central com divisão D tal que $A \simeq M_n(D)$, onde $M_n(D)$ é a F-álgebra das matrizes de ordem n a coeficientes em D.
(b) Dadas D e D' duas F-álgebras centrais com divisão, as F-álgebras de matrizes $M_n(D)$ e $M_m(D')$ são isomorfas se e somente se $n = m$ e $D \simeq D'$.

TEOREMA 2.1.4. Sejam A e B duas F-álgebras. (i) Se A' e B' são subálgebras de A e B respectivamente, então $C_{A \otimes B}(A' \otimes B') = C_A(A') \otimes C_B(B')$. Em particular se A e B são centrais então $A \otimes B$ também o é. (ii) Se A é central simples e B é simples, então $A \otimes B$ é simples. Em particular se A e B são centrais simples, então $A \otimes B$ também o é.

DEMONSTRAÇÃO. (i) A inclusão $C_A(A') \otimes C_B(B') \subset C_{A \otimes B}(A' \otimes B')$ é imediata. Mostremos então que $C_{A \otimes B}(A' \otimes B') \subset C_A(A') \otimes C_B(B')$. Consideremos $\{b_1, \ldots, b_n\}$ uma base de B sobre F e $C = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \in C_{A \otimes B}(A' \otimes B')$, $a_i \in A'$, $i=1,\ldots,n$. Observemos que $(a' \otimes 1).c = c(a' \otimes 1)$, $\forall a' \in C_{A \otimes B}(A' \otimes B')$, isto é, $\sum_{i=1}^{n} a'a_i \otimes b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i a' \otimes b_i$, o que implica que $\sum_{i=1}^{n} (a'a_i - a_i a')\cdot(1 \otimes b') = 0$. Da dependência linear de $\{1 \otimes b_1,\dots,1 \otimes b_n\}$ sobre F, segue-se que $a'a_i = a_i a'$, ou seja, $a_i \in C_A(A')$, $i = 1,\dots,n$ e consequentemente temos $c \in C_A(A') \otimes B$.

Considerando agora $\{a_1,\dots,a_m\}$ uma base de A sobre F e $c = \sum_{i=1}^{m} a_i \otimes b_i$, com $b_i \in B$. Da equação $(1 \otimes b').c=c(1 \otimes b')$; $b' \in B$ obtemos, por um raciocínio análogo ao visto acima, $c \in A \otimes C_B(B')$. Portanto $c \in C_A(A') \otimes C_B(B')$ o que demonstra a igualdade pretendida.

Em particular, $Z(A \otimes B) = Z(A) \otimes Z(B)$ e, consequentemente, se A e B são centrais então $A \otimes B$ também o é.

(ii) Sejam A uma F-álgebra central simples e B uma F-álgebra simples. Nosso objetivo é mostrar que $A \otimes B$ é simples. Para tanto basta mostrar que se I é um ideal não nulo de $A \otimes B$ então $1 \otimes 1 \in I$. Observemos que um elemento z de I é da forma $z = \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes b_i$, $a_i \in A$, $b_i \in B$. Dentre os elementos de I escolhemos $0 \neq z = \sum_{i=0}^{r} a_i \otimes b_i$, $a_i \in A$, $b_i \in B$ de tal modo que r seja mínimo.

Nossa primeira observação é que os $a_{i's}$ (e similarmente os $b_{i's}$) são linearmente independentes, pela minimalidade de r.

O próximo passo será encontrar $z \in I$ como acima e $a_1 = 1$. Desde que $a_1 \neq 0$ então Aa_1A é um ideal bilateral não nulo de A e portanto $Aa_iA = A$, pois A é simples. Assim obtemos uma equação $1 = \sum_{j=1}^{s} a_c a_1 d_j$ com $c_j, d_j \in A$. Desde que $c_j z d_j = \sum_{i=0}^{r} (c_j a_i d_j) \otimes b_i \in I$, $j = 1, \ldots, s$; podemos tomar a somatória em j para obtermos $z_1 = \sum_{j=1}^{s} c_j z d_j = 1 \otimes b_1 + \sum_{i=1}^{r} a_i' \otimes b_i$, com $a_i' = \sum_{j=1}^{s} c_j a_i d_j$. O elemento $z_1 \neq 0$ pois os b_i's são linearmente independentes, visto que na passagem de z para z_1 não alteramos os $b_{i's}$.

Repetindo o raciocínio acima, mostramos que existe $0 \neq z_2 \in I$ tal que $z_2 = 1 \otimes 1 + \sum_{i=1}^{r} a_i' \otimes b_i'$ com $a_i' \in A$ e $b_i' \in B$. Para todo $a \in A$ temos $az_2 - z_2 a \in I$, ou seja $\sum_{i=1}^{r} (aa_i' - a_i'a) \otimes b_i' \in I$. Assim, da minimalidade de r, segue-se que $\sum_{i=1}^{r} (aa_i' - a_i'a) \otimes b_i' = 0$. É fácil ver que os $b_{i's}$ são linearmente independentes, usando o fato que os $b_{i's}$ o são. Assim vemos que $a_i \in Z(A), i=1, \ldots, r$; ou seja, os $a_{i's}$ são escalares pois A é central. Disto vemos que r só pode ser igual a zero, o que demonstra o pretendido. Em particular se A e B são F-álgebras centrais simples então

$A \otimes B$ também o é, o que demonstra (2).

É nosso interesse classificar todas as F-álgebras centrais simples através de uma conveniente relação de similaridade, e então impor uma estrutura de grupo no conjunto das classes de similaridades através do produto tensorial.

Sejam A e A' duas F-álgebras centrais simples. Dizemos que A é *similar* a A', e denotamos $A \sim A'$, se existem m,n inteiros positivos tais que $A \otimes M_n(F) \simeq A' \otimes M_m(F)$ como F-álgebras, onde $M_n(F)$ é a álgebra das matrizes de ordem n a coeficientes em F.

É fácil ver que similaridade é uma relação de equivalência.

Se denotarmos por $C(F)$ o conjunto das F-álgebras centrais simples sobre o corpo F, a classe de similaridade de $A \in C(F)$ será denotada por $[A]$ ou simplesmente por A se não houver ambiguidade de notação. É imediato que a operação $[A_1] \cdot [A_2] = [A_1 \otimes A_2]$ está bem definida no cociente $C(F)/\sim \, := Br(F)$. Com isto vemos que $Br(F)$, munido da operação acima definida, é um semigrupo, cujo elemento identidade é representado pela classe $[F]$.

PROPOSIÇÃO e DEFINIÇÃO 2.1.5. Se A é uma F-álgebra, seja A^{op} a álgebra oposta de A. Se A é central simples sobre F então A^{op} também o é e $A \otimes A^{op} \simeq M_n(F)$ onde $n = \dim_F A$. Em particular $Br(F)$ é um grupo abeliano com $[A]^{-1} = [A^{op}]$,

$\forall [A] \in Br(F)$. $Br(F)$ será chamado o *grupo de Brauer* de F.

DEMONSTRAÇÃO. Lembramos que $A^{op} = \{a^{op};\ a \in A\}$ munida das seguintes operações: $a^{op} \cdot b^{op} = (b \cdot a)^{op}$, $a^{op} + b^{op} = (a+b)^{op}$ e $\lambda a^{op} = (\lambda a)^{op}$, quaisquer que sejam $a,b \in A$ e $\lambda \in F$. Claramente vemos que $Z(A^{op}) = \{a^{op}\ ;\ a \in Z(A)\}$ e consequentemente A^{op} é central se e somente se A o é.

Se I é um ideal bilateral de A^{op} então $J = \{a \in A\ ;\ a^{op} \in I\}$ é um ideal bilateral de A. Logo, se A é simples, A^{op} também o é.

Definimos agora a aplicação $\theta : A \otimes A^{op} \to End(A)$ dada por $(a \otimes b^{op})(c) = acb$, $\forall a,b,c \in A$. É imediato que θ é um homomorfismo de álgebras. Observemos que A e A^{op} são F-álgebras centrais simples, consequentemente $A \otimes A^{op}$ também o é (cf. 2.1.4(i)) e portanto θ é injetora.

Desde que $\dim_F(A \otimes A^{op}) = (\dim_F A)^2 = \dim_F End(A)$, concluimos que θ é sobrejetora, isto é, θ é um isomorfismo. Visto que $End(A) \simeq M_n(F)$ concluimos que $[A]^{-1} = [A^{op}]$ e, portanto, $Br(F)$ é um grupo abeliano.

Do teorema de Wedderburn sabemos que se A é uma álgebra central simples sobre F então A é do tipo $M_n(D)$, onde D é uma F-álgebra central com divisão. Por outro lado, $M_n(D) \simeq D \otimes M_n(F)$. Assim, em $Br(F)$, temos $[A] = [M_n(D)] = [D \otimes M_n(F)] = [D]$. Da unicidade da F-álgebra D, também assegurada pelo teorema de

Wedderburn, concluimos que os elementos de $Br(F)$ estão em correspondência 1-1 com as classes de isomorfismos das F-álgebras centrais com divisão.

§2. ÁLGEBRAS DE CLIFFORD

Antes de definirmos uma álgebra de Clifford daremos as noções de álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada e de produto tensorial de álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas sobre um corpo F e que nos será útil no que se seguirá.

DEFINIÇÃO 2.2.1. Dado um corpo F, uma *F-álgebra* $\mathbb{Z}_2$- graduada A é uma álgebra que se decompõe numa soma direta do tipo $A = A_o \oplus A_1$, onde A_o e A_1 são F-espaços vetoriais, tais que $F \subset A_o$ e $A_iA_j \subset A_{i+j\,(\mathrm{mod}\ 2)}$. Em particular A_o é uma subálgebra de A.

Para uma F-álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada A, como acima, os elementos em $h(A) = A_o \cup A_1$ são chamados *elementos homogêneos* de A. Se $a \in h(h)$ dizemos que o *grau de* a, e denotamos ∂a, é i se $a \in A_i$, $i = 0,1$.

Dadas duas F-álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas A e B, o produto tensorial graduado de A e B sobre F, será denotado simplesmente por $A \hat{\otimes} B$, e é uma F - álgebra $\mathbb{Z}_2$ - graduada, com $(A \hat{\otimes} B)_o = A_o \otimes B_o + A_1 \otimes B_1$ e $(A \hat{\otimes} B)_1 = A_o \otimes B_1 + A_1 \otimes B_o$.

A multiplicação em $A \hat{\otimes} B$ é induzida por $(a \otimes b)\cdot(a' \otimes b') = (-1)^{\partial b \cdot \partial a'} aa' \otimes bb'$ onde $a,a' \in h(A)$ e $b,b' \in h(B)$.

Se $car(F) = 2$ então $A \hat{\otimes} B = A \otimes B$.

DEFINIÇÃO 2.2.2. Sejam F um corpo e (V,q) um espaço quadrático sobre F. Uma F-álgebra A contendo (V,q) como subespaço vetorial é dita *compatível* com q se $x^2 = q(x)\cdot 1_A \in A$, $\forall x \in V$.

Em uma F-álgebra A como acima, a estrutura quadrática de (V,q) está intimamente relacionada com a estrutura álgebrica de A. Para ver este ponto mais claramente, observamos que $q(x+y) - q(x) - q(y) = xy + yx$, $\forall x,y \in V$. Logo obtemos a relação $B_q(x,y) = xy + yx$, $\forall x,y \in V$. Em particular, x e y são ortogonais, segundo B_q, se e somente se $xy = -yx$ em A.

DEFINIÇÃO 2.2.3. Seja (V,q) um espaço quadrático sobre um corpo F. Uma F-álgebra $C \supset (V,q)$ compatível com q é dita uma *álgebra de Clifford* para (V,q) se ela satisfaz a seguinte propriedade universal: dada qualquer F-álgebra $A \supset (V,q)$, compatível com q, existe um único homomorfismo de F-álgebras $\varphi : C \to A$ tal que $\varphi(x) = x$, $\forall x \in V$.

Decorre desta propriedade universal que se existe uma álgebra de Clifford para (V,q) então esta é a única, a menos de isomorfismos.

Para provar a existência, seja $T(V)$ a F-álgebra tensorial de V, isto é, $T(V) = F \oplus V \oplus \dots \oplus V^{\otimes n} \oplus \dots$, onde $V^{\otimes n} = V \otimes \dots \otimes V$ n-vezes. Em $T(V)$ consideremos o ideal $I(q)$, gerado pelos elementos da forma $x \otimes x - q(x) \cdot 1_A \in T(V)$. Indicaremos por $C(V)$ ou $C(q)$ a álgebra cociente $T(V)/I(q)$. Claramente $V = T^1(V)$ é levado injetivamente em $C(V)$, via a homomorfismo canônico $\pi : T(V) \to T(V)/I(q)$. Identificando V com sua imagem em $C(V)$, pode ser visto facilmente que $C(V)$ é uma álgebra de Clifford para (V,q).

A multiplicação em $C(V)$ pode ser vista como justaposição de elementos e com isto eliminamos o símbolo "$\otimes$", simplificando a notação. Observemos que V gera $C(V)$ com F-álgebra.

Consideremos agora $T(V)_0 = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes 2n}$ e $T(V)_1 = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes 2n+1}$ e $C_i(V)$ a imagem de $T(V)_i$, $i = 0,1$ em $C(V)$, pelo homomorfismo canônico $\pi : T(V) \to C(V)$. Notamos que $C_i \cdot C_j \subset C_{i+j \pmod 2}$, ou seja, $C(V)$ também tem uma estrutura de F-álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada. $C_0(V)$ é chamada a *parte par* de $C(V)$ e $C_1(V)$ a *parte ímpar*.

EXEMPLO 2.2.4. Sejam F um corpo com $car(F) \neq 2$ e $(Fv, \langle a \rangle)$ um espaço quadrático de dimensão 1 sobre F, com $a \in F^{\bullet}$. Identificamos a F-álgebra tensorial $T(V)$ com o anel dos polinômios $F[X]$. Neste caso $I(q)$ é o ideal gerado por $X^2 - a$. Logo $C(V) = F[X]/\langle X^2 - a \rangle = F[\sqrt{a}]$. Notemos que $C_0(V) = F$.

Dado um espaço quadrático (V,q) sobre um corpo F, passemos agora a analisar a estrutura da álgebra de Clifford $C(V)$. Comecemos por determinar uma base de $C(V)$ em termos de uma base de V sobre F.

Para tanto, seja $\{x_1,\ldots,x_n\}$ uma base de V sobre F. Em $C(V)$ temos $x_i^2 = q(x_i)$. (Nota: para simplificar a notação, doravante identificaremos $F\cdot 1_{C(V)}$ com F) e $x_ix_j + x_jx_i = B_q(x_i,x_j)$, $1 \leq i,j \leq n$. Desde que V gera $C(V)$, é imediato ver que $C(V)$ é gerada, como F-espaço vetorial, pelos elementos da forma $x_1^{\varepsilon_1} \ldots x_n^{\varepsilon_n}$, com $\varepsilon_i = 0,1$, $i = 1,\ldots,n$. Em particular, $\dim_F C(V) \leq 2^n$. Para mostrar que os elementos da forma $x_1^{\varepsilon_1} \ldots x_n^{\varepsilon_n}$, $\varepsilon_i = 0,1$, $1 \leq i \leq n$, constituem de fato uma base do F-espaço vetorial $C(V)$, necessitamos da seguinte proposição.

PROPOSIÇÃO 2.2.5. Sejam (V_1,q_1) e (V_2,q_2) dois espaços quadráticos sobre um corpo F. Então existe um homomorfismo sobrejetor de álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas $f: C(V_1 \perp V_2) \to C(V_1) \hat{\otimes} C(V_2)$.

DEMONSTRAÇÃO. A aplicação $\varepsilon: V_1 \perp V_2 \to C(V_1) \hat{\otimes} C(V_2)$ tal que $\varepsilon(x_1+x_2) = x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_2$, $x_i \in V_i$, $i = 1,2$; é injetora e $(x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_2)^2 = x_1^2 \otimes 1 + 1 \otimes x_2^2 + x_1 \otimes x_2 + (-x_1) \otimes x_2 = (q_1 \perp q_2)(x_1 + x_2)$.

Pela propriedade universal de álgebra de Clifford, existe um único homomorfismo de álgebras $f : C(V_1 \perp V_2) \to C(V_1) \otimes C(V_2)$ que coincidem com ε em $V_1 \perp V_2$. A verificação de que f preserva a graduação é imediata. Como a F-álgebra $C(V_1) \hat{\otimes} C(V_2)$ é gerada por elementos da forma $x_1 \otimes 1$ e $1 \otimes x_2$, $x_i \in V_i$, $i = 1,2$ e tais elementos estão na imagem de f. Logo f é sobrejetora.

TEOREMA 2.2.6. Se (V,q) é um espaço quadrático de dimensão n sobre um corpo F, então $\dim_F C(V) = 2^n$. Em particular, se $\{x_1,\ldots,x_n\}$ constitui uma base de V sobre F, então $\{x_1^{\varepsilon_1} \ldots x_n^{\varepsilon_n}\ ,\ \varepsilon_i = 0,1\ ,\ i = 1,\ldots,n\}$ constitui uma base de $C(V)$ sobre F.

DEMONSTRAÇÃO. A segunda parte do teorema segue claramente da primeira. Mostremos a primeira por indução sobre $n = \dim V$. Se $n=1$ então $car(F) \neq 2$ e o problema resume-se ao exemplo 2.2.4. Se $n=2$, seja x_1,x_2 uma base de V sobre F. Desde que (V,q) é não singular, podemos supor $q(x_1) \neq 0$ e $B_q(x_1,x_2) = 1$. Já vimos que $1,x_1,x_2$ e x_1x_2 geram $C(V)$. Mostraremos então que $1,x_1,x_2$, x_1x_2 são linearmente independentes sobre F. Seja $a_o + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$, com $a_i \in F$. Observemos que $a_1x_1 + a_2x_2 = -(a_o + a_3x_1x_2) \in C_o(V) \cap C_1(V) = \{0\}$. Desde que $\{x_1,x_2\}$ é uma base de V sobre F então $a_1 = a_2 = 0$. Se $a_3 \neq 0$ obtemos $x_1x_2 \in F$ o que é um absurdo, pois se assim fosse, teríamos $x_1^2x_2 \in Fx_1 \cap Fx_2$ e $x_1^2\, x_2 \neq 0$, contradizendo a independência linear de x_1 e x_2 sobre F.

Portanto $a_o = a_1 = a_2 = a_3 = 0$, ou seja, $\{1, x_1, x_2, x_1x_2\}$ é uma base de $C(V)$ sobre F e $\dim_F C(V) = 4$.

Se $n > 2$ escrevemos $V = V_o \perp V_1$, com $\dim V_o = 2$. Segue da Proposição 2.2.5 que $\dim_F C(V) \geq \dim_F C(V_2) \cdot \dim_F C(V_1)$. Pela hipótese de indução temos $\dim_F C(V_1) = 2^{n-2}$ e assim $\dim_F C(V) \geq$ $\geq 2^n$, o que completa a demonstração.

Veremos a seguir um resultado que dispensa demonstração.

COROLÁRIO 2.2.7. Para um espaço quadrático (V,q) de dimensão n sobre um corpo F temos $\dim_F C_o(V) = \dim_F C_1(V) = 2^{n-1}$.

No que se seguirá, analisaremos as condições sob as quais uma álgebra de Clifford é central simples. Começaremos pela descrição do seu centro. Para tanto, utilizaremos o conceito de extensão quadrática separável de um corpo F introduzida em 1.3.9.

PROPOSIÇÃO 2.2.8. Seja (V,q) um espaço quadrático sobre um corpo F. (i) Se $\dim_F V$ é par então $Z(C(V)) = F$ e $Z(C_o(V))$ é uma extensão quadrática de F. (ii) Se $\dim_F V$ é ímpar então $Z(C(V))$ é uma extensão quadrática de F e $Z(C_o(V)) = F$.

