
Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

Felix Klein e Euclides Roxo: debates sobre o ensino da matemática no começo do século XX

por

Giseli Martins de Souza

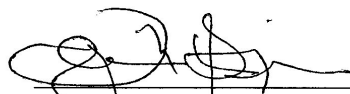
Mestrado Profissional em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Rogério Monteiro de Siqueira

Felix Klein e Euclides Roxo: debates sobre o ensino da matemática no começo do século XX

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Giseli Martins de Souza** e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 18 de Fevereiro de 2010.



Prof. Dr. Rogério Monteiro de Siqueira
Orientador

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Edna Maura Zuffi

Prof. Dr. Rogério Monteiro de Siqueira

Profa. Dra. Sandra Augusta Santos

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Souza, Giseli Martins de
So89f Felix Klein e Euclides Roxo : debates sobre o ensino da matemática no
começo do século XX/Giseli Martins de Souza-- Campinas, [S.P. : s.n.],
2010.

Orientador : Rogério Monteiro de Siqueira
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual de
Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Klein, Felix, 1849-1925. 2.Roxo, Euclides, 1890-1950.
3.Geometria. 4.Matemática - História. I. Siqueira, Rogério Monteiro de.
II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Felix Klein e Euclides Roxo: debates on the teaching of mathematics in the
Twentieth Century

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Klein, Felix, 1849-1925. 2. Roxo, Euclides, 1890-
1950. 3. Geometry. 4. Mathematics - History.

Área de concentração: Matemática

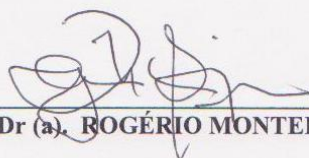
Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Rogério Monteiro de Siqueira (EACH-USP)
Profa. Dra. Sandra Augusta Santos (IMECC - UNICAMP)
Profa. Dra. Edna Maura Zuffi (ICMC-USP)

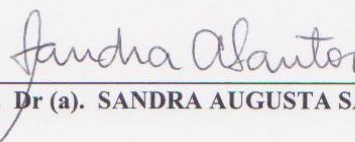
Data da defesa: 18/02/2010

Programa de Pós-Graduação: Mestrado profissional em Matemática

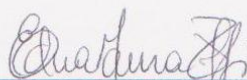
**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 18 de fevereiro de 2010
e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



Prof. (a). Dr (a). **ROGÉRIO MONTEIRO DE SIQUEIRA**



Prof. (a). Dr (a). **SANDRA AUGUSTA SANTOS**



Prof. (a). Dr (a). **EDNA MAURA ZUFFI**

Àqueles que enxergam nas ciências a possibilidade de construir um mundo melhor.

“A MATEMÁTICA

A Matemática não é exclusivamente o instrumento destinado à explicação dos fenômenos da natureza, isto é, das leis naturais. Não. Ela possui também um valor filosófico, de que aliás ninguém duvida; um valor artístico, ou melhor, estético, capaz de lhe conferir o direito de ser cultivada por si mesma, tais as numerosas satisfações e júbilos que essa ciência nos proporciona. Já os gregos possuíam, num grau elevado, o sentimento da harmonia dos números e da beleza das formas geométricas.”

(Pedro Tavares)

Agradecimentos

Meus singelos, porém cheios de reconhecimento e respeito, agradecimentos:

- A DEUS, por ter me concedido vida, inteligência e oportunidades para chegar aonde cheguei. Por estar sempre presente em minha vida, enchendo-a de bênçãos. Para quem duvide, Euler enunciou um teorema provando sua existência:

"Senhor $\frac{a+b^n}{n} = x$, portanto Deus existe, refute!"

- Aos meus amados pais, Cristina e Israel, pelo constante apoio e pela eterna dedicação aos filhos. Por me incentivarem e mostrarem a importância dos estudos e da valorização dos docentes na construção de uma sociedade melhor, bem como o respeito pelo próximo. Por me ensinarem a amar sempre o que faço. Pelos belos e valiosos ensinamentos e conselhos. Imensa gratidão a vocês pelo que sou e pelo que serei. Amarei vocês eternamente.

"(...) É preciso amar as pessoas. Como se não houvesse amanhã. Por que se você parar. Prá pensar. Na verdade não há..."(Música "Pais E Filhos". Composição de Dado Villa-Lobos, Renato Russo e Marcelo Bonfá).

- Aos meus irmãos Geverson, Gislei e Geicielly pelas alegrias e brincadeiras de nossa infância. Por serem presença tão significativa em minha vida. Pelas palavras de ânimo. Por festejarem comigo minhas conquistas. Por apoiarem sempre as minhas decisões.

"Família, família, Vive junto todo dia, Nunca perde essa mania."(Música "Família". Composição de Arnaldo Antunes / Tony Bellotto).

- Ao meu noivo Elias pela compreensão e incentivo. Obrigada por fazer parte da minha vida.

"O amor é paciente, o amor é prestativo; não é invejoso, não se ostenta, não se incha de orgulho. Nada faz de inconveniente, não procura seu próprio interesse, não se irrita,

não guarda rancor. Não se alegra com a injustiça, mas se regozija com a verdade. Tudo desculpa, tudo crê, tudo espera, tudo suporta". (Bíblia Sagrada. I Coríntios, 13, 4-7).

- A minha querida cunhada Soeli, por completar nossa família e pelo lindo presente que nos deu esse ano (minha amada sobrinha Thaline). Por fazer meu irmão Geverson feliz. Pela mulher firme e forte que é. Obrigada por estar sempre presente nos alegrando com sua presença.

"Está sim é osso dos meus ossos e carne da minha carne! (...) Javé Deus disse então para a mulher: 'Vou fazê-la sofrer muito em sua gravidez: entre dores, você dará à luz seus filhos' (...)" (Bíblia Sagrada, Gênesis, 2, 23/3, 16).

- Aos meus queridos mestres, Zoraide, Sueli, Vera Lúcia, Mariano, José Plínio, Sandra e Cristiano, por compartilharem comigo seus conhecimentos. Pelo apoio nos momentos de angústia e desânimo. A Sabedoria de vocês me encanta! Minha eterna gratidão pelos valiosos conhecimentos que adquiri neste mestrado.
- Ao meu orientador Rogério, pela paciência e compreensão. Por ter me ajudado na elaboração deste trabalho e por compartilhar comigo seus conhecimentos.

"Anjos da Guarda

Professores, Protetores das crianças do meu país, Eu queria, gostaria, De um discurso bem mais feliz, Porque tudo é educação, É matéria de todo o tempo, Ensinem a quem sabe tudo, A entregar o conhecimento, Na sala de aula, É que se forma um cidadão, Na sala de aula, Que se muda uma nação, Na sala de aula, Não há idade, nem cor, Por isso aceite e respeite, O meu professor. Batam palmas pra ele!!!"(Música "Anjos da guarda", Leci Brandão).

- Aos membros da Banca Examinadora - Profa. Dra. Edna Maura Zuffi, Prof. Dr. Rogério Monteiro de Siqueira e Profa. Dra. Sandra Augusta Santos - pelos comentários valiosos, que muito contribuíram para expandir meus conhecimentos. Especial agradecimento a Profa.Dra. Sueli Irene Rodrigues Costa, coordenadora do Mestrado Profissional, por acreditar no meu trabalho.

- Aos meus amigos, Lúdio, Vera Graciani, Vera Camargo e, em especial, a Joseane, por serem meus parceiros nesta conquista que é minha e de vocês também.

"Amigo é coisa para se guardar. Debaixo de sete chaves. Dentro do coração. (...) Amigo é coisa para se guardar. No lado esquerdo do peito. Mesmo que o tempo e a distância digam 'não'. (...) Pois seja o que vier, venha o que vier. Qualquer dia, amigo[s] vamos nos encontrar". (Música "Canção da América". Composição de Fernando Brant e Milton Nascimento).

"Se eu vi mais longe, foi por estar de pé sobre ombros de gigantes". (Isaac Newton).

Resumo

SOUZA, Giseli Martins de. *Felix Klein e Euclides Roxo: debates sobre o ensino da matemática no começo do século XX*. Campinas - SP: Universidade Estadual de Campinas, 2010. Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Este trabalho analisa as propostas do matemático alemão Felix Klein (1849 - 1925) e do professor brasileiro Euclides Roxo (1890 - 1950) para o ensino de matemática, mais especificamente o de geometria, no começo do século XX. Tomando a Comissão Internacional para o Ensino da Matemática (IMUK) como ponto comum entre estes dois personagens, analisamos como os grandes temas sobre o ensino da matemática no período, a introdução das noções básicas de quantidades variáveis e dependência funcional, bem como a reorganização dos métodos de ensino com ênfase na intuição, nas aplicações e na geometria analítica, são recebidos, debatidos e apropriados no Brasil. Além disso, analisamos brevemente como estas temáticas foram aclimatadas em alguns trechos de duas obras desses autores: *Elementarmathematik vom höheren Standpunkten aus - Geometrie*, de Felix Klein, e, *Curso de Mathematica - 3ª série II - Geometria*, de Euclides Roxo.

Palavras-Chave: Felix Klein - Euclides Roxo - Movimento Internacional de Reforma do Ensino da Matemática - Geometria - História do Ensino de Matemática.

Abstract

SOUZA, Giseli Martins de. *Felix Klein e Euclides Roxo: debates sobre o ensino da matemática no começo do século XX*. Campinas - SP: Universidade Estadual de Campinas, 2010. Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

This work analyses the ideas proposed by the German mathematician Felix Klein (1849 - 1925) and the Brazilian teacher Euclides Roxo (1890-1950) for the mathematics teaching, especially geometry, at the beginning of the Twentieth century. Taking the Internationale Mathematische Unterrichtskommission (IMUK) as point of contact between these personages, we analyze the way the most important themes about the mathematics teaching in this period, the introduction of the basic notions of variable quantities and functional dependencies, also the focus of the teaching methods on intuition, applications and analytic methods, were received, debated and handed over in Brazil. Besides, we briefly analyze how these themes were introduced in some sections of two works of these authors: *Elementarmathematik vom höheren Standpunkten aus - Geometrie*, of Felix Klein, and, *Curso de Mathematica - 3ª série II - Geometria*, of Euclides Roxo.

Keywords: Felix Klein, Euclides Roxo, Internationale mathematische Unterrichtskommission, Geometry, History of mathematics teaching

Sumário

Agradecimentos	vi
Resumo	ix
Abstract	x
Introdução	1
1 Movimento Internacional de Reforma Curricular em Matemática	4
2 Felix Christian Klein no cenário dos estudos matemáticos	10
2.1 Felix Klein (1849 - 1925)	11
2.2 Matemática Elementar de um ponto de vista avançado	16
2.2.1 Matemática Elementar sob um ponto de vista avançado - Aritmética, Álgebra e Análise	18
2.2.2 Matemática Elementar sob um ponto de vista avançado - Geo-metria	21
2.3 Comprimento, Área e Volume	24
3 Os reflexos do Movimento Internacional de Reforma do Ensino da Matemática no Brasil	40
3.1 Euclides Roxo: Contexto histórico	42
3.2 Euclides Roxo e seu envolvimento no processo de mo-dernização do currículo de Matemática no Brasil	46
3.3 Curso de Mathematica: 3º Ano - II (Geometria)	52
Considerações Finais	67
Referências Bibliográficas	70

Introdução

Por volta de 1922, o ensino de matemática brasileiro começa a sofrer algumas modificações. Essas mudanças foram protagonizadas por Euclides Roxo no Colégio Pedro II, quando este propôs a substituição do livro didático *Elementos de Aritmética* da coleção F. I. C. (Frères de l'Instruction Chrétienne) por seu livro didático *Lições de Aritmética*. Já em 1927, Roxo sugere ao corpo docente dessa instituição mudanças radicais no ensino de matemática; mudanças essas baseadas, em grande parte, na proposta internacional de modernização do ensino da matemática iniciada por Felix Klein na Alemanha.

As mudanças no currículo de matemática propostas por Klein tiveram repercussão mundial. No Brasil, o disseminador dessas propostas foi Euclides Roxo que inicialmente as sugeriu para o corpo docente do colégio Pedro II, e posteriormente essas mudanças compuseram a Reforma Campos.

Dentre as propostas comuns a Klein e a Roxo estava a unificação dos três ramos da matemática - Aritmética, Álgebra e Análise, dessa forma, pretendemos com esse trabalho analisar como Roxo se apropria das idéias de Klein. Essa análise baseia-se na pesquisa das obras desses matemáticos para verificar as relações entre essas publicações feitas em tempos de modernizações do ensino da matemática, tanto no Brasil quanto na Alemanha.

Tomaremos como fonte para essa análise o livro *Matemática Elementar sob um ponto de vista avançado - Geometria*, de Felix Klein, e o livro *Curso de Mathematica* de Euclides Roxo, bem como outros artigos e comentários do período.

No volume destinado à Geometria, Klein estuda as transformações geométricas e busca tratar dos conceitos associando-os a conceitos de Álgebra e Aritmética. Já Roxo, no *Curso de Mathematica* trata dos aspectos mais dedutivos da Geometria, reservando esse livro a tratar da Geometria de forma mais rigorosa e formal.

Reportar-nos-emos a analisar as obras de maneira geral, restringindo posteriormente essa análise a um capítulo de cada uma delas, com o intuito de verificar as abordagens teóricas e conceituais desses autores.

Dessa forma, em *Matemática Elementar sob um ponto de vista avançado - Geometria*, nos restringiremos à Parte I, *As mais simples variedades geométricas*, limitando nosso estudo ao tratamento dado por Klein às questões relativas ao estudo do comprimento, área e volume. Faremos também uma descrição do Planímetro Polar de Amsler e como Klein explica seu funcionamento.

Já no livro *Curso de Mathematica* dedicaremos nos a analisar de forma geral o tratamento que Roxo dá a geometria. Assim, tomaremos alguns exemplos de sua abordagem teórica, explicitando se existe alguma relação entre esse didático e as propostas implantadas por ele no Colégio Pedro II e que posteriormente compuseram a Reforma Campos.

Destarte, no primeiro capítulo discorreremos sobre o Movimento Internacional de Reforma Curricular em Matemática, enfatizando os aspectos históricos que permearam esse movimento e o papel de Klein para a difusão deste. Para isso, tomaremos como aporte teórico algumas publicações do Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática no Brasil - GHEMAT, bem como, dissertações e outras publicações e artigos relacionados ao Movimento Internacional de Reforma Curricular em Matemática.

No segundo capítulo fazemos uma breve e modesta biografia do matemático alemão Felix Klein e suas contribuições para a implantação de mudanças curriculares no ensino de matemática. Dessa forma, nos reportaremos à dissertação de mestrado de Maria Eli Puga Beltrão, *Felix Klein: Uma visão do cálculo infinitesimal no ensino médio*, e a artigos destinados a tratar da biografia de Felix Klein e a críticas sobre sua coleção. Em seguida, complementamos com uma breve descrição da coleção *Matemática Elementar de um ponto de vista avançado* e, finalizamos esse capítulo, fazendo uma análise da seção I, intitulada *Comprimento, área, volume, como magnitudes relativas*, da Parte I, sob título, *As mais simples variedades geométricas*, limitando nosso estudo ao tratamento dado por Klein às questões relativas ao estudo do comprimento, área e volume, bem como uma breve descrição do Planímetro Polar de Amsler.

No terceiro capítulo abordamos os reflexos causados por esse movimento aqui no Brasil. Faremos também uma breve biografia de Euclides Roxo e enfatizaremos seu papel para a adesão a esse movimento no Brasil. Para finalizar, faremos uma análise do livro *Curso de Mathematica: 3º Ano - II (Geometria)* de Euclides Roxo, estabelecendo um elo entre suas idéias e as idéias de Klein. Dessa forma, nosso intuito é verificar até que ponto Roxo realmente utilizou as idéias modernizadoras de Felix Klein para implantar mudanças curriculares

no Colégio Pedro II. Nosso aporte teórico nesse capítulo também serão os trabalhos do GHEMAT, artigos e outras publicações.

Movimento Internacional de Reforma Curricular em Matemática

"Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real." (Boyer)

Com a Revolução Industrial, ocorrida no final do século XIX, houve uma mudança na economia, no sistema de empregos, bem como no mercado de trabalho das grandes potências políticas da Europa Ocidental e dos Estados Unidos. Tal processo histórico propiciou uma transformação na estrutura dos sistemas educacionais, nas disciplinas de estudo, como também nos métodos de instrução, que deixavam de atender as exigências do novo mercado de trabalho.

A princípio as indústrias não necessitavam de trabalhadores qualificados, pois seus métodos de produção eram bem rudimentares e exigiam pouca qualificação. No decorrer do tempo, porém, com a modernização e a aquisição de novos equipamentos houve nas indústrias a necessidade de mão-de-obra qualificada.

A demanda já não é mais por uma massa de trabalhadores - mulheres e crianças - com pouca ou nenhuma qualificação. O que se requer agora são trabalhadores e técnicos dotados de uma qualificação básica ou "genérica" à qual se acrescentam, no caso de uma quantidade significativa da mão-de-obra, especializações profissionais específicas. (PAVANELLO apud MENESES, 2007, 68).

De acordo com Werneck (2003), devido à Revolução Industrial, o conhecimento necessário ao cidadão moderno deveria ser o da utilidade prática, daí a necessidade de tornar o ensino

um pouco mais voltado ao cotidiano exeqüível, assim "[a] utilidade é antes da ciência, o motor do progresso da sociedade, sobre o qual se fundamenta o saber necessário ao cidadão moderno". (BELHOSTE et AL apud WERNECK, 2003, 13).

Sendo assim, o ensino de exatas acabou por aderir aos novos ideais difundidos pela sociedade capitalista e industrial, que exigia um conhecimento mais amplo, moderno, bem como avançado, capaz de propagar as aplicações técnicas da matemática.

Nesse contexto, de acordo com Schubring (2004), começaram a surgir alguns movimentos e iniciativas de reformas curriculares para as escolas secundárias. De um lado, a Inglaterra iniciou esse processo com Perry, tendo como ênfase os métodos de ensino práticos. Perry demonstrava verdadeiro repúdio a Euclides e defendia um menor rigor no ensino de Geometria. Para ele o ensino dos fatos elementares da geometria era de extrema importância, porém defendia que este ensino fosse mais voltado a aplicações em problemas práticos e científicos. Miranda ressalta que

[...] o que mais atraía nas idéias de Perry, era a unificação da Matemática com a Ciência ou a "Correlação da Matemática e Ciência"[...]. Os argumentos de Perry pautavam-se na eliminação de Euclides do currículo, alegando que ele imbecilizava os alunos e "os fazia odiar Matemática por toda a vida...". [...] Perry demonstrava radicalismo com relação a Euclides, pois considerava fundamental o método experimental. (SIGURDSON apud MIRANDA, 2003, 35).

Por outro lado, a Prússia introduziu com Felix Klein a proposta de o ensino de Matemática ser voltado para o pensamento funcional, abordando que as noções básicas de funções deveriam ser ensinadas desde cedo. Klein enfatiza que:

[...] uma nova tendência que começou a desenhar-se em 1890, consiste em não prescindir das aplicações da Matemática em todos os ramos das Ciências naturais e técnicas, assim como de sua significação na vida real. Deste modo se acrescenta algo novo à mera aplicação dos procedimentos intuitivos, pois em vez de utilizá-los com um objeto puramente formal, se aproveitam para fazer o aluno adquirir conhecimentos indispensáveis na prática da vida. Em relação com essas idéias, estão as proposições da reforma que tem por base a introdução no ensino secundário do conceito de função, os métodos gráficos e elementos de Cálculo Infinitesimal. (KLEIN apud BRAGA, 2003, 45-46).

O que nós pedimos para a reforma é realmente bem modesto quando se compara com o estado atual da ciência. Desejamos que o conceito geral de função de Euler, na forma mais restrita ou na mais ampla, penetre como um fermento em todo o ensino médio; porém nunca por definições abstratas e sim por meio de exemplos elementares... que cheguem ao aluno como algo vivo que lhe pertence. (KLEIN apud BELTRÃO, 2001, 24).

Dessa forma, percebemos que Klein, em sua proposta, buscava a incorporação, ao currículo de Matemática, o ensino dos conceitos básicos e complexos de funções, no ensino secundário. Porém, o autor ressalta que, este ensino, deve partir de conceitos elementares até se chegar a conceitos mais complexos, sempre relacionando esse estudo ao cotidiano do aluno.

A nosso ver, as mudanças curriculares mais significativas ocorreram em 1902 quando o gabinete ministerial da França introduziu os elementos do cálculo diferencial para as classes mais adiantadas das escolas secundárias.

Em 1897, aconteceu o I Congresso Internacional de Matemática, em Zurique, no qual houve discussões e reflexões relativas ao desenvolvimento da matemática e também ao seu ensino. A partir de 1900 esse Congresso passou a ser realizado a cada quatro anos, mas foi interrompido em virtude das duas Guerras Mundiais.

