

Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

**Matrizes de Conexão para as Dinâmicas
Contínua e Discreta**

por

Naiara Vergian de Paulo

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

Orientadora: Prof^a Dr^a Ketty Abaroa de Rezende

Este trabalho contou com apoio financeiro da FAPESP

(Processo 07/57941-0).

MATRIZES DE CONEXÃO PARA AS DINÂMICAS CONTÍNUA E DISCRETA

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Naiara Vergian de Paulo** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 15 de março de 2010



Profa. Dra. Ketly Abaroa de Rezende
Orientadora

Banca Examinadora:

- 1 Ketly Abaroa de Rezende
- 2 Marco Antonio Teixeira
- 3 Mariana Rodrigues da Silveira

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de **MESTRE em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8 / 5089

Paulo, Naiara Vergian de
P285m Matrizes de conexão para as dinâmicas contínua e discreta/Naiara
Vergian de Paulo -- Campinas, [S.P. : s.n.], 2010.

Orientadora : Ketty Abaroa de Rezende
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Sistemas dinâmicos. 2. Teoria do índice de Conley. 3. Topologia
algébrica. 4. Matriz de conexão. . I. Rezende, Ketty Abaroa de. II.
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Connection matrices for the continuous and discrete dynamics

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Dynamical systems. 2. Conley index theory. 3.
Algebraic topology. 4. Connection matrix.

Área de concentração: Sistemas Dinâmicos Topológicos

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Profa. Dra. Ketty Abaroa de Rezende (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Marco Antônio Teixeira (IMECC-UNICAMP)
Profa. Dra. Mariana Rodrigues da Silveira (UFABC)

Data da defesa: 15/03/2010

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 15 de março de 2010 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Ketty A. de Rezende.

Prof.(a). Dr(a). KETTY ABAROA DE REZENDE

[Handwritten signature]

Prof. (a). Dr (a). MARCO ANTONIO TEIXEIRA

Mariana Rodrigues da Silveira

Prof. (a). Dr (a). MARIANA RODRIGUES DA SILVEIRA

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais, Leônidas e Silméia, por todo o apoio, incentivo e compreensão.

À minha orientadora, Ketty Abaroa de Rezende, por me guiar com tanta estima ao longo deste trabalho.

À Mariana Rodrigues da Silveira, professora da UF-ABC, por ter sido tão disponível e atenciosa.

À Maria Alice Bertolim, professora da Universidade de Salzburg, por me orientar no início do estudo de difeomorfismos.

Ao Vanderlei Marcos do Nascimento, professor da UNESP de Rio Claro, por me oferecer valiosos conselhos desde o início de minha graduação.

Ao Bruno por estar sempre ao meu lado trazendo alegria até mesmo nos momentos mais difíceis.

À Moara e à Talita por todo o carinho e amizade.

À FAPESP pelo apoio financeiro.

Aos funcionários da Secretaria de Pós Graduação do IMECC-UNICAMP pelos serviços pacientemente prestados.

A todos que, direta ou indiretamente, me ajudaram a alcançar mais este objetivo.

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar a matriz de conexão, estabelecendo um paralelo entre as abordagens contínua e discreta.

O índice homológico de Conley, principal elemento para a definição da matriz de conexão, assume formas distintas quando lidamos com fluxos ou com aplicações contínuas. Tal índice trata-se apenas de um espaço vetorial graduado no caso contínuo, enquanto no caso discreto toma a forma de um par que consiste de um espaço vetorial graduado junto com um isomorfismo.

Como consequência, a matriz de conexão para uma decomposição de Morse é definida diferentemente quando consideramos sistemas dinâmicos contínuos ou discretos. No primeiro caso, a matriz de conexão é uma matriz de aplicações lineares entre os índices contínuos homológicos de Conley dos conjuntos de Morse que codifica uma trança de espaços vetoriais graduados, conhecida como trança do índice contínuo homológico. Já no segundo caso, a matriz de conexão é um par de matrizes que têm como entradas aplicações lineares definidas entre os índices discretos homológicos de Conley dos conjuntos de Morse e, agora, este par de matrizes codifica uma trança de espaços vetoriais graduados com isomorfismos, chamada trança do índice discreto homológico.

Apesar do índice homológico de Conley e da matriz de conexão serem elementos puramente algébricos, ambos são capazes de fornecer informações dinâmicas sobre um fluxo e mais ainda sobre uma aplicação contínua. Especificamente, estes elementos podem detectar a existência de órbitas de conexão entre conjuntos de Morse de um conjunto invariante isolado e exemplos desta situação são apresentados neste trabalho.

Abstract

The goal of this work is to present the connection matrix by establishing a parallel between the continuous and discrete settings.

The homological Conley index, the main element in the definition of the connection matrix, has a different form for flows or continuous maps. This index is a graded vector space in the continuous case whereas in the discrete case it takes the form of a pair consisting of a graded vector space together with an isomorphism.

Consequently, the connection matrix for a Morse decomposition is defined differently when we consider continuous or discrete dynamical systems. In the prior case, the connection matrix is a matrix of linear maps between the continuous Conley homology indices of Morse sets which codes the information of a graded vector space braid known as the continuous homology index braid. In the latter case, the connection matrix is a pair of matrices where the entries in both case are linear maps defined between the discrete Conley homology indices of Morse sets and, in this setting, this pair of matrices codes the information of a graded vector space braid with isomorphism known as discrete homology index braid.

Although the Conley homology index and the connection matrix constitute purely algebraic elements, they are capable of providing dynamical information of a flow and of a continuous map. More precisely, these elements can detect the existence of connecting orbits among Morse sets of an isolated invariant set and examples of this situation are presented in this work.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Preliminares Dinâmicas	3
1.2 Preliminares Algébricas	11
1.2.1 Homologia de Complexos de Cadeias	11
1.2.2 Sequências Exatas	18
1.2.3 Tranças	22
1.2.4 Redução de Leray	29
2 Decomposição de Conjuntos Invariantes Isolados	33
2.1 Conjunto Invariante Isolado e Par-Índice	34
2.2 Decomposição em Par Atrator-Repulsor e Trio-Índice	44
2.3 Decomposição de Morse e Filtração-Índice	50
3 Índice de Conley	55
3.1 Índice Contínuo de Conley	56
3.1.1 Índice Contínuo Homotópico de Conley	56
3.1.2 Índice Contínuo Homológico de Conley	58
3.2 Índice Discreto de Conley	61
3.2.1 Índice Discreto Homotópico de Conley	61
3.2.2 Índice Discreto Homológico de Conley	66
4 Matriz de Conexão no Caso Contínuo	77
4.1 Matriz de Conexão para Decomposição em Par Atrator-Repulsor	77
4.2 Matriz de Conexão para Decomposição de Morse	85
5 Matriz de Conexão no Caso Discreto	105
5.1 Matriz de Conexão para Decomposição em Par Atrator-Repulsor	106

5.2 Matriz de Conexão para Decomposição de Morse	118
Apêndice A	125
Apêndice B	133
Referências Bibliográficas	141

Introdução

A teoria de Conley foi introduzida por Charles Conley e desde então tem sido desenvolvida em diversas abordagens.

Os dois principais contextos de aplicação desta teoria são os sistemas dinâmicos contínuos, aqueles gerados por fluxos, e os sistemas dinâmicos discretos, os que são gerados por aplicações contínuas.

O índice de Conley foi primeiramente formulado para fluxos e encontrou um obstáculo ao ser generalizado para aplicações contínuas. De modo mais específico, os sistemas dinâmicos contínuos possuem uma propriedade ausente nos sistemas dinâmicos discretos: quaisquer pares-índice associados a um mesmo conjunto invariante isolado produzem espaços pontuados com o mesmo tipo de homotopia.

Por esta razão, foram apresentadas definições alternativas para o índice de Conley no caso discreto. Inicialmente Robbin e Salamon utilizaram a teoria shape em [18] para definir tal índice, em seguida Szymczak generalizou esta definição em [21] através de categorias e funtores e posteriormente, para simplificar, Franks e Richeson construíram em [5] um novo conceito de índice discreto de Conley fazendo uso da relação de shift equivalência.

Tendo em vista a dificuldade de trabalhar com o índice de Conley na forma homotópica, Conley (no caso contínuo) e Mrozek (no caso discreto) consideraram respectivamente em [2] e [11] um índice de Conley algébrico e, portanto, computável.

O verdadeiro objetivo da teoria de Conley é auxiliar na descrição da estrutura dinâmica de fluxos ou aplicações contínuas sobre conjuntos invariantes isolados. Para isto, costuma-se decompor estes conjuntos como a união de conjuntos invariantes isolados menores, utilizando uma decomposição de Morse ou, particularmente, uma decomposição em par atrator-repulsor.

A partir de uma decomposição de Morse e da definição do índice de Conley na forma algébrica, Franzosa introduziu em [7] a matriz de conexão no caso contínuo e, anos mais tarde, Richeson apresentou a matriz de conexão no caso discreto em [17]. A contribuição dinâmica da matriz de conexão está na sua capacidade de detectar órbitas de conexão entre alguns dos conjuntos de Morse que decompõem um conjunto invariante isolado.

O índice homológico de Conley e a matriz de conexão assumem formas mais simples quando lidamos com fluxos ao invés de aplicações contínuas, porém no segundo caso são capazes de fornecer ainda mais informações dinâmicas. No caso discreto, estes dois elementos algébricos podem, por exemplo, revelar a existência de órbitas conectantes entre pontos que possuem o mesmo índice, fato que não ocorre no caso contínuo.

Este trabalho foi dividido em cinco capítulos e dois apêndices.

O primeiro capítulo apresenta as preliminares dinâmicas e algébricas necessárias para um bom entendimento do restante do texto. Na primeira seção deste capítulo, introduzimos notações e definições no contexto de sistemas dinâmicos e exibimos duas importantes dinâmicas discretas não triviais que foram complementadas nos apêndices deste trabalho. Já na segunda seção, abordamos os pré-requisitos da álgebra e da topologia algébrica organizados em quatro subseções: homologia de complexos de cadeias, sequências exatas, tranças e redução de Leray.

O segundo capítulo considera o conjunto invariante isolado, bem como suas possíveis decomposições: a decomposição em par atrator-repulsor e, sua generalização, a decomposição de Morse. Além disso, apresentamos o par-índice, ferramenta essencial para a definição do índice de Conley, o trio-índice, usado para definir a matriz de conexão no caso mais simples de uma decomposição em par atrator-repulsor, e a filtração-índice, necessária para a generalização da matriz de conexão no contexto de decomposição de Morse.

No terceiro capítulo definimos os índices homotópico e homológico de Conley de um conjunto invariante isolado, ressaltando que estas definições no caso contínuo não podem ser naturalmente estendidas para o caso discreto. Para obter o índice discreto de Conley, mostramos que, além do par-índice, também é necessário associar ao conjunto invariante isolado em questão uma aplicação-índice. Exemplos e propriedades dos índices contínuo e discreto de Conley foram exibidos neste capítulo.

Os capítulos mais importantes deste trabalho são o quarto e o quinto, cujas referências principais são respectivamente [7] e [17]. Nestes capítulos introduzimos a matriz de conexão, tanto para fluxos quanto para aplicações contínuas, como um elemento algébrico que codifica a trança do índice homológico. Além disso, apresentamos várias proposições que destacam a importância dinâmica da matriz de conexão na busca de órbitas conectantes, assim como exibimos exemplos aplicando estes resultados.

Capítulo 1

Preliminares

A finalidade deste capítulo é apresentar alguns pré-requisitos da álgebra, da topologia algébrica e de sistemas dinâmicos que serão utilizados ao longo do texto. As referências que deram suporte para a coletânea de definições, exemplos e resultados aqui considerados são: [1], [3], [4], [7], [8], [11], [13], [15], [17], [20] e [22].

As dinâmicas analisadas neste trabalho têm como ambiente um espaço métrico localmente compacto, que normalmente denotaremos por X , e são geradas ora por um fluxo $\phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ e ora por uma aplicação contínua $f : X \rightarrow X$.

1.1 Preliminares Dinâmicas

Iniciamos a apresentação das preliminares pelo contexto de sistemas dinâmicos.

Nesta seção introduziremos definições e notações tanto para a abordagem contínua de sistemas dinâmicos quanto para a abordagem discreta e apresentaremos duas famosas dinâmicas discretas que servirão de exemplos em capítulos posteriores.

Vejamus primeiramente a definição de fluxo.

Definição 1.1. *Um fluxo ϕ sobre X é uma ação contínua de \mathbb{R} sobre X , ou seja, é uma aplicação contínua $\phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ que satisfaz:*

1. $\phi(0, x) = x$ para todo $x \in X$
2. $\phi(t + s, x) = \phi(t, \phi(s, x))$ para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$ e $x \in X$

Para cada sistema dinâmico contínuo gerado por um fluxo $\phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$, podemos obter uma coleção de sistemas dinâmicos discretos gerados pelos homeomorfismos $f_\tau : X \rightarrow$

X dados por $f_\tau(x) = \phi(\tau, x)$, com τ variando em \mathbb{R} . Cada aplicação f_τ é chamada de **homeomorfismo induzido por ϕ no tempo τ** .

Seja ϕ um fluxo sobre X . Pela primeira propriedade da Definição 1.1, ao fixar um ponto $x \in X$ e variar $t \in \mathbb{R}$ obtemos um caminho de X que passa por x exatamente no instante $t = 0$. À este caminho damos o nome de órbita de x com relação ao fluxo ϕ .

Definição 1.2. *A órbita passando por $x \in X$ com relação a um fluxo ϕ é o conjunto dado por $\mathcal{O}_\phi(x) = \{\phi(t, x), t \in \mathbb{R}\}$.*

Quando trabalhamos com uma aplicação contínua f definida sobre X , a órbita de um ponto $x \in X$ é definida como qualquer caminho discreto de X que passa por x e que é formado por iterações sucessivas de f .

Definição 1.3. *Uma órbita passando por $x \in X$ com relação a uma aplicação contínua f é uma sequência $\mathcal{O}_f(x) = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subset X$ que satisfaz $x_0 = x$ e $f(x_n) = x_{n+1}$.*

Observação 1.1. *No caso em que a aplicação f é invertível, existe uma única órbita passando por $x \in X$ com relação à f que é definida por $\mathcal{O}_f(x) = \{f^n(x), n \in \mathbb{Z}\}$. Porém se f não admite uma inversa, então podem existir várias órbitas passando por um mesmo ponto. Considere o seguinte exemplo:*

Exemplo 1.1. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Existem duas órbitas passando pelo ponto $x = 4$:*

$$\mathcal{O}_1(4) = \{\sqrt{2}, 2, 4, 16, 256, \dots\} \quad e \quad \mathcal{O}_2(4) = \{-\sqrt{2}, 2, 4, 16, 256, \dots\}$$

Podemos considerar apenas a parte positiva da órbita de um ponto. Neste caso não temos o problema de não unicidade ao tratar de uma aplicação contínua, seja ela invertível ou não. Veja as definições que seguem:

Definição 1.4. *1. A órbita positiva passando por $x \in X$ com relação a um fluxo ϕ é o conjunto dado por $\mathcal{O}_\phi^+(x) = \{\phi(t, x), t \in \mathbb{R}^+\}$.*

2. A órbita positiva passando por $x \in X$ com relação a uma aplicação contínua f é a sequência $\mathcal{O}_f^+(x) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ que satisfaz $x_0 = x$ e $f(x_n) = x_{n+1}$, ou seja, a sequência bem definida dada por $\mathcal{O}_f^+(x) = (f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.

Na maioria dos casos denotaremos as órbitas $\mathcal{O}_f(x)$ e $\mathcal{O}_\phi(x)$ simplesmente por $\mathcal{O}(x)$ e as órbitas positivas $\mathcal{O}_f^+(x)$ e $\mathcal{O}_\phi^+(x)$ apenas por $\mathcal{O}^+(x)$.

Definiremos agora um conjunto invariante, um dos principais objetos de estudo em sistemas dinâmicos.

Definição 1.5. *Seja S um subconjunto de X .*

1. S é dito **invariante em relação ao fluxo** ϕ se $\phi(\mathbb{R}, S) = S$, ou equivalentemente, se $\mathcal{O}(x) \subset S$ para todo $x \in S$.
2. S é dito **invariante em relação à aplicação contínua** f se $f(S) = S$, ou equivalentemente, se para cada $x \in S$ existe uma órbita $\mathcal{O}(x)$ passando por x que está contida em S .

No próximo capítulo apresentaremos duas decomposições para um tipo especial de conjunto invariante. Para compreendê-las, devemos conhecer as definições de ω -limite e ω^* -limite.

Definição 1.6. *Seja Y um subconjunto qualquer de X .*

1. O conjunto dos pontos $x \in X$ para os quais existem seqüências $(t_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ e $(y_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset Y$ satisfazendo $t_i \rightarrow +\infty$ e $\phi(t_i, y_i) \rightarrow x$ é chamado de **ω -limite de Y com relação ao fluxo** ϕ e denotado por $\omega_\phi(Y)$ ou apenas por $\omega(Y)$.

O conjunto dos pontos $x \in X$ para os quais existem seqüências $(t_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ e $(y_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset Y$ satisfazendo $t_i \rightarrow -\infty$ e $\phi(t_i, y_i) \rightarrow x$ é chamado de **ω^* -limite de Y com relação ao fluxo** ϕ e denotado por $\omega_\phi^*(Y)$ ou simplesmente por $\omega^*(Y)$.

2. O conjunto dos pontos $x \in X$ para os quais existem seqüências $(n_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ e $(y_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset Y$ satisfazendo $n_i \rightarrow +\infty$ e $f^{n_i}(y_i) \rightarrow x$ é chamado de **ω -limite de Y com relação a aplicação contínua** f e denotado por $\omega_f(Y)$ ou apenas por $\omega(Y)$.

No caso em que f é uma aplicação invertível, podemos definir o conjunto **ω^* -limite de Y com relação a aplicação contínua** f , denotado por $\omega_f^*(Y)$ ou simplesmente por $\omega^*(Y)$, como o conjunto dos pontos $x \in X$ para os quais existem seqüências $(n_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ e $(y_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset Y$ satisfazendo $n_i \rightarrow +\infty$ e $f^{-n_i}(y_i) \rightarrow x$.

Intuitivamente dizemos que a órbita de um ponto $y \in X$ “nasce” em $\omega^*(y)$ e “morre” em $\omega(y)$.

Definição 1.7. *Duas aplicações $f : Y \rightarrow Y$ e $g : Z \rightarrow Z$, onde Y e Z são espaços métricos, são ditas **conjugadas** se existe um homeomorfismo $h : Y \rightarrow Z$ tal que $f = h^{-1} \circ g \circ h$. Chamamos h de **conjugação** entre f e g .*

Uma conjugação entre duas aplicações f e g não só leva órbitas de f sobre órbitas de g , como também preserva as propriedades dinâmicas do espaço de órbitas. Uma conjugação preserva, por exemplo, a periodicidade de pontos, os conjuntos ω e ω^* limites, a densidade de conjuntos, pontos atratores, repulsores e de sela, entre outros. Sendo assim, duas aplicações conjugadas possuem essencialmente o mesmo comportamento dinâmico.

Veremos abaixo um caso em que a conjugação não ocorre.

Exemplo 1.2. *Sejam*

$$\dot{x} = Ax \tag{1.1}$$

$$\dot{y} = By \tag{1.2}$$

dois sistemas lineares, onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

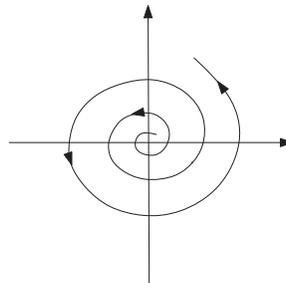
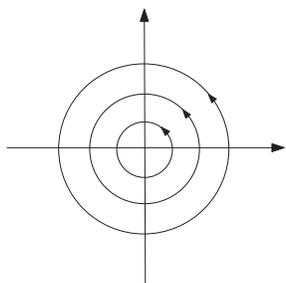


Figura 1.1: Retrato de fase do sistema (1.1)

Figura 1.2: Retrato de fase do sistema (1.2)

Considere os homeomorfismos $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ induzidos no tempo 1 pelos fluxos obtidos de (1.1) e (1.2) respectivamente.

Mostremos que f e g não são conjugados.

Para isto observe primeiramente que os círculos concêntricos na origem são invariantes por f , ou seja, se $x \in \mathcal{C}$, onde \mathcal{C} é uma circunferência qualquer centrada na origem, então $f^n(x) \in \mathcal{C}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Logo, se existisse uma conjugação $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ entre f e g , teríamos que para cada $x \in \mathcal{C}$ e $n \in \mathbb{Z}$

$$g^n \circ h(x) = h \circ f^n(x) \in h(\mathcal{C}).$$

Portanto a órbita do ponto $h(x)$ em relação à g seria um subconjunto da curva fechada $h(\mathcal{C})$, donde segue o absurdo.

Para finalizar esta seção, vamos apresentar dois exemplos de dinâmicas discretas não triviais: a família quadrática e a ferradura de Smale. Os apêndices adicionados a este trabalho têm o intuito de complementar a descrição destas duas dinâmicas.

Exemplo 1.3. A Família Quadrática

Considere a família de funções quadráticas dada por

$$F_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \mu x(1 - x)$$

com $\mu > 1$.

Primeiramente observe que as raízes de F_μ são 0 e 1 para qualquer $\mu > 1$. Além disso, toda F_μ possui exatamente dois pontos fixos, um em 0 e outro em $p_\mu = \frac{\mu - 1}{\mu}$.

Temos ainda que $F'_\mu(0) = \mu$ e $F'_\mu(p_\mu) = 2 - \mu$, donde segue que 0 é um ponto hiperbólico repulsor para todo $\mu > 1$ e que p_μ é um ponto hiperbólico atrator se $1 < \mu < 3$, um ponto não hiperbólico se $\mu = 3$ e um ponto hiperbólico repulsor se $\mu > 3$.

Vamos analisar agora o comportamento dos pontos que não são fixos por F_μ . Consideremos primeiro os pontos que não estão no intervalo $I = [0, 1]$.

Note que $0 < p_\mu < 1$ para qualquer $\mu > 1$, logo não existem pontos fixos no complementar de I .

Se $x < 0$ então $F_\mu(x) < x$ e, assim, $F_\mu^n(x)$ é uma sequência estritamente decrescente. Além disso, para qualquer $x < 0$, $F_\mu^n(x)$ não converge quando $n \rightarrow \infty$, pois se $F_\mu^n(x) \rightarrow p$ para algum p então teríamos $F_\mu^{n+1}(x) \rightarrow F(p) < p$. Portanto $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$ se $x < 0$.

Quando $x > 1$ temos que $F_\mu(x) < 0$, logo $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$ também neste caso.

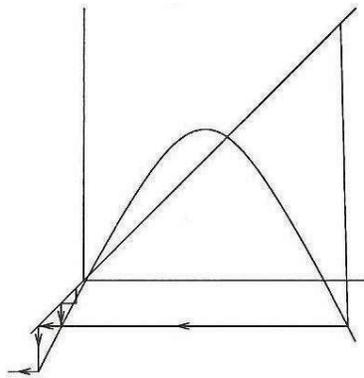


Figura 1.3: Comportamento de F_μ sobre os pontos do complementar de I

Sendo assim, toda a dinâmica interessante da família quadrática ocorre no intervalo I .

O comportamento de F_μ sobre I é muito simples quando $1 < \mu < 3$. De fato, Devaney mostra em [3] que neste caso a órbita positiva de qualquer ponto de $(0, 1)$ converge para o ponto fixo p_μ . Não apresentaremos a prova deste fato, pois nosso verdadeiro interesse é explorar a família quadrática para valores mais altos de μ .

Com esta análise completamos o estudo da dinâmica de F_μ para $1 < \mu < 3$, ou seja, concluímos que 0 é um ponto fixo repulsor, p_μ é um ponto fixo atrator, todos os pontos de $(0, 1)$ são assintóticos a p_μ e todos os pontos do complementar de I têm sua órbita tendendo para $-\infty$.

Veja a análise gráfica e o retrato de fase de F_μ para $1 < \mu < 3$ na Figura 1.4.

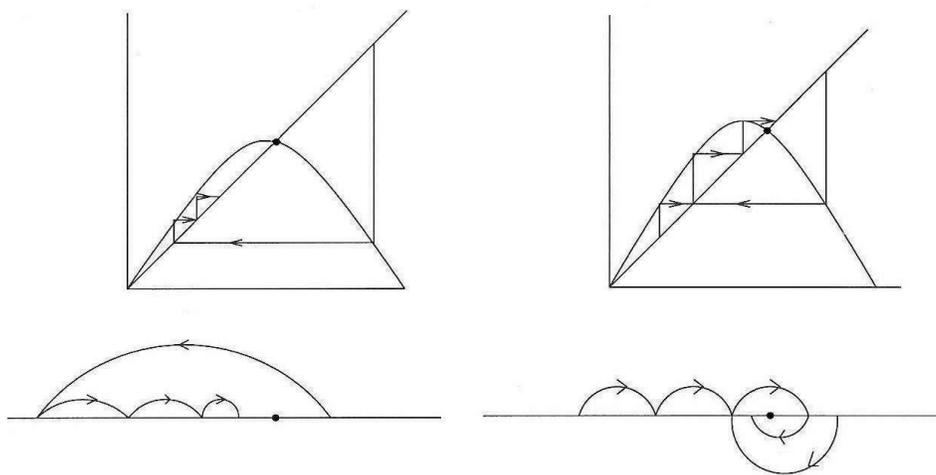


Figura 1.4: Análise gráfica e retrato de fase de F_μ para $1 < \mu < 2$ e $2 < \mu < 3$

A dinâmica sobre o intervalo I é mais complexa quando $\mu > 3$, porém torna-se mais rica e interessante quando μ passa do valor 4.

Se $\mu > 4$, o valor máximo $\frac{\mu}{4}$ de F_μ é maior do que 1 e, neste caso, existem pontos de I que escapam de I após uma iterada de F_μ . Chamaremos o conjunto destes pontos de A_0 e o representamos na Figura 1.5.

Para qualquer ponto $x \in A_0$ temos que $F_\mu^2(x) < 0$ e disto segue que $F_\mu(x) \rightarrow -\infty$ pelo que vimos anteriormente.

Considere agora o conjunto $A_1 = \{x \in I \mid F_\mu(x) \in A_0\}$, ou seja, o conjunto de todos os pontos de I que deixam I na segunda iterada de F_μ . Acabamos de ver que a órbita de qualquer ponto de A_0 tende para $-\infty$. Pela definição de A_1 , se $x \in A_1$ então $F_\mu(x) \in A_0$, logo o mesmo ocorre com as órbitas de pontos de A_1 .

Indutivamente, seja $A_n = \{x \in I \mid F_\mu^n(x) \in A_0\}$ o conjunto dos pontos de I que saem de I na $(n+1)$ -ésima iterada de F_μ . Pelo mesmo argumento anterior, se $x \in A_n$ então a órbita de x tende a $-\infty$.

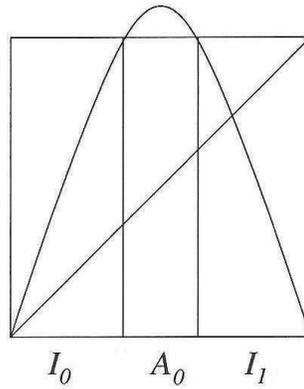


Figura 1.5: Representação de A_0

Portanto tudo o que nos resta é analisar o comportamento dos pontos de I que nunca escapam de I , ou seja, analisar o conjunto invariante

$$\Lambda = I - \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right).$$

No Apêndice A mostramos que o conjunto Λ possui a estrutura de um conjunto de Cantor e, além disso, utilizamos a dinâmica simbólica para obter o resultado a seguir que descreve completamente a dinâmica de F_μ sobre o conjunto Λ :

Teorema 1.1. *Seja $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ com $\mu > 4$. Então*

1. $\#Per_n(F_\mu) = 2^n$ para cada $n \in \mathbb{N}^*$
2. $Per(F_\mu)$ é denso em Λ
3. Existe uma órbita densa para F_μ em Λ

Observação 1.2. *A notação $Per_n(F_\mu)$ utilizada no teorema acima denota o conjunto dos pontos periódicos de F_μ com período n , enquanto a notação $Per(F_\mu)$ representa o conjunto de todos os pontos periódicos de F_μ .*

Com isso concluímos o estudo da família quadrática F_μ para $\mu > 4$. Nesta situação temos que os pontos fixos 0 e p_μ são hiperbólicos repulsores e que I contém um conjunto de Cantor Λ , cuja dinâmica extremamente rica é descrita pelo Teorema 1.1, de modo que a órbita de qualquer ponto do complementar de Λ diverge para $-\infty$.

Exemplo 1.4. A Ferradura de Smale

Seja D a região do plano formada pelo quadrado $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ e por dois semicírculos D_1 e D_2 dispostos em lados opostos de Q . Veja a Figura 1.7.

Considere uma aplicação contínua $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que atua sobre Q de acordo a seguinte composição:

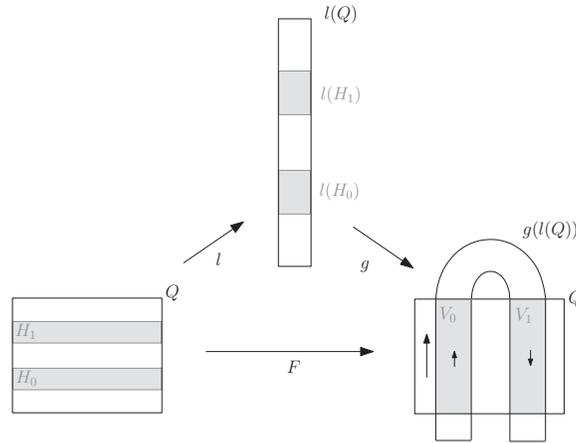


Figura 1.6: Ação de F sobre Q

onde l é uma aplicação linear que contrai linhas horizontais por um fator $0 < \delta < \frac{1}{2}$ e expande linhas verticais pelo fator $\mu = \frac{1}{\delta}$ enquanto g torce $l(Q)$ produzindo uma ferradura e em seguida a translada para dentro de D na posição indicada na Figura 1.6.

Os dois semicírculos D_1 e D_2 são contraídos e aplicados dentro de D_1 , como vemos na Figura 1.7.

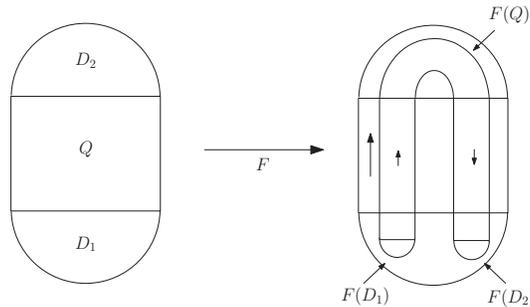


Figura 1.7: Ação de F sobre D_1 e D_2

Como $F|_{D_1}$ é uma contração, D_1 é um subconjunto fechado de \mathbb{R}^2 e $F(D_1) \subset D_1$ temos, pelo Lema da Contração, que existe um único ponto fixo $p \in D_1$ de F tal que para todo $x \in D_1$ vale que $F^n(x) \rightarrow p$. Já que $F(D_2) \subset D_1$, segue ainda que $F^n(x) \rightarrow p$ para qualquer $x \in D_2$ e, para completar, se $x \in Q$ mas $F^n(x) \notin Q$ para algum $n \in \mathbb{N}$ então $F^n(x) \in D_1 \cup D_2$ e daí $F^n(x) \rightarrow p$ também neste caso.

Resta-nos analisar o conjunto

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} F^n(Q)$$

dos pontos de Q cujas imagens se mantêm em Q sob todas as iterações de F .

Observe que $F(D) \subset D$ e que F é injetora, porém F não é sobrejetora e, sendo assim, F^{-1} não está globalmente definida.

Mas sendo F injetora, temos que $F(\Lambda) = \Lambda$, ou seja, Λ é um conjunto invariante de F . Além disso, note que $\Lambda \subset F^{-1}(Q) = H_0 \cup H_1$.

No Apêndice B descrevemos a estrutura topológica de Λ , argumentando que Λ é o produto de dois conjuntos de Cantor, e também analisamos o comportamento dinâmico de F restrita a Λ , utilizando novamente a dinâmica simbólica para mostrar o seguinte teorema:

Teorema 1.2. *Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação ferradura de Smale. Então*

1. $\#Per_n(F) = 2^n$ para cada $n \in \mathbb{N}^*$
2. $Per(F)$ é denso em Λ
3. Existe uma órbita densa para F em Λ

Assim finalizamos o estudo da dinâmica da ferradura de Smale sobre D , concluindo que o quadrado Q contém um conjunto invariante que se escreve como o produto de dois conjuntos de Cantor e cuja dinâmica extremamente complexa é descrita pelo Teorema 1.2. Além disso, temos que a órbita de todo ponto de $D \setminus \Lambda$ é atraída por um ponto $p \in D_1$.

1.2 Preliminares Algébricas

O índice homológico de Conley e a matriz de conexão, principais elementos deste trabalho, serão definidos de forma puramente algébrica em capítulos posteriores. Por esta razão, necessitaremos de alguns pré-requisitos da álgebra e da topologia algébrica que agora serão abordados nesta seção.

1.2.1 Homologia de Complexos de Cadeias

Começaremos a apresentação das preliminares algébricas com uma breve revisão sobre complexos de cadeias, aplicações de cadeias e homologia de um complexo de cadeias.

Definiremos aqui os elementos essenciais para a obtenção da homologia de um espaço topológico sobre um corpo F e, em seguida, veremos que esta homologia é simplesmente um caso particular da homologia de um complexo de cadeias.

Apenas nesta subseção, X denotará um espaço topológico arbitrário.

O elemento que fornece o alicerce para chegarmos à homologia de espaços topológicos é o simplexo que definimos a seguir:

Definição 1.8. Seja n um número natural. Um n -**simplexo** em X é uma função contínua

$$\varphi : \sigma_n \rightarrow X,$$

onde σ_n é a interseção de todos os subconjuntos convexos de \mathbb{R}^{n+1} que contém os $n+1$ pontos dados por:

$$x_0 = (1, 0, 0, \dots, 0, 0), x_1 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0), \dots, x_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$$

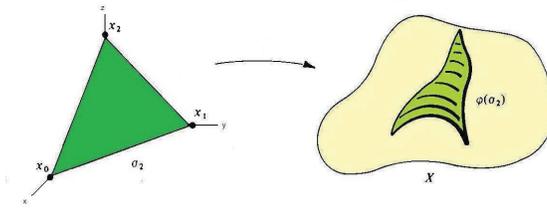


Figura 1.8: Representação de um 2-simplexo em X

Observação 1.3. Podemos descrever σ_n analiticamente por:

$$\sigma_n = \left\{ (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : t_i \geq 0 \forall i \text{ e } \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}.$$

Agora temos condições de definir o conjunto das n -cadeias de X .

Definição 1.9. Seja $C_n(X)$ o espaço vetorial cuja base sobre um corpo F é o conjunto de todos os n -simplexos de X . Cada elemento de $C_n(X)$ é chamado de n -**cadeia** de X e tem a forma

$$\sum_{\varphi} n_{\varphi} \varphi,$$

onde $n_{\varphi} \in F$ são quase todos nulos e cada φ é um n -simplexo de X .

Uma aplicação de grande importância que definimos sobre o conjunto das cadeias de X é conhecida como aplicação bordo. Para compreender a sua definição, precisamos antes formalizar o conceito de faces de um simplexo.

Definição 1.10. Seja φ um n -simplexo em X , com $n > 0$ e seja $i \in \{0, \dots, n\}$. A i -ésima **face** de φ é o $(n-1)$ -simplexo de X dado por

$$\begin{aligned} \partial_i \varphi : \sigma_{n-1} &\rightarrow X \\ (t_0, \dots, t_{n-1}) &\mapsto \varphi(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1}) \end{aligned}$$

Note que, na prática, $\partial_i\varphi$ despreza a contribuição na direção de x_i para depois aplicar φ , ou seja, para calcular a i -ésima face $\partial_i\varphi$ basta mergulhar σ_{n-1} em σ_n opostamente ao vértice x_i e então ir para X via φ . Vejamos um exemplo:

Exemplo 1.5. *Considere o 2-simplexo φ da Figura 1.8. A primeira face de φ é dada pela composição da Figura 1.9.*

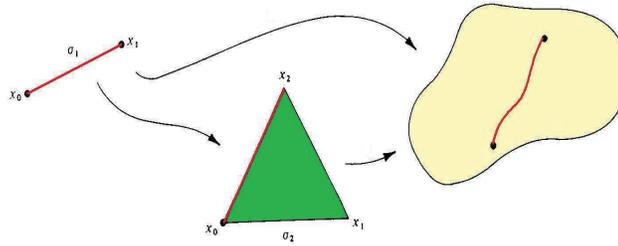


Figura 1.9: Primeira face de φ

Para cada $i \in \{0, \dots, n\}$, temos que o i -ésimo operador ∂_i da Definição 1.10 é uma função que tem como domínio o conjunto dos n -simplexos de X e como contra-domínio o conjunto dos $(n - 1)$ -simplexos de X . Desde que $C_n(X)$, o conjunto das n -cadeias de X , é gerado pelos n -simplexos de X , podemos estender ∂_i linearmente para a aplicação linear $\partial_i : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ dada por

$$\partial_i \left(\sum_{\varphi} n_{\varphi} \varphi \right) = \sum_{\varphi} n_{\varphi} \partial_i \varphi.$$

Sendo assim, definimos:

Definição 1.11. *A aplicação linear*

$$\partial : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$$

definida por

$$\partial = \sum_{i=0}^n \partial_i = \partial_0 - \partial_1 + \partial_2 - \dots + (-1)^n \partial_n$$

*é chamada **operador bordo**.*

Muitas vezes usamos a notação ∂_n ao invés de ∂ para o operador bordo que tem $C_n(X)$ como domínio.

O operador bordo satisfaz a seguinte propriedade:

Teorema 1.3. *A composição $\partial \circ \partial$*

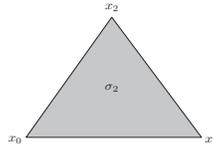
$$C_n(X) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial} C_{n-2}(X)$$

é a aplicação nula.

Em outras palavras, o bordo de uma n -cadeia é uma $(n - 1)$ -cadeia sem bordo.

Veja um exemplo simples:

Exemplo 1.6. *Considere o 2-simplexo σ_2*



e observe que

$$\begin{aligned} \partial \circ \partial(\sigma_2) &= \partial(\partial_0(\sigma_2) - \partial_1(\sigma_2) + \partial_2(\sigma_2)) = \partial(\overrightarrow{x_1x_2} + \overrightarrow{x_2x_0} + \overrightarrow{x_0x_1}) = \\ &= \partial_0(\overrightarrow{x_1x_2} + \overrightarrow{x_2x_0} + \overrightarrow{x_0x_1}) - \partial_1(\overrightarrow{x_1x_2} + \overrightarrow{x_2x_0} + \overrightarrow{x_0x_1}) = \\ &= x_2 + x_0 + x_1 - x_1 - x_2 - x_0 = 0 \end{aligned}$$

Entre as cadeias de um espaço topológico, temos dois tipos que merecem destaque:

Definição 1.12. *Uma n -cadeia $c \in C_n(X)$ é um n -ciclo se $\partial_n c = 0$, ou seja, se $c \in \ker \partial_n$, onde $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$. Denotamos por $Z_n(X)$ o conjunto de todos os n -ciclos de X .*

Convencionamos que toda 0-cadeia é um 0-ciclo.

Definição 1.13. *Uma n -cadeia $c \in C_n(X)$ é um n -bordo se existe $d \in C_{n+1}(X)$ tal que $\partial_{n+1} d = c$, ou seja, se $c \in \text{im } \partial_{n+1}$, onde $\partial_{n+1} : C_{n+1}(X) \rightarrow C_n(X)$. Denotamos por $B_n(X)$ o conjunto de todos os n -bordos de X .*

Observação 1.4. *Uma vez que ∂ é uma aplicação linear, os conjuntos*

$$Z_n(X) = \ker \partial_n = \{c \in C_n(X) \mid c \text{ é um } n\text{-ciclo}\}$$

$$B_n(X) = \text{im } \partial_{n+1} = \{c \in C_n(X) \mid c \text{ é um } n\text{-bordo}\}$$

são subespaços vetoriais de $C_n(X)$ e, além disso, pelo Teorema 1.3, $B_n(X) \subset Z_n(X)$.

Chegamos assim à definição de homologia sobre um corpo de um espaço topológico.

Definição 1.14. *O espaço vetorial*

$$H_n(X) = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)}$$

é a n -ésima homologia do espaço topológico X sobre o corpo F .

Note que $c + B_n(X), d + B_n(X) \in H_n(X)$ são iguais quando $c - d \in B_n(X)$, isto é, quando a diferença entre os n -ciclos c e d forma o bordo de uma $(n + 1)$ -cadeia de X . Neste caso dizemos que os ciclos c e d são **ciclos homólogos**.

Em particular, todos os n -bordos de X são condensados no elemento nulo de $H_n(X)$. Portanto, a existência de elementos não nulos nas homologias de X detectam a existência de ciclos de X que não são bordos em X , ou seja, detectam “buracos” em X .

O próximo objetivo é generalizar o conceito de homologia que apresentamos na Definição 1.14. Antes disso precisaremos definir espaços vetoriais graduados e complexos de cadeias.

Definição 1.15. *Um **espaço vetorial graduado** C é uma coleção de espaços vetoriais $\{C_i\}$ indexada pelos inteiros ou pelos naturais com a operação componente a componente.*

*Se C e C' são espaços vetoriais graduados então uma **aplicação linear de grau** $r \in \mathbb{Z}$,*

$$\Phi : C \rightarrow C',$$

é uma coleção de aplicações lineares $\{\Phi_i\}$, onde

$$\Phi_i : C_i \rightarrow C'_{i+r}.$$

*Um **subespaço D de um espaço vetorial graduado** C é um espaço vetorial graduado $\{D_i\}$, onde D_i é um subespaço vetorial de C_i .*

*Se D é um subespaço de um espaço vetorial graduado C então o **espaço quociente** $\frac{C}{D}$ é o espaço vetorial graduado $\left\{ \frac{C_i}{D_i} \right\}$.*

A coleção de espaços vetoriais $C_*(X) = \{C_n(X)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é um exemplo de espaço vetorial graduado.

Definição 1.16. *Um espaço vetorial graduado C junto com uma aplicação linear $\partial : C \rightarrow C$ de grau -1 tal que $\partial \circ \partial = 0$ recebe o nome de **complexo de cadeias**. A aplicação ∂ satisfazendo estas propriedades é chamada de **aplicação bordo**.*

Costumamos denotar este complexo de cadeias pelo par (C, ∂) ou simplesmente por C .

Considere como exemplo de complexo de cadeias o espaço vetorial graduado $C_*(X) = \{C_n(X)\}_{n \in \mathbb{N}}$ juntamente com a coleção de operadores bordo $\partial = \{\partial_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, onde cada $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ é o operador bordo que apresentamos na Definição 1.11.

Definição 1.17. *Sejam $(C, \partial) = \{(C_n, \partial_n)\}$ um complexo de cadeias e, para cada n , deixe $Z_n(C)$ e $B_n(C)$ denotarem respectivamente o $\ker \partial_n$ e a $\text{im } \partial_{n+1}$. Já vamos fixar que $Z_*(C)$ e $B_*(C)$ representam respectivamente os espaços vetoriais graduados $\{Z_n(C)\}$ e $\{B_n(C)\}$.*

Definimos a n -ésima homologia do complexo de cadeias (C, ∂) como o espaço vetorial

$$H_n(C) = \frac{Z_n(C)}{B_n(C)}.$$

O espaço vetorial graduado

$$H_*(C) = \{H_n(C)\}$$

é chamado de **homologia do complexo de cadeias** (C, ∂) e em vários casos é denotado apenas por $H(C)$.

Observe que a n -ésima homologia do espaço topológico X , definida anteriormente por

$$H_n(X) = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)} = \frac{\ker \partial_n}{\text{im } \partial_{n+1}},$$

é exatamente a n -ésima homologia do complexo de cadeias $(C_*(X), \partial) = \{(C_n(X), \partial_n)\}$, onde $\partial = \{\partial_n\}$ é o operador bordo apresentado na Definição 1.11. Por esta razão dizemos que a Definição 1.17 generaliza a Definição 1.14.

O espaço vetorial graduado $H_*(C_*(X))$ formado pelas n -ésimas homologias do complexo de cadeias $(C_*(X), \partial)$ costuma ser denotado por $H_*(X)$, ou simplesmente por $H(X)$, e é normalmente chamado de **homologia do espaço topológico X** .