DEMONSTRAÇÃO. Veremos primeiro o caso em que $car(F) \neq 2$. Sejam $\{x_1, \ldots, x_n\}$ uma base ortogonal de V sobre F (cf. 1.1.7(i)) e $z = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \in C(V)$. Observemos que $x_i z = (-1)^{i-1} q(x_i) x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_n$

e $zx_i = (-1)^{n-i}q(x_i)x_1 \ldots x_{i-1}\, x_{i+1} \ldots x_n$. Portanto $zx_i = x_i z$ para todo $i = 1,\ldots,n$ se e somente se $n-i \equiv i-1 \pmod 2$, ou seja, se e somente se n é ímpar. Com isto mostramos que $z \in Z(C(V))$ se e somente se n é ímpar. Desde que $F \in Z(C(V))$ obtemos $F + Fz \subset Z(C(V))$ quando n é ímpar.

Para $C_o(V)$ temos $z \in Z(C_o(V))$ se n é par e $z \in Z(C_o(V))$ se n é ímpar.

Para demonstrar as inclusões opostas procedemos como segue.

Observemos que $z \in Z(C(V))$ se e somente se $xx_i = x_i x$, $i = 1,\ldots,n$. De modo geral, se $x \in C(V)$, podemos escrever

$$x = \sum_{i=1}^{2^n} a_{\varepsilon_1^i,\ldots,\varepsilon_n^i}\, x_1^{\varepsilon_1^i} \ldots x_n^{\varepsilon_n^i}\,, \quad \varepsilon_i = 0,1 \text{ e } a_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n} \in F.$$

Para mostrar que $x \in Z(C(V))$ é suficiente verificar que os termos $x_1^{\varepsilon_1} \ldots x_n^{\varepsilon_n}$ estão em $Z(C(V))$. Se $\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^i$ é ímpar, para um índice i fixado, e $\varepsilon_k^i = 0$ para algum $1 \leq k \leq n$, temos $x_k(x_1^{\varepsilon_1^i} \ldots x_n^{\varepsilon_n^i}) = -(x_1^{\varepsilon_1^i} \ldots x_n^{\varepsilon_n^i})x_k$. Se $\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^i$ é par, para um índice i fixado e $\varepsilon_k^i = 1$ para algum $1 \leq k \leq n$; temos $x_k(x_1^{\varepsilon_1^i} \ldots x_n^{\varepsilon_n^i}) = -(x_1^{\varepsilon_1^i} \ldots x_n^{\varepsilon_n^i})x_k$. Disto concluimos que, se n é par, $Z(C(V)) \subset F$ e se n é ímpar $Z(C(V)) \subset F + Fz$.

Para $C_o(V)$ basta verificar a comutatividade dos termos $x_1^{\varepsilon_1^i} \dots x_n^{\varepsilon_n^i}$, tais que $\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^i$ é par, com os elementos $x_i x_j$.

Desde que:

(1) se $\varepsilon_i = 1$ e $\varepsilon_j = 0$ então

$$(x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}) x_i x_j = x_i x_j (x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n})$$

(2) se $\varepsilon_i = \varepsilon_j = 0$ então

$$(x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}) x_i x_j = -x_i x_j (x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n})$$

(3) se $\varepsilon_i = \varepsilon_j = 1$ então

$$(x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}) x_i x_j = x_i x_j (x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}) ,$$

concluimos que $Z(C_o(V)) \subset F + Fz$ quando n é par e $Z(C_o(V)) \subset$ $\subset F$ quando n é ímpar.

Quando $car(F) = 2$ temos que mostrar apenas o item (i) de 2.2.8, visto que $\dim_F V$ é sempre par (cf. 1.1.7(ii)).

Suponhamos primeiramente que $n = \dim_F V = 2$ e seja $\{x_1, x_2\}$ uma base de V sobre F. Uma base de $C(V)$ sobre F é formada pelos vetores $1, x_1, x_2$ e $x_1 x_2$ com $x_i^2 = q(x_i)$, $i = 1,2$ e $B_q(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_2 x_1$. Seja $a_o + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_1 x_2 \in Z(C(V))$; $a_i \in F$. De $0 = zx_1 - x_1 z$ obtemos $a_2 = a_3 = 0$. Por outro lado $zx_2 - x_2z = 0$ o que implica em $a_1 = 0$, ou seja, $z \in F$. Portanto $Z(C(V)) = F$.

Se $n > 2$, (V,q) admite uma soma direta ortogonal do tipo $(V,q) \simeq (V_1,q_1) \perp \ldots \perp (V_{\frac{n}{2}}, q_{\frac{n}{2}})$ onde $\dim_F V_i = 2$, $i = 1,\ldots,\frac{n}{2}$ (cf. 1.1.7(ii)) e consequentemente $C(V) = \hat{\bigotimes}_{i=1}^{n/2} C(V_i)$ (cf.2.2.5). Desde que $car(F) = 2$, temos "$\hat{\otimes} = \otimes$", ou seja, $C(V)$ é um produto tensorial ordinário de álgebras centrais simples sobre F. Portanto $C(V)$ é central (cf. 2.1.4(i)).

Finalmente mostraremos que $Z(C_o(V))$ é uma extensão quadrática de F.

Escrevemos $C(V) = \bigotimes_{i=1}^{m} C(V_i)$, onde $m = \frac{n}{2}$ e cada V_i tem dimensão 2 sobre F. Para cada i, seja $\{x_{i_1}, x_{i_2}\}$ uma base de V_i sobre F_i tal que $B_q(x_{i_1}, x_{i_2}) = 1$ e $B_q(x_{i_r}, x_{j_s}) = 0$ para $i \neq j$. Tomando $z_i = x_{i_1}x_{i_2}$, temos $z_ix + xz_i = x$, $\forall x \in V_i$ e $z_iy = yz_i$, $\forall y \in V_j$, se $i \neq j$, donde segue-se que $z_i \in Z(C_o(V_i))$ e z_i comuta com todos os elementos de cada $C(V_j)$ para $i \neq j$.

Seja agora, $z = \sum_{i=1}^{m} z_i$. Queremos mostrar que $z \in Z(C_o(V))$; o que faremos por indução sobre m. Se $m = 1$, temos $z = z_1 \in Z(C_o(V_1)) = Z(C_o(V))$. Suponhamos $m > 1$ e seja

$z' = \sum_{i=1}^{m-1} z_i \in Z(C_o(V'))$ onde $V' = \perp_{i=1}^{m-1} V_i$ e $z_m \in Z(C_o(V_m))$.

Sabemos que z_m comuta com os elementos de V' e $z'x+xz' = x$, $\forall x \in V'$. Agora, se $x \in V'$, temos $zx = xz = x$. Logo $zx+xz = x$, $\forall x \in V$ e assim z comuta com os produtos $x \cdot y$, tais que $x,y \in \in V$, o que mostra que $z \in Z(C_o(V))$ e consequentemente $F+Fz \subset \subset Z(C_o(V))$. Para mostrarmos que $F+Fz \supset Z(C_o(V))$ observamos, inicialmente que o resultado é evidente se $\dim_F V = 2$, pois neste caso $C_o(V) = F + Fz$. Novamente, por indução sobre $m = \frac{n}{2}$, completaremos a demonstração. Suponhamos $m > 1$ e que para $m-1$ $Z(C_o(V')) = F + Fz'$, onde V' e q' são dados como acima. Observemos que $C_o(V) = C_o(V') \otimes C_o(V_m) \otimes C_1(V') \otimes C_1(V_m)$.

Afirmamos que $Z(C_o(V)) \subset Z(C_o(V') \otimes C_o(V_m)) = Z(C_o(V')) \otimes \otimes Z(C_o(V_m))$. De fato, mostraremos que se $y \in Z(C_o(V)) \cap \cap (C_1(V') \otimes C_1(V_m))$ então $y = 0$. Escrevemos $y = y_1 \otimes x_{m_1} + y_2 \otimes x_{m_2}$, onde $y_1, y_2 \in C_1(V')$ e $\{x_{m_1}, x_{m_2}\}$ é uma base de V_m sobre F. Do fato que y comutar com $x \otimes x_{m_1}$ para todo $x \in V'$, segue-se que $0 = (x \otimes x_{m_1})y - y(x \otimes x_{m_1}) = (x_{m_1}^2(xy_1 - y_1x) + y_2x) \otimes 1 + (xy_2 + y_2x) \otimes x_{m_1}x_{m_2}$ e portanto temos $x_{m_1}^2(xy_1 - y_1x) + y_2x = 0$ e $xy_2 + y_2x = 0$, para todo x em V'. Analogamente, do fato de y comutar com $x \otimes x_{m_2}$, segue que $x_{m_2}^2(xy_2 - y_2x) + y_1x = 0$ e $xy_1 + y_1x = 0$, para todo x em V'. Destes dois sistemas obtemos $y_1x = y_2x = 0$, para todo $x \in V'$.

Desde que (V',q') é não singular, onde $q' = q|_{V'}$, existe $x \in V'$ tal que x é inversível em $C_1(V')$ e consequentemente obtemos $y_1 = y_2 = 0$, ou seja, $y = 0$ e portanto $Z \subset C_o(V)) \subset$ $\subset Z(C_o(V')) \otimes Z(C_o(V_m))$.

O produto tensorial $Z(C_o(V')) \otimes Z(C_o(V_m))$, como submódulo de $C_o(V)$, é gerado por $1, z', z_m$ e $z'z_m$. Seja $x \in Z(C_o(V))$. Então $x = a_o + a_1 z' + a_2 z_m + a_3 z'z_m$, com $a_i \in F$ e para $b \in V'$ e $d \in V_m$, temos $0 = xbd - bdx$, ou seja, $0 = a_1(z'bd-$ $- bdz') + a_2(z_m bd - bdz_m) + a_3(z'z_m bd - bdz'z_m)$ e $z'z_m bd =$ $= bd + bdz_m + bdz' + bdz'z_m$ e, de $car(F) = 2$, temos: $0 = bd(a_1 +$ $+ a_2 + a_3(1 + z' + z_m + z'z_m))$. Desde que (V',q') e (V_m, q_m), são não singulares então existem $b \in V'$ e $d \in V_m$ inversí-veis em $C(V)$ e, consequentemente, obtemos $a_1 + a_2 + a_3(1+z'+z_m +$ $+ z'z_m) = 0$, ou seja, $a_1 = a_2$ e $a_z = 0$. Assim $x =$ $= a_o + a_1(z' + z_m)$, isto é, $x = a_o + a_1 z$, o que mostra que $Z(C_o(V)) \subset F + Fz$.

OBSERVAÇÃO 2.2.9. Sejam F um corpo e (V,q) um espaço quadrático não singular sobre F. Do que vimos na demonstração da proposição 2.2.8 podemos afirmar que:

a) Se $car(F) \neq 2$, $n = \dim_q V$ é par e $q \simeq \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ então $Z(C_o(V)) \simeq F[z]$, com $z^2 = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a_1 \dots a_n$ e $zx =$ $= xz$, $\forall x \in C_1(V)$.

b) Se $car(F) \neq 2$, $n = \dim_F V$ é ímpar e $q \simeq \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ então $Z \subset C(V)) \simeq F[z]$, com $z^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 \ldots a_n$

c) Se $car(F) = 2$, $2n = \dim_F V$ e $q \simeq [a_1, b_1] \perp \ldots \perp [a_n, b_n]$ então $Z(C_o(V) \simeq F[z]$, com $z^2 = z + \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

Tais fatos nos serão úteis para a demonstração do seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO 2.2.10. Sejam (V,q) e (V',q') espaços quadráticos sobre um corpo F de característica diferente de 2. Então existe $d \in F^{\cdot}$ tal que: (1) $C(q) \hat{\otimes} C(q') \simeq C(q) \otimes C(dq')$, se $\dim_F V$ é par e (2) $(C(q) \hat{\otimes} C(q'))_o \simeq C_o(q) \otimes C(-dq')$ se $\dim_F V$ é ímpar.

DEMONSTRAÇÃO. (1) Desde que $\dim V$ é par, existe $z \in Z(C_o(q))$ tal que $z^2 = d \in F^{\cdot}$ (cf. 2.2.9).

Seja B a álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada $C_o(q') \oplus zC_1(q')$ contida em $C(q) \hat{\otimes} C(q')$. Claramente B comuta com $C(q) \hat{\otimes} 1$ e B e $C(q)$ geram $C(q) \hat{\otimes} C(q')$ como F-álgebra. Analisando dimensão, vemos facilmente que existe um isomorfismo de álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduadas $C(q) \otimes B \simeq C(q) \hat{\otimes} C(q')$. Se $x \in V'$, o quadrado de $zx = z \otimes x$ em B é $z^2 \otimes x^2 = dq'(x)$. Logo, a lei $x \to zx \in B$ induz um isomorfismo de álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas $C(dq') \simeq B$. Assim $C(q) \hat{\otimes} C(q') \simeq C(q) \otimes C(dq')$.

(2) Desde que $\dim_F V$ é ímpar, existe $z \in C_1(q) \cap Z(C(q))$, tal que $z^2 = d \in F^{\bullet}$ (cf. 2.29).

Seja B a subálgebra $C_o(q') \oplus zC_1(q')$ contida em $(C(q) \otimes C(q'))_o$. Claramente B comuta com $C_o(q) = C_o(=) \hat{\otimes} 1$ e B e $C_o(q)$ geram $(C(q) \hat{\otimes} C(q'))_o$ como álgebra. Novamente, analisando dimensão, vemos que existe um isomorfismo de álgebras $C_o(q) \otimes B \simeq (C(q) \hat{\otimes} C(q'))_o$. Se $x \in V'$, o quadrado de $zx = z \otimes x \in B$ é $-z^2 \otimes x^2 = -dq'(x)$.

Assim a lei $x \to zx \in B$ induz um isomorfismo de álgebras $C(-dq') \simeq B$ e portanto $(C(q) \hat{\otimes} C(q'))_o \simeq C_o(q) \otimes C(-dq')$.

A seguir demonstraremos o principal resultado deste parágrafo.

TEOREMA 2.2.11. Seja (V,q) um espaço quadrático sobre um corpo F.

(1) Se $\dim_F V$ é par então $C(q)$ é central simples e $Z(C_o(q))$ é uma extensão quadrática de F.

(2) Se $\dim V$ é ímpar então $C_o(q)$ é central simples e $Z(C(q))$ é uma extensão quadrática de F.

DEMONSTRAÇÃO. Após a Proposição 2.2.8, resta mostrar que $C(q)$ (resp. $C_o(q)$) é simples quando $\dim_F V$ é par (resp. ímpar).

Se $\dim_F V$ é par então podemos decompor (V,q) numa soma direta do tipo $(V_1,q_1) \perp \ldots \perp (V_n,q_n)$ (cf. 1.1.7) onde cada

V_i tem dimensão 2 sobre F.

De acordo com a Proposição 2.2.10, se $car(F) \neq 2$ e devido ao fato de $\hat{\otimes} = \otimes$ se $car(F) = 2$, podemos afirmar que existem espaços quadráticos bidimensionais $(V_1', q_1'), \ldots, (V_n', q_n')$ sobre F tais que $C(q) = C(q_1') \otimes \ldots \otimes C(q_n')$.

Se $\dim_F V$ é impar então, necessariamente, $car(F) \neq 2$ e podemos obter uma decomposição de (V,q) em uma soma direta ortogonal do tipo $(V,q) = (V_1,q_1) \perp (V_2,q_2)$ com $\dim_F V_1 = 1$.

De acrodo com a Proposição 2.2.10(2) e o Exemplo 2.2.4 temos: $C_o(q) = C_o(q_1) \otimes C(q_2') \simeq C(q_2')$ com $\dim_F q_2'$ par.

Após esta discussão, a demonstração do teorema se resume em mostrar que a álgebra de Clifford de um espaço quadrático de dimensão 2 sobre um corpo F é simples, e isto veremos na seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 2.2.12. Seja (V,q) um espaço quadrático de dimensão 2 sobre um corpo F. Então $C(V)$ é uma álgebra central simples sobre F.

DEMONSTRAÇÃO. A afirmação $C(V)$ é uma F-álgebra central é consequência da Proposição 2.2.8. Contudo, é também uma consequência trivial do que veremos nesta demonstração, pois mostraremos que $C(V)$ é uma F-álgebra (não comutativa) com divisão ou é uma álgebra de matrizes a coeficientes em F.

Para tanto seja $\{x_1, x_2\}$ uma base de V sobre F e admitamos que $q(x_i) = a_i$, $i = 1,2$ e $B_q(x_1, x_2) = 1$. Observamos que, independentemente da característica de F, é sempre possível exibir uma base deste tipo para V. Assim $C(V) = F \otimes x_1 \otimes \otimes Fx_2 \otimes Fx_1x_2$, com $x_i^2 = a_i$, $i = 1,2$ e $x_1x_2 + x_2x_1 = 1$. Dado um elemento $x = b_o + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_1x_2 \in C(V)$ definimos o *conjugado de* x, a *norma de* x e o *traço* de x respectivamente por: $\bar{x} = b_o - b_1x_1 - b_2x_= + b_3x_2x_1$, $N(x) = x\bar{x} = \bar{x}x =$
$= (b_o + b_ob_3 + a_1a_2b_3^2) - (a_1b_1^2 + b_1b_2 + a_2b_2^2)$ e
$T = (x) = x + \bar{x} = 2b_o + b_3$.

Notemos que $x^2 = T(x)x - N(x)$, $\forall x \in C(V)$. Claramente T é uma forma linear e N é uma forma quadrática sobre F. É evidente, também que x é inversível em C(V) se e somente se $N(x) \neq 0$. Neste caso $x^{-1} = \dfrac{\bar{x}}{N(x)}$. Assim, a álgebra C(V) é com divisão se e somente se N é anisotrópica. Se C(V) é com divisão, então C(V) é, obviamente, uma álgebra simples.

Suponhamos que C(V) não seja com divisão, isto é, suponhamos N isotrópica. Neste caso mostraremos que existem elementos $e, z \in C(V)$ tais que $C(V) = F \oplus Fe \oplus Fz \oplus Fez$, com $e^2 = c \in F$, $z^2 = z$ e $e \cdot z + z \cdot e = e$. A aplicação linear

$\varphi : C(V) \to M_2(F)$ tal que $\varphi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\varphi(e) = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$\varphi(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\varphi(ez) = \varphi(e) \cdot \varphi(z)$ nos dá o isomorfismo desejado.

Começaremos por mostrar a existência do elemento z. Isto é imediato se algum $a_i = 0$, pois neste caso, basta tomarmos $z = x_1x_2$. Admitamos então que $a_1a_2 \neq 0$. Desde que N é isotrópica, existe $0 \neq x \in C(V)$ com $x = b_o + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_1x_2$ tal que $N(x) = 0$. Assim obtemos $b_o^2 + b_ob_3 + a_1a_2b_3^2 = a_1b_1^2 + b_1b_2 + a_2b_2^2$. Se $T(x) = 2 \cdot b_o + b_3 \neq 0$ basta tomarmos $z = \frac{x}{T(x)}$. Se $2 \cdot b_o + b_3 = 0$ e $b_o \neq 0$ então $b_o + 2 \cdot a_1a_2b_3 \neq 0$, pois caso contrário teríamos $1 - 4a_1a_2 = 0$, que contradiz o fato de q ser não singular. Neste caso, o elemento $z = \frac{-a_1a_2}{b_o + 2a_1a_2b_3}\left[b_o + b_1x_1 + b_2x_2 + (b_3 - \frac{b_o + 2a_1a_2b_3}{a_1a_2})x_1x_2\right]$ satisfaz a equação $X^2 = X$. Finalmente, se $2b_o + b_3 = 0$ e $b_o = 0$ então $b_3 = 0$ e consequentemente obtemos $b_1^2 + b_1(\frac{b_2}{a_1}) + a_1a_2(\frac{b_2}{a_1})^2 = 0$, com $b_1b_2 \neq 0$. Como $1 - 4a_1a_2 \neq 0$, então $2b_1 + \frac{b_2}{a_1} \neq 0$ e tomamos $z = \frac{a_1}{2a_1b_1 + b_2}(b_1 + \frac{b_2}{a_1}x_1x_2)$.

Do que vimos acima, podemos afirmar que existe $z \in C(V) \setminus F$, $z = z_o + z_1x_1 + z_2x_2 + z_3x_1x_2$, $z_i \in F$, tal que $z_1 \neq 0$ ou $z_2 \neq 0$ (o que só ocorre se $car(F) \neq 2$, pois $T(z) = 2z_o + z_3 \neq 0$), tomamos $e = 1 - 2x_1x_2$. E finalmente, se $z_1 \neq 0$ ou $z_2 \neq 0$ e $z_3 \neq 0$, tomamos $e = z_1x_1 + z_2x_2$ se $car(F) = 2$ ou $e = d + z_1x_1 + x_2z_2 - 2dx_1x_2$, com $d = \frac{z_3^2(1-4a_1a_2)-1}{2z_3(1-4a_1a_2)}$ se $car(F) \neq 2$, o que encerra a demonstração.

