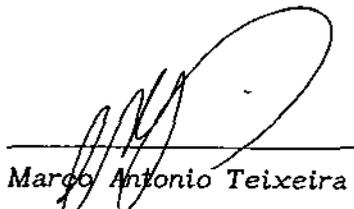


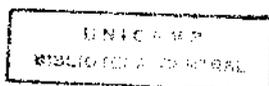
**BIFURCAÇÃO DE CAMPO DE VETORES LINEARES POR PARTES**

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. *Francisco Torres Cerda* e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 18 de dezembro de 1992.

  
Prof. Dr. *Marco Antonio Teixeira*

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação - IMECC

"BIFURCAÇÃO DE CAMPO DE VETORES LINEARES POR PARTES"

Francisco Torres Cerda  
Orientador: Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira

1992

## I N D I C E

Introdução .....	i
Capítulo I .....	1
Capítulo II .....	9
Forma Normal .....	9
Aplicação de Poincaré e Órbitas Periódicas.....	20
Órbitas Periódicas.....	24
Pontos de Interseção do Fluxo com $V_1$ .....	36
Capítulo III .....	42
Bifurcação de Órbitas Periódicas.....	42
Capítulo IV.....	61
Órbitas Homoclínicas em 0.....	61
Itinerários Dinâmicos de Órbitas Homoclínicas.....	63
Aplicação de Poincaré numa Órbita Homoclínica.....	67
Órbitas Homoclínicas em $P^+$ .....	72
Órbitas Heteroclínicas.....	76
Referências.....	81

## INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é desenvolver uma análise qualitativa do comportamento das soluções de um sistema de equações diferenciais ordinárias no  $\mathbb{R}^3$ , derivado de um circuito elétrico conhecido como "double scroll". Tal sistema consiste de uma equação diferencial no  $\mathbb{R}^3$ , linear por partes, cujas descontinuidades estão concentradas em dois planos paralelos e disjuntos,  $z = 1$  e  $z = -1$ , os quais dividem o espaço em três regiões onde o campo de vetores associado está bem definido e é regular.

O trabalho baseia-se nos resultados de Chua, Komuro e Matsumoto [CKM] e contém uma análise das bifurcações das órbitas periódicas (sela-nó, período duplo, Hopf) e das órbitas homoclínicas.

No capítulo I exibiremos a representação matemática do circuito e a expressão do campo de vetores associados.

Na seção 1 do capítulo II daremos uma caracterização do campo de vetores através duma matriz real de dimensão três e calcularemos os seus autovalores e autovetores associados. Na seção 2 determinaremos a aplicação de Poincaré associada as diversas órbitas periódicas, o conjunto de pontos nos quais o campo é tangente ao plano  $z = 1$  e as coordenadas dos pontos onde o campo atinge o plano  $z = 1$ . Temos que lembrar que a aplicação de Poincaré associada a cada trajetória periódica do campo é definida pela sua respectiva posição nas regiões determinadas pelos planos de descontinuidade  $z = 1$  e  $z = -1$ .

No capítulo III fazemos um estudo das bifurcações das órbitas periódicas do campo de vetores, tendo como principal resultado um teorema que caracteriza os diferentes tipos de bifurcações, baseado nos autovalores da derivada da aplicação de Poincaré.

No capítulo IV, damos os diversos itinerários de certas órbitas homoclínicas e heteroclínicas. Também obtemos a expressão da aplicação de Poincaré associada a uma órbita homoclínica no ponto crítico 0.

## CAPÍTULO I

O objetivo principal deste capítulo é exibir um modelo matemático obtido através de um circuito elétrico o qual possui um resistor não linear. Nas seções seguintes estudaremos o comportamento do campo de vetores associado a tal modelo.

Consideremos o circuito na Fig.1.1, que é chamado de "double scroll" o qual está governado pelo seguinte sistema de equações:

$$(1.a) \quad \begin{aligned} C_1 \frac{d v_{c_1}}{dt} &= G(v_{c_2} - v_{c_1}) - g(v_{c_1}) \\ C_2 \frac{d v_{c_2}}{dt} &= G(v_{c_1} - v_{c_2}) + i_L \\ L \frac{d i_L}{dt} &= -v_{c_2} \end{aligned}$$

onde:

$v_{c_1} \equiv$  voltagem passando pelo capacitor  $c_1$

$v_{c_2} \equiv$  voltagem passando pelo capacitor  $c_2$

$i_L \equiv$  a corrente através do indutor  $L$

$g(\cdot) \equiv$  a voltagem  $v$ /s a corrente característica do resistor não linear em Fig 1.2,

$G \equiv$  conductância

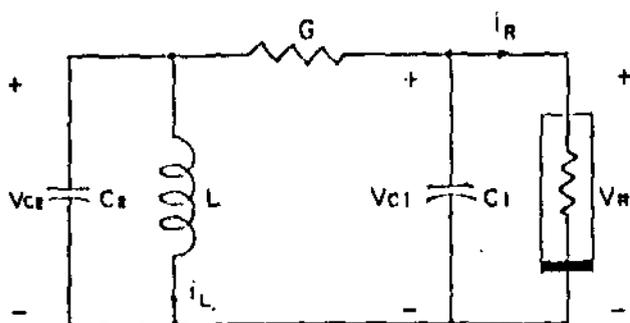


Fig 1.1 circuito "double scroll"

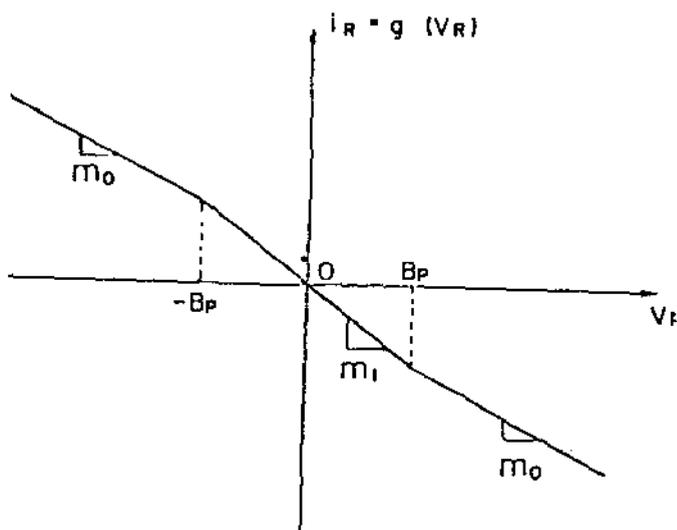


Fig 1.2 Resistor não linear

O sistema (1.a) pode-se transformar em:

$$\frac{dx}{d\tau} = \alpha \left\{ y - (b+1)x - \frac{1}{2} (a-b)(|x+1| - |x-1|) \right\}$$

$$\frac{dy}{d\tau} = x - y + z$$

$$\frac{dz}{d\tau} = -\beta y$$

onde

$$x = \frac{V_{c1}}{B_p}, \quad y = \frac{V_{c2}}{B_p}, \quad z = \frac{i_L}{B_p}, \quad J = \frac{t G}{c_2}$$

$$\alpha = \frac{c_2}{c_1}, \quad \beta = \frac{c_2}{LG^2}, \quad a = \frac{m_1}{G}, \quad b = \frac{m_0}{G}$$

De fato:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= \frac{dz}{di_L} \cdot \frac{di_L}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{B_p G} \cdot \frac{(-v_{c_2})}{L} \cdot \frac{C_2}{G} \\ &= \frac{-C_2}{LG^2} \frac{v_{c_2}}{B_p} = -\beta y \\ \frac{dy}{d\tau} &= \frac{dy}{dv_{c_2}} \cdot \frac{dv_{c_2}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{B_p} \cdot \left[ \frac{1}{C_2} \left[ G(v_{c_1} - v_{c_2}) + i_L \right] \right] \cdot \frac{C_2}{G} \\ &= \frac{1}{G B_p} \left[ G(v_{c_1} - v_{c_2}) + i_L \right] = \frac{1}{G B_p} \left[ G(x B_p - y B_p) + i_L \right] = x - y + \frac{i_L}{G B_p} = x - y + z \\ \frac{dx}{d\tau} &= \frac{dx}{dv_{c_1}} \cdot \frac{dv_{c_1}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{B_p} \left[ \frac{1}{C_1} G(v_{c_2} - v_{c_1}) - \frac{1}{C_1} g(v_{c_1}) \right] \cdot \frac{C_2}{G} = \\ &= \frac{C_2}{C_1} \frac{1}{B_p G} \left[ G(y B_p - x B_p) - g(v_{c_1}) \right] = \alpha \left[ y - x - \frac{1}{B_p G} g(v_{c_1}) \right] \end{aligned}$$

Neste ponto passamos a exibir a forma da função  $g(v_{c_1})$  tendo em consideração a figura 1.2.