Finalizaremos esta subseção falando sobre aplicações de cadeias.

Definição 1.18. *Dados dois complexos de cadeias (C, ∂) e (C', ∂') , uma **aplicação de cadeias** $\Phi = \{\Phi_n\} : C \rightarrow C'$ é uma aplicação linear de grau zero que faz o seguinte diagrama comutar:*

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{\Phi_n} & C'_n \\ \partial_n \downarrow & & \downarrow \partial'_n \\ C_{n-1} & \xrightarrow{\Phi_{n-1}} & C'_{n-1} \end{array}$$

para todo n , ou seja,

$$\partial'_n \circ \Phi_n = \Phi_{n-1} \circ \partial_n.$$

Observação 1.5. A verdadeira definição de aplicação de cadeias não exige que a aplicação Φ seja de grau zero.

É simples verificar que se $\Phi : C \rightarrow C'$ é uma aplicação de cadeias então

$$\Phi(Z_*(C)) \subset Z_*(C') \quad \text{e} \quad \Phi(B_*(C)) \subset B_*(C').$$

Sendo assim, Φ induz uma aplicação de grau zero bem definida entre as homologias de C e C' dada por

$$\begin{aligned} \Phi_* : H_*(C) &\rightarrow H_*(C') \\ a + B_*(C) &\mapsto \Phi(a) + B_*(C') \end{aligned}$$

Portanto, toda aplicação de cadeias induz uma aplicação entre homologias de complexos de cadeias.

Dada uma função contínua entre espaços topológicos $f : X \rightarrow Y$, queremos definir uma aplicação de cadeias entre $C_*(X)$ e $C_*(Y)$.

Se $\varphi : \sigma_n \rightarrow X$ é um n -simplexo em X então

$$f_{\#}\varphi := f \circ \varphi : \sigma_n \rightarrow Y$$

é um n -simplexo em Y . Logo $f_{\#}$ pode ser vista como uma aplicação que leva n -simplexos de X em n -simplexos de Y .

Uma vez que $C_n(X)$ é o espaço vetorial gerado pelos n -simplexos de X , podemos estender $f_{\#}$ de forma única a uma aplicação linear

$$f_{\#} : C_n(X) \rightarrow C_n(Y).$$

E fazendo n variar nos naturais, obtemos uma coleção de aplicações lineares que, por simplicidade, denotaremos também por $f_{\#}$.

Podemos mostrar que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{f_{\#}} & C_n(Y) \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ C_{n-1}(X) & \xrightarrow{f_{\#}} & C_{n-1}(Y) \end{array}$$

é comutativo e, por esta razão, a aplicação linear de grau zero $f_{\#} : C_*(X) \rightarrow C_*(Y)$ é uma aplicação de cadeias.

Logo, $f_{\#}$ induz uma aplicação entre as homologias de X e Y dada por:

$$f_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$$

$$a + B_*(X) \mapsto f_{\#}(a) + B_*(Y)$$

Com isso concluímos que uma aplicação contínua f entre espaços topológicos X e Y induz uma aplicação de cadeias $f_{\#}$ entre os complexos de cadeias $C_*(X)$ e $C_*(Y)$ que, por sua vez, induz uma aplicação f_* entre as homologias $H_*(X)$ e $H_*(Y)$. Estas notações serão importantes em capítulos posteriores.

O teorema a seguir nos fornece que dois espaços topológicos com o mesmo tipo de homotopia possuem a “mesma” homologia, ou seja, a homologia de um espaço topológico é um invariante homotópico.

Teorema 1.4. *Se X e Y são homotopicamente equivalentes e $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ são as aplicações tais que $f \circ g \simeq id_Y$ e $g \circ f \simeq id_X$, então $f_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$ e $g_* : H_*(Y) \rightarrow H_*(X)$ são isomorfismos.*

1.2.2 Sequências Exatas

Esta subseção preocupa-se em fixar nomenclaturas e notações referentes às sequências exatas.

Começaremos pela definição geral de sequência exata de espaços vetoriais.

Definição 1.19. *Uma sequência de espaços vetoriais e aplicações lineares*

$$\cdots \rightarrow C_0 \xrightarrow{f_0} C_1 \xrightarrow{f_1} C_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} C_{n+1} \rightarrow \cdots$$

*é dita uma **sequência exata de espaços vetoriais** se $\text{im } f_n = \ker f_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Uma sequência exata pode nos fornecer algumas informações sobre os espaços vetoriais e as aplicações lineares que a constituem. Listamos três delas na proposição abaixo:

Proposição 1.1. 1. *Uma sequência curta do tipo*

$$0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0$$

é exata se, e somente se, f é injetora e g é sobrejetora.

2. *Uma sequência curta do tipo*

$$0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \rightarrow 0$$

é exata se, e somente se, f é um isomorfismo.

3. Uma sequência curta do tipo

$$0 \rightarrow C \rightarrow 0$$

é exata se, e somente se, $C = 0$.

A demonstração destas propriedades é simples, basta trabalhar com a definição de exatidão de sequências que acabamos de apresentar na Definição 1.19.

Podemos definir também uma sequência exata de pares de espaços vetoriais com endomorfismos. Veja a seguir:

Definição 1.20. *Sejam $\{(C_n, c_n)\}$ uma coleção de pares de espaços vetoriais com endomorfismos.*

Dizemos que

$$\cdots \rightarrow (C_0, c_0) \xrightarrow{f_0} (C_1, c_1) \xrightarrow{f_1} (C_2, c_2) \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} (C_{n+1}, c_{n+1}) \rightarrow \cdots$$

é uma **sequência exata de espaços vetoriais com endomorfismos** se

$$\cdots \rightarrow C_0 \xrightarrow{f_0} C_1 \xrightarrow{f_1} C_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} C_{n+1} \rightarrow \cdots$$

é uma **sequência exata de espaços vetoriais** e se cada quadrado do diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_0 & \xrightarrow{f_0} & C_1 & \xrightarrow{f_1} & C_2 & \xrightarrow{f_2} & \cdots & \xrightarrow{f_n} & C_{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow c_0 & & \downarrow c_1 & & \downarrow c_2 & & & & \downarrow c_{n+1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_0 & \xrightarrow{f_0} & C_1 & \xrightarrow{f_1} & C_2 & \xrightarrow{f_2} & \cdots & \xrightarrow{f_n} & C_{n+1} & \longrightarrow & \cdots \end{array} \quad (1.3)$$

é comutativo, isto é, $c_{n+1} \circ f_n = f_n \circ c_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Observação 1.6. *A comutatividade de cada quadrado do diagrama (1.3) é uma condição imposta pela própria definição de morfismo entre dois pares de espaço vetorial com endomorfismo. De fato, $f : (A, a) \rightarrow (B, b)$ é um morfismo entre os pares de espaço vetorial graduado com endomorfismo (A, a) e (B, b) se $f : A \rightarrow B$ é um morfismo entre espaços vetoriais, ou seja, uma aplicação linear e se o diagrama abaixo é comutativo:*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ a \downarrow & & \downarrow b \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

isto é, $f \circ a = b \circ f$.

Vamos generalizar as Definições 1.19 e 1.20 apresentando os conceitos de sequência exata

de espaços vetoriais graduados e de sequência exata de espaços vetoriais graduados com endomorfismos.

Definição 1.21. *Sejam $C^i = \{C_k^i\}_{k \in \mathbb{Z}}$ um espaço vetorial graduado e $f^i = \{f_k^i\}_{k \in \mathbb{Z}} : C^i \rightarrow C^{i+1}$ uma aplicação de grau zero para cada $i \in \mathbb{Z}$.*

A sequência

$$\dots \rightarrow C^0 \xrightarrow{f^0} C^1 \xrightarrow{f^1} C^2 \xrightarrow{f^2} \dots \xrightarrow{f^n} C^{n+1} \rightarrow \dots$$

é uma **sequência exata de espaços vetoriais graduados** se, para cada $k \in \mathbb{Z}$, a sequência de espaços vetoriais

$$\dots \rightarrow C_k^0 \xrightarrow{f_k^0} C_k^1 \xrightarrow{f_k^1} C_k^2 \xrightarrow{f_k^2} \dots \xrightarrow{f_k^n} C_k^{n+1} \rightarrow \dots$$

é exata.

Definição 1.22. *Sejam $(C^i, c^i) = \{(C_k^i, c_k^i)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ um par de espaço vetorial graduado com endomorfismo e $f^i = \{f_k^i\}_{k \in \mathbb{Z}} : C^i \rightarrow C^{i+1}$ uma aplicação de grau zero para cada $i \in \mathbb{Z}$.*

A sequência

$$\dots \rightarrow (C^0, c^0) \xrightarrow{f^0} (C^1, c^1) \xrightarrow{f^1} (C^2, c^2) \xrightarrow{f^2} \dots \xrightarrow{f^n} (C^{n+1}, c^{n+1}) \rightarrow \dots$$

é uma **sequência exata de espaços vetoriais graduados com endomorfismos** se, para cada $k \in \mathbb{Z}$, a sequência de espaços vetoriais com endomorfismos

$$\dots \rightarrow (C_k^0, c_k^0) \xrightarrow{f_k^0} (C_k^1, c_k^1) \xrightarrow{f_k^1} (C_k^2, c_k^2) \xrightarrow{f_k^2} \dots \xrightarrow{f_k^n} (C_k^{n+1}, c_k^{n+1}) \rightarrow \dots$$

é exata.

Sejam $C = \{C_n\}$, $D = \{D_n\}$ e $E = \{E_n\}$ complexos de cadeias e $f : C \rightarrow D$, $g : D \rightarrow E$ aplicações de cadeias de grau zero.

Uma sequência exata

$$0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0 \tag{1.4}$$

pode ser representada, neste caso, por um diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & \\
 0 & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{f} & D_n & \xrightarrow{g} & E_n \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
 0 & \longrightarrow & C_{n-1} & \xrightarrow{f} & D_{n-1} & \xrightarrow{g} & E_{n-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

cujas linhas são seqüências exatas, pela Definição 1.21, e cujos quadrados são todos comutativos, pois f e g são aplicações de cadeias.

Quando C , D e E são complexos de cadeias e $f : C \rightarrow D$, $g : D \rightarrow E$ são aplicações de cadeias de grau zero, costumamos chamar a seqüência (1.4) de **seqüência curta exata de complexos de cadeias**.

Analogamente, se (C, c) , (D, d) e (E, e) são pares de complexos de cadeias com endomorfismos e $f : C \rightarrow D$, $g : D \rightarrow E$ são aplicações de cadeias de grau zero, então uma seqüência exata do tipo

$$0 \rightarrow (C, c) \xrightarrow{f} (D, d) \xrightarrow{g} (E, e) \rightarrow 0$$

recebe o nome de **seqüência curta exata de complexos de cadeias com endomorfismos**.

O resultado a seguir nos diz que é sempre possível associar uma seqüência curta exata de complexos de cadeias a uma seqüência longa exata de homologias.

Teorema 1.5. *Se*

$$0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0 \tag{1.5}$$

é uma seqüência curta exata de complexos de cadeias, então existe uma aplicação linear $\partial_ : H_*(E) \rightarrow H_*(C)$ de grau -1 , chamada **aplicação conectante**, tal que a seqüência*

$$\dots \rightarrow H_n(C) \xrightarrow{f_*} H_n(D) \xrightarrow{g_*} H_n(E) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(C) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(D) \rightarrow \dots \tag{1.6}$$

é exata.

Às vezes nos referimos à seqüência de espaços vetoriais (1.6) como **seqüência exata em homologia induzida por (1.5)**.

A versão deste teorema para seqüências curtas exatas de complexos de cadeias com

endomorfismos é dada por:

Teorema 1.6. *Se*

$$0 \rightarrow (C, c) \xrightarrow{f} (D, d) \xrightarrow{g} (E, e) \rightarrow 0 \quad (1.7)$$

é uma sequência curta exata de complexos de cadeias com endomorfismos, então existe uma aplicação linear $\partial_* : H_*(E) \rightarrow H_*(C)$ de grau -1 , chamada **aplicação conectante**, tal que a sequência

$$\cdots \rightarrow (H_n(C), c_*) \xrightarrow{f_*} (H_n(D), d_*) \xrightarrow{g_*} (H_n(E), e_*) \xrightarrow{\partial_*} (H_{n-1}(C), c_*) \xrightarrow{f_*} (H_{n-1}(D), d_*) \rightarrow \cdots \quad (1.8)$$

é exata.

Da mesma forma que antes, a sequência exata de espaços vetoriais com endomorfismos (1.8) pode ser chamada de **sequência exata em homologia com endomorfismos induzida por** (1.7).

1.2.3 Tranças

Para um bom entendimento da matriz de conexão no caso contínuo (caso discreto), será necessário adquirir um conhecimento básico sobre tranças de complexos de cadeias (com endomorfismos) e tranças de espaços vetoriais graduados (com endomorfismos). Estas tranças generalizam respectivamente as sequências exatas de complexos de cadeias (com endomorfismos) e as sequências exatas em homologia (com endomorfismos) que conhecemos na subseção anterior.

Antes de fornecer as definições de tranças, precisaremos fixar rapidamente alguns conceitos e notações a respeito de conjuntos parcialmente ordenados.

Definição 1.23. *Uma **ordem parcial** sobre um conjunto P é uma relação $<$ sobre os elementos de P que satisfaz:*

1. *para qualquer $\pi \in P$ nunca ocorre $\pi < \pi$*
2. *se $\pi, \pi', \pi'' \in P$ são tais que $\pi < \pi'$ e $\pi' < \pi''$ então $\pi < \pi''$*

*Se P admite uma ordem parcial $<$, dizemos que $(P, <)$ é um **conjunto parcialmente ordenado**.*

Definição 1.24. *Dado $(P, <)$ um conjunto parcialmente ordenado, um **intervalo** I de P é qualquer subconjunto de P que satisfaz: se $\pi, \pi'' \in I$ e $\pi' \in P$ são tais que $\pi < \pi' < \pi''$ então $\pi' \in I$.*

O conjunto de todos os intervalos de $(P, <)$ é denotado por $\mathcal{I}(P, <)$ ou simplesmente por \mathcal{I} .

Definição 1.25. *Seja $(P, <)$ um conjunto parcialmente ordenado.*

Dois **elementos** $\pi, \pi' \in P$ são chamados **adjacentes** se $\{\pi, \pi'\} \in \mathcal{I}$. Mais geralmente, uma **n -upla** (I_1, \dots, I_n) de intervalos mutuamente disjuntos é dita **adjacente** se

1. $\bigcup_{i=1}^n I_i = I \in \mathcal{I}$
2. se $j < k$ e $\pi \in I_j, \pi' \in I_k$ então $\pi' \not\prec \pi$

Neste caso dizemos que a n -upla (I_1, \dots, I_n) forma uma **decomposição** do intervalo I .

O conjunto das n -uplas de intervalos adjacentes é denotado por $\mathcal{I}_n(P, <)$ ou simplesmente por \mathcal{I}_n .

Se (I, J) é uma dupla de intervalos adjacentes, ou seja, $(I, J) \in \mathcal{I}_2$, então costumamos usar a notação IJ para denotar a união $I \cup J$.

Definição 1.26. *Seja $(P, <)$ um conjunto parcialmente ordenado.*

Dizemos que $\pi, \pi' \in P$ são **elementos não comparáveis** se $\pi \not\prec \pi'$ e $\pi' \not\prec \pi$.

Dizemos ainda que I e J são **intervalos não comparáveis** quando (I, J) e (J, I) são ambas duplas de intervalos adjacentes.

Agora temos as notações necessárias para definir as tranças sobre as quais comentamos anteriormente.

Considere, daqui em diante, $(P, <)$ um conjunto finito parcialmente ordenado.

Definição 1.27. *Uma **trança de complexos de cadeias** segundo $<$ é uma coleção $\mathcal{C} = \mathcal{C}(<)$ consistindo de complexos de cadeias e aplicações de cadeias satisfazendo:*

1. para cada $I \in \mathcal{I}$ existe um complexo de cadeias $C(I)$
2. para cada $(I, J) \in \mathcal{I}_2$ existem aplicações de cadeias

$$i = i(I, IJ) : C(I) \rightarrow C(IJ)$$

$$p = p(IJ, J) : C(IJ) \rightarrow C(J)$$

tais que

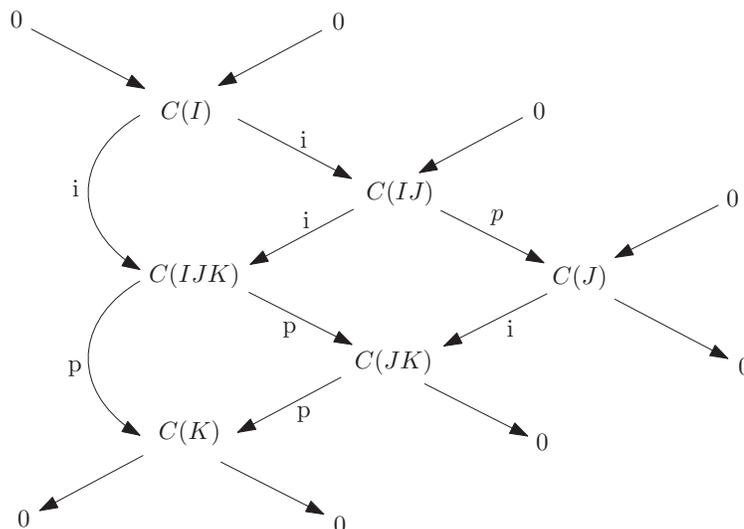
(a) a sequência curta de complexos de cadeias

$$0 \rightarrow C(I) \xrightarrow{i} C(IJ) \xrightarrow{p} C(J) \rightarrow 0$$

é exata

(b) se I e J são não comparáveis, então $p(JI, I)i(I, IJ) = id|_{C(I)}$

(c) se $(I, J, K) \in \mathcal{I}_3$ então o seguinte diagrama de tranças comuta:



Definição 1.28. Uma **trança de complexos de cadeias com endomorfismos** segundo $<$ é uma coleção $\mathcal{C} = \mathcal{C}(<)$ consistindo de pares de complexos de cadeias com endomorfismos e de aplicações de cadeias satisfazendo:

1. para cada $I \in \mathcal{I}$ existe um par $(C(I), c(I))$, onde $C(I)$ é um complexo de cadeias e $c(I) : C(I) \rightarrow C(I)$ é um endomorfismo de grau zero
2. para cada $(I, J) \in \mathcal{I}_2$ existem aplicações de cadeias

$$i = i(I, IJ) : C(I) \rightarrow C(IJ)$$

$$p = p(IJ, J) : C(IJ) \rightarrow C(J)$$

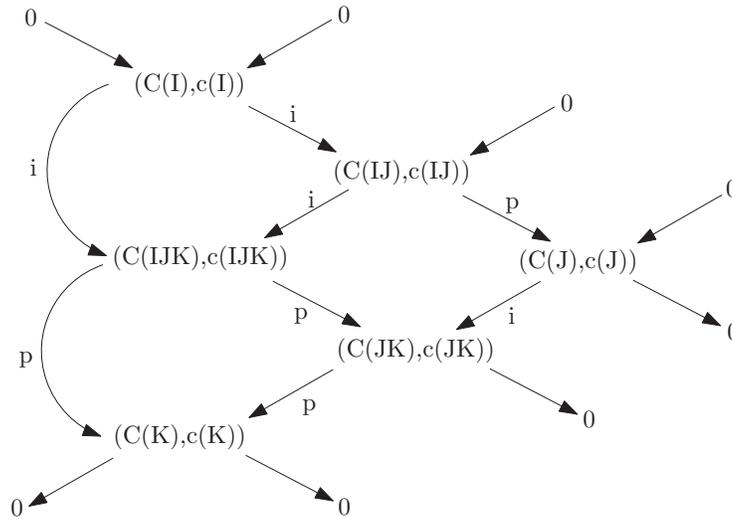
tais que

(a) a seqüência curta de complexos de cadeias com endomorfismos

$$0 \rightarrow (C(I), c(I)) \xrightarrow{i} (C(IJ), c(IJ)) \xrightarrow{p} (C(J), c(J)) \rightarrow 0$$

é exata

(b) se $(I, J, K) \in \mathcal{I}_3$ então o seguinte diagrama de tranças comuta:



Passaremos agora à definição de trança de espaços vetoriais graduados (com endomorfismos) e, em seguida, veremos de que forma tal trança pode se relacionar com a trança de complexos de cadeias (com endomorfismos) que acabamos de definir.

Definição 1.29. Uma **trança de espaços vetoriais graduados** segundo $\langle \cdot \rangle$ é uma coleção $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\langle \cdot \rangle)$ consistindo de espaços vetoriais graduados e aplicações entre os espaços vetoriais graduados satisfazendo:

1. para cada $I \in \mathcal{I}$ existe um espaço vetorial graduado $G(I)$
2. para cada $(I, J) \in \mathcal{I}_2$ existem aplicações

$$i = i(I, IJ) : G(I) \rightarrow G(IJ) \text{ de grau zero}$$

$$p = p(IJ, J) : G(IJ) \rightarrow G(J) \text{ de grau zero}$$

$$\partial = \partial(J, I) : G(J) \rightarrow G(I) \text{ de grau } -1$$

tais que

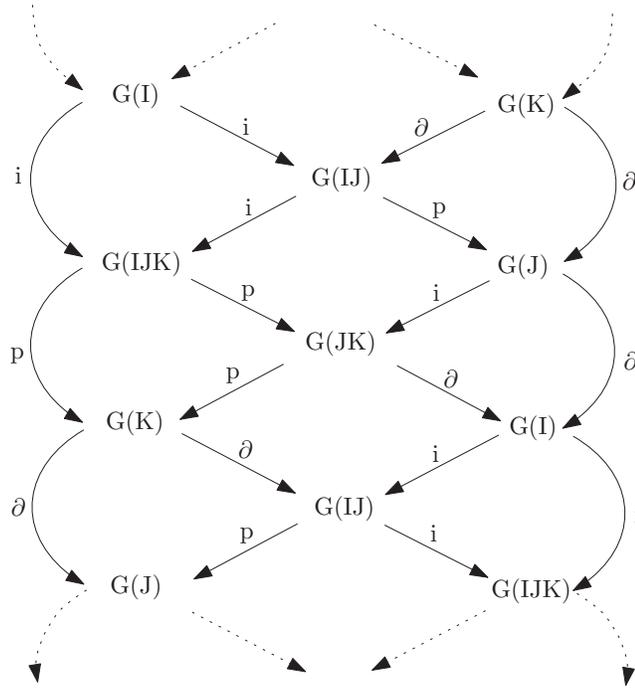
(a) a sequência

$$\dots \xrightarrow{\partial} G(I) \xrightarrow{i} G(IJ) \xrightarrow{p} G(J) \xrightarrow{\partial} G(I) \xrightarrow{i} \dots$$

é exata

(b) se I e J são não comparáveis, então $p(JI, I)i(I, IJ) = id|_{G(I)}$

(c) se $(I, J, K) \in \mathcal{I}_3$ então o seguinte diagrama de tranças comuta:



Definição 1.30. Uma *trança de espaços vetoriais graduados com endomorfismos* segundo \langle é uma coleção $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\langle)$ consistindo de pares de espaços vetoriais graduados com endomorfismos e de aplicações entre os espaços vetoriais graduados satisfazendo:

1. para cada $I \in \mathcal{I}$ existe um par $(G(I), g(I))$, onde $G(I)$ é um espaço vetorial graduado e $g(I) : G(I) \rightarrow G(I)$ é um endomorfismo de grau zero
2. para cada $(I, J) \in \mathcal{I}_2$ existem aplicações

$$i = i(I, IJ) : G(I) \rightarrow G(IJ) \text{ de grau zero}$$

$$p = p(IJ, J) : G(IJ) \rightarrow G(J) \text{ de grau zero}$$

$$\partial = \partial(J, I) : G(J) \rightarrow G(I) \text{ de grau } -1$$

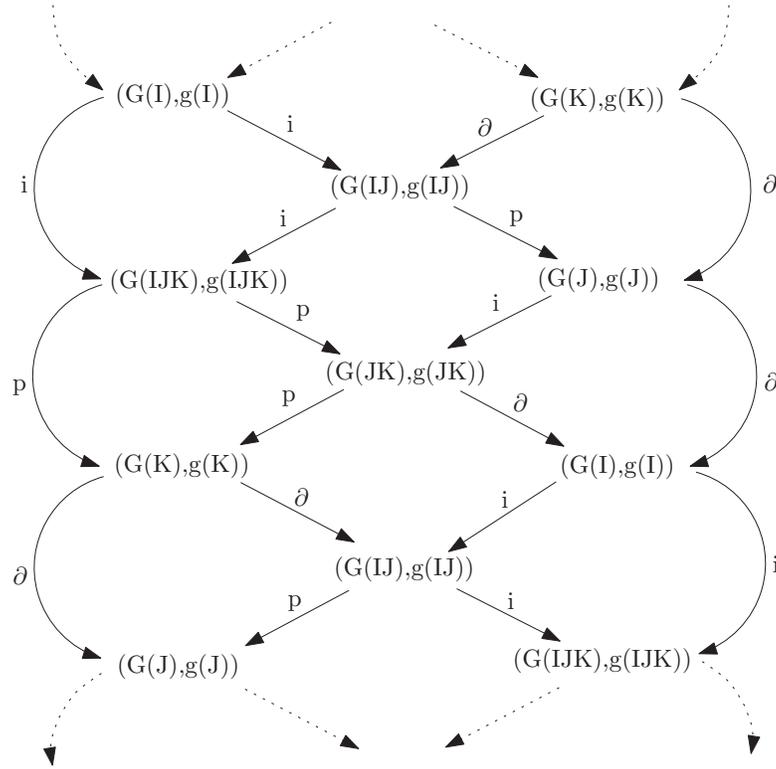
tais que

(a) a sequência

$$\cdots \xrightarrow{\partial} (G(I), g(I)) \xrightarrow{i} (G(IJ), g(IJ)) \xrightarrow{p} (G(J), g(J)) \xrightarrow{\partial} (G(I), g(I)) \xrightarrow{i} \cdots$$

é exata

(b) se $(I, J, K) \in \mathcal{I}_3$ então o seguinte diagrama de tranças comuta:



Vimos no Teorema 1.5 (Teorema 1.6) que uma seqüência curta exata de complexos de cadeias (com endomorfismos) sempre induz uma seqüência longa exata de homologias (com endomorfismos). Gostaríamos de fazer o mesmo tipo de afirmação no contexto de tranças, ou seja, a partir de uma trança de complexos de cadeias (com endomorfismos) queremos obter uma trança de espaços vetoriais graduados (com endomorfismos).

Seja \mathcal{C} uma trança de complexos de cadeias segundo $<$. Para cada $I \in \mathcal{I}$, denote por $H(I)$ a homologia do complexo de cadeias $C(I)$.

Pela definição de trança de complexos de cadeias, se $(I, J) \in \mathcal{I}_2$ então a seqüência

$$0 \rightarrow C(I) \xrightarrow{i(I,IJ)} C(IJ) \xrightarrow{p(IJ,J)} C(J) \rightarrow 0$$

é exata.

Associada a esta seqüência, existe uma seqüência longa exata em homologia (garantida pela Teorema 1.5) dada por:

$$\dots \xrightarrow{\partial(J,I)} H(I) \xrightarrow{i(I,IJ)} H(IJ) \xrightarrow{p(IJ,J)} H(J) \xrightarrow{\partial(J,I)} H(I) \xrightarrow{i(I,IJ)} \dots \quad (1.9)$$

Considere $\mathcal{HC} = \mathcal{HC}(<)$ a coleção consistindo dos espaços vetoriais graduados $H(I)$ junto com as aplicações $i(I, IJ), p(IJ, J), \partial(J, I)$ fornecidas pela seqüência (1.9).

Temos assim a seguinte proposição:

Proposição 1.2. \mathcal{HC} é uma trança de espaços vetoriais graduados segundo $<$.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [7].

Seja agora \mathcal{C} uma trança de complexos de cadeias com endomorfismos segundo $<$.

Por definição, para cada $I \in \mathcal{I}$, existem um complexo de cadeias $C(I)$ e um endomorfismo de grau zero $c(I) : C(I) \rightarrow C(I)$. Denote por $H(I)$ a homologia de $C(I)$ e por $c_*(I) : H(I) \rightarrow H(I)$ a aplicação induzida em homologia por $c(I)$.

Temos ainda que para cada $(I, J) \in \mathcal{I}_2$ existe uma sequência exata

$$0 \rightarrow (C(I), c(I)) \xrightarrow{i(I, IJ)} (C(IJ), c(IJ)) \xrightarrow{p(IJ, J)} (C(J), c(J)) \rightarrow 0$$

que, por sua vez, induz a seguinte sequência longa exata em homologia (garantida pela Proposição 1.6):

$$\dots \xrightarrow{\partial(J, I)} (H(I), c_*(I)) \xrightarrow{i(I, IJ)} (H(IJ), c_*(IJ)) \xrightarrow{p(IJ, J)} (H(J), c_*(J)) \xrightarrow{\partial(J, I)} (H(I), c_*(I)) \xrightarrow{i(IJ, J)} \dots \quad (1.10)$$

Considere então a coleção $\mathcal{HC} = \mathcal{HC}(<)$ consistindo dos pares $(H(I), c_*(I))$ de espaço vetorial graduado com endomorfismo junto com as aplicações $i(I, IJ), p(IJ, J), \partial(J, I)$ dadas pela sequência (1.10).

Temos a seguinte proposição à respeito da coleção \mathcal{HC} :

Proposição 1.3. \mathcal{HC} é uma trança de espaços vetoriais graduados com endomorfismos segundo $<$.

A prova deste resultado é análoga àquela encontrada em [7] para a Proposição 1.2.

Portanto, é sempre possível associar uma trança \mathcal{HC} de espaços vetoriais graduados (com endomorfismos) a uma dada trança \mathcal{C} de complexos de cadeias (com endomorfismos).

Definição 1.31. *Seja \mathcal{C} uma trança de complexos de cadeias (com endomorfismos). A trança \mathcal{HC} recém construída recebe o nome de **trança de espaços vetoriais graduados (com endomorfismos) gerada por \mathcal{C}** .*

Precisamos estabelecer quando duas tranças de espaços vetoriais graduados (com endomorfismos) são isomorfas.

Definição 1.32. *Sejam \mathcal{G} e \mathcal{G}' tranças de espaços vetoriais graduados segundo $<$.*

*Uma **aplicação linear entre tranças de espaços vetoriais graduados** $\Phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ é uma coleção de aplicações lineares $\{\phi(I) : G(I) \rightarrow G'(I), I \in \mathcal{I}\}$ tal que para cada $(I, J) \in$*

\mathcal{I}_2 o diagrama abaixo seja comutativo:

$$\begin{array}{cccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial} & G(I) & \xrightarrow{i} & G(IJ) & \xrightarrow{p} & G(J) & \xrightarrow{\partial} & G(I) & \xrightarrow{i} & \cdots \\ & & \downarrow \phi(I) & & \downarrow \phi(IJ) & & \downarrow \phi(J) & & \downarrow \phi(I) & & \\ \cdots & \xrightarrow{\partial'} & G'(I) & \xrightarrow{i'} & G'(IJ) & \xrightarrow{p'} & G'(J) & \xrightarrow{\partial'} & G'(I) & \xrightarrow{i'} & \cdots \end{array}$$

No caso em que cada $\phi(I)$ é um isomorfismo, com $I \in \mathcal{I}$, chamamos Φ de **isomorfismo de tranças de espaços vetoriais graduados** e dizemos que \mathcal{G} e \mathcal{G}' são **tranças de espaços vetoriais graduados isomorfas**.

Definição 1.33. *Sejam \mathcal{G} e \mathcal{G}' tranças de espaços vetoriais graduados com endomorfismos segundo $<$.*

Um **aplicação linear entre tranças de espaços vetoriais graduados com endomorfismos** $\Phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ é uma coleção de aplicações $\{\phi(I) : (G(I), g(I)) \rightarrow (G'(I), g'(I)), I \in \mathcal{I}\}$ tal que para cada $(I, J) \in \mathcal{I}_2$ o diagrama abaixo seja comutativo:

$$\begin{array}{cccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial} & (G(I), g(I)) & \xrightarrow{i} & (G(IJ), g(IJ)) & \xrightarrow{p} & (G(J), g(J)) & \xrightarrow{\partial} & (G(I), g(I)) & \xrightarrow{i} & \cdots \\ & & \downarrow \phi(I) & & \downarrow \phi(IJ) & & \downarrow \phi(J) & & \downarrow \phi(I) & & \\ \cdots & \xrightarrow{\partial'} & (G'(I), g'(I)) & \xrightarrow{i'} & (G'(IJ), g'(IJ)) & \xrightarrow{p'} & (G'(J), g'(J)) & \xrightarrow{\partial'} & (G'(I), g'(I)) & \xrightarrow{i'} & \cdots \end{array}$$

No caso em que cada $\phi(I)$ é um isomorfismo, com $I \in \mathcal{I}$, chamamos Φ de **isomorfismo de tranças de espaços vetoriais graduados com endomorfismos** e dizemos que \mathcal{G} e \mathcal{G}' são **tranças de espaços vetoriais graduados com endomorfismos isomorfas**.

Observação 1.7. *Se \mathcal{G} e \mathcal{G}' são duas tranças de espaços vetoriais graduados com endomorfismos isomorfas então, para cada intervalo I , temos que $G(I)$ e $G'(I)$ são espaços vetoriais graduados isomorfos e $g(I)$ e $g'(I)$ são aplicações lineares conjugadas. De fato, por definição, uma aplicação $\phi(I) : (G(I), g(I)) \rightarrow (G'(I), g'(I))$ é um isomorfismo se $\phi(I) : G(I) \rightarrow G'(I)$ é um isomorfismo entre espaços vetoriais graduados e se $\phi(I) \circ g(I) = g'(I) \circ \phi(I)$.*

1.2.4 Redução de Leray

Nesta subseção conheceremos a redução de Leray, uma ferramenta essencial que utilizaremos no terceiro capítulo para a construção do índice homológico de Conley no caso discreto.

Em poucas palavras, a redução de Leray é simplesmente um functor que transforma pares de espaço vetorial graduado com endomorfismo em pares de espaço vetorial graduado com isomorfismo.

Consideremos primeiramente a categoria \mathcal{E} cujos objetos são espaços vetoriais graduados e cujos morfismos são aplicações lineares de grau zero. Denotamos por $\mathcal{E}(C, D)$ o conjunto de todos os morfismos entre C e D .

Conhecida a categoria \mathcal{E} , podemos definir a **categoria dos endomorfismos** $\mathcal{E}E$ em que cada objeto é um par (C, c) , onde C é um objeto de \mathcal{E} e $c \in \mathcal{E}(C, C)$ é um endomorfismo, e cada morfismo $\varphi : (C, c) \rightarrow (D, d)$ em $\mathcal{E}E$ é uma aplicação de grau zero $\varphi : C \rightarrow D$ que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\varphi} & D \\ c \downarrow & & \downarrow d \\ C & \xrightarrow{\varphi} & D \end{array} \quad (1.11)$$

Definimos também a **categoria dos monomorfismos** $\mathcal{E}M$ e a **categoria dos isomorfismos** $\mathcal{E}I$ como as subcategorias de $\mathcal{E}E$ consistindo de espaços vetoriais graduados equipados com monomorfismos ou com isomorfismos respectivamente.

Na sequência conheceremos o núcleo generalizado de um endomorfismo.

Definição 1.34. *Seja $c : C \rightarrow C$ um endomorfismo. O **núcleo generalizado** de c é dado por:*

$$gker(c) := \{x \in C / c^n(x) = 0 \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}.$$

Dado $(C, c) \in \mathcal{E}E$, temos que $c(gker(c)) \subset gker(c)$, portanto faz sentido definirmos a aplicação induzida

$$c' : \frac{C}{gker(c)} \rightarrow \frac{C}{gker(c)} \\ [x] \mapsto [d(x)]$$

Utilizamos a notação $LM(C, c)$ para denotar o par $\left(\frac{C}{gker(c)}, c'\right) \in \mathcal{E}E$. Na verdade, $LM(C, c)$ é um objeto de $\mathcal{E}M$.

De fato, basta mostrar que c' é um monomorfismo. Seja $[x] \in \frac{C}{gker(c)}$ tal que $c'([x]) = [c(x)] = 0$. Então $c(x) \in gker(c)$ e assim $c^n(c(x)) = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Daí segue que $x \in gker(c)$ e, portanto, $[x] = 0$. Logo c' é injetora.

Considere agora um morfismo $\varphi : (C, c) \rightarrow (D, d)$ em $\mathcal{E}E$. Pela comutatividade do diagrama (1.11), temos que $\varphi(gker(c)) \subset gker(d)$ e, sendo assim,

$$\varphi' : \frac{C}{gker(c)} \rightarrow \frac{D}{gker(d)} \\ [x] \mapsto [\varphi(x)]$$

é uma aplicação bem definida. Ainda pela comutatividade de (1.11), temos que

$$\begin{array}{ccc} \frac{C}{gker(c)} & \xrightarrow{c'} & \frac{C}{gker(c)} \\ \varphi' \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ \frac{D}{gker(d)} & \xrightarrow{d'} & \frac{D}{gker(d)} \end{array}$$

também é um diagrama comutativo, logo $\varphi' : \left(\frac{C}{gker(c)}, c' \right) \rightarrow \left(\frac{D}{gker(d)}, d' \right)$ é um morfismo de \mathcal{EM} que denotaremos por $LM(\varphi)$.

Portanto, LM pode ser visto como uma função que leva objetos e morfismos de \mathcal{EE} em objetos e morfismos de \mathcal{EM} , ou seja, LM é um funtor definido entre as categorias \mathcal{EE} e \mathcal{EM} .

Definiremos agora a imagem generalizada de um monomorfismo.

Definição 1.35. *Seja $c : C \rightarrow C$ um monomorfismo. A **imagem generalizada** de c é definida por:*

$$gim(c) := \{x \in C / \exists \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset C \text{ tal que } c^n(x_n) = x \ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Considere $(C, c) \in \mathcal{EM}$, ou seja, $(C, c) \in \mathcal{EE}$ tal que c é um monomorfismo. Como $c(gim(c)) \subset gim(c)$, podemos induzir a partir de c a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{ccc} c'' : gim(c) & \rightarrow & gim(c) \\ x & \mapsto & c(x) \end{array}$$

Denotaremos por $LI(C, c)$ o par $(gim(c), c'')$. Observe que $LI(C, c)$ é um objeto de \mathcal{EI} , isto é, c'' é um isomorfismo.

Com efeito, a injetividade de c'' segue diretamente do fato de c ser um monomorfismo. Vejamos a sobrejetividade.

Dado $y \in gim(c)$ temos que existe $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \subset C$ tal que $c^n(y_n) = y$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Neste caso, vale que $c(y_1) = y$ e, portanto, basta mostrar que $y_1 \in gim(c)$ para concluir que c'' é sobrejetora.

Uma vez que $c(y_1) = c^2(y_2) = c^3(y_3) = \dots$ e a aplicação c é um monomorfismo, obtemos que $y_1 = c(y_2) = c^2(y_3) = \dots$. Logo, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \{y_{n+1}\}_{n=0}^{\infty} \subset C$ satisfaz $c^n(x_n) = c^n(y_{n+1}) = y_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e disto segue que $y_1 \in gim(c)$ como queríamos.

Suponha agora que $\varphi : (C, c) \rightarrow (D, d)$ é um morfismo de \mathcal{EM} . Então a comutatividade do diagrama (1.11) nos diz que $\varphi(gim(c)) \subset gim(d)$, donde segue que

$$\begin{aligned}\varphi'' : \text{gim}(c) &\rightarrow \text{gim}(d) \\ x &\mapsto \varphi(x)\end{aligned}$$

está bem definida. Mais ainda, a comutatividade de (1.11) nos fornece também que o diagrama

$$\begin{array}{ccc}\text{gim}(c) & \xrightarrow{c''} & \text{gim}(c) \\ \varphi'' \downarrow & & \downarrow \varphi'' \\ \text{gim}(d) & \xrightarrow{d''} & \text{gim}(d)\end{array}$$

é comutativo e, por isso, $\varphi'' : (\text{gim}(c), c'') \rightarrow (\text{gim}(d), d'')$ é um morfismo de $\mathcal{E}I$ que será denotado por $LI(\varphi)$.

Sendo assim, veremos LI como uma função que aplica objetos e morfismos de $\mathcal{E}M$ em objetos e morfismos de $\mathcal{E}I$, ou seja, LI é um funtor definido entre as categorias $\mathcal{E}M$ e $\mathcal{E}I$.

Finalmente podemos definir a redução de Leray.

Definição 1.36. *O funtor*

$$\mathcal{L} : \mathcal{E}E \rightarrow \mathcal{E}I$$

definido pela composição

$$\mathcal{L} = LI \circ LM$$

*é chamado de **redução de Leray**.*

Note que pela construção que realizamos, \mathcal{L} transforma um par (C, c) , onde c é apenas um endomorfismo, no par $\mathcal{L}(C, c) = LI(LM(C, c)) = (\text{gim}(c'), (c')'')$, sendo que agora $(c')''$ um isomorfismo.

Muitas vezes denotaremos o par $\mathcal{L}(C, c)$ por $(\mathcal{L}C, \mathcal{L}c)$.

Existem duas propriedades da redução de Leray que merecem destaque:

Proposição 1.4. *A redução de Leray fixa os elementos de $\mathcal{E}I$, isto é, se (C, c) é um par de espaço vetorial graduado com isomorfismo então $\mathcal{L}(C, c) = (C, c)$.*

Proposição 1.5. *A redução de Leray preserva exatidão, ou seja, se (A, a) , (B, b) e (C, c) são objetos de $\mathcal{E}E$, $f : (A, a) \rightarrow (B, b)$ e $g : (B, b) \rightarrow (C, c)$ são morfismos de $\mathcal{E}E$ e*

$$(A, a) \xrightarrow{f} (B, b) \xrightarrow{g} (C, c)$$

é uma sequência exata de espaços vetoriais graduados com endomorfismos, então

$$\mathcal{L}(A, a) \xrightarrow{\mathcal{L}f} \mathcal{L}(B, b) \xrightarrow{\mathcal{L}g} \mathcal{L}(C, c)$$

é uma sequência exata de espaços vetoriais graduados com isomorfismos.

Capítulo 2

Decomposição de Conjuntos Invariantes Isolados

O principal objetivo da teoria de Conley é auxiliar na descrição da estrutura dinâmica de fluxos ou aplicações contínuas sobre conjuntos invariantes isolados. De maneira informal, um conjunto invariante isolado é o “maior” conjunto invariante contido em algum conjunto compacto.

Para realizar tal descrição dinâmica, costumamos decompor um dado conjunto invariante isolado S como uma união de conjuntos invariantes menores.

A decomposição mais simples ocorre quando reconhecemos em S um conjunto atrator A e, a partir dele, criamos um conjunto repulsor dual A^* . A união destes dois subconjuntos invariantes isolados A e A^* com as órbitas que os conectam é conhecida como decomposição em par atrator-repulsor de S .

Numa generalização desta decomposição, chamada decomposição de Morse, S pode ser escrito de maneira mais complexa como uma coleção de qualquer número finito de subconjuntos invariantes isolados disjuntos, além das órbitas que unem quaisquer dois destes invariantes. Neste caso, veremos que é possível reconhecer nesta coleção vários pares atrator-repulsor.

Neste capítulo ainda definiremos os conceitos de par, trio e filtração-índice. O par-índice será essencial na definição de índice de Conley, o trio-índice será usado para definir a matriz de conexão no caso mais simples de uma decomposição em par atrator-repulsor e, por fim, a filtração-índice será necessária para generalizar a matriz de conexão no contexto de decomposições de Morse.

2.1 Conjunto Invariante Isolado e Par-Índice

Para compreender a definição de conjunto invariante isolado, precisaremos primeiramente do conceito de invariância maximal que segue.

Definição 2.1. *O conjunto invariante maximal de um subconjunto N de X é definido por*

$$\text{Inv}_\phi(N) = \{x \in N \mid \phi(t, x) \in N \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\} = \{x \in N \mid \mathcal{O}_\phi(x) \subset N\}.$$

no caso de fluxos e por

$$\begin{aligned} \text{Inv}_f(N) &= \{x \in N \mid \exists (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subset N \text{ satisfazendo } x_0 = x \text{ e } f(x_n) = x_{n+1}\} = \\ &= \{x \in N \mid \exists \mathcal{O}_f(x) \subset N\}. \end{aligned}$$

no caso de aplicações contínuas.