OBSERVAÇÃO 2.2.13. a) Nota-se que da demonstração da Proposição 2.2.12 segue-se imediatamente que $C(\mathbb{H}) = M_2(F)$ e consequentemente $C(m\mathbb{H}) = 1$ em $Br(F)$.

b) É fácil ver que toda ágebra de quatérnios sobre um corpo F é a álgebra de Clifford de um espaço quadrático de dimensão 2 sobre F. Decorre, portanto, da Proposição 2.2.12 que toda álgebra de quatérnios H sobre F é central simples. Mais ainda, de acordo com o Teorema de Wedderburn (cf. 2.1.3), H é uma álgebra com divisão ou é uma álgebra de matrizes e H é com divisão se e somente se, sua norma N_H é anisotrópica.

§3. INVARIANTES

Neste parágrafo veremos alguns invariantes de formas quadráticas, através dos quais nos será possível fazer a classificação de formas quadráticas sobre um corpo. Além da dimensão introduzida no capítulo 1, introduziremos agora novos invariantes.

PROPOSIÇÃO 2.3.1. Sejam (V_1,q_1) e (V_2,q_2) espaços quadráticos sobre um corpo F. Se $(V,q_1) \simeq (V_2,q_2)$ então $C(V_1)$ é isomorfa, como álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada a $C(V_2)$.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $\varphi : (V_1,q_1) \to (V_2,q_2)$ uma isometria e

$\{x_1,\ldots,x_n\}$ uma base de V_1 sobre F. Então $x_1^{\varepsilon_1} \ldots x_n^{\varepsilon_n}$, $\varepsilon_i = 0$ ou 1 e $\{\varphi(x_1)^{\varepsilon_1} \ldots \varphi(x_n)^{\varepsilon_n}$, $\varepsilon_i = 0$ ou $1\}$ são bases, respectivamente, de $C(V_1)$ e $C(V_2)$ sobre F (cf.2.2.6). A aplicação $\theta : C(V_1) \to C(V_2)$ tal que $\theta(\Sigma\lambda_{i_1\ldots i_n} x_1^{\varepsilon_{i_1}} \ldots x_n^{\varepsilon_{i_n}})$ $= \Sigma\lambda_{i_1\ldots i_n} \varphi(x_1)^{\varepsilon_{i_1}} \ldots \varphi(x_n)^{\varepsilon_{i_n}}$ nos dá o isomorfismo desejado.

Sejam (V_1,q_1) e (V_2,q_2) dois espaços quadráticos isométricos sobre um corpo F. De acordo com a Proposição 2.3.1 existe um isomorfismo de álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas $\theta : C(V_1) \to C(V_2)$. Logo a restrição θ_o de θ a $C_o(V_1)$ nos dá um isomorfismo de álgebras $\theta_o : C_o(V_1) \to C_o(v_2)$. A Proposição 2.3.1 e esta observação nos permite definir um novo invariante para formas quadráticas via a noção de álgebra de Clifford.

DEFINIÇÃO 2.3.2. Seja (V,q) um espaço quadrático sobre um corpo F. Definimos o *invariante de Witt* de (V,q) como sendo a classe em $Br(F)$, da álgebra central simples $w(V)$, dada por $w(V) = C(V)$ se $\dim_F V$ é par e $w(V) = C_o(V)$ se $\dim_F V$ é ímpar.

O isomorfismo $\theta : C(V_1) \to C(V_2)$ definido em 2.3.1 quando $(V_1,q_1) \simeq (V_2,q_2)$, por ser graduado, também induz um isomorfismo entre os centros $Z(C(V_1))$ e $Z(C(V_2))$ bem como entre os centros $Z(C_o(V_1))$ e $Z(C_o(V_2))$. Devido a isto e baseado nas informações dadas em 2.2.9 e 1.3.9 definimos o *invariante de Arf* de um espaço quadrático (V,q) sobre um corpo F como sendo a classe $\Delta(q) = (-1)^{n(n-1)/2}a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \quad F^{\cdot}/_{F^{\cdot 2}}$ se $car(F) \neq 2$ e $q = \langle a_1,\ldots,a_n \rangle$ e $\Delta(q) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \in F/\wp(F)$ se $car(F) = 2$ e $q \simeq [a_1,b_1] \perp \ldots \perp [a_n,b_n]$.

TEOREMA 2.3.3. Seja F um corpo. Se denotarmos por K o cociente $F^{\cdot}/_{F^{\cdot 2}}$ se $car(F) \neq 2$ com $F/\wp(F)$ se $car(F) = 2$ então a seguinte sequência é exata.

$$0 \to IW(F)_o \to W(F)_o \xrightarrow{\Delta} K \to 0$$

onde $\Delta(q)$ é o invariante de Arf de q.

DEMONSTRAÇÃO. Desde que $IW(F)_o$ é gerado pelas 2-formas de Pfister (cf. 1.3.12) então $IW(F)_o \subset \mathrm{Ker}\,\Delta$. Além disto se $b \in F$ (ou $F^{\cdot}$ se $car(F) \neq 2$) então $\Delta([1,b])$ (ou $\Delta(\langle 1,b \rangle)$ se $car(F) \neq 2) = b$ e portanto Δ é sobrejetora. Com isto só falta mostrar que $\mathrm{Ker}\,\Delta \subset IW(F)_o$. Suponhamos $car(F) = 2$. Observemos que se q é uma forma quadrática não singular sobre F então podemos considerar $q \simeq \perp_{i=1}^{n} [a_i,b_i]$ com $a_i \in F^{\cdot}$, $b_i \in F$, $i = 1,\ldots,n$. Se $q \in \mathrm{Ker}\,\Delta$ então $q_1 = \perp_{i=1}^{n} [1,a_ib_i] = 0$ em $W(F)$ (cf. 1.1.9). Logo $q = q \perp q_1$ em $W(F)$, ou seja,

$q = \perp_{i=1}^{n} \langle\langle a_i, b_i]] \in IW(F)_o$, pois $[1,a_ib_i] \perp [a_i,b_i] = [1,a_ib_i] \perp a_i[1,a_ib_i]$

$= \langle\langle a_i, a_ib_i]]$, $i = 1,\ldots,n$. Se $car(F) \neq 2$ seja $q \simeq \langle a_1,\ldots,a_{2n}\rangle$ com $\Delta(q) = (-1)^{n(2n-1)} a_1 \ldots a_{2n} = 1$. Neste caso existem $b_1,\ldots,b_n \in F^{\bullet}$ tais que $q \simeq \perp_{i=1}^{n} a_i \langle\langle b_i \rangle\rangle$. Mostremos por indução sobre n, que $q \in IW(F)_o$. Se $n = 1$, teremos $q \simeq a_1\langle\langle b_1\rangle\rangle$ e $b_1 = -1$. Logo $q = 0$ em $W(F)$ e, consequentemente, $q \in IW(F)_o$. Desde que Δ se estende a $W(F)$ e $a_1\langle\langle b_1\rangle\rangle \perp a_2\langle\langle b_2\rangle\rangle =$
$= a_1\langle\langle b_1, a_1a_2\rangle\rangle \perp (-a_2b_1)\langle\langle -b_1 b_2 \rangle\rangle$ em $W(F)$ então $\Delta((-a_2b_1)\langle\langle -b_1b_2\rangle\rangle \perp a_3\langle\langle b_3\rangle\rangle \perp \ldots \perp a_n\langle\langle b_n\rangle\rangle) = 1$. Aplicando a hipótese de indução sobre n concluimos o nosso objetivo.

OBSERVAÇÃO 2.3.4. Se F é um corpo de característica 2 e $a \in F^{\bullet}$, definimos t_a como sendo a forma bilinear de dimensão 2 sobre F, cuja diagonalização é $\langle 1,a\rangle$. Por outro lado se q é uma forma quadrática de dimensão 2 sobre F, com $q \simeq [1,b]$, denotaremos q por S_b. Com isto podemos ver que $t_a \cdot t_b = t_{ab} - t_a - t_b$ em $W_B(F)$. Mais ainda, se $c \in F^{\bullet}$ e $c \neq 1$ então $t_{1+c} \cdot S_b =$
$= t_c \cdot S_d$, onde $d = c \cdot b(1+c)^{-1}$.

DEFINIÇÃO 2.3.5. Sejam F um corpo, $K \supset F$ uma extensão de F e A uma F-álgebra central simples de dimensão n sobre F. Dizemos que K *decompõe* A se a K-álgebra $A \otimes K$ é isomorfa à álgebra das matrizes $M_n(K)$.

LEMA 2.3.6. Sejam F um corpo de característica 2 e $H = (a,b)$ uma F-álgebra de quartênios com divisão. Se K é uma extensão puramente inseparável de expoente 2 sobre F, isto é, $K^2 \subset F$ e H se decompõe sobre K então existe $a' \in F^{\cdot}$ e $\theta \in K$ tais que $\theta^2 = a'$ e $(a,b) \simeq (a',b)$.

DEMONSTRAÇÃO. Se (a,b) se decompõe sobre K então $\langle\langle a,b]] = 0$ em $W(K)$ (cf. 1.3.7) ou seja $a[1,b] \simeq [1,b]$. Logo existem $\alpha,\beta \in K^{\cdot}$ tais que $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 b = a$ (cf. 1.3.6). Desde que $K^2 \subset F$ então $\alpha\beta \in F$ e H já se decompõe sobre $F(\alpha)$, pois se $\alpha\beta \in K$ então $\alpha \notin F$ e $\beta = t\alpha$, $t \in F^{\cdot}$. Assim $a = \alpha^2(1+t+t^2 b)$. Se $H = F\cdot 1 + F\cdot u + F\cdot v + F\cdot vu$ com $u^2 = a$, $v^2 = v+b$ e $uv+vu=u$, seja $T = \dfrac{u+t\cdot vu}{1+t+t^2\cdot b} \in H$. Neste caso temos $T^2 = \alpha^2 \in F$. Assim podemos supor $F(T) = F(\alpha)$, ou seja, $\alpha = a_o + a_1 u + a_2 vu \in H$. Se $\theta = \alpha + a_o$ então $F(\alpha) = F(\theta)$ e $\theta^2 = a' \in F^{\cdot}$ pois H é com divisão. É fácil ver que $\theta v + v\theta = \theta$, $v^2 = v+b$ e $\theta^2 = a'$ e $H = F\cdot 1 + F\cdot\theta + F\cdot v + F\cdot v\theta$. Portanto $(a,b) \simeq (a',b)$ com $a'=\theta^2$, $\theta \in K$.

TEOREMA 2.3.7. Se F é um corpo então a seguinte sequência é exata:

$$0 \to I^2W(F)_o \to IW(F_o) \xrightarrow{w} Br_2(F) \to 0 ,$$

onde $Br_2(F) = \{x \in Br(F);\ x^2 = 1\}$ e $w(q)$ é o invariante de Witt de q.

DEMONSTRAÇÃO. Se $q \in I^2W(F)_o$ então $q = \perp_{i=1}^{n} a_i q_i$ onde $a_i \in F^{\cdot}$ e cada q_i é uma 3-forma de Pfister (cf. 1.3.12). Desde que $w(q) = \bigotimes_{i=1}^{n} w(q_i)$ e $w(q_i) = 1$ em $Br(F)$ então $I^2W(F)_o \subset \ker w$. Usaremos o fato de $Br_2(F)$ ser gerado por álgebras de quartênios (cf.[1] para corpos de característica distinta de 2 e [8] para corpos de característica igual a 2), para completar a demonstração. Neste caso, é imediato ver que w é sobrejetora. Seja $q = \perp_{i=1}^{n} q_i \in \operatorname{Ker} w$ onde cada q_i é uma 2-forma de Pfister. Mostremos, por indução sobre n, que se $car(F) = 2$ então $q \in I^2W(F)_o$. Se $n = 1$ então $q = \langle\langle a_1, b_1]]$ em $W(F)$ e neste caso $w(q) = (a_1, b_1) = 1$. Logo $w(q)$ é uma álgebra de matrizes (cf. 2.2.12) e q é isotrópica sobre F ou ainda, $q = 0$ em $W(F)$ (cf. 1.3.7). Suponhamos $n > 1$, e assim teremos $\prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i) = 1$ em $Br(F)$. Seja $K = F(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$, com $\theta_i^2 = a_i$. É claro que (a_i, b_i) se decompõe sobre K, $1 \leq i < n$, e neste caso teremos $(a_n, b_n) = 1$ em $Br(K)$. Pelo Lema 2.3.6 existe $\theta \in K$ tal que $\theta^2 = a_n$. Assim sendo, podemos encontrar $b_j \in F^{\cdot}$ e monômios m_j em $a_1, \ldots, a_n$ (com expoentes 0 ou 1) tais que

$a_n = \sum_{j=1}^{s} b_j^2 m_j$ com os m_j's linearmente independentes sobre $F^{\cdot 2}$.

Podemos escrever $a_n = b^2 m(1+c)$, onde $m = m_j$ para algum $m_j \neq$ $\neq 0$, $b = b_j$ e c é uma soma do tipo que representa a_n, diminuida de um termo. Usando a observação 2.3.4 concluimos que $t_{a_n} \cdot S_{b_n} = (t_m + t_{1+c}) \cdot S_{b_n} = (t_m + t_{1+c}) \cdot S_{b_n} \pmod{I^2 W(F)_o}$. Neste caso $t_{a_n} \cdot S_{b_n} = (\perp_{i \in I} t_{a_i})\, S_{b_n} \perp t_c \cdot S_d$ para algum $d \in F$ (cf. 2.3.4). Se $c = b_1'^2\, m_1'$ então $t_c = \perp_{i \in J} t_{a_i} \pmod{I^2}$. Se $c = \sum_{i=1}^{s} b_i' m_i'$ e $s > 1$, aplicamos a hipótese de indução sobre s para mostrar que $t_c = \perp_{i \in L} t_{a_i} \pmod{I^2}$. Logo podemos ver que $t_{a_n} \cdot S_{b_n} \equiv (\perp_{i \in I} t_{a_i}) \cdot S_{b_n} + (\perp_{i \in J} t_{a_i}) \cdot S_d = \perp_{i=1}^{n-1} t_{a_i} \cdot S_{c_i}$

$\pmod{I^2 W(F)_o}$ para alguns $e_i \in F$ (cf. 1.1.9(ii). Assim $\perp_{i=1}^{n} t_{a_i} \cdot S_{b_i} = \perp_{i=1}^{n=1} t_{a_i} \cdot S_{c_i} \pmod{I^2 W(F)_o}$. Desde que $I^2 W(F)_o \subset$ $\subset \operatorname{Ker} w$ então $w(\perp_{i=1}^{n-1} t_{a_i} \cdot S_{c_i}) = 1$ em $Br(F)$ e consequente - mente, pela hipótese de indução sobre n teremos $\perp_{i=1}^{n} t_{a_i} \cdot S_{b_i} \in$ $\in I^2 W(F)_o$.

Se $car(F) \neq 2$, o resultado segue-se de [9] Teor.4.1 e [8]

CAPÍTULO III

CORPOS ORDENADOS

Neste capítulo todo corpo considerado será suposto de característica diferente de 2. Esta exclusão se faz necessária tanto para aliviar a notação como porque os resultados que se seguem não são mencionados na teoria de formas quadráticas quando o corpo em questão tem característica 2.

O objetivo principal deste capítulo é mostrar o princípio local-global de Pfister. Este resultado estabelece uma estreita relação entre o conceito de torsão e a assinatura total de uma forma quadrática. A assinatura total, por ser um invariante, e o princípio local-global de Pfister, pela razão acima mencionada, constituem ferramentas indispensáveis no estudo de classificação de formas quadráticas.

§1. ESTRUTURA DE CORPOS FORMALMENTE REAIS

Dado um corpo F as seguintes condições são equivalentes:

(1) -1 não é a soma de quadrados de F.

(2) Para qualquer inteiro positivo n, a forma quadrática $n \cdot \langle 1 \rangle$ é anisotrópica sobre F.

Se um corpo F satisfaz uma (e portanto ambas) destas condições, dizemos que F é *formalmente real*. É evidente que se F é formalmente real então $car(F) = 0$.

Dado um corpo qualquer F, escrevemos $\sigma(F)$ para denotar o conjunto de todos os elementos de F que se escrevem como soma de quadrados de F.

PROPOSIÇÃO 3.1.1. (i) $\sigma(F)$ é fechado com relação a soma e $\sigma(F) \setminus \{0\}$ é um grupo multiplicativo. (ii) Se F é não formalmente real então $\sigma(F) = F$.

DEMONSTRAÇÃO. (i) É imediato que $\sigma(F)$ é fechado com relação a soma e que $\sigma(F)\setminus\{0\}$ é fechado com relação a multiplicação. Agora para mostrar que $\sigma(F) \setminus \{0\}$ é um grupo multiplicativo, é suficiente mostrar a existência do inverso. Se $0 \neq x = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, então $x^{-1} = (x_1/x)^2 + \ldots + (x_n/x)^2 \in \sigma(F) \setminus \{0\}$.

(ii) Seja $x \in F$. Desde que $x = (\frac{x+1}{2})^2 - (\frac{x-1}{2})^2$ e $-1 = y_1^2 + \ldots + y_n^2$, temos $x = (\frac{x+1}{2})^2 + (y_1(\frac{x-1}{2}))^2 + \ldots + (y_n\frac{x-1}{2}))^2 \in \sigma(F)$, ou seja, $F = \sigma(F)$.

DEFINIÇÃO 3.1.2. Se F é um corpo e $P \subset F$, dizemos que P é uma *ordem* de F se as seguintes propriedades são satisfeitas:

(P1) $0 \notin P$

(P2) Se $x \in F^{\bullet}$ então ou $x \in P$ ou $-x \in P$.

(P3) P é fechado com relação a soma e a multiplicação.

Nestas condições se diz, às vezes, que F é ordenado por P e que este é formado pelos elementos positivos nesta ordem.

Se F é um corpo ordenado por P e F_o é um subcorpo de F então podemos ver que F_o é ordenado por $F_o \cap P$.

PROPOSIÇÃO 3.1.3. Se F é um corpo ordenado por P então: (1) $\sigma(F) \setminus \{0\} \subset P$, (2) F é formalmente real e (3) Se P' é outra ordem de F com $P' \subset P$ então $P = P'$.

DEMONSTRAÇÃO. (1) Desde que P é fechado com relação a soma e a multiplicação é imediato que $\sigma(F) \setminus \{0\} \subset P$.

(2) Desde que $1 \in P$ então $-1 \notin P$ e consequentemente -1 não pode ser escrito como soma de quadrados.

(3) Se P e P' são ordens de F como $P' \subset P$, seja $x \in P$. Neste caso $-x \notin P$ e portanto $-x \notin P'$. Desde que P' é uma ordem, concluimos que $x \in P'$, ou seja, $P = P'$.

LEMA 3.1.4. Sejam F um corpo formalmente real e $a \in F^{\cdot} \setminus F^{\cdot 2}$. Se $F(\sqrt{a})$ não é formalmente real, então $-a \in \sigma(F)$.

DEMONSTRAÇÃO. Se $F(\sqrt{a})$ é não formalmente real, então existem $a_i, b_i \in F$ tais que $-1 = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i \sqrt{a})^2$. Assim $-1 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + a \sum_{i=1}^{n} b_i^2$. Visto que F é formalmente real então $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \neq 0$

e portanto $-a = (1 + \sum_{i=1}^{n} a_i^2) / \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \in \sigma(F)$.

DEFINIÇÃO 3.1.5. Um corpo F é dito *pytagoreano* se a soma de dois quadrados (e portanto uma soma finita) quaisquer de F é um quadrado de F. Isto ainda equivale dizer que $1+y^2 \in F^2$ para qualquer $y \in F$. Em resumo, F é pytagoreano se e somente se $\sigma(F) = F^2 = \{x^2 \ ; \ x \in F\}$.

DEFINIÇÃO 3.1.6. Um corpo F é dito *real-fechado* se F é formalmente real e não admite extensão algébrica própria formalmente real.