*Cálculo de  $L_1$*

Sabemos que a equação da reta passando pela origem é:

$$y = m x$$

onde  $m$  é a inclinação.

Assim:

$$L_1 : g(v_{c_1}) = m_1 v_{c_1} \quad \text{com} \quad -B_p \leq v_{c_1} \leq B_p$$

Agora, o ponto  $p = (-B_p, y)$  pertence a reta  $L_1$ , portanto:

$$g(-B_p) = -m_1 B_p$$

então

$$p = \left( -B_p, -m_1 B_p \right), \quad -m_1 B_p > 0 \quad \text{pois} \quad m_1 < 0$$

A equação geral da reta é dada por

$$(1.b) \quad y = m x + n$$

por conseguinte

$$L_3 : g\left(\begin{matrix} v \\ c_1 \end{matrix}\right) = m_0 v_{c_1} + n$$

como o ponto  $p$  pertence a  $L_3$ , temos que:

$$g\left(\begin{matrix} -B_p \\ p \end{matrix}\right) = -m_0 B_p + n = -m_1 B_p$$

então:

$$n = \left( m_0 - m_1 \right) B_p$$

portanto:

$$L_3 : g\left(\begin{matrix} v \\ c_1 \end{matrix}\right) = m_0 v_{c_1} + \left( m_0 - m_1 \right) B_p \quad \text{com} \quad -\infty < v_{c_1} \leq -B_p$$

O ponto  $p' = \left( B_p, y' \right)$  pertence a  $L_1$ , portanto

$$g\left(\begin{matrix} B_p \\ p \end{matrix}\right) = m_1 B_p$$

então

$$p' = \left( B_p, m_1 B_p \right) \quad m_1 B_p < 0 \quad \text{pois} \quad m_1 < 0$$

Agora por (1.b) temos que

$$L_2 : g\left(\begin{matrix} v \\ c_1 \end{matrix}\right) = m_0 v_{c_1} + n'$$

Como o ponto  $p'$  pertence a  $L_2$ , temos que

$$g\left(\begin{matrix} B_p \\ p \end{matrix}\right) = m_0 B_p + n' = m_1 B_p$$

então

$$n' = (m_1 - m_0) B_p$$

portanto

$$L_2 : g(v_{c_1}) = m_0 v_{c_1} + (m_1 - m_0) B_p \quad \text{com } B_p \leq v_{c_1} < \infty$$

Assim, temos determinada a função  $g$  em seus intervalos de definição por:

$$g(v_{c_1}) = \begin{cases} m_0 v_{c_1} + (m_1 - m_0) B_p & -\infty < v_{c_1} \leq B_p \\ m_1 v_{c_1} & -B_p \leq v_{c_1} \leq B_p \\ m_0 v_{c_1} + (m_1 - m_0) B_p & B_p \leq v_{c_1} < \infty \end{cases}$$

seja

$$f(v_{c_1}) = m_0 v_{c_1} + \frac{1}{2} (m_1 - m_0) [ |v_{c_1} + B_p| - |v_{c_1} - B_p| ]$$

Agora vamos demonstrar que  $f(v_{c_1}) = g(v_{c_1})$  para qualquer  $v_{c_1} \in \mathbb{R}$ .

Seja  $r = -B_p - a$  com  $a > 0$ , isto é,  $r \in (-\infty, -B_p)$

$$\begin{aligned} f(-B_p - a) &= -m_0(B_p + a) + \frac{1}{2} (m_1 - m_0) [ |-B_p - a + B_p| - |-B_p - a - B_p| ] \\ &= -m_0(B_p + a) + \frac{1}{2} (m_1 - m_0) [ |-a| - |-(2B_p + a)| ] \\ &= -m_0(B_p + a) + \frac{1}{2} (m_1 - m_0) [ a - 2B_p - a ] \\ &= -m_0 B_p - m_0 a - m_1 B_p + m_0 B_p \\ &= -m_0 a - m_1 B_p \end{aligned}$$

$$g\left(-B_p - a\right) = -m_0\left(B_p + a\right) + m_0 B_p - m_1 B_p = -m_0 a - m_1 B_p$$

Portanto  $f = g$  em  $\left(-\infty, -B_p\right]$

Para o caso  $r = B_p + a$  onde  $a > 0$ , é análogo.

Portanto, temos que

$$f = g \text{ em } \left[B_p, \infty\right)$$

Agora, vamos provar que  $f = g$  em  $\left(-B_p, B_p\right)$ .

Separando em duas partes

i) no intervalo  $\left(-B_p, 0\right)$

ii) no intervalo  $\left(0, B_p\right)$

i) Seja  $a > 0$  tal que  $-B_p < -B_p + a < 0$

$$\begin{aligned} f\left(-B_p + a\right) &= m_0\left(-B_p + a\right) + \frac{1}{2}\left(m_1 - m_0\right)\left[\left|-B_p + a + B_p\right| - \left|-B_p + a - B_p\right|\right] \\ &= m_0\left(-B_p + a\right) + \frac{1}{2}\left(m_1 - m_0\right)\left(2a - 2B_p\right) \\ &= -m_0 B_p + m_0 a + m_1 a - m_1 B_p - m_0 a + m_0 B_p \\ &= m_1\left(-B_p + a\right) \end{aligned}$$

$$g\left(-B_p + a\right) = m_1\left(-B_p + a\right)$$

Portanto

$$f = g \text{ em } \left(-B_p, 0\right)$$

ii) Seja  $a > 0$  tal que  $0 < B_p - a < B_p$

$$\begin{aligned}
f(B_p - a) &= m_0(B_p - a) + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)[|B_p - a + B_p| - |B_p - a - B_p|] \\
&= m_0(B_p - a) + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)(2B_p - a - a) \\
&= m_0(B_p - a) + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)(2B_p - 2a) \\
&= m_0 B_p - m_0 a + m_1 B_p - m_1 a - m_0 B_p + m_0 a \\
&= m_1(B_p - a) \\
g(B_p - a) &= m_1(B_p - a)
\end{aligned}$$

Portanto

$$f = g \quad \text{em} \quad [0, B_p]$$

Obviamente as funções  $f$  e  $g$  são iguais nos pontos  $-B_p$ ,  $0$  e  $B_p$ , então concluímos que

$$f(r) = g(r) \quad \text{para todo } r \in \mathbb{R}.$$

Como  $v_{c_1} = x B_p$ , substituindo em  $f$ , temos:

$$\begin{aligned}
f(v_{c_1}) &= m_0 x B_p + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)[|x B_p + B_p| - |x B_p - B_p|] \\
&= m_0 x B_p + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)[|B_p||x + 1| - |B_p||x - 1|] \\
&= m_0 x B_p + \frac{B_p}{2}(m_1 - m_0)[|x + 1| - |x - 1|] \\
&= B_p \left\{ m_0 x + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)[|x + 1| - |x - 1|] \right\}
\end{aligned}$$

Logo temos:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= \alpha \left[ y - x - \frac{1}{GB_p} \left( B_p \left\{ m_0 x + \frac{1}{2} (m_1 - m_0) [ |x+1| - |x-1| ] \right\} \right) \right] \\ &= \alpha \left[ y - x - \frac{m_0 x}{G} + \frac{1}{2} \left( \frac{m_1}{G} - \frac{m_0}{G} \right) [ |x+1| - |x-1| ] \right] \\ &= \alpha \left[ y - (b+1)x + \frac{1}{2} (a-b) [ |x+1| - |x-1| ] \right]\end{aligned}$$

Por conseguinte, o sistema fica:

$$\frac{dx}{d\tau} = \alpha \left[ y - (b+1)x + \frac{1}{2} (a-b) [ |x+1| - |x-1| ] \right]$$

$$\frac{dy}{d\tau} = x - y + z$$

$$\frac{dz}{d\tau} = -\beta y$$

## CAPITULO II

### 2.1. Forma normal

O objetivo desta seção é caracterizar um campo de vetores sobre o  $\mathbb{R}^3$  linear por partes, através de uma conveniente representação matricial. A grosso modo subdividindo o espaço em regiões e sobre cada uma delas o campo é contínuo, fazemos um estudo sobre a dinâmica do campo através do fluxo associado.