Sempre que não houver confusão, denotaremos estes conjuntos apenas por $\text{Inv}(N)$ no intuito de unificar a notação usada para fluxos e aplicações contínuas.

Observação 2.1. *Se a aplicação f é invertível, então o conjunto invariante maximal de N pode ser escrito na forma:*

$$\text{Inv}_f(N) = \{x \in N \mid f^n(x) \in N \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}\} = \{x \in N \mid \mathcal{O}_f(x) \subset N\}.$$

Exibimos abaixo alguns exemplos de conjunto invariante maximal.

Exemplo 2.1. *Considere um fluxo sobre uma esfera que possui retrato de fase dado pela Figura 2.1.*

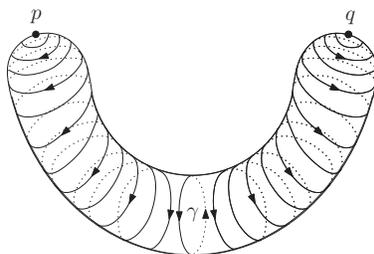


Figura 2.1: Fluxo sobre uma esfera

Se tomarmos N como na Figura 2.2 à esquerda, então $\text{Inv}(N)$ será formado apenas pela órbita periódica γ . Porém se considerarmos N como na Figura 2.2 à direita, teremos que $\text{Inv}(N)$ é a união da órbita periódica γ com o ponto de equilíbrio q e com todas as órbitas que saem de q e espiralam até chegar em γ .

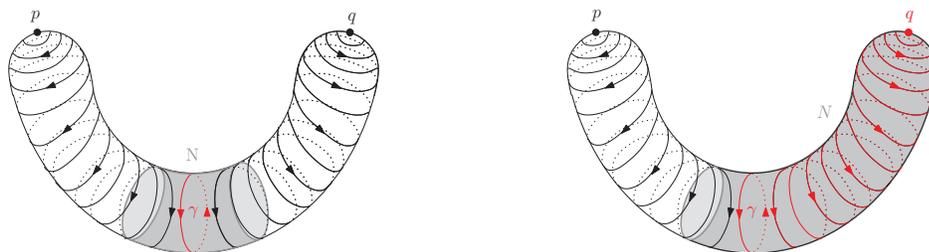


Figura 2.2: Exemplos de conjuntos invariantes maximais no caso contínuo

Exemplo 2.2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o difeomorfismo dado por $f(x, y) = (2x, \frac{y}{2})$.

Para qualquer compacto N que contém o ponto fixo $(0, 0)$, o conjunto invariante maximal de N é $\text{Inv}(N) = \{(0, 0)\}$. Mas se N é um compacto que não contém a origem, então $\text{Inv}(N) = \emptyset$.

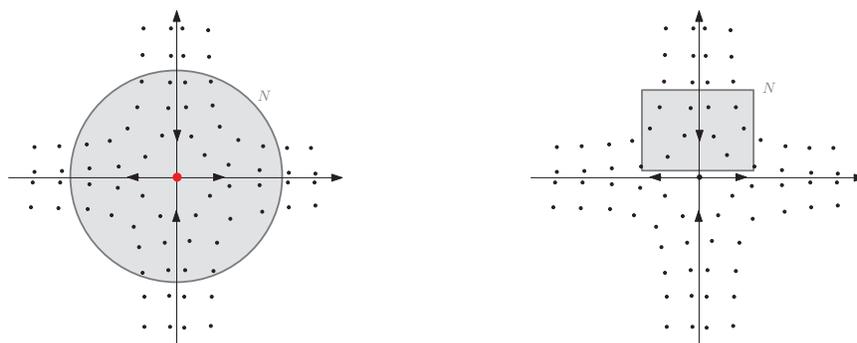


Figura 2.3: Exemplos de conjuntos invariantes maximais no caso discreto

A proposição abaixo justifica o nome dado ao conjunto $\text{Inv}(N)$.

Proposição 2.1. O conjunto $\text{Inv}(N)$ é invariante e é maximal em N com relação a esta propriedade, isto é, se $P \subset N$ é um conjunto invariante então $P \subset \text{Inv}(N)$.

Demonstração: Dividiremos esta demonstração em dois casos:

Caso contínuo Sejam $x \in \text{Inv}(N)$ e $y \in \mathcal{O}(x)$. Neste caso temos que $\mathcal{O}(y) = \mathcal{O}(x) \subset N$, logo $y \in \text{Inv}(N)$ e daí segue a invariância de $\text{Inv}(N)$.

Suponha agora que P é um conjunto invariante contido em N . Se $x \in P$ então, sendo P invariante, temos que $\mathcal{O}(x) \subset P$ e já que $P \subset N$ concluímos que $\mathcal{O}(x) \subset N$.

Portanto $x \in \text{Inv}(N)$ e desta forma concluímos que $P \subset \text{Inv}(N)$ como queríamos.

Caso discreto Dado $x \in \text{Inv}(N)$ temos, pela Definição 2.1, que existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subset N$ tal que $x_0 = x$ e $f(x_n) = x_{n+1}$. Vamos mostrar que cada x_n é um elemento de $\text{Inv}(N)$.

Fixe $n \in \mathbb{Z}$ e defina a sequência $(y_k)_{k \in \mathbb{Z}} = (x_{k+n})_{k \in \mathbb{Z}}$. Neste caso temos que $y_0 = x_n$ e para todo $k \in \mathbb{Z}$ vale que $y_k = x_{k+n} \in N$ e $f(y_k) = f(x_{k+n}) = x_{k+n+1} = y_{k+1}$.

Portanto $x_n \in \text{Inv}(N)$ e como $n \in \mathbb{Z}$ foi fixado arbitrariamente, concluímos que $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subset \text{Inv}(N)$. Disto segue que $\text{Inv}(N)$ é invariante.

Provemos que $\text{Inv}(N)$ é maximal. Para isso, seja $P \subset N$ um conjunto invariante.

Se $x \in P$ então, pelo segundo item da Definição 1.5, existe uma órbita $\mathcal{O}(x)$ que está contida em P . Mas já que $P \subset N$, temos que $\mathcal{O}(x) \subset N$. Logo $x \in \text{Inv}(N)$ e, conseqüentemente, $P \subset \text{Inv}(N)$. ■

Outra propriedade que vale a pena ressaltar sobre o conjunto $\text{Inv}(N)$ é a seguinte:

Proposição 2.2. *Se $N \subset M$ é um conjunto compacto então $\text{Inv}(N)$ é um subconjunto fechado de N e, conseqüentemente, $\text{Inv}(N)$ é compacto.*

Demonstração: Basta mostrar que $\overline{\text{Inv}(N)} \subset \text{Inv}(N)$.¹

Sejam $x \in \overline{\text{Inv}(N)}$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência contida em $\text{Inv}(N)$ tal que $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$.

Novamente dividiremos a demonstração em duas abordagens:

Caso contínuo Para cada $t \in \mathbb{R}$ fixado temos que $\phi(t, \cdot)$ é uma aplicação contínua, logo $\phi(t, x_n) \rightarrow \phi(t, x)$ quando $n \rightarrow \infty$.

Como cada $x_n \in \text{Inv}(N)$, podemos afirmar que $\phi(t, x_n) \in N$ e, desta forma, temos uma sequência de elementos de N , $(\phi(t, x_n))_{n \in \mathbb{N}}$, que converge para $\phi(t, x)$.

Sendo N compacto, obtemos que $\phi(t, x) \in N$ e já que $t \in \mathbb{R}$ foi fixado sem restrições, concluímos que $\mathcal{O}(x) \subset N$, donde segue que $x \in \text{Inv}(N)$.

Caso discreto Visto que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{Inv}(N)$, temos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma sequência $(y_k^n)_{k \in \mathbb{Z}} \subset N$ tal que $y_0^n = x_n$ e $f(y_k^n) = y_{k+1}^n$.

Considere então a sequência $(z_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ dada por $z_k = \lim_{n \rightarrow \infty} y_k^n$.

Observe que cada $z_k \in N$, pois $(y_k^n)_{k \in \mathbb{Z}} \subset N$ e N é compacto. Além disso,

$$z_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_0^n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{e}$$

$$f(z_k) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_k^n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_k^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{k+1}^n = z_{k+1}.$$

Sendo assim, x é um elemento de $\text{Inv}(N)$.

¹ $\overline{\text{Inv}(N)}$ denota o fecho do conjunto $\text{Inv}(N)$

Portanto $\overline{\text{Inv}(N)} \subset \text{Inv}(N)$ em ambos os casos, donde segue que $\text{Inv}(N)$ é um subconjunto fechado de N . Visto que N é compacto temos como consequência que $\text{Inv}(N)$ é também um conjunto compacto. ■

Agora podemos definir conjunto invariante isolado:

Definição 2.2. Dizemos que $S \subset X$ é um **conjunto invariante isolado** quando existe um compacto N em X tal que $S = \text{Inv}(N) \subset \text{int}(N)$.² Neste caso, N é chamado de **vizinhança isolante** de S .

Note que pela Proposição 2.2 todo conjunto invariante isolado é compacto.

Vejam os alguns exemplos e contra-exemplos da Definição 2.2 tanto no caso contínuo quanto no caso discreto.

Exemplo 2.3. Para o caso contínuo temos como exemplo de conjunto invariante isolado um ponto de sela S na origem do plano. De fato, basta escolher $N = [-1, 1] \times [-1, 1]$ como uma vizinhança isolante de S . (Figura 2.4 à esquerda)

Para contra exemplo, considere S um centro no plano. Temos que S é um conjunto invariante, mas qualquer vizinhança compacta N de um centro contém alguma órbita periódica, portanto S não admite vizinhança isolante e conseqüentemente S não é um conjunto invariante isolado. (Figura 2.4 à direita)

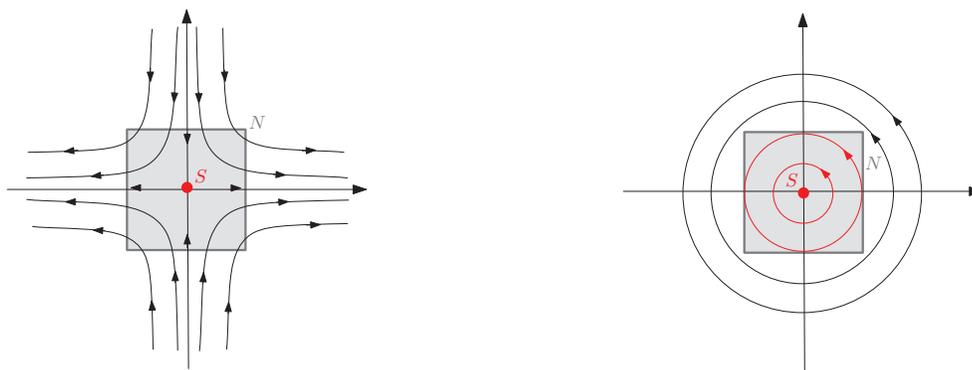


Figura 2.4: Exemplo e contra exemplo de conjunto invariante isolado no caso contínuo

Exemplo 2.4. Para o caso discreto seja primeiramente $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$.

Temos que $S = \{0\}$ é um conjunto invariante isolado de f , pois podemos tomar como vizinhança isolante, por exemplo, o compacto $N = [-1, 1]$. (Figura 2.5 à esquerda)

Porém se considerarmos a aplicação antípoda $f : S^2 \rightarrow S^2$, teremos que a órbita de cada ponto p da esfera é um conjunto invariante, porém não é isolado. De fato, qualquer

² $\text{int}(N)$ denota o interior de N

vizinhança N de $\mathcal{O}(p) = \{-p, p\}$ contém $\{-q, q\}$ para algum $q \in S^2$ distinto de $-p$ e de p . (Figura 2.5 à direita)

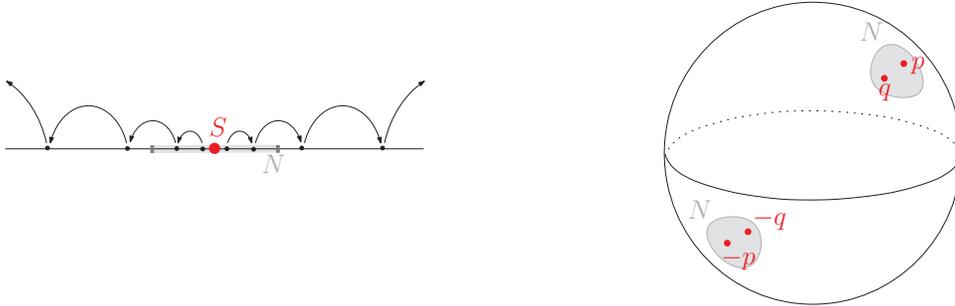


Figura 2.5: Exemplo e contra exemplo de conjunto invariante isolado no caso discreto

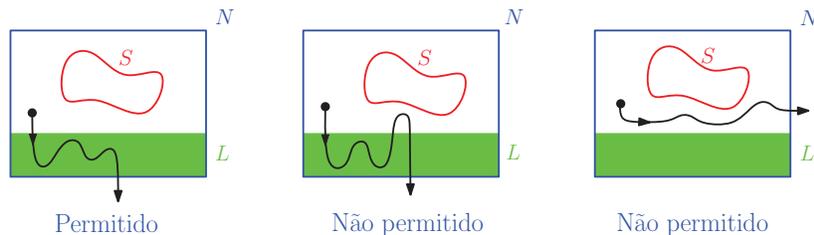
Como veremos no próximo capítulo, a ferramenta mais relevante do índice de Conley é o par-índice de conjuntos invariantes isolados. A partir de agora, conheceremos as definições de par-índice nos casos contínuo e discreto e veremos que as condições exigidas nestas definições, apesar de distintas, possuem o mesmo significado dinâmico.

Em ambos os casos queremos, a partir de um conjunto invariante isolado S , construir um par de conjuntos compactos $L \subset N$ de modo que para cada ponto da vizinhança $N \setminus L$ de S tenhamos uma das seguintes possibilidades: ou a órbita positiva deste ponto nunca sai de $N \setminus L$ e converge ao conjunto S ou então a órbita positiva escapa de $N \setminus L$ porém nunca chega ao complementar de N sem antes passar por L . Esse par de compactos será chamado de par-índice.

Primeiramente vamos enunciar o conceito de par-índice para o caso contínuo:

Definição 2.3. *Seja S um conjunto invariante isolado. Um par (N, L) de conjuntos compactos de M é chamado **par-índice** para S com relação ao fluxo ϕ se $L \subset N$ e*

1. $\overline{N \setminus L}$ é uma vizinhança isolante de S ;
2. L é **positivamente invariante** em N , isto é, se $x \in L$ e $\phi([0, T], x) \subset N$ então $\phi([0, T], x) \subset L$;
3. L é um **conjunto de saída** para N , ou seja, se $x \in N$ e $\phi([0, \infty], x) \not\subset N$ então existe $T > 0$ tal que $\phi([0, T], x) \subset N$ e $\phi(T, x) \in L$.



A existência de par-índice para um conjunto invariante isolado arbitrário com relação a um fluxo é garantida por Salamon em [19].

Vejam agora alguns exemplos.

Exemplo 2.5. No plano, considere os fluxos que têm conjuntos invariantes isolados formados respectivamente por um nó repulsor, um ponto de sela e um nó atrator como nos retratos de fase das figuras 2.6, 2.7 e 2.8. Possíveis pares-índice (N, L) para esses pontos de equilíbrio já estão exibidos nestas figuras.

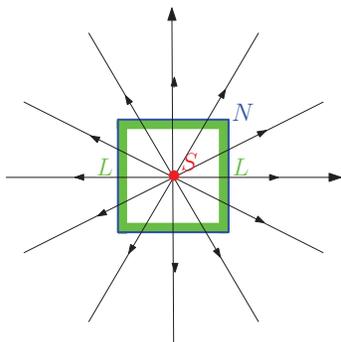


Figura 2.6: Par-índice para um nó repulsor

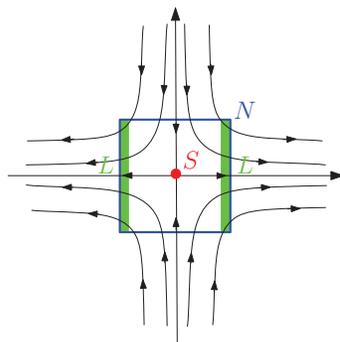


Figura 2.7: Par-índice para um ponto de sela

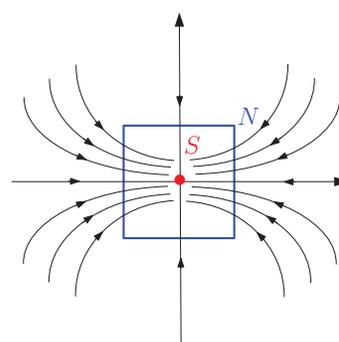


Figura 2.8: Par-índice para um nó atrator

Exemplo 2.6. Podemos considerar também um fluxo no plano que tenha uma conexão de selas como na Figura 2.9. Representamos ainda nesta figura um possível par-índice (N, L) para o conjunto invariante isolado S formado pelos pontos de sela juntamente com esta conexão de selas.

Exemplo 2.7. Para finalizar, seja ϕ um fluxo sobre um toro sólido de \mathbb{R}^3 como na Figura 2.10. Se tomarmos como conjunto invariante isolado S a órbita periódica, então (N, L) apresentado na Figura 2.11 é uma possibilidade de par-índice para S .

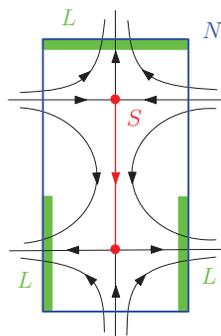


Figura 2.9: Par-índice para uma conexão de selas

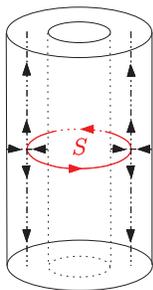


Figura 2.10: Fluxo sobre toro sólido

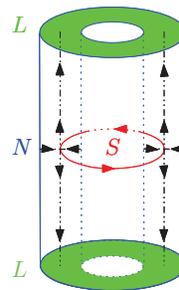
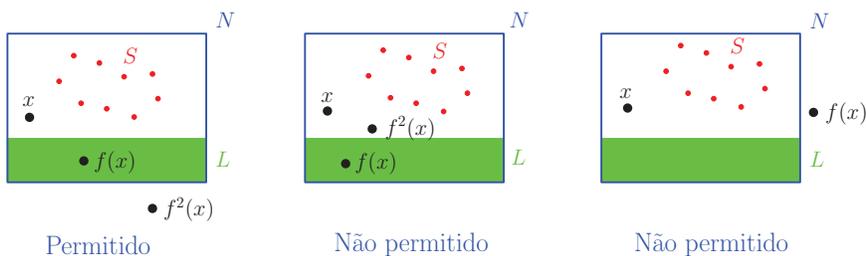


Figura 2.11: Par-índice para a órbita periódica

Apresentaremos agora a definição de par-índice para o caso discreto.

Definição 2.4. *Seja S um conjunto invariante isolado. Um par (N, L) de conjuntos compactos de M é chamado **par-índice** para S com relação à aplicação contínua f se $L \subset N$ e*

1. $\overline{N \setminus L}$ é uma vizinhança isolante de S ;
2. L é **positivamente invariante** em N , isto é, $f(L) \cap N \subset L$;
3. L é um **conjunto de saída** para N , ou seja, $f(N \setminus L) \subset N$.



Mrozek provou a existência de par-índice para um dado conjunto invariante isolado com relação a uma aplicação contínua na referência [12].

Vamos ilustrar a Definição 2.4 com alguns exemplos.

Exemplo 2.8. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$ como no Exemplo 2.4.*

Se considerarmos os compactos $N = [-2, 2]$ e $L = [-2, -1] \cup [1, 2]$ teremos que:

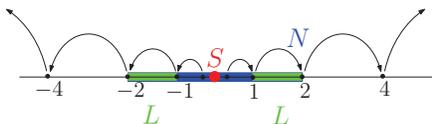


Figura 2.12: Par-índice para a origem

1. $\overline{N \setminus L} = [-1, 1]$ é uma vizinhança isolante de $S = \{0\}$ como vimos no Exemplo 2.4;
2. $f(L) \cap N = ([-4, -2] \cup [2, 4]) \cap [-2, 2] = \{-2, 2\} \subset L$;
3. $f(N \setminus L) = f((-1, 1)) = (-2, 2) \subset N$

Portanto, segundo a Definição 2.4, (N, L) é um par-índice para o conjunto invariante isolado $S = \{0\}$.

Exemplo 2.9. Voltemos à família quadrática (Exemplo 1.3) no caso em que $\mu = 5$, isto é, consideremos $F_5 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F_5(x) = 5x(1 - x)$.

Já vimos que o conjunto Λ dos pontos que têm órbita contida no intervalo I é um conjunto invariante para F_5 . Na verdade, Λ é um conjunto invariante isolado.

De fato, considere o intervalo fechado $[a, b]$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $F_5(a) = F_5(b) = -1$, ou seja, $a = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}$ e $b = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}$.

Conforme mostramos no Exemplo 1.3, se $x \in [a, b] \setminus \Lambda$ então $F_5^n(x) \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$, donde segue que $\mathcal{O}(x)$ não está contida em $[a, b]$ e no caso em que $x \in \Lambda$ vale que $\mathcal{O}(x) \subset I \subset [a, b]$. Portanto, $\text{Inv}[a, b] = \Lambda$ e, como $[a, b]$ é uma vizinhança compacta de Λ , concluímos que $[a, b]$ é uma vizinhança isolante de Λ .

Considere agora os compactos $N = [-1, 2]$ e $L = [-1, a] \cup [b, 2]$ como na Figura 2.13.

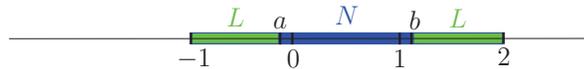


Figura 2.13: Par-índice para Λ

Esses compactos satisfazem:

1. $\overline{N \setminus L} = [a, b]$ é uma vizinhança isolante de Λ como acabamos de mostrar;
2. $F_5(L) = [F_5(-1), F_5(a)] \cup [F_5(b), F_5(2)] = [-10, -1]$, logo $F_5(L) \cap N = [-10, -1] \cap [-1, 2] = \{-1\} \subset L$;
3. $F_5(N \setminus L) = F_5((a, b)) = (-1, \frac{5}{4}) \subset [-1, 2] = N$

Sendo assim (N, L) é um par-índice para o conjunto invariante isolado Λ .

Exemplo 2.10. No Exemplo 1.4, onde conhecemos a Ferradura de Smale, vimos que o conjunto Λ dos pontos cujas órbitas permanecem em $Q = I \times I$ é um conjunto invariante pela aplicação F lá apresentada.

Mostraremos agora que Λ é um conjunto invariante isolado e exibiremos um par-índice para este conjunto.

Mantendo a notação utilizada no Exemplo 1.4, lembremos que a aplicação F satisfaz $F(H_0) = V_0$, $F(H_1) = V_1$ e $F(Q \setminus (H_0 \cup H_1)) \subset D \setminus Q$.

Considere então os compactos $N = Q$ e $L = \overline{Q \setminus (H_0 \cup H_1)}$ como na Figura 2.14 e em seguida observe que:

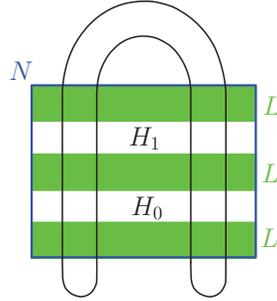


Figura 2.14: Par-índice para Λ

1. $\overline{N \setminus L} = H_0 \cup H_1$ é uma vizinhança compacta de Λ e $\text{Inv}(H_0 \cup H_1) = \Lambda$, pois, como mostramos anteriormente, se $x \in (H_0 \cup H_1) \setminus \Lambda$ então $F^n(x) \rightarrow p \in D_1$, donde segue que $\mathcal{O}(x)$ não está contida em $H_0 \cup H_1$, enquanto se $x \in \Lambda$ temos que $\mathcal{O}(x) \subset \Lambda \subset H_0 \cup H_1$. Logo $\overline{N \setminus L}$ é uma vizinhança isolante de Λ e daí obtemos que Λ é um conjunto invariante isolado
2. $F(L) \cap N \subset L$ e
3. $F(N \setminus L) \subset V_0 \cup V_1 \subset N$

Pelos itens 1., 2. e 3., concluímos que (N, L) é um par-índice para o conjunto invariante isolado Λ .

Observe que a interpretação dinâmica das definições de par-índice para o caso contínuo (Definição 2.3) e para o caso discreto (Definição 2.4) são semelhantes. De fato, o primeiro item destas definições diz que o conjunto invariante isolado S é o “maior” invariante contido no compacto $\overline{N \setminus L}$. Já o segundo item afirma que a órbita positiva de um ponto de L deve permanecer em L enquanto não sai de N . E por fim, pelo terceiro item das definições 2.3 e 2.4, a órbita positiva de qualquer ponto de $N \setminus L$ não pode escapar de N sem antes passar pelo conjunto de saída L .

O resultado que segue tem um significado dinâmico muito interessante que se refere a um par-índice (N, L) associado a um conjunto invariante isolado S . Segundo este resultado, se a órbita positiva de um ponto permanece em $N \setminus L$ então a mesma deve convergir ao conjunto invariante isolado S .

Proposição 2.3. *Sejam S um conjunto invariante isolado e (N, L) um par-índice para S .*

Se $x \in N$ é tal que $\mathcal{O}^+(x) \subset N \setminus L$ então $\omega(x) \subset S$.

Demonstração: Suponha $x \in N$ satisfazendo $\mathcal{O}^+(x) \subset N \setminus L$.

Precisaremos novamente dividir a demonstração em duas partes:

Caso contínuo Se $z \in \omega(x)$ então existe uma sequência de tempos $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de modo que $t_i \rightarrow +\infty$ e $\phi(t_i, x) \rightarrow z$.

Para cada $t \in \mathbb{R}$ fixado temos que $\phi(t+t_i, x) = \phi(t, \phi(t_i, x)) \rightarrow \phi(t, z)$ pela continuidade de ϕ em relação a sua segunda variável. Além disso, como $t_i \rightarrow +\infty$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $t+t_i > 0$ para todo $i > i_0$.

Desta forma, $(\phi(t+t_i, x))_{i > i_0}$ é uma sequência contida na órbita positiva de x e, portanto, contida em $N \setminus L$, que converge para $\phi(t, z)$. Daí obtemos que $\phi(t, z) \in \overline{N \setminus L}$.

Já que $t \in \mathbb{R}$ foi fixado de forma arbitrária, obtemos que $\mathcal{O}(z) \subset \overline{N \setminus L}$, isto é, $z \in \text{Inv}(\overline{N \setminus L})$.

Caso discreto Se $z \in \omega(x)$ então existe uma sequência de números naturais $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $n_i \rightarrow +\infty$ e $f^{n_i}(x) \rightarrow z$.

Nosso objetivo é criar uma sequência $(z_k)_{k \in \mathbb{Z}} \subset \overline{N \setminus L}$ tal que $z_0 = z$ e $f(z_k) = z_{k+1}$, pois desta forma podemos afirmar que $z \in \text{Inv}(\overline{N \setminus L})$.

Fixe $k \in \mathbb{Z}$. Visto que $n_i \rightarrow +\infty$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $n_i + k > 0$ para todo $i > i_0$. Assim a sequência $(f^{n_i+k}(x))_{i > i_0}$ está contida na órbita positiva de x e, conseqüentemente, $(f^{n_i+k}(x))_{i > i_0} \subset N \setminus L$.

Como $N \setminus L$ é um conjunto relativamente compacto, esta sequência admite uma subsequência $(y_j^k)_{j \in \mathbb{N}} = (f^{n_{i_j}+k}(x))_{j \in \mathbb{N}}$ que converge para algum $z_k \in \overline{N \setminus L}$.

Considere a sequência formada por tais z_k , com $k \in \mathbb{Z}$.

Pela construção, temos que z_0 é o limite da subsequência $(y_j^0)_{j \in \mathbb{N}}$. Mas observe que $(y_j^0)_{j \in \mathbb{N}}$ é, na verdade, uma subsequência de $(f^{n_i}(x))_{i \in \mathbb{N}}$, portanto $y_j^0 \rightarrow z$. Por unicidade, concluímos que $z_0 = z$.

Além disso, como f é contínua e $y_j^k \rightarrow z_k$ quando $j \rightarrow \infty$, obtemos que $f(y_j^k) \rightarrow f(z_k)$, isto é, $f^{n_{i_j}+k+1}(x) \rightarrow f(z_k)$ quando $j \rightarrow \infty$. Porém, $f^{n_{i_j}+k+1}(x) \rightarrow z_{k+1}$ por construção, logo $f(z_k) = z_{k+1}$.

Logo a sequência $(z_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ satisfaz as propriedades desejadas.

Em ambos os casos obtivemos que se $z \in \omega(x)$ então $z \in \text{Inv}(\overline{N \setminus L})$, ou seja, $\omega(x) \subset \text{Inv}(\overline{N \setminus L})$.

Mas tendo em vista que (N, L) é um par-índice para S , temos também que $\text{Inv}(\overline{N \setminus L}) = S$. Portanto $\omega(x) \subset S$. ■

2.2 Decomposição em Par Atrator-Repulsor e Trio-Índice

Vamos iniciar a apresentação das possíveis decomposições de um conjunto invariante isolado pela decomposição em par atrator-repulsor.

Este tipo de decomposição consiste de dois passos: primeiro, encontrar um subconjunto A de S que atrai todas as órbitas de uma vizinhança e, segundo, considerar o subconjunto A^* de S formado por todos os pontos cujas órbitas não convergem para o atrator A com o passar do tempo ou com o passar das iterações positivas.

Neste caso, veremos que A e A^* são subconjuntos invariantes de S e, mais ainda, cada elemento de S pertence a A , ou a A^* , ou a alguma órbita que conecta A^* à A .

Convencionamos que, a partir de agora, S sempre denotará um conjunto invariante isolado.

Primeiramente vamos formalizar o conceito de atrator.

Definição 2.5. Um subconjunto $A \subset S$ é chamado um **atrator** em S se existe uma vizinhança U de A tal que $\omega(U \cap S) = A$.

Para cada atrator A em S , vamos associar um conjunto A^* formado pelos pontos de S cujas órbitas não são atraídas por A .

Definição 2.6. Dado A um atrator em S , definimos o **repulsor dual** de A como o seguinte subconjunto de S :

$$A^* = \{x \in S \mid \omega(x) \cap A = \emptyset\}.$$

Com isso podemos definir:

Definição 2.7. Seja $A \subset S$ um atrator em S e A^* seu repulsor dual. O par (A, A^*) é chamado de **par atrator-repulsor** de S .

Reunimos na proposição abaixo algumas propriedades importantes relacionadas a este par:

Proposição 2.4. Seja (A, A^*) um par atrator-repulsor de um conjunto invariante isolado S . Então:

1. A e A^* são conjuntos invariantes isolados e, conseqüentemente, são conjuntos compactos e invariantes.
2. A e A^* são disjuntos
3. Se $x \in S \setminus (A \cup A^*)$ então $\omega(x) \subset A$ e
 - (a) $\omega^*(x) \subset A^*$ no caso de fluxos ou aplicações contínuas invertíveis
 - (b) para toda órbita $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ passando por x e toda seqüência $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tais que $n_k \rightarrow -\infty$ e $x_{n_k} \rightarrow z$, temos que $z \in A^*$. Esta afirmação serve para aplicações contínuas em geral.

A proposição anterior descreve completamente o comportamento das órbitas de S com relação a um par atrator-repulsor (A, A^*) .

Com efeito, se estamos trabalhando com um fluxo ou com uma aplicação contínua invertível, então para cada ponto $x \in S$ temos apenas uma das três possibilidades para a órbita $\mathcal{O}(x)$:

- $\mathcal{O}(x)$ está contida no atrator A
- $\mathcal{O}(x)$ está contida no repulsor dual A^*
- $\mathcal{O}(x)$ não intercepta $A \cup A^*$ e, neste caso, $\omega^*(x) \subset A^*$ e $\omega(x) \subset A$. Em outras palavras, $\mathcal{O}(x)$ “nasce” em A^* e “morre” em A .

Se a dinâmica estudada é gerada por uma aplicação contínua não invertível, então podemos fazer uma análise semelhante.

Neste caso, para cada ponto $x \in S$ ocorre somente uma das três alternativas:

- $x \in A$ e, como A é invariante, existe uma órbita $\mathcal{O}(x)$ contida em A
- $x \in A^*$ e, desde que A^* é invariante, existe uma órbita $\mathcal{O}(x)$ contida em A^*
- $x \in S \setminus (A \cup A^*)$ e segue diretamente que $\omega(x) \subset A$. Além disso, usando que S é invariante, temos que existe uma órbita $\mathcal{O}(x) = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de modo que $\mathcal{O}(x) \subset S$. Já que S é compacto, existe uma seqüência $n_k \rightarrow -\infty$ tal que $(x_{n_k}) \rightarrow z$ para algum $z \in S$. Portanto, pelo item 3.(b) da Proposição 2.4, $z \in A^*$. Dizemos também neste caso que $\mathcal{O}(x)$ é uma órbita que “nasce” em A^* e “morre” em A .

Uma forma simples e natural de descrever a terceira situação de ambos os casos é dizendo que a órbita $\mathcal{O}(x)$ conecta os subconjuntos A e A^* . Isto motiva a seguinte definição:

Definição 2.8. *Seja (A, A^*) um par atrator-repulsor de um conjunto invariante isolado S . O subconjunto de S dado por*

$$C(A, A^*) := S \setminus (A \cup A^*)$$

*é chamado de **conjunto das órbitas de conexão** de S .*

Observação 2.2. *No caso de fluxos ou aplicações contínuas invertíveis, o conjunto das órbitas de conexão de S se resume a*

$$C(A, A^*) := \{x \in S \mid \omega^*(x) \subset A^* \text{ e } \omega(x) \subset A\}.$$

A partir da Definição 2.8 e do item 2. da Proposição 2.4, é importante observar que um par atrator-repulsor (A, A^*) de um conjunto invariante isolado S decompõe este conjunto na seguinte união disjunta:

$$S = A \cup A^* \cup C(A, A^*).$$

Tal decomposição é conhecida como **decomposição em par atrator-repulsor** de S .

Vejamos dois exemplos de decomposição em par atrator-repulsor, o primeiro para o caso contínuo e o segundo para o caso discreto, baseados respectivamente em [14] e [15].

Exemplo 2.11. *Seja ϕ um fluxo sobre \mathbb{R}^2 que tem retrato de fase dado pela Figura 2.15.*

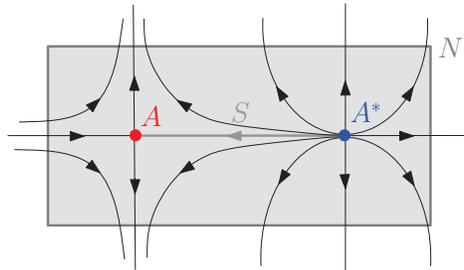


Figura 2.15: Exemplo de decomposição em par atrator-repulsor

Considere o conjunto invariante isolado S formado pela união do ponto de sela, com o nó repulsor e com a órbita que os conecta. Uma vizinhança isolante N para S foi exibida na Figura 2.15.

O subconjunto A de S formado pelo ponto de sela é um atrator em S e seu repulsor dual A^ consiste apenas do nó repulsor.*

Assim (A, A^) é uma decomposição em par atrator-repulsor de S .*

Exemplo 2.12. Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação contínua que age sobre os retângulos N_1 e N_2 do modo descrito na Figura 2.16.

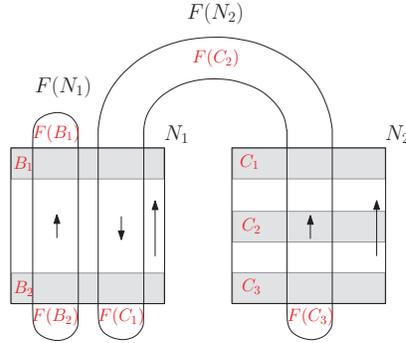


Figura 2.16: Ação de F sobre os retângulos N_1 e N_2

Considere os conjuntos invariantes

$$S = \text{Inv}(N_1 \cup N_2) \quad A = \text{Inv}(N_1) \quad R = \text{Inv}(N_2).$$

Mostraremos que (A, R) constitui um par atrator-repulsor para S . Primeiramente vejamos que A é um atrator de S .

Afirmamos que N_1 é uma vizinhança de A tal que $\omega(N_1 \cap S) = A$.

De fato, pela forma como F age sobre N_1 temos que $\omega(N_1 \cap S) \subset N_1$. Além disso, o ω -limite de um conjunto é sempre invariante. Por estas razões e pela Proposição 2.1, podemos concluir que $\omega(N_1 \cap S) \subset \text{Inv}(N_1) = A$.

Seja $x \in A = \text{Inv}(N_1)$. Então existe uma órbita $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subset N_1$ tal que $F(x_n) = x_{n+1}$ e $x_0 = x$.

Note que cada elemento da sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é também um elemento de $S = \text{Inv}(N_1 \cup N_2)$. Com efeito, dado x_n desta sequência basta tomar $(y_i)_{i \in \mathbb{Z}} \subset N_1 \cup N_2$ dada por $y_i = x_{n+i}$ e teremos que $F(y_i) = F(x_{n+i}) = x_{n+i+1} = y_{i+1}$ e $y_0 = x_n$.

Considere então as sequências $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ e $(z_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset N_1 \cap S$ definidas por $n_k = k$ e $z_k = x_{-k}$. Neste caso temos que $n_k \rightarrow +\infty$ e que $(F^{n_k}(z_k))_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência constante cujos termos são todos iguais a x_0 e, conseqüentemente, $F^{n_k}(z_k) \rightarrow x_0 = x$.

Com isso concluímos que $x \in \omega(N_1 \cap S)$, donde segue que $A \subset \omega(N_1 \cap S)$.

Logo $A = \omega(N_1 \cap S)$, sendo N_1 uma vizinhança de A e, portanto, A é um atrator de S .

Queremos mostrar agora que R é o repulsor dual de A , ou seja, que $R = \{x \in S \mid \omega(x) \cap A = \emptyset\}$.

Suponha que exista $x \in R = \text{Inv}(N_2)$ tal que $\omega(x) \cap A \neq \emptyset$ e seja $y \in \omega(x) \cap A$.

Por definição de ω -limite, temos que existe uma sequência $(n_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ tal que $n_i \rightarrow +\infty$ e $F^{n_i}(x) \rightarrow y$ quando $i \rightarrow +\infty$.

Como $x \in \text{Inv}(N_2)$, cada $F^{n_i}(x)$ pertence ao compacto N_2 e, assim, o limite y da sequência $(F^{n_i}(x))_{i \in \mathbb{N}}$ é um elemento de N_2 .

Mas já que $y \in A = \text{Inv}(N_1)$, também vale que $y \in N_1$. Deste modo teríamos que $y \in N_1 \cap N_2$, gerando um absurdo.

Portanto, se $x \in R$ então x deve satisfazer $\omega(x) \cap A = \emptyset$, isto é, $R \subset \{x \in S \mid \omega(x) \cap A = \emptyset\}$.

Mostremos a inclusão contrária.

Seja $x \in S = \text{Inv}(N_1 \cup N_2)$ tal que $\omega(x) \cap A = \emptyset$. Neste caso, existe uma órbita $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subset N_1 \cup N_2$ de modo que $F(x_n) = x_{n+1}$ e $x_0 = x$. Observe que cada termo da sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é também um elemento de $S = \text{Inv}(N_1 \cup N_2)$ (para isso basta transladar os índices desta sequência).

Suponha que $x \notin R = \text{Inv}(N_2)$. Então $x_{n_0} \notin N_2$ para algum $n_0 \in \mathbb{Z}$ e como $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subset N_1 \cup N_2$, temos que $x_{n_0} \in N_1$.

Assim $x_{n_0} \in N_1 \cap S$ e, já que $\omega(N_1 \cap S) = A$, obtemos que $\omega(x_{n_0}) \subset A$. Mas $\omega(x) = \omega(x_{n_0})$, assim inferimos que $\omega(x) \subset A$, contrariando o fato de que $\omega(x) \cap A = \emptyset$.

Concluimos desta forma que se $x \in S$ satisfaz $\omega(x) \cap A = \emptyset$ então x deve pertencer a R , isto é, $\{x \in S \mid \omega(x) \cap A = \emptyset\} \subset R$.

Portanto R é o repulsor dual de A e podemos afirmar que (A, R) é um par atrator-repulsor de S .

Já vimos que se (A, A^*) é um par atrator-repulsor para um conjunto invariante isolado S , então A e A^* também são conjuntos invariantes isolados. Por esta razão, podemos associar um par-índice a cada um destes conjuntos.

Mais que isso, é possível encontrar um trio de conjuntos compactos (N_0, N_1, N_2) de modo que (N_2, N_0) , (N_1, N_0) e (N_2, N_1) constituem pares-índice para S , A e A^* respectivamente.

Costumamos dar um nome especial a este trio de compactos:

Definição 2.9. *Seja (A, A^*) um par atrator-repulsor para um conjunto invariante isolado S . Um trio de conjuntos compactos (N_0, N_1, N_2) com a propriedade de que (N_2, N_0) , (N_1, N_0) e (N_2, N_1) são pares-índice para S , A e A^* respectivamente é chamado de **trio-índice** para o par atrator-repulsor (A, A^*) .*

A existência de um trio de compactos com tais propriedades é estabelecida em [17] no caso discreto e em [9] no caso contínuo.

Vamos finalizar esta seção apresentando um trio-índice para cada um dos pares atrator-repulsor que conhecemos nos Exemplos 2.11 e 2.12.

Exemplo 2.13. Considere o fluxo ϕ fornecido no Exemplo 2.11 juntamente com a vizinhança isolante N do conjunto invariante isolado S que exibimos na Figura 2.15. Para o par atrator-repulsor $(A, A^*) = (\{\text{ponto de sela}\}, \{\text{nó-repulsor}\})$ podemos associar o trio-índice (N_0, N_1, N_2) como na Figura 2.17.



Figura 2.17: Trio-índice para (A, A^*)

Observe nas figuras 2.18, 2.19 e 2.20 abaixo que (N_2, N_0) , (N_1, N_0) e (N_2, N_1) escolhidos desta forma são pares-índice para os conjuntos S , A e A^* respectivamente.

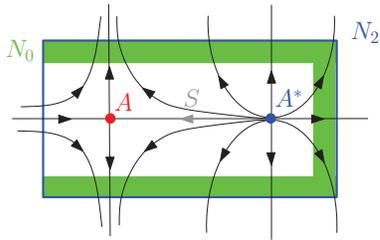


Figura 2.18: Par-índice para S

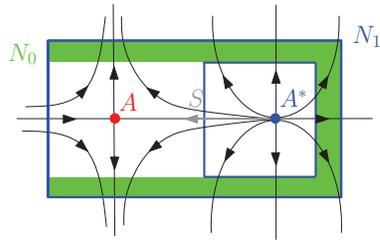


Figura 2.19: Par-índice para A

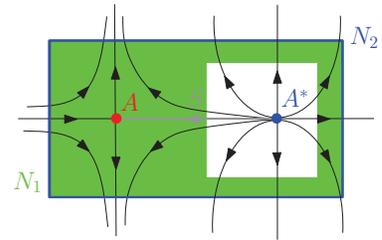


Figura 2.20: Par-índice para A^*

Exemplo 2.14. Seja F a aplicação contínua que apresentamos no Exemplo 2.12. Provamos naquele exemplo que $(A, R) = (Inv(N_1), Inv(N_2))$ constitui um par atrator-repulsor para o conjunto $S = Inv(N_1 \cup N_2)$.

Vamos considerar como trio-índice para (A, R) o trio de compactos (M_0, M_1, M_2) dados pela Figura 2.21.

