Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática

Alguns resultados de fatoração para aplicações dos tipos Hilbert-Schmidt e Classes de Schatten

Cristiane de Andrade Mendes

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos

[1]Este trabalho foi financiado pela FAPESP, processo 00/14031-5.

Alguns resultados de fatoração para aplicações dos tipos Hilbert-Schmidt e Classes de Schatten

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Cristiane de Andrade Mendes** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 4 de dezembro de 2003.

Prof. Dr. **Mário Carvalho de Matos**.

Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos.

Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui.

Prof. Dr. Ary Orozimbo Chiacchio.

Profa. Dra. Mary Lilian Lourenço.

Prof. Dr. Antonio Roberto da Silva.

Tese apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, **UNICAMP** como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática**.

Dedico este trabalho aos meus pais e irmãos,

Aline e Guilherme.

Agradecimentos

Agradeço

ao meu orientador professor Mário Matos, a atenção, competência e disposição de sempre;

aos meus pais e irmãos, Aline e Gui, todos esses anos de paciência e confiança e o apoio que sempre me deram na realização de meus projetos;

aos professores Jorge Mujica, Ary Chiacchio, Sueli Roversi, Antonio Roberto da Silva, Luiza Amália de Moraes, Mary Lilian Lourenço, Geraldo Botelho, Raymundo Alencar e João Bosco Prolla, a presença em momentos importantes da minha formação;

à minha amiga Marcela, todo auxílio e incentivo durante esse anos;

aos meus amigos Daniela, Kátia, Ximena, Ilma, Ercílio, Mércio, PC e Irene, os bons momentos e a amizade verdadeira;

aos amigos Daniel e Erhan, a ajuda na hora das correções;

ao meu amigo Carlos Alberto, o incentivo;

aos professores da Universidade Federal de Juiz de Fora;

à Tânia e Cidinha, da secretaria de pós-graduação do IMECC - UNICAMP, o auxílio na preparação da defesa e a ajuda de sempre;

aos amigos e parentes que acompanharam minha caminhada;

à FAPESP, o apoio financeiro.

Sumário

Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal estudar resultados de fatoração para aplicações multilineares, polinomiais e holomorfas de Hilbert-Schmidt na tentativa de estender, para a teoria não linear, resultados já conhecidos na teoria linear de operadores de Hilbert-Schmidt (1.1.20 e 1.1.21). No primeiro capítulo, fazemos um resumo de importantes definições e resultados sobre operadores lineares, aplicações multilineares, polinomiais e holomorfas, que serão usados posteriormente. O segundo capítulo é dedicado ao estudo de duas formas de fatoração para aplicações de Hilbert-Schmidt. Veremos que, em geral, o fato de se ter aplicações de Hilbert-Schmidt não é equivalente a nenhuma das duas formas de fatoração apresentadas. No último capítulo, estudamos as aplicações de tipo classes de Schatten, especialmente as aplicações de tipo classe de Schatten $\mathcal{S}_2$. Elas são, em particular, aplicações de Hilbert-Schmidt para as quais é possível estender os resultados lineares de fatoração. Apresentamos também um resultado interessante que relaciona essas aplicações com as p-dominadas para $1 \leq p \leq 2$.

Abstract

The main purpose of this work is to study some results on factorization of Hilbert-Schmidt multilinear mappings, polynomials and holomorphic mappings, trying to extend to the non linear theory, well known results for Hilbert-Schmidt linear operators (1.1.20 and 1.1.21). In the first chapter, we make a summary of important definitions and results concerning linear operators, multilinear mappings, polynomials and holomorphic mappings, which will be used later. The second chapter is devoted to the investigation of two kinds of factorization for Hilbert-Schmidt mappings. We will see that, in general, being a Hilbert-Schmidt mapping is not equivalent to any of the two kinds of factorization presented. In the last one, we study the Schatten class type mappings, specially the Schatten class type $\mathcal{S}_2$ ones. Those mappings are, in particular, Hilbert-Schmidt ones for which we can extend the factorization linear results. We also present an interesting relationship between those mappings and the p-dominated ones for $1 \leq p \leq 2$.

Introdução

Os operadores lineares de Hilbert-Schmidt podem ser encontrados em publicações do início do século XX, devido a D. Hilbert ([11] e [12]) e seu aluno, E. Schmidt ([35] e [36]). Em 1967, Pietsch ([30]) introduz a noção de operadores p-somantes e apresenta um importante resultado de fatoração para tais operadores: eles podem ser fatorados através de espaços da forma $C(K)$, K compacto, e subespaços de espaços da forma $L_p(\mu)$, onde μ é uma medida boreliana regular (1.1.6). Também em 1967, A. Pelczynski ([26]) mostra que a classe dos operadores de Hilbert-Schmidt coincide com a classe dos operadores p-somantes entre espaços de Hibert para todo $1 \leq p < \infty$. Em 1968, J. Lindentrauss e A. Pelczynski publicam um trabalho ([14]) onde introduzem o conceito de espaços $\mathcal{L}_p$, $1 \leq p \leq \infty$ e provam ainda que os operadores de Hilbert-Schmidt são exatamente os operadores entre espaços de Hilbert que podem ser fatorados através de um espaço $\mathcal{L}_1$ ou $\mathcal{L}_\infty$.

As classes de Schatten-von Neumann (1.1.14) também são de grande importância neste trabalho. Elas foram introduzidas por R. Schatten e J. von Neumann em artigos dos anos de 1946 e 1948 ([33] e [34]). A classe de ordem 2 é exatamente formada pelos operadores de Hilbert-Schmidt.

Mais recentemente, J. Diestel, H. Jarchow e A. Tonge ([7], 19.2) apresentaram um resultado de fatoração para operadores de Hilbert-Schmidt (1.1.21), onde esses são caracterizados como os operadores entre espaços de Hilbert que se fatoram através de qualquer espaço de Banach de dimensão infinita. A demonstração desse resultado é bem trabalhosa e depende, dentre outras coisas, de um resultado de Dvoretsky ([7], 19.1) e de resultados de S. Bellenot ([7], 19.19 e 19.20) envolvendo sequências básicas em espaços de Banach de dimensão infinita e também fatoração compacta de operadores entre espaços de Hilbert.

Passando à teoria de aplicações não lineares, os conceitos de funcionais multilineares de Hilbert-Schmidt e polinômios de Hilbert-Schmidt são introduzidos por T. Dwyer em sua tese de doutorado ([9] e [10]) com o objetivo de serem usados na teoria de equações diferenciais parciais. Assim como no caso linear, o estudo das aplicações multilineares absolutamente $(r; r_1, ..., r_n)$-somantes é fundamental na teoria multilinear. Elas são definidas por Pietsch em [32] para valores escalares e estudadas por R. Alencar e M. Matos em [1], agora assumindo valores vetoriais. Em [18], M. Matos apresenta as aplicações multilineares de Hilbert-Schmidt com valores vetoriais e, em resposta a uma pergunta de Pietsch formulada em [32], mostra que, em geral, a classe das aplicações multilineares de Hilbert-Schmidt não coincide com aquela das aplicações multilineares absolutamente $(r; r_1, ..., r_n)$-somantes. Neste ponto, podemos perceber que a teoria não-linear não se mostra tão "generosa"como a linear.

Mais adiante, M. Matos ([19]) introduz o conceito das aplicações multilineares completamente absolutamente $(r; r_1, ..., r_n)$-somantes e demonstra que as aplicações multilineares de Hilbert-Schmidt são completamente absolutamente r-somantes para todo $r > 0$. Nos casos em que $r \geq 2$, elas coincidem! Esse fato foi de extrema importância quando iniciamos a pesquisa sobre fatoração de aplicações de Hilbert-Schmidt.

Nosso trabalho está dividido em 3 capítulos. O primeiro capítulo é um resumo das principais definições e resultados da teoria linear e de aplicações multilineares, polinomiais e holomorfas. As definições de todas as classes citadas nesta introdução podem ser encontradas nesse capítulo, com a exceção das aplicações não lineares de Hilbert-Schmidt, que são apresentadas no início do capítulo seguinte. Esse capítulo que chamamos de "Teoria Básica" tem como objetivos facilitar a leitura do trabalho, fixar a notação a ser utilizada e citar referências para que mais detalhes possam ser consultados posteriormente. Por isso, não comentamos demonstrações, com exceção do teorema de fatoração de Diestel-Jarchow-Tonge (1.1.21), onde um esboço é apresentado para que futuras demonstrações possam ser melhor compreendidas.

O segundo capítulo é dedicado às aplicações de Hilbert-Schmidt. Vamos ver que, na 1^a forma de fatoração (em que uma aplicação n-linear é decomposta como n operadores lineares e uma aplicação n-linear), toda aplicação multilinear fatorada dessa maneira através de espaços $\mathcal{L}_\infty$ e $\mathcal{L}_1$ é de Hilbert-Schmidt, mas a recíproca no caso $\mathcal{L}_\infty$ não é verdadeira em geral. No caso $\mathcal{L}_1$, fica em aberto saber se a recíproca é válida ou não. O caso polinomial é análogo e segue como consequência do caso multilinear.

Não obtendo a desejada equivalência, partimos para outra forma de fatoração (2^a forma), utilizando uma aplicação n-linear e um operador linear na decomposição de aplicações n-lineares. A resposta é a seguinte: aplicações de Hilbert-Schmidt admitem a 2^a forma de fatoração através de qualquer espaço de Banach de dimensão infinita, mas o contrário não vale em geral: todo funcional multilinear admite esse tipo de fatoração, mas nem todos são de Hilbert-Schmidt. Novamente, o caso polinomial segue como corolário do caso multilinear. Os destaques da primeira seção são os teoremas 2.1.6 e 2.1.16 e os corolários 2.1.10 e 2.1.23.

A última seção do capítulo é dedicada às aplicações holomorfas de Hilbert-Schmidt, que também foram estudadas por T. Dwyer em sua tese ([9]). Os resultados dessa seção dependem dos resultados obtidos para polinômios de Hilbert-Schmidt. A grosso modo, os resultados obtidos para as holomorfas são parecidos com o caso polinomial, mas as fatorações obtidas são locais, na vizinhança de um certo ponto. Para obtermos fatorações em todo o domínio, vamos precisar que tais aplicações sejam de Hilbert-Schmidt de tipo limitado (2.2.3). Fica em aberto decidir se, dado um espaço de Banach de dimensão infinita, é possível decompor uma aplicação holomorfa de Hilbert-Schmidt através desse espaço. O principal resultado dessa seção é o teorema 2.2.16.

As aplicações de tipo classes de Schatten $\mathcal{S}_p$ foram estudadas por H.A. Braunss e H. Junek em [3] e [4], inspiradas nas idéias de ideais de funcionais n-lineares de Pietsch ([32]). A razão do terceiro capítulo se deve ao fato de que nem toda aplicação de Hilbert-Schmidt admite a primeira forma de fatoração. As aplicações de tipo classe de Schatten $\mathcal{S}_2$, em particular, são aplicações de Hilbert-Schmidt, para as quais é possível obtermos a extensão dos resultados de fatoração lineares. Esses resultados são os teoremas 3.1.12, 3.1.16 para aplicações multilineares de tipo $\mathcal{S}_2$, 3.1.15 e 3.1.17 para polinômios de tipo $\mathcal{S}_2$ e 3.2.10, 3.2.11 para aplicações holomorfas de mesmo tipo.

Resumidamente, esse último capítulo está dividido da seguinte forma: apresentação das aplicações de tipo classes de Schatten; resultados de fatoração; relação entre a classe de Schatten $\mathcal{S}_2$ e as aplicações dominadas (casos multilinear 3.1.18 e polinomial 3.1.19); aplicações holomorfas de tipo classes de Schatten, propriedades e resultados de fatoração; por último, alguns comentários sobre fatoração de operadores lineares das classes de Schatten de ordem p, para $p \neq 2$.

Lista de Notações

$\mathbb{N}$: conjunto dos inteiros positivos

$\mathbb{N}_o = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{K}$: corpo dos reais ou complexos

$D, D_1, ..., D_n, E, E_1, ..., E_n, F, F_1, ..., F_n$: espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$

$H, H_1, ..., H_n, G, G_1, ..., G_n$: espaços de Hilbert sobre $\mathbb{K}$

$(. \mid .)$: produto interno em um espaço de Hilbert H

E': dual topológico de E

B_E: bola unitária fechada de E

$l_p(E)$: espaço das sequências em E absolutamente p-somáveis (def. 1.1.1)

$l_{p,w}(E)$: espaço das sequências em E fracamente p-somáveis (def. 1.1.2)

$l_\infty(E)$: espaços das sequências em E limitadas. Coincide com $l_{\infty,w}(E)$.

$\mathcal{L}(E; F)$: espaço dos operadores lineares contínuos de E em F

$u' \in \mathcal{L}(F'; E')$: operador adjunto de $u \in \mathcal{L}(E; F)$

$\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$: espaço das aplicações n-lineares contínuas de $E_1 \times ... \times E_n$ em F

$\mathcal{L}(^n E; F)$: espaço das aplicações n-lineares contínuas de $E \times ... \times E$ (n vezes) em F

$\mathcal{L}_s\,({}^nE;F)$: subespaço de $\mathcal{L}({}^nE;F)$ formado pelas aplicações n-lineares simétricas

$\mathcal{L}_{as,(r;s_1,...,s_n)}(E_1,...,E_n;F)$: espaço das aplicações n-lineares de $\mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$ que são absolutamente $(r;s_1,...,s_n)$-somantes (def. 1.2.4)

$\mathcal{L}_{as,(r;s)}(E_1,...,E_n;F)$: espaço das aplicações de $\mathcal{L}_{as,(r;s_1,...,s_n)}(E_1,...,E_n;F)$, com $s_1 = ... = s_n = s$

$\mathcal{L}_{as,r}(E_1,...,E_n;F)$: espaço das aplicações de $\mathcal{L}_{as,(r;s_1,...,s_n)}(E_1,...,E_n;F)$, com $s_1 = ... = s_n = r$

$\mathcal{L}_{d,(p_1,...,p_n)}(E_1,...,E_n;F)$: espaço das aplicações n-lineares de $\mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$ que são $(p_1,...,p_n)$-dominadas (def. 1.2.4)

$\mathcal{L}_{d,p}(E_1,...,E_n;F)$: espaço das aplicações n-lineares de $\mathcal{L}_{d,(p_1,...,p_n)}(E_1,...,E_n;F)$ com $p_1 = ... = p_n = p$

$\mathcal{L}_{fas(r;s_1,...,s_n)}(E_1,...,E_n;F)$: espaço das aplicações n-lineares de $\mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$ que são completamente absolutamente $(r;s_1,...,s_n)$-somantes (def. 1.2.7)

$\mathcal{L}_{fas,(r;s)}(E_1,...,E_n;F)$: espaço das aplicações n-lineares de $\mathcal{L}_{fas,(r;s_1,...,s_n)}$ com $s = s_1 = ... = s_n$

$\mathcal{L}_{fas,r}(E_1,...,E_n;F)$: espaço das aplicações n-lineares de $\mathcal{L}_{fas,(r;s_1,...,s_n)}$ com $r = s_1 = ... = s_n$

$\mathcal{L}_{HS}(H_1,...,H_n;G)$: espaço das aplicações n-lineares contínuas de Hilbert-Schmidt (def. 2.1.1)

$\mathcal{L}_{sas,p}(E_1,...,E_n;F)$: espaço das aplicações de $\mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$ que são fortemente absolutamente p-somantes (def. 2.1.22)

$\mathcal{S}_p(H;G)$: classe de Schatten de ordem p (def. 1.1.14)

$\mathcal{L}(\mathcal{S}_p)(H_1,...,H_n;G)$: espaço das aplicações n-lineares contínuas de tipo $\mathcal{S}_p$ (def. 3.1.1)

$\mathcal{P}(^nE;F)$: espaço dos polinômios n-homogêneos contínuos de E em F

$\mathcal{P}_{as,(r;s)}(^nE;F)$: espaço dos polinômios de $\mathcal{P}(^nE;F)$ que são absolutamente $(r;s)$-somantes (def. 1.2.12)

$\mathcal{P}_{as,r}(^nE;F)$: espaço dos polinômios de $\mathcal{P}_{as,(r;s)}(^nE;F)$ tais que $s=r$

$\mathcal{P}_{d,r}(^nE;F)$: espaço dos polinômios de $\mathcal{P}(^nE;F)$ que são r-dominados (def. 1.2.12)

$\mathcal{P}_{fas,(r;s)}(^nE;F)$: espaço dos polinômios de $\mathcal{P}(^nE;F)$ que são completamente absolutamente $(r;s)$-somantes (def. 1.2.15)

$\mathcal{P}_{fas,r}(^nE;F)$: espaço dos polinômios de $\mathcal{P}_{fas,(r;s)}(^nE;F)$ com $r=s$

$\mathcal{P}_{HS}(^nH;G)$: espaço dos polinômios n-homogêneos contínuos de Hilbert-Schmidt (def. 2.1.2)

$\mathcal{P}(\mathcal{S}_p)(^nH;G)$: espaço dos polinômios de tipo $\mathcal{S}_p$ (def. 3.1.7)

$\mathcal{F}(E_1,...,E_n;F)$: espaço das aplicações n-lineares de tipo finito (def. 1.2.3)

$\mathcal{H}(E;F)$: espaço das aplicações holomorfas de E em F (espaços sobre $\mathbb{C}$) (def. 1.3.1)

$\mathcal{H}_{d,p}(E;F)$: espaço das aplicações de $\mathcal{H}(E;F)$ que são de tipo p-dominadas (def. 1.3.7 e 1.3.8)

$\mathcal{H}_{fas,(r;s)}(E;F)$: espaço das aplicações de $\mathcal{H}(E;F)$ que são de tipo completamente absolutamente $(r;s)$-somantes (def. 1.3.7 e 1.3.8)

$\mathcal{H}_{HS}(H;G)$: espaço das aplicações de $\mathcal{H}(H;G)$ que são de Hilbert-Schmidt (def. 2.2.2)

$\mathcal{H}_{HS}^b(H;G)$: espaço das aplicações de $\mathcal{H}_{HS}(H;G)$ que são de Hilbert-Schmidt de tipo limitado (def. 2.2.3)

$\mathcal{H}(\mathcal{S}_p)(H;G)$: espaço das aplicações de $\mathcal{H}(H;G)$ que são de tipo $\mathcal{S}_p$ (def. 3.2.2)

$\mathcal{H}^b(E;F)$: espaço das aplicações limitadas de $\mathcal{H}(E;F)$ (def. 1.3.2)

$W(K)$: conjunto de todas medidas de probabilidade regulares na $\sigma-$ álgebra Borel de K com a topologia fraca-estrela.

$B_r(a) = \{x \in E; \| x - a \| < r \}$.

$B_r[a] = \{x \in E; \| x - a \| \leq r\}$.

$L_p(\mu)$: espaço das funções da forma $f : X \to \mathbb{K}$ que são mensuráveis e tais que $\int_X | f(x) |^p \, d\mu < \infty$.

$L_\infty(\mu)$: espaço das funções da forma $f : X \to \mathbb{K}$ que são essencialmente limitadas.

$l_p^I = L_p(\mu)$, onde μ é a medida de contagem em um conjunto I.

l_∞^I: conjunto das funções limitadas da forma $f : I \to \mathbb{K}$.

$l_p = l_p^{\mathbb{N}} = \{(a_n)_n \subset \mathbb{K}; \sum\limits_{n=1}^{\infty} | a_n |^p < \infty\}$.

$c_o = \{(a_n)_n \subset \mathbb{K}; a_n \to 0\}$.

$C(A)$: espaço das funções contínuas definidas em A com valores escalares.

Capítulo 1

Teoria Básica

Neste capítulo, vamos recordar algumas definições importantes e fazer um resumo dos principais resultados sobre operadores lineares, aplicações multilineares, polinômios e aplicações holomorfas a serem utilizados ao longo do trabalho.

As letras $E, E_1, ..., E_n, F,\ F_1, ..., F_n$ simbolizam espaços de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $H, H_1, ..., H_n, G, G_1, ..., G_n$, espaços de Hilbert sobre $\mathbb{K}$. Qualquer dúvida acerca de notação pode ser solucionada consultando a lista de notações no início do trabalho.

Vamos inicialmente recordar uma desigualdade que terá grande importância em algumas das demonstrações deste trabalho:

Desigualdade de Hölder Generalizada 1.0.1 *Se* $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_n}$, *então*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \mid a_j^{(1)} ... a_j^{(n)} \mid^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mid a_j^{(1)} \mid^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} ... \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mid a_j^{(n)} \mid^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}}$$

1.1 Operadores Lineares

Definição 1.1.1 *Seja $0 < p < \infty$. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E é dita fortemente p-somável (ou p-somável) se a sequência escalar $(\| x_n \|)_{n=1}^{\infty}$ pertence a l_p. Vamos denotar por $l_p(E)$ o espaço de tais sequências. Uma norma (p-norma se $0 < p < 1$) para esse espaço é dada por*

$$\| (x_n)_n \|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

O espaço $l_p(E)$, com a norma (p-norma caso $0 < p < 1$) acima, é um espaço de Banach (esp. vetorial topológico metrizável completo se $o < p < 1$).

Definição 1.1.2 *Seja $0 < p < \infty$. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E é dita fracamente p-somável se a sequência escalar $(\langle x', x_n \rangle)_{n=1}^{\infty}$ pertence a l_p para todo $x' \in E'$. Vamos denotar por $l_{p,w}(E)$ o espaço de tais sequências. Uma norma (p-norma caso $0 < p < 1$) para esse espaço é dada por*

$$\| (x_n)_n \|_{p,w} = \sup_{x' \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} | \langle x', x_n \rangle |^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

O espaço $l_{p,w}(E)$, com a norma (p-norma caso $0 < p < 1$) acima , é um espaço de Banach (esp. vetorial topológico metrizável completo caso $0 < p < 1$).

é claro que $l_p(E) \subset l_{p,w}(E)$ e que $\| (x_n)_n \|_{p,w} \leq \| (x_n)_n \|_p$ para toda sequência $(x_n)_n \in l_p(E)$.

Definição 1.1.3 *Seja $0 < p < \infty$. Dizemos que $u \in \mathcal{L}(E; F)$ é absolutamente p-somante se existe uma constante $C \geq 0$ tal que, para qualquer escolha de $m \in \mathbb{N}$ e $x_1, ..., x_m \in E$,* *tem-se:*

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \| ux_i \|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x' \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{m} | \langle x', x_n \rangle |^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

O ínfimo das constantes $C \geq 0$ que satisfazem a desigualdade acima será denotado por $\| u \|_{as,p}$ e define uma norma (p-norma caso $0 < p < 1$) para o espaço dos operadores p-somantes $\mathcal{L}_{as,p}(E; F)$. Esse espaço, com a norma (p-norma caso $0 < p < 1$) acima, é um espaço de Banach (esp. vetorial topológico metrizável completo se $0 < p < 1$).

Exemplo 1.1.4 Exemplos de operadores p-somantes

(a) *Sejam K um espaço de Hausdorff compacto e μ uma medida de Borel regular e positiva em K. A inclusão $J_p : C(K) \to L_p(\mu)$ é p-somante e $\| J_p \|_{as,p} = \mu(K)^{\frac{1}{p}}$.*

(b) *Sejam (Ω, Σ, μ) um espaço de medida finita e $1 \leq p < \infty$. O operador inclusão $i_p : L_\infty(\mu) \to L_p(\mu)$ é p-somante, com $\| i_p \|_{as,p} = \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}}$.*

(c) *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $\lambda = (\lambda_n)_n \in l_p$. O operador diagonal D_λ dado por: $D_\lambda : l_\infty \to l_p$, $D_\lambda(a_n)_n = (\lambda_n a_n)_n$ é p-somante, com $\| D_\lambda \|_{as,p} = \| \lambda \|_p$.*

Alguns comentários devem ser feitos acerca dos operadores p-somantes.

Comentários 1.1.5 .

1. *Se $u \in \mathcal{L}_{as,p}(E; F)$, então $\| u \| \leq \| u \|_{as,p}$, onde $\| . \|$ denota a norma usual do espaço dos operadores lineares contínuos de E em F.*

2. *(Teorema da Inclusão) Se $0 < p < q < \infty$, então $\mathcal{L}_{as,p}(E; F) \subset \mathcal{L}_{as,q}(E; F)$. Ainda, se $u \in \mathcal{L}_{as,p}(E; F)$, tem-se $\| u \|_{as,q} \leq \| u \|_{as,p}$.*

3. (Propriedade de Ideal) Sejam $0 < p < \infty$ *e* $u \in \mathcal{L}_{as,p}(E;F)$*. Se* $w \in \mathcal{L}(E_1;E)$ *e* $v \in \mathcal{L}(F;F_1)$*, então* $v \circ u \circ w \in \mathcal{L}_{as,p}(E_1;F_1)$ *e* $\| vuw \| \leq \| v \| \| u \|_{as,p} \| w \|$.

4. $u \in \mathcal{L}(E;F)$ *é p-somante se, e somente se,* $(ux_n)_n \in l_p(F)$ *sempre que* $(x_n)_n \in l_{p,w}(E)$.

As demonstrações dos resultados acima e mais detalhes sobre a teoria dos operadores p-somantes podem ser vistos em [7], capítulo 2 e em [31].

Um importante resultado de fatoração para operadores p-somantes é o teorema de fatoração de Pietsch, que nos fornece fatorações através de espaços de funções contínuas e espaços do tipo $L_p(\mu)$, onde μ é uma medida boreliana regular. Uma demonstração para tal resultado pode ser vista em [7] (teorema 2.13) ou em [21] (teorema 2.1.1).

Teorema 1.1.6 *(Pietsch) Seja* $1 \leq p < \infty$*. Consideremos* E, F *espaços de Banach,* K *um subconjunto fraco estrela compacto de* $B_{E'}$ *normante, isto é, com a propriedade* $\|x\| = \sup\{|x'(x)|; x' \in K\}$ *para todo* $x \in E$ *e* $B = B_{F'}$*. Para todo operador* $u : E \to F$*, as seguintes proposições são equivalentes:*

i) u *é* p *somante;*

ii) existem uma medida de Borel regular e de probabilidade μ *em* K*, um subespaço (fechado)* X_p *de* $L_p(\mu)$ *e um operador* $\hat{u} : X_p \to F$ *tais que:* $J_p i_E(E) \subset X_p$ *e para todo* $x \in E$*, temos* $\hat{u} J_p i_E(x) = ux$.

Em outras palavras, se J_p^E *é a aplicação* $i_E(E) \to X_p$ *induzida por* J_p*, então o seguinte* *diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i_E"'] & F \\ i_E(E) \arrow[r, hook, "J_p^E"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & X_p \arrow[u, "\hat{u}"'] \arrow[d, phantom, "\cap"] \\ C(K) & L_p(\mu) \end{tikzcd}$$

onde $i_E(x)(x') = \langle x', x \rangle$ *para todo* $x' \in B_{E'}$ *e* $x \in E$, $j = 1, ..., n$.

iii) existem uma medida de Borel regular e de probabilidade em K *e um operador* $\tilde{u} : L_p(\mu) \to l_\infty^B$ *tais que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i_E"'] & F \arrow[r, "i_F"] & l_\infty^B \\ C(K) \arrow[r, hook, "J_p"] & L_p(\mu) \arrow[ur, "\tilde{u}"'] & \end{tikzcd}$$

iv) existem um espaço de probabilidade (Ω, Σ, μ) *e operadores* $\tilde{u} : L_p(\mu) \to l_\infty^B$ *e* $v : E \to L_\infty(\mu)$ *tais que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & F \arrow[r, "i_F"] & l_\infty^B \\ L_\infty(\mu) \arrow[r, "i_p"] & L_p(\mu) \arrow[ur, "\tilde{u}"'] & \end{tikzcd}$$

Mais ainda, podemos escolher μ *e* $\hat{u}$ *em (ii) ou* μ *e* $\tilde{u}$ *em (iii) de tal forma que* $\|\hat{u}\| = \|\tilde{u}\| = \pi_p(u)$.

Vamos agora apresentar a definição de espaços $\mathcal{L}_p$ introduzida por Lindenstrauss e Pelczynski em [14]. A característica desses espaços é que seus subespaços de dimensão finita se comportam como os espaços da forma l_p^n. Mais detalhes sobre esse assunto podem ser vistos em [15] ou ainda em [7], capítulo 3.

Definição 1.1.7 *Sejam* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $\lambda > 1$. *Um espaço de Banach* E *é um espaço* $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ *se todo subespaço* X *de dimensão finita de* E *está contido em um subespaço* Y *de* E*, também de dimensão finita, para o qual existe um isomorfismo* $v : Y \to l_p^{dimY}$*, com* $\| v \| \| v^{-1} \| < \lambda$. *Vamos dizer que* E *é um* espaço $\mathcal{L}_p$ *se* E *é um espaço* $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ *para algum* $\lambda > 1$.

Exemplo 1.1.8 .

(a) *Se* (Ω, Σ, μ) *é um espaço de medida e* $1 \leq p \leq \infty$*, então* $L_p(\mu)$ *é um espaço* $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ *para todo* $\lambda > 1$.

(b) *Se* K *é um espaço de Hausdorff compacto, então* $C(K)$ *é um espaço* $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}$ *para todo* $\lambda > 1$.

A prova das afirmativas dadas no exemplo acima podem ser vistas em [7], teorema 3.2.

Definição 1.1.9 *Um espaço de Banach* F *é chamado de injetivo se para todo espaço de Banach* E*, todo subespaço* X *de* E *e todo operador* $u \in \mathcal{L}(X; F)$*, existe uma extensão* $\tilde{u} \in \mathcal{L}(E; F)$ *para* u. *Se existir uma constante* $\lambda \geq 1$ *tal que* $\| \tilde{u} \| \leq \lambda \| u \|$*, então dizemos que* F *tem a* propriedade da λ - extensão. F *tem a* propriedade da extensão métrica *se* $\lambda = 1$.

Os espaços l_∞^Γ e $C(K)''$ (K compacto) têm a propriedade da extensão métrica (veja [6], 3.10).

São resultados importantes sobre os espaços $\mathcal{L}_p$ (veja [15]):

Teorema 1.1.10 *(Lindenstrauss-Rosenthal) Um espaço de Banach E é um espaço $\mathcal{L}_p$ se, e somente se, E' é um espaço $\mathcal{L}_q$, onde $1 \leq p \leq \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.*

Teorema 1.1.11 *(Lindenstrauss-Rosenthal) Todo espaço injetivo é um espaço $\mathcal{L}_\infty$. Um espaço de Banach E é um espaço $\mathcal{L}_\infty$ se, e somente se, E'' é injetivo.*

Os seguintes resultados são devidos a Lindenstrauss e Pelczynski ([14]) e são generalizações de resultados obtidos por Grothendieck.

Teorema 1.1.12 *Se E é um espaço $\mathcal{L}_{1,\lambda}$ e F, um espaço $\mathcal{L}_{2,\lambda'}$, então todo operador $u \in \mathcal{L}(E;F)$ é 1-somante, com $\| u \|_{as,1} \leq \kappa_G \lambda \lambda' \| u \|$ (κ_G é a constante de Grothendieck - [7], 1.14).*

Teorema 1.1.13 *Se E é um espaço $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}$ e F, um espaço $\mathcal{L}_{p,\lambda'}$, $1 \leq p \leq 2$, então todo operador $u \in \mathcal{L}(E;F)$ é 2-somante, com $\| u \|_{as,2} \leq \kappa_G \lambda \lambda' \| u \|$ (κ_G é a constante de Grothendieck - [7], 1.14).*

Demonstrações para os teoremas acima podem ser vistas também em [7], 3.1 e 3.7 respectivamente.

Definição 1.1.14 *Para $0 < p < \infty$, a Classe de Schatten-von Neumann de ordem p é formada por todos os operadores $u \in \mathcal{L}(H;G)$ que admitem representação da forma:*

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n(. \mid h_n) g_n$$

onde $(\tau_n)_n \in l_p$*,* $(h_n)_n$ *é uma sequência ortonormal em* H *e* $(g_n)_n$ *é uma sequência ortonormal em* G*.*

Vamos indicar a classe de tais operadores por $\mathcal{S}_p(H;G)$ *e uma norma (p-norma se* $0 < p < 1$*) é dada por:*

$$\sigma_p(u) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mid \tau_n \mid^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$\mathcal{S}_p(H;G)$*, com a norma (p-norma no caso* $0 < p < 1$*), é um espaço de Banach (esp. vetorial topológico metrizável completo se* $0 < p < 1$*).*

Mais detalhes sobre esse espaço podem ser vistos em [7], capítulo 4 , [31], 15.5 e [13]. Façamos alguns comentários sobre as classes de Schatten:

Comentários 1.1.15 .

1. Se $0 < p \leq q < \infty$*, então* $\mathcal{S}_p(H;G) \subset \mathcal{S}_q(H;G)$ *e* $\sigma_q(u) \leq \sigma_p(u)$ *para todo* $u \in \mathcal{S}_p(H;G)$*.*

2. Sejam $0 < p < \infty$ *e* $u \in \mathcal{L}(H;G)$*. Então,* $u \in \mathcal{S}_p(H;G)$ *se, e somente se,* $u' \in \mathcal{S}_p(G;H)$*. Nesse caso,* $\sigma_p(u) = \sigma_p(u')$*.*

3. Sejam $0 < p < \infty$*,* $u \in \mathcal{S}_p(H;G)$*,* $w \in \mathcal{L}(H_1;H)$ *e* $v \in \mathcal{L}(G;G_1)$*. Então,* $v \circ u \circ w \in \mathcal{S}_p(H_1;G_1)$ *e* $\sigma_p(vuw) \leq \parallel v \parallel \sigma_p(u) \parallel w \parallel$*.*

4. Sejam $0 < p \leq 2$ *e* $u \in \mathcal{L}(H;G)$*. Se* $(\parallel uh_i \parallel)_i \in l_p^I$ *para alguma base ortonormal* $(h_i)_{i \in I}$ *de* H*, então* $u \in \mathcal{S}_p(H;G)$ *e*

$$\sigma_p(u) \leq \left(\sum_{i \in I} \parallel uh_i \parallel^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

5. Sejam $2 \leq p < \infty$ e $u \in \mathcal{S}_p(H;G)$. Então,

$$\left(\sum_{i\in I} \| uh_i \|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sigma_p(u)$$

para toda base ortonormal $(h_i)_{i\in I}$ de H.