Antes apresentaremos alguns resultados e definições básicas.

#### 2.1.1 Definição

$$\text{Seja } f(x) = \begin{cases} Ax + q & x \in R_+ \\ Bx & x \in R_0 \\ Ax - q & x \in R_- \end{cases}$$

onde

$$R_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle \alpha, x \rangle| \leq \varepsilon\}$$

$$R_{\pm} = \{x \in \mathbb{R}^n : \pm \langle \alpha, x \rangle - \varepsilon > 0\}$$

um campo de vetores linear por partes  $n$  - dimensional numa 3 - região. Então  $f(x)$  é próprio se não existe um subespaço  $E \subset \mathbb{R}^n$  o qual é paralelo a  $U = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle \alpha, x \rangle = \varepsilon\}$  e invariante sob a ação de  $B$ .

#### 2.1.2. Observação:

No caso em que este campo está definido numa 2-região então

$$f(x) = \begin{cases} Ax + q & x \in R_+ \\ Bx & x \in R_- \end{cases}$$



multiplicidades.

Então

$$a_k = (-1)^{k-1} \sum u_{i_1} u_{i_k}, \quad 1 \leq k \leq n$$

onde  $\sum$  percorre todos os  $i_1, \dots, i_k$  tal que  $i_1 < \dots < i_k$

iii) Sejam  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}$  os autovalores de  $C$ . Incluindo suas multiplicidades, temos que:

$$b_k = (-1)^{k-1} \sum v_{i_1} \dots v_{i_k}, \quad 1 \leq k \leq n$$

onde  $\sum$  percorre todos os  $i_1, \dots, i_k$  tal que  $i_1 < \dots < i_k$  então

$$c_k = b_k - a_k + \sum_{i=1}^{k-1} a_i c_{k-i}, \quad 1 \leq k \leq n$$

iv) Se existe  $C^{-1}$  e  $Q = -C^{-1} q \in \mathbb{R}^n$  então (a) escreve-se como

$$x_f(x) = f(x) = \begin{cases} C(x-Q) & x \in \mathbb{R}_+ \\ S x & x \in \mathbb{R}_- \end{cases}$$

$$e \quad Q = \left( 1 - \frac{a_n}{b_n}, \frac{c_1 a_n}{b_n}, \dots, \frac{c_{n-1} a_n}{b_n} \right)^T$$

**Demonstração:** Ref [2]

Primeiro fixamos um sistema de coordenadas que chamaremos de canônico em  $\mathbb{R}^3$ .

Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo de vetores contínuo por partes tal que  $f(-x) = -f(x)$ , isto é, invariante por uma simetria ímpar.

No restante deste trabalho, vamos supor que  $f(x)$  é um campo de vetores próprio.

2.1.4 Definição:

Dois campos de vetores  $f$  e  $g$  são ditos linearmente conjugados se existe uma matriz  $H$  não singular tal que

$$H \circ f = g \circ H$$

2.1.5 Definição:

Define-se os plano  $V_1$  e  $V_{-1}$  como

$$V_{\pm 1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \langle \alpha, x \rangle = \pm 1 \right\} \quad (\text{Fig. 1.a})$$

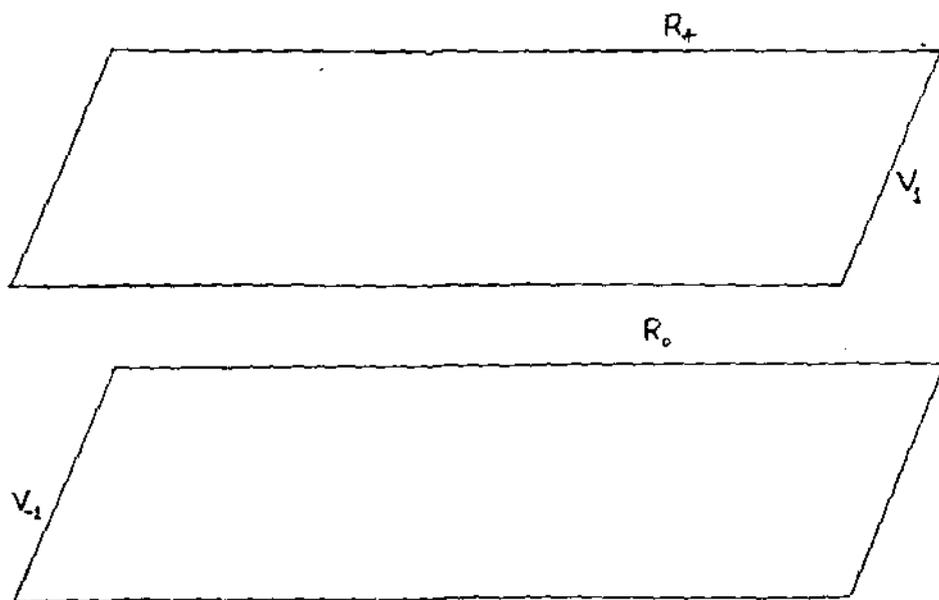
onde  $\alpha = (1, 0, 0)^T$

Mais ainda, separando  $V_1$  e  $V_{-1}$  em duas partes:

$$V_1^+ = \left\{ x \in V_1 : \langle \alpha, Ax \rangle > 0 \right\} \quad V_1^- = \left\{ x \in V_1 : \langle \alpha, Ax \rangle < 0 \right\}$$

$$V_{-1}^+ = \left\{ x \in V_{-1} : \langle -\alpha, Ax \rangle > 0 \right\} \quad V_{-1}^- = \left\{ x \in V_{-1} : \langle -\alpha, Ax \rangle < 0 \right\}$$

A região que tem como fronteira  $V_1$  e  $V_{-1}$  é chamada de região intermediária e denotada por  $R_0$ .



$R_-$

Fig. 2.1

Planos de fronteira da região intermediária

2.1.6. Proposição:

Seja  $f$  possuindo autovalores  $u_1, u_2, u_3$  na região intermediária e  $v_1, v_2, v_3$  em outra região. Então  $f$  está unicamente determinado por:

$$f(x) = A x + \frac{1}{2} p \left\{ |\langle \alpha, x \rangle - 1| + (\langle \alpha, x \rangle - 1) \right\} + \frac{1}{2} p \left\{ |\langle \alpha, x \rangle + 1| - (\langle \alpha, x \rangle + 1) \right\}$$

$$= \begin{cases} B(x - P) & x \in R_+ \\ A x & x \in R_0 \\ B(x + P) & x \in R_- \end{cases}$$

onde

$$R_{\pm} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \pm \langle \alpha, x \rangle - 1 > 0 \right\}$$

$$R_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : |\langle \alpha, x \rangle| \leq 1 \right\}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad p = \begin{bmatrix} 1 - \frac{a_3}{b_3} \\ \frac{c_1 a_3}{b_3} \\ \frac{c_2 a_3}{b_3} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} c_1 & 1 & 0 \\ c_2 & 0 & 1 \\ c_3 + a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix} = A + p \alpha^T$$

$$a_1 = u_1 + u_2 + u_3 \quad a_2 = -\left( u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_1 \right) \quad a_3 = u_1 u_2 u_3$$

$$b_1 = v_1 + v_2 + v_3 \quad b_3 = -\left( v_1 v_2 + v_2 v_3 + v_3 v_1 \right) \quad b_3 = v_1 v_2 v_3$$

$$c_1 = b_1 - a_1 \quad c_2 = b_2 - a_2 + c_1 a_1 \quad c_3 = b_3 - a_3 + a_2 c_1 + a_2 c_2$$

e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é o produto interno usual.

**Demonstração:**

Seja  $n = 3$  em (a) e (b) e tomando  $\varepsilon = 1$  no teorema 1.3 e pela simetria do campo  $f$ , temos:

$$(1.b) \quad f(x) = \begin{cases} Cx + q & x \in R_+ \\ Sx & x \in R_0 \\ Cx - q & x \in R_- \end{cases}$$

onde

$$R_{\pm} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \pm (\langle \alpha, x \rangle - 1) > 0 \right\}, \quad \alpha = (1, 0, 0)^T$$

$$R_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : |\langle \alpha, x \rangle| \leq 1 \right\}, \quad q = -\left( c_1, c_2, c_3 \right)^T$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & 1 & 0 \\ c_2 & 0 & 1 \\ c_3 + a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

Agora tomando  $p = \left( c_1, c_2, c_3 \right)^T \in \mathbb{R}^3$  então por (i) teorema 1.3 temos:

$$f(x) = Sx + \frac{1}{2} p \left\{ |\langle \alpha, x \rangle - 1| + \left( \langle \alpha, x \rangle - 1 \right) \right\} + \frac{1}{2} p \left\{ |\langle \alpha, x \rangle + 1| - \left( \langle \alpha, x \rangle + 1 \right) \right\}$$

Por (ii) do teorema 1.3, temos que se  $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{C}$  são autovalores de  $S$  então

$$a_k = (-1)^{k-1} \sum u_{i_1} u_{i_2} u_{i_3}$$

onde  $\sum$  percorre todos os  $i_1, i_2, i_3$  tal que  $i_1 < i_2 < i_3$ .

