Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica- IMECC
Departamento de Matemática

Propriedades homológicas de mergulho de grupos discretos metabelianos

Flávia Souza Machado da Silva

Tese de Doutorado

Orientador: **Profa. Dra. Dessislava Hristova Kochloukova**

Maio - 2006

Campinas - SP

Propriedades homológicas de mergulho de grupos discretos metabelianos

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Flávia S. M. da Silva e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 25 de maio de 2006.

....

Profa. Dra.: Dessislava Hristova Kochloukova

Orientadora

Banca Examinadora

1 Profa. Dra. Dessislava Hristova Kochloukova (IMECC/UNICAMP)

2 Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves (IME/USP)

3 Profa. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti (IBILCE/UNESP)

4 Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti (IMECC/UNICAMP)

5 Prof. Dr. José Antônio Engler (IMECC/UNICAMP)

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Silva, Flávia Souza Machado da

Si38p Propriedades homológicas de mergulho de grupos discretos metabelianos / Flávia Souza Machado da Silva -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2006.

Orientadora : Dessislava Hristova Kochloukova

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Teoria dos grupos. 2. Álgebra homológica. 3. Grupos discretos. I. Kochloukova, Dessislava Hristova. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Embedding homological properties of metabelian discrete groups

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Group theory. 2. Algebra, homological. 3. Discrete groups.

Área de concentração: Matemática

Titulação: Doutora em Matemática

Banca examinadora: Profa. Dra. Dessislava Hristova Kochloukova (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves (IME-USP)
Profa. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti (IBILCE-UNESP)
Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. José Antônio Engler (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 16/05/2006

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 16 de maio de 2006 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). DESSISLAVA HRISTOVA KOCHLOUKOVA

Prof. (a). Dr (a). DACIBERG LIMA GONÇALVES

Prof. (a). Dr (a). ERMÍNIA DE LOURDES CAMPELLO FANTI

Prof. (a). Dr (a). ANTONIO JOSÉ ENGLER

Prof. (a) Dr. (a) PAULO ROBERTO BRUMATTI

“ Nem tudo o que se enfrenta
pode ser modificado. Mas
nada pode ser modificado
enquanto não for enfrentado.”

James Baldwin

Ao meu esposo
Gilson Heleno
dedico.

Agradecimentos

Na certeza de que existem mais pessoas que merecem agradecimentos do que costumamos reconhecer, deixo aqui meus agradecimentos a estas pessoas. Em especial, agradeço:

A Deus, por tudo.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo auxílio financeiro (Processo 02/10340-9) concedido durante o período de junho de 2003 a maio de 2006.

À minha orientadora Profa. Dra. Dessislava Hristova Kochloukova, sem a qual este trabalho não se realizaria, por toda dedicação dispensada durante sua orientação, pelos conhecimentos transmitidos, pela paciência e disponibilidade que sempre teve para solucionar todas as minhas dúvidas.

Aos demais professores do Departamento de Matemática, pela formação acadêmica durante o doutorado.

Aos funcionários da secretaria de pós-graduação: Edinaldo, Cidinha e Tânia pela amizade e por todo suporte durante o doutorado.

Aos professores da Universidade Estadual Paulista do Campus de São José do Rio Preto, pela aprendizagem durante a graduação e o mestrado. Em particular, à Profa. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti que me orientou no mestrado e que me incentivou a fazer o doutorado.

Ao meu marido Gilson, pelo amor, companheirismo, incentivo e paciência dedicados a mim ao longo deste período.

Aos meus pais, minha eterna gratidão, pelo apoio incondicional, pela confiança, por todo amor e incentivo que sempre me deram em tudo que busquei realizar.

Aos meus irmãos Leandro e Daniela, pelos momentos de alegria e descontração.

À minha querida avó Dorestina, por toda preocupação que sempre teve comigo e, sobretudo por suas orações.

Aos meus sogros e minha cunhada, pelo apoio que sempre me proporcionaram.

À amiga Karine, que sempre compartilhou comigo as alegrias e dificuldades.

Às amigas Andréia, Tatiana e Lidiane, pelo apoio e convívio durante esta caminhada que agora se completa.

Resumo

Estudamos propriedades homológicas de mergulho de grupos metabelianos finitamente gerados e estendemos um trabalho recente [19] em que foi mostrado que para m, um número natural fixo, todo grupo G metabeliano finitamente gerado mergulha num quociente de um grupo metabeliano de tipo FP_m e ainda que G mergulha em um grupo metabeliano de tipo FP_4.

Mais precisamente, mostramos que para m, um número natural fixo, todo grupo metabeliano finitamente gerado mergulha num grupo metabeliano de tipo FP_m. Para isto usamos idéias de álgebra comutativa, tais como o Teorema de normalização de Noether e propriedades de mergulho de módulos finitamente gerados sobre anéis comutativos através de localização. No caso de grupos metabelianos obtemos mergulhos em extensões HNN metabelianas. Um passo importante na nossa demonstração é o uso do método de Åberg para garantir que num caso muito particular a FP_m-Conjectura para grupos metabelianos é verdadeira. A FP_m-Conjectura para grupos metabelianos sugere quando um grupo metabeliano tem tipo FP_m, mas ela ainda está em aberto. É interessante observar que o método de Åberg mistura idéias de álgebra comutativa e topologia algébrica (ação de grupo sobre um subcomplexo de um produto finito de árvores).

Palavras-chave: grupo de tipo FP_m, grupo metabeliano finitamente gerado, invariante de Bieri-Strebel, complexo de Åberg, localização.

Abstract

We study embedding homological properties of finitely generated metabelian groups and we extend an earlier work in [19] where it was shown that for a fixed m every finitely generated metabelian group G embeds in a quotient of a metabelian group of homological type FP_m and furthermore that G embeds in a metabelian group of type FP_4.

More precisely we show that for a fixed m every finitely generated metabelian group G embeds in a metabelian group of type FP_m. This is proved using ideas of commutative algebra, such as Noether normalization theorem and properties of embedding of finitely generated modules over commutative rings via localization. In the case of metabelian groups this gives embedding into a metabelian HNN extensions. An important step in the proof is the use of the Åberg method to guarantee that the FP_m-conjecture in a very particular case is true. The FP_m-conjecture for metabelian groups suggests when a metabelian group has a homological type FP_m, but it is still open. It is interesting to note that the Åberg method mixes ideas from commutative algebra and algebraic topology (action of group on a subcomplex of a finite product of trees).

Keywords: group of type FP_m, finitely generated metabelian group, Bieri-Strebel invariant, the Åberg complex, localization.

CONTEÚDO

Introdução

Introdução Histórica

O primeiro invariante para grupos metabelianos finitamente gerados foi definido e usado como uma ferramenta fundamental na classificação dos grupos metabelianos finitamente apresentáveis por Bieri-Strebel em [9]. Esse invariante surgiu a partir do estudo de grupos discretos de tipo FP_m, ou seja, de grupos que satisfazem a seguinte condição:

"*Um grupo G é dito ser de tipo FP_m se $\mathbb{Z}$ visto como um $\mathbb{Z}[G]$-módulo trivial admite uma resolução projetiva $\underline{\underline{P}} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ com P_i finitamente gerado para todo $i \leq m$. Se os módulos P_i são finitamente gerados para todo i então dizemos que G é de tipo FP_∞*".

A propriedade FP_m surgiu como uma versão homológica de uma propriedade homotópica chamada F_m e definida por C.T.C. Wall em [25]. *Um grupo G é dito ser de tipo F_m se existe Y um $K(G,1)$-complexo (ou seja, Y é um CW-complexo conexo com $\pi_1(Y) \simeq G$ e $\pi_i(Y) = 0$ para $i \geq 2$) que tem m-esqueleto finito.* Esse tipo de grupo G age livremente sobre o recobrimento universal $\widetilde{Y}$ de Y e o complexo de cadeia celular ("*singular celular chain complex*") de $\widetilde{Y}$ é uma resolução livre do $\mathbb{Z}[G]$-módulo trivial $\mathbb{Z}$ com todos os módulos de dimensão $\leq m$ finitamente gerados. Conseqüentemente, *todo grupo que tem a propriedade homotópica F_m tem a propriedade homológica FP_m*. Os resultados básicos sobre grupos de tipo FP_m podem ser encontrados em [5] e [16].

Por muito tempo ficou sem resposta a pergunta: existem grupos de tipo FP_m que não são de tipo F_m? É conhecido que: *um grupo G é de tipo F_2 se, e somente se, G é finitamente apresentável como grupo (ou seja, G pode ser definido por um número finito de geradores e relações)*. E também, *um grupo G é de tipo F_m para um $m \geq 2$ se, e somente se, G é de tipo FP_m e F_2*. Em [4] foi construída uma classe de grupos de tipo "right angle Artin" que é de tipo FP_∞ mas não é finitamente apresentável e portanto não é de tipo F_∞.

No caso em que G é um grupo metabeliano (isto é, G tem um subgrupo normal abeliano A com quociente $Q = G/A$ também abeliano) a situação é bem diferente. Para grupos metabelianos os tipos FP_m e F_m coincidem pois o resultado principal de [9] mostra que *todo grupo metabeliano de tipo FP_2 é finitamente apresentável (ou seja, é de tipo F_2)*.

Em [9] Bieri-Strebel deram uma classificação completa dos grupos metabelianos de tipo FP_2 em termos de um invariante $\Sigma_A(Q)$ que será descrito a seguir. Seja Q um grupo abeliano finitamente gerado e considere $\mathbb{R}$ como grupo abeliano aditivo. Um homomorfismo $\chi : Q \to \mathbb{R}$ de grupos abelianos é dito um "character" real de Q. Dois "characters" reais são equivalentes se eles coincidem a menos de um múltiplo escalar constante positivo. O conjunto $S(Q)$ de todas as classes de equivalência $[\chi]$ de "characters" reais não triviais χ de Q pode ser identificado com a esfera unitária $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ com n o posto de torção-livre de Q. Um $\mathbb{Z}[Q]$-módulo (à direita) finitamente gerado não precisa ser finitamente gerado sobre o subanel $\mathbb{Z}[Q_\chi]$ de $\mathbb{Z}[Q]$ sendo que $Q_\chi := \{q \in Q \mid \chi(q) \geq 0\}$ é um sub-monóide de Q. Assim, podemos associar a cada $\mathbb{Z}[Q]$-módulo (à direita) finitamente gerado A o *invariante de Bieri-Strebel*:

$$\Sigma_A(Q) = \{[\chi] \in S(Q) \mid A \text{ é finitamente gerado sobre } \mathbb{Z}[Q_\chi]\}.$$

É interessante observar que a classificação dada por Bieri-Strebel depende somente do $\mathbb{Z}[Q]$-módulo A e não da classe de extensão $[A \hookrightarrow G \twoheadrightarrow Q] \in H^2(Q, A)$, ou seja, se uma extensão de A por Q tem tipo FP_2 então qualquer outra extensão também tem tipo FP_2 (essa propriedade não é conhecida para grupos não metabelianos e provavelmente não vale).

O trabalho de Bieri-Strebel em [9] foi o primeiro de um ciclo de artigos que estudam grupos metabelianos de tipo FP_m. Em [6] foi proposta a FP_m-Conjectura que sugere a classificação de grupos metabelianos de tipo FP_m em termos do invariante de Bieri-Strebel.

$\mathbf{FP_m}$-Conjectura: *Seja $1 \to A \to G \to Q \to 1$ uma seqüência exata curta de grupos com A, Q abelianos e G finitamente gerado. Então G tem tipo FP_m se, e somente se, A visto como $\mathbb{Z}[Q]$-módulo (à direita) por conjugação é m-tame, ou seja, satisfaz a seguinte* *condição:*

$$\forall\ [\chi_1], [\chi_2], \ldots, [\chi_m] \in \Sigma_A^c(Q) = S(Q) \setminus \Sigma_A(Q) \ \textit{tem-se que}\ \chi_1 + \chi_2 + \ldots + \chi_m \neq 0.$$

A condição acima é equivalente a seguinte condição: *se* $[\chi_1], \ldots, [\chi_m] \in \Sigma_A^c(Q)$ *existe uma semi-esfera aberta* V *em* $S(Q)$ *que contém* $[\chi_1], \ldots, [\chi_m]$ (V depende de $[\chi_1], \ldots, [\chi_m]$).

A FP_m-Conjectura ainda está em aberto. Mas já foi demonstrada nas seguintes situações:

(I) $m = 2$ ([9]);

(II) $m = 3$ quando G é uma extensão cindida de A por Q, ou seja, $G \simeq A \rtimes Q$ é produto semi-direto de A por Q ([8]);

(III) m qualquer desde que G tenha posto de Prüfer finito, ou seja, existe $d \in \mathbb{N}$ tal que cada subgrupo de G que é finitamente gerado pode ser gerado por d elementos ([1]);

(IV) A tem expoente p para um primo p (ou seja, $pA = 0$) e a dimensão de Krull de A sobre $\mathbb{Z}[Q]$ é 1 ([20]).

Em todos os casos que a Conjectura foi resolvida foram usadas idéias que misturam técnicas de topologia algébrica (grupos que agem sobre CW-complexos) e idéias de álgebra comutativa. Na primeira parte do artigo [9] foram usadas várias propriedades de módulos sobre anéis comutativos Noetherianos para estudar propriedades básicas do invariante $\Sigma_A(Q)$ e demonstrar que *se* Q *é grupo abeliano finitamente gerado,* A *um* $\mathbb{Z}[Q]$*-módulo finitamente gerado e* $\Sigma_A^c(Q) = S(Q) \setminus \Sigma_A(Q)$ *não tem pontos antipodas então qualquer extensão de* A *por* Q *é um grupo metabeliano finitamente apresentável.* Já na segunda metade, os argumentos usados foram de topologia algébrica: teoria de recobrimento, o Teorema de Seifert-van Kampen sobre o grupo fundamental da união de dois subespaços e a existência de grupos livres não cíclicos em alguns produtos livres amalgamados para mostrar que *se* G *é um grupo de tipo* FP_2 *que não contém subgrupos livres de posto dois então* $S(Q) = \Sigma_A(Q) \bigcup -\Sigma_A(Q)$ *para* $A = G'/G''$ *e* $Q = G/G'$*, ou seja,* $\Sigma_A^c(Q)$ *não contém pontos antipodas.* Usando esses dois resultados foi obtido que *se* G *é um grupo de tipo* FP_2 *sem subgrupos livres de posto dois então qualquer quociente metabeliano de* G *é finitamente apresentável* e conseqüentemente de tipo homológico FP_2.

Existe uma forte relação entre a teoria de valorizações (de anéis comutativos e Noetherianos) e o estudo do invariante $\Sigma_A(Q)$ a qual está explicada na Seção 1.4. Essa relação foi usada para entender a estrutura de $\Sigma_A^c(Q)$ como "rationally defined spherical polyhedron" em [7, Teorema E].

O problema de mergulho : resultados existentes

O problema de mergulho consiste do seguinte:

Conjectura de mergulho: *Seja G um grupo metabeliano finitamente gerado e m um número natural. Então G mergulha num grupo metabeliano de tipo FP_m.*

Embora seja difícil achar isso desta forma na literatura, descrevemos a seguir um caso particular que foi estudado por Guilbert Baumslag nos anos 70 em [3]. Baumslag demonstrou que *se G é um grupo metabeliano finitamente gerado então G mergulha num grupo metabeliano finitamente gerado que é uma extensão cindida de grupos abelianos* ([3, Lema 3]) e assim reduziu o problema para extensões cindidas de grupos abelianos. Depois usando localizações de módulos sobre anéis comutativos e Noetherianos, Baumslag demonstrou que *G mergulha num grupo metabeliano finitamente apresentável.* É interessante observar que o resultado de Baumslag surgiu antes da classificação de grupos metabelianos finitamente apresentáveis dada por Bieri-Strebel [9].

Em um trabalho recente foi demonstrado que *todo grupo metabeliano mergulha num quociente de um grupo metabeliano de tipo FP_m* ([19, Teorema 2]). Assim, se fosse verdade que cada quociente de um grupo metabeliano de tipo FP_m também tem tipo FP_m teríamos a Conjectura de mergulho provada. Não é difícil ver que a propriedade geométrica m-tame usada na FP_m-Conjectura é preservada por quocientes, isto é, se Q é um grupo abeliano finitamente gerado, A um $\mathbb{Z}[Q]$-módulo finitamente gerado e m-tame e M um $\mathbb{Z}[Q]$-módulo quociente de A então M também é m-tame pois $\Sigma_M^c(Q) \subseteq \Sigma_A^c(Q)$. Se a FP_m-Conjectura fosse verdadeira isso implicaria que cada quociente de um grupo metabeliano de tipo FP_m também tem tipo FP_m e daí em particular a Conjectura de mergulho valeria. Se um contra exemplo da Conjectura de mergulho existisse isso implicaria que a FP_m-Conjectura é falsa (sem produzir um contra-exemplo concreto). Nessa tese a Conjectura de mergulho será demonstrada. Isso reforça a expectativa que a FP_m-Conjectura é verdadeira.

A demonstração de [19, Teorema 2] foi baseada no fato que se Q é um grupo abeliano livre de posto finito e A um $\mathbb{Z}[Q]$-módulo livre finitamente gerado então para uma localização específica A^* de A obtemos uma extensão cindida $G^* = A^* \rtimes Q^*$ que contém G e para a qual a FP_m-Conjectura vale. Daí, neste caso específico a Conjectura de mergulho é verdadeira. O fato que a FP_m-Conjectura vale para G^* foi demonstrado usando técnicas pesadas sugeridas por Åberg em [1]. Em particular, foi construído um CW-complexo específico Y, o qual é um sub-complexo de um produto de árvores, e provado que Y é $(m-1)$-conexo, G^* age cocompactivamente sobre Y e os estabilizadores em G^* de células em Y são todos de tipo FP_m. Então um resultado de Brown ([15, Proposição 1.1]) garante que G^* tem tipo homológico FP_m. Embora toda a construção seja topológica a demonstração do fato que G^* age cocompactivamente sobre Y foi feita resolvendo sistemas de valorizações (assim foram usados métodos de álgebra comutativa).

Em [19] também foi demonstrado que *todo quociente de um grupo metabeliano de tipo FP_4 tem tipo FP_4* ([19, Proposição 1]), embora a FP_4-Conjectura ainda esteja em aberto. É interessante observar que a demonstração desse resultado usa que a FP_m-Conjectura generalizada sobre módulos (não somente o módulo trivial) foi demonstrada em [22] para $m = 3$ mas esse último resultado é bastante técnico e longo. Portanto, a Conjectura de mergulho vale para $m = 4$ ([19, Corolário 1]).

Um novo ponto de vista do problema foi considerado em [13] sendo demonstrado que *se Q é um grupo abeliano finitamente gerado, A um $\mathbb{Z}[Q]$-módulo finitamente gerado e m um número natural fixo então A mergulha num $\mathbb{Z}[\widetilde{Q}]$-módulo B com $\widetilde{Q}$ um grupo abeliano finitamente gerado com um somando direto Q e esse mergulho é de $\mathbb{Z}[Q]$-módulos. Ainda mais, B é m-tame como $\mathbb{Z}[\widetilde{Q}]$-módulo.* Daí, se a FP_m-Conjectura vale então qualquer extensão de B por $\widetilde{Q}$ seria de tipo FP_m e em particular a extensão cindida. Assim, usando o resultado de Baumslag [3] a Conjectura de mergulho seria provada como corolário da FP_m-Conjectura. As técnicas usadas por Harlander e Bogley foram completamente algébricas e eles seguiram as idéias de Baumslag de considerar localizações para chegar num módulo m-tame.

Observamos que se a FP_m-Conjectura fosse verdadeira então obteríamos a Conjectura de mergulho de duas maneiras diferentes: a primeira foi descrita no penúltimo parágrafo da página xi e a segunda no parágrafo acima.

O problema de mergulho: resultados novos

O objetivo principal dessa tese (Teorema 3.5) é a demonstração da Conjectura de mergulho para m arbitrário. A demonstração segue o caminho usado em [19] no sentido que foi necessário demonstrar a FP_m-conjetura para um caso bem específico e isto foi feito usando exatamente os métodos considerados em [19]. Embora nosso caso tinha problemas técnicos (isso deu a origem ao Teorema 2.9 desta tese) o método de Åberg também funcionou.

Vimos na seção anterior que sempre podemos restringir ao caso em que G é a extensão cindida $A \rtimes Q$. Considerando A como $\mathbb{Z}[Q]$-módulo à direita por conjugação segue de um resultado de álgebra comutativa que existe cadeia de $\mathbb{Z}[Q]$-submódulos de A

$$A = A_0 \supseteq A_1 \supseteq \ldots \supseteq A_n = 0$$

tal que, para cada $0 \le i \le n-1$, A_i/A_{i+1} é isomorfo a $\mathbb{Z}[Q]/P_i$ com P_i um ideal primo de $\mathbb{Z}[Q]$. Na Seção 3.1 foram feitas reduções que mostram que é suficiente considerar somente o caso em que todos os ideais primos P_i são iguais a um ideal primo fixo P.

Na Seção 3.2 a demonstração da Conjectura de mergulho foi dividida em dois casos de acordo com a característica do domínio $\mathbb{Z}[Q]/P$. Nessa seção aparece a idéia nova e vamos explicar aqui esta idéia para característica 0. A partir de algumas escolhas baseadas no Teorema de Normalização de Noether consideramos um novo módulo A', que é uma localização de A, e um novo grupo abeliano livre $\widehat{Q}$ com as seguintes condições sendo satisfeitas:

(I) os elementos de $\widehat{Q}$ agem sobre A' como alguns elementos de $\mathbb{Z}[Q]$ (ver página 46);

(II) A' tem um $\mathbb{Z}[\widehat{Q}]$-submódulo livre finitamente gerado $\widehat{A}$ (Lema 3.8);

(III) A' é uma localização de $\widehat{A}$ (Lema 3.9).

Como a FP_m-Conjectura vale para grupos que são extensões de algumas localizações específicas de $\widehat{A}$ por um grupo abeliano livre que tem $\widehat{Q}$ como somando direto (isso foi demonstrado em [19, Teorema 4]) segue que $\widehat{A} \rtimes \widehat{Q}$ mergulha num grupo metabeliano $A_1^* \rtimes Q_1^*$ de tipo FP_m. Como, pela condição (III), $A' = \widehat{A}[\frac{1}{c}]$ precisamos fazer mais uma localização e estudar o grupo $A_1^*[\frac{1}{c}] \rtimes H_1^*$ com $H_1^* = Q_1^* \times \mathbb{Z}$ sendo que um gerador de $\mathbb{Z}$ age sobre A_1^* como o elemento c. Temos que $A_1^*[\frac{1}{c}] \rtimes H_1^*$ é uma extensão HNN crescente com grupo base $A_1^* \rtimes Q_1^*$, que é de tipo FP_m, e portanto $A_1^*[\frac{1}{c}] \rtimes H_1^*$ tem tipo FP_m (os resultados básicos sobre extensões HNN estão explicados na Seção 1.5). É interessante observar que extensão HNN é um dos ramos da teoria de Bass-Serre de grupos que agem sobre árvores e muito importante em teoria combinatorial de grupos. Isso quase resolve o problema pois A mergulha em $A_1^*[\frac{1}{c}]$, mas ainda falta mergulhar Q (pois Q não mergulha em H_1^*). Então consideramos a extensão cindida $A_1^*[\frac{1}{c}] \rtimes (H_1^* \times Q)$ onde a ação de Q sobre $A_1^*[\frac{1}{c}]$ vem da ação original de Q sobre A. Esse novo grupo $A_1^*[\frac{1}{c}] \rtimes (H_1^* \times Q)$ é metabeliano e é a extensão do grupo $A_1^*[\frac{1}{c}] \rtimes H_1^*$ (que é de tipo FP_m) pelo grupo Q (que é de tipo FP_∞). Então por [5, Exercício da p.23] tal extensão tem tipo FP_m. Finalmente, mergulhamos $G = A \rtimes Q$ no grupo metabeliano

$A_1^*[\frac{1}{c}] \rtimes (H_1^* \times Q)$ que é de tipo FP_m. No caso em que a característica de $\mathbb{Z}[Q]/P$ é positiva a demonstração é semelhante mas foi necessário usar o Teorema 2.8 (que segue do Teorema 2.9) no lugar de [19, Teorema 4].