6. Seja $1 \leq p < \infty$. Um operador $u \in \mathcal{L}(H;G)$ está em $\mathcal{S}_p(H;G)$ se, e somente se, $((uwe_n \mid ve_n))_n \in l_p$ para todo operador $w \in \mathcal{L}(l_2;H)$ e $v \in \mathcal{L}(l_2;G)$.

7. Todo operador de $\mathcal{S}_p(H;G)$ é compacto.

Definição 1.1.16 *Um operador $u \in \mathcal{L}(H;G)$ é um* operador de Hilbert-Schmidt *quando $\sum_{i\in I} \| uh_i \|^2 < \infty$ para alguma (equivalentemente: para toda) base ortonormal $(h_i)_{i\in I}$ de H.*

O espaço de tais operadores é denotado por $\mathcal{L}_{HS}(H;G)$ e pode-se definir um produto interno nesse espaço da seguinte forma:

$$(u \mid v) = \sum_{i\in I}(uh_i \mid vh_i)$$

para todo $u, v \in \mathcal{L}_{HS}(H;G)$. A norma correspondente é indicada por $\| \,.\, \|_{HS}$ e o espaço dos operadores de Hilbert-Schmidt, com a norma acima, é um espaço de Hilbert.

É possível mostrar que se u é um operador de Hilbert-Schmidt, então a soma $\sum_{i\in I} \| uh_i \|^2$ é finita e seu valor independe da base ortonormal $(h_i)_{i\in I}$ de H tomada (veja [19], proposiç ao 5.1).

Observação 1.1.17 *De 1.1.15, ítens 4 e 5, concluímos que $\mathcal{L}_{HS}(H;G) = \mathcal{S}_2(H;G)$ e $\| \,.\, \|_{HS} = \sigma_2(.)$.*

Em [26], Pelczynski mostrou um importante resultado, relacionando os operadores p-somantes e de Hilbert-Schmidt:

Teorema 1.1.18 *(Pelczynski)* $\mathcal{L}_{HS}(H;G) = \mathcal{L}_{as,p}(H;G)$ *para todo* $1 \leq p < \infty$.

Observação 1.1.19 *Na demonstração do teorema de Pelczynski, podemos obter a seguinte relação entre as normas p-somantes e de Hilbert-Schmidt (veja também [21], teorema 1.1.1):*

$$B_p^{-1} \parallel . \parallel_{HS} \leq \parallel . \parallel_{as,p} \leq A_1^{-1} \parallel . \parallel_{HS}$$

onde A_1 *e* B_p *são constantes que aparecem na desigualdade de Khinchin (veja [7], 1.10).*

No caso $p = 2$*, temos* $\parallel . \parallel_{as,2} = \parallel . \parallel_{HS}$ *(veja [7], 4.10).*

Apresentamos agora os resultados de fatoração para operadores de Hilbert-Schmidt, que serão objeto de estudo no decorrer do trabalho. O primeiro, teorema de Lindentrauss-Pelczynski (veja [7], teorema 4.12), apresenta fatorações através de espaços de Banach $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_\infty$. Já o resultado de Diestel-Jarchow-Tonge nos fornece fatorações através de espaços de Banach de dimensão infinita. Uma demonstração para esse teorema pode ser vista em [7], 19.2.

Teorema 1.1.20 *(Lindenstrauss-Pelczynski) Seja* $u : H \to G$ *um operador linear. São equivalentes:*

(i) $u \in \mathcal{L}_{HS}(H;G)$

(ii) u *fatora-se através de um espaço* $\mathcal{L}_1$*, isto é, existem* X *um espaço* $\mathcal{L}_1$*,* $w \in \mathcal{L}(H;X)$ *e* $v \in \mathcal{L}(X;G)$ *tais que* $u = v \circ w$.

(iii) u fatora-se através de um espaço $\mathcal{L}_\infty$, isto é, existem X um espaço $\mathcal{L}_\infty$, $w \in \mathcal{L}(H;X)$ e $v \in \mathcal{L}(X;G)$ tais que $u = v \circ w$.

Mais ainda, w e v podem ser tomados em (ii) de tal forma que $\| w \| \leq \| u \|_{HS}$ e $\| v \| \leq 1$ e em (iii), de tal forma que $\| w \| = 1$ e $\| v \|_{as,2} \leq \| u \|_{HS}$.

Teorema 1.1.21 *(Diestel-Jarchow-Tonge) Seja u um operador linear entre espaços de Hilbert. Então, $u \in \mathcal{L}_{HS}(H;G)$ se, e somente se, para todo espaço de Banach de dimensão infinita Z, u admite uma fatoração da forma: $u = v \circ w$, onde $w \in \mathcal{L}(H;Z)$ e $v \in \mathcal{L}(Z;G)$.*

Mais ainda, w e v podem ser tomados de tal forma que w seja compacto e v, compacto e 2-somante.

A demonstração do teorema 1.1.21 nos fornece detalhes importantes sobre a forma em que podem ser tomados os operadores lineares envolvidos na fatoração. Essas informações serão de grande utilidade quando estivermos estudando a fatoração de aplicações holomorfas mais adiante. Por esse motivo, vamos comentar, de forma bem resumida, como é feita a prova desse resultado .

Antes, vamos enunciar o seguinte lema:

Lema 1.1.22 *Dada uma sequência $(\tau_s)_s \in l_2$, é possível obter sequências $(\sigma_s)_s \in l_2$ e $(\gamma_n)_n \in c_o$ tais que $\tau_s = \sigma_s \gamma_s$, $s \in \mathbb{N}$.*

Mais tarde, veremos uma forma bem conveniente (para os nossos propósitos) de demonstrar o lema acima.

Idéia da demonstração (Teorema 1.1.21)

Parte 1 Suponhamos inicialmente que $u \in \mathcal{L}_{HS}(H;G) = \mathcal{S}_2(H;G)$ e seja Z um espaço de Banach de dimensão infinita. Podemos tomar uma representação para u da forma:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n(. \mid h_n) g_n$$

onde $(\tau_n)_n \in l_2$, $(h_n)_n$ é uma sequência ortonormal em H e $(g_n)_n$, uma sequência ortonormal em G.

Sem perda de generalidade, vamos supor $\| (\tau_n)_n \|_2 = 1$. Pelo lema 1.1.22, podemos escrever: $\tau_s = \alpha_s \sigma_s \beta_s$ para todo $s \in \mathbb{N}$, onde $(\alpha_s)_s$ e $(\beta_s)_s$ estão em c_o e $(\sigma_s)_s \in l_2$. Se $a = \sum_n \alpha_n e_n \otimes g_n$ e $b = \sum_n \beta_n h_n \otimes e_n$, com $(e_n)_n$ base ortonormal de l_2, temos que $u = aD_\sigma b$, onde $D_\sigma : l_2 \to l_2$ é a restrição ao espaço l_2 do operador diagonal $D : l_\infty \to l_2$ induzido por $\sigma = (\sigma_n)_n$ (1.1.4). Notemos que

$$\| a \| \leq \| (\alpha_n)_n \|_\infty \qquad (1)$$

Parte 2 Trabalhando com o operador $b \in \mathcal{L}(H; l_2)$, podemos escrevê-lo da forma: $b = a_1 \circ a_2$, onde $a_2 \in \mathcal{L}(H; l_2)$, $a_2(h) = ((h \mid h_n))_n$ e $a_1 \in \mathcal{L}(l_2; l_2)$, $a_1((\xi_n)_n) = (\beta_n \xi_n)_n$. Temos ainda que: $\| a_2 \| \leq 1 \qquad \| a_1 \| \leq \| (\beta_n)_n \|_\infty \qquad (2)$

Parte 3 Trabalhando agora com o operador compacto a_1, (usando [7], 19.20: Dado um espaço de Banach Z de dimensão infinita, todo operador compacto entre espaços de Hilbert fatora-se através de um subespaço de Z e os operadores da fatoração são compactos), podemos obter operadores $A : l_2 \to Z_o$ e $B : Z_o \to l_2$ (Z_o é um subespaço de Z) tais que $a_1 = (D_\lambda \circ B) \circ (A \circ D_\lambda)$, onde $\lambda = (\lambda_n)_n \in c_o$, $\lambda_n = \beta_n^{\frac{1}{4}}$ (estamos supondo

$\beta_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$) e $D_\lambda : l_2 \to l_2$ é dado por $D_\lambda((\xi_n)_n) = (\lambda_n \xi_n)_n$. Quanto às normas de A e B, temos

$$\| A \| \leq 8 \qquad \| B \| \leq 12C \qquad 1 \leq C \leq 4 \tag{3}$$

A constante C depende do espaço Z usado, mas em qualquer caso, (seguindo as demonstrações dos resultados envolvidos), $1 \leq C \leq 4$.

Parte 4 Chamando $b_1 = D_\lambda \circ B$ e $b_2 = A \circ D_\lambda \circ a_2$, temos que $b = b_1 \circ b_2$. Quanto às normas de b_1 e b_2, usando (2) e (3), podemos escrever:

$$\| b_2 \| = \| A \circ D_\lambda \circ a_2 \| \leq \| A \| \| D_\lambda \| \| a_2 \| \leq 8 \| (\lambda_n)_n \|_\infty = 8 \| (\beta_n)_n \|_\infty^{\frac{1}{4}}$$

$$\| b_1 \| = \| D_\lambda \circ B \| \leq \| D_\lambda \| \| B \| \leq 12C \| (\lambda_n)_n \|_\infty = 12C \| (\beta_n)_n \|_\infty^{\frac{1}{4}}$$

Seja $i : l_2 \to l_\infty$ o operador inclusão. Podemos estender o operador $ib_1 \in \mathcal{L}(Z_o; l_\infty)$ a um operador $\tilde{b_1} : Z \to l_\infty$, com

$$\| \tilde{b_1} \| = \| ib_1 \| \leq 12C \| (\beta_n)_n \|_\infty^{\frac{1}{4}} \tag{4}$$

(l_∞ tem a propriedade da extensão métrica: 1.1.9). Escrevendo $v = a \circ D \circ \tilde{b_1}$, temos que v é compacto e 2-somante, pois D é 2-somante (1.1.4) e a é compacto. Ainda, usando (1) e (4):

$$\| v \|_{as,2} \leq \| a \| \| D \|_{as,2} \| \tilde{b_1} \| \leq 12C \| (\alpha_n)_n \|_\infty \| (\beta_n)_n \|_\infty^{\frac{1}{4}} \| (\sigma_n)_n \|_2 \, .$$

Considerando b_2 como um operador de H em Z, digamos, $w : H \to Z$, temos $u = v \circ w$, com $\| w \| = \| b_2 \| \leq 8 \| (\beta_n)_n \|_\infty^{\frac{1}{4}}$.

1.2 Aplicações multilineares e polinômios

Nesta seção, vamos apresentar importantes definições relativas a aplicações multilineares e polinômios, que serão utilizadas ao longo de todo o trabalho. Apresentaremos também alguns resultados que serão de grande importância nas demonstrações dos próximos capítulos.

Sobre a notação a ser utilizada, vamos indicar por $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ o espaço das aplicações multilineares contínuas de $E_1 \times ... \times E_n$ em F, dotado da norma:

$$\| T \| = \sup\{\| T(x_1, ..., x_n) \|; \| x_k \| \leq 1, k = 1, ..., n\}$$

para todo $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$.

Se $E_1 = ... = E_n = E$, vamos indicar $\mathcal{L}(^n E; F)$ no lugar de $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$.

Vamos indicar por $\mathcal{P}(^n E; F)$ o espaço de todos os polinômios n-homogêneos contínuos de E em F, com a seguinte norma:

$$\| P \| = \sup\{\| P(x) \|; \| x \| \leq 1\}$$

para todo $P \in \mathcal{P}(^n E; F)$.

A cada $T \in \mathcal{L}(^n E; F)$, podemos asociar um polinômio $\hat{T} \in \mathcal{P}(^n E; F)$ dado por $\hat{T}(x) = T(x, ..., x)$. Da mesma forma, a cada $P \in \mathcal{P}(^n E; F)$, podemos associar uma aplicação multilinear contínua denotada por $\check{P}$ (veja 1.2.2), dada por:

Fórmula de Polarização 1.2.1 .

$$\check{P}(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{n!2^n} \sum_{\epsilon_j = \pm 1} \epsilon_1 ... \epsilon_n P\left(\sum_{j=1}^{n} \epsilon_j x_j\right)$$

para todo $x_j \in E,\ j = 1, ..., n.$

Temos também uma importante relação entre $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ e $\check{P} \in \mathcal{L}(^nE;F)$:

Proposição 1.2.2 $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ *se, e somente se,* $\check{P} \in \mathcal{L}(^nE;F)$. *Neste caso,*

$$\| P \| \leq \| \check{P} \| \leq \frac{n^n}{n!} \| P \|$$

para cada $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$.

Definição 1.2.3 *Uma aplicação multilinear* $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ *é de tipo finito se existem* $\varphi_{1,j}, ., \varphi_{m,j} \in E_j'$, $j = 1, ..., n$ *e* $b_1, ..., b_m \in F$ *tais que:*

$$T(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_{i,1}(x_1)...\varphi_{i,n}(x_n)b_i$$

para todo $(x_1, ..., x_n) \in E_1 \times ... \times E_n$.

A definição a seguir de aplicações absolutamente somantes foi introduzida por Pietsch em [32] para o caso de funcionais multilineares e estudada por Alencar e Matos em [1] para o caso de aplicações com valores vetoriais.

Definição 1.2.4 *Sejam* $r, s_1, ..., s_n \in (0, +\infty]$, *com* $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{s_1} + ... + \frac{1}{s_n}$. *Uma aplicação* $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ *é* absolutamente $(r; s_1, ..., s_n)$-somante *se existe* $C \geq 0$ *tal que*

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \| T\left(x_i^1, ..., x_i^n\right) \|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \prod_{k=1}^{n} \| (x_i^k)_{i=1}^m \|_{s_k,w}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, $x_i^k \in E_k$, $k = 1, ..., n$ *e* $i = 1, ..., m$.

O espaço de tais aplicações multilineares é denotado por $\mathcal{L}_{as,(r;s_1,...,s_n)}(E_1, ..., E_n; F)$ *e o ínfimo das constantes que satisfazem a desigualdade acima é denotada por*

$\| T \|_{as,(r;s_1,...,s_n)}$. *Isso define uma norma (r-norma se $r < 1$) para o espaço, que é completo dotado dessa norma (ou r-norma).*

No caso particular em que $\frac{1}{r} = \frac{1}{s_1} + ... + \frac{1}{s_n}$, *vamos dizer que* $T \in \mathcal{L}_{as,(r;s_1,...,s_n)}(E_1, ..., E_n; F)$ *é* $(s_1, ..., s_n)$-dominada. *Vamos denotar tal espaço por* $\mathcal{L}_{d,(s_1,...,s_n)}(E_1, ..., E_n; F)$ *e sua norma (ou r-norma) por* $\| \cdot \|_{d,(s_1,...,s_n)}$.

Uma observação deve ser feita acerca de notação. Se $s_1 = ... = s_n = s$, vamos escrever $as, (r; s)$ no lugar de $as, (r; s_1, ..., s_n)$ e d, s no lugar de $d, (s_1, ..., s_n)$. No caso em que $r = s_1 = ... = s_n$, vamos denotar as, r ao invés de $as, (r; s_1, ..., s_n)$.

Proposição 1.2.5 *As seguintes condições são equivalentes para uma aplicação multilinear* $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$*:*

(i) $T \in \mathcal{L}_{as,(r;s_1,...,s_n)}(E_1, ..., E_n; F)$

(ii) $(T(x_{1,j}, ..., x_{n,j}))_{j=1}^{\infty} \in l_r(F)$ *sempre que* $(x_{i,j})_{j=1}^{\infty} \in l_{s_i,w}(E_i)$, $i = 1, ..., n$.

(iii) A aplicação T_w *definida de* $l_{s_1,w}(E_1) \times ... \times l_{s_n,w}(E_n)$ *em* $l_r(F)$ *dada por:*

$$T_w \left((x_{1,j})_j, ..., (x_{n,j})_j\right) = (T(x_{1,j}, ..., x_{n,j}))_{j=1}^{\infty}$$

está bem definida, é multilinear e contínua.

Para as aplicações dominadas, temos o teorema de fatoração de Pietsch (para uma demonstração, veja [29], 3.17):

Teorema 1.2.6 *Sejam* $r_1, ..., r_n \in [1, \infty)$, $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ *e* $K_j \subset B_{E_j'}$ *um conjunto fraco estrela compacto e normante, isto é, um conjunto com a propriedade*

$\|x_j\| = \sup\{|x_j'(x_j)|; x_j' \in K_j\}$ *para todo* $x_j \in E_j$, $j = 1, ..., n$. *São equivalentes:*

(i) T *é* $(r_1, ..., r_n)$*-dominada.*

(ii) Para cada $j = 1, ..., n$, *existem* $\mu_j \in W(K_j)$, $X_j \subset L_{r_j}(\mu_j)$ *um subespaço fechado,* $j = 1, ..., n$ *e* $S \in (X_1, ..., X_n; F)$ *tais que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd}
E_1\times \arrow[d, "i_{E_1}"'] & \cdots & \times E_n \arrow[d, "i_{E_n}"] \arrow[rr, "T"] & & F \\
i_{E_1}(E_1)\times \arrow[d, phantom, "\cap"] & \cdots & \times i_{E_n}(E_n) \arrow[d, phantom, "\cap"] \arrow[rr, "(J_{r_1}, ..., J_{r_n})"'] & & X_1 \times \cdots \times X_n \arrow[u, "S"'] \arrow[d, phantom, "\cap \qquad \cap"] \\
C(K_1) & \cdots & C(K_n) & & L_{r_1}(\mu_1) L_{r_n}(\mu_n)
\end{tikzcd}$$

onde $i_{E_j} : E_j \longrightarrow C(K_j)$ *é dado por* $i_{E_j}(x)(x') = \langle x', x\rangle$, $x' \in K_j$, $x \in E_j$ *e* $J_{r_j} : C(K_j) \longrightarrow L_{r_j}(\mu_j)$ *é a inclusão formal,* $j = 1, ..., n$. *Mais ainda,* S *pode ser tomada de tal forma que* $\| S \| = \| T \|_{d,(r_1,...,r_n)}$.

Em [19], Matos introduziu um conceito mais restritivo que o das aplicações absolutamente somantes:

Definição 1.2.7 *Sejam* $r, s_1, ..., s_n \in (0, +\infty]$, *com* $r \geq s_k$, $k = 1, ..., n$. *Uma aplicação* $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ *é* completamente absolutamente $(r; s_1, ..., s_n)$-somante *se existe* $C \geq 0$ *tal que*

$$\left(\sum_{i_1,...,i_n=1}^{m} \| T\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_n}^n\right) \|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \prod_{k=1}^{n} \| (x_i^k)_{i=1}^m \|_{w,s_k}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, $x_i^k \in E_k$, $k = 1, ..., n$ *e* $i = 1, ..., m$.

O espaço de tais aplicações multilineares é denotado por $\mathcal{L}_{fas,(r;s_1,...,s_n)}(E_1, ..., E_n; F)$ *e o ínfimo das constantes que satisfazem a desigualdade acima é denotada por*

$\| T \|_{fas,(r;s_1,...,s_n)}$. *Isso define uma norma (r-norma se $r < 1$) para o espaço que, dotado dessa norma (ou r-norma), é um espaço completo.*

Sobre a notação a ser usada, se $s_1 = ... = s_n = s$, vamos escrever $fas,(r;s)$ no lugar de $fas,(r;s_1,...,s_n)$. No caso em que $r = s_1 = ... = s_n$, vamos denotar fas,r ao invés de $fas,(r;s_1,...,s_n)$.

Como no caso das absolutamente somantes, pode-se mostrar o seguinte:

Proposição 1.2.8 *As seguintes condições são equivalentes para uma aplicação multilinear $T \in \mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$:*

(i) $T \in \mathcal{L}_{fas,(r;s_1,...,s_n)}(E_1,...,E_n;F)$

(ii) $\sum\limits_{j_1,...,j_n=1}^{\infty} \| T(x_{1,j_1},...,x_{n,j_n}) \|^r < \infty$ *sempre que* $(x_{i,j})_{j=1}^{\infty} \in l_{s_i,w}(E_i)$, $i = 1,...,n$.

(iii) A aplicação T_w definida de $l_{s_1,w}(E_1) \times ... \times l_{s_n,w}(E_n)$ em $l_r(\mathbb{N}^n, F)$ dada por:

$$T_w\left((x_{1,j})_j,...,(x_{n,j})_j\right) = \left(T(x_{1,j},...,x_{n,j})\right)_{j \in \mathbb{N}^n}$$

está bem definida, é multilinear e contínua.

A demonstração de 1.2.8 pode ser vista em [19], 2.4.

Comentários 1.2.9 .

1. $\mathcal{L}_{fas,(r;s_1,...,s_n)}(E_1,...,E_n;F) \subset \mathcal{L}_{as,(r;s_1,...,s_n)}(E_1,...,E_n;F)$

2. *([19]) Se $T \in \mathcal{L}_{fas,(r;s_1,...,s_n)}(E_1,...,E_n;F)$, $S \in \mathcal{L}(F;F_1)$ e $R_k \in \mathcal{L}(D_k;E_k)$, então $S \circ T \circ (R_1,...,R_n)$ é completamente $(r;s_1,...,s_n)$-somante e*

$$\| S \circ T \circ (R_1,...,R_n) \|_{fas,(r;s_1,...,s_n)} \leq \| S \| \| T \|_{fas,(r;s_1,...,s_n)} \prod_{k=1}^{n} \| R_k \|.$$

Os resultados a seguir, estudados por Bombal-Pérez-Villanueva em [2], fornecem informações importantes sobre aplicações multilineares definidas em espaços $\mathcal{L}_\infty$ ou em espaços $\mathcal{L}_1$ (teoremas do tipo Grothendieck para multilineares):

Teorema 1.2.10 *(Bombal-Pérez-Villanueva) Seja E_j um espaço $\mathcal{L}_{\infty,\lambda_j}$, $1 \leq j \leq n$ e seja H um espaço de Hilbert. Então, toda aplicação $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; H)$ é completamente absolutamente 2 somante e*

$$||T||_{fas,2} \leq k_n \prod_{j=1}^{n} \lambda_j \, ||T||$$

onde $k_n = (B_4)^{2n}$ e B_4 é uma constante da desigualdade de Khinchin (veja [7], 1.10) .

Teorema 1.2.11 *(Bombal-Pérez-Villanueva) Seja E_j um espaço $\mathcal{L}_{1,\lambda_j}$, $1 \leq j \leq n$ e seja H um espaço de Hilbert. Então, toda aplicação $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; H)$ é completamente absolutamente 2-somante*

$$||T||_{fas,2} \leq k^n \prod_{j=1}^{n} \lambda_j \, ||T||$$

onde k é $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ no caso real e $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ no caso complexo.

Vamos apresentar as definições para polinômios.

Definição 1.2.12 *Sejam $r, s \in (0, +\infty)$. Um polinômio $\mathcal{P}(^nE; F)$ é absolutamente (r;s)-somante se existe uma constante $C \geq 0$ tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \| Px_j \|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \left(\| (x_j)_{j=1}^{m} \|_{s,w} \right)^n$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e $x_j \in E$, $j = 1, ..., m$.

Vamos indicar o espaço desses polinômios por $\mathcal{P}_{as,(r;s)}(^nE;F)$ *e a menor constante* $C \geq 0$ *que satisfaz a desigualdade acima, por* $\| P \|_{as,(r;s)}$. *Se* $r \geq 1$, $\| \, . \, \|_{as,(r;s)}$ *é uma norma para o espaço e no caso* $r < 1$, *uma r-norma. Em ambos os casos, o espaço é completo.*

No caso particular em que $r = \dfrac{s}{n}$, *um polinômio* $\mathcal{P}_{as,(r;s)}(^nE;F)$ *é chamado de s-*dominado. *Vamos indicar o espaço dos polinômios s-dominados por* $\mathcal{P}_{d,s}(^nE;F)$ *e a norma (ou r-norma), por* $\| P \|_{d,s}$.

Quando $r = s$ na definição acima, vamos indicar as, r no lugar de $as,(r;s)$.

Como no caso multilinear, temos as seguintes equivalências:

Proposição 1.2.13 *Para* $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$, *as condições são equivalentes:*

(i) P *é absolutamente (r;s)-somante.*

(ii) $(P(x_j))_{j=1}^{\infty} \in l_r(F)$ *sempre que* $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_{s,w}(E)$.

(iii) P_w *dado por* $P_w\left((x_j)_{j=1}^{\infty}\right) = (P(x_j))_{j=1}^{\infty}$ *é um polinômio bem definido, n-homogêneo e contínuo de* $l_{s,w}(E)$ *em* $l_r(F)$.

A demonstração do resultado 1.2.13 pode ser vista em [17], proposição 2.4.

Temos agora a versão polinomial do teorema de fatoração de Pietsch (veja [17], 3.4):

Teorema 1.2.14 *Sejam* $r \in [1,\infty)$, $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ *e* $K \subset B_{E'}$ *um subconjunto fraco estrela compacto de* $B_{E'}$ *normante, isto é, com a propriedade*

$\| x \| = \sup\{| \, x'(x) \, |; x' \in K\}$. *As seguintes condições são equivalentes:*

(i) $P \in \mathcal{P}_{d,r}(^nE;F)$.

(ii) Existem $\mu \in W(K)$, $Q \in \mathcal{P}(^nX;F)$, *com* $X \subset L_r(K;\mu)$ *um subespaço fechado de* $L_r(K;\mu)$ *tais que* $P = Q \circ J_r \circ i_E$, *onde* $i_E : E \to C(K)$ *é dado por* $i_E(x)(x') = \langle x', x\rangle$ *e* $J_r : i_E(E) \subset C(K) \longrightarrow X$ *é a inclusão formal.*

Neste caso, $\| Q \| = \| P \|_{d,r}$.

Definição 1.2.15 *Um polinômio* $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ *é completamente absolutamente* $(r;s)$ *-somante quando a aplicação multilinear simétrica correspondente* $\check{P} \in \mathcal{L}(^nE;F)$ *for completamente absolutamente* $(r;s)$*- somante.*

O espaço de tais polinômios é denotado por $\mathcal{P}_{fas,(r;s)}$ *e uma norma (r-norma se* $r < 1$*) pode ser definida como:* $\| P \|_{fas,(r;s)} = \| \check{P} \|_{fas,(r;s)}$

Comentários 1.2.16 .

1. $\mathcal{P}_{fas,(r;s)}(^nE;F) \subset \mathcal{P}_{as,(r;s)}(^nE;F)$.

2. *Se* $P \in \mathcal{P}_{fas,(r;s)}(^nE;F)$, $S \in \mathcal{L}(E_1;E)$ *e* $R \in \mathcal{L}(F;F_1)$, *então* $R \circ P \circ S \in \mathcal{P}_{fas,(r;s)}(^nE_1;F_1)$ *e ainda* $\| R \circ P \circ S \|_{fas,(r;s)} \leq \| R \| \| P \|_{fas,(r;s)} \| S \|^n$.

3. *O comentário 2 vale para* $as,(r;s)$ *no lugar de* $fas,(r;s)$.

4. *Se* $0 < r_1 \leq r_2 < \infty$, *então* $\mathcal{P}_{d,r_1}(^nE;F) \subset \mathcal{P}_{d,r_2}(^nE;F)$ *e* $\| \,.\, \|_{d,r_2} \leq \| \,.\, \|_{d,r_1}$.

1.3 Aplicações Holomorfas

Nesta seção, a menos que haja alguma ressalva ao contrário, trabalharemos com espaços sobre o corpo dos complexos. Mais detalhes sobre a teoria de aplicações holomorfas podem ser vistas em [22].

Definição 1.3.1 *Sejam E e F espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$. Seja U um aberto de E. Uma aplicação $f : U \to F$ é dita* analítica *em $a \in U$ se existem uma bola $B_r(a) \subset U$ e uma sequência de polinômios $P_m \in \mathcal{P}(^m E; F)$ tais que*

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-a)$$

uniformemente para $x \in B_r(a)$. Se f é analítica em todo $a \in U$, dizemos que f é analítica em U. Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, usamos o termo holomorfa *no lugar de analítica. Nesse caso, denotamos por $\mathcal{H}(U; F)$ o espaço de todas as aplicações holomorfas de U em F.*

Dada uma aplicação holomorfa f de $U \subset E$ em F, escrevemos a **série de Taylor de f em torno de** $a \in U$ da forma:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} d^k f(a)(x-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \hat{d}^k f(a)(x-a)$$

onde $d^k f(a) \in \mathcal{L}(^k E; F)$ denota a derivada de ordem k de f em $a \in U$ e $\hat{d}^k f(a) \in \mathcal{P}(^k E; F)$, o polinômio k-homogêneo associado a $d^k f(a)$. Ainda:

$$d^k f(a)(x-a)^k = d^k f(a)(x-a, ..., x-a).$$

Definição 1.3.2 *Uma aplicação inteira $f \in \mathcal{H}(E; F)$ é de* tipo limitada *se leva conjuntos limitados de E em conjuntos limitados de F. Vamos indicar por $\mathcal{H}^b(E; F)$ a classe de tais aplicações.*

Observação 1.3.3 *Pode-se mostrar que $f \in \mathcal{H}^b(E; F)$ se, e somente se,* $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n!} \parallel \hat{d}^n f(0) \parallel \right)^{\frac{1}{n}} = 0.$

Proposição 1.3.4 *Se* $g \in \mathcal{H}(E;F)$, $u \in \mathcal{L}(E_1;E)$ *e* $v \in \mathcal{L}(F;F_1)$, *então* $v \circ g \circ u \in \mathcal{H}(E_1;F_1)$ *e* $\hat{d}^k(v \circ g \circ u)(a_1) = v \circ \hat{d}^k g(ua_1) \circ u$ *para todo* $a_1 \in E_1$.

Um resultado importante sobre aplicações analíticas pode ser enunciado da seguinte forma (para demonstração, veja [25], teorema 1.4.4):

Teorema 1.3.5 *Sejam* X *e* Y *espaços normados e* $\hat{X}$ *o completamento de* X. *Então toda aplicação analítica* $f : X \to Y$ *pode ser estendida de modo único a um aberto* U_f *de* $\hat{X}$.

Apresentemos agora a definição de tipo de holomorfia no sentido de Nachbin:

Definição 1.3.6 *Um tipo de holomorfia* θ *de* E *em* F *é uma sequência de espaços de Banach* $(\mathcal{P}_\theta(^mE;F), \| \,.\, \|_\theta)_{m=0}^\infty$ *para a qual são válidas as seguintes afirmações:*

1. Cada $\mathcal{P}_\theta(^mE;F)$ *é um subespaço vetorial de* $\mathcal{P}(^mE;F)$.

2. $\mathcal{P}_\theta(^0E;F)$ *coincide com* F *como um espaço vetorial normado.*

3. Existe um real $\sigma \geq 1$ *para o qual a seguinte afirmativa é verdadeira: dados* $l, m \in \mathbb{N}$, $l \leq m$, $x \in E$ *e* $P \in \mathcal{P}_\theta(^mE;F)$, *temos* $\hat{d}^l P(x) \in \mathcal{P}_\theta(^lE;F)$ *e*

$$\| \frac{1}{l!}\hat{d}^l P(x) \|_\theta \leq \sigma^m \| P \|_\theta \| x \|^{m-l}$$

Temos agora um conceito de tipo de holomorfia para aplicações holomorfas.

Definição 1.3.7 *Se* U *é um aberto de* E, *uma aplicação* $f \in \mathcal{H}(E;F)$ *é de tipo* θ-*holomorfia em* $a \in U$ *se ocorrem:*

1. $\hat{d}^m f(a) \in \mathcal{P}_\theta(^mE;F)$ *para todo* $m \in \mathbb{N}_o$ *e*

2. existem números reais $C \geq 0$ *e* $c \geq 0$ *tais que* $\| \frac{1}{m!}\hat{d}^m f(a) \|_\theta \leq Cc^m$ *para todo* $m \in \mathbb{N}_o$.

Comentários 1.3.8 .

1. $(\mathcal{P}_{d,r}, \| \, . \, \|_{d,r})$ *é um tipo de holomorfia.*

2. $\left(\mathcal{P}_{fas,(r;s)}, \| \, . \, \|_{fas,(r;s)}\right)$ *é um tipo de holomorfia. (veja [37], 1.10.3)*

Proposição 1.3.9 *Se* $f \in \mathcal{H}_\theta(E;F)$, $u \in \mathcal{L}(E_1;E)$ *e* $v \in \mathcal{L}(F;F_1)$, *então* $v \circ f \circ u \in \mathcal{H}_\theta(E_1;F_1)$, *onde* θ *é o tipo* $d;r$ *ou* $fas,(r;s)$.

