Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica - IMECC
Departamento de Matemática

O problema de Cauchy para a equação de Korteweg-de Vries

Dissertação de Mestrado

Roger Peres de Moura

Orientador: Prof.ª Doutora Hebe de Azevedo Biagioni
Co-orientador: Prof. Doutor Jaime Angulo Pava

Campinas

Março, 2001

O PROBLEMA DE CAUCHY PARA A EQUAÇÃO DE KORTEWEG-DE VRIES

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Roger Peres de Moura e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 09 de março de 2001

Hebe de Azevedo Biagioni

Profrª Dra. Hebe de Azevedo Biagioni
Orientadora

Banca Examinadora:

1. Hebe de Azevedo Biagioni
2. Márcia Assumpção Guimarães Scialom
3. Wagner Vieira dos Santos Leite

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

Dissertação de Mestrado defendida em 09 de março de 2001 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Hebe de Azevedo Biagioni

Prof (a). Dr (a). HEBE DE AZEVEDO BIAGIONI

Prof (a). Dr (a). WAGNER VIEIRA LEITE NUNES

Márcia Scialom

Prof (a). Dr (a). MÁRCIA ASSUMPÇÃO GUIMARÃES SCIALOM

À memória de meus pais
Cinéas Peres da Silva
e Maria dos Anjos Moura Campelo

Resumo

Este trabalho tem como principal objetivo estudar o problema de Cauchy para a equação de Korteweg-de Vries, popularmente conhecida como KdV. Primeiramente apresentamos de maneira sucinta os resultados básicos da Análise necessários ao desenvolvimento e à compreensão da teoria que nos propomos a estudar. Em seguida (onde concentra-se a maior parte da dissertação), analisamos existência, unicidade, regularidade e dependência contínua de solução, com dado inicial em espaços de Sobolev de ordem inteira. Analisamos também a mesma equação com termos dissipativos. Finalizamos a dissertação apresentando um melhoramento dos resultados de dependência contínua e demonstrando que não se perde suavidade quando se resolve o PVI para a KdV com valor inicial em determinados espaços de Sobolev de ordem não inteira. Para isso utilizamos um teorema de interpolação não linear.

Abstract

In this work we study some developments of the Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation (KdV). First of all, some basic results, which allow us to develop and comprehend the theory that we study, are briefly presented. Existence, uniqueness, regularity and continuous dependence results are established for the pure initial-value problem (IVP) posed on the real line. The same equation with dissipative term added is also analyzed. We finish with an extension of the continuous dependence results and the relation of the smoothness of initial data to the smoothness of the solution in fractional order Sobolev spaces. Here we use a non-linear interpolation theorem.

Sumário

INTRODUÇÃO

A equação de Korteweg- de Vries (nome em homenagem a seus idealizadores),

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{1}$$

mais conhecida pela sigla KdV, presente em praticamente toda nossa discussão nesse trabalho, foi deduzida pelos matemáticos D. J. Korteweg e G. de Vries no final do século XIX, como um modelo para ondas longas se propagando em um canal. Por muitas décadas essa equação ficou esquecida. Só então na década de 60 do século passado, um grupo de pesquisadores do Plasma Physics Laboratory da Universidade de Princeton se interessou por tal equação, motivados pelo fato de que ela parecia modelar o comportamento de ondas não só em meio aquático, mas também em outros fluidos e serviria em um primeiro momento para investigar o comportamento de ondas de direção indefinida em meio dispersivo não-linear. Desde então, muitos artigos sobre a equação (1) têm sido publicados. As suspeitas do grupo de Princeton foram aos poucos se confirmando: A equação (1) bem como suas variantes, por exemplo, a KdV modificada

$$u_t + u^2 u_x + u_{xxx} = 0, \tag{2}$$

o PVI (13), ou (1) adicionada de um termo dispersivo, de fato modelam propagação de ondas em diversos sistemas físicos. Muitos modelos hiperbólicos podem ser reduzidos a (13).

Em 1975, J.L. Bona e R. Smith publicaram o artigo [3] no qual provaram que o PVI para a equação (1) com valor inicial g em $H^s = H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 2$ inteiro (vide Seção 1.4), é globalmente bem posto (i.e., existe solução única, que depende continuamente do dado inicial, e também possui a propriedade de persistência). Esse teorema foi um marco no desenvolvimento de ferramentas para se estudar (1). Para estabelecê-lo, eles procederam da seguinte forma: Primeiro, através de uma mudança de variável, transformaram (1) em sua forma equivalente e mais simples

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{3}$$

Depois consideraram o PVI regularizado (adiciona-se a (3) o termo $-\epsilon u_{xxt}$)

$$u_t + uu_x + u_{xxx} - \epsilon u_{xxt} = 0, \quad u(x,0) = g_\epsilon(x) \tag{4}$$

(onde o dado inicial g_ϵ é a regularização de g) e novamente, por uma mudança de variáveis, o transformaram no PVI alternativo (13), para o qual já se sabia ser localmente bem posto, no sentido descrito acima (veja [1]), mas com algumas restrições. Então J. Bona e R. Smith conseguiram provar que existe uma única solução para o PVI regularizado (4) e que o mesmo é bem posto. Faltava então estender esse resultado para o problema de Cauchy associado à KdV.

Após isso, visando estender o resultado de que falávamos acima, passaram à obtenção de algumas estimativas *a priori* para (4), e então, através de uma sequência de lemas e proposições, demonstraram que a solução u_ϵ correspondente a (4) é de Cauchy em relação a ϵ e portanto, converge a uma função $u(x,t)$ quando $\epsilon \downarrow 0$, que por sua vez é solução global do PVI para (3) com valor inicial g em H^s. Finalmente, sabendo que $g_\epsilon \to g$ em H^s quando $\epsilon \downarrow 0$, $s \geq 3$, conseguiram provar que o problema é localmente bem posto para o caso $s \geq 3$. Usando depois as quantidades conservadas associadas à KdV, demonstraram que o problema é globalmente (em relação ao tempo) bem posto, mas ainda para $s \geq 3$.

Na sequência, passaram a demonstrar os resultados de dependência contínua, culminando com um resultado associado à equação (13) o qual diz que para valores iniciais $g \in H^k$, $k \geq 1$ inteiro, existe uma única solução u de (13) em $\mathcal{H}_T^k(= C(0,T;H^k))$ (veja Definição 1.4.1) $T > 0$ finito, e que tal solução depende continuamente em $\mathcal{H}_T^k$ de g. Tal teorema é mais forte que o demonstrado por Benjamin *et al.* (veja [1], Teorema 1, pág. 62).

Em seguida, examinaram o quanto se relacionam os respectivos PVI's para (1) e (13). Chegaram à conclusão de que os dois modelos, munidos do mesmo valor inicial, sob certas limitações, posssuem a mesma solução, sobre um intervalo de tempo finito. Já com todo o aparato necessário, investigaram as equações (1) e (13) com termos dissipativos, a saber:

$$u_t + u_x + uu_x - \alpha u_{xx} + u_{xxx} = 0 \tag{5}$$

e

$$u_t + u_x + uu_x - \alpha u_{xx} - u_{xxt} = 0, \tag{6}$$

onde $\alpha \geq 0$. Provou-se por exemplo que, com dado inicial $g \in H^m$ $(m \geq 2)$, existe uma única solução $u \in \mathcal{X}_{m,\infty}$ para (5) e que u depende continuamente de $g \in H^m$, e na sequência finalmente conseguiram a demonstração completa do teorema de boa colocação global da KdV em H^2.

Teoremas cada vez mais fortes rapidamente foram surgindo. No mesmo ano (1975), J. C. Saut (veja [19]), através de um teorema de interpolação de Tartar (ver [22]) demonstrou o teorema referido acima para o PVI associado à KdV, com valor inicial g em H^k para $k \geq 2$ não necessariamente inteiro. Ele demonstrou que se $r > 3$, $\mu[r] + 1 - r$ ($[r]$ é o maior inteiro menor que r e $g \in H^{r+\frac{3}{2}\mu+\epsilon}$ para algum $\epsilon > 0$, então para cada $T > 0$, $u \in L^\infty(0,T;H^r)$. Para o caso $2 < r < 3$, ele mostrou que se $g \in H^{r+\frac{1}{2}\mu}$, então para cada $T > 0$, u está em $L^\infty(0,T;H^r)$. Daí, ficou-se com a impressão de que se perde regularidade em resolver (3.1) com valor inicial em espaços de Sobolev de ordem não inteira. No ano seguinte (1976), J. Bona e R. Scott chegaram a uma resposta precisa: Baseando-se em [2] demonstraram que isto não acontece, mais precisamente, provaram que para valores iniciais em H^s, $s \geq 2$, a solução para (3.1) pertence a $C(0,T;H^s)(= \mathcal{H}_T^s)$ para todo $T > 0$. Também demonstraram que a solução depende continuamente do dado inicial no seguinte sentido: para todo $T > 0$ e $s \geq 2$, a aplicação $g \mapsto u$ de H^s em $C(0,T;H^s)$ é contínua. Assim o PVI para (3.1) é classicamente bem posto em qualquer espaço de Sobolev H^s, $s \geq 2$.

Ainda na mesma década, além do problema de Cauchy para (1), as atenções voltaram-se também para o PVI generalizado

$$\begin{cases} u_t + u_x + a(u)u_x + u_{xxx} = 0, \\ u(x,0) = g(x) \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

onde a é uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, com $a(0) = 0$, por exemplo $a(u) = u^k$, $k \geq 1$ inteiro. Passamos agora a citar algumas publicações nesse sentido.

Tosio Kato em 1979 publicou [11] onde, baseado na teoria de equações de evolução quasilineares de sua própria autoria (veja [10]), demonstrou que existe uma única solução u para o PVI generalizado (7), com $g \in H^s$ ($s > \frac{3}{2}$) tal que $u(\cdot, t)$ também pertence a H^s para cada $t > 0$ em um intervalo de tempo finito. Ele também demonstrou que u depende continuamente de g. Ficou então estabelecido que o problema é localmente bem posto. Se é globalmente bem posto ou não ficou em aberto. Mais tarde, em 1983 (confira [9]), ele volta a analisar se os PVI's para (1) e (7), com $s > \frac{3}{2}$, são bem postos no seguinte sentido: *Considere um problema de Cauchy arbitrário*

$$u_t = f(u), \quad t > 0, \quad u(0) = g. \tag{8}$$

Suponha que existem dois espaços de Banach $Y \hookrightarrow X$ (onde $\hookrightarrow$ significa que a inclusão é contínua), tal que $f : Y \to X$ é contínua. Suponha que para cada $g \in Y$ existam, $T > 0$ real e uma única função

$$u \in C(0,T;Y)$$

(portanto, $u_t \in C(0,T;X)$) satisfazendo (8) para $t \in (0,T]$. Além disso, suponhamos que a aplicação $g \mapsto u$ de Y em $C(0,T;Y)$ é contínua. Se essas hipóteses são verificadas, dizemos que (8) é localmente bem posto em Y. Se T for arbitrário, dizemos que o problema é globalmente bem posto em Y. Mas T. Kato não conseguira demonstrar que o PVI associado à KdV é globalmente bem posto em H^s, com $s > \frac{3}{2}$. Finalmente em 1991, C. E. Kenig, G. Ponce e L. Vega (veja [13]), usando técnicas de análise harmônica, solucionaram esse problema. Mais ainda, eles conseguiram demonstrar que o PVI é localmente bem posto em H^s com $s > \frac{3}{4}$ e consequentemente, globalmente bem posto em H^s, para $s \geq 1$.

A cada ano surgem novas técnicas de investigação do problema de Cauchy relacionado a equações de evolução não lineares do tipo dispersivo, aplicáveis portanto à equação KdV. Nesse sentido, muito contribuiu as técnicas desenvolvidas por J. Bourgain no artigo [4] onde, para estudar problemas como os PVI's para a equação de Schrödinger não linear periódica em relação a x

$$\begin{cases} iu_t + \triangle_x u + u|u|^{p-2} = 0 \quad (p \geq 3) \\ u(x,0) = g(x) \end{cases} \tag{9}$$

e para a KdV

$$\begin{cases} u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \\ u(x,0) = g(x), \end{cases} \tag{10}$$

respectivamente, Bourgain desenvolveu um método de análise harmônica. Ele aplicou o argumento do ponto fixo à equação integral

$$u(t) = W(t)g - \int_0^t W(t-\tau)w(\tau)d\tau, \tag{11}$$

onde

$$W(t) = \exp\left(-t\partial_x^3\right) \quad \text{e} \quad w = uu_x = \frac{1}{2}(u^2)_x, \tag{12}$$

e demonstrou que o problema (10) é localmente bem posto em $L^2(I\!R)$. Devido à lei de conservação

$$I_0(u) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx$$

o resultado estende-se globalmente, ou seja, garante soluções globais em $L^2(I\!R)$. O resultado local foi obtido pelo teorema do ponto fixo de Banach, verificando uma propriedade de contração para a tranformação associada a (11) em um espaço apropriado, principalmente utilizando análise de Fourier. Estava portanto garantido que o PVI (10) com $g \in H^s$ $(s \geq 0)$ é globalmente bem posto em $L^2 = L^2(I\!R)$.

No ano de 1996, valendo-se pricipalmente das técnicas de J. Bourgain ([4]), C. E. Kenig, G. Ponce e L. Vega, em [12] analisaram o quanto o PVI (10) com $g \in H^{-s}(I\!R)$ $(s \geq 0)$ é bem posto. O principal resultado obtido foi que (10) é localmente bem posto em $H^{-s}(I\!R)$, para $s < \frac{3}{4}$.

Nosso trabalho tem como foco central apresentar os métodos desenvolvidos por J. Bona e R. Smith, publicados em [3], para a investigação da KdV. Também apresentamos um importante teorema de interpolação atribuido a L. Tartar e empregado por J. Bona e R. Scott para investigar regularidade da solução da KdV, e dependência contínua em relação ao dado inicial. No primeiro capítulo fazemos uma breve exposição de resultados básicos da Análise necessários à compreensão e ao desenvolvimento da teoria a ser apresentada: Enunciamos o conhecido Teorema do Ponto Fixo de Banach, empregado na Seção 2.1 quando demonstramos o teorema de existência e unicidade de solução para o PVI

$$\begin{cases} u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0, \\ u(x,0) = g(x) \end{cases} \tag{13}$$

(onde $g \in H^1(I\!R) \bigcap C^2(I\!R)$) proposto por Benjamin *et al.* em [1]. Nas duas seções seguintes apresentamos um resumo sobre transformadas de Fourier em $L^1(I\!R^n)$, no espaço de Schuartz $\mathcal{S}(I\!R^n)$, em $L^2(I\!R^n)$ e sobre Distribuições. Finalizamos o Capítulo 1 com as definições dos Espaços de Sobolev de ordem inteira e reais, respectivamente, bem como as propriedades de que necessitamos. O Capítulo 2 é um estudo do artigo [3] e portanto optamos por preservar o roteiro desenvolvido pelos autores do mesmo, já descrito acima. No terceiro e último capítulo, dividido em duas seções, fazemos na primeira um resumo da teoria de **interpolação não linear** necessária à demonstração do teorema de Tartar que nos referimos acima, e sua respectiva demonstração; a segunda seção é a aplicação desse teorema à equação KdV, mais precisamente, generalizamos um pouco mais os resultados de dependência contínua apresentados no Capítulo 2; generalização no seguinte sentido: no Capítulo 2, os resultados de dependência contínua se referem à solução do problema de Cauchy para a KdV com dado inicial em H^s, $s \geq 2$ inteiro, enquanto que no Capítulo 3 o mesmo resultado é assegurado para o problema com dado inicial em H^s com $s \geq 2$ real. (A existência e unicidade de solução para esse caso foi demonstrada por J. C. Saut [19], como citamos anteriormente.) Eis o teorema a ser demosntrado:

TEOREMA 0.0.1 . *Sejam $T > 0$ e $s \geq 2$. Então a aplicação $U : H^s \to C(0,T;H^s)$, que a cada $g \in H^s$ associa a única solução u, é contínua. Além disso, se $g \in H^s$, existe uma função contínua não decrescente $C_{s,T} : I\!R^+ \to I\!R^+$ tal que*

$$||u||_{C(0,T;H^s)} \leq C_{s,T}(||g||_{[s]})||g||_s, \tag{14}$$

onde $[s]$ é o maior inteiro menor que s.

Capítulo 1

PRELIMINARES

Esta parte objetiva apresentar a teoria básica necessária ao desenvolvimento de nossos propósitos nos capítulos posteriores. A título de economia, algumas demonstrações serão omitidas, mas indicamos onde encontrá-las.

1.1 Alguns teoremas fundamentais.

Começamos recordando o teorema do ponto fixo de Banach para contrações e as desigualdades de Gronwall, cujas demonstrações são simples mas são ferramentas de grande valia.

Seja M um espaço métrico completo.

DEFINIÇÃO 1.1.1 *Uma aplicação $T : M \to M$ é denominada contração se existe $k, 0 \leq k < 1$, tal que dados $x, y \in M$, então*

$$\| T(x) - T(y) \| \leq k \| x - y \|.$$

TEOREMA 1.1.2 **(ponto fixo de Banach.)** *Toda contração definida e com valores num espaço métrico completo possui um único ponto fixo.*

Demonstração. Ver lema na pág. 338 de [20]. □

TEOREMA 1.1.3 **(da Convergência Dominada).** *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções integráveis que converge pontualmente a um função f. Suponhamos que exista uma função integrável g tal que, $|f_n| \leq |g|$ $\forall n$. Então f é integrável e*

$$\int_{\mathbb{R}} f dx = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n dx.$$

A proposição a seguir têm como objetivo responder à seguinte questão: Dada a função

$$F(t) = \int_{I\!R} f(x,t)dx, \tag{1.1}$$

quando f será contínua ou integrável, como função de t?

PROPOSIÇÃO 1.1.4 . *Seja $f : I\!R \times [0,\infty) \to I\!R$ tal que:*
(a) A função $x \mapsto f(x,t)$ é limitada, para cada $t \in [0,\infty)$;
(b) a função $t \mapsto f(x,t)$ é contínua, para cada $x \in I\!R$;
(c) existe $g \in L^1(I\!R)$ tal que, $|f(x,t)| \leq |g(x)|$ $\forall x \in I\!R$ e todo $t \in [0,\infty)$.
Então a função $F : [0,\infty) \to I\!R$ definida em (1.1) é contínua. Se
(a') a função $x \mapsto f(x,t)$ é integrável, para cada $t \in [0,\infty)$;
(b') a função $t \mapsto f(x,t)$ é derivável, para cada $x \in I\!R$;
(c') existe $g \in L^1(I\!R)$ tal que, $|\frac{\partial}{\partial t}(f(x,t))| \leq |g(x)|$ $\forall x \in I\!R$ e todo $t \in [0,\infty)$;
então a função $F : [0,\infty) \to I\!R$ definida em (1.1) é derivável e

$$F'(t) = \int_{I\!R} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx. \tag{1.2}$$

O Teorema da Convergência Dominada e a Proposição 1.1.4, bem como suas respectivas demonstrações, podem ser encontrados na maioria dos livros de Teoria da Medida.

PROPOSIÇÃO 1.1.5 **(desigualdades de Gronwall)** .
Seja $t \in [a,b]$. Se

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t K(s)u(s)ds$$

com u, α, K contínuas em $[a,b]$ e $K > 0$, então

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t K(s)\alpha(s)\exp\left(\int_a^s K(\tau)d\tau\right)ds.$$

Caso particular ($\alpha(t) = \alpha$ constante):

$$u(t) \leq \alpha \exp\left(\int_0^t K(\tau)d\tau\right).$$

Demonstração. Seja $v(t) = \int_0^t K(s)u(s)ds$. Então

$$u(t) \leq \alpha(t) + v(t), \tag{1.3}$$

e derivando v, como $k > 0$ e por (1.3), obtemos

$$\dot{v}(t) - K(t)v(t) \leq K(t)\alpha(t). \tag{1.4}$$

Multiplicando os dois lados da desigualdade acima por $\exp\left(-\int_0^t K(\tau)d\tau\right)$ obtemos,

$$\frac{d}{dt}\left[v(t)\exp\left(-\int_a^t K(\tau)d\tau\right)\right] \leq K(t)\alpha(t)\exp\left(-\int_a^t K(\tau)d\tau\right). \tag{1.5}$$

Integrando ambos os lados de a a t , segue-se que (observe que $v(0) = 0$)

$$v(t) \leq \int_a^t K(s)\alpha(s)\exp\left(\int_s^t K(\tau)d\tau\right)ds. \tag{1.6}$$

Assim, substituindo (1.6) em (1.3) obtemos o resultado. □

O teorema a seguir e seu corolário são muito importantes. Utilizá-los-emos várias vezes nas demonstrações dos resultados do Capítulo 2.

TEOREMA 1.1.6 . *Seja $\Omega \subseteq I\!R^2$ aberto conexo. Considere a equação*

$$\dot{u} = f(t, u)$$

com existência e unicidade de solução. Seja $v(t)$ uma solução da desigualdade

$$\frac{d^+}{dt}v(t) \leq f(t, v(t)), \tag{1.7}$$

isto é, $v(t)$ é contínua, possui derivada à direita e satisfaz à desigualdade acima. Então: $v(a) \leq u(a) \Rightarrow v(t) \leq u(t)$ para todo $t \geq a$ no intervalo de definição.

Demonstração. Considere a sequência de funções satisfazendo, para cada $n \in I\!N$,

$$\begin{cases} \dot{u}_n = f(t, u_n) + \frac{1}{n} \\ u_n(a) = u(a) \end{cases}$$

Temos que $u_n \to u$ uniformemente em $[a, b]$, ou seja, se u estiver definida em um intervalo $[a, b]$ então, para n grande, u_n também está definida em $[a, b]$ e converge uniformemente para u nesse intervalo.

Mostremos que $v(t) \leq u_n(t)$ para n grande. Suponha por absurdo que existe t_1 tal que $v(t_1) > u_n(t_1)$ e seja ainda $t_2 < t_1$ tal que

$$v(t) > u_n(t) \text{ para } t \in (t_2, t_1),\ v(t_2) = u_n(t_2).$$

Então

$$v(t) - v(t_2) > u_n(t) - u_n(t_2),\ t \in (t_2, t_1).$$

Logo, (divida por $t - t_2 > 0$ e faça $t \longrightarrow t_2^+$)

$$\tfrac{d^+}{dt}v(t_2) \leq \dot{u}_n(t_2) = f(t_2, u_n(t_2)) + \tfrac{1}{n} = f(t_2, v(t_2)) + \tfrac{1}{n} > f(t_2, v(t_2)),$$

daí obtemos:

$$\tfrac{d^+}{dt}v(t_2) > f(t_2, v(t_2))$$

e isto contradiz a hipótese. Portanto, $v(t) \leq u_n(t)$ para n grande. Já que $u_n \longrightarrow u$, o teorema está provado. $\square$

COROLÁRIO 1.1.7 . *Seja $v \in C^1[a,b]$ e $\dot{v}(t) \leq \beta v(t) + \alpha$, α e β constantes, onde $\beta \neq 0$. Então*

$$v(t) \leq (v(a) + \tfrac{\alpha}{\beta})e^{\beta(t-a)} - \tfrac{\alpha}{\beta}.$$

Demonstração. Considere o PVI (problema de valor inicial)

$$\begin{cases} \dot{u} = \beta u + \alpha \\ u(t_0) = v(t_0) \end{cases}$$

e aplique o Teorema 1.1.6. $\square$

1.2 A transformada de Fourier.

Temos como propósito nesta seção apresentar alguns resultados básicos da transformada de Fourier . Começamos definindo-a para funções em $L^1(I\!R^n)$.

Notação. Vamos denotar $L^p(I\!R^n)$ simplesmente por L^p.

DEFINIÇÃO 1.2.1 . *Dada uma função $f \in L^1$, a tranformada de Fourier de f, denotada por $\mathcal{F}f = \widehat{f}$, é definida pela fórmula,*

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{I\!R^n} f(x)e^{-2\pi i\xi\cdot x}dx, \quad \xi \in I\!R^n. \tag{1.8}$$

OBSERVAÇÃO 1 . *Por meio de uma simples mudança de variáveis ($y = 2\pi x$) podemos definir $\mathcal{F}$ como*

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{I\!R^n} f(x)e^{-i\xi\cdot x}dx, \quad \xi \in I\!R^n, \tag{1.9}$$

que é equivalente a (1.8).

Agora passemos a algumas propriedades:

PROPOSIÇÃO 1.2.2 . *Se $f \in L^1$, então*

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}. \tag{1.10}$$

Além disso,

$$\widehat{f}(\xi) \to 0, \quad quando \ |\xi| \to \infty. \tag{1.11}$$

Demonstração. Ver [8] página 255. □

Se $f, g \in L^1$, definimos a convolução de f por g como sendo

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy = (g * f)(x). \tag{1.12}$$

PROPOSIÇÃO 1.2.3 (**Desigualdade de Young**). *Sejam $f \in L^p$, $g \in L^q$, com $p, q \in [1, \infty]$, tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ para algum $r \in [1, \infty]$. Então, $f * g \in L^r$ e*

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}. \tag{1.13}$$

Demonstração. Ver por exemplo, [7] na página 307. □

PROPOSIÇÃO 1.2.4 . *Para $f, g \in L^1$, $\widehat{(f * g)}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$.*

Demonstração. Pelo teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
(f * g)\widehat{\ }(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)e^{-2\pi i\xi\cdot x}dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)e^{-2\pi i\xi\cdot(x-y)}f(y)e^{-2\pi i\xi\cdot y}dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)e^{-2\pi i\xi\cdot(x-y)}dx\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-2\pi i\xi\cdot y}dy \\
&= \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).
\end{aligned}$$
□

Vamos agora abordar a transformada de Fourier no espaço de Schwartz (também conhecido como espaço das funções de decrescimento rápido), que consiste das funções $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha\partial^\beta f(x)| < \infty, \tag{1.14}$$

para quaisquer multiíndices α, β.

Os elementos de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tendem mais rápido a zero que o inverso de qualquer polinômio, quando $|x| \to \infty$. Também, $\overline{S(\mathbb{R}^n)} = L^p$, para $1 \leq p < \infty$, pois $\overline{C_0^\infty} = L^p$ e $C_0^\infty \subset S(\mathbb{R}^n)$.

Consideremos $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ munido da coleção de seminormas

$$\varphi \in S(\mathbb{R}^n) \mapsto \|\varphi\|_{\alpha,\beta}, \tag{1.15}$$

$\forall\ \alpha$, β multiíndices. Munido da distância

$$d(\varphi, \psi) = \Sigma_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n}2^{-(|\alpha|+|\beta|)}\frac{\|\varphi-\psi\|_{\alpha,\beta}}{1+\|\varphi-\psi\|_{\alpha,\beta}} \tag{1.16}$$

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço métrico completo. Além disso, a família de seminormas $\mathcal{M} = \{\|f\|_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}$ separa pontos e é enumerável. Portanto, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Fréchet (i.e., metrizável e completo).

Definimos a transformada inversa de Fourier por

$$(f)^{\vee}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{2\pi i\xi\cdot x}dx = \widehat{f}(-\xi). \tag{1.17}$$

PROPOSIÇÃO 1.2.5 . *Seja $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Então,*
(i) $\widehat{f} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ *e* $\partial^{\alpha}\widehat{f} = (-2\pi i x)^{\alpha}\widehat{f}$;
(ii) $(\partial^{\alpha}f)^{\widehat{}}(\xi) = (2\pi i\xi)^{\alpha}\widehat{f}$;
(iii) $\widehat{f} \in S(\mathbb{R}^n)$;
(iv) *(Fórmula da inversão)* $(\widehat{f})^{\vee} = f$;
(v) *a transformada de Fourier* $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ *é um isomorfismo.*

Para ver a demonstração da proposição acima, consulte por exemplo [6], páginas $6-10$.

TEOREMA 1.2.6 (**Teorema de Plancherel**). *Seja $f \in L^1 \cap L^2$. Então, $\widehat{f}, (f)^{\vee} \in L^2$ e*

$$\|\widehat{f}\|_{L^2} = \|(f)^{\vee}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}. \tag{1.18}$$

Demonstração. Consulte [5], página 183. □

Encerraremos esta seção com a definição da transformada de Fourier em $L^2(= L^2(\mathbb{R}^n))$. Observe que a Definição 1.2.1 nesse caso não faz sentido, pois nem sempre a fórmula (1.9) é verdadeira se $f \in L^2$: basta tomarmos uma função $f \in L^2 \setminus L^1$. A saída é recorrer ao Teorema 1.2.6 (Teorema de Plancherel), o qual valida a definição abaixo:

DEFINIÇÃO 1.2.7 . *Dada $f \in L^2$, considere $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de funções em $L^1 \bigcap L^2$ tal que, $f_k \to f$ em L^2. Pelo Teorema 1.2.6, $\|f_k - f\| = \|\widehat{f_k - f}\| = \|\widehat{f_k} - \widehat{f}\|$; assim $\{\widehat{f_k}\}_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em L^2 e portanto, converge. Definimos $\widehat{f}$ como sendo o limite dessa sequência, i.e.,*

$$\widehat{f} = \lim_{k\to\infty} \widehat{f_k} \quad \text{em} \quad L^2. \tag{1.19}$$

OBSERVAÇÃO 2 . *A Definição 1.2.7 faz sentido, pois dada outra sequência $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$, $g_k \to g$, em L^2, temos pelo Teorema de Plancherel que, $\widehat{g_k} \to \widehat{f}$ em L^2.*

Valem resultados análogos aos já enunciados. Por exemplo, dadas $f, g \in L^2$,
(R1) $(\widehat{f})^{\vee} = f = (f^{\vee})^{\widehat{}}$;
(R2) $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}}(\xi)d\xi$;
(R3) $\widehat{\partial^{\alpha}f} = (i\xi)^{\alpha}\widehat{f}$, para cada multiíndice α tal que $\partial^{\alpha}f \in L^2$;
(R4) $\widehat{(f * g)} = \widehat{f}\,\widehat{g}$.
Para ver a demonstração dessas propriendades consulte [8] ou [6].

1.3 Distribuições.

Nesta seção temos como meta relembrar alguns conceitos e resultados básicos sobre teoria de distribuições. Começamos com as distribuições temperadas.

Notação: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ será sempre um aberto de $\mathbb{R}^n$.

DEFINIÇÃO 1.3.1 . *Uma sequência $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$converge para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se e somente se,*

$$\lim_{k\to\infty} \|\varphi_k - \varphi\|_{\alpha,\beta} = 0,$$

para quaisquer multi-índices α, β.

Notação: $\varphi_k \xrightarrow{S} \varphi$.

DEFINIÇÃO 1.3.2 . *Denotamos por distribuição temperada a qualquer funcional linear contínuo sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Denotamos por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ao dual topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (munido da topologia induzida pela coleção das seminormas (1.15)).*

PROPOSIÇÃO 1.3.3 . *$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, existem uma constante $C \geq 0$ e $l \in \mathbb{N}$, tal que*

$$|\langle f, \varphi\rangle| \leq C \textstyle\sum_{|\alpha|,|\beta|\leq l} \|\varphi\|_{\alpha,\beta}, \ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Consulte [8] pág. 243. □

Seja $f \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$. O funional T_f sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definido por

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx, \tag{1.20}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é um elemento de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Mas nem todo elemento de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é do tipo (1.20). Por exemplo, a função δ de Dirac, centrada em $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle \delta_x, \varphi\rangle = \varphi(x).$$

A aplicação $f \mapsto T_f$ é injetiva, pois sabemos que se uma função g é $L^1_{loc}(\Omega)$, então

$$\int_{\Omega} g(x)\varphi(x)dx = 0,$$

para toda $\varphi \in C_0^{\infty}$, e assim, $g(x) = 0$ q.t.p. em Ω.