Ressaltamos que a idéia nova foi esquecer a ação de Q sobre A e procurar uma ação de um outro grupo abeliano finitamente gerado sobre uma localização de A onde essa nova ação num sentido é perto de ser livre. Uma vez que temos ações "perto de ser livres" podemos usar resultados de mergulho nos quais para casos particulares a FP_m-Conjectura vale: no caso de característica 0 temos o resultado de [19, Teorema 4] e no caso de característica $p > 0$ temos o Teorema 2.8 da tese. Por último, recordamos que a prova da Conjectura de mergulho pode ser considerada como uma evidência de que a FP_m-Conjectura deve ser verdadeira.

CAPÍTULO 1

Preliminares

A menos que se diga o contrário, todos os módulos considerados no decorrer da tese são módulos à direita.

Neste capítulo recordaremos definições e enunciaremos resultados conhecidos que serão usados nos capítulos posteriores. Apenas demonstraremos alguns fatos que serão muito utilizados.

1.1 Álgebra Comutativa

Nesta seção recordaremos definições e resultados de álgebra comutativa que podem ser encontrados com mais detalhes em [2] e [14].

Todos os anéis considerados nesta seção são comutativos e com unidade $1 \neq 0$ e todas as álgebras também são comutativas, a menos que se diga o contrário.

Iniciemos com uma ferramenta técnica muito importante em álgebra comutativa e que será muito utilizada nos capítulos posteriores: localização.

Definição 1.1. *Seja R um anel. Um subconjunto S de R é chamado um sistema multiplicativo se todo produto finito de elementos de S pertence a S.*

Seja R um anel e S um sistema multiplicativo de R. Considere no conjunto $R \times S$ a seguinte relação entre elementos (r, s), (r', s'):

$$\text{“Existe } t \in S \text{ tal que } t(sr' - s'r) = 0\text{”.} \tag{1.1}$$

Esta relação é uma relação de equivalência. Para cada par $(r, s) \in R \times S$ denotamos por r/s sua classe de equivalência.

Definição 1.2. *Sejam R um anel e S um sistema multiplicativo de R. O anel de frações de R definido por S e denotado por $S^{-1}R$ ou RS^{-1} é o conjunto quociente de $R \times S$ sob a relação de equivalência* (1.1) *com a estrutura de anel definida por*

$$(r/s) + (r'/s') = (s'r + sr')/ss', \quad (r/s)(r'/s') = rr'/ss'$$

para $r, r' \in R$ e $s, s' \in S$. A aplicação canônica de R para $S^{-1}R$ é o homomorfismo $r \mapsto r/1$.

Observações 1.3. (1) *Usualmente, denotamos a aplicação canônica definida acima por i_R^S.*

(2) *O* $\ker(i_R^S)$ *é o conjunto dos elementos $r \in R$ tal que existe $s \in S$ satisfazendo $sr = 0$; para i_R^S ser injetiva é necessário e suficiente que S não contenha divisor de zero em R. E para i_R^S ser bijetiva é necessário e suficiente que todo elemento $s \in S$ seja invertível em R.*

(3) *Se R é um domínio e $S = R \setminus \{0\}$ então $S^{-1}R$ é o corpo de frações de R.*

O homomorfismo canônico i_R^S nos permite considerar cada $S^{-1}R$-módulo como um R-módulo por restrição de escalares.

Definição 1.4. *Sejam R um anel, S um sistema multiplicativo de R e M um R-módulo. O módulo de frações de M definido por S e denotado por $S^{-1}M$ ou MS^{-1} é o $S^{-1}R$-módulo $M \otimes_R S^{-1}R$.*

Observações 1.5. (1) *Sejam M um módulo sobre um anel R e S um sistema multiplicativo de R. Usualmente, denotamos por i_M^S a aplicação canônica $m \mapsto m \otimes 1$ de M para $S^{-1}M$. Note que i_M^S é um homomorfismo de R-módulos e nem sempre é injetor.*

(2) *Para $m \in M$ e $s \in S$ denotamos por m/s o elemento $m \otimes (1/s)$ de $S^{-1}M$. Todo elemento de $S^{-1}M$ é desta forma e*

$$(m/s) + (m'/s') = (ms' + m's)/ss',$$

$$(m/s')(r/s) = mr/s's$$

com $m, m' \in M$, $r \in R$ e $s, s' \in S$.

(3) *Se S é o complemento de um ideal primo P de R, escrevemos M_P ao invés de $S^{-1}M$.*

Proposição 1.6. [14, II.2.2, Proposição 4] *Sejam R um anel, S um sistema multiplicativo de R e M um R-módulo. Para $m/s = 0$ ($m \in M, s \in S$) é necessário e suficiente que exista $s' \in S$ tal que $ms' = 0$.*

Observação 1.7. *Pela proposição acima, se M é um módulo sobre um anel R, S um sistema multiplicativo de R e i_M^S a aplicação canônica de localização então*

$$\ker(i_M^S) = \{m \in M \mid \exists\ s' \in S \ \textit{com}\ ms' = 0\}.$$

Lema 1.8. *Sejam M um módulo sobre um domínio R e S, T sistemas multiplicativos de R.*

(i) $T^{-1}(S^{-1}M) \simeq S^{-1}(T^{-1}M)$ como R-módulos.

(ii) Suponha que as aplicações canônicas i_M^S e i_M^T são R-monomorfismos. Então $S^{-1}M$ mergulha em $T^{-1}(S^{-1}M)$ como R-módulo através da aplicação canônica de localização.

Demonstração. (i) Observamos que $TS = \{ts \mid t \in T, s \in S\} = ST$ é um sistema multiplicativo de R. Então

$$T^{-1}(S^{-1}M) \simeq (TS)^{-1}M \simeq S^{-1}(T^{-1}M).$$

(ii) Por hipótese, $\ker(i_M^S) = \{0\}$ e $\ker(i_M^T) = \{0\}$.

Vejamos que a aplicação canônica $i_{S^{-1}M}^T : S^{-1}M \to T^{-1}(S^{-1}M)$ é injetora.

Seja $m/s \in S^{-1}M$ tal que $i_{S^{-1}M}^T(m/s) = 0$. Então, pela observação anterior, existe $t \in T$ tal que $(m/s)t = 0$.

Temos que

$$0 = (m/s)t = (mt)/s \Rightarrow \exists\ s' \in S \text{ com } (mt)s' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mt \in \ker i_M^S \Rightarrow mt = 0 \Rightarrow m \in \ker i_M^T \Rightarrow m = 0$$

e portanto $m/s = 0$. ∎

A próxima proposição nos diz que localização é um funtor exato.

Proposição 1.9. [2, Proposição 3.3] *Sejam R um anel, S um sistema multiplicativo de R e M', M, M'' módulos sobre R. Se $M' \to M \to M''$ é uma seqüência exata em M então $S^{-1}M' \to S^{-1}M \to S^{-1}M''$ é uma seqüência exata em $S^{-1}M$.*

Agora, vejamos as definições e algumas propriedades dos módulos e anéis Noetherianos.

Seja Σ um conjunto parcialmente ordenado por uma relação $\leq$ (isto é, $\leq$ é reflexiva e transitiva e é tal que $x \leq y$ e $y \leq x$ implica que $x = y$).

Proposição 1.10. [2, Proposição 6.1] *As seguintes condições sobre Σ são equivalentes:*

(i) *Toda seqüência crescente $x_1 \leq x_2 \leq \cdots$ em Σ é estacionária (isto é, existe n tal que $x_n = x_{n+1} = \cdots$).*

(ii) *Todo subconjunto não vazio de Σ tem um elemento maximal.*

Definição 1.11. *Seja M um módulo sobre um anel R. Se Σ é o conjunto de R-submódulos de M ordenado pela relação $\subseteq$, a condição (i) da proposição acima é chamada condição de cadeia ascendente e (ii) condição maximal. Se M satisfaz uma destas condições equivalentes, M é dito Noetheriano.*

Proposição 1.12. [2, Proposição 6.2] *Seja M um módulo sobre um anel R. Então M é Noetheriano se, e somente se, todo R-submódulo de M é finitamente gerado.*

Proposição 1.13. [2, Proposição 6.3(i)] *Seja $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ uma seqüência exata de módulos sobre um anel R. Então M é Noetheriano se, e somente se, M' e M'' são Noetherianos.*

Corolário 1.14. [2, Corolário 6.4] *Sejam R um anel e $\{M_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ uma família finita de R-módulos Noetherianos. Então $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ é um R-módulo Noetheriano.*

Definição 1.15. *Um anel R é dito Noetheriano se ele é Noetheriano como um R-módulo (ou seja, se ele satisfaz a condição de cadeia ascendente para ideais).*

Proposição 1.16. [2, Proposição 6.5] *Sejam R um anel Noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado. Então M é Noetheriano.*

Teorema 1.17. (**Teorema de Hilbert**) [2, Teorema 7.5] *Seja R um anel Noetheriano. Então o anel de polinômios $R[x]$ é Noetheriano.*

Proposição 1.18. [14, II.2.4, Corolário 2 da Proposição 10] *Sejam R um anel e S um sistema multiplicativo de R. Se M é um R-módulo Noetheriano, $S^{-1}M$ é um $S^{-1}R$-módulo Noetheriano. Em particular, se R é um anel Noetheriano, o anel $S^{-1}R$ também é Noetheriano.*

Agora, vamos discutir um pouco sobre ideais primos associados e decomposição primária.

Observemos que para todo módulo M sobre um anel R,

$$Ann(x) := \{r \in R \mid xr = 0\}, \quad x \in M;$$
$$Ann(M) := \{r \in R \mid Mr = 0\}.$$

são ideais de R denominados, respectivamente, de *anulador de x* e *anulador de M*.

Definição 1.19. *Seja M um módulo sobre um anel R. Um ideal primo P é dito ser associado com M se existe $x \in M$ tal que $P = Ann(x)$. O conjunto dos ideais primos associados com M é denotado por $Ass_R(M)$ ou simplesmente $Ass(M)$.*

Teorema 1.20. [14, *IV*.1.4, Teorema 1] *Sejam R um anel Noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado. Então existe uma cadeia de R-submódulos de M*

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \ldots \supseteq M_n = 0$$

tal que, para $0 \leq i \leq n-1$, M_i/M_{i+1} é isomorfo a R/P_i com P_i um ideal primo de R.

Recordemos que, se R é um anel e M um R-módulo, o conjunto dos ideais primos P de R tais que $M_P \neq 0$ é chamado *suporte de M* e denotado por $Supp(M)$.

Teorema 1.21. [14, *IV*.1.4, Teorema 2] *Sejam M um módulo finitamente gerado sobre um anel Noetheriano R e*

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \ldots \supseteq M_n = 0$$

uma cadeia de R-submódulos de M tal que, para $0 \leq i \leq n-1$, M_i/M_{i+1} é isomorfo a R/P_i com P_i um ideal primo de R. Então

$$Ass(M) \subseteq \{P_0, \ldots, P_{n-1}\} \subseteq Supp(M);$$

os elementos minimais destes três conjuntos são os mesmos e coincidem com os elementos minimais do conjunto de ideais primos contendo $Ann(M)$.

Definição 1.22. *Sejam R um anel Noetheriano, M um R-módulo e N um submódulo de M. Se $Ass(M/N)$ se reduz a um único ideal primo associado P, dizemos que N é P-primário com respeito a M (ou em M). Dizemos que M é primário como R-módulo se o submódulo trivial (nulo) é P-primário em M para um ideal primo P.*

Definição 1.23. *Sejam R um anel Noetheriano, M um R-módulo e N um submódulo de M. Uma família finita $(N_i)_{i\in I}$ de submódulos de M que são primários com respeito a M e tal que $N = \bigcap_{i\in I} N_i$ é chamada uma decomposição primária de N em M.*

Teorema 1.24. [14, *IV*.2.2, Teorema 1] *Sejam M um módulo finitamente gerado sobre um anel Noetheriano e N um submódulo de M. Então existe uma decomposição primária de N da forma*

$$N = \bigcap_{P \in Ass(M/N)} N(P)$$

sendo que, para todo $P \in Ass(M/N)$, $N(P)$ é P-primário com respeito a M.

Enunciemos alguns resultados sobre dependência integral.

Teorema 1.25. [14, V.1.1, Teorema 1] *Sejam R um anel, B uma álgebra sobre R e x um elemento de B. As seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) *x é raiz de um polinômio mônico no anel de polinômios $R[X]$.*

(ii) *A sub-álgebra $R[x]$ de B é um R-módulo finitamente gerado.*

Definição 1.26. *Sejam R um anel e B uma R-álgebra. Um elemento $x \in B$ é chamado integral sobre R se ele satisfaz as propriedades equivalentes do teorema anterior.*

Proposição 1.27. [14, V.1.1, Proposição 1] *Sejam R um anel, B uma álgebra sobre R e x um elemento de B. Para x ser integral sobre R é necessário e suficiente que $R[x]$ esteja contido em uma sub-álgebra B' de B que é um R-módulo finitamente gerado.*

Corolário 1.28. [14, V.1.1, Corolário da Proposição 1] *Sejam R um anel Noetheriano, B uma álgebra sobre R e x um elemento de B. Para x ser integral sobre R é necessário e suficiente que exista um R-submódulo finitamente gerado de B contendo $R[x]$.*

Definição 1.29. *Seja R um anel. Uma R-álgebra B é chamada integral sobre R se todo elemento de B é integral sobre R. B é chamada finita sobre R se B é um R-módulo finitamente gerado.*

Observação 1.30. *Segue da Proposição* 1.27 *que toda R-álgebra finita é integral sobre R e portanto é uma R-álgebra finitamente gerada; a recíproca é falsa.*

Agora, recordemos o **Teorema de Normalização de Noether**.

Teorema 1.31. [14, V.3.1, Teorema 1] *Sejam K um corpo e B uma K-álgebra finitamente gerada. Então existem $x_1, \ldots, x_n \in B$ algebricamente independentes sobre K e tais que B é integral sobre o anel de polinômios $K[x_1, \ldots, x_n]$.*

O fato abaixo será muito utilizado posteriormente.

Lema 1.32. *Seja Q um grupo abeliano finitamente gerado. Então o anel de grupo $\mathbb{Z}[Q]$ é um anel comutativo e Noetheriano.*

Demonstração. O anel $\mathbb{Z}[Q]$ é comutativo pois Q é um grupo abeliano. Seja $\{q_1, \ldots, q_k\}$ um conjunto finito de geradores de Q como grupo abeliano. Então $\mathbb{Z}[Q]$ é um quociente do anel de polinômios $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k]$ sendo que x_i é levado em q_i e y_i é levado em

q_i^{-1}. Como $\mathbb{Z}$ é um domínio de ideais principais segue que $\mathbb{Z}$ é Noetheriano. Pelo Teorema de Hilbert (Teorema 1.17) um anel de polinômios com um número finito de variáveis que comutam e com coeficientes sobre anel comutativo Noetheriano é Noetheriano. Finalmente, usando o fato que quociente de anel Noetheriano é Noetheriano concluímos que $\mathbb{Z}[Q]$ é anel Noetheriano. ■

Encerramos esta seção com dois lemas que são óbvios.

Lema 1.33. *Sejam R um anel, M um módulo sobre R e*

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \ldots \supseteq M_n = 0$$

uma cadeia de R-submódulos de M. Suponha que, para cada $i = 0, \ldots, n-1$, M_i/M_{i+1} admite uma cadeia de R-submódulos

$$\frac{M_i}{M_{i+1}} = N_{i,0} \supseteq N_{i,1} \supseteq \ldots \supseteq N_{i,k(i)} = 0.$$

Então existe uma cadeia de R-submódulos de M

$$M = M_{0,0} \supseteq M_{0,1} \supseteq \ldots \supseteq M_{0,k(0)} = M_1 \supseteq \ldots \supseteq M_i = M_{i,0} \supseteq M_{i,1} \supseteq \ldots \supseteq M_{i,k(i)} = M_{i+1} \supseteq$$

$$\supseteq \ldots \supseteq M_{n-1} = M_{n-1,0} \supseteq M_{n-1,1} \supseteq \ldots \supseteq M_{n-1,k(n-1)} = M_n = 0$$

tal que $\dfrac{M_{i,j}}{M_{i,j+1}} \simeq \dfrac{N_{i,j}}{N_{i,j+1}}$, para cada $i = 0, \ldots, n-1$ e $j = 0, \ldots, k(i)-1$.

Demonstração. Para cada $i = 0, \ldots, n-1$, considere $\pi_i : M_i \to M_i/M_{i+1}$ a projeção canônica e defina $M_{i,j} := \pi_i^{-1}(N_{i,j})$, para cada $j = 0, \ldots, k(i)-1$. ■

Lema 1.34. *Sejam M um módulo sobre um anel R e $\{N_i\}_{1 \leq i \leq n}$ uma família de R-submódulos de M tal que $M = \bigoplus_{i=1}^{n} N_i$. Então existe um cadeia de R-submódulos de M*

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \ldots \supseteq M_n = 0$$

tal que, para $0 \leq i \leq n-1$, $M_i/M_{i+1} \simeq N_{i+1}$.

Demonstração. Basta definir $M_i = \bigoplus_{j=i+1}^{n} N_j$, $\forall\, 0 \leq i \leq n-1$, e $M_n = 0$. ■

1.2 Grupos de tipo FP_m

Veremos a definição de grupo de tipo FP_m e algumas de suas propriedades. As demonstrações dos resultados e outras propriedades podem ser encontradas em [5]. Por último, enunciaremos um resultado devido a K. S. Brown [15] que dá condições necessárias para que um grupo seja de tipo FP_m a partir de sua ação sobre um CW-complexo.

Denotaremos por Λ um anel (não necessariamente comutativo) com unidade $1 \neq 0$. A menos que se diga o contrário, todos os módulos considerados são módulos à direita.

Definição 1.35. *Um Λ-módulo A é dito ser de tipo FP_m se existe uma resolução projetiva $\underline{\underline{P}} \twoheadrightarrow A$ com P_i finitamente gerado para todo $i \leq m$. Se os módulos P_i são finitamente gerados para todo i então dizemos que A é de tipo FP_∞.*

Observação 1.36. *Se A é de tipo FP_m, $0 \leq m \leq \infty$, sempre podemos construir uma resolução livre que é finitamente gerada nas dimensões $\leq m$.*

Exemplos 1.37. (1) *A é de tipo FP_0 se, e somente se, A é finitamente gerado.*

(2) *A é de tipo FP_1 se, e somente se, A é finitamente apresentável.*

(3) *Se Λ é Noetheriano e A é finitamente gerado então A é de tipo FP_∞.*

O próximo resultado liga a propriedade FP_m com os funtores homológicos Tor e Ext. Aqui não iremos definir estes funtores. As definições e propriedades básicas de Tor e Ext pode ser encontradas em [23].

Teorema 1.38. [5, Teorema 1.3] *Seja A um Λ-módulo. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(*i*) *A é de tipo FP_m.*

(*iia*) *Para qualquer família $\{M_i \mid i \in I\}$ de Λ-módulos (à esquerda) a aplicação*

$$Tor_k^\Lambda\left(A, \prod_{i\in I} M_i\right) \to \prod_{i \in I} Tor_k^\Lambda(A, M_i)$$

é um isomorfismo para $k < m$ e um epimorfismo para $k = m$.

(*iib*) *Para qualquer família $\{N_j \mid j \in J\}$ de Λ-módulos a aplicação*

$$\bigoplus_{j \in J} Ext_\Lambda^k(N_j, A) \to Ext_\Lambda^k\left(\bigoplus_{j\in J} N_j, A\right)$$

é um isomorfismo para $k < m$ e um monomorfismo para $k = m$.

Denotaremos por R um anel comutativo com unidade $1 \neq 0$.

Definição 1.39. *Um grupo G é dito ser de tipo FP_m sobre R, $m = \infty$ ou um inteiro ≥ 0, se o $R[G]$-módulo trivial R é de tipo FP_m como um $R[G]$-módulo. Se G é de tipo FP_m sobre $\mathbb{Z}$ dizemos apenas que G é de tipo FP_m.*

Exemplo 1.40. *Todo grupo G é de tipo FP_0, pois $\mathbb{Z}$ é um $\mathbb{Z}[G]$-módulo finitamente gerado.*

Proposição 1.41. [5, Proposição 2.1] *Um grupo G é de tipo FP_1 se, e somente se, G é finitamente gerado.*

Proposição 1.42. [5, Proposição 2.2] *Todo grupo finitamente apresentável é de tipo FP_2.*

A recíproca da Proposição acima não é verdadeira como pode ser visto em [4].

Lema 1.43. *Todo grupo abeliano finitamente gerado é de tipo FP_∞.*

Demonstração. Segue dos fatos que se G é um grupo abeliano finitamente gerado então $\mathbb{Z}[G]$ é um anel Noetheriano (Lema 1.32) e que o $\mathbb{Z}[G]$-módulo trivial $\mathbb{Z}$ é finitamente gerado. ∎

Proposição 1.44. [5, Proposição 2.3] *Um grupo G é de tipo FP_m $(1 \leq m \leq \infty)$ se, e somente se, G é finitamente gerado e $H_k(G, \prod \mathbb{Z}[G]) = 0$ para todo $1 \leq k < m$ e todo produto direto de um número enumerável de cópias de $\mathbb{Z}[G]$.*

Proposição 1.45. [5, Proposição 2.5] *Seja G um grupo e $S \leq G$ um subgrupo de índice finito. Então G é de tipo FP_m $(0 \leq m \leq \infty)$ se, e somente se, S é de tipo FP_m.*

Proposição 1.46. [5, Proposição 2.7] *Seja $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ uma seqüência exata curta de grupos e assuma que N é de tipo FP_∞. Então G é de tipo FP_m $(0 \leq m \leq \infty)$ se, e somente se, Q é de tipo FP_m.*

Proposição 1.47. [5, Exercício da p.23] *Seja $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ uma seqüência exata curta de grupos e assuma que N é de tipo FP_m $(0 \leq m < \infty)$. Então G é de tipo FP_m se, e somente se, Q é de tipo FP_m.*

Demonstração. Idéia da demonstração: basta considerar a LHS-seqüência "spectral"

$$H_p(Q\ ;\ H_q(N; \prod \mathbb{Z}[G])) \Rightarrow H_{p+q}(G\ ; \prod \mathbb{Z}[G])$$

e usar a Proposição 1.44 e o Teorema 1.38. ∎

Agora, recordemos a definição de um CW-complexo e depois vejamos o critério devido a K. S. Brown.