No IV Congresso Internacional de Matemática, em Roma, surgiu o Movimento Internacional de Reforma do Ensino da Matemática e resultou, conseqüentemente, na criação do IMUK (*Internationale Mathematische Unterrichtskommission*) ou CIEM (*Commission Internationale de L'Enseignement Mathématique* - Comissão Internacional para o Ensino da Matemática). Estabelecida em 1908, esta comissão, segundo Schubring (2004), tinha como finalidade acompanhar as comunicações sobre as reformas curriculares, como também organizar e investigar o movimento internacional da reforma.

Com o objetivo de aperfeiçoar os métodos de ensino nos Estados Unidos, David Eugene Smith, professor adjunto do *Teachers College* (Columbia University, New York), em 1905, propôs a criação desta comissão de forma a envolver um número maior de pesquisadores interessados em discutir estas novas perspectivas relativas à educação matemática.

Destarte, a comissão se encarregou da preparação de relatórios a respeito das condições referentes à instrução matemática nas escolas secundárias dos países mais desenvolvidos. Assim cada país elaboraria um relatório geral a ser apresentado em Cambridge em 1912.

Para compor esta comissão foram eleitos três matemáticos no referido congresso: o alemão Felix Klein como presidente, cargo que ocupou até 1920, o inglês George Greenhill que ocupou a posição de vice-presidente, e o suíço Henri Fehr, o qual desempenhou a função de secretário geral.

Os trabalhos desta comissão foram estendidos ao sistema escolar mundial, desde o nível primário até a educação superior. Dessa forma, o IMUK atuou como um agente de mudanças, disseminando uma proposta de reforma da instrução matemática necessária e urgente.

Os países convidados para participar dos trabalhos do IMUK foram selecionados de acordo com o grau de atividade de cada comunidade matemática, sendo medido conforme a participação dos mesmos em congressos anteriores. Com isso, os países que tiveram no mínimo dois matemáticos participando de pelo menos dois dos quatro congressos foram convidados a estabelecer uma subcomissão nacional do IMUK, a ser representada por um membro com direito a voto. A título de informação, listamos os países que introduziram seus representantes na agência do IMUK: Áustria, França, Alemanha, Grã-Bretanha, Hungria, Itália, Rússia, Suíça e Estados Unidos.

Se o número de participantes fosse igual ou superior a dez, o número de membros com direito a voto era acrescido para dois ou até três. Nesta categoria foram incluídos os seguintes países: Bélgica, Dinamarca, Grécia, Holanda, Noruega, Portugal, Romênia, Suécia e Espanha. Mas os organizadores entenderam que o critério de atividade matemática não compreenderia todos os países relevantes. Dessa forma, foram convidados a participar como membros, porém sem direito a voto, os seguintes países: Argentina, Austrália, Brasil, Bulgária, Chile, China, Egito, Inglaterra, Índia, Japão, Canadá, África do Sul, México, Peru, Sérvia e Turquia.

Os países que formaram subcomitês nacionais até 1914 estão distribuídos de acordo com o seu grau de atividade. São eles: Áustria, Bélgica, Dinamarca, França, Grã-Bretanha, Alemanha, Hungria, Suécia e Estados Unidos - estes apresentaram atividades significativas de reforma; Austrália, Itália, Japão, Holanda, Romênia, Rússia, Espanha e Suíça - estes entregaram relatórios simplesmente descritivos e não indicaram nenhum movimento de reforma; Grécia, Noruega e Portugal - estes não apresentaram nenhum relatório nacional.

De acordo com Braga (2003), no congresso de 1912, o Brasil, conforme mencionado acima, foi convidado a participar sem direito a voto e teve como representante o professor Eugênio de Barros Raja Gabaglia. Gabaglia nesse congresso se comprometeu a enviar à comissão os relatórios referentes ao ensino de matemática no Brasil, porém não o fez. Braga (2003) enfatiza dizendo que "Henri Fehr, secretário geral da comissão, menciona que de 1908 a 1920, foram entregues 310 relatórios, dos quais havia um único da América do Sul, o da Argentina - nenhum do Brasil, apesar do compromisso assumido por Gabaglia em 1912."

Ao que tudo indica nenhuma das discussões relativas à modernização do ensino de matemática debatidas nos congressos do movimento internacional de reforma do ensino de matemática foram trazidas ao Brasil e, mais especificamente, ao Colégio Pedro II, no qual Gabaglia foi diretor no biênio 1913-1914. Valente (2004) lembra que "O resultado final é que, pelas mãos de Gabaglia, único brasileiro a ter tido oportunidade de presenciar as discussões internacionais sobre a modernização do ensino da matemática, nada parece ter sido trazido para o Brasil".

Schubring (2004) salienta ainda que os trabalhos do IMUK foram frutíferos no que tange à quantidade de publicações, que até 1920 apresentava 294 títulos publicados em 17 países.

Percebemos, com isso, que Klein, acordando as idéias do professor Smith, preocupou-se em envolver nesse movimento de reforma curricular de matemática o maior número de países possíveis. Deste modo estabeleceria um conjunto de objetivos a serem traçados de modo que abordassem de uma forma quase que geral as necessidades e intenções de reforma.

Schubring (2004), parafraseando Schimmack (1911), descreve os objetivos do movimento internacional de reforma curricular em matemática que eram basicamente dois. O primeiro se refere à transposição das noções básicas de quantidades variáveis e dependência funcional. O segundo diz respeito à reorganização dos métodos de ensino com ênfase na intuição, nas aplicações e na geometria analítica.

Beltrão (2001) salienta que a criação do IMUK em 1908 serviu para ampliar o movimento iniciado por Klein na Alemanha. Desta forma, através do IMUK, Klein via seu movimento se fortalecer internacionalmente, com suas idéias e objetivos sendo inseridos nesse movimento.

Schubring enfatiza que

Os estudos comparativos organizados pelo comitê central do IMUK, para complementar os (mais ou menos descritivos) relatórios dos subcomitês nacionais, confirmam a orientação estratégica de tais pesquisas, geralmente no mesmo sentido do programa alemão de reforma de Klein. Ao todo, o IMUK decidiu empreender oito desses estudos comparativos:

1. A fusão dos diferentes ramos da matemática no ensino das escolas médias (Milão, 1911).
2. O rigor no ensino de matemática nas escolas médias (Milão, 1911).
3. O ensino teórico e prático de matemática destinado aos estudantes de ciências físicas e naturais (Milão, 1911).
4. A preparação matemática dos físicos na universidade (Cambridge, 1912).
5. A intuição e a experiência no ensino de matemática nas escolas médias (Cambridge, 1912).
6. Os resultados obtidos na introdução do cálculo diferencial e integral nas classes mais adiantadas dos estabelecimentos secundários (Paris, 1914).
7. A preparação matemática dos engenheiros nos diferentes países (Paris, 1914).

8. A formação de professores de matemática para os estabelecimentos secundários. (SCHUBRING apud VALENTE, 2004, 35-36).

Dentre esses oito temas desse estudo comparativo apenas três deles são equivalentes ao nível designado pelo IMUK (1, 2 e 5), os demais descreviam sobre a mudança da educação secundária para a educação superior ou exclusivamente da educação superior. Vale ressaltar também que desses temas, dois em especial atraíram mais a atenção e foram calorosamente discutidos na sessão do IMUK realizada em Paris no ano de 1914. O primeiro refere-se à "introdução do cálculo diferencial e integral nas escolas secundárias", no qual Klein preparou um volumoso relatório. O segundo tópico discutido se refere à "preparação matemática dos engenheiros nos diferentes países. Posteriormente, por não ter participado das sessões do IMUK em Paris, Klein foi informado por seus coordenadores e relatores, Emanuel Beke e Paul Stäckel, que quanto à introdução do cálculo, infelizmente não fora obtido nenhum resultado concreto devido à resistência dos italianos, e quanto à preparação matemática dos engenheiros, obteve-se êxito, para o qual relata que "os engenheiros querem aprender matemática por meio do matemático, não do engenheiro".

Percebe-se com isso que o momento mais importante dos trabalhos do IMUK se deu quando houve a discussão desses dois temas, que equivalem exatamente aos dois pontos fundamentais do programa de reforma cogitado por Klein.

Faremos em seguida uma breve biografia do matemático alemão Felix Klein, dando ênfase a seus principais trabalhos e publicações. Posteriormente, mostraremos as repercussões desse movimento no Brasil, onde essas questões relacionadas à reforma no currículo de matemática só começaram a ser discutidas a partir de 1930. Analisaremos isso com maior clareza no capítulo subsequente do nosso trabalho, onde enfatizaremos como se deu o percurso desse movimento no Brasil, como isso aconteceu e quais foram seus impactos.

Felix Christian Klein no cenário dos estudos matemáticos



Figura 2.1: Felix Klein

"Felizes aqueles que se divertem com problemas que educam a alma e elevam o espírito". (Felix Klein)

Neste capítulo faremos inicialmente uma modesta biografia do matemático alemão Felix Klein, dando ênfase à suas principais contribuições no cenário dos estudos matemáticos. Posteriormente, complementaremos essa biografia com uma breve descrição da coleção *Matemática Elementar de um ponto de vista avançado*. Para finalizar, vamos fazer uma

análise da seção I, intitulada *Comprimento, área, volume, como magnitudes relativas*, da Parte I do livro geometria da coleção, sob título, *As mais simples variedades geométricas*, limitando nosso estudo ao tratamento dado por Klein às questões relativas ao estudo do comprimento, área e volume, bem como uma breve descrição do Planímetro Polar de Amsler.

2.1 Felix Klein (1849 - 1925)

Nascido em 25 de abril de 1849, na cidade Düsseldorf, Alemanha, Felix Christian Klein ocupou um lugar de grande visibilidade nos debates da comunidade matemática, no começo do século XX. Além de um pesquisador de matemática influente, Felix Klein dedicou parte de sua carreira ao ensino, divulgando suas idéias em muitas palestras e em livros com finalidades didáticas.

Seu pai, Caspar Klein, era secretário pessoal do Presidente do Governo e sua mãe, Elise Sophie Kayser, veio de uma família de industriais de Aachen. Sua educação inicial foi ministrada pela mãe, em seguida frequentou durante dois anos e meio uma escola elementar particular. Em 1857 estudou no Instituto de Humanidades de Düsseldorf, no qual permaneceu durante oito anos até concluir o que hoje equivale ao Ensino Médio. Tal Instituto não priorizava o ensino de Matemática, como também de Ciências Naturais, o que resultou na não aquisição por parte de Klein de grandes conhecimentos nas respectivas disciplinas.

Já em 1865 ingressou na Universidade de Bonn no intuito de estudar Matemática, Física e Ciências Naturais. Em virtude do seu grande destaque intelectual, Klein, em 1866, se tornou auxiliar do matemático e físico Julius Plücker (1801 - 1868), de modo a ser responsável pela preparação e realização de experimentos práticos em Física. Plücker, nesse período, voltou seus estudos para a Matemática, visto que estava trabalhando na produção de um livro intitulado *Neue geometrie des raumes, gegründet der geraden linie als raumelement* (Nova geometria do espaço, baseada na reta como elemento do espaço). Plücker fez com que Klein estabelecesse contato com seus trabalhos sobre geometria, em especial a geometria analítica. Desta forma, Klein tornou-se, num certo sentido, sucessor de Plücker no entusiasmo pela geometria analítica.

Em 1868 Plücker morreu repentinamente deixando sua obra inacabada, o que fez com que Klein resolvesse dar continuidade aos estudos desenvolvidos pelo seu mestre. Nesse mesmo ano Klein elaborou sua tese de doutorado sob o título *Über Die Transformation Der Allge-*

meinen Gleichung Des Zweiten Grades Zwischen Linien-Koordinaten Auf Eine Kanonische Form (Sobre a transformação em uma forma canônica da equação geral de segundo grau em Linhas-coordenadas).

Klein obteve seu doutoramento em dezembro de 1868, sendo supervisionado por Plücker e Rudolf Lipschitz. Após recebê-lo, Klein passou um ano viajando entre Göttingen, Berlim e Paris. Esteve em Berlim para continuar sua formação, porém a experiência não foi agradável pelo fato de que, como estudante de Plücker e Clebsch, Klein herdou uma forte antipatia pela tradição purista dos matemáticos de Berlim.

Em Berlim conheceu o jovem matemático norueguês Marius Sophus Lie (1842-1899), estudante contemporâneo de Klein em Göttingen, cujas idéias sobre geometria e análise estavam em consonância com as suas. Trabalharam juntos com assuntos relacionados às transformações infinitesimais em suas relações com a teoria dos invariantes.

Lie, no prefácio do terceiro e último volume de sua *Theorie der Transformationsgruppen*, relata sobre as deficiências matemáticas apresentadas por Klein:

Não sou estudante de Klein nem é o inverso do caso, mesmo que se aproxima à verdade [...] Valorizo muito o talento de Klein e nunca esqueço que desde o início ele tinha acompanhado parte de meus esforços científicos. Creio, porém, que ele não é capaz de distinguir entre indução e prova, entre introdução de um conceito e sua utilização. (ROWE, 2003, 673).

Para concluir o livro de Plücker, Klein necessitou do auxílio intelectual de geômetras experientes, pois, até então, nunca havia assistido nenhum curso sobre Cálculo Diferencial e Integral. Para tanto, Klein vai para Göttingen, onde permaneceu junto a Rudolf Friedrich Alfred Clebsch (1833-1872), outro importante geômetra do período. Em 1868 Clebsch havia fundado o *Mathematische Annalen*. Em viagem a Paris, Klein e Lie se familiarizaram com o livro de Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922), intitulado *Traité des substitutions et des équations algébriques* (Tratado das substituições e das equações algébricas).

Devido à Guerra Franco-Prussiana, instalada em 19 de julho de 1870, Klein sentiu que não poderia permanecer em Paris. Decidiu retornar a Göttingen para servir o exército alemão, mas antes do ano seguinte ele, por ter adquirido febre tifóide, deixa o exército e se estabelece em Düsseldorf. Quando voltou para Göttingen, em 1871, procurou exercer o cargo de professor não titular nas cadeiras de Física e Matemática. Durante o seu tempo em Göttingen, Klein faz grandes descobertas no que tange à geometria. Ele publicou nos *Mathematische Annalen* dois

documentos sob o título *Über die sogenannte nicht-euklidische geometrie* (Sobre a chamada geometria não-Euclidiana).

No ano seguinte, foi nomeado professor titular da Faculdade de Filosofia e membro do Conselho da Universidade de Erlangen, com a idade de 23 anos, permanecendo até 1875. Como era costume em toda universidade alemã, Klein, como docente novato, teve que proferir um discurso inaugural, no qual apresentou uma palestra e um trabalho escrito mostrando seu interesse pela pesquisa no campo matemático. Braga destaca que

Klein reservou parte da conferência [palestra] para expressar suas idéias sobre o ensino da matemática enaltecendo uma visão mais abrangente no sentido de se procurar uma unificação do conhecimento matemático em contraposição a um apego maior pelo aprofundamento de estudos particulares. (KLIEN apud BRAGA, 2003, 34).

Dessa forma, em sua palestra, Klein expressou sua preocupação em relação a questões pedagógicas, de modo a colocar que uma educação completa não poderia se negligenciar a estudos particulares. Esse discurso foi confundido com o Programa de Erlangen, mas não se constituiu como tal.

O programa de Erlangen foi um trabalho impresso por Deichert em Erlangen e distribuído para todos os que assistiram a aula inaugural, tendo como título *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (Considerações comparativas sobre recentes investigações geométricas). Neste programa, segundo Beltrão (2001), Klein apontou que o conceito de grupo poderia ajudar a classificar muitos ramos da matemática e aplicou suas idéias mostrando que várias das geometrias estão inter-relacionadas em virtude de sua estrutura de grupo. Mais ainda, cada geometria conhecida até então era baseada em certo grupo. Beltrão (2001) salienta ainda que este programa serviu de inspiração para unificar a geometria sob o ponto de vista dos grupos: as geometrias clássicas não euclidianas, a geometria projetiva e a geometria que se desenvolveu partindo da transformação inversa de Steiner. O Programa de Erlangen foi traduzido em seis idiomas e Klein supervisionou todas: Gino Fano (italiano), M. W. Haskell (inglês), H. E. Padé (francês), Lajos Kopp (húngaro), D. M. Sintsov (russo) e S. Dickstein (polonês).

Cabe acrescentar que em 1872, com a morte de Clebsch, Klein assumiu a edição do *Mathematische Annalen*. Três anos mais tarde, casou-se com Anne Hegel, neta do filósofo alemão Georg Wilhelm Friedrich Hegel. Recorda Grace Chisholm em uma homenagem que

fez a Felix Klein: "... os dias ensolarados, quando o jovem e elegante professor se casou com a graciosa neta do filósofo Hegel".

Nesse mesmo ano, Klein foi nomeado professor na Technische Hochschule, em Munique, onde permaneceu até 1880, quando foi nomeado para uma cadeira de geometria na Universidade de Leipzig. Na referida universidade, Klein fundou o Instituto de Matemática, no qual ficou até 1886.

A partir de 1886, Klein se estabeleceu definitivamente na cidade de Göttingen e dedicou-se a transformar esta Universidade no centro mundial de investigação matemática, de maneira que um grande número de matemáticos de primeira linha procurava esta instituição tanto para estudar, quanto para contribuir com seus talentos. Nesse sentido, a escola de matemática de Göttingen tornou-se uma das mais famosas dos tempos modernos.

Segundo Eves (2004), entre esses matemáticos estavam David Hilbert (1862 - 1943), Edmund Landau (1877 - 1938), Hermann Minkowski (1864 - 1909), Wilhelm Ackermann (1896 - 1962), Constantin Carathéodory (1873 - 1950), Ernst Zermelo (1871 - 1953), Carl Runge (1856 - 1927), Emmy Noether (1882 - 1935), Richard Dedekind (1831 - 1916), Max Dehn (1878 - 1952), Hermann Weyl (1885 - 1955), entre outros.

Em 1893, Klein recebeu a medalha Morgan da Sociedade de Matemática de Londres. Neste mesmo ano, ele e outros conseguiram admitir mulheres na Universidade de Göttingen, dentre estas estava a jovem inglesa Grace Emily Chisholm que em 1895 foi a primeira mulher a receber um doutorado na Alemanha. Chisholm foi para Göttingen pelo fato de que nas escolas inglesas não se admitiam mulheres nos cursos de pós-graduação.

Durante o período de 1881 a 1882, Klein iniciou uma troca de correspondências com o matemático francês Jules Henri Poincaré (1854 - 1912), pois ambos trabalhavam com funções automorfas e entre eles travou-se uma grande rivalidade, conforme relata Klein:

Assim os trabalhos pertinentes a estes temas, representam, sem sombra de dúvida, o ponto de partida das publicações de Poincaré... Em 1880 apresentou à Academia um trabalho que trata de Funções Automorfas. A seguir, continuou então toda uma vertiginosa série de publicações nos Comptes Rendus de 1881...; só nesse ano Poincaré publicou nada menos que treze cadernos, cujos resultados foram sintetizados no Mathematische Annalen, 19. Em 1881, eu me dedicava a elaborar idéias básicas da teoria de Riemann, sobre as Funções Algébricas e suas integrais... (sobre as quais Klein publicou duas notas no Mathematische Annalen, 19 e 20. N. T.). Não quero aqui entrar em detalhes sobre a primeira nota, porém, sem maiores delongas, falar da segunda, na qual publiquei o Teorema Fundamental do Caso do Ciclo Limite, teorema que eu, devido a sua singular simplicidade, o chamei de

Teorema Central do Ciclo Limite, em virtude do qual toda superfície de Riemann com p menor ou igual a 2, sem pontos de ramificações, somente pode uniformizar-se de uma e essencialmente de uma maneira, mediante funções automorfas com ciclo limite... Na demonstração estavam subjacentes... enormes dificuldades... sobretudo porque me encontrava com deficiências em meus conhecimentos em teorias de funções... Isto não pôde me impedir de formular, no verão de 1882, alguns teoremas fundamentais, todavia mais gerais... Durante as férias de outono de 1882... nasceu a memória do volume 21 (do *Mathematische Annalen*, N. T.) que ficou concluída em 6 de outubro de 1882. Mesmo que muitas coisas estivessem incompletas, contudo, em geral, a construção do raciocínio permanece e tampouco foi modificada pelos trabalhos de Poincaré que se sucederam nos vol. 1, 3, 4, 5 da então recém fundada *Acta Mathematica*. De fato, consegui adiantar-me um pouco a Poincaré... O preço que tive que pagar pelo meu trabalho foi, na verdade, extraordinariamente alto: a falência total da minha saúde... Minha própria atividade produtiva pessoal, no campo da Matemática teórica, terminou em 1882. Tudo o que veio a seguir, se refere, ainda que não se trate de simples retoques de um tema, a detalhes. Deste modo Poincaré teve o campo livre e até 1884 publicou na *Acta Mathematica* seus cinco grandes trabalhos sobre as novas funções. (KLEIN apud BELTRÃO, 2001, 13-14).