Prova. Basta observarmos que:

$$\hat{d}^n(v \circ f \circ u)(a) = v \circ \hat{d}^n f(ua) \circ u \in \mathcal{P}_\theta(^n E_1; F_1)$$

pois $\hat{d}^n f(ua) \in \mathcal{P}_\theta(^n E; F)$, $n \in \mathbb{N}$ e $\| \, \hat{d}^n(v \circ f \circ u)(a) \, \|_\theta \leq \| \, v \, \| \| \, \hat{d}f(ua) \, \|_\theta \| \, u \, \|^n$, $n \in \mathbb{N}$ (1.2.16). ∎

Capítulo 2

Aplicações de Hilbert-Schmidt

Da teoria linear, sabemos que operadores de Hilbert-Schmidt (1.1.16) admitem fatorações através de espaços $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_\infty$ e também através de espaços de Banach de dimensão infinita (1.1.20 e 1.1.21). Nosso objetivo é estudar o que acontece quando trabalhamos com aplicações multilineares , polinômios e aplicações holomorfas de Hilbert-Schmidt, sempre na tentativa de estender, para a teoria não-linear, os resultados já obtidos na teoria linear.

Na primeira seção deste capítulo, apresentamos as aplicações multilineares e polinômios de Hilbert-Schmidt e algumas de suas propriedades. Em seguida, estudamos duas formas de fatoração para tais aplicações. Na segunda seção, apresentamos os resultados de fatoração obtidos para aplicações holomorfas de Hilbert-Schmidt.

2.1 Aplicações multilineares e polinômios de Hilbert-Schmidt

Apresentamos agora as definições de aplicações multilineares e polinômios de Hilbert-Schmidt, que serão objeto de estudo deste capítulo. $H_1, ..., H_n$ e G denotarão espaços de Hilbert sobre um corpo $\mathbb{K}$ como consta na lista de notações.

As definições que vamos ver a seguir foram introduzidas por Dwyer ([9]) para o caso de aplicações com valores escalares e foi estudada também por Matos em [18] e [19].

Definição 2.1.1 *Uma aplicação $T \in \mathcal{L}(H_1, ..., H_n; G)$ é dita de Hilbert-Schmidt se, para cada $k = 1, ..., n$, existe uma base ortonormal $(h^k_{j_k})_{j_k \in J_k}$ de H_k tal que*

$$(\sum_{j_1,...,j_n} \|T(h^1_{j_1}, ..., h^n_{j_n})\|^2)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

Vamos denotar por $\mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_n; G)$ o espaço de tais aplicações. Esse espaço é um espaço de Hilbert com relação ao seguinte produto interno:

$$(T \mid S) = \sum_{j_1,...,j_n} (T(h^1_{j_1}, ..., h^n_{j_n}) \mid S(h^1_{j_1}, ..., h^n_{j_n}))$$

para T e S em $\mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_n; G)$. A norma correspondente será indicada por $\| \,.\, \|_{HS}$. É possível mostrar que, se $T \in \mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_n; G)$, então o valor

$$(\sum_{j_1,...,j_n} \|T(h^1_{j_1}, ..., h^n_{j_n})\|^2)^{\frac{1}{2}}$$

é finito e independe das bases ortonormais utilizadas para cada espaço H_k, $k = 1, ..., n$ ([19], proposição 5.1).

Definição 2.1.2 *Um polinômio $P \in \mathcal{P}(^nH;G)$ é um polinômio de Hilbert-Schmidt se a aplicação multilinear simétrica correspondente $\check{P} \in \mathcal{P}(^nH;G)$ é de Hilbert-Schmidt. O espaço de tais polinômios será indicado por $\mathcal{P}_{HS}(^nH;G)$ e uma norma para tal espaço pode ser definida da forma: $\| P \|_{HS} = \| \check{P} \|_{HS}$.*

É claro que, para toda base ortonormal $(h_j)_j$ de H, temos:

$$\left(\sum_{j \in J} \| P(h_j) \|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \| \check{P} \|_{HS} = \| P \|_{HS}$$

Resultados importantes que envolvem aplicações de Hilbert-Schmidt e completamente absolutamente somantes (1.2.7) podem ser enunciados da seguinte forma:

Proposição 2.1.3 *(Matos) Se $p \in (0, \infty)$, então*

$$\mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_n; G) \subset \mathcal{L}_{fas,p}(H_1, ..., H_n; G)$$

e existe uma constante $d_p > 0$ tal que

$$(d_p)^n \| T \|_{fas,p} \leq \| T \|_{HS}$$

para todo $T \in \mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_n; G)$.

Proposição 2.1.4 *(Matos) Para $p \in [2, \infty)$, temos:*

$$\mathcal{L}_{fas,p}(H_1, ..., H_n; G) = \mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_n; G)$$

e existem constantes $b_p > 0$ e $d_p > 0$ tais que

$$(d_p)^n \| T \|_{fas,p} \leq \| T \|_{HS} \leq (b_p)^n \| T \|_{fas,p}$$

para todo $T \in \mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_n; G)$.

Mais informações e as demonstrações das proposições acima podem ser vistas em [19], seção 5. Para polinômios, podemos escrever as proposições acima na forma:

Proposição 2.1.5 *Se $p > 0$, então $\mathcal{P}_{HS}({}^nH;G) \subset \mathcal{P}_{fas,p}({}^nH;G)$. Existe também uma constante $d_p > 0$ tal que*

$$(d_p)^n \parallel P \parallel_{fas,p} \leq \parallel P \parallel_{HS}$$

No caso em que $p \geq 2$, vale $\mathcal{P}_{HS}({}^nH;G) = \mathcal{P}_{fas,p}({}^nH;G)$ e existe uma constante $b_p > 0$ tal que

$$(d_p)^n \parallel P \parallel_{fas,p} \leq \parallel P \parallel_{HS} \leq (b_p)^n \parallel P \parallel_{fas,p} .$$

Prova. Inicialmente, sejam $p > 0$ e $P \in \mathcal{P}_{HS}({}^nH;G)$. Por definição, $\check{P} \in \mathcal{L}_{HS}({}^nH;G) \subset \mathcal{L}_{fas,p}({}^nH;G)$ e, assim, $P \in \mathcal{P}_{fas,p}({}^nH;G)$.

Ainda, existe $d_p > 0$ tal que

$$\parallel P \parallel_{HS} = \parallel \check{P} \parallel_{HS} \geq (d_p)^n \parallel \check{P} \parallel_{fas,p} = (d_p)^n \parallel P \parallel_{fas,p}$$

No caso em que $p \geq 2$, se $P \in \mathcal{P}_{fas,p}({}^nH;G)$, então $\check{P} \in \mathcal{L}_{fas,p}({}^nH;G) = \mathcal{L}_{HS}({}^nH;G)$, de onde concluímos que $P \in \mathcal{P}_{HS}({}^nH;G)$.

Também, existe $b_p > 0$ tal que

$$\parallel P \parallel_{HS} = \parallel \check{P} \parallel_{HS} \leq (b_p)^n \parallel \check{P} \parallel_{fas,p} = (b_p)^n \parallel P \parallel_{fas,p} .$$

■

2.1.1 Resultados de Fatoração: 1^a Forma

Nesta seção, vamos estudar a possibilidade de decomposição de aplicações n-lineares e polinômios n-homogêneos de Hilbert-Schmidt usando n operadores lineares contínuos e uma aplicação n-linear contínua (no caso n-linear) e no caso polinomial, um operador linear contínuo e um polinômio n-homogêneo contínuo. Dessa forma, na tentativa de generalizar o teorema de Lindenstrauss-Pelczynski para aplicações multilineares de Hilbert-Schmidt, obtivemos o seguinte

Teorema 2.1.6 *Seja $T \in \mathcal{L}(H_1, ..., H_n; G)$. Se T admite uma fatoração da forma*

$$\begin{tikzcd} H_1 \times ... \times H_n \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{(S_1, ..., S_n)}"'] & G \\ X_1 \times ... \times X_n \arrow[ur, "R"'] & \end{tikzcd}$$

onde $S_j \in \mathcal{L}(H_j; X_j)$, X_j é um espaço $\mathcal{L}_\infty$, $j = 1, ..., n$ e $R \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_n; G)$, então $T \in \mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_n; G)$.

Prova. Pelo teorema 1.2.10, temos que $R \in \mathcal{L}_{fas,2}(X_1, ..., X_n; G)$. Como $S_j \in \mathcal{L}(H_j; X_j)$, $j = 1, ..., n$, segue que $T = R \circ (S_1, ..., S_n) \in \mathcal{L}_{fas,2}(H_1, ..., H_n; G)$ $= \mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_n; G)$ pela proposição 2.1.4. $\blacksquare$

Prosseguindo no estudo da fatoração de aplicações de Hilbert-Schmidt, na tentativa de generalização do resultado de Diestel-Jarchow-Tonge, usando 2.1.6, podemos obter o seguinte:

Corolário 2.1.7 *Seja $T \in \mathcal{L}(H_1, ..., H_n; G)$. Se, para todo espaço de Banach $Z_1, ..., Z_n$ de dimensão infinita, T admite uma fatoração da forma*

$$\begin{tikzcd} H_1 \times ... \times H_n \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{(S_1, ..., S_n)}"'] & G \\ Z_1 \times ... \times Z_n \arrow[ur, "R"'] & \end{tikzcd}$$

onde $S_j \in \mathcal{L}(H_j; Z_j)$, $j = 1, ..., n$ e $R \in \mathcal{L}(Z_1, ..., Z_n; G)$, então $T \in \mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_n; G)$.

A demonstração do corolário 2.1.7 é simples. Basta tomarmos $Z_1, ..., Z_n$ como espaços $\mathcal{L}_\infty$ de dimensão infinita e obtemos a conclusão desejada.

O teorema 2.1.6 também vale no caso em que os espaços $X_1, ..., X_n$ são espaços $\mathcal{L}_1$. A demonstração é análoga, usando 1.2.11 no lugar de 1.2.10. As recíprocas de 2.1.7 e 2.1.6 não são válidas em geral. O exemplo a seguir (2.1.9) comprova essa afirmativa. No caso de fatoração através de espaços $\mathcal{L}_1$, a recíproca fica em aberto.

Antes de apresentarmos tal exemplo, enunciemos um resultado devido a Pérez ([29], corolário 5.3):

Teorema 2.1.8 *(Teorema de Grothendieck multilinear) Se E_j é um espaço $\mathcal{L}_{\infty,\lambda_j}$, $\lambda_j > 1$, $j = 1, ..., n$, então toda aplicação multilinear e contínua $T : E_1 \times ... \times E_n \longrightarrow \mathbb{K}$ é absolutamente $(1; 2)$-somante e verifica a desigualdade:*

$$\| T \|_{as,(1;2)} \leq K_{G,n} \prod_{j=1}^{n} \lambda_j \| T \|$$

onde $K_{G,n}$ é a constante da desigualdade de Grothendieck generalizada ([29], teorema 5.1)

.

Exemplo 2.1.9 *Definamos:*

$$T : l_2 \times ... \times l_2 \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$T(x^1, ..., x^n) = \textstyle\sum_j \frac{1}{j} x_j^1 ... x_j^n$$

onde $x^k = (x_j^k)_{j=1}^{\infty} \in l_2$, $k = 1, ..., n$. Temos que $T \in \mathcal{L}_{HS}(^n l_2; \mathbb{K})$, pois

$$\sum_{j_1,...,j_n} \mid T(e_{j_1}, ..., e_{j_n}) \mid^2 = \sum_j \mid \frac{1}{j} \mid^2 < \infty$$

Aqui, e_j denota o j-ésimo elemento da base ortonormal usual de l_2, $j \in \mathbb{N}$.

Se T admitisse uma fatoração através de espaços $\mathcal{L}_\infty$, digamos, $T = R \circ (S_1, ..., S_n)$, onde $S_j \in \mathcal{L}(H_j, X_j)$, X_j espaço $\mathcal{L}_\infty$, $j = 1, ..., n$ e $R \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_n; \mathbb{K})$, teríamos $T \in \mathcal{L}_{as,(1;2)}(^n l_2; \mathbb{K})$, pois $\mathcal{L}(X_1, ..., X_n; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{as,(1;2)}(X_1, ..., X_n; \mathbb{K})$ pelo teorema de Grothendieck multilinear (2.1.8). Mas isso não pode ocorrer, já que $(e_j)_j \in l_{2,w}(l_2)$ e

$$\sum_j \mid T(e_j, ..., e_j) \mid = \sum_j \mid \frac{1}{j} \mid$$

diverge.

Logo, a fatoração não é possível.

Para polinômios de Hilbert-Schmidt, os resultados ficam da seguinte forma:

Corolário 2.1.10 *(do teorema 2.1.6) Seja $P \in \mathcal{P}(^n H; G)$. Se P admite uma fatoração* *da forma*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "P"] \arrow[d, "S"'] & G \\ X \arrow[ur, "Q"'] & \end{tikzcd}$$

onde X é um espaço $\mathcal{L}_\infty$, $S \in \mathcal{L}(H;X)$ e $Q \in \mathcal{P}(^nX;G)$, então $P \in \mathcal{P}_{HS}(^nH;G)$.

Prova. Para demonstrarmos o corolário 2.1.10, basta observarmos que $\check{P} = \check{Q} \circ (S, ..., S)$ (usando 1.2.1), onde $S \in \mathcal{L}(H;X)$ e $\check{Q} \in \mathcal{L}_{fas,2}(^nX;G)$. Assim, $\check{P} \in \mathcal{L}_{fas,2}(^nH;G)$ $= \mathcal{L}_{HS}(^nH;G)$ pela proposição 2.1.4 e concluímos que $P \in \mathcal{P}_{HS}(^nH;G)$. ∎

Corolário 2.1.11 *(do corolário 2.1.10) Seja $P \in \mathcal{P}(^nH;G)$. Se, para todo espaço de Banach Z de dimensão infinita, P admite uma fatoração da forma*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "P"] \arrow[d, "S"'] & G \\ Z \arrow[ur, "Q"'] & \end{tikzcd}$$

onde $S \in \mathcal{L}(H;Z)$ e $Q \in \mathcal{P}(^nZ;G)$, então $P \in \mathcal{P}_{HS}(^nH;G)$.

O corolário 2.1.11 pode ser demonstrado usando o corolário 2.1.10 como foi feito para aplicações multilineares. O corolário 2.1.10 vale também para o caso em que X é um espaço $\mathcal{L}_1$.

As recíprocas dos corolários 2.1.10 e 2.1.11 não são verdadeiras em geral. O exemplo abaixo nos mostra esse fato:

Exemplo 2.1.12 *O polinômio $P \in \mathcal{P}(^n l_2; \mathbb{K})$ dado por: $P(x) = \sum_j \frac{1}{j} x_j^n$, é um polinômio de Hilbert-Schmidt, pois $\check{P} = T$ é uma aplicação multilinear de Hilbert-Schmidt (veja exemplo 2.1.9). Mas P não admite a fatoração do resultado 2.1.10; caso contrário, $T = \check{P}$ admitiria a fatoração do teorema 2.1.6.*

No próximo capítulo, estudaremos as aplicações de tipo classe de Schatten $\mathcal{S}_2$. Veremos que tais aplicações são, em particular, aplicações de Hilbert-Schmidt. Para essas aplicações de tipo $\mathcal{S}_2$, será possível a "generalização"dos resultados lineares de fatoração (1.1.20 e 1.1.21).

2.1.2 Resultados de Fatoração: 2^a Forma

No tipo de fatoração examinada na seção anterior, vimos que não é possível obter a equivalência entre as fatorações apresentadas e o fato de que uma aplicação multilinear ou polinomial é de Hilbert-Schmidt. Vamos fazer uma nova investigação, trabalhando agora com um outro tipo de decomposição, onde uma aplicação n-linear pode ser escrita como a composição de outra aplicação n-linear e um operador linear e no caso de um polinômio n-homogêneo, como um polinômio n-homogêneo e um operador linear.

Definição 2.1.13 *Seja $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$. Definimos o operador adjunto de T por:*

$$T' : F' \longrightarrow \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; \mathbb{K})$$

$$T'(\varphi)(x_1, ..., x_n) = \varphi(T(x_1, ..., x_n))$$

onde $\varphi \in F'$, $x_j \in E_j$, $j = 1, ..., n$.

Lema 2.1.14 *Se* $T \in \mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_n; G)$*, então* $T'g' \in \mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_n; \mathbb{K})$ *para todo* $g' \in G'$*.*

Prova. Seja $g' \in G'$. Se $(h^i_{j_i})_{j_i \in J_i}$ denota uma base ortonormal de H_i, $i = 1, ..., n$, então:

$$\sum_{j_1} ... \sum_{j_n} \mid T'(g')(h^1_{j_1}, ..., h^n_{j_n}) \mid^2 = \sum_{j_1} ... \sum_{j_n} \mid \langle g', T(h^1_{j_1}, ..., h^n_{j_n}) \rangle \mid^2$$
$$\leq \parallel g' \parallel^2 \sum_{j_1} ... \sum_{j_n} \parallel T(h^1_{j_1}, ..., h^n_{j_n}) \parallel^2 < \infty$$

pois $T \in \mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_n; G)$. Logo, $T'g' \in \mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_n; \mathbb{K})$. ∎

Lema 2.1.15 *Se* $T \in \mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_n; G)$*, então* $T'' \in \mathcal{L}_{HS}(\mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_n; \mathbb{K})'; G)$*.*

Prova. Pelo lema 2.1.14, podemos considerar $T' \in \mathcal{L}(G'; \mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_n; \mathbb{K}))$ e $T'' \in \mathcal{L}(\mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_n; \mathbb{K})'; G)$.

Seja $(h^i_{j_i})_{j_i \in J_i}$ base ortonormal de H_i, $i = 1, ..., n$. Definamos:

$$u_{j_1,...,j_n}(h_1, ..., h_n) = (h_1 \mid h^1_{j_1})...(h_n \mid h^n_{j_n}).$$

A coleção $(u_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n}$ é uma base ortonormal para $\mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_n; \mathbb{K})$. De fato,

$$(u_{j_1,...,j_n} \mid u_{i_1,...,i_n}) = \sum_{\substack{k_l \in J_l \\ l=1,...,n}} \left(h^1_{k_1} \mid h^1_{j_1}\right) ... \left(h^n_{k_n} \mid h^n_{j_n}\right) \left(h^1_{k_1} \mid h^1_{i_1}\right) ... \left(h^n_{k_n} \mid h^n_{i_n}\right) = \delta_{j_1,i_1}...\delta_{j_n,i_n}$$

e para cada $u \in \mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_n; \mathbb{K})$, temos que $u = \sum\limits_{j_1,...,j_n} u(h^1_{j_1}, ..., h^n_{j_n}) u_{j_1,...,j_n}$.

Seja agora $(\varphi_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n} \subset \mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_n; \mathbb{K})'$ base ortonormal para $\mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_n; \mathbb{K})'$, dual da base $(u_{j_1,...,j_n})$, onde $\varphi_{j_1,...,j_n}(u_{i_1,...,i_n}) = \delta_{j_1 i_1}...\delta_{j_n i_n}$.

Para $u \in \mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_n; \mathbb{K})$, temos:

$$\varphi_{j_1,...,j_n}(u) = \varphi_{j_1,...,j_n}(\sum_{i_1,...,i_n} (u \mid u_{i_1,...,i_n}) u_{i_1,...,i_n})$$

$$= \sum_{i_1,...,i_n} (u \mid u_{i_1,...,i_n})\varphi_{j_1,...,j_n}(u_{i_1,...,i_n}) = (u \mid u_{j_1,...,j_n}). \qquad (1)$$

$$u(h^1_{j_1},...,h^n_{j_n}) = (\sum_{i_1,...,i_n} (u \mid u_{i_1,...,i_n})u_{i_1,...,i_n})(h^1_{j_1},...,h^n_{j_n})$$

$$= \sum_{i_1,...,i_n} (u \mid u_{i_1,...,i_n})(h^1_{j_1} \mid h^1_{i_1})...(h^n_{j_n} \mid h^n_{i_n}) = (u \mid u_{j_1,...,j_n}) \qquad (2)$$

Definamos agora:

$$L : H_1 \times ... \times H_n \longrightarrow \mathcal{L}_{HS}(H_1,...,H_n;\mathbb{K})'$$

$$L(x_1,...,x_n)(u) = u(x_1,...,x_n)$$

onde $u \in \mathcal{L}_{HS}(H_1,...,H_n;\mathbb{K})$. L é multilinear e para $x_j \in H_j$, $j = 1,...,n$, podemos escrever:

$$\| L(x_1,...,x_n) \| = \sup_{\|u\|_{HS}\leq 1} \mid L(x_1,...,x_n)(u) \mid = \sup_{\|u\|_{HS}\leq 1} \mid u(x_1,...,x_n) \mid$$

$$= \sup_{\|u\|_{HS}\leq 1} \mid u(\sum_{j_1}(x_1 \mid h^1_{j_1})h^1_{j_1},...,\sum_{j_n}(x_n \mid hj_n{}^n)h^n_{j_n}) \mid$$

$$= \sup_{\|u\|_{HS}\leq 1} \mid \sum_{j_1}...\sum_{j_n}(x_1 \mid h^1_{j_1})...(x_n \mid h^n_{j_n})u(h^1_{j_1},...,h^n_{j_n}) \mid$$

$$\leq \sup_{\|u\|_{HS}\leq 1} \sum_{j_1}...\sum_{j_n} \mid (x_1 \mid h^1_{j_1}) \mid ... \mid (x_n \mid h^n_{j_n}) \mid\mid u(h^1_{j_1},...,h^n_{j_n}) \mid$$

$$\leq \sup_{\|u\|_{HS}\leq 1} \left(\sum_{j_1}...\sum_{j_n} \mid (x_1 \mid h^1_{j_1}) \mid^2 ... \mid (x_n \mid h^n_{j_n}) \mid^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j_1}...\sum_{j_n} \mid u(h^1_{j_1},...,h^n_{j_n}) \mid^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sup_{\|u\|_{HS}\leq 1} (\sum_{j_1} \mid (x_1 \mid h^1_{j_1}) \mid^2)^{\frac{1}{2}}...(\sum_{j_n} \mid (x_n \mid h^n_{j_n}) \mid^2)^{\frac{1}{2}} \parallel u \parallel_{HS} = \parallel x_1 \parallel ... \parallel x_n \parallel .$$

Ou seja, L é contínua, com $\parallel L \parallel \leq 1$.

Afirmamos que $\varphi_{j_1,...,j_n} = L(h^1_{j_1},...,h^n_{j_n})$, $j_i \in J_i$, $i = 1,...,n$. De fato, para $u \in \mathcal{L}_{HS}(H_1,...,H_n;\mathbb{K})$, usando (1) e (2), temos:

$$L(h^1_{j_1},...,h^n_{j_n})(u) = u(h^1_{j_1},...,h^n_{j_n}) = (u \mid u_{j_1,...,j_n}) = \varphi_{j_1,...,j_n}(u).$$

Assim, para todo $g' \in G'$:

$$T''\left(\varphi_{j_1,...,j_n}\right)(g') = \langle \varphi_{j_1,...,j_n}, T'g' \rangle = \langle L(h^1_{j_1},...,h^n_{j_n}), T'g' \rangle = T'g'(h^1_{j_1},...,h^n_{j_n})$$

$$= \langle g', T(h^1_{j_1},...,h^n_{j_n}) \rangle = J(T(h^1_{j_1},...,h^n_{j_n}))(g').$$

Portanto, $T''\left(\varphi_{j_1,...,j_n}\right) = J\left(T(h^1_{j_1},...,h^n_{j_n})\right)$, onde $J : G \longrightarrow G''$ é o operador canônico. Logo:

$$\sum_{j_1} ... \sum_{j_n} \| T''(\varphi_{j_1,...,j_n}) \|^2 = \sum_{j_1} ... \sum_{j_n} \| J(T(h^1_{j_1},...,h^n_{j_n})) \|^2$$

$$= \sum_{j_1} ... \sum_{j_n} \| T(h^1_{j_1},...,h^n_{j_n}) \|^2 < \infty \qquad (*)$$

pois $T \in \mathcal{L}_{HS}(H_1,...,H_n;G)$. Portanto, $T'' \in \mathcal{L}_{HS}(\mathcal{L}_{HS}(H_1,...,H_n;\mathbb{K})';G)$. ■

Antes de enunciarmos o próximo resultado de fatoração, vamos exibir uma demonstração para o lema 1.1.22. Ela será feita de tal forma que, fixados $n \in \mathbb{N}$ e $\delta > 0$, temos $\| (\gamma_s)_s \|_\infty = \dfrac{1}{n^{8+\delta}}$ e $\| (\sigma_s)_s \|_2 \leq A$, onde $A > 0$ independe do valor de $n \in \mathbb{N}$ (mesma notação do enunciado). É importante ressaltarmos que existem outras formas de obter as sequências. A nossa escolha será importante mais adiante, quando estivermos trabalhando com fatoração de aplicações holomorfas de tipos Hilbert-Schmidt e classe de Schatten $\mathcal{S}_2$.

Prova. (Lema 1.1.22) Vamos supor que $\| (\tau_s)_s \|_2 = 1$ e $\tau_s \geq 0$ para todo $s \in \mathbb{N}$. Escrevamos: $N_o = 0$, fixemos $\delta > 0$ e $n \in \mathbb{N}$.

Seja N_1 o menor inteiro positivo tal que $\tau_1^2 + ... + \tau_{N_1}^2 \geq \dfrac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}$. Assim, escrevamos:

$$\gamma_1 = ... = \gamma_{N_1} = \frac{1}{n^{8+\delta}}$$

$$\sigma_1 = n^{8+\delta}\tau_1 \ , \ ... \ , \ \sigma_{N_1} = n^{8+\delta}\tau_{N_1}$$

Suponhamos que já estejam definidos $N_1 < ... < N_m$, $m \geq 1$, tais que $\tau_1^2 + ... + \tau_{N_k}^2 \geq \frac{2^{n+k}-1}{2^{n+k}}$, $k = 1, ..., m$ e N_k seja o menor inteiro positivo com tal propriedade. Para cada $k = 1, ..., m$, temos:

$$\gamma_{N_{k-1}+1} = ... = \gamma_{N_k} = \frac{1}{(n+k-1)^{8+\delta}}$$

$$\sigma_{N_{k-1}+1} = (n+k-1)^{8+\delta}\tau_{N_{k-1}+1}, ..., \sigma_{N_k} = (n+k-1)^{8+\delta}\tau_{N_k}$$

Seja agora N_{m+1} o menor inteiro positivo tal que $\tau_1^2 + ... + \tau_{N_{m+1}}^2 \geq \frac{2^{n+m+1}-1}{2^{n+m+1}}$.

Definamos:

$$\gamma_{N_m+1} = ... = \gamma_{N_{m+1}} = \frac{1}{(n+m)^{8+\delta}}$$

$$\sigma_{N_m+1} = (n+m)^{8+\delta}\tau_{N_m+1} \ , \ ... \ , \ \sigma_{N_{m+1}} = (n+m)^{8+\delta}\tau_{N_{m+1}}$$

Ficam assim definidas duas sequências: $(\gamma_s)_s \in c_o$, com $\| (\gamma_s)_s \|_\infty = \frac{1}{n^{8+\delta}}$ e $(\sigma_s)_s$ tais que $\tau_s = \gamma_s\sigma_s$ para todo $s \in \mathbb{N}$.

Resta mostrarmos que $(\sigma_s)_s$ está em l_2. Temos:

$$\sum_{s=1}^{\infty}\sigma_s^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=N_{k-1}+1}^{N_k}(n+k-1)^{2(8+\delta)}\tau_s^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(n+k-1)^{2(8+\delta)}\sum_{s=N_{k-1}+1}^{N_k}\tau_s^2$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty}(n+k-1)^{2(8+\delta)}\sum_{s=N_{k-1}+1}^{\infty}\tau_s^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty}(n+k-1)^{2(8+\delta)}\left(1 - \frac{2^{n+k-1}-1}{2^{n+k-1}}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n+k-1)^{2(8+\delta)}}{2^{n+k-1}} = \sum_{l=n+k}^{\infty}\frac{(l-1)^{2(8+\delta)}}{2^{l-1}} \leq \sum_{l=1}^{\infty}\frac{(l-1)^{2(8+\delta)}}{2^{l-1}}$$

A série $\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(l-1)^{2(8+\delta)}}{2^{l-1}}$ é convergente. De fato, pelo teste da razão, temos:

$$\frac{l^{2(8+\delta)}}{2^l}\frac{2^{l-1}}{(l-1)^{2(8+\delta)}} = \frac{1}{2}\left(\frac{l}{l-1}\right)^{2(8+\delta)} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{l-1}\right)^{2(8+\delta)}$$

com $\limsup\limits_{l\to\infty} \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{l-1}\right)^{2(8+\delta)} = \dfrac{1}{2} < 1.$

Assim, $(\sigma_s)_s \in l_2$ e chamando $A = \sum\limits_{l=1}^{\infty}\dfrac{(l-1)^{2(8+\delta)}}{2^{l-1}}$, temos $\| (\sigma_s)_s \|_2 \leq A$. ■

Temos então o seguinte resultado de fatoração:

Teorema 2.1.16 *Seja $T \in \mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_n; G)$. Então, para todo espaço de Banach de dimensão infinita Z, T admite uma fatoração:*

$$\begin{tikzcd} H_1 \times ... \times H_n \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"'] & G \\ Z \arrow[ur, "V"'] & \end{tikzcd}$$

onde $S \in \mathcal{L}(H_1, ..., H_n; Z)$ e $V \in \mathcal{L}(Z; G)$. Mais ainda, V pode ser escolhido de tal forma que ele seja um operador compacto e 2-somante e S, compacto.

Prova. Seja $T \in \mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_n; G)$. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $\| T \|_{HS} = 1$.

Pelo lema 2.1.15, temos que $T'' \in \mathcal{L}_{HS}(\mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_n; \mathbb{K})'; G)$. Escrevamos $T'' = \sum\limits_s \tau_s(. \mid h_s)g_s$, onde $(\tau_s)_s \in l_2$, $\| (\tau_s)_s \|_2 = \| T'' \|_{HS} = \| T \|_{HS}, = 1$, $(h_s)_s$ é uma coleção ortonormal em $\mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_n; \mathbb{K})' = H$ e $(g_s)_s$, uma coleção ortonormal em G. Dado $m \in \mathbb{N}$, pelo lema 1.1.22, temos $\tau_s = \alpha_s\sigma_s\beta_s$ para cada $s \in \mathbb{N}$, com $\alpha = (\alpha_s)_s$ e $\beta = (\beta_s)_s$ sequências de c_o ($\alpha_s = \beta_s = \sqrt{\gamma_s}$), $\| \alpha \|_\infty = \| \beta \|_\infty = \dfrac{1}{m^{4+\frac{\delta}{2}}}$, $\delta > 0$ fixado e $\sigma = (\sigma_s)_s \in l_2$, $\| \sigma \|_2 \leq A$ (mesma notação da demonstração de 1.1.22).

Pelo teorema de fatoração de Diestel-Jarchow-Tonge (1.1.21), T'' admite a fatoração: $T'' = v \circ w$, onde $w \in \mathcal{L}(H; Z)$, $H = \mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_n; \mathbb{K})'$, $v \in \mathcal{L}(Z; G)$, ambos compactos e v, 2-somante. Além disso,

$$\| w \| \leq 8 \| \beta \|_{\infty}^{\frac{1}{4}} = 8 \frac{1}{m^{1+\frac{\delta}{8}}}$$

$$\| v \|_{as,2} \leq 12C \| \sigma \|_2 \| \alpha \|_{\infty} \| \beta \|_{\infty}^{\frac{1}{4}} \leq 12AC \frac{1}{m^{5+\frac{5\delta}{8}}}$$

com $A > 0$ e $1 \leq C \leq 4$.

Seja $L \in \mathcal{L}(H_1, ..., H_n; H)$, $L(h_1, ..., h_n)(u) = u(h_1, ..., h_n)$, para cada $u \in \mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_n; \mathbb{K})$. Definimos $S \in \mathcal{L}(H_1, ..., H_n; Z)$, $S = w \circ L$. Temos que $\| S \| \leq \| w \| \| L \| \leq \dfrac{8}{m^{1+\frac{\delta}{8}}}$.

Agora, para $h_j \in H_j$, $j = 1, ..., n$ e $g' \in G'$, podemos escrever:

$$T''(L(h_1, ..., h_n))(g') = \langle L(h_1, ..., h_n), (T'g') \rangle = T'g'(h_1, ..., h_n)$$

$$= \langle g', T(h_1, ..., h_n) \rangle = J\left(T(h_1, ..., h_n)\right)(g')$$

onde $J : G \to G''$ é o operador canônico. Assim,

$$v \circ S(h_1, ..., h_n) = v \circ w \circ L(h_1, ..., h_n) = T'' \circ L(h_1, ..., h_n) = J(T(h_1, ..., h_n)) \equiv T(h_1, ..., h_n).$$

Ou seja, temos o diagrama:

$$\begin{tikzcd} H_1 \times ... \times H_n \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"'] & G \\ Z \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

onde $v \in \mathcal{L}_{as,2}(Z; G)$ é compacto.

Resta verificarmos que S é uma aplicação compacta. Seja $(x_k)_k$ uma sequência em $B_{H_1} \times ... \times B_{H_n}$, $x_k = (x_1^1, ..., x_k^n)$, $k \in \mathbb{N}$. Como w é compacto e $(L(x_k))_k$ é uma sequência em $B_{\mathcal{L}_{HS}(H_1,...,H_n;\mathbb{K})'}$ (pois $\| L \| \leq 1$), existe uma subsequência $(L(x_{k_m}))_m$ de tal sequência para a qual $(w \circ L(x_{k_m}))_m$ converge em Z. Logo, $S = w \circ L$ é compacta. ■

Observação 2.1.17 *Usamos na demonstração do teorema 2.1.16 que* $\| T \|_{HS} = 1$.