PROPOSIÇÃO 3.1.7. Se F é real-fechado então F é pytagoreano.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos $y \in F$ e $x = 1+y^2 \notin F^2$. Logo $F(\sqrt{x})$ é não formalmente real e consequentemente $-x = -1 - y^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2$, $z_i \in F$. Assim $-1 = y^2 + \sum_{i=1}^{n} z_i^2$, contradizendo o fato de F ser formalmente real. Portanto, $1+y^2 \in F^2$, ou seja, F é pytagoreano.

TEOREMA 3.1.8. (Estrutura dos corpos real-fechados). Se F um corpo real-fechado, então F tem uma única ordem, para a qual todo elemento positivo é um quadrado.

DEMONSTRAÇÃO. É claro que $0 \notin F^{\cdot 2}$, ou seja, $F^{\cdot 2}$ satisfaz (P1). Desde que F é real-fechado então $F^{\cdot 2}$ é fechado com relação a soma e a multiplicação (cf. 3.1.7), isto é, $F^{\cdot 2}$ satisfaz (P3). Para mostrar que $F^{\cdot 2}$ satisfaz (P2) seja $0 \neq x \in F^{\cdot}$. Se $x \notin F^{\cdot 2}$ então $F(\sqrt{x})$ é uma extensão quadrática de F e portanto não formalmente real, pois $F^{\cdot}$ é real-fechado. Neste caso, $-x \in$ $\in \sigma(F) = F^2$ (cf. 3.1.4).

Se P' é outra ordem de F, sabemos que $F^{\cdot 2} \subset P'$ e portanto $P' = F^{\cdot 2}$ (cf. 3.1.3(3)).

PROPOSIÇÃO 3.1.9. Sejam F um corpo formalmente real e Ω seu fecho algébrico. Então existe um subcorpo Δ de Ω real-fechado contendo F.

DEMONSTRAÇÃO. Seja S a coleção de todos os subcorpos formalmente reais de Ω que contenha F. Se $\{F_\alpha\}_\alpha$ é uma família indutiva (com relação à inclusão) de tais subcorpos, então $F_o = \bigcup_\alpha F_\alpha$ claramente está em S. Pelo lema de Zorn, existe Δ em S que é maximal com relação a inclusão. É fácil ver que Δ é real-fechado.

COROLÁRIO 3.1.10. Um corpo F é formalmente real se e somente se F é ordenado.

DEMONSTRAÇÃO: $\Rightarrow$) Se F é formalmente real então existe uma extensão Δ de F que é real-fechado (cf. 3.1.9). Neste caso, $\Delta^{\cdot 2}$

é uma ordem de Δ (cf. 3.1.8) e consequentemente $\Delta^{\cdot 2} \cap F$ é uma ordem de F. A outra implicação é imediata.

DEFINIÇÃO 3.1.11. Um elemento $b \in F^{\cdot}$ é dito *totalmente positivo* se $b \in P$, qualquer que seja a ordem P de F.

PROPOSIÇÃO 3.1.12. Se $b \in F^{\cdot}$ então b é totalmente positivo se e somente se $b \in \sigma(F) \setminus \{0\}$.

DEMONSTRAÇÃO. Se F é não formalmente real, então $\sigma(F) = F$ (cf. 3.1.1(2)). Desde que F não admite ordem, a afirmação acima se mantém verdadeira. Suponhamos F formalmente real. É evidente que todo elemento de $\sigma(F) \setminus \{0\}$ é totalmente positivo (cf. 3.1.3(1)). Seja $x \notin \sigma(F) \setminus \{0\}$. Logo $F(\sqrt{-x})$ é formalmente real (cf. 3.1.4). Se P é uma ordem de $F(\sqrt{-x})$ então $-x \in P \cap F$, ou seja, x não é totalmente positivo.

§2. CARACTERIZAÇÃO DOS CORPOS REAL-FECHADOS

TEOREMA 3.2.1. (Springer). Sejam F um corpo, K uma extensão de F, de grau ímpar, e q uma forma quadrática sobre F. Se q é anisotrópica sobre F então q é anisotrópica sobre K. Em particular, se F é formalmente real, então K também o é.

DEMONSTRAÇÃO. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $K = F(\alpha)$. A demonstração será feita por indução sobre $n=[F(\alpha):F]$. Se $n = 1$ nada temos a demonstrar. Suponhamos $n > 1$ e q isotrópica sobre K. Então existem $v(t) = (g_1(t),\ldots,g_d(t)) \in F[t]^d$, com $d=\dim q$, e $\alpha \in K$, com $v(\alpha)\neq 0$, tais que $q(v(\alpha))=0$. O vetor $v(\alpha)$ pode ser escolhido de tal modo que não exista algum polinômio, não trivial de $F[t]$ que divida todos os $g_i(t)$, isto é, todos os $g_i(t)$ podem ser considerados sem raizes em comum. O polinômio $q(v(t))$ tem α como raiz, logo $q(v(t))=p(t)\cdot h(t)$ em $F[t]$, onde $p(t)$ é o polinômio minimal de α sobre F. Se $h(t)$ fosse um polinômio nulo, q teria uma subforma isotrópica sobre F, para ver isto é só verificar o coeficiente dominante de $q(v(t))$. Assim, se $m = \max_{1 \leq i \leq d}\{\partial g_i(t)\}$, então $\partial h(t) = 2m-n \leq 2(n-1)-$ $- n = n-2$. Logo o grau de $h(t)$ é ímpar e menor que n. Seja θ uma raiz de $h(t)$. Desde que θ não é raiz comum de todos os $g_i(t)$, então $v(\theta)$ é um vetor não nulo de $F(\theta)^d$ e mais : $q(v(\theta)) = 0$. Consequentemente q é isotrópica sobre $F(\theta)$ contradizendo a hipótese de indução, e isto conclui a demonstração.

COROLÁRIO 3.2.2. Se F é um corpo real-fechado, então todo polinômio de grau ímpar de $F[X]$ tem uma raiz em F.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $f(X)$ um polinômio de grau ímpar sobre F, $h(X)$ um divisor irredutível de $f(X)$ em $F[X]$ e α uma raiz de $h(X)$. Desde que $[F(\alpha):F] = \partial h(x)$ que é um número ímpar, então

$F(\alpha)$ é formalmente real (cf. 3.2.1). Visto que F não admite extensão algébrica própria que seja formalmente real, concluímos que $F(\alpha) = F$, ou seja, $\alpha \in F$.

TEOREMA 3.2.3. Seja F um corpo. Se $F^{\cdot 2}$ é uma ordem de F e todo polinômio de grau ímpar de $F[X]$ tem uma raiz em F então $F(\sqrt{-1})$ é algebricamente fechado.

DEMONSTRAÇÃO. Desde que F admite uma ordem, F é formalmente real e então $-1 \notin F^{\cdot 2}$. Logo $\Omega = F(\sqrt{-1})$ é uma extensão quadrática de F. Mostremos que $\Omega = \Omega^2$. Se $\alpha \in F^{\cdot}$ então $\alpha \in F^{\cdot 2}$ ou $-\alpha \in F^{\cdot 2}$, pois $F^{\cdot 2}$ é uma ordem de F. Neste caso vemos que se $\alpha \in F$ então $\alpha \in \Omega^2$, pois $-1 = i^2$, com $i = \sqrt{-1}$. De modo geral, se $\alpha \in \Omega$ então $\alpha = a + bi$, com $a,b \in F^{\cdot}$, e para mostrar que $\alpha \in \Omega^2$ podemos supor $b \neq 0$. Mais ainda, desde que $2/b \in \Omega^2$, é suficiente mostrar que $\alpha = a + 2i \in \Omega^2$, $\forall a \in F$. Mostrar que existem $x,y \in F$ tais que $(x + yi)^2 = a + 2i$ é equivalente a mostrar que $x^2 - y^2 = a$ e $xy = 1$ ou, em resumo, que $x^2 - x^{-2} = a$. Seja $\lambda = x^2$, assim teremos $\lambda^2 - a - 1 = 0$. O discriminante desta equação é $a^2 + 4 > 0$. Seja $\sqrt{a^2 + 4}$ a raiz quadrada positiva de $a^2 + 4$. Escolhemos $\lambda = (a + \sqrt{a^2 + 4})/2$ como raiz do polinômio $X^2 - aX - 1$ e mostramos que $\lambda > 0$. Após esta etapa, basta escolhermos x como sendo uma raiz quadrada de λ, que existe porque todo elemento positivo de F, é um quadrado.

Admitamos $\lambda < 0$. Logo $a - \sqrt{a^2+4} < 0$ e portanto $(a + \sqrt{a^2+4})(a - \sqrt{a^2+4}) = -4 > 0$, o que é uma contradição. Portanto Ω é quadraticamente fechado.

Seja $\theta : \Omega \to \Omega$ com $\theta(a+bi) = \overline{a+bi} = a - bi$ a conjugação complexa de Ω e que se estende a $\Omega[t]$ de forma natural. Se $f(t) \in \Omega[t]$, então $\theta(f(t)) = \overline{f(t)}$ é tal que $f(t)\cdot\overline{f(t)} \in F[t]$. Mais ainda, se $f(t)\cdot\overline{f(t)}$ tem uma raiz ω em Ω então ou ω ou $\theta(\omega)$ é uma raiz de $f(t)$. Assim sendo, para mostrar que Ω é algebricamente fechado é suficiente mostrar que todo polinômio não constante de $F[t]$ tem uma raiz em Ω.

Se $g(t) \in F[t]$ seja E o corpo de decomposição de $(t^2+1)\cdot g(t)$ sobre F, o qual é uma extensão de Galois de F, pois $car(F) = 0$. Sejam $G = Gal(E/F)$ e H um 2-sylow subgrupo de G. Desde que $[G : H]$ é um número ímpar, então o subcorpo de E fixo pelos automorfismos de H é uma extensão de grau ímpar de F. Logo $G = H$. Se $o(G) = 2^t > 2$ então G possui um subgrupo de ordem 2^{t-2} o qual dá origem a uma extensão de grau 2 de Ω, contradizendo o fato de ω ser quadraticamente fechado. Portanto $o(G) = 2$ e consequentemente $E = \Omega$, ou seja, ω é algebricamente fechado.

TEOREMA 3.2.5. Um corpo F é real-fechado se e somente se $i = \sqrt{-1} \notin F$ e $F(i)$ é algebricamente fechado.

DEMONSTRAÇÃO. $\Rightarrow$) Se F pe real-fechado então F se encontra nas condições do teorema 3.2.3. Logo $i \notin F$ e $F(i)$ é algebricamente fechado.

$\Leftarrow$) Se $\Omega = F(i)$ é algebricamente fechado e $i \notin F$ então todo polinômio irredutível (não constante) sobre F tem grau 1 ou 2. Mostremos, primeiramente, que F é pytagoreano. Sejam $a,b \in F^{\bullet}$ com $a^2 + b^2 \in F^{\bullet}$ e $g(X) = (X^2 - a)^2 + b^2 = [X^2 - (a + bi)][X^2 - (a - bi)]$. Desde que Ω é algebricamente fechado, podemos escrever $a + bi = \alpha^2$ e $a - bi = \beta^2$, $\alpha,\beta \in \Omega$. Em $\Omega[X]$ temos: $g(X) = (X-\alpha)(X+\alpha)(X-\beta)(X+\beta)$. Claramente, $\pm\alpha, \pm\beta \notin F$, pois $b \neq 0$. Assim $g(X)$ não tem raiz em F e $g(X)$ se fatora como produto de dois polinômios irredutíveis de grau 2 em $F[X]$. Como os fatores lineares de $g(X)$ são $X-\alpha$, $X+\alpha$, $X-\beta$ e $X+\beta$ podemos ver que única possibilidade de $g(X)$ se fatorar como produto de dois polinômios irredutíveis de grau 2 sobre $F[X]$ é $g(X) = f_1(X) \cdot f_2(X)$ onde $f_1(X) = (X-\alpha)(X-\beta)$ e $f_2(X) = (X+\alpha)(X-\beta)$. Assim $\alpha\beta \in F$ e $(\alpha\beta)^2 = a^2 + b^2$, ou seja, $a^2+b^2 \in F^{\bullet 2}$ e portanto F é pytagoreano.

Desde que $-1 \notin F^{\bullet 2}$ e F é pytagoreano, então F é formalmente real. Como a única extensão algébrica própria de F é seu fecho algébrico, que não é formalmente real, podemos afirmar que F é real-fechado.

COROLÁRIO 3.2.6. Um corpo formalmente real é real-fechado se e somente se $|F^{\bullet}/F^{\bullet 2}| = 2$ e todo polinômio de grau ímpar em $F[X]$

admite uma raiz em F.

DEMONSTRAÇÃO. $\Rightarrow$) Se F é real-fechado então 1 e -1 são as únicas classes quadráticas de $F^{\cdot}$, pois $F^{\cdot 2}$ é uma ordem de F (cf. 3.1.8). Que todo polinômio de grau ímpar em $F[X]$ admite uma raiz em F decorre trivialmente de $F(\sqrt{-1})$ ser algebricamente fechado (cf. 3.2.3) e portanto F é real-fechado (cf. 3.2.5).

Será introduzido agora um novo conceito, a saber, o de fecho real de um corpo com relação a uma ordem de F.

DEFINIÇÃO 3.2.7. Seja F um corpo ordenado por um conjunto $P \subset F$ de elementos positivos. Uma extensão $\Delta \supset F$ é dito um *fecho real* de F (com relação a P) se são satisfeitas as seguintes condiçõe: (1) Δ é real-fechado, (2) Δ é algébrico sobre F e (3) $\Delta^{\cdot 2} \cap F = P$, isto é, a única ordem de Δ induz a ordem P de F.

Disto segue-se o seguinte resultado:

TEOREMA 3.2.8. Todo corpo ordenado F possui um fecho real relativo a uma ordem considerada de F e tal fecho real é único, a menos de isomorfismo.

Antes de demonstrarmos o teorema acima vejamos o seguinte:

LEMA 3.2.9. Se F é um corpo ordenado por $P \subset F$ e Ω é seu fecho algébrico, seja E o menor subcorpo de Ω que contém F

e a raiz quadrada de todo elemento de P. Então E é formalmente real.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos, por absurdo, que existem $a_1,\dots,a_r \in E^{\cdot}$ tais que $\sum_{i=1}^{r} a_i^2 = 0$. Assim, podemos admitir que os a_i estão numa extensão finita de F, a saber, $F(\sqrt{b_1},\dots,\sqrt{b_n})$, onde os b_i estão em P. Logo resolvemos nosso problema se mostrarmos que cada extensão do tipo $F(\sqrt{b_1},\dots,\sqrt{b_r})$ com $b_i \in P$, é formalmente real. Com este objetivo estabeleçamos a seguinte afirmação: se $\sum_{i=1}^{n} c_i a_i^2 = 0$, onde $c_i \in P$ e $a_i \in F(\sqrt{b_1},\dots,\sqrt{b_r})$ com $b_i \in P$ então $a_i = 0$, $i = 1,\dots,n$. Mostremos isto por indução sobre $t = [F(\sqrt{b_1},\dots,\sqrt{b_r}) : F]$. Se $t = 1$ então $c_i a_i^2 \in P$. Desde que P é fechado com relação à soma e à multiplicação e $0 \notin P$, teremos um absurdo, a menos que $a_i = 0$, $i = 1,\dots,n$. Suponhamos $t > 1$ e $F(\sqrt{b_1},\dots,\sqrt{b_{r-1}}) \subsetneq F(\sqrt{b_1},\dots,\sqrt{b_r})$. Assim $\sum_{i=1}^{n} c_i a_i^2 = 0$ com $a_i \in F(\sqrt{b_1},\dots,\sqrt{b_r})$ implica que existem $x_i, y_i \in F(\sqrt{b_1},\dots,\sqrt{b_{r-1}})$, $i = 1,\dots,n$ tais que $0 = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i+y_i\sqrt{b_r})^2$ $= \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i^2 + b_r y_i^2) + (2\sum_{i=1}^{n} c_i x_i y_i)\sqrt{b_r}$. Logo teremos $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} (c_i b_r) y_i^2 = 0$ com $x_i, y_i \in F(\sqrt{b_1},\dots,\sqrt{b_{r-1}})$. Aplicando a hipótese de indução concluimos que $x_i = y_i = 0$, $i = 1,\dots,n$.

Se $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^2 = 0$ com $c_i \in P$ e $x_i \in E$ então, pela observação acima, teremos $x_i = 0$, $i = 1,\ldots,n$. Em particular esta afirmação é verdadeira se $c_i=1$, que é o caso do nosso lema.

DEMONSTRAÇÃO de 3.2.8. Se F é um corpo ordenado por P, seja E a extensão de F definida no lema 3.2.9, a qual é formalmente real. Logo existe um subcorpo Δ real-fechado do fecho algébrico de F que contém E (cf. 3.1.9). Para mostrar que Δ é o fecho real de F com relação a P é suficiente mostrar que $P \subset \dot{\Delta}^{\cdot 2} \cap F$ (cf. 3.1.3). Se $b \in P$ então $b \in E^{\cdot 2} \subset \Delta^{\cdot 2}$ e portanto $b \in \Delta^{\cdot 2} \cap F$.

A demonstração da unicidade do fecho real será omitida neste trabalho mas pode ser encontrada em: Knebush, M.; On the Uniqueness of Real Closure and the Existence of Real Places, Comm. Math. Helv. 47 (1972), 260-269.

§3. CORPOS PYTAGOREANOS

A noção de corpo pytagoreano foi introduzida em 3.1.5. Neste parágrafo suas propriedades serão mais detalhadamente estudadas.

OBSERVAÇÃO 3.3.1. (1) Se F é pytagoreano e não formalmente real então F é quadraticamente fechado (cf. 3.1.1(2)). (2) Se Ω é um corpo e $\{F_i\}_{i\in I}$ é uma família de subcorpos pytagoreanos de Ω então $\bigcap_{i\in I} F_i$ é também pytagoreano, fato este facilmente verificável pelo leitor.

DEFINIÇÃO 3.3.2. Sejam F um corpo e Ω seu fecho algébrico. Seja $\{F_i\}_{i\in I}$ a família de todas as extensões algébricas pytagoreanas de F. Pelo visto na observação anterior, $\bigcap_{i\in I} F_i$ é uma extensão pytagoreana de F que será denotada por F_p e chamada o *fecho pytagoreano* de F.

PROPOSIÇÃO 3.3.3. Se F é um corpo formalmente real, então F_p também o é.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam Ω o fecho algébrico de F e Δ um corpo real-fechado tal que $F \subset \Delta \subset \Omega$ (cf. 3.1.9). Assim Δ é pytagoreano (cf. 3.1.7) e mais, $F_p \subset \Delta$. Desde que Δ é formalmente real segue-se que F_p é formalmente real.

Existe uma forma construtiva de se obter o fecho pytagoreano de um corpo F, a qual descreveremos a seguir.

Dizemos que $K \supset F$ é uma *extensão admissível* de F se existem corpos $K_o, K_1, \ldots, K_n$ tais que $F = K_o \subset K_1 \subset \ldots \subset K_n = K$ e $K_{i+i} = K_i(\sqrt{1+a_i^2})$, com $a_i \in K_i$. Se Ω é o fecho algébrico de F e $x \in \Omega$ dizemos que x é um *elemento admissível* de F se

$x \in K$ para alguma extensão admissível K de F. Desde que o "compositum" de duas extensões admissíveis de F ainda é uma extensão admissível de F, podemos concluir que o subconjunto de Ω formado pelos elementos admissíveis de F é um corpo, o qual será denotado por $\tilde{F}_p$.

Mostremos que $F_p = \tilde{F}_p$. De fato, se $y \in \tilde{F}_p$ então $y \in K$ para alguma extensão admissível K de F. Logo $K(\sqrt{1+y^2}) \subset \tilde{F}_p$ e consequentemente $1 + y^2 \in \tilde{F}_p^{2\cdot}$. Disto concluimos que $\tilde{F}_p$ é pytagoreano e portanto $F_p \subset \tilde{F}_p$. Por outro lado F_p contém qualquer extensão admissível de F. Logo $F_p \supset \tilde{F}_p$.

O próximo teorema nos dará uma caracterização de um corpo pytagoreano F em termos do anel de Witt $W(F)$.