Considerando $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ com a topologia da convergência pontual, a aplicação definida por (1.20), além de injetiva, é contínua.

Para finalizar, passemos *às distribuições de Schwartz* (ou simplesmente, *distribuições*).

Por $\mathcal{D}(\Omega)$ vamos representar a classe de funções C_0^{∞} com a família de seminormas

$$\rho_{K,\alpha}(\varphi) = \sup_{x\in K} |(\partial^{\alpha}\varphi)(x)|, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{1.21}$$

onde $K \subset \Omega$ é compacto e α é um multi-índice.

Temos que $\mathcal{D}(\Omega)$ é um espaço vetorial topológico localmente convexo e Hausdorff, e dizemos que $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ se e somente se todas as suas derivadas convergem uniformemente a φ sobre compactos de Ω.

Definição 1.3.4 . *Uma* **distribuição** *sobre Ω é um funcional linear contínuo f : $\mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$. $\mathcal{D}'(\Omega)$ é o conjunto de todas as distribuições sobre Ω.*

Consideremos $\mathcal{D}'(\Omega)$ com a topologia da convergência pontual. Uma sequência $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ converge para $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se, e somente se, $\lim_{k\to\infty}\langle f_k, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle$, $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Notação: $f_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} f$.

Proposição 1.3.5 . *Um funcional linear $f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$é uma distribuição se, e somente se, para todo compacto $K \subset \Omega$, existem constantes $C \geq 0$ e $l \in I\!N$ tal que,*

$$|\langle f, \varphi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq l} \sup_K |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.22}$$

Temos que $S'(I\!R^n) \subsetneq \mathcal{D}'(I\!R^n)$ e a inclusão é contínua e densa.

Dado $f \in L^1_{loc}$, o funcional linear

$$Tf = \langle f, \varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \tag{1.23}$$

$\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, pertence a $\mathcal{D}'(\Omega)$. Neste caso, dizemos que uma distribuição é representada (ou provém) por uma função localmente integrável. Quando isso acontece, identificamos T_f com a própria f, isto é, $f = T_f$.

1.4 Espaços de Sobolev.

Para $s \geq 0$ inteiro, seja $H^s = H^s(I\!R^n)$ o espaço das funções

$$\{f \in L^2 : \ \partial^\alpha f \in L^2 \ \text{para} \ |\alpha| \leq s\},$$

onde $\partial^\alpha f$ é no sentido das distribuições. O H^s acima é denominado *espaço de Sobolev inteiro.* H^s é um espaço de Hilbert cuja norma é

$$\|f\|_s = \left(\sum_{|j| \leq s} \int_{I\!R^n} \|\partial^j f(x)\|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.24}$$

Observe que $H^0 = L^2$. Pelo Teorema de Plancherel (Teorema 1.2.6) temos que $f \in H^s$ se, e somente se, $\xi^\alpha \widehat{f} \in L^2$, para todo $|\alpha| \leq s$. Daí temos a norma que usaremos no próximo capítulo, com $n = 1$:

$$\|f\|_s^2 = \int_{I\!R^n} (1 + \xi^2 + \cdots + \xi^{2s}) |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi. \tag{1.25}$$

Vamos descrever algumas notações que utilizaremos posteriormete.

DEFINIÇÃO 1.4.1 . *Dados $T \in [0, \infty]$ e $s \geq 0$ inteiro, $\mathcal{H}_T^s = C(0, T; H^s)$ é o espaço das funções $u : I\!R \times [0, T] \to I\!R$ que, para cada $t \in [0, T]$, $u(\cdot, t) \in H^s$, e a aplicação $u : [0, T] \to H^s$ é contínua e limitada. Identificamos, $\mathcal{H}_T^0 = \mathcal{H}_T$. A norma em $\mathcal{H}_T^s$ é*

$$\|u\|_{\mathcal{H}_T^s} = |||u|||_s = \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(\cdot, t)\|_s. \tag{1.26}$$

Para $k \geq 0$ inteiro, definimos

$$C^k(0, T; H^s) = \mathcal{H}_T^{s,k} = \mathcal{H}_T^{s,k}(I\!R) = \{u \in \mathcal{H}_T^s : \ \partial_t^j u \in \mathcal{H}_T^s, \ \text{para} \ j = 0, 1, \cdots, k\}.$$

A norma desse espaço é

$$\|u\|_{\mathcal{H}_T^{s,k}} = |||u|||_{s,k} = \sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{0 \leq j \leq k} \|\partial_t^j u(\cdot, t)\|_s. \tag{1.27}$$

Observe que $\mathcal{H}_T^{s,0} = \mathcal{H}_T^s$. Listamos algumas das propriedades desses espaços, para $n = 1$, na proposição abaixo.

PROPOSIÇÃO 1.4.2 . *Sejam $s \geq 1$ e $k \geq 0$ inteiros. Então,*
(i) *$f \in H^s \Rightarrow f, f', ..., f^{(s-1)}$ são funções limitadas, uniformemente contínuas que convergem para 0 em $\pm\infty$;*
(ii) *$f, g \in H^s \Rightarrow f \cdot g \in H^s$;*
(iii) *se $u \in \mathcal{H}_T^{s,k}$, então $\partial_x^j \partial_t^l u$ é uma função contínua e limitada em $I\!R \times [0, T]$ (se $T < \infty$, a continuidade é uniforme) que converge para zero quando $x \to +\infty$, uniformemente quando $T < \infty$, para todo $0 \leq j \leq s - 1$ e todo $0 \leq l \leq k$;*
(iv) *$u, v \in \mathcal{H}_T^{s,k} \Rightarrow u \cdot v \in \mathcal{H}_T^{s,k}$.*

Demonstração. A demonstração de (i) e (ii) pode ser encontrada em [21], e (iii) e (iv) são generalizações de (i) e (ii), respectivamente. $\square$

PROPOSIÇÃO 1.4.3 . *Para toda função $f \in H^1$, vale a seguinte desigualdade:*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \leq (\|f\| \|f'\|)^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_1. \tag{1.28}$$

Demonstração. Dada $f \in H^1$ temos,

$$\int_{-\infty}^{x} ff' = f^2(x) - \int_{-\infty}^{x} ff',$$

então,

$$f^2(x) = \int_{-\infty}^{x} ff' - \int_{x}^{\infty} ff',$$

e assim,

$$|f(x)|^2 \leq |\int_{-\infty}^{x} ff'| + |\int_{x}^{\infty} ff'| \leq \int_{-\infty}^{x} |f||f'| + \int_{x}^{\infty} |f||f'| = \int_{-\infty}^{\infty} |f||f'|;$$

logo,

$$|f(x)| \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f||f'|\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz à última desigualdade acima, obtemos

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \leq (\|f\| \|f'\|)^{\frac{1}{2}}.$$

Da relação $ab \leq a^2 + b^2$, obtemos $(\|f\| \|f'\|)^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_1$.
Juntando os dois resultados acima obtemos (1.28). $\square$

PROPOSIÇÃO 1.4.4 . *Seja $s \geq 0$ inteiro. $f \in H^s$ se, e somente se, $(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f} \in L^2$. Neste caso, as normas*

$$f \mapsto \left(\textstyle\sum_{|\alpha| \leq s} \|\partial^\alpha f\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ e } f \mapsto \|(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}\|$$

são equivalentes.

Demonstração. Temos que existem $C_1, C_2 > 0$ tal que,

$$C_1(1 + |\xi|^2)^s \leq \sum_{|\alpha| \leq s} |\xi^\alpha|^2 \leq C_2(1 + |\xi|^2)^s.$$

Pelo Teorema de Plancherel (Teorema 1.2.6),

$$\begin{aligned}
\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}(\xi)\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^s|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \frac{1}{C_1}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{|\alpha|\leq s}|\xi^\alpha|^2\right)|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \frac{1}{C_1}\|f\|_s^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Logo, $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}(\xi) \in L^2$.

Reciprocamente,

$$\|f\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{|\alpha|\leq s}|\xi^\alpha|^2\right)|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq C_2\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^s|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Logo, $f \in H^s$, e a equivalência entre as normas também está provada. □

A norma de $L^2(\mathbb{R}^n, (1+|\xi|^2)^s d\xi)$ faz sentido para qualquer $s \in \mathbb{R}$. Portanto, podemos usá-la para estender a definição de H^s para $s \in \mathbb{R}$.

DEFINIÇÃO 1.4.5 . *Seja $s \in \mathbb{R}$. O espaço de Sobolev $H^s = H^s(\mathbb{R}^n)$ é o conjunto*

$$\{f \in S'(\mathbb{R}^n) : (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f} \in L^2\},$$

o qual munido do produto interno

$$(f,g)_s = \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^s\widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}d\xi$$

é um espaço de Hilbert, cuja norma é

$$\|f\|_s = \|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}(\xi)\|. \tag{1.29}$$

Também definimos,

$$H^\infty = \bigcap_{s\geq 0} H^s. \tag{1.30}$$

O teorema a seguir congrega as principais propriedades básicas de H^s.

TEOREMA 1.4.6 . (i) *A transformada de Fourier é um isomorfismo unitário de H^s em $L^2(\mathbb{R}^n, (1+|\xi|^2)d\xi)$.*

(ii) *$S(\mathbb{R}^n)$ é um subespaço denso de H^s, $\forall\ s \in \mathbb{R}$.*

(iii) *$H^s \hookrightarrow H^t$ para todo $s \geq t$, (onde $\hookrightarrow$ denota uma inclusão contínua e densa) e $\|\cdot\|_t \leq \|\cdot\|_s$.*

(iv) *$(H^s)'$, o dual de H^s, é isometricamente isomorfo a H^{-s} para todo $s \in \mathbb{R}$.*

(v) *$H^s \hookrightarrow C_\infty(\mathbb{R}^n)$ para todo $s > \frac{n}{2}$, onde $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ é a coleção das funções contínuas que tendem a zero quando $|x| \to \infty$.*

(vi) *∂^α é uma aplicação linear limitada de H^s em $H^{s-|\alpha|}$, $\forall\ s, \alpha$.*

Demonstração. (i) é consequência imediata da derinição, pois observe que,

$$(H^s)^{\frown} = L^2(\mathbb{R}^n, (1+|\xi|^2)^s d\xi).$$

(ii): Temos que $S(\mathbb{R}^n) \subset H^s \subset L^2$, e $L^2 = \overline{S(\mathbb{R}^n)} \subset \overline{H^s} \subset L^2$. Logo, $\overline{S(\mathbb{R}^n)} = H^s$.
(iii): Dado $f \in H^s$, como $(1+|\xi|^2)^{\frac{t}{2}} \leq (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}$, segue-se que,

$$\begin{aligned}
\|f\|_t^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^t |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \|f\|_s^2 < \infty,
\end{aligned} \tag{1.31}$$

implicando que $f \in H^t$. Logo, $H^s \subseteq H^t$, e a inclusão é contínua.

Falta demonstrar a densidade; para tal basta provarmos que

$$H^\infty = \bigcap_{l \in \mathbb{R}} H^l$$

é denso em H^r, para todo $r \in \mathbb{R}$. Seja $f \in H^r$ e seja

$$f_t = [\exp(-t|\xi|^2 \widehat{f})]^\vee, \quad t \geq 0.$$

Para $t > 0$, $f_t \in H^\infty$, pois

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^l |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{l-r}(1+|\xi|^2)^r \exp(-2t|\xi|^2)|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \{(1+|\xi|^2)^{l-r} \exp(-2t|\xi|^2)\}\xi \|f\|_r^2 < \infty,
\end{aligned}$$

para quaisquer $l, r \in \mathbb{R}$. Além disso, pelo teorema da convergência dominada,

$$\|f_t - f\|_r^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^r |[1-\exp(-t|\xi|^2)]|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \to 0$$

quando $t \to \infty$. Logo, $\overline{H^\infty} = H^r$, para todo $r \in \mathbb{R}$. Portanto, (iii) está demonstrado.

Agora passemos a (iv). Se $f \in H^s$ e $g \in H^{-s}$, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)| d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} |\widehat{f}(\xi)| (1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}} |\widehat{g}(\xi)| d\xi \\
&\leq \|f\|_s \|g\|_{-s} < \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, dada $g \in H^{-s}$ fixa, a aplicação

$$f \in H^s \mapsto \Phi_g(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi \tag{1.32}$$

é um funcional linear contínuo.

Seja $\Phi \in (H^s)'$. Pelo teorema da representação de Riezs, existe um único $h \in H^s$ tal que

$$\Phi(f) = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{h}(\xi)}d\xi,$$

para toda $f \in H^s$. Seja g tal que $\widehat{g}(\xi) = (1+|\xi|^2)^s \widehat{h}(\xi)$. Temos que $g \in H^{-s}$, e assim

$$\Phi(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}d\xi = \Phi_g(f).$$

Portanto, todo funcional linear contínuo em H^s se escreve de maneira única como (1.32). Além disso (pelo Teorema da Representação de Ries),

$$\begin{aligned} \|\Phi_g\|^2 = \|h\|_s^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{h}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{-s} |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \|g\|_{-s}^2. \end{aligned} \tag{1.33}$$

(v): Para $s > \frac{n}{2}$ temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)| d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} |\widehat{f}(\xi)|}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} d\xi \\ &\leq \|f\|_s \left[\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{-s} \right]^{\frac{1}{2}} < \infty, \end{aligned} \tag{1.34}$$

pois como $s > \frac{n}{2}$, a integral do último membro de (1.34) é finita. Portanto, $\widehat{f}$ é integrável. Logo, (v) segue de (1.11) na Proposição 1.2.2.

(vi) é imediato, pois $|\xi^\alpha| \leq (1+|\xi|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}}$. □

As propriedades acima são suficientes para os nossos propósitos. Encerramos este capítulo com uma importante notação e a definição de solução clássica de uma equação diferencial parcial:

Seja $s \geq 0$. Definamos o seguinte espaço de funções:

$$\mathcal{X}_{s,T} = \bigcap_{s-3l \geq 0} \mathcal{H}_T^{s-3l,l}, \tag{1.35}$$

isto é,

$$\mathcal{X}_{s,T} = \{u \in \mathcal{H}_T^s : \ \partial_t^l u \in \mathcal{H}_T^{s-3l}, \ \text{para } l \ \text{tal que } s-3l \geq 0\}.$$

Capítulo 2

O PROBLEMA DE VALOR INICIAL PARA A EQUAÇÃO DE KORTEWEG-DE VRIES.

Este é o principal capítulo de nosso trabalho. Nele estudamos o *problema de valor inicial* (PVI) para a equação de Korteweg-de Vries

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{2.1}$$

Podemos remover o termo u_x da equação (2.1) através da seguinte mudança de variável: Tomemos $y = x - t$ e t como variáveis independentes, e chamemos

$$u(y,t) = v(x-t,t).$$

Então

$$u_x = v_y,\ u_{xxx} = v_{yyy} \text{ e } u_t = v_t - v_y.$$

Substituindo isto em (2.1) obtemos,

$$v_t + vv_y + v_{yyy} = 0.$$

Logo, podemos pôr o PVI para a equação KdV na forma mais econômica

$$\begin{cases} u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, & x \in I\!R,\quad t \geq 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases} \tag{2.2}$$

Neste capítulo temos como objetivo demonstrar o teorema enunciado a seguir, o qual é o principal resultado de nosso trabalho.

TEOREMA 2.0.1 . *Se o dado inicial g está em $H^s(I\!R)$ $(s \geq 2)$, então o PVI (2.2) tem uma única solução $u \in \mathcal{X}_{s,\infty}$, a qual depende continuamente de g.*

Para tanto, necessitamos primeiramente estudar um modelo alternativo proposto por *Benjamin et al.* (Consulte [1]), do qual aproveitaremos os resultados.

Quando nos referirmos a solução clássica será no seguinte sentido:

DEFINIÇÃO 2.0.7 . *Uma solução clássica de uma equação diferencial parcial de ordem k em um domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma função $u \in C^k(\Omega)$ que satisfaz a equação em todos os pontos de Ω.*

2.1 Um modelo alternativo para a equação de Korteweg-de Vries.

Nosso propósito nesta seção é investigar o PVI

$$\begin{cases} u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases} \tag{2.3}$$

Através de uma sequência de lemas, provaremos que existe solução clássica para o PVI (2.3) se g e g' são assintoticamente nulas (isto é, $|g(x)| \to 0$ e $|g'(x)| \to 0$ quando $x \to \pm\infty$) e sua energia inicial

$$E_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} (g^2 + g'^2)dx$$

é finita (i.e., $g \in H^1 = H^1(\mathbb{R})$), em seguida provaremos a unicidade. Começaremos demonstrando um teorema de existência local (isto é, para um intervalo de tempo suficientemente pequeno), por meio do Teorema 1.1.2, e então conseguiremos provar a existência de solução em um intervalo de tempo arbitrário.

Primeiramente transformamos a equação do problema (2.3) em uma equação integral. Fazemos isso do seguinte modo: reescrevemos a equação na forma

$$(1 - \partial_x^2)u_t = -\partial_x(u + \tfrac{1}{2}u^2) .$$

Então, calculando a transformada de Fourier (na variável espacial) em ambos os lados obtemos:

$$\widehat{u_t} = \tfrac{-1}{1+k^2}\widehat{h},$$

onde $h = \partial_x(u + \frac{1}{2}u^2)$. Daí,

$$u_t = -\left(\tfrac{1}{1+k^2}\right)^{\vee} * h.$$

Como

$$\left(\tfrac{1}{1+k^2}\right)^{\vee}(x) = \tfrac{1}{2}e^{-|x|},$$

então

$$u_t = -\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|}\partial_y[u(y,t) + \tfrac{1}{2}u^2(y,t)]dy$$

e integrando por partes, obtemos:

$$u_t = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)(u + \tfrac{1}{2}u^2)dy,$$

onde

$$K(x) = \tfrac{1}{2}(sgn(x))e^{-|x|}.$$

Integrando a última equação acima para u_t de 0 a t obtemos:

$$u(x,t) = g(x) + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)\left[u(y,\tau) + \frac{1}{2}u(y,\tau)^2\right] dyd\tau. \tag{2.4}$$

Por economia denotemos a equação (2.4) da segunte maneira:

$$u = A(u) = g + B(u). \tag{2.5}$$

Demonstramos a existência de solução para (2.3) inicialmente fazendo algumas restrições sobre g.

Notação: $\mathcal{C}_T(= \mathcal{C}_b(\mathbb{R} \times [0,T]))$ denotará a classe de funções $v(x,t)$ contínuas e uniformemente limitadas em $\mathbb{R} \times [0,T]$. Denotamos por $\mathcal{C}_T^{l,m}$ a menor classe de funções $v(x,t)$ tal que $\partial_x^i \partial_t^j v \in \mathcal{C}_T$, para $0 \leq i \leq l$, $0 \leq j \leq m$. Quando subentender-se quem é T, o omitiremos.

LEMA 2.1.1 . *Existe um $t_0(b) > 0$ tal que a equação integral (2.4) tem uma solução u, satisfazendo $u(x,0) = g(x)$, tal que u é limitada e contínua em $\mathbb{R} \times [0,t_0]$, se g é uma função contínua tal que*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)| \leq b < \infty. \tag{2.6}$$

Demonstração. Considere $\mathcal{C}_{t_0}$ como descrito na notação acima, que é um espaço de Banach munido da norma

$$\|v\|_{\mathcal{C}_{t_0}} = \sup_{x\in\mathbb{R},\, 0\leq t\leq t_0} |v(x,t)|.$$

Por enquanto, t_0 ainda é desconhecido. Note que dados v_1, $v_2 \in \mathcal{C}_{t_0}$ e para quaisquer $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0,t_0]$,

$$\begin{aligned}
|Av_1 - Av_2| &= |Bv_1 - Bv_2| \\
&= \left| \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)[v_1(y,\tau) - v_2(y,\tau) + \frac{1}{2}(v_1^2(y,\tau) - v_2^2(y,\tau))]dyd\tau \right| \\
&= \left| \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (v_1 - v_2)K(x-y)[1 + \frac{1}{2}(v_1 + v_2)]dyd\tau \right| \\
&\leq \| v_1 - v_2 \|_{\mathcal{C}_{t_0}} [1 + \frac{1}{2} \| v_1 + v_2 \|_{\mathcal{C}_{t_0}}] \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} | K(x-y) | \, dyd\tau \\
&\leq \| v_1 - v_2 \|_{\mathcal{C}_{t_0}} [1 + \frac{1}{2} (\| v_1 \|_{\mathcal{C}_{t_0}} + \| v_2 \|_{\mathcal{C}_{t_0}})]t.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Tomando o supremo em ambos os lados de (2.7) para $x \in I\!R$ e $t \in [0, t_0]$ obtemos

$$\| Av_1 - Av_2 \|_{\mathcal{C}_{t_0}} \leq t_0 \left(1 + \frac{1}{2} \| v_1 \|_{\mathcal{C}_{t_0}} + \frac{1}{2} \| v_2 \|_{\mathcal{C}_{t_0}}\right) \| v_1 - v_2 \|_{\mathcal{C}_{t_0}} . \tag{2.8}$$

Logo, A é uma aplicação contínua de $\mathcal{C}_{t_0}$ nele mesmo. Além disso, para $\|v\|_{\mathcal{C}_{t_0}} \leq R$ temos que a condição de Lipschitz é satisfeita, com constante de Lipschitz $\theta < 1$ se

$$t_0(1 + R) \leq \theta < 1. \tag{2.9}$$

Disto segue-se que $\|Bv\|_{\mathcal{C}_{t_0}} \leq \theta \|v\|_{\mathcal{C}_{t_0}}$, como acontece quando pomos $v_2 \equiv 0$ em (2.8). Combinando isto com (2.6), vemos que A aplica a bola $B_R(0)$ nela mesma se, juntamente com (2.9) colocarmos

$$b \leq (1 - \theta)R. \tag{2.10}$$

Com as condições (2.9) e (2.10) juntas, temos que A é contração. Logo, pelo Teorema (1.1.2) A tem um único ponto fixo $u \in B_R(0)$.

Resta apenas ver que θ, R e t_0 podem ser escolhidos de forma a satisfazer (2.9) e (2.10) simultaneamente. Por exemplo, quando $\theta = \frac{1}{2}$ e $R = 2b$, (2.6) é satisfeita. Assim, qualquer valor positivo $t_0 < 1/(2 + 4b)$ satisfaz (2.9). Logo, como o ponto fixo de A é solução da equação (2.3), o lema está provado. □

LEMA 2.1.2 . *Se $g \in C^2(I\!R)$, então qualquer solução $u(x,t)$ de (2.5) ($u \in \mathcal{C}_T$ para algum $T > 0$) pertence a $\mathcal{C}_T^{2,\infty}$ e é uma solução clássica do problema (2.3).*

Demonstração. Usaremos a identidade $u = Au$. Pela hipótese, $(Au)(x, \cdot)$ é continuamente diferenciável. Logo u_t existe e

$$u_t = (Au)_t = \int_{-\infty}^{\infty} K(x - y)[u(y,t) + \frac{1}{2}u^2(y,t)]dy \tag{2.11}$$

e é portanto contínua nas duas variáveis e limitada em $I\!R \times [0, T]$. Procedendo por indução, vamos provar que $\partial_t^m u$ $(m = 2, 3, \ldots)$ existe, onde

$$\partial_t^m u = \int_{-\infty}^{\infty} K(x - y)\partial_t^{m-1}[u(y,t) + \frac{1}{2}u^2(y,t)]dy. \tag{2.12}$$

Temos que

$$u_{tt} = (Au)_{tt} = \int_{-\infty}^{\infty} K(x - y)\partial_t[u(y,t) + \frac{1}{2}u^2(y,t)]dy \tag{2.13}$$

que é contínuo e limitado em $I\!R \times [0, T]$, pois $(Au)_t = u_t$, u e K o são.

Suponhamos que $\partial^{m-1}u (\equiv \partial^{m-1}(Au))$ é contínuo e limitado em $I\!R \times [0, T]$. Então

$$\partial_t^m u = \int_{-\infty}^{\infty} K(x - y)\partial_t^{m-1}[u(y,t) + \frac{1}{2}u^2(y,t)]dy \tag{2.14}$$

que existe, pois as funções K e $\partial_t^j u$ ($j = 0, 1, 2, \ldots m-1$) são contínuas e limitadas. Logo, o resultado é verdadeiro $\forall m \in I\!N$ ($m \geq 2$).

Agora, dividindo o limite de integração em (2.4) em $x = y$, confirmamos a existência de u_x que é dado por

$$u_x = g'(x) + \int_0^t \left[u + \frac{1}{2}u^2\right] d\tau - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-|x-y|} \left[u + \frac{1}{2}u^2\right] dy d\tau \tag{2.15}$$

e daí vemos que u_x é contínua e limitada, pois g', u e K o são. Então ambas as integrais acima são continuamente diferenciáveis como função de x. Então u_{xx} existe, sendo dada por

$$\begin{aligned} u_{xx} &= g''(x) + \int_0^t \left(u + \frac{1}{2}u^2\right)_x d\tau + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y) \left[u + \frac{1}{2}u^2\right] dy d\tau \\ &= g''(x) + \int_0^t \left(u + \frac{1}{2}u^2\right)_x d\tau + u - g(x) \end{aligned} \tag{2.16}$$

e também é contínua e limitada, pois u, u_x, g e g'' o são. Procedendo-se por indução como acima prova-se que $\partial_x^m u$ e $\partial_t^m u_{xx}$ existem, são contínuas e limitadas. Logo, a solução $u(x,t)$ de (2.4) satisfaz (2.3) pontualmente em $I\!R \times [0,T]$ e pertence a $\mathcal{C}_T^{2,\infty}$. □

Observemos que as hipóteses do Lema 2.1.2 são insuficientes para garantir a existência de derivadas de ordem superior de $u(\cdot,t)$; só conseguimos isto se adicionarmos mais regularidade ao dado inicial $g(x)$. Mas, quanto mais diferenciável for g, mais restrições estaremos dando à solução. Especificamente, *se $g \in C^l(I\!R)$ com $l > 2$ (inclusive $l = \infty$), então pode-se mostrar que $u \in \mathcal{C}_T^{l,\infty}$*. Na próxima seção isso ficará claro.

Agora vamos estabelecer a propriedade invariante (??) para a solução local garantida pelo Lema 2.1.1.

DEFINIÇÃO 2.1.3 . *Diz-se que uma função $v(x)$ definida sobre todo o $I\!R$ é assintoticamente nula se*

$$\lim_{x \to \pm\infty} |v(x)| = 0.$$

Temos duas propriedades de funções assintoticamente nulas que serão usadas, a saber:

(P1): *Se v_n é uma sequência de funções assintoticamente nulas convergindo em $\mathcal{C}_{t_0}$ como na demonstração do Lema 2.1.1, então o seu limite u também é assintoticamente nulo, pois para todo $x \in I\!R$ e $n \in I\!N$ temos*

$$|u(x)| \leq |v_n(x)| + |u(x) - v_n(x)|,$$

e fazendo $|x| \to \infty$ obtemos o resultado.

(P2): *Se a função v é assintoticamente nula, então as funções*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} v(y) dy \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y) v(y) dy \tag{2.17}$$

também o são.

Como podemos ver pelas demonstrações dos Lemas 2.1.1 e 2.1.2 as funções em (2.17) são contínuas, e obtemos a propriedade assintótica da segunda diretamente pelo seguinte argumento com relação à primeira: Para provar a propriedade para $x \to \infty$, dividimos a integral em $y = y_1$. Para $x \geq y_1$ temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} v(y)dy \leq e^{-x} \int_{-\infty}^{y_1} e^{y} |v(y)| dy + 2 \sup_{y \geq y_1} |v(y)|. \tag{2.18}$$

Observemos que

$$\lim_{y_1 \to \infty} \sup_{y \geq y_1} |v(y)| = 0.$$

Então, tomando x suficientemente grande, o primeiro termo à direita da desigualdade (2.18) torna-se arbitrariamente pequeno para valores grandes de y_1. Analogamente, prova-se a propriedade para $x \to -\infty$.

Podemos então enunciar o seguinte lema:

LEMA 2.1.4 . *Se $u(x,t)$ é a solução de (2.4) garantida pelo Lema 2.1.1, e se g, g', ...,$g^{(p)}$ são contínuas e assintoticamente nulas, então $\partial_x^l \partial_t^m u$ é assintoticamente nula $\forall\ m \geq 0$ e $0 \leq l \leq p$.*

Demonstração. Este lema é uma consequência imediata das propriedades (P1) e (P2) acima, pois observe que a solução da equação integral (2.4) é o limite da sequência de Picard dada por $v_n = Av_{n-1}$, $v_1 = g$. □

Com estes resultados em mãos podemos provar que para a solução local $u(x,t)$, a *integral de energia* (ou simplesmente, *energia*) $E(u)$ definida por

$$E(u) = \|u(\cdot,t)\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + u_x^2)dx < \infty \tag{2.19}$$

é constante em $[0, t_0]$, se a energia inicial $\|g\|_1^2$ é finita: Pelo Lema 2.1.2, temos que u satisfaz a equação diferencial parcial em (2.3) pontualmente em $I\!R \times [0, t_0]$, com cada termo da equação limitado. Portanto, u também satisfaz

$$\int_{-R}^{R} (uu_t + u_x u_{xt})dx + \left[\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - uu_{xt}\right]_{x=-R}^{x=R} = 0. \tag{2.20}$$

Integrando (2.20) com relação a t e aplicando o teorema de Fubini, obtemos

$$\int_{-R}^{+R} (u^2 + u_x^2)dx - \int_{-R}^{+R} (g^2 + g'^2)dx = -2 \int_0^t \left[\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - uu_{xt})\right]_{-R}^{+R} d\tau. \tag{2.21}$$

Pelo Lema 2.1.2, estas integrais são todas funções contínuas. Suponhamos que a segunda integral do lado esquerdo seja limitada quando $R \to \infty$. Como o integrando do lado direito é uniformemente limitado em todo o $I\!R$, (2.21) nos diz que o primeiro integrando do lado esquerdo deve também ser limitado. Daí, como $u^2 + u_x^2 \geq 0$, pelo teorema da convergência monótona temos que $\int_{-\infty}^{+\infty}(u^2 + u_x^2)dx$ existe. Mas, pelo Lema 2.1.4, se g e g' são assintoticamente nulas, então u, u_t, u_x e u_{xt} também o são para $t \in [0, t_0]$. Então pelo teorema da convergência dominada,

$$\int_0^t \left[\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - uu_{xt}\right]_{-R}^{+R} d\tau \to 0$$

quando $R \to \infty$. Logo,

$$\|u\|_{\mathcal{H}^1_{t_0}} = E(u) = \int_{-\infty}^{\infty}(u^2 + u_x^2)dx = \int_{-\infty}^{\infty}(g^2 + g'^2)dx = \|g\|_1^2 = E_0 \tag{2.22}$$

no intervalo $[0, t_0]$. Note que é essencial que g e g' sejam assintoticamente nulas, mas não necessitamos assumi-lo separadamente, pois isso segue por ser $\|g\|_1 < \infty$ e g pertencer a $C^2(I\!R)$ (veja o lema abaixo).

LEMA 2.1.5 . *Seja $g \in H^1(I\!R) \bigcap C^2(I\!R)$. Então g é assintoticamente nula.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $g(x)$ não tende para zero quando $x \to +\infty$. Então existem um $\epsilon > 0$ e uma sequência de números reais $\{a_n\}$ com $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ tal que $|g(a_n)| > \epsilon$.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\{a_n\}$ é estritamente crescente, que os $g(a_n) > 0$ $\forall n$, e que para cada n existe $y_n \in (a_n, a_{n+1})$ tal que $g(y_n) \leq \frac{1}{2}\epsilon$. Observemos que a última afirmação acima pode ser feita porque $g \in L^2(I\!R)$, de modo que $g \geq \frac{1}{2}\epsilon$ pode valer apenas sobre um conjunto de medida finita.