Por conseguinte temos:

$$a_1 = \sum u_{i_1} = u_1 + u_2 + u_3$$

$$a_2 = - \sum u_{i_1} u_{i_2} = - \left( u_{12} + u_{13} + u_{23} \right)$$

$$a_3 = \sum u_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} = u_{123}$$

Por (iii) do teorema 1.3 temos que se  $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C}$  são autovalores de  $C$  então

$$b_k = (-1)^{k-1} \sum v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3}, \quad 1 \leq k \leq 3$$

onde  $\sum$  percorre todos os  $i_1, i_2, i_3$  tal que  $i_1 < i_2 < i_3$ .

$$e \quad c_k = b_k - a_k + \sum_{l=1}^{k-1} a_l c_{k-l}, \quad 1 \leq k \leq 3$$

Portanto, temos:

$$b_1 = \sum v_{i_1} = v_1 + v_2 + v_3$$

$$b_2 = \sum v_{i_1} v_{i_2} = - \left( v_1 v_2 + v_1 v_3 + v_2 v_3 \right)$$

$$b_3 = \sum v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3} = v_1 v_2 v_3$$

$$c_1 = b_1 - a_1$$

$$c_2 = b_2 - a_2 + \sum_{l=1}^1 a_l c_{2-l} = b_2 - a_2 + a_1 c_1$$

$$c_3 = b_3 - a_3 + a_1 c_2 + a_2 c_1$$

Suponha que existe  $C^{-1}$  matriz real tal que  $Q = -C^{-1}q \in \mathbb{R}^3$ .

Agora vamos determinar o vetor  $Q$ .

$$\text{Temos que } \det C = a_3 + c_3 - c_1 a_2 - c_2 a_1$$

Logo

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} -a_2 & -a_1 & 1 \\ a_3 + c_3 - c_2 a_1 & c_1 a_1 & -c_1 \\ c_2 a_2 & c_3 + a_3 - c_1 a_2 & -c_2 \end{pmatrix}$$

Por conseguinte

$$\begin{aligned} Q = -c^{-1}q &= \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} -a_2 & -a_1 & 1 \\ a_3 + c_3 - c_2 a_1 & c_1 a_1 & -c_1 \\ c_2 a_2 & c_3 + a_3 - c_1 a_2 & -c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} -a_2 C_1 - a_1 C_2 + C_3 \\ a_3 C_1 \\ a_3 C_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por (iii) do teorema 1.3, temos que

$$b_3 = c_3 + a_3 - a_1 c_2 - a_2 c_1 \text{ então } \det C = b_3$$

Portanto

$$Q = \left( 1 - \frac{a_3}{b_3}, c_1 \frac{a_3}{b_3}, c_2 \frac{a_3}{b_3} \right)^T$$

Agora

$$CQ = \begin{pmatrix} c_1 & 1 & 0 \\ c_2 & 0 & 1 \\ c_3 + a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{a_3}{b_3} \\ c_1 \frac{a_3}{b_3} \\ c_2 \frac{a_3}{b_3} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ d \end{pmatrix}$$

onde

$$(2.b) \quad d = (C_3 + a_3) \left( 1 - \frac{a_3}{b_3} \right) + (C_1 a_2 + C_2 a_1) \frac{a_3}{b_3}$$

Como  $c_3 = b_3 - a_3 + a_2 c_1 + a_1 c_2$  então

$$a_2 c_1 + a_1 c_2 = c_3 + a_3 - b_3$$

Logo substituindo em (1.c) temos que

$$d = \left( c_3 + a_3 \right) \left( 1 - \frac{a_3}{b_3} \right) + \left( c_3 + a_3 - b_3 \right) \frac{a_3}{b_3} = c_3$$

Por conseguinte

$$C Q = p = -q$$

Logo, substituindo em (1.b), temos

$$f(x) = \begin{cases} C x - C Q & x \in R_+ \\ S x & x \in R_0 \\ C x + C Q & x \in R_- \end{cases} = \begin{cases} C (x - Q) & x \in R_+ \\ S x & x \in R_0 \\ C(x + Q) & x \in R_- \end{cases}$$

então concluímos que

$$f(x) = A x + \frac{1}{2} p \left\{ |\langle \alpha, x \rangle - 1| + \langle \alpha, x \rangle - 1 \right\} + \frac{1}{2} p \left\{ |\langle \alpha, x \rangle + 1| - \langle \alpha, x \rangle + 1 \right\}$$

$$= \begin{cases} B(x - P) & x \in R_+ \\ A x & x \in R_0 \\ B(x + P) & x \in R_- \end{cases}$$

Tomando  $B = C$ ,  $A = S$  e  $Q = P$  nos resultados acima

### 2.1.7 Definição:

Para cada autovalor real  $u_1$  na região intermediária  $R_0$ , define-se os pontos  $C_1 \in V_1$  por

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_1^2 \end{bmatrix}$$

**2.1.8 Lema:**

O vetor  $\overrightarrow{OC_1}$  é um autovetor de A associado ao autovetor  $u_1$ , com  $i = 1, 2, 3$ .

**Prova:**

Para o caso  $i = 1$ , temos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 v_1 \\ u_1 v_2 \\ u_1 v_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} v_2 &= u_1 v_1 \\ v_3 &= u_1 v_2 \\ a_3 v_1 + a_2 v_2 + a_1 v_3 &= u_1 v_3 \end{aligned}$$

então

$$v_2 = u_1 v_1$$

$$v_3 = u_1^2 v_1$$

logo

$$C_1 = (1, u_1, u_1^2)$$

Para os casos  $i = 2$  e  $3$  a prova é análoga.

$$C_2 = (1, u_2, u_2^2)$$

$$C_3 = (1, u_3, u_3^2)$$

Assim,

$\overrightarrow{OC_1} = (1, u_1, u_1^2)$  é um autovetor de A associado ao autovalor  $u_1$ , com  $i = 1, 2, 3$ .

**2.1.9 Definição**

Similarmente, para cada autovalor real  $v_1$  na outra região, isto é, na região  $R_+$  ou  $R_-$ , define-se os pontos:

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{v_1 a_3}{b_3} \\ \frac{v_1 (v_1 - c_1) a_3}{b_3} \end{bmatrix}$$

### 2.1.10 Lema

O vetor  $\overrightarrow{P D_1}$  é um autovetor de  $B$  associado ao autovalor  $v_1$ , com  $i = 1, 2, 3$ .

**Prova**

Para o caso  $i = 1$  temos:

$$\begin{bmatrix} c_1 & 1 & 0 \\ c_2 & 0 & 1 \\ c_3 + a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 u_1 \\ v_1 u_2 \\ v_1 u_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 u_1 + u_2 &= v_1 u_1 \\ c_2 u_1 + u_3 &= v_1 u_2 \\ (c_3 + a_3)u_1 + a_2 u_2 + a_1 u_3 &= v_1 u_3 \end{aligned}$$

então

$$u_2 = (v_1 - c_1)u_1$$

$$u_3 = v_1 u_2 - c_2 u_1 = v_1 (v_1 - c_1)u_1 - c_2 u_1$$

$$= (v_1 (v_1 - c_1) - c_2)u_1$$

Logo

$$v_1 = \left( 1, (v_1 - c_1), v_1 (v_1 - c_1) - c_2 \right) \equiv \left( \frac{a_3}{b_3}, \frac{(v_1 - c_1) a_3}{b_3}, \frac{(v_1 (v_1 - c_1) - c_2) a_3}{a_3} \right)$$

Para os casos  $i = 2, 3$  resultados análogos:

$$v_2 = \left( \frac{a_3}{b_3}, \frac{(v_2 - c_1) a_3}{b_3}, \frac{(v_2 (v_2 - c_1) - c_2) a_3}{b_3} \right)$$

$$V_3 = \left( \frac{a_3}{b_3}, \frac{(v_3 - c_1)}{b_3}, \frac{(v_3(v_3 - c_1) - c_2)a_3}{b_3} \right)$$

Agora

$$\overrightarrow{PD_1} = \left( \frac{a_3}{b_3}, \frac{(v_1 - c_1) a_3}{b_3}, \frac{(v_1(v_1 - c_1) - c_2) a_3}{b_3} \right)$$

Logo

$V_i = \overrightarrow{PD_1}$  são os autovetores de B associados aos autovalores  $v_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

## 2.2 Aplicação de Poincaré e Órbitas Periódicas

Nesta seção analisaremos as órbitas periódicas do campo. Determinaremos as expressões das aplicações de Poincaré associadas às diversas órbitas periódicas da equação. Portanto devemos considerar o itinerário de cada órbita periódica do sistema.