Caso $\| T \|_{HS} \neq 1$, *podemos utilizar o seguinte procedimento: sabemos que* T'' *admite uma representação* $T'' = \sum_s \tau_s(. \mid h_s)g_s$ *como na demonstração de 2.1.16, com* $\| (\tau_s)_s \|_2 = \| T'' \|_{HS} = \| T \|_{HS}$.

Usando a demonstração do lema 1.1.22 (antes de 2.1.16):

$$\frac{\tau_s}{\| T \|_{HS}} = \alpha_s \sigma_s \beta_s$$

para todo $s \in \mathbb{N}$, $\alpha = (\alpha_s)_s$ *e* $\beta = (\beta_s)_s$ *em* c_o *e* $\sigma = (\sigma_s)_s \in l_2$. *Assim:*

$$\tau_s = \alpha_s \sigma_s (\beta_s \| T \|_{HS})$$

A sequência $(\| T \|_{HS} \, \beta_s)_s$ *passa a fazer o papel de* $(\beta_s)_s$ *na demonstração anterior. Dessa forma, podemos obter* v *e* S *tais que*

$$\| v \|_{as,2} \leq 12AC \| T \|_{HS}^{\frac{1}{4}} \frac{1}{m^{5+\frac{5\delta}{8}}}$$

$$\| S \| \leq 8 \| T \|_{HS}^{\frac{1}{4}} \frac{1}{m^{1+\frac{\delta}{8}}}$$

(mesma notação usada em 2.1.16).

Há outras formas de se considerar as normas acima, mas a considerada é (uma das) a que nos dará melhores resultados na fatoração de aplicações holomorfas.

Como consequência do teorema 2.1.16, temos:

Corolário 2.1.18 *Seja $T \in \mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_n; G)$. Então, T admite uma fatoração:*

$$\begin{tikzcd} H_1 \times ... \times H_n \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"'] & G \\ X \arrow[ur, "V"'] & \end{tikzcd}$$

onde X é um espaço $\mathcal{L}_\infty$ (ou $\mathcal{L}_1$), $S \in \mathcal{L}(H_1, ..., H_n; X)$ e $V \in \mathcal{L}(X; G)$.

Observação 2.1.19 *O corolário 2.1.18 pode ser demonstrada sem uso do teorema 2.1.16. Basta reproduzirmos a demonstração de 2.1.16 usando o teorema de Lindenstrauss-Pelczynski (1.1.20) ao invés do teorema de Diestel-Jarchow-Tonge (1.1.21).*

No caso $\mathcal{L}_\infty$, S e V podem ser escolhidos de tal forma que $\| S \| \leq 1$ e $\| V \| \leq \| T \|_{HS}$. No caso $\mathcal{L}_1$, S e V podem ser tais que $\| S \| \leq \| T \|_{HS}$ e $\| V \| \leq 1$.

As recíprocas de 2.1.16 e 2.1.18 geralmente não são verdadeiras. O exemplo a seguir comprova esse fato.

Exemplo 2.1.20 *Sejam H um espaço de Hilbert separável e $(h_j)_{j=1}^\infty$ uma base ortonormal de H. Definamos:*

$$T : H \times ... \times H \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$T(x^1, ..., x^n) = \sum_j \tfrac{1}{\sqrt{j}}(x^1 \mid h_j)...(x^n \mid h_j)$$

Sejam Z um espaço de Banach e $b \in Z$, com $\| b \| = 1$. Definamos:

$$S : H \times ... \times H \longrightarrow Z$$

$$S(x^1, ..., x^n) = T(x^1, ..., x^n)b$$

Escrevamos $Y = \{\alpha b; \alpha \in \mathbb{K}\} \subset Z$ *e*

$$V : Y \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$V(\alpha b) = \alpha.$$

Pelo teorema de Hahn-Banach, existe $\widetilde{V} \in Z'$ *tal que* $\widetilde{V}$ *estende* V*. Temos ainda que:*

$$\widetilde{V} \circ S(x^1, ..., x^n) = \widetilde{V}(T(x^1, ..., x^n)b) = T(x^1, ..., x^n)$$

Ou seja, T *admite uma fatoração da forma:*

$$\begin{tikzcd}
H_1 \times ... \times H_n \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"'] & \mathbb{K} \\
Z \arrow[ur, "\tilde{V}"] &
\end{tikzcd}$$

Por outro lado, temos que $T \notin \mathcal{L}_{HS}(^nH; \mathbb{K})$*, pois*

$$\sum_{j_1,...,j_n} | T(h_{j_1}, ..., h_{j_n}) |^2 = \sum_j | \frac{1}{\sqrt{j}} |^2 = \sum_j \frac{1}{j}$$

é uma série divergente.

Uma pergunta natural agora seria: existe um conjunto de aplicações que contém as aplicações de Hilbert-Schmidt e que admite a equivalência nos resultados de fatoração desta seção?

Começamos a investigação com as aplicações completamente absolutamente p-somantes, quando $p \in [1, 2)$ (veja 2.1.3). No caso $p = 1$, o problema fica em aberto. Nos demais casos, a resposta é negativa. Vamos exibir uma aplicação multilinear que admite fatoração através de qualquer espaço de Banach (usando uma aplicação multilinear e um operador linear), mas que não é completamente p-somante para todo $p \in (1,2)$. O exemplo abaixo esclarece nossa afirmativa:

Exemplo 2.1.21 *Seja* $T \in \mathcal{L}(^2l_2;\mathbb{K})$, $T(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$, *onde* $x = (x_j)_j$ *e* $y = (y_j)_j$ *estão em* l_2.

Para $0 < \epsilon < \dfrac{p-1}{2p}$ *e* $a = \dfrac{2-p}{2p} + \epsilon$, *definamos:* $x^k = (\delta_{jk}\dfrac{1}{k^a})_j$, *onde* δ_{jk} *é o símbolo de Kronecker. Temos que* $(x^k)_{k=1}^{\infty} \in l_{p,w}(l_2)$*: se* $x' = (x'_j)_j \in l'_2 = l_2$, *usando a desigualdade de Hölder (1.0.1), podemos escrever:*

$$\underset{x' \in B_{l_2}}{sup} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mid \langle x', x^k \rangle \mid^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{x' \in B_{l_2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mid \sum_{j=1}^{\infty} x'_j x_j^{(k)} \mid^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{x' \in B_{l_2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mid x'_k \mid^p \mid \frac{1}{k^{pa}} \mid \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sup_{x' \in B_{l_2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mid x'_k \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mid \frac{1}{k} \mid^{\frac{2pa}{2-p}} \right)^{\frac{2-p}{2p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mid \frac{1}{k} \mid^{\frac{2pa}{2-p}} \right)^{\frac{2-p}{2p}} < \infty$$

pois $\dfrac{2pa}{2-p} = \dfrac{2p}{2-p}\left(\dfrac{2-p}{2p} + \epsilon\right) = 1 + \epsilon\dfrac{2p}{2-p} > 1$.

Temos ainda que $T \notin \mathcal{L}_{fas,p}(^2l_2;\mathbb{K})$, *pois:*

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} \mid T(x^k, x^j) \mid^p = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2ap}}$$

e a série $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^{2ap}}$ *é divergente, uma vez que* $2ap = 2 - p + 2p\epsilon < 2 - p + 2p\left(\dfrac{p-1}{2p}\right) = 1$.

Por outro lado, T admite o segundo tipo de fatoração através de qualquer espaço normado ($\neq \{0\}$)*. A demonstração desse fato é a mesma do exemplo 2.1.20.*

Partimos então para as aplicações fortemente p-somantes introduzidas por Dimant em [8]. A definição é a seguinte:

Definição 2.1.22 *Seja $p \geq 1$. Uma aplicação $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; G)$ é dita fortemente p-somante se existe uma constante $C \geq 0$ tal que, para todo $x_1^i, ..., x_m^i \in E_i$, $i = 1, ..., n$, tem-se:*

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \| T(x_j^1, ..., x_j^n) \|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\phi \in B_{\mathcal{L}(E_1,...,E_n)}} \left(\sum_{j=1}^{m} | \phi(x_j^1, ..., x_j^n) |^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Vamos indicar por $\mathcal{L}_{sas,p}(E_1, ..., E_n; F)$ o conjunto de tais aplicações. O ínfimo de todas as constantes $C \geq 0$ que satisfazem a desigualdade acima será denotado por $\| \, . \, \|_{sas,p}$ e é uma norma para o espaço $\mathcal{L}_{sas,p}(E_1, ..., E_n; F)$. Esse espaço com a norma apresentada é um espaço completo.

Pode-se provar que $\mathcal{L}_{sas,p}(E_1, ..., E_n; F) \subset \mathcal{L}_{sas,q}(E_1, ..., E_n; F)$ para $1 \leq p < q < +\infty$.

O espaço das aplicações fortemente 2-somantes se mostra interessante: sabemos que se $T \in \mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_n; G)$, então $T = V \circ S$ (2.1.18), onde $S \in \mathcal{L}(H_1, ..., H_n; X)$, X é um espaço $\mathcal{L}_\infty$ e $V \in \mathcal{L}_{as,2}(X; G)$. Assim, sejam $h_1^k, ..., h_m^k \in H_k$, $k = 1, ..., n$.

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \| T(h_j^1, ..., h_j^n) \|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^{m} \| V \circ S(h_j^1, ..., h_j^n) \|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \| V \|_{as,2} \| \left(S(h_j^1, ..., h_j^n)\right)_{j=1}^m \|_{w,2} = \| V \|_{as,2} \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{m} | \langle \varphi, S(h_j^1, ..., h_j^n) \rangle |^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \| V \|_{as,2} \| S \| \sup_{\psi \in B_{\mathcal{L}(H_1,...,H_n;\mathbb{K})}} \left(\sum_{j=1}^{m} | \psi(h_j^1, ..., h_j^n) |^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Isso mostra que $T \in \mathcal{L}_{sas,2}(H_1, ..., H_n; G)$ e temos $\mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_n; G) \subset \mathcal{L}_{sas,2}(H_1, ..., H_n; G)$. É possível mostrar também que $\mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_n; G) \subset \mathcal{L}_{sas,1}(H_1, ..., H_n; G)$ (usando o corolário 2.1.18 para fatoração através de um espaço $\mathcal{L}_1$, lembrando que $V \in \mathcal{L}_{as,1}(X;G)$, X espaço $\mathcal{L}_1$: 1.1.12).

É também importante comentarmos que todos os funcionais multilineares são fortemente 1-somantes (e, portanto, fortemente p-somantes para todo $p \geq 1$): eles admitem fatoração como no exemplo 2.1.20 através de qualquer espaço normado ($\neq \{0\}$). Fica então simples mostrar que a inclusão $\mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_n; G) \subset \mathcal{L}_{sas,1}(H_1, ..., H_n; G)$ é estrita: basta exibirmos um funcional multilinear que não seja de Hilbert-Schmidt (veja, por exemplo, 2.1.20).

A conclusões que obtivemos nos dois parágrafos anteriores já tinham sido tiradas por Dimant em [8] e [5], de forma diferente do que fizemos, usando a definição e propriedades das aplicações fortemente p-somantes.

Não sabemos se aplicações fortemente p-somantes definidas em espaços de Hilbert admitem as fatorações como em 2.1.16 e 2.1.18. Trabalhando com espaços de Banach em geral, temos que aplicações fortemente 2-somantes não admitem fatoração através de espaços $\mathcal{L}_1$ (e, portanto, não admitem fatoração como em 2.1.16). Isso ocorre porque a inclusão $\mathcal{L}_{sas,1}(E_1, ..., E_n; F) \subset \mathcal{L}_{sas,2}(E_1, ..., E_n; F)$ é geralmente estrita : a aplicação $D_\lambda \in \mathcal{L}(^m c_o; l_2)$, $D_\lambda(x^1, ..., x^m) = (\lambda_n x_n^1 ... x_n^m)_{n=1}^\infty$, onde $\lambda = (\lambda_n)_n \in l_2 \setminus l_1$, é fortemente 2-somante, mas não é fortemente 1-somante ([8], observação 1.8).

O problema de se obter um conjunto de aplicações multilineares, contendo as aplicações de Hilbert-Schmidt e que ainda se fatoram como nos resultados estudados (ou seja, como a composição de uma aplicação multilinear com um operador linear) fica em aberto. Pelo que vimos, esse conjunto deve estar contido em $\mathcal{L}_{sas,2}(H_1, ..., H_n; G)$.

Vamos prosseguir agora no estudo da fatoração de polinômios de Hilbert-Schmidt.

Corolário 2.1.23 *(do Teorema 2.1.16) Seja $P \in \mathcal{P}_{HS}(^nH; G)$. Então, para todo espaço de Banach de dimensão infinita Z, P admite uma fatoração da forma:*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "P"] \arrow[d, "Q"'] & G \\ Z \arrow[ur, "V"'] & \end{tikzcd}$$

onde $Q \in \mathcal{P}(^nH; Z)$ e $V \in \mathcal{L}(Z; G)$.

Mais ainda, V pode ser escolhido de tal forma que ele seja compacto e 2-somante.

Prova. Seja $P \in \mathcal{P}_{HS}(^nH; G)$. Então, $\check{P} \in \mathcal{L}_{HS}(^nH; G)$ e por 2.1.16, $\check{P}$ admite uma fatoração da forma:

$$\begin{tikzcd} H \times ... \times H \arrow[r, "\check{P}"] \arrow[d, "S"'] & G \\ Z \arrow[ur, "V"'] & \end{tikzcd}$$

onde $S \in \mathcal{L}(^nH; Z)$, $V \in \mathcal{L}_{as,2}(Z; G)$, ambos compactos, com

$$\| V \|_{as,2} \leq 12AC \| \check{P} \|_{HS}^{\frac{1}{4}} \frac{1}{m^{5+\frac{5\delta}{8}}} = 12AC \| P \|_{HS}^{\frac{1}{4}} \frac{1}{m^{5+\frac{5\delta}{8}}} \text{ e}$$

$$\| S \| \leq 8 \| \check{P} \|_{HS}^{\frac{1}{4}} \frac{1}{m^{1+\frac{\delta}{8}}} = 8 \| P \|_{HS}^{\frac{1}{4}} \frac{1}{m^{1+\frac{\delta}{8}}}$$

$\delta > 0$, $m \in \mathbb{N}$ fixos, $A > 0$ uma constante independente de $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq C \leq 4$ (veja 2.1.17).

Chamando $Q = \hat{S}$, temos $P = V \circ Q$, com

$$\| Q \| = \sup_{\|h\| \leq 1} \| Q(h) \| = \sup_{\|h\| \leq 1} \| S(h, ..., h) \| \leq \| S \| \leq 8 \| P \|_{HS}^{\frac{1}{4}} \frac{1}{m^{1+\frac{\delta}{8}}}$$

■

Corolário 2.1.24 *(do corolário 2.1.23) Seja $P \in \mathcal{P}_{HS}(^n H; G)$. Então, P admite uma fatoração da forma*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "P"] \arrow[d, "Q"'] & G \\ X \arrow[ur, "V"'] & \end{tikzcd}$$

onde X é um espaço $\mathcal{L}_\infty$ (ou $\mathcal{L}_1$), $Q \in \mathcal{P}(^n H; X)$ e $V \in \mathcal{L}(X; G)$.

As recíprocas dos resultados 2.1.23 e 2.1.24 não são válidas em geral.

Exemplo 2.1.25 *Tomemos $P \in \mathcal{P}(^n H; \mathbb{K})$ definida por $P(x) = \sum_j \frac{1}{\sqrt{j}}(x \mid h_j)$, onde $(h_j)_{j=1}^\infty$ é uma base ortonormal do espaço de Hilbert separável H. Dado um espaço de Banach Z, já vimos que (exemplo 2.1.20) $T = \check{P}$ admite uma fatoração da forma $T = V \circ S$, onde $S \in \mathcal{L}(^n H; Z)$ e $V \in \mathcal{L}(Z; \mathbb{K})$. Consequentemente, $P = V \circ \hat{S}$.*

Por outro lado, temos que $P \notin \mathcal{P}_{HS}(^n H; \mathbb{K})$, pois $\check{P} = T$ não é uma aplicação de Hilbert-Schmidt.

2.2 Aplicações Holomorfas de Hilbert-Schmidt

Nesta parte, vamos estudar as aplicações holomorfas de Hilbert-Schmidt e suas propriedades. Nosso objetivo é obter resultados semelhantes àqueles que ocorrem com polinômios de Hilbert-Schmidt, aproveitando o fato de que aplicações holomorfas desse tipo podem ser representadas como uma série formada de polinômios de Hilbert-Schmidt.

Nesta seção, se nada for dito ao contrário, vamos utilizar apenas espaços sobre o corpo dos complexos.

Iniciamos com a seguinte proposição:

Proposição 2.2.1 $(\mathcal{P}_{HS}({}^mH;G))_{m=0}^{\infty}$ *é um tipo HS-holomorfia (para espaços de Hilbert, no sentido de Nachbin, veja definição 1.3.6)*

Prova. Não é difícil ver que $\mathcal{P}_{HS}({}^mH;G)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}({}^mH;G)$ para todo $m \in \mathbb{N}_o$ e por definição, temos $\mathcal{P}_{HS}({}^0H;G) = G$.

Sejam agora $l \leq m$, $P \in \mathcal{P}_{HS}({}^mH;G)$ e $x \in H$. Vamos mostrar que $d^lP(x) \in \mathcal{L}_{HS}({}^lH;G)$. Para isso, seja $(h_j)_j$ uma base ortonormal de H. Assim:

$$\sum_{j_1,\ldots,j_l} \| d^lP(x)\,(h_{j_1},\ldots,h_{j_l}) \|^2 = \sum_{j_1,\ldots,j_l} \| l! \binom{m}{l} \check{P}x^{m-l}\,(h_{j_1},\ldots,h_{j_l}) \|^2$$

$$= \| x \|^{2(m-l)} \left(l! \binom{m}{l}\right)^2 \sum_{j_1,\ldots,j_l} \| \check{P} \left(\frac{x}{\| x \|}\right)^{m-l} (h_{j_1},\ldots,h_{j_l}) \|^2$$

$$\leq \left(l! \binom{m}{l}\right)^2 \| x \|^{2(m-l)} \| \check{P} \|_{HS}^2$$

para $x \in H$, $x \neq 0$. Se $x = 0$, temos:

$$d^lP(0) = 0 \text{ se } l \neq m$$

$$d^lP(0) = l!\check{P} \text{ se } l = m$$

Concluímos que $d^lP(x) \in \mathcal{L}_{HS}({}^lH;G)$ para todo $l \leq m$. Ainda:

$$\| \hat{d}^l P(x) \|_{HS} = \| d^l P(x) \|_{HS} = \left(\sum_{j_1,\dots,j_l} \| d^l P(x)\,(h_{j_1},\dots,h_{j_l}) \|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq l! \binom{m}{l} \| x \|^{m-l} \| \check{P} \|_{HS} \leq 2^m l! \| \check{P} \|_{HS} \| x \|^{m-l}.$$

Chamando $\sigma = 2$, temos a desigualdade esperada:

$$\frac{1}{l!} \| \hat{d}^l P(x) \|_{HS} \leq \sigma^m \| \check{P} \|_{HS} \| x \|^{m-l} = \sigma^m \| P \|_{HS} \| x \|^{m-l}.$$

■

As aplicações holomorfas de Hilbert-Schmidt foram utilizadas por Dwyer em sua tese (veja [9]) e podem ser definidas da seguinte forma:

Definição 2.2.2 *Sejam $U \subset H$ um aberto de H e $f \in \mathcal{H}(U;G)$. Dizemos que f é uma aplicação de Hilbert-Schmidt em $x \in U$ se ocorrem as seguintes condições:*

(1) $\hat{d}^m f(x) \in \mathcal{P}_{HS}(^m H;G)$ para todo $m \in \mathbb{N}_o$ e

(2) existem reais $C \geq 0$ e $c \geq 0$ tais que $\| \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(x) \|_{HS} \leq C c^m$ para todo $m \in \mathbb{N}_o$.

Se f é de Hilbert-Schmidt em todo $x \in U$, vamos dizer que f é de Hilbert-Schmidt em U. Vamos denotar o conjunto de tais aplicações por $\mathcal{H}_{HS}(U;G)$.

Temos também as aplicações holomorfas de Hilbert-Schmidt de tipo limitado (veja [9], II.10):

Definição 2.2.3 *Seja $f \in \mathcal{H}(H;G)$. Dizemos que f é uma aplicação de Hilbert-Schmidt de tipo limitado se f satisfaz as seguintes condições:*

(1) $\hat{d}^m f(0) \in \mathcal{P}_{HS}(^m H;G)$ para todo $m \in \mathbb{N}$ e

(2) $\lim_{m\to\infty} \{\frac{1}{m!} \| \hat{d}^m f(0) \|_{HS}\}^{\frac{1}{m}} = 0$.

Indicaremos por $\mathcal{H}^b_{HS}(H;G)$ o espaço de tais aplicações.

2.2.1 Propriedades das Aplicações Holomorfas de Hilbert-Schmidt

Vamos inicialmente tratar de um caso particular de aplicações holomorfas de Hilbert-Schmidt: os polinômios de Hilbert-Schmidt.

Proposição 2.2.4 *Se $u \in \mathcal{L}(H_1;H)$, $v \in \mathcal{L}(G;G_1)$ e $P \in \mathcal{P}_{HS}(^nH;G)$, então $v \circ P \circ u \in \mathcal{P}_{HS}(^nH_1;G_1)$ e $\| v \circ P \circ u \|_{HS} \leq \| v \| \| P \|_{HS} \| u \|^n$*

Prova. Para $x_1, ..., x_n \in H_1$, podemos escrever (usando 1.2.1):

$$(v \circ P \circ u)^{\vee}(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\epsilon_j = \pm 1} \epsilon_1 ... \epsilon_n (v \circ P \circ u)\ (\epsilon_1 x_1 + ... + \epsilon_n x_n)$$
$$= v \left(\frac{1}{2^n n!} \sum_{\epsilon_j = \pm 1} \epsilon_1 ... \epsilon_n P(\epsilon_1 u x_1 + ... + \epsilon_n u x_n) \right) = v \circ \breve{P}(ux_1, ..., ux_n)$$
$$= \left(v \circ \breve{P} \circ (u, ..., u) \right) (x_1, ..., x_n)$$

Como $\breve{P} \in \mathcal{L}_{HS}(^nH;G) = \mathcal{L}_{fas,2}(^nH;G)$, segue que $v \circ \breve{P} \circ (u, ..., u) \in \mathcal{L}_{fas,2}(^nH_1;G_1) = \mathcal{L}_{HS}(^nH_1;G_1)$ e:

$$\| v \circ \breve{P} \circ (u, ..., u) \|_{HS} = \| v \circ \breve{P} \circ (u, ..., u) \|_{fas,2} \leq \| v \| \| \breve{P} \|_{fas,2} \| u \|^n$$
$$= \| v \| \| \breve{P} \|_{HS} \| u \|^n$$

Logo, $v \circ P \circ u \in \mathcal{P}_{HS}(^nH_1;G_1)$ e ainda:

$$\| v \circ P \circ u \|_{HS} \leq \| v \| \| P \|_{HS} \| u \|^n .$$

■

Para aplicações holomorfas de Hilbert-Schmidt, podemos mostrar:

Proposição 2.2.5 *Se* $f \in \mathcal{H}_{HS}(H;G)$, $u \in \mathcal{L}(H_1;H)$ *e* $v \in \mathcal{L}(G;G_1)$, *então* $v \circ f \circ u \in \mathcal{H}_{HS}(H_1;G_1)$.

Prova. Escrevamos $h = v \circ f \circ u$. Temos:

(1) $\hat{d}^m h(x_1) \in \mathcal{P}_{HS}(^m H_1;G_1)$ para todo $x_1 \in H_1$ e todo $m \in \mathbb{N}_o$, pois $\hat{d}^m h(x_1) = v \circ \hat{d}^m f(ux_1) \circ u$, com $\hat{d}^m f(ux_1) \in \mathcal{P}_{HS}(^m H;G)$ (usando a proposição 2.2.4).

(2) Chamando $x = ux_1$, como f é de Hilbert-Schmidt em x, existem $C \geq 0$ e $c \geq 0$ tais que $\| \frac{1}{m!}\hat{d}^m f(x) \|_{HS} \leq Cc^m$ para todo $m \in \mathbb{N}_o$.

Assim, para todo $m \in \mathbb{N}_o$, podemos escrever:

$$\| \frac{1}{m!}\hat{d}^m h(x_1) \|_{HS} = \| \frac{1}{m!} v \circ \hat{d}^m f(ux_1) \circ u \|_{HS} \leq \| v \| \, \| \frac{1}{m!}\hat{d}^m f(x) \|_{HS} \, \| u \|^m$$

$$\leq Cc^m \| v \| \, \| u \|^m$$

Chamando $d = c \| u \|$ e $D = C \| v \|$, temos: $\| \frac{1}{m!}\hat{d}^m h(x_1) \|_{HS} \leq Dd^m$ para todo $m \in \mathbb{N}_o$.

Portanto, h é de Hilbert-Schmidt em x_1. ■

Observação 2.2.6 *A proposição acima poderia ser enunciada da seguinte forma: "Sejam* $f \in \mathcal{H}(U;G)$, U *um aberto de* H, $u \in \mathcal{L}(H_1;H)$ *e* $v \in \mathcal{L}(G;G_1)$. *Se* f *é uma aplicação de Hilbert-Schmidt em* $ux_1 \in U$, $x_1 \in H_1$, *então* $v \circ f \circ u$ *é uma aplicação de Hilbert-Schmidt em* $x_1 \in H_1$*".*

Podemos ainda demonstrar a seguinte proposição para aplicações de Hilbert-Schmidt de tipo limitadas:

Proposição 2.2.7 *Se* $f \in \mathcal{H}_{Hb}(H;G)$*,* $u \in \mathcal{L}(H_1;H)$ *e* $v \in \mathcal{L}(G;G_1)$*, então* $v \circ f \circ u \in \mathcal{H}_{Hb}(H_1;G_1)$*.*

Os próximos resultados (2.2.8 e 2.2.9) foram demonstrados por Dwyer em [9] (proposições III.1 e III.3) para aplicações holomorfas com valores escalares. As mesmas demonstrações, com pequenas modificações, podem ser usadas para provar 2.2.8 e 2.2.9:

Proposição 2.2.8 *Dados* $k, n \in \mathbb{N}$*,* $k \leq n$*, se* $P \in \mathcal{P}_{Hb}(^nH;G)$*, então* $\hat{d}^kP(x) \in \mathcal{P}_{HS}(^nH;G)$ *e* $\| \frac{1}{k!}\hat{d}^kP(x) \|_{HS} \leq \binom{n}{k} \| P \|_{HS} \| x \|^{n-k}$

Proposição 2.2.9 *Se* $f \in \mathcal{H}_{Hb}(H;G)$*, então* $\hat{d}^kf(x) \in \mathcal{P}_{HS}(^kH;G)$*,* $n \in \mathbb{N}$*,* $x \in H$*.*

Observação 2.2.10 *Como consequência da demonstração da proposição 2.2.9, pode-se obter:*

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k!} \| \hat{d}^kf(x) \|_{HS} \right)^{\frac{1}{k}} = 0$$

para todo $x \in H$ *quando* $f \in \mathcal{H}_{Hb}(H;G)$ *(veja Observação III.4 em [9]).*

A próxima definição pode ser vista em [37].

Definição 2.2.11 *Sejam* $s \leq r$ *e* $f \in \mathcal{H}(U;F)$*, onde* U *é um aberto de* E*.* f *é dita uma aplicação completamente absolutamente (r;s)-somante em* $x \in U$ *se* f *é do tipo* $fas,(r;s)-holomorfia$ *em* $x \in E$ *(1.3.6), isto é:*

(1) $\hat{d}^mf(x) \in \mathcal{P}_{fas,(r;s)}(^mE;F)$ *para todo* $m \in \mathbb{N}_o$ *e*

(2) existem reais $C \geq 0$ *e* $c \geq 0$ *tais que*

$$\| \frac{1}{m!}\hat{d}^mf(x) \|_{fas,(r;s)} \leq Cc^m$$

para todo $m \in \mathbb{N}_o$.

Se f *é completamente absolutamente (r;s)-somante em todo* $x \in U$, *vamos dizer que* f *é completamente absolutamente (r;s)-somante em* U. *Vamos indicar por* $\mathcal{H}_{fas,(r;s)}(U;F)$ *o conjunto de todas as aplicações dessa forma.*

Temos agora uma relação importante entre aplicações de Hilbert-Schmidt e as completamente absolutamente (r;s)-somante, como acontece nos casos multilinear e polinomial.

Proposição 2.2.12 .

(i) $\mathcal{H}_{HS}(H;G) \subset \mathcal{H}_{fas,p}(H;G)$ *para todo* $p > 0$.

(ii) $\mathcal{H}_{HS}(H;G) = \mathcal{H}_{fas,p}(H;G)$ *para todo* $p \geq 2$.

Prova. .

(i) Sejam $f \in \mathcal{H}_{HS}(H;G)$ e $x \in H$. Assim, $\hat{d}^k f(x) \in \mathcal{P}_{HS}(^kH;G) \subset \mathcal{P}_{fas,p}(^kH;G)$, para $p > 0$. Ainda:

$$\| \frac{1}{k!}\hat{d}^k f(x) \|_{fas,p} \leq \left(\frac{1}{d_p}\right)^k \| \frac{1}{k!}\hat{d}^k f(x) \|_{HS} \leq C\left(\frac{c}{d_p}\right)^k$$

para $k \in \mathbb{N}_o$, pois $\| \frac{1}{k!}\hat{d}^k f(x) \|_{HS} \leq Cc^k$ para $C \geq 0$ e $c \geq 0$ adequados.

Logo, $f \in \mathcal{H}_{fas,p}(H;G)$ para todo $p > 0$.

(ii) Sejam $p \geq 2$, $f \in \mathcal{H}_{fas,p}(H;G)$ e $x \in H$. Assim, $\hat{d}^k f(x) \in \mathcal{P}_{fas,p}(^kH;G) = \mathcal{P}_{HS}(^kH;G)$. Ainda:

$$\| \frac{1}{k!}\hat{d}^k f(x) \|_{HS} \leq (b_p)^k \| \frac{1}{k!}\hat{d}^k f(x) \|_{fas,p} \leq C(cb_p)^k$$

para $k \in \mathbb{N}_o$.

Logo, $f \in \mathcal{H}_{HS}(H;G)$ para todo $p \geq 2$. ∎

2.2.2 Resultados de Fatoração

Vamos agora apresentar alguns resultados de fatoração para aplicações holomorfas de Hilbert-Schmidt.

Inicialmente, enunciemos o seguinte resultado, que será de grande importância para demonstrar os resultados iniciais desta parte. Uma demonstração pode ser vista em [27] e é baseada em idéias exibidas em [2].

Teorema 2.2.13 *(Pellegrino - Souza) Suponha que* $\mathcal{L}(E;H) = \mathcal{L}_{as,2}(E;H)$ *para todo espaço de Hilbert* H*. Então,* $\mathcal{H}(E;H) = \mathcal{H}_{fas,2}(E;H)$*.*

Vamos agora apresentar o primeiro resultado de fatoração:

Teorema 2.2.14 *Seja* $f \in \mathcal{H}(H;G)$*. Se* f *admite uma fatoração da forma:*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f"] \arrow[d, "S"'] & G \\ X \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

onde X *é um espaço* $\mathcal{L}_\infty$*,* $S \in \mathcal{L}(H;X)$ *e* $g \in \mathcal{H}(X;G)$*, então* $f \in \mathcal{H}_{HS}(H;G)$*.*

Prova. Suponha que f admita a fatoração enunciada no resultado. Pelo teorema 2.2.13, temos que $g \in \mathcal{H}(X;G) = \mathcal{H}_{fas,2}(X;G)$, pois $\mathcal{L}(X;G) = \mathcal{L}_{as,2}(X;G)$ qualquer que seja o espaço de Hilbert G (1.1.13). Usando a proposição 1.3.9 e o resultado 2.2.12, segue que $f = g \circ S \in \mathcal{H}_{fas,2}(H;G) = \mathcal{H}_{HS}(H;G)$. ■

O resultado acima vale também para o caso do espaço X ser $\mathcal{L}_1$ no lugar de $\mathcal{L}_\infty$. A demonstração é a mesma, bastando observar que $\mathcal{L}(X;H) = \mathcal{L}_{as,2}(X;H)$, para todo espaço de Hilbert H (1.1.12 e 1.1.15).

Como consequência do resultado 2.2.14, temos:

Corolário 2.2.15 *Seja $f \in \mathcal{H}(H;G)$. Se, para todo espaço de Banach Z de dimensão infinita, f admite uma fatoração da forma:*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f"] \arrow[d, "S"'] & G \\ Z \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

onde $S \in \mathcal{L}(H;Z)$ e $g \in \mathcal{H}(Z;G)$, então $f \in \mathcal{H}_{HS}(H;G)$.

Quanto à demonstração do resultado 2.2.15, basta tomar Z como um espaço $\mathcal{L}_\infty$ e usar o resultado 2.2.14 para concluir.

As recíprocas dos resultados 2.2.15 e 2.2.14 não são válidas em geral. Basta observarmos que $\mathcal{P}_{HS}(^nH;G) \subset \mathcal{H}_{HS}(H;G)$ e que tais resultados não valem para os polinômios (veja 2.1.12).

Examinando um outro tipo de fatoração para aplicações de Hilbert-Schmidt como fizemos nos casos multilinear e polinomial, vamos enunciar:

Teorema 2.2.16 *Seja $f \in \mathcal{H}(U;G)$, onde U é um aberto de H. Suponha que f seja uma* *aplicação de Hilbert-Schmidt em $h_o \in U$. Então, f admite uma fatoração da forma:*

$$\begin{tikzcd} U_o \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & G \\ X \arrow[ur, "V"'] & \end{tikzcd}$$

onde X é um espaço $\mathcal{L}_\infty$, $U_o \subset H$ é uma vizinhança de h_o em U, $g \in \mathcal{H}(U_o; X)$ e $V \in \mathcal{L}(X; G)$.