Definição 1.48. *Um espaço X de Hausdorff admite uma estrutura de CW-complexo se existir uma seqüência ascendente de fechados $X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \ldots$ que satisfaz as seguintes condições:*

(a) X^0 tem a topologia discreta;

(b) Para cada $n > 0$, X^n é obtido de X^{n-1} por adjunção de n-células (caso exista), isto é, $X^n \setminus X^{n-1}$ é uma união disjunta de subconjuntos abertos (em X^n) e^n_λ, $\lambda \in \Lambda$, (chamados n-células abertas) onde cada e^n_λ é "colada" a X^{n-1} por meio de uma aplicação chamada aplicação característica. Isto significa que para cada λ existe uma aplicação contínua $f_\lambda : \overline{U^n} \to \overline{e^n_\lambda}$ tal que f_λ aplica U^n homeomorficamente sobre e^n_λ e $f_\lambda(\overline{U^n} \setminus U^n) \subset X^{n-1}$, onde $U^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$. Além disto, $Y \subset X^n$ é fechado se, e somente se, $Y \cap X^{n-1}$ e $f_\lambda^{-1}(Y)$ são fechados para todo $\lambda \in \Lambda$;

(c) $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n$;

(d) O espaço X e os subespaços X^n têm a topologia fraca, isto é, um subconjunto Y de X (ou de X^n) é fechado se, e somente se, $Y \cap \overline{e^n}$ é fechado para todas as n-células e^n, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Observações 1.49. (1) *O subconjunto X^n (da definição anterior) é chamado n-esqueleto. Os pontos de X^0 são chamados vértices ou 0-células. Um CW-complexo é dito finito se a sua coleção de células é finita e infinito, caso contrário. Se $X = X^n$ para algum inteiro n (onde X^n necessariamente foi obtido por adjunção de pelo menos uma n-célula) dizemos que o CW-complexo tem dimensão finita n.*

(2) *Um subconjunto Y de um CW-complexo é chamado um sub-complexo se Y é uma união de células de X e para toda célula e^n, $e^n \subset Y$ implicar em $\overline{e^n} \subset Y$.*

Definição 1.50. *Seja G um grupo atuando sobre um CW-complexo X por permutação de células de mesma dimensão. O grupo G atua cocompactivamente sobre X se o número de G-órbitas das células é finito.*

Teorema 1.51. [15, Proposição 1.1] *Seja m um número natural e G um grupo atuando sobre um CW-complexo X por permutação de células e tal que para cada célula o estabilizador da célula fixa os vértices. Assuma que X é $(m-1)$-acíclico (ou seja, $H_i(X) = 0$ para*

$i \leq m-1$), os estabilizadores em G de células de dimensão $i \leq m$ são de tipo FP_{m-i} e G atua cocompactivamente sobre X. Então G é de tipo FP_m.

1.3 O invariante de Bieri-Strebel para grupos metabelianos

Nesta seção Q denotará um grupo abeliano finitamente gerado e iremos considerar $\mathbb{R}$ como grupo abeliano via a operação adição $+$.

Definição 1.52. *Um "character" real não trivial de Q é um homomorfismo $\chi : Q \to \mathbb{R}$ de grupos abelianos tal que $Im(\chi) \neq 0$.*

Dado um "character" real $\chi : Q \to \mathbb{R}$, dividimos Q com respeito a este "character" considerando o subconjunto

$$Q_\chi := \{q \in Q \mid \chi(q) \geq 0\}.$$

Temos que Q_χ é um sub-monóide de Q. Além disso, $\mathbb{Z}[Q_\chi]$ é um subanel de $\mathbb{Z}[Q]$ e se A é um $\mathbb{Z}[Q]$-módulo podemos considerar A como um módulo sobre $\mathbb{Z}[Q_\chi]$.

Definição 1.53. *Sejam χ_1, χ_2 "characters" reais não triviais de Q. Dizemos que χ_1 e χ_2 são equivalentes ($\chi_1 \sim \chi_2$) se existe um número real positivo r tal que $\chi_1 = r\chi_2$. Denotamos por $[\chi_1]$ a classe de equivalência de χ_1.*

Defina

$$S(Q) := \frac{Hom(Q, \mathbb{R}) \setminus \{0\}}{\sim}$$

Podemos identificar $S(Q)$ com a esfera unitária $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n = Hom(Q, \mathbb{R})$, onde n é o posto de torção-livre de Q.

Definição 1.54. *Seja A um $\mathbb{Z}[Q]$-módulo finitamente gerado. O invariante de Bieri-Strebel é definido por*

$$\Sigma_A(Q) = \{[\chi] \in S(Q) \mid A \text{ é finitamente gerado sobre } \mathbb{Z}[Q_\chi]\}.$$

Exemplo 1.55. *Considere $Q = \langle q \rangle \simeq \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ e q atuando sobre A por multiplicação à direita com 2. Temos que $S(Q)$ tem apenas os pontos $[\chi]$ e $[-\chi]$ sendo que $\chi : Q \to \mathbb{R}$ leva q em 1. Então $Q_\chi = \{q^z \mid z \geq 0\}$ e $Q_{-\chi} = \{q^z \mid z \leq 0\}$. Logo, A é finitamente gerado sobre $\mathbb{Z}[Q_{-\chi}]$ mas não é finitamente gerado sobre $\mathbb{Z}[Q_\chi]$, ou seja, $[-\chi] \in \Sigma_A(Q)$ e $[\chi] \notin \Sigma_A(Q)$.*

Vejamos algumas propriedades do invariante definido acima.

Seja A um $\mathbb{Z}[Q]$-módulo. O *centralizador* de A em $\mathbb{Z}[Q]$ é o conjunto:

$$C(A) = \{\lambda \in \mathbb{Z}[Q] \mid a\lambda = a, \forall\, a \in A\}.$$

Proposição 1.56. [9, Proposição 2.1] *Sejam A um módulo finitamente gerado sobre $\mathbb{Z}[Q]$ e $[\chi] \in S(Q)$. Então $[\chi] \in \Sigma_A(Q)$ se, e somente se, existe $\lambda \in C(A)$ tal que*

$$\min\{\chi(q) \mid q \in supp(\lambda)\} > 0$$

sendo que $supp(\lambda)$ contém todos os elementos de Q que aparecem em λ. Além disso, se $[\chi] \in \Sigma_A(Q)$ todo conjunto que gera A como $\mathbb{Z}[Q]$-módulo também gera A como módulo sobre $\mathbb{Z}[Q_\chi]$.

Proposição 1.57. [9, Proposição 2.2.(*iii*)] *Sejam A um $\mathbb{Z}[Q]$-módulo finitamente gerado e $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ uma seqüência exata curta de $\mathbb{Z}[Q]$-módulos. Então*

$$\Sigma_A(Q) = \Sigma_{A'}(Q) \cap \Sigma_{A''}(Q).$$

Definição 1.58. *Um grupo G é metabeliano se existe uma seqüência exata curta de grupos*

$$1 \to A \to G \xrightarrow{\pi} Q \to 1 \qquad (*)$$

com A e Q abelianos.

Observações 1.59. (1) *Subgrupos e quocientes de um grupo metabeliano também são metabelianos.*

(2) *Na definição acima podemos considerar A como um $\mathbb{Z}[Q]$-módulo com Q atuando por conjugação à direita, isto é, $a \circ q := g^{-1}ag \overset{not.}{=} a^g$ com $q = \pi(g)$.*

Lema 1.60. *Em $(*)$, G é finitamente gerado se, e somente se, A é finitamente gerado como um $\mathbb{Z}[Q]$-módulo e Q é finitamente gerado como grupo.*

Demonstração. Suponhamos que Q é finitamente gerado como grupo e A é finitamente gerado como $\mathbb{Z}[Q]$-módulo. Sejam $\{a_1, \ldots, a_s\}$ e $\{q_1, \ldots, q_r\}$ um conjunto de geradores de A e Q, respectivamente. Consideremos $g_1, \ldots, g_r$ elementos de G tais que $\pi(g_i) = q_i$, para todo $i = 1, \ldots, r$. Portanto, o conjunto $\{a_1, \ldots, a_s, g_1, \ldots, g_r\}$ gera G.

Agora, suponhamos que G é finitamente gerado. Seja $\{g_1, \ldots, g_n\}$ um conjunto de geradores de G. Então $X = \{\pi(g_1), \ldots, \pi(g_n)\}$ é um conjunto finito de geradores de Q. Note que Q é um $\mathbb{Z}$-módulo finitamente gerado. Logo, para todo conjunto finito Y de geradores de Q como $\mathbb{Z}$-módulo temos que Q é isomorfo a um quociente de um $\mathbb{Z}$-módulo livre M com base Y (ou seja, M é um grupo abeliano livre de base Y) por um submódulo que é gerado por um subconjunto finito R de M. Aplicamos isso para $Y = X$, escrevemos os elementos de R multiplicativamente (isto é, $z_1x_1 + z_2x_2$ multiplicativamente é $x_1^{z_1}x_2^{z_2}$, para $x_1, x_2 \in X$, $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$) e substituímos $\pi(g_i)^\epsilon$ por g_i^ϵ, com $\epsilon = \pm 1$. Logo, o conjunto obtido a partir de R junto com $\{g_ig_jg_i^{-1}g_j^{-1}\}_{1\leq i\leq j\leq n}$ gera A como $\mathbb{Z}[Q]$-módulo. ∎

Por último, citamos um dos principais resultados de [9]. A demonstração deste resultado é muito longa e usa técnicas de topologia algébrica e álgebra comutativa.

Teorema 1.61. [9, Teorema 5.4] *Seja G um grupo metabeliano. Então G é de tipo FP_2 se, e somente se, G é finitamente apresentável.*

1.4 Valorizações e o invariante de Bieri-Strebel

Nessa seção iremos discutir a relação do invariante de Bieri-Strebel (definido na seção anterior) com valorizações. Esta relação será utilizada no Capítulo 2.

Iniciemos com a definição e algumas propriedades de valorizações. Maiores detalhes podem ser encontrados em [14].

Definição 1.62. *Seja B um anel comutativo e $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ordenado pela ordem usual de $\mathbb{R}$ mais a condição adicional que ∞ é maior que cada elemento de $\mathbb{R}$. Além disso, estenda a operação aditiva $+$ de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}_\infty$ definindo $\infty + \infty = \infty + r = r + \infty = \infty$, $\forall\, r \in \mathbb{R}$. Uma aplicação $v : B \to \mathbb{R}_\infty$ é chamada uma valorização real sobre B se:*

(a) $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$, $\forall\, x, y \in B$;

(b) $v(xy) = v(x) + v(y)$, $\forall\, x, y \in B$;

(c) $v(0) = \infty$, $v(1) = 0$.

Exemplo 1.63. *Sejam Q um grupo abeliano finitamente gerado e $\chi : Q \to \mathbb{R}$ um “character” real não trivial. Então a aplicação $v : \mathbb{Z}[Q] \to \mathbb{R}_\infty$ que associa a cada $\lambda = \sum_{q\in Q} z_q q \neq 0$ o $\min\{\chi(q) \mid z_q \neq 0\}$ e 0 com ∞ é uma valorização real sobre $\mathbb{Z}[Q]$.*

Proposição 1.64. [14, VI.3.1, Proposição 1] *Seja v uma valorização real sobre um anel comutativo B. Para qualquer $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq B$,*

$$v\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \geq \min_{1\leq i\leq n} v(x_i). \tag{1.2}$$

Além disso, se existe um único índice k tal que $v(x_k) = \min_{1\leq i\leq n} v(x_i)$ os dois lados de 1.2 *são iguais. Em particular, se $v(x) \neq v(y)$ temos que $v(x+y) = \min\{v(x), v(y)\}$.*

Definição 1.65. *Seja Q um grupo abeliano finitamente gerado. Considere o anel*

$$B = \frac{R[Q]}{I}$$

com R um anel com unidade, comutativo e Noetheriano e I um ideal de $R[Q]$. Sejam $\overline{R}$ a imagem de R em B, $\overline{Q}$ a imagem de Q em B e v_0 uma valorização real sobre $\overline{R}$. O invariante de Bieri-Groves é definido por

$$\begin{aligned}\Delta_B^{v_0}(Q) := \{\chi : Q \to \mathbb{R} \text{ “character”} \mid & \text{ existe } v : B \to \mathbb{R}_\infty \\ & \text{valorização real tal que } v_{|_{\overline{R}}} = v_0 \text{ e } v_{|_{\overline{Q}}} = \chi\}.\end{aligned}$$

Finalmente, vejamos qual é a relação entre o invariante de Bieri-Strebel e valorizações.

Teorema 1.66. [10, teorema 2.1] *Seja Q um grupo abeliano finitamente gerado e A um $\mathbb{Z}[Q]$-módulo finitamente gerado. Considere o anel $B = \dfrac{\mathbb{Z}[Q]}{Ann(A)}$, $\overline{R}$ a imagem de $\mathbb{Z}$ em B e $\Sigma_A^c(Q) = S(Q) \setminus \Sigma_A(Q)$. Então*

$$\Sigma_A^c(Q) = \left\{[\chi] \in S(Q) \mid \text{existe } v_0 \text{ valorização real de } \overline{R} \text{ com } \chi \in \Delta_B^{v_0}(Q)\right\}.$$

1.5 Extensão HNN

Em 1949 G. Higman, B. Neumann e H. Neumann estudaram uma construção ligada a produtos livres amalgamados. Esta construção é agora chamada uma extensão HNN.

Vejamos a definição de extensão HNN com uma letra estável e alguns resultados que serão usados mais tarde. Mais detalhes podem ser encontrados em [17] e [24].

Definição 1.67. *Sejam G e B grupos, i_0 e i_1 monomorfismos de B em G e P um grupo cíclico com gerador p. Considere N o subgrupo normal de $G * P$ gerado pelo conjunto $\{p^{-1}\ i_0(b)p\ (i_1(b))^{-1} \mid b \in B\}$ (ou seja, N é o menor subgrupo normal de $G * P$ que contém $\{p^{-1}\ i_0(b)p\ (i_1(b))^{-1} \mid b \in B\}$) e $H = (G * P)/N$. O grupo H é uma extensão HNN com grupo base G, letra estável p e subgrupos associados $i_0(B)$ e $i_1(B)$. Usualmente, tomamos B como um subgrupo de G e i_0 como sendo a inclusão e escrevemos $H = \langle G, p \mid p^{-1}Bp = C\rangle$ com $C = Im(i_1)$.*

Exemplo 1.68. *O grupo com apresentação $\langle a, b \mid a^{-1}ba = b^3\rangle$ é uma extensão HNN do grupo cíclico infinito $\langle b\rangle$ com letra estável a e subgrupos associados $\langle b\rangle$ e $\langle b^3\rangle$.*

Seja $H = \langle G, p \mid p^{-1}Bp = C\rangle$ uma extensão HNN com B um subgrupo de G, i_0 a inclusão e i_1 um isomorfismo de B em C. Considere S e S_{-1} transversais à esquerda de B e C em G com todas contendo 1. Temos o seguinte Teorema da Forma Normal.

Teorema 1.69. (**Teorema da Forma Normal**)[17, 1.5, Teorema 31] (*i*) *O homomorfismo $j : G \to H$ induzido pela inclusão de G em $G * P$ é um monomorfismo.*

(*ii*) *Considerando G como um subgrupo de H temos que qualquer $h \in H$ pode ser escrito de forma única como*

$$h = g_0 p^{\varepsilon_0} g_1 \dots g_{n-1} p^{\varepsilon_{n-1}} g_n$$

sendo que $n \geq 0$, $\varepsilon_i = \pm 1$ (para n=0 a expressão é exatamente g_0) e

- $g_n \in G$;
- $g_i \in S$ *se* $\varepsilon_i = 1$ *e* $g_i \in S_{-1}$ *se* $\varepsilon_i = -1$ $(0 \leq i \leq n-1)$;
- *se* $\varepsilon_{i-1} = -\varepsilon_i$ *então* $g_i \neq 1$ $(1 \leq i \leq n-1)$.

Seja $H = \langle G, p \mid p^{-1}Bp = C\rangle$ uma extensão HNN com grupo base G, letra estável p e subgrupos associados $B \simeq C$. Denotaremos por G/H e B/H o conjunto das classes laterais à direita de G e B em H, respectivamente. A árvore padrão orientada (ver [18] e [24]) $\Gamma = (V, E, \iota, \tau)$ associada com H é dada pelo conjunto de vértices $V = G/H$, conjunto de arestas $E = B/H$, aplicação ponto inicial $\iota : E \to V$, $\iota(Bg) = Gg$ e aplicação ponto final $\tau : E \to V$, $\tau(Bg) = Gp^{-1}g$. Não faremos distinção entre estes dados abstratos e a realização topológica de Γ (como um CW-complexo contrátil de dimensão 1). A ação de H sobre V e E por multiplicação à direita induz uma ação de H sobre a árvore Γ por permutação de células (de mesma dimensão). Os estabilizadores em H das 0-células (que são os vértices) e das 1-células (que são as arestas) de Γ são isomorfos aos grupos G e B, respectivamente. E ainda, H age cocompactivamente sobre Γ.

A proposição seguinte dá condições necessárias para que uma extensão HNN seja de tipo FP_m.

Lema 1.70. *Seja m um número natural e H uma extensão HNN com grupo base G, letra estável p e subgrupos associados $B \simeq C$. Suponha que G é de tipo FP_m e B é de tipo FP_{m-1}. Então H é de tipo FP_m.*

Demonstração. As considerações acima e as hipóteses da proposição garantem que as condições do critério de Brown (Teorema 1.51) são satisfeitas. Portanto, H é um grupo de tipo FP_m. ■

Observação 1.71. *Dizemos que H é uma extensão HNN crescente se $B = G$ e escrevemos $H = \langle G, p \mid G^p \leq G \rangle$ com $G^p = p^{-1}Gp$.*

CAPÍTULO 2

Complexo de Åberg e alguns resultados novos

Iniciamos o capítulo com a construção do complexo de Åberg pois ele será usado na demonstração de um resultado que será necessário no próximo capítulo. Depois, enunciaremos alguns resultados já existentes sobre mergulho de grupos metabelianos finitamente gerados. Por último, demonstraremos a FP_m-Conjectura para um caso bem específico.

2.1 Complexo de Åberg

Construindo árvores de "characters"

Seja G um grupo finitamente gerado. Existe uma construção geral de uma árvore associada a um "character" real não nulo $\chi : G \to \mathbb{R}$ [11, Proposição 4.3 e Teorema 4.4]. Esta árvore se reduz a uma reta se o "character" χ é especial, isto é, se $[\chi] = \{\lambda\chi \mid \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0\}$ é um elemento do invariante geométrico $\Sigma^1(G)$ definido em [12]. No caso em que G é uma extensão cindida de um subgrupo normal abeliano A por um grupo abeliano Q temos que $[\chi] \notin \Sigma^1(G)$ se, e somente se, $\chi(A) = 0$ e $[\chi_{|Q}] \in \Sigma_A^c(Q) = S(Q) \setminus \Sigma_A(Q)$.

De agora em diante, vamos assumir que G é uma extensão cindida de grupos abelianos A

e Q com $Q \simeq \mathbb{Z}^n$ e G é finitamente gerado. Então, pelo Lema 1.60, Q é finitamente gerado como grupo e A é finitamente gerado como $\mathbb{Z}[Q]$-módulo com Q atuando por conjugação à direita. Também assumimos que o "character" $\chi : G \to \mathbb{R}$ é discreto, isto é, a imagem de χ é isomorfa a $\mathbb{Z}$. Por razões técnicas vamos supor que $Im(\chi) = \mathbb{Z}$. E ainda, $\chi(A) = 0$ e Q tem base consistindo de uma base do $\ker(\chi_{|Q})$ junto com um elemento $q_\chi \in Q$ tal que $\chi(q_\chi) = 1$.

Seja $\{a_1, \ldots, a_d\}$ um conjunto de geradores de A como $\mathbb{Z}[Q]$-módulo por conjugação. Usaremos o símbolo $\circ$ para denotar a ação à direita de $\mathbb{Z}[Q]$ sobre A por conjugação.

Considere o sub-monóide de Q

$$Q_\chi = \{q \in Q \mid \chi(q) \geq 0\}$$

e o $\mathbb{Z}[Q_\chi]$-submódulo de A

$$A_\chi = a_1 \circ \mathbb{Z}[Q_\chi] + \ldots + a_d \circ \mathbb{Z}[Q_\chi].$$

Observamos que, pela Proposição 1.56, $A_\chi = A$ se, e somente se, $[\chi_{|Q}] \in \Sigma_A(Q)$. Como estamos interessados somente em árvores que não se reduzem a uma reta e $\chi(A) = 0$ segue que $[\chi_{|Q}] \notin \Sigma_A(Q)$. Conseqüentemente, $A_\chi \subsetneqq A$.

Sejam β um número real inteiro negativo e $G(\chi)$ o subgrupo de G gerado por $A_\chi \circ q_\chi^\beta$ e $\ker(\chi_{|Q})$. Temos que

$$G(\chi) \cap A = A_\chi \circ q_\chi^\beta.$$

Considere $G(\chi)^+$ o sub-monóide de G gerado por $G(\chi)$ e q_χ. Como $q_\chi^{-1} G(\chi) q_\chi \subseteq G(\chi)$ segue que $G(\chi) q_\chi \subseteq q_\chi G(\chi)$ e portanto

$$G(\chi)^+ = \bigcup_{z \geq 0} q_\chi^z G(\chi).$$

Seja T_0 o conjunto das classes laterais à direita de $G(\chi)$ em G, ou seja,

$$T_0 := G(\chi)/G = \{G(\chi)g \mid g \in G\}$$

com a relação de ordem parcial:

$$G(\chi)g_1 \leq G(\chi)g_2 \Longleftrightarrow g_2 \in G(\chi)^+ g_1.$$

Como $G(\chi) \subseteq \ker(\chi)$ o "character" $\chi : G \to \mathbb{R}$ se estende a uma aplicação

$$h_\chi : T_0 \to \mathbb{R}\ ;\quad h_\chi(G(\chi)g) := \chi(g),\ \forall\ G(\chi)g \in T_0.$$

Dizemos que dois elementos $\alpha \leq \gamma$ de T_0 são *vizinhos* se

$$h_\chi(\gamma) - h_\chi(\alpha) = 1.$$

Ligamos cada dois vizinhos com um intervalo unitário e obtemos um grafo Γ_χ com conjunto de vértices T_0 e arestas os intervalos unitários. Podemos estender linearmente a aplicação h_χ definida no conjunto de vértices T_0 a uma aplicação $h_\chi : \Gamma_\chi \to \mathbb{R}$ sobre as arestas de Γ_χ.

O grupo G atua sobre os vértices de Γ_χ por multiplicação à direita e esta ação é estendida linearmente nas arestas.

Seja $L_{g,\chi}$ o sub-grafo do grafo Γ_χ gerado pelo conjunto de vértices $\{G(\chi)q_\chi^z g\}_{z\in\mathbb{Z}}$. Note que $G(\chi)q_\chi^z g$ e $G(\chi)q_\chi^{z+1} g$ são vizinhos. Portanto, $L_{g,\chi}$ é uma reta. Ainda mais,

$$\Gamma_\chi = \bigcup_{a\in A} L_{a,\chi}.$$

Escreveremos $[(a,r)]$, com $a \in A$ e $r \in \mathbb{R}$, para denotar o elemento de $L_{a,\chi}$ com h_χ-valor igual a r.