Seja $b_n = \sup\{\, x : x < a_n \text{ e } g(x) = \frac{1}{2}\epsilon\}$, e seja $c_n = \inf\{\, x : x > a_n \text{ e } g(x) = \frac{1}{2}\epsilon\}$. Como g é contínua, estas definições fazem sentido. Escrevamos $I_n = (b_n, c_n)$. Então $\{I_n\}$ é uma sequência de intervalos abertos disjuntos, não vazios tal que $g(y) \geq \frac{1}{2}\epsilon$ para $y \in I_n$ e $g(y) = \frac{1}{2}\epsilon$ nos extremos de I_n. Segue-se que $|I_n| = c_n - b_n \to 0$ quando $n \to \infty$, pois $g \in L^2$.

Aplicando o teorema do valor médio a g em I_n, vemos que existem $x_n \in (b_n, a_n)$ e $z_n \in (a_n, c_n)$ tal que

$$g'(x_n) = \frac{g(a_n) - g(b_n)}{a_n - b_n} \quad \text{e} \quad g'(z_n) = \frac{g(c_n) - g(a_n)}{c_n - a_n}.$$

Logo,

$$|g'(x_n)| \geq \frac{\epsilon}{2(a_n - b_n)}, \quad |g'(z_n)| \geq \frac{\epsilon}{2(c_n - a_n)},$$

porque para $y \in I_n$, $g(y) \geq \frac{1}{2}\epsilon$. Daí, segue-se que, por exemplo, existe $\lambda_n \in (b_n, c_n)$ tal que

$$|g'(\lambda_n)| > \frac{\epsilon}{4(c_n - b_n)}.$$

Como $c_n - b_n \to 0$ quando $n \to \infty$, chegamos a um absurdo, pois por hipótese g' é limitada. $\square$

OBSERVAÇÃO 3 . *A condição $E(u) < \infty$ implica que $u(\cdot,t)$ é contínua e que $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq \|u\|_1 = (E(u))^{\frac{1}{2}}$. Portanto, por (2.22) temos que $u(\cdot,t_0)$ tem as mesmas propriedades que, quando assumida por $u(x,0)$, possibilitou a existência de uma solução para $t \in [0,t_0]$. Este argumento pode ser repetido um número arbitrário de vezes, e assim podemos fazer t_0 arbitráriamente grande.*

Agora vamos enunciar o resultado que queríamos estabelecer nesta seção.

TEOREMA 2.1.6 *Seja $g(x) \in C^2(\mathbb{R}) \bigcap H^1(\mathbb{R})$. Então existe uma única solução $u \in C^{2,\infty}_{\infty}$ para o PVI (2.3). Para cada $t \in [0,\infty)$ as funções $\partial_t^l u$ e $\partial_t^l u_x$ $(l = 0, 1, ,2, \ldots)$ são assintoticamente nulas, e consequentemente, $E(u) = E_0$.*

Demonstração. Só falta provarmos a unicidade. A existência segue dos lemas e da Observação 3.

Sejam u_1 e u_2 soluções de (2.3) e seja $w = u_1 - u_2$. Então w satisfaz o PVI

$$\begin{cases} w_t + w_x + \frac{1}{2}[(u_1+u_2)w]_x - w_{xxt} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0 \\ w(x,0) = 0 \end{cases} \tag{2.23}$$

Das propriedades de u_1 e u_2 segue-se que cada termo em (2.23) é contínuo como função de x e limitado em $\mathbb{R}$. Além disso, como u_1, u_2, $(u_1)_{xt}$ e $(u_2)_{xt}$ são assintoticamente nulas, temos que w e w_{xt} também o são. Assim, multiplicando a equação em (2.23) por w e integrando por partes em $\mathbb{R}$, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} (ww_t + w_x w_{xt})dx - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (u_1+u_2)ww_x dx = 0. \tag{2.24}$$

Como u_1, $u_2 \in H^1(\mathbb{R})$, $w \in H^1(\mathbb{R})$. Então, de (2.1) temos que

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} (u_1+u_2)ww_x dx\right| \leq \frac{1}{2}C(t) \parallel w \parallel_1^2$$

onde

$$C(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |u_1+u_2| \leq \parallel u_1 \parallel_1 + \parallel u_2 \parallel_1 . \tag{2.25}$$

Logo, a primeira integral em (2.1) converge; e como $\parallel u_1 \parallel_1$, $\parallel u_2 \parallel_1$ e $\parallel w \parallel_1$ são limitados sobre um intervalo de tempo finito temos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} (ww_t + w_x w_{xt})dx = \frac{1}{2}\frac{dE(w)}{dt},$$

onde $E(w) = \parallel w \parallel_1^2$. Então, da equação (2.1) extraímos a desigualdade diferencial

$$\frac{dE(w)}{dt} \leq \frac{1}{2}C(t)E(w),$$

e resolvendo-a obtemos,

$$E(w) \leq [E(w)]_{t_0} \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t C(\tau)d\tau\right).$$

Como $w(x,0) = 0$, $[E(w)]_{t_0} = 0$. Assim, pela equação acima, $E(w) \equiv 0$. Logo, $u_1 = u_2$ para todo $t > 0$ finito. □

2.2 Existência de solução para o PVI regularizado.

Nesta seção vamos extender um pouco mais os resultados da Seção 2.1. Por enquanto consideremos o PVI

$$\begin{cases} u_t + uu_x + u_{xxx} - \epsilon u_{xxt} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases} \tag{2.26}$$

onde $\epsilon \in (0,1]$ é fixado. A seguinte mudança das variáveis, dependente e independente,

$$v(x,t) = \epsilon u(\epsilon^{\frac{1}{2}}(x-t), \epsilon^{\frac{3}{2}}t), \tag{2.27}$$

transforma o problema (2.26) no PVI (2.3), ou seja,

$$\begin{cases} v_t + v_x + vv_x - v_{xxt} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0 \\ v(x,0) = h(x) = \epsilon g(\epsilon^{\frac{1}{2}}x) \end{cases} \tag{2.28}$$

Como ϵ é fixado, h é da mesma classe de funções que g.

Lema 2.2.1 . *Seja $h \in H^m$, onde $m \geq 2$. Então, existe uma única solução $u \in \mathcal{H}_T^m$ para o PVI (2.28), para todo $T > 0$ finito. Além disso, para $j \geq 1$, $\partial_t^j u \in \mathcal{H}_T^{m+1}$, para cada $T > 0$ finito.*

Observação. Para $m \geq 2$, cada termo na equação diferencial em (2.28) é contínuo como função de x e de t, e u satisfaz a equação pontualmente. Assim, u é uma solução clássica para o PVI (2.3). Se $m = 1$, ainda temos o resultado, mas u satisfaz a equação diferencial pontualmente, para cada t, apenas para quase todo x.

Demonstração (do Lema). Como $m \geq 2$, as hipóteses são suficientes para implicar os resultados do Teorema 2.1.6. Podemos então concluir que (2.28) tem uma única solução u, que em particular está em $\mathcal{H}_\infty^1$. Logo, u satisfaz a equação integral (2.4), ou seja,

$$u(x,t) = h(x) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\left[u(y,\tau) + \frac{1}{2}u(y,\tau)^2\right] dy d\tau. \tag{2.29}$$

onde

$$K(z) = \frac{1}{2}\text{sgn}(z)e^{-|z|}.$$

Para cada $t \in [0,T]$, temos que $u \in \mathcal{H}_T^1$, pois

$$u_x = h' + \int_0^t (u + \frac{1}{2}u^2)d\tau - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-|x-y|}\left(u + \frac{1}{2}u^2\right)dyd\tau, \tag{2.30}$$

e como $u \in \mathcal{H}_T$, pela Proposição 1.4.2, $u^2 \in \mathcal{H}_T$.

Por esta representação de u, segue por indução que, para cada $T > 0$ finito, $u \in \mathcal{H}_T^m$. De fato: suponhamos que $u \in \mathcal{H}_T^j$ para algum $0 \leq j < m$. Derivando j vezes em ambos os lados de (2.30) obtemos:

$$\partial_x^{j+1}u = h^{(j+1)} + \int_0^t \left[\partial_x^j(u + \frac{1}{2}u^2) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-|x-y|}\partial_y^j\left(u + \frac{1}{2}u^2\right)dy\right]d\tau, \tag{2.31}$$

Como $u, u^2 \in \mathcal{H}_T^j$, o lado direito de (2.31) está em $\mathcal{H}_T$. Assim, $u \in \mathcal{H}_T^j$ e $\partial_x^{j+1}u \in \mathcal{H}_T$; então $u \in \mathcal{H}_T^{j+1}$. Logo, $u \in \mathcal{H}_T^m$, e como h só pode ser diferenciado m vezes, a indução para aquí. Note que, se $m > 1$, não asseguramos que $u \in \mathcal{H}_\infty^m$, pois as relações obtidas não asseguram que derivadas de ordem maior que um da solução não cresçam indefinidamente no tempo para $t \in [0,\infty)$.

Diferenciando (2.29) em relação a t, obtemos

$$u_t = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)(u(y,t) + \frac{1}{2}u^2(y,t))dy. \tag{2.32}$$

Então $u_t \in \mathcal{H}_T^m$. Mas temos que a convolução com K aplica H^m continuamente sobre H^{m+1},e assim ocorre o mesmo entre $\mathcal{H}_T^m$ e $\mathcal{H}_T^{m+1}$. Portanto, segue-se que $u_t \in \mathcal{H}_T^{m+1}$. Suponhamos que $\partial_t^j \in \mathcal{H}_T^{m+1}$ para $j \leq s$, onde $s \geq 1$; escrevemos

$$\partial_t^{s+1}u = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\partial_t^s(u + \frac{1}{2}u^2)dy.$$

Pela Proposição 1.4.2, $\partial_t^s(u + \frac{1}{2}u^2) \in \mathcal{H}_T^m$. Como a convolução com K aplica $\mathcal{H}_T^m$ continuamente sobre $\mathcal{H}_T^{m+1}$, $\partial_t^{s+1}u \in \mathcal{H}_T^{m+1}$. □

O próximo lema é uma consequência do Lema 2.2.1 acima e da mudança de coordenadas (2.27) entre os PVI's (2.26) e (2.28).

LEMA 2.2.2 . *Seja $g \in H^m$, onde $m \geq 2$. Então existe uma única solução u para a equação regularizada (2.26) com valor inicial g, a qual está em $\mathcal{H}_T^m$ para cada $T > 0$ finito. Além disso, para $0 \leq l \leq m$, $\partial_t^l u \in \mathcal{H}_T^{m-1}$, para cada $T > 0$ finito.*

COROLÁRIO 2.2.3 . *Seja $g \in H^\infty$. Então, existe uma única solução $u \in C^\infty$ para a equação KdV regularizada (2.26), e u com todas as suas derivadas estão em $\mathcal{H}_T$ para qualquer $T > 0$ finito.*

2.3 Obtenção de estimativas *a priori* do PVI regularizado.

Pelo último resultado da Seção 2.2 temos que a equação KdV regularizada tem solução C^∞, se o dado inicial é C^∞. Muitas vezes, na teoria de equações diferenciais parciais, é muito importante a obtenção de estimativas *a priori* que a solução suave deve satisfazer. Note que não se pode obter limitação a partir de (2.28), pois a inversa da mudança de coordenadas (2.27) é singular em $\epsilon = 0$. Portanto, os limitantes devem ser obtidos diretamente da equação (2.26).

Em toda esta seção, o dado inicial $g \in H^\infty$. Então, denotaremos por u a solução de (2.26) para o dado inicial g, garantida pelo Corolário 2.2.3. Temos que u e todas as suas derivadas em relação a x estão em $\mathcal{H}_T$ para qualquer $T > 0$ finito.

PROPOSIÇÃO 2.3.1 . *A solução u de (2.26) para $g \in H^\infty$ satisfaz a desigualdade*

$$\|u\|_1 \leq a(\|g\|_1), \tag{2.33}$$

para todo $t > 0$, independente de $\epsilon \in (0,1]$, onde $a : I\!R^+ \longrightarrow I\!R^+$ é contínua, monótona crescente, com $a(0) = 0$.

Demonstração. Multiplicando a equação regularizada (2.26) por u e integrando sobre $I\!R$ e sobre $[0,t]$, após integrar por partes, sabendo-se que u e todas as suas derivadas em relação a x são assintoticamente nulas, para todo $t > 0$, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} [u^2(x,t) + \epsilon u_x(x,t)^2] dx = \int_{-\infty}^{\infty} [g(x)^2 + \epsilon g'(x)^2] dx. \tag{2.34}$$

Multiplicando a KdV regularizada por u_{xt} e integrando por partes, obtemos a identidade

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u^2 u_{xxt} dx = -\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx} u_{xxt} dx.$$

Multiplicando a KdV regularizada por $u^2 + 2u_{xx}$, integrando-a sobre $I\!R$ e sobre $[0,t]$, e usando a identidade acima, temos que para todo $t > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} [u_x^2 - \frac{1}{3}u^3] dx = \int_{-\infty}^{\infty} [g'^2 - \frac{1}{3}g^3] dx. \tag{2.35}$$

De (2.34) temos que, independente de $\epsilon \in (0,1]$,

$$\|u\| \leq \|g\|_1. \tag{2.36}$$

Então, usando a desigualdade (1.28) da Seção 1.4, por (2.35) e (2.36) obtemos a desigualdade

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx &= \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} u^3 dx + \int_{-\infty}^{\infty} [g'^2 - \frac{1}{3}g^3] dx \\
&\leq \frac{1}{3}\sup_{x\in \mathbb{R}} |u| \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} g'^2 dx + \frac{1}{3}\sup_{x\in \mathbb{R}} |g| \int_{-\infty}^{\infty} g^2 dx \\
&\leq \frac{1}{3}\|u\|_1\|u\|^2 + \|g'\|^2 + \frac{1}{3}\|g\|_1\|g\|^2 \\
&\leq \frac{1}{3}\|u\|_1\|g\|_1^2 + \|g\|_1^2 + \frac{1}{3}\|g\|_1^3.
\end{aligned}$$

Logo, independente de $t \geq 0$ e $\epsilon \in (0,1]$,

$$\|u\|_1^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [u^2 + u_x^2] dx \leq \frac{1}{3}\|u\|_1\|g\|_1^2 + (2\|g\|_1^2 + \frac{1}{3}\|g\|_1^3).$$

Então,

$$\|u\|_1^2 - \frac{1}{3}\|u\|_1\|g\|_1^2 + (2\|g\|_1^2 - \frac{1}{3}\|g\|_1^3) \leq 0$$

e resolvendo esta inequação quadrática obtemos

$$\|u\|_1 \leq \frac{1}{6}\left[\|g\|_1^2 + \|g\|_1\left(\|g\|_1^2 + 12\|g\|_1 + 8\right)^{\frac{1}{2}}\right]; \tag{2.37}$$

e assim segue-se que, independente de $t \geq 0$ e $\epsilon \in (0,1]$

$$\|u\|_1 \leq a(\|g\|_1),$$

onde $a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ que é definida por

$$a(\lambda) = \frac{1}{6}\left[\lambda^2 + \lambda\left(\lambda^2 + 12\lambda + 8\right)^{\frac{1}{2}}\right] \tag{2.38}$$

é contínua, monótona crescente com $a(0) = 0$. □

Temos um corolário da proposição anterior cuja verificação segue de (1.28).

COROLÁRIO 2.3.2 .*Consideremos o PVI (2.26) com dado inicial $g \in H^\infty$. Sua solução u satisfaz*

$$\sup_{x\in \mathbb{R}, t\geq 0} | u(x,t) | \leq a(\|g\|_1), \tag{2.39}$$

onde a é a função definida em (2.38).

PROPOSIÇÃO 2.3.3 . *Sejam $T > 0$ e $g \in H^\infty$ dados. Então existe $\epsilon_0 = \epsilon_0(T, \|g\|_3)$ tal que a solução u de (2.26) para o dado inicial g e qualquer $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ satisfaz a desigualdade*

$$\|u\|_2 \leq a_1(\|g\|_3) \tag{2.40}$$

independentemente de $t \in [0,T]$, onde $a_1 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é contínua, monótona crescente e $a_1(0) = 0$.

Demonstração. Multiplicando a equação regularizada por $u^3 + 3u_x^2 + 6uu_{xx} + \frac{18}{5}\frac{18}{5}u_{xxxx}$ e integrando por partes, chegamos à seguinte identidade:

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}[\frac{9}{5}u_{xx}^2 - 3uu_x^2 + \frac{1}{4}u^4]dx = \epsilon\int_{-\infty}^{\infty}[u^3 + 3u_x^2 + 6uu_{xx} + \frac{18}{5}u_{xxxx}]u_{xxt}dx.$$

Após algumas integrações por partes a identidade acima toma a seguinte forma,

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}[(\frac{9}{5}-3\epsilon u)u_{xx}^2 - 3uu_x^2 + \frac{1}{4}u^4 + \frac{9}{5}\epsilon u_{xxx}^2]dx = -\epsilon\int_{-\infty}^{\infty}[3u_tu_{xx}^2 + 3u^2u_xu_{xt} + 6u_xu_{xx}u_{xt}]dx. \tag{2.41}$$

Então, definamos

$$V(t) = \int_{-\infty}^{\infty}[(\frac{9}{5} - 3\epsilon u)u_{xx}^2 - 3uu_x^2 + \frac{1}{4}u^4 + \frac{9}{5}\epsilon u_{xxx}^2]dx$$

e integremos (2.41) de 0 a t para obtermos

$$V(t) = V(0) - \epsilon\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}[3u_tu_{xx}^2 + 3u^2u_xu_{xt} + 6u_xu_{xx}u_{xt}]dxd\tau. \tag{2.42}$$

Pelo Corolário 2.3.2, u é limitada para todo x e t em termos de $\|g\|_1$ como em (2.39). Assim existe um $\epsilon_1 > 0$ tal que se $0 < \epsilon \le \epsilon_1$, então

$$\frac{13}{5} \ge \frac{9}{5} - 3\epsilon u \ge 1. \tag{2.43}$$

Então, para $\epsilon \in (0, \epsilon_1]$, obtemos da identidade (2.42) a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}u_{xx}^2dx &\le \int_{-\infty}^{\infty}[(\frac{9}{5} - 3\epsilon u)u_{xx}^2 + \frac{1}{4}u^4 + \frac{9}{5}\epsilon u_{xxx}^2]dx \\ &\le V(0) + 3\int_{-\infty}^{\infty}(|u||u_x|^2)dx \\ &+ \epsilon\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}|3u_tu_{xx}^2 + 3u^2u_xu_{xt} + 6u_xu_{xx}u_{xt}|dxd\tau.\end{aligned} \tag{2.44}$$

Os dois primeiros termos do lado direito de (2.44) podem ser limitados, independente de $\epsilon \in (0, \epsilon_1]$, da seguinte maneira: se $\epsilon \le \epsilon_1$, então usando (2.43) com $t = 0$, e (1.28) duas vezes, obtemos:

$$\begin{aligned}V(0) &= \int_{-\infty}^{\infty}[(\frac{9}{5} - 3\epsilon g)g''^2 - 3gg'^2 + \frac{1}{4}g^4 + \frac{9}{5}\epsilon g'''^2]dx \\ &\le \int_{-\infty}^{\infty}[\frac{13}{5}g''^2 + 3\|g\|_1g'^2 + \frac{1}{4}\|g\|_1^2g^2 + \frac{9}{5}\epsilon g'''^2]dx \\ &\le \frac{13}{5}\|g\|_2^2 + 3\|g\|_1^3 + \frac{1}{4}\|g\|_1^4 + \frac{9}{5}\epsilon_1\|g\|_3^2.\end{aligned} \tag{2.45}$$

Analogamente, mais uma vez usando (1.28), temos

$$3\int_{-\infty}^{\infty}(|u||u_x|^2)dx \leq 3\|u\|_1 \leq \int_{-\infty}^{\infty}u_x^2dx \leq 3\|u\|_1^3, \tag{2.46}$$

e pela Proposição 2.3.1, $3\|u\|_1^3$ é limitado em termos de $\|g\|_1$. Seja C uma constante dependendo monotonicamente de $\|g\|_3$, que limita os dois primeiros termos do lado direito de (2.44). Então, de (2.44) obtemos a seguinte estimativa

$$\int_{-\infty}^{\infty}u_{xx}^2dx \leq C+\epsilon\int_0^t(3\|u_t\|_\infty\|u_{xx}\|^2+3\|u\|_\infty^2\|u_x\|\|u_{xt}\|+6\|u_x\|_\infty\|u_{xx}\|\|u_{xt}\|)d\tau, \tag{2.47}$$

onde

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in I\!R}|f(x)|. \tag{2.48}$$

Como, pela Proposição 2.3.1 e o Corolário 2.3.2, $\|u\|_1$ e $\|u\|_\infty$ são limitados por uma função de $\|g\|_1$ independentemente de ϵ e $t \geq 0$, da desigualdade (2.47) conseguimos a seguinte desigualdade:

$$\|u\|_2^2 \leq C+\epsilon C\int_0^t(\|u_t\|_\infty\|u\|_2^2+\|u_{xt}\|+\|u_x\|_\infty\|u\|_2\|u_{xt}\|)d\tau,$$

onde C é uma constante dependente de $\|g\|_3$ e independente de ϵ e $t \geq 0$. Denotando por

$$A = A(t) = \|u\|_2, \tag{2.49}$$

a última desigualdade torna-se

$$A^2(t) \leq C+\epsilon C\int_0^t(\|u_t\|_\infty A^2(\tau)+\|u_{xt}\|+\|u_x\|_\infty\|u_{xt}\|A(\tau))d\tau. \tag{2.50}$$

Diferenciando a equação regularizada em relação a t e pondo $v = u_t$, temos a equação

$$v_t+(uv)_x+v_{xxx}-\epsilon v_{xxt}=0.$$

Multiplicando esta equação por v, integrando sobre $I\!R$ e fazendo algumas integrações por partes, obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}(v^2+\epsilon v_x^2)dx = -\int_{-\infty}^{\infty}u_xv^2dx.$$

Integrando a equação acima de 0 a t, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty}(u_t^2+\epsilon u_{xt}^2)dx = \int_{-\infty}^{\infty}[u_t(x,0)^2+\epsilon u_{xt}(x,0)^2]dx - \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}u_xu_t^2dxd\tau. \tag{2.51}$$

Definamos

$$B^2 = B^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty}(u_t^2+\epsilon u_{xt}^2)dx. \tag{2.52}$$

Então, por (2.51) e (2.52) otemos a seguinte desigualdade:

$$B^2(t) \leq B^2(0) + \int_0^t \|u_x\|_\infty B^2(\tau)d\tau. \tag{2.53}$$

Podemos melhorar as desigualdades (2.50) e (2.53) através das seguintes desigualdades enunciadas no lema abaixo.

LEMA 2.3.4 . *As seguintes desigualdades são válidas:*

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \|u_t\|_\infty \leq \epsilon^{-\frac{1}{4}}B(t), \\ \text{(ii)} & \|u_x\|_\infty \leq (\|u_x\|\|u_{xx}\|)^{\frac{1}{2}} \leq CA(t^{\frac{1}{2}}), \\ \text{(iii)} & \|u_{xt}\| \leq \epsilon^{-\frac{1}{2}}B(t), \end{array}$$

onde C depende de $\|g\|_1$.

Demonstração (*do lema*). (iii) é imediato e (ii) segue da primeira parte de (1.28) aplicada a u_x e da limitação de $\|u_x\|$ obtida em (2.33). Para provarmos (i) usamos (1.28) e a conhecida desigualdade $ab \leq a^2 + b^2$. Temos que,

$$\begin{aligned} \|u_t\|_\infty^2 &\leq \|u_t\|\|u_{xt}\| = \epsilon^{-\frac{1}{2}}[\|u_t\|(\epsilon^{\frac{1}{2}\|u_{xt}\|})] \\ &\leq \epsilon^{-\frac{1}{2}}[\|u_t\|^2 + \epsilon\|u_{xt}\|^2] = \epsilon^{-\frac{1}{2}}B(t)^2; \end{aligned}$$

tomando a raiz quadrada em ambos os lados, obtemos (i).

Pelo Lema 2.3.4 e as desigualdades (2.50) e (2.52) obtemos o seguinte sistema de desigualdades integrais:

$$\left\{ \begin{array}{l} A^2(t) \leq C + \epsilon C \int_0^t [\epsilon^{-\frac{1}{4}}BA^2 + \epsilon^{-\frac{1}{2}}B + \epsilon^{-\frac{1}{2}}BA^{\frac{3}{2}}]d\tau, \\ B^2(t) \leq B^2(0) + C\int_0^t A^{\frac{1}{2}}B^2 d\tau \end{array} \right. \tag{2.54}$$

Devemos limitar $B(0)$, fazemos isso no lema a seguir.

LEMA 2.3.5 . *Seja u a solução para o problema regularizado (2.26) com $g \in H^\infty$. Então*

$$B(0) \leq \|g\|_3(\|g\|_1 + 1). \tag{2.55}$$

Demonstração. Multiplicando a equação regularizada por u_t e integrando por partes chegamos à seguinte identidade

$$\begin{aligned} B^2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_t(uu_x + u_{xxx})dx \\ &\leq B(t)\|u\|_3(\|u\|_1 + 1). \end{aligned} \tag{2.56}$$

Então,

$$B(t) \leq \|u\|_3(\|u\|_1 + 1).$$

Logo,

$$B(0) \leq \|g\|_3(\|g\|_1 + 1).$$

□

Assim, denotando por C constantes que dependem somente de $\|g\|_k$ para $k \leq 3$, e independente de T e $\epsilon \in (0, \epsilon_1]$, o sistema (2.54) transforma-se no seguinte sistema de desigualdades integrais:

$$\begin{cases} A^2 \leq C + \epsilon C \int_0^t [\epsilon^{-\frac{1}{4}} B A^2 + \epsilon^{-\frac{1}{2}} B + \epsilon^{-\frac{1}{2}} B A^{\frac{3}{2}}] d\tau, \\ B^2 \leq C + C \int_0^t A^{\frac{1}{2}} B^2 d\tau. \end{cases} \tag{2.57}$$

Denotando $D^2(t) = A^2(t) + 1$, e substituindo no sistema acima, chegamos ao sistema,

$$\begin{cases} D^2 \leq C + \epsilon^{\frac{1}{2}} C \int_0^t B D^2 d\tau, \\ B^2 \leq C + C \int_0^t D^{\frac{1}{2}} B^2 d\tau \end{cases} \tag{2.58}$$

Há uma maneira conveniente de escrever as constantes em (2.58):

$$\begin{cases} D^2 \leq \left(\frac{\alpha}{1-\epsilon^{\frac{1}{2}}}\right)^4 + \epsilon^{\frac{1}{2}} \frac{4\gamma}{\beta} \int_0^t D^2 B d\tau, \\ B^2 \leq \left(\frac{\beta}{1-\epsilon^{\frac{1}{2}}}\right)^2 + \frac{2\gamma}{\alpha} \int_0^t D^{\frac{1}{2}} B^2 d\tau \end{cases}, \tag{2.59}$$

onde α, β, e γ independem de $\epsilon \leq \epsilon_1$, se $\epsilon_1 < 1$. (Primeiro escolhamos $\epsilon_1 < 1$ de acordo com as restrições em (2.43), então tomamos α, β suficientemente grandes, e finalmente escolhemos γ suficientemente grande. Como podemos tomar a constante C em (2.58) dependendo monotonicamente de $\|g\|_3$, então sem perda de generalidade, α, β e γ estão bem definidas, embora isto não seja muito importante no que segue). Agora definamos $\overline{D}$ e $\overline{B}$ por

$$\begin{cases} \overline{D}^2 = \left(\frac{\alpha}{1-\epsilon^{\frac{1}{2}}}\right)^4 + \epsilon^{\frac{1}{2}} \frac{4\gamma}{\beta} \int_0^t \overline{D}^2 \overline{B} d\tau, \\ \overline{B}^2 = \left(\frac{\beta}{1-\epsilon^{\frac{1}{2}}}\right)^2 + \frac{2\gamma}{\alpha} \int_0^t \overline{D}^{\frac{1}{2}} \overline{B}^2 d\tau \end{cases} \tag{2.60}$$

Então por construção temos que $D \leq \overline{D}$ e $B \leq \overline{B}$ para todo $t \geq 0$. Mas, de acordo com J. Bona e R. Smith (vide [3], pág. 566), $\overline{D}$ e $\overline{B}$ podem ser determinados explicitamente como

$$\overline{D} = \left(\frac{\alpha}{1 - \epsilon^{\frac{1}{2}} e^{\gamma t}}\right)^2, \quad \overline{B} = \left(\frac{\beta e^{\gamma t}}{1 - \epsilon^{\frac{1}{2}} e^{\gamma t}}\right). \tag{2.61}$$

Se escolhermos ϵ_2 tal que $1 - \epsilon_2^{\frac{1}{2}} e^{\gamma T} \geq \frac{1}{2}$, e $\epsilon_0 = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, então como γ depende somente de $\|g\|_3$, $\epsilon_0 = \epsilon_0(T, \|g\|_3)$. Além disso, se $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, (2.61) então mostra explicitamente que D e B são limitados em $[0, T]$, independente de $\epsilon \leq \epsilon_0$, com uma cota dependendo apenas de T e da norma H^3 do dado inicial. Assim, vemos que $\|u_t\|$ e $\|u\|_2$ são limitadas em $[0, T]$, independentemente de $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$. Em particular, pela fórmula explícita de $\overline{D}$, temos que, por α depender monotonicamente de $\|g\|_3$, pelo menos para $\epsilon \leq \epsilon_1$, podemos escrever $\|u\|_2 \leq a_1(\|g\|_3)$ no intervalo $[0,T]$ para $\epsilon \in (0,\epsilon_0]$ onde a_1 é contínua, monótona crescente e $a_1(0)=0$. É importante notar que para todo $t \geq 0$,

$$\limsup_{\epsilon \downarrow 0} \|u_{xx}\| \leq \alpha = \alpha(\|g\|_3). \tag{2.62}$$

□

Para finalizar, vamos agora obter estimativas *a priori* das derivadas de ordem superior a 2.

PROPOSIÇÃO 2.3.6 . *Sejam $T > 0$ e $g \in H^\infty$, e seja ϵ_0 como na Proposição 2.3.3. Então, para $\epsilon \leq \epsilon_0$, a solução do PVI regularizado (2.26) é limitada em $\mathcal{H}_T^m$, para todo $m \geq 3$, com um limitante dependendo somente de T, ϵ_0, $\|g\|_m$ e $\epsilon^{\frac{1}{2}}\|g\|_{m+1}$.*

Demonstração. A demonstração é feita por indução. Sabemos pela Proposição 2.3.3 que u é limitado em $\mathcal{H}_T^2$, onde o limitante depende somente de T, ϵ_0 e $\|g\|_3$. Seja $m > 2$ e suponhamos que u seja limitado em $\mathcal{H}_T^{m-1}$ independente de ϵ em $(0,\epsilon_0]$ com um limite dependendo apenas de T, ϵ_0 e $\|g\|_m$. Vamos mostrar que u é limitado também em $\mathcal{H}_T^m$, com um limite dependendo somente de T, ϵ_0, $\|g\|_{m+1}$ e $\epsilon^{\frac{1}{2}}\|g\|_{m+1}$.