DEFINIÇÃO 3.3.4. Se $q \in W(F)$ dizemos que q é de *torsão* se existe um inteiro positivo n tal que $n \cdot q = 0$ em $W(F)$. É claro que o conjunto $W_t(F) = \{q \in W(F)$ tal que q é de torção$\}$ é um subgrupo de $W(F)$. Se $W_t(F) = \{0\}$ dizemos que $W(F)$ é *livre de torsão*.

TEOREMA 3.3.5. (i) F é pytagoreano e não formalmente real se e somente se $W(F) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. (ii) F é pytagoreano e formalmente real se e somente se $W(F)$ é livre de torsão.

DEMONSTRAÇÃO. (i) $\Rightarrow$) Se F é pytagoreano e não formalmente real então $F = F^2$ (cf.3.1.1). Logo toda forma quadrática de dimensão par é hiperbólica e $\langle a \rangle \simeq \langle 1 \rangle$, $\forall a \in F^{\cdot}$. Assim $W(F) \simeq$
$\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

$\Leftarrow$) Se $1+y^2 \in F^{\cdot}$ então $\langle 1+y^2 \rangle \simeq \langle 1 \rangle$. Logo $1+y^2 \in F^{\cdot 2}$, ou seja, F é pytagoreano. De $\langle 1 \rangle \simeq \langle -1 \rangle$ segue-se que $-1 \in F^{\cdot 2}$, ou seja, F é não formalmente real.

(ii) $\Rightarrow$) Seja $q = \langle a_1,\dots,a_n \rangle$ uma forma quadrática anisotrópica sobre F. Suponhamos $r\cdot q = 0$ em $W(F)$, para algum inteiro positivo r. Neste caso $r\,q$ é isotrópica sobre F, isto é, existem $v_{11},\dots,v_{r1},\dots,v_{1n},\dots,v_{rn} \in F$, não todos nulos, tais que $a_1(v_{11}^2 + \dots + v_{r1}^2) + \dots + a_n(v_{1n}^2 + \dots + v_{rn}^2) = 0$. Desde que F é pytagoreano, podemos escrever esta equação na forma $a_1u_1^2 + \dots + a_nu_n^2 = 0$, onde $u_i^2 = v_{1i}^2 + \dots + v_{ri}^2$, $i = 1,\dots,n$. Mas q é anisotrópica, então $u_1 = \dots = u_n = 0$. Visto que nem todos os v_{ij} são nulos, concluimos que F é não formalmente real, contradizendo nossa hipótese. Portanto se, além de pytagoreano, F é formalmente real segue-se que $W(F)$ é livre de torsão.

$\Leftarrow$) Se $d = 1+y^2 \in F^{\cdot}$ então $\langle d,d \rangle \simeq \langle 1,1 \rangle$ (cf. 1.3.3). Logo temos $2\langle 1,-d \rangle = 0$ em $W(F)$. Como este é livre de torsão temos $\langle 1 \rangle \simeq \langle d \rangle$, ou seja, $d \in F^{\cdot 2}$. Portanto F é pytagoreano. Se F é não formalmente real, então, pela parte (i), $W(F) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ que não é livre de torsão. Neste caso, podemos concluir que F é formalmente real.

Sejam $K \supset F$ uma extensão de corpos e (V,q) um espaço quadrático sobre F. Podemos encontrar $a_1,\dots,a_n \in F^{\cdot}$ tais que $q \simeq \langle a_1,\dots,a_n \rangle$ (cf. 1.1.7(i)). Denotemos por q_K a classe de

$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ em $W(K)$. Com isto podemos definir $r^* : W(F) \to W(K)$, com $r^*(q) = q_k$, como acima. É fácil ver que r^* está bem definida e é um homomorfismo de grupos.

TEOREMA 3.3.6. Seja F um corpo. O núcleo da aplicação $r^* : W(F) \to W(F_p)$ é um grupo de torsão 2-primário.

Para demonstrarmos este teorema, precisamos dos seguintes resultados:

PROPOSIÇÃO 3.3.7. Sejam F um corpo e $a \in F^{\cdot} \setminus F^{\cdot 2}$. Se q é uma forma anisotrópica sobre F mas isotrópica sobre $F(\sqrt{a})$ então existe $d \in F^{\cdot}$ e q_1 uma forma quadrática sobre F tais que $q \simeq d \langle 1, -a \rangle \perp q_1$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ uma diagonalização de q. Desde que q é isotrópica sobre $F(\sqrt{a})$, existem $x_i, y_i \in F$, não todos nulos, tais que $\sum_{i=1}^{n} a_i (x_i + y_i \sqrt{a})^2 = 0$. Logo temos $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + a \sum_{i=1}^{n} y^2 = 0$ e $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i y_i = 0$. De $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i y_i = 0$ concluimos que os vetores $X = (x_1, \ldots, x_n)$ e $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ são ortogonais. Desde que $q(X)\, q(Y) \neq 0$, pois q é anisotrópica sobre F, e X é ortogonal a Y, segue-se que q admite uma diagonalização do tipo $\langle q(X), q(Y), b_3, \ldots, b_n \rangle = q(X) \langle 1, -a \rangle \perp q_1$.

COROLÁRIO 3.3.8. Sejam F um corpo, $a \in F^{\cdot}$ e q uma forma quadrática sobre F. Se $a \notin F^{\cdot 2}$ e q é hiperbólica sobre $K = F(\sqrt{a})$, ou seja, $q_K = 0$ em $W(K)$ então existe uma forma quadrática q_1 sobre F tal que $q \simeq q_1 \perp (-a)q_1 \doteq \langle 1,-a \rangle \cdot q_1$.

A demonstração deste resultado se faz por indução sobre dim q e decorre imediatamente da proposição acima.

DEMONSTRAÇÃO de 3.3.6: Consideremos $F_p = \tilde{F}_p$ (ver discussão entre 3.3.3 e 3.3.5). Se $q \in W(F)$ é tal que q é hiperbólica em $W(F_p)$ então q é hiperbólica em alguma extensão admissível K de F. Seja $F = K_o \subset \ldots \subset K_n = K$ uma torre de extensões admissíveis de F, onde $K_{i+1} = K_i\ (\sqrt{1 + a_i^2}\ )$, $a_i \in K_i$. O problema se resume em mostrar que $\mathrm{Ker}(W(K_i) \to W(K_{i+1}))$ é um grupo de torsão 2-primário. Podemos assumir que $[K_{i+1} : K_i] = 2$,pois caso contrário o problema é trivial. Sejam $K_{i+1} = K_i(\sqrt{1 + a_i^2}\ )$, $a_i \in K_i$ e q uma forma quadrática anisotrópica em K_i mas hiperbólica sobre K_{i+1}. Neste caso existe uma forma quadrática q_1 sobre K_i tal que $q \simeq \langle 1, -(1 + a_i^2) \rangle \cdot q_1$ (cf. 3.3.6). Desde que $\langle 1,1 \rangle \simeq \langle 1 + a_i^2, 1 + a_i^2 \rangle$ (cf. 1.3.3) então $2 \cdot \langle 1, -(1+a_i^2) \rangle = 0$ em $W(K_i)$, ou seja, $\mathrm{Ker}(W(K_i) \to W(K_{i+1}))$ é anulado por 2 e isto demonstra o teorema.

TEOREMA 3.3.9. Se F é um corpo formalmente real então a sequência $0 \to W_t(F) \to W(F) \xrightarrow{r^*} W(F_p)$ é exata.

DEMONSTRAÇÃO. Se F é formalmente real então F_p é pytagoreano e formalmente real (cf. 3.3.3). Assim $W(F_p)$ é livre de torsão (cf. 3.3.5(i)) e portanto $W_t(F) \subset \operatorname{Ker} r^*$. Por outro lado, $\operatorname{Ker} r^* \subset W_t(F)$ (cf. 3.3.6). E isto conclui a demonstração.

TEOREMA 3.3.10. Se F é um corpo não formalmente real, então $W_t(F) = W(F)$.

DEMONSTRAÇÃO. Desde que F é não formalmente real, então F_p é pytagoreano e não formalmente real e portanto $W(F_p) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (cf. 3.3.3(ii)). Se $q \in W(F)$ então $2 \cdot q = 0$ em $W(F_p)$ e $q \in W_t(F)$ (cf. 3.3.6). Logo $W(F) = W(F_p)$.

§4. O PRINCÍPIO LOCAL-GLOBAL DE PFISTER

DEFINIÇÃO 3.4.1. Sejam F um corpo, α uma ordem de F e $q \simeq \langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ uma forma quadrática sobre F. Definimos a *assinatura de* q *com relação a* α, e denotamos por $\operatorname{sig}_\alpha(q)$, como sendo o número $2p-n$, onde $n = \dim q$ e p é o número de elementos do conjunto $\{a_1,\ldots,a_n\} \cap \alpha$.

OBSERVAÇÃO 3.4.2. $\operatorname{Sig}_\alpha(q)$ independe da diagonalização escolhida para q. Em outras palavras, se q e q' são formas quadráticas isométricas então $\operatorname{sig}_\alpha(q) = \operatorname{sig}_\alpha(q')$ qualquer que seja a ordem α de F.

De fato, sejam uma ordem de F e K o fecho real de F com relação a α. Como $q = q'$ em $W(F)$, então $q_K = r^*(q) = r^*(q') = q'_K$ em $W(K)$. Por outro lado, se $sig_\alpha(q) = 2p-n$ e $sig_\alpha(q') = 2p'-n$ então $q_K = p\cdot\langle 1\rangle \perp (n-p)\langle -1\rangle$ e $q'_K = p'\cdot\langle 1\rangle \perp (n-p')\langle -1\rangle$ em $W(K)$. Portanto, temos em $W(K)$, $p\cdot\langle 1\rangle \perp (n-p)\langle -1\rangle = p'\cdot\langle 1\rangle \perp (n-p')\langle -1\rangle$ ou $2p\langle 1\rangle = 2p'\langle 1\rangle$, donde segue-se que $p=p'$, pois $W_t(K)$ é livre de torsão (c.f. 3.3.5(ii)).

Observando que $sig_\alpha(\mathbb{H}) = 0$ obtemos assim uma aplicação $sig_\alpha : W(F) \to \mathbb{Z}$.

Dizemos que uma forma quadrática q sobre um corpo F tem assinatura total nula se $sig_\alpha(q) = 0$ para toda ordem α de F.

TEOREMA 3.4.3. (O princípio local-global de Pfister). Sejam F um corpo ordenado e $\mathcal{O}$ o conjunto de todas as ordens de F. A sequência $0 \to W_t(F) \to W(F) \xrightarrow{r^*} \prod_{\alpha\in\mathcal{O}} W(F\ )$ é exata, onde $r^* = \prod_{\alpha\in\mathcal{O}} r^*_\alpha$.

A demonstração deste teorema será feita em duas etapas. Na primeira suporemos a sequência exata quando F é pytagoreano e na segunda etapa mostraremos que se F é pytagoreano então a sequência é exata.

Para mostrar que a sequência acima é exata é suficiente mostrar que toda forma quadrática com assinatura total nula é de torsão pois a outra parte é trivial.

1ª ETAPA. Suponhamos que $q \in W(F)$ é tal que $\mathrm{sig}_\alpha(q) = 0$, $\forall \alpha \in \mathcal{O}$. Seja F_p o fecho pytagoreano de F. Desde que F_p é formalmente real (cf. 3.3.2) e cada ordem de F_p induz uma ordem em F, então $\mathrm{sig}_\alpha(q) = 0$ qualquer que seja α ordem de F_p. Logo assumindo que a sequência é exata quando o corpo é pytagoreano podemos afirmar que $q \in W_t(F_p)$. Mas F_p é pytagoreano e formalmente real, logo $W_t(F_p) = 0$ (cf. 3.3.3(2)). Disto segue-se que $q \in W_t(F)$ (cf. 3.3.7).

2ª ETAPA. Se F é pytagoreano então o problema resume-se em mostrar que a sequência $0 \to W(F) \xrightarrow{r^*} \pi W(F_\alpha)$ é exata, pois $W_t(F) = 0$ (cf. 3.3.3(2)). Assim, só temos que mostrar que dada uma forma quadrática $q \neq 0$ em $W(F)$, existe uma ordem α de F tal que $q \neq 0$ em $W(F_\alpha)$. Isto será feito em 3 passos.

PASSO 1. Sejam q uma forma quadrática anisotrópica sobre F, Ω seu fecho algébrico e $\mathcal{A}=\{K$ corpo; $F \subset K \subset \Omega$, $q \neq 0$ em $W(K)$, K pytagoreano e formalmente real$\}$. Evidentemente $\mathcal{A} \neq \phi$ (pois $F \in \mathcal{A}$) e é indutivo. Pelo lema de Zorn, $\mathcal{A}$ admite um elemento maximal K_o. Se mostrarmos que K_o é real-fechado teremos: a) $K_o \subset \Omega$; b) K_o é real-fechado e c) $K^{\cdot 2} \cap F = \alpha$, onde α é alguma ordem de F. Assim, por definição, K_o será o fecho real de F com relação a α e o problema estará resolvido.

Para mostrar que K_o é real fechado é suficiente mostrar que $|K^{\cdot}/K_o^{\cdot 2}| = 2$ e que todo polinômio de grau ímpar sobre K_o

tem uma raiz em K_o (cf. 3.2.6).

PASSO 2. Seja $f(X) \in K_o[X]$ um polinômio de grau ímpar. Suponhamos que $f(X)$ não tenha raiz em K_o. Neste caso K_o admite uma extensão própria de grau ímpar L. Se $q = 0$ em $W(L_p)$ então $q \in W_t(L)$ (cf. 3.3.7). Disto segue-se que existe um inteiro positivo n tal que $n \cdot q = 0$ em $W(L)$. Consequentemente $n \cdot q = 0$ em $W(K_o)$ (cf. 3.2.1), ou seja, $q \in W_t(K_o) = 0$ (cf. 3.3.5(ii)). Mas $q = 0$ em $W(K_o)$ contradiz uma das hipóteses sobre K_o. Portanto $q \neq 0$ em $W(L_p)$. Logo, $F \subset L_p \subset \Omega$, $q \neq 0$ em $W(L_p)$ e L_p é formalmente real e pytagoreano (cf. 3.3.2), contrariando a maximalidade de K_o. Portanto podemos afirmar que sobre K_o todo polinômio de grau ímpar é redutível.

PASSO 3. Mostremos que $|K_o^{\bullet}/K_o^{\bullet 2}| = 2$. Desde que K_o é formalmente real então 1 e -1 são duas classes quadráticas distintas de $K_o^{\bullet}/K_o^{\bullet 2}$. Suponhamos que exista outra classe quadrática λ. Logo $1, -1, \lambda$ e $-\lambda$ são quatro classes quadráticas distintas de $K_o^{\bullet}/K_o^{\bullet 2}$. Se $q = 0$ em $W(K_o(\sqrt{\lambda}))$ e $q = 0$ em $W(K_o(\sqrt{-\lambda}))$ então existem formas quadráticas q_1 e q_2 sobre K_o tais que $q \simeq \langle 1,-\lambda \rangle \cdot q_1$ e $q \simeq \langle 1,\lambda \rangle \cdot q_2$ (cf. 3.3.6). De $q \simeq \langle 1,-\lambda \rangle \cdot q_1$ temos $\lambda \cdot q \simeq \langle \lambda,-1 \rangle \cdot q_1 \simeq -1 \langle 1,-\lambda \rangle \cdot q_1 = -q$ e de $q \simeq \langle 1,\lambda \rangle \cdot q_2$ temos $\lambda \cdot q \simeq q$ (efetuando cálculos similares). Em resumo, $q \simeq -1 \cdot q$ e portanto $2 \cdot q = 0$ em $W(K_o)$, ou seja, $q \in W_t(K_o) = 0$. (cf. 3.3.5(ii)). Disto segue-se que q não pode ser hiperbólica sobre $K_o(\sqrt{\lambda})$ e sobre $K_o(\sqrt{-\lambda})$ simultaneamente. Assim sendo, podemos supor que $q \neq 0$ em $W(K_o(\sqrt{\lambda}))$. Desde que K_o é formalmente real e pytagoreano e $-\lambda \notin K_o^{\cdot 2}$, temos $K_o(\sqrt{\lambda})$ formalmente real (cf. 3.1.4). Logo $K_o(\sqrt{\lambda})_P$ é formalmente real e pytagoreano (cf. 3.3.3). Se $q = 0$ em $W(K_o(\sqrt{\lambda})_P)$ então $q \in W_t(K_o(\sqrt{\lambda}))$, ou seja, existe um inteiro positivo n tal que $n \cdot q = 0$ em $W(K_o(\sqrt{\lambda}))$. Se além disto $q = 0$ em $W(K_o(\sqrt{-\lambda})_P)$ então existe um inteiro positivo m tal que $m \cdot q = 0$ em $W(K_o(\sqrt{-\lambda}))$. Logo $m \cdot n \cdot q$ é hiperbólica sobre $K_o(\sqrt{\lambda})$ e sobre $K_o(\sqrt{-\lambda})$. Usando o mesmo argumento para mostrar que q não pode ser nula em $W(K_o(\sqrt{\lambda}))$ e em $W(K_o(\sqrt{-\lambda}))$ simultaneamente, mostramos que $2m \cdot n \cdot q = 0$ em $W(K_o)$, o que é uma contradição.

Portanto podemos supor que $q \neq 0$ em $W(K_o(\sqrt{\lambda})_P)$. Desde que $F \subset (K_o(\sqrt{\lambda})_P \subset \Omega$ então temos $K_o(\sqrt{\lambda})_P \in A$ e $K_o \subsetneq K_o(\sqrt{\lambda})_P$ o que contradiz a maximalidade de K_o. Com isto temos provado que K_o não tem mais do que duas classes quadráticas e isto conclui a demonstração do teorema.

OBSERVAÇÃO 3.4.4. Decorre do Princípio Local-Global de Pfister que uma forma quadrática q sobre um corpo ordenado F é de torsão se e somente se q tem assinatuta total nula.

DEFINIÇÃO 3.4.5. Se F é um corpo e q é uma forma quadrática sobre F, dizemos que q é *fortemente de torsão* se existem $a_1,\dots,a_n \in F^\bullet$, $w_1,\dots,w_n \in \sigma(F) \setminus \{0\}$ tais que $q \simeq \langle a_1, -a_1 w_1, \dots, a_n, -a_n w_n \rangle$.

LEMA 3.4.6. Se F é um corpo formalmente real e q é uma forma quadrática sobre F então q é de torsão se e somente se q é fortemente de torsão.

DEMONSTRAÇÃO. Se q é fortemente de torsão então $\mathrm{sig}_\alpha(q) = 0$ para toda ordem α de F. Logo q é de torsão (cf. 3.4.4). Por outro lado, se q é de torsão então existem $a_1,\dots,a_n \in F^\bullet$ tais que $q \simeq \langle a_1,\dots,a_n, a_{n+1},\dots,a_{2n} \rangle$. Mostremos, por indução sobre n, que q é fortemente de torsão. Se $n=1$ então $q \simeq \langle a_1, a_2 \rangle$, com $-a_1 a_2 \in \sigma(F)$ (cf. 3.4.4). Neste caso existe $w \in \sigma(F)$ tal que $q \simeq \langle a_1, -a_1 w \rangle$. Suponhamos $n > 1$. Desde que q é de torsão, existe um inteiro positivo m tal que $m \cdot q = 0$ em $W(F)$, ou sejam $m\langle a_1,\dots,a_n\rangle \simeq m\langle -a_{n+1},\dots,-a_{2n}\rangle$. Logo $-a_{n+1} = \sum_{i=1}^{r} a_i c_i$, $1 \leq r \leq n$ e $c_i \in \sigma(F)$. Completaremos a demonstração por indução sobre r. Se $r=1$, teremos $a_{n+1} = -a_1 w_1$, $w_1 \in \sigma(F)$. Desde que $\langle a_1, -a_1 w_1 \rangle$ é fortemente de torsão, aplicamos a hipótese de indução sobre n para concluirmos a demonstração. Se $r>1$ então $-a_{n+1} = a_1 c_1 + a''_{n+1} = \sum_{i=2}^{r} a_i c_i$. Desde $q = \langle a_1 \rangle \perp \langle -a_1 c_1 \rangle \perp q_1$ em $W(F)$, onde $q_1 = \langle a'_1,\dots,a'_{n+1},\dots, a'_{2n} \rangle$,

$$\text{com} \quad a_i' = \begin{cases} a_i & \text{se} \quad i \neq 1, n+1 \\ -a_1 c_1 a_{n+1}'' & \text{se} \quad i = 1 \\ -\, a_{n+1}'' & \text{se} \quad i = n+1. \end{cases}$$

Sendo $q = \langle a_1, -a_1 c_1 \rangle \perp q_1$ é suficiente mostrar que q_1 é fortemente de torsão. É fácil ver que q_1 é de torsão e $-a_{n+1}' = = a_{n+1}'' = \sum_{i=2}^{r} a_i c_i$ com $c_i \in \sigma(F)$. Aplicando a hipótese de indução sobre r e n, concluimos a demonstração.