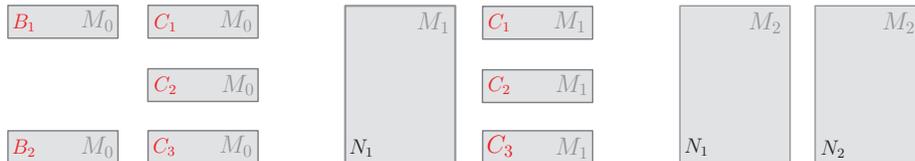
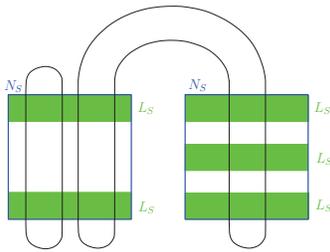
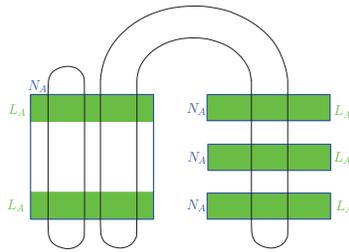
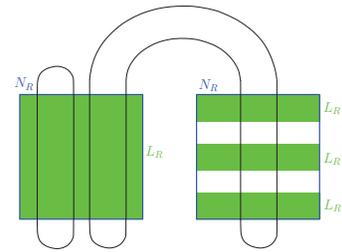


Figura 2.21: Trio-índice para (A, R)

As figuras 2.22, 2.23 e 2.24 mostram os três pares-índice gerados pelo trio-índice (M_0, M_1, M_2) : (M_2, M_0) para S , (M_1, M_0) para A e (M_2, M_1) para R . Por conveniência, vamos denotar o par-índice (M_2, M_0) para S por (N_S, L_S) , o par-índice (M_1, M_0) para A por (N_A, L_A) e o par-índice (M_2, M_1) para R por (N_R, L_R) .

Figura 2.22: Par-índice para S Figura 2.23: Par-índice para A Figura 2.24: Par-índice para R

2.3 Decomposição de Morse e Filtração-Índice

A decomposição de Morse, como já comentamos, é uma generalização da decomposição em par atrator-repulsor que conhecemos na seção anterior.

Numa decomposição de Morse, teremos não apenas dois, mas uma coleção finita $\{M_\pi\}_{\pi \in P}$ de subconjuntos invariantes isolados disjuntos de S , de modo que cada elemento de S pertence a algum M_π ou a alguma órbita que “nasce” em $M_{\pi'}$ e “morre” em M_π para certos $\pi, \pi' \in P$.

Veremos também que para cada decomposição de Morse é possível associar uma coleção de compactos que estende o conceito de trio-índice para par atrator-repulsor.

Seja P um conjunto finito munido de uma ordem parcial $<$.

Começaremos definindo extensão de ordens parciais.

Definição 2.10. Uma ordem parcial $<'$ sobre P é dita uma **extensão** de $<$ se para todo $\pi, \pi' \in P$ vale a implicação: $\pi < \pi' \Rightarrow \pi <' \pi'$.

Já definimos os conceitos de intervalo e de intervalos adjacentes na Subseção 1.2.3, bem como fixamos as notações necessárias. Em relação a intervalos, só nos resta definir intervalos atratores.

Definição 2.11. Dizemos que $A \in \mathcal{I}$ é um **intervalo atrator** se $\pi \in A$ e $\pi' < \pi$ implicarem que $\pi' \in A$. O conjunto de todos os intervalos atratores de $(P, <)$ é denotado por $\mathcal{A}(P, <)$ ou simplesmente por \mathcal{A} .

Veremos agora que uma decomposição de Morse de um conjunto invariante isolado S é uma coleção finita de subconjuntos de S que satisfazem propriedades como aquelas listadas na Proposição 2.4 para um par atrator-repulsor.

Definição 2.12. Dado um conjunto invariante isolado S , uma **decomposição de Morse** $<$ -ordenada de S é uma coleção $\mathcal{M} = \{M_\pi\}_{\pi \in P}$ de subconjuntos invariantes isolados mutu-

amente disjuntos com a seguinte propriedade: se $x \in S \setminus \bigcup_{\pi \in P} M_\pi$ então existem $\pi, \pi' \in P$ tais que $\pi < \pi'$ e $x \in C(M_\pi, M_{\pi'})$, onde:

- o conjunto $C(M_\pi, M_{\pi'})$ é dado por $\{x \in S \mid \omega^*(x) \subset M_{\pi'} \text{ e } \omega(x) \subset M_\pi\}$ no caso de fluxos e aplicações contínuas invertíveis
- e, no caso de aplicações contínuas não invertíveis, dado por todo $x \in S$ que satisfaz: $\omega(x) \subset M_\pi$ e para toda órbita $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ passando por x e toda sequência $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tais que $n_k \rightarrow -\infty$ e $x_{n_k} \rightarrow z$, temos que $z \in M_{\pi'}$.

Costumamos chamar cada subconjunto M_π de **conjunto de Morse** e cada subconjunto $C(M_\pi, M_{\pi'})$ de **conjunto das órbitas de conexão** de $M_{\pi'}$ à M_π .

Vale a pena ressaltar que um mesmo conjunto invariante isolado pode admitir distintas decomposições de Morse. Considere, por exemplo, as seguintes decomposições para um fluxo sobre o bitoro:

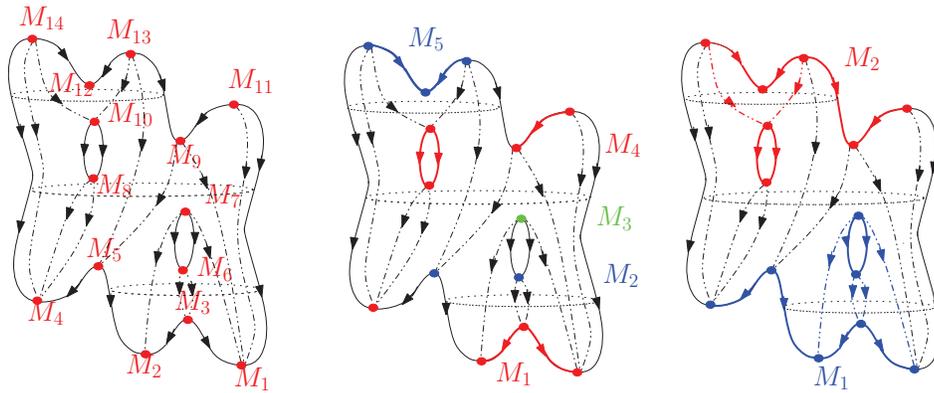


Figura 2.25: Distintas decomposições de Morse para um fluxo sobre o bitoro

Dada uma coleção de subconjuntos de X , o próprio fluxo (ou aplicação contínua) definido sobre X tem condições de estabelecer uma ordem natural entre os componentes desta coleção. Para isso, basta respeitar o caminho que as órbitas de X percorrem.

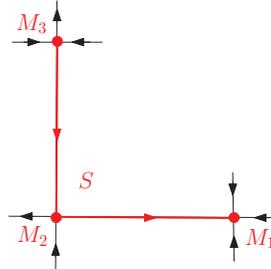
Se $<$ é uma ordem que ordena os conjuntos de uma decomposição de Morse segundo este princípio, então $<$ recebe um nome especial:

Definição 2.13. *Seja $\mathcal{M} = \{M_\pi\}_{\pi \in P}$ uma decomposição de Morse $<$ -ordenada. Se $<$ satisfaz:*

$$\pi < \pi' \text{ se, somente se, existe uma sequência de elementos distintos } \pi_0 = \pi, \pi_1, \dots, \pi_n = \pi' \in P \text{ tais que } C(M_{\pi_{j-1}}, M_{\pi_j}) \neq \emptyset \text{ para todo } j = 1, \dots, n$$

então $<$ é chamada de **ordem do fluxo** no caso contínuo ou de **ordem da aplicação contínua** no caso discreto.

Exemplo 2.15. Considere um fluxo sobre \mathbb{R}^2 que tem o seguinte conjunto de órbitas limitadas S :



Seja $P = \{1, 2, 3\}$ um conjunto de índices ordenado por: $1 < 2 < 3$.

Os conjuntos unitários M_1 , M_2 e M_3 formados respectivamente pelo ponto atrator, pelo ponto de sela de baixo e pelo ponto de sela de cima constituem uma decomposição de Morse $<$ -ordenada, sendo que $<$ é a ordem do fluxo.

Usando as Definições 2.12 e 2.13, é possível verificar que se $<$ é uma ordem parcial sobre P e $\mathcal{M} = \{M_\pi\}_{\pi \in P}$ é uma decomposição de Morse $<$ -ordenada, então $<$ é uma extensão da ordem do fluxo (ou da ordem da aplicação contínua).

Fixada uma ordem sobre P e uma decomposição de Morse $\mathcal{M} = \{M_\pi\}_{\pi \in P}$ associada a um conjunto invariante isolado S , definimos um subconjunto invariante isolado de S para cada intervalo $I \in \mathcal{I}$:

$$M_I = \left(\bigcup_{\pi \in I} M_\pi \right) \cup \left(\bigcup_{\pi, \pi' \in I} C(M_\pi, M_{\pi'}) \right).$$

A proposição a seguir nos diz que os conjuntos M_I podem formar pares atrator-repulsor dentro da decomposição de Morse \mathcal{M} .

Proposição 2.5. Se $(I, J) \in \mathcal{I}_2$, ou seja, se (I, J) é uma dupla de intervalos adjacentes, então (M_I, M_J) é um par atrator-repulsor de M_{IJ} .

Este resultado será essencial para a construção da matriz de conexão quando passarmos de uma decomposição em par atrator-repulsor para uma decomposição de Morse. Sua demonstração para o caso contínuo pode ser encontrada em [6] e para o caso discreto em [16].

Vamos definir agora um conjunto de compactos que desempenha para uma decomposição de Morse o mesmo papel que o trio-índice desempenha para um par atrator-repulsor.

Definição 2.14. Uma coleção de conjuntos compactos $\mathcal{N} = \{N(I)\}_{I \in \mathcal{A}}$ é chamada uma **filtração-índice** para a decomposição de Morse \mathcal{M} se:

1. para cada $I \in \mathcal{A}$, $(N(I), N(\emptyset))$ é um par-índice para M_I
2. para quaisquer $I, J \in \mathcal{A}$, $N(I) \cap N(J) = N(I \cap J)$ e $N(I) \cup N(J) = N(I \cup J)$

Aparentemente, pela Definição 2.14, uma filtração-índice garante um par-índice para M_I apenas para os intervalos atratores I . Porém, pelo primeiro item da proposição abaixo, uma filtração-índice tem uma propriedade ainda melhor: fornece um par-índice para cada um dos conjuntos M_J para qualquer intervalo J , sendo J atrator ou não.

Proposição 2.6. *Seja $J \in \mathcal{I}$.*

1. Se (I, J) é uma decomposição de um intervalo atrator K então $(N(K), N(I))$ é um par-índice para M_J
2. Se (I_i, J) é uma decomposição de um intervalo atrator K_i , para $i = 1, 2$, então $N(K_1) \setminus N(I_1) = N(K_2) \setminus N(I_2)$

Posteriormente precisaremos de ambos os itens deste resultado no caso contínuo, demonstrados por Franzosa em [6], mas somente do primeiro item no caso discreto, que foi provado por Richeson em [16].

No exemplo abaixo exibiremos uma filtração-índice para a decomposição de Morse que apresentamos no Exemplo 2.15.

Exemplo 2.16. *Considere novamente o Exemplo 2.15 com o conjunto de índices $P = \{1, 2, 3\}$ ordenado por $1 < 2 < 3$. Os intervalos atratores de P são: $I_0 = \emptyset, I_1 = \{1\}, I_2 = \{1, 2\}$ e $I_3 = \{1, 2, 3\}$.*

Sejam $N(I_0), N(I_1), N(I_2)$ e $N(I_3)$ os conjuntos compactos associados a estes intervalos atratores dados pela Figura 2.26.

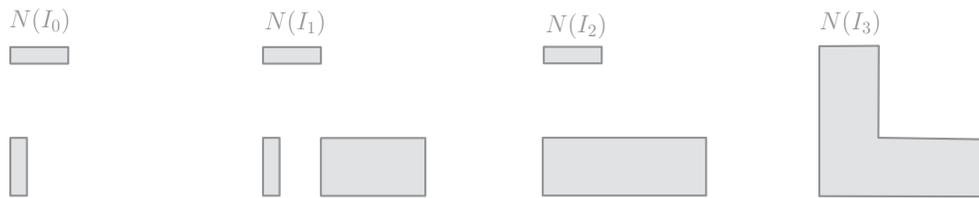


Figura 2.26: Filtração-índice para a decomposição de Morse $\{M_1, M_2, M_3\}$

Observe nas figuras 2.27, 2.28 e 2.29 que $(N(I_1), N(I_0))$ é um par-índice para $M_{I_1} = M_1$, $(N(I_2), N(I_0))$ é um par-índice para $M_{I_2} = M_1 \cup M_2 \cup C(M_1, M_2)$ e, por fim, $(N(I_3), N(I_0))$ é um par-índice para $M_{I_3} = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup C(M_1, M_2) \cup C(M_2, M_3) = S$.

Capítulo 3

Índice de Conley

O objetivo deste capítulo é apresentar o elemento fundamental da teoria de Conley, o chamado índice de Conley. Esta apresentação será organizada em duas abordagens, uma para a dinâmica contínua e outra para a dinâmica discreta, e ambas serão divididas em duas versões, a homotópica e a homológica.

Para definir o índice homotópico de Conley de um conjunto invariante isolado, será necessário buscar algum invariante deste conjunto que independe da escolha do par-índice. Veremos que o índice homotópico não coincide quando lidamos com sistemas dinâmicos contínuos e com sistemas dinâmicos discretos.

Como consequência, o índice homológico de Conley, que trata-se de um elemento puramente algébrico, também não será definido de forma análoga para fluxos e para aplicações contínuas. Na verdade, observaremos que o índice discreto homológico de Conley carrega mais informações do que o índice contínuo homológico de Conley.

Futuramente, nos Capítulos 4 e 5, perceberemos que o índice homológico de Conley é uma peça essencial para a construção das matrizes de conexão.

Podemos iniciar este capítulo lembrando a definição de espaço pontuado.

Definição 3.1. Um *espaço pontuado* (Y, y_0) é um espaço topológico Y com um ponto distinguido $y_0 \in Y$ que recebe o nome de **ponto base**.

Dado um par de espaços (N, L) com $L \subset N$, defina sobre N a seguinte relação de equivalência:

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ ou } x, y \in L. \quad (3.1)$$

Usaremos a notação N/L para denotar o espaço pontuado $(N/\sim, [L])$, onde $[L]$ representa a classe de equivalência dos pontos de L segundo a relação (3.1) e $N/\sim = \{[x], x \in N\}$ pode ser identificado com $N \setminus L \cup [L]$. Em outras palavras, o espaço pontuado N/L é obtido de N

ao colapsar o subconjunto L a um ponto.

Convencionamos que se $L = \emptyset$, então o espaço pontuado N/L será dado por:

$$N/L = (N \setminus L \cup [L], [L]) := (N \cup \{*\}, \{*\}),$$

onde $\{*\}$ denota a classe de equivalência consistindo do conjunto vazio.

A topologia sobre N/L é definida como segue: um subconjunto U é aberto em N/L se $U \cap L = \emptyset$ e U é aberto em N ou se $U \cap L \neq \emptyset$ e $(U \cap (N \setminus L)) \cup L$ é aberto em N .

3.1 Índice Contínuo de Conley

Por simplicidade, iniciaremos o estudo do índice de Conley pelo caso contínuo.

Na primeira parte desta seção, veremos que o índice contínuo homotópico de um conjunto invariante isolado S é definido como o tipo de homotopia do espaço pontuado gerado por um par-índice de S .

A segunda subseção, por sua vez, apresentará o índice contínuo homológico de S como um espaço vetorial graduado de homologias.

3.1.1 Índice Contínuo Homotópico de Conley

No início deste capítulo anunciamos que para definir o índice homotópico de Conley de um conjunto invariante isolado S é necessário identificar uma informação comum entre os pares-índice associados a S .

O exemplo a seguir tem a intenção de motivar a busca desta informação.

Exemplo 3.1. *Considere novamente o fluxo em \mathbb{R}^2 que possui um ponto de sela na origem, como no Exemplo 2.5.*

Sendo S o conjunto unitário formado por este ponto de sela, temos que (N, L) e (N', L') exibidos na Figura 3.1 são dois possíveis pares-índice para S .

Note que, apesar de distintos, os pares-índice (N, L) e (N', L') possuem uma propriedade homotópica em comum: os espaços pontuados N/L e N'/L' são ambos homotopicamente equivalentes a S^1 . Veja Figura 3.2.

Na verdade, o que observamos no exemplo anterior não ocorre por uma simples coincidência. No caso de sistemas dinâmicos contínuos, temos o seguinte resultado demonstrado em [19] que aplica-se de forma geral.

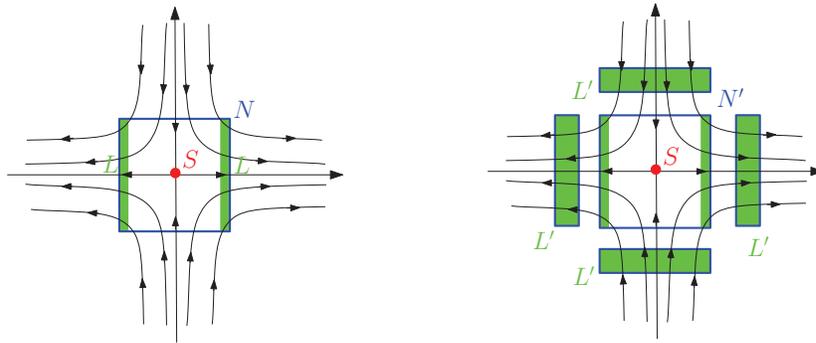


Figura 3.1: Distintos pares-índice para um ponto de sela

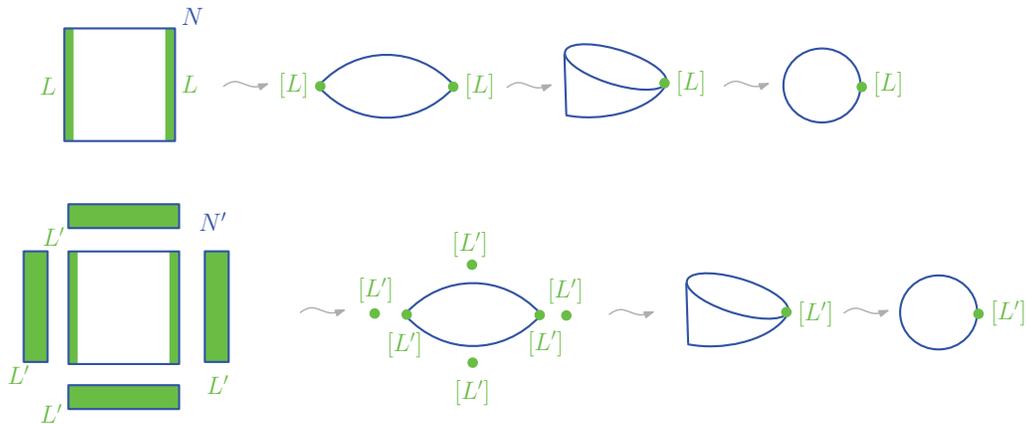


Figura 3.2: Tipo de homotopia dos espaços pontuados N/L e N'/L' respectivamente

Teorema 3.1. *Sejam (N, L) e (N', L') dois pares-índice com relação a um fluxo ϕ para um mesmo conjunto invariante isolado S . Então os espaços pontuados N/L e N'/L' são homotopicamente equivalentes, ou seja, têm o mesmo tipo de homotopia.*

De acordo com o Teorema 3.1, o tipo de homotopia do espaço pontuado N/L é o mesmo em qualquer escolha de par-índice (N, L) para o conjunto invariante isolado S . Sendo assim, este tipo de homotopia depende apenas do comportamento do fluxo numa vizinhança de S e, portanto, faz sentido definirmos:

Definição 3.2. *Seja S um conjunto invariante isolado de um fluxo ϕ . Definimos o **índice contínuo (homotópico) de Conley** de S como o tipo de homotopia do espaço pontuado N/L , onde (N, L) é um par-índice para S . A notação para este índice será $h(S, \phi)$ ou simplesmente $h(S)$.*

Os exemplos a seguir ilustram a definição anterior:

Exemplo 3.2. *A Figura 3.3 apresenta pares-índice respectivamente para um nó atrator A , dois tipos de ponto de sela S_1 e S_2 e um nó repulsor R em \mathbb{R}^3 , bem como os tipos de homotopia*

destes pares-índice.

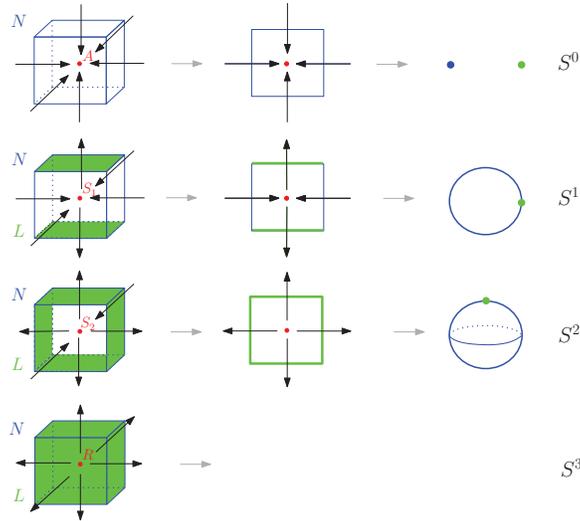


Figura 3.3: Índice contínuo de Conley de singularidades

Pela Definição 3.2 temos que os índices contínuos de Conley de A , S_1 , S_2 e R são dados em ordem por S^0 , S^1 , S^2 e S^3 .

Exemplo 3.3. Na Figura 2.9 do Exemplo 2.6 exibimos um par-índice (N, L) para uma conexão de selas S do \mathbb{R}^2 . O espaço pontuado N/L tem o tipo de homotopia de $S^1 \vee S^1$, como vemos na Figura 3.4.

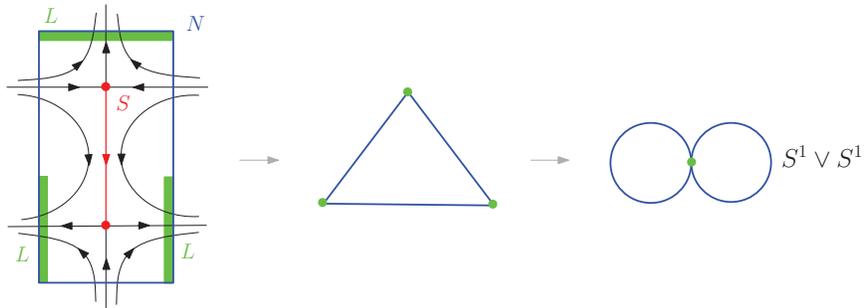


Figura 3.4: Índice contínuo de Conley de uma conexão de selas

Portanto o índice contínuo de Conley da conexão de selas S é $S^1 \vee S^1$.

3.1.2 Índice Contínuo Homológico de Conley

Pela dificuldade de trabalhar com classes de homotopia de espaços topológicos, costumamos considerar um índice de Conley mais fraco, porém algébrico, que definimos a seguir:

Definição 3.3. *Seja S um conjunto invariante isolado de um fluxo ϕ . O espaço vetorial graduado*

$$\text{Con}_*(S, \phi) := H_*(h(S)),$$

onde $H_q(h(S))$ denota o q -ésimo grupo de homologia de $h(S)$ sobre um corpo F para cada $q \in \mathbb{N}$, é denominado **índice contínuo homológico de Conley** de S . Muitas vezes denotamos $\text{Con}(S, \phi)$ simplesmente por $\text{Con}(S)$ ou por $H(S)$.

Tendo em vista que espaços homotopicamente equivalentes possuem a mesma homologia, temos que o índice contínuo homológico de Conley também não depende da escolha do par-índice, portanto, está bem definido.

Nos dois exemplos abaixo vamos calcular as homologias sobre o corpo \mathbb{Q} .

Exemplo 3.4. *Voltemos ao Exemplo 3.2, onde obtivemos o índice contínuo de Conley de um atrator A , duas selas S_1 e S_2 e um repulsor R . Pela Definição 3.3, os índices contínuos homológicos de Conley destas singularidades são dadas por:*

$$\begin{aligned} \text{Con}_q(A) = H_q(S^0) &= \begin{cases} \mathbb{Q} & , \text{ se } q = 0 \\ 0 & , \text{ se } q \neq 0 \end{cases} & \text{Con}_q(S_1) = H_q(S^1) &= \begin{cases} \mathbb{Q} & , \text{ se } q = 1 \\ 0 & , \text{ se } q \neq 1 \end{cases} \\ \\ \text{Con}_q(S_2) = H_q(S^2) &= \begin{cases} \mathbb{Q} & , \text{ se } q = 2 \\ 0 & , \text{ se } q \neq 2 \end{cases} & \text{Con}_q(R) = H_q(S^3) &= \begin{cases} \mathbb{Q} & , \text{ se } q = 3 \\ 0 & , \text{ se } q \neq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Exemplo 3.5. *No Exemplo 3.3 vimos que o índice contínuo de Conley da conexão de selas S lá apresentada é $S^1 \vee S^1$. Logo o índice contínuo homológico de Conley de S é igual a*

$$\text{Con}_q(S) = H_q(S^1 \vee S^1) = \begin{cases} \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} & , \text{ se } q = 1 \\ 0 & , \text{ se } q \neq 1 \end{cases}$$

As três propriedades a seguir têm por objetivo facilitar o cálculo do índice contínuo homológico de Conley de um conjunto invariante isolado.

Proposição 3.1. *Seja S um conjunto invariante isolado de um fluxo ϕ .*

1. **Propriedade de Wazewski:** *Se $S = \emptyset$ então $\text{Con}(S) = 0$.*
2. **Propriedade de aditividade:** *Se $S = S_1 \cup S_2$, onde S_1 e S_2 são conjuntos invariantes isolados disjuntos, então $\text{Con}(S) \approx \text{Con}(S_1) \oplus \text{Con}(S_2)$.*

3. **Propriedade de continuação:** Se $\{\phi_\lambda : \mathbb{R} \times X \rightarrow X\}_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família de fluxos parametrizada por um intervalo compacto $\Lambda \subset \mathbb{R}$ e N é uma vizinhança isolante de $S_\lambda = \text{Inv}_{\phi_\lambda}(N)$ para todo $\lambda \in \Lambda$, então $\text{Con}(S_\lambda)$ não depende de λ .

Observação 3.1. No caso em que Λ é um intervalo compacto de \mathbb{R} e $\{\phi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família de fluxos sobre X que admite uma vizinhança isolante N de $S_\lambda = \text{Inv}_{\phi_\lambda}(N)$ para todo $\lambda \in \Lambda$, dizemos que os conjuntos invariantes isolados S_λ estão **relacionados por continuação**.

As provas das propriedades de Wazewski e de aditividade são apresentadas de modo simples em [10] e a demonstração da propriedade de continuação pode ser encontrada em [19].

Pela terceira propriedade da Proposição 3.1 temos que conjuntos relacionados por continuação possuem o mesmo índice contínuo homológico de Conley. Sendo assim, o cálculo do índice de um conjunto invariante isolado complicado pode muitas vezes ser reduzido a algum caso mais simples. Veja o seguinte exemplo que pode ser encontrado com mais detalhes em [10].

Exemplo 3.6. Considere a família de sistemas de equações diferenciais

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= y + (1 - \lambda)(x^2 - 1) \left(x + \frac{1}{2} \right) + \lambda(x - 1) \end{aligned} \quad (3.2)$$

parametrizada por $\lambda \in [0, 1]$.

Seja ϕ_λ o fluxo gerado pelo sistema (3.2) para cada $\lambda \in [0, 1]$. Para $k > 0$ suficientemente grande temos que $N = [-k, k] \times [-k, k]$ é uma vizinhança isolante de $S_\lambda = \text{Inv}_{\phi_\lambda}(N)$ para todo $\lambda \in [0, 1]$.

O objetivo deste exemplo é obter o índice contínuo homológico de Conley do conjunto S_0 . Como N é uma vizinhança isolante para todo S_λ , com $\lambda \in [0, 1]$, temos em particular que S_0 está relacionado por continuação com S_1 , portanto os índices homológicos $\text{Con}(S_0)$ e $\text{Con}(S_1)$ coincidem.

Mas observe que para $\lambda = 1$ o sistema (3.2) se reduz à

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= y + x - 1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

e, assim, o conjunto S_1 consiste apenas de um ponto de sela.

Com isso concluímos que

$$\text{Con}_q(S_0) = \text{Con}_q(S_1) = \begin{cases} \mathbb{Q} & , \text{ se } q = 1 \\ 0 & , \text{ se } q \neq 1 \end{cases}$$

3.2 Índice Discreto de Conley

O caso discreto não será similar ao caso contínuo, pois, como veremos mais adiante, o invariante usado para fluxos não servirá como invariante quando passamos ao estudo de aplicações contínuas. Sendo assim, precisaremos conhecer algumas ferramentas extras para chegar a uma definição do índice de Conley no caso discreto.

Primeiramente construiremos, a partir de um dado par-índice $P = (N, L)$ de S , uma função contínua f_P chamada aplicação-índice e em seguida consideraremos a classe de shift equivalência do par $(N/L, [f_P])$ como o índice discreto homotópico, sendo que N/L é o espaço pontuado gerado pelo par-índice P e $[f_P]$ é a classe de homotopia da aplicação-índice f_P .

E finalmente, por analogia ao caso contínuo, obteremos o índice discreto homológico como um elemento algébrico e, para isso, faremos uso da redução de Leray sobre um par que depende da aplicação-índice. Este elemento será constituído por um espaço vetorial graduado juntamente com um isomorfismo distinguido definido sobre este espaço.

3.2.1 Índice Discreto Homotópico de Conley

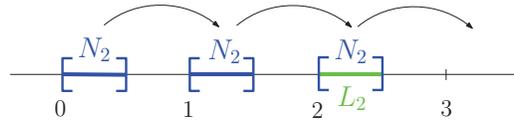
Para definir o índice discreto homotópico de Conley, precisamos extrair um invariante comum a quaisquer pares-índice associados a um mesmo conjunto invariante isolado de uma aplicação contínua.

A primeira tentativa natural, por analogia ao que fizemos para fluxos, seria considerar o tipo de homotopia dos espaços pontuados gerados por estes pares-índice. Porém, o exemplo abaixo (encontrado em [10]) mostra que, no caso discreto, diferentes pares-índice para um conjunto invariante isolado podem gerar espaços pontuados com tipos de homotopia distintos.

Exemplo 3.7. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 1$.*

Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere $L_n = [n, n + \frac{1}{2}]$ e $N_n = \bigcup_{i=0}^n L_i$. Veja a representação de L_n e N_n para $n = 2$ na Figura 3.5.

O par (N_n, L_n) é um par-índice para o conjunto \emptyset com relação a f para qualquer $n \in \mathbb{N}$. De fato,

Figura 3.5: Representação de L_2 e N_2

1. Se $n = 0$ então $\overline{N_n \setminus L_n} = \emptyset$ e, portanto, $\text{Inv}(\overline{N_n \setminus L_n}) = \emptyset$ segue por vacuidade.

Já no caso em que $n > 0$ temos que $\overline{N_n \setminus L_n} = N_{n-1}$. Como para todo $x \in \mathbb{R}$ vale que $f^n(x) \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$ e N_{n-1} é um conjunto limitado, obtemos que $\text{Inv}(\overline{N_n \setminus L_n}) = \text{Inv}(N_{n-1}) = \emptyset$.

Além disso, é claro que $\emptyset \subset \text{int}(\overline{N_n \setminus L_n})$. Logo $\overline{N_n \setminus L_n}$ é uma vizinhança isolante para o conjunto \emptyset .

2. $f(L_n) \cap N_n = L_{n+1} \cap N_n = \emptyset \subset L_n$.

3. Desde que

$$N_n \setminus L_n = \begin{cases} \emptyset & , \text{ se } n = 0 \\ N_{n-1} & , \text{ se } n > 0 \end{cases}$$

temos que

$$f(N_n \setminus L_n) = \begin{cases} \emptyset & , \text{ se } n = 0 \\ \bigcup_{i=1}^n L_i & , \text{ se } n > 0 \end{cases}$$

Portanto $f(N_n \setminus L_n) \subset N_n$.

Todavia, cada espaço pontuado N_n/L_n é homotopicamente equivalente a um conjunto de $n + 1$ pontos. Disto segue que o conjunto invariante isolado \emptyset admite infinitos pares-índice distintos que produzem espaços pontuados com diferentes tipos de homotopia.

Sendo assim, o invariante que utilizamos no caso contínuo não é independente da escolha de par-índice quando tratamos de aplicações contínuas. Com isso podemos perceber que considerar apenas o espaço pontuado N/L , onde $P = (N, L)$ é um par-índice para um conjunto invariante isolado S , não é o suficiente para obter um invariante de S no caso discreto. Por esta razão passaremos a considerar, a partir de agora, mais um elemento que podemos associar a S : a aplicação-índice f_P .

Definição 3.4. *Seja S um conjunto invariante isolado de uma aplicação contínua f . Se $P = (N, L)$ um par-índice para S então a aplicação contínua dada por*

$$f_P : N/L \rightarrow N/L$$

$$f_P([x]) = \begin{cases} [L] & , \text{ se } x \in L \\ [f(x)] & , \text{ se } x \in N \setminus L \end{cases}$$

é chamada de **aplicação-índice**.

Com a relação de shift equivalência que definiremos a seguir, veremos que o par $(N/L, f_P)$ é capaz de nos fornecer uma informação sobre os pares-índice de S que é intrínseca ao conjunto S , isto é, independe da escolha de (N, L) .

Definição 3.5. *Sejam Y e Z espaços pontuados e $[g] : Y \rightarrow Y$ e $[h] : Z \rightarrow Z$ classes de homotopia de aplicações que preservam ponto base. Dizemos que os pares $(Y, [g])$ e $(Z, [h])$ são **shift equivalentes** se existem aplicações preservando ponto base $r : Y \rightarrow Z$ e $s : Z \rightarrow Y$ e um número natural m tais que*

$$[r \circ g] = [h \circ r] \quad [s \circ h] = [g \circ s] \quad [s \circ r] = [g^m] \quad [r \circ s] = [h^m],$$

ou seja, se os diagramas

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & Y \\ r \downarrow & & \downarrow r \\ Z & \xrightarrow{h} & Z \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & Y \\ s \uparrow & & \uparrow s \\ Z & \xrightarrow{h} & Z \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g^m} & Y \\ r \downarrow & \nearrow s & \downarrow r \\ Z & \xrightarrow{h^m} & Z \end{array}$$

comutam quando consideramos as classes de homotopia das composições.

Veja agora o seguinte teorema apresentado por Mischaikow e Mrozek em [10]:

Teorema 3.2. *Se $P = (N, L)$ e $P' = (N', L')$ são pares-índice de um conjunto invariante isolado S com relação a uma aplicação contínua f , então os pares $(N/L, [f_P])$ e $(N'/L', [f_{P'}])$ são shift equivalentes, ou seja, possuem a mesma classe de shift equivalência.*

De acordo com o resultado anterior, a classe de shift equivalência de $(N/L, [f_P])$ independe da escolha do par-índice P que fazemos para um conjunto invariante isolado S e, sendo assim, depende apenas do comportamento da aplicação contínua f numa vizinhança de S .

Consideremos então a definição de índice discreto de Conley dada abaixo:

Definição 3.6. *Seja S um conjunto invariante isolado de uma aplicação contínua f . A classe de shift equivalência do par $(N/L, [f_P])$, onde f_P é a aplicação-índice associada a um par-índice $P = (N, L)$ de S , é chamada de **índice discreto (homotópico) de Conley** de S . Denotamos este índice por $h(S, f)$ ou simplesmente por $h(S)$.*

Devido a dificuldade de construir a classe de shift equivalência de uma classe de homotopia, vamos apresentar de forma breve dois exemplos de índice discreto de Conley.

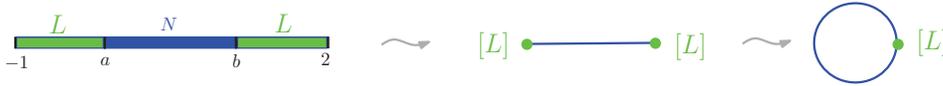
Exemplo 3.8. Vamos considerar novamente o caso particular da família quadrática em que μ é igual a 5, isto é, seja $F_5 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F_5(x) = 5x(1 - x)$.

Vimos no Exemplo 2.9 que o conjunto invariante isolado $S = \Lambda$ admite

$$P = (N, L) = ([-1, 2], ([-1, a] \cup [b, 2]))$$

como par-índice, sendo que $a, b \in F_5^{-1}(-1)$.

O espaço pontuado N/L , neste caso, é homotopicamente equivalente a S^1



e a aplicação-índice associada a P é dada por

$$(F_5)_P : N/L \rightarrow N/L$$

$$(F_5)_P([x]) = \begin{cases} [L] & , \text{ se } x \in L \\ [5x(1 - x)] & , \text{ se } x \in N \setminus L \end{cases}$$

Considere o conjunto de todas as aplicações homotópicas a f_P que denotamos por $[f_P]$. A classe de shift equivalência de $(N/L, [f_P])$ é o índice discreto de Conley de S .

O próximo exemplo, a **G-Ferradura**, trata-se de uma variação da Ferradura de Smale que estudamos na Seção 1.1.

Exemplo 3.9. Sejam Q o quadrado de \mathbb{R}^2 dado por $[0, 1] \times [0, 1]$ e $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação contínua que atua sobre Q segundo a composição dada pela Figura 3.6. Nesta figura, l é uma aplicação linear que contrai linhas horizontais e expande linhas verticais e g torce $l(Q)$ de modo que $g(l(Q))$ se assemelhe a uma letra G invertida.

A imagem inversa $F^{-1}(Q)$ que, na verdade, é igual a imagem inversa de dois retângulos verticais V_0 e V_1 , consiste de dois retângulos horizontais que nomeamos por H_0 e H_1 .

Considere o conjunto $S = \text{Inv}(Q)$ e mostremos que

$$P = (N, L) = (Q, \overline{Q \setminus H_0 \cup H_1})$$

constitui um par-índice para S .

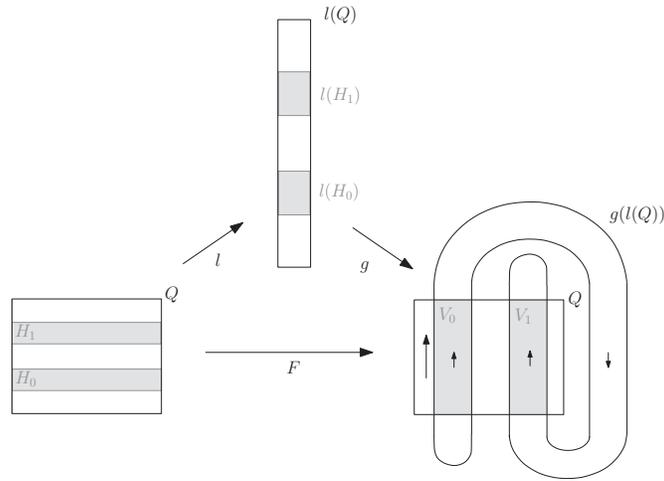


Figura 3.6: Ação de F sobre Q

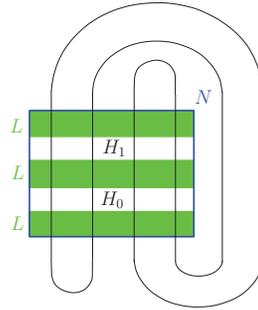


Figura 3.7: Par-índice para S

1. Precisamos garantir que $Inv(Q) = Inv(\overline{N \setminus L})$ e que $Inv(Q) \subset int(N \setminus L)$ para concluir que $\overline{N \setminus L}$ é uma vizinhança isolante de $Inv(Q)$.

Como $\overline{N \setminus L} \subset \overline{N} = N$, temos diretamente que $Inv(\overline{N \setminus L}) \subset Inv(N) = Inv(Q)$.

Provemos a inclusão contrária. Suponha que exista $x \in Inv(Q)$ tal que $x \notin Inv(\overline{N \setminus L})$. Então para algum $n \in \mathbb{Z}$ temos que $y = F^n(x) \notin \overline{N \setminus L} = H_0 \cup H_1$.

Neste caso, pela forma como F é definida, obtemos que $F(y) \notin Q$. Mas $F(y) = F^{n+1}(x) \in \mathcal{O}(x)$ e como $x \in Inv(Q)$, vale que $F(y) \in Q$. Absurdo!

Portanto $Inv(Q) \subset Inv(\overline{N \setminus L})$ e assim concluímos a igualdade.

Mostremos que $Inv(Q) \subset int(N \setminus L)$.

Se $x \notin int(N \setminus L)$ então $x \in L$ e, neste caso, a primeira iterada de x por F , ou no máximo a segunda, não pertence a Q . Disto segue que $x \notin Inv(Q)$, como queríamos.

2. $F(N \setminus L) \subset V_0 \cup V_1 \subset N$

3. $F(L) \cap N \subset L$

Portanto, $P = (N, L)$ é de fato um par-índice para S . A Figura 3.8 ilustra que o espaço pontuado N/L é homotopicamente equivalente ao espaço topológico $S^1 \vee S^1$, mais conhecido como figura oito.

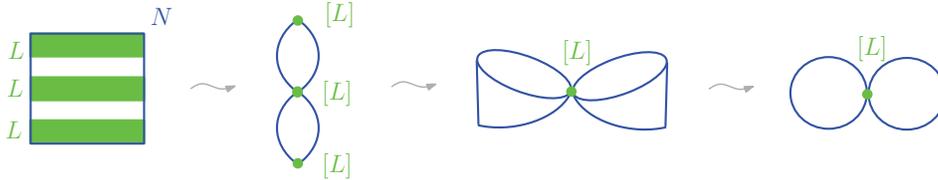


Figura 3.8: Tipo de homotopia do espaço pontuado N/L

Para finalizar, a aplicação-índice associada a P é dada por

$$F_P : N/L \rightarrow N/L$$

$$F_P([x]) = \begin{cases} [L] & , \text{ se } x \in L \\ [F(x)] & , \text{ se } x \in N \setminus L \end{cases}$$

e o índice discreto de Conley é igual a classe de shift equivalência de $(N/L, [F_P])$, onde $[F_P]$ é o conjunto de todas as aplicações homotópicas a F_P .

3.2.2 Índice Discreto Homológico de Conley

Assim como no caso contínuo, gostaríamos de construir um índice discreto algébrico para os conjuntos invariantes isolados, já que o cálculo de classes de shift equivalência é inviável.

Esta subseção é dedicada a esta construção.

Como vimos anteriormente, a cada par-índice $P = (N, L)$ de um conjunto invariante isolado S , associamos uma função contínua $f_P : N/L \rightarrow N/L$ que chamamos de aplicação-índice. Considerando a induzida homológica de f_P , obtemos um aplicação linear de grau zero

$$(f_P)_* : H_*(N/L) \rightarrow H_*(N/L)$$

entre as homologias sobre um corpo F do espaço pontuado N/L .

Logo o par $(H_*(N/L), (f_P)_*)$ consiste de um espaço vetorial graduado e de um endomorfismo de grau zero, isto é, $(H_*(N/L), (f_P)_*)$ é um objeto da categoria dos endomorfismos \mathcal{EE} que definimos na Subseção 1.2.4. Portanto, podemos aplicar sobre este par a redução de Leray.

Observe que a primeira entrada deste par, $H_*(N/L)$, é exatamente o que definimos como índice homológico de Conley no caso contínuo.

O próximo resultado, demonstrado por Mrozek em [11], nos diz que a redução de Leray aplicada ao par $(H_*(N/L), (f_P)_*)$ produz um objeto em $\mathcal{E}E$ que independe da escolha do par-índice $P = (N, L)$, ou seja, o objeto produzido é intrínseco ao conjunto invariante isolado.

Teorema 3.3. *Sejam $P = (N, L)$ e $P' = (N', L')$ pares-índice para um mesmo conjunto invariante isolado S de uma aplicação contínua f . Então $\mathcal{L}((H_*(N/L), (f_P)_*))$ e $\mathcal{L}((H_*(N'/L'), (f_{P'})_*))$ são objetos isomorfos da categoria $\mathcal{E}E$.*

Pela definição de morfismos da categoria $\mathcal{E}E$ que apresentamos na Subseção 1.2.4, dizer que $\mathcal{L}((H_*(N/L), (f_P)_*))$ e $\mathcal{L}((H_*(N'/L'), (f_{P'})_*))$ são isomorfos é afirmar que existem aplicações lineares de grau zero $\varphi : \mathcal{L}H_*(N/L) \rightarrow \mathcal{L}H_*(N'/L')$ e $\psi : \mathcal{L}H_*(N'/L') \rightarrow \mathcal{L}H_*(N/L)$ tais que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = Id$ e os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}H_*(N/L) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{L}H_*(N'/L') \\ \mathcal{L}(f_P)_* \downarrow & & \downarrow \mathcal{L}(f_{P'})_* \\ \mathcal{L}H_*(N/L) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{L}H_*(N'/L') \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{L}H_*(N'/L') & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{L}H_*(N/L) \\ \mathcal{L}(f_{P'})_* \downarrow & & \downarrow \mathcal{L}(f_P)_* \\ \mathcal{L}H_*(N'/L') & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{L}H_*(N/L) \end{array}$$

Portanto, uma boa definição para o índice discreto homológico de Conley é a que segue.