Devido ao comprometimento de sua saúde, provocado pelo excesso de trabalho, Klein adotou um novo método de trabalho, no qual ele apresentava as idéias e as diretrizes gerais e deixava a conclusão e posteriores modificações aos seus colaboradores mais jovens. Klein tinha um olhar fantástico para detectar um jovem talento matemático, o que certamente contribuiu para o seu posterior sucesso em Göttingen, conforme ilustra uma carta que Klein enviou ao pai de Hurwitz, um talentoso matemático judeu que estudou com Klein em Munique. Nesta carta o matemático expressava sua visão sobre o futuro do jovem:

Acima de tudo quero salientar que entre a totalidade dos jovens com quem eu tenho trabalhado até agora não houve um talento matemático que especificamente poderia ser comparado ao seu filho. A partir de agora o seu filho irá desfrutar de uma brilhante carreira científica, o que é tanto mais certo porque seus dons e personalidade são combinados com suas características amáveis. O único ponto perigoso é a sua saúde. Seu filho provavelmente já há muito tempo enfraqueceu-se pelo excesso de seus estudos... Permitam-me encerrar com as convicções que ninguém será mais feliz que eu quando a saúde de seu filho... [v]oltar totalmente. Eu preciso profundamente da sua colaboração para minha última investigação matemática. (KLEIN apud ROWE, 1986, 432).

Dentre os inúmeros trabalhos de Klein, os mais conhecidos são os que versam sobre a Geometria não-Euclidiana, o livro *Matemática Elementar sob o ponto de vista avançado* e o livro *Preleções sobre o desenvolvimento da matemática no século XIX*.

Outras colaborações de Klein ao longo de sua carreira como matemático são: direção do *Mathematischen Annalen*, criação e direção da Comissão Alemã para o ensino da Matemática e das Ciências, em 1907, e criação da Comissão Internacional de Ensino da Matemática (IMUK).

Podemos salientar aqui quão grande foram as contribuições de Felix Klein como Professor. Boyer (2003) salientou que "... não existira professor tão influente, pois além de dar aulas entusiasmantes, Klein se preocupava com o ensino da matemática em muitos níveis e exerceu forte influência em círculos pedagógicos."

Em 1885 foi eleito membro da Royal Society. Já em 1912 recebe a Medalha Copley da Royal Society.

Klein morreu em 22 de junho de 1925 em Göttingen, na Alemanha.

2.2 Matemática Elementar de um ponto de vista avançado

A primeira edição da coleção *Elementarmathematik von höheren Standpunkte aus* (Matemática Elementar de um ponto de vista avançado), do matemático alemão Felix Klein, foi publicada no ano de 1908, em Göttingen. É fruto da participação desse matemático em encontros, congressos e aulas dirigidas a professores. O livro também foi elaborado a partir da análise do papel das escolas secundárias e superiores nos processos de ensino da matemática. Trata-se de uma coleção de livros destinada a professores. Dividida em três volumes: *Volume I - Aritmética, Álgebra e Análise*, *Volume II - Geometria*, *Volume III - Precisoões e aproximações matemáticas*.

As edições em alemão, dos volumes desta coleção, foram publicadas a partir de 1902:

Volume I - Aritmética, Álgebra e Análise (1ª edição, 1908; 2ª edição, 1911; 3ª edição, 1924; 4ª edição, 1933; Reimpressão da 4ª edição em 1968); Volume II - Geometria (1ª edição, 1909; 2ª edição, 1914; 3ª edição, 1925; Reimpressão da 3ª edição em 1968) e Volume III - Precisoões e aproximações matemáticas (1ª edição, 1902; 2ª edição, 1907; 3ª edição, 1928; Reimpressão da 3ª edição em 1968)

A partir da terceira edição alemã, dessa coleção, foram feitas duas traduções inglesas dos volumes I e II. Estas traduções, sugerida pelo professor Courant da New York University, executada por E. R. Hedrick e C. A. Noble, foram publicadas, em 1932 (1ª edição), pela The

Macmillan Company e, em 1939 (2ª edição), pela Dover Publications. Este livro foi escrito especialmente para jovens professores de matemática.

Segundo Beltrão (2001), nesta obra Klein apresenta os conteúdos iniciando com uma abordagem histórica e mostra que o trabalho de grandes matemáticos surge, na maioria das vezes, por uma intuição. Também faz comentários de como esses assuntos são tratados na escola, menciona e sugere bibliografias.

O primeiro volume foi dividido em três partes. A primeira, relativa ao estudo de Aritmética, apresenta um esboço sobre o conceito de número e suas generalizações, complementado por uma detalhada descrição da máquina de calcular Brungswiga. No livro, Klein discute também as propriedades especiais dos números inteiros, bem como dos números complexos, com ênfase nos quaternions. A segunda parte trata do estudo da álgebra, onde Klein enfatiza o estudo das equações de coeficientes e raízes reais, bem como das equações no campo dos números complexos, onde é discutido a solução de equações algébricas, relativas a grupos de equações de grau n não superior a 4. Já a terceira discorre sobre o estudo de Análise e trata de questões referentes a funções logarítmicas e exponenciais, incluindo estudo histórico e explicações de tabelas. Mostra também a relação entre esses dois tipos de funções. Apresenta um capítulo sobre funções trigonométricas e um capítulo sobre cálculo, que inclui o estudo de derivada, integral e críticas relacionadas às séries de Taylor. Este volume traz um apêndice que fornece uma prova detalhada da transcendência dos números π e e , e uma introdução à teoria dos conjuntos.

O segundo volume, sobre Geometria, é dividido em três capítulos, onde o primeiro trata das definições das variedades geométricas mais simples, no qual Klein enfatiza a importância do estudo de matérias fundamentais como matrizes, determinantes, dualidade e vetores. O segundo capítulo discute questões relativas a transformações geométricas. E o terceiro capítulo trata da sistematização e dos fundamentos da geometria. Ao final da discussão sobre os fundamentos da geometria, ele traz uma interessante explicação sobre "Os Elementos" de Euclides, com estimativas de seu lugar na história e de sua importância científica. Esse volume traz um apêndice sobre o ensino da geometria que apresenta uma discussão sobre os fundamentos históricos, as contraposições das exigências modernas e algumas críticas à pedagogia tradicional, bem como ao ensino na Inglaterra, França, Itália e Alemanha.

2.2.1 Matemática Elementar sob um ponto de vista avançado - Aritmética, Álgebra e Análise

Nesta seção descreveremos os conceitos matemáticos contidos no volume I - *Matemática Elementar sob um ponto de vista avançado: Aritmética, Álgebra e Análise*. Nosso objetivo é mostrar como Klein apresenta e discute esses conceitos matemáticos.

Em sua dissertação de mestrado *Felix Klein: Uma visão do cálculo infinitesimal no ensino médio*, a pesquisadora Maria Eli Puga Beltrão (2001) coloca que, nesta obra, Klein "apresenta a evolução histórica de cada tópico". Klein acreditava que o ensino de matemática deveria partir da história do conceito a ser estudado e, a partir disso, o aluno iria construir intuitivamente os conceitos formais desse conceito. Klein, nessa obra, indica bibliografias que podem ser utilizadas pelos professores como fontes de auxílio no trabalho em sala de aula.

O volume *Matemática Elementar sob um ponto de vista avançado - Álgebra, Aritmética e Análise*, composto de 328 páginas, traz assuntos relacionados aos temas conjuntos numéricos e suas propriedades, especialmente números irracionais, propriedades de primos, logaritmos e funções exponenciais, continuidade e diferenciabilidade de funções, números complexos e equações no campo dos números complexos, bem como equações de coeficientes e raízes reais. Finaliza com um apêndice destinado a tratar da existência do número π e suas características transcendentais, bem como da Teoria dos conjuntos.

A primeira parte desse livro, destinada à Aritmética, foi dividida em três capítulos: o capítulo I trata dos números naturais, o segundo capítulo discute *As primeiras generalizações do conceito de número*, o terceiro capítulo trata *Das propriedades especiais dos números inteiros*, e o capítulo IV dos *Números complexos*.

A segunda parte dessa obra é reservada à Álgebra. Logo em seu início, Klein apresenta algumas referências bibliográficas que poderão ajudar o professor em aspectos relacionados à álgebra e lembra que "o objetivo do curso não é apresentar uma exposição sistemática e sim tratar de uma parte pouco apreciada [a álgebra], contudo de extrema importância pela relação íntima que tem com o ensino da matemática". O capítulo I é dedicado ao tema *Equações de coeficientes e raízes reais*, e o capítulo II destina-se a tratar das *Equações no campo dos números complexos*.

QA
37
.K64

ELEMENTARMATHEMATIK
VOM HÖHEREN STANDPUNKTE AUS.

TEIL I: ARITHMETIK, ALGEBRA, ANALYSIS.

VORLESUNG

GEHALTEN IM WINTERSEMESTER 1907 — 08

VON

F. KLEIN.

AUSGEARBEITET VON E. HELLINGER.

LEIPZIG 1908.

IN KOMMISSION BEI B. G. TEUBNER

Figura 2.2: Matemática Elementar de um ponto de vista avançado - Volume I: Aritmética, Álgebra e Análise - Aulas proferidas no semestre de inverno 1907-1908 por F. Klein - Organizadas por E. Hellinger - Leipzig 1908. Em consignação por B. G. Teubner.

FELIX KLEIN
ELEMENTARMATHEMATIK
VOM HÖHEREN STANDPUNKTE AUS

VIERTE AUFLAGE

ERSTER BAND
ARITHMETIK · ALGEBRA · ANALYSIS

AUSGEARBEITET VON
E. HELLINGER

FÜR DEN DRUCK FERTIG GEMACHT
UND MIT ZUSÄTZEN VERSEHEN VON
FR. SEYFARTH

NACHDRUCK
1968

MIT 125 ABBILDUNGEN



BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1933

Figura 2.3: Felix Klein - Matemática Elementar de um ponto de vista avançado - Quarta edição - Primeiro volume - Aritmética-Álgebra-Análise - organizado por E. Hellinger - edição final e comentários por FR. Seyfarth - Reimpressão 1968 - com 125 ilustrações - Berlin - editora de Julius Springer 1933.

A terceira parte desse livro é dedicada à análise. O autor, no primeiro capítulo, discute *O logaritmo e a função exponencial*, no segundo capítulo trata das *Funções goniométricas*, e no capítulo III mostra o *Cálculo infinitesimal propriamente dito*.

Nos apêndices, Klein discute inicialmente sobre a *Transcendência de π e e* . Posteriormente trata do tópico Teoria dos conjuntos, onde expõe sobre potência dos conjuntos e ordenação dos elementos de um conjunto.

Neste volume, o autor valoriza aspectos históricos dos conceitos estudados, apresenta exemplos e aplicações, sempre direcionados a outros conceitos matemáticos, sem se preocupar com problemas do cotidiano. Não apresenta provas dedutivas, limitando o estudo a simples apresentação direta de resultados, com poucas explicações de teoremas e suas demonstrações.

2.2.2 Matemática Elementar sob um ponto de vista avançado - Geometria

Nesta seção, após uma breve apresentação do livro de Geometria da série Matemática Elementar de um ponto de vista avançado, mostraremos como Felix Klein utiliza a geometria analítica, mais especificamente a teoria de determinantes, como ferramenta para trabalhar as noções de comprimento, área e volume.

No prefácio do livro *Matemática elementar de um ponto de vista avançado - Geometria* Klein coloca que este livro é um complemento de seu livro editado anteriormente *Matemática elementar de um ponto de vista avançado - Aritmética, álgebra e análise*. O autor enfatiza que "[procura dar] uma 'visão completa' do campo da geometria, de tal amplitude quanto eu desejaria que cada professor do ensino secundário tivesse" (KLEIN, 2004, Prefácio)¹.

O livro é baseado em palestras que tinham como finalidade a reforma do ensino escolar e as relações entre escolas e universidades de matemática na preparação dos estudantes universitários para as suas carreiras como professores nas escolas secundárias. É destinado a tratar especificamente de temas relacionados à Geometria. Aborda as variedades e transformações geométricas, faz uma sistematização da geometria e apresenta os fundamentos da geometria.

Os conceitos matemáticos do livro *Matemática Elementar de um ponto de vista avançado - Geometria*, apresentados em 228 páginas, são organizados em três blocos: *As mais simples*

¹ "This form is, in fact, quite unlike that of Part I. I made up my mind to give, above all, a comprehensive view of the field of geometry, of such a range as I should wish every teacher in a higher school to have"

FELIX KLEIN
ELEMENTARMATHEMATIK
VOM HÖHEREN STANDPUNKTE AUS

DRITTE AUFLAGE

ZWEITER BAND
GEOMETRIE

AUSGEARBEITET VON
E. HELLINGER

FÜR DEN DRUCK FERTIG GEMACHT
UND MIT ZUSÄTZEN VERSEHEN VON
FR. SEYFARTH

NACHDRUCK
1968

MIT 157 ABBILDUNGEN



BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1925

Figura 2.4: Felix Klein - Matemática Elementar de um ponto de vista avançado - Terceira Edição - Segundo volume - Geometria - organizado por E. Hellinger - Edição final e comentários por FR. Seyfarth - Reimpressão 1968 - com 157 ilustrações - Berlin - editora de Julius Springer - 1933.

variedades geométricas, As transformações geométricas, e Discussão sistemática da geometria e seus fundamentos.

Enquanto que no primeiro bloco o foco está sobre os objetos da geometria, dos mais elementares (pontos, segmentos, polígonos) aos mais rebuscados da geometria projetiva, o segundo trata das transformações geométricas que induzem diferentes geometrias nos objetos definidos na primeira seção. Aqui, a organização é aquela defendida por Klein desde seu programa apresentado em Erlangen: estudo dos grupos de transformações (afins, projetivas, entre outras) e das propriedades invariantes por estes grupos. A teoria dos invariantes é, então, apresentada sistematicamente no início do terceiro bloco, e os fundamentos da geometria são abordados sob o enfoque dos temas anteriores. Além disso, apresenta brevemente os Elementos de Euclides.

Nestes livros, provas dedutivas são omitidas ou são somente iniciadas pelo autor, que indica a direção de uma investigação mais aprofundada, deixando a demonstração aos leitores. O autor indica um grande número de citações de fontes originais e de outros livros que contenham mais detalhes das provas.

As obras de Klein sofreram várias críticas positivas e negativas. Para John M. Reiner (1941), Felix Klein foi um grande colaborador para a investigação matemática do seu tempo, foi também um grande reformador que buscou em seu famoso Programa de Erlanger a unificação de todas as matemáticas. E procurou em suas obras estabelecer pensamentos contrários ao maçante e mau ensino da matemática nas escolas da Alemanha nesse tempo. Já W. L. Duren Jr. (1934) criticava a falta de rigor no tratamento dado por Klein para os conteúdos matemáticos.

Na tradução espanhola do livro *Matemática Elementar sob um ponto de vista avançado* Klein (1931) apresenta um apêndice que discute o ensino da Geometria na Inglaterra, na França, na Itália e na Alemanha.

Para mostrar como Klein trata os conceitos matemáticos de comprimento, área e volume, apresentaremos de maneira mais detalhada, na seção seguinte, como foram introduzidos esses conceitos em seu livro.

2.3 Comprimento, Área e Volume

Klein, na seção I da Parte I do volume II, de seu livro faz uma definição de comprimento, área e volume por meio de determinantes. Em seguida, mostra algumas aplicações relativas à razão cruzada, descreve a área de polígonos retilíneos e de áreas curvilíneas, e termina apresentando a teoria do planímetro polar de Amsler.

Destarte, Klein coloca que seu desejo, ao separar a aritmética, álgebra e análise, da geometria, têm pressupostos fortes e profundos. O autor afirma que, pelo fato de existirem poucos livros didáticos que tratavam sobre geometria, escreve esse livro com o intuito de apresentar esse tema de maneira uniformizada, evitando o estereótipo.(KLEIN, 2004, Prefácio).²

O autor aponta, na introdução de seu livro, que procurou oferecer uma "pesquisa completa no campo da geometria", enfatizando que seus princípios baseavam-se na "instrução matemática".

Sua preocupação na "reorganização da instrução escolar em Aritmética, álgebra e análise", bem como a "introdução do cálculo diferencial e integral nas escolas", demonstra seu interesse em buscar uma maior interação entre as universidades e as escolas, pois, de acordo com ele, a instrução universitária "deixa o professor principiante inteiramente sem orientação para as coisas geralmente muito importantes que ele poderia usar realmente mais tarde".

Felix Klein também faz uso do "desenvolvimento da ciência histórica", salientando que discussões como esta favorecem a "cultura geral matemática" e auxiliam na "compreensão da matéria de estudo".

No que concerne à fusão dos campos da matemática - aritmética, álgebra, análise e geometria - ele dirá

[...] estou pensando, ao mesmo tempo, em uma fusão ainda mais profunda. Semestre passado eu me esforcei sempre para transmitir discussões abstratas da aritmética, álgebra e análise pelo significado de figuras e métodos gráficos, que trazem as coisas para mais perto do indivíduo e freqüentemente as tornam claras para ele, desde o primeiro instante. (KLEIN, 2, 2004).³

² The choice of this new order was motivated partly by the desire to avoid a stereotyped form.

³ (...) but I am thinking, at the same time, of a still more far-reaching fusion. Last semester I endeavored always to enliven the abstract discussions of arithmetic, algebra, and analysis by means of figures and graphic methods, which bring the things nearer to the individual and often make clear to him, for the first time (...).

Conforme estudos anteriores, sabemos que as idéias modernizadoras que Klein defendia baseavam-se na inclusão do estudo do Cálculo Diferencial e Integral nas classes finais do ensino secundário (hoje Ensino Médio); na unificação dos ramos da matemática (aritmética, álgebra, análise e geometria); no ensino de matemática voltado à intuição e partindo de tópicos da história da matemática.

A partir desses pressupostos, faremos agora uma análise do livro "Matemática Elementar sob um ponto de vista avançado - Geometria" restringindo nosso estudo ao capítulo 1, *As mais simples variedades geométricas*, onde enfatizaremos a parte que o autor, Felix Klein, discute os conceitos de comprimento, área, volume como magnitudes relativas.

O autor inicia o capítulo descrevendo as grandezas comprimento, área e volume utilizando determinantes. Fica subentendida e confundida, durante todo o texto, a notação que representa os pontos na reta, no plano e no espaço. Em todos os casos, ele denomina os pontos utilizando os números 1, 2, 3 e 4, sendo que o leitor deverá considerar seus valores ou coordenadas, caso a caso. Por exemplo, ao definir a noção de comprimento entre os pontos 1 e 2, ele dirá:

Se tratamos de um segmento de reta, pensemos nele repousado sobre o eixo x . Considerando as abscissas de seus extremos como x_1 e x_2 , seu comprimento será $x_1 - x_2$, e esta diferença poderá ser colocada na forma de determinante:

$$(1, 2) = x_1 - x_2 = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prossegue definindo o conceito de área de um triângulo tomando o plano xy e três pontos quaisquer pertencentes a este plano. Dessa forma o autor descreve a área do triângulo seguindo analiticamente o exposto abaixo:

[...] a área de um triângulo no plano xy o qual é formado por três pontos 1, 2, 3, com coordenadas (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , será:

$$(1, 2, 3) = \frac{1}{1.2} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Continua sua explanação definindo o volume do tetraedro. Para isso, o autor toma quatro pontos (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) , (x_4, y_4, z_4) no espaço e apresenta analiticamente o volume do tetraedro conforme descrito abaixo:

[...] o volume de um tetraedro feito por quatro pontos 1, 2, 3, 4 com coordenadas (x_1, y_1, z_1) , ..., (x_4, y_4, z_4) , tem a fórmula:

$$(1, 2, 3, 4) = \frac{1}{1.2.3} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{pmatrix}.$$

A proposta de Klein para o estudo das noções de comprimento, área e volume nasce, primeiro, da tentativa de introduzir a geometria analítica, o uso de coordenadas e de determinantes como chave para estudar as questões geométricas. Além disso, o fato de Klein permitir que o resultado das contas tenha sinal negativo, servirá de mote para a introdução de alguns problemas da geometria projetiva. É a união dos métodos analítico e sintético, e a retirada do método axiomático euclideano como forma de ensino da geometria.⁴

Klein poderia ter explicitado, em sua obra, como chegou a esses resultados. Para o comprimento de um segmento, vemos que essa fórmula é evidente. Já, para o caso da área do triângulo, tomaremos como base a dissertação de mestrado de Felix Silva Costa, intitulada *Áreas e contornos*, que explica, de forma clara e sucinta, como podemos chegar a esse resultado colocado por Klein.