### 2.2.1. Tempo de retorno

Sejam A e B duas matrizes regulares:

a) Para  $x \in V_1^+$ , suponha que existem  $y, z$  e  $V_1^-$  tal que:

$$y = e^{-At} x \quad \text{onde } t = \inf \left\{ t' > 0 : |\langle e_1, e^{-At'} x \rangle| = 1 \right\}$$

$$z = e^{BS}(x - P) \quad \text{onde } S = \inf \left\{ S' > 0 : \langle e_1, e^{BS'}(x - P) + P \rangle = 1 \right\}$$

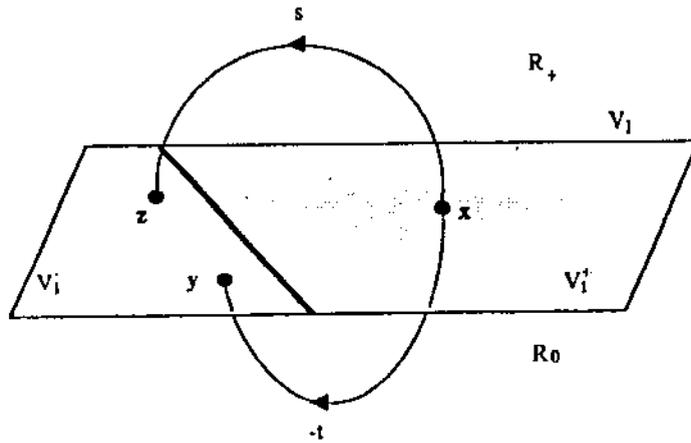


Fig 2.2

Tempo de retorno ao plano  $V_1$

O tempo de retorno de coordenadas de  $x \in V_1$ ,  $i = 1, -1$ , é o mínimo tempo em que o campo atinge novamente o plano  $V_1$  quando é aplicado neste ponto. Neste caso é o par  $(t, S)$ .

Desde que  $\dot{A}w = B(w - P)$  para todo  $w \in V_1$ , por continuidade do campo de vetores em  $R_0$ , temos:

$$\begin{aligned} z &= e^{bs}(x - P) = A^{-1}A \left( e^{bs}(x - P) + P \right) = A^{-1} B e^{bs} (x - P) \\ &= A^{-1} e^{bs} B(x - P) = A^{-1} e^{A^{-1}bs} x = e^{Cs} \end{aligned}$$

onde  $C = A^{-1}B A$

Agora, como  $x, y$  e  $z \in V_1$

$$\alpha^T e^{At} x = 1, \quad \alpha^T x = 1, \quad \alpha^T e^{Cs} x = 1$$

ou equivalentemente:

$$\left[ e_1 \alpha^T e^{-At} + e_2 \alpha^T + e_3 \alpha^T e^{Cs} \right] x = h_1$$

onde

$$e_1 = [1,0,0]^T, \quad e_2 = [0,1,0]^T, \quad e_3 = [0,0,1]^T, \quad h_1 = [1,1,1]^T$$

Se  $\left[ e_1 \alpha^T e^{-at} + e_2 \alpha^T + e_3 \alpha^T e^{cs} \right]$  é regular, denotamos sua

matriz inversa por:

$$K(t,s) = \left[ e_1 \alpha^T e^{-at} + e_2 \alpha^T + e_3 \alpha^T e^{cs} \right]^{-1}$$

então temos:

$$x = K(t,s)h_1$$

b) Para  $x \in V_1^+$ , suponha que existem  $y \in V_{-1}^-$  e  $z \in V_1^-$  tal que (Fig 2.b)

$$y = e^{-At} x \quad \text{onde} \quad t = \inf \left\{ t' > 0 : |\langle \alpha, e^{-At'} x \rangle| = -1 \right\}$$

$$z = e^{bs} (x - P) + P \quad \text{onde} \quad s = \inf \left\{ s' > 0 : \langle \alpha, e^{bs'} (x-P) + P \rangle = 1 \right\}$$

O par  $(t,s)$  é dito tempo de retorno de coordenadas de  $x$  pela mesma razão acima.

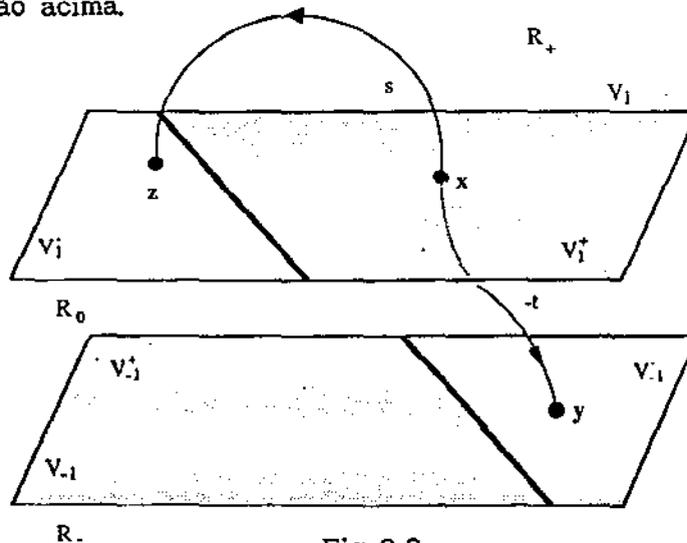


Fig 2.3

Trajétória de  $V_1^+$  até  $V_{-1}^-$

Desde que  $Aw = B(w - P)$  para todo  $w \in V_1$ , por continuidade do campo de vetores, temos

$$\begin{aligned} z &= A^{-1}A \left( e^{bs}(x - P) + P \right) = A^{-1}B e^{bs}(x - P) \\ &= A^{-1}e^{bs}B(x - P) = A^{-1}e^{bs}Ax \\ &= e^{cs}x \end{aligned}$$

onde

$$C = A^{-1}BA$$

Posto que  $x, z \in V_1$  e  $y \in V_{-1}$

$$\alpha^T e^{-At} x = -1, \quad \alpha^T x = 1, \quad \alpha^T e^{cs} x = 1$$

ou equivalentemente:

$$\left[ e_1 \alpha^T e^{-At} + e_2 \alpha^T + e_3 \alpha^T e^{cs} \right] x = h_2$$

onde  $h_2 = (-1, 1, 1)$

Se  $\left[ e_1 \alpha^T e^{-At} + e_2 \alpha^T + e_3 \alpha^T e^{cs} \right]$  é regular, denotamos sua

inversa por:

$$K(t,s) = \left[ e_1 \alpha^T e^{-At} + e_2 \alpha^T + e_3 \alpha^T e^{cs} \right]^{-1}$$

então temos

$$x = K(t,s)h_2$$

### 2.2.2 Orbitas Periódicas

A caracterização das órbitas periódicas dependem de como as trajetórias atingem os plano  $V_1$  e  $V_{-1}$ , as quais determinam os seus itinerários.

a) *Tipo 1: Itinerário:*  $V_1 \rightarrow V_1 \rightarrow V_1 \rightarrow V_1$  (Fig 2.4)