Definição 3.7. *Seja S um conjunto invariante isolado de uma aplicação contínua f . O par*

$$Con_*(S, f) := \mathcal{L}(H_*(N/L), (f_P)_*),$$

*onde $P = (N, L)$ é um par-índice de S , é chamado **índice discreto homológico de Conley** de S . Na maioria das vezes denotaremos $Con(S, f)$ simplesmente por $Con(S)$*

Observação 3.2. *Usualmente o índice discreto homológico de Conley de um conjunto invariante isolado S é obtido exatamente da forma que acabamos de definir: aplicando-se a redução de Leray na homologia do par $(C_*(N/L), (f_P)_\#)$, onde $P = (N, L)$ é um par-índice para S e f_P é a aplicação-índice associada a P . Porém é importante observar que se considerarmos a homologia da redução de Leray aplicada ao par $(C_*(N/L), (f_P)_\#)$, então obteremos o mesmo índice $Con(S)$. Esta inversão será utilizada algumas vezes neste trabalho.*

Pela Definição 3.7, o índice homológico de Conley no caso discreto trata-se de um espaço vetorial graduado e um isomorfismo distinguido. Costuma-se representar este espaço vetorial graduado por $H_*(S)$ e este isomorfismo por $\chi_*(S)$ ou, de forma mais simples, por $H(S)$ e $\chi(S)$ respectivamente. Assim, a notação que muitas vezes utilizaremos para o índice discreto

homológico de Conley será

$$\text{Con}(S) = (H(S), \chi(S)).$$

Vamos calcular o índice discreto homológico de Conley para alguns exemplos.

Exemplo 3.10. *Voltemos ao Exemplo 3.8 onde analisamos o índice discreto de Conley para $S = \Lambda$ com relação a aplicação $F_5(x) = 5x(1 - x)$. Por simplicidade, neste exemplo denotaremos F_5 por f .*

Nosso objetivo agora é calcular o índice discreto homológico de Conley para S . Para tanto, precisaremos aplicar a redução de Leray sobre o par $(H_(N/L), (f_P)_*)$ pela Definição 3.7.*

Pelo que vimos no Exemplo 3.8, o espaço pontuado N/L é homotopicamente equivalente a S^1 . Logo

$$H_q(N/L) = H_q(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Q} & , \text{ se } q = 1 \\ 0 & , \text{ se } q \neq 1 \end{cases}$$

e, conseqüentemente, basta analisarmos o par $(H_1(N/L), (f_P)_1)$.

A aplicação $(f_P)_1$ é dada por

$$\begin{aligned} (f_P)_1 : H_1(N/L) &\rightarrow H_1(N/L) \\ [a] + B_1(N/L) &\mapsto (f_P)_\#([a]) + B_1(N/L) \end{aligned}$$

pelo que vimos nas preliminares algébricas do primeiro capítulo.

Como $H_1(N/L) \approx \mathbb{Q}$, temos que $H_1(N/L)$ possui apenas um gerador que denotaremos por $[\alpha] := [\alpha] + B_1(N/L)$. Veja Figura 3.9.



Figura 3.9: Representação do gerador de $H_1(N/L)$

Precisamos descrever o comportamento de $(f_P)_1$ apenas sobre este gerador.

Pela definição de $(f_P)_\#$, temos que $(f_P)_\#([\alpha]) = f_P([\alpha])$ e, além disso, pela definição da aplicação-índice f_P , vale que $f_P([\alpha]) = [\alpha]$.

Portanto,

$$(f_P)_1([\alpha]) = (f_P)_\#([\alpha]) + B_1(N/L) = [\alpha] + B_1(N/L) = [\alpha],$$

donde segue que $(f_P)_1$ é a aplicação identidade.

Visto que a redução de Leray fixa todo par de espaço vetorial que vem acompanhado de um isomorfismo, pela Proposição 1.4, segue que

$$\mathcal{L}(H_1(N/L), (F_P)_1) = \mathcal{L}(\mathbb{Q}, Id) = (\mathbb{Q}, Id).$$

Com isso concluímos que o índice discreto homológico de Conley de S é dado por

$$Con_q(S) = \begin{cases} (\mathbb{Q}, Id) & , \text{ se } q = 1 \\ (0, 0) & , \text{ se } q \neq 1 \end{cases}$$

No exemplo seguinte exploraremos um pouco mais a Ferradura de Smale. Este exemplo pode ser encontrado sem tanta riqueza de detalhes nas referências [1], [11] e [15].

Exemplo 3.11. Considere a aplicação Ferradura de Smale F que estudamos na Seção 1.1.

No Exemplo 2.10 mostramos que o par

$$P = (N, L) = (Q, \overline{Q \setminus H_0 \cup H_1})$$

é um par-índice para o conjunto invariante isolado $S = \Lambda$.

Mais ainda, este par-índice que agora exibimos para Λ coincide com o par-índice que escolhemos para o conjunto invariante isolado $Inv(Q)$ contido na G -Ferradura, conforme o Exemplo 3.9. E naquele exemplo, vimos que o espaço pontuado N/L é homotopicamente equivalente a $S^1 \vee S^1$. Veja Figura 3.8.

Neste momento gostaríamos de obter o índice discreto homológico de Conley para S .

Precisamos, assim como no exemplo anterior, aplicar a redução de Leray sobre o par $(H_*(N/L), (F_P)_*)$. Mas uma vez que

$$H_q(N/L) = H_q(S^1 \vee S^1) = \begin{cases} \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} & , \text{ se } q = 1 \\ 0 & , \text{ se } q \neq 1 \end{cases},$$

basta nos preocuparmos com $q = 1$, ou seja, basta calcular

$$\mathcal{L}(H_1(N/L), (F_P)_1) = LI(LM(H_1(N/L), (F_P)_1)) = LI\left(\frac{H_1(N/L)}{gker(F_P)_1}, (F_P)'_1\right).$$

Para conhecer a aplicação linear

$$\begin{aligned} (F_P)_1 : H_1(N/L) &\rightarrow H_1(N/L) \\ [a] + B_1(N/L) &\mapsto (F_P)_\#([a]) + B_1(N/L) \end{aligned}$$

é suficiente entender o seu comportamento sobre os elementos de uma base de $H_1(N/L)$. E já que $H_1(N/L) \approx \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$, temos que $H_1(N/L)$ admite dois geradores que denotaremos por $[\alpha] := [\alpha] + B_1(N/L)$ e $[\beta] := [\beta] + B_1(N/L)$. Observe a representação de $[\alpha]$ e $[\beta]$ na Figura 3.10.

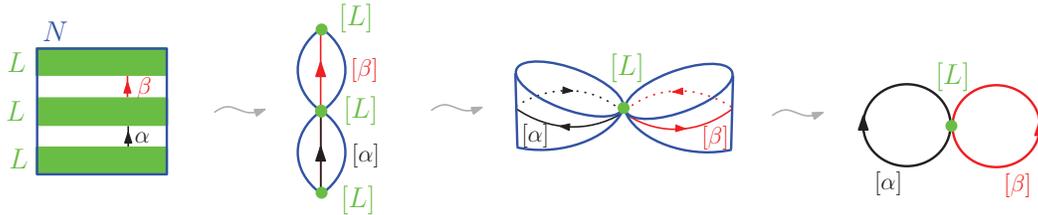


Figura 3.10: Representação dos geradores de $H_1(N/L)$

Pelo modo como $(F_P)_\#$ e F_P são definidas, obtemos que

$$(F_P)_\#([\alpha]) = F_P([\alpha]) = [F(\alpha)]$$

$$(F_P)_\#([\beta]) = F_P([\beta]) = [F(\beta)].$$

Portanto, para descobrir o comportamento de $(F_P)_1$ sobre a base $\{[\alpha], [\beta]\}$ de $H_1(N/L)$, basta aplicar F sobre α e β

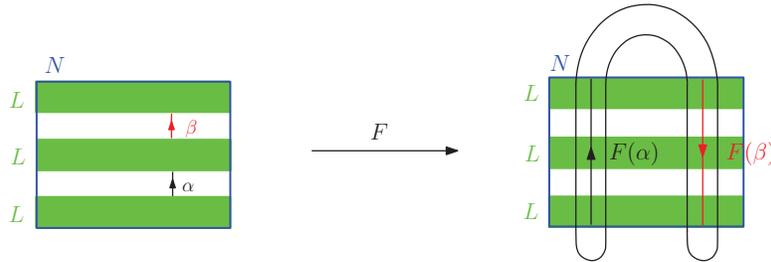


Figura 3.11: Aplicação de F sobre α e β

e, em seguida, tomar a classe de equivalência das imagens $F(\alpha)$ e $F(\beta)$ no espaço pontuado N/L como fizemos na Figura 3.12.

Com isto concluímos que as representações de $[F(\alpha)]$ e $[F(\beta)]$ como combinação linear de $[\alpha]$ e $[\beta]$ são

$$[F(\alpha)] = [\alpha] + [\beta] \quad e \quad [F(\beta)] = -[\alpha] - [\beta]$$

e então

$$(F_P)_1([\alpha]) = (F_P)_\#([\alpha]) + B_1(N/L) = ([\alpha] + [\beta]) + B_1(N/L) = [\alpha] + [\beta]$$

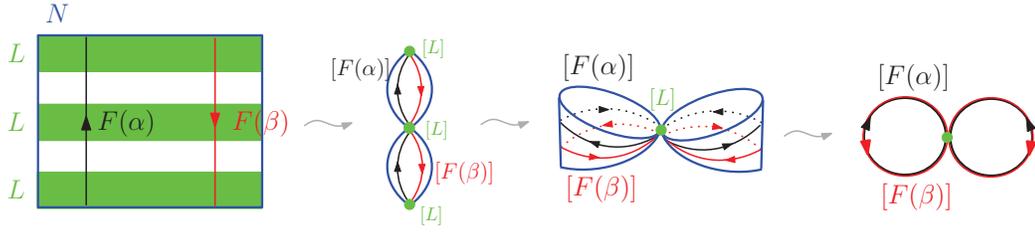


Figura 3.12: Representação de $F(\alpha)$ e $F(\beta)$

$$(F_P)_1([\beta]) = (F_P)_\#([\beta]) + B_1(N/L) = (-[\alpha] - [\beta]) + B_1(N/L) = -[\alpha] - [\beta]$$

Sendo assim, a aplicação linear $(F_P)_1$ pode ser representada pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Note que $A^2 = 0$ e, portanto, $gker(F_P)_1 = H_1(N/L)$. Disto segue que

$$\frac{H_1(N/L)}{gker(F_P)_1} \approx 0$$

e, neste caso,

$$(F_P)'_1 : \frac{H_1(N/L)}{gker(F_P)_1} \rightarrow \frac{H_1(N/L)}{gker(F_P)_1}$$

é a aplicação nula.

Logo

$$\mathcal{L}(H_1(N/L), (F_P)_1) = LI(0, 0) = (0, 0)$$

sendo que a última igualdade, $LI(0, 0) = (0, 0)$, vem do fato que $gim(0) = 0$ (basta tomar a sequência constante $\{x_n\}_{n=0}^\infty = \{0\}$ na definição de imagem generalizada).

Concluimos finalmente que o índice discreto de Conley de S é trivial, isto é,

$$Con_q(S) = (0, 0)$$

para todo $q \in \mathbb{N}$.

Vamos finalizar com um exemplo onde o cálculo do índice discreto homológico de Conley é um pouco mais complicado. Este exemplo pode ser encontrado de forma mais sucinta nas referências [11] e [15].

Exemplo 3.12. Seja F a aplicação G -Ferradura definida no Exemplo 3.9.

Naquele exemplo mostramos que

$$P = (N, L) = (Q, \overline{Q \setminus H_0 \cup H_1})$$

constitui um par-índice para o conjunto invariante isolado $S = \text{Inv}(Q)$. E, além disso, vimos que o espaço pontuado N/L tem o mesmo tipo de homotopia que $S^1 \vee S^1$. Veja novamente a Figura 3.8.

Sendo assim,

$$H_q(N/L) = H_q(S^1 \vee S^1) = \begin{cases} \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} & , \text{ se } q = 1 \\ 0 & , \text{ se } q \neq 1 \end{cases}$$

e como vamos aplicar a redução de Leray sobre o par $(H_*(N/L), (F_P)_*)$ para encontrar o índice discreto homológico de Conley de S , devemos nos preocupar apenas com $q = 1$.

Já que a aplicação

$$\begin{aligned} (F_P)_1 : H_1(N/L) &\rightarrow H_1(N/L) \\ [a] + B_1(N/L) &\mapsto (F_P)_\#([a]) + B_1(N/L) \end{aligned}$$

é linear, basta conhecermos seu comportamento sobre alguma base de $H_1(N/L)$. Visto que $H_1(N/L) \approx \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$, temos que $H_1(N/L)$ possui dois geradores que nomearemos por $[\alpha] := [\alpha] + B_1(N/L)$ e $[\beta] := [\beta] + B_1(N/L)$. Veja a Figura 3.10.

Analogamente ao exemplo anterior concluímos que

$$(F_P)_1([\alpha]) = [F(\alpha)] + B_1(N/L) = [\alpha] + [\beta]$$

$$(F_P)_1([\beta]) = [F(\beta)] + B_1(N/L) = [\alpha] + [\beta]$$

apenas analisando as figuras 3.13 e 3.14 abaixo:

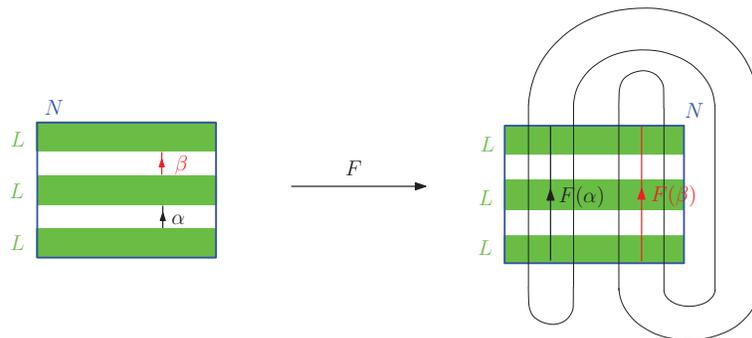
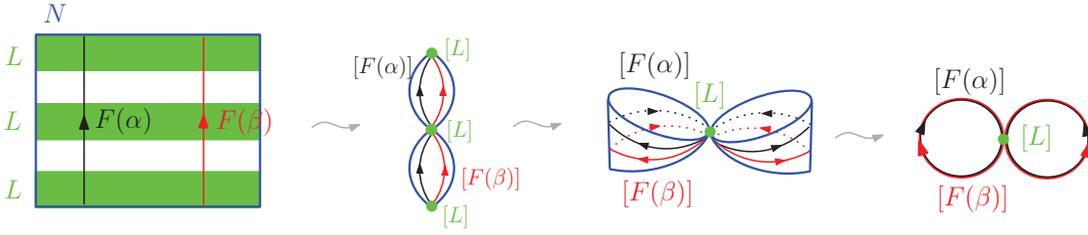


Figura 3.13: Aplicação de F sobre α e β


 Figura 3.14: Representação de $F(\alpha)$ e $F(\beta)$

Logo a representação matricial de $(F_P)_1$ é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Uma vez que $A^n = 2^{n-1}A$, obtemos que $gker(F_P)_1 = ker(F_P)_1$.

Além disso, considerando o isomorfismo $H_1(N/L) \approx \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$, podemos dizer que $ker(F_P)_1 \subset H_1(N/L)$ é gerado pelo vetor $(-1, 1) \in \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$. Logo $gker(F_P)_1 = \langle (-1, 1) \rangle$, onde $\langle u \rangle$ representa o subespaço gerado por u .

Convenientemente, também pela identificação de $H_1(N/L)$ com $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$, vamos considerar para $H_1(N/L)$ a base $\{(1, 0), (-1, 1)\}$.

Desta forma temos os seguintes isomorfismos:

$$\frac{H_1(N/L)}{gker(F_P)_1} \approx \frac{\langle (1, 0), (-1, 1) \rangle}{\langle (-1, 1) \rangle} \approx \langle (1, 0) \rangle. \quad (3.4)$$

A redução de Leray aplicada ao par $(H_1(N/L), (F_P)_1)$ resulta em

$$\mathcal{L}(H_1(N/L), (F_P)_1) = LI(LM(H_1(N/L), (F_P)_1)) = LI\left(\frac{H_1(N/L)}{gker(F_P)_1}, (F_P)'_1\right),$$

logo precisamos descrever a aplicação $(F_P)'_1$ que é definida por

$$(F_P)'_1 : \frac{H_1(N/L)}{gker(F_P)_1} \rightarrow \frac{H_1(N/L)}{gker(F_P)_1} \\ [x] \mapsto [(F_P)_1(x)]$$

Pelas identificações em 3.4, podemos escrever $(F_P)'_1$ da seguinte forma:

$$(F_P)'_1 : \langle (1, 0) \rangle \rightarrow \frac{\langle (1, 0), (-1, 1) \rangle}{\langle (-1, 1) \rangle} \\ a(1, 0) \mapsto (F_P)_1(a(1, 0)) + \langle (-1, 1) \rangle$$

Visto que $(F_P)_1$ é uma aplicação linear, é suficiente estudar o comportamento de $(F_P)'_1$ sobre o gerador $(1, 0)$.

Temos que $(F_P)_1(1, 0) = (1, 1)$ segundo a representação matricial A . Mas $(1, 1) = 2(1, 0) + 1(-1, 1)$ e, conseqüentemente,

$$(F_P)'_1(1, 0) = (F_P)_1(1, 0) + \langle (-1, 1) \rangle = [2(1, 0) + 1(-1, 1)] + \langle (-1, 1) \rangle = 2(1, 0) + \langle (-1, 1) \rangle.$$

Como $2(1, 0) + \langle (-1, 1) \rangle \in \frac{\langle (1, 0), (-1, 1) \rangle}{\langle (-1, 1) \rangle}$ representa o elemento $2(1, 0) \in \langle (1, 0) \rangle$, pelo segundo isomorfismo de 3.4, obtemos que

$$(F_P)'_1(1, 0) = 2(1, 0),$$

ou seja,

$$(F_P)'_1 = 2Id.$$

Portanto,

$$\left(\frac{H_1(N/L)}{\text{gker}(F_P)_1}, (F_P)'_1 \right) \approx (\langle (1, 0) \rangle, 2Id) \approx (\mathbb{Q}, 2Id).$$

Desde que $\text{gim}(2Id) = \mathbb{Q}$, pois dado $x \in \mathbb{Q}$ basta tomar a seqüência $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ \frac{x}{2^n} \right\}_{n=0}^{\infty}$ para que $(2Id)^n(x_n) = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, concluímos que

$$\mathcal{L}(H_1(N/L), (F_P)_1) = LI(\mathbb{Q}, 2Id) = (\mathbb{Q}, 2Id).$$

Logo, o índice discreto homológico de Conley de S é dado por

$$\text{Con}_q(S) = \begin{cases} (\mathbb{Q}, 2Id) & , \text{ se } q = 1 \\ (0, 0) & , \text{ se } q \neq 1 \end{cases}$$

Analogamente ao caso contínuo, temos que o índice discreto homológico de Conley de um conjunto invariante isolado satisfaz três importantes propriedades que foram demonstradas por Mrozek em [11]. Veja a seguinte proposição:

Proposição 3.2. *Seja S um conjunto invariante isolado de uma aplicação contínua f .*

1. **Propriedade de Wazewski:** *Se $S = \emptyset$ então $\text{Con}(S) = 0$.*
2. **Propriedade de aditividade:** *Se $S = S_1 \cup S_2$, onde S_1 e S_2 são conjuntos invariantes isolados disjuntos, então $H(S) \approx H(S_1) \oplus H(S_2)$ e $\chi(S)$ é conjugada a $\chi(S_1) \oplus \chi(S_2)$.*

3. **Propriedade de continuação:** Se $\{f_\lambda : X \rightarrow X\}_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família de aplicações contínuas parametrizada por um intervalo compacto $\Lambda \subset \mathbb{R}$ e N é uma vizinhança isolante de $S_\lambda = \text{Inv}_{f_\lambda}(N)$ para todo $\lambda \in \Lambda$, então $\text{Con}(S_\lambda)$ não depende de λ .

Observação 3.3. Se $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família de aplicações contínuas parametrizada por um intervalo compacto $\Lambda \subset \mathbb{R}$ e existe uma vizinhança isolante N de $S_\lambda = \text{Inv}_{f_\lambda}(N)$ para todo $\lambda \in \Lambda$, então dizemos que os conjuntos invariantes isolados S_λ estão **relacionados por continuação**.

Capítulo 4

Matriz de Conexão no Caso Contínuo

Seja $\mathcal{M} = \{M_\pi\}_{\pi \in P}$ uma decomposição de Morse para um conjunto invariante isolado S de um fluxo ϕ .

A partir de uma dada filtração-índice associada à \mathcal{M} , definiremos uma trança de espaços vetoriais graduados cujos elementos são as homologias dos índices contínuos de Conley dos conjuntos de Morse M_π . Esta trança será chamada de trança do índice contínuo homológico.

Em seguida, poderemos apresentar a matriz de conexão para \mathcal{M} no caso contínuo como uma matriz que tem como entradas aplicações lineares definidas entre os índices contínuos homológicos de Conley dos conjuntos M_π e que, de alguma forma, codifica as informações algébricas da trança do índice contínuo homológico.

A importância da matriz de conexão no estudo da dinâmica de um fluxo está no fato de que suas entradas não nulas podem detectar a existência de órbitas conectantes entre conjuntos de Morse.

Primeiramente conheceremos a matriz de conexão para uma decomposição em par atrator-repulsor. E tendo em vista que uma decomposição de Morse contém vários pares atrator-repulsor, temos que a generalização da matriz de conexão para uma decomposição de Morse acontece de modo natural.

4.1 Matriz de Conexão para Decomposição em Par Atrator-Repulsor

Considere S um conjunto invariante isolado de um fluxo ϕ e (A, A^*) um par atrator-repulsor para S .

Como comentamos na Seção 2.2, existe um trio-índice (N_0, N_1, N_2) associado a (A, A^*)

e, portanto, podemos considerar as aplicações

$$0 \rightarrow N_1/N_0 \xrightarrow{i} N_2/N_0 \xrightarrow{p} N_2/N_1 \rightarrow 0 \quad (4.1)$$

onde a inclusão i e a projeção p são definidas respectivamente por

$$i([x]_{N_0}^{N_1}) = [x]_{N_0}^{N_2} \quad \text{e} \quad p([x]_{N_0}^{N_2}) = [x]_{N_1}^{N_2}.$$

A notação $[x]_{N_j}^{N_k}$ foi introduzida neste momento para denotar a classe de equivalência de $x \in N_k$ segundo a relação de equivalência definida em (3.1) que reduz o subconjunto N_j a um único ponto.

Passando ao nível de cadeias, obtemos de (4.1) a seguinte sequência curta exata de complexos de cadeias

$$0 \rightarrow C_*(N_1/N_0) \xrightarrow{i_*} C_*(N_2/N_0) \xrightarrow{p_*} C_*(N_2/N_1) \rightarrow 0$$

que, de acordo com o Teorema 1.5, induz a sequência longa exata em homologia dada por

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(N_1/N_0) \xrightarrow{i_n} H_n(N_2/N_0) \xrightarrow{p_n} H_n(N_2/N_1) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(N_1/N_0) \xrightarrow{i_{n-1}} \dots \quad (4.2)$$

Já que (N_1, N_0) , (N_2, N_0) e (N_2, N_1) são pares-índice de A , S e A^* respectivamente, temos, pela definição do índice contínuo homológico de Conley, que a sequência (4.2) pode ser escrita na forma

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{i_n} H_n(S) \xrightarrow{p_n} H_n(A^*) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_{n-1}} \dots \quad (4.3)$$

Definição 4.1. *A sequência longa exata (4.3), muitas vezes escrita na forma*

$$\dots \xrightarrow{\partial} H(A) \xrightarrow{i} H(S) \xrightarrow{p} H(A^*) \xrightarrow{\partial} H(A) \xrightarrow{i} \dots,$$

*é chamada de **sequência do índice contínuo homológico** associada ao par atrator-repulsor (A, A^*) e a aplicação conectante $\partial : H(A^*) \rightarrow H(A)$ recebe, neste caso, o nome de **aplicação bordo definida pelo fluxo**.*

Consideremos agora os seguintes espaços vetoriais graduados

$$C\Delta(A) = H(A)$$

$$C\Delta(A^*) = H(A^*)$$

$$C\Delta(S) = H(A) \oplus H(A^*)$$

Uma aplicação $\Delta : C\Delta(S) \rightarrow C\Delta(S)$ vai ser representada na forma matricial como

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta(A) & \Delta(A, A^*) \\ \Delta(A^*, A) & \Delta(A^*) \end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta(A) : C\Delta(A) &\rightarrow C\Delta(A) & \Delta(A, A^*) : C\Delta(A^*) &\rightarrow C\Delta(A) \\ \Delta(A^*, A) : C\Delta(A) &\rightarrow C\Delta(A^*) & \Delta(A^*) : C\Delta(A^*) &\rightarrow C\Delta(A^*) \end{aligned}$$

Dado um elemento $z \in C\Delta(S)$ temos que $z = x + y$, com $x \in H(A)$ e $y \in H(A^*)$. A imagem de z pela aplicação Δ é igual a $\Delta(z) = \bar{x} + \bar{y} \in H(A) \oplus H(A^*)$, sendo que

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta(A) & \Delta(A, A^*) \\ \Delta(A^*, A) & \Delta(A^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta(A)(x) + \Delta(A, A^*)(y) \\ \Delta(A^*, A)(x) + \Delta(A^*)(y) \end{pmatrix}$$

Tomemos Δ de modo que $\Delta(A)$, $\Delta(A^*, A)$ e $\Delta(A^*)$ sejam aplicações nulas e $\Delta(A, A^*)$ seja a aplicação bordo definida pelo fluxo ∂ .

Com tal escolha temos que Δ é uma aplicação bordo, ou seja, todas as entradas são de grau -1 e $\Delta \circ \Delta = 0$. Portanto $(C\Delta(S), \Delta)$ é um complexo de cadeias que, restringido apropriadamente, gera os subcomplexos de cadeias $(C\Delta(A), 0)$ e $(C\Delta(A^*), 0)$.

A partir destes complexos de cadeias podemos construir a seguinte sequência curta exata de complexos de cadeias

$$0 \rightarrow C\Delta(A) \xrightarrow{i} C\Delta(S) \xrightarrow{p} C\Delta(A^*) \rightarrow 0$$

onde a inclusão i e a projeção p são dadas por

$$\begin{aligned} i : H(A) &\rightarrow H(A) \oplus H(A^*) \\ x &\mapsto x + 0 = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p : H(A) \oplus H(A^*) &\rightarrow H(A^*) \\ x + y &\mapsto y \end{aligned}$$

Esta sequência curta exata induz a seguinte sequência longa exata em homologia

$$\dots \xrightarrow{\bar{\partial}} H\Delta(A) \xrightarrow{\bar{i}} H\Delta(S) \xrightarrow{\bar{p}} H\Delta(A^*) \xrightarrow{\bar{\partial}} H\Delta(A) \xrightarrow{\bar{i}} \dots \quad (4.4)$$

sendo que $H\Delta(A)$, $H\Delta(S)$ e $H\Delta(A^*)$ denotam as homologias dos complexos de cadeias $(C\Delta(S), \Delta)$, $(C\Delta(A), 0)$ e $(C\Delta(A^*), 0)$ respectivamente.

Sendo assim, conseguimos duas sequências longas exatas em homologia: a sequência do índice contínuo homológico apresentada na Definição 4.1 e a sequência (4.4) construída a partir da matriz Δ . Afirmamos que tais sequências são isomorfas.

De fato, primeiramente observe que as homologias $H\Delta(A)$ e $H\Delta(A^*)$ são respectivamente isomorfas aos índices contínuos homológicos de Conley $H(A)$ e $H(A^*)$, pois para cada $n \in \mathbb{N}$

$$H_n\Delta(A) = \frac{\ker \Delta_n(A)}{\text{im} \Delta_{n+1}(A)} = \frac{\ker 0}{\text{im} 0} = \frac{H_n(A)}{0} \approx H_n(A)$$

$$H_n\Delta(A^*) = \frac{\ker \Delta_n(A^*)}{\text{im} \Delta_{n+1}(A^*)} = \frac{\ker 0}{\text{im} 0} = \frac{H_n(A^*)}{0} \approx H_n(A^*)$$

Além disso, o complexo de cadeias $(C\Delta(S), \Delta)$ também possui homologia $H\Delta(S)$ isomorfa ao índice contínuo homológico de Conley $H(S)$. Veja a proposição a seguir.

Proposição 4.1. *Seja $(C\Delta(S), \Delta)$ o complexo de cadeias formado pelo espaço vetorial graduado*

$$C\Delta(S) = H(A) \oplus H(A^*)$$

e pelo operador bordo

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então a homologia de $(C\Delta(S), \Delta)$ e o índice contínuo homológico de Conley de S são isomorfos, ou seja,

$$H\Delta(S) \approx H(S).$$

Demonstração: Por definição de homologia de um complexo de cadeias,

$$H_n\Delta(S) = \frac{\ker \Delta_n}{\text{im} \Delta_{n+1}}$$

e analisando a aplicação Δ obtemos que

$$\ker \Delta_n = H_n(A) \oplus \ker \partial_n \quad \text{e} \quad \text{im} \Delta_{n+1} = 0 \oplus \text{im} \partial_{n+1} \approx \text{im} \partial_{n+1}.$$

Sendo assim

$$H_n\Delta(S) \approx \frac{H_n(A) \oplus \ker \partial_n}{\text{im} \partial_{n+1}}$$

e como

$$\frac{H_n(A) \oplus \ker \partial_n}{\operatorname{im} \partial_{n+1}} \approx \frac{H_n(A)}{\operatorname{im} \partial_{n+1}} \oplus \ker \partial_n$$

por uma aplicação natural, concluímos que

$$H_n \Delta(S) \approx \frac{H_n(A)}{\operatorname{im} \partial_{n+1}} \oplus \ker \partial_n \quad (4.5)$$

Por outro lado, temos a sequência do índice contínuo homológico

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{i_n} H_n(S) \xrightarrow{p_n} H_n(A^*) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_{n-1}} \dots$$

Usando o Teorema do Núcleo e Imagem e a exatidão da sequência do índice contínuo homológico obtemos que

$$\dim H_n(S) = \dim \ker p_n + \dim \operatorname{im} p_n = \dim \operatorname{im} i_n + \dim \operatorname{im} p_n = \dim(\operatorname{im} i_n \oplus \operatorname{im} p_n).$$

Uma vez que estamos tratando de espaços vetoriais de dimensão finita, concluímos da última igualdade que

$$H_n(S) \approx \operatorname{im} i_n \oplus \operatorname{im} p_n \quad (4.6)$$

Logo, por (4.5) e (4.6), basta mostrar que

$$\frac{H_n(A)}{\operatorname{im} \partial_{n+1}} \approx \operatorname{im} i_n \quad \text{e} \quad \ker \partial_n \approx \operatorname{im} p_n$$

para concluir que

$$H_n \Delta(S) \approx H_n(S) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

O segundo isomorfismo desejado é imediato pela exatidão da sequência do índice contínuo homológico.

Já o primeiro isomorfismo segue desta exatidão junto com o Primeiro Teorema do Isomorfismo. De fato, utilizando estas ferramentas obtemos que

$$\operatorname{im} i_n \approx \frac{H_n(A)}{\ker i_n} = \frac{H_n(A)}{\operatorname{im} \partial_{n+1}}.$$

■

Portanto, com a boa escolha da matriz Δ , obtivemos a sequência longa exata (4.4) que é isomorfa à sequência do índice contínuo homológico. Por conta deste isomorfismo, a matriz Δ recebe um nome especial:

Definição 4.2. *Sejam S um conjunto invariante isolado de um fluxo ϕ e (A, A^*) um par atrator-repulsor para S . Considere também o espaço vetorial graduado*

$$C\Delta(S) = H(A) \oplus H(A^*)$$

e a aplicação linear $\Delta : C\Delta(S) \rightarrow C\Delta(S)$ definida por

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde ∂ é a aplicação bordo definida por ϕ .

A matriz Δ é chamada de **matriz de conexão para a decomposição em par atrator-repulsor** (A, A^*) de S .

Sendo assim, a partir da matriz de conexão Δ para uma decomposição em par atrator-repulsor (A, A^*) , somos capazes de reconstruir a sequência do índice contínuo homológico associada à (A, A^*) a menos de um isomorfismo de sequências exatas. Com isso podemos afirmar que a matriz Δ carrega todas as informações algébricas desta sequência e, por esta razão, dizemos que a matriz de conexão para um par atrator-repulsor codifica a sequência do índice contínuo homológico associada a este par.

Um dos nossos principais interesses é entender como a matriz de conexão e o índice de Conley podem auxiliar na descrição dinâmica de um dado fluxo ϕ sobre um conjunto invariante isolado S . Vamos apresentar alguns resultados referentes a essa questão.

Proposição 4.2. *Sejam S um conjunto invariante isolado de um fluxo ϕ e (A, A^*) um par atrator-repulsor para S .*

Se uma das alternativas abaixo ocorrer:

1. *a aplicação bordo ∂ definida por ϕ é não nula*
2. *$H(S)$ não é isomorfo à $H(A) \oplus H(A^*)$*

então $C(A, A^) \neq \emptyset$.*

Demonstração: Provaremos esta afirmação pela contrapositiva.

Se $C(A, A^*) = \emptyset$ então o conjunto invariante isolado S se escreve como a união disjunta do atrator A com seu repulsor dual A^* . Neste caso, segue diretamente da propriedade de aditividade do índice contínuo homológico de Conley, que $H(S) \approx H(A) \oplus H(A^*)$.

Com isso, a sequência do índice contínuo homológico se torna

$$\dots \xrightarrow{\partial} H(A) \xrightarrow{i} H(A) \oplus H(A^*) \xrightarrow{p} H(A^*) \xrightarrow{\partial} H(A) \xrightarrow{i} \dots$$

e, portanto, $\ker \partial = \text{im } p = H(A^*)$, ou seja, $\partial \equiv 0$. ■

Vamos aplicar o resultado anterior para concluir sobre a existência de órbita conectante entre um ponto repulsor e um ponto de sela no exemplo a seguir. Para mais detalhes sobre este exemplo consulte a referência [10].

Exemplo 4.1. *Neste exemplo calcularemos os índices contínuos homológicos de Conley sobre o corpo \mathbb{Z}_2 .*

Considere a família de sistemas de equações diferenciais

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= 3y + (\lambda - x^2) \end{aligned} \tag{4.7}$$

parametrizada por $\lambda \in [-1, 1]$.

Para $\lambda \in [-1, 0)$, o sistema (4.7) não possui pontos de equilíbrio. Já no caso em que $\lambda = 0$, (4.7) contém um único ponto de equilíbrio dado por $(0, 0)$, enquanto para $\lambda \in (0, 1]$ este sistema admite dois pontos de equilíbrio: $p_\lambda = (-\sqrt{\lambda}, 0)$ e $q_\lambda = (\sqrt{\lambda}, 0)$.

Nosso objetivo é mostrar que para $\lambda = 1$ existe pelo menos uma órbita de conexão ligando $q_1 = (1, 0)$ à $p_1 = (-1, 0)$.

Seja ϕ_λ o fluxo gerado pelo sistema (4.7) para cada $\lambda \in [-1, 1]$.

Se k é um número positivo suficientemente grande então $N = [-k, k] \times [-k, k]$ é uma vizinhança isolante de $S_\lambda = \text{Inv}_{\phi_\lambda}(N)$ que contém os pontos p_λ e q_λ para todo $\lambda \in [-1, 1]$. Portanto os conjuntos invariantes isolados S_λ estão todos relacionados por continuação e disto segue, pela propriedade de continuação do índice contínuo homológico de Conley, que os índices homológicos $H(S_{-1})$ e $H(S_1)$ coincidem. Mas $S_{-1} = \emptyset$ e daí podemos concluir, usando a propriedade de Wazewski, que $H(S_1) = H(S_{-1}) = 0$, ou seja, o índice contínuo homológico de Conley de S_1 é trivial.

Podemos decompor o conjunto invariante isolado S_1 no par atrator-repulsor $A = \{p_1\}$ e $A^ = \{q_1\}$. Vamos calcular os índice homológicos de Conley dos conjuntos A e A^* .*

Para isso basta linearizar o sistema (4.7) no parâmetro $\lambda = 1$ em torno de p_1 e q_1 e assim obtemos que p_1 comporta-se como uma sela e q_1 como um nó repulsor. Por esta razão, os índices de $A = \{p_1\}$ e $A^ = \{q_1\}$ são dados por:*

$$H_i(A) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & , \text{ se } i = 1 \\ 0 & , \text{ se } i \neq 1 \end{cases} \quad e \quad H_i(A^*) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & , \text{ se } i = 2 \\ 0 & , \text{ se } i \neq 2 \end{cases}$$

Neste caso, podemos utilizar a Proposição 4.2 de duas formas para concluir que o conjunto

de órbitas que conectam q_1 à p_1 é não vazio.

A primeira delas é observando que $H(S_1) = 0$ não é isomorfo à soma direta $H(A) \oplus H(A^*)$ e, assim, pelo segundo item da Proposição 4.2 temos que $C(A, A^*) \neq \emptyset$.

Outra forma é considerar a sequência do índice contínuo homológico associada à (A, A^*) que, neste exemplo, se reduz à

$$\begin{array}{ccccccc} H_2(S_1) & \xrightarrow{p_2} & H_2(A^*) & \xrightarrow{\partial_2} & H_1(A) & \xrightarrow{i_1} & H_1(S_1) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & & \mathbb{Z}_2 & & \mathbb{Z}_2 & & 0 \end{array}$$

Pela exatidão desta sequência obtemos que $\partial_2 : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ é um isomorfismo. Portanto, a aplicação bordo $\partial = \{\partial_i\}$ definida pelo fluxo ϕ_1 é não nula, donde segue novamente que $C(A, A^*) \neq \emptyset$ pelo primeiro item da Proposição 4.2.

O exemplo anterior é, na verdade, um caso particular do seguinte corolário:

Corolário 4.1. *Sejam S um conjunto invariante isolado de um fluxo ϕ e (A, A^*) um par atrator-repulsor para S .*

Se $Con(S) = 0$ e se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $Con_n(A)$ e $Con_{n+1}(A^)$ não se anulam concomitantemente, então $C(A, A^*) \neq \emptyset$.*

Demonstração: Segue diretamente do segundo item da Proposição 4.2. ■

Com este corolário concluímos, por exemplo, que sempre existe órbita de conexão entre um ponto de sela e um ponto atrator, ou entre um ponto de sela e um ponto repulsor, desde que estes pontos formem um par atrator-repulsor para um conjunto invariante isolado cujo índice contínuo homológico de Conley é trivial.

Porém às vezes nos deparamos com casos em que $\partial \equiv 0$ e $H(S) \approx H(A) \oplus H(A^*)$. Nesta situação, não temos condições de utilizar a Proposição 4.2 para concluir sobre a existência de órbitas conectantes entre o repulsor A^* e o atrator A como fizemos anteriormente. Como exemplo para tal situação, basta considerar um fluxo que satisfaz as hipóteses do resultado abaixo:

Proposição 4.3. *Sejam S um conjunto invariante isolado de um fluxo ϕ e (A, A^*) um par atrator-repulsor para S .*

Se existir um número natural n tal que

$$Con_q(A) = \begin{cases} H_q(A) & , \text{ se } q = n \\ 0 & , \text{ se } q \neq n \end{cases} \quad e \quad Con_q(A^*) = \begin{cases} H_q(A^*) & , \text{ se } q = n \\ 0 & , \text{ se } q \neq n \end{cases}$$

então $\partial \equiv 0$ e $H(S) \approx H(A) \oplus H(A^)$.*

Demonstração: Seja $q \in \mathbb{N}$ arbitrário. Pelas hipóteses feitas sobre os índices de Conley de A e A^* , temos que $H_q(A^*) = 0$ ou $H_{q-1}(A) = 0$ e, em ambos os casos, concluímos que $\partial_q : H_q(A^*) \rightarrow H_{q-1}(A)$ deve ser a aplicação nula.

Portanto $\partial_q \equiv 0$ para qualquer $q \in \mathbb{N}$, isto é, $\partial \equiv 0$.

Consequentemente, a aplicação $\Delta : H(A) \oplus H(A^*) \rightarrow H(A) \oplus H(A^*)$ é representada pela matriz nula e assim

$$H_q(S) \approx H_q \Delta(S) = \frac{\ker \Delta_q}{\text{im } \Delta_{q+1}} \approx H_q(A) \oplus H_q(A^*)$$

para todo $q \in \mathbb{N}$, ou seja, $H(S) \approx H(A) \oplus H(A^*)$. ■

Sendo assim, com os resultados obtidos, não podemos utilizar a aplicação bordo ∂ (e portanto a matriz de conexão Δ) e o índice contínuo homológico de Conley para detectar conexões entre singularidades que possuem o mesmo índice, como por exemplo, alguns tipos de conexão de selas.

4.2 Matriz de Conexão para Decomposição de Morse

O procedimento que utilizaremos para obter a definição de matriz de conexão para uma decomposição de Morse é análogo ao realizado na Seção 4.1, onde construímos uma matriz de conexão para o caso particular de uma decomposição em par atrator-repulsor.

Mais especificamente, no caso em que uma decomposição em par atrator-repulsor (A, A^*) de um conjunto invariante isolado S foi dada, obtivemos uma sequência longa exata em homologia, chamada sequência do índice contínuo homológico, que relaciona os índices contínuos homológicos de Conley dos conjuntos A , A^* e S . Em seguida, a partir de uma certa matriz de aplicações Δ , conseguimos uma outra sequência longa exata de homologias que é isomorfa à sequência do índice contínuo homológico. À essa matriz demos o nome de matriz de conexão para o par atrator-repulsor (A, A^*) .

Agora, no caso em que uma decomposição de Morse $\mathcal{M} = \{M_\pi\}$ é fornecida para S , nosso primeiro objetivo é obter uma trança de espaços vetoriais graduados que relaciona os índices contínuos homológicos de Conley de S e de todos os conjuntos de Morse M_π . Esta trança receberá o nome de trança do índice contínuo homológico, pois trata-se de uma generalização da sequência do índice contínuo homológico.

Em seguida, dada uma matriz de aplicações Δ com algumas características, construiremos uma outra trança de espaços vetoriais graduados e, por fim, diremos que Δ é uma matriz de conexão para a decomposição de Morse \mathcal{M} quando a trança obtida a partir de Δ for

isomorfa à trança do índice contínuo homológico.

Iniciamos com um conjunto invariante isolado S de um fluxo ϕ e uma decomposição de Morse $\mathcal{M} = \{M_\pi\}_{\pi \in P}$ para S . O conjunto de índices P será sempre finito e munido de uma ordem parcial $<$.

De acordo com a Seção 2.3, toda decomposição de Morse admite uma filtração-índice. Sendo assim, podemos escolher $\mathcal{N} = \{N(I)\}_{I \in \mathcal{A}}$ uma filtração-índice para \mathcal{M} .

Vimos ainda que \mathcal{N} fornece um par-índice para cada conjunto de Morse M_J com $J \in \mathcal{I}$. Segundo a Proposição 2.6, a forma de construir este par-índice é a seguinte: dado $J \in \mathcal{I}$, tome $I, K \in \mathcal{A}$ de modo que (I, J) seja uma decomposição de K e então o par $(N(K), N(I))$ constitui um par-índice para M_J . Um par-índice para M_J construído desta maneira é chamado **par-índice definido pela filtração \mathcal{N}** .

Uma vez que a ordem colocada em P é parcial, é possível que existam intervalos atratores $I_1 \neq I_2$ e $K_1 \neq K_2$ tais que (I_1, J) e (I_2, J) formem decomposições distintas para K_1 e K_2 respectivamente. Logo uma filtração-índice pode definir vários pares-índice para um mesmo conjunto de Morse M_J .