Lema 2.1. [20, Lema 2.1] *Para qualquer $a \neq b$ temos que*

$$L_{a,\chi} \cap L_{b,\chi} = \{[(a,r)] = [(b,r)] \mid r \leq z_0\}$$

com $z_0 = \sup\{z \mid a - b \in A_\chi \circ q_\chi^{\beta+z}\}$, ou seja, a intersecção de duas retas rotuladas por elementos diferentes de A é uma reta ou um raio. Em particular, Γ_χ é uma árvore.

O complexo de Åberg

Considere G um grupo finitamente gerado que é uma extensão cindida de grupos abelianos A e Q com $Q \simeq \mathbb{Z}^n$. Seja s um número natural arbitrário e V um conjunto finito de $s+1$ "characters" discretos $\chi : G \to \mathbb{R}$ tais que $\chi(A) = 0$ e $[\chi_{|Q}] \notin \Sigma_A(Q)$. Para cada $\chi \in V$ considere a árvore Γ_χ construída acima e defina

$$X := \prod_{\chi\in V} \Gamma_\chi \quad \text{e} \quad h := \prod_{\chi\in V} h_\chi : X \to \mathbb{R}^{s+1}.$$

Seja W o $\mathbb{R}$-subespaço de $\mathbb{R}^{s+1}$ gerado por $\left\{\prod_{\chi\in V} \chi(q)\right\}_{q\in Q}$. Finalmente, definimos o *CW-complexo do tipo Åberg*

$$Y = h^{-1}(W).$$

Note que X é um produto de árvores e pode ser visto como construído por cubos unitários de dimensão $(s+1)$ obtidos por tomar uma aresta em cada árvore Γ_χ. Então a intersecção de Y com qualquer tal $(s+1)$-cubo ou um cubo de seu bordo de dimensão menor é vazia ou um simplexo. Tal intersecção é homeomorfa a sua imagem pela aplicação h. Estes simplexos são as células de Y. A dimensão geométrica da célula é a dimensão geométrica natural de um simplexo como um subconjunto do espaço euclidiano.

O grupo G atua diagonalmente sobre X por G-ação à direita nas árvores (via multiplicação à direita) e isto induz uma G-ação à direita no complexo Y (ver [20, Lema 2.2]).

Usando as notações acima temos:

Lema 2.2. [1, Proposição $III.3.3$] *Seja m um número natural. Suponha que o conjunto $\{\chi_{|Q}\}_{\chi\in V}$ tem a propriedade que cada m elementos distintos deste conjunto pertence a um semi-espaço aberto de $Hom(Q,\mathbb{R})$. Então Y é $(m-1)$-conexo.*

2.2 Propriedades de Mergulho

Apenas enunciaremos alguns resultados já existentes.

Lema 2.3. [3, Lema 3] *Todo grupo metabeliano finitamente gerado pode ser mergulhado num grupo finitamente gerado que é a extensão cindida de grupos abelianos.*

Teorema 2.4. [19, Teorema 4] *Sejam $G = A \rtimes Q$ um grupo finitamente gerado com A e Q abelianos, Q livre de torção, A livre como $\mathbb{Z}[Q]$-módulo (à direita) por conjugação e m um número natural. Então G mergulha em um grupo $G^* = A^* \rtimes Q^*$ de tipo FP_m com A^* e Q^* abelianos.*

Observamos que, na demonstração do Teorema 2.4, A^* é uma localização de A com respeito a um sistema multiplicativo S que é gerado por um subconjunto finito T de $\mathbb{Z}[Q]$ e $Q^* := Q \times Q_0$ sendo que Q_0 é um grupo abeliano livre com base T.

Teorema 2.5. [19, Teorema 2] *Seja G um grupo metabeliano finitamente gerado e m um número natural. Então existe um grupo metabeliano H de tipo FP_m, um subgrupo normal N de H e um subgrupo H_1 de H contendo N tal que $H_1/N \simeq G$. Conseqüentemente, G mergulha num quociente de H.*

Além disso, H é a extensão cindida de grupos abelianos.

Proposição 2.6. [19, Proposição 1] *Seja G um grupo metabeliano de tipo FP_4 tal que G é uma extensão cindida de grupos abelianos. Então todo quociente de G é de tipo FP_4.*

Como conseqüência imediata do Teorema 2.5 e da Proposição acima temos o seguinte:

Corolário 2.7. [19, Corolário 1] *Todo grupo metabeliano finitamente gerado pode ser mergulhado em um grupo de tipo FP_4.*

2.3 Teorema auxiliar

Considere p um número primo ≥ 2 e o corpo $K = \mathbb{Z}_p$ com p elementos. A menos que se diga o contrário, todos o produtos tensoriais considerados são sobre $\mathbb{Z}$.

Teorema 2.8. *Seja m um número natural e $G = A \rtimes Q$ um grupo finitamente gerado com A e Q abelianos. Suponha que Q é abeliano livre de posto finito e que existe uma cadeia de $\mathbb{Z}[Q]$-submódulos de A*

$$A = A_0 \supseteq A_1 \supseteq \ldots \supseteq A_n = 0$$

tal que, para cada $0 \leq k \leq n-1$,

$$\frac{A_k}{A_{k+1}} \simeq K[Q] \quad \text{como } \mathbb{Z}[Q]\text{-módulo}$$

sendo que $K[Q]$ é visto como $\mathbb{Z}[Q]$-módulo por restrição de escalares via o homomorfismo de anéis $\mathbb{Z}[Q] \to K[Q]$ cujo núcleo é $p\mathbb{Z}[Q]$. Então G mergulha em um grupo

$$G^* = A^* \rtimes Q^* \quad \text{de tipo} \quad FP_m$$

tal que A^* e Q^* são grupos abelianos, Q^* é abeliano livre de posto finito e contém Q como um somando direto, A^* é uma localização de A e contém A através da aplicação canônica de localização.

A demonstração do teorema anterior segue do teorema abaixo que é um caso muito particular da FP_m-Conjectura.

Teorema 2.9. *Seja m um número natural, Q um grupo abeliano livre de posto finito e A um $\mathbb{Z}[Q]$-módulo finitamente gerado. Assuma que A tem uma cadeia*

$$A = A_0 \supseteq A_1 \supseteq \ldots \supseteq A_n = 0 \tag{2.1}$$

de $\mathbb{Z}[Q]$*-submódulos tal que, para cada* $0 \leq k \leq n-1$*,*

$$\frac{A_k}{A_{k+1}} \simeq M \simeq \overline{a}_k \circ \mathbb{Z}[Q] \quad \textit{como } \mathbb{Z}[Q]\textit{-módulos}$$

ou seja, A_k/A_{k+1} *é um* M*-módulo livre e é um* $\mathbb{Z}[Q]$*-módulo cíclico com gerador* $\overline{a}_k$*, onde*

$$M = M_1 \otimes \ldots \otimes M_l \quad e \quad Q = Q_1 \times \ldots \times Q_l$$

sendo que, para cada $1 \leq i \leq l$*,* Q_i *é um grupo abeliano livre com base* $\{q_{i,j} \mid 1 \leq j \leq m\}$*,* M_i *é o* $\mathbb{Z}[Q_i]$*-módulo* $\dfrac{K[Q_i]}{I_i}$ *com* I_i *um ideal de* $K[Q_i]$ *gerado por* $\{q_{i,j} - f_{i,j} \mid 1 \leq j \leq m\}$ *para algum conjunto* $\{f_{i,j} \mid 1 \leq j \leq m\}$ *de polinômios de* $K[q_{i,1}]$ *que são mônicos, não constantes, irredutíveis , dois a dois distintos e* $f_{i,1} = q_{i,1}$*.*

Então $G = A \rtimes Q$ *é de tipo* FP_m*.*

A demonstração do teorema acima está baseada na construção de um complexo Y do tipo Åberg para um conjunto específico (a ser construído) de "characters" discretos de G. Além disso, vamos mostrar que este complexo satisfaz as seguintes condições:

(I) Y é $(m-1)$-acíclico;

(II) G atua cocompactivamente sobre Y;

(III) os estabilizadores em G de células em Y são de tipo FP_m.

Observações 2.10. (1) *Nas condições e notações do Teorema* 2.8 *temos que* A_k/A_{k+1} *é um* $\mathbb{Z}[Q]$*-módulo cíclico pois* $\mathbb{Z}[Q] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p[Q] = K[Q]$ *e* $A_k/A_{k+1} \simeq K[Q]$*.*

(2) *No Teorema* 2.9*, se* A *é uma soma direta finita de cópias de* M *com* Q*-ação induzida pela ação de* Q *sobre* M*, então o teorema segue de* [21, Capítulo 4, Teorema D]*. Infelizmente, as hipóteses do Teorema* 2.9 *não implicam que* A *é isomorfo a uma soma direta finita de cópias de* M *pois, em geral,* A *não tem expoente como grupo aditivo o primo* p*, ou seja,* $pA \neq 0$.

É importante observar que nas hipóteses do Teorema 2.9

$$M_i = \frac{K[Q_i]}{I_i} \simeq K\left[q_{i,1}, \frac{1}{q_{i,1}}, \frac{1}{f_{i,2}}, \ldots, \frac{1}{f_{i,m}}\right] = K[q_{i,1}]S_i^{-1}$$

com $S_i := \{f_{i,1}^{z_1} \ldots f_{i,m}^{z_m} \mid z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \subseteq K[q_{i,1}]$ *um sistema multiplicativo, para todo* $1 \leq i \leq l$*. Portanto,* M_i *é um domínio e o produto tensorial* $M = M_1 \otimes \ldots \otimes M_l$ *também é um domínio.*

<u>**Demonstração do Teorema 2.8**</u> :

Suponhamos que o Teorema 2.9 já foi provado.

Seja $\{q_1, \ldots, q_l\}$ uma base de Q como um grupo abeliano livre. Defina

$$Q^* := Q_1 \times \ldots \times Q_l$$

tal que, para cada $1 \leq i \leq l$, Q_i é um grupo abeliano livre com base $\{q_{i,j} \mid 1 \leq j \leq m\}$ e $q_{i,1} = q_i$. Logo, Q^* é um grupo abeliano livre de posto finito e Q mergulha em Q^* como um somando direto.

Queremos mostrar que para cada $1 \leq i \leq l$ existe um conjunto de polinômios

$$\{\widetilde{f}_{i,j} \mid 1 \leq j \leq m\} \subseteq \mathbb{Z}[q_{i,1}] = \mathbb{Z}[q_i]$$

tal que $\widetilde{f}_{i,1} = q_{i,1} = q_i$ e as respectivas imagens $\{f_{i,j} \mid 1 \leq j \leq m\}$ em $K[q_i]$ são polinômios mônicos, não constantes, irredutíveis, dois a dois distintos. Além disso, queremos mostrar que o correspondente homomorfismo $\psi_{i,j} : A \to A$ dado pela multiplicação à direita com o polinômio $\widetilde{f}_{i,j}$ é injetor, para todo $1 \leq i \leq l$ e $1 \leq j \leq m$. Logo, definimos A^* como a localização de A no sistema multiplicativo

$$S := \{\prod_{i,j} (\widetilde{f}_{i,j})^{z_{i,j}} \mid z_{i,j} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \forall\ 1 \leq i \leq l \ e\ 1 \leq j \leq m\} \subseteq \mathbb{Z}[Q]$$

e a Q^*-ação sobre A^* é dada da seguinte maneira: $q_{i,j}$ atua como o elemento $\widetilde{f}_{i,j}$ de $\mathbb{Z}[Q]$.

Por [14, IV.1.1, Corolário 2 da Proposição 2] temos que $\psi_{i,j}$ é um monomorfismo se, e somente se, $\widetilde{f}_{i,j}$ não pertence a nenhum ideal primo associado ao $\mathbb{Z}[Q]$-módulo A. Por hipótese, existe uma cadeia de $\mathbb{Z}[Q]$-submódulos de A

$$A = A_0 \supseteq A_1 \supseteq \ldots \supseteq A_n = 0$$

tal que, para $0 \leq k \leq n-1$, $\dfrac{A_k}{A_{k+1}} \simeq K[Q]$. Notemos que $K[Q] \simeq \dfrac{\mathbb{Z}[Q]}{P}$ com $P := p\mathbb{Z}[Q]$ um ideal primo de $\mathbb{Z}[Q]$. Assim, pelo Teorema 1.21, $Ass(M) \subseteq \{P\} \subseteq Supp(M)$ e os elementos minimais destes três conjuntos coincidem. Portanto, P é o único ideal primo associado a A. Seja $\pi : \mathbb{Z}[Q] \to \dfrac{\mathbb{Z}[Q]}{P} \simeq K[Q]$ a projeção canônica.

Fixe i $(1 \leq i \leq l)$ e tome $\{f_{i,j} \mid 1 \leq j \leq m\}$ um conjunto de polinômios não nulos, mônicos, não constantes, irredutíveis em $K[q_i]$, dois a dois distintos e $f_{i,1} = q_i$. Defina

$\widetilde{f}_{i,j} := \pi^{-1}(f_{i,j})$. Como $f_{i,j} \neq 0$ segue que $\widetilde{f}_{i,j} \notin P$. Logo $\psi_{i,j}$ é monomorfismo e portanto A mergulha em $A^* = AS^{-1}$ através da aplicação canônica i_A^S de localização.

Considere o anel

$$M = M_1 \otimes \ldots \otimes M_l$$

tal que, para cada $1 \leq i \leq l$, $M_i = K[q_i, 1/q_i, 1/f_{i,2}, \ldots, 1/f_{i,m}]$, ou seja, M_i é uma localização do anel $K[q_i]$ no sistema multiplicativo $S_i := \{f_{i,1}^{z_1} \ldots f_{i,m}^{z_m} \mid z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \subseteq K[q_i]$. Definindo, para cada $0 \leq k \leq n$, $A_k^* = A_k S^{-1}$ e usando o fato que localização é um funtor exato (Proposição 1.9) obtemos que

$$A^* = A_0^* \supseteq A_1^* \supseteq \ldots \supseteq A_n^* = 0$$

é uma cadeia de $\mathbb{Z}[Q^*]$-submódulos de A^*. Além disso, para $0 \leq k \leq n-1$,

$$\frac{A_k^*}{A_{k+1}^*} \simeq K[Q]S^{-1} \simeq K[q_1]S_1^{-1} \otimes \ldots \otimes K[q_l]S_l^{-1} \simeq M_1 \otimes \ldots \otimes M_l = M.$$

Como M_i é módulo cíclico sobre $\mathbb{Z}[Q_i]$, $\forall\ 1 \leq i \leq l$ segue que M é módulo cíclico sobre $\mathbb{Z}[Q^*]$. Logo, A^* é $\mathbb{Z}[Q^*]$-módulo finitamente gerado.

Portanto, pelo Teorema 2.9, o grupo metabeliano $G^* = A^* \rtimes Q^*$ tem tipo FP_m. ■

Demonstração do Teorema 2.9 :

Vamos considerar Y o complexo de Åberg (definido anteriormente na Seção 2.1) com parâmetros específicos que serão descritos a seguir.

Denotaremos $q_{1,j}$ por q_j e $f_{1,j}$ por f_j, para todo $1 \leq j \leq m$. Notemos que $f_1 = q_1$.

Defina $\widetilde{v}_0(f) := -grau(f)$, para todo $f \in K[q_1]$ e considere a valorização

$$\begin{array}{rccl} v_0 : & K(q_1) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & \dfrac{g}{h} & \mapsto & \widetilde{v}_0(g) - \widetilde{v}_0(h) \end{array}$$

Como $K[q_1]$ é um domínio fatorial então todo polinômio em $K[q_1]$ se escreve como um produto de polinômios irredutíveis. Para todo $f \in K[q_1]$, seja $\widetilde{v}_i(f) :=$ maior potência de f_i na decomposição canônica de f como produto de irredutíveis, $\forall\ 1 \leq i \leq m$, e daí temos induzidas as seguintes valorizações

$$\begin{array}{rccl} v_i : & K(q_1) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & \dfrac{g}{h} & \mapsto & \widetilde{v}_i(g) - \widetilde{v}_i(h) \end{array}$$

Agora, vamos definir “characters”$\chi_i : G = A \rtimes Q \to \mathbb{R}$, para $0 \leq i \leq m$, a partir das valorizações $v_0, v_1, \ldots, v_m$ definidas acima. Tomamos χ_i sobre A e $Q_2 \times \ldots \times Q_l$ igual a zero e sobre Q_1 a composição

$$Q_1 \xrightarrow{\tau} K(q_1) \xrightarrow{v_i} \mathbb{Z}$$

com $\tau(q_j) = f_j$. Assim, para $1 \leq j \leq m$, temos que

$$\chi_0(q_j) = v_0(f_j) = -grau(f_j),$$

$$\chi_i(q_j) = v_i(f_j) = \delta_{i,j}, \quad \forall\, 1 \leq i \leq m.$$

Como τ é injetiva podemos identificar Q_1 com sua cópia isomorfa $\tau(Q_1)$ em $K(q_1)$ e por abuso de notação escreveremos $v(q)$ ao invés de $v\tau(q)$ para cada $q \in Q_1$ e $v \in \{v_0, \ldots, v_m\}$. Também escreveremos $v(q)$ para denotar 0 se $v \in \{v_0, \ldots, v_m\}$ e $q \in Q_2 \times \ldots \times Q_l$.

Construímos na Seção 2.1 árvores Γ_χ correspondentes a “characters” discretos χ. Como os “characters” definidos acima dependem inicialmente de uma valorização v ($v \in \{v_0, \ldots, v_m\}$), iremos chamar estas árvores de Γ_v. Também precisamos escolher um elemento $q_v \in Q$ tal que $v(q_v) = 1$ e um número real inteiro negativo β. Fixemos

$$q_{v_0} = q_1^{-1}, \qquad q_{v_i} = q_i \quad (\forall\, 1 \leq i \leq m) \quad e \quad \beta = -\left(2 + \sum_{i=1}^{m} grau(f_i)\right). \tag{2.2}$$

Além disso, a construção da árvore Γ_v depende de um conjunto fixo de geradores de A como $\mathbb{Z}[Q]$-módulo. Por hipótese, $\dfrac{A_k}{A_{k+1}} \simeq M \simeq \overline{a}_k \circ \mathbb{Z}[Q]$, $\forall\, 0 \leq k \leq n-1$. Seja $a_k \in A_k$ tal que sua imagem em A_k/A_{k+1} é $\overline{a}_k$. Logo, para cada $0 \leq k \leq n-1$,

$$A_k \simeq A_{k+1} + a_k \circ \mathbb{Z}[Q].$$

Assim,

$$\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\} \text{ é o conjunto de geradores de } A \text{ a ser considerado}$$

e daí, para cada $v \in \{v_0, \ldots, v_m\}$,

$$A_v = a_0 \circ \mathbb{Z}[Q_v] + \ldots + a_{n-1} \circ \mathbb{Z}[Q_v]. \tag{2.3}$$

Observamos que a ligação entre valorizações e o invariante de Bieri-Strebel mostra que $[\chi_0], \cdots, [\chi_m] \notin \Sigma_A(Q)$ pois $Q_v = (Q_1)_v \times Q_2 \times \cdots \times Q_l$.

Portanto, temos $(m+1)$ árvores $\Gamma_{v_0}, \Gamma_{v_1}, \ldots, \Gamma_{v_m}$, seu produto cartesiano X e o complexo de Åberg Y para o conjunto de valorizações $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_m\}$.

<u>*Y é $(m-1)$-acíclico*</u>

O seguinte lema mostra que as hipóteses do Lema 2.2 são satisfeitas para quaisquer m elementos de $\{v_{|_Q}\}_{v\in V}$ e daí Y é $(m-1)$-conexo. Conseqüentemente, Y é $(m-1)$-acíclico.

Lema 2.11. *Todo conjunto V' de m elementos do conjunto $\{v_{|_Q}\}_{v\in V}$ está contido em um semi-espaço aberto de $Hom(Q,\mathbb{R})$.*

Demonstração. A demonstração é igual a de [19, Lema 8], mas para facilitar iremos fazê-la.

Se $q \in Q$ com $q \neq 1$ então $U_q := \{\chi \in Hom(Q,\mathbb{R}) \mid \chi(q) > 0\}$ define um semi-espaço aberto de $Hom(Q,\mathbb{R})$.

Consideremos os elementos q_{v_j} dados na expressão (2.2) e denotemos por d_j o grau do polinômio f_j, para todo $1 \leq j \leq m$.

Suponha que $V' = V \setminus \{v_0\}$. Tomando $q := \prod_{1\leq j\leq m} q_{v_j}$ temos que $V' \subseteq U_q$.

Agora, considere o caso em que $V' = V\setminus\{v_i\}$ para algum $i > 0$. Seja $\alpha > (\sum_{1\leq j\neq i\leq m} d_j)/d_i$ um número inteiro e $q = \left(\prod_{1\leq j\neq i\leq m} q_{v_j}\right) q_{v_i}^{-\alpha}$. Então

$$v_0(q) = -\left(\sum_{1\leq j\neq i\leq m} d_j\right) + \alpha d_i > 0,$$

$$v_j(q) = 1, \quad \forall\ 1 \leq j \neq i \leq m.$$

Portanto, $V' \subseteq U_q$. ∎

<u>*G atua cocompactivamente sobre Y*</u>

Um ponto típico de Y é $\prod_{v\in V}[(a_v, r_v)]$ com $a_v \in A$, $\forall\ v \in V$, e $\prod_{v\in V} r_v \in W \subseteq \prod_{v\in V}\mathbb{R} = \mathbb{R}^{m+1}$.

Observe que, se denotamos por d_i o grau de f_i, para todo $1 \leq i \leq m$, podemos descrever o conjunto W (definido anteriormente na Seção 2.1) da seguinte maneira:

$$W = \{(x_0,\ldots,x_m) \mid x_0 + \sum_{i=1}^{m} d_i x_i = 0\}.$$

Usaremos a notação $\lceil b\rceil$ para o menor inteiro maior ou igual a b, para $b \in \mathbb{R}$.

Definição 2.12. *Para B um subconjunto de $\prod_{v\in V}\mathbb{R}$ defina*

$$[[B]] = \left\{ \prod_{v\in V} \lceil b_v \rceil : \prod_{v\in V} b_v \in B \right\}.$$

Seja $\prod_{v\in V}[(a_v, r_v)]$ um ponto de Y. Então $\prod_{v\in V}[(a_v, \lceil r_v \rceil)]$ é um vértice de X. Note que $\prod_{v\in V}\lceil r_v \rceil = [[\prod_{v\in V} r_v]]$ e um elemento $g \in G$ fixa $\prod_{v\in V}[(a_v, r_v)]$ se, e somente se, ele fixa $\prod_{v\in V}[(a_v, \lceil r_v \rceil)]$.

Lema 2.13. [19, Lema 7] *Se $\prod_{v\in V} s_v \in [[W]]$ então*

$$0 \leq s_{v_0} + \sum_{i=1}^{m} d_i s_{v_i} < 1 + \sum_{i=1}^{m} d_i.$$

Conseqüentemente, Q atua cofinitamente sobre $[[W]]$.