Para isso, Costa (2008) toma um triângulo $P_0P_1P_2$ situado no plano cartesiano como na Figura 2.5

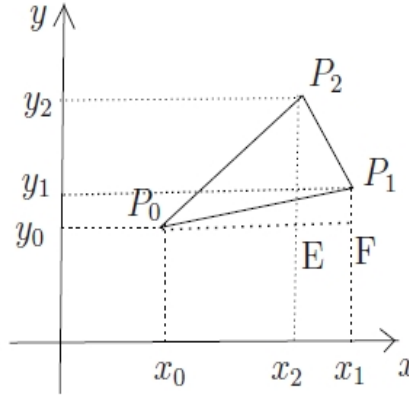


Figura 2.5: Triângulo determinado pelos pontos P_0 , P_1 e P_2 .

Dessa forma, a área desse triângulo será calculada, somando-se a área do triângulo P_0EP_2 com a área do trapézio EFP_1P_2 e subtraindo da área do triângulo P_0FP_1 , ou seja,

$$A_{P_0P_1P_2} = A_{P_0EP_2} + A_{EFP_1P_2} - A_{P_0FP_1}$$

Segue que, substituindo os valores das coordenadas destes pontos, temos:

$$\begin{aligned} A_{P_0P_1P_2} &= \frac{(x_2 - x_0) \cdot (y_2 - y_0)}{2} + \frac{[(y_2 - y_0) + (y_1 - y_0)] \cdot (x_1 - x_2)}{2} - \frac{(x_1 - x_0) \cdot (y_1 - y_0)}{2} \\ &= \frac{1}{2} [x_2y_2 - x_2y_0 - x_0y_2 + x_0y_0 + x_1y_2 - x_2y_2 - x_1y_0 + \\ &\quad + x_2y_0 + x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_0 + x_2y_0 - x_1y_1 + x_1y_0 + x_0y_1 - x_0y_0] \end{aligned}$$

⁴ Resultados prévios sobre essa questão podem ser encontrados em [Siqueira 2009, Siqueira 2010].

$$= \frac{1}{2}[(x_0y_1 - x_1y_0) + (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_0 - x_0y_2)].$$

Dai, a área do triângulo com vértices no sentido anti-horário através do cálculo dos determinantes formados pelas coordenadas do triângulo é expressa por:

$$A_{P_0P_1P_2} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_0 & y_0 \end{pmatrix} \right]$$

Se desenvolvermos o determinante

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}$$

pela regra de Laplace, temos que:

$$\frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_0 & y_0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{1.2} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que Costa (2008) utilizou conceitos simples da geometria analítica para demonstrar essa fórmula. Klein, pensando em um ensino de matemática voltado para a intuição, e utilizando conceitos analíticos, poderia ter explicitado ao leitor como chegar a fórmula analítica da área do triângulo. Silva Junior (2008) explica como encontrar analiticamente a fórmula do volume do tetraedro, que nada mais é que uma generalização do resultado encontrado para a área do triângulo.

Depois de apresentar as fórmulas de comprimento, área e volume, Klein segue dizendo que, infelizmente, é comum se considerar o valor absoluto no estudo dessas magnitudes. Esclarece que esse sinal é dado dependendo da ordem na qual os pontos são tomados. Partindo desse pressuposto, apresenta uma regra fundamental que, segundo ele, sempre deve ser utilizada na geometria para explicar os sinais que as fórmulas analíticas apresentam. Aproveita para fazer uma investigação do significado geométrico do sinal nestas determinações.

Explica essa investigação tomando como base o "sistema de coordenadas retangulares", e encontra a interpretação do sinal a partir de "propriedades geométricas simples da sucessão de pontos como estes são determinados pela sua ordem".

Nesse ponto do trabalho, Klein diz que para o segmento esta propriedade é evidente, e complementa isso mostrando que o comprimento pode ser positivo ou negativo dependendo da localização do ponto 1; se este ponto está à direita do ponto 2, o comprimento será positivo; e se este ponto está à esquerda do ponto 2, o comprimento será negativo.

Continua explicando que o sinal da área de um triângulo pode ser positivo ou negativo conforme os vértices 1, 2, 3 são tomados; se esses pontos são tomados no sentido anti-horário (de 1 para 3 passando pelo 2), o sinal da área será positivo; se esses pontos são tomados no sentido horário (de 1 para 2 passando por 3), o sinal da área será negativo, conforme ilustra a Figura 2.6:

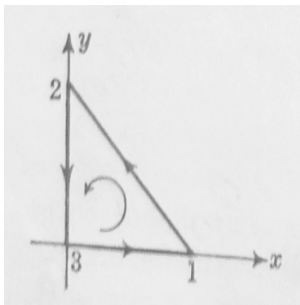


Figura 2.6: Triângulo orientado positivamente

Klein continua sua exposição provando o significado geométrico do sinal para a área do triângulo. Para isso o autor toma um triângulo peculiarmente colocado no plano xy , cujos vértices estão localizados nos pontos $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 0)$. A partir do determinante que expressa a área desse triângulo, faz uma avaliação do sinal deste determinante, explicando o resultado obtido no cálculo do determinante:

De acordo com o nosso entendimento sobre o sistema de coordenadas, nós devemos percorrer este triângulo no sentido anti-horário e nossa fórmula de sua área concebe o valor positivo:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = +\frac{1}{2}.$$

Finaliza esta explicação salientando que, ao modificarmos continuamente os vértices do triângulo, tomando o devido cuidado em não deixá-los em uma posição colinear, o sinal do determinante não modificará. Isso se deve ao fato do determinante ser uma função contínua em relação às suas entradas (Spivak, 1965). De fato, o cuidado de não deixar que os pontos sejam colocados em uma posição colinear implica que a função determinante não anulará, ou seja, sempre será positiva. Consequentemente, qualquer triângulo orientado como o triângulo original terá área positiva, dado ele poder ser obtido por meio de modificações contínuas do primeiro.

No caso do volume do tetraedro. Ele assume um tetraedro convenientemente colocado no espaço, de maneira que três vértices estão sobre os eixos x, y, z, respectivamente e o quarto ponto fica localizado na origem. Assim o volume do tetraedro é:

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = +\frac{1}{6}.$$

Analogamente, todo tetraedro que é uma deformação contínua deste, desde que seus vértices não sejam colineares, tem seu volume positivo. Continua esclarecendo que o volume de todo tetraedro que é percorrido pelos vértices 2, 3, 4 olhado a partir do vértice 1 é positivo (sentido anti-horário); para o caso contrário, seu volume é negativo (sentido horário).

Dessa forma, Klein ressalta que das fórmulas analíticas do comprimento, área e volume chega-se às regras geométricas que permitem indicar um sinal determinado para algum segmento, triângulo ou tetraedro, dependente da ordem pela qual os vértices são dados. O autor enfatiza ainda que "grandes vantagens, portanto ganham com relação à geometria ordinária elementar que considera comprimento e superfícies como magnitudes absolutas". (KLEIN, 2004, 5). ⁵

A partir da prova da interpretação geométrica do sinal dessas grandezas, Klein menciona alguns teoremas gerais simples. Começa explicando a razão de segmentos, para isso, o autor toma três pontos em uma reta, designados por 1, 2 e 4, conforme ilustra a Figura 2.7, e define a razão como $S = \frac{(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_4)}$. Dessa forma, esse quociente é negativo ou positivo dependendo de onde o ponto 1 se encontrar; caso o ponto 1 se encontre do lado de fora do segmento (2,4) a razão será positiva, e se o ponto 1 se encontrar do lado de dentro do segmento (2,4) a razão será negativa.

Felix Klein continua sua explanação lembrando que é comum considerar o valor absoluto dessa razão. Porém, tomando a introdução do sinal, podemos considerar diferentes pontos na reta.

Partindo dessas preleções, percebemos a preocupação do autor em apresentar as aplicações que podem ser utilizadas em sala de aula da interpretação geométrica do sinal, e

⁵ Great advantages are thus gained over the ordinary elementary geometry which considers length and contents as absolute magnitudes.

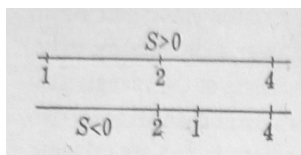


Figura 2.7: Exemplo de dois segmentos aonde três pontos (1,2 e 4) são dispostos de maneira que as razões têm sinais diferentes.

em mostrar que esse conceito faz-se necessário para que professores e alunos tenham uma melhor compreensão do conceito de valor absoluto.

Notamos também as dificuldades que Klein tem em matematizar suas demonstrações. Percebemos que ele procura descrever suas demonstrações de forma simples e sem muitos detalhes.

Klein continua apresentando outra aplicação da interpretação geométrica do sinal. Para isso define a razão cruzada de quatro pontos tomando a razão de segmentos citada anteriormente e nesta acrescentando um ponto, denominado ponto 3: $D = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_4} : \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_4} = \frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)}{(x_1 - x_4)(x_3 - x_2)}$. Evidentemente, esta razão tem um sinal definido. Partindo da interpretação geométrica do sinal temos que $D < 0$ quando os pontos 1 e 3 estão de um lado e os pontos 2 e 4 estão de outro lado, ou seja, ambos se encontram separados. Caso contrário $D > 0$, ou seja, os pontos 1 e 3 ficam ambos do lado de fora ou ambos estão do lado de dentro do segmento (2, 4).

Prossegue sua explicação mostrando o teorema que diz que quatro pontos na reta têm a mesma razão cruzada dos quatro pontos obtidos quando projetamos pontos dados de um centro ao outro da linha, dito *perspectiva*. Explica que considerando a razão cruzada como uma grandeza relativa tendo sinal, a recíproca deste teorema é válida. Klein enuncia esse teorema da seguinte forma: "Dados dois conjuntos de quatro pontos situados sobre duas retas, e que possuem a mesma razão cruzada, então eles podem ser derivados um do outro por projeção, uma única ou aplicada de forma repetida", conforme Figura 2.8.

Neste trecho, o autor poderia ter estabelecido discussões acerca das conexões existentes entre esse teorema e o Teorema de Pappus.

Segundo Eves, em seu Introdução à história da matemática, Pappus (+- 300 D.C.) demonstrou, no livro VII da Coleção Matemática, o seguinte teorema sobre a projeção de quatro pontos:

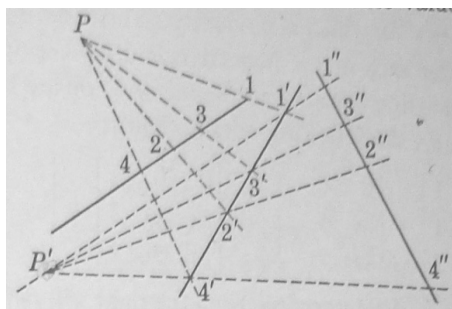


Figura 2.8: Correspondência projetiva entre pontos sobre duas retas

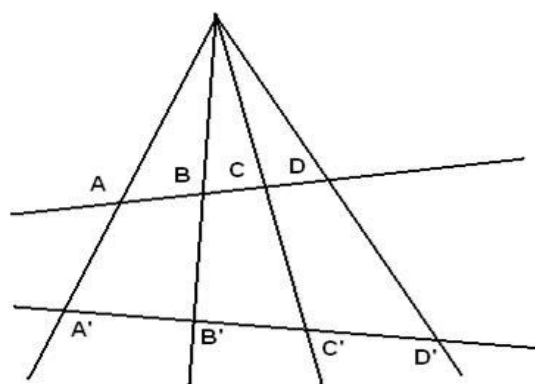


Figura 2.9: Projeção de quatro pontos

Se quatro semirretas de mesma origem são cortadas por duas transversais nos pontos A , B , C , e D (numa destas) e A' , B' , C' , e D' (na outra), então as razões duplas destes pontos, respectivamente, são iguais, ou seja,

$$(AC/CB).(DB/AD) = (A'C'/C'B').(D'B'/A'D').$$

O teorema enunciado por Klein seria, portanto, seria generalização do Teorema de Pappus. No entanto, Eves parece ser a única fonte secundária que se reporta a esse teorema, o que compromete, sem dúvida, a veracidade da informação. Um pouco cético sobre a questão, Coolidge dirá que pode se dizer que tanto Euclides quanto Pappus sabiam do teorema (Coolidge 1934). Indo em outro sentido, encontra-se mais facilmente, inclusive reportando-se a fontes primárias, o seguinte teorema de Pappus sobre pontos colineares (Ryan 1995, p126; Coxeter 1967, p 67; Marchisotto 2002):

Se A, C, E são três pontos em uma reta e B, D, F em outra reta, e se os três segmentos AB, CD e EF encontram DE, FA, BC , respectivamente, então os três pontos da intersecção L, M , e N são colineares.

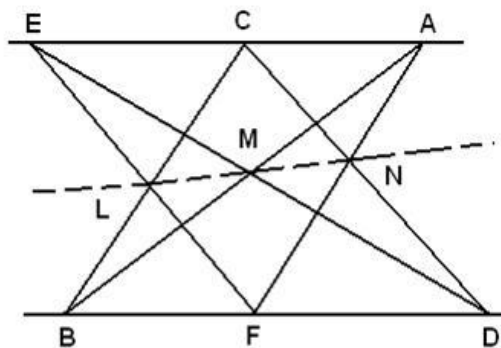


Figura 2.10: Pontos colineares

É importante observar que, tanto o teorema de Pappus quanto o teorema enunciado por Klein se remetem a um teorema mais antigo, creditado a Menelaus de Alexandria (+100 D.C.), sobre pontos colineares (Coxeter 1967, 66):

Se os pontos X, Y e Z , pertencentes aos lados BC, CA, AB (ou a segmentos que os contém) do triângulo ABC , são colineares, então

$$(BX/CX)(CY/AY)(AZ/BZ) = 1.$$

Reciprocamente, se esta equação é verdadeira para os pontos X, Y, Z , pertencentes aos lados BC, CA, AB (ou a segmentos que os contém) do triângulo ABC , então estes três pontos são colineares.

Klein mostra um campo frutífero de aplicações diretamente ligadas a outros conceitos matemáticos. O autor, neste ponto, discute sobre o cálculo da área de figuras poligonais e a área de figuras curvilíneas fechadas partindo das áreas parciais dos triângulos dessas figuras e levando em consideração o sentido nos quais os vértices desses triângulos parciais são tomados para a determinação do sinal.

Para a área de um triângulo, tome um ponto O no interior de um triângulo 1, 2, 3, conforme ilustra a Figura 2.9 (a). Unindo o ponto O a cada um dos vértices, a soma das áreas parciais, por um sentido elementar, é igual a área do triângulo original. Assim, pode-se escrever $|(1, 2, 3)| = |(0, 2, 3)| + |(0, 3, 1)| + |(0, 1, 2)|$, como em todos os triângulos a ordem

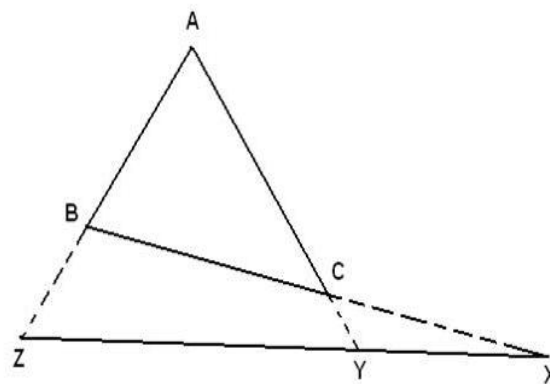
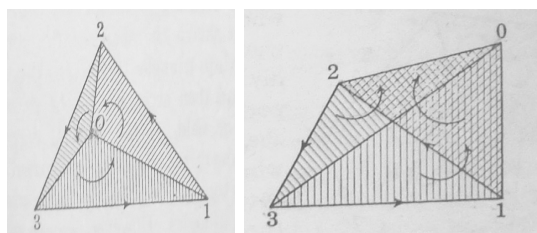


Figura 2.11: Pontos colineares em um triângulo

dos vértices, como eles aparecem nas equações acima, é anti-horário. Dessa forma, as áreas $(1, 2, 3)$, $(0, 2, 3)$, $(0, 3, 1)$, $(0, 1, 2)$, são todas positivas, assim podemos reescrever a equação acima da seguinte forma $(1, 2, 3) = (0, 2, 3) + (0, 3, 1) + (0, 1, 2)$.

Klein lembra que o mesmo vale quando o ponto O se encontra fora do triângulo para quaisquer pontos $0, 1, 2, 3$, do plano. E mostra que se tomarmos um ponto O fora do triângulo, conforme mostra a Figura 2.9 (b), os triângulos parciais $(0, 2, 3)$, $(0, 3, 1)$, são percorridos no sentido anti-horário, já o triângulo $(0, 1, 2)$ é percorrido no sentido horário, dessa forma, nossa equação de áreas absolutas é dada por $|(1, 2, 3)| = |(0, 2, 3)| + |(0, 3, 1)| - |(0, 1, 2)|$.



(a) Triângulo 1

(b) Triângulo 2

Figura 2.12: Cálculo da área de um triângulo através de áreas parciais

O autor continua sua explanação provando esse teorema a partir da definição analítica. Para isso adota um ponto O na origem do sistema de coordenadas, posteriormente substitui cada uma das áreas parciais do triângulo por determinantes apropriados, omitindo o fator $\frac{1}{2}$, prova que, para $x_1, \dots, y_3$ arbitrários, o segmento mantém a relação. Dessa forma, segue que:

$$|(1, 2, 3)| = |(0, 2, 3)| + |(0, 3, 1)| - |(0, 1, 2)|$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Klein esclarece que os valores dos determinantes à direita continuam invariantes se nós substituirmos o segundo e o terceiro 1 da última coluna por zeros. Dessa forma, quando desenvolvemos estes determinantes, esses elementos são multiplicados por zero. Fazendo uma troca cíclica dos elementos principais dos dois últimos determinantes, o que é absolutamente permitido para determinantes de terceira ordem ou de ordem ímpar, nossa equação será dada por:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Felix Klein lembra que nesta identidade na soma de determinantes à direita estão apenas os menores da última coluna do primeiro determinante. Assim, temos que o teorema está provado para qualquer posição dos quatro pontos.

O autor continua sua explanação explicando que é possível generalizar esta fórmula para a área de um polígono de n lados. Propõe então que se reflita sobre o seguinte problema: "determinar a área de uma figura retilínea após ter medido as coordenadas dos vértices $1, 2, \dots, n-1, n$ ", conforme ilustra a Figura 2.10, Klein lembra que aquele que não é habituado a operar com sinais, possivelmente esboçará este polígono dividindo-o em triângulos pelo esboço de suas diagonais, dessa forma, partindo de uma ordem de tomada dos vértices é possível calcular a área desse polígono a partir da soma ou diferença das áreas dos triângulos parciais.

Porém, ressalta que é possível escrever a fórmula geral sem esboçar o polígono, assim enuncia: "se O é um ponto no plano, convencionalmente situado na origem do sistema de coordenadas, e os vértices desse polígono são percorridos no sentido $1, 2, \dots, n$, a fórmula geral é dada por $(1, 2, 3, \dots, n) = (0, 1, 2) + (0, 2, 3) + \dots + (0, n-1, n) + (0, n, 1)$ ", onde cada triângulo deve ser tomado com o sinal do determinante respeitando o sentido pelo qual os vértices são tomados. Lembrando que "a fórmula resulta para a área de um polígono positivamente ou negativamente, de acordo com o circuito do polígono no sentido, $1, 2, \dots, n$ ser anti-horário ou não".

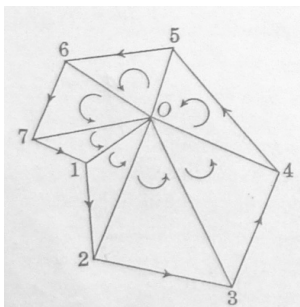


Figura 2.13: Polígono orientado positivamente

O autor convida os leitores a fazerem a demonstração da proposição mencionada acima. Mais uma vez percebemos que o autor apresenta dificuldades em matematizar as demonstrações de suas proposições e teoremas, alegando ser de fácil demonstração. Porém deixa esses pequenos detalhes para os leitores, sem dar muito embasamento teórico e matemático. O autor se limita apenas à intuição matemática dessas conjecturas.

Nesse ponto do trabalho, Klein cita outros exemplos de aplicação da determinação do sinal para o cálculo de áreas de polígonos. Toma como exemplo polígonos que se interceptam em um determinado ponto, conforme ilustra a Figura 2.11.