A partir de agora vamos utilizar a seguinte notação

$$u_{(k)} = \partial_x^k u$$

para a derivada em relação a x. Multiplicando a equação regularizada por $u_{(2m)}$ e integrando por partes, obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}[u_{(m)}^2 + \epsilon u_{(m+1)}^2]dx = -\int_{-\infty}^{\infty}(u)^2_{(m+1)}u_{(m)}dx. \tag{2.63}$$

Como u é limitada em $\mathcal{H}_T^{m-1}$, independentemente de $\epsilon \in (0,\epsilon_0]$, segue-se que

$$\begin{cases} \|u_{(r)}\| \leq C, & \text{para } r \leq m-1, \\ \|u_{(r)}\|_\infty \leq C, & \text{para } r \leq m-2, \end{cases} \tag{2.64}$$

onde $C = C(T,\epsilon_0,\|g\|_m)$.

Usando a regra de Leibnitz para expandir a integral do lado direito de (2.63), obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty}(u^2)_{(m+1)}u_{(m)}dx = \int_{-\infty}^{\infty}[c_0uu_{(m+1)}u_{(m)}+c_1u_xu_{(m)}^2+u_{(m)}\sum_{r=2}^{m-2}c_ru_{(r)}u_{(m+1-r)}+u_{(m-1)}^2u_{(m)}]dx. \tag{2.65}$$

O último termo no integrando do lado direito em (2.65) só ocorre quando $m=3$, além disso, sua integral é zero. Integrando convenientemente por partes o primeiro termo do lado direito de (2.65) obtemos,

$$\int_{-\infty}^{\infty}uu_{(m+1)}u_{(m)}dx = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}u_xu_{(m)}^2dx,$$

e então, podemos juntá-lo com o segundo termo da mesma integral. Como $m \geq 3$, por (2.64) temos que $\|u_x\|_\infty \leq C$. Então obtemos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}[u_{(m)}^2 + \epsilon u_{m+1}2]dx &\leq C\int_{-\infty}^{\infty}u_{(m)}^2dx + \sum_{r=2}^{m-2}c_r\|u_{(m)}\|\|u_{(r)}\|_\infty\|u_{(m+1-r)}\| \\
&\leq C\int_{-\infty}^{\infty}u_{(m)}^2dx + C\left[\int_{-\infty}^{\infty}u_{(m)}^2dx\right]^{\frac{1}{2}} \leq C\left(\int_{-\infty}^{\infty}u_{(m)}^2dx + 1\right).
\end{aligned}$$

Definamos

$$E_m(t) = \int_{-\infty}^{\infty}[u_{(m)}^2 + \epsilon u_{(m+1)}^2]dx.$$

Então a última desiguadade implica em

$$\frac{dE_m}{dt} \leq C(E_m + 1),$$

pela qual obtemos para $t \geq 0$,

$$E_m(t) \leq E_m(0)e^{Ct} + e^{Ct} - 1,$$

independentemente de $\epsilon \leq \epsilon_0$ e $t \in [0, T]$. O limite para $E_m(t)$ depende somente de $\|g\|_m$ e $\epsilon^{\frac{1}{2}}\|g\|_{m+1}$, pois C depende somente de $\|g\|_m$ e

$$E_m(0)^{\frac{1}{2}} \leq \|g\|_m + \epsilon^{\frac{1}{2}}\|g\|_{m+1}.$$

Portanto, $\|u_{(m)}\| \leq E_m^{\frac{1}{2}}$ é limitado sobre $[0, T]$, e então u é limitado em $\mathcal{H}_T^m$, independente de ϵ em $(0, \epsilon_0]$. □

Lema 2.3.7 . *Se $V \in \mathcal{H}_T^m$, então $K_\epsilon * V$ é limitada em $\mathcal{H}_T^m$ independentemente de $\epsilon \geq 0$, onde $\widehat{K}_\epsilon(k) = (1 + \epsilon k^2)^{-1}$.*

Demonstração. Para cada $t \in [0, T]$, considere $K_\epsilon * V = (K_\epsilon * V)(\cdot, t)$. Temos que

$$\widehat{K_\epsilon * V} = \widehat{K_\epsilon}\widehat{V} = \frac{1}{1 + \epsilon k^2}\widehat{V}.$$

Por hipótese $V : [0, T] \to H^m$ é contínua e limitada. Então, para cada Para cada $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}
\|K_\epsilon * V\|_m^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}(1 + k^2 + \cdots + k^{2m})|\widehat{K_\epsilon * V}(k)|^2dk \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}(1 + k^2 + \cdots + k^{2m})\frac{1}{1 + \epsilon k^2}|\widehat{V}(k)|^2dk \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty}(1 + k^2 + \cdots + k^{2m})|\widehat{V}(k)|^2dk \\
&= \|V\|_m^2.
\end{aligned}$$

Tomando o supremo sobre $[0,T]$ em ambos os lados na desigualdade acima, obtemos o resultado. $\square$

COROLÁRIO 2.3.8 . *A solução u para o PVI regularizado (2.26) com $g \in H^\infty$ é limitada em $\mathcal{H}_T^{k,l}$, independentemente de $\epsilon \leq \epsilon_0$, para todo k, l e $T \geq 0$.*

Demonstração. Escrevamos a equação regularizada na forma

$$(1-\epsilon\partial_x^2)u_t = -uu_x - u_{xxx}.$$

Agora invertemos o operador $1-\epsilon\partial_x^2$, como no Lema 2.2.1, e obtemos a expressão

$$u_t = -K_\epsilon * (uu_x + u_{xxx}),$$

onde $\widehat{K}_\epsilon(k) = (1+\epsilon k^2)^{-1}$. Como para cada $m \geq 0$ o lado direito da última equação é limitado em $\mathcal{H}_T^m$, independente de $\epsilon \in (0,\epsilon_0]$, então pelo Lema 2.3.7 segue-se que u_t é limitado em $\mathcal{H}_T^m$ para cada $m \geq 0$, independente de ϵ suficientemente pequeno. Logo, $\partial_x^k u_t$ é limitado em $\mathcal{H}_T$ para cada $k \geq 0$, isto é, u é limitado em $\mathcal{H}_T^{m,1}$ para cada m, independente de ϵ em $(0,\epsilon_0]$. Agora, suponhamos por indução que $\frac{\partial^n u}{\partial t^n}$ é limitada em $\mathcal{H}_T^m$, ou seja, que u é limitada em $\mathcal{H}_T^{m,n}$. Temos que

$$u_{t^{n+1}} = -K_\epsilon * (u_{t^n}u_{t^n x} + u_{t^n xxx}).$$

Como por hipótese, $V_n = u_{t^n}u_{t^n x} + u_{t^n xxx}$ é limitada em $\mathcal{H}_T^{m,n}$, o corolário está demonstrado. $\square$

2.4 Convergência das aproximações.

Seja $g \in H^s$ onde $s \geq 3$ e seja $\epsilon > 0$. A regularização g_ϵ de g é definida por

$$\widehat{g}_\epsilon(k) = \varphi(\epsilon^{\frac{1}{6}}k)\widehat{g}(k), \tag{2.66}$$

onde φ é uma função C^∞ par, com $0 \leq \varphi \leq 1$ e $\varphi(0) = 1$, tal que $\psi(k) = 1 - \varphi(k)$ tem uma raiz de ordem infinita no zero e tal que φ tenda exponencialmente para 0 em $\pm\infty$. Podemos citar muitas dessas funções; por exemplo, $\varphi(k) = e^{-g(k)}$ onde $g(k) = k^2e^{-1/k^2}$. Temos que $g_\epsilon \in C^\infty$, pois $g_\epsilon = (\varphi)^\vee * g$. Como $g \in L^2$, segue-se que $g_\epsilon \in H^\infty$. Portanto, existe uma única solução $u_\epsilon(x,t) = u(x,t,\epsilon)$, cujas derivadas pertencem a $\mathcal{H}_T$ para todo $T > 0$, para a equação KdV regularizada com valor inicial regularizado g_ϵ:

$$\begin{cases} u_t + uu_x + u_{xxx} - \epsilon u_{xxt} = 0, \\ u(x,0) = g_\epsilon(x). \end{cases} \tag{2.67}$$

O lema a seguir tem como propósito a obtenção de limitações para várias normas de g_ϵ em termos de normas de g.

LEMA 2.4.1 . *Seja $g \in H^s$ onde $s \geq 3$ e seja g_ϵ a versão suavizada de g definida em (2.66). Então quando $\epsilon \downarrow 0$,*

$$\begin{cases} \|g_\epsilon\|_{s+j} = O(\epsilon^{-\frac{1}{6}j}) & \text{para} \quad j = 1, 2, \cdots \\ \|g - g_\epsilon\|_{s-j} = o(\epsilon^{\frac{1}{6}j}) & \text{para} \quad j = 1, 2, \cdots \\ \|g - g_\epsilon\|_s = o(1). \end{cases} \tag{2.68}$$

Além disso, o primeiro limite vale uniformemente sobre subconjuntos limitados de H^s, e os dois últimos, uniformemente sobre subconjuntos compactos de H^s. O segundo vale uniformemente sobre subconjuntos limitados de H^s se trocarmos $o(\epsilon^{\frac{1}{6}j})$ por $O(\epsilon^{\frac{1}{6}j})$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} \epsilon^{\frac{1}{3}j}\|g_\epsilon\|_{s+j}^2 &= \epsilon^{\frac{1}{3}j} \int_{-\infty}^{\infty} [1 + k^2 + \cdots + k^{2(s+j)}]|\widehat{g}_\epsilon(k)|^2 dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\epsilon^{\frac{1}{3}j} \frac{1 + \cdots + k^{2(s+j)}}{1 + \cdots + k^{2s}} \varphi^2(\epsilon^{\frac{1}{6}} k)\right] [1 + \cdots + k^{2s}]|\widehat{g}(k)|^2 dk \\ &\leq \sup_{k \in I\!R} \left[\epsilon^{\frac{1}{3}j} \frac{1 + \cdots + k^{2(s+j)}}{1 + \cdots + k^{2s}} \varphi^2(\epsilon^{\frac{1}{6}} k)\right] \|g\|_s^2. \end{aligned} \tag{2.69}$$

Na desigualdade acima façamos a seguinte mudança de variáveis: $K = \epsilon^{\frac{1}{6}}k$ e $\gamma = \epsilon^{\frac{1}{3}}$. Como $0 < \epsilon \leq 1$, então $0 < \gamma \leq 1$. Consequentemente

$$\begin{aligned} \epsilon^{\frac{1}{3}j}\|g_\epsilon\|_{s+j}^2 &\leq \|g\|_s^2 \sup_{K \in I\!R} \left[\gamma^j \frac{1 + \cdots + (K^2/\gamma)^{s+j}}{1 + \cdots + (K^2/\gamma)^s}\right] \varphi^2(K) \\ &\leq \|g\|_s^2 \sup_{K \in I\!R} \left[\frac{\gamma^{s+j} + \cdots + K^{2(s+j)}}{\gamma^s + \cdots + K^{2s}}\right] \varphi^2(K). \end{aligned}$$

Fazendo separadamente $|K| < 1$ e $|K| \geq 1$ chegamos à seguinte desigualdade

$$\epsilon^{\frac{1}{3}j}\|g_\epsilon\|_{s+j}^2 \leq \|g\|_s^2 (s+j) \sup_{K \in I\!R} \{1 + K^{2j}\varphi^2(K)\}.$$

Extraíndo a raiz quadrada em ambos os lados na desigualdade acima obtemos

$$\epsilon^{\frac{1}{6}j}\|g_\epsilon\|_{s+j} \leq C\|g\|_s, \tag{2.70}$$

onde $C = \{(s+j)\sup_{K \in I\!R}\{1 + K^{2j}\varphi^2(K)\}^{\frac{1}{2}}$, que independe de g e de ϵ. Logo a primeira desigualdade em (2.68) é verdadeira para subconjuntos limitados de H^s.

Observemos que se $g \in H^s$, então

$$\|g - g_\epsilon\|_s^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(\epsilon^{\frac{1}{6}}k)[1 + \cdots + k^{2s}]|\widehat{g}(k)|^2 dk. \tag{2.71}$$

Quando $\epsilon \downarrow 0$, o integrando tende a zero em quase todo ponto. Além disso, o integrando acima é limitado pela função integrável

$$(1 + k^2 + \cdots + k^{2s})|\widehat{g}(k)|^2.$$

Logo, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, $\|g-g_\epsilon\|_s \to 0$ quando $\epsilon \downarrow 0$, ou seja, $\|g - g_\epsilon\|_s = o(1)$, e assim, provamos a terceira conclusão de (2.68). Para demonstrar que em compactos a convergência acima é uniforme, é suficiente mostrar que

$$g_n \to g \text{ em } H^s \Rightarrow \|g_{n\epsilon} - g_n\|_s \to 0 \text{ quando } \epsilon \downarrow 0 \text{ uniformemente para } n = 1, 2, \ldots, \quad (2.72)$$

pois compacidade sequencial é equivalente a compacidade em espaços métricos.

Para provar isso, seja $\gamma > 0$. Queremos encontrar um $\epsilon_0 > 0$ tal que se $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, então $\|g_{n\epsilon} - g_n\|_s < \gamma$ para todo $n = 1, 2, \ldots$. Para todo n,

$$\begin{aligned} \|g_{n\epsilon} - g_\epsilon\|_s^2 &= \|(g_n - g)_\epsilon\|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(\epsilon^{\frac{1}{6}}k)(1 + \ldots + k^{2s})|\widehat{g}_n(k) - \widehat{g}(k)|^2 dk \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \ldots + k^{2s})|\widehat{g}_n(k) - \widehat{g}(k)|^2 dk = \|g_n - g\|_s^2. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Assim, para verificar (2.72), escolha N tão grande que se $n \geq N$, então $\|g_n - g\|_s < \frac{1}{3}\gamma$. Então escolha ϵ_0 tão pequeno que $\|g_{k\epsilon} - g_k\|_s < \frac{1}{3}\gamma$ para $1 \leq k \leq N$ e $\|g_\epsilon - g\|_s < \frac{1}{3}\gamma$, para $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$. Então, certamente

$$\|g_{n\epsilon} - g_n\|_s < \gamma, \quad (2.74)$$

para $1 \leq n \leq N$. Se $n \geq N$, então por (2.73) temos que

$$\begin{aligned} \|g_{n\epsilon} - g_n\|_s &\leq \|g_{n\epsilon} - g_\epsilon\|_s + \|g_\epsilon - g\|_s + \|g - g_n\|_s \\ &\leq \|g_n - g\|_s + \|g_\epsilon - g\|_s + \|g - g_n\|_s \\ &\leq \frac{1}{3}\gamma + \frac{1}{3}\gamma + \frac{1}{3}\gamma = \gamma. \end{aligned}$$

Logo, (2.74) é válida para todo n.

Para a segunda desigualdade em (2.68), temos que

$$\begin{aligned} \|g - g_\epsilon\|_{s-j}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1 + \ldots + k^{2(s-j)}}{1 + \ldots + k^{2(s)}}\psi^2(\epsilon^{\frac{1}{6}}k)\right][1 + \ldots + k^{2s}]|\widehat{g}(k)|^2 dk \\ &\leq \sup_{k \in I\!R}\left[\frac{1 + \ldots + k^{2(s-j)}}{1 + \ldots + k^{2s}}\psi(\epsilon^{\frac{1}{6}}k)\right]\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\epsilon^{\frac{1}{6}}k)[1 + \ldots + k^{2s}]|\widehat{g}(k)|^2 dk \\ &\leq C\epsilon^{\frac{1}{3}j}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\epsilon^{\frac{1}{6}}k)[1 + \ldots + k^{2s}]|\widehat{g}(k)|^2 dk, \end{aligned}$$

onde C é novamente uma constante que não depende de g nem de $\epsilon \leq 1$. Como na demonstração acima de que $\|g - g_\epsilon\|_s = o(1)$, a integral do lado direito da última desigualdade acima é $o(1)$ quando $\epsilon \downarrow 0$, uniformemente sobre subconjuntos compactos de H^s. A integral acima também é limitada por $\|g\|_s^2$, logo $\|g - g_\epsilon\|_{s-j} = O(\epsilon^{\frac{1}{6}j})$ uniformemente sobre subconjuntos limitados de H^s. Portanto, o lema está provado. □

COROLÁRIO 2.4.2 . *Seja $s \geq 3$. Então, para cada $T > 0$ finito u_ϵ é limitado em $\mathcal{H}_T^s$ para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Além disso, $\epsilon^{\frac{1}{6}m}u_\epsilon$ é limitado em $\mathcal{H}_T^{s+m}$ para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno , para cada $T > 0$ finito e $m \geq 1$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.3.6, $\|u_\epsilon\|_s$ é limitada, com cota superior dependendo de T, ϵ_0, $\|g_\epsilon\|_s$ e $\epsilon^{\frac{1}{2}}\|g_\epsilon\|_{s+1}$, isto é,

$$\|u_\epsilon\|_s \leq \widetilde{C}(T, \epsilon_0, \|g_\epsilon\|_s, \epsilon^{\frac{1}{2}}\|g_\epsilon\|_{s+1}).$$

Também temos que $\|g_\epsilon\|_s \leq \|g\|_s$ e $\epsilon^{\frac{1}{2}}\|g_\epsilon\|_{s+1} \leq C\epsilon^{\frac{1}{3}}\|g\|_s$ (propriedades de regularização), pois

$$\begin{aligned}
\|g_\epsilon\|_s^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}(1+k^2+\ldots+k^{2s})|\widehat{g_\epsilon}(k)|^2dk = \int_{-\infty}^{\infty}(1+k^2+\ldots+k^{2s})\varphi^2(\epsilon^{\frac{1}{6}}k)|\widehat{g}(k)|^2dk \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty}(1+k^2+\ldots+k^{2s})|\widehat{g}(k)|^2dk \\
&= \|g\|_s^2,
\end{aligned}$$

e por (2.70) com $j=1$ temos

$$\epsilon^{\frac{1}{6}}\|g_\epsilon\|_{s+1} \leq C\|g\|_s,$$

ou seja,

$$\epsilon^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}\|g_\epsilon\|_{s+1} \leq C\epsilon^{\frac{1}{3}}\|g\|_s,$$

logo,

$$\epsilon^{\frac{1}{2}}\|g_\epsilon\|_{s+1} \leq C\epsilon^{\frac{1}{3}}\|g\|_s,$$

(onde g_ϵ é o valor inicial para o PVI regularizado cuja solução é u_ϵ). Portanto,

$$\|u_\epsilon\|_s \leq \widetilde{C}(T, \epsilon_0, \|g\|_s, \epsilon^{\frac{1}{3}}\|g\|_s).$$

Logo, independente de $t \in [0,T]$ e de $\epsilon \leq \epsilon_0$, $\|u_\epsilon\|_s$ possui uma limitação que depende somente de T, ϵ_0 e $\|g\|_s$.

A segunda parte do corolario é imediata, pois

$$\|\epsilon^{\frac{1}{6}m}u_\epsilon\|_{s+m} = \epsilon^{\frac{1}{6}m}\|u_\epsilon\|_{s+m} \leq \epsilon^{\frac{1}{6}m}\widetilde{C}(T, \|g_\epsilon\|_{s+m}, \epsilon^{\frac{1}{2}}\|g_\epsilon\|_{s+m+1}),$$

e por (2.70) com $j=m$,

$$\epsilon^{\frac{1}{6}m}\|g_\epsilon\|_{s+m} \leq C\|g\|_s \text{ e } \epsilon^{\frac{1}{6}m}\|g_\epsilon\|_{s+m+1} \leq C\|g\|_s.$$

E assim, o corolário está demonstrado. □

COROLÁRIO 2.4.3 . *$\partial_t u_\epsilon$ é limitado em $\mathcal{H}_T^{s-3}$ $(s \geq 3)$ e $\epsilon^{\frac{1}{6}m}\partial_x^{s+m-3}\partial_t u_\epsilon$ é limitado em $\mathcal{H}_T$ independente de ϵ suficientemente pequeno, para todo $T > 0$ finito e $m = 1, 2, \ldots, 5$.*

Demonstração. u_ϵ satisfaz a equação

$$\partial_t u_\epsilon + u_\epsilon\partial_x u_\epsilon + \partial_x^3 u_\epsilon - \epsilon\partial_t\partial_x^2 u_\epsilon = 0,$$

então

$$(1-\epsilon\partial_x^2)\partial_t u_\epsilon = -(u_\epsilon\partial_x u_\epsilon + \partial_x^3 u_\epsilon),$$

e multiplicando (compondo) o operador $(1-\epsilon\partial_x^2)$ pelo seu inverso em ambos os lados, obtemos

$$\partial_t u_\epsilon = -(1-\epsilon\partial_x^2)^{-1}(u_\epsilon\partial_x u_\epsilon + \partial_x^3 u_\epsilon).$$

(Observemos que $(1-\epsilon\partial_x^2)(1-\epsilon\partial_x^2)^{-1} = Id$ implica em $\|(1-\epsilon\partial_x^2\|_\infty\|1-\epsilon\partial_x^2)^{-1}\|_\infty = 1$, ou seja, $\|(1-\epsilon\partial_x^2)_{-1}\|_\infty = \|1-\epsilon\partial_x^2\|_\infty^{-1}$.) Logo,

$$\begin{aligned}
\|\partial_t u_\epsilon\|_{s-3} &\leq \|1-\epsilon\partial_x^2\|_\infty^{-1}\|u_\epsilon\partial_x u_\epsilon + \partial_x^3 u_\epsilon\|_{s-3} \\
&\leq \|u_\epsilon\partial_x u_\epsilon + \partial_x^3 u_\epsilon\|_{s-3} \\
&\leq \|u_\epsilon\|_{s-3}\|\partial_x u_\epsilon\|_{s-3} + \|\partial_x^3 u_\epsilon\|_{s-3} \leq \|u_\epsilon\|_s^2 + \|u_\epsilon\|_s \\
&\leq \left[C(T,\epsilon_0,\|g_\epsilon\|_s,\epsilon^{\frac{1}{2}}\|g_\epsilon\|_{s+1})\right]^2 + C(T,\epsilon_0,\|g_\epsilon\|_s,\epsilon^{\frac{1}{2}}\|g_\epsilon\|_{s+1}) \\
&\leq C(T,\epsilon_0,\|g\|_s),
\end{aligned} \tag{2.75}$$

pois $\|u_\epsilon\|_{s-3} \leq \|u_\epsilon\|_s$, $\|\partial_x u_\epsilon\|_{s-3} \leq \|u_\epsilon\|_s$ e $\|\partial_x^3 u_\epsilon\|_{s-3} \leq \|u_\epsilon\|_s$.

Analogamente, temos

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\frac{1}{6}m}\|\partial_t u_\epsilon\|_{s+m-3} &\leq \epsilon^{\frac{1}{6}m}(\|u_\epsilon\|_{s+m-3}\|u_\epsilon\|_{s+m-2} + \|u_\epsilon\|_{s+m}) \\
&\leq C,
\end{aligned} \tag{2.76}$$

onde, pelo Corolário 2.4.2, C é uma constante que não depende de ϵ suficientemente pequeno, pois $m \leq 5$. □

Proposição 2.4.4 . *Seja u_ϵ a solução do PVI (2.67), onde $g \in H^s$ e $s \geq 3$. Então $\{u_\epsilon\}$ é Cauchy em $\mathcal{H}_T^s$ quando $\epsilon \downarrow 0$.*

Demonstração. Seja $u = u_\epsilon$ e $v = u_\delta$, com $\delta \leq \epsilon$. Basta provarmos que $\|u-v\|_s \to 0$ quando $\epsilon \to 0$. Seja $w = u - v$. Então w satisfaz,

$$w_t + \frac{1}{2}(u^2-v^2)_x + w_{xxx} - \epsilon u_{xxt} + \delta u_{xxt} - \delta u_{xxt} + \delta v_{xxt} = 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(u^2-v^2)_x &= \left[\frac{1}{2}(u^2-2uv+v^2-2v^2+2uv)\right]_x \\
&= \left[\frac{1}{2}w^2 + v(u-v)\right]_x \\
&= \left(vw + \frac{1}{2}w^2\right)_x.
\end{aligned}$$

Por conseguinte, w satisfaz a equação

$$w_t + \left(vw + \frac{1}{2}w^2\right)_x + w_{xxx} - \delta w_{xxt} = (\epsilon-\delta)u_{xxt}, \tag{2.77}$$

com $w(x,0)=g_\epsilon(x)-g_\delta(x)=h(x)$. Seja $j\le s$; multipliquemos a equação (2.77) por $w_{(2j)}$ (por $w_{(j)}$ significamos $\partial_x^j w$) e integremos por partes em relação a $I\!R$ e em $[0,t]$. Temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} w_{(2j)}w_t dx d\tau &+ \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} w_{(2j)}(uw+\frac{1}{2}w^2)_x dx d\tau \\
&+ \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} w_{(2j)}w_{xxx}dxd\tau - \delta\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} w_{(2j)}w_{xxt} \\
&= \frac{(-1)^j}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(w_{(j)}^2-h_{(j)}^2)dx + (-1)^j\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\left(uw+\frac{1}{2}w^2\right)_{(j+1)} dxd\tau \\
&- \frac{(-1)^{j-1}}{2}\delta\int_{-\infty}^{\infty}(w_{(j+1)^2-h_{j+1}^2})dx,
\end{aligned}$$

$$(\epsilon-\delta)\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} w_{(2j)}u_{xxt}dxd\tau = (-1)^j(\epsilon-\delta)\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} u_{t,(j+2)}w_{(j)}dxd\tau$$

e consequentemente, de (2.77) obtemos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_{-\infty}^{\infty}[w_{(j)}^2+\delta w_{(j+1)}^2]dx &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty}[h_{(j)}^2+\delta h_{(j+1)}^2]dx \\
&- \textstyle 2\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}[(uw+\frac{1}{2}w^2)_{j+1}-(\epsilon-\delta)u_{t,(j+2)}]w_{(j)}dxd\tau.
\end{aligned} \tag{2.78}$$

Façamos $j=0$ em (2.78). Definamos

$$V_0(t)^2=\int_{-\infty}^{\infty}[w^2+\delta w_x^2]dx,$$

e portanto,

$$V_0(0)^2=\int_{-\infty}^{\infty}[h^2+\delta h'^2]dx.$$

Também temos que,

$$\int_{-\infty}^{\infty}(uw+\frac{1}{2}w^2)_x w dx=\int_{-\infty}^{\infty}(w_x+\frac{1}{2}u_x)w^2dx.$$

Assim, para $j=0$, (2.78) toma a forma

$$V_0(t)^2=V_0(0)^2-2\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}(w_x+\frac{1}{2}u_x)w^2dxd\tau+2(\epsilon-\delta)\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}u_{xxt}wdxd\tau.$$

Pelo Corolário 2.4.2 segue-se que $|w_x+\frac{1}{2}u_x|$ é limitado sobre $[0,T]$, por uma constante C_1 que depende de T e $\|g\|_3$ e que independe de ϵ (para ϵ suficientemente pequeno). Além disso, pelo Corolário 2.4.3, $\epsilon^{\frac{1}{3}}\|u_{xxt}\|$ é limitada, para $t\in[0,T]$ por C_2, onde C_2 depende de T e de $\|g\|_3$, mas não depende de ϵ, quando ele é tomado suficientemente pequeno. Portanto para ϵ pequeno,

$$V_0(t)^2\le V_0(0)^2+2C_1\int_0^t V_0(\tau)^2d\tau+2\epsilon^{\frac{2}{3}}C_2\int_0^t V_0(\tau)d\tau.$$

Seja $t \in [0,T]$ e considere

$$U(t) = V_0(0)^2 + 2C_1 \int_0^t V_0(\tau)^2 d\tau + 2\epsilon^{\frac{2}{3}} C_2 \int_0^t V_0(\tau) d\tau.$$

Temos que $U(0) = V_0(0)^2$, $V_0(t)^2 \leq U(t)$ e

$$U'(t) = 2C_1 V_0(t)^2 + 2\epsilon^{\frac{2}{3}} C_2 V_0(t) \leq 2C_1 U(t) + 2\epsilon^{\frac{2}{3}} C_2 U(t)^{\frac{1}{2}},$$

então

$$\frac{U'(t)}{U(t)} = 2C_1 + 2\epsilon^{\frac{2}{3}} C_2 U(t)^{-\frac{1}{2}}.$$

Definindo $W(t)^2 = U(t)$ e substituindo na inequação acima, obtemos

$$\frac{\dot{W}}{W} \leq \epsilon^{\frac{2}{3}} C_2 W^{-1} + C_1, \; W(0) = U(0)^{\frac{1}{2}} = V_0(0),$$

isto é,

$$\dot{W} \leq \epsilon^{\frac{2}{3}} C_2 + C_1 W.$$

Logo, pelo Corolário 1.1.7, segue-se que

$$\begin{aligned} W(t) &\leq \left(W(0) + \frac{\epsilon^{\frac{2}{3}} C_2}{C_1} \right) e^{C_1 t} - \frac{\epsilon^{\frac{2}{3}} C_2}{C_1} \\ &\leq V_0(0) e^{C_1 T} + \epsilon^{\frac{2}{3}} C_2 \left(e^{C_1 T} - 1 \right) C_1^{-1}, \end{aligned}$$

e assim,

$$\|w\| \leq V_0(0) e^{C_1 T} + \epsilon^{\frac{2}{3}} C_2 \left(e^{C_1 T} - 1 \right) C_1^{-1}. \tag{2.79}$$

Observemos que, pelo Lema 2.4.1 quando $\epsilon \downarrow 0$

$$\begin{aligned} V_0(0) &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [(g_\delta(x) - g_\epsilon(x))^2 + \delta({g'}_\delta(x) - {g'}_\epsilon(x))^2] dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|g_\delta - g\|_1 + \|g_\epsilon - g\|_1 \leq C\epsilon^{\frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

nos garantindo assim que $\|w\| \leq C\epsilon^{\frac{1}{3}}$, para ϵ suficientemente pequeno. Portanto, $\{u_\epsilon\}$ é de Cauchy em $\mathcal{H}_T$.