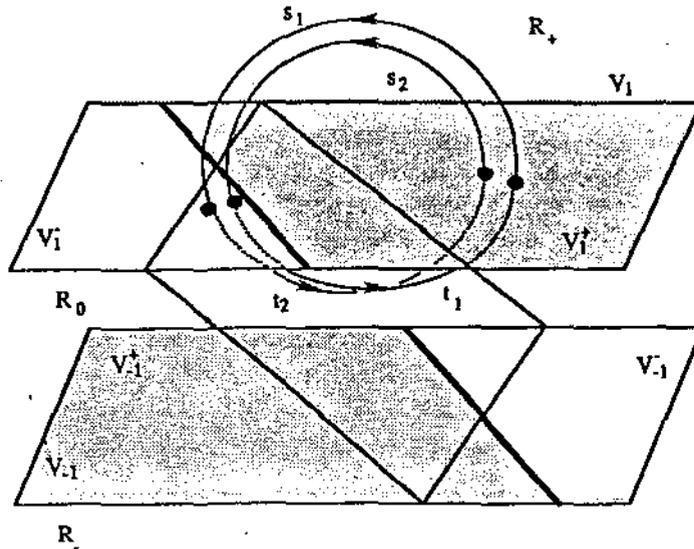


Fig 2.4 Itinerário Fechado em  $V_1$

$$x = K(t_1, s_1)h_1$$

$$y = K(t_2, s_2)$$

$$(i) \quad e^{Cs_1} K(t_1, s_1)h_1 = e^{-At_2} K(t_2, s_2)h_1$$

$$(ii) \quad e^{Cs_2} K(t_2, s_2)h_1 = e^{-At_1} K(t_1, s_1)h_1$$

As condições do tempo de retorno são

$$|\alpha^T e^{-At} K(t_1, s_1) h_1| \neq 1 \quad \text{para todo } t \text{ com } 0 < t < t_1$$

$$\alpha^T e^{Cs} K(t_1, s_1) h_1 \neq 1 \quad \text{para todo } s \text{ com } 0 < s < s_1$$

para  $i = 1, 2$

Agora

para (i) temos

$$e^{At_2} e^{Cs_1} x = y$$

para (ii) temos

$$e^{At_1} e^{Cs_2} y = x$$

Logo:

$$e^{At_2} e^{Cs_1} e^{At_1} e^{Cs_2} y = y$$

então a aplicação de Poincaré associada a esta órbita é:

$$\pi = e^{At_2} e^{Cs_1} e^{At_1} e^{Cs_2}$$

Logo a aplicação de Poincaré é determinada pela composição de todos os fluxos associados a esta órbita, e o período das órbitas é  $t_1 + s_1 + t_2 + s_2$ , isto é, é uma órbita do período dois.

b) *Tipo 2: itinerário:*  $V_1 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_{-1} \longrightarrow V_{-1} \longrightarrow V_1$   
(Fig 2.5)

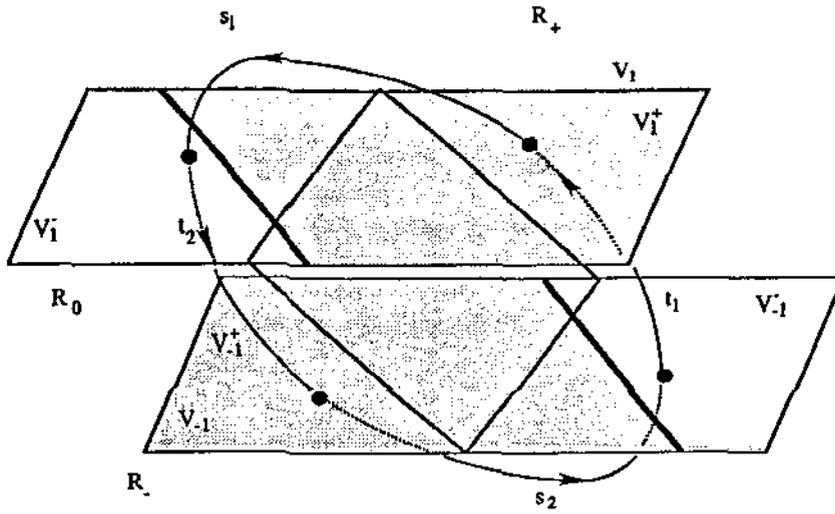


Fig 2.5 Itinerário Conectando  $V_1$  com  $V_{-1}$

$$x = K(t_1, s_1)h_2$$

$$y = K(t_2, s_2)h_1$$

$$e^{Cs_1} K(t_1, s_1)h_2 = -e^{-At_2} K(t_2, s_2)h_2$$

$$e^{Cs_2} K(t_2, s_2)h_2 = -e^{-At_1} K(t_1, s_1)h_2$$

As condições do tempo de retorno são:

$$|\alpha^T e^{-At} K(t_1, s_1)h_2| \neq 1 \quad \text{para todo } t \text{ com } 0 < t < t_1$$

$$\alpha^T e^{Cs} K(t_1, s_1)h_2 \neq 1 \quad \text{para todo } s \text{ com } 0 < s < s_1$$

com  $i = 1, 2$ .

Estas condições significam que estes pontos são hiperbólicos, isto é, que a aplicação de Poincaré não tem autovalores com módulo 1, ou seja,  $|D\pi(x)| \neq 1$ .

A aplicação de Poincaré como no caso anterior, é a composição dos fluxos, e o ponto  $x$  é um ponto periódico de período  $t_1 + s_1 + t_2 + s_2$ .

c) *Tipo 3: itinerário:*  $V_1 \rightarrow V_1 \rightarrow V_1 \rightarrow V_1 \rightarrow V_{-1} \rightarrow V_{-1} \rightarrow V_1$   
(Fig 2.6)

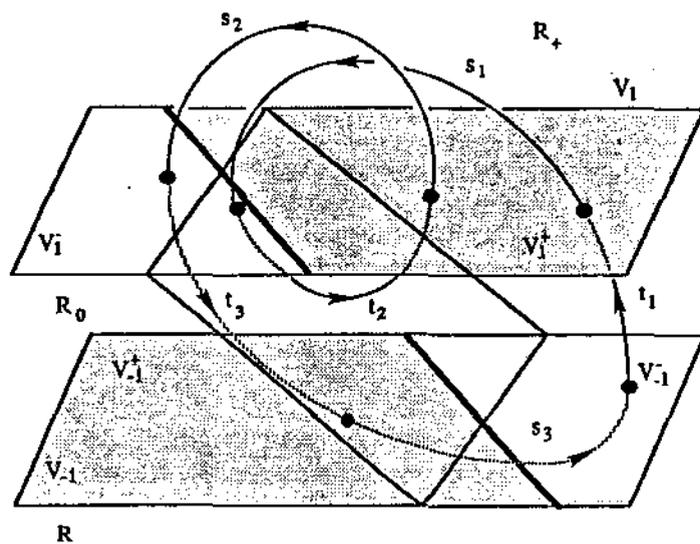


Fig 2.6 Itinerário conectando  $V_1$  e  $V_{-1}$

$$\begin{aligned} x &= K(t_1, s_2)h_2 \\ y &= K(t_2, s_2)h_1 \\ z &= K(t_3, s_3)h_2 \end{aligned}$$

$$(i) \quad e^{Cs_1} K(t_1, s_1)h_2 = e^{Cs_2} K(t_2, s_2)h_1$$

$$(ii) \quad e^{Cs_2} K(t_2, s_2)h_2 = -e^{-At_3} K(t_3, s_3)h_2$$

$$(iii) \quad e^{Cs_3} K(t_3, s_3) h_2 = -e^{-At_1} K(t_2, s_1) h_2$$

Com as condições de retorno:

$$|\alpha^T e^{-At} K(t_i, s_i) h_j| \neq 1 \quad \text{para todo } t \text{ com } 0 < t < t_i$$

$$\alpha^T e^{Cs} K(t_i, s_i) h_j \neq 1 \quad \text{para todo } s \text{ com } 0 < s < s_i$$

quando  $j = 1$  ( $i = 2$ ) ;  $j = 2$  ( $i = 1, 3$ )

Agora

$$\text{por (i) temos} \quad e^{At_2} e^{Cs_1} x = y$$

$$\text{por (ii) temos} \quad e^{At_3} e^{Cs_2} y = -z$$

$$\text{por (iii) temos} \quad e^{At_1} e^{Cs_3} z = -x$$

então

$$e^{At_2} e^{Cs_1} e^{At_1} e^{Cs_3} e^{At_3} e^{Cs_2} y = y$$

logo a aplicação de Poincaré associada a esta órbita é

$$\pi = e^{At_2} e^{Cs_1} e^{At_1} e^{Cs_3} e^{At_3} e^{Cs_2}$$

Assim:

esta órbita tem período  $s_1 + t_1 + s_2 + t_2 + s_3 + t_3$ , ie,  $x$  é um ponto 3-periódico.