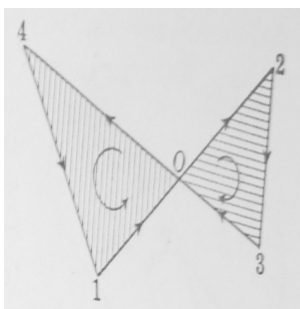


Figura 2.14: Polígono que se intercepta em um ponto

Ele salienta que o ponto O pode ser tomado em qualquer lugar, mas para esse polígono ele coloca o ponto O em um local convenientemente escolhido, no ponto de interseção desse polígono. Temos então que esse é descrito por $(1, 2, 3, 4) = (0, 2, 3) + (0, 4, 1)$. Explica que o primeiro triângulo tem área negativa e o segundo tem área positiva, dessa forma, o autor conclui que a área desse polígono, tomando o circuito no sentido $(1, 2, 3, 4)$ é, igual ao valor absoluto da área da parte $(0, 4, 1)$ que está no sentido anti-horário, diminuído pela parte $(0, 2, 3)$ que é percorrida no sentido horário.

Klein também menciona outro exemplo, no qual examina o caso da estrela pentagonal, ilustrada na Figura 2.12.

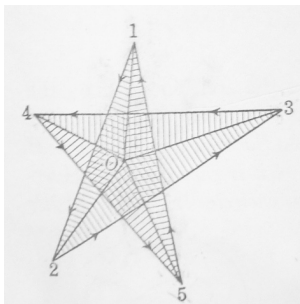


Figura 2.15: Estrela pentagonal

Inicia essa explicação tomando o ponto O no centro da estrela pentagonal. Dessa forma, se tomarmos todos os triângulos parciais na soma $(0, 1, 2) + (0, 2, 3) + \dots + (0, 5, 1)$ percorridos no sentido positivo; segue que a soma deles cobre os cinco cantos da parte central da figura duas vezes, e cada uma das cinco pontas uma vez. Assim, considerando o circuito positivo em torno do nosso polígono $(1, 2, 3, 4, 5, 1)$ é fácil ver que todas as partes do extremo são percorridas no sentido anti-horário e que a parte central desse polígono é percorrida duas vezes. Assim, a área é duplamente contada, lembra também que o restante do polígono é percorrido apenas uma vez.

Continua sua explicação deduzindo uma regra geral a partir dos dois exemplos citados anteriormente, a qual o autor afirma que "para um retângulo retilíneo com linhas arbitrárias, nossa fórmula dá como área total a soma algébrica das áreas parciais limitadas pela linha poligonal, onde cada uma dessas áreas parciais é contada com a frequência que nós passarmos em torno de seu limite quando o circuito $(1, 2, 3, \dots, n, 1)$ é feito mais de uma vez. Essa contagem pode ser feita positivamente ou negativamente conforme passarmos em torno da área parcial em sentido horário ou anti-horário". Finalmente lembra que ao estabelecermos este princípio não teremos dificuldades em aplicar este teorema.

Klein, nesse ponto, mostra outro exemplo importante para o caso de polígonos limitados por áreas curvilíneas. Exemplifica tomando uma curva fechada, na qual marca-se um sentido definido de direção ao longo desta curva. O autor explica que encontraremos a área desta curva se aproximarmos a curva pelos polígonos, tomando pequenos acréscimos e calculando o limite dessas áreas destes polígonos, conforme ilustra a Figura 2.13.

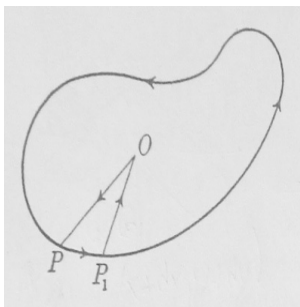


Figura 2.16: Curva fechada

Assim, Felix Klein toma os pontos $P(x, y)$ e $P_1(x + dx, y + dy)$ que são os dois vértices bem próximos desse polígono. Logo, sua área consiste na soma dos triângulos elementares (OPP_1), cuja soma será:

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \\ x + dx & y + dy & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x dy - y dx)$$

No limite, esta soma torna-se a integral de linha

$$\frac{1}{2} \oint (x dy - y dx)$$

ao longo da curva, que define o limite da área limitada pela curva. Nesse ponto o autor faz uma definição geométrica para este caso: "cada área parcial limitada pela curva é contada positivamente se seu circuito for tomado no sentido anti-horário e negativamente se seu circuito for tomado no sentido horário, esta curva pode ser percorrida mais de uma vez em sentido determinado. Enfatiza que para uma curva simples, como a da figura acima, o cálculo da integral resulta na área exata limitada pela curva, tomada no sentido anti-horário (positivo).

Neste trecho do livro, Klein poderia ter utilizado a demonstração do Teorema de Green para esclarecer ao leitor como se chega a essa integral. Para verificar essa demonstração, consulte o trabalho de Costa (2008).

Em sua reflexão Klein também mostra outros tipos de curvas e explica como são tomados os circuitos bem como quantas vezes cada circuito é contado positivamente ou negativamente. Esclarece que na primeira figura a parte externa é contada uma vez positivamente e a parte interna é contada duas vezes; na segunda figura o lado esquerdo é negativo e o direito

é positivo, dessa forma, o conjunto resulta em uma área negativa; já na terceira figura, uma parte não é toda contada, pois ela é percorrida uma vez no sentido anti-horário e outra vez no sentido horário.

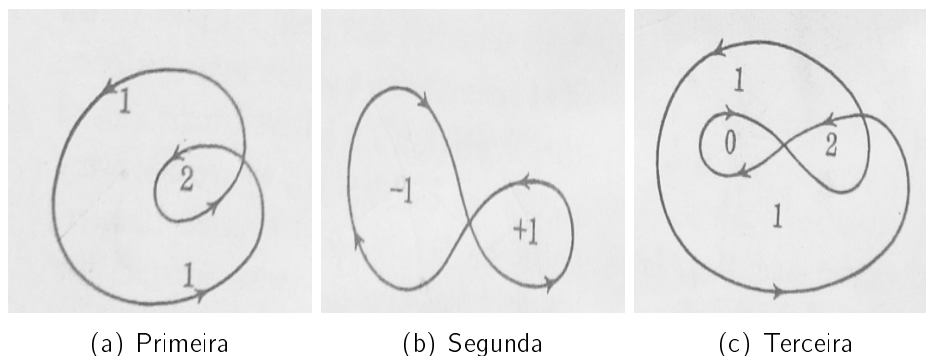


Figura 2.17: Circuitos orientados positivamente e negativamente

Percebemos nesse trecho que Klein já se utiliza de outro conceito matemático para o cálculo da área de uma figura plana e curvilínea. Ele introduz o conceito de limite, bem como de integral para resolver esse problema. Note que este livro é direcionado para professores do ensino secundário, porém nesse fragmento o autor convida o professor a utilizar os conceitos de derivada e integral para explicar o cálculo de áreas curvilíneas. Vale lembrar que a introdução do cálculo diferencial e integral no ensino secundário fazia parte da proposta de Klein para a modernização do ensino da matemática.

Porém, o autor, não esclarece ao leitor os conceitos matemáticos que originam essa integral. Nesse ponto, percebemos novamente que o autor não se utiliza da intuição para explicar conceitos matemáticos, ele simplesmente apresenta resultados.

Para finalizar esta parte, Klein descreve o Planímetro Polar de Amsler e mostra como esse equipamento funciona a partir das definições e exemplos apresentados acima.

O autor começa fazendo alguns apontamentos históricos relativos à invenção e utilidade desse equipamento, coisa bem modesta se pensarmos na riqueza de dados históricos sobre o mesmo.

Construído em 1854, o planímetro polar é um instrumento utilizado para medir uma área plana limitada por uma curva que não se intercepta, seu idealizador foi o mecânico Jacob Amsler de Schaffhausen. Klein destaca que este equipamento efetua a determinação das áreas de acordo com as discussões feitas por ele anteriormente. E apresenta a base teórica da construção do planímetro polar.

O trabalho de Costa (2008) apresenta com mais detalhes a conexão entre o funcionamento do planímetro o e Teorema de Green.

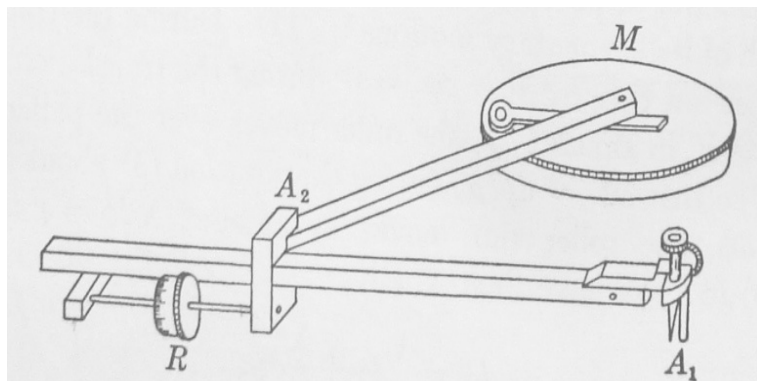


Figura 2.18: Planímetro Polar

Klein finaliza essa parte do livro fazendo uma crítica aos matemáticos puros que se fixam em explicações teóricas sem mostrar na prática como os instrumentos funcionam e critica também o oposto do pensamento mecanicista (construtivismo) que faz o contrário, que mostra o funcionamento dos equipamentos sem explicações teóricas, dessa forma, o autor enfatiza que na matemática deve haver um elo entre a teoria e a prática.

Lembra que não se pode ignorar os erros no funcionamento deste equipamento, e explica que nem sempre o desenho do papel será uniformemente plano. Alerta que essas questões são importantes na prática e que cabe a investigação matemática verificar o porquê destes erros.

Os reflexos do Movimento Internacional de Reforma do Ensino da Matemática no Brasil

"Há uma única ciência, a matemática, a qual ninguém se pode jactar de conhecer porque suas conquistas são, por natureza, infinitas; dela toda gente fala, sobretudo os que mais a ignoram." (Malba Tahan)

No Brasil, a referência do ensino, em meados do século XIX estava centrada no Colégio Pedro II, cujo surgimento se deve à reorganização do antigo Seminário de São Joaquim, pelo então ministro do Império, Bernardo Pereira de Vasconcelos. Inaugurada, conforme decreto de 2 de dezembro de 1837, esta instituição passou a se chamar Imperial Colégio de Pedro II. Era considerada como referência do ensino daqueles tempos, pois nessa instituição lecionavam os melhores e mais renomados professores da época, conforme aventa Roxo:

[...] era o melhor colégio do Brasil, o único mantido pelo governo federal. Ali, desde os primeiros tempos do 2º Reinado, haviam lecionado e continuavam a lecionar os maiores nomes do nosso magistério; dali haviam saído muitos dos grandes homens de nossa Pátria (ROXO apud DASSIE, 29, 2008).

Foi também no Colégio Pedro II que surgiram as primeiras iniciativas concernentes à reforma do ensino matemático. Como apontamos anteriormente, o Brasil no ano de 1912 foi convidado a participar no congresso do IMUK, porém sem direito a voto.

Nesse período, os professores Eugênio de Barros Raja Gabaglia e Joaquim Inácio de Almeida Lisboa dividiam a cátedra de matemática no externato do Colégio Pedro II. Valente

(2004) coloca que Gabaglia "admirava a síntese subjetiva, divergindo da síntese religiosa" e que também "era um herdeiro da tradição". Almeida Lisboa era considerado, de acordo com Valente (2004), "um mestre ríspido, defensor da ordem e da máxima disciplina". Dessa forma, percebemos que ambos valorizavam o desenvolvimento do raciocínio dedutivo, porém Gabaglia se mostrava mais interessado em mudanças curriculares no ensino de matemática que Almeida Lisboa.

Ressaltamos aqui o importante papel desempenhado por Raja Gabaglia e Arthur Thiré, professores de matemática do internato do Colégio Pedro II, como os precursores de modificações realizadas no ensino de matemática no Brasil. Nas palavras de Valente:

[por volta do século XX ocorreu] uma modificação do ensino de matemática [...] pelas mãos de Gabaglia. Foi ele o responsável pela substituição dos velhos compêndios de matemática, em uso no colégio desde a metade do século XIX, por novos livros didáticos conhecidos pela sigla F. I. C. [Frères de l' Instruction Chrétienne]. Gabaglia traduziu para o português vários livros didáticos como *Elementos de Aritmética*, *Álgebra*, *Geometria*. (VALENTE, 2004, 48-49, grifo do autor).

Essa substituição, porém, não representou uma nova matemática, pois esses livros traduzidos por Gabaglia estavam moldados nos métodos tradicionais de ensino. Mesmo assim, foram utilizados até meados de 1950.

Enfoque especial se dá ao professor Arthur Thiré, pois dentre todos os catedráticos de matemática do Colégio Pedro II da época, foi ele quem obteve maior destaque, por ser o mais atualizado de todos e pelo seu interesse por discussões relativas ao ensino de matemática.

Thiré [apresentou] uma trajetória profissional um tanto diferente da de seus colegas de magistério brasileiros. [...] Em 1912, Thiré propõe que seja nomeada uma comissão para estudar as modificações a serem feitas na distribuição das matérias do curso. Ainda na mesma reunião, revelando grande interesse pela atualização do ensino de matemática no colégio, Thiré propõe que seja também nomeada uma outra comissão "para dar os passos necessários no intuito de arranjar que o governo nomeie o dr. Raja Gabaglia, delegado do Brasil no Congresso de Matemática a reunir-se na Europa". (VALENTE, 2004, 52-53).

As idéias de Thiré foram aprovadas pelos professores e a comissão foi criada tendo como membros Henrique Costa, Raja Gabaglia e Arthur Thiré. Assim, conforme citado anteriormente, Raja Gabaglia foi escolhido como delegado representante do Brasil para participar do V Congresso Internacional de Matemática, ocorrido na Inglaterra em 1912, porém sem direito

a voto. Gabaglia, apesar de ter mostrado interesse pelo "aperfeiçoamento da organização do ensino" do Brasil e se comprometer a entregar "um estudo completo sobre o conjunto dos estabelecimentos que fornecem um ensino matemático" no congresso seguinte, não o fez. Mas porque Raja Gabaglia não se interessou pelas questões relativas ao movimento internacional de reforma do ensino de matemática? Valente (2004) coloca algumas idéias que podem ter levado Gabaglia a isso:

[...] ao que tudo indica, o mestre pouco ou nada teria se enfronhado nos debates sobre a reforma modernizadora e mais teria feito o papel de relações públicas do governo brasileiro. Outra hipótese é que Gabaglia, participando dos debates, teria também alinhado suas posições àquelas da Itália, quem sabe até, por uma questão de afinidade de origem familiar... Gabaglia [...] teria interesses menos idealistas e mais pragmáticos: divulgar e dar uso aos livros F. I. C., que traduziu pela Garnier - livros que seriam considerados ultrapassados, em face do ideário da modernização proposto pela reforma internacional. (VALENTE, 2004, 57).

Não se sabe ao certo o que levou Gabaglia a não debater com seus colegas matemáticos do Colégio Pedro II as propostas da reforma modernizadora. Porém, o fato de os livros da Coleção F. I. C., traduzidos por ele, serem ultrapassados diante do ideário reformista, pode ter interferido na divulgação e debates da reforma internacional no Brasil, mas especificamente, no Colégio Pedro II.

Thiré e Gabaglia colaboraram de certa forma para as mudanças curriculares ocorridas naquela época, mas as mudanças mais significativas e de maior ênfase no currículo da matemática brasileira aconteceram com Euclides Roxo.

O movimento mundial de renovação do ensino secundário liderado, entre outros, pelo matemático alemão Félix Klein, vinha ocorrendo nos países mais adiantados, desde o início do século XX, e tinha, no Brasil, Roxo como seu mais destacado intérprete e principal articulador. (VALENTE, 2005, CD-ROM).

Faremos um breve histórico de Euclides Roxo e, em seguida, descreveremos sua atuação como educador matemático e as mudanças implantadas por ele no currículo escolar brasileiro.

3.1 Euclides Roxo: Contexto histórico

Euclides de Medeiros Guimarães Roxo, considerado como o primeiro educador matemático brasileiro, nasceu em 10 de dezembro de 1890, em Aracaju, Sergipe. Seu pai, João Baptista

Guimarães Roxo, era Engenheiro em Aracaju, e desde cedo lhe incentivou a estudar no Colégio Pedro II, visto ser uma entidade renomada na época. Relata Roxo "Lá de um longínquo rincão do triângulo mineiro, onde passei a infância aprendi a admirar o Colégio Pedro II, para o qual meu pai me estimulava a entrar, dizendo que era o melhor colégio do Brasil"(DASSIE, 29, 2008).

Roxo entrou no Colégio Pedro II, em 1904, e bacharelou-se em 1909. Destacando-se como estudante interno, recebeu o prêmio "Panteão". Ingressou nessa mesma instituição como professor substituto na cátedra de aritmética por aprovação em concurso. Em 1916 formou-se Engenheiro Civil pela Escola Politécnica do Rio de Janeiro.

Valente (2004) sugere que com a morte do professor Eugênio de Barros Raja Gabaglia, em 1919, ficam em aberto as discussões acerca do encargo referente à vaga na cátedra de matemática deste colégio. Com isso, Arthur Thiré, no intuito de conseguir a vaga, transfere-se do internato para o externato dessa instituição. Roxo, baseado na lei e no Regulamento Interno do Colégio Pedro II, afirma que esta vaga lhe pertence, por ser ele o substituto e assim se põe em primeiro lugar para a vaga aberta. Roxo vence essa disputa e em 1919 é nomeado catedrático interino de matemática, e no mesmo ano também é nomeado catedrático de matemática do colégio Pedro II pelo presidente Eptácio Pessoa.

Em 1924 recebe novamente o prêmio "Panteão" por sua atuação como docente no Colégio Pedro II.

Roxo, em 19 de agosto de 1925, foi nomeado Diretor interino do Externato do Colégio Pedro II e, em 3 de março de 1926, Arthur Bernardes aprova sua nomeação como Diretor do Externato dessa instituição de ensino, cargo que ocupou até 1930, assumindo a partir deste ano a direção do Internato onde permaneceu até 1935.

No Colégio Pedro II, Roxo também atuou como examinador de Francês, Latim e Matemática. Em 1933, foi aprovado no concurso para catedrático no Instituto de Educação do Rio de Janeiro. Em 1937, atuou como diretor do Ensino Secundário no Ministério da Educação e Saúde. Atuou também como membro da comissão Nacional do Livro Didático e, posteriormente, como presidente dessa comissão.

Euclides Roxo, como professor e diretor do Colégio Pedro II, foi responsável por importantes mudanças curriculares nesse estabelecimento. A primeira destas mudanças diz respeito à substituição do livro didático *Elementos de Aritmética* da coleção F. I. C. por seu didático *Lições de Aritmética* em 1922, que foi utilizado até 1929. Em 1927, Roxo sugere ao corpo

docente do Colégio Pedro II, mudanças radicais no ensino de matemática, que são oficializadas através dos Considerandos, apresentados na ata da sessão do dia 14 de novembro de 1927:

Considerando

(...) Considerando que urge adotar entre nós os métodos de ensino da Matemática elementar introduzida pela grande reforma que o professor Klein iniciou na Alemanha há cerca de 30 anos e que já se acham adotados em quase todos os países civilizados do mundo; Considerando que um dos pontos capitais da nova orientação está em acabar com a divisão da ciência Matemática em partes distintas e separadas (Aritmética, Álgebra, Geometria); Considerando que, à luz das modernas idéias pedagógicas, "a ciência Matemática sob as suas três faces, numérica, simbólica e gráfica - é uma só e não é conveniente, sob o ponto de vista didático, separá-la por divisões estanques ou dogmáticas, em Aritmética, Álgebra e Geometria, mas antes convém, tanto quanto possível, expor os mesmos princípios sob os três pontos de vista, dando forma concreta ao ensino, procurando, em uma palavra, fazer entrar a Matemática 'pelos olhos' até que o aluno se ache bastante exercitado para tratar as questões de um modo abstrato", (Jorge Duclout (sic), prof. da Faculdade de Ciência e da Escola Normal de Buenos Aires); Considerando que "a Matemática é uma verdadeira unidade, e como tal, deve ser desenvolvida desde o começo sendo a Geometria o fluido unificador (uniting fluid) que corre através do conjunto"(Benchara Branford). Considerando que a atual seriação das matérias Aritmética, Álgebra e Geometria no curso do Colégio Pedro II é, como se vê antiquada pois não permite a adoção da orientação pedagógica atualmente aceita em quase todo o mundo; e que, em anos anteriores o curso já foi feito sob a denominação única de Matemática. Indicamos que a congregação do Colégio Pedro II usando das atribuições que lhe confere o Art. 195, letra g, do decreto 167 - 82A de 13 de janeiro de 1925 proponha ao Governo modificar a distribuição das matérias do curso secundário do seguinte modo: '1º o estudo da Aritmética, Álgebra, Geometria Trigonometria se fará sob a denominação única de Matemática - do 1º ao 4º ano do curso; 2º haverá exame de promoção de Matemática no 1º ano, no 2º e no 3º e exame final no 4º ano' (ER. T. 3. 183). Sala das Sessões, 14 de novembro de 1927 (aa) Euclides Roxo, Henrique Costa, Agliberto Xavier, Júlio Cesar de Mello e Souza, C. Delgado de Carvalho, Honorário de Souza Silvestre, Quintino do Valle, [Fernando] Raja Gabaglia, Waldemiro Potsch, Álvaro Espinheira, José Oiticica, Corregio de Castro, Júlio Nogueira, Dr. Lafayette R. Pereira, Gastão Ruch, Francisco Venancio Filho, Tristão da Cunha, Guilherme de Moura, Othello de Souza Reis, Eduardo Badaró, Pedro do Coutto, Cecil Thiré. (WERNECK, 2003, 40-41).