Consideremos agora $j = 1$ e novamente, a título de economia, definamos

$$V_1(t)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [w_x^2 + \delta w_{xx}^2] dx,$$

e assim

$$V_1(0)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [h'^2 + \delta h''^2] dx.$$

Integrando por partes (2.78) obtemos

$$V_1(t)^2 = V_1(0)^2 - 2\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}w_x + \frac{3}{2}u_x\right) w_x^2 dx d\tau - 2\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [u_{xx}w - (\epsilon-\delta)u_{xxxt}]w_x dx d\tau.$$

Mas pelos Corolários 2.4.2 e 2.4.3 acima, em $[0,T]$, $|\frac{1}{2}w_x + \frac{3}{2}u_x|$, $|u_{xx}|$ e $\epsilon^{\frac{1}{2}}\|u_{xxxt}\|$ são todas limitadas, independente de ϵ, quando ϵ é suficientemente pequeno. Também, como mencionado acima, $\|w\| \le C\epsilon^{\frac{1}{3}}$ sobre $[0,T]$ para ϵ suficientemente pequeno. Assim, para ϵ suficientemente pequeno, temos que

$$\begin{aligned} V_1(t)^2 &\le V_1(0)^2 + 2C\int_0^t (\|w_x\|^2 + \epsilon^{\frac{1}{3}}\|w_x\|)d\tau \\ &\le V_1(0)^2 + 2C\int_0^t (V_1(\tau)^2 + \epsilon^{\frac{1}{3}}V_1(\tau))d\tau, \end{aligned}$$

onde aqui e no restante desta demonstração, $C = C(T, \epsilon_0, \|g\|_s)$ independe de $\epsilon < \epsilon_0$. Procedendo-se da mesma forma como fizemos para a obtenção de (2.79) obtemos, para t em $[0,T]$,

$$V_1(t) \le V_1(0)e^{Ct} + \epsilon^{\frac{1}{3}}(e^{Ct} - 1).$$

Logo, para $t \in [0,T]$

$$\|w_x\| \le V_1(t) \le V_1(0)e^{CT} + \epsilon^{\frac{1}{3}}(e^{CT} - 1).$$

Também, como dantes, pelo Lema 2.4.1

$$\begin{aligned} V_1(0) &\le \|g-g_\epsilon\|_1 + \|g-g_\delta\|_1 + \delta^{\frac{1}{2}}\|g-g_\epsilon\|_2 + \delta^{\frac{1}{2}}\|g-g_\delta\|_2 \\ &\le C\epsilon^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

quando $\epsilon \to 0$, (aqui $\delta < \epsilon$). Logo, $\{u_\epsilon\}$ é de Cauchy em $\mathcal{H}_T^1$ e para $t \in [0,T]$ e ϵ suficientemente pequeno,

$$\|w\|_1 \le C\epsilon^{\frac{1}{3}}. \tag{2.80}$$

Para $j = 2$, (2.78) é

$$\int_{-\infty}^{\infty}[w_{xx}^2+\delta w_{xxx}^2]dx = \int_{-\infty}^{\infty}[(h'')^2+\delta(h''')^2]dx - 2\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}[(uw+\frac{1}{2}w^2)_{xxx}-(\epsilon-\delta)u_{(4),t}]w_{xx}dxd\tau.$$

Denotando

$$V_2(t)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}[w_{xx}^2 + \delta w_{xxx}^2]dx,$$

então,

$$V_2(t)^2 = V_2(0)^2 - 2\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}[(uw + \frac{1}{2}w^2)_{xxx}w_{xx} - (\epsilon-\delta)u_{xxxxt}w_{xx}]dxd\tau. \tag{2.81}$$

Pelo Corolário 2.4.3 temos que $\epsilon^{\frac{1}{3}}\|u_{xxxxt}\|$ é limitado, para ϵ suficientemente pequeno e então o lado direito de (2.81) é limitado por $\epsilon^{\frac{1}{3}}C\|w_{xx}\|$. Diferenciando e agrupando os termos na integral do lado direito de (2.81), chegamos à integral

$$\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [-\frac{5}{2}(u_x + w_x)w_{xx}^2 - 3u_{xx}w_x w_{xx} - u_{xxx}ww_{xx}]dxd\tau. \tag{2.82}$$

Agora usando (2.80) e o Corolário 2.4.2, temos que sobre $[0, T]$,

$$\begin{cases} (i) & |u_x + w_x| \leq C, \\ (ii) & |u_{xx}| \leq C, \\ (iii) & \|u_{xxx}\| \leq C, \\ (iv) & \|w_x\| \leq C\epsilon^{\frac{1}{3}}, \\ (v) & |w| \leq C\epsilon^{\frac{1}{3}}, \end{cases} \tag{2.83}$$

onde C denota várias constantes independentes de ϵ. Aplicando (2.83) a (2.82) temos

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [-\frac{5}{2}(u_x + w_x)w_{xx}^2 - 3u_{xx}w_x w_{xx} - u_{xxx}ww_{xx}]dxd\tau \right| \\ \leq & \int_0^t \left[C\|w_{xx}\|^2 + C\epsilon^{\frac{1}{3}}\|w_{xx}\| \right] d\tau. \end{aligned}$$

Chegamos então à desigualdade

$$\begin{aligned} V_2(t)^2 & \leq V_2(0)^2 + 2C\int_0^t (\|w_{xx}\|^2 + \epsilon^{\frac{1}{3}}\|w_{xx}\|)d\tau \\ & \leq V_2(0)^2 + 2C\int_0^t (V_2(\tau)^2 + \epsilon^{\frac{1}{3}}V_2(\tau))d\tau, \end{aligned}$$

por meio da qual obtemos

$$\|w_{xx}\| \leq V_2(t) \leq V_2(0)e^{CT} + \epsilon^{\frac{1}{3}}(e^{CT} - 1). \tag{2.84}$$

Pelo Lema 2.4.1

$$\begin{aligned} V_2(0) & \leq \|h\|_2 + \delta^{\frac{1}{2}}\|h\|_3 \\ & \leq \|g - g_\epsilon\|_2 + \|g - g_\delta\|_2 + \delta^{\frac{1}{2}}\|g - g_\epsilon\|_3 + \delta^{\frac{1}{2}}\|g - g_\delta\|_3 \\ & \leq C'\epsilon^{\frac{1}{6}} + C'\epsilon^{\frac{1}{2}} \leq C\epsilon^{\frac{1}{6}}. \end{aligned}$$

Substituindo isto em (2.84) segue-se que

$$\|w_{xx}\| \leq C\epsilon^{\frac{1}{6}}, \tag{2.85}$$

com $t \in [0, T]$. Observemos que se $s > 3$, deveríamos obter $C\epsilon^{\frac{1}{3}}$ como limite, simplesmente porque pelo Lema 2.4.1 deveríamos ter o limite $V_2(0) \leq C\epsilon^{\frac{1}{3}}$.

Finalmente, consideremos o caso $j = 3$. Definimos $V_3(t)$ da mesma forma que $V_2(t)$. A equação (2.78) toma a seguinte forma:

$$V_3(t)^2 = V_3(0)^2 - 2\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [(uw + \frac{1}{2}w^2)_{xxxx} w_{xxx} - (\epsilon - \delta)u_{xxxxxt} w_{xxx}] dx d\tau.$$

Como $\epsilon^{\frac{5}{6}} \| u_{xxxxxt} \|$ é limitada (ver Corolário 2.4.3), o segundo termo na integral acima converge para 0 quando $\epsilon^{\frac{1}{6}} \downarrow 0$. Novamente, derivando e depois integrando por partes o primeiro termo na integral da equação acima, obtemos:

$$2\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [\frac{7}{2}(u_x + w_x) w_{xxx}^2 - 4w_x u_{xxx} w_{xxx} - 6u_{xx} w_{xx} w_{xxx} - u_{xxxx} w w_{xxx}] dx d\tau. \quad (2.86)$$

Pelos Corolários 2.4.2 e 2.4.3, por (2.80) e por (2.85), temos que para $t \in [0, T]$,

$$\begin{cases} (i) & |u_x + w_x| \leq C, \\ (ii) & \|u_{xx}\| \leq C, \\ (iii) & \|u_{xxx}\| \leq C, \\ (iv) & \|u_{xxxx}\| \leq C\epsilon^{-\frac{1}{6}}, \\ (v) & |w| \leq C\epsilon^{\frac{1}{3}}, \\ (vi) & |w_x| \leq C\epsilon^{\frac{1}{6}}, \\ (vii) & \|w_{xx}\| \leq C\epsilon^{\frac{1}{6}}. \end{cases} \quad (2.87)$$

Usando (2.87) em (2.86), conseguimos o seguinte limite superior para (2.86):

$$2\int_0^t (C\|w_{xxx}\|^2 + C\epsilon^{\frac{1}{6}} \|w_{xxx}\|) d\tau.$$

Então, para t em $[0, T]$,

$$V_3(t)^2 \leq V_3(0)^2 + 2C\int_0^t [V(\tau)^2 + \epsilon^{\frac{1}{6}} V(\tau)] d\tau,$$

e assim,

$$\|w_{xxx}\| \leq V_3(0)e^{CT} + \epsilon^{\frac{1}{6}}(e^{CT} - 1).$$

Como antes, pela desigualdade triangular,

$$V_3(0) \leq \|g - g_\epsilon\|_3 + \|g - g_\delta\|_3 + \delta^{\frac{1}{2}} \|g - g_\epsilon\|_4 + \delta^{\frac{1}{2}} \|g - g_\delta\|_4,$$

que tende a zero quando $\epsilon \downarrow 0$, onde $\delta \leq \epsilon$, pelo Lema 2.4.1. Logo, para qualquer $T > 0$ finito, $\|w_{xxx}\| \to 0$ quando $\epsilon \downarrow 0$.

Para $s > 3$ procedemos por indução, utilizando um argumento análogo ao do caso $s = 3$. Como $s > 3$, pela observação após (2.85) temos que $\|w\|_2 \leq C\epsilon^{\frac{1}{3}}$, daí $|w|, |w_x| \leq C\epsilon^{\frac{1}{3}}$, quando $\epsilon \downarrow 0$. Para $j + 1 < s$, suponhamos por indução que, para $\epsilon \downarrow 0$,

$$\|w\|_{j-1} \leq C\epsilon^{\frac{1}{3}}. \quad (2.88)$$

Provemos que (2.88) vale para j. Seja

$$V_j(t)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [w_{(j)}^2 + \delta w_{(j+1)}^2] dx. \tag{2.89}$$

Então temos a seguinte expressão para (2.78):

$$V_j(t)^2 = V_j(0)^2 - 2\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [(uw + \frac{1}{2}w^2)_{(j+1)} - (\epsilon - \delta)u_{t,(j+2)}] w_{(j)} dx d\tau. \tag{2.90}$$

Seja

$$I = -2\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [(uw + \frac{1}{2}w^2)_{(j+1)} - (\epsilon - \delta)u_{t,(j+2)}] w_{(j)} dx d\tau.$$

Então, pela regra de Leibnitz,

$$\frac{I}{2} = -\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{j+1} c_k w_{(j+1-k)} w_{(j)} u_{(k)} + \sum_{k=0}^{j+1} c_k w_{(j+1-k)} w_{(j)} w_{(k)} - (\epsilon - \delta) u_{t,(j+2)} w_{(j)} \right) dx d\tau \tag{2.91}$$

e assim,

$$\begin{aligned} \frac{I}{2} &\le C \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{j+1} |w_{(j+1-k)} w_{(j)} u_{(k)}| + \sum_{k=1}^{j} |w_{(j+1-k)} w_{(k)} w_{(j)}| + \epsilon |u_{t,(j+2)} w_{(j)}| \right) dx d\tau \\ &- \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (w_{(j+1)} w_{(j)} u + 2 w w_{(j)} w_{(j+1)}) dx d\tau. \end{aligned} \tag{2.92}$$

Pela hipótese de indução (2.88), $\|w\|_{j-1} \le C\epsilon^{\frac{1}{3}}$ e assim, para $0 \le k \le j-2$, $|w_k| \le C\epsilon^{\frac{1}{3}}$ sobre $I\!R \times [0,T]$. Pelo Corolário 2.4.2, $\|u\|_s \le C$ e $\|v\|_s \le C$, assim também $|u_{(k)}| \le C$ e $|w_{(k)}| \le C$ sobre $I\!R \times [0,T]$, para $0 \le k \le s-1$. Pelo Corolário 2.4.3, $\epsilon^{\frac{1}{2}} \|u_t\|_s \le C$. Portanto como $j+1 < s$, podemos juntar esses fatos e concluir que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} I &\le C \int_0^t (\|w_{(j)}\|^2 + \epsilon^{\frac{1}{3}} \|w_{(j)}\|) d\tau - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (u w_{(j)} w_{(j+1)} + 2 w w_{(j)} w_{(j+1)}) dx d\tau \\ &= C \int_0^t (\|w_{(j)}\|^2 + \epsilon^{\frac{1}{3}} \|w_{(j)}\|) d\tau + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2} u_x + w_x) w_{(j)}^2 dx d\tau \\ &\le C \int_0^t (\|w_{(j)}\|^2 + \epsilon^{\frac{1}{3}} \|w_{(j)}\|) d\tau + C \int_0^t \|w_{(j)}\|^2 d\tau. \end{aligned}$$

Por (2.89) vemos que $\|w_{(j)}\| \le V_j(t)$; conseqüentemente,

$$\frac{1}{2} I \le C \int_0^t (V_j(\tau)^2 + \epsilon^{\frac{1}{3}} V_j(\tau)) d\tau.$$

Logo, de (2.90) obtemos a desigualdade

$$V_j(t)^2 \le V_j(0)^2 + 2C \int_0^t [V_j(\tau)^2 + \epsilon^{\frac{1}{3}} V_j(\tau)] d\tau, \tag{2.93}$$

então segue-se que, para t em $[0,T]$

$$\|w_{(j)}\| \leq V_j(t) \leq V_j(0)e^{CT} + \epsilon^{\frac{1}{3}}(e^{CT}-1). \tag{2.94}$$

Pelo Lema 2.4.1,

$$\begin{aligned} V_j(0) &\leq \|g-g_\epsilon\|_j + \|g-g_\delta\|_j + \delta^{\frac{1}{2}}\|g-g_\epsilon\|_{j+1} + \delta^{\frac{1}{2}}\|g-g_\delta\|_{j+1} \\ &\leq C\epsilon^{\frac{1}{3}}. \end{aligned} \tag{2.95}$$

Portanto, $\|w\|_j \leq C\epsilon^{\frac{1}{3}}$. Logo,

$$\|w\|_{s-2} \leq C\epsilon^{\frac{1}{3}}. \tag{2.96}$$

O argumento indutivo dado vale para $j = s-1$, com exceção de (2.95): para $j = s-1$ temos $V_j(0) \leq C\epsilon^{\frac{1}{6}}$. Nesse caso,

$$\|w\|_{s-1} \leq C\epsilon^{\frac{1}{6}}. \tag{2.97}$$

Para $j = s$, $\epsilon^{\frac{1}{6}}\|u\|_{s+1}$ e $\epsilon^{\frac{5}{6}}\|u_{t,(s+2)}\|$ são limitados. Logo, procedendo-se como acima, obtemos a seguinte desigualdade:

$$\|w_{(s)}\| \leq (\|g-g_\epsilon\|_s + \|g-g_\delta\|_s + C\epsilon^{\frac{1}{3}})e^{CT} + \epsilon^{\frac{1}{6}}(e^{CT}-1), \tag{2.98}$$

que pelo Lema 2.4.1, converge para zero quando $\epsilon \downarrow 0$, e assim a demonstração está completa. □

Observação 4 . *Como nos será útil posteriormente, observemos que as várias constantes que aparecem durante a demonstração da Proposiçao 2.4.4 dependem somente de T e de $\|g\|_k$ (onde $k \leq s$ depende de qual constante está em questão) e não de ϵ, quando ϵ é suficientemente pequeno.*

Corolário 2.4.5 . *As funções $u_t(x,t,\epsilon)$ são de Cauchy em $\mathcal{H}_T^{s-3}$ quando $\epsilon \downarrow 0$.*

Demonstração. Suponhamos novamente $\delta \leq \epsilon$ e seja $u = u_\epsilon$, $v = u_\delta$ e $w = u - v$. Então como em (2.77),

$$w_t = -(uw + \frac{1}{2}w^2)_x - w_{xxx} + \delta w_{xxt} + (\epsilon - \delta)u_{xxt}. \tag{2.99}$$

Pelo Corolário 2.4.3, os dois últimos termos da equação acima convergem para zero em $\mathcal{H}_T^{s-3}$ quando $\epsilon \downarrow 0$. A convergência para zero em $\mathcal{H}_T^{s-3}$dos dois outros termos do lado direito de (2.99) segue da Proposição 2.4.4. □

Agora temos ferramentas suficientes para provar um dos mais importantes teoremas de existência para o PVI da equação KdV, a saber:

Teorema 2.4.6 . *Dado $g \in H^s$, onde $s \geq 3$, existe uma única solução u para o PVI para a equação KdV com valor inicial g, onde $u \in \mathcal{H}_T^s$ para todo $T > 0$ finito.*

Demonstração. Primeiramente vamos demonstrar a unicidade. Suponhamos que existam duas soluções u e v; definamos $w = u-v$. Como $u_t+uu_x+u_{xxx} = 0$ e $v_t+v_x+v_{xxx} = 0$, subtraindo a segunda da primeira chegamos a

$$w_t + uu_x - vv_x + w_{xxx} = 0,$$

e como

$$\begin{aligned} uu_x - vv_x &= \frac{1}{2}[2uu_x - 2vv_x] \\ &= \frac{1}{2}[(u_x+v_x)(u-v) + (u+v)(u_x - v_x)] \\ &= \frac{1}{2}[(u+v)w]_x, \end{aligned}$$

segue-se que w satisfaz o PVI

$$\begin{cases} w_t + \frac{1}{2}[(u+v)w]_x + w_{xxx} = 0, \\ w(x,0) \equiv 0. \end{cases} \tag{2.100}$$

Assim, multiplicando a equação em (2.100) por w, obtemos

$$ww_t + \frac{1}{2}[(u+v)w]_x w + ww_{xxx} = 0,$$

e integrando esta última equação sobre $I\!R$ obtemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} w^2 dx - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(u+v)ww_x dx - \int_{-\infty}^{\infty} w_x w_{xx} dx = 0. \tag{2.101}$$

Como

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_x w_{xx} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(w_x)^2_x dx = \frac{1}{2}w_x^2\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

por (2.101) temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} w^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty}(u+v)ww_x dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(u+v)(w^2)_x dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(u_x+v_x)w^2 dx \\ &\le \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|u_x|w^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty}|v_x|w^2 dx\right] \\ &\le C\int_{-\infty}^{\infty} w^2(x,t)dx. \end{aligned}$$

Portanto, como $w^2(x,0) = 0$ e $\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} w^2 dx \leq C\int_{-\infty}^{\infty} w^2(x,t)dx$, segue do Corolário 1.1.7 que,

$$\int_{-\infty}^{\infty} w^2(x,t)dx = 0 \text{ para todo } t \geq 0.$$

Logo, $w = 0$ q.t.p.; mas w é contínua, o que implica em $w \equiv 0$. Os termos fronteiriços nas integrações por partes feitas acima são nulos porque $u(\cdot,t)$ e $v(\cdot,t)$ estão pelo menos em H^3, para cada $t \geq 0$.

Passemos agora a demonstrar a existência. Seja g_ϵ a regularização de g definida em (2.66) e seja u_ϵ a solução para o PVI (2.67) com dado inicial g_ϵ. Então, pelos resultados da Proposição 2.4.4 e do Corolário 2.4.5, para cada $T > 0$ finito, quando $\epsilon \to 0$,

$$\begin{cases} u_\epsilon \to u, & \text{em } \mathcal{H}_T^s, \\ \partial_t u_\epsilon \to v & \text{em } \mathcal{H}_T^{s-3}, \end{cases} \tag{2.102}$$

porque $\mathcal{H}_T^s$ é Banach. Por (2.102)

$$\begin{aligned} \|\partial_x(u_\epsilon^2) - \partial_x(u^2)\|_{s-1} &\leq \|u_\epsilon^2 - u^2\|_s \\ &= \|u_\epsilon + u\|_s \|u_\epsilon - u\|_s \\ &\leq C\|u_\epsilon - u\|_s \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

e analogamente

$$\|\partial_x^3 u_\epsilon - \partial_x^3 u\|_{s-3} \leq C\|u_\epsilon - u\|_s \to 0$$

quando $\epsilon \to 0$. Portanto, temos que

$$\begin{cases} \partial_x(u_\epsilon^2) \to \partial_x(u^2) & \text{em } \mathcal{H}_T^{s-1}, \\ \partial_x^3 u_\epsilon \to \partial_x^3 u & \text{em } \mathcal{H}_T^{s-3}. \end{cases} \tag{2.103}$$

Além disso, sabemos pelo Corolário 2.4.3 que $\partial_t u_\epsilon$ é limitado em $\mathcal{H}_T^{s-3}$, e assim $\partial_x^2 \partial_t u_\epsilon$ é limitado em $\mathcal{H}_T^{s-5}$. Então, pelo menos no sentido das distribuições,

$$\epsilon \partial_x^2 \partial_t u_\epsilon \longrightarrow 0 \text{ em } \mathcal{D}'. \tag{2.104}$$

(2.102) implica que $u_\epsilon \to u$ no sentido das distribuições; assim $\partial_t u_\epsilon \longrightarrow \partial_t u$ no sentido das distribuições e portanto $v = u_t$. Combinando isto com (2.102), (2.103) e (2.104), demonstra-se que pelo menos no sentido das distribuições, u satisfaz o PVI

$$\begin{cases} u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \\ u(x,0) = g(x). \end{cases} \tag{2.105}$$

A obtenção do dado inicial adequado g é uma conseqüência do Lema 2.4.1 e de (2.102). Como $u \in \mathcal{H}_T^s$ e $u_t \in \mathcal{H}_T^{s-3}$, segue-se que u é uma solução L^2 do PVI (2.105) para a KdV se $s = 3$ e uma solução clássica, se $s > 3$. (O termo *solução* L^2 significa que todas as derivadas na equação diferencial são, para cada t, funções L^2 da variável espacial x e a equação é satisfeita para cada t, em quase todo ponto x.)

A escolha de $T > 0$ foi arbitrária. Quanto maior for T, menor ϵ deve ser para que as limitações obtidas na Seção 2.3 sejam válidas. Como estamos interessados somente no caso em que $\epsilon \to 0$ (pois desejamos obter existência de solução para o PVI puro), T pode ser escolhido arbitrariamente grande e os mesmos resultados ainda são válidos. Logo, uma solução global (solução do PVI sobre $I\!R \times [0, \infty)$) de (2.105) pode ser definida da seguinte maneira: Seja u_K a solução do PVI (2.105) sobre $I\!R \times [0, K]$, para $K = 1, 2, \ldots$. Pela unicidade temos que se $L > K$, então $u_L \big|_{[0,K]} = u_K$. Definamos então uma função u sobre $I\!R \times [0, \infty)$ por $u(x,t) = u_K(x,t)$ para $t \leq K$. Temos que u, por construção, está bem definida e dá uma solução global para o PVI para a KdV, que está em $\mathcal{H}_T^s$ para todo $T > 0$ finito. $\square$

A solução garantida pelo Teorema 2.4.6 tem mais propriedades de regularidade. Consideremos agora a questão de como muitos dos polinômios invariantes formais (leis de conservação) da equação KdV (ver [18]) são de fato constantes do movimento das soluções garantidas acima. Uma lei de conservação da KdV geralmente é um funcional I que aplica alguma classe de funções na variável espacial (por exemplo, H^s) em $I\!R$ tal que se $u(x,t)$ é a solução da KdV que é, para cada $t \geq 0$, um elemento da classe de funções sobre a qual I atua, então $I(u)$ independe de t. Por exemplo, consideremos uma solução u da KdV onde o valor inicial g está em H^3, como assegurado pelo Teorema 2.4.6. Então

$$I_0(u) = \|u\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(x,t)dx,$$

é uma lei de conservação. Para constatarmos isto diferenciemos I_0 em relação ao tempo:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}I_0(u) &= \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} u^2(x,t)dx = 2\int_{-\infty}^{\infty} uu_t dx \\
&= -2\int_{-\infty}^{\infty} u(uu_x + u_{xxx})dx \\
&= -2\left[\frac{1}{3}u^3 + uu_{xx}\right]_{x=-\infty}^{x=+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u_x u_{xx} dx \\
&= -2\left[\frac{1}{3}u^3 + uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2\right]_{x=-\infty}^{x=\infty} = 0.
\end{aligned}$$

Logo, I_0 é uma constante, independente do tempo. É infinito o número de tais invariantes, tendo a forma (ver [15], Teorema 6)

$$I_k(u) = \int_{-\infty}^{\infty} [u_{(k)}^2 - c_k u u_{(k-1)}^2 + Q_k(u, \ldots, u_{(k-2)})]dx, \tag{2.106}$$

para cada $k = 0, 1, 2, \ldots$, onde Q_k é um polinômio de **posto** $k + 2$. Aquí a definição de posto encontrada em [18] é como segue:

Um monômio $u_{(0)}^{a_0} u_{(1)}^{a_1} \ldots u_{(p)}^{a_p}$ tem posto $\sum_{i=0}^{p}(1 + \frac{1}{2}i)a_i$, e então definimos o posto de um polinômio como sendo o maior dos postos das suas parcelas.

Na realidade Q_k compõe-se inteiramente de monômios de posto $k+2$. Se um desses funcionais não lineares é de fato uma constante do movimento de soluções da KdV, geralmente podemos fazer uma estimativa *a priori* sobre o comportamento da solução, a qual é válida para todo $t \geq 0$. Mais geralmente, se soubermos que $I_0, I_1, ..., I_k$, quando aplicados a uma solução u da KdV, são independentes do tempo e o dado inicial pertence a H^k, então pelos resultados da Proposição 1.4.2 temos que $\|u\|_k$ é limitado para todo $t \geq 0$. Esses resultados são listados na proposição abaixo:

PROPOSIÇÃO 2.4.7 . *Seja u uma solução da equação KdV sobre $I\!R \times [0, \infty)$ que está em H^k para cada $t \geq 0$ e suponhamos $I_0(u), I_1(u), ..., I_k(u)$ invariantes em relação a t. Então $\|u\|_k$ é limitado uniformemente para todo $t \geq 0$.*

Demonstração. Vemos isto de modo mais fácil por indução sobre k : já fizemos para $k = 0$. Se o resultado vale para $k-1$, então suponha que $I_0(u), I_1(u), ..., I_k(u)$ independem do tempo. Pela hipótese de indução , $\|u\|_{k-1}$ é limitada independente de $t \geq 0$. Pela Proposição 1.4.2, segue-se que: (i) $\|u\|, ..., \|u_{(k-1)}\|$ e (ii) $|u|, ..., |u_{(k-2)}|$ são todas limitadas, independentemente de $t \geq 0$ e de $x \in I\!R$. Assim, por (2.106), para qualquer $t \geq 0$, se $I_k(u) \equiv C$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_{(k)}^2 dx = C + c_k \int_{-\infty}^{+\infty} u u_{(k-1)}^2 dx - \int_{-\infty}^{+\infty} Q_k(u, ..., u_{(k-2)}) dx. \tag{2.107}$$

Por (i) e (ii) acima vemos que o lado direito de (2.107) é limitado, independente de $t \geq 0$ para $k > 1$. Para $k = 1$, (2.107) toma a forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx = C + \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} u^3 dx,$$

e o argumento da Proposição 2.3.1 pode ser aplicado para obtermos limitações independentes do tempo. □

Portanto é interessante determinar quantos dos polinômios invariantes (2.106) estão disponíveis. Se $g \notin H^s$, não teremos todos os $I_0, I_1, ..., I_s$ invariantes, pois em $t = 0$ pelo menos um dos $I_0(g), I_1(g), ..., I_s(g)$ não é uma integral convergente. Verificação direta das leis de conservação, como feito acima para $I_0(u)$ assumindo $g \in H^3$, é viável somente para $k \leq s - 3$ (ver [1]). Fazemos uma verificação indireta no próximo teorema.

TEOREMA 2.4.8 . *Seja $g \in H^s$, $s \geq 3$, e seja u a solução do PVI (2.105) para a equação KdV assegurada pelo Teorema 2.4.6. Então $I_0(u), I_1(u), ..., I_s(u)$ são independentes do tempo.*

Demonstração. Seja $k \leq s$. Para o PVI regularizado com dado inicial satisfazendo (2.66), é válida a identidade

$$\begin{aligned} J_k(u) = J_k(g_\epsilon) \quad &+ \quad \epsilon \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{k-2} \frac{\partial Q_k}{\partial u_{(j)}} u_{t,(j+2)} \right. \\ &+ \quad \left. c_k [2 u_x u_{(k-1)} u_{t,(k)} - u_{xxt} u_{(k-1)}^2 - u_t u_{(k)^2}] \right\} dx d\tau, \end{aligned} \tag{2.108}$$

onde

$$J_k(u) = \int_{-\infty}^{\infty} [(1 - \epsilon c_k u)u_{(k)}^2 + \epsilon u_{(k+1)}^2 - c_k u u_{(k-1)}^2 + Q_k] dx. \tag{2.109}$$

Por conveniência de notação, estamos omitindo o ϵ em u_ϵ. Obtemos (2.108) diferenciando $I_k(u)$ em relação a t e podemos fazê-lo porque u é uma função $\mathcal{C}^\infty$ em ambas as variáveis e todas as suas derivadas estão em H^∞ para cada $t \geq 0$ fixado. Pelo Lema 2.4.1 temos que

$$J_k(g_\epsilon) \longrightarrow I_k(g) \text{ quando } \epsilon \downarrow 0. \tag{2.110}$$

Segue pelo Corolário 2.4.2 que

$$J_k(u_\epsilon) \longrightarrow I_k(u) \text{ quando } \epsilon \downarrow 0, \tag{2.111}$$

onde u é a solução do PVI (2.105) para a equação KdV garantida pelo Teorema 2.4.6. Finalmente, usando os Corolários 2.4.2 e 2.4.3, deduz-se que a integral do lado direito de (2.108) converge para 0 pelo menos na razão $\epsilon^{\frac{1}{2}}$ quando $\epsilon \downarrow 0$. Combinando (2.110) e (2.111), obtemos de (2.108), no limite $\epsilon \downarrow 0$,

$$I_k(u) = I_k(g), \tag{2.112}$$

e como $t \geq 0$ e $k \leq s$ eram arbitrários nesses cálculos, a demonstração está concluida. □

Combinando a Proposição 2.4.7 com os Teoremas 2.4.6 e 2.4.8, e a demonstração do Corolário 2.4.5 aplicado às derivadas de ordem superior em relação ao tempo, demonstramos o seguinte teorema:

TEOREMA 2.4.9 . *Seja $g \in H^s$ com $s \geq 3$. Então existe uma única solução global do PVI (2.105) para a equação KdV que está em $\mathcal{H}_\infty^s$. Além disso, se $s - 3l \geq 0$, $\partial_t^l u \in \mathcal{H}_\infty^{s-3l}$.*

2.5 Dependência contínua de soluções em relação ao dado inicial.

Nesta seção vamos obter um resultado que combinado com o Teorema 2.4.9 demonstra que o PVI para a KdV é bem posto no sentido clássico de Hadamard, ou seja, é garantido existência, unicidade e dependência contínua da solução em relação ao dado inicial. Seja $U : H^s \to \mathcal{X}_{s,\infty}$ uma aplicação que a cada $g \in H^s$ associa a única solução u da equação KdV com valor inicial g. O resultado que aqui abordaremos estabelece que em um intervalo de tempo finito U é uma aplicação contínua.

Observamos que não se pode provar a continuidade de $U : H^s \to \mathcal{X}_{s,\infty}$, como podemos ver por um contra-exemplo dado em [1] para a equação alternativa (2.3). Especificamente, existe, para cada $C > 0$, uma solução similar $\phi = \phi_C$ para a equação KdV, já conhecida por Korteweg e de Vries em 1895 (consulte a referência [14]). Esta solução é conhecida como *onda solitária* da KdV e foi inspirada por um trabalho experimental de Scott Russel (1844) sobre ondas em um canal. A solução tem a forma

$$u_C(x,t) = \phi_C(x - Ct), \tag{2.113}$$

onde

$$\phi_C(z) = 3C sech^2(\frac{1}{2}C^{\frac{1}{2}}z). \tag{2.114}$$

Temos que uma translação arbitrária de ϕ_C também é uma solução suave da KdV. Para todo $s \geq 0$,

$$\phi_C \longrightarrow \phi_D \text{ em } H^s \text{ quando } C \to D \text{ em } I\!R. \tag{2.115}$$

Contudo, devido às suas diferentes velocidades de propagação, a norma da diferença $\|u_C - u_D\|_s$ da solução associada ao PVI (2.100) para a KdV possui

$$\lim_{t\to\infty} \|u_C - u_D\|_s = \|u_C\|_s + \|u_D\|_s. \tag{2.116}$$

Portanto, $u_C \not\longrightarrow u_D$ em H^s uniformemente para todo $t \geq 0$. Logo, é impossível demonstrarmos resultados válidos uniformemente no tempo.