O teorema acima pode ser enunciado também para o caso $\mathcal{L}_1$, ou seja, existe um espaço X que é $\mathcal{L}_1$ para o qual f admite uma fatoração como a citada no enunciado.

Antes de prosseguirmos na demonstração do teorema 2.2.16, vamos apresentar um lema preparatório:

Lema 2.2.17 .

(i) $l_\infty(X)$ é um espaço injetivo se X é um espaço com a propriedade da extensão métrica (veja 1.1.9).

(ii) $l_1(Y)$ é um espaço $\mathcal{L}_1$ se Y é um espaço de Banach tal que Y' tem a propriedade da extensão métrica.

(iii) $\mathbb{C} \times F$ é um espaço $\mathcal{L}_p$ se F é um espaço $\mathcal{L}_p$, $1 \leq p \leq \infty$.

Prova. (i) Sejam E um espaço de Banach e $Y \subset E$ um subespaço de E. Consideremos também $T \in \mathcal{L}(Y; l_\infty(X))$. Para cada $y \in Y$, podemos escrever:

$$Ty = (y_1, ..., y_n, ...) = (T_1 y, ..., T_n y, ...)$$

onde $T_j \in \mathcal{L}(Y;X)$, $T_j(y) = \pi_j \circ T(y)$, $j \in \mathbb{N}$. Aqui, π_j denota a j-ésima projeção de $l_\infty(X)$ sobre X. Como X possui a propriedade da extensão métrica, existe $\tilde{T}_j \in \mathcal{L}(E;X)$ que estende T_j e $\| \tilde{T}_j \| = \| T_j \|$, $j \in \mathbb{N}$.

Para cada $x \in E$, escrevamos: $\tilde{T}(x) = (\tilde{T}_1 x, ..., \tilde{T}_n x, ...)$.

Inicialmente, observemos que $(\tilde{T}_j x)_j \in l_\infty(X)$, pois:

$$\| \tilde{T}_j x \| \leq \| \tilde{T}_j \| \| x \| = \| T_j \| \| x \| \leq \| \pi_j \| \| T \| \| x \| \leq \| T \| \| x \|$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, para todo $x \in E$.

Temos também que $\tilde{T}$ é linear, $\tilde{T}$ é contínua, pois:

$$\| \tilde{T} x \| = \sup_{j \in \mathbb{N}} \| \tilde{T}_j x \| \leq \| T \| \| x \|$$

e claramente, $\tilde{T}$ estende T.

Portanto, $l_\infty(X)$ é um espaço injetivo.

(ii) Basta observarmos que $l_1(Y)' = l_\infty(Y')$, $l_\infty(Y')$ é um espaço $\mathcal{L}_\infty$ (veja (i) e 1.1.11). Logo, $l_1(Y)$ é um espaço $\mathcal{L}_1$ (1.1.10).

(iii) Denotemos: $E = \mathbb{C} \times F$ e seja $X \subset E$ um subespaço de dimensão finita de E. Se $p_1 \in \mathcal{L}(E;\mathbb{C})$ e $p_2 \in \mathcal{L}(E;F)$ denotam as projeções de E em $\mathbb{C}$ e F respectivamente, temos que $p_1(X) \subset \mathbb{C}$ e $p_2(X) \subset F$ são subespaços de $\mathbb{C}$ e F de dimensão finita.

Chamemos $Y_1 = \mathbb{C} \supset p_1(X)$ e sendo F um espaço $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ para algum $\lambda > 1$, indiquemos por Y_2 um subespaço de F de dimensão finita contendo $p_2(X)$ e para o qual existe um isomorfismo $v_2 : Y_2 \longrightarrow l_p^{n_2}$, com $n_2 = dim Y_2$, $\| v_2 \| \| v_2^{-1} \| < \lambda$. Consideremos ainda $v_1 : Y_1 \longrightarrow l_p^1$ tal que $v_1(y_1) = y_1$ para todo $y_1 \in Y_1$.

Definamos:

$$v : Y_1 \times Y_2 \longrightarrow l_p^1 \times l_p^{n_2}$$

$$v(y_1, y_2) = (v_1 y_1, v_2 y_2)$$

v é linear, bijetivo , contínuo e sua inversa é dada por:

$$v^{-1} : l_p^1 \times l_p^{n_2} \longrightarrow Y_1 \times Y_2$$

$$v^{-1}(x_1, x_2) = (v_1^{-1} x_1, v_2^{-1} x_2)$$

Quanto às normas de v e v^{-1}, podemos escrever:

$$\| v(y_1, y_2) \| = \| (v_1 y_1, v_2 y_2) \| = \max\{\| v_1 y_1 \|, \| v_2 y_2 \|\} \leq \max\{\| y_1 \|, \| v_2 \| \| y_2 \|\}$$

Para $\| (y_1, y_2) \| = \max\{\| y_1 \|, \| y_2 \|\} \leq 1$, temos que $\| v \| \leq \max\{1, \| v_2 \|\}$.

Analogamente: $\| v^{-1} \| \leq \max\{1, \| v_2^{-1} \|\}$. Logo:

$$\| v \| \| v^{-1} \| \leq \max\{1, \| v_2 \|, \| v_2^{-1} \|, \| v_2 \| \| v_2^{-1} \|\} \leq \max\{\| v_2 \|, \| v_2^{-1} \|, \lambda\} := \theta$$

Podemos identificar o espaço $l_p \times l_p^{n_2}$ com $l_p^{1+n_2}$ da seguinte forma:

$$\psi : l_p^1 \times l_p^{n_2} \longrightarrow l_p^{1+n_2}$$

$$\psi(x_1, x_2) = (z_k)_{k=1}^{1+n_2}$$

onde $x_2 = (x_2^j)_{j=1}^{n_2} \in l_p^{n_2}$, $z_k = x_2^k$ para $1 \leq k \leq n_2$ e $z_{1+n_2} = x_1$.

Assim, temos um isomorfismo $v : Y \longrightarrow l_p^{dimY}$, onde $Y = Y_1 \times Y_2$, $X \subset Y$ e $\| v \| \| v^{-1} \| < \theta$, $\theta > 1$. Isto nos diz que E é um espaço $\mathcal{L}_{p,\theta}$. ■

Finalmente, podemos demonstrar o teorema 2.2.16:

Prova. Vamos supor inicialmente que $f(h_o) = 0$. Chamemos $P_n = \dfrac{1}{n!}\hat{d}^n f(h_o) \in \mathcal{P}_{HS}(^n H; G)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela definição, existem $C \geq 0$ e $c \geq 0$ tais que $\| P_n \|_{HS} \leq$

Cc^n para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo resultado 2.1.23, P_n admite uma fatoração da forma:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "P_n"] \arrow[d, "Q_n"'] & G \\ l_\infty \arrow[ur, "V_n"'] & \end{tikzcd}$$

onde

$$\| Q_n \| \leq \frac{8}{n^{1+\frac{\delta}{8}}} \| P_n \|_{HS}^{\frac{1}{4}}$$

$$\| V_n \|_{as,2} \leq \frac{48A}{n^{5+\frac{5\delta}{8}}} \| P_n \|_{HS}^{\frac{1}{4}}$$

$A > 0$ independente da escolha de $n \in \mathbb{N}$ (veja demonstração de 2.1.23).

Seja $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon c^{\frac{1}{4}} < 1$. Escrevamos:

$$R_n = \epsilon^{-n} Q_n \in \mathcal{P}(^n H; l_\infty)$$

$$v_n = \epsilon^n V_n \in \mathcal{L}(l_\infty; G)$$

$$X = l_\infty(l_\infty)$$

$$i_n : l_\infty \to X \text{ a inclusão na n-ésima coordenada}$$

$$\pi_n : X \to l_\infty \text{ a projeção da n-ésima coordenada.}$$

Temos que $v_n \circ R_n = V_n \circ Q_n = P_n$.

Podemos escrever, para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\| R_n \|^{\frac{1}{n}} \leq \epsilon^{-1} \| Q_n \|^{\frac{1}{n}} \leq \epsilon^{-1} \frac{8^{\frac{1}{n}}}{\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{1+\frac{\delta}{8}}} \| P_n \|_{HS}^{\frac{1}{4n}} \leq \epsilon^{-1} \frac{8^{\frac{1}{n}}}{\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{1+\frac{\delta}{8}}} C^{\frac{1}{4n}} c^{\frac{1}{4}} \qquad (*)$$

Logo, $\limsup_{n\to\infty} \| R_n \|^{\frac{1}{n}} \leq \epsilon^{-1} c^{\frac{1}{4}}$. Assim, a aplicação definida por:

$$g(h) = \sum_{n=1}^{\infty} i_n \circ R_n(h - h_o)$$

é holomorfa em uma vizinhança U_o de h_o em U. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $f(h) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(h - h_o)$ para todo $h \in U_o$.

Observemos agora que:

$$\sum_n \| v_n \circ \pi_n \| \leq \sum_n \| v_n \| = \sum_n \epsilon^n \| V_n \| \leq 48A \sum_n \epsilon^n \frac{1}{n^{5+\frac{5\delta}{8}}} \| P_n \|_{HS}^{\frac{1}{4}}$$

$$\leq 48AC^{\frac{1}{4}} \sum_n \epsilon^n c^{\frac{n}{4}} \frac{1}{n^{5+\frac{5\delta}{8}}} < 48AC^{\frac{1}{4}} \sum_n \frac{1}{n^{5+\frac{5\delta}{8}}}$$

onde $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5+\frac{5\delta}{8}}}$ converge. Assim, vamos definir: $v : X \to G$, $vx = \sum_{n=1}^{\infty} (v_n \circ \pi_n)(x)$.

Temos que $v \in \mathcal{L}(X; G)$. Mais ainda, para cada $h \in U_o$:

$$(v \circ g)(h) = \sum_{n=1}^{\infty} (v_n \circ \pi_n) \left(\sum_{k=1}^{\infty} i_k \circ R_k(h - h_o) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \circ R_n(h - h_o)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P_n(h - h_o) = f(h).$$

Vamos agora supor que $f(h_o) \neq 0$. Definamos: $f_1 \in \mathcal{H}(U; G)$, $f_1(h) = f(h) - f(h_o)$.

f_1 é uma aplicação holomorfa de Hilbert-Schmidt em $h_o \in U$ e satisfaz:

$$\| \frac{1}{n!} \hat{d}^n f_1(h_o) \|_{HS} = \| \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(h_o) \|_{HS} \leq Cc^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}_o$. Pela parte anterior, existem $v^1 \in \mathcal{L}(X_1; G)$ e $g_1 \in \mathcal{H}(U_1; X_1)$ tais que $f_1 = v^1 \circ g_1$, onde $U_1 \subset U$ é uma vizinhança de $h_o \in U$ e X_1 é um espaço $\mathcal{L}_\infty$.

Chamemos $X = \mathbb{C} \times X_1$ (um espaço $\mathcal{L}_\infty$ - 2.2.17) e consideremos $p_1 : X \longrightarrow \mathbb{C}$ e $p_2 : X \longrightarrow X_1$ as projeções correspondentes.

Escrevamos:

$$g : U_1 \longrightarrow X \qquad\qquad v : X \longrightarrow G$$

$$g(h) = (1, g_1(h)) \qquad v(x) = f(h_o) p_1(x) + v^1 \circ p_2(x)$$

g é holomorfa em U_1. Ainda, $v \in \mathcal{L}(X;G)$ e:

$$(v \circ g)(h) = f(h_o)p_1(g(h)) + v^1 \circ p_2(g(h)) = f(h_o) + v^1 \circ g_1(h) = f(h_o) + f_1(h) = f(h)$$

para todo $h \in U_1$. ■

Como consequência da demonstração do resultado 2.2.16 acima, temos:

Corolário 2.2.18 *Se $f \in \mathcal{H}^b_{HS}(H;G)$, então f admite uma fatoração da forma:*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & G \\ X \arrow[ur, "V"'] & \end{tikzcd}$$

onde X é um espaço $\mathcal{L}_\infty$, $g \in \mathcal{H}^b(H;X)$ e $V \in \mathcal{L}(X;G)$.

Prova. Basta observarmos que, no parágrafo marcado com (*) da demonstração de 2.2.16, teríamos:

$$0 \leq \| R_n \|^{\frac{1}{n}} \leq \epsilon^{-1} \frac{8^{\frac{1}{n}}}{\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{1+\frac{\delta}{8}}} \| P_n \|^{\frac{1}{4n}}_{HS}$$

onde $\lim\limits_{n\to\infty} \| P_n \|^{\frac{1}{4n}}_{HS} = 0$.

Logo, a aplicação g definida por:

$$g(h) = \sum_{n=1}^{\infty} i_n \circ R_n(h - h_o)$$

(mesma notação da demonstração do resultado anterior) é holomorfa em H. ■

Para demonstrarmos o caso da fatoração através de um espaço $\mathcal{L}_1$, procedemos como na demonstração de 2.2.16, usando o espaço l_1 no lugar de l_∞ para a fatoração de cada polinômio P_n. Em seguida, tomamos $X = l_1(l_1)$. Pelo lema 2.2.17, X é um espaço $\mathcal{L}_1$.

É importante ressaltarmos que é possível demonstrar 2.2.16 usando o teorema de Lindenstrauss-Pelczynski (1.1.20) para cada polinômio P_n (veja 2.1.19). No caso $\mathcal{L}_1$, os resultados 2.2.16 e 2.2.18 são os mesmos. No caso $\mathcal{L}_\infty$, mesmo supondo que f é de tipo Hilbert-Schmidt limitada, não conseguimos obter uma aplicação g que seja inteira. Por isso, optamos por usar o resultado 2.1.23 (que faz uso do teorema de Diestel-Jarchow-Tonge, 1.1.21) ao invés do resultado de Lindenstrauss-Pelczynski.

A recíproca de 2.2.16 não é verdadeira em geral. O exemplo 2.1.25 é de uma aplicação holomorfa que admite uma fatoração através de quaisquer espaços (diferentes de $\{0\}$). Por outro lado, ela não é de Hilbert-Schmidt pois, para todo $h_o \in H$, temos:

$$\frac{1}{n!} d^n P(h_o) = \check{P}$$

onde $\check{P} \notin \mathcal{L}_{HS}(^n H; \mathbb{K})$.

Capítulo 3

Aplicações de tipo classes de Schatten

Vamos trabalhar neste capítulo com as aplicações de tipo Classes de Schatten, em especial, as de tipo $\mathcal{S}_2$. O capítulo está dividido em três partes. Na primeira seção, apresentamos os resultados de fatoração obtidos para aplicações multilineares e polinômios de tipo $\mathcal{S}_2$ e, ainda, uma relação interessante entre tais aplicações e as aplicações dominadas. Na segunda seção, trabalhamos com as aplicações holomorfas de tipo $\mathcal{S}_2$ e na última seção, fazemos alguns comentários sobre resultados de fatoração para operadores lineares das Classes de Schatten-von Neumann S_p, quando $p \neq 2$.

3.1 Aplicações multilineares e polinômios de tipo classes de Schatten

Para $0 < p < \infty$, a **classe de Schatten-von Neumann de ordem p** será denotada por $\mathcal{S}_p$ e a norma (p-norma no caso $0 < p < 1$) para tal espaço será indicada por $\sigma_p(.)$. Mais detalhes sobre a teoria de tais operadores lineares podem ser vistas no primeiro capítulo (1.1.14 e 1.1.15).

Como consta na lista de notações, $H_1, ..., H_n, H, G$ denotarão espaços de Hilbert sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $E_1, ..., E_n, E, F$, espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$.

Vamos apresentar agora a definição de aplicações multilineares de tipo classe de Schatten. Essas aplicações foram estudadas com mais detalhes por Braunss e Junek em [4] e também em [3] .

Definição 3.1.1 *Seja $0 < p < \infty$. Uma aplicação multilinear $T \in \mathcal{L}(H_1, ..., H_n; F)$ é do tipo $\mathcal{S}_p$ se existem espaços de Hilbert $K_1, ..., K_n$, operadores $T_i \in \mathcal{S}_p(H_i, K_i)$, $i = 1, ..., n$ e uma aplicação $S \in \mathcal{L}(K_1, ..., K_n; F)$ tais que $T = S \circ (T_1, ..., T_n)$.*

Vamos denotar o espaço de tais aplicações por $\mathcal{L}(\mathcal{S}_p)(H_1, ..., H_n; F)$. Vamos anotar ainda:

$$\| T \|_{\mathcal{S}_p} = \inf \| S \| \sigma_p(T_1)...\sigma_p(T_n)$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as possíveis fatorações da forma acima. Para $0 < p < 1$, $\| . \|_{\mathcal{S}_p}$ é uma $\dfrac{p}{n}$ norma e caso $p \geq 1$, $\| . \|_{\mathcal{S}_p}$ é uma $\frac{1}{n}$ norma para $\mathcal{L}(\mathcal{S}_p)(H_1, ..., H_n; F)$. $\mathcal{L}(\mathcal{S}_p)$ contém todas as aplicações multilineares de tipo finito (veja 1.2.3).

Apresentamos a seguir alguns resultados básicos para tais classes. Para $p \geq 2$, veremos um resultado análogo ao do caso linear (1.1.15). No caso $p < 2$, o resultado obtido é o seguinte:

Proposição 3.1.2 *Para $0 < p \leq 2$, seja $T \in \mathcal{L}(H_1, ..., H_n; F)$ tal que*
$\sum\limits_{j_1} ... \sum\limits_{j_n} \| T(h^1_{j_1}, ..., h^n_{j_n}) \|^{\frac{p}{n}} < \infty$ *para alguma base ortonormal $(h^i_{j_i})_{j_i \in J_i}$ de H_i, $i = 1, ..., n$. Então, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_p)(H_1, ..., H_n; F)$.*

Em [4], Braunss e Junek mostraram a proposição acima para o caso em que $H_1 = ... = H_n = H$ e F é um espaço de Hilbert. Pequenas adaptações na forma de escrever a demonstração do resultado de Braunss e Junek nos dão a forma (mais geral) como foi enunciada na proposição acima. Por esse fato, vamos apresentar a demonstração aqui:

Prova.

Escrevamos $A = J_1 \times ... \times J_n$ e $\alpha = (j_1, ..., j_n) \in A$. Para cada $j = 1, ..., n$, definamos:

$$S_j : H_j \to l_2^A, \qquad S_j(x_j) = \sum_{\alpha \in A} \mu_\alpha (x_j \mid h^j_{\pi_j(\alpha)}) g_\alpha$$

onde $\pi_j : A \to J_j$ é a j-ésima projeção, $j = 1, ..., n$, $\mu_\alpha = \| T(h^1_{\pi_1(\alpha)}, ..., h^n_{\pi_n(\alpha)}) \|^{\frac{1}{n}}$ e $(g_\alpha)_\alpha$ é uma base ortonormal para l_2^A.

Para cada $j = 1, ..., n$, verifiquemos que:

1. $S_j(H_j) \subset l_2^A$. De fato, para $x_j \in H_j$:

$$\left(\sum_\alpha \mid \mu_\alpha (x_j \mid h^j_{\pi_j(\alpha)}) \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{\alpha \in A} \mid \mu_\alpha \mid^2 \| x_j \|^2 \| h^j_{\pi_j(\alpha)} \|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \| x_j \| \left(\sum_{\alpha \in A} \mid \mu_\alpha \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \| x_j \| \left(\sum_{\alpha \in A} \mid \mu_\alpha \mid^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \qquad (*)$$

pois $\sum\limits_{\alpha \in A} \mid \mu_\alpha \mid^p = \sum\limits_{j_1,...,j_n} \parallel T(h^1_{j_1}, ..., h^n_{j_n}) \parallel^{\frac{p}{n}} < \infty$.

2. S_j é linear para cada $j = 1, ..., n$.

3. S_j é limitado para cada $j = 1, ..., n$; basta observarmos a desigualdade (*) em 1.

4. $S_j \in \mathcal{S}_p(H_j; l_2^A)$ para todo $j = 1, ..., n$. De fato, temos:

$$S'_j : l_2^A \to H_j \qquad S'_j(z) = \sum_{\alpha \in A} \mu_\alpha (z \mid g_\alpha) h^j_{\pi_j(\alpha)}$$

Para todo $\alpha \in A$, temos $S'_j(g_\alpha) = \mu_\alpha h^j_{\pi_j(\alpha)}$, com $\parallel S'_j(g_\alpha) \parallel = \mid \mu_\alpha \mid$ e $(\mu_\alpha)_\alpha \in l_p^A$. Assim, $S'_j \in \mathcal{S}_p(l_2^A; H_j)$ e concluímos que $S_j \in \mathcal{S}_p(H_j; l_2^A)$ (veja 1.1.15).

Finalmente, chamando $G_j = S_j(H_j)$, $j = 1, ..., n$, definamos a seguinte aplicação:

$$Q : G_1 \times ... \times G_n \to F$$
$$Q\left(\sum_{\alpha \in A} \mu_\alpha (x_1 \mid h^1_{\pi_1(\alpha)}) g_\alpha, ..., \sum_{\alpha \in A} \mu_\alpha (x_n \mid h^n_{\pi_n(\alpha)}) g_\alpha\right) = T(x_1, ..., x_n)$$

Não é difícil ver que Q é multilinear e que $T = Q \circ (S_1, ..., S_n)$. Quanto à continuidade de Q, podemos escrever (usando a desigualdade de Hölder - 1.0.1):

$$\|Q\left(\sum_{\alpha \in A} \mu_\alpha (x_1 \mid h^1_{\pi_1(\alpha)}) g_\alpha, ..., \sum_{\alpha \in A} \mu_\alpha (x_n \mid h^n_{\pi_n(\alpha)}) g_\alpha\right) \| = \parallel T(x_1, ..., x_n) \parallel$$

$$= \parallel T\left(\sum_{j_1} (x_1 \mid h^1_{j_1}) h^1_{j_1}, ..., \sum_{j_n} (x_n \mid h^n_{j_n}) h^n_{j_n}\right) \parallel$$

$$= \parallel \sum_{j_1,...,j_n} (x_1 \mid h^1_{j_1}) ... (x_n \mid h^n_{j_n}) T(h^1_{j_1}, ..., h^n_{j_n}) \parallel$$

$$\leq \sum_{j_1,...,j_n} \mid (x_1 \mid h^1_{j_1}) \mid ... \mid (x_n \mid h^n_{j_n}) \mid \parallel T(h^1_{j_1}, ..., h^n_{j_n}) \parallel$$

$$= \sum_{\alpha} \mid (x_1 \mid h_{\pi_1(\alpha)}) \mid ... \mid (x_n \mid h_{\pi_n(\alpha)}) \mid \mu_\alpha^n$$

$$= \sum_{\alpha} \mid \mu_\alpha(x_1 \mid h_{\pi_1(\alpha)}) \mid ... \mid \mu_\alpha(x_n \mid h_{\pi_n(\alpha)}) \mid$$

$$\leq \left(\sum_{\alpha} \mid \mu_\alpha(x_1 \mid h^1_{\pi_1(\alpha)}) \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}} ... \left(\sum_{\alpha} \mid \mu_\alpha(x_n \mid h^n_{\pi_n(\alpha)}) \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Tomemos $K_j = \overline{G_j}$, $j = 1, ..., n$. Podemos estender a aplicação Q ao espaço $K_1 \times ... \times K_n$ de tal forma a obtermos $\tilde{Q} \in \mathcal{L}(K_1, ..., K_n; F)$, com $T = \tilde{Q} \circ (S_1, ..., S_n)$.

Portanto, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_p)(H_1, ..., H_n; F)$. ■

A recíproca do resultado anterior não é válida em geral. O exemplo abaixo comprova essa afirmativa.

Exemplo 3.1.3 *Sejam $0 < p \leq 2$, G um espaço de Hilbert e T uma aplicação bilinear definida por:*

$$T : l_2 \times l_2 \longrightarrow G$$

$$T(x, y) = (x \mid e_1)(y \mid g)b$$

onde $b \in G$, $b \neq 0$, $g = (g_j)_j$ é tal que $g_j = \dfrac{1}{j}$, para todo $j \in \mathbb{N}$. e_1 denota o primeiro elemento da base usual de l_2. Temos que $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_p)(^2 l_2; G)$, pois T é de tipo finito.

Por outro lado:

$$\sum_k \sum_j \parallel T(e_j, e_k) \parallel^{\frac{p}{2}} = \sum_k \sum_j \parallel (e_j \mid e_1)(e_k \mid g)b \parallel^{\frac{p}{2}}$$

$$= \sum_k \mid (e_k \mid g) \mid^{\frac{p}{2}} \parallel b \parallel^{\frac{p}{2}} = \sum_k \mid \frac{1}{k} \mid^{\frac{p}{2}} \parallel b \parallel^{\frac{p}{2}}$$

onde $\sum_k \mid \dfrac{1}{k} \mid^{\frac{p}{2}}$ diverge, pois $\dfrac{p}{2} \leq 1$.

Proposição 3.1.4 *Sejam $2 \leq p < \infty$ e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_p)(H_1, ..., H_n; F)$. Então, $\sum_{j_1} ... \sum_{j_n} \parallel T(h^1_{j_1}, ..., h_{j_n}) \parallel^p < \infty$ para toda base ortonormal $(h^i_{j_i})_{j_i \in J_i}$ de H_i, $i = 1, ..., n$.*

Prova. Se $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_p)(H_1,...,H_n;F)$, então existem espaços de Hilbert $K_1,...,K_n$, operadores da forma $S_j \in \mathcal{S}_p(H_j;K_j)$, $j = 1,...,n$ e uma aplicação multilinear $Q \in \mathcal{L}(K_1,...,K_n;F)$ tais que $T = Q \circ (S_1,...,S_n)$. Se $(h^i_{j_i})_{j_i}$ é uma base ortonormal de H_i, $i = 1,...,n$, temos que $\sum\limits_{j_i} \| S_i(h^i_{j_i}) \|^p < \infty$, $i = 1,...,n$. Assim:

$$\begin{aligned}
\sum_{j_1}...\sum_{j_n} \| T(h^1_{j_1},...,h^n_{j_n}) \|^p &= \sum_{j_1}...\sum_{j_n} \| Q(S_1(h^1_{j_1}),...,S_n(h^n_{j_n})) \|^p \\
&\leq \| Q \|^p \sum_{j_1}...\sum_{j_n} \| S_1(h^1_{j_1}) \|^p ... \| S_n(h^n_{j_n}) \|^p \\
&= \| Q \|^p \sum_{j_1} \| S_1(h^1_{j_1}) \|^p ... \sum_{j_n} \| S_n(h^n_{j_n}) \|^p < \infty. \qquad (*)
\end{aligned}$$

■

Como consequência, obtemos o seguinte resultado:

Corolário 3.1.5 *$\mathcal{L}(\mathcal{S}_2)(H_1,...,H_n;G) \subset \mathcal{L}_{HS}(H_1,...,H_n;G)$. Ainda: $\| T \|_{HS} \leq \| T \|_{\mathcal{S}_2}$ para todo $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_2)(H_1,...,H_n;G)$. A inclusão é, em geral, estrita.*

Para provarmos a desigualdade apresentada no enunciado do resultado 3.1.5 acima, basta observarmos a desigualdade (*) na prova da proposição anterior (3.1.4). O seguinte exemplo comprova que a inclusão do corolário acima é estrita.

Exemplo 3.1.6 *Seja G um espaço de Hilbert, $G \neq \{0\}$. Definamos:*

$$T : l_2 \times l_2 \longrightarrow G$$

$$T(x,y) = \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} x_j y_j b$$

onde $b \in G, \| b \| = 1$ e $x = (x_j)_j, y = (y_j)_j \in l_2$. Temos que $T \in \mathcal{L}_{HS}(^2 l_2;G)$, pois:

$$\sum_j \sum_k \| T(e_j,e_k) \|^2 = \sum_k | \frac{1}{k} |^2 \| b \|^2 < \infty$$

e_j denota o j-ésimo elemento da base usual de l_2. Se T estivesse em $\mathcal{L}(\mathcal{S}_2)(^2 l_2; G)$, existiriam espaços de Hilbert K_1, K_2, operadores $S_1 \in \mathcal{S}_2(l_2; K_1)$, $S_2 \in \mathcal{S}_2(l_2; K_2)$ e $S \in \mathcal{L}(K_1, K_2; G)$ tais que $T = S \circ (S_1, S_2)$.

Sejam $(x_j^1)_j$ e $(x_j^2)_j \in l_{2,w}(l_2)$. Então:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \| T(x_j^1, x_j^2) \| = \sum_{j=1}^{\infty} \| S(S_1 x_j^1, S_2 x_j^2) \| \leq \| S \| \sum_{j=1}^{\infty} \| S_1 x_j^1 \| \| S_2 x_j^2 \|$$
$$\leq (\sum_{j=1}^{\infty} \| S_1 x_j^1 \|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{j=1}^{\infty} \| S_2 x_j^2 \|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

pois S_1 e S_2 são operadores 2-somantes (veja 1.1.18). A expressão acima nos diz que $T \in \mathcal{L}_{as}^{(1;2,2)}(^2 l_2; G)$, o que não é verdade, já que:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \| T(e_j, e_j) \| = \sum_{j=1}^{\infty} | \frac{1}{j} |$$

diverge, com $(e_j)_j \in l_{2,w}(l_2)$.

Portanto, T não pode estar em $\mathcal{L}(\mathcal{S}_2)(^2 l_2; G)$.

No caso polinomial, Braunss apresenta em [3] uma definição para polinômios do tipo $\mathcal{S}_p$:

Definição 3.1.7 *Um polinômio $P \in \mathcal{P}(^n H; F)$ é dito de tipo $\mathcal{S}_p$ se existem um espaço de Hilbert K, um polinômio $Q \in \mathcal{P}(^n K; F)$ e um operador $S \in \mathcal{S}_p(H; K)$ tais que $P = Q \circ S$.*

Vamos indicar o espaço de tais polinômios por $\mathcal{P}(\mathcal{S}_p)(^n H; F)$ e vamos escrever:

$$\| P \|_{\mathcal{S}_p} = \inf \| Q \| \sigma_p(S)^n$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as fatorações da forma acima para P.

Pode-se mostrar que $\| \, . \, \|_{\mathcal{S}_p}$ *é uma* q *-norma para o espaço (veja [3], proposição 3), onde* $q = \min\{1, p\}$ *se* $n = 1$ *e* F *é um espaço de Hilbert;* $q = \min\{1; \frac{2p}{2+p}\}$ *se* F *é um espaço de Banach não Hilbert e* $n = 1$*;* $q = \min\{\frac{2}{n}, \frac{p}{n}\}$ *se* $n \geq 2$*.*

Como no caso multilinear, temos a seguinte:

Proposição 3.1.8 $\mathcal{P}(\mathcal{S}_2)(^nH; G) \subset \mathcal{P}_{HS}(^nH; G)$*. Ainda:* $\| \, P \, \|_{HS} \leq \frac{n^n}{n!} \| \, P \, \|_{\mathcal{S}_2}$ *para todo* $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}_2)(^nH; G)$*. A inclusão é estrita em geral.*

Prova. Se $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}_2)(^nH; G)$, então $P = Q \circ S$, onde $S \in \mathcal{S}_2(H; K)$, $Q \in \mathcal{P}(^nK; G)$, K um espaço de Hilbert. Usando a fórmula de polarização (1.2.1), obtemos $\check{P} = \check{Q} \circ (S, ..., S)$, de onde concluímos que $\check{P} \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_2)(^nH; G)$. Logo, $\check{P} \in \mathcal{L}_{HS}(^nH; G)$, o que significa que $P \in \mathcal{P}_{HS}(^nH; G)$.

Quanto à norma, podemos escrever (usando 1.2.2):

$$\| \, P \, \|_{HS} = \| \, \check{P} \, \|_{HS} \leq \| \, \check{P} \, \|_{\mathcal{S}_2} \leq \| \, \check{Q} \, \| \, \sigma_2(S)^n \leq \frac{n^n}{n!} \| \, Q \, \| \, \sigma_2(S)^n.$$

Como a a decomposição tomada no início para $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}_2)(^nH; G)$ é arbitrária, segue da desigualdade acima que: $\| \, P \, \|_{HS} \leq \frac{n^n}{n!} \| \, P \, \|_{\mathcal{S}_2}$. ■

Proposição 3.1.9 *Um polinômio* $P \in \mathcal{P}(^nH; F)$ *está em* $\mathcal{P}(\mathcal{S}_p)(^nH; F)$ *se, e somente se, existe uma aplicação* $M \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_p)(^nH; F)$ *tal que* $P = \hat{M}$*.*

Antes de demonstrarmos a proposição 3.1.9, precisamos de um lema:

Lema 3.1.10 *Seja* $M \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_2)(^nH; F)$*. Então, é possível obter uma fatoração da forma:* $M = N \circ (S, ..., S)$*, onde* $S \in \mathcal{S}_2(H; K)$*,* K *é um espaço de Hilbert e* $N \in \mathcal{L}(^nK; F)$*.*

Prova. (lema 3.1.10) Vamos fazer uma demonstração para o caso $n = 2$.

Seja $M \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_2)(^2H; F)$. Por definição, existem $S_j \in \mathcal{S}_2(H; K_j)$, K_j espaço de Hilbert, $j = 1, 2$ e $R \in \mathcal{L}(K_1, K_2; F)$ tais que $M = R \circ (S_1, S_2)$.