Seja  $f$  um campo de vetores linear em  $\mathbb{R}^3$  com um par de autovalores complexos conjugados  $\sigma \pm iw$  e um autovalor real  $\gamma$ .

Seja  $\mathcal{U}$  um plano não paralelo aos autoespaços fora da origem, gerado pelos autovalores acima. Denotamos por:

$$(2c) \quad L = \left\{ x \in U : f(x) \parallel U \right\}$$

o conjunto de pontos de tangência entre  $f$  e  $U$ .

### 2.2.3 Proposição.

Sejam  $f$  e  $U$  com as condições dada na definição acima, então existe um sistema de coordenadas tal que  $L$  é uma reta em  $U$ .

Para provar esta proposição precisamos o seguinte:

### 2.2.4 Lema.

Seja  $f$  um campo de vetores em  $\mathbb{R}^3$  com  $\sigma \pm iw$  e  $\gamma$  seus autovalores, então existe um sistema de coordenadas  $x' = (x', y', z')$  em  $\mathbb{R}^3$  tal que  $f$  é transformado em sua forma de Jordan real e a equação para  $U$  é:

$$U = \left\{ (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 : x' + z' = 1 \right\}$$

**Prova.**

Escolhendo  $e_a, e_b, e_c$  em  $\mathbb{R}^3$  tais que

- i)  $e_a$  é a parte real do autovetor complexo associado a  $\sigma \pm iw$
- ii)  $e_b$  é a parte imaginária negativa do autovetor complexo associado a  $\sigma \pm iw$
- iii)  $e_c$  é o autovetor associado a  $\gamma$

Seja  $Q = \begin{bmatrix} e_a & e_b & e_c \end{bmatrix}$  então  $J = Q^{-1} M Q$

transforma qualquer matriz  $3 \times 3$  com autovalores  $\sigma \pm iw$  e  $\gamma$  em uma forma de Jordan real, ie,

$$J = \begin{pmatrix} \sigma & -w & 0 \\ w & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Logo neste sistema de coordenadas  $x'' = Q^{-1}x$ ,  $f$  assume a seguinte forma:

$$f(x'') = J x''$$

onde

$$x'' = (x'', y'', z'')$$

Mais ainda,  $\nu$  é representada por:

$$\nu : \ell x'' + m y'' + n z'' = d$$

onde

$\ell^2 + m^2 \neq 0$ ,  $n \neq 0$  e  $d \neq 0$  pois  $\nu$  não é paralelo aos autoespaço

e não passa pela origem.

Neste novo sistema de coordenadas  $x''$ , os três vetores  $e_a$ ,  $e_b$  e  $e_c$  são transformados em três eixos ortonormais, o autoespaço gerado por  $e_a$  e  $e_b$  é transformado no  $x''$ - $y''$ -plano e o autovetor  $e_c$  é transformado no eixo  $z''$ .

O plano  $\nu$  é transformado no plano  $\nu''$  que também não passa pela origem e não é paralelo ao plano  $x'' - y''$ .

Nosso passo seguinte é rodar  $\nu''$  tal que ele forme um ângulo de  $45^\circ$  com o plano  $x'' - y''$  e intercepte este plano em  $x'' = 1$ . Isto pode ser obtido escolhendo ainda um outro sistema de coordenadas  $x' = (x', y', z')$  tal que os três vetores ortonormais  $e'_a = (1, 0, 0)$ ,  $e'_b = (0, 1, 0)$  e  $e'_c = (0, 0, 1)$  no sistema de coordenadas  $x'$  são transformados em  $e_1, e_2, e_3$ , possuindo as propriedades geométricas das transformações acima; sejam:

- i) fazendo  $e_2$  paralelo a  $\nu''$
- ii)  $e_1 \perp e_2$  tal que a ponta de  $e_1$  pertence a  $\nu''$
- iii)  $e_1$  e  $e_2$  pertencem ao plano  $x'' - y''$
- iv)  $|e_1| = |e_2|$
- v)  $e_3 = (0, 0, d_3)$ , onde  $d_3$  é escolhido tal que a ponta de  $e_3$  pertence a  $\nu''$ .

Assim, com estas propriedades temos definidos unicamente  $e_1$ ,  $e_2$  e  $e_3$  como se segue:

$$e_1 = \frac{d}{\ell^2 + m^2} (\ell, m, 0)$$

$$e_2 = \frac{d}{\ell^2 + m^2} (-m, \ell, 0)$$

$$e_3 = \frac{d}{n} (0, 0, 1)$$

De fato;

$$\begin{aligned} \text{Sejam } e_1 &= (a, b, c) \\ e_2 &= (a', b', c') \end{aligned}$$

$$\text{iii) } \Rightarrow c = c' = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Logo } e_1 &= (a, b, 0) \\ e_2 &= (a', b', 0) \end{aligned}$$

$$\text{i) } \Rightarrow 1) \ell a' + m b' = 0$$

$$\text{ii) } \Rightarrow 2) a a' + b b' = 0$$

$$\text{iii) } \Rightarrow 3) \ell a + m b = d$$

$$\text{iv) } \Rightarrow 4) a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$$

$$1) \Rightarrow a' = -\frac{mb}{\ell}$$

$$3) \Rightarrow a = \frac{d - mb}{\ell}$$

Logo substituindo em (2) temos:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d - mb}{\ell} \right) \left( \frac{-mb'}{\ell} \right) + bb' = 0 \\ \Rightarrow & \frac{-dmb'}{\ell^2} + \frac{m^2 b b'}{\ell^2} + bb' = 0 \quad \text{para } b' \neq 0 \\ \Rightarrow & \frac{-dm}{\ell^2} + \frac{m^2 b}{\ell^2} + b = 0 \\ \Rightarrow & b(\ell^2 + m^2) = dm \\ \Rightarrow & b = \frac{dm}{\ell^2 + m^2} \\ a = & \frac{d}{\ell} - \frac{dm^2}{\ell(\ell^2 + m^2)} = \frac{(\ell^2 + m^2)d - dm^2}{\ell(\ell^2 + m^2)} \\ & = \frac{\ell^2 d + m^2 d - dm^2}{\ell(\ell^2 + m^2)} = \frac{\ell d}{\ell^2 + m^2} \end{aligned}$$

Logo

$$e_1 = \frac{d}{\ell^2 + m^2} (\ell, m, 0)$$

agora, substituindo a e b em (4) temos

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \ell^2}{(\ell^2 + m^2)^2} + \frac{d^2 m^2}{(\ell^2 + m^2)^2} = a'^2 + b'^2 \\ \Rightarrow & a'^2 + b'^2 = \frac{d^2}{\ell^2 + m^2} \end{aligned}$$

de (1) temos que

$$a' = -\frac{mb'}{\ell}$$

Logo substituindo acima, temos:

$$\begin{aligned} \frac{m^2 b'^2}{\ell^2} + b'^2 &= \frac{d^2}{\ell^2 + m^2} \\ \Rightarrow (\ell^2 + m^2) b'^2 &= \frac{d^2 \ell^2}{\ell^2 + m^2} \\ \Rightarrow b'^2 &= \frac{d^2 \ell^2}{(\ell^2 + m^2)^2} \\ \Rightarrow b' &= \frac{d\ell}{\ell^2 + m^2} \end{aligned}$$

Agora:

$$\begin{aligned} a' &= \frac{-m\ell d}{\ell(\ell^2 + m^2)} \\ \Rightarrow a' &= \frac{-md}{\ell^2 + m^2} \end{aligned}$$

Logo

$$e_2 = \frac{d}{\ell^2 + m^2} (-m, \ell, 0)$$

por (v) temos que

$$\begin{aligned} [0, 0, d_3] &\in U'' \\ \Rightarrow n d_3 &= d \Rightarrow d_3 = d/n \end{aligned}$$

Logo  $z'' = d/n$

então  $e_3 = \frac{d}{n} (0, 0, 1)$

É claro que a relação entre  $x'$  e  $x''$  é dada por  $x' = Q_1^{-1} x''$

onde  $Q_1 = [e_1, e_2, e_3]$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} \frac{d\ell}{\ell^2+m^2} & \frac{-dm}{\ell^2+m^2} & 0 \\ \frac{dm}{\ell^2+m^2} & \frac{d\ell}{\ell^2+m^2} & 0 \\ 0 & 0 & d/n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = Q_1^{-1} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix}$$

onde

$$Q_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d(\ell^2+m^2)} & \frac{m}{d(\ell^2+m^2)} & 0 \\ \frac{-m}{d(\ell^2+m^2)} & \frac{\ell}{d(\ell^2+m^2)} & 0 \\ 0 & 0 & n/d \end{bmatrix}$$