Decorre, portanto, que as propostas iniciais de Roxo para as mudanças curriculares no Colégio Pedro II se baseavam na unificação das três grandes áreas da Matemática - Aritmética, Álgebra e Geometria. De acordo com Werneck (2003) mais de dois terços do corpo

docente do Colégio Pedro II assinaram essa nova proposta. Além disso, Roxo propunha um ensino de matemática que se pautasse em aspectos relacionados ao cotidiano dos alunos.

Além disso, Roxo considerava a Geometria como o fluído unificador das áreas da ciência Matemática, dessa forma, quando o autor coloca que deve-se "fazer entrar a Matemática 'pelos olhos'", vemos que, neste trecho, ele procura trabalhar primeiramente a parte visual da matemática (caráter experimental), para depois trabalhar os conceitos abstratos (caráter dedutivo).

Assim, Valente (2004) ressalta que

[Em 1928] a congregação do Colégio Pedro II recebe dois ofícios. O primeiro do Departamento Nacional de Ensino e o segundo da Associação Brasileira de Educação. Ambos manifestam-se favoráveis às modificações no ensino da matemática, aprovando e apoiando a iniciativa de Euclides Roxo (LACP, 18/06/1928, p. 79). O decreto nº 18564, de 15 de janeiro de 1929, oficializa a aceitação da proposta modernizadora encabeçada por Roxo. Apesar do Colégio Pedro II ser referência para o ensino secundário do país, as modificações trazidas pelo decreto deverão ser seguidas apenas no Pedro II. (MIORIM apud VALENTE, 2004, 73).

Com o decreto nº 18564, de 15 de janeiro de 1929 fica estabelecido o novo programa referente ao ensino de matemática, que resulta da unificação das três áreas em uma única denominada Matemática. Ressaltamos também que as propostas modernizadoras de Roxo apresentam mudanças nas matérias de estudo com ênfase na intuição, bem como incluem o estudo das noções de função e introdução do cálculo diferencial e integral nas séries mais adiantadas do ensino secundário. O que para Valente (2005) significa que as mudanças curriculares propostas por Roxo "estava[m] inserida[s] numa reformulação que implicava, além da reorganização dos conteúdos, uma nova e revolucionária posição metodológica frente ao ensino".

Na verdade, percebemos que Roxo propunha uma nova reorganização dos conteúdos, visando um ensino de matemática, centrado primeiramente na intuição e, só depois do aluno compreender os conceitos mais simples, tratar esse ensino de forma mais abstrata. Dizer que essa proposta é revolucionária pode ser um exagero, se levarmos em conta o fato de que a forma como Roxo trata os conceitos matemáticos, em sua obra, ainda apresenta conceitos bem abstratos, com alguns exageros de rigor.

Se analisarmos o ensino de matemática nos dias atuais, veremos que as questões referentes à metodologia, ainda não sofreram grandes modificações. Dessa forma, as propostas de

reorganização dos conteúdos e reformulação da metodologia do ensino de matemática, ainda vem sendo discutidas até os dias atuais. Vale ressaltar a importância da postura revolucionária de Roxo, porém ainda teremos grandes debates no que se refere ao ensino de matemática no Brasil.

Roxo argumenta que sua proposta de modernizar o ensino de matemática no Colégio Pedro II baseia-se nas tendências do movimento reformista internacional, as quais apontavam três questões: "metodologia, seleção da doutrina e finalidade do ensino". Ainda, na esteira de Valente (2004), podemos descrever essas três tendências: a primeira diz que o ensino deve ter um caráter psicológico direcionado mais ao ser humano do que ao conteúdo a ser ensinado; a segunda diz respeito à escolha da matéria a ser ensinada, enfatizando o ensino e aplicações da matemática ao conjunto das outras disciplinas; e a terceira refere-se à finalidade de ensino obedecendo às culturas de cada época. Roxo descreve as características dominantes do ensino de matemática em sua proposta.

[...] a fusão dos diferentes ramos da matemática: a aritmética, a álgebra e a geometria, interligando-os em uma única disciplina; a introdução precoce da noção de função, especialmente sob a forma gráfica; o abandono, em parte, da rígida geometria euclidiana [...]; introdução das noções de coordenadas e de geometria analítica [...]; introdução das noções de cálculo diferencial e integral. (ROXO apud VALENTE, 2004, 102 - 103).

Assim, percebemos que as idéias de Roxo estavam inteiramente pautadas nas idéias propostas pelo movimento de reforma internacional e nas idéias de Klein, principalmente no que se refere à adoção de métodos intuitivos e a introdução do conceito de função e do cálculo diferencial e integral.

3.2 Euclides Roxo e seu envolvimento no processo de modernização do currículo de Matemática no Brasil

Essa proposta, apesar de sua grande relevância para a modernização do ensino de matemática brasileiro, não obteve boa aceitação diante da comunidade de professores de matemática da época. Roxo, após a implantação do seu novo programa de ensino e da adoção do livro didático *Mathematica Elementar*, sofreu várias críticas vindas de colegas matemáticos do Colégio Pedro II, bem como de professores de outras instituições de ensino.

Destarte, Valente (2004) coloca algumas dessas objeções relativas à implantação das propostas modernizadoras do currículo de matemática no Pedro II elaboradas por Roxo, citando como seus principais opositores, os professores Manuel Ávila Goulart, Miguel Ramalho Novo, Sebastião Fontes e Joaquim Ignacio de Almeida Lisboa.

O professor Manuel Ávila Goulart reagiu de forma duvidosa quanto à unificação dos três ramos da matemática. Goulart, em carta dirigida ao diretor geral do Departamento de Ensino, solicita esclarecimento sobre quais matérias da matemática do curso secundário competia-lhe ensinar, pois, de acordo com Goulart, seu concurso era apenas para as cadeiras de Álgebra e Aritmética:

Departamento Nacional de Ensino

[...]

Exmo. Sr. Diretor Geral do Departamento Nacional de Ensino. Manuel Ávila Goulart, tendo, na vigência do decreto nº 11530 de 18 de março de 1915, feito concurso só para a cadeira de Aritmética e Álgebra do Liceu do Ceará, da qual é professor catedrático, vem consultar a V. Ex. o seguinte: Quais as matérias da seção de matemática do curso secundário que lhe competem ensinar obrigatoriamente, de acordo com a sua situação de professor catedrático de Aritmética e Álgebra, ou, por outros termos, se a matéria designada MATEMÁTICA, ensinada nos primeiros anos, faz parte das que o consulente é obrigado a ensinar. [...].

Esta carta foi encaminhada a Euclides Roxo, o qual através do ofício nº 148 de 20 de maio de 1930 tentou esclarecer a questão.

Nunca houve no Colégio Pedro II, nem no regime do decreto 11530, nem nos anteriores, cadeira de "aritmética e álgebra" e sim quatro cadeiras de "matemática", das quais duas no Externato e duas no Internato e cujos professores lecionavam em séries alternadas, 1ª e 3ª ou 2ª e 4ª, revezando-se anualmente, de modo a acompanharem os respectivos alunos do 1º ao 4º ano.

As diferentes partes da matemática elementar (aritmética, álgebra, geometria e trigonometria) sempre foram anteriormente ao regime do decreto 16782 - "A", de 13 de janeiro de 1925, ensinadas nessas diversas séries, sem que houvesse uma separação absoluta das mesmas por séries, de modo que no 2º ano, por exemplo, ensinava-se simultaneamente aritmética e álgebra e, no 3º e no 4º, simultaneamente álgebra, geometria e trigonometria.

Não compreendo, pois, como no regime do decreto 11530 pode um colégio equiparado ao Pedro II, como era o Liceu do Ceará, abrir concurso para uma cadeira que não existia no colégio padrão. [...] Entendo, pois, que ao senhor professor Manuel de Ávila Goulart compete obrigatoriamente lecionar qualquer matéria designada "matemática", ensinada nos primeiros anos, mesmo porque não se compreende que um professor esteja habilitado a ensinar aritmética e álgebra, sem que o esteja também a lecionar geometria.

Percebemos que Roxo, baseado nos decretos, deixa claro que cabe a cada professor catedrático lecionar qualquer matéria designada por "matemática", e que nunca existiram no Pedro II cadeiras de Aritmética, Álgebra ou Geometria, mas sim uma única cadeira, a de matemática. Roxo ainda ressalta que desconhece o fato de o professor estar habilitado apenas a ensinar dois ramos da matemática sem conhecer outro, esclarecendo que o professor é habilitado para ensinar matemática. Além disso, Roxo deixa implícito que o professor deve buscar um elo entre esses subramos da matemática, dessa forma, o professor deve ensinar o mesmo conceito matemático sob os três pontos de vista (numérico, simbólico e gráfico).

Roxo posteriormente critica o professor Manuel de Ávila Goulart sem, no entanto, citá-lo:

Quando se fizeram os novos programas unificados do Pedro II, estabelecendo-se um só exame de matemática, surgiu a complicação dos direitos adquiridos (direito de ser ignorante, que é, aliás, o mais sagrado dos direitos), pelos professores de aritmética, pelos de álgebra e pelos de geometria, daqueles ginásios [faz referência ao Liceu do Ceará que promovia a cátedra por concurso dessas pseudo-disciplinas], que dizem não podem ser obrigados a ensinar essas três matérias porque só fizeram concurso para uma e não sabem as outras. (Jornal do Commercio, 14/12/1930 apud Valente, 126, 2004).

Ao contrário de Klein, Roxo não soube aproveitar esses ataques às suas propostas de modernização do ensino de matemática para convencer e atrair a classe de professores de matemática em apoiar suas idéias. Isso seria essencial para o sucesso de suas propostas modernizadoras.

Outro posicionamento desfavorável às propostas de Roxo partiu do professor Miguel Ramalho Novo, que publicou o primeiro artigo no Jornal do Commercio, intitulado "Questões de ensino - a matemática no Pedro II". Segundo Valente (2004), neste artigo, Novo induz os leitores a conjecturar se essas modificações significavam realmente vantagens ou eram um retrocesso para o ensino de matemática.

Posteriormente Novo aponta que a obra de Roxo é fruto de um plágio da obra *Senior Mathematics* de Ernest Breslich.

O programa do Pedro II - decalcado do livro de Breslich [...], representa um verdadeiro retrocesso no ensino de matemática. [...] os professores do Pedro II adotaram uma tradução incompleta e defeituosa do Breslich!

Eu afirmei que o programa havia sido decalcado do Breslich: e agora, digo, que os seus compêndios são copiados do Breslich, com todas as tolices e erros do professor americano. (Jornal do Commercio, 11/01/1931 apud Carvalho, 98, 2004).

Outro professor a se manifestar contrário ao novo programa do Pedro II foi o professor Sebastião Fontes, que em artigo publicado no Jornal do Commercio, 06/04/1930 coloca que

Alguns professores, ampliando excessivamente afirmações de matemáticos notáveis da atualidade, chegaram à conclusão de que as partes constitutivas da matemática: aritmética, álgebra, geometria analítica e até o cálculo transcendente devem ser propiciadas aos alunos de mistura, assim à moda de uma salada de frutas (...)

Os adeptos do "ensino misturado" da matemática indicam, como autoridade máxima, o "genial" Klein. Pondo de parte este genial que nos parece um exagero, mas lendo-se com atenção o que ele diz, chega-se a uma conclusão contrária ao que pretendem fazer, entre nós, alguns professores, porque Klein diz, categoricamente: "Não quero dizer que estas partes (as da matemática) devam ser completamente fundidas, mas não devem ser tão separadas como sucede hoje freqüentemente nas escolas".

E isto deve-se entender assim: fundidas no ensino primário e complementar e separadas no ensino secundário, no qual devem ser seriadas gradativamente de modo a se ajudarem mutuamente. Os compêndios que temos manuseado, obedecendo à nova orientação, estão excelentes para o curso primário, se lhes desenxertarem alguma coisa de álgebra que possuem. Vários professores das escolas públicas têm-nos adotado assim mesmo.

Roxo responde a essa publicação de forma irônica dizendo que

Houve até quem comparasse o novo programa a uma salada de frutas, o que até certo ponto é um reclamo indireto para o mesmo, pois esse gênero de alimentação tanto tem de saudável, quanto de saboroso, sendo que certas frutas, intragáveis quando isoladas, perdem seus característicos depreciativos se combinadas a outras finas. (Jornal do Commercio, 14/12/1930 apud Valente, 132, 2004).

Roxo novamente perde a oportunidade de convencer seus colegas professores e transmitir-lhes os verdadeiros objetivos do seu programa, preferiu responder aos ataques com outros. Euclides Roxo esclarece, em outro artigo publicado no Jornal do Commercio, intitulado "O ensino da matemática na escola secundária II - principais escopos e diretivas do movimento de reforma", as principais tendências do movimento internacional de reforma iniciado por Klein na Alemanha, pois Sebastião Fontes alegou, conforme citado anteriormente, que Roxo distorcera as idéias propostas por Klein:

Eis como Klein enumera as principais tendências do movimento de reforma:

- 1) Predominância essencial do ponto de vista psicológico.
- 2) Dependência da escolha da matéria a ensinar em relação às aplicações da matemática ao conjunto das outras disciplinas.
- 3) Subordinação da finalidade do ensino às diretrizes culturais de nossa época.

Como se vê, essas tendências dizem respeito a três questões principais: metodologia, seleção da doutrina e finalidade do ensino.

Klein fundamenta, assim, perfeitamente a nosso ver, a idéia de que todo o edifício do ensino deve ser construído sobre uma base de conhecimentos sensoriais, para elevar-se, pouco a pouco, à forma dedutiva (...). (Jornal do Commercio, 07/12/1930 apud Carvalho, 102, 2004).

Dentre os principais opositores de Euclides Roxo, destaca-se o professor Joaquim Ignácio de Almeida Lisboa, que travou, através das páginas do Jornal do Commercio, violentos ataques contra o programa implantado por ele no Colégio Pedro II. Em artigo publicado neste jornal, intitulado "Os programas de matemática do Pedro II", Almeida Lisboa coloca que

O professor Roxo quis dar ao ensino da matemática um caráter utilitário e essencialmente prático. Julgo que não atingiu esse objetivo. (...)

O professor Roxo esqueceu qual a verdadeira finalidade da matemática na escola secundária. Seu principal destino não é uma colheita mais ou menos abundante de conhecimentos práticos e isolados. A matemática é uma disciplina de espírito, uma inimitável e insubstituível educadora do raciocínio a que a mocidade deve ser submetida. (...)

Pretenderá o autor convencer-nos de que a reforma dos programas é o fruto, embora tardio, do Congresso ou Comissão Internacional, reunida em 1911 e 1912? Tal pretensão seria uma ofensa a Klein e aos eminentes professores e matemáticos que constituíam aquele Congresso. (...)

[...]

Qual seria o espanto de Klein vendo a que miséria se reduz o ensino da matemática no maior país da América do Sul! Como pode o professor Roxo comparar os nossos mesquinhos programas com os que sempre existiram em todos os países de adiantada cultura intelectual?

Os livros em que o Sr. Roxo expõe o seu programa são excessivamente infantis. Suas aplicações práticas são ilusórias e de nenhum alcance. Neles não há vestígio da mais simples demonstração de qualquer teorema, por mais elementar que seja; existem apenas verificações materiais, e portanto imperfeitas e grosseiras. Desapareceu o raciocínio modelar, característico de uma demonstração e da própria matemática. Há noções erradas ou imprecisas. Foi abolido tudo o que era útil ao desenvolvimento intelectual do aluno. (...) (Jornal do Commercio, 21/12/1930 apud Carvalho, 106, 2004).

Roxo responde a Lisboa fazendo as seguintes ponderações:

Sr. Lisboa é um belo talento, um grande matemático, um bom professor de "curso anexo" ou vestibular da Politécnica. Disso posso dar testemunho porque fui seu aluno e muito apreciava as suas bonitas preleções; mas eu tinha 20 anos de idade e seis ou oito de estudos de matemática, criteriosamente orientados. Digo mais, e é o que todos sentem. O Sr. Lisboa deveria ser um ótimo professor da Politécnica, talvez uma notabilidade no nosso magistério superior se as circunstâncias não tivessem privado aquela alta escola desse verdadeiro luminar das ciências exatas. No Pedro II, porém, ele concretiza a maior catástrofe que se poderia imaginar no magistério.

(...)

É uma das tendências de Klein e dos reformadores, como já tenho dito em meus artigos, fazer um preparo, por meio de noções intuitivas, adquiridas nas primeiras séries, para o estudo dessas partes, consideradas mais elevadas da matemática, nas séries superiores do curso secundário mas não como o Sr. Lisboa pensa. "Pobre mocidade! Sairá do Pedro II sem saber demonstrar etc." Isso é o que se dava com as turmas a que o Sr. Lisboa ensinava e nas quais ele despertava, com o seu exagerado e antiquado formalismo aquele proverbial "horror" à matemática. Pobres meninos! Digo eu agora, que ele queria fazer engolir, aos 11 e aos 12 anos, o seu formidável compêndio de álgebra! (Jornal do Commercio, 28/12/1930 apud Valente, 141-142, 2004).

Percebemos que estes ataques são oriundos de uma luta entre duas concepções diferentes relativas ao ensino de matemática. De um lado, Lisboa e seu formalismo quanto aos conteúdos matemáticos e, de outro, Roxo defendendo a intuição.

Apesar das divergências que surgiram com a implantação dos novos programas para o ensino de matemática no Colégio Pedro II, este teve repercussão nacional, pois as idéias modernizadoras de Euclides Roxo formaram a base para a Reforma Campos. Valente (2004) descreve o cenário histórico no qual se deu este fato:

Para Euclides Roxo, a revolução que chegou com Getúlio, desde logo lhe traz um problema: como continuar à testa do Colégio Pedro II se era conhecida sua posição anti-revolucionária?

[...] Toda sua trajetória profissional alicerçava-se na República Velha. (VALENTE, 77, 2004).

Ainda de acordo com Valente (2004), Roxo tinha grande trânsito entre os homens do poder, pois era casado com Marília de Alencar Roxo, filha do almirante Alexandrino de Alencar. Com a ascensão de Getúlio ao poder, Roxo sentiu-se obrigado a pedir demissão. Porém, devido às influências políticas que Roxo tinha, foi reconduzido à direção não mais do externato e sim, do internato em São Cristóvão, em 11 de dezembro de 1930.

Dessa forma Euclides Roxo é convidado por Francisco Campos, ministro da Educação e Saúde - Ministério este criado por Getúlio Vargas - para criar os programas de matemática da reforma do ensino brasileiro, a Reforma Campos.

Compunham desta reforma, no que diz respeito à matemática, os programas implantados por Roxo no Colégio Pedro II, e ao que tudo indica, o Ministro Francisco Campos consentiu com todas as idéias modernizadoras de Roxo.

Assim os programas do Colégio Pedro II tiveram reflexo nos currículos a nível nacional através da Reforma Campos.

3.3 Curso de Mathematica: 3º Ano - II (Geometria)

Nessa seção faremos uma análise do livro Curso de Mathematica: 3º Ano - II (Geometria) de Euclides Roxo. Conforme mencionado anteriormente, Roxo, se baseou nas idéias de Klein, para implantar mudanças curriculares no Colégio Pedro II, dessa forma, nosso intuito é verificar até que ponto Roxo realmente utilizou as idéias modernizadoras de Felix Klein.

O livro *Curso de Mathematica* foi publicado em 1931, ano este em que a Reforma Campos foi firmada para todo território brasileiro. No que tange ao ensino de Matemática, o idealizador dessas mudanças curriculares foi Euclides Roxo, que se baseou nas idéias de Klein. Silva (2006) coloca que

A fusão da Álgebra com a Aritmética, e com a Geometria, no caso dos ensinos de Matemática, foi feita a partir de uma referência internacional, baseando-se nas idéias do renomado matemático alemão Felix Klein, que propunha, ao lado da introdução do Cálculo Infinitesimal, uma renovação no Ensino Secundário. Essa transformação estrutural da Matemática escolar foi referendada, em 1931, em todo território brasileiro pela Reforma Campos, tendo Euclides Roxo (1890 - 1951) como principal mentor e articulador dessa mudança do ensino de Matemática no Brasil. (SILVA, 2006, 11).