Proposição 2.14. *Para cada $\prod_{v\in V} s_v \in [[W]]$ e todo conjunto $\{a_v \in A : v \in V\}$ existe um elemento $a \in A$ tal que*

$$\prod_{v\in V}[(a_v, s_v)] = \prod_{v\in V}[(a, s_v)].$$

Logo, para todo $\prod_{v\in V} r_v \in W$ tal que $[[\prod_{v\in V} r_v]] = \prod_{v\in V} s_v$ tem-se que $\prod_{v\in V}[(a_v, r_v)] = \prod_{v\in V}[(a, r_v)]$.

Demonstração. Notemos que se a proposição vale para um G-transladado de $\prod_{v\in V}[(a_v, s_v)]$ então ela vale para o próprio elemento $\prod_{v\in V}[(a_v, s_v)]$.

Temos que cada $q \in Q$ atua sobre $\mathbb{R}^{m+1}$ por translação com $\prod_{v\in V} v(q)$. Da definição de V temos que Q atua transitivamente sobre as últimas m coordenadas de pontos de $[[W]]$ e daí podemos encontrar um Q-transladado no qual as últimas m coordenadas são zero. Então pelo Lema 2.13 e pela definição de β dada em (2.2) segue que $0 \leq s_{v_0} < -\beta$. Sem alterar esta última propriedade podemos encontrar um A-transladado no qual $a_{v_0} = 0$. Logo, podemos supor que, para $v \in V$, $s_v + \beta < 0$ e $a_{v_0} = 0$.

Seja $a \in A$. Então, pelo Lema 2.1,

$$\prod_{v\in V}[(a_v, s_v)] = \prod_{v\in V}[(a, s_v)] \iff a - a_v \in A_v \circ q_v^{\beta + s_v},\ \forall\, v \in V.$$

Considere a cadeia (2.1). Suponhamos que para cada $0 \leq k \leq n-1$ a seguinte condição é verdadeira: para qualquer subconjunto $\{b_v\}_{v \in V \setminus \{v_0\}} \subseteq A_k$ e $b_{v_0} = 0$

$$\text{existe } \ b_k \in A_k \ \text{ com } \ b_k - b_v \in A_v \circ q_v^{\beta+s_v} + A_{k+1}, \ \forall\ v \in V \setminus \{v_0\}, \text{ e} \\ b_k = b_k - b_{v_0} \in A_{v_0} \circ q_{v_0}^{\beta+s_{v_0}}. \tag{2.4}$$

Como $a_v \in A = A_0$, $\forall\ v \in V \setminus \{v_0\}$, e $a_{v_0} = 0$ segue que existe $b_0 \in A_0$ tal que, $\forall\ v \in V$,

$$b_0 - a_v = c_{v,1} + b_{v,1} \ \text{ com } \ c_{v,1} \in A_v \circ q_v^{\beta+s_v} \ \text{ e } \ b_{v,1} \in A_1,\ b_{v_0,1} = 0.$$

Agora, $-b_{v,1} \in A_1$ implica que existe $b_1 \in A_1$ tal que, $\forall\ v \in V$,

$$b_1 + b_{v,1} = c_{v,2} + b_{v,2} \ \text{ com } \ c_{v,2} \in A_v \circ q_v^{\beta+s_v} \ \text{ e } \ b_{v,2} \in A_2,\ b_{v_0,2} = 0.$$

Usando o raciocínio anterior vamos obter, para cada $0 \leq k \leq n-1$, um elemento $b_k \in A_k \subseteq A$ tal que, $\forall\ v \in V$,

$$b_k + b_{v,k} = c_{v,k+1} + b_{v,k+1} \ \text{ com } \ c_{v,k+1} \in A_v \circ q_v^{\beta+s_v} \ \text{ e } \ b_{v,k+1} \in A_{k+1}, b_{v_0,k+1} = 0.$$

Então $\forall\ v \in V$

$$(b_0 + b_1 + \ldots + b_{n-1}) - a_v \in A_v \circ q_v^{\beta+s_v} + A_n.$$

Mas $A_n = 0$ e portanto $a := b_0 + \ldots + b_{n-1}$ satisfaz a proposição.

Falta mostrarmos que a condição (2.4) é verdadeira. Recordemos que por (2.3) $A_v = a_0 \circ \mathbb{Z}[Q_v] + \ldots + a_{n-1} \circ \mathbb{Z}[Q_v]$, para cada $v \in V$. Fixe k $(0 \leq k \leq n-1)$ e suponha que $b_v \in A_k$, $\forall\ v \in V \setminus \{v_0\}$, e $b_{v_0} = 0$. Seja $\overline{b}_v$ a imagem de b_v em A_k/A_{k+1}. Vamos mostrar que existe $\overline{b}_k \in A_k/A_{k+1}$ tal que, $\forall\ v \in V$,

$$\overline{b}_k - \overline{b}_v \in \overline{a}_k \circ (\mathbb{Z}[Q_v] q_v^{\beta+s_v}) \subseteq \frac{A_k}{A_{k+1}} = \overline{a}_k \circ \mathbb{Z}[Q] \simeq M = M_1 \otimes \ldots \otimes M_l \tag{2.5}$$

onde $\overline{a}_k$ é a imagem de $a_k \in A_k$ em A_k/A_{k+1} e daí concluímos que existe $b_k \in A_k$ com

$$b_k - b_v \in a_k \circ \mathbb{Z}[Q_v] q_v^{\beta+s_v} + A_{k+1} \subseteq A_v \circ q_v^{\beta+s_v} + A_{k+1},\ \forall\ v \in V,$$

sendo que b_k é qualquer pré-imagem de $\overline{b}_k$ em A_k. Portanto b_k pode ser substituído por qualquer elemento de $b_k + A_{k+1}$ e então em particular podemos escolher um b_k tal que $b_k = b_k - b_{v_0} \in A_{v_0} \circ q_{v_0}^{\beta+s_{v_0}}$.

Agora demonstraremos (2.5). Observemos que

$$\mathbb{Z}[Q_v] = \mathbb{Z}[(Q_1)_v \times Q_2 \times \ldots \times Q_l].$$

Como $q_v \in Q_1$, para $v \in V$, e atua trivialmente sobre M_i, para $i > 1$, basta trabalhar com o caso em que cada $\overline{b}_v \in M_1$ e encontrar um $\overline{b}_k \in M_1$. Aqui estamos considerando M_1 como isomorfo ao subanel $M_1 \otimes K \otimes \ldots \otimes K$ de $M = M_1 \otimes M_2 \otimes \ldots \otimes M_l$. Lembremos que $M_1 = K\left[q_1, \frac{1}{q_1}, \frac{1}{f_2}, \ldots, \frac{1}{f_m}\right] \subset K(q_1)$. Como $\beta + s_v < 0$ segue que

$$\mathbb{Z}[Q_v] \subseteq \mathbb{Z}[Q_v]q_v^{\beta+s_v}.$$

Seja $F = \prod_{j=1}^{m} f_j \in K[q_1]$. Então, $\forall\ v \in V \setminus \{v_0\}$, temos que $\overline{b}_v F^t \in K[q_1]$, para algum inteiro $t \geq 0$. Agora, aplicamos o Teorema Chinês dos Restos para o anel de polinômios $K[q_1]$ e as congruências

$$b'_k \equiv \overline{b}_{v_j} F^t \quad (mod\ f_j^t K[q_1]) \text{ para cada } j = 1, \ldots, m.$$

O teorema garante a existência de um b'_k satisfazendo as congruências e com grau menor ou igual ao de $\prod_{j=1}^{m} f_j^t = F^t$. Seja $\overline{b}_k = b'_k F^{-t}$. Então, $\forall\ v \neq v_0$,

$$\begin{aligned} v(\overline{b}_k - \overline{b}_v) &= v(b'_k F^{-t} - \overline{b}_v) = v((b'_k - \overline{b}_v F^t)F^{-t}) = v(b'_k - \overline{b}_v F^t) + v(F^{-t}) = \\ &= v(b'_k - \overline{b}_v F^t) - t \geq 0 > \beta + s_v. \end{aligned}$$

Recorde que $\overline{b}_{v_0} = 0$ e daí

$$v_0(\overline{b}_k - \overline{b}_{v_0}) = v_0(\overline{b}_k) = v_0(b'_k F^{-t}) = grau(F^t) - grau(b'_k) \geq 0 > \beta + s_v.$$

Assim encontramos um $\overline{b}_k$ que satisfaz a condição (2.5) e a demonstração da proposição está completa. ■

Proposição 2.15. *G atua cocompactivamente sobre Y.*

Demonstração. Segue da Proposição 2.14 da mesma maneira que a demonstração de [19, Teorema 7] segue de [19, Teorema 6], mas para facilitar iremos fazê-la.

Seja $\prod_{v \in V}[(a_v, r_v)]$ um ponto de Y. Então pela Proposição 2.14 existe $a \in A$ tal que $\prod_{v \in V}[(a_v, s_v)] = \prod_{v \in V}[(a, s_v)]$ com $s_v = \lceil r_v \rceil$. Assim

$$\prod_{v \in V}[(a_v, s_v)] = \prod_{v \in V}[(a, s_v)] = \prod_{v \in V} G(v)q_v^{s_v} a = (\prod_{v \in V} G(v)q_v^{s_v}) * a = \prod_{v \in V}[(0_A, s_v)] * a,$$

com $*$ denotando a ação diagonal de G sobre X. Logo

$$\prod_{v\in V}[(a_v, r_v)] = \prod_{v\in V}[(0_A, r_v)] * a$$

e $Y/A \simeq \left\{\prod_{v\in V}[(0_A, r_v)] \mid \prod_{v\in V} r_v \in W\right\} \simeq W$ sendo que o último isomorfismo é dado pela aplicação h (definida anteriormente na Seção 2.1).

Do Lema 2.13 temos que Q atua cocompactivamente sobre W por translação à direita com elementos $\prod_{v\in V} v(q)$ para $q \in Q$. Como $Y/G \simeq (Y/A)/Q \simeq W/Q$, então G atua cocompactivamente sobre Y. ∎

Estabilizadores em G de células em Y são de tipo FP_m

Nosso objetivo é mostrar que os estabilizadores em G de células em Y são grupos metabelianos que satisfazem as hipóteses do Teorema 2.9 se o anel M é substituído por $M_2 \otimes \ldots \otimes M_l$ e Q por $Q_2 \times \ldots \times Q_l$. Daí, usando indução sobre l concluímos que os estabilizadores são grupos de tipo FP_m.

Por [20, Lema 2.9] o estabilizador em G de uma célula em Y é o estabilizador de um vértice de X pertencente a $h^{-1}([[W]])$. Assim, basta mostrar que o estabilizador P de um vértice $\prod_{v\in V} G(v)g_v = \prod_{v\in V} G(v)q_v^{s_v}a_v$ em X pertencente a $h^{-1}([[W]])$ é de tipo FP_m.

Notemos que o estabilizador de um G-transladado de $\prod_{v\in V} G(v)g_v$ é um conjugado do estabilizador de $\prod_{v\in V} G(v)g_v$. Em particular, os dois estabilizadores são isomorfos. Logo, é suficiente considerar um vértice qualquer dentro de cada G-órbita.

Pela Proposição 2.14, existe $\widetilde{a} \in A$ tal que

$$\prod_{v\in V} G(v)g_v = \prod_{v\in V} G(v)q_v^{s_v}a_v = \prod_{v\in V} G(v)q_v^{s_v}\widetilde{a} = \left(\prod_{v\in V} G(v)q_v^{s_v}\right) * \widetilde{a},$$

com $*$ denotando a G-ação diagonal sobre X. Então, dentro da G-órbita, existe um ponto com $a_v = 0$, $\forall\ v \in V$. Vimos, anteriormente, que Q atua transitivamente nas últimas m coordenadas de $[[W]]$ e daí podemos supor que $s_v = 0$, para cada $v \in V\backslash\{v_0\}$. Logo, podemos assumir que $g_v = 1$ para $v \neq v_0$ e usando o Lema 2.13, $g_{v_0} = q_{v_0}^{s_{v_0}}$ com $0 \leq s_{v_0} < -\beta$.

Um elemento aq de G com $a \in A$ e $q \in Q$ pertence ao estabilizador P de um tal ponto se, e somente se,

$$a \in A \cap (q_{v_0}^{-s_{v_0}} G(v_0) q_{v_0}^{s_{v_0}}) = (A \cap G(v_0)) \circ q_{v_0}^{s_{v_0}} = A_{v_0} \circ q_{v_0}^{s_{v_0}+\beta},$$
$$a \in A \cap G(v_i) = A_{v_i} \circ q_{v_i}^{\beta}, \quad \forall\, i > 0,$$
$$q \in G(v), \quad \forall\, v \in V.$$

As condições para q são satisfeitas quando $q \in \ker(v_{|_Q})$, isto é, exatamente quando $q \in Q_2 \times \ldots \times Q_l$. Portanto,

$$P = B \rtimes (Q_2 \times \ldots \times Q_l) \;\text{ com }\; B := \left(\bigcap_{1 \le i \le m} A_{v_i} \circ q_{v_i}^{\beta} \right) \bigcap \left(A_{v_0} \circ q_{v_0}^{s_{v_0}+\beta} \right). \tag{2.6}$$

Proposição 2.16. *Depois de aumentar, se necessário, o conjunto fixado $\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ de geradores de A como $\mathbb{Z}[Q]$-módulo, existe uma cadeia de $\mathbb{Z}[Q_2 \times \ldots \times Q_l]$-submódulos de B*

$$B = B_0 \supseteq B_1 \supseteq \ldots \supseteq B_{n'} = 0 \tag{2.7}$$

tal que, para $0 \le k \le n' - 1$, $\dfrac{B_k}{B_{k+1}} \simeq M_2 \otimes \ldots \otimes M_l$ como $\mathbb{Z}[Q_2 \times \ldots \times Q_l]$-módulos.

Demonstração. Vimos que a construção do complexo Y depende da escolha do conjunto $\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ de geradores de A como $\mathbb{Z}[Q]$-módulo. Observemos que a escolha de um tal conjunto já foi feita e foi provado que G atua cocompactivamente sobre Y com esta escolha particular. Notemos que se acrescentarmos mais geradores ao conjunto já fixado $\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ isto aumentará A_v e obtemos um novo complexo $\widetilde{Y}$. Mas, como G atua cocompactivamente sobre Y, então G continua atuando cocompactivamente sobre $\widetilde{Y}$ (pois a Proposição 2.14 ainda vale se aumentamos A_v). Assim, no decorrer da demonstração desta proposição sentiremos livres, se necessário, para acrescentarmos novos geradores de A como $\mathbb{Z}[Q]$-módulo e sempre preservar os geradores anteriores.

Primeiramente, suponhamos que a cadeia do enunciado do Teorema 2.9 tem comprimento $n = 1$. Assim, $A \simeq A_0/A_1 \simeq M_1 \otimes \ldots \otimes M_l \simeq \bar{a}_0 \circ \mathbb{Z}[Q]$. Então, para $v \in V$,

$$A_v = a_0 \circ \mathbb{Z}[Q_v] = a_0 \circ (\mathbb{Z}[(Q_1)_v] \otimes \mathbb{Z}[Q_2] \otimes \ldots \otimes \mathbb{Z}[Q_l]) \simeq (M_1)_v \otimes M_2 \otimes \ldots \otimes M_l \tag{2.8}$$

sendo que $(Q_1)_v = \{q \in Q_1 \mid v(q) \ge 0\} \subseteq Q_1$ e $(M_1)_v$ denota o $\mathbb{Z}[(Q_1)_v]$-submódulo de M_1 gerado pela imagem de 1_{Q_1} em M_1. Notemos que $\bigcap_{1 \le i \le m} (M_1)_{v_i} = K[q_1]$.

Sejam

$$\widetilde{q} := \prod_{i=1}^{m} q_{v_i} \in Q_1 \quad \text{e} \quad a \in (M_1)_{v_0} \circ q_{v_0}^{s_{v_0}+\beta} \bigcap \left(\bigcap_{1 \le i \le m} (M_1)_{v_i} \circ q_{v_i}^{\beta} \right)$$

com q_{v_i} os elementos dados na expressão (2.2). Então $(M_1)_{v_i} \circ q_{v_i}^{\beta} = (M_1)_{v_i} \circ \widetilde{q}^{\,\beta}$, para cada $1 \le i \le m$, e

$$a \circ (\widetilde{q})^{-\beta} \in \bigcap_{1 \le i \le m} (M_1)_{v_i} = K[q_1].$$

A condição $a \in (M_1)_{v_0} \circ q_{v_0}^{s_{v_0}+\beta}$ é equivalente a limitar (superiormente) o grau do polinômio $a \circ (\widetilde{q})^{-\beta} \in K[q_1]$ se $a \neq 0$. Logo, $(M_1)_{v_0} \circ q_{v_0}^{s_{v_0}+\beta} \bigcap \left(\bigcap_{1 \le i \le m} (M_1)_{v_i} \circ q_{v_i}^{\beta} \right)$ é um K-espaço vetorial de dimensão finita n'. Portanto,

$$B \simeq \left(\bigoplus_{j=0}^{n'-1} K \right) \otimes M_2 \otimes \ldots \otimes M_l \simeq \bigoplus_{j=0}^{n'-1} (M_2 \otimes \ldots \otimes M_l)$$

e definindo $B_k := \bigoplus_{j=k}^{n'-1} (M_2 \otimes \ldots \otimes M_l)$, $\forall\ k = 0, \ldots, n'-1$, e $B_n = 0$ temos uma cadeia satisfazendo as mesmas condições da cadeia (2.7). Note que, neste caso, não foi necessário acrescentarmos novos geradores.

Agora, vejamos o caso em que a cadeia (2.1) tem comprimento $n > 1$. Fixemos k $(0 \le k \le n-1)$ e seja $\widetilde{q} := \prod_{i=1}^{m} q_{v_i} \in Q_1$.

Como $\mathbb{Z}[Q_v]$ é um anel Noetheriano (pois todo $v \in V$ é um "character" discreto) e o $\mathbb{Z}[Q_v]$-módulo A_v (definido na expressão (2.3)) é finitamente gerado segue da Proposição 1.16 que A_v é um $\mathbb{Z}[Q_v]$-módulo Noetheriano, para todo $v \in V$. Conseqüentemente, $A_v \cap A_k$ é um $\mathbb{Z}[Q_v]$-módulo Noetheriano e portanto, pela Proposição 1.13, $(A_v \cap A_k)/(A_v \cap A_{k+1})$ também é um $\mathbb{Z}[Q_v]$-módulo Noetheriano. Como

$$\frac{(A_v \cap A_k) + A_{k+1}}{A_{k+1}} \simeq \frac{A_v \cap A_k}{(A_v \cap A_k) \cap A_{k+1}} = \frac{A_v \cap A_k}{A_v \cap A_{k+1}}$$

então $(A_v \cap A_k) + A_{k+1}/A_{k+1}$ é um $\mathbb{Z}[Q_v]$-módulo Noetheriano e portanto um módulo finitamente gerado sobre $\mathbb{Z}[Q_v]$. Temos que

$$A_k = A_{k+1} + a_k \circ \mathbb{Z}[Q] \quad \text{e} \quad v(\widetilde{q}) > 0, \ \ \forall\ v \in V \setminus \{v_0\}$$

e daí existe algum inteiro $t < 0$ tal que

$$A_v \cap A_k \subseteq A_{k+1} + a_k \circ (\widetilde{q})^t \mathbb{Z}[Q_v], \quad \forall\, v \in V \setminus \{v_0\}.$$

Agora, acrescentamos um novo gerador $a_k \circ (\widetilde{q})^t$ de A como $\mathbb{Z}[Q]$-módulo e consideramos o $\mathbb{Z}[Q_v]$-módulo:

$$\widetilde{A}_v := A_v + a_k \circ (\widetilde{q})^t \mathbb{Z}[Q_v], \quad \forall\, v \in V, \tag{2.9}$$

ou seja, aumentamos A_v com o novo conjunto de geradores. Então

$$a_k \circ (\widetilde{q})^t \mathbb{Z}[Q_v] \subseteq \widetilde{A}_v \cap A_k = (A_v \cap A_k) + a_k \circ (\widetilde{q})^t \mathbb{Z}[Q_v] \subseteq A_{k+1} + a_k \circ (\widetilde{q})^t \mathbb{Z}[Q_v], \quad \forall\, v \in V \setminus \{v_0\},$$

e daí atuando com $(\widetilde{q})^\beta$ nas inclusões acima segue que

$$a_k \circ (\widetilde{q})^{t+\beta} \mathbb{Z}[Q_v] \subseteq (\widetilde{A}_v \circ (\widetilde{q})^\beta) \cap A_k \subseteq A_{k+1} + a_k \circ (\widetilde{q})^{t+\beta} \mathbb{Z}[Q_v], \quad \forall\, v \in V \setminus \{v_0\}. \tag{2.10}$$

Então

$$\begin{aligned}
\frac{\left[\left(\bigcap_{v \in V \setminus \{v_0\}} \widetilde{A}_v \circ q_v^\beta\right) \cap A_k\right] + A_{k+1}}{A_{k+1}} &\subseteq \frac{\bigcap_{v \in V \setminus \{v_0\}} \left[(\widetilde{A}_v \circ q_v^\beta \cap A_k) + A_{k+1}\right]}{A_{k+1}} = \\
&= \frac{\bigcap_{v \in V \setminus \{v_0\}} \left[a_k \circ (\widetilde{q})^{t+\beta} \mathbb{Z}[Q_v] + A_{k+1}\right]}{A_{k+1}} = \\
&= \bigcap_{v \in V \setminus \{v_0\}} \overline{a}_k \circ (\widetilde{q})^{t+\beta} \mathbb{Z}[Q_v] = \\
&= \left(\prod_{1 \le i \le m} f_i\right)^{t+\beta} K[q_1] \otimes M_2 \otimes \ldots \otimes M_l.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Observemos que, como $v_0(\widetilde{q}) < 0$, existe algum $r > 0$ tal que

$$\widetilde{A}_{v_0} \cap A_k \subseteq A_{k+1} + a_k \circ (\widetilde{q})^r \mathbb{Z}[Q_{v_0}]. \tag{2.12}$$

Novamente, acrescentamos um novo gerador $a_k \circ (\widetilde{q})^r$ de A como $\mathbb{Z}[Q]$-módulo e trocamos $\widetilde{A}_v$ pelo seguinte $\mathbb{Z}[Q_v]$-módulo

$$A'_v := \widetilde{A}_v + a_k \circ (\widetilde{q})^r \mathbb{Z}[Q_v], \quad \forall\, v \in V. \tag{2.13}$$

Como $r > t$ (recorde que $r > 0 > t$) e $v(\widetilde{q}) > 0$, para todo $v \in V \setminus \{v_0\}$, segue que

$$a_k \circ (\widetilde{q})^r \mathbb{Z}[Q_v] \subseteq a_k \circ (\widetilde{q})^t \mathbb{Z}[Q_v] \subseteq \widetilde{A}_v, \quad \forall\, v \in V \setminus \{v_0\}.$$

Conseqüentemente,

$$A'_{v_0} := \widetilde{A}_{v_0} + a_k \circ (\widetilde{q})^r \mathbb{Z}[Q_{v_0}] \qquad \text{e} \qquad A'_v = \widetilde{A}_v, \;\; \forall\, v \neq v_0. \tag{2.14}$$