Entretanto, segue do segundo item da Proposição 2.6 que se $(N(K_1), N(I_1))$ e $(N(K_2), N(I_2))$ são pares-índice para M_J definidos por \mathcal{N} então os espaços pontuados $N(K_1)/N(I_1)$ e $N(K_2)/N(I_2)$ são homeomorfos.

De fato, pela Proposição 2.6, $N(K_1) \setminus N(I_1) = N(K_2) \setminus N(I_2)$. Logo, basta considerar o homeomorfismo entre $N(K_1)/N(I_1)$ e $N(K_2)/N(I_2)$ induzido pela identidade sobre $N(K_1) \setminus N(I_1) = N(K_2) \setminus N(I_2)$, ou seja, defina

$$N(K_1)/N(I_1) \rightarrow N(K_2)/N(I_2)$$

$$[x] \mapsto \begin{cases} [x] & , \text{ se } x \in N(K_1) \setminus N(I_1) \\ [N(I_2)] & , \text{ se } x \in N(I_1) \end{cases}$$

Sejam $C_*(N(K_1)/N(I_1))$ e $C_*(N(K_2)/N(I_2))$ os conjuntos formados pelas cadeias singulares com coeficientes num corpo F dos espaços pontuados $N(K_1)/N(I_1)$ e $N(K_2)/N(I_2)$ respectivamente. Como consequência de $N(K_1)/N(I_1)$ e $N(K_2)/N(I_2)$ serem homeomorfos, segue que $C_*(N(K_1)/N(I_1))$ e $C_*(N(K_2)/N(I_2))$ são complexos de cadeias isomorfos.

Concluimos com isso que todos os pares-índice definidos pela filtração \mathcal{N} que são associados a um mesmo conjunto de Morse M_J induzem complexos de cadeias que são isomorfos. Dado $J \in \mathcal{I}$, denotaremos por $C_{\mathcal{N}}(J)$ um representante desta classe de isomorfismos.

O fato de que o complexo de cadeias $C_{\mathcal{N}}(J)$ é isomorfo à $C_*(N(K)/N(I))$, sendo $(N(K), N(I))$ um par-índice para M_J , nos diz que a homologia de $C_{\mathcal{N}}(J)$ é exatamente o índice contínuo homológico de Conley do conjunto de Morse M_J , que denotamos por $H(M_J)$.

Fixada a notação $C_{\mathcal{N}}(J)$ para cada $J \in \mathcal{I}$, podemos começar a construção da trança do índice contínuo homológico que anunciamos nos comentários iniciais desta seção.

A técnica utilizada para esta construção é encontrar decomposições em par atrator-repulsor contidas na decomposição de Morse \mathcal{M} , pois assim podemos proceder de modo análogo à seção anterior. Para isto, considere a Proposição 2.5 que afirma o seguinte: (M_I, M_J) é um par atrator-repulsor para M_{IJ} sempre que $(I, J) \in \mathcal{I}_2$.

Seja $(I, J) \in \mathcal{I}_2$. Se (N_0, N_1, N_2) é um trio-índice definido pela filtração \mathcal{N} para (M_I, M_J) , então podemos obter a sequência exata de complexos de cadeias

$$0 \rightarrow C_*(N_1/N_0) \xrightarrow{i} C_*(N_2/N_0) \xrightarrow{p} C_*(N_2/N_1) \rightarrow 0$$

que, neste caso, pode ser representada por

$$0 \rightarrow C_{\mathcal{N}}(I) \xrightarrow{i(I,IJ)} C_{\mathcal{N}}(IJ) \xrightarrow{p(IJ,J)} C_{\mathcal{N}}(J) \rightarrow 0. \quad (4.8)$$

Segundo a Proposição 1.5, (4.8) induz uma sequência longa exata em homologia

$$\dots \xrightarrow{\partial(J,I)} H(M_I) \xrightarrow{i(I,IJ)} H(M_{IJ}) \xrightarrow{p(IJ,J)} H(M_J) \xrightarrow{\partial(J,I)} H(M_I) \xrightarrow{i(I,IJ)} \dots \quad (4.9)$$

que nada mais é que a sequência do índice contínuo homológico do par atrator-repulsor (M_I, M_J) .

Além disso, a sequência (4.8) também nos oferece o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [6]:

Proposição 4.4. *Sejam S um conjunto invariante isolado de um fluxo ϕ , \mathcal{M} uma decomposição de Morse para S e \mathcal{N} uma filtração-índice associada a \mathcal{M} .*

A coleção $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}$ consistindo dos complexos de cadeias $C_{\mathcal{N}}(I)$, com $I \in \mathcal{I}$, e das aplicações de cadeias $i(I, IJ)$ e $p(IJ, J)$ definidas por (4.8), com $(I, J) \in \mathcal{I}_2$, é uma trança de complexos de cadeias.

Considere então a trança de espaços vetoriais graduados $\mathcal{H} := \mathcal{H}\mathcal{C}_{\mathcal{N}}$ gerada por $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}$. Os espaços vetoriais graduados que constituem a trança \mathcal{H} são, pela definição de trança gerada, as homologias dos complexos de cadeias $C_{\mathcal{N}}(I)$ que formam a trança $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}$. Porém, como já argumentamos anteriormente, a homologia de $C_{\mathcal{N}}(I)$ é igual ao índice contínuo homológico de Conley do conjunto de Morse M_I para cada $I \in \mathcal{I}$.

Logo a trança \mathcal{H} consiste dos índices contínuos homológicos de Conley $H(M_I)$ junto com as aplicações

$$i(I, IJ) : H(M_I) \rightarrow H(M_{IJ}) \text{ de grau } 0$$

$$p(IJ, J) : H(M_{IJ}) \rightarrow H(M_J) \text{ de grau } 0$$

$$\partial(J, I) : H(M_J) \rightarrow H(M_I) \text{ de grau } -1$$

fornecidas pela sequência longa exata (4.9).

Definição 4.3. A trança de espaços vetoriais graduados \mathcal{H} que acabamos de construir recebe o nome de **trança do índice contínuo homológico** associada à decomposição de Morse \mathcal{M} .

Observe que, pela definição de trança de espaços vetoriais graduados aplicada à trança \mathcal{H} , além de obtermos uma sequência do índice contínuo homológico para cada par atrator-repulsor (M_I, M_J) como em (4.9), conseguimos ainda entrelaçar algumas destas sequências.

Mais especificamente, dada uma tripla (I, J, K) de intervalos adjacentes, podemos construir uma sequência do índice contínuo homológico para cada combinação de pares adjacentes (I, J) , (I, JK) , (J, K) e (IJ, K) formados a partir de (I, J, K) :

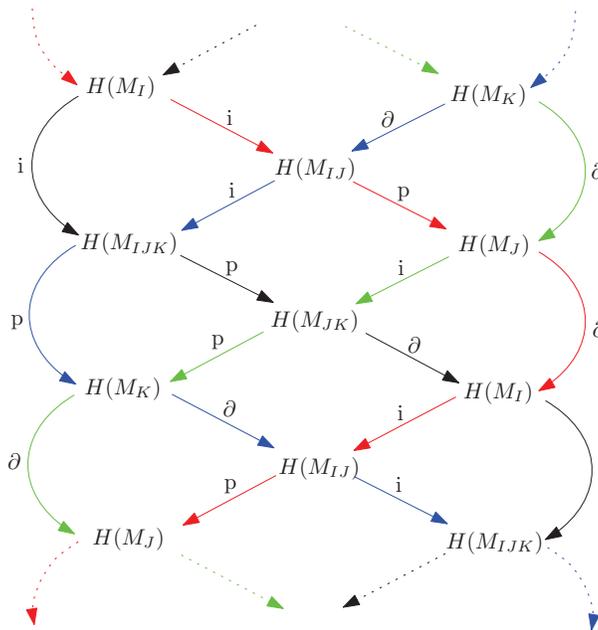
$$\cdots \xrightarrow{\partial} H(M_I) \xrightarrow{i} H(M_{IJ}) \xrightarrow{p} H(M_J) \xrightarrow{\partial} H(M_I) \xrightarrow{i} \cdots \quad (4.10)$$

$$\cdots \xrightarrow{\partial} H(M_I) \xrightarrow{i} H(M_{IJK}) \xrightarrow{p} H(M_{JK}) \xrightarrow{\partial} H(M_I) \xrightarrow{i} \cdots \quad (4.11)$$

$$\cdots \xrightarrow{\partial} H(M_J) \xrightarrow{i} H(M_{JK}) \xrightarrow{p} H(M_K) \xrightarrow{\partial} H(M_J) \xrightarrow{i} \cdots \quad (4.12)$$

$$\cdots \xrightarrow{\partial} H(M_{IJ}) \xrightarrow{i} H(M_{IJK}) \xrightarrow{p} H(M_K) \xrightarrow{\partial} H(M_{IJ}) \xrightarrow{i} \cdots \quad (4.13)$$

Além disso, o diagrama de tranças da Definição 1.29 aplicada à trança \mathcal{H} , que exibimos logo abaixo,



é comutativo e isto nos fornece uma inter-relação entre as sequências (4.10), (4.11), (4.12) e (4.13).

Observe ainda que, se a decomposição de Morse \mathcal{M} consistir apenas de um par atrator-repulsor (A, A^*) , então esse mesmo diagrama de tranças se reduz à sequência do índice homológico associada a (A, A^*) . Por esta razão dizemos que a trança do índice contínuo homológico generaliza a sequência do índice contínuo homológico.

Vamos considerar agora, para cada $I \in \mathcal{I}$, o seguinte espaço vetorial graduado:

$$C\Delta(I) = \bigoplus_{\pi \in I} H(M_\pi),$$

onde $H(M_\pi)$ denota o índice contínuo homológico de Conley do conjunto de Morse M_π , como estabelecemos anteriormente.

Uma aplicação linear $\Delta(I, J) : C\Delta(J) \rightarrow C\Delta(I)$, com $I, J \in \mathcal{I}$, vai ser considerada como uma matriz de aplicações

$$\Delta(I, J) := [\Delta(\pi, \pi') : H(M_{\pi'}) \rightarrow H(M_\pi)]_{\pi \in I, \pi' \in J}$$

sendo que cada $\Delta(\pi, \pi')$ é uma aplicação linear.

Note que $\Delta(I, J)$ é uma matriz de ordem $|I| \times |J|$, onde $|I|$ e $|J|$ denotam as cardinalidades dos intervalos I e J respectivamente. Lembre-se que o conjunto de índices P que contém os intervalos I e J foi considerado finito desde o início desta seção.

Apenas para exemplificar a atuação de $\Delta(I, J)$, suponha que $I = \{1, 2, 3\}$ e $J = \{1, 2\}$. Se representarmos um elemento de $C\Delta(J) = H(M_1) \oplus H(M_2)$ como uma coluna vertical $w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, com $x \in H(M_1)$ e $y \in H(M_2)$, então

$$\Delta(I, J)(w) = \begin{pmatrix} \Delta(1, 1) & \Delta(1, 2) \\ \Delta(2, 1) & \Delta(2, 2) \\ \Delta(3, 1) & \Delta(3, 2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta(1, 1)(x) + \Delta(1, 2)(y) \\ \Delta(2, 1)(x) + \Delta(2, 2)(y) \\ \Delta(3, 1)(x) + \Delta(3, 2)(y) \end{pmatrix}$$

Já que cada $\Delta(\pi, \pi')$ é uma aplicação que leva elementos de $H(M_{\pi'})$ em $H(M_\pi)$, temos que

$$\Delta(1, 1)(x) + \Delta(1, 2)(y) \in H(M_1)$$

$$\Delta(2, 1)(x) + \Delta(2, 2)(y) \in H(M_2)$$

$$\Delta(3, 1)(x) + \Delta(3, 2)(y) \in H(M_3)$$

e, portanto, $\Delta(I, J)(w)$ é um elemento de $C\Delta(I) = H(M_1) \oplus H(M_2) \oplus H(M_3)$.

Denotaremos apenas por $\Delta(I)$ a aplicação $\Delta(I, I)$ e, no caso em que $I = P$, a matriz $\Delta(P)$ será denotada simplesmente por Δ .

Vejamos algumas definições relacionadas à matriz $\Delta(I)$.

Definição 4.4. *Seja $\Delta(I) : C\Delta(I) \rightarrow C\Delta(I)$ uma aplicação linear.*

1. Dizemos que $\Delta(I)$ é **triangular estritamente superior** se $\Delta(\pi, \pi') \neq 0$ implicar que $\pi < \pi'$ para quaisquer $\pi, \pi' \in I$.
2. $\Delta(I)$ recebe o nome de **triangular superior** se $\Delta(\pi, \pi') \neq 0$ implicar que $\pi < \pi'$ ou $\pi = \pi'$ para todo $\pi, \pi' \in I$.
3. Chamamos $\Delta(I)$ de **aplicação bordo** quando $\Delta(\pi, \pi') : H(M_{\pi'}) \rightarrow H(M_{\pi})$ possui grau -1 para todo $\pi, \pi' \in I$ e $\Delta(I)^2 = 0$.

A próxima proposição nos diz que uma matriz aplicação bordo triangular estritamente superior gera algumas submatrizes com as mesmas propriedades.

Proposição 4.5. *Seja $\Delta : C\Delta(P) \rightarrow C\Delta(P)$ uma aplicação bordo triangular estritamente superior. Para cada intervalo $I \subset P$ temos que $\Delta(I) : C\Delta(I) \rightarrow C\Delta(I)$ possui as mesmas propriedades de Δ , ou seja, $\Delta(I)$ é uma aplicação bordo e é triangular estritamente superior.*

Demonstração: Não há dúvidas de que $\Delta(I)$ é triangular estritamente superior e que $\Delta(\pi, \pi')$ é de grau -1 para todo $\pi, \pi' \in I$.

Basta mostrar que $\Delta(I)^2 = 0$.

Sejam $H, J \in \mathcal{I}$ tais que (H, I, J) forme uma decomposição de P . Podemos visualizar Δ da seguinte maneira

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta(H) & \Delta(H, I) & \Delta(H, J) \\ \Delta(I, H) & \Delta(I) & \Delta(I, J) \\ \Delta(J, H) & \Delta(J, I) & \Delta(J) \end{pmatrix}.$$

Desde que Δ é triangular estritamente superior, temos que $\Delta(I, H) = \Delta(J, H) = \Delta(J, I) = 0$, logo

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta(H) & \Delta(H, I) & \Delta(H, J) \\ 0 & \Delta(I) & \Delta(I, J) \\ 0 & 0 & \Delta(J) \end{pmatrix}.$$

E uma vez que $\Delta^2 = 0$, concluímos que a composição da segunda linha de Δ com sua segunda coluna é nula, ou seja, $\Delta(I)^2 = 0$. ■

Portanto, se $(C\Delta(P), \Delta)$ é um complexo de cadeias com Δ triangular estritamente superior então, para todo $I \in \mathcal{I}$, temos que $(C\Delta(I), \Delta(I))$ é um subcomplexo de cadeias de $(C\Delta(P), \Delta)$ com $\Delta(I)$ também triangular estritamente superior.

Sendo assim, para qualquer $(I, J) \in \mathcal{I}_2$ podemos considerar a seguinte sequência curta exata de complexos de cadeias

$$0 \rightarrow C\Delta(I) \xrightarrow{i(I,IJ)} C\Delta(IJ) \xrightarrow{p(IJ,J)} C\Delta(J) \rightarrow 0 \quad (4.14)$$

onde

$$\begin{aligned} i &:= i(I, IJ) : C\Delta(I) \rightarrow C\Delta(IJ) \\ &\quad \bigoplus_{\pi \in I} x_\pi \mapsto \bigoplus_{\pi \in I} x_\pi + \bigoplus_{\pi \in J} 0 = \bigoplus_{\pi \in I} x_\pi \\ p &:= p(IJ, J) : C\Delta(IJ) \rightarrow C\Delta(J) \\ &\quad \bigoplus_{\pi \in I} x_\pi + \bigoplus_{\pi \in J} y_\pi \mapsto \bigoplus_{\pi \in J} y_\pi \end{aligned}$$

são respectivamente a inclusão e a projeção.

Proposição 4.6. *As aplicações $i(I, IJ)$ e $p(IJ, J)$ acima definidas são aplicações de cadeias.*

Demonstração: Podemos representar as aplicações $i(I, IJ)$ e $p(IJ, J)$ nas seguintes formas matriciais:

$$i(I, IJ) = \begin{pmatrix} \text{id} \\ 0 \end{pmatrix} \quad p(IJ, J) = \begin{pmatrix} 0 & \text{id} \end{pmatrix}$$

Como $(I, J) \in \mathcal{I}_2$, também podemos visualizar a matriz $\Delta(IJ)$ do seguinte modo:

$$\Delta(IJ) = \begin{pmatrix} \Delta(I) & \Delta(I, J) \\ 0 & \Delta(J) \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Delta(IJ) \circ i(I, IJ) &= \begin{pmatrix} \Delta(I) & \Delta(I, J) \\ 0 & \Delta(J) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{id} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta(I) \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \text{id} \\ 0 \end{pmatrix} \circ \Delta(I) = i(I, IJ) \circ \Delta(I) \end{aligned}$$

e

$$p(IJ, J) \circ \Delta(IJ) = \begin{pmatrix} 0 & \text{id} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta(I) & \Delta(I, J) \\ 0 & \Delta(J) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \Delta(J) \end{pmatrix} =$$

2. Verifiquemos que

- (a) $i(IJ, IJK) \circ i(I, IJ) = i(I, IJK)$
- (b) $p(JK, K) \circ p(IJK, JK) = p(IJK, K)$
- (c) $i(J, JK) \circ p(IJ, J) = p(IJK, JK) \circ i(IJ, IJK)$

para concluir a comutatividade do diagrama de tranças.

(a) Seja $w = \bigoplus_{\pi \in I} x_\pi \in C\Delta(I)$. Então

$$\begin{aligned} i(IJ, IJK) \circ i(I, IJ)(w) &= i(IJ, IJK) \left(\bigoplus_{\pi \in I} x_\pi + \bigoplus_{\pi \in J} 0 \right) = \\ &= \bigoplus_{\pi \in I} x_\pi + \bigoplus_{\pi \in J} 0 + \bigoplus_{\pi \in K} 0 = i(I, IJK)(w). \end{aligned}$$

(b) Se $w = \bigoplus_{\pi \in I} x_\pi + \bigoplus_{\pi \in J} y_\pi + \bigoplus_{\pi \in K} z_\pi \in C\Delta(IJK)$, temos que

$$\begin{aligned} p(JK, K) \circ p(IJK, JK)(w) &= p(JK, K) \left(\bigoplus_{\pi \in J} y_\pi + \bigoplus_{\pi \in K} z_\pi \right) = \\ &= \bigoplus_{\pi \in K} z_\pi = p(IJK, K)(w). \end{aligned}$$

(c) Para finalizar, suponha $w = \bigoplus_{\pi \in I} x_\pi + \bigoplus_{\pi \in J} y_\pi \in C\Delta(IJ)$. Assim

$$i(J, JK) \circ p(IJ, J)(w) = i(J, JK) \left(\bigoplus_{\pi \in J} y_\pi \right) = \bigoplus_{\pi \in J} y_\pi + \bigoplus_{\pi \in K} 0$$

e

$$\begin{aligned} p(IJK, JK) \circ i(IJ, IJK)(w) &= p(IJK, JK) \left(\bigoplus_{\pi \in I} x_\pi + \bigoplus_{\pi \in J} y_\pi + \bigoplus_{\pi \in K} 0 \right) = \\ &= \bigoplus_{\pi \in J} y_\pi + \bigoplus_{\pi \in K} 0. \end{aligned}$$

Logo $i(J, JK) \circ p(IJ, J)(w) = p(IJK, JK) \circ i(IJ, IJK)(w)$. ■

Basta reunir todas as informações que obtivemos sobre os complexos de cadeias $(C\Delta(I), \Delta(I))$ e sobre as aplicações de cadeias i e p para concluir a seguinte proposição:

Proposição 4.8. *Seja*

$$\Delta : C\Delta(P) \rightarrow C\Delta(P)$$

uma aplicação bordo triangular estritamente superior, onde

$$C\Delta(P) = \bigoplus_{\pi \in P} H(M_\pi).$$

Então a coleção $C\Delta$ consistindo dos complexos de cadeias $(C\Delta(I), \Delta(I))$, com $I \in \mathcal{I}$, junto com as aplicações de cadeias $i(I, IJ)$ e $p(IJ, J)$ fornecidas por (4.14), com $(I, J) \in \mathcal{I}_2$, é uma trança de complexos de cadeias.

Agora, seja $\mathcal{H}\Delta := \mathcal{H}C\Delta$ a trança de espaços vetoriais graduados gerada por $C\Delta$. Tal trança é formada pelas homologias dos complexos de cadeias $(C\Delta(I), \Delta(I))$, que denotamos por $H\Delta(I)$, e pelas aplicações

$$\bar{i}(I, IJ) : H\Delta(I) \rightarrow H\Delta(IJ) \text{ de grau zero}$$

$$\bar{p}(IJ, J) : H\Delta(IJ) \rightarrow H\Delta(J) \text{ de grau zero}$$

$$\bar{\partial}(J, I) : H\Delta(J) \rightarrow H\Delta(I) \text{ de grau } -1$$

que são obtidas associando cada sequência curta exata (4.14) a uma sequência longa exata em homologia da forma

$$\dots \xrightarrow{\bar{\partial}(J,I)} H\Delta(I) \xrightarrow{\bar{i}(I,IJ)} H\Delta(IJ) \xrightarrow{\bar{p}(IJ,J)} H\Delta(J) \xrightarrow{\bar{\partial}(J,I)} H\Delta(I) \xrightarrow{\bar{i}(I,IJ)} \dots$$

Com tudo isso, temos em mãos duas tranças de espaços vetoriais graduados: a trança $\mathcal{H}\Delta$ recém criada e a trança do índice contínuo homológico \mathcal{H} que apresentamos na Definição 4.3.

Uma boa pergunta a se fazer neste momento é: será que a trança $\mathcal{H}\Delta$ é isomorfa à trança do índice contínuo homológico \mathcal{H} ? Ou seja, será que existe uma coleção de isomorfismos $\{\phi(I) : H\Delta(I) \rightarrow H(M_I), I \in \mathcal{I}\}$ tal que para cada $(I, J) \in \mathcal{I}_2$ o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\bar{\partial}} & H\Delta(I) & \xrightarrow{\bar{i}} & H\Delta(IJ) & \xrightarrow{\bar{p}} & H\Delta(J) & \xrightarrow{\bar{\partial}} & H\Delta(I) & \xrightarrow{\bar{i}} & \dots \\ & & \downarrow \phi(I) & & \downarrow \phi(IJ) & & \downarrow \phi(J) & & \downarrow \phi(I) & & \\ \dots & \xrightarrow{\partial} & H(M_I) & \xrightarrow{i} & H(M_{IJ}) & \xrightarrow{p} & H(M_J) & \xrightarrow{\partial} & H(M_I) & \xrightarrow{i} & \dots \end{array}$$

é comutativo?

Quando a resposta for afirmativa, chamaremos a aplicação Δ de matriz de conexão. De

forma mais específica:

Definição 4.5. *Sejam S um conjunto invariante isolado de um fluxo ϕ e $\mathcal{M} = \{M_\pi\}_{\pi \in P}$ uma decomposição de Morse para S .*

Considere ainda o espaço vetorial graduado

$$C\Delta(P) = \bigoplus_{\pi \in P} H(M_\pi)$$

com uma aplicação linear

$$\Delta : C\Delta(P) \rightarrow C\Delta(P).$$

*Dizemos que Δ é uma **matriz de conexão para a decomposição de Morse** \mathcal{M} se*

- 1. Δ é uma aplicação bordo triangular estritamente superior*
- 2. a trança de espaços vetoriais graduados $\mathcal{H}\Delta$ é isomorfa à trança do índice contínuo homológico \mathcal{H}*

Franzosa demonstra em [7] que existe pelo menos uma matriz de conexão para qualquer decomposição de Morse associada a um conjunto invariante isolado S .

A proposição a seguir mostra que a matriz de conexão desempenha um papel muito importante na descrição dinâmica de um conjunto invariante isolado S que admite uma decomposição de Morse \mathcal{M} . Segundo este resultado, entradas não nulas da matriz de conexão podem detectar órbitas de conexão entre conjuntos de Morse que são adjacentes na ordem do fluxo.

Proposição 4.9. *Sejam S um conjunto invariante isolado de um fluxo ϕ , $\mathcal{M} = \{M_\pi\}_{\pi \in P}$ uma decomposição de Morse associada à S e Δ uma matriz de conexão para \mathcal{M} .*

Se P está munido da ordem do fluxo $<_F$ e $\pi, \pi' \in P$ são elementos adjacentes tais que $\Delta(\pi, \pi') \neq 0$, então $C(M_\pi, M_{\pi'}) \neq \emptyset$.

Demonstração: Como Δ é uma matriz triangular estritamente superior, temos que $\Delta(\pi, \pi') \neq 0$ implica $\pi <_F \pi'$. Disto segue, usando a definição da ordem do fluxo, que existe uma sequência de elementos distintos $\pi_0 = \pi, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n = \pi' \in P$ de modo que $C(M_{\pi_{j-1}}, M_{\pi_j}) \neq \emptyset$ para cada $j = 1, \dots, n$.

Consequentemente, $\pi_0 = \pi <_F \pi_1 <_F \pi_2 <_F \dots <_F \pi_n = \pi'$ e já que π e π' são adjacentes, obtemos que $n = 1$.

Portanto, $C(M_\pi, M_{\pi'}) = C(M_{\pi_0}, M_{\pi_1}) \neq \emptyset$, isto é, existe uma órbita conectante entre os conjuntos de Morse $M_{\pi'}$ e M_π . ■

No próximo exemplo vamos exibir uma família, parametrizada por $\theta > 0$, de sistemas de equações diferenciais que têm em comum dois pontos de sela e um ponto atrator. Veremos que, tanto para valores pequenos quanto para valores grandes de θ , não existem órbitas que conectam os pontos de sela. Porém, utilizando a matriz de conexão, provaremos que para algum parâmetro intermediário θ^* , o sistema associado admite uma conexão de selas.

Este exemplo foi apresentado por Franzosa em [7].

Exemplo 4.2. Neste exemplo calcularemos os índices contínuos homológicos de Conley sobre o corpo \mathbb{Z}_2 .

Considere a seguinte família de sistemas de equações diferenciais parametrizadas por $\theta > 0$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \theta y - x(1-x)\left(x - \frac{1}{3}\right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Independentemente da escolha de θ , temos que

$$z_2 = (0, 0) \quad z_1 = \left(\frac{1}{3}, 0\right) \quad z_3 = (1, 0)$$

são pontos de equilíbrio do sistema (4.15).

Sejam S_θ o conjunto das órbitas limitadas de (4.15) para cada $\theta > 0$ e M_i o conjunto unitário $\{z_i\}$ para cada $i = 1, 2, 3$. Nas duas figuras abaixo exibimos o comportamento de uma vizinhança de S_θ , primeiramente para valores de θ próximos de zero e, em segundo lugar, para valores grandes de θ .

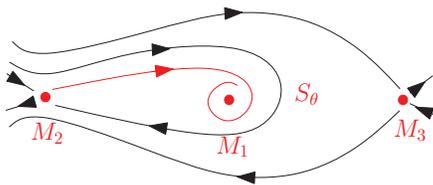


Figura 4.1: $0 < \theta \ll 1$

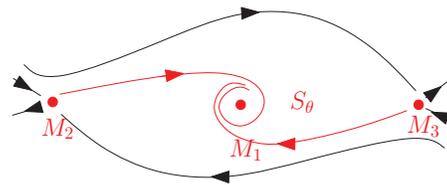


Figura 4.2: $\theta \gg 1$

Para cada $\theta > 0$, temos que S_θ é um conjunto invariante isolado e $\mathcal{M} = \{M_1, M_2, M_3\}$ é uma decomposição de Morse para S_θ .

Note que, para valores pequenos de θ , existe uma conexão entre o ponto de sela M_2 e o ponto atrator M_1 . Já para valores altos de θ , além da conexão anterior entre M_2 e M_1 , obtemos também uma conexão entre o ponto de sela M_3 e o ponto atrator M_1 . Como comentamos anteriormente, mostraremos que na transição da primeira situação para a segunda, ocorre uma conexão entre as selas M_2 e M_3 .

Os retratos de fase das figuras 4.1 e 4.2 podem ser representados qualitativamente de forma mais simples como:

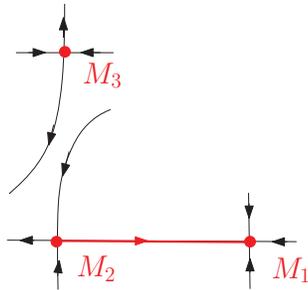


Figura 4.3: $0 < \theta \ll 1$

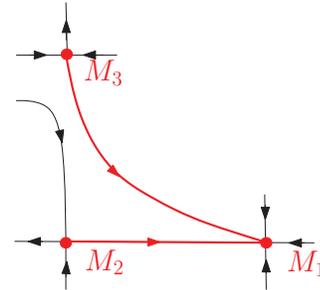


Figura 4.4: $\theta \gg 1$

Vamos construir, em ambos os casos, uma matriz de conexão associada à decomposição de Morse \mathcal{M} considerando a ordem do fluxo \langle_F . Convenientemente denotaremos a matriz de conexão de S_θ por Δ' quando $0 < \theta \ll 1$ e por Δ'' quando $\theta \gg 1$.

- $0 < \theta \ll 1$

Nesta situação, a ordem do fluxo contém apenas uma relação: $1 \langle_F 2$.

A matriz de conexão Δ' que buscamos é, por definição, triangular estritamente superior, portanto possui a seguinte forma:

$$\Delta' = \begin{pmatrix} 0 & \Delta'(1, 2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim basta analisarmos a entrada $\Delta'(1, 2)$.

Sendo Δ' uma matriz de conexão e $\{1, 2\}$ um intervalo adjacente, temos que o índice contínuo homológico de Conley do conjunto M_{12} é isomorfo à $H\Delta'(12)$.

Para o conjunto invariante isolado M_{12} , podemos considerar o par-índice dado pela Figura 4.5.

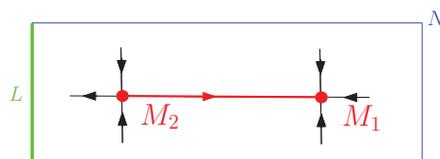


Figura 4.5: Par-índice para M_{12}

Logo, o espaço pontuado N/L tem o tipo de homotopia de um ponto e , consequentemente, o índice contínuo homológico de Conley de M_{12} é trivial, ou seja, $H(M_{12}) = 0$.

Por outro lado, $H\Delta'(12)$ é a homologia do complexo de cadeias $(C\Delta'(12), \Delta'(12))$, onde

$$C\Delta'(12) = H(M_1) \oplus H(M_2)$$

e

$$\Delta'(12) = \begin{pmatrix} 0 & \Delta'(1,2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $\Delta'(1,2)$ fosse a aplicação nula, então $\Delta'(12)$ seria a matriz nula e, neste caso,

$$H_n\Delta'(12) = \frac{\ker \Delta'_n(12)}{\text{im } \Delta'_{n+1}(12)} \approx H_n(M_1) \oplus H_n(M_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & , \text{ se } n = 0, 1 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Mas isto contraria o fato de que $H\Delta'(12) \approx H(M_{12}) \approx 0$.

Assim concluímos que $\Delta'(1,2) \neq 0$. Mais que isso, já que $\Delta'(1,2) : H(M_2) \rightarrow H(M_1)$ é uma aplicação de grau -1 com

$$H_n(M_1) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & , \text{ se } n = 0 \\ 0 & , \text{ se } n \neq 0 \end{cases} \quad e \quad H_n(M_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & , \text{ se } n = 1 \\ 0 & , \text{ se } n \neq 1 \end{cases}$$

então

$$\Delta'_n(1,2) : \begin{cases} \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2 & , \text{ se } n = 1 \\ 0 \rightarrow 0 & , \text{ se } n \neq 1 \end{cases}$$

Observe que $\Delta'_1(1,2) : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ é uma aplicação linear não nula, pois caso contrário $\Delta'(1,2) = 0$. Logo $\Delta'_1(1,2)$ só pode ser um isomorfismo.

Com isso obtemos que

$$\Delta' = \begin{pmatrix} 0 & \approx & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

é a matriz de conexão de S_θ para $0 < \theta \ll 1$.

- $\theta \gg 1$

Segundo a Figura 4.4, a ordem do fluxo contém agora duas relações: $1 <_F 2$ e $1 <_F 3$.

Logo, pela triangularidade estritamente superior da matriz de conexão procurada Δ'' ,

já temos que

$$\Delta'' = \begin{pmatrix} 0 & \Delta''(1,2) & \Delta''(1,3) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exatamente pelo mesmo argumento do caso anterior, obtemos que

$$\Delta''_n(1,2) = \Delta''_n(1,3) : \begin{cases} \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2 & , \text{ se } n = 1 \\ 0 \rightarrow 0 & , \text{ se } n \neq 1 \end{cases}$$

com $\Delta''_1(1,2) = \Delta''_1(1,3)$ sendo um isomorfismo.

Portanto, a matriz de conexão Δ'' para S_θ , com $\theta \gg 1$, pode ser escrita como

$$\Delta'' = \begin{pmatrix} 0 & \approx & \approx \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculadas as matrizes de conexão para $0 < \theta \ll 1$ e $\theta \gg 1$, vamos agora transformar o parâmetro $\theta > 0$ do sistema (4.15) numa nova variável. Para isso, considere $0 < \theta' \ll 1$, $\theta'' \gg 1$ e a nova família de sistemas

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y & (4.16) \\ \dot{y} &= \theta y - x(1-x) \left(x - \frac{1}{3} \right) \\ \dot{\theta} &= \varepsilon(\theta' - \theta)(\theta'' - \theta) \end{aligned}$$

parametrizada por $\varepsilon > 0$.

Note que as escolhas da terceira equação do sistema (4.16) e das constantes θ' e θ'' foram feitas de modo apropriado para que o retrato de fase de (4.16) contenha a dinâmica dada pela Figura 4.3 no plano $\theta = \theta'$ e a dinâmica da Figura 4.4 no plano $\theta = \theta''$. Veja a Figura 4.6.

Denotaremos por S o conjunto invariante isolado formado pelas órbitas limitadas de (4.16), por

$$\begin{aligned} z'_2 &= (0, 0, \theta') & z'_1 &= \left(\frac{1}{3}, 0, \theta' \right) & z'_3 &= (1, 0, \theta') \\ z''_2 &= (0, 0, \theta'') & z''_1 &= \left(\frac{1}{3}, 0, \theta'' \right) & z''_3 &= (1, 0, \theta'') \end{aligned}$$

os pontos de equilíbrio de (4.16) e por \mathcal{M} a decomposição de Morse $\{M'_1, M'_2, M'_3, M''_1, M''_2, M''_3\}$

para S ordenada pela ordem do fluxo, onde $M'_i = \{z'_i\}$ e $M''_i = \{z''_i\}$ para cada $i = 1, 2, 3$.

A Figura 4.6 exibe algumas órbitas de S juntamente com a decomposição de Morse \mathcal{M} .

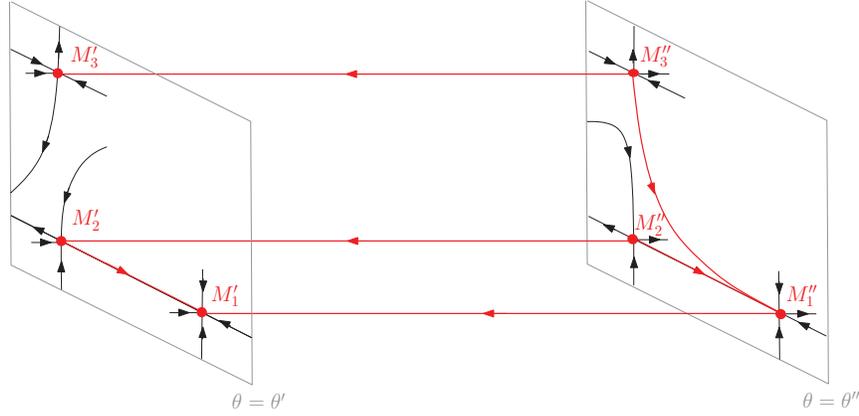


Figura 4.6: Retrato de fase do sistema (4.16)

Uma matriz de conexão para \mathcal{M} tem a seguinte forma:

$$\Delta = \begin{pmatrix} (\Delta(i', j')) & (\Delta(i', j'')) \\ (\Delta(i'', j')) & (\Delta(i'', j'')) \end{pmatrix}.$$

sendo que $(\Delta(i'', j'))$ é a matriz nula, $(\Delta(i', j'))$ é a matriz de conexão Δ' que calculamos para o caso $0 < \theta \ll 1$ e $(\Delta(i'', j''))$ é a matriz de conexão Δ'' que obtivemos para o caso $\theta \gg 1$. Ou seja,

$$\Delta = \begin{pmatrix} \begin{array}{ccc|ccc} 0 & \approx & 0 & \Delta(1', 1'') & \Delta(1', 2'') & \Delta(1', 3'') \\ 0 & 0 & 0 & \Delta(2', 1'') & \Delta(2', 2'') & \Delta(2', 3'') \\ 0 & 0 & 0 & \Delta(3', 1'') & \Delta(3', 2'') & \Delta(3', 3'') \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \approx & \approx \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{pmatrix}$$

A matriz $T_{i', j''} = (\Delta(i', j''))$ é conhecida como **matriz de transição**.

Provando que a entrada $\Delta(2', 3'')$ é não nula, poderemos afirmar que $C(M'_2, M''_3) \neq \emptyset$ pela Proposição 4.9, pois $2'$ e $3''$ são adjacentes na ordem do fluxo. Como isso será válido independentemente da escolha de $\varepsilon > 0$, concluiremos que na família de sistemas original ($\varepsilon = 0$) existe $\theta^* \in (\theta', \theta'')$ tal que $C(M_2, M_3) \neq \emptyset$ no sistema associado à θ^* .

Visto que Δ é uma aplicação bordo, temos que a matriz Δ^2 é nula. Logo a composição da primeira linha de Δ com sua última coluna tem que ser igual a zero, isto é:

$$\approx \circ \Delta(2', 3'') + \Delta(1', 1'') \circ \approx = 0.$$

Sendo assim, basta mostrar que $\Delta(1', 1'')$ é um isomorfismo para concluirmos que $\Delta(2', 3'') : H(M_3'') \rightarrow H(M_2')$ é a aplicação não nula.

Uma vez que Δ é uma matriz de conexão e $\{1', 1''\}$ é um intervalo adjacente, temos que $H(M_{1'1''}) \approx H\Delta(1'1'')$.

Por um lado temos que o índice contínuo homológico de Conley do conjunto $M_{1'1''}$ é trivial. Com efeito, considere o seguinte par-índice para $M_{1'1''}$:

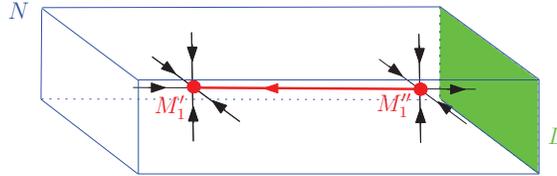


Figura 4.7: Par-índice para $M_{1'1''}$

Então o espaço pontuado N/L tem o tipo de homotopia de um ponto e , portanto, $H(M_{1'1''}) = 0$.

Por outro lado, temos que $H\Delta(1'1'')$ é a homologia do complexo de cadeias $(C\Delta(1'1''), \Delta(1'1''))$, onde

$$C\Delta(1'1'') = H(M_1') \oplus H(M_1'')$$

e

$$\Delta(1'1'') = \begin{pmatrix} 0 & \Delta(1', 1'') \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $\Delta(1', 1'')$ fosse igual a zero, então $\Delta(1'1'')$ seria a matriz nula. Disto segue que

$$H_n\Delta(1'1'') = \frac{\ker \Delta_n(1'1'')}{\text{im } \Delta_{n+1}(1'1'')} \approx H_n(M_1') \oplus H_n(M_1'') = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & , \text{ se } n = 0, 1 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Mas isto contraria a afirmação $H(M_{1'1''}) \approx H\Delta(1'1'')$, já que $H(M_{1'1''}) = 0$. Consequentemente, $\Delta(1', 1'')$ deve ser não nula.

Além disso, como $\Delta(1', 1'') : H(M_1'') \rightarrow H(M_1')$ é uma aplicação de grau -1 , sendo que

$$H_n(M_1') = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & , \text{ se } n = 0 \\ 0 & , \text{ se } n \neq 0 \end{cases} \quad e \quad H_n(M_1'') = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & , \text{ se } n = 1 \\ 0 & , \text{ se } n \neq 1 \end{cases}$$

concluimos que

$$\Delta_n(1', 1'') : \begin{cases} \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2 & , \text{ se } n = 1 \\ 0 \rightarrow 0 & , \text{ se } n \neq 1 \end{cases}.$$

Observe que $\Delta_1(1', 1'') : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ é um isomorfismo, pois caso contrário $\Delta_1(1', 1'') = 0$ e

consequentemente $\Delta(1', 1'') = \{\Delta_n(1', 1'')\} = 0$.

Portanto, a aplicação $\Delta(1', 1'')$ é um isomorfismo, como queríamos.

Para finalizar este capítulo, observe que, pela Definição 4.5, uma matriz de conexão Δ para uma decomposição de Morse \mathcal{M} codifica as informações algébricas contidas na trança do índice contínuo homológico \mathcal{H} associada à \mathcal{M} . Com esta afirmação queremos dizer que a partir da matriz de conexão Δ é possível reconstruir a trança \mathcal{H} a menos, é claro, de um isomorfismo de tranças.

Em particular podemos utilizar uma matriz de conexão para recuperar os índices contínuos homológicos de Conley dos conjuntos M_I para cada intervalo I . O exemplo a seguir ilustra esta afirmação.

Exemplo 4.3. *Seja*

$$\Delta'' = \begin{pmatrix} 0 & \approx & \approx \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a matriz de conexão que obtivemos no Exemplo 4.2 para o conjunto invariante isolado S_θ , com $\theta \gg 1$. O conjunto S_θ está representado em vermelho na Figura 4.4 juntamente com sua decomposição de Morse $\mathcal{M} = \{M_1, M_2, M_3\}$ que foi ordenada pela ordem do fluxo: $1 <_F 2$ e $1 <_F 3$.

Nosso objetivo é mostrar que Δ'' pode nos fornecer, por exemplo, o índice contínuo homológico de Conley do conjunto $M_{12} = M_1 \cup M_2 \cup C(M_1, M_2)$.

Pela definição de matriz de conexão, temos que a trança do índice contínuo homológico \mathcal{H} associada à \mathcal{M} é isomorfa à trança de espaços vetoriais graduados $\mathcal{H}\Delta''$ criada a partir da matriz Δ'' . Consequentemente, pela definição de isomorfismo de tranças, existe um isomorfismo $\phi(I) : H\Delta''(I) \rightarrow H(M_I)$ para cada intervalo I .

Considere o intervalo $I = \{1, 2\}$. Pelo que acabamos de discutir, o índice contínuo homológico de Conley de M_{12} deve ser isomorfo ao espaço vetorial graduado $H\Delta''(12)$.

Lembre-se que $H\Delta''(12)$ é a homologia do complexo de cadeias $(C\Delta''(12), \Delta''(12))$, onde

$$C\Delta''(12) = H(M_1) \oplus H(M_2)$$

e

$$\Delta''(12) = \begin{pmatrix} 0 & \approx \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sendo assim,

$$H(M_{12}) \approx H\Delta''(12) = \frac{\ker \Delta''(12)}{\operatorname{im} \Delta''(12)} = \frac{H(M_1) \oplus \ker \approx}{0 \oplus \operatorname{im} \approx} \approx \frac{H(M_1)}{H(M_1)} \approx 0, \quad (4.17)$$

ou seja, o índice contínuo homológico de Conley de M_{12} é trivial.

No Exemplo 4.2 calculamos de maneira tradicional o índice $H(M_{12})$ para o caso em que $0 < \theta \ll 1$ e concluímos que $H(M_{12}) = 0$. O par (N, L) exibido na Figura 4.2 naquela situação é também um par-índice de M_{12} para o parâmetro $\theta \gg 1$ que estamos analisando neste momento.

Portanto, o índice contínuo homológico de Conley de M_{12} é de fato trivial se $\theta \gg 1$. Isto confirma o resultado que obtivemos em (4.17) utilizando apenas a matriz de conexão Δ'' .