LEMA 3.4.7. Se F é um corpo e q é uma forma quadrática sobre F tal que $q \simeq \perp_{i=1}^{n} \langle\langle -w_i \rangle\rangle$, com $w_i \in \sigma(F)$ e $\prod_{i=1}^{n} w_i \in F^{\cdot 2}$, então existem $s_i, t_i \in (F) \setminus \{0\}$, $i = 1,\ldots,r$ tais que $q = = \perp_{i=1}^{n} \langle\langle -s_i, -t_i \rangle\rangle$ em $W(F)$.

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração será feita por indução sobre n. Se $n = 1$, então $w_1 \in F^{\cdot 2}$ e neste caso podemos considerar $r = 1$, $s_1 = 1$ e $t_1 = w_1$. Suponhamos $n > 1$. Desde que $\langle\langle -w_1 \rangle\rangle \perp \langle\langle -w_2 \rangle\rangle = = \langle\langle -w_1, -w_2 \rangle\rangle \perp \langle\langle -w_1 w_2 \rangle\rangle$ em $W(F)$, então $q = \langle\langle -w_1, -w_2 \rangle\rangle \perp q_1$ onde $q_1 = \perp_{i=2}^{n} \langle\langle -v_i \rangle\rangle$, com

$$v_i = \begin{cases} w_1 w_2 & \text{se} \quad i = 2 \\ w_i & \text{se} \quad 2 < i \leq n. \end{cases}$$

Como podemos ver, q_1 se encontra nas condições do lema 3.4.6. Aplicando a hipótese de indução sobre n, para a forma quadrática q_1, concluimos a demonstração.

LEMA 3.4.8. Sejam F um corpo e q uma forma quadrática sobre F. Se $q \simeq \perp_{i=1}^{n} \langle\langle -w_i \rangle\rangle$ então $q \in IW(F)_o$ se e somente se $\prod_{i=1}^{n} w_i \in F^{\cdot 2}$.

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração deste lema é uma consequência imediata de (2.3.3).

TEOREMA 3.4.9. Se F é um corpo e q é uma forma quadrática sobre F então $q \in IW(F)_o \cap W_t(F)$ se e somente se existem $a_1,\ldots,a_n \in F^{\cdot}$, $w_1,\ldots,w_n \in (F) \setminus \{0\}$ tais que $q = \perp_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle\langle a_i, -w_i\rangle\rangle$ em W(F) com $\varepsilon_i = \pm 1$.

DEMONSTRAÇÃO. Se $q \in W_t(F)$ então existem $a_1,\ldots,a_n \in F^{\cdot}$, $w_1,\ldots,w_n \in (F) \setminus \{0\}$ tais que $q \simeq \perp_{i=1}^{n} a_i\langle\langle -w_i \rangle\rangle$ (cf. 3.4.6).

Se $q_1 = \perp_{i=1}^{n} \langle\langle -w_i\rangle\rangle$ então $q = \perp_{i=1}^{n} \langle\langle a_i,-w_i\rangle\rangle \perp (-1)q_1$ em W(F).

Desde que $\perp_{i=1}^{n} \langle\langle a_i,-w_i \rangle\rangle$ e q estão em $IW(F)_o$ segue-se que

$\prod_{i=1}^{n} w_i \in F^{\cdot 2}$ (cf. 3.4.7). Neste caso existem $s_1,\ldots,s_r, t_1,\ldots,t_r \in$ $\in \sigma(F) \setminus \{0\}$ tais que $q_1 = \perp_{i=1}^{r} \langle\langle -s_i,-t_i \rangle\rangle$ em $W(F)$ (cf. 3.4. 6). Portanto podemos ver que q pode ser escrita na forma desejada.

A outra implicação é trivial.

§.5. RESULTADOS AUXILIARES

Para finalizar este capítulo passaremos a enunciar (e demonstrar) uma série de resultados que nos serão úteis para as demonstrações dos principais teoremas de classificação, no próximo capítulo.

PROPOSIÇÃO 3.5.1. Sejam F um corpo e q uma n-forma de Pfister sobre F. Se q' é a parte pura de q e $b \in D(q')$ então existem $b_2,\ldots,b_n \in F^{\cdot}$ tais que $q \simeq \langle\langle b, b_2,\ldots,b_n \rangle\rangle$.

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração desta proposição será feita por indução sôbre n. Seja $q \simeq \langle\langle a_1,\ldots,a_n \rangle\rangle$. Se $n=1$ então $q' \simeq \langle\langle a_1 \rangle\rangle$. Logo se $b \in D(q')$ então $b_1 = a_1 t^2$ para algum $t \in F^{\cdot}$. Neste caso $\langle a_1 \rangle \simeq \langle b \rangle$ e consequentemente $q \simeq \langle 1, a_1 \rangle \simeq \langle 1,b \rangle =$ $= \langle\langle b \rangle\rangle$. Assim suponhamos $n > 1$ e $q \simeq \tau \cdot \langle\langle a_n \rangle\rangle$, onde $q \simeq \langle\langle y,d_2,\ldots,d_{n-1} x a_n \rangle\rangle = \langle\langle y_1,a_n \rangle\rangle \langle\langle d_2,\ldots,d_{n-1} \rangle\rangle$. Visto que $\langle y,xa_n \rangle \simeq (y + xa_n) \langle 1,xya_n \rangle$ (cf. 1.3.3), então $\langle\langle y,xa_n \rangle\rangle \simeq$ $\simeq \langle\langle b,xya_n \rangle\rangle$, ou seja $q \simeq \langle\langle b,d_2,\ldots,d_{n-1},x \cdot ya_n \rangle\rangle$.

COROLÁRIO 3.5.2. Sejam F um corpo e q uma n-forma de Pfister, $n \geq 1$. Se $2 \cdot q = 0$ em $W(F)$ então existem $w, a_2, \ldots, a_n \in F^{\bullet}$ sendo w uma soma de dois quadrados de F tais que $q \simeq$ $\simeq \langle\langle -w, a_2, \ldots, a_n \rangle\rangle$.

DEMONSTRAÇÃO. Se $2 \cdot q = 0$ em $W(F)$ então $q \simeq (-1) \cdot q$ e portanto q representa -1 (cf. 1.3.6). Assim $-1 = y^2 + d$, onde $y \in F$ e d $D(q') \cup \{0\}$, sendo q' a parte pura de q. Se $d = -(1+y^2) = 0$ então $-1 = y^2$ e consequentemente $F = \sigma(F)$ (cf. 3.1.1). Neste caso a conclusão é imediata. Se $d \neq 0$ então existem $a_2, \ldots, a_n \in F^{\bullet}$ tais que $q \simeq \langle\langle d, a_2, \ldots, a_n \rangle\rangle$ (cf. 3.5.1), visto que $d \in D(q')$.

COROLÁRIO 3.5.3. Sejam n um inteiro positivo e F um corpo. Se não existe n-forma de Pfister anisotrópica q satisfazendo $2 \cdot q = 0$ em $W(F)$ então não existe m-forma de Pfister anisotrópica de torsão, para $m \geq n$.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $m \geq n$ e q uma m-forma de Pfister anisotrópica de torsão. Assim existe um inteiro positivo r tal que $2^{r+1} \cdot q = 0$ e $2^2 \cdot q \neq 0$ em $W(F)$ (cf. 3.3.9, 3.3.6). Neste caso existem $w, a_2, \ldots, a_{m+r} \in F^{\bullet}$ tais que $2^r \cdot r \simeq \langle\langle -w, a_2, \ldots, a_{m+r} \rangle\rangle$ onde w é a soma de dois quadrados de F (cf. 3.5.2). Desde que $q_1 = 2 \cdot \langle\langle -w_1, a_2, \ldots, a_n \rangle\rangle$ é anisotrópica, então q_1 é hiperbólica sobre F (cf. 1.3.7). Se admitirmos que sobre F não existe n-forma de Pfister q satisfazendo $2 \cdot q = 0$ em $W(F)$ então $\langle\langle -w, a_2, \ldots, a_n \rangle\rangle = 0$ em $W(F)$ e consequentemente $\langle\langle -w, a_2, \ldots, a_{m+r} \rangle\rangle = 0$ em $W(F)$, contradizendo nossa hipótese sobre a existência de tal inteiro r. Com isto a demonstração fica estabelecida.

LEMA 3.5.4. Sejam F um corpo e q uma forma quadrática sobre F. Se $\dim q = 6$, $\Delta(q) = 1$ e $w(q) = 1$ então $q = 0$ em $W(F)$.

DEMONSTRAÇÃO. Se $\dim q = 6$ e $\Delta(q) = 1$ então $q \in IW(F)_o$ (cf. 2.3.3). Desde que $q \in IW(F)_o$ e $w(q) = 1$ em $B(F)$ então $q \in I^2W(F)_o$ (cf. 2.3.6). Desde que $\dim q = 6$ e $q \in I^2W(F)_o$ então $q = 0$ em $W(F)$ (cf. [6], th. 3.1, Ch. 10).

LEMA 3.5.5. Sejam F um corpo e q uma forma quadrática sobre F. Se $\dim q = 6$, $\Delta(q) = 1$ e $w(q) = (a,b)$ em $B(F)$ então q é isotrópica sobre F.

DEMONSTRAÇÃO. Se q é uma forma quadrática nas consições acima então $q = 0$ em $W(F(\sqrt{b}))$ (cf. 3.5.4). Logo existem $c_1, c_2, c_3 \in F^{\cdot}$ tais que $q \simeq \langle 1, -b \rangle \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ (cf.3.3.6) ou q é isotrópica sobre F. Caso a primeira possibilidade aconteça então $b = \Delta(q) = 1$, isto é, q é hiperbólica sobre F.

PROPOSIÇÃO 3.5.6. Sejam F um corpo e q uma forma quadrática sobre F. Se $\dim q = 10$, $\Delta(q) = 1$ e $w(q) = 1$ em $B(F)$ então

q é isotrópica sobre F.

DEMONSTRAÇÃO. Podemos considerar $q \simeq a_1\langle\langle b_1\rangle\rangle \perp a_2\langle\langle b_2\rangle\rangle \perp q_o$, onde $\dim q_o = 6$, com $a_1,a_2,b_1,b_2 \in F^{\bullet}$. É fácil ver que $q = a_1\langle\langle b_1,a_1a_2\rangle\rangle \perp q_o$ em $W(F(\sqrt{b_1b_2}))$. Desde que $\Delta(q_o) = 1$ (mod $F(\sqrt{b_1b_2})^2$), $\dim q_o = 6$ e $w(q_o) = (-b_1,-a_1a_2)$ em $B(F\sqrt{b_1b_2})$ então q_o é isotrópica sobre $F(\sqrt{b_1b_2})$ (cf. 3.5.5), ou seja, existem $a_3 \in F^{\bullet}$ e q_2 uma forma quadrática sobre F tais que $q_o \simeq a_3\langle\langle -b_1b_2\rangle\rangle \perp q_1$, com $\dim q_1 = 4$ (cf. 3.3.4). Agora $q \simeq q_2 \perp q_3$, onde $q_2 \simeq a_1\langle\langle b_1\rangle\rangle \perp a_2\langle\langle b_2\rangle\rangle \perp a_3\langle\langle -b_1b_2\rangle\rangle$ e $q_3 = a_4\langle\langle b_3,b_4\rangle\rangle$ onde $a_4,b_3b_4 \in F^{\bullet}$, pois $\Delta(q) = 1$. Assim sendo $\dim q_2 = 6$, $\Delta(q_2) = 1$ e $w(q_2) = (-b_3,-b_4)$ em $B(F)$. Portanto, q_2 é isotrópica sobre F (cf. 3.5.5) e consequentemente q é isotrópica sobre F.

Sejam $K \supset F$ uma extensão de corpos de grau finito e $s : K \to F$ uma aplicação F-linear. Para um espaço quadrático (V,q) sobre K temos a função $B_q : V \times V \to K$ que é bilinear associada a q. Compondo B_q com s, teremos uma aplicação bilinear simétrica $s \circ B_q : V \times V \to F$. Se $\dim_F K = n$, podemos ver V como um F-espaço vetorial de dimensão $m\cdot n$, onde $m=\dim_K V$. Fazendo $q_F(x) = \frac{1}{2}(s \circ B_q(x,x))$ para todo x em V, teremos (V,q_F) um espaço quadrático não singular sobre F. Baseado nestas observações, concluimos o seguinte resultado: se $K \supset F$ é uma extensão finita de corpos e $s : K \to F$ é uma aplicação

F-linear então a aplicação $s_* : W(K) \to W(F)$ tal que $s_*(V,q) = (V,q_F)$ é um homomorfismo de grupos.

As afirmações feitas acima podem ser encontradas com detalhes em [6] ch. 7.

LEMA 3.5.7. Se F é um corpo e $K = F(\sqrt{w})$ é uma extensão quadrática de F, com $w \in \sigma(F)$, então a seguinte sequência é exata

$$0 \to \langle\langle -w \rangle\rangle W(F)_o \to IW(F)_o \xrightarrow{r^*} IW(K)_o \xrightarrow{s_*} IW(F)_o \to 0$$

onde r^* é a aplicação induzida pela inclusão $F \subset K$ e s_* é induzida pela função $s : K \to F$ tal que $s(a+b\cdot\sqrt{w}) = b$, $\forall a,b \in F$.

DEMONSTRAÇÃO. Se $r^*(q) = 0$ em $W(K)$ então existe uma forma quadrática q_1 sobre F tal que $q \quad \langle\langle -w \rangle\rangle \cdot q_1$ (cf. 3.3.6) . Se $q \in IW(F)_o$ então $q_1 \in W(F)_o$. É claro que $r^*(\langle\langle -w \rangle\rangle . q) = 0$ em $W(K)$, $\forall q \in W(F)$.

Seja $q \in W(F)$. Devemos provar que $s_*(r^*(q)) = 0$. Desde que s_* e r^* são homomorfismos de grupo, é suficiente mostrar que se $a \in F^{\cdot}$ então $s_*(r^*\langle a \rangle) = 0$ em $W(F)$. Para tanto é suficiente verificar que $s_*(r^*(\langle a \rangle))$ é isotrópico. A verificação deste fato é imediata. Por outro lado, se $\gamma \in IW(K)_o$ é tal que $s_*(\gamma) = 0$ devemos mostrar que existe $q \in IW(F)_o$ tal que $r^*(q) = \gamma$. Em primeiro lugar, mostraremos, por indução sobre $\dim \gamma$, que existe $q \in W(F)$ tal que $r^*(q) = \gamma$. De fato se

$s_*(\gamma) = 0$ em $W(F)$ em particular $s_*(\gamma)$ é isotrópica sobre F, ou seja, γ representa, sobre K, um elemento de $F^{\bullet}$. Se $\dim \gamma = 1$ então existe $a \in F^{\bullet}$ tal que $\gamma \simeq \langle a \rangle$ e neste caso tomamos $q = \langle a \rangle$. Se $\dim \gamma > 1$, existe $a \in F^{\bullet}$ e γ_1 uma forma quadrática sobre K tais que $\gamma \simeq \langle a \rangle \perp \gamma_1$. Desde que $s_*(\langle a \rangle) = 0$ em $W(F)$ e s_* é um homomorfismo de grupos, aplicamos a hipótese de indução para concluir que existe $q \in W(F)$ tal que $r^*(q) = \gamma$, visto que $s_*(\gamma_1) = 0$ em $W(F)$. Falta mostrar que $q \in IW(F)_o$. Desde que $r^*(q) \in IW(K)_o$, temos $\dim q = n \equiv 0 \pmod 2$ para algum inteiro positivo n e $\Delta(q) = (-1)^{n(n-1)/2} . x^2$, onde $x = a + b\sqrt{w}$, com $a,b \in F$. Desde que $\Delta(q) \in F^{\bullet}$, podemos ver que $a \cdot b = 0$. Se $b = 0$ então $q \in IW(F)_o$ (cf. 2.3.3). Caso contrário podemos supor $\Delta(q) = (-1)^{n(n-1)/2} . w$ em $F^{\bullet}/F^{\bullet 2}$. Assim sendo $q \perp \langle\langle -w \rangle\rangle \in IW(F)_o$ e $r^*(q \perp \langle\langle -w \rangle\rangle) = \gamma$.

LEMA 3.5.8. Se sobre o corpo F não existe 3-forma de Pfister de torsão então $r^* : I^2W(F)_o \to I^2W(K)_o$ é um monomorfismo, onde r^* e K são como acima.

DEMONSTRAÇÃO. Desde que r^* é um homomorfismo, é suficiente provar que $\operatorname{Ker} r^* = \{0\}$. De fato, se $0 \neq q \in I^2W(F)_o$ e $r^*(q) = 0$ em $W(K)$ então existe uma forma quadrática q_1 sobre F tal que $q \simeq \langle\langle -w \rangle\rangle \cdot q_1$ (cf. 3.3.6), com $\dim q_1 \geq 4$ (cf. [6] th. 3.1, ch. 10). Podemos supor q anisotrópica sobre F e $q_1 \simeq a_1\langle\langle b_1 \rangle\rangle \perp a_2 \langle\langle b_2 \rangle\rangle \perp q_2$, onde $a_1, a_2, b_1, b_2 \in F^{\bullet}$ e

q_2 é uma forma quadrática sobre F. Vemos que $\langle\langle b_1,-w\rangle\rangle$ e $\langle\langle b_2,-w\rangle\rangle$ são universais, pois dado $c \in F^{\bullet}$ temos $\langle\langle -c,b,-w\rangle\rangle = 0$ em $W(F)$, isto é, $\langle\langle b_1,-w\rangle\rangle \simeq c\,\langle\langle b,-w\rangle\rangle$ representa c (cf. 1.3.6). Neste caso concluimos que q é isotrópica sobre F, o que contradiz nossa hipótese. Portanto r^* é injetora.

LEMA 3.5.9. Sejam F um corpo e $K = F(\sqrt{a}\,)$ uma extensão quadrática de F. Se J é o $F^{\bullet}$-módulo gerado pelas formas quadráticas do tipo $\langle\langle e,z\rangle\rangle$ com $e \in F^{\bullet}$ e $z \in K^{\bullet}$, então $J = IW(K)_o$.

DEMONSTRAÇÃO. É evidente que $J \subset IW(K)_o$. Por outro lado, se $x,y,b \in K^{\bullet}$ então $\langle\langle x\cdot b,y\rangle\rangle = b\langle\langle x,y\rangle\rangle \perp \langle\langle -b,y\rangle\rangle$ em $W(K)$. Considerando a igualdade acima estabelecida, só precisamos mostrar que $\langle\langle c+\sqrt{a}\,,\ d-\sqrt{a}\,\rangle\rangle \in J$, $\forall c,d \in F$, visto que podemos considerar $b \in F^{\bullet}$. Se $c = -d$ então $q \simeq \langle\langle 1,-1\rangle\rangle \in J$. Se $c \neq -d$ teremos $q \simeq \langle\langle c+d,\ (c+\sqrt{a})(d-\sqrt{a})\rangle\rangle \in J$ (cf. 1.3.3).