De (2.12) e (2.14) obtemos que

$$a_k \circ (\widetilde{q})^r \mathbb{Z}[Q_{v_0}] \subseteq A'_{v_0} \cap A_k = (\widetilde{A}_{v_0} \cap A_k) + a_k \circ (\widetilde{q})^r \mathbb{Z}[Q_{v_0}] \subseteq A_{k+1} + a_k \circ (\widetilde{q})^r \mathbb{Z}[Q_{v_0}]$$

e daí atuando com $(q_{v_0})^{s_{v_0}+\beta}$ nas inclusões acima segue que

$$a_k \circ (\widetilde{q})^r (q_{v_0})^{s_{v_0}+\beta} \mathbb{Z}[Q_{v_0}] \subseteq (A'_{v_0} \circ (q_{v_0})^{s_{v_0}+\beta}) \cap A_k \subseteq A_{k+1} + a_k \circ (\widetilde{q})^r (q_{v_0})^{s_{v_0}+\beta} \mathbb{Z}[Q_{v_0}]. \tag{2.15}$$

Logo, tomando $\beta_v = \beta$, $\forall\, v \in V \setminus \{v_0\}$ e $\beta_{v_0} = s_{v_0} + \beta$, obtemos de (2.6), (2.10), (2.14) e (2.15) que

$$\frac{(B \cap A_k) + A_{k+1}}{A_{k+1}} \simeq \frac{\left[\left(\bigcap_{v \in V} A'_v \circ (q_v)^{\beta_v}\right) \cap A_k\right] + A_{k+1}}{A_{k+1}} =$$

$$= \frac{\left[\bigcap_{v \in V \setminus \{v_0\}} (\widetilde{A}_v \circ (q_v)^{\beta_v} \cap A_k) \bigcap (A'_{v_0} \circ (q_{v_0})^{\beta_{v_0}} \cap A_k)\right] + A_{k+1}}{A_{k+1}} \subseteq$$

$$\subseteq \left(\bigcap_{v \in V \setminus \{v_0\}} \overline{a}_k \circ (\widetilde{q})^{t+\beta} \mathbb{Z}[Q_v]\right) \bigcap (\overline{a}_k \circ (\widetilde{q})^r (q_{v_0})^{s_{v_0}+\beta} \mathbb{Z}[Q_{v_0}]). \tag{2.16}$$

Por outro lado, de (2.10) e (2.15),

$$\left(\bigcap_{v \in V \setminus \{v_0\}} \overline{a}_k \circ (\widetilde{q})^{t+\beta} \mathbb{Z}[Q_v]\right) \bigcap (\overline{a}_k \circ (\widetilde{q})^r (q_{v_0})^{s_{v_0}+\beta} \mathbb{Z}[Q_{v_0}]) \subseteq$$

$$\subseteq \frac{\left[\bigcap_{v \in V} ((A'_v \circ (q_v)^{\beta_v}) \cap A_k)\right] + A_{k+1}}{A_{k+1}}. \tag{2.17}$$

De (2.11), (2.16) e (2.17) segue que

$$\frac{(B \cap A_k) + A_{k+1}}{A_{k+1}} \simeq \left(\bigcap_{v \in V \setminus \{v_0\}} \overline{a}_k \circ (\widetilde{q})^{t+\beta} \mathbb{Z}[Q_v] \right) \bigcap \left(\overline{a}_k \circ (\widetilde{q})^r (q_{v_0})^{s_{v_0}+\beta} \mathbb{Z}[Q_{v_0}] \right) \simeq$$

$$\simeq \left[\left(\left(\prod_{1 \le i \le m} f_i \right)^{t+\beta} K[q_1] \right) \bigcap \left\{ \lambda \in K(q_1) \mid v_0(\lambda) \ge v_0((\widetilde{q})^r q_{v_0}^{s_{v_0}+\beta}) \right\} \right] \otimes M_2 \otimes \ldots \otimes M_l \simeq$$

$$\simeq \left\{ \lambda \in \left(\prod_{1 \le i \le m} f_i \right)^{t+\beta} K[q_1] \;\mid\; grau(\lambda) \le -s_{v_0} - \beta - r v_0(\widetilde{q}) \right\} \otimes M_2 \otimes \ldots \otimes M_l \simeq$$

$$\simeq \left(\bigoplus_{j=0}^{n''-1} K \right) \otimes M_2 \otimes \ldots \otimes M_l \simeq \bigoplus_{j=0}^{n''-1} (M_2 \otimes \ldots \otimes M_l)$$

sendo que n'' é a dimensão de $\left\{ \lambda \in \left(\prod_{1 \le i \le m} f_i \right)^{t+\beta} K[q_1] \;\mid\; grau(\lambda) \le -s_{v_0} - \beta - r v_0(\widetilde{q}) \right\}$ como K-espaço vetorial.

Portanto, temos o seguinte fato:

$$\frac{B \cap A_k}{B \cap A_{k+1}} \simeq \frac{(B \cap A_k) + A_{k+1}}{A_{k+1}} \quad \text{é uma soma direta finita}$$
$$\text{de cópias de } M_2 \otimes \ldots \otimes M_l \;\text{ como } \mathbb{Z}[Q_2 \times \ldots \times Q_l] - \text{módulo}.$$

Então $\{B \cap A_k\}_k$ é uma cadeia de $\mathbb{Z}[Q_2 \times \ldots \times Q_l]$-submódulos de B sendo que cada quociente $(B \cap A_k)/(B \cap A_{k+1})$ admite uma cadeia de $\mathbb{Z}[Q_2 \times \ldots \times Q_l]$-submódulos com quocientes isomorfos a $M_2 \otimes \ldots \otimes M_l$. Portanto, o Lema 1.33 nos garante a existência da cadeia (2.7). ■

Proposição 2.17. *O estabilizador P é de tipo FP_m.*

Demonstração. Pela Proposição 2.16 existe cadeia

$$B = B_0 \supseteq B_1 \supseteq \ldots \supseteq B_{n'} = 0$$

de $\mathbb{Z}[Q_2 \times \ldots \times Q_l]$-submódulos de B tal que, para $0 \le k \le n' - 1$, $\dfrac{B_k}{B_{k+1}} \simeq M_2 \otimes \ldots \otimes M_l$. Daí, B é um $\mathbb{Z}[Q_2 \times \ldots \times Q_l]$-módulo finitamente gerado. Por indução podemos assumir que o Teorema 2.9 vale quando M é o produto tensorial de $l - 1$ componentes. Em particular, P é de tipo FP_m pois é a extensão cindida de B por $Q_2 \times \ldots \times Q_l$. ■

CONCLUSÃO: Finalmente, observamos que todas as condições do critério de Brown (Teorema 1.51) são satisfeitas e concluímos que G tem tipo FP_m e a demonstração do Teorema 2.9 está completa.

CAPÍTULO 3

Conjectura de mergulho

O objetivo deste capítulo é demonstrar a seguinte Conjectura:

Conjectura de mergulho: *Seja G um grupo metabeliano finitamente gerado e m um número natural. Então G mergulha num grupo metabeliano de tipo FP_m.*

Observamos que o caso $m = 2$ foi resolvido muito tempo atrás em [3] sem usar a classificação de grupos metabelianos de tipo FP_2 dada em [9] pois ela ainda não existia e que o caso $m = 4$ foi provado em [19].

Primeiramente, veremos que podemos fazer algumas reduções e depois faremos a demonstração da Conjectura.

Observamos que todos os módulos considerados neste capítulo são módulos à direita.

3.1 Passos de Reduções

Seja G um grupo metabeliano finitamente gerado. Pelo Lema 2.3 podemos supor que G é um grupo finitamente gerado tal que $G = A \rtimes Q$ com A e Q grupos abelianos. Então, pelo Lema 1.60, Q é finitamente gerado como grupo e A é finitamente gerado como $\mathbb{Z}[Q]$-módulo com Q atuando por conjugação à direita.

Como Q é um grupo abeliano finitamente gerado segue que $\mathbb{Z}[Q]$ é um anel comutativo Noetheriano (Lema 1.32) e Q é um grupo de tipo FP_∞ (Lema 1.43).

Assim, pelo Teorema 1.20, existe uma cadeia de $\mathbb{Z}[Q]$-submódulos de A

$$A = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \ldots \supseteq M_{n'} = 0$$

tal que, para $0 \leq i \leq n' - 1$, $\dfrac{M_i}{M_{i+1}} \simeq \dfrac{\mathbb{Z}[Q]}{P_i}$ com P_i um ideal primo de $\mathbb{Z}[Q]$.

O objetivo desta seção é mostrar que podemos reduzir nosso problema ao caso em que existe uma cadeia de $\mathbb{Z}[Q]$-submódulos de A

$$A = A_0 \supseteq A_1 \supseteq \ldots \supseteq A_n = 0 \tag{3.1}$$

tal que, para $0 \leq i \leq n - 1$, cada quociente A_i/A_{i+1} é isomorfo a $\mathbb{Z}[Q]/P$ com P um ideal primo fixo de $\mathbb{Z}[Q]$.

Agora, vejamos dois lemas que serão usados repetidas vezes.

Lema 3.1. *Sejam H um grupo abeliano finitamente gerado e M um $\mathbb{Z}[H]$-módulo finitamente gerado. Então M mergulha em $\bigoplus_{j \in J} \widetilde{M_j}$ sendo que J é um conjunto finito e, para todo $j \in J$, $\widetilde{M_j}$ é um $\mathbb{Z}[H]$-módulo quociente de M e é primário.*

Demonstração. Como M é um módulo finitamente gerado sobre o anel Noetheriano $\mathbb{Z}[H]$ segue pelo Teorema 1.24 que o submódulo trivial 0 tem uma decomposição primária, ou seja, existe uma família finita $(N_j)_{j \in J}$ de submódulos de M tais que

$$0 = \bigcap_{j \in J} N_j$$

e $\widetilde{M_j} := M/N_j$ é $\mathbb{Z}[H]$-módulo primário para todo $j \in J$.

Para todo $j \in J$, seja $p_j : M \to M/N_j$ a projeção canônica. Logo, o homomorfismo de $\mathbb{Z}[H]$-módulos:

$$\begin{array}{rccc} \varphi := \oplus p_j : & M & \to & \displaystyle\bigoplus_{j \in J} \frac{M}{N_j} \\ & a & \mapsto & \oplus p_j(a) \end{array}$$

é injetor. ■

Lema 3.2. *Sejam H um grupo abeliano finitamente gerado e M um $\mathbb{Z}[H]$-módulo finitamente gerado que é primário e*

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \ldots \supseteq M_{n-1} \supseteq M_n = 0 \tag{3.2}$$

uma cadeia de $\mathbb{Z}[H]$*-submódulos de* M *tal que, para* $0 \leq i \leq n-1$, $\dfrac{M_i}{M_{i+1}} \simeq \dfrac{\mathbb{Z}[H]}{P_i}$ *com* P_i *um ideal primo de* $\mathbb{Z}[H]$*. Suponha que os ideais primos* P_i *não são todos iguais. Então existe* $S = \{1, \lambda, \lambda^2, \ldots\} \subseteq \mathbb{Z}[H]$ *um sistema multiplicativo tal que* M *mergulha em* $MS^{-1} \bigoplus \dfrac{M}{M_{n-1}}$ *como* $\mathbb{Z}[H]$*-módulo. Além disso,* MS^{-1} *tem uma cadeia de* $\mathbb{Z}[H]S^{-1}$*-submódulos*

$$MS^{-1} = M'_0 \supseteq M'_1 \supseteq \ldots \supseteq M'_{n'} = 0$$

tal que, para $0 \leq j \leq n' - 1$, $\dfrac{M'_j}{M'_{j+1}} \simeq \dfrac{\mathbb{Z}[H]S^{-1}}{P'}$ *com* P' *um ideal primo fixo de* $\mathbb{Z}[H]S^{-1}$.

Observação 3.3. *Considere as notações do lema acima e defina* $\widetilde{H} := H \times \mathbb{Z}$*. Temos que* MS^{-1} *pode ser visto como um* $\mathbb{Z}[\widetilde{H}]$*-módulo da seguinte maneira:* H *atuando via sua ação original sobre* M *e um gerador fixado de* $\mathbb{Z}$ *atuando por multiplicação com* λ*. E ainda, o* $\mathbb{Z}[H]$*-módulo* M/M_{n-1} *não é necessariamente primário.*

Demonstração. Consideremos a cadeia (3.2). Como $M_{n-1} \simeq \dfrac{M_{n-1}}{M_n} \simeq \dfrac{\mathbb{Z}[H]}{P_{n-1}}$ segue, por definição, que P_{n-1} é um ideal primo associado com M, ou seja, $P_{n-1} \in Ass(M)$. Mas, por hipótese, M é primário. Logo, P_{n-1} é o único ideal primo associado com M. Assim, pelo Teorema 1.21, P_{n-1} é o elemento minimal de $\{P_0, \ldots, P_{n-1}\}$, ou seja, $P_{n-1} \subseteq P_i$, para todo $i = 0, \ldots, n-2$.

Para cada $i \in \{0, \ldots, n-2\}$ tal que $P_i \in \{P_0, \ldots, P_{n-2}\}$ e $P_i \supsetneqq P_{n-1}$ escolha $\lambda_i \in P_i \backslash P_{n-1}$ e defina

$$\lambda := \prod \lambda_i \quad \text{e} \quad S := \{1, \lambda, \lambda^2, \ldots\}.$$

Temos que $\lambda \in \left(\bigcap\limits_{P_i \supsetneqq P_{n-1}} P_i \right) \setminus P_{n-1}$ e S é um sistema multiplicativo.

Consideremos a aplicação

$$\mu = \alpha \oplus \beta : M \longrightarrow MS^{-1} \bigoplus \frac{M}{M_{n-1}}$$

com $\alpha : M \to MS^{-1}$ a aplicação canônica de localização e $\beta : M \to \dfrac{M}{M_{n-1}}$ a projeção canônica.

Notemos que $\ker(\mu) = \ker(\alpha) \cap \ker(\beta) = \ker(\alpha) \cap M_{n-1} = \ker(\alpha_{|_{M_{n-1}}})$. Temos que $M_{n-1}S^{-1}$ é um subanel do corpo de frações de M_{n-1} gerado por M_{n-1} e $\dfrac{1}{\lambda}$. E além disso, $M_{n-1}S^{-1} \neq 0$ pois $\lambda \notin P_{n-1}$. Logo, $\alpha_{|_{M_{n-1}}}$ é injetiva, ou seja, μ é injetiva.

A partir da cadeia (3.2) obtemos a cadeia de $\mathbb{Z}[H]S^{-1}$- submódulos de MS^{-1}

$$MS^{-1} = M_0S^{-1} \supseteq M_1S^{-1} \supseteq \ldots \supseteq M_{n-1}S^{-1} \supseteq M_nS^{-1} = 0.$$

Usando o fato que localização é funtor exato (Proposição 1.9) temos que

$$\frac{M_iS^{-1}}{M_{i+1}S^{-1}} \simeq \left(\frac{\mathbb{Z}[H]}{P_i}\right)S^{-1} \simeq \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda \in P_i \\ \left(\dfrac{\mathbb{Z}[H]}{P_{n-1}}\right)S^{-1} & \text{se } \lambda \notin P_i \ (\Leftrightarrow P_i = P_{n-1}) \end{cases}$$

para todo $0 \leq i \leq n-1$. ■

A próxima proposição nos permitirá fazer uma redução muito útil para poder demonstrar a Conjectura de mergulho.

Proposição 3.4. *Seja Q um grupo abeliano finitamente gerado e A um $\mathbb{Z}[Q]$-módulo finitamente gerado. Então $G = A \rtimes Q$ mergulha em $\prod_{i=1}^{l}(M_i \rtimes Q_i)$ como um subgrupo sendo que, para todo $1 \leq i \leq l$, Q_i é um grupo abeliano finitamente gerado e M_i é um $\mathbb{Z}[Q_i]$-módulo finitamente gerado tal que existe uma cadeia de $\mathbb{Z}[Q_i]$-submódulos*

$$M_i = M_{i,0} \supseteq M_{i,1} \supseteq \cdots \supseteq M_{i,n_i} = 0$$

sendo que, para $1 \leq k \leq n_i - 1$, $\dfrac{M_{i,k}}{M_{i,k+1}} \simeq \dfrac{\mathbb{Z}[Q_i]}{P_i'}$ com P_i' um ideal primo fixo de $\mathbb{Z}[Q_i]$.

Demonstração. Usando o Lema 3.1 para $H = Q$ e $M = A$ temos que $A \hookrightarrow \bigoplus_{j \in J} \widetilde{M}_j$ sendo que J é um conjunto finito e, para todo $j \in J$, $\widetilde{M}_j$ é um $\mathbb{Z}[Q]$-módulo quociente de M e é primário. Daí existe um monomorfismo de grupos

$$G = A \rtimes Q \hookrightarrow \prod_{j \in J}(\widetilde{M}_j \rtimes Q)$$

cuja restrição sobre A é o monomorfismo φ dado na demonstração do Lema 3.1 e sobre Q é o mergulho diagonal de Q em $\prod_{j \in J} Q$.

Agora, pelo Lema 3.2, para cada $j \in J$,

$$\widetilde{M}_j \rtimes Q \hookrightarrow \left(\widetilde{M}_jS_j^{-1} \rtimes H_j\right) \times \left(\overline{M}_j \rtimes Q\right)$$

sendo que $H_j := Q \times \mathbb{Z}$ e $\widetilde{M_j}S_j^{-1}$ tem uma cadeia de $\mathbb{Z}[H_j]$-submódulos com todos os quocientes isomorfos a um quociente fixo que é cíclico e é um domínio. E ainda, $\overline{M}_j$ é um quociente próprio de $\widetilde{M_j}$ e portanto um quociente próprio de A.

Logo, o fator $\widetilde{M_j}S_j^{-1} \rtimes H_j$ é do tipo permitido pela Proposição e assim temos que cuidar do outro fator $\overline{M}_j \rtimes Q$. Infelizmente, em geral, $\overline{M}_j$ não é primário como $\mathbb{Z}[Q]$-módulo e então novamente aplicamos o algoritmo anterior.

Suponhamos que este processo é infinito. Como em cada passo do algoritmo acrescentamos somente um número finito de grupos então existiria uma seqüência infinita

$$A,\ A^{(1)} = \overline{M}_j,\ A^{(2)}, \cdots, A^{(i)},\ A^{(i+1)}, \cdots$$

sendo que $A^{(i+1)}$ é um quociente próprio de $A^{(i)}$ e portanto um quociente próprio de A, ou seja, $A^{(i)} = A/V_i$ com V_i um $\mathbb{Z}[Q]$-submódulo de A. Logo, obteríamos uma seqüência crescente infinita

$$V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq V_3 \subsetneq \cdots$$

de $\mathbb{Z}[Q]$- submódulos de A. Mas isto é impossível pois A é um $\mathbb{Z}[Q]$-módulo Noetheriano.■

3.2 Demonstração da Conjectura

O objetivo desta seção é demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 3.5. *Seja m um número natural e G um grupo metabeliano finitamente gerado. Então G mergulha num grupo metabeliano de tipo FP_m.*

Usando os Lemas 2.3 e 1.60 e a Proposição 3.4 podemos reduzir nosso problema ao caso em que $G = A \rtimes Q$ com Q um grupo abeliano finitamente gerado e A um $\mathbb{Z}[Q]$-módulo finitamente gerado tal que existe uma cadeia de $\mathbb{Z}[Q]$-submódulos de A:

$$A = A_0 \supseteq A_1 \supseteq \ldots \supseteq A_n = 0 \tag{3.3}$$

sendo que, para $0 \leq i \leq n-1$, $\dfrac{A_i}{A_{i+1}} \simeq \dfrac{\mathbb{Z}[Q]}{P}$ com P um ideal primo de $\mathbb{Z}[Q]$.

Como P é um ideal primo segue que $R := \dfrac{\mathbb{Z}[Q]}{P}$ é um domínio e portanto temos que analisar os seguintes casos:

$1^0)$ $car\left(\dfrac{\mathbb{Z}[Q]}{P}\right) = 0;$

$2^0)$ $car\left(\dfrac{\mathbb{Z}[Q]}{P}\right) = p$ com p um número primo ≥ 2.

De agora em diante, vamos omitir a notação $\circ$ para a ação à direita de Q sobre A por conjugação.

$\mathbf{1^0}$) CASO: $car\left(\dfrac{\mathbb{Z}[Q]}{P}\right) = 0.$

Considerando R como um $\mathbb{Z}$-módulo e usando o fato que R é um domínio de característica zero temos que seu submódulo de torção $t_{\mathbb{Z}}(R) = 0$. Assim, por [23, Corolário 8.18] , R mergulha em $R' := R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ como $\mathbb{Z}$-módulo. Mas a ação de Q sobre R induz uma ação de Q sobre R' e daí R mergulha em R' como $\mathbb{Z}[Q]$-módulo.

Considere a seguinte seqüência exata de $\mathbb{Z}$-módulos:

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow \mathbb{Z}[Q] \longrightarrow R \longrightarrow 0.$$

Como $\mathbb{Q}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo plano (por [23, Corolário 3.48]) então a seqüência

$$0 \longrightarrow P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}[Q] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow R' \longrightarrow 0$$

é exata. Logo,

$$R' \simeq \frac{\mathbb{Z}[Q] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}}{P'} \simeq \frac{\mathbb{Q}[Q]}{P'}$$

com $P' := P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, ou seja, R' é uma $\mathbb{Q}$-álgebra comutativa finitamente gerada.

Daí, pelo Teorema de Normalização de Noether (Teorema 1.31), existem $x'_1, \ldots, x'_s \in R'$ algebricamente independentes sobre $\mathbb{Q}$ e tais que R' é integral sobre o anel de polinômios $B' = \mathbb{Q}[x'_1, \ldots, x'_s]$. Portanto, R' é um B'-módulo finitamente gerado.

Notemos que R' é uma localização de R com respeito ao sistema multiplicativo $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e também é um domínio. Daí, para cada $j = 1, \ldots, s$

$$x'_j = \frac{y'_j}{z'_j} \quad \text{com} \;\; y'_j \in R, \;\; z'_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{3.4}$$

Sejam

$$F := \text{corpo de frações de } R;$$

$$F' := \text{corpo de frações de } R';$$

$$L' := \text{corpo de frações de } B'.$$

Então, $L' \subseteq F'$ e F' é uma extensão finita de L'. Logo, F' é um L'-espaço vetorial de dimensão finita. E ainda, $F' = L'(q'_1, \ldots, q'_k)$ sendo que $\{q_1, \ldots, q_k\}$ é um conjunto de geradores do grupo Q e q'_j é a imagem de q_j em R' para todo $j = 1, \ldots, k$. Assim, podemos obter uma base $\{e'_1, \ldots, e'_u\}$ de F' sobre L' tal que $\{q'_1, \ldots, q'_k\} \subseteq \{e'_1, \ldots, e'_u\} \subseteq R$.

Observemos que

$$F' = F \quad \text{e} \quad L' = \text{corpo de frações de } \mathbb{Z}[x'_1, \ldots, x'_s].$$

Portanto

$$F = F' = \bigoplus_{l=1}^{u} e'_l \frac{\mathbb{Z}[x'_1, \ldots, x'_s]}{\mathbb{Z}[x'_1, \ldots, x'_s] \setminus \{0\}} \tag{3.5}$$

Lema 3.6. *Existe um $c' \in \mathbb{Z}[x'_1, \ldots, x'_s] \setminus \{0\}$ tal que*

$$F_1 := \bigoplus_{l=1}^{u} e'_l \ \mathbb{Z}[x'_1, \ldots, x'_s, \frac{1}{c'} \ ]$$

é um subanel de F' contendo R.