Francisco Campos propôs reconstruir as bases do ensino secundário. Enfatizou, em sua reforma, que o ensino secundário se tornou um instrumento de preparação para os exames de admissão em cursos superiores e que buscava com essa reforma tornar o ensino secundário mais próximo da realidade dos alunos, preparando o aluno para lidar com problemas da vida. Assim, em sua proposta, Campos coloca que

O ensino secundário é um simples curso de passagem e um mero sistema de exames destituído de virtudes educativas e reduzido às simples linhas essenciais de sua estrutura estreitamente pragmática e utilitária de instrumento de acesso aos cursos superiores.

(...) A educação do homem não se fará jamais mediante o sistema de receptividade passiva pelo qual se vem degradando, no ensino secundário, a inteligência da juventude. (VALENTE, 2005, CD-ROM).

Dessa forma, Euclides Roxo, idealizador da proposta de reconstrução do ensino secundário para a disciplina de matemática, buscou no documento que constituiu a Reforma Campos o apoio para implantar as mudanças no currículo de matemática que haviam sido propostas e implantadas desde 1925 no colégio Pedro II. Assim, ressaltou neste documento, que o ensino da matemática

tem por fim desenvolver a cultura espiritual do aluno pelo conhecimento dos processos matemáticos, habilitando-o, ao mesmo tempo, à concisão e ao rigor do raciocínio pela exposição clara do pensamento em linguagem precisa.

(...) para atender ao interesse imediato da sua utilidade e ao seu valor educativo dos seus métodos, procurará, não só despertar no aluno a capacidade de resolver e agir, com presteza e atenção, como ainda favorecer-lhe o desenvolvimento da faculdade de compreensão e de análise das relações quantitativas e especiais, necessárias às aplicações nos diversos domínios da vida prática e à interpretação exata e profunda do mundo objetivo. (VALENTE, 2005, CD-ROM).

Roxo procurou, no documento que compõe a Reforma Campos, salientar a importância de se valorizar primeiramente aspectos intuitivos, passando posteriormente para conceitos mais complexos. No que tange o ensino de geometria, Euclides Roxo lembra que "o estudo demonstrativo formal deve ser precedido de um curso propedêutico, destinado ao ensino intuitivo, de caráter experimental e construtivo". O autor também ressalva a importância de se escolher assuntos de tal modo que se ensinem as noções e as aplicações práticas do que foi estudado.

Destarte o autor lembra que o estudo da geometria deve ser dividido em dois momentos. No primeiro momento, esse estudo deve ter um caráter puramente intuitivo, e no segundo momento, após o aluno ter se familiarizado com os conceitos fundamentais da geometria deve-se iniciar um estudo dedutivo da geometria. Deste modo, coloca que

O ensino da geometria começará por um curso propedêutico de geometria intuitiva e experimental em que se procurará familiarizar o aluno com as idéias fundamentais relativas às figuras geométricas, no plano e no espaço, sob o ponto de vista da forma, da extensão e da posição. Esse estudo inicial subordina-se aos seguintes objetivos: a) exercitar a percepção e a imaginação espaciais; b) desenvolver a faculdade de abstração; c) despertar o interesse pela estimativa e a medição, bem como pelo uso da régua, do compasso, dos esquadros, do transferidor, e pela construção de modelos.

(...) Ao iniciar o estudo dedutivo da Geometria, o primeiro cuidado será o de fazer sentir ao aluno o que significa uma demonstração, utilizando-se, como ponto de partida, os próprios fatos inferidos intuitivamente no curso preparatório. É ainda a partir das observações intuitivas que se deve estabelecer o conjunto dos axiomas fundamentais indispensáveis à exposição lógica da Geometria.

Neste estudo ter-se-á em vista: a) o enunciado das proposições, sua demonstração e aplicações; b) a compreensão e a justa apreciação do raciocínio dedutivo; c) o valor da exposição clara e sucinta, do encadeamento lógico das idéias e da memória matemática. (VALENTE, 2005, CD-ROM).

Levando em consideração esses pressupostos, Roxo enumera a matéria de cada série dando uma diretriz metodológica ao curso secundário. Enfatizaremos aqui a parte referente ao ensino da Geometria. Dessa forma, ficam estabelecidas para:

Primeira série: Iniciação geométrica - Principais noções sobre as formas geométricas; área do quadrado, retângulo, paralelogramo, triângulo e trapézio; circunferência e área do círculo; volumes do paralelepípedo retângulo, do cubo, do prisma triangular, do cilindro e do cone circular (retos); Fórmulas.

Segunda série: Iniciação geométrica - Noção de ângulo e de rotação: ângulos adjacentes, complementares, suplementares, opostos pelo vértice; medida dos ângulos. Uso do transferidor; paralelas e perpendiculares: problemas gráficos sobre seu traçado; triângulos: alturas, medianas e bissetrizes. Soma dos ângulos internos e externos; estudo sucinto dos quadriláteros; noções sobre figuras semelhantes. Escala; medida indireta das distâncias; razões entre lados de um triângulo retângulo. Seno, co-seno e tangente de ângulo agudo. Uso de tabelas de senos, co-senos e tangentes naturais.

Terceira série: Geometria - Conjunto de proposições fundamentais que servem de base à Geometria dedutiva. Noções sobre deslocamentos elementares no plano; translação e rotação de figuras. Simetria; estudo de triângulos; estudo dos polígonos: soma dos ângulos internos e externos; noção e exemplares de lugar geométrico; círculo: propriedades dos arcos e cordas. Tangente e normal; medidas dos ângulos; linhas proporcionais: linhas proporcionais no triângulo; semelhança; homotetia; relações métricas no triângulo; relações métricas no círculo. Média proporcional.

Quarta série: Geometria - Polígonos regulares: relações métricas nos polígonos regulares; medida da circunferência: cálculo de π (método dos polígonos); áreas; áreas equivalentes: relação entre áreas de figuras semelhantes; retas e planos no espaço; ângulos poliedros; triedros suplementares; prisma e pirâmide; cilindro e cone; esfera. Secções planas. Pólos; plano tangente; cone e cilindro circunscritos; noção sobre geração e classificação das superfícies: superfícies regradas, de revolução, desenvolvíveis; as funções circulares; relações entre essas funções. Gráficos; expressões da tangente, cotangente, secante e co-secante em função do seno e co-seno. Seno, co-seno e tangente, da soma de dois ângulos, do dobro de um ângulo, da metade de um ângulo.

Quinta série: Aritmética, Álgebra e Geometria - Resolução de triângulos retângulos, prática das tábuas de logaritmos; casos simples de resolução de triângulos oblíquos; noções de análise combinatória; binômio de Newton (caso de expoente inteiro e positivo); derivada de um polinômio inteiro em x ; noção de limite. Derivada de $\sqrt[3]{x}$. Derivada de seno de x , co-seno de x , tangente de x e cotangente de x ; interpretação geométrica da noção

de derivada. Aplicação da noção de derivada ao estudo da variação de algumas funções simples; processos elementares de desenvolvimento em série: convergência de uma série; desenvolvimento em série do seno, co-seno e tangente; problema inverso da derivação. Primitivas imediatas. Aplicação ao cálculo de certas áreas; volumes do prisma e do cilindro, da pirâmide, do cone e dos respectivos troncos. Volume da esfera e suas partes; estudo sucinto das secções cônicas.

Faremos agora uma análise do livro Curso de Mathematica 3ª série - II - Geometria. Este volume do livro de Roxo contém os mesmos conceitos matemáticos - no que se refere à Geometria - da Reforma Campos (terceira série), divide-se em 14 capítulos e possui 381 páginas.

Publicado em 1931, o livro Curso de Mathematica foi escrito pelo catedrático de Matemática do Colégio Pedro II, professor Euclides de Medeiros Guimarães Roxo, divide-se em três volumes destinados ao 1º, 2º e 3º anos do ensino secundário. Porém, os volumes destinados ao 2º e 3º anos, não foram publicados. Valente (2004) lembra que:

Euclides Roxo foi autor, entre outras, das seguintes obras:

Lições de aritmética (1925).

Curso de matemática elementar, 2 volumes (Vol. I, 1929; Vol. II, 1930).

Curso de matemática, 3ª Série II - Geometria, 1931.

Curso de matemática, com Cecil Thiré, e J. C. de Mello e Souza (5 volumes).

Matemática ginásial (4 volumes), publicado a partir de 1942, com dois outros autores (Cecil Thiré e Mello e Souza).

Matemática segundo ciclo, com Roberto Peixoto, Haroldo Lisboa da Cunha e César Dacorso Neto (3 volumes), publicados a partir de 1942 e reeditados, com modificações, até o início da década de 1960.

A matemática na educação secundária (1937).

Unidades e medidas (1941). (VALENTE, 2004, 86-87).

No prefácio deste livro, Euclides Roxo inicia ressaltando que os programas e diretrizes metodológicas para o ensino de Matemática adotados pelo Ministério da Educação para todos os colégios secundários do Brasil significam uma vitória do ponto de vista que ele defendia há quatro anos. E explica que este volume é continuidade dos demais já publicados anteriormente para o 1º e 2º ano.

Roxo lembra ainda que procurou, tanto nas diretrizes quanto em seus livros, fazer do aluno um pesquisador, partindo sempre da intuição no ensino de conceitos matemáticos. Cita que

"O ensino se fará, assim, pela solicitação constante da atividade do aluno (método heurístico), de quem se procurará fazer um descobridor e não receptor passivo de conhecimento."

Continua sua explicação enfatizando que não procura com essa publicação preparar os alunos para exames, muito menos para decorar regras e definições, e sim contribuir para que este alcance o "aperfeiçoamento de sua cultura espiritual pelo conhecimento dos processos matemáticos".

Roxo explica que nos dois primeiros anos tratou da Geometria de forma intuitiva e experimental, e que agora procura dar um aspecto mais formal ao ensino de Geometria. Dessa forma, o autor coloca que, de acordo com as instruções ministeriais procurou "fazer sentir ao aluno o que significa uma demonstração, utilizando como ponto de partida, os próprios fatos inseridos intuitivamente no curso preparatório".

O autor lembra ainda que, evitando que seu livro fosse demasiadamente inovador, procurou demonstrar todos os teoremas, deixando a critério do professor omiti-las de acordo com as circunstâncias.

Em sua explanação, percebemos que Roxo, em suas publicações, procurou sempre dar ênfase ao método intuitivo. Dessa forma, o aluno aos poucos vai construindo o conhecimento, partindo inicialmente de situações simples para chegar aos conhecimentos mais complexos. Essa característica é a que Klein propõe em seu movimento de modernização do ensino de matemática. Assim, no que diz respeito à utilização dos métodos intuitivos, vimos que Euclides Roxo utiliza as idéias inovadores de Felix Klein.

Conforme mencionado no prefácio do livro e respeitando a abordagem metodológica da Reforma Campos, neste volume Roxo se dedica a tratar da Geometria de forma dedutiva, focando o rigor matemático das demonstrações.

O rigor matemático se apresenta em todos os capítulos, uma vez que o autor sempre trata dos conceitos enunciando e demonstrando teoremas e corolários. Roxo também enuncia alguns axiomas e postulados. O rigor apresentado no tratamento dado pelo autor aos conceitos geométricos lembra os tratados de Euclides. A Figura 3.1 ilustra uma parte do livro de Roxo, na qual o autor enuncia e demonstra o postulado de Euclides ou postulado das paralelas.

Inicia o livro explicando e exemplificando proposições fundamentais da geometria dedutiva. Nessa parte o autor discute conceitos de teorema, axioma, postulado e símbolos utilizados em demonstrações. Conforme ilustram as Figuras 3.1 e 3.2.

Ao abordar o tema *Paralelas*, Roxo primeiramente define retas paralelas como duas retas que estão situadas no mesmo plano e não se encontram por mais que se prolonguem. Posteriormente enuncia e demonstra vários teoremas, conforme segue:

Teorema - Duas retas, que se deduzem uma da outra por uma translação, confundem-se ou são paralelas.

Com efeito, do Teorema 17 resulta imediatamente que, se duas retas forem distintas e se uma se deduzir da outra por uma translação, elas não podem ter nenhum ponto comum, isto é, não se encontram, por mais que prolonguem e são paralelas.

Corolário - Por um ponto tomado fora de uma reta, pode-se traçar uma paralela a essa reta.

Para obter essa paralela, basta, com efeito, imprimir à reta dada uma translação que a leve a passar pelo ponto dado. (É o que se faz quando se traça a paralela, fazendo um esquadro resvalar ao longo de uma régua).

O autor também valoriza em sua publicação os aspectos históricos. Começa o capítulo com uma nota histórica sobre as origens da geometria, subdivide os capítulos em seções relacionadas ao tema central, buscando sempre uma relação entre essas seções e utilizando resultados das proposições e teoremas demonstrados nas seções e capítulos anteriores, sempre finaliza os capítulos com notas históricas e biografias de matemáticos. Conforme ilustram as Figuras 3.3, 3.4 e 3.5.

Roxo se utiliza de exemplos e exercícios para facilitar a compreensão do leitor, tenta relacionar esses exercícios com o cotidiano, para que o leitor possa estabelecer relações entre a teoria e a prática. Porém, isso aparece ainda de forma bem modesta em sua publicação, sem apresentar problemas práticos. Em cada capítulo, o autor prepara uma série de exercícios, onde o leitor pode expandir ainda mais o aprendizado dos conceitos estudados. Conforme ilustra a Figura 3.6.

Eis uma diferença entre a abordagem teórica de Roxo e Klein. Klein, apesar de publicar um livro para jovens professores não dá esse aspecto didático ao livro. O autor cita exemplos, porém sem uma compreensão devidamente lógica, pois simplesmente apresenta os exemplos e convida o leitor a elaborá-los. Roxo busca um rigor matemático na explanação dos conteúdos enquanto Klein "foge" do rigor matemático em sua publicação, buscando sempre valorizar a intuição.

Klein dedica seu livro a tratar das transformações geométricas no plano e no espaço. Roxo também dá essa abordagem ao seu livro tratando de transformações no plano ao longo de todo o seu livro. Conforme ilustram as Figuras 3.7 e 3.8.

— 50 —

25. **Postulado de Euclides ou postulado das paralelas.** *Por um ponto tomado fóra de uma recta só se pode traçar uma parallela a essa recta.*

26. **Theorema** — *Quando duas rectas parallelas são cortadas por uma secante;*

os angulos correspondentes
os angulos alternos-internos
os angulos alternos-externos } são iguaes;

os angulos internos do mesmo lado
os angulos externos do mesmo lado } são supplementares.

Consideremos, por enquanto, a primeira conclusão, isto é, os angulos correspondentes são iguaes.

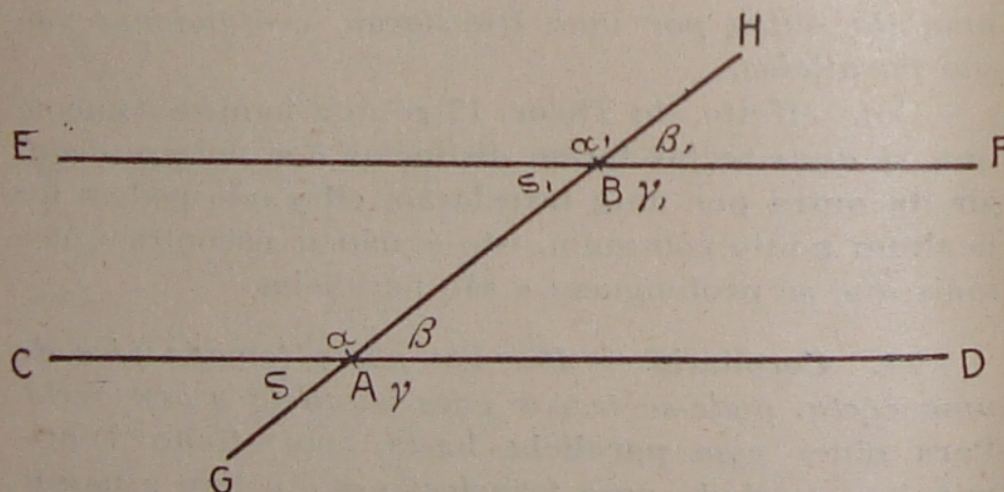


Fig. 16

Hyp.: *CD e EF são rectas parallelas, cortadas pela secante GH em A e B (fig. 16).*

These: $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, etc.

Figura 3.1: Postulado de Euclides ou postulado das paralelas - Parte 1

— 51 —

Plano: imprime-se ao $\wedge \beta$ uma translação de correção GH até que A venha sobre B e os dois $\wedge$ coincidem por superposição.

Demonstração:

AFFIRMAÇÕES

BASES

- | | |
|--|--|
| (1) Imprime-se ao $\wedge DAB$ uma translação FE de correção GH . | (1) Post. (1). Enuncie. |
| (2) Quando A chegar em B a recta CD ficará paralela á sua posição primitiva. | (2) Quando duas rectas distintas se deduzem uma de outra por uma translação, ellas são parallelas. |
| (3) CD coincide então com EF . | (3) Post. de Euclides. |
| (4) $\therefore \wedge DAB$ coincide com $\wedge FBH$. | |

Conclusão: Os angulos correspondentes β e β_1 são iguaes.

27. Quando CD coincide com EF os outros pares de angulos correspondentes α e α_1 , γ e γ_1 , δ e δ_1 , tambem coincidem.

Como $\beta_1 = \delta_1$, por serem oppostos pelo vertice, tem-se $\beta = \delta_1$; logo os angulos alternos-internos são iguaes.

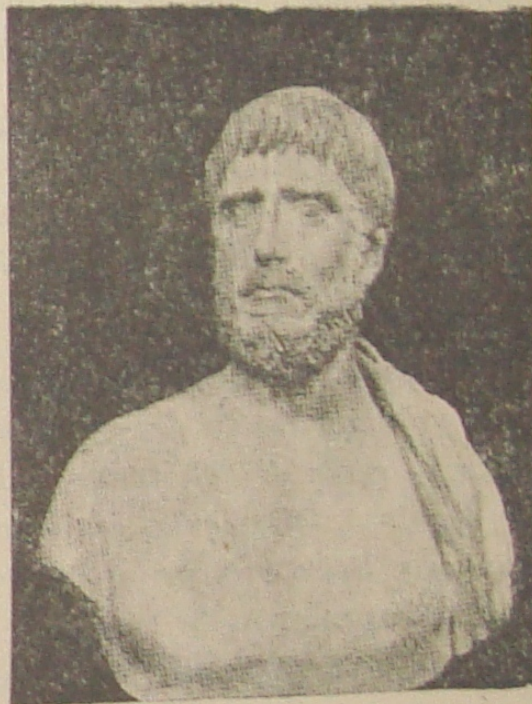
Como provariamos que dois angulos alternos-externos, α_1 e γ , por exemplo, são iguaes? E que dois internos do mesmo lado α e δ_1 , por ex., são supplementares?

28. **Theorema** (Reciproca do Theor. 23) — *Duas rectas parallelas se deduzem, uma da outra, por uma translação.*

Figura 3.2: Postulado de Euclides ou postulado das paralelas - Parte 2

THALES DE MILETO

THALES nasceu em Mileto, na Asia Menor, cerca de 640 a. J. C., morreu em cerca de 546 a. J. C. e era, provavelmente, de origem phenicia. Os documentos, de que dispomos para a historia de sua vida, quasi que se reduzem a algumas anedotas transmittidas pela tradição.



Quando joven, occupou-se ora de commercio, ora de negocios publicos e, a julgar por duas historias, que d'elle conhecemos, era tão reputado por sua sagacidade nos negocios e pelos seus recursos de espirito, quanto foi celebre, mais tarde, como mathematico.

Conta-se que, fazendo elle um dia transportar sal por jumentos, um destes animaes escorregou para dentro de um corrego, cuja agua dissolveu parte da carga. O animal, sentindo a redução de peso, dahi resultante, procurou, na primeira occasião, entrar novamente naqua.

Figura 3.3: Biografia de Thales de Mileto - Parte 1

— 28 —

Para acabar com essa manobra. THALES mandou carregar o jumento com esponjas, as quaes, molhando-se quando o animal mergulhava, augmentaram sensivelmente de peso, tirando-lhe a vontade de repetir a esperteza.

Doutra feita, segundo ARISTOTELES, THALES, tendo previsto que uma colheita de azeitonas seria excepcionalmente abundante, tomou de arrendamento todas as prensas da região, e poudo depois auferir um grande lucro, impondo as suas condições para sub-locação dessesapparelhos.

Tendo de ir ao Egypto, a negocio, aproveitou ali os seus lazeres para estudar a Astronomia e a Geometria e dizem que, nessa occasião, divertiu o rei Amadis, determinando a altura da pyramide por meio da sombra desta (2.º Anno, n. 65).