TEOREMA 2.5.1 . *Dado $T > 0$, seja $U : H^s \to \mathcal{X}_{s,T}$ a restrição ao intervalo de tempo $[0, T]$ da aplicação associando a $g \in H^s$, $s \geq 3$, a única solução global de (2.105) para o valor inicial g. Então U é contínua.*

Demonstração. Primeiro observemos que é suficiente provarmos a continuidade de $U : H^s \to \mathcal{H}_T^s$. Porque seguirá indutivamente pela equação diferencial que $U : H^s \to \mathcal{X}_{s,T}$ é contínua. Por exemplo, se $s = 3$, e $U : H^3 \to \mathcal{H}_T^3$ é contínua, então $U : H^3 \to \mathcal{H}_T^{0,1}$ é contínua. De fato: Temos que

$$\mathcal{H}_T^{0,1} = \{u \in \mathcal{H}_T;\ \partial_t u \in \mathcal{H}_T\},$$

o qual é munido da norma

$$\|u\|_{\mathcal{H}_T^{0,1}} = \sup_{t\in[0,T]} \max_{j=0,1}\{\|\partial_t^j u(\cdot,t)\|\} = \sup_{t\in[0,T]} \max\{\|u\|, \|u_t\|\}.$$

Por hipótese, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, $\|g_1 - g_2\|_3 < \delta \implies \|u_1 - u_2\|_3 < \epsilon$, onde $u_1 = U(g_1)$, $u_2 = U(g_2) \in \mathcal{H}_T^{0,1}$, pois $u, u_t \in \mathcal{H}_T$. Daí,

$$\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{H}_T^{0,1}} = \sup_{t\in[0,T]} \max\{\|u_1 - u_2\|, \|\partial_t(u_1 - u_2)\|\} < \epsilon.$$

Por isso, é suficiente verificar que a aplicação $V : H^3 \to \mathcal{H}_T$ definida por $V(g) = \partial_t U(g)$ é contínua, pois já sabemos que $g \to u$ de H^3 em $\mathcal{H}_T$ é contínua. Mas se $g, h \in H^3$ e

$u = U(g)$, $v = U(h)$ são as soluções associadas aos PVIs da KdV com dados iniciais g e h respectivamente, então da desigualdade (1.28) segue-se que,

$$\begin{aligned} \|u_t - v_t\| &\leq \|uu_x + u_{xxx} - vv_x - v_{xxx}\| \\ &\leq \|uu_x - vv_x\| + \|u_{xxx} - v_{xxx}\| \\ &\leq \|(u-v)u_x\| + \|(u_x - v_x)v\| + \|u - v\|_3 \\ &\leq \|u - v\|_1\|u_x\| + \|u_x - v_x\|\|v\|_1 + \|u - v\|_3 \\ &\leq (\|u\|_1 + \|v\|_1 + 1)\|u - v\|_3. \end{aligned} \tag{2.117}$$

Tomando o supremo sobre $t \in [0, T]$ temos

$$\|V(g) - V(h)\|_{\mathcal{H}_T} = \|u_t - v_t\|_{\mathcal{H}_T} \leq (\|u\|_{\mathcal{H}_T^1} + \|v\|_{\mathcal{H}_T^1} + 1)\|U(g) - U(h)\|_{\mathcal{H}_T^3}, \tag{2.118}$$

mostrando que $V : H^3 \to \mathcal{H}_T$ é contínuo, pois $U : H^3 \to \mathcal{H}_T^3$ o é.

Demonstremos agora que $U : H^s \to \mathcal{H}_T^s$ é contínuo. Seja $g_n \to g$ em H^s, com $s \geq 3$ e sejam $u^n = U(g_n)$ e $u = U(g)$. Queremos mostrar que $u^n \to u$ em $\mathcal{H}_T^s$, ou seja, $\|u^n - u\|_s \to 0$ quando $n \to \infty$, uniformemente para $t \in [0, T]$. Para tanto, seja $\gamma > 0$. Vamos procurar um N tal que se $n \geq N$, então $\|u^n - u\|_s \leq \gamma$ para todo t em $[0, T]$. Pela desigualdade triangular,

$$\|u^n - u\|_s \leq \|u^n - u_\epsilon^n\|_s + \|u_\epsilon^n - u_\epsilon\|_s + \|u_\epsilon - u\|_s, \tag{2.119}$$

onde u_ϵ é a solução do PVI regularizado (2.67) com dado inicial $g_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty$ como em (2.66) e analogamente, u_ϵ^n. Combinando as desigualdades (2.97) e (2.98) da Proposição 2.4.4 obtemos, para cada $t \in [0, T]$ e $\delta \leq \epsilon$,

$$\begin{aligned} \|u_\delta - u_\epsilon\|_s &\leq \|u_\delta - u_\epsilon\|_{s-1} + \|(u_\delta)_{(s)} - (u_\epsilon)_{(s)}\| \\ &\leq C\epsilon^{\frac{1}{6}} + \|(u_\delta)_{(s)} - (u_\epsilon)_{(s)}\| \\ &\leq C\epsilon^{\frac{1}{6}} + (\|g_\epsilon - g\|_s + \|g - g_\delta\|_s)e^{CT} + \epsilon^{\frac{1}{6}}(e^{CT} - 1) \\ &\leq C\epsilon^{\frac{1}{6}} + C(\|g_\epsilon - g\|_s + \|g - g_\delta\|_s). \end{aligned}$$

Fazendo $\delta \downarrow 0$ na última desigualdade, como pelo Teorema 2.4.6, $u_\delta \to u$ em $\mathcal{H}_T^s$, segue-se que, para t em $[0, T]$,

$$\|u - u_\epsilon\|_s \leq C\epsilon^{\frac{1}{6}} + C\|g - g_\epsilon\|_s, \tag{2.120}$$

e analogamente,

$$\|u^n - u_\epsilon^n\|_s \leq C\epsilon^{\frac{1}{6}} + C\|g_n - g_{n\epsilon}\|_s. \tag{2.121}$$

Temos que $C = C(T, \|g\|_s)$, logo podemos tomar o mesmo C para (2.120) e (2.121). De fato, como $g_n \to g$ em H^s, segue-se que, para $\epsilon = 1$, existe n_1 tal que $\|g_n\|_s \leq \|g\|_s + 1$, para todo $n \geq n_1$. Sejam $\widetilde{M} = \max\{\|g_k\|_s;\ 0 \leq k < n_1\}$ e $M = \max\{\widetilde{M}, \|g\|_s + 1\}$. Então, $\|g_n\|_s \leq M$, para todo $n \geq 0$. Portanto as constantes acima são limitadas superiormente e assim podemos tomar C em (2.120) e (2.121) como sendo o supremo delas.

Pelo Lema 2.4.1, se $g_n \to g$ em H^s, então $\|g_n - g_{n\epsilon}\|_s$, $n = 1, 2, ...$, e $\|g - g_\epsilon\|_S$ convergem uniformemente para zero quando $\epsilon \downarrow 0$. Então, por esta observação e pelas desigualdades (2.120) e (2.121) segue-se que

$$\|u^n - u_\epsilon^n\|_s \to 0 \quad \text{e} \quad \|u - u_\epsilon\|_s \to 0 \tag{2.122}$$

uniformemente, para $t \in [0, T]$ e $n = 1, 2, ...$, quando $\epsilon \downarrow 0$. Portanto, ϵ pode ser escolhido tão pequeno que, para todo t em $[0, T]$ e $n = 1, 2, ...$,

$$\|u - u_\epsilon\|_s \leq \frac{1}{3}\gamma \quad \text{e} \quad \|u^n - u_\epsilon^n\|_s \leq \frac{1}{3}\gamma. \tag{2.123}$$

Portanto para demonstrar que para n suficientemente grande $\|u^n - u\|_s \leq \gamma$, para $t \in [0, T]$, é apenas necessário demonstrar que $\|u_\epsilon^n - u_\epsilon\|_s \to 0$ quando $n \to \infty$, onde $\epsilon > 0$ é fixado, mas suficientemente pequeno para que (2.123) valha. Porque se N é escolhido de modo que, para $n \geq N$, $\|u_\epsilon^n - u_\epsilon\|_s \leq \frac{1}{3}\gamma$, então por (2.119) e (2.123) segue-se que para $n \geq N$, $\|u^n - u\|_s \leq \gamma$.

Não existe uma maneira curta de executar essa última tarefa. Um método é argumentar de modo análogo à demonstração da Proposição 2.4.4. Contudo, como para o que temos em vista, $\epsilon > 0$ é fixado, o problema torna-se um pouco menos complicado. Especificamente, por definição, u_ϵ é a solução do PVI

$$u_t + uu_x + u_{xxx} - \epsilon u_{xxt} = 0, \quad u(x, 0) = g_\epsilon(x), \tag{2.124}$$

e o mesmo acontecendo com u_ϵ^n. Mas, como ϵ é fixado, podemos utilizar (2.27) para transformar (2.124) no PVI

$$v_t + v_x + vv_x - v_{xxt} = 0, \quad v(x, 0) = h(x) = \epsilon g_\epsilon(\epsilon^{\frac{1}{2}} x). \tag{2.125}$$

Seja $h_n(x) = \epsilon g_{n\epsilon}(\epsilon^{\frac{1}{2}} x)$ e sejam v^n e v as soluções do PVI (2.125) postos para h_n e h respectivamente. Então, se $v^n \to v$ en $\mathcal{H}_R^s$, onde $R > 0$ é arbitrário mas finito, segue-se invertendo a transformação (2.27), que $u_\epsilon^n \to u_\epsilon$ em $\mathcal{H}_T^s$.

Como $g_n \to g$ em H^s, certamente $g_n \to g$ em L^2. Ora,

$$\begin{aligned} \|g_{n\epsilon} - g_\epsilon\|_s^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (1 + k^2 + \cdots + k^{2s}) |\varphi(\epsilon^{\frac{1}{6}} k)(g_n - g)\hat{}(k)|^2 dk \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} (1 + k^2 + \cdots + k^{2s}) |(g_n - g)\hat{}(k)|^2 dk \\ &= \|g_n - g\|_s. \end{aligned}$$

Então, segue-se que $g_{n\epsilon} \to g$ em H^r para todo $r \geq 0$. A razão de convergência em várias normas H^r depende fortemente de ϵ, mas por agora ϵ é fixado. Assim, $h_n, h \in H^\infty$ e $h_n \to h$ em H^r para todo $r \geq 0$. O Lema 2.2.2 assegura-nos que $v^n, v \in \mathcal{H}_R^{\infty,\infty}$ para todo $R > 0$. Então os seguintes cálculos são válidos:

Seja $w^n = v^n - v$. Observamos que w^n satisfaz o PVI

$$\begin{cases} w_t^n + w_x^n + w^n w_x^n + (vw^n)_x - w_{xxt}^n = 0, \\ w^n(x,0) = h_n(x) - h(x) = f_n(x) \end{cases} \tag{2.126}$$

onde $f_n \to 0$ em H^r para todo $r \geq 0$. Para facilitar a escrita, omitiremos o n durante os cálculos a seguir. Em analogia com (2.89), definamos

$$W_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [w_{(j)}^2 + w_{(j+1)}^2] dx. \tag{2.127}$$

Multipliquemos (2.126) por $w_{(2j)}$:

$$w_{(2j)} w_t + w_{(2j)} w_x + w_{(2j)} w w_x + w_{(2j)} (vw)_x - w_{(2j)} w_{xxt} = 0,$$

agora integrando cada parcela sobre $I\!R$ e sobre $[0,t]$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} w_{(2j)} w_t dx d\tau &= \frac{(-1)^j}{2} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \partial_t (w_{(j)})^2 dx d\tau \\ &= \frac{(-1)^j}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (w_{(j)}^2 - f_{(j)}^2) dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} w_{(2j)} w_x dx d\tau &= \frac{(-1)^j}{2} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x (w_{(j)})^2 dx d\tau \\ &= \frac{(-1)^j}{2} \int_0^t w_{(j)}^2 \Big|_{-\infty}^{\infty} d\tau = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} w_{(2j)} w_{xxt} dx d\tau &= \frac{(-1)^{j-1}}{2} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \partial_t (w_{(j+1)})^2 dx d\tau \\ &= \frac{(-1)^{j-1}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (w_{(j+1)}^2 - f_{(j+1)}^2) dx, \end{aligned}$$

então, juntando esses resultados, obtemos

$$\frac{(-1)^j}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [w_{(j)}^2 + w_{(j+1)}^2] dx = \frac{(-1)^j}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [f_{(j)}^2 + f_{(j+1)}^2] dx - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [w w_x + (vw)_x] w_{(2j)} dx d\tau,$$

ou seja,

$$W_j(t) = W_j(0) + (-1)^{j+1} 2 \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [w w_x + (vw)_x] w_{(2j)} dx d\tau. \tag{2.128}$$

Integrando por partes o segundo membro à direita de (2.128) e aplicando a regra de Leibnitz como na demonstração da Proposição 2.4.4, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [w w_x \;+\; (vw)_x] w_{(2j)} dx d\tau &= (-1)^j \int_{-\infty}^{\infty} [w w_x + (vw)_x]_{(j)} w_{(j)} dx \\ &= (-1)^j \left[\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (w^2)_{(j+1)} w_{(j)} dx + \int_{-\infty}^{\infty} (vw)_{(j+1)} w_{(j)} dx \right] \end{aligned}$$

$$= (-1)^j \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{j+1} \binom{j+1}{k} w_{(j+1-k)} w_{(k)} w_{(j)} + \sum_{k=0}^{j+1} \binom{j+1}{k} w_{(j+1-k)} v_{(k)} w_{(j)} \right] dx \right\}$$

e daí, substituindo isso em (2.128), chegamos à seguinte desigualdade:

$$W_j(t) \leq W_j(0) + C \left| \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{j+1} w_{(j+1-k)} w_{(k)} w_{(j)} + \sum_{k=0}^{j+1} w_{(j+1-k)} v_{(k)} w_{(j)} \right) dx d\tau \right|. \tag{2.129}$$

Quando $j = 0$, obtemos de (2.129) a desigualdade,

$$\begin{aligned}
W_0(t) &\leq W_0(0) + C \left| \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (2w_x w^2 + w_x w v + w^2 v_x) dx d\tau \right| \\
&= W_0(0) + C \left| \int_0^t \left[\frac{2}{3} \int_{-\infty}^{\infty} (w^3)_x dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (w^2)_x v dx + \int_{-\infty}^{\infty} w^2 v_x dx \right] d\tau \right| \\
&= W_0(0) + C \left| \int_0^t \left[-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} w^2 v_x dx + \int_{-\infty}^{\infty} w^2 v_x dx \right] d\tau \right| \\
&= W_0(0) + C \left| \frac{1}{2} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} w^2 v_x dx d\tau \right| \\
&\leq W_0(0) + C \left| \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} w^2 v_x dx d\tau \right| \\
&\leq W_0(0) + C \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} w^2 dx d\tau \\
&\leq W_0(0) + C \int_0^t W_0(\tau) d\tau,
\end{aligned} \tag{2.130}$$

onde colocamos $\sup |v_x|$ para fora da integral. Pelo Corolário 1.1.7 do Teorema 1.1.6 a desigualdade (2.130) implica em

$$W_0(t) \leq W_0(0) e^{CT}, \tag{2.131}$$

e de (2.131) obtemos (lembremos que aqui $w = w^n$)

$$\|w^n\|_1 \leq \|f_n\|_1 e^{CR}, \tag{2.132}$$

pela qual concluímos que $\|w^n\|_1 \to 0$ (pois $\|f_n\|_1 = \|h_n - h\|_1 \to 0$) quando $n \to \infty$, uniformemente em $[0, R]$. Agora, assumindo indutivamente que $\|w^n\|_j \to 0$ quando $n \to \infty$, uniformemente em $[0, R]$, vemos que $\|w^n\|_{j+1} \to 0$ quando $n \to \infty$ utilizando (2.129) para obtermos uma desigualdade da forma

$$W_j(t) \leq W_j(0) + C \int_0^t [W_j(\tau) + a_n W_j(\tau)^{\frac{1}{2}}] d\tau,$$

onde $a_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Segue-se que, para t em $[0, R]$

$$W_j(t)^{\frac{1}{2}} \leq W_j(0)^{\frac{1}{2}} e^{CR} + a_n (e^{CR} - 1), \tag{2.133}$$

e isto é suficiente para concluir que $\|w^n\|_{j+1} \to 0$ quando $n \to \infty$, uniformemente para $t \in [0, R]$. Logo, está demonstrado que $\|w^n\|_r \to 0$ quando $n \to \infty$, uniformemente para $t \in [0, R]$, para todo $r \geq 0$; isto é, $\|v^n - v\|_r \to 0$ uniformemente sobre intervalos de tempo limitados, para todo $r \geq 0$. E assim, o teorema está provado. $\square$

A última parte do Teorema 2.5.1 demonstra resultados em relação a dependência contínua de solução que não foram feitos em [1], os quais juntamos no teorema a seguir.

TEOREMA 2.5.2 . *Seja $g \in H^m$ onde $m \geq 1$ e consideremos o PVI*

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0, \quad u(x,0) = g(x), \tag{2.134}$$

com $x \in I\!R$ e $t \geq 0$. Então existe uma única solução $u \in \mathcal{H}_T^m$ para (2.134) para todo $T > 0$ finito. Além disso, $\partial_t^l u \in \mathcal{H}_T^{m+1}$ para todo $l > 0$; a solução u (respectivamente, $\partial_t^l u$) depende continuamente em $\mathcal{H}_T^m$ do valor inicial $g \in H^m$ (respectivamente, $\mathcal{H}_T^{m+1}$), para todo $T > 0$.

2.6 Relações entre o PVI para a KdV e o modelo alternativo (2.3).

Nesta seção vamos utilizar as ferramentas das seções anteriores para comparar as soluções da KdV e do modelo (2.3).

Suponhamos que a amplitude da onda inicial seja inversamente proporcional ao quadrado do comprimento de onda, a amplitude sendo pequena se comparada com a profundidade do fluído. Por exemplo, dada uma função $g : I\!R \to I\!R$ consideremos a função associada

$$h_\epsilon(x) = \epsilon g(\epsilon^{\frac{1}{2}} x), \tag{2.135}$$

para $\epsilon \ll 1$. O problema é como os dois modelos em questão se comportam com o mesmo valor inicial (2.135) onde ϵ é pequeno. Consideremos $u^* = u^*(x,t;\epsilon)$ a solução do PVI associado à K-dV

$$u_t^* + u_x^* + u^* u_x^* + u_{xxx}^* = 0, \quad u^*(x,0) = h_\epsilon(x) \tag{2.136}$$

e seja $v^* = v^*(x,t;\epsilon)$ a solução do PVI para (2.3)

$$v_t^* + v_x^* + v^* v_x^* - v_{xxt}^* = 0, \quad v^*(x,0) = h_\epsilon(x) \tag{2.137}$$

Então estamos interessados em saber o valor da diferença entre u^* e v^* sobre um algum intervalo de tempo finito $[0, T]$ fixado. Pela desiguadade (1.28),

$$\sup_{I\!R \times [0,T]} |u^*(x,t) - v^*(x,t)| \leq \sup_{[0,T]} \|u^* - v^*\|_1. \tag{2.138}$$

Assim, uma estimativa para $\|u^* - v^*\|_1$ renderá uma estimativa pontual sobre a diferença entre u^* e v^*. Observemos que $h_\epsilon \to 0$ em H^s quando $\epsilon \to 0$ e portanto, os resultados de dependência contínua da Seção 2.3 para os dois modelos em questão implicam que ambos, u^* e v^* tendem a zero quando $\epsilon \downarrow 0$. Logo, u^* e v^* aproximam-se um do outro. Mas queremos algo melhor. Desejamos determinar se o argumento acima é o melhor que se pode conseguir.

Para que comparemos u^* com v^* vamos calcular a inversa da mudança de variáveis (2.27):

$$u^*(x,t) = \epsilon u(\epsilon^{\frac{1}{2}}(x-t), \epsilon^{\frac{3}{2}}t).$$

Sejam $\epsilon^{\frac{1}{2}}(x-t) = y$ e $\tau = \epsilon^{\frac{3}{2}}t$; então $x = \epsilon^{-\frac{1}{2}}y + t$ e $t = \epsilon^{-\frac{3}{2}}\tau$; daí, $x = \epsilon^{-\frac{1}{2}}y + \epsilon^{-\frac{3}{2}}\tau$. Substituindo, temos

$$u(x,t) = \epsilon^{-1}u^*(\epsilon^{-\frac{1}{2}}x + \epsilon^{-\frac{3}{2}}t, \epsilon^{-\frac{3}{2}}t), \tag{2.139}$$

e analogamente para v e v^*. Observemos que

$$u_t = \epsilon^{-1}(u_y^*\epsilon^{-\frac{3}{2}} + u_\tau^*\epsilon^{-\frac{3}{2}}) = \epsilon^{-\frac{5}{2}}(u_y^* + u_\tau^*),$$

$$u_x = \epsilon^{-\frac{3}{2}}u_y^* \text{ e } u_{xxx} = \epsilon^{-\frac{5}{2}}u_{yyy}^*.$$

Logo, u satisfaz a equação

$$\begin{cases} u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \\ u(x,0) = g(x) \end{cases} \tag{2.140}$$

e fazendo contas análogas, vemos que v satisfaz

$$\begin{cases} v_t + vv_x + v_{xxx} - \epsilon v_{xxt} = 0, \\ v(x,0) = g(x). \end{cases} \tag{2.141}$$

Logo, podemos utilizar os mesmos argumentos da Seção 2.4 para comparar u e v em (2.140) e (2.141), bem como as estimativas *a priori* da Seção 2.3. Seja $w = v - u$. w satisfaz o seguinte PVI análogo a (2.77) com $\delta = 0$ e valor inicial zero:

$$\begin{cases} w_t + (vw + \frac{1}{2}w^2)_x + w_{xxx} - \epsilon v_{xxt} = 0, \\ w(x,0) = 0. \end{cases} \tag{2.142}$$

Suponhamos inicialmente que $g \in H^\infty$, assim u e v são C^∞ com relação a x e a t e todas as suas derivadas estão em $\mathcal{H}_T$. Então como em (2.78), temos para $j = 0, 1, 2, ...$, as identidades

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_{(j)}^2 dx = -2\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [(vw + \frac{1}{2}w^2)_{(j+1)} - \epsilon v_{t,(j+2)}]w_{(j)}dxd\tau. \tag{2.143}$$

Por economia de escrita, definamos

$$V_j(t)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} w_{(j)}^2 dx. \tag{2.144}$$

Temos que $V_j(0) = 0$ para todo j. O lema a seguir estende os resultados de (2.56).

LEMA 2.6.1 . *Seja v a solução do PVI (2.141) com valor inicial $g \in H^\infty$, cujas derivadas estão todas em $\mathcal{H}_T$ para todo $T > 0$. Então para qualquer inteiro $l \geq 0$ e qualquer $t \geq 0$ valem as seguintes desigualdades:*

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad \|\partial_x^l v_t\| \leq (\|v\|_{l+3} + \|v\|_{l+1}^2), \\
&\text{(ii)} \quad \|\partial_x^l v_t\| \leq \tfrac{1}{2}\epsilon^{-\frac{1}{2}}(\|v\|_{l+2} + \|v\|_l^2), \\
&\text{(iii)} \quad \|\partial_x^l v_t\| \leq \epsilon^{-1}(\|v\|_{l+1} + \|v\|_{l-1}^2).
\end{aligned} \tag{2.145}$$

Demonstração. Escrevemos a equação diferencial na forma

$$(I - \epsilon\partial_x^2)v_t = -(vv_x + v_{xxx}),$$

e invertemos o operador $I - \epsilon\partial_x^2$ como antes para obtermos

$$v_t = -(I - \epsilon\partial_x^2)^{-1}(vv_x + v_{xxx}) = -(I - \epsilon\partial_x^2)^{-1}(V + v_{xxx}) \tag{2.146}$$

onde $V = vv_x$. Temos que $\|V\|_k \leq \|v\|_{k+1}^2$, para todo $t \geq 0$. Então naturalmente

$$w_l = \partial_x^l v_t = -\partial_x^l(I - \epsilon\partial_x^2)^{-1}(V + v_{xxx}). \tag{2.147}$$

Calculando sua transformada de Fourier, obtemos

$$\widehat{w}_l(k) = \frac{-(ik)^l}{1+\epsilon k^2}[\widehat{V} + (ik)^3\widehat{v}](k). \tag{2.148}$$

Logo,

$$\|w_l\|^2 = \|\widehat{w}_l\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^{2l}}{(1+\epsilon k^2)^2}|\widehat{V} + (ik)^3\widehat{v}|^2 dk. \tag{2.149}$$

O cálculo de (2.149) é feito de três maneiras correspondendo a (2.145) (i), (ii) e (iii). Primeiro, como $1 + \epsilon k^2 \geq 1$ para todo k,

$$\begin{aligned}
\|w_l\| &\leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} k^{2l}|\widehat{V} + (ik)^3\widehat{v}|^2 dk\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|V + v_{xxx}\|_l \\
&\leq \|V\|_l + \|v_{xxx}\|_l \\
&\leq \|v\|_{l+1}^2 + \|v\|_{l+3}.
\end{aligned}$$

Para (ii) procedemos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\|w_l\| &\leq \sup_{k\in\mathbb{R}}\left(\frac{|k|}{1+\epsilon k^2}\right)\left[\int_{-\infty}^{\infty} k^{2(l-1)}|\widehat{V} + (ik)^3\widehat{v}|^2 dk\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{2\epsilon^{\frac{1}{2}}}\|V + v_{xxx}\|_{l-1} \\
&\leq \frac{1}{2\epsilon^{\frac{1}{2}}}(\|V\|_{l-1} + \|v_{xxx}\|_{l-1}) \\
&\leq \frac{1}{2\epsilon^{\frac{1}{2}}}(\|v\|_l^2 + \|v\|_{l+2}).
\end{aligned} \tag{2.150}$$

Finalmente, para (iii),

$$\begin{aligned}
\|w_l\| &\leq \sup_{k\in I\!R}\left(\frac{k^2}{1+\epsilon k^2}\right)\left[\int_{-\infty}^{\infty} k^{2(l-2)}|\widehat{V}+(ik)^3\widehat{v}|^2dk\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \frac{1}{\epsilon}\|V+v_{xxx}\|_{l-2}\\
&\leq \frac{1}{\epsilon}(\|V\|_{l-2}+\|v_{xxx}\|_{l-2})\\
&\leq \frac{1}{\epsilon}(\|v\|_{l-1}^2+\|v\|_{l+1}).
\end{aligned} \tag{2.151}$$

E assim, provamos o lema. □

COROLÁRIO 2.6.2 . *Para v como no Lema 2.6.1, as seguintes desigualdades são válidas:*

$$\begin{aligned}
\text{(i)}\quad \|\partial_x^l v_t\| &\leq C(\|g\|_{l+4}+\|g\|_{l+2}^2)\\
&\leq C(\|g\|_{l+4}+\|g\|_{l+4}^2),\\
\text{(ii)}\quad \|\partial_x^l v_t\| &\leq C\epsilon^{-\frac{1}{2}}(\|g\|_{l+3}+\|g\|_{l+1}^2)\\
&\leq C\epsilon^{-\frac{1}{2}}(\|g\|_{l+3}+\|g\|_{l+3}^2),\\
\text{(iii)}\quad \|\partial_x^l v_t\| &\leq C\epsilon^{-1}(\|g\|_{l+2}+\|g\|_{l}^2)\\
&\leq C\epsilon^{-1}(\|g\|_{l+2}+\|g\|_{l+2}^2),
\end{aligned} \tag{2.152}$$

para $t\in[0,T]$ e ϵ suficientemente pequeno, onde as constantes dependem de T e independem de ϵ.

Demonstração. Este corolário é uma consequência do Lema 2.6.1 e da Proposição 2.3.6. □

Agora vamos obter limitações para as normas H^s de $w=v-u$.

PROPOSIÇÃO 2.6.3 . *Para cada $k\geq 0$, $w=v-u$ satisfaz as desigualdades*

$$\|w_{(k)}\|\leq \epsilon M_k, \tag{2.153}$$

onde $M_k=M_k(T,\|g\|_{k+6})$ é independente de ϵ suficientemente pequeno.