Definamos: $K = K_1 \oplus K_2 = \{k_1 \oplus k_2; k_1 \in K_1, k_2 \in K_2\}$ e consideremos as seguintes operações em K:

Soma: $(k_1 \oplus k_2) + (g_1 \oplus g_2) = (k_1 + g_1) \oplus (k_2 + g_2)$

Mult. por escalar: $\lambda(k_1 \oplus k_2) = (\lambda k_1) \oplus (\lambda k_2)$

Produto interno: $(k_1 \oplus k_2 \mid g_1 \oplus g_2) = (k_1 \mid g_1) + (k_2 \mid g_2)$

para $k_j, g_j \in K_j$, $j = 1, 2$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Pode-se verificar que o espaço K, com as operações e o produto interno acima, é um espaço de Hilbert.

Vamos definir agora: $S : H \to K, \quad S(h) = S_1(h) \oplus S_2(h)$

$S \in \mathcal{L}(H; K)$. Ainda, se $(h_j)_j$ é uma base ortonormal em H, podemos escrever:

$$\sum_j \| Sh_j \|^2 = \sum_j \| S_1h_j \oplus S_2h_j \|^2 = \sum_j \| S_1h_j \|^2 + \| S_2h_j \|^2 = \sigma_2(S_1)^2 + \sigma_2(S_2)^2.$$

Chamando $\pi_j : K \to K_j$ a projeção $\pi_j(k_1 \oplus k_2) = k_j$, $j = 1, 2$ e $N = R \circ (\pi_1, \pi_2) \in \mathcal{L}(^2K; G)$, temos que $N \circ (S, S) = M$. ∎

Prova. (proposição 3.1.9)

($\Rightarrow$) Seja $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}_2)(^nH; F)$. Por definição, existem um espaço de Hilbert K, $S \in \mathcal{S}_2(H; K)$ e $Q \in \mathcal{P}(^nK; F)$ tais que $P = Q \circ S$. Usando a fómula de polarização (1.2.1), podemos mostrar que $\check{P} = \check{Q} \circ (S, ..., S)$. Chamando $M = \check{P}$, obtemos o resultado.

($\Leftarrow$) Seja $P \in \mathcal{P}(^nH; K)$ e suponhamos que exista $M \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_2)(^nH; F)$ tal que $P = \hat{M}$.

Vimos que existe uma decomposição para M da forma: $M = N \circ (S, ..., S)$, onde $S \in \mathcal{S}_2(H; K)$, K é um espaço de Hilbert e $N \in \mathcal{L}(^n K; F)$ (3.1.10). Assim, para $h \in H$, temos:

$$P(h) = \hat{M}(h) = M(h, ..., h) = N(Sh, ..., Sh) = \hat{N}(Sh) = (\hat{N} \circ S)(h)$$

onde $S \in \mathcal{S}_2(H; K)$ e $\hat{N} \in \mathcal{P}(^n K; F)$. Logo, $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}_2)(^n H; G)$. ■

3.1.1 Resultados de Fatoração

Vimos, na parte relativa a aplicações e polinômios de Hilbert-Schmidt, que não é possível obter equivalências entre o fato de se ter aplicações multilineares ou polinômios de Hilbert-Schmidt e fatorações através de espaços $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_\infty$ e espaços de Banach de dimensão infinita como ocorre no caso linear. Porém, restringindo as classes estudadas para $\mathcal{L}(\mathcal{S}_2)$ e $\mathcal{P}(\mathcal{S}_2)$, veremos que é possível obter equivalências na primeira forma de fatoração. Isto é, as aplicações de tipo classe de Schatten $\mathcal{S}_2$ são aquelas que podem ser escritas como a composição de n operadores lineares e uma aplicação n-linear 2-dominada (no caso n-linear) e como um operador linear composto com um polinômio n-homogêneo 2-dominado.

Lema 3.1.11 *Dados $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_2)(H_1, ..., H_n; F)$ e $\epsilon > 0$, é possível obter uma fatoração para T da forma: $T = S \circ (w_1, ..., w_n)$, onde $w_j \in \mathcal{S}_2(H_j; K_j)$, K_j espaço de Hilbert, $j = 1, ..., n$ e $S \in \mathcal{L}(K_1, ..., K_n; F)$ tal que $\sigma_2(w_j) = 1$, $j = 1, ..., n$ e $\| S \| \leq (1+\epsilon) \| T \|_{\mathcal{S}_2}$.*

Prova. Pela definição de $\| T \|_{\mathcal{S}_2}$, dado $\epsilon > 0$, é possível obtermos uma fatoração $T = t \circ (u_1, ..., u_n)$ tal que $u_j \in \mathcal{S}_2(H_j; K_j)$, K_j espaço de Hilbert, $t \in \mathcal{L}(K_1, ..., K_n; F)$

com $\| t \| \prod_{j=1}^{n} \sigma_2(u_j) \leq (1+\epsilon) \| T \|_{\mathcal{S}_2}$.

Escrevamos (supondo que $u_j \neq 0$): $w_j = \dfrac{u_j}{\sigma_2(u_j)}$ e $S = (\sigma_2(u_1)...\sigma_2(u_n))\, t$.

Temos que $T = S \circ (w_1, ..., w_n)$, $\sigma_2(w_j) = 1$ e $\| S \| = \sigma_2(u_1)...\sigma_2(u_n) \| t \|$

$\leq (1+\epsilon) \| T \|_{\mathcal{S}_2}$. ■

Finalmente, temos:

Teorema 3.1.12 *Seja $T \in \mathcal{L}(H_1, ..., H_n; F)$. São equivalentes:*

(i) $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_2)(H_1, ..., H_n; F)$.

(ii) T admite uma fatoração da forma:

$$\begin{tikzcd} H_1 \times ... \times H_n \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{(S_1, ..., S_n)}"'] & F \\ X_1 \times ... \times X_n \arrow[ur, "S"'] & \end{tikzcd}$$

onde X_j é um espaço $\mathcal{L}_\infty$, $S_j \in \mathcal{L}(H_j; X_j)$, $j = 1, ..., n$ e $S \in \mathcal{L}_{d,2}(X_1, ..., X_n; F)$.

(iii) T admite uma fatoração da forma:

$$\begin{tikzcd} H_1 \times ... \times H_n \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{(R_1, ..., R_n)}"'] & F \\ Y_1 \times ... \times Y_n \arrow[ur, "R"'] & \end{tikzcd}$$

onde Y_j é um espaço $\mathcal{L}_1$, $R_j \in \mathcal{L}(H_j; Y_j)$, $j = 1, ..., n$ e $R \in \mathcal{L}_{d,2}(Y_1, ..., Y_n; F)$.

Mais ainda, $S, S_1, ..., S_n$ podem ser obtidas em (ii) de tal forma que $\| S \|_{d,2} \leq (1+\epsilon) \| T \|_{\mathcal{S}_2}$ e $\| S_j \| = 1$, para todo $j = 1, ..., n$ e $R, R_1, ..., R_n$ em (iii), tais que $\| R \|_{d,2} \leq (1+\epsilon)(\kappa_G)^n \| T \|_{\mathcal{S}_2}$, $\| R_j \| = 1$, onde $\epsilon > 0$ e κ_G é uma constante de Grothendieck (veja [7], 1.14).

Prova. (i)$\Rightarrow$ (ii) Seja $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_2)(H_1, ..., H_n; F)$. Por definição, existem espaços de Hilbert $K_1, ..., K_n$, $w_j \in \mathcal{S}_2(H_j; K_j) = \mathcal{L}_{HS}(H_j; K_j)$, $j = 1, ..., n$ e $L \in \mathcal{L}(K_1, ..., K_n; F)$ tais que $T = L \circ (w_1, ..., w_n)$. Dado $\epsilon > 0$, esta fatoração pode ser tomada de tal forma que $\| L \| \prod_{j=1}^{n} \sigma_2(w_j) \leq (1+\epsilon) \| T \|_{\mathcal{S}_2}$. Usando o teorema de fatoração de Lindenstrauss-Pelczynski (teorema 1.1.20) para os operadores $w_1, ..., w_n$, temos que $w_j = L_j \circ S_j$, onde $S_j \in \mathcal{L}(H_j; X_j)$, $\| S_j \| = 1$, $L_j \in (X_j; K_j)$, $\| L_j \|_{as,2} \leq \sigma_2(w_j)$ e X_j é um espaço $\mathcal{L}_\infty$, $j = 1, ..., n$.

Chamando $S = L \circ (L_1, ..., L_n)$, podemos escrever: $T = S \circ (S_1, ..., S_n)$. Vamos mostrar que S é 2-dominada. Assim, seja $(x_i^j)_{i=1}^m \subset X_j$, $j = 1, ..., n$. Então:

$$(\sum_{i=1}^{m} \| S(x_i^1, ..., x_i^n) \|^{\frac{2}{n}})^{\frac{n}{2}} = (\sum_{i=1}^{m} \| L(L_1 x_i^1, ..., L_n x_i^n) \|^{\frac{2}{n}})^{\frac{n}{2}}$$

$$\leq \| L \| (\sum_{i=1}^{m} (\| L_1 x_i^1 \| ... \| L_n x_i^n \|)^{\frac{2}{n}})^{\frac{n}{2}} \leq \| L \| (\sum_{i=1}^{m} \| L_1 x_i^1 \|^2)^{\frac{1}{2}} ... (\sum_{i=1}^{m} \| L_n x_i^n \|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \| L \| \| L_1 \|_{as,2} ... \| L_n \|_{as,2} \| (x_i^1)_{i=1}^m \|_{w,2} ... \| (x_i^n)_{i=1}^m \|_{w,2} \qquad (*)$$

usando a desigualdade de Hölder generalizada (1.0.1) e o fato de que $L_j \in \mathcal{L}_{as,2}(X_j; K_j)$, $j = 1, ..., n$.

Ainda, usando (*):

$$\| S \|_{d,2} \leq \| L \| \prod_{j=1}^{n} \| L_j \|_{as,2} \leq \| L \| \prod_{j=1}^{n} \sigma_2(w_j) \leq (1+\epsilon) \| T \|_{\mathcal{S}_2} .$$

(i)$\Rightarrow$(iii) Seja $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_2)(H_1, ..., H_n; F)$. Por definição, existem espaços de Hilbert $K_1, ..., K_n$, $w_j \in \mathcal{S}_2(H_j; K_j) = \mathcal{L}_{as,2}(H_j; K_j)$, $j = 1, ..., n$ e $L \in \mathcal{L}(K_1, ..., K_n; F)$ tais que $T = L \circ (w_1, ..., w_n)$. Dado $\epsilon > 0$, esta fatoração pode ser tomada de tal forma que

$\| L \| \leq (1+\epsilon) \| T \|_{\mathcal{S}_2}$ e $\sigma_2(w_j) = 1$, $j = 1, ..., n$ (usando o lema). Usando o teorema de fatoração de Lindenstrauss-Pelczynski (teorema 1.1.20) para os operadores $w_1, ..., w_n$, temos que $w_j = L_j \circ R_j$, onde Y_j é um espaço $\mathcal{L}_1$, $R_j \in \mathcal{L}(H_j; Y_j)$, $\| R_j \| \leq \sigma_2(w_j)$ e $L_j \in \mathcal{L}(Y_j; K_j)$, $\| L_j \| \leq 1$.

Chamando $R = L \circ (L_1, ..., L_n) \in \mathcal{L}(Y_1, ..., Y_n; F)$, para $(y_i^j)_{i=1}^m \subset Y_j$, $j = 1, ..., n$, podemos escrever (usando 1.0.1):

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \| R(y_i^1, ..., y_i^n) \|^{\frac{2}{n}} \right)^{\frac{n}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{m} \| L(L_1 y_i^1, ..., L_n y_i^n) \|^{\frac{2}{n}} \right)^{\frac{n}{2}}$$
$$\leq \| L \| \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\| L_1 y_i^1 \| ... \| L_n y_i^n \| \right)^{\frac{2}{n}} \right)^{\frac{n}{2}} \leq \| L \| \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \| L_j y_i^j \|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \| L \| \prod_{j=1}^{n} \| L_j \|_{as,2} \| (y_i^j)_{i=1}^m \|_{w,2}$$

Ainda (usando 1.1.12):

$$\| R \|_{d,2} \leq \| L \| \prod_{j=1}^{n} \| L_j \|_{as,2} \leq \| L \| \prod_{j=1}^{n} \| L_j \|_{as,1}$$
$$\leq \| L \| (\kappa_G)^n \prod_{j=1}^{n} (\lambda_j \lambda'_j) \| L_j \| \leq \| L \| (\kappa_G)^n \prod_{j=1}^{n} (\lambda_j \lambda'_j)$$

onde λ_j e λ'_j estão relacionados ao fato de que Y_j é um espaço $\mathcal{L}_{1,\lambda_j}$ e K_j é um espaço $\mathcal{L}_{2,\lambda'_j}$, $j = 1, ..., n$. Em particular, na fatoração tomada acima, temos que K_j é um espaço de Hilbert e, portanto, um espaço $\mathcal{L}_{2,\lambda'_j}$ para todo $\lambda'_j > 1$. O espaço Y_j provém do teorema de fatoração de Lindenstrauss-Pelczynski (1.1.20) e pode ser tomado na forma l_1^J; por 1.1.8, é um espaço $\mathcal{L}_{1,\lambda_j}$ para todo $\lambda_j > 1$. Logo:

$$\| R \|_{d,2} \leq \| L \| (\kappa_G)^n \leq (\kappa_G)^n (1+\epsilon) \| T \|_{\mathcal{S}_2}$$

(ii)$\Rightarrow$ (i) Suponhamos que T admita uma fatoração como descrita em (ii).

Usando o teorema de fatoração de Pietsch para aplicações dominadas (1.2.6), podemos fatorar a aplicação S: $S = \widetilde{S} \circ (w_1, ..., w_n)$, com $w_j \in \mathcal{L}_{as,2}(Y_j, L_2(\mu_j))$, $\mu_j \in W(B_{Y'_j})$, $j = 1, ..., n$ e $\widetilde{S} \in \mathcal{L}(L_2(\mu_1), ..., L_2(\mu_n); F)$.

Chamando $v_j = w_j \circ S_j$, $j = 1, ..., n$, temos que $v_j \in \mathcal{S}_2(H_j; L_2(\mu_j))$ e o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} H_1 \times ... \times H_n \arrow[r, "T"] \arrow[d, "(v_1, ..., v_n)"'] & F \\ L_2(\mu_1) \times ... \times L_2(\mu_n) \arrow[ur, "\tilde{S}"'] & \end{tikzcd}$$

Portanto, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_2)(H_1, ..., H_n; F)$.

(iii)$\Rightarrow$(i) Demonstração análoga à anterior.

$\blacksquare$

Uma observação deve ser feita: a hipótese de que S é uma aplicação 2 dominada em (ii) não pode ser retirada. De fato, o exemplo abaixo comprova essa afirmativa.

Exemplo 3.1.13 *Seja $S \in \mathcal{L}(^2c_o; l_2)$ definida por:* $S(x^1, x^2) = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} x_j^1 x_j^2 e_j$ *onde $x^k = (x_j^k)_{j=1}^{\infty} \in c_o$, $k = 1, 2$ e e_j denota o j-ésimo elemento da base usual de l_2.*

Vamos mostrar inicialmente que $(e_j)_j \in l_{w,2}(c_o)$. Para $x' \in c'_o = l_1$, podemos escrever:

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \mid \langle x', e_j \rangle \mid^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mid \sum_{k=1}^{\infty} x'_k \delta_{jk} \mid^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mid x'_j \mid^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mid x'_j \mid = \| x' \|_1$$

e assim: $\sup\limits_{\|x'\|\leq 1}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \mid \langle x', e_j\rangle \mid^2\right) \leq 1.$

Logo, $(e_j)_{j=1}^{\infty} \in l_{w,2}(c_o)$.

Notemos agora que: $\sum_{j=1}^{\infty} \| S(e_j, e_j) \| = \sum_{j=1}^{\infty} \| \frac{1}{j} e_j \| = \sum_{j=1}^{\infty} \mid \frac{1}{j} \mid$ *(divergente).*

Isto nos diz que $S \notin \mathcal{L}_{d,2}(^2c_o; l_2)$.

Denotando por $i : l_2 \hookrightarrow c_o$ *o operador inclusão e se* $T \in \mathcal{L}(^2l_2; l_2)$ *é tal que* $T = S \circ (i, i)$, *temos:*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \| T(e_j, e_j) \| = \sum_{j=1}^{\infty} \| S(ie_j, ie_j) \| = \sum_{j=1}^{\infty} \| S(e_j, e_j) \| = \sum_{j=1}^{\infty} \mid \frac{1}{j} \mid$$

o que nos diz que $T \notin \mathcal{L}_{d,2}(^2l_2; l_2) = \mathcal{L}(\mathcal{S}_2)(^2l_2; l_2)$ *(como veremos em 3.1.18).*

Para polinômios, temos o seguinte:

Lema 3.1.14 *Dados* $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}_2)(^nH; F)$ *e* $\epsilon > 0$, *pode-se obter uma fatoração para* P *da forma:* $P = P_1 \circ w$, *onde* $P_1 \in \mathcal{P}(^nK; F)$, $w \in \mathcal{S}_2(H; K)$, K *espaço de Hilbert, tal que* $\sigma_2(w) = 1$ *e* $\| P_1 \| \leq (1 + \epsilon) \| P \|_{\mathcal{S}_2}$.

A demonstração do lema acima será omitida, pois é análoga àquela do lema 3.1.11.

Teorema 3.1.15 *Seja* $P \in \mathcal{P}(^nH; F)$. *São equivalentes:*

(i) $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}_2)(^nH; F)$.

(ii) P *admite uma fatoração da forma:*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "P"] \arrow[d, "S"'] & F \\ X \arrow[ur, "Q"'] & \end{tikzcd}$$

onde $S \in \mathcal{L}(H;X)$, $Q \in \mathcal{P}_{d,2}({}^nX;F)$ e X é um espaço $\mathcal{L}_\infty$.

(iii) P admite uma fatoração da forma:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "P"] \arrow[d, "R"'] & F \\ Y \arrow[ur, "Q"'] & \end{tikzcd}$$

onde $S \in \mathcal{L}(H;Y)$, $Q \in \mathcal{P}_{d,2}({}^nY;F)$ e Y é um espaço $\mathcal{L}_1$.

Mais ainda, Q e S podem ser tomados em (ii) de tal forma que $\| Q \|_{d,2} \leq (1+\epsilon) \| P \|_{\mathcal{S}_2}$ e $\| S \| = 1$ e em (iii), tais que $\| Q \|_{d,2} \leq (\kappa_G)^n (1+\epsilon) \| P \|_{\mathcal{S}_2}$ e $\| R \| = 1$, onde $\epsilon > 0$ e κ_G é uma constante de Grothendieck (veja [7], 1.14).

Prova. $(i) \Rightarrow (ii)$ Seja $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}_2)({}^nH;F)$ e consideremos $P = P_1 \circ w$ uma decomposição para P, onde $w \in \mathcal{S}_2(H;K)$, $P_1 \in \mathcal{P}({}^nK;F)$ e K é um espaço de Hilbert. Dado $\epsilon > 0$, vamos tomar a decomposição tal que $\| P_1 \| \sigma_2(w)^n \leq (1+\epsilon) \| P \|_{\mathcal{S}_2}$.

Usando o teorema de fatoração de Lindenstrauss-Pelczynski (teorema 1.1.20), $w \in \mathcal{S}_2(H;K)$ pode ser fatorado da forma: $w = L \circ S$, onde $S \in \mathcal{L}(H;X)$, $\| S \| = 1$, $L \in \mathcal{L}(X;K)$, $\| L \|_{as,2} \leq \sigma_2(w)$ e X é um espaço $\mathcal{L}_\infty$. Chamando $Q = P_1 \circ L$, temos que $Q \in \mathcal{P}({}^nX;G)$.

Vamos mostrar agora que Q é 2-dominado. Seja $(x_j)_{j=1}^m \subset X$. Temos:

$$\begin{aligned} (\sum_{j=1}^m \| Qx_j \|^{\frac{2}{n}})^{\frac{n}{2}} &= (\sum_{j=1}^m \| P_1 \circ Lx_j \|^{\frac{2}{n}})^{\frac{n}{2}} \leq \| P_1 \| (\sum_{j=1}^m \| Lx_j \|^2)^{\frac{n}{2}} \\ &\leq \| P_1 \| (\| L \|_{as,2} \| (x_j)_{j=1}^m \|_{w,2})^n = \| P_1 \| \| L \|_{as,2}^n \| (x_j)_{j=1}^m \|_{w,2}^n \end{aligned}$$

Pelas desigualdades acima, podemos escrever:

$$\| Q \|_{d,2} \leq \| P_1 \| \| L \|_{as,2}^n \leq \| P_1 \| \sigma_2(w)^n \leq (1+\epsilon) \| P \|_{\mathcal{S}_2} .$$

$(i) \Rightarrow (iii)$ Demonstração análoga à $(i) \Rightarrow (ii)$ e ao do teorema 3.1.12, usando o lema 3.1.14.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Suponhamos agora que $P \in \mathcal{P}(^n H; F)$ admita uma fatoração da forma: $P = Q \circ S$, onde $S \in (H; X)$, $Q \in \mathcal{P}_{d,2}(^n X; F)$ e X é um espaço $\mathcal{L}_\infty$. Pelo teorema de fatoração de Pietsch (1.2.14), Q admite uma fatoração da forma: $Q = \tilde{Q} \circ w$, onde $w \in \mathcal{L}_{as,2}(X; L_2(\mu))$, $\mu \in W(B_{X'})$ e $\tilde{Q} \in \mathcal{P}(^n L_2(\mu); F)$.

Chamando $S_1 = w \circ S$ e observando que $S_1 \in \mathcal{L}_{as,2}(H; L_2(\mu)) = \mathcal{S}_2(H; L_2(\mu))$, temos que $P = \tilde{Q} \circ S_1$. Isto nos diz que $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}_2)(^n H; F)$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Demonstração análoga à anterior.

■

Como no caso multilinear, a condição de que Q é um polinômio 2-dominado não pode ser retirada de (ii).

De forma mais geral, ainda podemos obter o resultado:

Teorema 3.1.16 *Seja $T \in \mathcal{L}(H_1, ..., H_n; F)$. São equivalentes:*

(i) $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_2)(H_1, ..., H_n; F)$.

(ii) Para todo espaço de Banach de dimensão infinita $Z_1, ..., Z_n$, T admite uma fatoração da forma:

$$\begin{tikzcd}
H_1 \times ... \times H_n \arrow[r, "T"] \arrow[d, "(S_1, ..., S_n)"'] & F \\
Z_1 \times ... \times Z_n \arrow[ur, "S"'] &
\end{tikzcd}$$

onde $S_j \in (H_j; Z_j)$, $j = 1, ..., n$ *e* $S \in \mathcal{L}_{d,2}(Z_1, ..., Z_n; F)$.

Mais ainda, S *pode ser tomada como uma aplicação compacta em (ii).*

Prova. Sejam $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_2)(H_1, ..., H_n; F)$ e $T = L \circ (w_1, ..., w_n)$ uma fatoração para T, onde $L \in \mathcal{L}(K_1, ..., K_n; F)$, $w_j \in \mathcal{S}_2(H_j; K_j)$, com K_j espaço de Hilbert, $j = 1, ..., n$. Usando o teorema de fatoração de Diestel-Jarchow-Tonge (teorema 1.1.21) para os operadores $w_1, ..., w_n$, temos $w_j = L_j \circ S_j$, onde $S_j \in \mathcal{L}(H_j; Z_j)$ e $L_j \in \mathcal{L}_{as,2}(Z_j; K_j)$ são compactos, $j = 1, ..., n$.

Chamando $S = L \circ (L_1, ..., L_n)$, temos a fatoração desejada. Podemos mostrar que $S \in \mathcal{L}_{d,2}(Z_1, ..., Z_n; F)$ da mesma forma que fizemos na demonstração do teorema 3.1.12.

Vamos mostrar agora que S é compacta. Consideremos $(z_k^j)_k$ uma sequência em B_{Z_j}, $j = 1, ..., n$. Pela compacidade de cada L_j, podemos obter $N \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $\lim\limits_{k \in N} L_j(z_k^j) = x_j \in K_j$, $j = 1, ..., n$. Dessa forma, a sequência em F definida por:

$$g_k = S(z_k^1, ..., z_k^n) = L(L_1 z_k^1, ..., L_n z_k^n)$$

com $k \in N$, converge para $g = L(x_1, ..., x_n) \in \overline{S(B_1, ..., B_n)} \subset F$. Logo, S é compacto.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Tomando, em particular, espaços $\mathcal{L}_\infty$ de dimensão infinita em (ii), segue que $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_2)(H_1, ..., H_n; F)$ (use o teorema 3.1.12).

■

Para polinômios, o resultado correspondente é o seguinte:

Teorema 3.1.17 *Seja* $P \in \mathcal{P}(^n H; F)$. *São equivalentes:*

(i) $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}_2)(^n H; F)$.

(ii) Para todo espaço de Banach de dimensão infinita Z, P admite uma fatoração da forma:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "P"] \arrow[d, "S"'] & F \\ Z \arrow[ur, "Q"'] & \end{tikzcd}$$

onde $S \in \mathcal{L}(H; Z)$ e $Q \in \mathcal{P}_{d,2}(^n Z; F)$.

A demonstração do resultado acima é análoga à do teorema 3.1.15, usando o teorema de fatoração de Diestel-Jarchow-Tonge (teorema 1.1.21) ao invés do teorema de Lindenstrauss-Pelczynski.

É importante ressaltarmos que os resultados para polinômios 3.1.15 e 3.1.17 podem ser demonstrados usando os resultados obtidos para aplicações multilineares. Isso não foi feito na demonstração de 3.1.15 porque as relações obtidas entre as normas $\| Q \|_{d,2}$ e $\| P \|_{\mathcal{S}_2}$ na demonstração de 3.1.15 são melhores (para serem usadas nas demonstrações dos resultados de fatoração para aplicaçes holomorfas) quando comparadas com as relações que podemos obter usando o resultado multilinear. Assim, optamos por reproduzir a demonstração do caso das aplicações multilineares adaptado para o caso polinomial.

3.1.2 Relação entre as aplicações de tipo $\mathcal{S}_2$ e as aplicações dominadas

Durante o estudo das demonstrações dos resultados de fatoração para aplicações multilineares da classe $\mathcal{S}_2$, pudemos observar uma interessante relação entre aplicações desse tipo e as p-dominadas quando $1 \leq p \leq 2$.

Proposição 3.1.18 .

(i) Para todo $1 \leq p \leq 2$, *temos que* $\mathcal{L}(\mathcal{S}_2)(H_1, ..., H_n; F) = \mathcal{L}_{d,p}(H_1, ..., H_n; F)$. *Ainda:* $\| T \|_{\mathcal{S}_2} \leq \| T \|_{d,p} \leq (A_1^{-1})^n \| T \|_{\mathcal{S}_2}$, *onde* A_1 *é uma constante da desigualdade de Khinchin ([7], 1.10).*

(ii) $\mathcal{L}(\mathcal{S}_2)(H_1, ..., H_n; F) \subset \mathcal{L}_{d,q}(H_1, ..., H_n; F)$ *para todo* $q > 2$. *Ainda:* $\| T \|_{d,q} \leq (A_1^{-1})^n \| T \|_{\mathcal{S}_2}$, *onde* A_1 *é uma constante da desigualdade de Khinchin ([7], 1.10).*

Prova. (i) Seja $T \in \mathcal{L}_{d,p}(H_1, ..., H_n; F)$, $1 \leq p \leq 2$. Temos então $T \in \mathcal{L}_{d,2}(H_1, ..., H_n; F)$ e usando o teorema de fatoração de Pietsch para aplicações dominadas (teorema 1.2.6), podemos escrever: $T = S \circ (J_2^1 \circ i_{H_1}, ..., J_2^n \circ i_{H_n})$ onde $i_{H_j} \in \mathcal{L}(H_j; C(B_{H_j'}))$, $\| i_{H_j} \| = 1$, J_2^j indica a inclusão formal de $C(B_{H_j'})$ em $L_2(\mu_j)$, $\mu_j \in W(B_{H_j'})$, $j = 1, ..., n$ e $S \in \mathcal{L}(L_2(\mu_1), ..., L_2(\mu_n); F)$ é tal que $\| S \| = \| T \|_{d,2}$.

Chamando $v_j = J_2^j \circ i_{H_j} \in \mathcal{L}_{as,2}(H_j; L_2(\mu_j)) = \mathcal{S}_2(H_j; L_2(\mu_j))$, $j = 1, ..., n$, T pode ser fatorado como $T = S \circ (v_1, ..., v_n)$. Logo, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_2)(H_1, ..., H_n; F)$ e temos que $\mathcal{L}_{d,p}(H_1, ..., H_n; F) \subset \mathcal{L}(\mathcal{S}_2)(H_1, ..., H_n; F)$. Além disso:

$$\| T \|_{\mathcal{S}_2} \leq \| S \| \sigma_2(v_1)...\sigma_2(v_n) = \| T \|_{d,2} \prod_{j=1}^{n} \| v_j \|_{as,2} \leq \| T \|_{d,2} \prod_{j=1}^{n} \| J_2^j \|_{as,2}$$
$$= \| T \|_{d,2} \prod_{j=1}^{n} \mu_j(B_{H_j'})^{\frac{1}{2}} = \| T \|_{d,2} \leq \| T \|_{d,p}.$$

Por outro lado, seja $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_2)(H_1, ..., H_n; F)$. Escrevamos: $T = R \circ (S_1, ..., S_n)$, onde $S_j \in \mathcal{S}_2(H_j; K_j)$, K_j espaço de Hilbert, $j = 1, ..., n$ e $R \in \mathcal{L}(K_1, ..., K_n; F)$. Para todo

$p \geq 1$, temos que $S_j \in \mathcal{S}_2(H_j; K_j) = \mathcal{L}_{as,p}(H_j; K_j)$, com $\| S_j \|_{as,p} \leq A_1^{-1}\sigma_2(S_j)$, $j = 1, ..., n$ (teorema 1.1.18).

Pelo teorema de fatoração de Pietsch (teorema 1.1.6), cada S_j pode ser fatorado da forma: $S_j = w_j \circ v_j$, onde $v_j \in \mathcal{L}_{as,p}(H_j; X_j^p)$, $v_j = J_p \circ i_{H_j}$, $\mu_j \in W(B_{H_j'})$, X_j^p um subespaço fechado de $L_p(\mu_j)$ e $w_j \in \mathcal{L}(X_j^p; K_j)$ é tal que $\| w_j \| = \| S_j \|_{as,p}$, $j = 1, ..., n$.

Escrevamos: $\tilde{T} = R \circ (w_1, ..., w_n)$, $\tilde{T} \in \mathcal{L}(X_1^p, ..., X_n^p; F)$. Então, $T = \tilde{T} \circ (v_1, ..., v_n)$. Vamos mostrar agora que $T \in \mathcal{L}_{d,p}(H_1, ..., H_n; F)$. Para isso, seja $(x_k^j)_{k=1}^m \subset H_j$, $j = 1, ..., n$. Assim, fazendo uso da desigualdade de Hölder (1.0.1):

$$(\sum_{k=1}^{m} \| T(x_k^1, ..., x_k^n) \|^{\frac{p}{n}})^{\frac{n}{p}} = (\sum_{k=1}^{m} \| \tilde{T}(v_1 x_k^1, ..., v_n x_k^n) \|^{\frac{p}{n}})^{\frac{n}{p}}$$

$$\leq \| \tilde{T} \| (\sum_{k=1}^{m} (\| v_1 x_k^1 \| ... \| v_n x_k^n \|)^{\frac{p}{n}})^{\frac{n}{p}} \leq \| \tilde{T} \| (\sum_{k=1}^{m} \| v_1 x_k^1 \|^p)^{\frac{1}{p}} ... (\sum_{k=1}^{m} \| v_n x_k^n \|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \| \tilde{T} \| \prod_{j=1}^{n} \| v_j \|_{as,p} \| (x_k^j)_{k=1}^m \|_{w,p}.$$

Logo, $T \in \mathcal{L}_{d,p}(H_1, ..., H_n; F)$ e concluímos que $\mathcal{L}(\mathcal{S}_2)(H_1, ..., H_n; F) \subset \mathcal{L}_{d,p}(H_1, ..., H_n; F)$.

Mais ainda, se $1 \leq p \leq 2$, temos:

$$\| T \|_{d,p} \leq \| \tilde{T} \| \prod_{j=1}^{n} \| v_j \|_{as,p} = \| \tilde{T} \| \prod_{j=1}^{n} \| J_p \circ i_{H_j} \|_{as,p}$$

$$\leq \| R \circ (w_1, ..., w_n) \| \prod_{j=1}^{n} \| J_p \|_{as,p} \| i_{H_j} \| \leq \| R \| \| w_1 \| ... \| w_n \| \prod_{j=1}^{n} \mu_j (B_{H_j'})^{\frac{1}{p}}$$

$$= \| R \| \| w_1 \| ... \| w_n \| = \| R \| \prod_{j=1}^{n} \| S_j \|_{as,p} \leq \| R \| \prod_{j=1}^{n} A_1^{-1} \sigma_2(S_j)$$

Como as desigualdades acima valem para qualquer decomposição $T = R \circ (S_1, ..., S_n)$ para $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_2)(H_1, ..., H_n; G)$, segue que $\| T \|_{d,p} \leq \left(A_1^{-1}\right)^n \| T \|_{\mathcal{S}_2}$, onde A_1 é uma constante usada na desigualdade de Khinchin (veja [7], 1.10).

(ii) Demonstração análoga àquela da segunda parte de (i). ■

Para polinômios, o resultado correspondente é o seguinte:

Proposição 3.1.19 .