LEMA 3.5.10. Sejam F um corpo e $x_i,y_i \in F^{\bullet}$, $i = 1,2,3$. Se $\prod_{i=1}^{3} (x_i,y_i) = 1$ em $B(F)$ então $q = \langle\langle x_1,y_1\rangle\rangle' \perp (1)\cdot\langle\langle x_2,y_2\rangle\rangle'$ é isotrópica sobre F, onde $\langle\langle x_i,y_i\rangle\rangle'$ é a parte pura de $\langle\langle x_i,y_i\rangle\rangle$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $K = F(\sqrt{-x_3})$. Assim $(x_1,-y_1) = (-x_2,-y_2)$ em $B(K)$. Logo $q = \langle\langle x_1,y_1\rangle\rangle' \perp (-1)\cdot\langle\langle x_2,y_2\rangle\rangle' = 0$ em $W(K)$, ou seja, existem $a_1,b_1,c_1 \in F^{\bullet}$ tais que $q \simeq \langle\langle x_3\rangle\rangle\langle\langle a_1,b_1,c_1\rangle\rangle$ (cf. 3.3.6). Desde que $q \perp \mathbb{H} \simeq \langle\langle x_1,y_1\rangle\rangle \perp \langle\langle x_2,y_2\rangle\rangle$ então

$q \in IW(F)_o$. Com isto temos $\Delta(q) = 1 = x_3$, isto é, $(-x_3,-y_3)=1$ em $B(F)$ e consequentemente $(-x_1,-y_1) = (-x_2,-y_2)$ em $B(F)$, ou seja, $\langle\langle x_1,y_1\rangle\rangle = \langle\langle x_2,y_2\rangle\rangle$ em $W(F)$ e consequentemente , $q = 0$ em $W(F)$, a menos que q seja isotrópica sobre F.

LEMA 3.5.11. Se φ e τ são 2-formas de Pfister sobre um corpo F tais que $q = \varphi' \perp (-a)\cdot\tau'$ é isotrópica sobre $F(\sqrt{a})$ então existem $z,b,c,d \in F^{\bullet}$ tais que $\varphi \perp (-a)\cdot\tau \simeq \langle\langle -a,z\rangle\rangle \perp b\langle\langle c,d\rangle\rangle$.

DEMONSTRAÇÃO. Caso 1: q é isotrópica sobre F. Assim, φ' e $a\cdot\tau'$ representam um elemento em comum $c \in F^{\bullet}$. Neste caso, sabemos que existem $b,z \in F^{\bullet}$ tais que $\varphi \simeq \langle\langle c,b\rangle\rangle$ e $\tau \simeq \langle\langle ac,z\rangle\rangle$ (cf. 3.5.1). Disto segue que $\varphi \perp (-a)\cdot\tau \simeq \langle 1,b,cb,-a,-az,-cz\rangle \perp$ $\perp \mathbb{H} \simeq \langle 1,-a,z,-az\rangle \perp \langle b,-z,cb,-cz\rangle = \langle\langle -a,z\rangle\rangle \perp b\langle\langle c,d\rangle\rangle$, com $d = b\cdot z$.

Caso 2: q é anisotrópica sobre F. Assim teremos $z \in F^{\bullet}$ e q_2 uma forma quadrática de dimensão 4 sobre F tais que $q \simeq z\langle\langle -a\rangle\rangle \perp q_1$ (cf. 3.3.5). Desde que $\Delta(q) = a$, temos $\Delta(q) = 1$ e portanto existem $b,c,d \in F^{\bullet}$ tais que $q_1 \simeq b\langle\langle c,d\rangle\rangle$. Logo $\varphi \perp -a\cdot\tau = q \perp \langle\langle -a\rangle\rangle = \langle\langle -a,z\rangle\rangle \perp b\langle\langle c,d\rangle\rangle$.

PROPOSIÇÃO 3.5.12. Seja q uma forma quadrática de dimensão 2n. Se $q \in IW(F)_o$ então existem $q_1,\dots,q_{n-1}$ 2-formas de Pfister e $a_1,\dots,a_{n-1} \in F^{\bullet}$ tais que $q = \perp_{i=1}^{n-1} a_i q_i$ em $W(F)$.

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração será feita por indução sobre n. Se $n = 1$ então $q = \langle 1,-1 \rangle = \langle\langle 1,-1 \rangle\rangle$ em $W(F)$ (cf. 2.3.3). Suponhamos $n > 1$. Assim existem $a,b,c \in F^{\bullet}$ e q_1 uma forma quadrática tais que $q \simeq \langle a,b,c \rangle \perp q_1$, com $\dim q_1 = 2n-3$. Neste caso $q = a\langle\langle ab,ac \rangle\rangle \perp q_1 \perp \langle\langle -abc \rangle\rangle$ em $W(F)$. Desde que $a\langle\langle ab,ac \rangle\rangle \in IW(F)_o$ aplicamos a hipótese de indução sobre $q_1 \perp \langle -abc \rangle$ para concluirmos a demonstração.

TEOREMA 3.5.13. Seja $K = F(\sqrt{w})$ uma extensão quadrática de F, onde F é um corpo que não tem 3-forma de Pfister de torsão não trivial. Sejam $w \in \sigma(F)$ e $s : K \to F$ a função F-linear tal que $s(1) = 0$ e $s(\sqrt{w}) = 1$. Se $\gamma \in I^2(K)_o$ com $\dim \gamma = 8$ e $s_*(\gamma) = 0$ em $W(F)$ então existe uma 3-forma de Pfister q sobre F tal que $r^*(a.q) = \gamma$ para algum $a \in F^{\bullet}$.

DEMONSTRAÇÃO. De fato, se $\gamma \in I^2W(K)_o$ e $s_*(\gamma) = 0$ em $W(F)$ então, em particular, $s_*(\gamma)$ é isotrópica sobre F, ou seja, γ é isotrópica sobre K ou γ representa um elemento de $F^{\bullet}$. Se acontece a segunda possibilidade podemos assegurar que γ admite uma diagonalização $\langle a_1,\ldots,a_8 \rangle$ onde $a_1 \in F^{\bullet}$ e $a_i \in K^{\bullet}$, $i = 2,\ldots,8$. Em ambos os casos podemos repetir o mesmo raciocínio e concluir que γ é imagem, através de r^*, de alguma forma quadrática q de $W(F)$, ou seja, existe $q \in W(F)$ tal que $r^*(q) = \gamma$. Se $\dim q > 8$ então q é isotrópica sobre K. Logo existem $a \in F^{\bullet}$ e q_1 uma forma quadrática sobre F tais que

$q \simeq a\langle\langle -w \rangle\rangle \perp q_1$ (cf. 3.3.5). Com este argumento podemos supor $\dim q = 8$, pois $r^*(q_1) = \gamma$ em $W(K)$. Assim sendo, existem $x_i, a_i, b_i \in F^{\bullet}$, $i = 1,2,3$ tais que $q = \perp_{i=1}^{3} x_i \langle\langle a_i, b_i \rangle\rangle$ (cf. 3.5.12, 3.5.7). Seja $q_2 = \langle\langle a_1, b_1\rangle\rangle \perp (-w)\cdot\langle\langle a_2, b_2\rangle\rangle \perp (e)\cdot\langle\langle a_3, b_3\rangle\rangle$ com $e \in F^{\bullet}$ a ser determinado. Desde que $q \equiv q_2 \pmod{I^2W(F)_o}$, $\forall e \in F^{\bullet}$, então $r^*(q) \equiv r^*(q_2) \equiv 0 \pmod{I^2W(K)_o}$. Assim temos $(-a_1,-b_1)(-a_2,-b_2)(-a_3,-b_3) = 1$ em $B(K)$ (cf. 2.3.6) e consequentemente $\varphi = \langle\langle a_1, b_1\rangle\rangle' \perp (-w)\,\langle\langle a_2, b_2\rangle\rangle'$ é isotrópica sobre K (cf. 3.5.10). Isto equivale dizer que existem $b,c,d,z \in F^{\bullet}$ tais que $q_2 \simeq \langle\langle -w, z \rangle\rangle \perp (b)\,\langle\langle c, d \rangle\rangle \perp (e)\,\langle\langle a_3, b_3\rangle\rangle$ (cf. 3.5.11). Fazendo $e = -b$ vemos que a parte anisotrópica de q_2 sobre K tem dimensão menor ou igual a 6 e isto nos garante que q_2 é hiperbólica sobre K (cf. [6] th. 3.1, ch. 10). Fazendo $q_1 = q \perp (-q_2)$, teremos $q_1 \in I^2W(F)_o$ e $r^*(q_1) = \gamma$. Se a parte anisotrópica de q_1 tem dimensão menor que 8 então q é hiperbólica sobre F (cf. [6] th. 3.1, ch. 10) e o problema está resolvido. Por outro lado, se admitimos $\gamma \neq 0$ em $W(K)$, teremos $\overline{q}_1 = f \perp \langle\langle -w \rangle\rangle f_1$, onde $\overline{q}_1$ é a parte anisotrópica de q_1, f é uma forma quadrática de dimensão 8 sobre F tal que $r^*(f) = \gamma$ e f_1 é uma forma quadrática sobre F que torna a igualdade acima verdadeira (cf. 3.3.5). Desde que F não admite 3-forma de Pfister de torsão então $\langle\langle a, -w \rangle\rangle$ é universal, $a \in F^{\bullet}$, e consequentemente $\dim f_1 \leq 1$. Se $\dim f_1 = 1$ então temos $\overline{q}_1 \in I^2W(F)_o$ e $\dim \overline{q}_1 = 10$, ou seja, $\overline{q}_1$ é isotrópica sobre F (cf. 3.5.6). Assim $\dim \overline{q}_1 = 0$. Seja $q_1 = a_1\langle\langle b_1 \rangle\rangle \perp q_o$.

Com isto temos $\overline{q}_1 \equiv q_o \pmod{I^2W(F(\sqrt{-b_1}))_o}$ e consequentemente $q_o = 0$ em $W(F(\sqrt{-b_1}))$ (cf. [6] , th. 3.1, ch.10) pois $q_o \in$ $\in I^2W(F(\sqrt{-b_1}))_o$ e dim $q_o = 6$. Neste caso podemos supor $q_o \simeq$ $\simeq \langle\langle b_1\rangle\rangle \cdot \varphi$, para alguma forma quadrática φ sobre F de dimensão 3. Portanto temos $\overline{q}_1 \simeq \langle\langle b_1\rangle\rangle \langle a_1,a_2,a_3,a_4\rangle$, $a_i \in F^{\bullet}$, $i = 1,\dots,4$. Desde que $\langle a_1,a_2,a_3,a_4\rangle = a_1\langle 1,a_1a_2,a_1a_3,a_2a_3\rangle \perp$ $\perp \langle -a_1a_2a_3,a_4\rangle$ em $W(F)$ e $a_1\langle\langle b_1\rangle\rangle \langle\langle a_1a_2,a_1a_3\rangle\rangle \in I^2W(F)_o$, então $\langle\langle b_1\rangle\rangle \langle -a_1a_2a_3,a_4\rangle = 0$ em $W(F)$ (cf.[6],th. 3.1,ch.10). Neste caso $\overline{q}_1 \simeq a_1\langle\langle b_1,a_1a_2,a_1a_3\rangle\rangle$ e o teorema está demonstrado.

COROLÁRIO 3.5.14. Sejam F um corpo formalmente real e $w \in \sigma(F)$. Se sobre F não existe 3-forma de Pfister de torsão então sobre $F(\sqrt{w})$ não existe 3-forma de Pfister de torsão.

DEMONSTRAÇÃO. Seja γ uma 3-forma de Pfister de torsão sobre $K = F(\sqrt{w})$. Podemos supor $2\cdot\gamma = 0$ em $W(F)$ (cf. 3.5.3) e $\gamma = \langle\langle x,y,-z\rangle\rangle$ onde z é soma de 2 quadrados de K; $x \in F^{\bullet}$, $y,z \in K^{\bullet}$ (cf. 3.5.9). Desde que $s_* : W(K) \to W(F)$ induzido pelo F-homomorfismo linear $s : K \to F$ tal que $s(1)=0$ e $s(\sqrt{w}) = 1$, é um $F^{\bullet}$-homomorfismo, vemos que $s_*(\gamma) = \langle\langle x\rangle\rangle . s_*(\langle\langle y,-z\rangle\rangle)$. É fácil ver que $s_*(\langle\langle y,-z\rangle\rangle) \in IW(F)_o \cap W_t(F)$. Neste caso

$$s_*(\langle\langle y,-z\rangle\rangle) = \mathop{\perp}_{i=1}^{n} \langle\langle a_i,-w_i\rangle\rangle \text{ em } W(F),\ a_i \in F^{\bullet} \text{ e } w_i \in \sigma(F)\setminus$$

$\setminus \{0\}$, $i = 1,\dots,n$ (cf. 3.4.8). Neste caso $\langle\langle x\rangle\rangle \cdot s_*(\langle\langle y,z\rangle\rangle)$ se escreve, em $W(F)$, como soma de 3-formas de Pfister de torsão que, por hipótese, são nulas. Assim existe uma 3-forma de Pfister sobre F tal que $q_K = \gamma$. Mas $r^* : I^2W(F)_o \to I^2W(K)_o$ é injetora (cf. 3.5.8); logo q é de torsão e consequentemente nula. Portanto $\gamma = 0$ em $W(K)$.

CAPÍTULO IV

TEOREMAS DE CLASSIFICAÇÃO

No estudo da teoria de formas quadráticas o problema de classificação tem ocupado um papel central. Quais são os invariantes básicos que classificam (as classes de isomorfismo de) formas quadráticas sobre um corpo? A pergunta com toda esta generalidade ainda não teve uma resposta global. Entretanto para as classes específicas de corpos o problema de classificação tem sido resolvido de várias formas. Outra maneira de se tratar o problema de classificação é inverter a pergunta anterior. Quais são os corpos cujas formas quadráticas se classificam por um conjunto de invariantes dado?

Repondendo a esta pergunta enunciaremos (e demonstraremos) seis teoremas de classificação dos quais (teoremas 1, 3 e 5) se destinam a corpos não formalmente reais. Os três restantes (teoremas 2, 4 e 6), apesar de se aplicarem a corpos quaisquer, serão demonstrados apenas para corpos formalmente reais, pois estes teoremas quando aplicados a corpos não formalmente reais coincidem com os teoremas 1, 3 e 5 respectivamente.

É compreensível que quanto maior o número de invariantes dado, maior a família de corpos sobre os quais as formas quadráticas se classificam por estes invariantes. Por outro lado, quanto mais genérico é o corpo dado, mais invariantes precisamos para classificar as formas quadráticas sobre este.

Esta observação fica bastante clara se olharmos os teoremas 1, 2 e 3 quando o corpo é não formalmente real e os teoremas 2, 4 e 6 quando o corpo é formalmente real.

1º TEOREMA DE CLASSIFICAÇÃO. Seja F um corpo. As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) Formas quadráticas sobre F são classificadas pela dimensão.

(2) F é quadraticamente fechado se $car(F) \neq 2$ ou $F = \wp(F)$ se $car(F) = 2$.

(3) $W(F)_o = 0$.

DEMONSTRAÇÃO.

(1) $\Rightarrow$ (2). Se $car(F) \neq 2$, então $\langle a \rangle \simeq \langle 1 \rangle$, $\forall a \in F^{\bullet}$. Assim $F = F^{\bullet 2}$ e isto significa que F é quadraticamente fechado. Se $car(F) = 2$ e $a \in F$ então $[1,a] \simeq [0,0]$. Logo $a \in \wp(F)$ (cf. 1.1.9). Desde que $\wp(F) \subset F$, temos $F = \wp(F)$.

(2) = (3). Se $car(F) \neq 2$ então toda forma binária é isomorfa a $\langle 1,-1 \rangle = 0$ em $W(F)$. Desde que $W(F)_o$ é constituído de formas de dimensão par, podemos concluir que $W(F)_o = 0$. Se $car(F) = 2$ e $a \in F^{\bullet}$ então $[a,b] \simeq \langle a \rangle [1,ab]$. Mas $ab \in \wp(F)$ e assim $[1,ab] \simeq [0,0]$ (cf. 1.1.9). Logo toda forma quadrática sobre F

é hiperbólica e portanto $W(F)_o = 0$.

(3) $\Rightarrow$ (2). Se $car(F) \neq 2$ e q_1 e q_2 são duas formas de mesma dimensão então $q = q_1 \perp (-q_2) \in W(F)_o = 0$. Logo $q_1 \simeq q_2$ e portanto dimensão classifica todas as formas quadráticas sobre F. Se $car(F) = 2$, toda forma quadrática sobre F é uma soma ortogonal de formas binárias (cf. 1.1.7). Logo, se q_1 e q_2 são duas formas sobre F de mesma dimensão $m = 2n$, de $W(F)_o = 0$ decorre que $q_1 \simeq n\cdot[0,0] \simeq q_2$.

2º TEOREMA DE CLASSIFICAÇÃO. Seja F um corpo formalmente real. As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) Formas quadráticas são classificadas por dimensão e assinatura total.

(2) F é pytagoreano.

(3) $W(F)_o$ é livre de torsão.

DEMONSTRAÇÃO. Desde que F é formalmente real então $car(F) \neq 2$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Se $a \in F$ então $1+a^2 \in F^\cdot$ e $\langle 1+a^2 \rangle \simeq \langle 1 \rangle$ por tea mesma dimensão e a mesma assinatura total. Logo $1+a^2 \in F^{\cdot 2}$ e portanto F é pytagoreano.

(2) $\Rightarrow$ (3). Se F é formalmente real e pytagoreano então $W(F)$ é livre de torsão (cf. 3.3.5(i)). Em particular $W(F)_o$ é livre de torsão.

(3) $\Rightarrow$ (1). Se q_1 e q_2 são duas formas quadráticas de mesma dimensão e mesma assinatura total então $q = q_1 \perp (-q_2) \in W(F)_o \cap W_t(F)$ (cf. 3.4.3). Mas, por hipótese, $W(F)_o$ é livre de torsão, portanto $q_1 \simeq q_2$.

3º TEOREMA DE CLASSIFICAÇÃO. Seja F um corpo. As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) Formas quadráticas sobre F são classificadas por dimensão e invariante de Arf.

(2) $IW(F)_o = 0$

(3) Não existe F-álgebra de quartênios com divisão.

(4) Se uma F-álgebra de quartênios H tem divisor de zero em uma extensão quadrática de F então H tem divisor de zero em F.

(5) Toda forma binária do tipo $\langle 1,a \rangle$, se $car(F) \neq 2$, ou $[1,a]$ se $car(F) = 2$, é universal.

DEMONSTRAÇÃO.

(1) $\Rightarrow$ (2). Se $car(F) \neq 2$ e $q \in IW(F)_o$ então $q = \perp_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle\langle a_i,b_i \rangle\rangle$ em $W(F)$, onde $\varepsilon_i = \pm 1$, $a_i,b_i \in F^{\bullet}$. Desde que cada forma $\varepsilon_i \langle\langle a_i,b_i \rangle\rangle$ tem dimensão 4 e invariante de Arf 1, temos, por hipótese, $\varepsilon_i \langle\langle a_i,b_i \rangle\rangle \simeq \langle 1,-1,1,-1 \rangle = 0$ em $W(F)$. Logo $q = 0$ em $W(F)$. Se $car(F) = 2$ e $q \in IW(F)_o$, então $q = \perp_{i=1}^{n} c_i q_i$, onde

cada $q_i \simeq \langle\langle a_i, b_i]]$, $c_i, a_i \in F^{\cdot}$ e $b_i \in F$. Visto que $\Delta(c_i q_i) = 0$ e $\dim q_i = 4$, então, por hipótese, $q_i \simeq [0,0] \perp [0,0] = 0$ em $W(F)$, $i = 1,\ldots,n$. Portanto, independentemente da caracte-rística de F, temos $IW(F)_o = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Se $car(F) \neq 2$ e q_1 e q_2 são duas formas quadráticas sobre F de mesma dimensão e mesmo invariante de Arf, então $q = q_1 \perp (-q_2) \in IW(F)_o = 0$ (cf. 2.3.3). Assim $q_1 \simeq q_2$. Se $car(F) = 2$, q_1 e q_2 são duas formas quadráticas de mesma dimensão e mesmo invariante de Arf, então $\Delta(q_1 \perp q_2) = 0$. Logo $q_1 \perp q_2 \in IW(F)_o = 0$, (cf. 2.3.3). Consequentemente temos $q_1 \simeq q_2$. Tais observações nos permite afirmar que dimensão e invariante de Arf classificam todas as formas quadráticas sobre F.

(2) $\Rightarrow$ (3). Se H é uma F-álgebra de quartênios, então sua forma norma está em $IW(F)_o = 0$. Isto significa que a forma norma de H é isotrópica e portanto H não é uma álgebra com divisão. (cf. 1.3.10).

(3) $\Rightarrow$ (4). Trivial.