De volta a Mileto, abandonou os negocios e abriu, ali, a primeira escola de philosophia, — chamada escola jonica — cerca de 600 annos a. J. C., devotando-se, dahi por deante, inteiramente, ás pesquisas scientificas e philosophicas. Foi o primeiro a estudar logicamente a Mathematica, imprimindo-lhe character deductivo. As proposições, que provavelmente lhe podemos attribuir, são:

1.º Os angulos na base de um triangulo isosceles são iguaes.

2.º Quando duas rectas se cortam, os angulos oppostos pelo vertice são iguaes.

3.º Um triangulo fica determinado, quando se dão um lado e os angulos adjacentes.

4.º Os lados dos triangulos equiangulos entre si são proporcionaes. (Applicada á medida da altura da pyramide pela sombra).

Figura 3.4: Biografia de Thales de Mileto - Parte 2

— 29 —

5.º Qualquer diametro divide o circulo em duas partes iguaes.

6.º O angulo subtendido pelo diametro de um circulo em um ponto qualquer da circumferencia é recto.

THALES escreveu um tratado de Astronomia e, entre seus contemporaneos, tinha mais fama de astronomo, que de geometra. Conta-se, que, certa noite, elle passeava tão absorto na contemplação das estrellas, que, distraidamente, caiu numa valla, e uma velha que estava perto exclamou: “como pode o senhor ensinar-nos o que se passa no céu, quando não enxerga o que se acha a seus pés!”.

Por ter explicado as causas dos eclipses do sol e da lua e previsto um eclipse do sol, que se realizou na época por elle fixada, grangeou um enorme prestigio e foi considerado um dos Sete Sabios da Grecia.

A escola por elle fundada durou cerca de 100 annos, após sua morte, e della se originou a escola pythagorica, bem mais importante.

AS DEMONSTRAÇÕES MATHEMATICAS

(AMOROSO COSTA)

Demonstrar uma proposição, é deduzi-la, applicando os principios da logica formal, de outras proposições já admittidas. A demonstração tem por fim estabelecer uma cadeia entre os postulados e os theoremas, mediante um calculo do qual se exclue qualquer arbitrariedade.

Figura 3.5: Biografia de Thales de Mileto - Parte 3

— 151 —

3. Um dos angulos de um parallelogrammo toma successivamente os valores 10° , 20° , ..., 170° . Reuna em uma tabella os valores que tomam, correspondentemente, os outros tres angulos.

4. Existem, ao todo, seis igualdades entre os angulos de um parallelogrammo, tomados dois a dois.

Porque? Escreva todas ellas. Quaes as que são *distinctas*?

5. Qual é o angulo que formam entre si as alturas de um parallelogrammo que tem um $\angle$ igual a α ?

6. Num parallelogrammo, conservam-se os comprimentos dos lados e alteram-se os angulos. Altera-se o comprimento das diagonaes? Mostre por meio de desenhos?

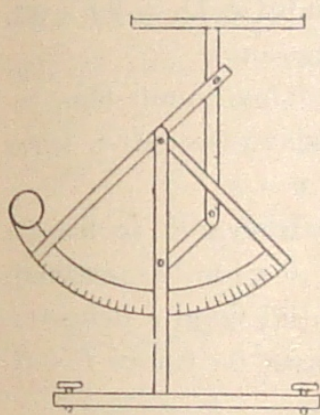


Fig. 91

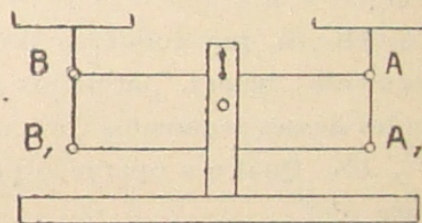


Fig. 92

7. a) A fig 91 representa uma balança de cartas; b) a figura 92 representa o schema da balança de mesa de Roberval. Explique, em ambos os casos, como se consegue preencher a condição de manter os pratos horizontaes, no movimento da balança.

8. Em que propriedade se baseia a construcção do aparelho da fig. 93, para o traçado de parallelas?

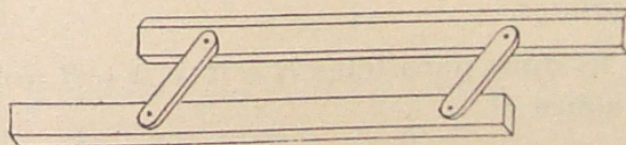


Fig. 93

9. Demonstre que as bissectrizes de dois $\angle$ consecutivos de um parallelogrammo se cortam em $\angle$ recto.

Figura 3.6: Alguns exemplos de exercícios do livro de Roxo

— 76 —

e, enquanto esta não secca, dobra-se o papel por XY , de modo que a parte abaixo de XY se applique sobre a outra; na primeira ficará impressa, em C' , a imagem de C ; aberta novamente a folha, as curvas C e C' são

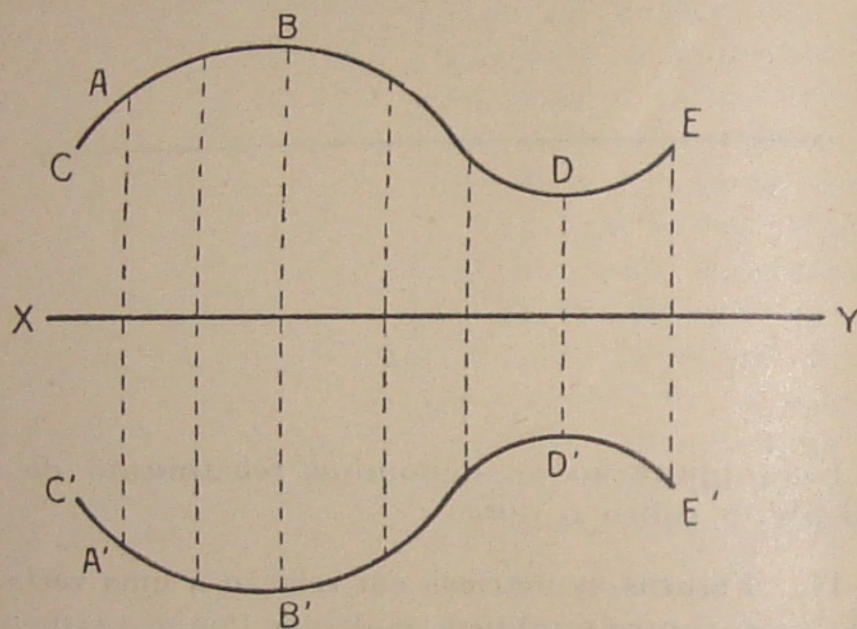


Fig. 32

symetricas em relação a XY . Porque? Os pontos A e A' situados sobre uma mesma perpendicular a XY são symetricos um do outro? Porque? Dahi resulta:

Theorema — *Duas figuras planas symetricas em relação a uma recta são congruentes.*

Corollario — *A figura symetrica de uma recta é uma recta e a figura symetrica de um segmento retilíneo é outro segmento igual ao primeiro.*

Figura 3.7: Simetria entre figuras planas - Parte 1

— 77 —

48. Dado um triangulo ABC (fig. 33) e uma recta XY , como podemos obter, por construcção geometrica, o symetrico do $\triangle ABC$?

Recorte um triangulo igual a $A'B'C'$; colloque-o sobre o $\triangle A'B'C'$ da fig. 38 e depois procure fazer o triangulo recortado coincidir com o $\triangle ABC$, mas sem retirar-o de sobre a folha do livro e fazendo-o apenas escor-

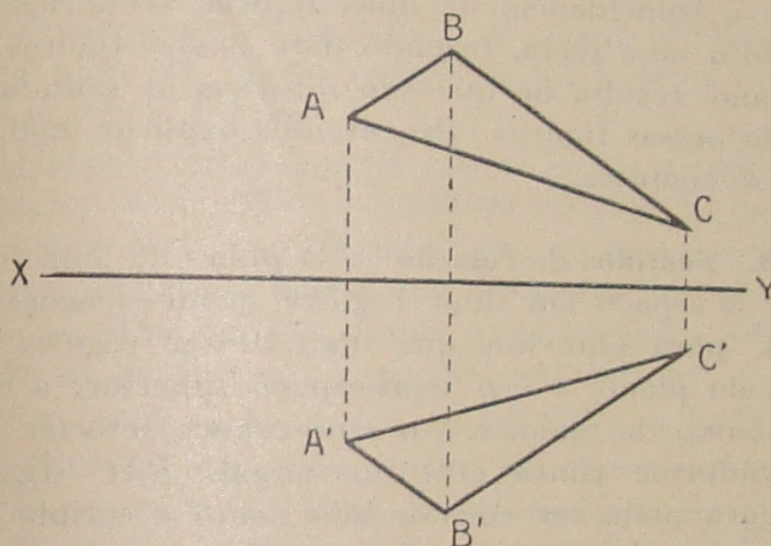


Fig. 33

regar sobre esta. Que é que observa? Porque razão não é possível fazer coincidir, da maneira indicada, os dois triangulos?

Figuras directa e inversamente iguaes — Si percorrermos os perimetros dos dois triangulos, partindo de vertices homologos A e A' e dirigindo-nos successivamente a vertices homologos, B e B' , depois a C e C' , notamos que, durante o percurso no primeiro triangulo, o interior deste fica á nossa *direita*, ao passo

Roxo, assim como Klein, buscava a unificação dos três ramos da matemática (Álgebra, Aritmética e Geometria), porém nota-se que o primeiro autor poucas vezes procurou essa unificação em seu livro. Faz apenas relações entre a Geometria e a álgebra, quando trata das relações métricas no triângulo retângulo e no círculo.

Conforme já mencionado, Roxo buscou, em sua proposta de modernizar o ensino de matemática no Colégio Pedro II, valorizar as tendências do movimento reformista internacional idealizado por Klein, que apontam três questões fundamentais: "metodologia, seleção da doutrina e finalidade do ensino".

Analisando os livros *Curso de Mathematica* de Roxo e *Matemática elementar de um ponto de vista avançado - Geometria* de Klein, no que tange à essas tendências, percebemos que tanto Klein como Roxo, apresentaram dificuldades em colocá-las nas suas publicações.

Roxo avançou um pouco mais que Klein, pois buscou explicar todos os conceitos matemáticos de forma clara, citando e explicitando exemplos e demonstrações. No que se refere às aplicações, notamos que, tanto Roxo quanto Klein, não valorizaram esse aspecto em suas publicações. Klein, em seu livro, não citou aplicações relacionadas a outros conteúdos matemáticos. Já Roxo, colocou em seu livro aplicações simples, sem estabelecer relações entre as disciplinas - aritmética, álgebra e geometria - fazendo apenas associações dos conteúdos estudados com objetos do cotidiano.

No que se refere à finalidade do ensino obedecendo às culturas de cada época, os autores procuraram colocar essa tendência em suas publicações, valorizando nelas os aspectos históricos.

Klein procurou tratar analiticamente a geometria, enquanto Roxo enfatizou o rigor de Euclides de Alexandria.

Ao fim dessa explanação vemos que Roxo trata da Geometria de maneira bem formal, enunciando sempre teoremas e corolários e suas respectivas demonstrações. O autor se utiliza de vários exemplos e exercícios para fixar o aprendizado.

Assim, as obras e propostas de Roxo tiveram sua importância para a modernização do ensino de matemática, e foram significativas para tornar o ensino dessa disciplina mais próximo da realidade dos alunos, porém ainda vemos um forte de formalismo em sua obra.

Considerações Finais

Procuramos, no decorrer deste trabalho, retratar as abordagens teóricas contidas nos trabalhos de Felix Klein e Euclides de Medeiros Guimarães Roxo, partindo da análise de trechos de dois livros - um didático (Roxo) e um científico (Klein) - escritos por esses matemáticos e a partir da análise de propostas para o ensino de matemática desses docentes.

Vimos, assim, que Klein iniciou, por volta de 1908, o Movimento Internacional de Reforma Curricular em Matemática; em sua proposta de modernização do ensino de matemática, ele salientava a importância de tornar o ensino mais próximo da realidade prática dos alunos. Nesse sentido, Klein buscava a introdução no ensino secundário do conceito de função, os métodos gráficos e elementos do cálculo infinitesimal. Propunha também uma junção entre os ramos da matemática. Isso aparece várias vezes no capítulo que analisamos da obra de Klein. O autor, ao definir o conceito de comprimento, área e volume, bem como na interpretação do sinal, quando se utiliza de conceitos do cálculo infinitesimal, matrizes, determinantes, áreas parciais de figuras poligonais e curvilíneas, faz uma junção entre a Álgebra e a Geometria.

Klein, em *Matemática Elementar sob um ponto de vista avançado - Geometria*, foge do rigor matemático e apresenta os conteúdos de forma direta, sem apresentar demonstrações de teoremas, apenas enuncia os teoremas sem se preocupar com provas. A abordagem intuitiva dos conteúdos matemáticos compunha sua proposta de reforma do ensino da matemática. Porém, nota-se da parte de Klein pouco interesse em esclarecer suas afirmações, perfazendo assim uma obra bastante panorâmica. Por conseguinte, o leitor o tempo todo carece de detalhes dos resultados ali apresentados. A escolha por uma apresentação panorâmica não detalhada nos dá o indicativo do que Klein entendia por intuição: Apresentar um conceito intuitivamente não significava necessariamente torná-lo de fácil compreensão, significava colocá-lo bem relacionado com conceitos de outras áreas (álgebra e aritmética), com sua história e com aplicações.

Já Roxo baseado nas propostas inovadoras de Klein, buscou a conexão entre os três ramos da matemática (Aritmética, Álgebra e Geometria), que inicialmente foi aplicada no currículo de matemática do colégio Pedro II e depois compôs a Reforma Campos.

Já Euclides Roxo, que tanto enfatizou em sua proposta de mudança do currículo do colégio Pedro II a junção das três áreas da matemática, não o fez em seu livro Curso de Mathematica. Vimos que Roxo trata com muito rigor os conteúdos matemáticos. Em suas explicações procura sempre apresentar teoremas, corolários e demonstrações para justificar os conceitos e regras. Apesar de sempre citar exemplos dos conceitos matemáticos estudados, as aplicações apresentadas no livro não estão relacionadas ao cotidiano. Assim, Roxo não faz uso das tendências do movimento reformista internacional, no que tange ao ensino voltado para as aplicações da matemática.

Roxo, em seu livro, valoriza muito os aspectos históricos. O autor, a cada encerramento de capítulo, traz sempre um texto relacionado à história da matemática e biografias de matemáticos. Notamos, dessa forma, que o autor ao valorizar aspectos históricos no ensino da matemática se preocupa com a finalidade do ensino valorizando a cultura de cada época. Essa explanação é feita de forma bem modesta, se pensarmos na tendência da educação matemática voltada para a Etnomatemática.

Torna-se necessário lembrarmos também que Roxo, no prefácio de seu livro, salienta que nos dois primeiros anos tratou da Geometria de forma intuitiva e experimental, e que agora procura dar um aspecto mais formal ao ensino de Geometria. Dessa forma, vemos que o autor trabalhou a geometria em dois momentos distintos, primeiro de forma intuitiva e experimental e, posteriormente, de maneira formal.

Os dois autores tratam de maneira diferenciada a geometria. Roxo trabalha com a geometria plana valorizando o método axiomático, enquanto Klein baseia o estudo da geometria nas transformações geométricas e na geometria analítica.

Ao proceder a análise das obras de Felix Klein e Euclides Roxo verificamos que Roxo procurou seguir as idéias de Klein, porém não conseguiu fugir do rigor matemático. Esse fato pode ser justificado pelos impactos que isso poderia causar, visto que suas propostas já sofriam críticas quanto ao caráter intuitivo. Roxo pode ter se preocupado com seus opositores e suas críticas, já que mudanças tão radicais poderiam causar uma rejeição maior.

Vimos também que ambas as propostas tiveram rejeições por parte comunidade de professores de matemática. Essa rejeição pode se justificar pelo fato de que, em ambas, os autores

valorizavam o ensino de matemática partindo de conceitos intuitivos, e isso, quando se trata principalmente de aspectos mais complexos da matemática poderia se tornar um embate para professores que estavam acostumados a ensinar conceitos puramente dedutivos.

Em tempos de discussões sobre educação matemática, em que vários educadores levam em consideração as lutas e discussões de Klein e de Roxo, ainda nos deparamos com vários professores de matemática que simplesmente reproduzem conhecimentos matemáticos sem levar em consideração a realidade vivida pelos alunos.

Como mudanças ainda causam transtornos e reações antagônicas de vários professores, não resta dúvida de que as propostas iniciadas por Euclides Roxo, no Brasil, seguidas e aperfeiçoadas por outros educadores, ainda serão palco para de muitos debates e discussões.

Referências Bibliográficas

- [1] BELTRÃO, Maria Eli Puga. Felix Klein: Uma visão do cálculo infinitesimal no ensino médio. 2001. 140 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.
- [2] BOYER, Carl B. História da Matemática. Editora Edgard Blücher: São Paulo, 2003.
- [3] BRAGA, Ciro. O processo inicial de disciplinarização de função na matemática do ensino secundário brasileiro. 2003. 177 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC, São Paulo, 2003.
- [4] CARVALHO, João Bosco Pitombeira de, et. al. Euclides Roxo e o movimento de reforma do ensino de Matemática na década de 30. Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos, Brasília, v. 81, n. 199, p. 415-424, set/dez. 2000.
- [5] COSTA, Felix Silva. Áreas e Contorno. 2008. 78 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008.
- [6] DASSIE, Bruno Alves. Euclides Roxo e a constituição da educação matemática no Brasil. 2008. 271 f. Tese (Doutorado em Educação), PUC, Rio de Janeiro, 2008.
- [7] DUREN, W. L. Jr. Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint. Mathematics News Letter, v. 8, n. 8. p. 185-186, may, 1934.
- [8] EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. Campinas: Unicamp, 2004.
- [9] GRAY, Jeremy. Felix Klein's Erlangen Program, 'Comparative considerations of recent geometrical researches' (1872). Landmark Writings in Western Mathematics, 1640-1940, 2005. p. 544-552.

- [10] KLEIN, Felix. Elementary mathematics from an advanced standpoint - geometry. [trad. E. R. Hedrick e C. A. Noble]. New York: Dover Publications, Inc, 2004.
- [11] KLEIN, Felix. Matemática Elemental desde un punto de vista superior. Volume II. Geometria. [trad. R. Fontanilla]. Madrid, 1931.
- [12] MENESES, Ricardo Soares de. Uma história da Geometria escolar no Brasil: de disciplina a conteúdo de ensino. 2007. 172 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC, São Paulo, 2007.
- [13] MIORIM, Maria Ângela. Introdução à História da Educação Matemática. São Paulo: Atual, 1998.
- [14] MIRANDA, Marilene Moussa. A experiência norte-americana de fusão da Aritmética, Álgebra e Geometria e sua apropriação pela educação matemática brasileira. 2003. 98 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC, São Paulo, 2003.
- [15] REINER, John M. Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint. *Philosophy of Science*, v. 8, n. 3, p. 466, jul., 1941.
- [16] ROWE, David E. "Jewish Mathematics" at Gottingen in the Era of Felix Klein. *Isis*, Brasília, v. 77, n. 3, p. 422-449, sep. 1986.
- [17] ROWE, David E. Emergence of the Theory of Lie Groups: An Essay in the History of Mathematics, 1869-1926, *Crítica do livro*, *Notices da AMS*, Volume 50, 6, 2003, 668-677.
- [18] SILVA JUNIOR, Epitácio Pedro. O Teorema da Função Implícita em um contexto aplicado e algumas conexões no cálculo de áreas de regiões planas. 2008. 88 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008.
- [19] SIQUEIRA, Rogério Monteiro de. De Oslo a Roma: A Enzyklopädie kleiniana de Geometria. *Anais do Scientiarum Historia* II, UFRJ, Rio de Janeiro, 2009.
- [20] SIQUEIRA, Rogério Monteiro de. From Oslo to Rome: The Enzyklopädie of geometry of Felix Klein. *Manuscrito*, 2010.

-
- [21] SPIVAK, M. Calculus on Manifolds. Addison-Wesley, 1965.
- [22] VALENTE, Wagner Rodrigues, (Org). O nascimento da matemática do ginásio. São Paulo: Annablume; Fapesp, 2004.
- [23] VALENTE. Wagner (org). A matemática do ginásio - Livros didáticos de matemática e as reformas Campos e Capanema. São Paulo: GHEMAT, 2005. CD-ROM.
- [24] VALENTE, Wagner Rodrigues, (Org). Euclides Roxo e a modernização do ensino da matemática no Brasil. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2004.
- [25] WERNECK, Arlete Petry Terra. Euclides Roxo e a Reforma Francisco Campos: A gênese do primeiro programa de ensino de matemática brasileiro. 2003. 122 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC, São Paulo, 2003.