Demonstração. Seja $a \in R$ um gerador de R como $\mathbb{Z}[Q]$-módulo cíclico. Usando os fatos que $\{q_1, \ldots, q_k\}$ é um conjunto de geradores do grupo Q e $Q \twoheadrightarrow R \subseteq F$ e a expressão (3.5) dada acima temos que

$$\frac{a}{1} = \sum_{l=1}^{u} e'_l \frac{b_l}{c_l} \quad \text{com} \ \ b_l, c_l \in \mathbb{Z}[x'_1, \ldots, x'_s], \ c_l \neq 0;$$

$$\frac{q_j}{1} = \sum_{l=1}^{u} e'_l \frac{\widetilde{b}_{jl}}{\widetilde{c}_{jl}} \quad \text{com} \ \ \widetilde{b}_{jl}, \widetilde{c}_{jl} \in \mathbb{Z}[x'_1, \ldots, x'_s], \ c_{jl} \neq 0, \ \ \forall\ 1 \leq j \leq k;$$

$$e'_i e'_h = \sum_{l=1}^{u} e'_l \frac{b'_{ihl}}{c'_{ihl}} \quad \text{com} \ \ b'_{ihl}, \ c'_{ihl} \in \mathbb{Z}[x'_1, \ldots, x'_s], \ c'_{ihl} \neq 0, \ \ \forall\ 1 \leq i \leq h \leq u.$$

Logo, $c' := \left(\prod_l c_l\right)\left(\prod_{j,l} \widetilde{c}_{jl}\right)\left(\prod_{i,h,l} c'_{ihl}\right)$ satisfaz as condições do Lema. ∎

Consideremos $c' \in \mathbb{Z}[x'_1, \ldots, x'_s] \setminus \{0\}$ o elemento dado pelo Lema anterior e $y'_j \in R$ e $z'_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ os elementos dados na expressão (3.4), para $j = 1, \ldots, s$.

Para algum número natural $m' \geq 2$ temos que

$$c'(z'_1 \ldots z'_s)^{m'-1} \in \mathbb{Z}[y'_1, \ldots, y'_s] \setminus \{0\}.$$

Defina

$$d' := c'(z'_1 \ldots z'_s)^{m'} y'_1 \ldots y'_s \in \mathbb{Z}[y'_1, \ldots, y'_s] \setminus \{0\} \subseteq R \setminus \{0\}.$$

Notemos que

$$\frac{1}{z'_1 \ldots z'_s} = \frac{c'(z'_1 \ldots z'_s)^{m'-1} y'_1 \ldots y'_s}{d'} \in \frac{\mathbb{Z}[y'_1, \ldots, y'_s]}{d'} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{y'_1 \ldots y'_s} = \frac{c'(z'_1 \ldots z'_s)^{m'}}{d'}.$$

Então,

$$c' \in \mathbb{Z}[x'_1, \ldots, x'_s] \subseteq \mathbb{Z}[y'_1, \ldots, y'_s, \frac{1}{z'_1 \ldots z'_s}] \subseteq \mathbb{Z}[y'_1, \ldots, y'_s, \frac{1}{d'}] \subseteq R\left[\frac{1}{d'}\right]$$

e portanto

$$\mathbb{Z}[(y'_1)^{\pm 1}, \ldots, (y'_s)^{\pm 1}] = \mathbb{Z}[y'_1, \ldots, y'_s, \frac{1}{y'_1 \ldots y'_s}] \subseteq$$
$$\subseteq \mathbb{Z}[y'_1, \ldots, y'_s, c', \frac{1}{d'}] \subseteq \mathbb{Z}[y'_1, \ldots, y'_s, \frac{1}{d'}] \subseteq R\left[\frac{1}{d'}\right].$$

Das inclusões acima segue que

$$\mathbb{Z}[x'_1, \ldots, x'_s, \frac{1}{c'}] \subseteq \mathbb{Z}[y'_1, \ldots, y'_s, \frac{1}{d'}, \frac{1}{c'} = \frac{(z'_1 \ldots z'_s)^{m'} y'_1 \ldots y'_s}{d'}] \subseteq \mathbb{Z}[y'_1, \ldots, y'_s, \frac{1}{d'}].$$

Assim, usando o Lema 3.6, obtemos que

$$R = F_1 = \bigoplus_{l=1}^{u} e'_l \ \mathbb{Z}[x'_1, \ldots, x'_s, \frac{1}{c'}\ ] \subseteq \bigoplus_{l=1}^{u} e'_l \ \mathbb{Z}[y'_1, \ldots, y'_s, \frac{1}{d'}\ ] \subseteq R\left[\frac{1}{d'}\right].$$

Portanto,

$$R\left[\frac{1}{d'}\right] = \bigoplus_{l=1}^{u} e'_l \ \mathbb{Z}[y'_1, \ldots, y'_s, \frac{1}{d'}\ ].$$

Como a projeção canônica $\pi : \mathbb{Z}[Q] \to R = \mathbb{Z}[Q]/P$ é um epimorfismo então

$$\exists\ y_j \in \mathbb{Z}[Q] \ \text{ tal que } \ \pi(y_j) = y'_j, \quad \forall\ j = 1, \ldots, s.$$

Pela definição de d' e m' temos que $d' \in y'_1 \ldots y'_s \mathbb{Z}[y'_1, \ldots, y'_s] \setminus \{0\}$. Assim,

$$\exists\ c \in y_1 \ldots y_s \mathbb{Z}[y_1, \ldots, y_s] \ \text{ tal que } \ \pi(c) = d'$$

e daí, $\dfrac{1}{y_i} \in \dfrac{\prod_{1\leq j\neq i\leq s} y_j}{c}\mathbb{Z}[y_1,\ldots,y_s] \subseteq \mathbb{Z}[y_1,\ldots,y_s,\dfrac{1}{c}]$, para $i = 1,\ldots,s$. Em particular,

$$\mathbb{Z}[(y_1)^{\pm 1},\ldots,(y_s)^{\pm 1}] \subseteq \mathbb{Z}[y_1,\ldots,y_s,\frac{1}{c}].$$

Seja A' uma localização de A no sistema multiplicativo $S_1 := \{1, c, c^2, \ldots\}$. De agora em diante iremos denotar $A' := AS_1^{-1}$ por $A\left[\dfrac{1}{c}\right]$.

Pelo fato que localização é um funtor exato (Proposição 1.9), obtemos a partir da cadeia (3.3), dada inicialmente, a seguinte cadeia de $\mathbb{Z}[Q][\frac{1}{c}]$-submódulos de A':

$$A' = A'_0 \supseteq A'_1 \supseteq \ldots \supseteq A'_n = 0 \tag{3.6}$$

tal que, para cada $0 \leq i \leq n-1$, $A'_i := A_i\left[\dfrac{1}{c}\right]$ e

$$\frac{A'_i}{A'_{i+1}} \simeq \frac{A_i[\frac{1}{c}]}{A_{i+1}[\frac{1}{c}]} \simeq \frac{A_i}{A_{i+1}}\left[\frac{1}{c}\right] \simeq R\left[\frac{1}{d'}\right] = \bigoplus_{l=1}^{u} e'_l\ \mathbb{Z}[y'_1,\ldots,y'_s,\frac{1}{d'}\ ] \simeq$$

$$\simeq \bigoplus_{l=1}^{u} e'_l\ \mathbb{Z}[(y'_1)^{\pm 1},\ldots,(y'_s)^{\pm 1},\frac{1}{d'}]$$

ou seja, A'_i/A'_{i+1} é um $\mathbb{Z}[(y'_1)^{\pm 1},\ldots,(y'_s)^{\pm 1},\frac{1}{d'}\ ]$-módulo livre finitamente gerado.

Lema 3.7. *A aplicação canônica de localização*

$$\begin{array}{rccl} i_A^{S_1}: & A & \to & AS_1^{-1} = A' \\ & a & \mapsto & a\otimes 1 \overset{not.}{=} \dfrac{a}{1} \end{array}$$

é injetiva, ou seja, A mergulha em A' como $\mathbb{Z}[Q]$-módulo.

Demonstração. Devemos mostrar que não existe $a \in A\setminus\{0\}$ tal que $ac = 0$.

Seja $a \in A$ satisfazendo $ac = 0$. Consideremos a cadeia (3.3). Vamos mostrar que se $a \in A_i$ então $a \in A_{i+1}$.

Considere a projeção canônica $\pi_i : A_i \to \dfrac{A_i}{A_{i+1}}$, para cada $0 \leq i \leq n-1$. Temos que

$$ac = 0 \Longrightarrow \pi_i(ac) = 0 \Longrightarrow \pi_i(a)d' = 0$$

Como $\dfrac{A_i}{A_{i+1}} \simeq R \simeq \dfrac{\mathbb{Z}[Q]}{P}$ é um domínio e $d' \in R\setminus\{0\}$ segue que $\pi_i(a) = 0$, ou seja, $a \in A_{i+1}$.

Logo,

$$a \in A = A_0 \Longrightarrow a \in A_1 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow a \in A_n = 0.$$

Portanto $a = 0$. ■

Seja

$$\widehat{Q} := \langle \{\widehat{g}_1, \ldots, \widehat{g}_s\} \rangle \simeq \mathbb{Z}^s$$

o grupo abeliano livre tal que $\widehat{g}_j$ age sobre A' por multiplicação com $y_j \in \mathbb{Z}[Q]$, ou seja, $\widehat{g}_j$ age como o elemento y_j, para $j = 1, \ldots, s$. Observemos que A'_i é um $\mathbb{Z}[\widehat{Q}]\left[\dfrac{1}{c}\right]$-submódulo de A'.

Usando os Lemas 1.33 e 1.34 podemos refinar, se necessário, a cadeia (3.6) de $\mathbb{Z}[\widehat{Q}]\left[\dfrac{1}{c}\right]$-módulos de tal modo que, para cada $i = 0, \ldots, n-1$, A'_i/A'_{i+1} é um $\mathbb{Z}[(y'_1)^{\pm 1}, \ldots, (y'_s)^{\pm 1}, \frac{1}{d'}\,]$-módulo livre e cíclico, ou seja,

$$\frac{A'_i}{A'_{i+1}} \simeq a'_i\ \mathbb{Z}[y'_1, \ldots, y'_s, \frac{1}{d'}\ ] \simeq \mathbb{Z}[y'_1, \ldots, y'_s, \frac{1}{d'}\ ] \simeq \mathbb{Z}[(y'_1)^{\pm 1}, \ldots, (y'_s)^{\pm 1}, \frac{1}{d'}\ ] \tag{3.7}$$

para algum $a'_i \in A'_i/A'_{i+1}$. Por um abuso de notação, continuaremos denotando por n o número de fatores da cadeia refinada. Observamos que depois do refinamento A'_i não precisa ser $\mathbb{Z}[Q]$-submódulo de A'.

Para cada $i = 0, \ldots, n-1$, considere $a'_i \in A'_i/A'_{i+1}$ o elemento dado na expressão (3.7). Como a projeção canônica $\pi'_i : A'_i \twoheadrightarrow A'_i/A'_{i+1}$ é sobrejetora segue que

$$\exists\ \widetilde{a}_i \in A'_i \ \text{ tal que } \ \pi'_i(\widetilde{a}_i) = a'_i.$$

Assim, por (3.7),

$$A'_i = A'_{i+1} + \widetilde{a}_i\ \mathbb{Z}[\widehat{Q}]\left[\frac{1}{c}\right], \quad \forall\ i = 0, \ldots, n-1.$$

Defina

$$\widehat{A} := \widetilde{a}_0\mathbb{Z}[\widehat{Q}\ ] + \ldots + \widetilde{a}_{n-1}\mathbb{Z}[\widehat{Q}\ ],$$

ou seja, $\widehat{A}$ é o $\mathbb{Z}[\widehat{Q}\ ]$-submódulo de A' gerado por $\widetilde{a}_0, \ldots, \widetilde{a}_{n-1}$.

Lema 3.8. $\widehat{A} = \displaystyle\bigoplus_{i=0}^{n-1} \widetilde{a}_i\mathbb{Z}[\widehat{Q}\ ]$ *e cada submódulo* $\widetilde{a}_i\mathbb{Z}[\widehat{Q}\ ]$ *é livre de posto* 1, $\forall\ i = 0, \ldots, n-1$.

Demonstração. Para cada $i = 0, \ldots, n-1$, seja $\pi_i' : A_i' \to A_i'/A_{i+1}'$ a projeção canônica e considere os seguintes $\mathbb{Z}[\widehat{Q}\,]$-submódulos de $\widehat{A}$

$$\widehat{A}_i := \widetilde{a}_i \mathbb{Z}[\widehat{Q}\,] + \ldots + \widetilde{a}_{n-1}\mathbb{Z}[\widehat{Q}\,].$$

Basta mostrar que $\widehat{A}_i = \widetilde{a}_i\mathbb{Z}[\widehat{Q}\,] \oplus \widehat{A}_{i+1}$, para todo $i = 0, \ldots, n-1$.

Por (3.6), $A_j' \subseteq A_{i+1}'$, para todo $j = i+1, \ldots, n-1$, e daí

$$\widehat{A}_{i+1} = \widetilde{a}_{i+1}\mathbb{Z}[\widehat{Q}\,] + \ldots + \widetilde{a}_{n-1}\mathbb{Z}[\widehat{Q}\,] \subseteq A_{i+1}' = \ker(\pi_i')$$

Como $\pi_i'(\widetilde{a}_i\mathbb{Z}[\widehat{Q}\,]) = a_i'\mathbb{Z}[(y_1')^{\pm 1}, \ldots, (y_s')^{\pm 1}] \simeq \mathbb{Z}[(y_1')^{\pm 1}, \ldots, (y_s')^{\pm 1}]$ segue que

$$\ker(\pi_i') \cap \ (\widetilde{a}_i\mathbb{Z}[\widehat{Q}\,]) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \widehat{A}_{i+1} \cap \ (\widetilde{a}_i\mathbb{Z}[\widehat{Q}\,]) = 0.$$

Portanto, $\widehat{A} = \widehat{A}_0 = \widetilde{a}_0\mathbb{Z}[\widehat{Q}\,] \oplus \widehat{A}_1 = \widetilde{a}_0\mathbb{Z}[\widehat{Q}\,] \oplus \widetilde{a}_1\mathbb{Z}[\widehat{Q}\,] \oplus \widehat{A}_2 = \ldots = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \widetilde{a}_i\mathbb{Z}[\widehat{Q}\,].$ ■

Lema 3.9. $A' = \widehat{A}\left[\dfrac{1}{c}\right]$.

Demonstração. Note que como $c \in \mathbb{Z}[y_1, \ldots, y_s]$ então c atua sobre $\widehat{A}$ como um elemento de $\mathbb{Z}[\widehat{Q}\,]$ e daí $\widehat{A}c \subseteq \widehat{A}$. Usando o fato que localização é um funtor exato (Proposição 1.9), $\widehat{A}$ é um $\mathbb{Z}[\widehat{Q}]$-submódulo de A' e $A' = A\left[\dfrac{1}{c}\right]$ segue que

$$A' \supseteq \widehat{A}\left[\frac{1}{c}\right].$$

Falta mostrar que $A' \subseteq \widehat{A}\,[\frac{1}{c}]$. Para isto basta provar que $A_i' \subseteq \widehat{A}\,[\frac{1}{c}]$, $\forall\ i = 0, \ldots, n-1$.

Para $i = n-1$ é verdade, pois $A_n' = 0$ e

$$A_{n-1}' = A_n' + \widetilde{a}_{n-1}\ \mathbb{Z}[\widehat{Q}]\left[\frac{1}{c}\right] = \widetilde{a}_{n-1}\ \mathbb{Z}[\widehat{Q}]\left[\frac{1}{c}\right] \subseteq \widehat{A}\left[\frac{1}{c}\right].$$

Agora, suponha que $A_{i+1}' \subseteq \widehat{A}\left[\dfrac{1}{c}\right]$. Como

$$\widetilde{a}_i\mathbb{Z}[\widehat{Q}\,]\left[\frac{1}{c}\right] \subseteq \bigoplus_{i=0}^{n-1}\widetilde{a}_i\mathbb{Z}[\widehat{Q}\,]\left[\frac{1}{c}\right] = \widehat{A}\left[\frac{1}{c}\right]$$

então $A_i' = A_{i+1}' + \widetilde{a}_i\mathbb{Z}[\widehat{Q}]\left[\dfrac{1}{c}\right] \subseteq \widehat{A}\left[\dfrac{1}{c}\right]$. Portanto, $A' = A_0' \subseteq \widehat{A}\left[\dfrac{1}{c}\right]$. ■

Como $\widehat{Q}$ é um grupo abeliano livre de posto finito e $\widehat{A}$ é um $\mathbb{Z}[\widehat{Q}\,]$-módulo livre finitamente gerado (Lema 3.8) então pelo Teorema 2.4

$$\widehat{A} \rtimes \widehat{Q} \ \text{ mergulha no grupo } G^* := A_1^* \rtimes Q_1^* \ \text{ de tipo } FP_m$$

sendo que A_1^* é um $\mathbb{Z}[Q_1^*]$-módulo finitamente gerado, Q_1^* é um grupo abeliano livre de posto finito, A_1^* uma localização do $\mathbb{Z}[\widehat{Q}\,]$-módulo $\widehat{A}$ (digamos $A_1^* = \widehat{A}\ T^{-1}$ com T um subconjunto de $\mathbb{Z}[\widehat{g}_1, \ldots, \widehat{g}_s] \setminus \{0\}$ finitamente gerado que é um sistema multiplicativo e atua como elementos de $\mathbb{Z}[y_1, \ldots, y_s] \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{Z}[Q] \setminus \{0\}$), a aplicação canônica de localização $i_{\widehat{A}}^T : \widehat{A} \to \widehat{A}T^{-1} = A_1^*$ é injetiva e $\widehat{Q}$ é um somando direto de Q_1^*.

Seja

$$H_1^* := Q_1^* \times \langle t' \rangle$$

com $\langle t' \rangle \simeq \mathbb{Z}$ um grupo abeliano livre cíclico. Defina

$$G_1^* := A_1^* \left[\frac{1}{c}\right] \rtimes H_1^*$$

sendo que t' age sobre $A_1^*[\frac{1}{c}]$ como o elemento c. Temos que

$$A_1^* \left[\frac{1}{c}\right] = \widehat{A}\ T^{-1} \left[\frac{1}{c}\right] = \widehat{A} \left[\frac{1}{c}\right] T^{-1} = A' T^{-1} \tag{3.8}$$

onde a segunda igualdade segue do Lema 1.8 e dos fatos que T atua como um subconjunto do anel comutativo $\mathbb{Z}[Q]$ e $c \in \mathbb{Z}[Q]$ e a última igualdade segue do Lema 3.9.

O grupo metabeliano G_1^* é uma extensão HNN crescente com grupo base G^* (que é de tipo FP_m), subgrupos associados isomorfos a G^* e letra estável t'. Portanto, pelo Lema 1.70,

$$G_1^* \ \text{ é de tipo } FP_m. \tag{3.9}$$

Pelo Lema 3.7, A mergulha em $A' = A[\frac{1}{c}]$. A ação de Q sobre A induz uma ação de Q sobre A' e portanto uma Q-ação sobre $A'T^{-1} = A_1^*[\frac{1}{c}]$. Assim, $A_1^*[\frac{1}{c}]$ pode ser visto como um $\mathbb{Z}[Q]$-módulo. Como todas as localizações feitas apenas inverteram elementos do anel comutativo $\mathbb{Z}[Q]$ então as ações de Q e H_1^* sobre $A_1^*[\frac{1}{c}]$ comutam.

Temos que o grupo metabeliano

$$\widehat{G} := A_1^* \left[\frac{1}{c}\right] \rtimes (H_1^* \times Q)$$

tem um subgrupo normal G_1^* com quociente $\widehat{G}/G_1^* \simeq Q$ de tipo FP_∞. Então por (3.9) e pela Proposição 1.47

$$\widehat{G} \text{ é de tipo } FP_m.$$

Portanto, se A mergulha em $A_1^*[\frac{1}{c}]$ como $\mathbb{Z}[Q]$-módulo então $G = A \rtimes Q$ mergulha em $\widehat{G}$ e a demonstração do Teorema 3.5 no Caso 1 está completa.

Falta garantir que A mergulha em $A_1^*[\frac{1}{c}]$. Recordemos que, por definição, $\widehat{A}$ é um $\mathbb{Z}[\widehat{Q}\ ]$-submódulo de A' e por construção $\widehat{A}$ mergulha em $\widehat{A}\, T^{-1} = A_1^*$ através da aplicação canônica de localização. Então $\widehat{A}$ mergulha em suas localizações $\widehat{A}[\frac{1}{c}] = A'$ e $\widehat{A}T^{-1}$. Portanto, pelo Lema 1.8, $\widehat{A}[\frac{1}{c}]$ mergulha em $\widehat{A}[\frac{1}{c}]T^{-1} = A'T^{-1} = A_1^*[\frac{1}{c}]$ (aqui estamos usando o fato que as ações de T e $S_1 = \{c^j\}_{j \geq 0}$ sobre $\widehat{A}$ comutam pois são dadas por ações de alguns elementos do anel comutativo $\mathbb{Z}[Q]$). Assim, $A[\frac{1}{c}] = A' = \widehat{A}[\frac{1}{c}]$ mergulha em $A_1^*[\frac{1}{c}]$. Como A mergulha em $A[\frac{1}{c}]$ segue que A mergulha em $A_1^*[\frac{1}{c}]$. Todos os mergulhos considerados são através de localizações então o mergulho de A em $A_1^*[\frac{1}{c}]$ é um homomorfismo de $\mathbb{Z}[Q]$-módulos.

Agora, analisemos o outro caso.

<u>**2^0) CASO**</u>: *car* $\left(\dfrac{\mathbb{Z}[Q]}{P}\right) = p$ com p um número primo ≥ 2.

Consideremos o corpo $K = \mathbb{Z}_p$ com p elementos. Notemos que $R = \mathbb{Z}[Q]/P$ é uma K-álgebra finitamente gerada. Assim, pelo Teorema de Normalização de Noether (Teorema 1.31) existem $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_r \in R$ algebricamente independentes sobre K e tais que R é integral sobre o anel $B = K[\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_r]$. Portanto, R é um B-módulo finitamente gerado, ou seja, existem $b_1, \ldots, b_w \in R$ tais que $R = b_1 B + \ldots + b_w B$.

Sejam

$$F := \text{corpo de frações de } R \quad \text{e} \quad L := \text{corpo de frações de } B.$$

Então, $L \subseteq F$ e F é uma extensão finita de L. Logo, F é um L-espaço vetorial de dimensão finita. Além disso, $F = L(\overline{q}_1, \ldots, \overline{q}_k)$ sendo que $\{q_1, \ldots, q_k\}$ é um conjunto de geradores do grupo Q e $\overline{q}_j$ é a imagem de q_j em R para todo $j = 1, \ldots, k$. Assim, podemos obter uma base $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_v\}$ de F sobre L tal que $\{q_1, \ldots, q_k\} \subseteq \{\lambda_1, \ldots, \lambda_v\} \subseteq R$. Então

$$F = \bigoplus_{l=1}^{v} \lambda_l \frac{K[\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_r]}{K[\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_r] \setminus \{0\}}.$$

Lema 3.10. *Existe um* $\overline{c} \in B \setminus \{0\} = K[\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_r] \setminus \{0\}$ *tal que*

$$F_2 := \bigoplus_{l=1}^{v} \lambda_l \; K[\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_r, \frac{1}{\overline{c}}\ ]$$

é um subanel de F contendo R.