Capítulo 5

Matriz de Conexão no Caso Discreto

Pelo que vimos no Capítulo 3, o índice homológico de Conley de um conjunto invariante isolado S assume formas distintas quando lidamos com fluxos ou com aplicações contínuas. Tal índice trata-se apenas de um espaço vetorial graduado $H(S)$ no caso contínuo, enquanto no caso discreto toma a forma de um par que consiste de um espaço vetorial graduado $H(S)$ junto com um isomorfismo $\chi(S)$.

Veremos agora que a extensão da matriz de conexão para o caso discreto respeita a diferença existente entre estas definições.

Como estudamos no caso contínuo, a partir de uma matriz de conexão Δ para uma decomposição de Morse $\{M_\pi\}_{\pi \in P}$, somos capazes de recuperar os índices contínuos homológicos de Conley $H(M_I)$ para cada intervalo I .

No caso discreto, a matriz de conexão será constituída por um par de matrizes (Δ, δ) . A primeira delas, Δ , terá o mesmo papel que no caso contínuo: reconstruir os espaços vetoriais graduados $H(M_I)$. Já a segunda matriz, δ , será importante na recuperação dos isomorfismos $\chi(M_I)$ associados a cada M_I . Assim, no caso discreto, a matriz de conexão (Δ, δ) também poderá resgatar o índice discreto homológico de Conley $(H(M_I), \chi(M_I))$ de cada um dos conjuntos M_I .

Veremos ainda que a definição de matriz de conexão para aplicações contínuas é um pouco mais complicada que para fluxos, assim como ocorre na definição de índice de Conley. Entretanto, além de podermos estender todos os resultados obtidos no capítulo anterior que se preocupam com o aspecto dinâmico de um fluxo, no caso discreto teremos condições de enunciar mais proposições que versam sobre a existência de órbitas de conexão.

Observaremos que o índice homológico de Conley e matriz de conexão no caso discreto podem detectar órbitas conectantes em situações em que não é possível tirar conclusões destas mesmas ferramentas no caso contínuo, como por exemplo, no caso em que desejamos saber sobre conexões entre duas singularidades que possuem o mesmo índice homológico de

Conley.

Novamente dividiremos o capítulo em duas partes: matriz de conexão para uma decomposição em par atrator-repulsor e em seguida, sua generalização, matriz de conexão para uma decomposição de Morse.

5.1 Matriz de Conexão para Decomposição em Par Atrator-Repulsor

Iniciamos esta seção com um conjunto invariante isolado S de uma aplicação contínua f e um par atrator-repulsor (A, A^*) de S .

É possível associar à (A, A^*) uma coleção de compactos (N_0, N_1, N_2) de modo que (N_1, N_0) , (N_2, N_0) e (N_2, N_1) sejam pares-índice para A , S e A^* respectivamente. Esta coleção foi definida como trio-índice na Seção 2.2.

Vamos denotar por

$$\begin{aligned} f_{10} &: N_1/N_0 \rightarrow N_1/N_0 \\ f_{20} &: N_2/N_0 \rightarrow N_2/N_0 \\ f_{21} &: N_2/N_1 \rightarrow N_2/N_1 \end{aligned}$$

as respectivas aplicações-índice associadas à (N_1, N_0) , (N_2, N_0) e (N_2, N_1) .

Podemos então considerar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N_1/N_0 & \xrightarrow{i} & N_2/N_0 & \xrightarrow{p} & N_2/N_1 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_{10} & & \downarrow f_{20} & & \downarrow f_{21} \\ 0 & \longrightarrow & N_1/N_0 & \xrightarrow{i} & N_2/N_0 & \xrightarrow{p} & N_2/N_1 \longrightarrow 0 \end{array} \quad (5.1)$$

onde a inclusão i e a projeção p são como definimos no início da Seção 4.1.

Temos que (5.1) é um diagrama comutativo. De fato, verifiquemos a comutatividade do primeiro quadrado.

Se $[x]_{N_0}^{N_1} \in N_1/N_0$ então

$$f_{20} \circ i([x]_{N_0}^{N_1}) = f_{20}([x]_{N_0}^{N_2}) = \begin{cases} [N_0]_{N_0}^{N_2} & , \text{ se } x \in N_0 \\ [f(x)]_{N_0}^{N_2} & , \text{ se } x \in N_2 \setminus N_0 \end{cases}$$

e, por outro lado,

$$i \circ f_{10}([x]_{N_0}^{N_1}) = i \left(\begin{cases} [N_0]_{N_0}^{N_1} & , \text{ se } x \in N_0 \\ [f(x)]_{N_0}^{N_1} & , \text{ se } x \in N_1 \setminus N_0 \end{cases} \right) = \begin{cases} [N_0]_{N_0}^{N_2} & , \text{ se } x \in N_0 \\ [f(x)]_{N_0}^{N_2} & , \text{ se } x \in N_2 \setminus N_0 \end{cases}$$

Logo $f_{20} \circ i = i \circ f_{10}$. Da mesma forma é simples verificar que $f_{21} \circ p = p \circ f_{20}$.

Passando ao nível de cadeias, obtemos de (5.1) o diagrama abaixo formado por seqüências curtas exatas:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_*(N_1/N_0) & \xrightarrow{i_\#} & C_*(N_2/N_0) & \xrightarrow{p_\#} & C_*(N_2/N_1) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow (f_{10})_\# & & \downarrow (f_{20})_\# & & \downarrow (f_{21})_\# \\ 0 & \longrightarrow & C_*(N_1/N_0) & \xrightarrow{i_\#} & C_*(N_2/N_0) & \xrightarrow{p_\#} & C_*(N_2/N_1) \longrightarrow 0 \end{array} \quad (5.2)$$

que também é comutativo, já que (5.1) tem essa propriedade.

Podemos escrever o diagrama (5.2) como a seguinte seqüência curta exata de complexos de cadeias com endomorfismos:

$$0 \rightarrow (C_*(N_1/N_0), (f_{10})_\#) \xrightarrow{i_\#} (C_*(N_2/N_0), (f_{20})_\#) \xrightarrow{p_\#} (C_*(N_2/N_1), (f_{21})_\#) \rightarrow 0.$$

Visto que, pela Proposição 1.5, a redução de Leray preserva exatidão, temos que

$$0 \rightarrow (\mathcal{L}C_*(N_1/N_0), \mathcal{L}(f_{10})_\#) \xrightarrow{(i'_4)''} (\mathcal{L}C_*(N_2/N_0), \mathcal{L}(f_{20})_\#) \xrightarrow{(p'_4)''} (\mathcal{L}C_*(N_2/N_1), \mathcal{L}(f_{21})_\#) \rightarrow 0 \quad (5.3)$$

também é uma seqüência exata.

E finalmente, passando à homologia, obtemos a seqüência longa exata de espaços vetoriais graduados e endomorfismos dada por:

$$\begin{aligned} \dots & \xrightarrow{(\partial'_{n+1})''} (\mathcal{L}H_n(N_1/N_0), \mathcal{L}(f_{10})_n) \xrightarrow{(i'_n)''} (\mathcal{L}H_n(N_2/N_0), \mathcal{L}(f_{20})_n) \xrightarrow{(p'_n)''} \\ & \xrightarrow{(p'_n)''} (\mathcal{L}H_n(N_2/N_1), \mathcal{L}(f_{21})_n) \xrightarrow{(\partial'_n)''} (\mathcal{L}H_{n-1}(N_1/N_0), \mathcal{L}(f_{10})_{n-1}) \xrightarrow{(i'_{n-1})''} \dots \end{aligned}$$

que, pela definição do índice discreto homológico de Conley, se reduz a

$$\begin{aligned} \dots & \xrightarrow{(\partial'_{n+1})''} (H_n(A), \chi_n(A)) \xrightarrow{(i'_n)''} (H_n(S), \chi_n(S)) \xrightarrow{(p'_n)''} \\ & \xrightarrow{(p'_n)''} (H_n(A^*), \chi_n(A^*)) \xrightarrow{(\partial'_n)''} (H_{n-1}(A), \chi_{n-1}(A)) \xrightarrow{(i'_{n-1})''} \dots \end{aligned} \quad (5.4)$$

Definição 5.1. A seqüência longa exata (5.4), que às vezes é representada de forma mais

simples por

$$\dots \xrightarrow{\partial} \text{Con}(A) \xrightarrow{i} \text{Con}(S) \xrightarrow{p} \text{Con}(A^*) \xrightarrow{\partial} \text{Con}(A) \xrightarrow{i} \dots$$

é chamada de **sequência do índice discreto homológico** associada ao par atrator-repulsor (A, A^*) . Já a aplicação conectante $\partial : (H(A^*), \chi(A^*)) \rightarrow (H(A), \chi(A))$ recebe o nome de **aplicação bordo definida pela aplicação contínua f** .

Consideremos agora o espaço vetorial graduado

$$C\Delta(S) = H(A) \oplus H(A^*),$$

onde $H(A)$ e $H(A^*)$ são respectivamente os primeiros componentes dos índices discretos homológicos de Conley $\text{Con}(A) = (H(A), \chi(A))$ e $\text{Con}(A^*) = (H(A^*), \chi(A^*))$.

Além disso, seja $\Delta : C\Delta(S) \rightarrow C\Delta(S)$ a aplicação representada matricialmente por

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

sendo que $\partial : H(A^*) \rightarrow H(A)$ é a aplicação bordo definida por f .

Como ∂ é uma aplicação de grau -1 que satisfaz $\Delta^2 = \Delta \circ \Delta = 0$, temos que Δ é uma aplicação bordo e, conseqüentemente, $(C\Delta(S), \Delta)$ é um complexo de cadeias.

Mais ainda, a homologia de $(C\Delta(S), \Delta)$, que denotaremos por $H\Delta(S)$, é isomorfa à $H(S)$. A demonstração deste fato é exatamente a mesma que utilizamos na Proposição 4.1.

Sendo assim, a partir da aplicação Δ juntamente com os espaços vetoriais graduados $H(A)$ e $H(A^*)$, podemos resgatar $H(S)$, o primeiro integrante do índice homológico de Conley $\text{Con}(S) = (H(S), \chi(S))$.

Gostaríamos agora de utilizar os isomorfismos $\chi(A)$ e $\chi(A^*)$ para construir uma nova aplicação δ definida sobre $C\Delta(S)$ que seja capaz de recuperar o isomorfismo $\chi(S)$. Com este intuito apresentamos a proposição abaixo:

Proposição 5.1. *Existe uma aplicação linear*

$$d : H(A^*) \rightarrow H(A)$$

de grau zero tal que

$$\delta : C\Delta(S) \rightarrow C\Delta(S)$$

representada matricialmente por

$$\delta = \begin{pmatrix} \chi(A) & d \\ 0 & \chi(A^*) \end{pmatrix},$$

é uma aplicação de cadeias cuja induzida em homologia, $\delta_* : H\Delta(S) \rightarrow H\Delta(S)$, é conjugada à $\chi(S)$.

Este resultado foi enunciado e demonstrado por Richeson em [17].

Portanto, conhecendo os índices discretos homológicos de Conley de A e A^* e o par de matrizes (Δ, δ) , é possível recuperar o índice discreto homológico de Conley de S .

Agora estamos prontos para definir a matriz de conexão no caso discreto para uma decomposição em par atrator-repulsor.

Definição 5.2. *Sejam S um conjunto invariante isolado de uma aplicação contínua f e (A, A^*) um par atrator-repulsor de S .*

Considere também o espaço vetorial graduado

$$C\Delta(S) = H(A) \oplus H(A^*)$$

e as aplicações lineares

$$\Delta, \delta : C\Delta(S) \rightarrow C\Delta(S)$$

definidas por

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \delta = \begin{pmatrix} \chi(A) & d \\ 0 & \chi(A^*) \end{pmatrix},$$

onde ∂ é a aplicação bordo definida por f e d é a aplicação obtida na Proposição 5.1.

O par de matrizes (Δ, δ) é chamado de **matriz de conexão para a decomposição em par atrator-repulsor** (A, A^*) de S .

Observe nesta definição que a matriz Δ é triangular estritamente superior enquanto δ é apenas triangular superior. E, mais ainda, a matriz Δ tem o quadrado zero, ou seja, $\Delta^2 = 0$, porém o quadrado da matriz δ não necessariamente se anula.

Assim como no caso contínuo, estamos interessados em extrair informações sobre a estrutura dinâmica de uma aplicação contínua apenas utilizando a matriz de conexão e os índices de Conley associados a uma decomposição em par atrator-repulsor.

A sequência de resultados que segue foi baseada na referência [15].

Proposição 5.2. *Sejam S um conjunto invariante isolado de uma aplicação contínua f e (A, A^*) um par atrator-repulsor para S .*

Se qualquer uma das opções abaixo ocorrer:

1. a aplicação bordo ∂ definida por f é não nula
2. $H(S)$ não é isomorfo à $H(A) \oplus H(A^*)$
3. $\chi(S)$ não é conjugada à $\chi(A) \oplus \chi(A^*)$

então $C(A, A^*) \neq \emptyset$.

Demonstração: Provaremos a contrapositiva desta proposição.

Suponha que $C(A, A^*) = \emptyset$. Neste caso temos que $S = A \cup A^*$ e, assim, pela propriedade de aditividade do índice discreto homológico de Conley, segue diretamente que $H(S) \approx H(A) \oplus H(A^*)$ e que $\chi(S)$ é conjugada à $\chi(A) \oplus \chi(A^*)$.

Visto que a sequência do índice discreto homológico (5.4) é uma sequência exata de espaços vetoriais graduados com endomorfismos, temos em particular que

$$\dots \xrightarrow{\partial} H(A) \xrightarrow{i} H(S) \xrightarrow{p} H(A^*) \xrightarrow{\partial} H(A) \xrightarrow{i} \dots$$

é uma sequência exata de espaços vetoriais graduados.

Além disso, $H(S) \approx H(A) \oplus H(A^*)$ e, conseqüentemente, p é uma aplicação sobrejetora.

Portanto, pela exatidão da sequência acima, concluímos que $\partial \equiv 0$. ■

Note que a proposição anterior trata-se de uma versão para o caso discreto da Proposição 4.2. Mais que isso, a Proposição 5.2 possui um conjunto de hipóteses mais rico que o apresentado na Proposição 4.2.

De fato, segundo a proposição que acabamos de ver, mesmo que a aplicação bordo definida por uma aplicação contínua f e o espaço vetorial graduado $H(S)$ não forneçam informação alguma sobre a existência de órbitas conectantes entre A e A^* , a aplicação $\chi(S)$ ainda pode atender este objetivo.

Poderia ocorrer, por exemplo, um caso que satisfaz a proposição abaixo:

Proposição 5.3. *Sejam S um conjunto invariante isolado de uma aplicação contínua f e (A, A^*) um par atrator-repulsor para S .*

Se existir um número natural n tal que

$$Con_q(A) = \begin{cases} (H_q(A), \chi_q(A)) & , \text{ se } q = n \\ (0, 0) & , \text{ se } q \neq n \end{cases} \quad e \quad Con_q(A^*) = \begin{cases} (H_q(A^*), \chi_q(A^*)) & , \text{ se } q = n \\ (0, 0) & , \text{ se } q \neq n \end{cases}$$

então $\partial \equiv 0$ e $H(S) \approx H(A) \oplus H(A^*)$.

A demonstração deste resultado é a mesma que apresentamos na Proposição 4.3.

Num exemplo em que as hipóteses da proposição anterior são atendidas, não poderíamos usar os itens 1. e 2. da Proposição 5.2 para concluir sobre a existência de órbitas conectantes entre A e A^* . Neste caso, ainda teríamos a possibilidade de analisar a aplicação $\chi(S)$ para obter alguma informação sobre o conjunto $C(A, A^*)$ utilizando agora o terceiro item da Proposição 5.2. Vejamos um exemplo concreto desta situação que é apresentado de modo mais sucinto em [15] e [17].

Exemplo 5.1. *Vamos retomar o Exemplo 2.12 para mostrar que existe pelo menos uma órbita de conexão unindo os conjuntos $A = \text{Inv}(N_1)$ e $R = \text{Inv}(N_2)$. As homologias deste exemplo serão calculadas sobre o corpo \mathbb{Q} .*

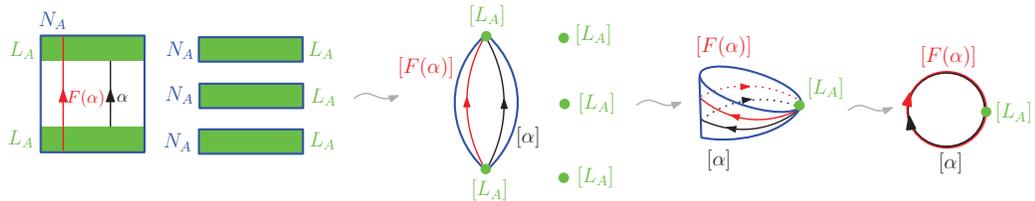
Para isso precisaremos calcular os índices homológicos de Conley de A , R e $S = \text{Inv}(N_1 \cup N_2)$. Lembre-se que no Exemplo 2.14 apresentamos um trio-índice para o par atrator-repulsor (A, R) e, portanto, já temos um par-índice para cada um dos conjuntos A , R e S .

Pela analogia aos cálculos que realizamos nos exemplos da Subseção 3.2.2, encontraremos os índices desejados sem nos ater a muitos detalhes.

• **Índice discreto homológico de Conley de A**

Considere o par-índice $P_A = (N_A, L_A)$ para A que mostramos na Figura 2.23.

O tipo de homotopia do espaço pontuado N_A/L_A é o mesmo da S^1 . Portanto $H_1(N_A/L_A)$ possui apenas um gerador, que nomeamos $[\alpha]$. Representamos na figura abaixo as classes $[\alpha]$ e $[F(\alpha)]$:



Com isso podemos concluir que $(F_{P_A})_1([\alpha]) = (F_{P_A})_\#([\alpha]) = [F(\alpha)] = [\alpha]$. Visto que $[\alpha]$ é um gerador de $H_1(N_A/L_A)$ e $(F_{P_A})_1$ é uma aplicação linear, obtemos que $(F_{P_A})_1 = \text{Id}$ e, conseqüentemente,

$$\mathcal{L}(H_1(N_A/L_A), (F_{P_A})_1) = \mathcal{L}(\mathbb{Q}, \text{Id}) = (\mathbb{Q}, \text{Id}).$$

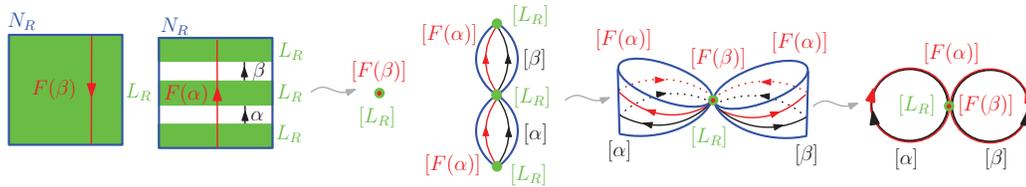
Portanto

$$\text{Con}_q(A) = \begin{cases} (\mathbb{Q}, \text{Id}) & , \text{ se } q = 1 \\ (0, 0) & , \text{ se } q \neq 1 \end{cases}$$

• **Índice discreto homológico de Conley de R**

Para R vamos considerar o par-índice $P_R = (N_R, L_R)$ que apresentamos na Figura 2.24.

A homologia do espaço pontuado N_R/L_R é igual à de $S^1 \vee S^1$, logo $H_1(N_R/L_R)$ possui dois geradores $[\alpha]$ e $[\beta]$. Exibimos na figura abaixo a representação das classes $[\alpha]$ e $[\beta]$ bem como das classes $[F(\alpha)]$ e $[F(\beta)]$:



Sendo assim, temos que $(F_{P_R})_1([\alpha]) = [\alpha] + [\beta]$ e $(F_{P_R})_1([\beta]) = 0$.

Portanto a aplicação linear $(F_{P_R})_1$ é representada matricialmente por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note $A^n = A$ e disto segue que $g\ker A = \ker A = \langle (0, 1) \rangle$. Escolhendo a base $\{(1, 0), (0, 1)\}$ para $H_1(N_R/L_R)$, obtemos os seguintes isomorfismos:

$$\frac{H_1(N_R/L_R)}{g\ker(F_{P_R})_1} \approx \frac{\langle (1, 0), (0, 1) \rangle}{\langle (0, 1) \rangle} \approx \langle (1, 0) \rangle. \quad (5.5)$$

Deste modo, a aplicação

$$(F_{P_R})'_1 : \frac{H_1(N_R/L_R)}{g\ker(F_{P_R})_1} \rightarrow \frac{H_1(N_R/L_R)}{g\ker(F_{P_R})_1}$$

pode ser reescrita como

$$(F_{P_R})'_1(a(1, 0)) = (F_{P_R})_1(a(1, 0)) + \langle (0, 1) \rangle.$$

Visto que $(F_{P_R})_1(1, 0) = (1, 1) = (1, 0) + (0, 1)$, temos que $(F_{P_R})'_1(1, 0) = (F_{P_R})_1(1, 0) + \langle (0, 1) \rangle = (1, 0) + \langle (0, 1) \rangle$. Mas, $(1, 0) + \langle (0, 1) \rangle$ é identificado com $(1, 0)$ pelo segundo isomorfismo de (5.5), logo $(F_{P_R})'_1 = \text{Id}$.

Com isso,

$$\mathcal{L}(H_1(N_R/L_R), (F_{P_R})_1) = LI\left(\frac{H_1(N_R/L_R)}{\text{gker}(F_{P_R})_1}, (F_{P_R})'_1\right) = LI(\mathbb{Q}, \text{Id}) = (\mathbb{Q}, \text{Id})$$

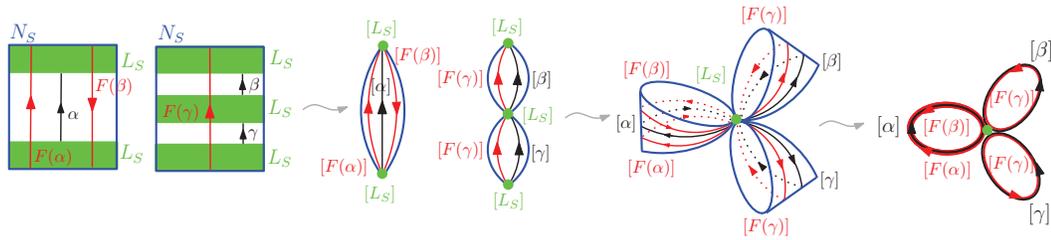
e, portanto,

$$\text{Con}_q(R) = \begin{cases} (\mathbb{Q}, \text{Id}) & , \text{ se } q = 1 \\ (0, 0) & , \text{ se } q \neq 1 \end{cases}$$

• **Índice discreto homológico de Conley de S**

Para finalizar, seja $P_S = (N_S, L_S)$ o par-índice para S que foi exibido na Figura 2.22.

O espaço pontuado N_S/L_S tem o mesmo tipo de homotopia de $S^1 \vee S^1 \vee S^1$ e, sendo assim, $H_1(N_S/L_S)$ possui três geradores, $[\alpha]$, $[\beta]$ e $[\gamma]$. Na figura a seguir apresentamos as representações das classes $[\alpha]$, $[\beta]$ e $[\gamma]$, assim como das classes $[F(\alpha)]$, $[F(\beta)]$ e $[F(\gamma)]$.



Segue que $(F_{P_S})_1([\alpha]) = [\alpha]$, $(F_{P_S})_1([\beta]) = -[\alpha]$ e $(F_{P_S})_1([\gamma]) = [\beta] + [\gamma]$ e, portanto, a matriz da aplicação linear $(F_{P_S})_1$ é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Visto que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 - n \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, obtemos que $\text{gker } A = \langle (1, 1, 0) \rangle$. Tomemos para $H_1(N_S/L_S)$ a base $\{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ e assim temos os seguintes isomorfismos:

$$\frac{H_1(N_S/L_S)}{\text{gker}(F_{P_S})_1} \approx \frac{\langle (1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle}{\langle (1, 1, 0) \rangle} \approx \langle (1, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle.$$

Então, basta analisarmos a ação de $(F_{P_S})'_1$ nos elementos $(1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

Como

$$(F_{P_S})'_1(1, 0, 0) = (1, 0, 0) + \langle (1, 1, 0) \rangle \quad e$$

$$(F_{P_S})'_1(0, 0, 1) = (0, 1, 1) + \langle (1, 1, 0) \rangle = [-(1, 0, 0) + (0, 0, 1)] + \langle (1, 1, 0) \rangle,$$

concluimos que $(F_{P_S})'_1$ tem a forma matricial dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo

$$\mathcal{L}(H_1(N_S/L_S), (F_{P_S})_1) = LI\left(\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \left(\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

e, como consequência obtemos que

$$\text{Con}_q(S) = \begin{cases} \left(\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) & , \text{ se } q = 1 \\ (0, 0) & , \text{ se } q \neq 1 \end{cases}$$

Observe que as hipóteses da Proposição 5.3 se realizam neste exemplo e, portanto, ∂ e $H(S)$ não servem para nos dar informações sobre a existência de órbitas que conectam A e R .

Porém temos ainda que $\chi(S)$ não é conjugada à aplicação $\chi(A) \oplus \chi(R)$, pois $\chi_1(A) \oplus \chi_1(R) = \text{Id} \oplus \text{Id}$ fixa todo ponto de $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$ enquanto

$$\chi_1(S) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

não tem essa propriedade (tome $(1, 1) \in \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$ por exemplo).

Sendo assim, pelo item 3. da Proposição 5.2, concluimos que o conjunto de órbitas conectantes de R à A é não vazio.

Podemos utilizar a construção do exemplo anterior para exibir uma matriz de conexão no caso discreto para uma decomposição em par atrator-repulsor.

Exemplo 5.2. *Reconsidere o Exemplo 5.1, onde analisamos as conexões entre os conjuntos $A = \text{Inv}(N_1)$ e $R = \text{Inv}(N_2)$ que compõem $S = \text{Inv}(N_1 \cup N_2)$.*

Constatamos que os índices discretos homológicos de Conley de A e R satisfazem as hipóteses da Proposição 5.3, logo a aplicação bordo $\partial = \{\partial^n\}$ definida pela aplicação contínua F é nula. Disto segue que

$$\Delta^n = \begin{pmatrix} 0 & \partial^n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e, assim, a primeira matriz que constitui a matriz de conexão (Δ, δ) para a decomposição em par atrator-repulsor (A, R) é uma coleção de matrizes nulas.

Vamos buscar agora a matriz $\delta = \{\delta^n\}$ que, segundo a Proposição 5.1, é uma aplicação de cadeias definida sobre $C\Delta(S) = H(A) \oplus H(R)$ cuja induzida em homologia, que denotamos por $\delta_* = \{\delta_n\}$, é conjugada à $\chi(S)$.

A aplicação δ_n é definida por

$$\begin{aligned} \delta_n : H_n\Delta(S) &\rightarrow H_n\Delta(S) \\ (x, y) + \text{im } \Delta_{n+1} &\mapsto \delta^n(x, y) + \text{im } \Delta_{n+1} \end{aligned}$$

onde $H_n\Delta(S) = \frac{\ker \Delta_n}{\text{im } \Delta_{n+1}}$ é a n -ésima homologia do complexo de cadeias $(C\Delta(S), \Delta)$. E já que $\text{im } \Delta \equiv 0$, temos que δ_n pode ser identificada à δ^n para cada $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, $\delta = \{\delta^n\}$ identifica-se com $\delta_* = \{\delta_n\}$ que, por sua vez, é conjugada à $\chi(S)$.

Mas pelo Exemplo 5.1, temos que $\chi_1(S)$ é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e $\chi_n(S)$ é a matriz nula para qualquer $n \neq 1$.

Concluimos assim que a segunda matriz que forma a matriz de conexão (Δ, δ) para a decomposição em par atrator-repulsor (A, R) é uma coleção de matrizes nulas a menos da matriz δ^1 que é representada por

$$\begin{pmatrix} \text{Id} & -\text{Id} \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix}.$$

Vamos dar continuidade a apresentação de resultados que mostram a importância dinâmica da matriz de conexão e do índice discreto homológico de Conley.

A próxima proposição nos ajuda a concluir sobre a existência de órbita conectante entre o repulsor A^* e o atrator A de um conjunto invariante isolado S partindo apenas do conhecimento dos autovalores das aplicações $\chi(A^*)$, $\chi(A)$ e $\chi(S)$.

Proposição 5.4. *Sejam S um conjunto invariante isolado de uma aplicação contínua f e (A, A^*) um par atrator-repulsor para S .*

Se existir um número natural n tal que $\sigma(\chi_n(S)) \neq \sigma(\chi_n(A)) \cap \sigma(\chi_n(A^*))$ ¹ então $C(A, A^*) \neq \emptyset$.

Demonstração: Pela Proposição 5.2 é suficiente mostrar que as aplicações $\chi_n(S)$ e $\chi_n(A) \oplus \chi_n(A^*)$ não são conjugadas para obter que $C(A, A^*) \neq \emptyset$.

Suponha o contrário, ou seja, que existe um isomorfismo $h : H_n(S) \rightarrow H_n(A) \oplus H_n(A^*)$ de modo que $h \circ \chi_n(S) = [\chi_n(A) \oplus \chi_n(A^*)] \circ h$. Neste caso, teríamos que $\sigma(\chi_n(S)) = \sigma(\chi_n(A) \oplus \chi_n(A^*))$.

Mas é simples verificar que $\sigma(\chi_n(A) \oplus \chi_n(A^*)) = \sigma(\chi_n(A)) \cap \sigma(\chi_n(A^*))$ e, assim, chegamos à conclusão que $\sigma(\chi_n(S)) = \sigma(\chi_n(A)) \cap \sigma(\chi_n(A^*))$. Contradição. ■

Para finalizar, vamos conhecer um resultado que indica um caso especial em que a matriz δ também detecta órbitas de conexão.

Proposição 5.5. *Sejam S um conjunto invariante isolado de uma aplicação contínua f e (A, A^*) um par atrator-repulsor para S .*

Se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$Con_q(A) = \begin{cases} (H_q(A), Id) & , \text{ se } q = n \\ (0, 0) & , \text{ se } q \neq n \end{cases} \quad e \quad Con_q(A^*) = \begin{cases} (H_q(A^*), Id) & , \text{ se } q = n \\ (0, 0) & , \text{ se } q \neq n \end{cases}$$

e, além disso, a n -ésima aplicação de $d = \{d^q\}_{q \in \mathbb{N}}$ (apresentada na Definição 5.2) é não nula, então $C(A, A^) \neq \emptyset$.*

Demonstração: A ideia da prova é mostrar que $\chi_n(S)$ não pode ser conjugada a $\chi_n(A) \oplus \chi_n(A^*)$ caso as hipóteses desta proposição sejam satisfeitas, pois assim concluímos que $C(A, A^*) \neq \emptyset$ pelo terceiro item da Proposição 5.2.

Primeiramente vamos analisar a aplicação $\chi_n(S)$.

Seja $\delta = \{\delta^q\}_{q \in \mathbb{N}}$ a segunda matriz da matriz de conexão (Δ, δ) para a decomposição em par atrator-repulsor (A, A^*) .

Como $\chi_n(A) = \chi_n(A^*) = Id$ para um certo $n \in \mathbb{N}$, então $\delta^n : H_n(A) \oplus H_n(A^*) \rightarrow H_n(A) \oplus H_n(A^*)$ é definida por:

$$\delta^n = \begin{pmatrix} Id & d^n \\ 0 & Id \end{pmatrix}.$$

Temos ainda que a induzida de δ^n em homologia, que denotaremos por δ_n , é conjugada à aplicação $\chi_n(S)$ pela Proposição 5.1.

Por definição, δ_n é dada por

¹ $\sigma(T)$ denota o conjunto dos autovalores de uma aplicação linear T

$$\begin{aligned} \delta_n : H_n\Delta(S) &\rightarrow H_n\Delta(S) \\ (x, y) + \text{im } \Delta_{n+1} &\mapsto \delta^n(x, y) + \text{im } \Delta_{n+1} \end{aligned}$$

onde $H_n\Delta(S) = \frac{\ker \Delta_n}{\text{im } \Delta_{n+1}}$ é a n -ésima homologia do complexo de cadeias $(C\Delta(S), \Delta)$.

Mas os índices discretos homológicos de Conley de A e A^* satisfazem a Proposição 5.3 e, portanto, $\partial \equiv 0$. Sendo assim, $\text{im } \Delta \approx \text{im } \partial = \{0\}$, donde segue que δ_n pode ser identificada à aplicação δ^n .

Logo a aplicação $\chi_n(S)$ é conjugada à δ_n que, por sua vez, pode ser representada pela matriz de δ^n :

$$A = \begin{pmatrix} Id & d^n \\ 0 & Id \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, $\chi_n(A) \oplus \chi_n(A^*)$ é vista matricialmente da seguinte forma:

$$B = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix}.$$

Afirmamos que as matrizes A e B não são conjugadas.

De fato, uma vez que d^n é não nula, existe $y \in H_n(A^*)$ tal que $d^n(y) \neq 0$. Assim

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^n(y) \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

e, conseqüentemente, $(0, y) \in H(A) \oplus H(A^*)$ não é um ponto fixo de A . Porém todo ponto de $H(A) \oplus H(A^*)$ é um ponto fixo de B e, portanto, A e B não podem ser matrizes conjugadas.

Neste caso, como $\chi_n(S)$ é conjugada à A e $\chi_n(A) \oplus \chi_n(A^*)$ é representada por B , concluímos que $\chi_n(S)$ e $\chi_n(A) \oplus \chi_n(A^*)$ não são conjugadas.

Com isso, basta utilizar o item 3. da Proposição 5.2 para obtermos que $C(A, A^*) \neq \emptyset$. ■

Observe que, de acordo com este resultado, a matriz de conexão no caso discreto pode detectar conexões entre alguns tipos de singularidades que possuem o mesmo índice homológico de Conley, diferentemente do que ocorre no caso contínuo.

Note ainda que poderíamos ter descoberto a conexão entre os conjuntos A e R do Exemplo 5.1 utilizando esta nova proposição que acabamos de demonstrar. Com efeito, pelos exemplos 5.1 e 5.2 temos que $\text{Con}_1(A) = \text{Con}_1(R) = (\mathbb{Q}, \text{Id})$ e que a primeira aplicação de d é igual a $-\text{Id}$ (e portanto não nula). Logo, $C(A, A^*) \neq \emptyset$ conforme a Proposição 5.5.

5.2 Matriz de Conexão para Decomposição de Morse

Neste momento generalizaremos o conceito de matriz de conexão que vimos na seção passada para o caso em que o conjunto invariante isolado em questão admite uma decomposição de Morse.

Esta generalização acontecerá nos mesmos moldes do caso contínuo que descrevemos na Seção 4.2. Isto é, primeiramente obteremos uma trança de espaços vetoriais graduados com endomorfismos, chamada trança do índice discreto homológico, que generaliza a sequência do índice discreto homológico e cujas componentes são os índices discretos homológicos de Conley $(H(M_I), \chi(M_I))$, com $I \in \mathcal{I}$. Em seguida, a partir de um par de matrizes (Δ, δ) com certas propriedades, construiremos outra trança de espaços vetoriais graduados com endomorfismos e diremos que (Δ, δ) é uma matriz de conexão quando tal trança for isomorfa à trança do índice discreto homológico.

Assim como ocorre no caso contínuo, a definição de matriz de conexão para uma decomposição de Morse é um tanto quanto abstrata, porém trata-se de uma ferramenta que pode auxiliar na busca de informações dinâmicas.

Sejam S um conjunto invariante isolado de uma aplicação contínua f , $\mathcal{M} = \{M_\pi\}_{\pi \in P}$ uma decomposição de Morse para S , onde $(P, <)$ é um conjunto finito parcialmente ordenado, e $\mathcal{N} = \{N(I)\}_{I \in \mathcal{A}}$ uma filtração-índice para \mathcal{M} .

Dado $I \in \mathcal{I}$, considere o seguinte intervalo atrator:

$$Q_I = \{p \in P / p < q \ \forall q \in I\}.$$

Temos que (Q_I, I) é uma dupla adjacente cuja união $Q_I I = Q_I \cup I$ também forma um intervalo atrator. Portanto, pelo primeiro item da Proposição 2.6, o par $(N(Q_I I), N(Q_I))$ definido pela filtração \mathcal{N} constitui um par-índice para M_I para cada intervalo $I \in \mathcal{I}$.

Para simplificar, vamos utilizar a notação $C_{\mathcal{N}}(I)$ para o complexo de cadeias $C_*(N(Q_I I)/N(Q_I))$ que se refere ao espaço vetorial graduado formado pelas cadeias do espaço pontuado $N(Q_I I)/N(Q_I)$. Usaremos também a notação f_I para denotar a aplicação-índice associada ao par-índice $(N(Q_I I), N(Q_I))$.

Observe que aplicando a redução de Leray seguida do funtor de homologia no par $(C_{\mathcal{N}}(I), (f_I)_\#)$, obtemos como resultado o próprio índice discreto homológico de Conley do conjunto M_I que denotamos por $\text{Con}(M_I) = (H(M_I), \chi(M_I))$.

Pela Proposição 2.5, para cada dupla adjacente (I, J) , temos que (M_I, M_J) forma um par atrator-repulsor para M_{IJ} . Para um par como este, consideraremos o seguinte trio-índice

definido pela filtração \mathcal{N} :

$$(N(Q_{IJ}), N(Q_{IJ}I), N(Q_{IJ}IJ)).$$

Do mesmo modo que fizemos no início da seção anterior para construir a sequência (5.3), podemos partir do trio-índice exibido acima para (M_I, M_J) e obter uma sequência exata de complexos de cadeias com endomorfismos da forma:

$$0 \rightarrow (\mathcal{L}C_{\mathcal{N}}(I), \mathcal{L}(f_I)_{\#}) \xrightarrow{i(I,J)} (\mathcal{L}C_{\mathcal{N}}(IJ), \mathcal{L}(f_{IJ})_{\#}) \xrightarrow{p(IJ,J)} (\mathcal{L}C_{\mathcal{N}}(J), \mathcal{L}(f_J)_{\#}) \rightarrow 0. \quad (5.6)$$

Chegamos então ao resultado abaixo, demonstrado por Richeson em [17], que trata-se de uma versão para o caso discreto da Proposição 4.4.

Proposição 5.6. *Sejam S um conjunto invariante isolado de uma aplicação contínua f , \mathcal{M} uma decomposição de Morse para S e \mathcal{N} uma filtração-índice associada à \mathcal{M} .*

A coleção $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}$ consistindo dos pares de complexos de cadeias com endomorfismos $(\mathcal{L}C_{\mathcal{N}}(I), \mathcal{L}(f_I)_{\#})$, com $I \in \mathcal{I}$, e das aplicações de cadeias $i(I, IJ)$ e $p(IJ, J)$ fornecidas pela sequência exata (5.6), com $(I, J) \in \mathcal{I}_2$, é uma trança de complexos de cadeias com endomorfismos.

Seja $\mathcal{H} := \mathcal{H}\mathcal{C}_{\mathcal{N}}$ a trança de espaços vetoriais graduados com endomorfismos gerada por $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}$. Os elementos de \mathcal{H} são as homologias dos pares $(\mathcal{L}C_{\mathcal{N}}(I), \mathcal{L}(f_I)_{\#})$, ou seja, os índices discretos homológicos de Conley $(H(M_I), \chi(M_I))$, bem como as aplicações

$$i(I, IJ) : H(M_I) \rightarrow H(M_{IJ}) \text{ de grau } 0$$

$$p(IJ, J) : H(M_{IJ}) \rightarrow H(M_J) \text{ de grau } 0$$

$$\partial(J, I) : H(M_J) \rightarrow H(M_I) \text{ de grau } -1$$

que obtemos ao relacionar cada sequência curta exata (5.6) a uma sequência longa exata em homologia da forma

$$\begin{aligned} \dots &\xrightarrow{\partial(J,I)} (H(M_I), \chi(M_I)) \xrightarrow{i(I,IJ)} (H(M_{IJ}), \chi(M_{IJ})) \xrightarrow{p(IJ,J)} \\ &p(IJ,J) \xrightarrow{(H(M_J), \chi(M_J))} \xrightarrow{\partial(J,I)} (H(M_I), \chi(M_I)) \xrightarrow{i(I,IJ)} \dots \end{aligned}$$

ou, reescrevendo,

$$\dots \xrightarrow{\partial(J,I)} \text{Con}(M_I) \xrightarrow{i(I,IJ)} \text{Con}(M_{IJ}) \xrightarrow{p(IJ,J)} \text{Con}(M_J) \xrightarrow{\partial(J,I)} \text{Con}(M_I) \xrightarrow{i(I,IJ)} \dots$$

Obtemos assim a seguinte definição:

Definição 5.3. *A trança de espaços vetoriais graduados com endomorfismos \mathcal{H} recém construída é chamada **trança do índice discreto homológico**.*

Vamos apresentar agora os componentes necessários para definir uma matriz de conexão no caso discreto para a decomposição de Morse $\mathcal{M} = \{M_\pi\}_{\pi \in P}$.

Dado $I \in \mathcal{I}$, considere o espaço vetorial graduado

$$C\Delta(I) = \bigoplus_{\pi \in I} H(M_\pi)$$

e duas aplicações lineares $\Delta(I), \delta(I) : C\Delta(I) \rightarrow C\Delta(I)$ representadas respectivamente por matrizes nas formas

$$\Delta(I) = [\Delta(\pi, \pi') : H(M_{\pi'}) \rightarrow H(M_\pi)]_{\pi, \pi' \in I}$$

$$\delta(I) = [\delta(\pi, \pi') : H(M_{\pi'}) \rightarrow H(M_\pi)]_{\pi, \pi' \in I}$$

Vamos impor que a matriz $\Delta(P)$, denotada apenas por Δ , seja uma aplicação bordo triangular estritamente superior e que a matriz $\delta(P)$, por sua vez denotada por δ , seja uma aplicação de cadeias de grau zero triangular superior. (caso necessário relembre estes conceitos na Definição 4.4)

Como consequência da Proposição 4.5, temos que o complexo de cadeias $(C\Delta(P), \Delta)$ gera subcomplexos de cadeias $(C\Delta(I), \Delta(I))$, para cada $I \in \mathcal{I}$, com $\Delta(I)$ também triangular estritamente superior.

Assim, para cada $I, J \in \mathcal{I}$, podemos construir uma sequência exata de complexos de cadeias com endomorfismos dada por

$$0 \rightarrow (C\Delta(I), \delta(I)) \xrightarrow{i(I, IJ)} (C\Delta(IJ), \delta(IJ)) \xrightarrow{p(IJ, J)} (C\Delta(J), \delta(J)) \rightarrow 0, \quad (5.7)$$

onde $i(I, IJ)$ e $p(IJ, J)$ são respectivamente a inclusão e a projeção canônicas.

Temos então a seguinte proposição que nada mais é que uma versão para o caso discreto da Proposição 4.8.

Proposição 5.7. *Considere o espaço vetorial graduado*

$$C\Delta(P) = \bigoplus_{\pi \in P} H(M_\pi),$$

uma aplicação bordo triangular estritamente superior

$$\Delta : C\Delta(P) \rightarrow C\Delta(P)$$

e uma aplicação de cadeias de grau zero triangular superior

$$\delta : C\Delta(P) \rightarrow C\Delta(P).$$

A coleção $\mathcal{C}\Delta\delta$ consistindo dos complexos de cadeias $(C\Delta(I), \Delta(I))$ com endomorfismos $\delta(I)$, $I \in \mathcal{I}$, e das aplicações de cadeias $i(I, IJ)$ e $p(IJ, J)$ definidas por (5.7), $(I, J) \in \mathcal{I}_2$, constitui uma trança de complexos de cadeias com endomorfismos.

Para demonstrar este resultado basta utilizar os mesmos passos que seguimos para a prova da Proposição 4.8.

Seja $\mathcal{H}\Delta\delta := \mathcal{H}\mathcal{C}\Delta\delta$ a trança de espaços vetoriais graduados com endomorfismos gerada por $\mathcal{C}\Delta\delta$. Por definição de trança gerada, temos que $\mathcal{H}\Delta\delta$ é formada pelas homologias dos pares $(C\Delta(I), \delta(I))$, que denotamos por $(H\Delta(I), \delta_*(I))$, além das aplicações

$$\bar{i}(I, IJ) : H\Delta(I) \rightarrow H\Delta(IJ) \text{ de grau zero}$$

$$\bar{p}(IJ, J) : H\Delta(IJ) \rightarrow H\Delta(J) \text{ de grau zero}$$

$$\bar{\partial}(J, I) : H\Delta(J) \rightarrow H\Delta(I) \text{ de grau } -1$$

que são obtidas ao associarmos cada sequência exata (5.7) a uma sequência exata em homologia do tipo

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}(J,I)} (H\Delta(I), \delta_*(I)) \xrightarrow{\bar{i}(I,IJ)} (H\Delta(IJ), \delta_*(IJ)) \xrightarrow{\bar{p}(IJ,J)} \\ \xrightarrow{\bar{p}(IJ,J)} (H\Delta(J), \delta_*(J)) \xrightarrow{\bar{\partial}(J,I)} (H\Delta(I), \delta_*(I)) \xrightarrow{\bar{i}(I,IJ)} \dots \end{aligned}$$

Sendo assim, a partir do par de matrizes (Δ, δ) construímos uma trança de espaços vetoriais graduados com endomorfismos que denotamos por $\mathcal{H}\Delta\delta$.