(i) $\mathcal{P}(\mathcal{S}_2)(^nH;F) = \mathcal{P}_{d,p}(^nH;F)$ *para todo* $p \in [1,2]$. *Ainda:*

$$\| P \|_{\mathcal{S}_2} \leq \| P \|_{d,p} \leq (A_1^{-1})^n \| P \|_{\mathcal{S}_2}.$$

(ii) $\mathcal{P}(\mathcal{S}_2)(^nH;F) \subset \mathcal{P}_{d,q}(^nH;F)$ *para todo* $q > 2$. *Ainda:*

$$\| P \|_{d,q} \leq (A_1^{-1})^n \| P \|_{\mathcal{S}_2}.$$

A_1 *é uma constante da desigualdade de Khinchin (veja [7], 1.10).*

Prova. (i) Seja $P \in \mathcal{P}_{d,p}(^nH;F)$, $1 \leq p \leq 2$. Então, $P \in \mathcal{P}_{d,2}(^nH;F)$ e usando o teorema de fatoração de Pietsch (teorema 1.2.14), P admite uma fatoração da forma: $P = Q \circ J_2 \circ i_H$, onde $i_H \in \mathcal{L}(H;C(B_{H'})), J_2 : C(B_{H'}) \to L_2(\mu)$ é a inclusão formal, $\mu \in W(B_{H'})$ e $Q \in \mathcal{P}(^nL_2(\mu);F)$, com $\| P \|_{d,2} = \| Q \|$ (veja teorema 1.2.14).

Chamando $S = J_2 \circ i_H \in \mathcal{L}(H;L_2(\mu))$, temos que $S \in \mathcal{L}_{as,2}(H;L_2(\mu)) = \mathcal{S}_2(H;L_2(\mu))$, pois J_2 é um operador 2-somante. Como $P = Q \circ S$, segue que $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}_2)(^nH;F)$ e, assim, $\mathcal{P}_{d,p}(^nH;F) \subset \mathcal{P}(\mathcal{S}_2)(^nH;F)$, $1 \leq p \leq 2$.

Além disso, para $P \in \mathcal{P}_{d,p}(^nH;F), 1 \leq p \leq 2$:

$$\| P \|_{\mathcal{S}_2} \leq \| Q \| \, \sigma_2(S)^n = \| Q \| \| J_2 \circ i_H \|_{as,2}^n \leq \| Q \| \| J_2 \|_{as,2}^n = \| Q \| = \| P \|_{d,2} \leq \| P \|_{d,p}$$

Por outro lado, seja $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}_2)(^nH;F)$ e consideremos $P = Q_1 \circ S_1$, onde $Q_1 \in \mathcal{P}(^nK;F)$, $S_1 \in \mathcal{S}_2(H;K)$, K um espaço de Hilbert. Pelo teorema de fatoração de Pietsch para operadores lineares (teorema 1.1.6), S_1 pode ser fatorado da forma: $S_1 = \tilde{S}_1 \circ J_p \circ i_H$, pois $S_1 \in \mathcal{S}_2(H;K) = \mathcal{L}_{as,p}(H;K)$. $i_H \in \mathcal{L}(H;C(B_{H'}))$ é tal que $i_H(h)(h') = \langle h', h\rangle$ para todo $h \in H$ e $h' \in B_{H'}$, $J_p : C(B_{H'}) \to L_p(\mu)$ é a inclusão formal, $\mu \in W(B_{H'})$ e $\tilde{S}_1 \in \mathcal{L}(X_p;K)$ é tal que $\| \tilde{S}_1 \| = \| S_1 \|_{as,p}$; X_p é um subespaço fechado de $L_p(\mu)$.

Escrevamos: $w = J_p \circ i_H$ e $Q = Q_1 \circ \tilde{S}_1$. Assim, $P = Q \circ w$. Vamos mostrar agora que $P \in \mathcal{P}_{d,p}(^nH;F)$. Para tal, seja $(x_j)_{j=1}^m$ uma coleção em H. Temos:

$$(\sum_{j=1}^m \| Px_j \|^{\frac{p}{n}})^{\frac{n}{p}} = (\sum_{j=1}^m \| Q \circ w(x_j) \|^{\frac{p}{n}})^{\frac{n}{p}} \leq (\sum_{j=1}^m \| Q \|^{\frac{p}{n}} \| w(x_j) \|^p)^{\frac{n}{p}}$$
$$= \| Q \| (\sum_{j=1}^m \| wx_j \|^p)^{\frac{n}{p}} \leq \| Q \| \| w \|_{as,p}^n \| (x_j)_{j=1}^m \|_{w,p}^n.$$

Logo, $P \in \mathcal{P}_{d,p}(^nH;F)$. Ainda:

$$\| P \|_{d,p} \leq \| Q \| \| w \|_{as,p}^n = \| Q \| \| J_p \circ i_H \|_{as,p}^n \leq \| Q \| \mu(B_{H'})^{\frac{n}{p}} \| i_H \|^n$$

$$= \| Q \| = \| Q_1 \circ \tilde{S}_1 \| \leq \| Q_1 \| \| \tilde{S}_1 \|^n = \| Q_1 \| \| S_1 \|_{as,p}^n$$

$$\leq (A_1^{-1})^n \| Q_1 \| \| S_1 \|_{HS}^n = (A_1^{-1})^n \| Q_1 \| \sigma_2(S_1)^n$$

onde A_1 é uma constante encontrada na desigualdade de Khinchin ([7], 1.10). Como a desigualdade acima vale para qualquer decomposição de $P = Q_1 \circ S_1$, temos:

$$\| P \|_{d,p} \leq (A_1^{-1})^n \| P \|_{\mathcal{S}_2} .$$

(ii) Demonstração análoga àquela da segunda parte de (i). ■

Novamente, vale comentarmos que a demonstração do caso polinomial poderia ter sido feita usando o caso multilinear. Optamos pela demonstração como exibida acima, pois essa nos oferece melhor relação entre as normas das aplicações envolvidas.

3.2 Aplicações holomorfas de tipo classes de Schatten

Nesta seção, a menos que seja feito algum comentário, todos os espaços usados serão complexos.

Vamos agora apresentar uma outra classe de funções holomorfas, a saber, as aplicações holomorfas do tipo $\mathcal{S}_p$, $0 < p < \infty$. Novamente, vamos usar o conceito de Nachbin (1.3.6) para definir essa classe de aplicações holomorfas. Tais aplicações já foram utilizadas por Braunss em [3].

Antes, precisamos verificar o seguinte:

Proposição 3.2.1 $(\mathcal{P}(\mathcal{S}_p)(^m H; F))_{m=0}^{\infty}$ *é um tipo* $\mathcal{S}_p$*- holomorfia (para espaços de Hilbert (domínio) e Banach (contra-domínio), no sentido de Nachbin - veja 1.3.6).*

Prova. Sejam $l \in \mathbb{N}$, $l \leq m$, $h \in H$ e $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}_p)(^m H; F)$. Vamos mostrar inicialmente que $\hat{d}^l P(h) \in \mathcal{P}(\mathcal{S}_p)(^l H; F)$. Pela definição de $\mathcal{P}(\mathcal{S}_p)(^m H; F)$, existe um espaço de Hilbert K tal que $P = Q \circ S$, onde $Q \in \mathcal{P}(^m K; F)$ e $S \in \mathcal{S}_p(H; K)$. Dado $\epsilon > 0$, podemos escolher tal decomposição de forma que $\parallel Q \parallel \sigma_p(S)^m \leq (1 + \epsilon) \parallel P \parallel_{\mathcal{S}_p}$.

Assim, $\breve{P} = \breve{Q} \circ (S, ..., S)$ (1.2.1) e, então, $\breve{P} \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_p)(^m H; F)$.

Para $l \leq m$, temos:

$$d^l P(h)(h_1, ..., h_l) = l! \binom{m}{l} \check{P}(h, ..., h, h_1, ..., h_l) = l! \binom{m}{l} \check{Q}(Sh, ..., Sh, Sh_1, ..., Sh_l).$$

Desta forma, $d^l P(h)$ admite a fatoração:

$$(l - vezes)$$

$$\begin{tikzcd} H \times ... \times H \arrow[r, "d^l P(h)"] \arrow[d, "{(S, ..., S)}"'] & F \\ K \times ... \times K \arrow[ur, "V"'] & \end{tikzcd}$$

onde $V(k_1, ..., k_l) = l! \binom{m}{l} \check{Q}(Sh, ..., Sh, k_1, ..., k_l)$ para $k_1, ..., k_l \in K$.

Logo, $\hat{d}^l P(h)$ pode ser fatorado da forma:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\hat{d}^l P(h)"] \arrow[d, "S"'] & F \\ K \arrow[ur, "\hat{V}"'] & \end{tikzcd}$$

com $S \in \mathcal{S}_p(H; K)$ e $\hat{V} \in \mathcal{P}(^l K; F)$. Isto nos diz que $\hat{d}^l P(h) \in \mathcal{P}(\mathcal{S}_p)(^l H; F)$.

Ainda:

$$\| \hat{d}^l P(h) \|_{\mathcal{S}_p} \leq \| \hat{V} \| \sigma_p(S)^l = \sup_{\|k\| \leq 1} \| \hat{V}(k) \| \sigma_p(S)^l = \sup_{\|k\| \leq 1} \| V(k, ..., k) \| \sigma_p(S)^l$$

$$= \sigma_p(S)^l l! \binom{m}{l} \sup_{\|k\| \leq 1} \| \check{Q}(Sh, ..., Sh, k, ..., k) \| \leq \sigma_p(S)^l l! \binom{m}{l} \sup_{\|k\| \leq 1} \| \check{Q} \| \| Sh \|^{m-l} \| k \|^l$$

$$\leq \sigma_p(S)^l l! \binom{m}{l} \| \check{Q} \| \| S \|^{m-l} \| h \|^{m-l} \leq \sigma_p(S)^l l! \binom{m}{l} \frac{m^m}{m!} \| Q \| \sigma_p(S)^{m-l} \| h \|^{m-l}$$

$$= l! \binom{m}{l} \frac{m^m}{m!} \sigma_p(S)^m \| Q \| \| h \|^{m-l} \leq l! \binom{m}{l} \frac{m^m}{m!} \| P \|_{\mathcal{S}_p} (1 + \epsilon) \| h \|^{m-l}.$$

Portanto:

$$\| \frac{1}{l!}\hat{d}^l P(h) \|_{\mathcal{S}_p} \leq \binom{m}{l} \frac{m^m}{m!} \| P \|_{\mathcal{S}_p} (1+\epsilon) \| h \|^{m-l}$$

$$\leq 2^m e \| P \|_{\mathcal{S}_p} (1+\epsilon) \| h \|^{m-l} \leq (2e)^m \| P \|_{\mathcal{S}_p} (1+\epsilon) \| h \|^{m-l} .$$

Chamando $\sigma = 2e$ e fazendo $\epsilon \to 0$, temos:

$$\| \frac{1}{l!}\hat{d}^l P(h) \|_{\mathcal{S}_p} \leq \sigma^m \| P \|_{\mathcal{S}_p} \| h \|^{m-l} .$$

para todo $l \leq m$.

Não é difícil ver que $\mathcal{P}(\mathcal{S}_p)(^m H; F)$ é um subespaço de $\mathcal{P}(^m H; F)$ e que $\mathcal{P}(\mathcal{S}_p)(^o H; F)$ coincide com F.

Portanto, $(\mathcal{P}(\mathcal{S}_p)(^m H; F))_{m=0}^{\infty}$ é um tipo $\mathcal{S}_p$- holomorfia. ■

Definição 3.2.2 *Sejam $0 < p < \infty$ e $f \in \mathcal{H}(U; F)$, onde $U \subset H$ é um aberto de H. Dizemos que f é do tipo $\mathcal{S}_p$ em $h \in U$ se ocorrem as condições:*

(1) $\hat{d}^n f(h) \in \mathcal{P}(\mathcal{S}_p)(^n H; F)$ para todo $n \in \mathbb{N}_o$.

(2) Existem reais $C \geq 0$ e $c \geq 0$ tais que $\| \frac{1}{n!}\hat{d}^n f(h) \|_{\mathcal{S}_p} \leq C c^n$ para todo $n \in \mathbb{N}_o$.

Se f é do tipo $\mathcal{S}_p$ em todo $h \in U$, vamos dizer que f é de tipo $\mathcal{S}_p$ em U. Vamos denotar a classe de tais aplicações por $\mathcal{H}(\mathcal{S}_p)(U; F)$.

Vamos ainda dizer que $f \in \mathcal{H}(H; F)$ é de tipo $\mathcal{S}_p$ limitada quando

(i) $\hat{d}^n f(0) \in \mathcal{P}(\mathcal{S}_p)(^n H; F)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

(ii) $\lim_{n\to\infty} \| \frac{1}{n!}\hat{d}^n f(0) \|_{\mathcal{S}_p}^{\frac{1}{n}} = 0$.

Um resultado importante envolvendo essas aplicações é o seguinte:

Proposição 3.2.3 *Seja K um espaço de Hilbert complexo. Se $g \in \mathcal{H}(K;F)$ e $S \in \mathcal{S}_p(H;K)$, então $g \circ S \in \mathcal{H}(\mathcal{S}_p)(H;F)$.*

A proposição abaixo demonstrada por Braunss em [3] (proposição 6) nos oferece uma fatoração para funções holomorfas de tipo $\mathcal{S}_p$ que lembra as fatorações envolvidas nas definições de aplicações multilineares e polinômios de tipo $\mathcal{S}_p$:

Proposição 3.2.4 *Sejam $0 < p < \infty$, $p_2 = \min\{p, 2\}$, $U \subset H$ um aberto e $f \in \mathcal{H}(U;F)$. Se existe $x_o \in U$ tal que f é do tipo $\mathcal{S}_p$ em x_o e*

$$\left(\| \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(x_o) \|_{\mathcal{S}_p}^{\frac{1}{n}} \right)_{n=0}^{\infty} \in l_{p_2} \qquad (*)$$

então existem $S \in \mathcal{S}_p(H;K)$, $g \in \mathcal{H}^b(K;F)$ onde K um espaço de Hilbert, tais que $f = g \circ S$ em U.

A recíproca não é verdadeira em geral: apesar de ser possível concluir que f é de tipo $\mathcal{S}_p$ (3.2.3), nem sempre é possível demonstrar que a sequência (*) está em l_{p_2}. O exemplo abaixo comprova essa afirmativa.

Exemplo 3.2.5 *Seja $(\lambda_n)_n \in c_o$, $0 \leq \lambda_n \leq 1$, $(\lambda_n)_n \notin l_p$. Definamos:*

$$f : l_2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^n (x|e_1)^n$$

onde e_1 é o primeiro elemento da base usual de l_2. f é uma aplicação inteira: chamando $P_n(x) = \lambda_n^n (x|e_1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in l_2$, temos:

$$\| P_n \| = \sup_{\|x\| \leq 1} | P_n(x) | = | \lambda_n |^n \sup_{\|x\| \leq 1} | (x|e_1)|^n \leq | \lambda_n |^n .$$

Assim, temos: $0 \leq \| P_n \|^{\frac{1}{n}} \leq | \lambda_n |$ *e como* $\lambda_n \longrightarrow 0$, *segue que* $\| P_n \|^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 0$, *ou seja, a série que representa* f *tem raio de convergência infinito.*

Seja $S \in \mathcal{L}(l_2;\mathbb{C})$, $Sx = (x|e_1)$ *para* $x \in l_2$. *Temos que* $S \in \mathcal{S}_p(l_2;\mathbb{C})$. *Agora, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *consideremos* $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $Q_n(a) = (\lambda_n a)^n$, $n \in \mathbb{N}$. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$, *temos:*

$$0 \leq \| Q_n \| = \sup_{|a| \leq 1} | Q_n a | = \sup_{|a| \leq 1} | \lambda_n a |^n = | \lambda_n |^n$$

e assim, $\lim\limits_{n \to \infty} \| Q_n \|^{\frac{1}{n}} = 0$.

Definamos: $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $g(a) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} Q_n(a)$. *Temos que* g *é inteira em* $\mathbb{C}$ *e para* $x \in l_2$, *podemos escrever:*

$$g \circ S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(Sx) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n\left((x|e_1)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^n (x|e_1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) = f(x).$$

Temos também que g *é de tipo limitado, pois* $\lim\limits_{n \to \infty} \| \frac{1}{n!} \hat{d}^n g(0) \|^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n \to \infty} \| Q_n \|^{\frac{1}{n}} = 0$ *(veja 1.3.2) .*

Apesar de f *ser de tipo* $\mathcal{S}_p$ *em* l_2 *(veja 3.2.3), não ocorre* $\left(\| P_n \|_{\mathcal{S}_p}^{\frac{1}{n}} \right)_n \in l_{p_2}$. *De fato:*

$$\begin{aligned} \| P_n \|_{\mathcal{S}_p} \geq \| P_n \| &= \sup_{\|x\| \leq 1} | P_n x | = \sup_{\|x\| \leq 1} | \lambda_n |^n | (x|e_1) |^n \\ &\geq | \lambda_n |^n | (e_1|e_1) |^n = | \lambda_n |^n. \end{aligned}$$

Para $0 < p \leq 2$, *temos que* $\sum\limits_n \| P_n \|_{\mathcal{S}_p}^{\frac{p}{n}}$ *diverge, pois* $\sum\limits_n | \lambda_n |^p$ *é divergente. Caso* $p > 2$, *como* $(\lambda_n)_n \notin l_p$, *temos que* $(\lambda_n)_n \notin l_2$. *Logo,* $\sum\limits_n \| P_n \|_{\mathcal{S}_p}^{\frac{2}{n}} = \sum\limits_n \| P_n \|_{\mathcal{S}_p}^{\frac{p_2}{n}}$ *diverge, já que* $\sum\limits_n \| P_n \|_{\mathcal{S}_p}^{\frac{2}{n}} \geq \sum\limits_n | \lambda_n |^2$.

Podemos mostrar o seguinte:

Proposição 3.2.6 *Sejam $0 < p < \infty$, K um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{H}(H;F)$. Suponha que existam $S \in \mathcal{S}_p(H;K)$ e $g \in \mathcal{H}^b(K;F)$ tais que $f = g \circ S$. Então, f é de tipo $\mathcal{S}_p$ em H e a sequência $\left(\| \frac{1}{n!}\hat{d}^n f(h_o) \|_{\mathcal{S}_p}^{\frac{1}{n}}\right)_{n=1}^{\infty}$ está em c_o.*

Prova. Temos que f é de tipo $\mathcal{S}_p$ em H e para cada $h_o \in H$, temos $\hat{d}^n f(h_o) = \hat{d}^n g(Sh_o) \circ S$ para todo $n \in \mathbb{N}_o$. Assim:

$$\| \frac{1}{n!}\hat{d}^n f(h_o) \|_{\mathcal{S}_p} \leq \| \frac{1}{n!}\hat{d}^n g(Sh_o) \| \, \sigma_p(S)^n.$$

Como g é inteira e de tipo limitado, temos que $\lim_{n\to\infty} \| \frac{1}{n!}\hat{d}^n g(x_o) \|^{\frac{1}{n}} = 0$ para todo $x_o \in K$ e usando a desiguadade acima, temos $\lim_{n\to\infty} \| \frac{1}{n!}\hat{d}^n f(h_o) \|_{\mathcal{S}_p}^{\frac{1}{n}} = 0$ para todo $h_o \in H$.

■

Como na seção anterior, vamos nos preocupar em estudar resultados para as aplicações de tipo $\mathcal{S}_2$. Antes de proseguirmos, vamos apresentar uma definição que pode ser vista em [17] (definição 3.2):

Definição 3.2.7 *Sejam $U \subset E$ um aberto de E (E e F são espaços sobre $\mathbb{C}$) e $f \in \mathcal{H}(U;F)$. f é de tipo r- dominado em $x \in U$ se ocorrem as seguintes condições:*

(1) $\hat{d}^n f(x) \in \mathcal{P}_{d,r}(^nE;F)$ para todo $n \in \mathbb{N}_o$ e

(2) Existem $C \geq 0$ e $c \geq 0$ tais que $\| \frac{1}{n!}\hat{d}^n f(x) \|_{d,r} \leq Cc^n$ para todo $n \in \mathbb{N}_o$.

Se f é de tipo r-dominado em todo $x \in U$, vamos dizer que f é de tipo r-dominado em U. O espaço de tais aplicações será denotado por $\mathcal{H}_{d,r}(U;F)$.

O resultado abaixo nos fornece uma relação entre aplicações do tipo $\mathcal{S}_2$ e do tipo dominado.

Proposição 3.2.8 *Seja $f \in \mathcal{H}(U;G)$, onde $U \subset H$ é um aberto de H. Para $1 \leq p \leq 2$, temos que f é de tipo p-dominado em $h_o \in U$ se, e somente se, f é de tipo $\mathcal{S}_2$ em $h_o \in U$.*

Prova. Basta lembrarmos que, para todo $n \in \mathbb{N}$ (veja 3.1.19):

$$\| \frac{1}{n!}\hat{d}^n f(h_o) \|_{\mathcal{S}_2} \leq \| \frac{1}{n!}\hat{d}^n f(h_o) \|_{d,p} \leq (A_1^{-1})^n \| \frac{1}{n!}\hat{d}^n f(h_o) \|_{\mathcal{S}_2}$$

■

Vamos apresentar agora alguns resultados de fatoração para aplicações holomorfas de tipo $\mathcal{S}_2$. Durante o nosso estudo, o primeiro resultado obtido nos oferece uma fatoração local para aplicações de tipo $\mathcal{S}_2$ em um certo ponto do domínio. Podemos enunciá -lo da forma:

Resultado 3.2.9 *Seja $f \in \mathcal{H}(U;F)$, onde $U \subset H$ é um aberto de H. São equivalentes:*

(i) f é de tipo $\mathcal{S}_2$ em $h_o \in U$.

(ii) f admite uma fatoração da forma:

$$\begin{tikzcd} U_o \arrow[r, "f"] \arrow[d, "S"'] & F \\ W_o \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

onde U_o é uma vizinhança de h_o em U, W_o é uma vizinhança de $x_o = Sh_o \in X$, X é um espaço $\mathcal{L}_\infty$, $S \in \mathcal{L}(H;X)$ e $g \in \mathcal{H}(W_o;F)$ é de tipo 2-dominada em x_o.

Vamos omitir a prova de 3.2.9 por usar idéias semelhantes às da demonstração do próximo resultado 3.2.10.

Obtivemos, em seguida, um resultado um pouco melhor para aplicações de tipo $\mathcal{S}_2$ (mas exigimos que a aplicação seja de tipo $\mathcal{S}_2$ em todo o espaço H). A demonstração que vamos exibir é válida somente para o caso de fatoração através de espaços $\mathcal{L}_\infty$.

Teorema 3.2.10 *Seja $f \in \mathcal{H}(H;F)$. São equivalentes:*

(i) $f \in \mathcal{H}(\mathcal{S}_2)(H;F)$.

(ii) f admite uma fatoração da forma:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f"] \arrow[d, "S"'] & F \\ U \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

onde $S \in \mathcal{L}(H;X)$, U é um aberto de um espaço $\mathcal{L}_\infty$ X contendo $S(H)$, $g \in \mathcal{H}(U;F)$, g é de tipo 2-dominada em $S(H)$.

Prova. $(i) \Rightarrow (ii)$ Para cada $h \in H$ e cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos por $P_n^{(h)} = \dfrac{1}{n!}\hat{d}^n f(h) \in \mathcal{P}(\mathcal{S}_2)(^nH;G)$. Sabemos que, para cada $h_o \in H$ fixado, existem reais $C(h_o) \geq 0$ e $c(h_o) \geq 0$ tais que $\| P_n^{(h_o)} \|_{\mathcal{S}_2} \leq C(h_o)c(h_o)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dado $\epsilon > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $h_o \in H$, existem $v_n^{(h_o)} \in \mathcal{S}_2(H;K_n)$, K_n um espaço de Hilbert e $R_n^{(h_o)} \in \mathcal{P}(^nK_n;F)$ tais que $P_n^{(h_o)} = R_n^{(h_o)} \circ v_n^{(h_o)}$, com $\| R_n^{(h_o)} \| \, \sigma_2(v_n^{(h_o)})^n \leq (1+\epsilon) \| P_n^{(h_o)} \|_{\mathcal{S}_2}$.

Agora, para o operador $v_n^{(h_o)} \in \mathcal{S}_2(H; K_n)$, podemos obter a seguinte fatoração:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "v_n^{(h_o)}"] \arrow[d, "i_H"'] & K_n \\ i_H(H) \arrow[r, hook, "J_2"] & \overline{X_2} \arrow[u, "u_n^{(h_o)}"'] \\ \bigcap & \bigcap \\ C(B_{H'}) & L_2(\mu) \end{tikzcd}$$

onde $i_H \in \mathcal{L}\left(H; C(B_{H'})\right)$, $J_2 \in \mathcal{L}\left(C(B_{H'}); L_2(\mu)\right)$ é inclusão formal e $u_n^{(h_o)} \in \mathcal{L}\left(\overline{X_2}; K_n\right)$, com $X_2 = (J_2 \circ i_H)(H)$ e $\| u_n^{(h_o)} \| = \sigma_2(v_n^{(h_o)})$ (1.1.6).

Assim, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "P_n^{(h_o)}"] \arrow[d, "i_H"'] & F \\ i_H(H) \arrow[r, hook, "J_2"] & \overline{X_2} \arrow[u, "R_n^{(h_o)} \circ u_n^{(h_o)} = Q_n^{(h_o)}"'] \\ \bigcap & \bigcap \\ C(B_{H'}) & L_2(\mu) \end{tikzcd}$$

onde $\| Q_n^{(h_o)} \| = \| R_n^{(h_o)} \circ u_n^{(h_o)} \| \leq \| R_n^{(h_o)} \| \, \| u_n^{(h_o)} \|^n = \| R_n^{(h_o)} \| \, \sigma_2(v_n^{(h_o)})^n$

$\leq (1+\epsilon) \| P_n^{(h_o)} \|_{\mathcal{S}_2}$.

Logo:

$$\limsup_{n\to\infty} \| Q_n^{(h_o)} \|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n\to\infty} (1+\epsilon)^{\frac{1}{n}} \| P_n^{(h_o)} \|_{\mathcal{S}_2}^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n\to\infty} (1+\epsilon)^{\frac{1}{n}} C(h_o)^{\frac{1}{n}} c(h_o) = c(h_o).$$

Isso nos diz que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{(h_o)}(x - (J_2 \circ i_H)(h_o))$ converge uniformemente em uma vizinhança $V^{(h_o)}$ de $x_o = (J_2 \circ i_H)(h_o)$ em $X_2 = (J_2 \circ i_H)(H)$.

Definindo: $g^{(h_o)}(x) = f(h_o) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{(h_o)}(x - x_o)$ para $x = (J_2 \circ i_H)(h) \in X_2$, temos que $g^{(h_o)}$ é uma aplicação holomorfa em $V^{(h_o)} \subset X_2$.

Temos que $X_2 = \bigcup_{h \in H} V^{(h)}$. Definamos:

$$g_1 : X_2 \to F \qquad g_1(x) = g^{(h_o)}(x)$$

se $x \in V^{(h_o)}$. Vamos mostrar que g_1 é holomorfa em X_2.

Inicialmente observermos que, se $x = (J_2 \circ i_H)(h) \in V^{(h_1)} \bigcap V^{(h_2)}$, então $g^{(h_1)}(x) = g^{(h_2)}(x)$, pois:

$$g^{(h_1)}(x) = f(h_1) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{(h_1)}(x - (J_2 \circ i_H)(h_1))$$

$$= f(h_1) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{(h_1)} \circ J_2 \circ i_H(h - h_1) = f(h_1) + \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(h_1)}(h - h_1) = f(h).$$

Analogamente: $\qquad g^{(h_2)}(x) = f(h_2) + \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(h_2)}(h - h_2) = f(h).$

Dado $x \in X_2$, existe $h_o \in H$ tal que $x \in V^{(h_o)}$. Nesse caso, $g_1(x) = g^{(h_o)}(x)$ e como $g^{(h_o)}$ é holomorfa em $V^{(h_o)}$, existem $\rho(x) > 0$ e uma coleção de polinômios contínuos $\{S_n\}$, S_n n-homogêneo, tais que $g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(z - x)$ uniformemente quando $z \in B_{\rho(x)}(x) \subset V^{(h_o)}$.

Logo: $\qquad g_1(z) = g^{(h_o)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(z - x)$

uniformemente para $z \in B_{\rho(x)}(x) \subset V^{(h_o)}$ e concluímos que g_1 é holomorfa em $x \in X_2$.

Podemos assim estender a aplicação g_1 a um aberto V do completamento $\hat{X}_2$ de X_2, digamos, $\hat{g}_1 : V \to F$ holomorfa, $\hat{g}_1 |_{X_2} = g_1$ (veja 1.3.5).

Vamos chamar $U = J_2^{-1}(V) \subset C(B_{H'})$ um aberto e $g : U \to F$, $g = \hat{g}_1 \circ J_2 \in \mathcal{H}(U; F)$.

Para cada $h \in H$, temos:

$$(g \circ i_H)(h) = (\hat{g}_1 \circ J_2 \circ i_H)(h) = \hat{g}_1(J_2 i_H h) = g^{(h_o)}(J_2 i_H h)$$

$$= f(h_o) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{(h_o)}(J_2 i_H h - J_2 i_H h_o) = f(h_o) + \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(h_o)}(h - h_o) = f(h).$$

para algum $h_o \in H$.

Resta mostrarmos que g é 2-dominada em $Y = i_H(H)$. Seja $y_o = i_H(h_o) \in Y \subset U$. Então:

$$\frac{1}{n!}\hat{d}^n g(y_o) = \frac{1}{n!}\hat{d}^n(\hat{g}_1 \circ J_2)(y_o) = \frac{1}{n!}\hat{d}^n \hat{g}_1(J_2 y_o) \circ J_2 = \frac{1}{n!}\hat{d}^n g_1\left((J_2 \circ i_H)(h_o)\right) \circ J_2$$

$$= \frac{1}{n!}\hat{d}^n g^{(h_o)}\left((J_2 \circ i_H)(h_o)\right) \circ J_2 = Q_n^{(h_o)} \circ J_2$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se $y_1, ..., y_m \in Y$, temos:

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \| Q_n^{(h_o)} \circ J_2(y_j) \|^{\frac{2}{n}}\right)^{\frac{n}{2}} \leq \| Q_n^{(h_o)} \| \left(\sum_{j=1}^{m} \| J_2(y_j) \|^2\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\leq \| Q_n^{(h_o)} \| \| J_2 \|_{as,2}^n \| (y_j)_{j=1}^m \|_{w,2}^n \leq \| Q_n^{(h_o)} \| \| (y_j)_{j=1}^m \|_{w,2}^n$$

e assim, $\| Q_n^{(h_o)} \circ J_2 \|_{d,2} \leq \| Q_n^{(h_o)} \|$.

Logo:

$$\| \frac{1}{n!}\hat{d}^n g(y_o) \|_{d,2} = \| Q_n^{(h_o)} \circ J_2 \|_{d,2} \leq \| Q_n^{(h_o)} \|_{d,2} \leq (1+\epsilon) \| P_n^{(h_o)} \|_{\mathcal{S}_2} \leq (1+\epsilon) C(h_o) c(h_o)^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto nos diz que $g \in \mathcal{H}_{d,2}(i_H(H); F)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Para cada $h_o \in H$ e $n \in \mathbb{N}$, podemos escrever:

$$\frac{1}{n!}\hat{d}^n f(h_o) = \frac{1}{n!}\hat{d}^n(g \circ S)(h_o) = \frac{1}{n!}\hat{d}^n g(Sh_o) \circ S.$$

Basta então observarmos que $\frac{1}{n!}\hat{d}^n f(h_o) \in \mathcal{P}_{d,2}({}^n H; F)$ (usando 1.3.9) e, assim, $\frac{1}{n!}\hat{d}^n f(h_o) \in \mathcal{P}(\mathcal{S}_2)({}^n H; F)$ (3.2.8). ∎

Nos dois resultados anteriores, não conseguimos obter fatorações semelhantes para o caso $\mathcal{L}_1$ utilizando o mesmo raciocínio. Isso se deve ao fato de que o operador linear S obtido nas fatorações é o mesmo que figura na fatoração de cada polinômio $P_n = \dfrac{1}{n!}\hat{d}^n f(h_o) \in \mathcal{P}(\mathcal{S}_2)(^n H; F)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando o teorema de Lindenstrauuss-Pelczynski 1.1.20 para obtermos uma fatoração de cada P_n através de um espaço $\mathcal{L}_1$, obtemos operadores lineares que dependem do polinômio P_n trabalhado.

A idéia foi então utilizar o teorema de Diestel-Jarchow-Tonge 1.1.21 para conseguir uma fatoração através de um espaço $\mathcal{L}_1$. Dessa forma, obtivemos o seguinte resultado:

Teorema 3.2.11 *Sejam $U \subset H$ um aberto de H, $f \in \mathcal{H}(U; F)$ e $h_o \in U$. São equivalentes:*

(i) f é de tipo $\mathcal{S}_2$ em h_o.

(ii) f admite uma fatoração da forma:

$$\begin{tikzcd} U_o \arrow[r, "f"] \arrow[d, "S"'] & F \\ X \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

onde U_o é uma vizinhança de h_o em U, X é um espaço $\mathcal{L}_1$, $S \in \mathcal{L}(H; X)$ e $g \in \mathcal{H}(X; F)$, de tipo 2-dominada em $x_o = Sh_o$.