(4) = (5). Sejam $a,b \in F^{\cdot}$, $car(F) \neq 2$ (resp. $a,b \in F$, $b \neq 0$ e $car(F) = 2$). Se $b \in F^{\cdot 2}$ então $\langle 1,a\rangle$ (resp. $[1,a]$) representa b. Caso contrário seja H a F-álgebra de quartérnios cuja forma norma é $\langle\langle -b,a\rangle\rangle$ (resp. $\langle\langle b,a]]$). Desde que H tem divisor de zero em $F(\sqrt{b})$ então, por hipótese, H tem divisor de zero em F. Mais isto equivale a dizer que $\langle\langle -b,-a\rangle\rangle$(resp.$\langle\langle b,a]]$

é isotrópica sobre F (cf. 1.3.10), ou seja, $\langle 1,a\rangle$ (resp. $[1,a]$) representa b (cf. 1.3.10).

(5) $\Rightarrow$ (2). Se $car(F) \neq 2$ e $q \in IW(F)_o$, então $q = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle\langle a_i,b_i\rangle\rangle$ em $W(F)$, onde $\varepsilon_i = \pm 1$, $a_i,b_i \in F^{\bullet}$ (cf. 1.3.12). Desde que, por hipótese, cada $\langle 1,a_i\rangle$ representa $-b_i$ então $\varepsilon_i\langle\langle a_i,b_i\rangle\rangle =$ $= 0$ em $W(F)$, $i = 1,\ldots,n$ (cf. 1.3.7). Isto equivale afirmar que $IW(F)_o = 0$. Um raciocínio análogo mostra que (5) $\Rightarrow$ (2) também no caso de $car(F) = 2$.

4º TEOREMA DE CLASSIFICAÇÃO. Seja F um corpo formalmente real. As segintes afirmações são equivalentes:

(1) Formas quadráticas sobre F são classificadas por dimensão, invavariante de Arf e assinatura total.

(2) $IW(F)_o$ é livre de torsão.

(3) Se uma F-álgebra de quartênios H tem divisor de zero em qualquer fecho real de F então H tem divisor de zero em F.

(4) Se uma F-álgebra de quartênios H tem divisor de zero em $F(\sqrt{w})$, onde $w \in \sigma(F)$, então H tem divizor de zero em F.

(5) Toda forma binária do tipo $\langle 1,a\rangle$ representa qualquer elemento de $\sigma(F)$.

DEMONSTRAÇÃO. Se F é formalmente real então $car(F) \neq 2$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Se $q \in IW(F)_o \cap W_t(F)$ então $q = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle\langle a_i, -w_i \rangle\rangle$ em $W(F)$ com $\varepsilon_i = \pm 1$, $a_i \in F^{\bullet}$ e $w_i \in \sigma(F)$ (cf. 3.4.8). Mas cada $\varepsilon_i \langle\langle a_i, -w_i \rangle\rangle$ tem dimensão 4, invariante de Arf 1 e assinatura total nula. Logo, por hipótese, $\varepsilon_i \langle\langle a_i, -w_i \rangle\rangle \simeq \langle 1,-1,1,-1 \rangle = 0$ em $W(F)$. Portanto $IW(F)_o \cap W_t(F) = 0$ e isto equivale dizer que $IW(F)_o$ é livre de torsão.

(2) $\Rightarrow$ (1). Sejam q_1 e q_2 duas formas quadráticas de mesma dimensão, mesmo invariante de Arf e mesma assinatura total. Desde que q_1 e q_2 tem a mesma dimensão e o mesmo invariante de Arf, então $q = q_1 \perp (-q_2) \in IW(F)_o$ (cf. 2.3.3). Mas q_1 e q_2 tem a mesma assinatura total e isto significa que $q \in W_t(F)$ (cf. 3.4.3). Portanto $q \in IW(F)_o \cap W_t(F) = 0$, ou seja, $q_1 \simeq q_2$. Logo podemos concluir que duas formas quadráticas sobre F com mesma dimensão, mesmo invariante de Arf e mesma assinatura total são isomorfas, desde que $IW(F)_o$ é livre de torsão.

(2) $\Rightarrow$ (3). Se uma F-álgebra de quartênios H tem divisor de zero em todo fecho real de F então sua forma norma é hiperbólica em todo fecho real de F. Mas esta conclusão nos garante que a forma norma de H é de torsão (cf. 3.4.3). Desde que a forma norma de H está em $IW(F)_o$, que é livre de torsão, segue-se que esta é nula em $W(F)$; ou seja, H tem divisor de zero em F.

(3) $\Rightarrow$ (4). Se $w \in \sigma(F)$ segue-se que $F(\sqrt{w})$ está contido em todo fecho real de F, pois um fecho real é real-fechado e todo

todo corpo real-fechado é pytagoreano (cf. 3.1.7). Desde que w é soma de quadrados de F então $w \in F_\alpha^2$, qualquer que seja o fecho real F_α. Se H é uma F-álgebra de quartênios com divisor de zero em $F(\sqrt{w})$ então, pelo que vimos acima, H tem divisor de zero em todo fecho real de F e consequentemente, por hipótese, H tem divisor de zero em F.

(4) $\Rightarrow$ (5). Sejam $a \in F^{\cdot}$ e $w \in \sigma(F) \setminus \{0\}$. Desde que a F-álgebra de quartênios H cuja forma norma é $\langle\langle a,-w \rangle\rangle$ tem divisor de zero em $F(\sqrt{w})$ então, por hipótese, $\langle\langle a,-w \rangle\rangle = 0$ em $W(F)$ (cf. 1.3.7) e consequentemente $\langle\langle a \rangle\rangle \cong w\langle\langle a \rangle\rangle$. Portanto $\langle\langle a \rangle\rangle$ representa w (cf. 1.3.6).

(5) $\Rightarrow$ (2). Se $q \in IW(F)_o \cap W_t(F)$ então $q = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle\langle a_i,-w_i \rangle\rangle$ em $W(F)$ onde $\varepsilon_i = \pm 1$, $a_i \in F^{\cdot}$ e $w_i \in \sigma(F)$ (cf. 3.4.8). Mas, $\langle 1,a_i \rangle$ representa w_i, ou seja $\langle\langle a_i,-w_i \rangle\rangle = 0$ em $W(F)$, $i = 1,\ldots,n$ (cf. 1.3.7). Logo $IW(F)_o \cap W_t(F) = 0$, isto é, $IW(F)_o$ é livre torsão.

5º TEOREMA DE CLASSIFICAÇÃO. Seja F um corpo. As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) Formas quadráticas se classificam por dimensão, invariante de Arf e invariante de Witt.

(2) $I^2W(F)_o = 0$.

(3) Toda F-álgebra de Cayley tem divisor de zero em F.

(4) Se H é uma F-álgebra de quartênios então sua forma norma é universal.

DEMONSTRAÇÃO.

(1) $\Rightarrow$ (2). Se car(F) $\neq 2$ e $q \in I^2W(F)_o$, então $q = \perp_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle\langle a_i, b_i, c_i\rangle\rangle$ em W(F) com $\varepsilon_i = \pm 1$, $a_i, b_i, c_i \in F^{\cdot}$. Desde que as formas quadráticas $\langle\langle a_i, b_i, c_i\rangle\rangle$ e $\langle 1,-1,1,-1,1,-1,1,-1\rangle$ $i=1,\ldots, n$ tem a mesma dimesão, o mesmo invariante de Arf e o mesmo invariante de Witt, elas são isométricas. Portanto podemos concluir que $I^2W(F)_o = 0$. Se car(F) $= 2$ e $q \in I^2W(F)_o$ então $q = \perp_{i=1}^{n} d_i q_i$ em W(F) onde cada $q_i = \langle\langle a_i, b_i, c_i]]$, $d_i, a_i, c_i \in F^{\cdot}$ e $c_i \in F$. Pelo mesmo argumento citado no caso de car(F) $\neq 2$, podemos afirmar que $I^2W(F)_o = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Independentemente da característica do corpo F, se q_1 e q_2 são duas formas quadráticas sobre F de mesma dimensão e mesmo invariante de Arf, então $q = q_1 \perp (-q_2) \in IW(F)_o$, (cf. 2.3.3). Se além disso q_1 e q_2 tem o mesmo invariante de Witt então $q \in I^2W(F)_o = 0$ (cf. 2.3.6), ou seja, $q_1 \simeq q_2$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Se C é uma F-álgebra de Cayley então sua forma norma está em $I^2W(F)_o = 0$, ou seja, a forma norma de C é isotrópica e isto equivale dizer que C tem divisor de zero em F.

(3) $\Rightarrow$ (4). Sejam H uma álgebra de quartênios com forma norma

$\langle\langle b,a\rangle\rangle$ (resp. $\langle\langle b,a]]$) se $car(F) = 2$) e $c \in F^{\bullet}$. Desde que $\langle\langle -c,b,a\rangle\rangle$ (resp. $\langle\langle c,b,a]]$ se $car(F) = 2$) é isotrópica, então $\langle\langle b,a\rangle\rangle$ (resp. $\langle\langle b,a]]$ se $car(F) = 2$) representa C (cf. 1.3.6). Logo a forma norma de H é universal.

(4) $\Rightarrow$ (2). Para mostrar que $I^2W(F)_o = 0$ é suficiente mostrar que toda 3-forma de Pfister é isotrópica. Seja $q = \langle\langle a,b,c\rangle\rangle$ (resp. $\langle\langle a,b,c]]$ se $car(F) = 2$) uma 3-forma de Pfister. Desde que $\langle\langle b,c\rangle\rangle$ (resp. $\langle\langle b,c]]$) representa $-c$, então $\langle\langle a,b,c\rangle\rangle$ (resp. $\langle\langle a,b,c]]$) é isotrópica (cf. 1.3.6).

6º TEOREMA DE CLASSIFICAÇÃO. Seja F um corpo formalmente real. As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) Formas quadráticas sobre F são classificadas por dimensão, invariante de Arf, invariante de Witt e assinatura total.

(2) $I^2W(F)_o$ é livre de torsão.

(3) Se uma F-álgebra de Cayley C tem divisor de zero em qualquer fecho real de F então C tem divisor de zero em F.

(4) Se uma F-álgebra de Cayley C tem divisor de zero em $F(\sqrt{w})$, onde $w \in \sigma(F)$, então C tem divisor de zero em F.

(5) Toda forma quadrática do tipo $\langle\langle a,-w\rangle\rangle$, onde $a \in F^{\bullet}$ e $w \in \sigma(F)$, é universal.

DEMONSTRAÇÃO. Se F é formalmente real então $car(F) \neq 2$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Se $q \in I^2W(F)_o$ então existe um inteiro positivo r tal que $q \perp r\mathbb{H} \simeq \perp_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle\langle a_i, b_i, c_i \rangle\rangle$. Assim temos: $\dim q = 8n - 2r$, $\Delta(q) = (-1)^r$, $w(q) = 1$. Se além disto q é de torsão, então $sig_\alpha(q) = 0$, $\forall\alpha$ ordem de F. Desde que os invariantes supra citados classificam todas as formas quadráticas sobre F, concluimos que $q \simeq (4n-r)\mathbb{H} = 0$ em $W(F)$, ou seja, $I^2W(F)_o$ é livre de torsão.

(2) $\Rightarrow$ (1). Se q_1 e q_2 são duas formas quadráticas sobre F tais que $\dim q_1 = \dim q_2$, $\Delta(q_1) = \Delta(q_2)$, $w(q_1) = w(q_2)$ e $sig_\alpha(q_1) = sig_\alpha(q_2)$ qualquer que seja a ordem α de F; então $q = q_1 \perp (-q_2) \in I^2W(F)_o \cap W_t(F) = 0$ (cf. 3.4.3). Assim $q_1 \simeq q_2$ e portanto dimensão, invariante de Arf, invariante de Witt e assinatura total classificam todas as formas quadráticas sobre F.

(2) $\Rightarrow$ (3). Sejam C uma F-álgebra de Cayley e $\langle\langle a,b,c \rangle\rangle$ sua norma forma. Desde que $\langle\langle a,b,c \rangle\rangle$ é isotrópica sobre qualquer fecho real de F, então $\langle\langle a,b,c \rangle\rangle \in I^2W(F)_o \cap W_t(F) = 0$ (cf. 3.4.3). Portanto C contém divisor de zero em F.

(3) $\Rightarrow$ (4). Se $w \in \sigma(F)$ então $F(\sqrt{w})$ está contido em todo fecho real de F, pelo mesmo argumento mencionado em (3) $\Rightarrow$ (4) do 4º Teorema de classificação. Logo a demonstração é imediata.

(4) $\Rightarrow$ (5). Se $a,b \in F^{\cdot}$ e $w \in \sigma(F)$ então a F-álgebra de Cayley

cuja forma norma é $\langle\langle a,-w,-b\rangle\rangle$, por hipótese, é isotrópica sobre F. Consequentemente $\langle\langle a,-w\rangle\rangle$ representa b (cf.1.3.6), ou sejam dados $a \in F^{\bullet}$ e $w \in \sigma(F)$, a forma quadrática $\langle\langle a,-w\rangle\rangle$ é universal.

(5) $\Rightarrow$ (2). Se q é uma 3-forma de Pfister de torsão tal que $2\cdot q = 0$ em $W(F)$ então $q \simeq \langle\langle a,b,-w\rangle\rangle$ com $a,b \in F^{\bullet}$ e $w \in \sigma(F)$ (cf. 3.5.2). Desde que $\langle\langle a,b\rangle\rangle$ representa por hipótese, w; segue-se que $q = 0$ em $W(F)$ (cf.1.3.6). Disto concluimos que não existe 3-forma de Pfister de torsão sobre F (cf.3.5.3). Mostremos que $I^2W(F)_o$ é livre de torsão. Admitamos a existência de um corpo L que não tenha 3-forma de Pfister de torsão e que $I^2W(L)_o$ não seja livre de torsão. Dentre tais corpos escolhamos L_o de tal modo a existir $0 \neq q \in I^2W(L_o)_o$ com $2\cdot q = 0$ e dim q seja mínima. Assim $q \simeq \perp_{i=1}^{n} \langle a_i\rangle\langle\langle -w_i\rangle\rangle$ com $a_i \in L_o$ e $w_i \in \sigma(L_o)$ (cf. 3.4.5). Desde que sobre $L_o(\sqrt{w_1})$ não existe 3 forma de Pfister de torsão (cf. 3.5.14) então $q = 0$ em $W(L_o(\sqrt{w_1}))$ pela minimalidade de dim q. Portanto $q \simeq \langle\langle -w_1\rangle\rangle q' \in \langle\langle -w_1\rangle\rangle I^2L_o = 0$ (cf. 3.3.6) contradizendo nossa hipótese sobre q. Logo não existe tal corpo L_o, ou seja, $I^2W(F)_o$ é livre de torsão, pois $W_t(F)$ é um grupo 2-primário (cf. 3.3.7 , 3.3.4).

EXEMPLOS

Neste final de capítulo nos dedicaremos a apresentar alguns exemplos de corpos que satisfazem as propriedades equivalentes listadas nos vários teoremas de classificação acima demonstrados. A maior parte desses exemplos, contudo, tem a sua existência justificada por outros teoremas, os quais enunciaremos abaixo, sem demonstração.

O 1º Teorema de Classificação tem como exemplos qualquer corpo F quadraticamente fechado, se car(F) $\neq$ 2 e o fecho quadratico separável de todo corpo de característica 2.

Se F é um corpo real fechado (os reais, por exemplo) e $K = F((t_1)),\dots,((t_n))$ então tanto F como K são pytagoreanos (cf. [6], Prop. 3.9, ch. 8) e portanto satisfazem as afirmações do 2º Teorema de Classificação.

DEFINIÇÃO 1. Sejam F um corpo e d,i inteiros positivos. Dizemos que F é $C_i(d)$ se todo polinômio homogêneo de grau d com coeficientes em F em n variáveis ($n > d^i$) tem um zero não trivial em F.

DEFINIÇÃO 2. Sejam F um corpo e i um inteiro não negativo. Se F é $C_i(d)$ para todo inteiro positivo d, dizemos simplesmente que F é C_i.

TEOREMA 3 ([4], Th. 3.5). Se F é um corpo C_i então qualquer extensão algébrica de F também o é.

TEOREMA 4 ([4], Th. 3.6). Se F é um corpo C_i e E é uma extensão de F com grau de transcedência j então E é C_{i+j}.

Se F é um corpo algebricamente fechado então F é C_o. Consequentemente $F(X)$ e suas extensões algébricas são corpos que satisfazem o 3º Teorema de classificação.

TEOREMA 5 ([4], Th. 4.8). Sejam F um corpo C_i e $F((t))$ o corpo das séries formais em uma variável t sobre F. Então $F((t))$ é C_{i+1}.

Assim, se F é um corpo algebricamente fechado, então $F((t))$ também é um exemplo para o 3º Teorema de Classificação.

TEOREMA 6 ([4], Cor. 2.11). Seja F um corpo tal que toda forma quadrática de dimensão maior ou igual a 2^n sobre $K = F(\sqrt{-1})$ seja isotrópica. Então $I^{2n-2}W(F)_o$ é livre de torsão se $n \geq 2$ e $IW(F)_o$ é livre de torsão se $n = 1$. Além disso se F é não formalmente real então $I^nW(F)_o = 0$. Em particular, este resultado se aplica a todo corpo cujo grau de transcedência sobre $\mathbb{R}$ seja n.

Assim $\mathbb{R}(x)$ e $\mathbb{R}(x,y)$ são corpos que satisfazem as afirmações, respectivamente, do 4º e 6º Teoremas de Classificação.

TEOREMA 7 ([6],th.2.2,ch.6). Se F é um corpo p-ádico então toda forma quadrática de dimensão 5 é isotrópica.

A afirmação deste teorema equivale a dizer que toda forma quadrática de dimensão 4 é universal. Em particular, formas quadráticas do tipo $\langle\langle a,b\rangle\rangle$ são universais. Assim, o corpo dos racionais p-ádicos $\mathbb{Q}_p$ para qualquer primo p, exemplifica o 5º Teorema de Classificação.

Se F é um corpo algebricamente fechado então $F((t_1))((t_2))$ satisfaz as afirmações do 5º Teorema de Classificação.

TEOREMA 8 ([6], Cor. 3.2, Ch. 6). Se F é um corpo global então as formas quadráticas sobre F são classificadas por dimensão, invarainte de Arf, invariante de Witt e assinatura total.

Podemos ver, de imediato, que todo corpo global satisfaz o 6º Teorema de Classificação.

Finalmente podemos observar que corpos que satisfazem o 1º Teorema de Classificação satisfazem o 3º e os que verificam o 3º também verificam o 5º. A mesma observação pode ser feita para os teoremas 2, 4 e 6, nesta ordem.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALBERTO, A.A.; Structure Algebras, Colloq. Publ. vol. 24, Amer. Math. Soc. Providence (1939).

[2] BAEZA, R.; Quadratics Forms Over Semi-Local Rings, Lecture Notes in Mathematics (1978).

[3] FELZENSZWALB, B.; Álgebras de Dimensão Finita, IMPA, Rio de Janeiro (1979).

[4] GREEMBERG, M.J.; Lecture on Forms in Many Variables, Benjamin, New York (1969).

[5] LAM, T.Y.; ELMAN, R.; Classifications Theorems for Quadratic Forms over Fields, Comm. Math. Helv. 49 (1973), 373-381.

[6] LAM, T.Y.; The Algebraic Theory of Quadratic Forms, Benjamin, New York (1973).

[7] KNEBUSH, M.; On the Uniqueness and the Existence of Real Places, Comm. Math. Helv. 47 (1972), 260-269.

[8] MERKURIEV, A.S.; On the Norm Residue Symbol of Degree 2, Soviet Math. Dokl, 24 (1981), 546-551.

[9] MILNOR, J.; Algebraic K-Theory and Quadratic Forms, Invent. Math. 9 (1970), 318-344.

[10] MILNOR, J.; Symmetric inner Products in Characteristic 2, Propesc. in Math. Annals Stady 70, Princeton Univ. Press (1971)

[11] PFISTER, A.; Quadratische Formen in Biliebigen Körpen, Invent. Math. 1 (1966), 116-132.

[12] SAH, C.H.; Symmetric Bilinear Forms and Quadratic Forms, Journal of Algebra, 20 (1972), 144-160.