Assim como aconteceu no estudo de fluxos, um questionamento natural é se existe alguma relação entre a trança $\mathcal{H}\Delta\delta$ que acabamos de obter e a trança do índice discreto homológico \mathcal{H} . No caso em que $\mathcal{H}\Delta\delta$ e \mathcal{H} tratam-se de tranças isomorfas, chamamos (Δ, δ) de matriz de conexão. Veja a definição formal:

Definição 5.4. *Sejam S um conjunto invariante isolado de uma aplicação contínua f e $\mathcal{M} = \{M_\pi\}_{\pi \in P}$ uma decomposição de Morse para S .*

Considere ainda o espaço vetorial graduado

$$C\Delta(P) = \bigoplus_{\pi \in P} H(M_\pi)$$

e duas aplicações lineares

$$\Delta, \delta : C\Delta(P) \rightarrow C\Delta(P).$$

Dizemos que (Δ, δ) é uma **matriz de conexão para a decomposição de Morse** \mathcal{M} se

1. Δ é uma aplicação bordo triangular estritamente superior
2. δ é uma aplicação de cadeias de grau zero triangular superior
3. a trança de espaços vetoriais graduados com endomorfismos $\mathcal{H}\Delta\delta$ é isomorfa à trança do índice discreto homológico \mathcal{H}

Dado qualquer conjunto invariante isolado S com uma decomposição de Morse \mathcal{M} , sempre existe uma matriz de conexão (Δ, δ) para \mathcal{M} . Este é um resultado muito importante enunciado e demonstrado em [17].

Chamamos a atenção para o fato de que a matriz de conexão no caso discreto também tem o papel de codificar as informações algébricas da trança do índice discreto homológico. De fato, pela terceira condição da Definição 5.4, uma matriz de conexão (Δ, δ) gera uma trança de espaços vetoriais graduados com endomorfismos $\mathcal{H}\Delta\delta$ que é isomorfa à trança do índice discreto homológico \mathcal{H} .

Disto segue, pela definição de isomorfismo de tranças de espaços vetoriais graduados com endomorfismos, que para cada $I \in \mathcal{I}$ as homologias $H\Delta(I)$ e $H(M_I)$ são isomorfas e as aplicações lineares $\delta_*(I)$ e $\chi(M_I)$ são conjugadas. Portanto, a partir de uma matriz de conexão é possível recuperar os índices discretos homológicos de Conley de cada conjunto M_I .

Finalmente vejamos de que forma a matriz de conexão no caso discreto pode dar alguma contribuição na descrição dinâmica de uma aplicação contínua com relação à procura de órbitas conectantes. O resultado abaixo trata-se de uma versão para o caso discreto da Proposição 4.9.

Proposição 5.8. *Sejam S um conjunto invariante isolado de uma aplicação contínua f , $\mathcal{M} = \{M_\pi\}_{\pi \in P}$ uma decomposição de Morse associada à S e (Δ, δ) uma matriz de conexão para \mathcal{M} .*

Se P está munido da ordem da aplicação contínua e $\pi, \pi' \in P$ são elementos adjacentes tais que $\Delta(\pi, \pi') \neq 0$, então $C(M_\pi, M_{\pi'}) \neq \emptyset$.

Podemos demonstrar este resultado de modo análogo à Proposição 4.9.

Assim finalizamos a apresentação da teoria de Conley e da matriz de conexão para as dinâmicas contínua e discreta.

Alguns pontos interessantes que ainda podem ser abordados são os seguintes:

- As entradas $\Delta(\pi, \pi')$ da matriz Δ podem fornecer alguma informação sobre o fluxo (ou sobre a aplicação contínua) quando π e π' não são adjacentes?
- No caso em que a decomposição de Morse não está ordenada pela ordem do fluxo (ou pela ordem da aplicação contínua), podemos utilizar a matriz Δ para analisar o comportamento dinâmico?
- Que tipo de contribuição a matriz δ pode oferecer no caso geral em que o conjunto invariante isolado está decomposto em mais de dois conjuntos invariantes isolados?
- Como podemos relacionar as propriedades de um fluxo ϕ com as propriedades dos homeomorfismos induzidos por ϕ em algum tempo τ ? (o homeomorfismo induzido por ϕ no tempo τ foi definido no primeiro capítulo por $f_\tau(x) = \phi(\tau, x)$)

Apêndice A

Na Seção 1.1 apresentamos a família quadrática $F_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$. Para valores de μ maiores que 4, construímos o conjunto invariante

$$\Lambda = I - \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right)$$

formado por todos os pontos do intervalo $I = [0, 1]$ cujas órbitas permanecem em I .

Mantendo as notações utilizadas no Exemplo 1.3, mostraremos neste apêndice que Λ é um conjunto de Cantor e que o Teorema 1.1 que descreve o comportamento dinâmico de F_μ sobre Λ é verdadeiro.

Primeiramente relembre que os conjuntos A_0 e A_n , com $n \in \mathbb{N}^*$, foram definidos por

$$A_0 = \{x \in I \mid F_\mu(x) \notin I\} \quad \text{e} \quad A_n = \{x \in I \mid F_\mu^n(x) \in A_0\}.$$

Visto que A_0 é um intervalo aberto centrado em $\frac{1}{2}$, temos que $I - A_0$ consiste de dois intervalos fechados, I_0 à esquerda e I_1 à direita. Veja a Figura 5.1.

Ainda na Figura 5.1, note que F_μ leva I_0 e I_1 monotonicamente sobre I , sendo crescente em I_0 e decrescente em I_1 . Logo existe um par de intervalos abertos, um contido em I_0 e outro em I_1 , que são levados sobre A_0 por F_μ . Por definição, temos que a união desse par de intervalos é exatamente o conjunto A_1 .

Considere agora $I - (A_0 \cup A_1)$. Este conjunto é formado por quatro intervalos fechados disjuntos e cada um deles é levado monotonicamente sobre I_0 ou sobre I_1 por F_μ , sendo que F_μ é crescente sobre os dois primeiros intervalos e decrescente sobre os dois últimos.

Sendo assim, F_μ^2 leva cada um destes quatro intervalos fechados monotonicamente sobre I , donde segue que cada um deles contém um subintervalo aberto que é levado sobre A_0 por F_μ^2 . Veja que a união destes subintervalos é precisamente o conjunto A_2 .

Sucessivamente temos que A_k é a união de 2^k intervalos abertos disjuntos e como $A_n \cap$

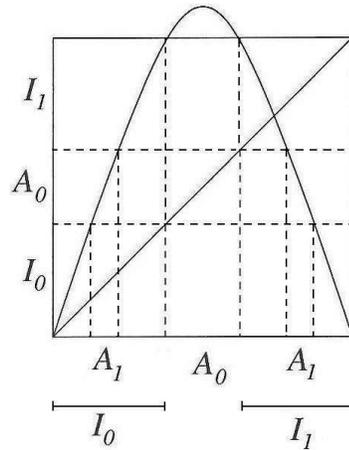
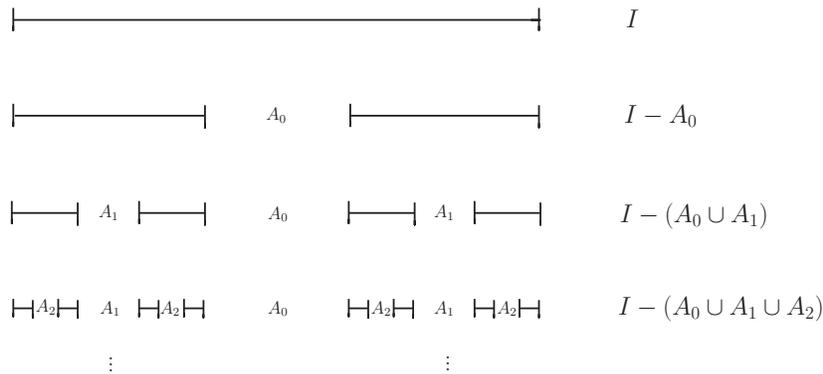


Figura 5.1: Representação de A_0 e A_1

$A_m = \emptyset$ se $m \neq n$, segue que $\bigcup_{n=0}^k A_n$ consiste de $2^0 + 2^1 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$ intervalos abertos disjuntos e, conseqüentemente, $I - \left(\bigcup_{n=0}^k A_n\right)$ é formado por $(2^{k+1} - 1) + 1 = 2^{k+1}$ intervalos fechados disjuntos.

Veja na figura abaixo a sucessão de passos que acabamos de desenvolver:



Fazendo $k \rightarrow \infty$ obtemos $\Lambda = \left(I - \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right)$ como um conjunto de Cantor.

Nosso próximo objetivo é descrever a dinâmica de F_μ sobre o conjunto Λ quando $\mu > 4$. Para isso vamos obter uma conjugação entre F_μ e uma aplicação cujo comportamento seja de análise mais simples.

Seja

$$\Sigma_2 = \prod_{i \in \mathbb{N}} \{0, 1\} = \{(s_i) = (s_0 s_1 s_2 \dots) | s_i \in \{0, 1\}\}$$

o espaço das sequências infinitas de zeros e uns munido da métrica

$$d((s_i), (t_i)) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Note que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2,$$

logo $d((s_i), (t_i))$ é uma série convergente para qualquer $(s_i), (t_i) \in \Sigma_2$.

A seguinte proposição nos diz que dadas duas sequências de Σ_2 , podemos decidir rapidamente se elas estão próximas ou não, apenas pela comparação de seus primeiros termos. Mais ainda, tal proximidade é proporcional à quantidade de primeiros termos que coincidem entre as sequências dadas.

Proposição 5.9. *Sejam $(s_i), (t_i) \in \Sigma_2$. Se $s_i = t_i$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$ então $d((s_i), (t_i)) \leq \frac{1}{2^n}$ e, reciprocamente, se $d((s_i), (t_i)) < \frac{1}{2^n}$ então $s_i = t_i$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$.*

Demonstração: Sendo $s_i = t_i$ para $i = 0, \dots, n$ temos que

$$\begin{aligned} d((s_i), (t_i)) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = \sum_{i>n} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \sum_{i>n} \frac{1}{2^i} = \\ &= 2 - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) = 2 - \left(\frac{2^{n+1} - 1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que $s_j \neq t_j$ para algum $j \in \{0, \dots, n\}$.

Neste caso

$$d((s_i), (t_i)) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \geq \frac{|s_j - t_j|}{2^j} = \frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^n},$$

donde segue a contrapositiva do que queríamos provar. ■

Consideremos também a aplicação contínua

$$\begin{aligned} \sigma : \Sigma_2 &\rightarrow \Sigma_2 \\ (s_i) &\mapsto (s_{i+1}) \end{aligned}$$

chamada deslocamento à esquerda em Σ_2 .

O mais interessante é que, pela simplicidade de σ , é possível entender completamente o seu comportamento dinâmico sobre Σ_2 . Vamos ressaltar algumas de suas propriedades.

Primeiramente, os pontos periódicos de período n de σ correspondem às sequências repetidas da forma $(s_0 s_1 \dots s_{n-1} s_0 s_1 \dots s_{n-1} \dots)$, portanto σ possui exatamente 2^n pontos periódicos de período n para cada $n \in \mathbb{N}$.

Em segundo lugar, os pontos periódicos de σ constituem um subconjunto denso de Σ_2 . De fato, dado $s = (s_i) \in \Sigma_2$ basta exibir uma sequência de pontos periódicos $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de σ que converge para s .

Defina a sequência $w_k = (s_0 s_1 \dots s_k s_0 s_1 \dots s_k \dots)$ de sequências repetidas de Σ_2 cujas entradas coincidem com as de s até a $(k+1)$ -ésima posição.

Se $\varepsilon > 0$ for dado, tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ e então conclua, pela Proposição 5.9, que

$$k > n \Rightarrow d(w_k, s) \leq \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^n} < \varepsilon,$$

isto é, $w_k \rightarrow s$.

Outro fato importante sobre σ é que existe uma órbita não periódica γ em Σ_2 que é densa neste conjunto, isto é, γ está arbitrariamente próxima de qualquer sequência de Σ_2 . Com efeito, consideremos a sequência

$$\gamma = (\underbrace{0\ 1}_{\text{bloco 1}} \quad \underbrace{00\ 01\ 10\ 11}_{\text{bloco 2}} \quad \underbrace{000\ 001\ 010\ 100\ \dots}_{\text{bloco 3}})$$

construída pela listagem sucessiva de blocos que contêm respectivamente todas as combinações possíveis de zeros e uns formadas com n dígitos.

Dada uma sequência $s = (s_i) \in \Sigma_2$ e uma vizinhança de raio $\varepsilon > 0$ arbitrário em torno de s , tome $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

Pela forma como γ é construída, temos que alguma iterada de σ sobre γ produz uma sequência que coincide com s nas primeiras $(n+1)$ -ésimas entradas.

Logo, pela Proposição 5.9, a distância entre tal iterada de γ e s é menor ou igual que $\frac{1}{2^n}$ e, conseqüentemente, menor que ε .

Concluimos assim que qualquer vizinhança de um elemento de Σ_2 contém algum ponto da órbita de γ , ou seja, $\mathcal{O}(\gamma)$ é densa em Σ_2 .

Listando essas propriedades de σ obtemos:

Proposição 5.10. *Seja σ o deslocamento à esquerda definido sobre o conjunto Σ_2 das sequências infinitas de zeros e uns. Então*

1. $\#Per_n(\sigma) = 2^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$
2. $Per(\sigma)$ é denso em Σ_2

3. Existe uma órbita densa para σ em Σ_2

Mostraremos agora que a aplicação de análise mais simples conjugada a F_μ que desejávamos obter é exatamente o deslocamento à esquerda σ . Para isto precisamos construir uma conjugação entre F_μ e σ .

Uma vez que Λ é um conjunto invariante e $\Lambda \subset I_0 \overset{\circ}{\cup} I_1$, cada iterada de um elemento de Λ pertence exclusivamente a I_0 ou a I_1 . Definimos então a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi : \Lambda &\rightarrow \Sigma_2 \\ x &\mapsto (s_i) \end{aligned}$$

onde

$$s_i = \begin{cases} 0, & \text{se } F_\mu^i(x) \in I_0 \\ 1, & \text{se } F_\mu^i(x) \in I_1 \end{cases}$$

A aplicação φ satisfaz o seguinte teorema:

Teorema 5.1. *Sejam F_μ , φ e σ previamente definidas. Se $\mu > 4$ então*

1. φ é um homeomorfismo
2. $\varphi \circ F_\mu = \sigma \circ \varphi$

Demonstração:

1. Começaremos pela sobrejetividade de φ . Dado um intervalo $J \subset I$ fechado, denotaremos

$$F_\mu^{-n}(J) = \{x \in I \mid F_\mu^n(x) \in J\}.$$

Se $J \subset I$ então $F_\mu^{-1}(J)$ é a união de dois intervalos fechados, já que $\mu > 4$ e F_μ é contínua, sendo que um deles está contido em I_0 e o outro contido em I_1 . De fato, $F_\mu^{-1}(J)$ não poderia interceptar A_0 , pois caso contrário existiria $x \in I$ tal que $F_\mu(x) \in J$ e $F_\mu(x) \notin I$, contradizendo o fato de que $J \subset I$.

Dado $(s_i) \in \Sigma_2$ considere para cada $n \in \mathbb{N}$

$$I_{s_0 \dots s_n} = \{x \in I \mid x \in I_{s_0}, F_\mu(x) \in I_{s_1}, \dots, F_\mu^n(x) \in I_{s_n}\}.$$

É simples verificar que

$$I_{s_0 \dots s_n} = I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1 \dots s_n}).$$

Afirmamos que $I_{s_0 \dots s_n}$ é um intervalo fechado e usaremos indução para mostrar esse fato.

Como I_{s_0} é igual a I_0 ou I_1 , temos que I_{s_0} é um intervalo fechado.

Se assumirmos, como hipótese de indução, que $I_{s_1 \dots s_n}$ é um intervalo fechado então, conforme observamos anteriormente, $F_\mu^{-1}(I_{s_1 \dots s_n})$ é a união de dois intervalos fechados, um contido em I_0 e outro em I_1 . Logo $I_{s_0 \dots s_n} = I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1 \dots s_n})$ é um único intervalo fechado.

Outra igualdade clara é a seguinte:

$$I_{s_0 \dots s_n} = I_{s_0 \dots s_{n-1}} \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n}).$$

Portanto $I_{s_0 \dots s_n} \subset I_{s_0 \dots s_{n-1}}$ para cada $n > 0$, donde segue que o crescimento de n nos fornece uma sequência encaixada de intervalos fechados.

Com isso concluímos que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_{s_0 \dots s_n} \neq \emptyset.$$

Se $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_{s_0 \dots s_n}$ então $F_\mu^i(x) \in I_{s_i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e, sendo assim, $\varphi(x) = (s_i)$, donde obtemos a sobrejetividade de φ .

Vejamos agora que φ é injetora.

Sejam $x, y \in \Lambda$ tais que $\varphi(x) = \varphi(y) = (s_i)$.

Então, pela definição de φ , $F_\mu^i(x)$ e $F_\mu^i(y)$ pertencem ambos a I_{s_i} para cada $i \in \mathbb{N}$. Neste caso, todo o intervalo $[F_\mu^i(x), F_\mu^i(y)]$ está contido em I_{s_i} para qualquer $i \in \mathbb{N}$ e, portanto, contido em $I_0 \cup I_1 = I - A_0$.

Suponha que $x \neq y$, isto é, $[x, y]$ é um intervalo não degenerado.

Sendo assim, para todo $z \in [x, y]$ e qualquer $i \in \mathbb{N}$ temos que $F_\mu^i(z) \in [F_\mu^i(x), F_\mu^i(y)]$. De fato, mostremos este fato por indução sobre i .

Para $i = 0$ não há o que ser feito.

Suponha então, como hipótese de indução, que $F_\mu^i(z) \in [F_\mu^i(x), F_\mu^i(y)]$. Já que $[F_\mu^i(x), F_\mu^i(y)] \subset I_{s_i}$ e $F_\mu|_{I_{s_i}}$ é monótona, podemos concluir que $F_\mu(F_\mu^i(z)) \in [F_\mu(F_\mu^i(x)), F_\mu(F_\mu^i(y))]$, como queríamos.

Portanto $F_\mu^i(z) \in [F_\mu^i(x), F_\mu^i(y)] \subset I - A_0$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e daí temos que $z \in \Lambda$.

Uma vez que z foi tomado arbitrariamente em $[x, y]$, obtemos que $[x, y] \subset \Lambda$, contradizendo o fato de Λ ser um conjunto de Cantor.

Logo $x = y$ e disto segue a injetividade de φ .

Agora veremos a continuidade de φ .

Sejam $x \in \Lambda$ e $(s_i) \in \Sigma_2$ tais que $\varphi(x) = (s_i)$. Dado $\varepsilon > 0$ tome $n \geq 0$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

Considere todos os possíveis intervalos fechados $I_{t_0 \dots t_n}$ que se obtém ao variar cada t_i em $\{0, 1\}$ e seja A a união finita dada por $\bigcup_{\substack{t_i \in \{0,1\} \\ i \in \{0, \dots, n\}}} I_{t_0 \dots t_n}$.

Como os intervalos $I_{t_0 \dots t_n}$ são disjuntos dois a dois, x está na parcela $I_{s_0 \dots s_n}$ da união A e $\Lambda \subset A$, temos que existe $\delta > 0$ tal que se $y \in \Lambda$ e $|x - y| < \delta$ então $y \in I_{s_0 \dots s_n}$.

Assim se $y \in \Lambda$ dista de x menos que δ e $\varphi(y) = (w_i)$ então $w_i = s_i$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$, pois $x, y \in I_{s_0 \dots s_n}$.

Consequentemente, pela Proposição 5.9,

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

e então temos a continuidade de φ .

Para finalizar, como φ é bijetora e contínua, Λ é compacto e Σ_2 é um espaço de Hausdorff, temos imediatamente que φ^{-1} é contínua.

Portanto φ é um homeomorfismo.

2. Sejam $x \in \Lambda$ e $(s_i) \in \Sigma_2$ tais que $\varphi(x) = (s_i)$.

Então, pela definição de φ , $F_\mu^i(x) \in I_{s_i}$ para todo $i \geq 0$. Como consequência temos que $F_\mu^{i-1}(F_\mu(x)) = F_\mu^i(x) \in I_{s_i}$ para cada $i > 0$ ou, equivalentemente, $F_\mu^k(F_\mu(x)) \in I_{s_{k+1}}$ para qualquer $k \geq 0$.

Isto nos diz que $\varphi(F_\mu(x)) = (s_{i+1}) = \sigma(s_i) = \sigma(\varphi(x))$, portanto $\varphi \circ F_\mu = \sigma \circ \varphi$. ■

Pelo teorema anterior concluímos que φ é uma conjugação entre F_μ e σ . Disto segue que F_μ e σ são completamente equivalentes em termos de suas dinâmicas e, sendo assim, é verdadeiro o Teorema 1.1 que enunciamos na Seção 1.1 para descrever o comportamento de F_μ sobre o conjunto Λ .

Apêndice B

Neste apêndice vamos retomar o Exemplo 1.4, onde conhecemos a ferradura de Smale, para analisar o conjunto invariante

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} F^n(Q)$$

formado pelos pontos do quadrado $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ que permanecem em Q sob todas as iterações da aplicação F .

De forma análoga ao apêndice anterior, veremos que Λ é um produto de conjuntos de Cantor e que a aplicação ferradura de Smale sobre Λ também é conjugada a uma função deslocamento definida agora sobre o conjunto das sequências bi-infinitas de zeros e uns.

Como consequência, poderemos concluir a validade do Teorema 1.2, enunciado na Seção 1.1, que descreve o comportamento de F sobre Λ .

Caso necessário relembre as notações que utilizamos no Exemplo 1.4.

Vamos iniciar com uma observação sobre a ação de F e F^{-1} respectivamente sobre retângulos verticais e horizontais de Q .

Observação 5.1. *Se V é um retângulo vertical então $F(V) \cap Q$ é a união de dois retângulos verticais, um contido em V_0 e outro em V_1 , e ambos com largura igual a δ vezes a largura de V . Já no caso em que H é um retângulo horizontal, temos que $F^{-1}(H) \cap Q$ consiste da união de dois retângulos horizontais, um deles contido em H_0 e o outro em H_1 , e ambos possuem altura igual a $\frac{1}{\mu} = \delta$ vezes a altura de H . Veja a Figura 5.2.*

Resumindo, F duplica retângulos verticais em Q distribuindo-os em V_0 e V_1 enquanto F^{-1} duplica retângulos horizontais em Q distribuindo-os em H_0 e H_1 . Mais ainda, a largura e a altura das duplicações verticais e horizontais respectivamente diminuem de tamanho pelo fator $0 < \delta < \frac{1}{2}$.

Pela definição de F temos que $Q \cap F(Q)$ consiste exatamente dos dois retângulos verticais V_0 e V_1 , ambos de largura δ . Como a interseção $Q \cap F(Q) \cap F^2(Q)$ é igual a $Q \cap F(Q \cap F(Q))$

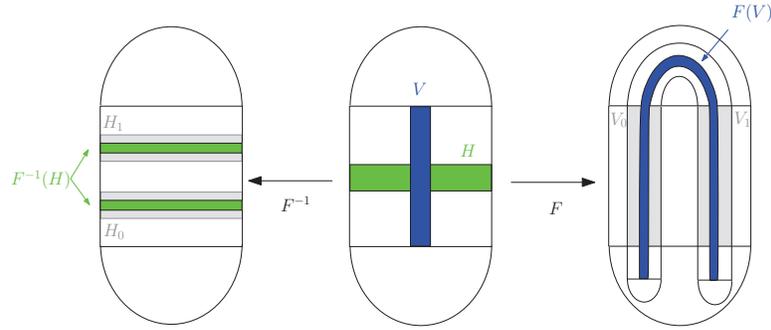
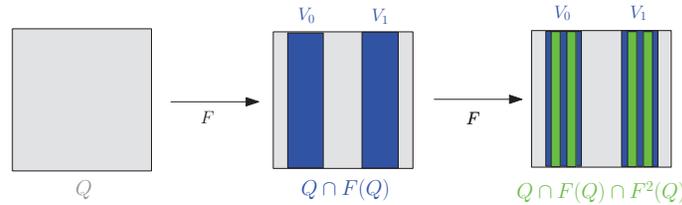


Figura 5.2: Ação de F e F^{-1} respectivamente sobre retângulos verticais e horizontais de Q

obtemos, pela Observação 5.1, que $Q \cap F(Q) \cap F^2(Q)$ é formado pela união de quatro retângulos verticais, dois contidos em V_0 e dois contidos em V_1 , e cada um deles de largura δ^2 .



Indutivamente obtemos que $Q \cap F(Q) \cap \dots \cap F^k(Q) = Q \cap F(Q) \cap \dots \cap F^{k-1}(Q)$ é a união de 2^k retângulos verticais contidos em pares nos 2^{k-1} retângulos do passo anterior e cada um deles possui largura δ^k .

Fazendo $k \rightarrow \infty$ vemos que o conjunto $\bigcap_{n \geq 0} F^n(Q)$ consiste de uma união infinita de retângulos verticais que têm largura nula (segmentos verticais), já que $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta^k = 0$ pois $0 < \delta < \frac{1}{2}$.

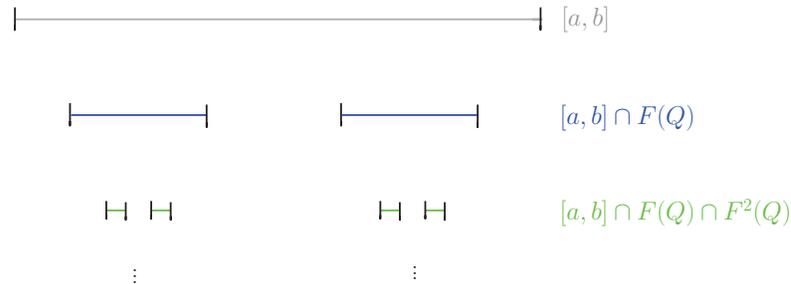
Pelo mesmo raciocínio podemos utilizar a Observação 5.1 para concluir que $Q \cap F^{-1}(Q) \cap \dots \cap F^{-k}(Q)$ é formada pela união de 2^k retângulos horizontais contidos em pares nos 2^{k-1} retângulos do passo anterior e cada um deles têm altura igual a δ^k . E novamente, quando $k \rightarrow \infty$ o conjunto $\bigcap_{n \leq 0} F^n(Q)$ consiste de uma união infinita de retângulos horizontais que possuem altura nula (segmentos horizontais).

Sendo assim,

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} F^n(Q) = \left(\bigcap_{n \leq 0} F^n(Q) \right) \cap \left(\bigcap_{n \geq 0} F^n(Q) \right)$$

é, na verdade, o conjunto de pontos formado por todas as interseções dos segmentos horizontais com os segmentos verticais obtidos anteriormente quando $k \rightarrow \infty$.

Considere agora qualquer reta horizontal α que intercepta Q e seja $[a, b] = \alpha \cap Q$. Pela construção indutiva que acabamos de realizar, temos que $[a, b] \cap F(Q)$ é a união de dois segmentos obtidos de $[a, b]$ pela remoção de três segmentos disjuntos, $[a, b] \cap F(Q) \cap F^2(Q)$ é construído por remover mais três segmentos disjuntos de cada um dos dois segmentos de $[a, b] \cap F(Q)$ e, agindo sucessivamente, conseguimos reconhecer $K = [a, b] \cap \left(\bigcap_{n \geq 0} F^n(Q) \right)$ como um conjunto de Cantor.



Note que o conjunto de Cantor K é o mesmo para toda reta horizontal α que intercepta Q .

Do mesmo modo, se tomarmos qualquer reta vertical β que intercepta Q e considerarmos $[c, d] = \beta \cap Q$, veremos que $L = [c, d] \cap \left(\bigcap_{n \leq 0} F^n(Q) \right)$ é um conjunto de Cantor e, mais ainda, L independe da reta vertical β que intercepta Q .

Portanto,

$$\Lambda = \left(\bigcap_{n \leq 0} F^n(Q) \right) \cap \left(\bigcap_{n \geq 0} F^n(Q) \right) = ([0, 1] \times L) \cap (K \times [0, 1]) = K \times L,$$

sendo K e L dois conjuntos de Cantor.

Agora vamos descrever a dinâmica de F sobre Λ .

Visto que Λ é um conjunto invariante, ou seja, $F(\Lambda) = \Lambda$, temos que $x \in \Lambda$ implica $F(x) \in \Lambda \subset Q \cap F(Q) = V_0 \cup V_1$. Logo $x \in F^{-1}(V_0 \cup V_1)$ e, como já vimos, $F^{-1}(V_0 \cup V_1) = H_0 \cup H_1$.

Com isso mostramos que $\Lambda \subset H_0 \cup H_1$.

Usando novamente o fato de Λ ser invariante e sabendo que H_0 e H_1 são retângulos disjuntos, podemos concluir que cada iterada por F de um ponto de Λ pertence a $H_0 \overset{\circ}{\cup} H_1$ e, portanto, pertence exclusivamente a H_0 ou H_1 .

Sendo assim, podemos definir uma associação φ entre Λ e

$$\Sigma_2 = \prod_{n \in \mathbb{Z}} \{0, 1\} = \{(s_i) = (\dots s_{-1} s_0 s_1 \dots) \mid s_i \in \{0, 1\}\},$$

o conjunto das sequências bi-infinitas de zeros e uns, dada por:

$$\begin{aligned}\varphi : \Lambda &\rightarrow \Sigma_2 \\ x &\mapsto (s_i)\end{aligned}$$

onde

$$s_i = \begin{cases} 0, & \text{se } F^i(x) \in H_0 \\ 1, & \text{se } F^i(x) \in H_1 \end{cases}$$

Em Σ_2 consideramos a métrica

$$d((s_i), (t_i)) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{|s_i - t_i|}{2^{|i|}}.$$

Mostraremos que φ é uma conjugação entre F e a aplicação contínua

$$\begin{aligned}\sigma : \Sigma_2 &\rightarrow \Sigma_2 \\ (s_i) &\mapsto (s_{i+1})\end{aligned}$$

conhecida como deslocamento à esquerda em Σ_2 .

Para verificar que φ é um homeomorfismo precisaremos do seguinte resultado:

Lema 5.1. *Dado $(s_i) \in \Sigma_2$, seja $Q_n = \bigcap_{|i| \leq n} F^{-i}(H_{s_i})$ para cada $n \geq 0$. Então Q_n é um retângulo com altura δ^{n+1} e largura δ^n .*

Demonstração: Dado $(s_i) \in \Sigma_2$ defina para qualquer $n \geq 0$

$$R_{s_0 \dots s_n} := \{x \in Q \mid x \in H_{s_0}, F(x) \in H_{s_1}, \dots, F^n(x) \in H_{s_n}\} = \bigcap_{i=0}^n F^{-i}(H_{s_i}).$$

Por esta definição é simples verificar que

$$R_{s_0 \dots s_n} = H_{s_0} \cap F^{-1}(R_{s_1 \dots s_n}).$$

Mostraremos por indução que $R_{s_0 \dots s_n}$ é um retângulo horizontal de altura δ^{n+1} .

Para $n = 0$ temos que R_{s_0} é igual a H_0 ou H_1 que são retângulos horizontais de altura δ .

Suponha, como hipótese de indução, que $R_{s_1 \dots s_n}$ seja um retângulo horizontal de altura $\delta^{(n-1)+1} = \delta^n$.

Uma vez que F^{-1} duplica retângulos horizontais diminuindo sua altura num fator δ e distribui essas duplicações em H_0 e H_1 , temos que $F^{-1}(R_{s_1 \dots s_n})$ é a união de dois retângulos horizontais, um contido em H_0 e outro em H_1 , ambos com altura $\delta \cdot \delta^n = \delta^{n+1}$.

Portanto, $R_{s_0\dots s_n} = H_{s_0} \cap F^{-1}(R_{s_1\dots s_n})$ é um único retângulo horizontal de altura δ^{n+1} , como queríamos.

Definimos agora

$$R_{s_{-n}\dots s_{-1}} := \left\{ x \in Q \mid F^{-1}(x) \in H_{s_{-1}}, \dots, F^{-n}(x) \in H_{s_{-n}} \right\} = \bigcap_{i=1}^n F^i(H_{s_{-i}}).$$

Vamos verificar primeiramente que

$$R_{s_{-n}\dots s_{-1}} = F(H_{s_{-1}}) \cap F(R_{s_{-n}\dots s_{-2}}). \quad (5.8)$$

Se $x \in R_{s_{-n}\dots s_{-1}}$ então $F^{-1}(x) \in H_{s_{-1}}, \dots, F^{-n}(x) \in H_{s_{-n}}$, donde segue que $x \in F(H_{s_{-1}})$ e que $F^{-1}(x)$ satisfaz $F^{-1}(F^{-1}(x)) \in H_{s_{-2}}, \dots, F^{-n+1}(F^{-1}(x)) \in H_{s_{-n}}$. Logo $F^{-1}(x) \in R_{s_{-n}\dots s_{-2}}$ e como $x = F(F^{-1}(x))$ concluímos que $x \in F(R_{s_{-n}\dots s_{-2}})$.

Reciprocamente, suponha que $x \in F(H_{s_{-1}}) \cap F(R_{s_{-n}\dots s_{-2}}) = F(H_{s_{-1}} \cap R_{s_{-n}\dots s_{-2}})$. Então $x = F(y)$ com $y \in H_{s_{-1}} \cap R_{s_{-n}\dots s_{-2}}$, isto é, $y \in H_{s_{-1}}, F^{-1}(y) \in H_{s_{-2}}, \dots, F^{-n+1}(y) \in H_{s_{-n}}$.

Portanto, $F^{-1}(x) = y \in H_{s_{-1}}, F^{-2}(x) = F^{-1}(y) \in H_{s_{-2}}, \dots, F^{-n}(x) = F^{-n+1}(y) \in H_{s_{-n}}$ e disto segue que $x \in R_{s_{-n}\dots s_{-1}}$.

Sendo assim vale a igualdade (5.8).

Utilizaremos (5.8) para provar por indução que $R_{s_{-n}\dots s_{-1}}$ é um retângulo vertical de largura δ^n .

Para $n = 1$ temos que $R_{s_{-1}} = F(H_{s_{-1}}) = V_{s_{-1}}$ é um retângulo vertical de largura δ .

Suponha, por hipótese de indução, que $R_{s_{-n}\dots s_{-2}}$ seja um retângulo vertical de largura δ^{n-1} .

Como F duplica retângulos verticais distribuindo uma cópia em V_0 e outra em V_1 e diminui a largura do retângulo num fator δ , obtemos que $F(R_{s_{-n}\dots s_{-2}})$ é a união de dois retângulos verticais, um em V_0 e outro em V_1 , ambos de largura $\delta \cdot \delta^{n-1} = \delta$.

Já que $F(H_{s_{-1}}) = V_{s_{-1}}$ temos que $R_{s_{-n}\dots s_{-1}} = F(H_{s_{-1}}) \cap F(R_{s_{-n}\dots s_{-2}})$ é um retângulo vertical de largura δ^n .

Para concluir a demonstração da proposição, note que

$$\begin{aligned} Q_n &= \bigcap_{|i| \leq n} F^{-i}(H_{s_i}) = \left(\bigcap_{i=-n}^{-1} F^{-i}(H_{s_i}) \right) \cap \left(\bigcap_{i=0}^n F^{-i}(H_{s_i}) \right) = \\ &= \left(\bigcap_{i=1}^n F^i(H_{s_{-i}}) \right) \cap \left(\bigcap_{i=0}^n F^{-i}(H_{s_i}) \right) = R_{s_{-n}\dots s_{-1}} \cap R_{s_0\dots s_n}. \end{aligned}$$

Logo, para cada $n \geq 0$, Q_n é a interseção de um retângulo vertical de largura δ^n e de

um retângulo horizontal de altura δ^{n+1} , resultando que Q_n é um retângulo com altura δ^{n+1} e largura δ^n . ■

Agora estamos em condições de provar o seguinte teorema:

Teorema 5.2. *Sejam F , φ e σ previamente definidas. Então*

1. φ é um homeomorfismo
2. $\varphi \circ F = \sigma \circ \varphi$

Demonstração:

1. Mostremos primeiramente que φ é sobrejetora.

Dado qualquer $(s_i) \in \Sigma_2$, pelo Lema 5.1, $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência encaixada de compactos com diâmetro tendendo à zero, logo,

$$\bigcap_{n \geq 0} Q_n = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} F^{-i}(H_{s_i}) = \{z\}.$$

Sendo assim, $F^i(z) \in H_{s_i}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ e, portanto, $\varphi(z) = (s_i)$.

Temos também que φ é injetora, pois se $\varphi(x) = \varphi(y) = (s_i)$ então $F^i(x), F^i(y) \in H_{s_i}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ e assim $x, y \in \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} F^{-i}(H_{s_i}) = \{z\}$, ou seja, $x = y$.

Verifiquemos a continuidade de φ .

Sejam $x \in \Lambda$ e $s = (s_i) \in \Sigma_2$ tais que $\varphi(x) = s$. Dado $\varepsilon > 0$ tome $n > 0$ de modo que $\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$.

Pelo Lema 5.1, dada qualquer sequência $(t_i) \in \Sigma_2$ temos que

$$R_{t_{-n} \dots t_n} := \bigcap_{|i| \leq n} F^{-i}(H_{t_i})$$

é um retângulo.

Considere todos os possíveis retângulos $R_{t_{-n} \dots t_n}$ que obtemos ao variar cada t_i em $\{0, 1\}$ e seja A a união finita dada por $\bigcup_{\substack{t_i \in \{0,1\} \\ |i| \leq n}} R_{t_{-n} \dots t_n}$.

Como os retângulos $R_{t_{-n} \dots t_n}$ são disjuntos dois a dois, Λ é um subconjunto de A e $Q_n = \bigcap_{|i| \leq n} F^{-i}(H_{s_i})$ é uma parcela da união A que contém $x \in \Lambda$, temos que existe

$\delta > 0$ tal que se $y \in \Lambda$ e $\bar{d}(x, y) < \delta$, onde $\bar{d}(\cdot, \cdot)$ é a distância usual induzida de \mathbb{R}^2 sobre Λ , então $y \in Q_n$.

Logo se $y \in \Lambda$ está a uma distância menor que δ de x e $\varphi(y) = (w_i) = w$ então $x, y \in Q_n$, donde segue que $F^i(x), F^i(y) \in H_{s_i}$ para todo $|i| \leq n$ e, conseqüentemente, $w_i = s_i$ para todo $|i| \leq n$.

Portanto,

$$\begin{aligned} d(s, w) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{|s_i - w_i|}{2^{|i|}} = \sum_{|i| > n} \frac{|s_i - w_i|}{2^{|i|}} \leq \sum_{|i| > n} \frac{1}{2^{|i|}} = \sum_{i > n} \frac{1}{2^i} + \sum_{i < -n} \frac{1}{2^{-i}} = \\ &= 2 \sum_{i > n} \frac{1}{2^i} = 2 \left[2^{-\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)} \right] = 2 \left[2^{-\left(\frac{2^{n+1} - 1}{2^n}\right)} \right] = \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, φ é contínua.

Uma vez que φ é bijetora e contínua, Λ é compacto e Σ_2 é um espaço de Hausdorff, temos diretamente que φ^{-1} é contínua e, assim, φ é um homeomorfismo como queríamos.

2. Sejam $x \in \Lambda$ e $(s_i) \in \Sigma_2$ tais que $\varphi(x) = (s_i)$.

Então $F^{i-1}(F(x)) = F^i(x) \in H_{s_i}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ ou, equivalentemente, $F^k(F(x)) \in H_{s_{k+1}}$ para cada $k \in \mathbb{Z}$.

Mas isto nos diz que $\varphi(F(x)) = (s_{i+1}) = \sigma(s_i) = \sigma(\varphi(x))$, logo $\varphi \circ F = \sigma \circ \varphi$. ■

A partir deste teorema podemos concluir que F e σ são aplicações conjugadas e, sendo assim, possuem essencialmente a mesma dinâmica.

Entretanto, do mesmo modo (a menos de poucos ajustes) que provamos que o deslocamento à esquerda definido sobre o conjunto das sequências infinitas de zeros e uns satisfaz a Proposição 5.10, podemos mostrar o seguinte resultado:

Proposição 5.11. *Seja σ o deslocamento à esquerda definido sobre o conjunto Σ_2 das sequências bi-infinitas de zeros e uns. Então*

1. $\#Per_n(\sigma) = 2^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$
2. $Per(\sigma)$ é denso em Σ_2
3. Existe uma órbita densa para σ em Σ_2

Portanto, o Teorema 1.2 enunciado no Exemplo 1.4 para descrever a dinâmica da aplicação ferradura de Smale sobre o conjunto Λ é, de fato, verdadeiro.

Referências Bibliográficas

- [1] CASAGRANDE, R. *O índice homotópico de Conley para aplicações contínuas*. Dissertação de mestrado - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002.
- [2] CONLEY, C. *Isolated invariant sets and the Morse index*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, n. 38. Providence: American Mathematical Society, 1978.
- [3] DEVANEY, R.L. *An introduction to chaotic dynamical systems*. 2. ed. Redwood City: Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [4] FRANKS, J.M. *Homology and dynamical systems*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, n. 49. Providence: American Mathematical Society, 1982.
- [5] FRANKS, J.M.; RICHESON, D.S. Shift equivalence and the Conley Index. *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 352, n. 7, p. 3305-3322, March 2000.
- [6] FRANZOSA, R.D. Index filtrations and the homology index braid for partially ordered Morse decompositions. *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 298, n. 1, p. 193-213, November 1986.
- [7] FRANZOSA, R.D. The connection matrix theory for Morse decompositions. *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 311, n. 2, p. 561-592, February 1989.
- [8] HATCHER, A. *Algebraic topology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [9] KURLAND, H.L. Homotopy invariants of a repeller-attractor pair I: The Puppe-sequence of an R-A pair. *J. Differential Equations*, vol. 46, p. 1-31, 1982.
- [10] MISCHAIKOW, K.; MROZEK, M. *The Conley index theory*, July 2000. Disponível em: <<http://www.ii.uj.edu.pl/~mrozek/>>. Acesso em: 10 fev. 2010.

-
- [11] MROZEK, M. Leray functor and cohomological Conley index for discrete dynamical systems. *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 318, n. 1, p. 149-178, March 1990.
- [12] MROZEK, M. Index pairs and the fixed point index for semidynamical systems. *Fundamenta Mathematicae*, vol. 133, p. 179-194, 1989.
- [13] PALIS, J.; MELO, W. *Geometric theory of dynamical systems* An Introduction. New York: Springer-Verlag, 1982.
- [14] REINECK, J.F. The connection matrix in Morse-Smale flows. *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 322, n. 2, p. 523-545, December 1990.
- [15] RIBEIRO, P.C.E. *O índice de Conley discreto e o par de matrizes de conexão*. Dissertação de mestrado - Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.
- [16] RICHESON, D.S. *Connection matrix pairs for the discrete Conley index*. Tese de doutorado - Northwestern University, 1998.
- [17] RICHESON, D.S. Connection matrix pairs for the discrete Conley index, *preprint*.
- [18] ROBBIN, J.W.; SALAMON, D. Dynamical systems, shape theory and the Conley index. *Ergod. Th. Dyn. Sys.*, vol. 8, p. 375-393, 1988.
- [19] SALAMON, D. Connected simple systems and the Conley index of isolated invariant sets. *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 291, n. 1, p. 1-41, September 1985.
- [20] SILVEIRA, M.R. *A dinâmica por trás da sequência espectral*. Tese de doutorado - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008.
- [21] SZYMCZAK, A. The Conley index for discrete semidynamical systems. *Top. App.*, vol. 66, p. 215-240, 1995.
- [22] VICK, J.W. *Homology theory* An Introduction to algebraic topology. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 1994.