Demonstração. Temos que $R = b_1B + \ldots + b_wB$, $F = \bigoplus_{l=1}^{v} \lambda_l L$ e $R \subseteq F$. Assim,

$$\frac{b_j}{1} = \sum_{l=1}^{v} \lambda_l \frac{b_{jl}}{c_{jl}} \quad \text{com } \; b_{jl}, c_{jl} \in B, \;\; c_{jl} \neq 0, \;\; \forall\, 1 \leq j \leq w;$$

$$\lambda_i \lambda_h = \sum_{l=1}^{v} \lambda_l \frac{\overline{b}_{ihl}}{\overline{c}_{ihl}} \quad \text{com } \; \overline{b}_{ilh}, \overline{c}_{ihl} \in B, \;\; c_{ihl} \neq 0, \;\; \forall\, 1 \leq i \leq h \leq v.$$

Portanto, $\overline{c} := \left(\prod_{j,l} c_{jl} \right) \left(\prod_{i,h,l} \overline{c}_{ihl} \right)$ satisfaz as condições do Lema. ∎

Defina

$$\overline{d} := \overline{c}\; \overline{x}_1 \ldots \overline{x}_r \in K[\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_r] \setminus \{0\} \subseteq R \setminus \{0\}.$$

Assim,

$$K[\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_r, \frac{1}{\overline{c}}\,] \subseteq K[\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_r, \frac{1}{\overline{d}}\,] \quad \text{e} \quad K[(\overline{x}_1)^{\pm 1}, \ldots, (\overline{x}_r)^{\pm 1}] \subseteq K[\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_r, \frac{1}{\overline{d}}].$$

Conseqüentemente,

$$R \subseteq F_2 = \bigoplus_{l=1}^{u} \lambda_l \; K[\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_r, \frac{1}{\overline{c}}\,] \subseteq \bigoplus_{l=1}^{u} \lambda_l \; K[\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_r, \frac{1}{\overline{d}}\,] \subseteq \bigoplus_{l=1}^{u} \lambda_l \; R\left[\frac{1}{\overline{d}}\right] \subseteq R\left[\frac{1}{\overline{d}}\right]$$

e portanto

$$R\left[\frac{1}{\overline{d}}\right] = \bigoplus_{l=1}^{u} \lambda_l \; K[\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_r, \frac{1}{\overline{d}}]$$

Como a projeção canônica $\pi : \mathbb{Z}[Q] \to R = \mathbb{Z}[Q]/P$ é um epimorfismo segue que

$$\exists\; x_j \in \mathbb{Z}[Q] \;\text{ tal que }\; \pi(x_j) = \overline{x}_j, \;\forall\; j = 1, \ldots, r.$$

Considere

$$c \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_r] \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{Z}[Q] \setminus \{0\} \;\text{ tal que }\; \pi(c) = \overline{c}$$

e defina

$$d = x_1 \ldots x_r c.$$

Note que $\dfrac{1}{x_i} = \dfrac{(\prod_{1\leq j\neq i\leq r} x_j)c}{d} \in \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_r,\dfrac{1}{d}]$, para $i=1,\ldots,r$, e daí

$$\mathbb{Z}[(x_1)^{\pm 1},\ldots,(x_r)^{\pm 1}] \subseteq \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_r,\frac{1}{d}].$$

Seja $\overline{A}$ uma localização de A no sistema multiplicativo $S_2 := \{1,d,d^2,\ldots\}$. A partir de agora iremos denotar $\overline{A} := AS_2^{-1}$ por $A\left[\dfrac{1}{d}\right]$.

Pelo fato que localização é um funtor exato (Proposição 1.9), obtemos a partir da cadeia (3.3) dada inicialmente a seguinte cadeia de $\mathbb{Z}[Q][\frac{1}{d}]$-submódulos de $\overline{A}$:

$$\overline{A} = \overline{A}_0 \supseteq \overline{A}_1 \supseteq \ldots \supseteq \overline{A}_n = 0 \tag{3.10}$$

tal que, para cada $0 \leq i \leq n-1$, $\overline{A}_i := A_i\left[\dfrac{1}{d}\right]$ e

$$\frac{\overline{A}_i}{\overline{A}_{i+1}} \simeq \frac{A_i[\frac{1}{d}]}{A_{i+1}[\frac{1}{d}]} \simeq \frac{A_i}{A_{i+1}}\left[\frac{1}{d}\right] \simeq R\left[\frac{1}{d}\right] = \bigoplus_{l=1}^{v} \lambda_l\ K[\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_r,\frac{1}{\overline{d}}\ ] =$$

$$= \bigoplus_{l=1}^{v} \lambda_l\ K[(\overline{x}_1)^{\pm},\ldots,(\overline{x}_r)^{\pm 1},\frac{1}{\overline{d}}\ ].$$

Lema 3.11. *$A \hookrightarrow AS_2^{-1} = \overline{A}$ como $\mathbb{Z}[Q]$-módulo.*

Demonstração. Análoga a do Lema 3.7. ■

Defina

$$\widetilde{Q} := \langle\{\widetilde{g}_1,\ldots,\widetilde{g}_r\}\rangle \simeq \mathbb{Z}^r$$

o grupo abeliano livre tal que $\widetilde{g}_j$ age sobre $\overline{A}$ por multiplicação com x_j, para $j=1,\ldots,r$. Assim $\overline{A}_i$ é um $\mathbb{Z}[\widetilde{Q}\ ]\left[\dfrac{1}{d}\right]$-submódulo de $\overline{A}$.

Usando os Lemas 1.33 e 1.34 podemos refinar, se necessário, a cadeia (3.10) de $\mathbb{Z}[\widetilde{Q}\ ]\left[\dfrac{1}{d}\right]$-módulos de tal modo que, para cada $i=0,\ldots,n-1$, $\overline{A}_i/\overline{A}_{i+1}$ é um $K[(\overline{x}_1)^{\pm 1},\ldots,(\overline{x}_r)^{\pm 1},\frac{1}{\overline{d}}\ ]$-módulo livre e cíclico, ou seja,

$$\frac{\overline{A}_i}{\overline{A}_{i+1}} \simeq \overline{a}_i\ K[\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_r,\frac{1}{\overline{d}}\ ] \simeq K[\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_r,\frac{1}{\overline{d}}\ ] \simeq K[(\overline{x}_1)^{\pm 1},\ldots,(\overline{x}_r)^{\pm 1},\frac{1}{\overline{d}}\ ] \tag{3.11}$$

para algum $\overline{a}_i \in \overline{A}_i/\overline{A}_{i+1}$. Por um abuso de notação, continuaremos denotando por n o número de fatores da cadeia refinada. Observamos que depois do refinamento $\overline{A}_i$ não precisa ser $\mathbb{Z}[Q]$-submódulo de $\overline{A}$.

Seja $a_i \in \overline{A}_i$ a pré-imagem de $\overline{a}_i \in \overline{A}_i/\overline{A}_{i+1}$ (definido em (3.11)) pela projeção canônica $\overline{A}_i \twoheadrightarrow \overline{A}_i/\overline{A}_{i+1}$, para todo $i = 0, \ldots, n-1$.

Lema 3.12. *Existem $z_1, \ldots, z_{n-1} \in \mathbb{N}$ tais que*

$$\widetilde{A} := a_0(\frac{1}{d^{z_0}})\mathbb{Z}[\widetilde{Q}\ ] + a_1(\frac{1}{d^{z_1}})\mathbb{Z}[\widetilde{Q}\ ] + \ldots + a_{n-1}(\frac{1}{d^{z_{n-1}}})\mathbb{Z}[\widetilde{Q}\ ]$$

é um $\mathbb{Z}[\widetilde{Q}\ ]$-submódulo de $\overline{A}$ com $z_0 = 0$ e $\dfrac{\widetilde{A} \cap \overline{A}_i}{\widetilde{A} \cap \overline{A}_{i+1}} \simeq \overline{b}_i K[\widetilde{Q}\ ] \simeq K[\widetilde{Q}]$, $\forall\ i = 0, \ldots, n-1$.

Demonstração. Para quaisquer $z_1, \ldots, z_{n-1} \in \mathbb{N}$ é fácil ver que $\widetilde{A}$ é um $\mathbb{Z}[\widetilde{Q}\ ]$-submódulo de $\overline{A}$. A existência de $z_1, \ldots, z_{n-1} \in \mathbb{N}$ é demonstrada por indução.

Observe que

$$\frac{\widetilde{A} \cap \overline{A}_i}{\widetilde{A} \cap \overline{A}_{i+1}} \hookrightarrow \frac{\overline{A}_i}{\overline{A}_{i+1}} \quad \text{como } K[\widetilde{Q}\ ] - \text{módulos.}$$

Para $i = 0$ temos que

$$\frac{\widetilde{A} \cap \overline{A}_0}{\widetilde{A} \cap \overline{A}_1} = \frac{\widetilde{A}}{\widetilde{A} \cap \overline{A}_1} \simeq \frac{a_0\mathbb{Z}[\widetilde{Q}\ ] +\ \widetilde{A} \cap \overline{A}_1}{\widetilde{A} \cap \overline{A}_1} \simeq \overline{b}_0 K[\widetilde{Q}\ ] \ \text{ com } \ \overline{b}_0 = \overline{a}_0.$$

ou seja, $\dfrac{\widetilde{A} \cap \overline{A}_0}{\widetilde{A} \cap \overline{A}_1}$ é um $K[\widetilde{Q}]$-submódulo ciclíco de $\dfrac{\overline{A}_i}{\overline{A}_{i+1}} \simeq K[(\overline{x}_1)^{\pm 1}, \ldots, (\overline{x}_r)^{\pm 1}, \dfrac{1}{\overline{d}}\ ]$. Como, por definição, a ação de $K[\widetilde{Q}]$ é dada pela ação de $K[(\overline{x}_1)^{\pm 1}, \ldots, (\overline{x}_r)^{\pm 1}]$ então $\dfrac{\widetilde{A} \cap \overline{A}_0}{\widetilde{A} \cap \overline{A}_1}$ é um $K[\widetilde{Q}]$-módulo ciclíco livre, isto é,

$$\frac{\widetilde{A} \cap \overline{A}_0}{\widetilde{A} \cap \overline{A}_1} \simeq \overline{b}_0 K[\widetilde{Q}\ ] \simeq K[\widetilde{Q}\ ].$$

Suponha que $z_0 = 0$ e que existam $z_1, z_2, \ldots, z_{k-1} \in \mathbb{N}$, para algum $k \leq n-1$, tais que $(\widetilde{A} \cap \overline{A}_i)/(\widetilde{A} \cap \overline{A}_{i+1}) \simeq \overline{b}_i K[\widetilde{Q}\ ] \simeq K[\widetilde{Q}\ ]$, para todo $i = 1, \ldots, k-1$, e $z_k, \ldots, z_n$ tem algum valor arbitrário. Temos que

$$\widetilde{A} \cap \overline{A}_k = (\widetilde{A}_{k-1} \cap \overline{A}_k) + \widetilde{B}_k$$

com $\widetilde{A}_{k-1} := \displaystyle\sum_{j \leq k-1} a_j(\frac{1}{d^{z_j}})\mathbb{Z}[\widetilde{Q}\ ]$ e $\widetilde{B}_k := \displaystyle\sum_{j \geq k} a_j(\frac{1}{d^{z_j}})\mathbb{Z}[\widetilde{Q}\ ] \subseteq \overline{A}_k$. Daí, por (3.11),

$$\frac{\widetilde{A} \cap \overline{A}_k}{\widetilde{A} \cap \overline{A}_{k+1}} \ \text{ é o } \mathbb{Z}[\widetilde{Q}\ ] - \text{submódulo de } \ \frac{\overline{A}_k}{\overline{A}_{k+1}} \simeq \overline{a}_k K[\widetilde{Q}\ ]\left[\frac{1}{d}\right] \simeq K[\widetilde{Q}\ ]\left[\frac{1}{d}\right]$$

gerado pelas imagens de $\widetilde{A}_{k-1} \cap \overline{A}_k$ e $a_k(\frac{1}{d^{z_k}})$ em $\overline{A}_k/\overline{A}_{k+1}$. Como $\mathbb{Z}[\widetilde{Q}\,]$ é um anel Noetheriano e $\widetilde{A}_{k-1}$ é um $\mathbb{Z}[\widetilde{Q}\,]$-módulo finitamente gerado segue que $\widetilde{A}_{k-1} \cap \overline{A}_k$ é um $\mathbb{Z}[\widetilde{Q}\,]$-módulo finitamente gerado e sua imagem em $\overline{A}_k/\overline{A}_{k+1}$ também é um $K[\widetilde{Q}\,]$-módulo finitamente gerado. Logo, existe $s \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que a imagem de $\widetilde{A}_{k-1} \cap \overline{A}_k$ em $\overline{A}_k/\overline{A}_{k+1}$ está contida em $\overline{a}_k(\frac{1}{d^s})K[\widetilde{Q}\,]$. Escolhendo $z_k = s$ obtemos

$$\frac{\widetilde{A} \cap \overline{A}_k}{\widetilde{A} \cap \overline{A}_{k+1}} \simeq \overline{b}_k K[\widetilde{Q}] \quad \text{com} \quad \overline{b}_k = \overline{a}_k(\frac{1}{d^s}),$$

ou seja, $(\widetilde{A} \cap \overline{A}_k)/(\widetilde{A} \cap \overline{A}_{k+1})$ é um $K[\widetilde{Q}\,]$-submódulo cíclico não nulo de $\overline{a}_k K[\widetilde{Q}\,]\left[\frac{1}{d}\right]$ e portanto isomorfo a $K[\widetilde{Q}\,]$. ■

Lema 3.13. $\overline{A} = \widetilde{A}\left[\frac{1}{d}\right]$.

Demonstração. Note que, como $d \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_r]$ então d atua sobre $\widetilde{A}$ como um elemento de $\mathbb{Z}[\widetilde{Q}]$ e daí $\widetilde{A}d \subseteq \widetilde{A}$. Observamos que

$$\begin{aligned} \widetilde{A}\left[\frac{1}{d}\right] &:= \frac{a_0}{d^0}\,\mathbb{Z}[\widetilde{Q}\,]\left[\frac{1}{d}\right] + \frac{a_1}{d^{z_1}}\,\mathbb{Z}[\widetilde{Q}\,]\left[\frac{1}{d}\right] + \ldots + \frac{a_{n-1}}{d^{z_{n-1}}}\,\mathbb{Z}[\widetilde{Q}\,]\left[\frac{1}{d}\right] = \\ &= a_0\mathbb{Z}[\widetilde{Q}\,]\left[\frac{1}{d}\right] + a_1\mathbb{Z}[\widetilde{Q}\,]\left[\frac{1}{d}\right] + \ldots + a_{n-1}\mathbb{Z}[\widetilde{Q}\,]\left[\frac{1}{d}\right]. \end{aligned}$$

Finalmente (3.11) implica que $a_0, \ldots, a_{n-1}$ geram $\overline{A}$ como $\mathbb{Z}[\widetilde{Q}\,]\left[\frac{1}{d}\right]$-módulo. ■

Temos que $\widetilde{Q}$ é um grupo abeliano livre de posto finito e $\widetilde{A}$ é um $\mathbb{Z}[\widetilde{Q}]$-módulo finitamente gerado. Definindo, para cada $i = 1\ldots, n-1$, $\widetilde{A}_i := \widetilde{A} \cap \overline{A}_i$ e $\widetilde{A}_n = 0$ obtemos uma cadeia de $\mathbb{Z}[\widetilde{Q}\,]$-submódulos de $\widetilde{A}$

$$\widetilde{A} = \widetilde{A}_0 \supseteq \widetilde{A}_1 \supseteq \ldots \supseteq \widetilde{A}_{n-1} \supseteq \widetilde{A}_n = 0 \tag{3.12}$$

tal que, para $0 \leq k \leq n-1$, $\dfrac{\widetilde{A}_k}{\widetilde{A}_{k+1}} = \dfrac{\widetilde{A} \cap \overline{A}_i}{\widetilde{A} \cap \overline{A}_{i+1}} \simeq \overline{b}_i K[\widetilde{Q}\,] \simeq K[\widetilde{Q}\,]$. Logo, pelo Teorema 2.8, segue que

$$\widetilde{A} \rtimes \widetilde{Q} \hookrightarrow G_2^* := A_2^* \rtimes Q_2^*$$

sendo que G_2^* é um grupo metabeliano de tipo FP_m, A_2^* é uma localização de $\widetilde{A}$ (ou seja, $A_2^* = \widetilde{A}S^{-1}$ com S um subconjunto de $\mathbb{Z}[\widetilde{g}_1, \ldots, \widetilde{g}_r]\backslash\{0\}$ finitamente gerado que é um sistema multiplicativo e os elementos de S atuam como alguns elementos de $\mathbb{Z}[Q]$), a aplicação canônica de localização $i^S_{\widetilde{A}} : \widetilde{A} \to \widetilde{A}S^{-1} = A_2^*$ é injetiva e $\widetilde{Q}$ é um somando direto do grupo abeliano livre Q_2^*.

Seja

$$H_2^* := Q_2^* \times \langle t \rangle$$

com $\langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}$ um grupo abeliano livre cíclico. O grupo H_2^* atua sobre $A_2^* \left[\frac{1}{d}\right]$ da seguinte maneira: ação original de Q_2^* sobre A_2^* e t age como o elemento d. Defina

$$G_3^* := A_2^* \left[\frac{1}{d}\right] \rtimes H_2^*.$$

Note que

$$A_2^* \left[\frac{1}{d}\right] = \widetilde{A}S^{-1} \left[\frac{1}{d}\right] = \widetilde{A} \left[\frac{1}{d}\right] S^{-1} = \overline{A}S^{-1} \tag{3.13}$$

onde a penúltima igualdade segue do Lema 1.8 e dos fatos que S atua como um subconjunto do anel comutativo $\mathbb{Z}[Q]$ e $d \in \mathbb{Z}[Q]$ e a última igualdade segue do Lema 3.13.

O grupo metabeliano G_3^* é uma extensão HNN crescente com grupo base G_2^* (que é de tipo FP_m), subgrupos associados isomorfos a G_2^* e letra estável t. Portanto, pelo Lema 1.70,

$$G_3^* \text{ é de tipo } FP_m. \tag{3.14}$$

Recorde que A mergulha em $\overline{A} = A[\frac{1}{d}]$ como $\mathbb{Z}[Q]$-módulo. Então a aplicação canônica de localização $A \to A_2^*[\frac{1}{d}]$ é injetiva e a ação original de Q sobre A induz uma ação de Q sobre $\overline{A} = A[\frac{1}{d}]$ e conseqüentemente sobre $A_2^*[\frac{1}{d}]$. Como no Caso 1 as ações de Q e H_2^* sobre $A_2^*[\frac{1}{d}]$ comutam pois estas ações são dadas por elementos do anel comutativo $\mathbb{Z}[Q]$ e algumas localizações de tais ações.

O grupo metabeliano

$$\widetilde{G} := A_2^* \left[\frac{1}{c}\right] \rtimes (H_2^* \times Q) = G_3^* \rtimes Q$$

é uma extensão do grupo G_3^* por Q. Então, como Q é de tipo FP_∞ e G_3^* é de tipo FP_m (por 3.14) segue, pela Proposição 1.47, que

$$\widetilde{G} \text{ é de tipo } FP_m.$$

Finalmente, como A é um $\mathbb{Z}[Q]$-submódulo de $A_2^*[\frac{1}{d}]$ então o grupo $G = A \rtimes Q$ mergulha no grupo metabeliano $\widetilde{G}$ que é de tipo FP_m e a demonstração do Teorema 3.5 no Caso 2 está completa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] H. Åberg, 'Bieri- Strebel valuations (of finite rank)', *Proc. London Math. Soc.* (3) 52 (1986), 269-304.

[2] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. 1969.

[3] G. Baumslag, 'Subgroups of finitely presented metabelian groups', *J. Austral. Math. Soc.* 16 (1973), 98-110.

[4] M. Bestvina, N. Brady, 'Morse theory and finiteness properties of groups', *Invent. Math.* 129, n^o 3 (1997), 445-470.

[5] R. Bieri, *Homological dimension of discrete groups*, Queen Mary College Mathematics Notes (Queen Mary College, London, 1975).

[6] R. Bieri, J. Groves, 'Metabelian groups of type FP_∞ are virtually of type FP'. *Proc. London Math. Soc.* (3) 45 (1982), no.2, 365-384.

[7] R. Bieri, J. R. J. Groves, 'The geometry of the set of characters induced by valuations', *J. Reine Angew. Math.* 347 (1984), 168-195.

[8] R. Bieri, J. Harlander, 'On the FP_3-conjecture for metabelian groups', *J. London Math. Soc.* (2) 64 (2001), 595-610.

[9] R. Bieri, R. Strebel, 'Valuations and finitely presented metabelian groups', *Proc. London Math. Soc.* (3) 41 (1980), 439-464.

[10] R. Bieri, R. Strebel, 'A geometric invariant for modules over an abelian group', *J. Reine Angew. Math.* 322 (1981), 170–189.

[11] R. Bieri, R. Strebel, *Geometric invariants for discrete groups*, preprint-book, 240 pp.

[12] R. Bieri, W. D. Neumann, R. Strebel, 'A geometric invariant of discrete groups', *Invent. Math* 90 (1987), 451-477.

[13] W. A. Bogley, J. Harlander, 'Improving tameness for metabelian groups', *New York J. Math.* 10 (2004), 287-294.

[14] N. Bourbaki, *Commutative algebra*, Herman, Paris, 1972.

[15] K. S. Brown, 'Finiteness properties of groups', *J. Pure Appl. Algebra* 44 (1987), 45-75.

[16] K. S. Brown, *Cohomology of groups.* Graduate Texts in Mathematics, 87. Springer-Verlag, New York, 1994.

[17] D. E. Cohen, *Combinatorial group theory: a topological approach*, London Math. Soc. Student Texts 14, 1989.

[18] W. Dicks, M. J. Dunwoody, *Groups acting on graphs*, Cambridge University Press, 1989.

[19] J. R. J. Groves, D. H. Kochloukova, 'Embedding properties of metabelian Lie algebras and metabelian discretes groups' (a aparecer em *Journal of London Math. Soc. (2)*).

[20] D. H. Kochloukova, 'The FP_m-conjecture for a class of metabelian groups', *J. Algebra* 184 (1996), 1175-1204.

[21] D. H. Kochloukova, *The FP_m-conjecture for a class of metabelian groups and related topics*, PhD Thesis, Trinity College, Cambridge (1997).

[22] D. H. Kochloukova, 'Modules of type FP_2 over the integral group algebra of a metabelian group'. *J. Group Theory* 8 (2005), no. 5, 645-682.

[23] J. J. Rotman, *An introduction to homological algebra*, Pure and Applied Mathematics, 85. Academic Press, New York-London, 1979.

[24] J.P. Serre, *Trees*, Springer, Berlin, 1980.

[25] C.T.C. Wall, 'Finiteness conditions for CW-complexes', *Ann. of Math.* (2) 81 1965, 56–6