Prova. $(i) \Rightarrow (ii)$ Chamemos $P_n = \dfrac{1}{n!}\hat{d}^n f(h_o) \in \mathcal{P}(\mathcal{S}_2)(^n H; F)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\epsilon > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, é possível encontrarmos um espaço de Hilbert K_n, $u_n \in \mathcal{S}_2(H; K_n)$, com $\sigma_2(u_n) = 1$ e $R_n \in \mathcal{P}(^n K_n; F)$, com $\| R_n \| \leq (1 + \epsilon) \| P_n \|_{\mathcal{S}_2}$ (lema 3.1.14) tais que $P_n = R_n \circ u_n$. (1)

Para cada $n \in \mathbb{N}$, vamos tomar uma representação para u_n da forma:

$$u_n = \sum_{s=1}^{\infty} \tau_s^{(n)}(. \mid h_s^{(n)}) k_s^{(n)}$$

onde $(\tau_s^{(n)})_s \in l_2$, $\parallel (\tau_s^{(n)})_s \parallel_2 = \sigma_2(u_n) = 1$, $(h_s^{(n)})_s$ é uma coleção ortonormal em H e $(k_s^{(n)})_s$ é uma coleção ortonormal em K_n.

Pela demonstração do lema 1.1.22 (demonstração no capítulo 2, antes de 2.1.16), para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $s \in \mathbb{N}$, fixado $\delta > 0$, podemos escrever: $\tau_s^{(n)} = \alpha_s^{(n)} \sigma_s^{(n)} \beta_s^{(n)}$
onde $(\sigma_s^{(n)})_s \in l_2$, $\parallel (\sigma_s^{(n)})_s \parallel_2 \leq A$ ($A > 0$ independe de $n \in \mathbb{N}$) e $\alpha_s^{(n)} = \beta_s^{(n)} = \sqrt{\gamma_s^{(n)}}$, com $(\alpha_s^{(n)})_s$ e $(\beta_s^{(n)})_s$ pertencentes a c_o e $\parallel (\alpha_s^{(n)})_s \parallel_\infty = \parallel (\beta_s^{(n)})_s \parallel_\infty = \dfrac{1}{n^{4+\frac{\delta}{2}}}$.

Usando o teorema de fatoração de Diestel-Jarchow-Tonge, para cada $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathcal{S}_2(H; K_n)$ admite uma fatoração da forma:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "u_n"] \arrow[d, "w_n"'] & K_n \\ l_1 \arrow[ur, "v_n"'] & \end{tikzcd}$$

onde $w_n \in \mathcal{L}(H; l_1)$, $v_n \in \mathcal{L}_{as,2}(l_1; K_n)$, com $\parallel w_n \parallel \leq 8 \parallel (\beta_s^{(n)})_s \parallel_\infty^{\frac{1}{4}}$ e $\parallel v_n \parallel_{as,2} \leq$ $48 \parallel (\alpha_s^{(n)})_s \parallel_\infty \parallel (\beta_s^{(n)})_s \parallel_\infty^{\frac{1}{4}} \parallel (\sigma_s^{(n)})_s \parallel_2$.

Ou seja:

$$\parallel w_n \parallel \leq 8 \frac{1}{n^{1+\frac{\delta}{8}}} \qquad \parallel v_n \parallel_{as,2} \leq 48A \frac{1}{n^{5+\frac{5\delta}{8}}} \qquad (2)$$

Vamos denotar $X = l_1(l_1)$. Pelo lema 2.2.17, temos que X é um espaço $\mathcal{L}_1$. Vamos denotar ainda por $i_n : l_1 \to X$ a inclusão na n-ésima coordenada e $\pi_n : X \to l_1$ a projeção da n-ésima coordenada.

Definamos $S : H \to X,\ S(h) = \sum_{n=1}^{\infty} i_n \circ w_n(h)$. Temos que $S \in \mathcal{L}(H;X)$, pois $i_n \circ w_n \in \mathcal{L}(H;X)$ e $\| i_n \circ w_n \| \leq \| w_n \| \leq 8\frac{1}{n^{1+\frac{\delta}{8}}}$, onde a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{\delta}{8}}}$ é convergente.

Vamos chamar agora $Q_n = R_n \circ v_n \in \mathcal{P}(^n l_1; F)$. Temos que $Q_n \in \mathcal{P}_{d,2}(^n l_1; F)$. De fato, se $z_1, ..., z_m \in l_1$ e usando que v_n é 2-somante, podemos escrever:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \| Q_n z_i \|^{\frac{2}{n}}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{m} \| R_n \circ v_n(z_i) \|^{\frac{2}{n}}\right)^{\frac{n}{2}} \leq \| R_n \| \left(\sum_{i=1}^{m} \| v_n(z_i) \|^2\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\leq \| R_n \| \| v_n \|_{as,2}^n \| (z_i)_{i=1}^m \|_{w,2}^n.$$

Da desigualdade acima, segue que $\| Q_n \|_{d,2} \leq \| R_n \| \| v_n \|_{as,2}^n$. Pela escolha de R_n e v_n (veja (1) e (2)), temos:

$$\| Q_n \| \leq \| Q_n \|_{d,2} \leq \left(\frac{48A}{n^{5+\frac{5\delta}{8}}}\right)^n (1+\epsilon) \| P_n \|_{\mathcal{S}_2}. \qquad (3)$$

Assim:

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} \| Q_n \circ \pi_n \|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{48A}{n^{5+\frac{5\delta}{8}}} (1+\epsilon)^{\frac{1}{n}} \| P_n \|_{\mathcal{S}_2}^{\frac{1}{n}} = 0$$

Podemos então definir uma aplicação holomorfa em X da forma ($x_o = Sh_o$):

$$g : X \to F \qquad g(x) = f(h_o) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \circ \pi_n(x - x_o).$$

Seja U_o a vizinhança de h_o em U para qual ocorre $f(h) = f(h_o) + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(h - h_o)$ para todo $h \in U_o$. Podemos escrever, se $h \in U_o$:

$$(g \circ S)(h) = f(h_o) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \circ \pi_n(Sx - Sx_o) = f(h_o) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \circ \pi_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} i_k \circ w_k(h - h_o)\right)$$

$$= f(h_o) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \circ w_n(h - h_o) = f(h_o) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n \circ v_n \circ w_n(h - h_o)$$

$$= f(h_o) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n \circ u_n(h - h_o) = f(h_o) + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(h - h_o) = f(h). \qquad (4)$$

Assim, f admite uma fatoração da forma:

$$\begin{tikzcd} U_o \arrow[r, "f"] \arrow[d, "S"'] & F \\ X \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Resta mostrarmos que g é 2-dominada em $x_o = Sh_o \in X$.

Já sabemos que $\frac{1}{n!}\hat{d}^n g(x_o) = Q_n \circ \pi_n \in \mathcal{P}_{d,2}(X; F)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $C \geq 0$ e $c \geq 0$ são tais que $\| P_n \|_{\mathcal{S}_2} \leq Cc^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos escrever (usando (3)):

$$\| \frac{1}{n!}\hat{d}^n g(x_o) \|_{d,2} = \| Q_n \circ \pi_n \|_{d,2} \leq \| Q_n \|_{d,2}$$

$$\leq \left(\frac{48A}{n^{5+\frac{5\delta}{8}}} \right)^n (1+\epsilon) \| P_n \|_{\mathcal{S}_2} \leq C(1+\epsilon)(48Ac)^n$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Mesma demonstração do resultado anterior. ■

O mesmo processo pode ser utilizado para o caso de fatoração através de um espaço $\mathcal{L}_\infty$. Na demonstração, basta usar o espaço l_∞ no lugar do espaço l_1 e considerar o espaço X como sendo $l_\infty(l_\infty)$. É importante ressaltarmos que a demonstração do resultado 3.2.10 acima foi exibida porque pode ser útil para futuras referências.

Observação 3.2.12 .

(1) Se U é um conjunto h_o equilibrado no teorema 3.2.11, isto é, $h_o + \xi(h - h_o) \in U$, para todo $\xi \in \{t \in \mathbb{C}; | t | \leq 1\}$, então $f(h) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{d}^n f(h_o)(h - h_o)$ para todo $h \in U$ (veja [22], 8.4). Analisando a demonstração de $(i) \Rightarrow (ii)$ em 3.2.11 (veja (4)), temos $f = g \circ S$ em

U.

(2) Se $f \in \mathcal{H}(H;F)$ é uma aplicação de tipo $\mathcal{S}_2$ limitada, isto é, $\lim_{n\to\infty} \| \frac{1}{n!}\hat{d}^n f(0) \|_{\mathcal{S}_2}^{\frac{1}{n}} = 0$, *então temos $f = g \circ S$ em H.*

Fica em aberto decidir se, dado um espaço de Banach de dimensão infinita Z, é possível fatorar uma aplicação holomorfa de tipo $\mathcal{S}_2$ através de um aberto desse espaço.

3.3 Comentários sobre fatoração para as classes de Schatten $\mathcal{S}_p$, $p \neq 2$

No estudo dos resultados de fatoração para operadores lineares observamos que, em termos de fatoração, o caso mais explorado é o da classe de ordem 2 (ou seja, os operadores de Hilbert-Schmidt).

Assim, resolvemos investigar o que seria possível fazer para as outras classes. Como veremos a seguir, em alguns casos, as condições impostas aos operadores envolvidos nas fatorações são bastante restritivas.

Vamos iniciar com o caso $0 < p < 2$:

Proposição 3.3.1 *Seja $T \in \mathcal{S}_p(H;G)$. São equivalentes:*

(i) $T \in \mathcal{S}_p(H;G)$.

(ii) T admite uma fatoração da forma:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "T"] \arrow[d, "R"'] & G \\ X \arrow[ur, "S"'] & \end{tikzcd}$$

onde X é um espaço $\mathcal{L}_\infty$, $S \in \mathcal{L}(X;G)$ é um operador que admite a seguinte representação: $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \phi_n(x) g_n$, com $(g_n)_n \in l_{2,w}(G)$, $(\phi_n)_n$ uma sequência limitada em X' tal que $(\phi_n \circ R)_n \in l_{2,w}(H')$, $R \in \mathcal{L}(H;X)$ e $(\tau_n)_n \in l_p$.

(iii) T admite uma fatoração da forma:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "T"] \arrow[d, "R"'] & G \\ Y \arrow[ur, "S"'] & \end{tikzcd}$$

onde Y é um espaço $\mathcal{L}_1$, $S \in \mathcal{L}(Y;G)$, $R \in \mathcal{L}(H;Y)$ é tal que $(\| Rh_j \|)_{j\in J} \in l_p^J$ para alguma base ortonormal $(h_j)_j$ de H.

Ainda, R e S podem ser escolhidos em (ii) de tal forma que $\| R \| \leq 1$ e $\| S \| \leq \sigma_p(T)$ e, em (iii), R e S podem ser escolhidos de tal forma $\| R \| \leq \sigma_p(T)$ e $\| S \| \leq 1$.

Prova. $(i) \Rightarrow (ii)$ Seja $T \in \mathcal{S}_p(H;G)$, $Th = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n (h \mid h_n) g_n$, onde $(\tau_n)_n \in l_p$, $(h_n)_n$ é uma sequência ortonormal em H e $(g_n)_n$ é uma sequência ortonormal em G.

Completando a sequência $(h_n)_n$, obtemos uma base ortonormal $(z_j)_{j\in J}$ para H. Para cada $h = \sum_{j\in J} (h \mid z_j) z_j \in H$, definamos: $R : h \to c_o, \qquad R(h) = ((h \mid h_n))_{n=1}^{\infty}$.

Temos que $R(H) \subset c_o$, R é linear e

$$\| Rh \|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} | (h \mid h_n) | \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} | (h \mid h_k) |^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \| h \| .$$

Ou seja, R é limitado.

Definamos agora: $S : c_o \to G$, $\qquad Sx = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \phi_n(x) g_n$

onde $x = (x_n)_n \in c_o$ e $\phi_n : c_o \to \mathbb{K}$, $\phi_n(x) = x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Temos que $S(c_o) \subset G$, pois $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n^2 x_n^2 \leq \| (x_n)_{n=1}^{\infty} \|_{\infty}^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} | \tau_n |^p \right)^{\frac{2}{p}} < \infty$, S é linear e limitado, com $\| S \| \leq \| (\tau_n)_{n=1}^{\infty} \|_p$.

Resta mostrarmos que $(\phi_n \circ R)_n \in l_{2,w}(H')$. Como H é reflexivo, podemos escrever:

$$\sup_{\|h\| \leq 1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} | \phi_n \circ R(h) |^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sup_{\|h\| \leq 1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} | (h \mid h_n) |^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 1$$

Podemos escrever ainda:

$$(S \circ R)(h) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \phi_n(Rh) g_n = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n (h \mid h_n) g_n = Th.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Consideremos $T = S \circ R$, onde $Sx = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \phi_n(x) g_n$, com $(\tau_n)_n \in l_p$, $(\phi_n)_n \in X'$ tal que $(\phi_n \circ R)_n \in l_{2,w}(H')$ e $(g_n)_n \in l_{2,w}(G)$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $(\phi_n \circ R)_n \subset B_{H'}$ e $(g_n)_n \subset B_G$.

Sejam $v \in \mathcal{L}(l_2; H)$ e $w \in \mathcal{L}(l_2; G)$. Vamos mostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} | (T(ve_n) \mid we_n) |^p < \infty$ (veja 1.1.15, item 6).

Observemos inicialmente as seguintes desigualdades $(1 = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'})$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} | \tau_k || \phi_k(Rve_n) |^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | \tau_k || \phi_k(Rve_n) |^{\frac{2}{p}} | \phi_k(Rve_n) |^{\frac{2}{p'}}$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} | \tau_k |^p | \phi_k(Rve_n) |^2 \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} | \phi_k(Rve_n) |^2 \right)^{\frac{1}{p'}} \qquad (1)$$

(usando a desigualdade de Hölder: 1.0.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mid \phi_k(Rve_n) \mid^2 = \| v \|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \mid \phi_k \circ R(\frac{v}{\| v \|} e_n) \mid^2 \leq \| v \|^2 \sup_{\|h\| \leq 1} \sum_{k=1}^{\infty} \mid \phi_k \circ R(h) \mid^2$$

$$\leq \| v \|^2 \| (\phi_k \circ R)_k \|_{w,2}^2 := A \qquad (2)$$

Analogamente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mid \tau_k \mid\mid (g_k \mid we_n) \mid^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mid \tau_k \mid\mid (g_k \mid we_n) \mid^{\frac{2}{p}} \mid (g_k \mid we_n) \mid^{\frac{2}{p'}}$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mid \tau_k \mid^p \mid (g_k \mid we_n) \mid^2 \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mid (g_k \mid we_n) \mid^2 \right)^{\frac{1}{p'}} \qquad (3)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mid (g_k \mid we_n) \mid^2 = \| w \|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \mid (g_k \mid \frac{w}{\| w \|} e_n) \mid^2$$

$$\leq \| w \|^2 \sup_{\|g\| \leq 1} \sum_{k=1}^{\infty} \mid (g_k \mid g) \mid^2 \leq \| w \|^2 \| (g_k)_{k=1}^{\infty} \|_{w,2}^2 := B \qquad (4)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos ainda:

$$\mid (Tve_n \mid we_n) \mid = \mid \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k \phi_k \circ R(ve_n)(g_k \mid we_n) \mid$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mid \tau_k \mid^{\frac{1}{2}} \mid \phi_k \circ R(ve_n) \mid\mid \tau_k \mid^{\frac{1}{2}} \mid (g_k \mid we_n) \mid$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mid \tau_k \mid\mid \phi_k \circ R(ve_n) \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mid \tau_k \mid\mid (g_k \mid we_n) \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (5)$$

Assim (usando (5), (1) e (2), (3) e (4)):

$$\sum_n \mid (Tve_n \mid we_n) \mid^p \leq \sum_n \left(\sum_k \mid \tau_k \mid\mid \phi_k \circ R(ve_n) \mid^2 \right)^{\frac{p}{2}} \left(\sum_k \mid \tau_k \mid\mid (g_k \mid we_n) \mid^2 \right)^{\frac{p}{2}}$$

$$\leq \sum_n \left(\sum_k \mid \tau_k \mid^p \mid \phi_k \circ R(ve_n) \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}} A^{\frac{p}{2p'}} \left(\sum_k \mid \tau_k \mid\mid (g_k \mid we_n) \mid^2 \right)^{\frac{p}{2}}$$

$$\leq A^{\frac{p}{2p'}} B^{\frac{p}{2p'}} \sum_n \left(\sum_k \mid \tau_k \mid^p \mid \phi_k \circ R(ve_n) \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_k \mid \tau_k \mid^p \mid (g_k \mid we_n) \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (AB)^{\frac{p}{2p'}} \sum_n \left(\sum_k \mid \tau_k \mid^p \mid \phi_k \circ R(ve_n) \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_k \mid \tau_k \mid^p \mid (g_k \mid we_n) \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq (AB)^{\frac{p}{2p'}} \left(\sum_{n,k} \mid \tau_k \mid^p \mid \phi_k \circ R(ve_n) \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n,k} \mid \tau_k \mid^p \mid (g_k \mid we_n) \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (AB)^{\frac{p}{2p'}} \left(\sum_k \mid \tau_k \mid^p \sum_n \mid \phi_k \circ R(ve_n) \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_k \mid \tau_k \mid^p \sum_n \mid (g_k \mid we_n) \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (AB)^{\frac{p}{2p'}} \left(\sum_k \mid \tau_k \mid^p \| (ve_n)_{n=1}^{\infty} \|_{w,2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_k \mid \tau_k \mid^p \| (we_n)_{n=1}^{\infty} \|_{w,2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (AB)^{\frac{p}{2p'}} \| (ve_n)_{n=1}^{\infty} \|_{w,2} \| (we_n)_{n=1}^{\infty} \|_{w,2} \sum_k \mid \tau_k \mid^p < \infty.$$

Logo, $T \in \mathcal{S}_p(H;G)$.

$(i) \Rightarrow (iii)$ Seja $T \in \mathcal{S}_p(H;G)$, $Th = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n (h \mid h_n) g_n$, onde $(\tau_n)_n \in l_p$, $(h_n)_n$ é uma coleção ortonormal em H e $(g_n)_n$, uma coleção ortonormal em G.

Completando $(h_n)_n$ até obtermos uma base ortonormal $(z_j)_{j \in J}$ para H, definamos:

$$R : H \to l_1^J \qquad Rh = \left((h \mid z_j) \| Tz_j \| \right)_{j \in J}.$$

Temos que $R(H) \subset l_1^J$:

$$\sum_{j \in J} \mid (h \mid z_j) \mid \| Tz_j \| \leq \left(\sum_{j \in J} \| Tz_j \|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \| h \| \left(\sum_{j \in J} \| Tz_j \|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

pois $T \in \mathcal{S}_p(H;G) \subset \mathcal{S}_2(H;G) = \mathcal{L}_{HS}(H;G)$. R é linear e limitado, com $\| R \| \leq \| T \|_{HS}$ $= \sigma_2(T) \leq \sigma_p(T)$. Ainda: $\sum_{j\in J} \| Rz_j \|^p = \sum_n \| Th_n \|^p = \sum_n | \tau_n |^p < \infty$.

Definamos agora: $S : l_1^J \to G, \qquad S\left((\xi_j)_j\right) = \sum_{j\in J} \xi_j \frac{Tz_j}{\| Tz_j \|}$

com a convenção de que $\frac{Tz_j}{\| Tz_j \|} = 0$ se $Tz_j = 0$. Pode-se verificar que $S(l_1^J) \subset G$ e S é linear. Ainda:

$$\| S(\xi_j)_j \| = \| \sum_{j\in J} \xi_j \frac{Tz_j}{\| Tz_j \|} \| \leq \sum_{j\in J} | \xi_j | \| (\xi_j)_j \|_1$$

e $T = S \circ R$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Suponhamos que $T = S \circ R$, onde R e S satisfazem as condições apresentadas em (iii). Se $(h_j)_j$ é a base ortonormal de H citada em (iii), podemos escrever:

$$\sum_{j\in J} \| Th_j \|^p = \sum_{j\in J} \| (S \circ R)(h_j) \|^p \leq \| S \|^p \sum_{j\in J} \| Rh_j \|^p < \infty.$$

Logo, $T \in \mathcal{S}_p(H;G)$ (veja 1.1.15, item 4). ∎

Podemos demonstrar também o seguinte resultado:

Proposição 3.3.2 *Seja $T \in \mathcal{L}(H;G)$. São equivalentes:*

(i) $T \in \mathcal{S}_p(H;G)$.

(ii) Para todo espaço de Banach de dimensão infinita Z, T admite uma fatoração da forma:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "T"] \arrow[d, "R"'] & G \\ Z \arrow[ur, "S"'] & \end{tikzcd}$$

onde $S \in \mathcal{L}(Z;G)$ *é um operador que admite a seguinte representação:* $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \phi_n(x) g_n$, *com* $(g_n)_n \in l_{2,w}(G)$, $(\phi_n)_n$ *uma sequência limitada em* Z' *tal que* $(\phi_n \circ R)_n \in l_{2,w}(H')$, $R \in \mathcal{L}(H;Z)$ *e* $(\sigma_n)_n \in l_p$.

A demontração do resultado 3.3.2 acima é análoga à demonstração do teorema de Diestel-Jarchow-Tonge (1.1.21), mas usando o seguinte lema:

Lema 3.3.3 *Seja* $(\tau_n)_n \in l_p$, $0 < p \leq 2$. *Então, existem sequências* $(\sigma_n)_n \in l_p$ *e* $(\gamma_n)_n \in c_o$ *tais que* $\gamma_n \sigma_n = \tau_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

O lema acima (3.3.3) já foi enunciado para o caso particular $p = 2$ (veja 1.1.22) e demonstrado de forma bem particular no capítulo 2 (antes de 2.1.16). Não vamos demonstrá-lo aqui, já que aquela demontração pode ser adaptada para este caso (considerar ${\tau_n}^p$ no lugar de ${\tau_n}^2$ e provar que $(\sigma_n)_n \in l_p$).

Apesar da demonstração do teorema de Diestel-Jarchow-Tonge já ter sido comentada (final da seção 1.1), vamos reproduzi-la novamente para demonstrar 3.3.2. No primeiro capítulo, estávamos mais interessados em obter informações sobre as normas dos operadores envolvidos. Não vamos nos preocupar com esse fato agora.

Vamos precisar também da seguinte proposição (já citada no capítulo 1 - veja [7], 19.20):

Proposição 3.3.4 *(Bellenot) Seja* Z *um espaço de Banach de dimensão infinita. Então, todo operador compacto* $T \in \mathcal{L}(H;G)$ *se fatora de forma compacta através de um subespaço*

Z_o de Z com uma base. Isto é, existem $T_1 \in \mathcal{L}(H; Z_o)$ e $T_2 \in \mathcal{L}(Z_o; G)$ compactos tais que $T = T_2 \circ T_1$.

Prova. (da proposição 3.3.2) $(i) \Rightarrow (ii)$ Seja $T \in \mathcal{S}_p(H; G)$, $Th = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n (h \mid h_n) g_n$, onde $(\tau_n)_n \in l_p$, $(h_n)_n$ é uma coleção ortonormal em H e $(g_n)_n$, uma coleção ortonormal em G.

Pelo lema, existem sequências $(\alpha_n)_n$, $(\beta_n)_n$ em c_o e $(\sigma_n)_n \in l_p$ tais que $\tau_n = \alpha_n \sigma_n \beta_n$, para todo $N \in \mathbb{N}$.

Escrevamos: $a : l_2 \to G \qquad a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x \mid e_n) g_n$

$$b : H \to l_2 \qquad b(h) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (h \mid h_n) e_n$$

e $D_\sigma : l_2 \to l_2$ a restrição do operador diagonal $D : l_\infty \to l_2$ induzido por $\sigma = (\sigma_n)_n \in l_p \subset l_2$ (veja exemplo 1.1.4, (c)). Aqui, $(e_n)_n$ indica a base usual de l_2.

Temos que $T = a \circ D_\sigma \circ b$.

Como b é um operador compacto, pela proposição 3.3.4, b fatora-se de forma compacta através de um subespaço Z_o de Z, digamos, $b = b_1 \circ b_2$, onde $b_1 \in \mathcal{L}(Z_o; l_2)$ e $b_2 \in \mathcal{L}(H; Z_o)$, ambos compactos. Indicando por $i : l_2 \hookrightarrow l_\infty$ a inclusão canônica, podemos estender o operador $ib_1 : Z_o \to l_\infty$ a um operador linear contínuo $\tilde{b_1} : Z \to l_\infty$ (l_∞ é injetivo; 1.1.9).

Escrevamos: $S = a \circ D \circ \tilde{b_1}$. Temos que S é compacto e 2-somante (pois $\tilde{b_1}$ é compacto e D é 2-somante). Considerando b_2 como um operador de H em Z, digamos, $R : H \to Z$, temos que $T = S \circ R$.

Para todo $z \in Z$:

$$Sz = (aD\tilde{b_1})(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n (D\tilde{b_1}(z) \mid e_n) g_n = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \left(D\left((\pi_k \tilde{b_1} z)_{k=1}^{\infty}\right) \mid e_n\right) g_n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \left((\sigma_k \pi_k \tilde{b_1} z)_{k=1}^{\infty} \mid e_n\right) g_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n \alpha_n \pi_n(\tilde{b_1} z) g_n \qquad (*)$$

onde $\pi_n : l_\infty \to \mathbb{K}$ indica a projeção da n-ésima coordenada, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos: $\phi_n : Z \to \mathbb{K}, \qquad \phi_n(z) = \pi_n \circ \tilde{b_1}(z)$.

Assim, podemos reescrever (*) da forma: $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n \alpha_n \phi_n(z) g_n$,

com $(\sigma_n \alpha_n)_n \in l_p$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\mid \phi_n(z) \mid = \mid \pi_n \circ \tilde{b_1}(z) \mid \leq \| \pi_n \| \| \tilde{b_1} \| \| z \| \leq \| \tilde{b_1} \| \| z \|$$

de onde segue que $\| \phi_n \| \leq \| \tilde{b_1} \|$.

Vamos mostrar agora que $(\phi_n \circ R)_n \in l_{2,w}(H')$. Temos:

$$\sup_{\|h\| \leq 1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mid \phi_n \circ R(h) \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sup_{\|h\| \leq 1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mid \phi_n \circ b_2(h) \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \mathop{sup}_{\|h\| \leq 1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mid \pi_n \circ \tilde{b_1} \circ b_2(h) \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \mathop{sup}_{\|h\| \leq 1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mid \pi_n \circ i \circ b(h) \mid\mid^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sup_{\|h\| \leq 1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mid \pi_n \circ i \left(\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (h \mid h_k) e_k \right) \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sup_{\|h\| \leq 1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mid \beta_n (h \mid h_n) \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \| (\beta_n)_n \|_\infty \sup_{\|h\| \leq 1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mid (h \mid h_n) \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \| (\beta_n)_n \|_\infty.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Basta tomar um espaço Z que seja $\mathcal{L}_\infty$ na fatoração em (ii) e concluir usando o resultado 3.3.1.

■

Vamos agora comentar o caso em que $p > 2$. O resultado 3.3.1 não vale em geral: se $T \in \mathcal{L}(H;G)$ admite uma fatoração como em (ii) (ou (iii)), então $T \in \mathcal{L}_{HS}(H;G) = \mathcal{S}_2(H;G) \subset \mathcal{S}_p(H;G)$, ou seja, (ii) (ou (iii)) implica em (i). A recíproca (em ambos os casos) não é válida em geral: se todo operador de $\mathcal{S}_p(H;G)$ admitisse fatoração como em (ii) (ou (iii)), então teríamos $\mathcal{S}_p(H;G) \subset \mathcal{S}_2(H;G)$. Isto não é verdade: o operador $T \in \mathcal{L}(l_2;l_2)$ definido por $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n(x \mid e_n)e_n$, onde $(\tau_n)_n \in l_p \backslash l_2$ e e_n representa o n-ésimo elemento da base usual de l_2, está em $\mathcal{S}_p(l_2;l_2)$, mas não é um operador de Hilbert-Schmidt.

A mesma conclusão pode ser tirada no caso de fatoração através de espaços de Banach de dimensão infinita.

A partir desses resultados, podemos novamente estudar a fatoração de aplicações multilineares, polinomiais e holomorfas de tipo $\mathcal{S}_p$ como fizemos nas seções anteriores deste capítulo.

Referências Bibliográficas

[1] ALENCAR, R., MATOS, M. C. *Some Classes of Multilinear Mappings Between Banach Spaces.*Publ. Dep. An. Mat. Univ. Compl. Madrid, 12, 1989.

[2] BOMBAL, F., PÉREZ, D., VILLANUEVA, I. *Multilinear Extensions of the Grothendieck´s Theorem.* Preprint.

[3] BRAUNSS, H-A. *On Holomorphic Mappings of Schatten Class Type.* Arch. Math. 59, 450-456, 1992.

[4] BRAUNSS, H-A., JUNEK,H. *On Types of Polynomials and Holomorphic Functions on Banach Spaces.* Note Mat. 10, 47-58, 1990.

[5] CARANDO, D., DIMANT, V. *On Summability of Bilinear Operators.* Math. Nachr. 259 (1), 3-11, 2003.

[6] DEFANT, A., FLORET, K. *Tensor Norms and Operator Ideals.* North-Holland Mathematics Studies 176, 1993.

[7] DIESTEL,J.,JARCHOW,H., TONGE, A. *Absolutely Summing Operators.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics 43, Cambridge University Press, 1995.

[8] DIMANT, V. *Strongly p-summing Multilinear Operators*. J. Math. Anal. Appl. 278, 182-193, 2003.

[9] DWYER, T. *Partial Differential Equations in Generalized Fischer Spaces for Hilbert-Schmidt Holomorphy Type*. Tese, University of Maryland, 1971.

[10] DWYER, T. *Partial Differential Equations in Fischer-Fock Spaces for Hilbert-Schmidt Holomorphy Type*. Bull. Amer. Math. Soc. 77, 725-730, 1971.

[11] HILBERT, D. *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen I*. Nachr. Wiss. Ges. Göttingen, Math-phys. Klasse, 49-91, 1904.

[12] HILBERT, D. *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen II*. Nachr. Wiss. Ges. Göttingen, Math-phys. Klasse, 157-227, 1906.

[13] JARCHOW, H. *Locally Convex Spaces.* B.G. Teubner Stuttgart, 1981.

[14] LINDENSTRAUSS, J., PELCZYNSKI, A. *Absolutely Summing Operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications*. Studia Mathematica, 29, 275-325, 1968.

[15] LINDENSTRAUSS, J., ROSENTHAL, H.P. *$\mathcal{L}_p$ Spaces*. Israel Jour. Math. 7, 325-349, 1969.

[16] MATOS, M. C. *On Multilinear Mappings of Nuclear Type*. Rev. Mat. Univ. Compl. Madrid 6, 61-81, 1993.

[17] MATOS, M. C. *Absolutely Summing Holomorphic Mappings*. An. Acad. Bras. Ci. 68 (1), 1996.

[18] MATOS, M. C. *On a Question of Pietsch about Hilbert-Schmidt Multilinear Mappings*. J. Math. Anal. Appl. 257, 343-355, 2001.

[19] MATOS, M. C. *Fully Absolutely Summing and Hilbert-Schmidt Multilinear Mappings.* Collect. Math. 54, 2, 111-136, 2003.

[20] MELENDEZ, Y., TONGE, A. *Polynomials and The Pietsch Domination Theorem.* Math. Proc. Roy. Irish Acad. 99A (2), 195-212, 1999.

[21] MENDES, C. A. *Alguns Teoremas de Fatoração*. Dissertação de Mestrado, UFRJ, 1999.

[22] MUJICA, J. *Complex Analysis in Banach Spaces*. North-Holland Mathematics Studies 120, 1986.

[23] NACHBIN, L. *Lectures on the Theory of Distributions*. Textos de Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade do Recife, 1964.

[24] NACHBIN, L. *Concerning holomorphy types for Banach Spaces*. Studia Math. 38, 407-412, 1970.

[25] NOVERRAZ, P. *Pseudo-Convexité, Convexité Polynomiale et Domaines d´Holomorphie en Dimension Infinie*. North-Holland, 1973.

[26] PELCZYNSKI, A. *A Characterization of Hilbert-Schmidt Operators*. Studia Math. 28, 355-360, 1967.

[27] PELLEGRINO, D. M., SOUZA, M. L. V. *Fully Summing Multilinear Mappings and Holomorphic Mappings into Hilbert Spaces*. Relatório de pesquisa, RP65/02, IMECC, UNICAMP, 2002.

[28] PELLEGRINO, D. M. *Aplicações entre espaços de Banach relacionadas à convergência de séries*. Tese de doutorado, UNICAMP, 2002.

[29] PÉREZ, D. *Operadores Multilineales Absolutamente Sumantes.* Dissertação de mestrado, Universidad Complutense de Madrid, 2002.

[30] PIETSCH, A. *Absolut p-summierende Abbildungen in normierten Räumen.* Studia Math. 28, 333-353, 1967.

[31] PIETSCH, A. *Operator Ideals*. North-Holland, 1980.

[32] PIETSCH, A. *Ideals of Multilinear Funcionals*. II. International Conference on Operator Algebras, Ideals and their Applications in Theoretical Physics, Friedrich-Schiller - Universitat Jena, 1983.

[33] SCHATTEN, R., VON-NEUMMAN, J. *The cross-space of linear transformations II.* Ann. of Math. (2) 47, 608-630, 1946.

[34] SCHATTEN, R., VON-NEUMMAN, J. *The cross-space of linear transformations III.* Ann. of Math. (2) 49, 557-582, 1948.

[35] SCHMIDT, E. *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen I.* Math. Ann. 63, 433-476, 1907.

[36] SCHMIDT, E. *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen II.* Math. Ann. 64, 161-174, 1907.

[37] SOUZA, M. L. V. *Aplicações Multilineares Completamente Absolutamente Somantes.* Tese de doutorado, UNICAMP, 2003.

[38] WOJTASZCZYK, P. *Banach Spaces For Analysts.* Cambridge University Press, 1991.