Demonstração. Procederemos por indução sobre k. Consideremos (2.143) com

$j = 0$. Então

$$
\begin{aligned}
V_0(t)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} w^2 dx = -2\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [(vw + \frac{1}{2}w^2)_x - \epsilon v_{xxt}]w dx d\tau \\
&\leq 2\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [v_x w^2 + \frac{1}{2}v(w^2)_x + w^2 w_x - \epsilon v_{xxt} w] dx d\tau \\
&\leq 2\int_0^t \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\frac{1}{2}v_x + w_x| w^2 dx + \epsilon \left|\int_{-\infty}^{\infty} v_{xxt} w dx\right|\right] d\tau \\
&\leq 2 \sup_{\mathbb{R}\times[0,T]} |w_x + \frac{1}{2}v_x| \int_0^t V_0(\tau)^2 d\tau + 2\epsilon \int_0^t \|v_{xxt}\| \|w\| d\tau \\
&\leq 2 \sup_{\mathbb{R}\times[0,T]} |w_x + \frac{1}{2}v_x| \int_0^t V_0(\tau)^2 d\tau + 2C_2\epsilon \int_0^t V_0(\tau) d\tau \\
&\leq 2C_1 \int_0^t V_0(\tau)^2 d\tau + 2C_2\epsilon \int_0^t V_0(\tau) d\tau, \qquad (2.154)
\end{aligned}
$$

onde, pela Proposição 2.3.3 e pela desigualdade (1.28)

$$
\begin{aligned}
|w_x + \frac{1}{2}v_x| &\leq |w_x| + \frac{1}{2}|v_x| \\
&\leq \|w_x\|_1 + \frac{1}{2}\|v_x\|_1 \\
&\leq \|w\|_2 + \frac{1}{2}\|v\|_2 \\
&\leq C_1(\|g\|_3), \qquad (2.155)
\end{aligned}
$$

portanto, $C_1 = C_1(T, \|g\|_3)$. Da mesma forma, pelo Cororário 2.6.2, $\|v_{xxt}\| \leq C_2(T, \|g\|_6)$. Seja

$$
U(t) = 2C_1 \int_0^t V_0(\tau)^2 d\tau + 2C_2\epsilon \int_0^t V_0(\tau) d\tau.
$$

Veja que $U(0) = 0$ e $V^2(t) \leq U(t)$. Temos que

$$
\begin{aligned}
\dot{U}(t) &= 2C_1 V(t)^2 + 2C_2\epsilon V(t) \\
&\leq 2C_1 U(t) + 2C_2\epsilon U(t)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

e então

$$
\frac{\dot{U}}{U} \leq 2C_1 + 2C_2\epsilon U^{-\frac{1}{2}}.
$$

Seja $W^2(t) = U(t)$; então substituído isso na última desigualdade acima, obtemos

$$
\dot{W} \leq C_1 W + C_2\epsilon,
$$

e $W(0)=0$. Agora, aplicando o Corolário 1.1.7 obtemos,

$$\begin{aligned} W(t) &\leq \frac{C_2}{C_1}\epsilon e^{C_1 t} - \frac{C_2}{C_1}\epsilon \\ &\leq \frac{C_2}{C_1}\epsilon(e^{C_1 T}-1) \\ &= \epsilon M_0(T,\|g\|_6), \end{aligned}$$

isto é,

$$\|w\| \leq \epsilon(C_2/C_1)(e^{C_1 T}-1) = \epsilon M_0(T,\|g\|_6). \tag{2.156}$$

Agora suponhamos que se $0 \leq j < k$,

$$\|w_{(j)}\| \leq \epsilon M_j, \tag{2.157}$$

onde $k>0$ e $M_j = M_j(T,\|g\|_{j+6})$. Da identidade (2.143) obtemos

$$\begin{aligned} V_k(t)^2 &= -2\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}[(vw+\frac{1}{2}w^2)_{(k+1)} - \epsilon v_{t,(k+2)}]w_{(k)}dxd\tau \\ &= -2\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{k+1} c_j w_{(k+1-j)}v_{(j)}w_{(k)} + \sum_{j=0}^{k+1} c_j w_{(k+1-j)}w_{(j)}w_{(k)}\right]dxd\tau \\ &+ 2\epsilon\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} v_{t,(k+2)}w_{(k)}dxd\tau. \end{aligned} \tag{2.158}$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{V_k(t)^2}{2} &\leq C\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{j=1}^{k+1}|w_{(k+1-j)}v_{(j)}w_{(k)}| + \sum_{j=1}^{k}|w_{(k+1-j)}w_{(j)}w_{(k)}| + \epsilon|v_{t,(k+2)}w_{(k)}|\right]dxd\tau \\ &+ C\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}[w_{(k+1)}w_{(k)}v + 2ww_{(k)}w_{(k+1)}]dxd\tau. \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução (2.157), $\|w_{(k-1)}\| \leq M_{k-1}$. Pelo Corolário 2.4.2, $\|v\|_s \leq C\epsilon$, $|v_{(k)}| \leq C$, $\|w\|_{k-1} \leq C\epsilon$, e para $0 \leq j \leq k-2$, $|w_{(j)}| \leq C\epsilon$ sobre $I\!R \times [0,T]$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{V_k(t)^2}{2} &\leq C\int_0^t\left[\int_{-\infty}^{\infty} w_{(k)}^2 dx + \sum_{j=2}^{k+1}\int_{-\infty}^{\infty}|w_{(k+1-j)}w_{(k)}|dx + \int_{-\infty}^{\infty} w_{(k)}^2 dx\right. \\ &+ \left.\epsilon\sum_{j=2}^{k}\int_{-\infty}^{\infty}|w_{(k)}|dx\right] - \frac{1}{2}C\left[\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} w_{(k)}^2 dxd\tau + \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} w_{(k)}^2 dxd\tau\right] \\ &\leq C\int_0^t V_k(\tau)^2 d\tau + (k-1)C\epsilon\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}|w_{(k)}|dxd\tau \\ &\leq C_{2k+1}\int_0^t V_k(\tau)^2 d\tau + \epsilon C_{2k+2}\int_0^t V_k(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Portanto,

$$V_k(t)^2 \leq 2C_{2k+1}\int_0^t V_k(\tau)^2 d\tau + 2\epsilon C_{2k+2}\int_0^t V_k(\tau)d\tau$$

onde

$$C_{2k+1} = C_{2k+1}(T, \|g\|_{k+5})$$

e

$$C_{2k+2} = C_{2k+2}(T, \|g\|_{k+6}).$$

Logo, pelo Corolário 1.1.7 segue-se que, para t em $[0, T]$,

$$\|w_{(k)}\| = V_k(t) \leq \epsilon\frac{C_{2k+2}}{C_{2k+1}}(\exp C_{2k+1}T - 1) = \epsilon M_k, \tag{2.159}$$

onde $M_k = M_k(T, \|g\|_{k+6})$, como desejávamos □

PROPOSIÇÃO 2.6.4 . *Para cada $k \geq 0$, $w = v - u$ satisfaz a desigualdade*

$$\|w_{(k)}\| \leq \epsilon^{\frac{1}{2}} N_k, \tag{2.160}$$

válida para $t \in [0, T]$ e ϵ suficientemente pequeno, onde $N_k = N_k(T, \|g\|_{k+4})$.

Demonstração. Vamos novamente proceder por indução sobre k. Para $k = 0$,

$$\begin{aligned} V_0(t)^2 &= -2\int_0^t \left[\int_{-\infty}^{\infty}[(vw + \frac{1}{2}w^2)_x w dx - \epsilon\int_{-\infty}^{\infty} v_{xxt} w dx\right] d\tau \\ &= -2\int_0^t \left[\int_{-\infty}^{\infty}[(vw + \frac{1}{2}w^2)_x w dx - \epsilon\int_{-\infty}^{\infty} v_t w_{xx} dx\right] d\tau, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} V_0(t)^2 &\leq 2\sup_{\mathbb{R}\times[0,T]}|w_x + \frac{1}{2}v_x|\int_0^t V_0(\tau)^2 d\tau + 2\epsilon\int_0^t \|v_t\|\|w_{xx}\| d\tau \\ &\leq C_1\int_0^t V_0(\tau)^2 d\tau + \epsilon C_2 t, \end{aligned} \tag{2.161}$$

com $t \in [0, T]$, onde pelo Corolário 2.6.2, C_1 depende de T e $\|g\|_3$ e C_2 de T e $\|g\|_4$. Assim, segue-se que

$$\|w\|^2 = V_0(t)^2 \leq \epsilon(C_2/C_1)(e^{C_1 T} - 1),$$

e portanto,

$$\|w\| \leq \epsilon^{\frac{1}{2}} N_0, \tag{2.162}$$

para t em $[0,T]$, onde $N_0 = N_0(T, \|g\|_4)$. Seja $k=1$. Por (2.143) podemos escrever

$$
\begin{aligned}
V_1(t)^2 &= -2\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}[(\frac{1}{2}w_x + \frac{3}{2}v_x)w_x^2 + v_{xx}ww_x - \epsilon v_{xxxt}w_x]dxd\tau \\
&= -2\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}[(\frac{1}{2}w_x + \frac{3}{2}v_x)w_x^2 - \frac{1}{2}v_{xxx}w^2 + \epsilon v_t w_{xxxx}]dxd\tau \\
&\leq 2\sup_{\mathbb{R}\times[0,T]}|\frac{1}{2}w_x + \frac{3}{2}v_x|\int_0^t V_1(\tau)^2 d\tau + 2\sup_{\mathbb{R}\times[0,T]}|v_{xxx}|\int_0^t V_0(\tau)^2 d\tau \\
&+ 2\sup_{[0,T]}(\|v_t\|\|w_{xxxx}\|)\epsilon t, \qquad (2.163)
\end{aligned}
$$

com t em $[0,T]$. Como antes, limitamos $|w_x + 3v_x|$ por uma constante $C_3 = C_3(T, \|g\|_3)$. Por (2.162), o segundo termo do lado direito de (2.163) é limitado por $2\epsilon t \sup_{[0,T]}\|v\|_4$ que é limitado por ϵ vezes uma constante que depende T e de $\|g\|_5$. Finalmente, pela Proposição 2.3.6, $\|v_t\|$ é limitado por uma constante que depende de T e $\|g\|_4$ enquanto que $\|w_{xxxx}\|$ é limitado por uma constante dependente de $\|g\|_5$ e de T. Assim, de (2.163) temos que

$$V_1^2(t) \leq C_3\int_0^t V_1^2(\tau)d\tau + \epsilon C_4 t, \qquad (2.164)$$

onde $C_3 = C_3(T, \|g\|_3)$ e $C_4 = C_4(T, \|g\|_5)$. Novamente, pelo Corolário 1.1.7 , (2.164) implica que para $t \in [0,T]$

$$\|w_x\|^2 = V_1^2(t) \leq \epsilon(C_4/C_3)(e^{C_3T} - 1)$$

e então,

$$\|w_x\| \leq \epsilon^{\frac{1}{2}}N_1,$$

onde $N_1 = N_1(T, \|g\|_5)$. O restante da indução é análogo ao da proposição anterior. □

Com a próxima proposição encerramos as estimativas das desigualdades sobre $V_k(t)$ dependendo de T e $\|g\|_{k+3}$.

PROPOSIÇÃO 2.6.5 . *Para cada $k \geq 0$, a diferença $w = v - u$ satisfaz desigualdades da forma*

$$\|w_{(k)}\| \leq \epsilon^{\frac{1}{4}}L_k, \qquad (2.165)$$

válida para t em $[0,T]$ e ϵ suficientemente pequeno, onde $L_k = L_k(T, \|g\|_{k+3})$.

Demonstração. Mais uma vez, procederemos por indução sobre k. Para $k = 0$

$$\begin{aligned}
V_0(t)^2 &= -2\int_0^t \left[\int_{-\infty}^{\infty}[(vw+\frac{1}{2}w^2)_x w dx - \epsilon\int_{-\infty}^{\infty} v_{xxt}w dx\right] d\tau \\
&= -2\int_0^t \left[\int_{-\infty}^{\infty}[(v_x w^2 + v w_x w) dx + \epsilon\int_{-\infty}^{\infty} v_t w_{xx} dx\right] d\tau, \\
&= -2\int_0^t \left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}v_x w^2 dx + \epsilon\int_{-\infty}^{\infty} v_t w_{xx} dx\right] d\tau \\
&\leq 2\sup_{I\!R\times[0,T]}\left|\frac{v_x}{2}\right|\int_0^t V_0^2(\tau)d\tau + 2\epsilon t\sup_{[0,T]}(\|v_t\|\|w_{xx}\|) \\
&\leq C_1\int_0^t V_0^2(\tau)d\tau + C_2\epsilon^{\frac{1}{2}}t, \qquad (2.166)
\end{aligned}$$

então, como anteriormente,

$$\|w\|^2 = V_0(t)^2 \leq \epsilon^{\frac{1}{2}}\frac{C_1}{C_2}(e^{C_1T}-1)$$

e portanto,

$$\|w\| \leq \epsilon^{\frac{1}{2}}L_0.$$

Para $k = 1$,

$$V_1(t)^2 = -2\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}[(\frac{1}{2}w_x + \frac{3}{2}v_x)w_x^2 + v_{xx}ww_x - \epsilon v_{xt}w_{xxx}]dxd\tau.$$

Então se $0 \leq t \leq T$,

$$V_1^2(t) \leq 2\sup_{I\!R\times[0,T]}|\frac{1}{2}w_x+\frac{3}{2}v_x|\int_0^t V_1^2(\tau)d\tau + 2t\sup_{I\!R\times[0,T]}|v_{xx}|\sup_{[0,T]}(\|w\|\|w_x\|) + 2\epsilon t\sup_{[0,T]}(\|v_{xt}\|\|w_{xxx}\|).$$

Através de (2.162) e de (2.152)(ii) segue-se que

$$V_1^2(t) \leq C_3\int_0^t V_1^2(\tau)d\tau + \epsilon^{\frac{1}{2}}C_4 t,$$

onde $C_3 = C_3(T, \|g\|_3)$ e $C_4 = C_4(T, \|g\|_4)$. Então, como antes, para qualquer $t \geq 0$,

$$\|w_x\|^2 = V_1(t)^2 \leq \epsilon^{\frac{1}{2}}(C_4/C_3)(e^{C_3T}-1).$$

Assim, para todo $t \geq 0$,

$$\|w_x\| \leq \epsilon^{\frac{1}{4}}L_1, \qquad (2.167)$$

onde $L_1 = L_1(T, \|g\|_4)$. Agora já estamos familiarizados com o argumento indutívo. No k-ésimo passo indutivo, o segundo termo do lado direito de (2.143) é

$$2\epsilon\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} v_{t,(k+2)}w_{(k)}dxd\tau = 2\epsilon\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} v_{t,(k)}w_{(k+2)}dxd\tau,$$

o qual, para $t \in [0,T]$, pela Proposição 2.3.6 e por (2.152) é tal que

$$\begin{aligned} 2\epsilon\left|\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} v_{t,(k)} w_{(k+2)} dx d\tau\right| &\leq 2\epsilon \int_0^t \|\partial_x^k v_t\| \|w_{(k+2)}\| d\tau \\ &\leq 2tC\epsilon\epsilon^{-\frac{1}{2}}(\|g\|_{k+3} + \|g\|_{k+3}^2)\|w\|_{k+2} \\ &\leq \epsilon^{\frac{1}{2}} C_{k+2} t, \end{aligned} \tag{2.168}$$

onde $C_{k+2} = C_{k+2}(T, \|g\|_{k+3})$. Os outros termos são tratados como nas Proposições 2.3.3 e 2.3.6, na obtenção de (2.153) e utilizando a hipótese de indução. □

A seguir, enunciamos um corolário para as três proposições anteriores.

COROLÁRIO 2.6.6 . *A diferença $w = v - u$, onde u e v são as soluções únicas de (2.140) e (2.141) respectivamente, para o dado inicial $g \in H^{\infty}$, satisfaz as seguintes desigualdades, cada uma válida para ϵ suficientemente pequeno e para $t \in [0,T]$ onde $T > 0$ é arbitrário mas finito:*

$$\begin{array}{llll} (i) & \|w\|_k \leq \epsilon Q_k & \text{onde} \;\; Q_k = Q_k(T, \|g\|_{k+6}) & (k = 0,1,...), \\ (ii) & \|w\|_k \leq \epsilon^{\frac{1}{2}} R_k & \text{onde} \;\; R_k = R_k(T, \|g\|_{k+4}) & (k = 0,1,...), \\ (iii) & \|w\|_k \leq \epsilon^{\frac{1}{2}} S_k & \text{onde} \;\; S_k = S_k(T, \|g\|_{k+3}) & (k = 0,1,...). \end{array} \tag{2.169}$$

Demonstração. Basta somarmos as $k+1$ primeiras desigualdades expressas nas Proposições 2.6.3, 2.6.4 e 2.6.5, que obteremos (i),(ii) e (iii) respectivamente. □

As desigualdades (2.169) foram obtidas para $g \in H^{\infty}$ e as soluções suaves resultantes. Suponhamos agora que g está apenas em H^s onde $s \geq 3$. Aproximemos $g \in H^s$ por uma sequência $\{g_n\} \subset H^{\infty}$, por exemplo como foi feito no Lema 2.4.1. Denotemos por u_n e v_n as respectivas soluções de (2.140) e de (2.141), com dado inicial g_n, e seja $w_n = u_n - v_n$. Segue-se pelos Teoremas 2.5.1 e 2.5.2, que $u_n \to u$ em $\mathcal{H}_T^s$ e $v_n \to v$ em $\mathcal{H}_t^s$. Como $g_n \to g$ em H^s, $\|g_n\|$ é limitada uniformemente em n. Portanto, as várias constantes em (2.169) ficam uniformemente limitadas em n e em $\epsilon \leq \epsilon_0$ onde, pelas Proposições 2.3.3 e 2.3.6, ϵ_0 pode ser escolhido independente de n; isto é, $Q_k^n = Q_k(T, \|g_n\|_{k+6})$ é uniformemente limitado em n, enquanto $0 \leq k \leq s-6$, e similarmente para os $R_k's$ e $S_k's$ com apropriadas restrições sobre k. Portanto, tomando $\overline{Q}_k = \sup_n Q_k^n$, e analogamente para $\overline{R}_k$ e $\overline{S}_k$, temos que, para todo $n = 1,2,...$,

$$\left\{ \begin{array}{lll} \|w_n\|_k \leq \epsilon\overline{Q}_k & \text{se} & k \leq s-6, \\ \|w_n\|_k \leq \epsilon^{\frac{1}{2}}\overline{R}_k & \text{se} & k \leq s-4, \\ \|w_n\|_k \leq \epsilon^{\frac{1}{4}}\overline{S}_k & \text{se} & k \leq s-3. \end{array} \right. \tag{2.170}$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$ em (2.170), estabelecemos o seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO 2.6.7 . *Seja $g \in H^s$ onde $s \geq 3$ e sejam u e v as soluções $\mathcal{X}_{s,T}$ para os PVI's (2.140) e (2.141) respectivamente, com valor inicial g. Seja $w = u - v$. Então, quando $\epsilon \downarrow 0$*

$$\begin{array}{ll} \|w\|_k \leq \epsilon\overline{Q}_k(T, \|g\|_{k+6}) & (k = 0,1,...), \\ \|w\|_k \leq \epsilon^{\frac{1}{2}}\overline{R}_k(T, \|g\|_{k+4}) & (k = 0,1,...), \\ \|w\|_k \leq \epsilon^{\frac{1}{4}}\overline{S}_k(T, \|g\|_{k+3}) & (k = 0,1,...). \end{array} \tag{2.171}$$

uniformemente, para t em $[0,T]$, para todo k tal que as normas de g do lado direito são finitas.

Falta apenas interpretar a Proposição 2.6.7 em termos de $w^* = v^* - u^*$, o que faremos no teorema a seguir:

TEOREMA 2.6.8 . *Seja $g \in H^s$ onde $s \geq 3$, seja $T > 0$ finito e sejam u^* e v^* as soluções $\mathcal{X}_{s,T}$ dos PVI's (2.136) e (2.137) respectivamente. Definamos $w^* = v^* - u^*$. Então*

$$\begin{aligned} \|w^*_{(k)}\| &\leq \epsilon^{\frac{1}{4}(2k+7)}\overline{Q}_k(T, \|g\|_{k+6}) \quad (k = 0, 1, ..., s-6), \\ \|w^*_{(k)}\| &\leq \epsilon^{\frac{1}{4}(2k+5)}\overline{R}_k(T, \|g\|_{k+4}) \quad (k = 0, 1, ..., s-4), \\ \|w^*_{(k)}\| &\leq \epsilon^{1+\frac{1}{2}k}\overline{S}_k(T, \|g\|_{k+3}) \quad (k = 1, ..., s-3), \end{aligned} \tag{2.172}$$

uniformemente para $0 \leq t \leq T$ e ϵ suficientemente pequeno.

Demonstração. Este teorema é uma consequência imediata da Proposição 2.6.7 com as relações induzidas pela mudança de variáveis (2.139). Temos que,

$$\|v^*_{(k)}\| = \epsilon^{\frac{1}{4}(2k+3)}\|v_{(k)}\|, \quad (k = 0, 1, ...), \tag{2.173}$$

e analogamente para u^* e u □

Pelo Teorema 2.6.8, podemos conseguir um resultado de convergência razoavelmente preciso para u^* e v^* quando $\epsilon \downarrow 0$, para dada suavidade L^2 de g. Por exemplo, suponhamos $g \in H^7$. Então ambas u^* e v^* são soluções clássicas para suas respectivas equações diferenciais e pelo Teorema 2.6.8, dado $T > 0$ existe uma constante C que depende de T e de $\|g\|_7$ tal que para $t \in [0,T]$ e ϵ suficientemente pequeno,

$$\|u^* - v^*\| \leq C\epsilon^{\frac{7}{4}} \text{ e } \|u^*_x - v^*_x\| \leq \epsilon^{\frac{9}{4}}. \tag{2.174}$$

Em particular, devido a (1.28),

$$\sup_{\mathbb{R}\times[0,T]} |u^* - v^*| \leq (\|u^* - v^*\|\|u^*_x - v^*_x\|)^{\frac{1}{2}} \leq C\epsilon^2 \tag{2.175}$$

quando $\epsilon \downarrow 0$.

2.7 Aplicações.

Com os argumentos das seções anteriores pode-se tratar equações muito mais gerais que a KdV. Nesta seção pretendemos expor algumas das generalizações mais ou menos imediatas dos resultados anteriores. Particularmente, vamos exibir algo relacionado a modelos de ondas longas. Veremos que pode-se formular boa teoria para a equação KdV e o modelo (2.3) adicionando-se em ambos termos dissipativos, os quais, em alguns casos são bem vindos (como na modelagem de ondas longas em canais, por exemplo). Como consequência imediata dos resultados aqui expostos obteremos o Teorema 2.0.1. Consideremos as seguintes equações com termos dissipativos, análogas à equação (2.3) e à KdV, respectivamente:

$$u_t + u_x + uu_x - \alpha u_{xx} - u_{xxt} = 0, \tag{2.176}$$

$$u_t + u_x + uu_x - \alpha u_{xx} + u_{xxx} = 0, \tag{2.177}$$

onde $\alpha \geq 0$. Os métodos utilizados para estudar (2.3) e a KdV servem também para os PVI's associados a (2.176) e (2.177) respectivamente, postos sobre todo o $\mathbb{R}$, e conduzem ao aperfeiçoamento dos resultados de existência e dependência contínua no caso de (2.177).

Primeiramente, consideremos o PVI para (2.176). A exemplo do que fizemos com (2.3), vamos transformar sua equação diferencial numa integral: (2.176) é equivalente a

$$(1 - \partial_x^2)u_t = -\partial_x(u + \frac{1}{2}u^2 - \alpha u_x)$$

$$\Longleftrightarrow \quad u_t = -(1 - \partial_x^2)^{-1}\partial_x(u + \frac{1}{2}u^2 - \alpha u_x),$$

sobre a qual aplicando a transformada de Fourier e em seguida a transformada inversa, somos conduzidos a

$$\begin{aligned} u_t &= -\left(\frac{1}{1+\xi^2}\right)^{\vee} * \partial_x(u + \frac{1}{2}u^2 - \alpha u_x) \\ &= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-|x-y|)\partial_y[u(y,t) + \frac{1}{2}u^2(y,t) - \alpha u_x(y,t)]dy \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x-y)\exp(-|x-y|)[u(y,t) + \frac{1}{2}u^2(y,t) - \alpha u_x(y,t)]dy \end{aligned}$$

e integrando de 0 a t, obtemos

$$u(x,t) = g(x) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\{u(y,\tau) + \frac{1}{2}u^2(y,\tau) - \alpha u_x(y,\tau)\}dyd\tau, \tag{2.178}$$

onde g é o modelo (valor) inicial e K é o Kernel definido em (2.29). Seja $U : H^k \to H^{k+1}$

tal que $U(u) = K * u$. Temos que

$$
\begin{aligned}
\|K * u\|_{k+1}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (1+\xi^2+\cdots+\xi^{2(k+1)})|\widehat{K*u}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (1+\xi^2+\cdots+\xi^{2(k+1)}) \left(\frac{1}{1+\xi^2}\right)^2 |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} (1+\xi^2+\cdots+\xi^{2(k)})|\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi,
\end{aligned}
$$

então U faz sentido e é contínua, pois convolução é uma aplicação linear. Concluímos que U aplica contínua e linearmente H^k em H^{k+1}. Portanto,

$$
\|K * u\|_{k+1} \leq C_1 \|u\|_k. \tag{2.179}
$$

Este fato é utilizado para demonstrar existência de uma solução sobre um pequeno intervalo de tempo. Suponhamos $g \in H^k$ com $k \geq 1$. Para $v \in \mathcal{H}_T^k$, seja

$$
Av(x,t) = g(x) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)[v + \frac{1}{2}v^2 - \alpha v_x] dy d\tau. \tag{2.180}
$$

Temos que

$$
\begin{aligned}
\|Av\|_k &\leq \|g\|_k + \int_0^t \|K * (v + \frac{1}{2}v^2 - \alpha v_x)\|_k d\tau \\
&\leq \|g\|_k + \int_0^t C_1 \|v + \frac{1}{2}v^2 - \alpha v_x)\|_{k-1} d\tau \\
&\leq \|g\|_k + C_1 \sup_{t\in[0,T]} \|v(x,t) + \frac{1}{2}v^2(x,t) - \alpha v_x(x,t))\|_{k-1} T \\
&\leq \|g\|_k + C_2(\|v\|_k + \frac{1}{2}\|v\|_k^2 + \alpha\|v\|_k) \\
&\leq \|g\|_k + C\|v\|_k < \infty.
\end{aligned}
$$

Portanto, $A : \mathcal{H}_T^k \to \mathcal{H}_T^k$.

Afirmamos que A é uma contração de uma bola centrada em zero em $\mathcal{H}_T^k$ para T suficientemente pequeno. De fato: Sejam $v_1, v_2 \in \mathcal{H}_T^k$, com $\|v_i\| \leq R$, $i = 1, 2$. Então, se $t \in [0,T]$,

$$
\begin{aligned}
\|Av_1 - Av_2\|_k &\leq t[(1+\alpha C_1)\|v_1 - v_2\|_k + \frac{1}{2}\|v_1^2 - v_2^2\|_k] \\
&\leq t[(1+\alpha C_1)\|v_1 - v_2\|_k + \frac{1}{2}C_2(\|v_1\|_k + \|v_2\|_k)\|v_1 - v_2\|_k] \\
&\leq t[1 + \alpha C_1 + C_2 R]\|v_1 - v_2\|_k,
\end{aligned}
$$

onde C_2 depende somente de k. Tomando o supremo sobre t em $[0,T]$ segue-se que

$$
\|Av_1 - Av_2\|_{\mathcal{H}_T^k} \leq T[1 + \alpha C_1 + C_2 R]\|v_1 - v_2\|_{\mathcal{H}_T^k}. \tag{2.181}
$$

Consideremos ainda um v na bola de centro zero e raio R em $\mathcal{H}_T^k$. Então, como $A(0) = g$, fazendo uso de (2.181), temos que

$$\begin{aligned} \|Av\|_{\mathcal{H}_T^k} &= \|A(v) - A(0) + g\|_{\mathcal{H}_T^k} \\ &\leq \|A(v) - A(0)\|_{\mathcal{H}_T^k} + \|g\|_{\mathcal{H}_T^k} \\ &\leq \|g\|_{\mathcal{H}_T^k} + T[1 + \alpha C_1 + RC_2]\|v\|_{\mathcal{H}_T^k} \\ &\leq \|g\|_{\mathcal{H}_T^k} + T[1 + \alpha C_1 + RC_2]R. \end{aligned} \tag{2.182}$$

Daí, escolhendo $R = 2\|g\|_k$ e $T = 1/\{2[1 + \alpha C_1 + RC_2]\}$, as seguintes desigualdades são verdadeiras,

$$\|Av_1 - Av_2\|_{\mathcal{H}_T^k} \leq \frac{1}{2}\|v_1 - v_2\|_{\mathcal{H}_T^k}, \quad \|Av\|_{\mathcal{H}_T^k} \leq R, \tag{2.183}$$

para $v, v_1, v_2 \in \mathcal{H}_T^k$. Logo, A é uma contração da bola fechada de centro 0 e raio R de $\mathcal{H}_T^k$. Assim, pelo Teorema 1.1.2 (do ponto fixo de Banach) existe um único $u \in \mathcal{H}_T^k$ onde $\|u\|_{\mathcal{H}_T^k} \leq R$ tal que

$$Au = u. \tag{2.184}$$

Pelos mesmos argumentos do Lema 2.1.2, segue-se que u é de fato, solução do PVI para (2.176) com t em $[0, T]$.

Pretendemos estender esses argumentos no sentido de conseguir uma solução global do PVI associado a (2.176), através da obtenção de estimativas *a priori* para suas soluções. Esse processo é análogo àquele da Seção 2.3, e temos que (2.176) implica em

$$uu_t + uu_x + u^2u_x - \alpha uu_{xx} + uu_{xxt} = 0 \implies$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2}(u^2)_t + \frac{1}{2}(u^2)_x - \alpha uu_{xx} - u(u_{xx})_t\right] dx = 0$$

e então

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}(u^2 + u_x^2)dx + 2\alpha\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx = 0 \tag{2.185}$$

implicando que,

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}(u^2 + u_x^2)dx = -2\alpha\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx \leq 0,$$

ou seja, a norma H^1 de $u(x,t)$ é decrescente com o tempo. Portanto, a demonstração de existência em um intervalo de tempo pode ser repetida para produzir uma solução global para o problema, como fizemos na Seção 2.1. A estensão para espaços de Sobolev de ordem maior pode ser feita através da equação integral (2.180) como na demonstração do Lema 2.1.1. O resultado é precisamente o seguinte:

PROPOSIÇÃO 2.7.1 . *Seja $g \in H^m$, $m \geq 2$. Então, existe uma única solução u em $\mathcal{H}_\infty^m$, para a equação (2.176) com valor inicial g. Além disso, $\partial_t^k u \in \mathcal{H}_T^m$ para todo $k \geq 0$ e todo $T > 0$ finito.*

O único ponto que requer observação é o fato que u é limitado em H^m uniformemente no tempo. Isto segue pelas estimativas *a priori* que serão feitas abaixo onde investigamos a equação (2.176) (veja (2.191), (2.196) e (2.197) com $\epsilon = 1$).

Utilizaremos a teoria para a equação (2.176) agora para estudarmos a equação (2.177). Através de uma mudança de coordenadas (já feita anteriormente), chegamos ao PVI mais simples,

$$\begin{cases} u_t + uu_x - \alpha u_{xx} + u_{xxx} = 0, \\ u(x,0) = g(x). \end{cases} \tag{2.186}$$

Como antes, regularizamos este PVI adicionando um termo $-\epsilon u_{xxt}$. Portanto, consideremos o PVI

$$\begin{cases} u_t + uu_x - \alpha u_{xx} + u_{xxx} - \epsilon u_{xxt} = 0, \\ u(x,0) = g(x). \end{cases} \tag{2.187}$$

Façamos a seguite mudança de variável (para relembrarmos!): Seja

$$\epsilon^{-1} v(x,t) = u(\epsilon^{\frac{1}{2}}(x-t), \epsilon^{\frac{3}{2}} t).$$

Fazendo $y = \epsilon^{\frac{1}{2}}(x-t)$ e $z = \epsilon^{\frac{3}{2}} t$, obtemos:

$$x = \epsilon^{-\frac{1}{2}} y + \epsilon^{-\frac{3}{2}} z \text{ e } t = \epsilon^{-\frac{3}{2}} z.$$

Logo,

$$u(y,z) = \epsilon^{-1} v(\epsilon^{-\frac{1}{2}} y + \epsilon^{-\frac{3}{2}} z, \epsilon^{-\frac{3}{2}} z)$$

e então

$$u_y = \epsilon^{-\frac{3}{2}} v_x,\ u_{yy} = \epsilon^{-2} v_{xx},\ u_{yyy} = \epsilon^{-\frac{5}{2}} v_{xxx},\ u_{yyz} = \epsilon^{-\frac{5}{2}}(v_{xxx} + v_{xxt}) \text{ e } u_z = \epsilon^{-\frac{5}{2}}(v_x + v_t).$$

Logo, substituindo isto na equação de (2.187), chegamos ao PVI

$$\begin{cases} v_t + v_x + vv_x - \alpha\epsilon^{-\frac{1}{2}} v_{xx} - v_{xxt} = 0, \\ v(x,0) = \epsilon g(\epsilon^{\frac{1}{2}} x). \end{cases} \tag{2.188}$$

Para $\epsilon > 0$ fixado, a Proposição 2.7.1 nos garante que existe uma solução suave de (2.188) com um dado inicial $g \in H^m$, $m \geq 2$. Logo, como no Lema 2.1.2, obtemos soluções suaves para o PVI regularizado sem dificuldades adicionais.

Não é muito difícil a obtenção de quotas independentes de ϵ para as soluções de (2.187). Contudo, se desejamos limites independentes de α, devemos proceder como na Seção 2.3. Mas para um nível fixo de dissipação , o argumento mais simples dado a seguir é suficiente. Suponhamos $g \in H^\infty$, de modo que u é uma função C^∞ em ambas as variáveis e todas as suas derivadas estão em L^2. Vamos multiplicar a equação regularizada por $u_{(2k)}$ e integrar por partes sobre $\mathbb{R}$ e $[0,T]$, chegamos à equação,

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} & [\ u_{(2k)} u_\tau + u_{(2k)} uu_x - \alpha u_{(2k)} u_{xx} + u_{(2k)} u_{xxx} - \epsilon u_{(2k)} u_{xx\tau}] dx d\tau \\ = & \ \frac{(-1)^k}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [u_{(k)}^2 - g_{(k)}^2] dx + \frac{(-1)^{k-1}}{2} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} u_{(k+1)} (u^2)_{(k)} dx d\tau \\ + & \ (-1)^{k-1} \alpha \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} u_{(k+1)}^2 dx d\tau - \epsilon \frac{(-1)^{k-1}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [u_{(k+1)}^2 - g_{(k+1)}^2] dx, \end{aligned}$$

da qual extraimos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}(u_{(k)}^2 &+ \epsilon u_{(k+1)}^2)dx + 2\alpha\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}u_{(k+1)}^2 dxd\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(g_{(k)}^2+\epsilon g_{(k+1)}^2)dx - \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}(u^2)_{(k)}u_{(k+1)}dxd\tau. \end{aligned} \tag{2.189}$$

Para $k=0$ (2.189) é o análogo de (2.185), a saber,

$$\int_{-\infty}^{\infty}(u^2+\epsilon u_x^2)dx + 2\alpha\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}u_x^2 dxd\tau = \int_{-\infty}^{\infty}(g^2+\epsilon g_x^2)dx. \tag{2.190}$$

Logo, independente de $\epsilon \in (0,1]$ e de $t \geq 0$,

$$\|u\| \leq C_0, \quad \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}u_x^2 dxd\tau \leq C_0, \tag{2.191}$$

onde $C_0 = C_0(\|g\| + \epsilon\|g'\|) \geq 0$ a qual, sem perda de generalidade, pode ser considerada estritamente positiva (o caso $g=0$ é trivial em todos os aspéctos). Agora seja $k=1$ em (2.189). Então

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2+\epsilon u_{xx}^2)dx + 2\alpha\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}u_x^2 dxd\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(g_x^2+\epsilon g_{xx}^2)dx - 2\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}uu_xu_{xx}dxd\tau \\ &\leq C + 2\int_0^t \|u\|\|u_{xx}\|\|u_x\|_\infty d\tau \\ &\leq C + 2C_0\int_0^t \|u_{xx}\|\|u_x\|_\infty d\tau \\ &\leq C + 2C_0\left(\int_0^t \|u_x\|_\infty^2 d\tau \int_0^t \|u_{xx}\|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{2.192}$$

onde utilizamos (2.191) e a desigualdade de Cauchy-Schwarz aplicada uma vez em cada variável. Agora façamos uso da desigualdade elementar

$$2AB \leq \gamma A^2 + \frac{1}{\gamma}B^2, \tag{2.193}$$

válida para todo $\gamma > 0$. Em (2.193), consideremos

$$A = \sqrt{\int_0^t \|u_x\|_\infty^2 d\tau},\ B = \sqrt{\int_0^t \|u_{xx}\|^2 d\tau} \text{ e } \gamma = \tfrac{2C_0}{\alpha}.$$

Daí, de (2.192), segue-se que

$$I_1 \leq C + C_0\left(\frac{2C_0}{\alpha}\int_0^t \|u_x\|_\infty^2 d\tau + \frac{\alpha}{2C_0}\int_0^t \|u_{xx}\|^2 d\tau\right). \tag{2.194}$$

Por (1.28), $\|u_x\|_\infty^2 \le \|u_x\|\|u_{xx}\|$. Então, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e (2.193) novamente, com $\gamma = \frac{4C_0^2}{\alpha^2}$, temos que

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2+\epsilon u_{xx}^2)dx + 2\alpha\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}u_{xx}^2 dx d\tau \\
&\le C + C_0\left(\frac{4C_0^3}{\alpha^3}\int_0^t \|u_x\|^2 d\tau + \frac{\alpha}{C_0}\int_0^t \|u_{xx}^2 d\tau\|\right) \\
&\le C + \alpha\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}u_{xx}^2 dx d\tau + 4\frac{C_0^4}{\alpha^3}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}u_x^2 dx d\tau \\
&\le C + 4\frac{C_0^5}{\alpha^3} + \alpha\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}u_{xx}^2 dx d\tau.
\end{aligned}$$

Logo, temos que

$$\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2+\epsilon u_{xx}^2)dx + \alpha\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}u_{xx}^2 dx d\tau \le C + 4\frac{C_0^5}{\alpha^3} = C_1, \tag{2.195}$$

onde $C_1 = C_1(\|g\|_1 + \epsilon\|g''\|)$. Então, independentemente de ϵ em $(0,1]$ e de $t \ge 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}u_x^2 dx \le C_1, \quad \alpha\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}u_{xx}^2 dx d\tau \le C_1'. \tag{2.196}$$

Procedendo por indução deduzimos os limites

$$\int_{-\infty}^{\infty}u_{(k)}^2 dx \le C_k, \quad \alpha\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}u_{(k+1)}^2 dx d\tau \le C_k, \tag{2.197}$$

para todo $k \ge 0$, onde $C_k = C_k(\|g\|_k + \epsilon\|g_{(k+1)}\|)$ independe de $\epsilon \in (0,1]$ e $t \ge 0$. Observemos que esses limites não são restritos a intervalos de tempo finito como eram os limites correspondentes à Proposição 2.3.6 para a equação KdV regularizada sem termo dissipativo.

Podemos agora passar ao limite (fazer $\epsilon \downarrow 0$) utilizando os mesmos resultados da Seção 2.4. Podemos sem nenhum dano, omitir os detalhes. A unicidade é estabelecida como dantes. Resumimos o resultado no próximo teorema.

TEOREMA 2.7.2 . *Seja $m \ge 2$ e seja $g \in H^m$. Então, existe uma única solução u em $\mathcal{X}_\infty^m$ para a equação (2.177) com valor inicial g. u depende continuamente de $g \in H^m$ em $\mathcal{X}_\infty^m$.*

Observe que com este teorema alcançamos nosso objetivo: demonstrar o Teorema 2.0.1, pois basta fazer $\alpha = 0$ em (2.177) que ele segue como corolário do Teorema 2.7.2.

OBSERVAÇÃO 5 . *Se $k < 3$, u é solução no sentido das distribuições. Se $k \ge 3$, todas as derivadas em questão na KdV existem q.t.p. (em quase todo ponto) e a equação é satisfeita q.t.p.. De fato, se $k \ge 3$, pelos resultados de unicidade, a solução é a mesma que a garantida pelo Teorema 2.4.6, e portato é uma solução lássica se $k > 3$. O resultado do Teorema 2.7.2 é um melhoramento do Teorema 2.4.6 para $k < 3$.*

Capítulo 3

SOLUÇÕES PARA A EQUAÇÃO DE KORTEWEG-DE VRIES EM ESPAÇOS DE SOBOLEV DE ORDEM FRACIONÁRIA.

No capítulo anterior, mais precisamente no Teorema 2.7.2, vimos que para $k > 1$ inteiro, o problema de valor inicial associado à equação de Korteweg-de Vries

$$\begin{cases} u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, & x \in I\!R, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = g(x), \end{cases} \tag{3.1}$$

possui solução única em $\mathcal{H}_{\infty}^{k,b}$ se o dado inicial g está em H^k. J. C. Saut [19], através do teorema de interpolação de Tartar [22], estendeu este resultado para valores não inteiros. Ele demonstrou que se $r > 3$, $\mu[r]+1-r$ ($[r]$ é o maior inteiro menor que r)e $g \in H^{r+\frac{3}{2}\mu+\epsilon}$ para algum $\epsilon > 0$, então para cada $T > 0$, $u \in L^\infty(0,T;H^r)$. Para o caso $2 < r < 3$, ele mostrou que se $g \in H^{r+\frac{1}{2}\mu}$, então para cada $T > 0$, u está em $L^\infty(0,T;H^r)$. Daí, ficou-se com a impressão de que se perde regularidade em resolver (3.1) com valor inicial em espaços de Sobolev de ordem não inteira. Neste capítulo (baseado em [2]) veremos que isto não acontece, isto é, que para valores iniciais em H^s, $s \geq 2$, a solução para (3.1) pertence a $C(0,T;H^s)(=\mathcal{H}_T^s)$ para todo $T > 0$. Também demonstramos que a solução depende continuamente do dado inicial no seguinte sentido: para todo $T > 0$ e $s \geq 2$, a aplicação $g \mapsto u$ de H^s em $C(0,T;H^s)$ é contínua. Assim o PVI (3.1) é classicamente bem posto em qualquer espaço de Sobolev H^s, $s \geq 2$.

3.1 Um pouco de Interpolação.

Nesta seção exibimos um teorema de interpolação para operadores não lineares, o qual nos será útil para demonstrar que não se perde regularidade espacial resolvendo-se o PVI para a equação KdV com dados iniciais em espaços de Sobolev não-inteiros. As demonstrações omitidas, assim como uma exposição mais completa podem ser encontradas em [2], de onde transcrevemos esses resultados.

DEFINIÇÃO 3.1.1 . *Dados B_0, B_1 espaços de Banach, com $B_1 \hookrightarrow B_0$, para cada $f \in B_0$ definimos*

$$K(f,\epsilon) = \inf_{g \in B_1} \{\|f - g\|_{B_0} + \epsilon \|g\|_{B_1}\}, \tag{3.2}$$

onde $\epsilon > 0$. Dados $0 < \theta < 1$ e $1 \leq p \leq \infty$, definimos,

$$[B_0, B_1]_{\theta,p} = B_{\theta,p} = \left\{ f \in B_0 : \|f\|^p_{B_{\theta,p}} = \int_0^\infty K(f,\epsilon)^p \epsilon^{-(\theta p+1)} d\epsilon < \infty \right\} \tag{3.3}$$

com a modificação usual quando $p = \infty$.

Observação. $B_{\theta,p}$ é um espaço de Banach com a norma $\|.\|_{B_{\theta,p}}$.

Notação. Dados (θ_1, p_1), (θ_2, p_2), dizemos que $(\theta_1, p_1) < (\theta_2, p_2)$ se, $\theta_1 < \theta_2$, ou se $\theta_1 = \theta_2$ e $p_1 > p_2$. $B_{\theta_1,p_1} \hookleftarrow B_{\theta_2,p_2}$, se $(\theta_1,p_1) < (\theta_2,p_2)$.

Com as duas proposições abaixo em mãos, poderemos estabelecer um importante resultado sobre limitação de aplicações de espaços de Sobolev intermediários.

PROPOSIÇÃO 3.1.2 . *Sejam $f \in B_0$, $0 < \theta < 1$ e $1 \leq p \leq \infty$. Suponhamos que dado $\epsilon > 0$ existam $g_i(\epsilon) \in B_i$ $(i = 0, 1)$, tal que $f = g_0(\epsilon) + g_1(\epsilon)$, com $\|g_i(\epsilon)\|_{B_i} \leq G_i(\epsilon)$ e tal que*

$$M_i = \left(\int_0^\infty G_i(\epsilon)^p \epsilon^{(i-\theta)p-1} d\epsilon \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Então, $f \in B_{\theta,p}$ e

$$\|f\|_{B_{\theta,p}} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta.$$

PROPOSIÇÃO 3.1.3 . *Sejam $f \in B_0$ e $f_\epsilon \in B_1$satisfazendo a desigualdade*

$$\|f - f_\epsilon\|_{B_0} + \epsilon \|f_\epsilon\|_{B_1} \leq 2K(f,\epsilon) \tag{3.4}$$

para algum $\epsilon > 0$. Então

$$\|f_\epsilon\|_{B_{\theta,p}} \leq 3\|f\|_{B_{\theta,p}}, \tag{3.5}$$

se $f \in B_{\theta,p}$, para algum $\theta \in (0,1)$ e $1 \leq p \leq \infty$.

DEFINIÇÃO 3.1.4 . *Sejam B_0, B_1, θ e p como antes. Dizemos que o par B_0, B_1 possui uma identidade aproximada se existe uma família de aplicações contínuas $S_\epsilon : B_{\theta,p} \to B_1$, para $0 < \epsilon \leq 1$, tal que*

(I) $\|S_\epsilon f\|_{B_{\theta,p}} + \epsilon^{1-\theta}\|S_\epsilon f\|_{B_1} \leq C\|f\|_{B_{\theta,p}}$ *para toda* $f \in B_{\theta,p}$ *e* $\epsilon \in (0,1]$,
e
(II) $\|S_\epsilon f - f\|_{B_{\theta,p}} + \epsilon^{-\theta}\|S_\epsilon f - f\|_{B_0} \to 0$ *quando* $\epsilon \downarrow 0$, *para* $f \in B_{\theta,p}$, *e uniformemente sobre subconjuntos compáctos de* $B_{\theta,p}$.

quando $\Omega = I\!R$ ou $\Omega = (0,\infty)$. Então

EXEMPLO 3.1.5 . *Consideremos* $B_0 = L^2 = L^2(I\!R)$ *e, para* k *um inteiro positivo,* $B_1 = H^k = H^k(I\!R)$ *(veja a Definição 1.4.5). Temos que* $[L^2, H^k] \cong H^s$ *para* $s = \theta k$ *(veja [16], pág. 47 (9.1)). Portanto existem constantes* M_s *e* N_s *tais que*

$$M_s\|u\|_{[L^2,H^k]_{\theta,2}} \leq \|u\|_s \leq N_s\|u\|_{[L^2,H^k]_{\theta,2}}. \tag{3.6}$$

Seja ϕ *uma função* C^∞ *tal que* $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi \equiv 1$ *em* $[-1,1]$ *e* $\phi \equiv 0$ *fora de* $(-2,2)$. *Definamos* S_ϵ *por*

$$\widehat{S}_\epsilon(\xi) = \phi(\epsilon^{\frac{1}{k}}\xi)\widehat{u}(\xi). \tag{3.7}$$

Então, a família $\{S_\epsilon\}$ *é uma* $(\theta,2)$ *identidade aproximada para o par* L^2, H^k *para algum* θ *em* $(0,1)$.

Agora vamos enunciar o resultado de que falávamos:

TEOREMA 3.1.6 . *Sejam* B_0^i, B_1^i *espaços de Banach tais que* $B_0^i \hookleftarrow B_1^i$, $i = 1,2$, *e sejam* $0 < \lambda < 1$ *e* $1 \leq q \leq \infty$. *Considere* A *uma aplicação tal que*
(i) $A : B_{\lambda,q}^1 \to B_0^2$ *e para* $f, g \in B_{\lambda,q}^1$,

$$\|A(f) - A(g)\|B_0^2 \leq C_0(\|f\|_{B_{\lambda,q}^1} + \|g\|_{B_{\lambda,q}^1})\|f - g\|_{B_0^1}$$

e
(ii) $A : B_1^1 \to B_1^2$ *é contínuo, e para* $h \in B_1^1$

$$\|Ah\|_{B_1^2} \leq C_1(\|h\|_{B_{\lambda,q}}^1)\|h\|_{B_1^1},$$

onde $C_i : I\!R^+ \to I\!R^+$ *são funcões contínuas não decrescentes,* $i = 0,1$. *Além disso, assumamos que o par* B_0^1, B_1^1 *tenha uma* (θ,p) *identidade aproximada* $\{S_\epsilon\}$ *para algum* $(\theta,p) \geq (\lambda,q)$. *Então, para* $(\theta,p) \geq (\lambda,q)$, A *aplica* $B_{\theta,p}^1$ *em* $B_{\theta,p}^2$ *continuamente, e para* $f \in B_{\theta,p}^1$

$$\|Af\|_{B_{\theta,p}^2} \leq C(\|f\|_{B_{\lambda,q}^1})\|f\|_{B_{\theta,p}^1}, \tag{3.8}$$

onde , para $\gamma > 0$, $C(\gamma) = 4C_0(4\gamma)^{1-\theta}C_1(3\gamma)^\theta$.

Demonstração. Vamos demonstrar aqui que A aplica $B_{\theta,p}^1$ em $B_{\theta,p}^2$ e a desigualdade (3.8) (para o restante, ver [2] Teorema 2, pág. 91). Seja $f \in B_{\theta,p}^1$ e, dado $\epsilon > 0$ seja $f_\epsilon \in B_1^1$ escolhido de modo que

$$\|f - f_\epsilon\|_{B_0^1} + \epsilon\|f_\epsilon\|_{B_1^1} \leq 2K(f,\epsilon).$$

$(\theta,p) \geq (\lambda,q) \Rightarrow f \in B^1_{\lambda,q}$ e pela Proposição 3.1.3

$$\|f_\epsilon\|_{B^1_{\lambda,q}} \leq 3\|f\|_{B^1_{\lambda,q}}$$

que junto com (i) e (ii) nos dá

$$\begin{aligned} \|Af - Af_\epsilon\|_{B_0^2} &\leq C_0(\|f\|_{B^1_{\lambda,q}} + \|f_\epsilon\|_{B^1_{\lambda,q}})\|f - f_\epsilon\|_{B_0^1} \\ &\leq 2C_0(4\|f\|_{B^1_{\lambda,q}})K(f,\epsilon) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \epsilon\|Af_\epsilon\|_{B_1^2} &\leq C_1(\|f_\epsilon\|_{B^1_{\lambda,q}})\epsilon\|f_\epsilon\|_{B_1^1} \\ &\leq 2C_1(3\|f\|_{B^1_{\lambda,q}})K(f,\epsilon). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Assim, vemos que a decomposição $Af = (Af - Af_\epsilon) + Af_\epsilon$ (observe que $Af - Af_\epsilon \in B_0^2$ e $Af_\epsilon \in B_1^2$) satisfaz as hipóteses da Proposição 3.1.2, tomando $g_0(\epsilon) = Af - Af_\epsilon$ e $g_1 = Af_\epsilon$, pois

$$\begin{aligned} M_i &\equiv 2C_i[(4-i)\|f\|_{B^1_{\lambda,q}}]\left(\int_0^\infty K(f,\delta)^p \delta^{-\theta p - 1} d\delta\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 2C_i[(4-i)\|f\|_{B^1_{\lambda,q}}]\|f\|_{B^1_{\theta,p}}, \end{aligned}$$

$i = 0, 1$. Agora basta aplicar a Proposição 3.1.2. □

DEFINIÇÃO 3.1.7 .*Seja B um espaço de Banach e seja $T > 0$. Denotamos por $C(0,T;B)$ o espaço de Banach das funções contínuas de $[0,T]$ a B cuja norma é*

$$\|f\|_{C(0,T;B)} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_B.$$

Quando T é subentendido, denotaremos $C(0,T;B)$ simplesmente por $C(B)$.

Encerramos o capítulo com uma proposição sobre interpolação entre espaços da forma $C(B)$.

PROPOSIÇÃO 3.1.8 . *Sejam B_0, B_1 espaços de Banach, com $B_1 \hookrightarrow B_0$, $0 < \theta < 1$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então para algum $T > 0$,*

$$[C(B_0), C(B_1)]_{\theta,p} \hookrightarrow C([B_0, B_1]_{\theta,p}).$$

3.2 Extensão dos resultados da Seção 2.5.

Seja u a solução do PVI (2.2) com dado inicial $g \in H^s$, $s \geq 2$. Na Seção 2.5 vimos que se $s = k$ é inteiro positivo, então para qualquer $T > 0$ finito, a aplicação $U : H^k \to C(0,T;H^k)$ definida por $U(g) = u$ é contínua. Nosso propósito é estender esse resultado a valores não inteiros de s.

Observação. Esse $C(0,T;H^k)$ é o mesmo da Definição 3.1.7, com $B = H^k$.

LEMA 3.2.1 . *Seja $U(g) = u$ a solução (única) do PVI (2.2) com valor inicial g. Então*

$$\|u\|_{C(0,T;H^k)} \leq C_k(\|g\|_{k-1})\|g\|_k, \tag{3.10}$$

onde $C_k : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função contínua não decrescente que não depende de T.

Demonstração. A demonstração é feita por indução. Lembremos da Seção 2.4 que existe uma sequência de funcionais $\{I_j\}_{j=0}^{\infty}$ tal que, se u é uma solução da equação KdV, então cada $I_j(u)$ é independente de $t \geq 0$ (ver Teorema 2.4.8). Pela invariância de I_0, para todo $t \geq 0$,

$$\|u\| = \|g\|. \tag{3.11}$$

Temos que

$$\begin{aligned} I_1(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} [u_x^2 - \frac{1}{3}u^3]dx = C \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt}I_1(u) = 0 \end{aligned}$$

e então

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx &= \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} u^3 dx + \int_{-\infty}^{\infty} (g')^2 dx - \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} g^3 dx \\ &\leq \frac{1}{3}\|u\|_1\|u\|^2 + \|g'\|^2 + \frac{1}{3}\|g\|_1\|g\|^2. \end{aligned}$$

Adicionando $\|u\|^2$ a ambos os lados e usando (3.11) temos,

$$\begin{aligned} \|u\|_1^2 &\leq \frac{1}{3}\|u\|_1\|g\|^2 + \|g\|_1^2 + \frac{1}{3}\|g\|_1\|g\|^2 \\ &\leq \frac{1}{6}\|u\|_1^2 + \frac{1}{6}\|g\|^4 + \|g\|_1^2 + \frac{1}{6}\|g\|_1^2 + \frac{1}{6}\|g\|^4. \end{aligned}$$

Subtraindo $\frac{1}{6}\|u\|_1^2$, temos

$$\begin{aligned} \|u\|_1^2 &\leq \frac{2}{5}\|g\|^4 + \frac{7}{5}\|g\|_1^2 \\ &\leq \left(\frac{2}{5}\|g\|^2 + \frac{7}{5}\right)\|g\|_1^2 \\ &\leq C_1(\|g\|_1)^2\|g\|_1^2, \end{aligned} \tag{3.12}$$

onde $C(\lambda) = [\frac{1}{5}(2\lambda^2 + 7)]^{\frac{1}{2}}$.

Suponhamos agora que (3.10) seja válida para $k < m$, com $m \geq 2$, e que $I_m(u)$ seja invariante. (Vamos primeiro estimar a integral de Q_m). Então,

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} u_{(0)}^{a_0} \cdots u_{(m-2)}^{a_{m-2}} dx \right| \leq (\|u\|_{m-1})^{\sum_{i=0}^{m-2} a_i}.$$

Portanto, para alguma constante β_m,

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} Q_m(u_{(0)}, ..., u_{(m-2)}) dx \right| \leq \beta_m (1 + \|u\|_{m-1}^m) \|u\|_{m-1}^2.$$

Uma estimativa análoga é válida para o monômio $c_m u u_{m-1}^2$. Então pela hipótese de indução,

$$\begin{aligned} \left| I_m(u) - \int_{-\infty}^{\infty} (g^{(m)})^2 dx \right| &\leq \beta'_m (1 + \|u\|_{m-1}^m) \|u\|_{m-1}^2 \\ &\leq C'_m(\|g\|_{m-1}) \|g\|_{m-1}^2. \end{aligned}$$

esta estimativa vale ema particular para $t = 0$. Como $I_m(u)$ é invariante, segue-se que

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} u_{(m)}^2 dx - \int_{-\infty}^{\infty} (g^{(m)})^2 dx \right| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} u_{(m)}^2 dx - I_m(u) + I_m(g) - \int_{-\infty}^{\infty} (g^{(m)})^2 dx \right| \\ &\leq 2C'_m(\|g\|_{m-1}) \|g\|_{m-1}^2. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Portanto se $C_m(\lambda) = (1 + 2C'_m(\lambda) + C_{m-1}(\lambda)^2)^{\frac{1}{2}}$,

$$\|u\|_m \leq C_m(\|g\|_{m-1}) \|g\|_m,$$

e assim, o lema está demonstrado. □

TEOREMA 3.2.2 . *Sejam $T > 0$ e $s \geq 2$. Então a aplicação $U : H^s \to C(0, T; H^s)$ é contínua. Além disso, se $g \in H^s$, existe uma função contínua não decrescente $C_{s,T} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tal que*

$$\|u\|_{C(0,T;H^s)} \leq C_{s,T}(\|g\|_{[s]}) \|g\|_s, \tag{3.14}$$

onde $[s]$ é o maior inteiro menor que s.

Demonstração. A existência e unicidade de solução para $s \geq 2$ real foi demonstrada por J.C. Saut (ver [19]).

Para $k > 1$ inteiro o teorema resume-se ao Lema 3.2.1 e portanto, está demonstrado. Suponhamos $k - 1 < s < k$ com $k > 2$ inteiro. Aplicaremos o Teorema 3.1.6 com $B_0^1 = L^2$, $B_0^2 = C(0, T; L^2)$, $B_1^1 = H^k$, $B_1^2 = C(0, T; H^k)$, $\lambda = \frac{k-1}{k}$, $q = 2$, $\theta = \frac{s}{k}$ e $p = 2$. Vimos no Exemplo 3.1.5 que o par L^2, H^k admite uma $(\theta, 2)$identidade aproximada. Basta então confirmarmos as condições (i) e (ii) daquele Teorema. (ii) é consequência das seções anteriores juntamente com a desigualdade (3.10). A condição (i) diz que U aplica $B_{\frac{k-1}{k},2}$ em $C(0, T; L^2)$. Mas

$$B_{\frac{k-1}{k},2} \equiv [L^2, H^k]_{\frac{k-1}{k},2} \cong H^s, \text{ onde } s = \tfrac{k-1}{k} k = k - 1,$$

isto é, $B_{\frac{k-1}{k},2} \cong H^{k-1}$. Logo, para confirmar (i) devemos provar que $U : H^{k-1} \to C(0,T;L^2)$ e que dados $f, g \in H^{k-1}$,

$$\|Uf - Ug\|_{C(0,T;L^2)} \leq C_{k,T}(\|f\|_{k-1} + \|g\|_{k-1})\|f - g\|. \tag{3.15}$$

Como $k > 2$, já temos que $U : H^{k-1} \to C(0,T;L^2)$ é contínua e portanto, com mais razão, U aplica H^{k-1} a $C(0,T;L^2)$. Como U é contínua, é suficiente demonstrarmos (3.15) em algum subconjunto denso de H^{k-1}, como H^∞ por exemplo (para ver que $\overline{H^\infty} = H^{k-1}$ consulte o Teorema 1.4.6(iii)). Então sejam $f, g \in H^\infty$ e sejam $u = Uf$, $v = Ug$ e $w = u - v$. Então w satisfaz o PVI

$$w_t + \frac{1}{2}[(u+v)w]_x + w_{xxx} = 0, \quad w(x,0) = f(x) - g(x).$$

Além disso, $u(\cdot,t)$, $v(\cdot,t)$ e portanto $w(\cdot,t)$ estão em H^∞ para cada $t \in [0,T]$. Multiplicando a equação acima por w, temos que

$\int_{-\infty}^{\infty} w w_{xxx} dx = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \partial_x w_x^2 dx = 0$ e $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}[(u+v)w]_x w dx = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} (u+v)_x w^2 dx$.

Pela desigualdade de Sobolev $\|h\|_{L^\infty} \leq \|h\|_1$ temos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} w^2 dx &= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} (u+v)_x w^2 dx \\ &\leq \frac{1}{4}(\|u\|_2 + \|v\|_2)\int_{-\infty}^{\infty} w^2 dx, \end{aligned} \tag{3.16}$$

e por (3.10) segue-se que

$$\frac{d}{dt}\|w\|^2 \leq C(\|f\|_2 + \|g\|_2)\|w\|^2,$$

onde $C(\lambda) = \lambda C_2(\lambda)$. Pelo Corolário 1.1.7,

$$\|w(\cdot,t)\|^2 \leq \|w(\cdot,0)\|^2 e^{Ct}.$$

Seja $C_{2,T}(\lambda) = \exp\left(C(\lambda)\frac{T}{2}\right)$. Então, extraindo a raiz quadrada e tomando o supremo sobre $t \in [0,T]$ da última desigualdade, temos

$$\begin{aligned} \|Uf - Ug\|_{C(0,T;L^2)} &\leq C_{2,T}(\|f\|_2 + \|g\|_2)\|f - g\| \\ &\leq C_{k,T}(\|f\|_{k-1} + \|g\|_{k-1})\|f - g\|, \end{aligned}$$

pois $C_{k,T}$ é crescente como função de k e $\|f\|_2 \leq \|f\|_{k-1}$, $\|g\|_2 \leq \|g\|_{k-1}$. Logo,

$$U : [L^2, H^k]_{\theta,2} \to [C(0,T;L^2), C(0,T;H^k)]_{\theta,2}$$

é continua. Como $[L^2, H^k]_{\theta,2} \cong H^s$ e pela Proposição 3.1.8,

$$[C(0,T;L^2), C(0,T;H^k)]_{\theta,2} \subset C(0,T;[L^2,H^k]_{\theta,2}) \cong C(0,T;H^s),$$

segue-se que $U : H^s \to C(0,T;H^s)$ é contínuo. Pelo Teorema 3.1.6

$$\|Ug\|_{C(0,T;H^s)} \leq \frac{N_s}{M_s} C_{s,T}\left(\frac{1}{M_{k-1}}\|g\|_{k-1}\right)\|g\|_s,$$

onde $C_{s,T}(\lambda) = 2C_{2,T}(4\lambda)^{1-\theta}C_m(3\lambda)^\theta$ e, M_s, M_{k-1} e N_s são definidos em (3.6). □

Referências Bibliográficas

[1] T. B. BENJAMIN, J. L. BONA e J. J. MAHONY, Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, **A 272**, (1972), 47-78.

[2] J. L. BONA e R. SCOTT, Solutions of the Korteweg-de Vries equation in fractional order Sobolev spaces, *Duke Math. J.* **43**, (1976), 87-99.

[3] J. L. BONA e R. SMITH, The initial value problem for the Korteweg-de Vries equation, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser A*, **278**, (1975), 555-601.

[4] J. BOURGAIN, Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations, *Geometric and Functional Analysis,* **3**, (1993), 107-156, 209-262.

[5] L. C. EVANS, *Partial Differential Equations*, University of California, Berkeley - AMS, 1998.

[6] G. B. FOLAND, *Lectures on Partial Differential Equations*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay - Springer-Verlag, 1983.

[7] R. J. IÓRIO Jr. e V. M. IÓRIO, *Equações Diferenciais Parciais: uma introdução*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada-CNPq, Rio de Janeiro, 1988.

[8] R. J. IÓRIO Jr. e V. M. IÓRIO, *Fourier Analysis and Partial Differential Equations,* Cambridge University Press, *preprint.*

[9] T. KATO, On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation, *Studies in Applied Mathematics, Advances in Mathematics Supplementary Studies,* **8**, (1983), 93-128.

[10] T. KATO, Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations, pp. 25-70. *Lecture Notes in Math.,* Springer, Berlin, 1975.

[11] T. KATO, On the Korteweg-de Vries Equation, *Manuscripta Math.,* **89**, (1979), 89-99.

[12] C. E. KENIG, G. PONCE e L. VEGA, A bilinear estimate with applications to the KdV equation, *J. Amer. Math. Soc.* **9**, (1996), 573-603.

[13] C. E. KENIG, G. PONCE e L. VEGA, Well-posedness of the initial value problem for the Korteweg-de Vries equation, *J. Amer. Math. Soc.* **4**, (1991), 323-347.

[14] D. J. KORTEWEG e G. DE VRIES, On the changes of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary wave, *Phil. Mag.* **39**, (1895), 422-443.

[15] M. D. KRUSKAL, R. M. MIURA, C. S. GARDNER e N. J. ZABUSKY, Uniqueness and nonexistence of polynomial conservation laws, *J. Math. Phys.* **11**, (1970), 952.

[16] J. L. LIONS e E. MAGENES, *Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications,* vol. 1, Dunod, Paris, 1968.

[17] J. L. LIONS, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires,* Dunod, Paris, 1969.

[18] R. M. MIURA, C. S. GARDNER e M. D. KRUSKAL, Existence of conservation laws and constants of motion, *J. Math. Phys.* **9**, (1968), 1204.

[19] J. C. SAUT, Applications de l'interpolation non linéaire à des problèmes d'évolution non linéaires, *J. Math. Pures Appl.* **54**, (1975), 27-52.

[20] G. F. SIMONS, *Introduction to Topology and Modern Analysis,* McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.

[21] E. M. STEIN, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions,* Princeton Mathematical Series Nº 30, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[22] L. TARTAR, Interpolation non linéaire et régularité, *J. Functional Analysis* **9**, (1975), 469-489.