Logo temos:

$$f(x') = Q_1^{-1} f(x'')$$

$$= Q_1^{-1} J x''$$

$$= Q_1^{-1} J Q_1 x'$$

$$= Q_1^{-1} \begin{pmatrix} \sigma & -w & 0 \\ w & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} Q_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f(x') = \begin{pmatrix} \sigma & -w & 0 \\ w & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

e

$$U : (\ell, m, n) \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = d$$

$$\Rightarrow (\ell, m, n) Q_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = d$$

$$\Rightarrow (d, 0, d) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = d$$

$$\Rightarrow d x' + d z' = d$$

$$\Rightarrow x' + z' = 1$$

#### Prova da Proposição 2.4

Pelo lema 2.5 temos que existe um sistema de coordenadas  $X' = (x', y', z')$  em  $\mathbb{R}^3$  tal que  $f$  pode ser escrito como:

$$f(x') = \begin{bmatrix} \sigma & -w & 0 \\ w & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Mais ainda, nesse sistema de coordenadas temos:

$$(2d) \quad U : \left\{ (x', y', z') : x' + z' = 1 \right\}$$

Para cada  $x \in L$  por (2c) temos que  $\langle f(x), h \rangle = 0$  onde  $h = (1, 0, 1)^t$  é um vetor normal a  $U$ , daí:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f(x'), h \rangle = \langle (\sigma x' - w y', w x' + \sigma y', \gamma z') \rangle, (1, 0, 1) \\ &= \sigma x' - w y' + \gamma z' \end{aligned}$$

e

$$y' = \frac{\sigma}{w} x' + \frac{\gamma}{w} z'$$

Como  $z' = x' - 1$  (por (2d)) e definindo  $\sigma_1 = \frac{\sigma}{w}$  e  $\gamma_1 = \frac{\gamma}{w}$ , temos definida a reta  $L$  através da equação

$$y' = \sigma_1 x' + \gamma_1 (x' - 1)$$

Concluimos então que o conjunto dos pontos de tangência entre o campo  $f$  e o plano  $\nu$  é a reta  $L$  definida acima.

### 2.2.5 Pontos de interseção do fluxo em $V_1$

Nesta seção exibiremos as coordenadas do fluxo definido na região intermediária ao passar através do plano  $V_1$ , isto é, consideraremos somente o caso em que o campo de vetores está definido na região  $R_0$ .

O campo de vetores na região  $R_0$  é dado por  $f(x) = Ax$  onde  $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ .

Então o sistema de equações diferenciais associado a este campo de vetores é:

$$\dot{x} = Ax$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

Os autovalores desta matriz são

$$\lambda_1 = u_1, \quad \lambda_2 = \sigma + iw, \quad \lambda_3 = \sigma - iw$$

com

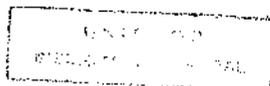
$$u_1 > 0, \quad \sigma < 0$$

Agora vamos resolver este sistema

Para  $\lambda_1 = u_1$ , temos o seu autovetor associado  $v$  é solução

de:

$$(A - u_1 I)v = 0, \quad v = (v_1, v_2, v_3)$$



Assim

$$\begin{aligned} -u_1 v_1 + v_2 &= 0 \\ -u_1 v_2 + v_3 &= 0 \\ a_{31} v_1 + a_{22} v_2 + a_{13} v_3 &= 0 \end{aligned}$$

e por conseguinte

$$\begin{aligned} v_2 &= u_1 v_1 \\ v_3 &= u_1^2 v_1 \end{aligned}$$

Logo

$$v = \begin{pmatrix} 1, u_1, u_1^2 \end{pmatrix}$$

Fazendo o mesmo para o autovalor  $\lambda_2 = \sigma + iw$  temos que o autovetor  $w$  associado a  $\lambda_2$  é solução de

$$\left( A - (\sigma + iw)I \right) w = 0 \quad , \quad w = \begin{pmatrix} w_1, w_2, w_3 \end{pmatrix}$$

Então temos

$$\begin{aligned} -(\sigma + iw)w_1 + w_2 &= 0 \\ -(\sigma + iw)w_2 + w_3 &= 0 \end{aligned}$$

e por conseguinte

$$\begin{aligned} w_2 &= (\sigma + iw)w_1 \\ w_3 &= (\sigma + iw)^2 w_1 \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} w &= \begin{pmatrix} 1, \sigma + iw, \sigma^2 - w^2 + 2\sigma w i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1, \sigma, \sigma^2 - w^2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0, w, 2\sigma w \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Agora as soluções procuradas são:

$$\varphi_1(t) = e^{u_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_1^2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2(t) = e^{\sigma t} \begin{pmatrix} \cos(tw) \\ \sigma \cos(tw) - w \operatorname{sen}(tw) \\ (\sigma^2 - w^2) \cos(tw) - 2 \sigma w \operatorname{sen}(tw) \end{pmatrix}$$

$$\varphi_3(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(tw) \\ \sigma \operatorname{sen}(tw) + w \cos(tw) \\ (\sigma^2 - w^2) \operatorname{sen}(tw) + 2 \sigma w \cos(tw) \end{pmatrix}$$

A solução do sistema passando por  $(x_0, y_0, z_0)$  é da forma

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{u_1 t} x_0 + e^{\sigma t} \cos(tw) y_0 + e^{\sigma t} \operatorname{sen}(tw) z_0 \\ e^{u_1 t} u_1 x_0 + e^{\sigma t} (\sigma y_0 + w z_0) \cos(tw) + e^{\sigma t} (\sigma z_0 - w y_0) \operatorname{sen}(tw) \\ e^{u_1 t} u_1^2 x_0 + e^{\sigma t} ((\sigma^2 - w^2) y_0 + 2\sigma w z_0) \cos(tw) + e^{\sigma t} ((\sigma^2 - w^2) z_0 - 2\sigma w y_0) \operatorname{sen}(tw) \end{cases}$$

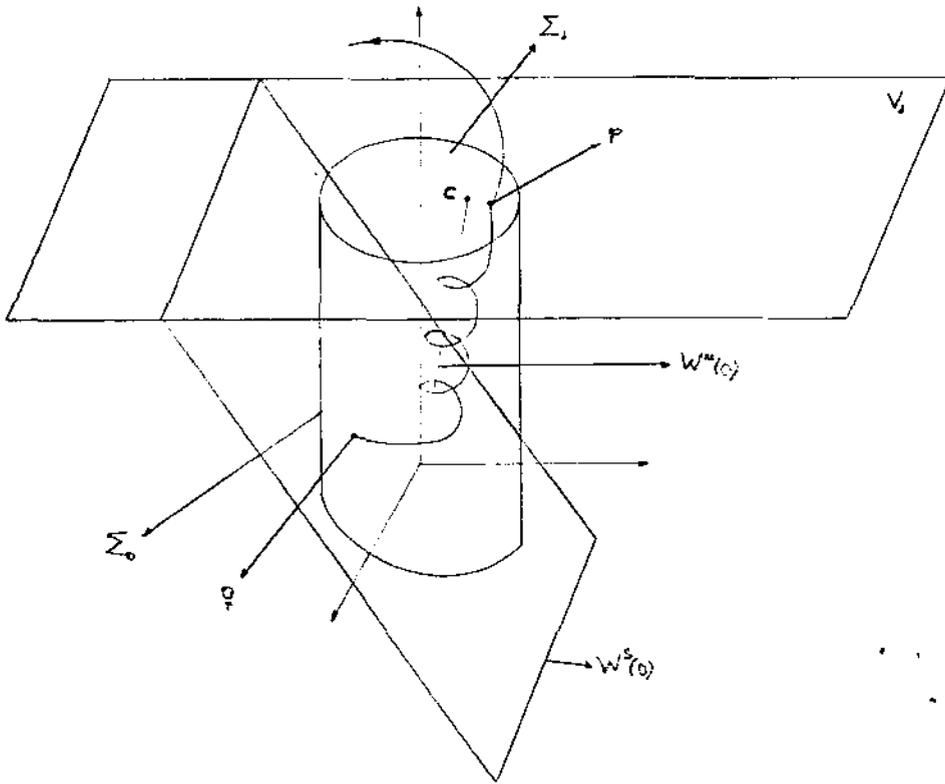


Fig 2.7 Conjuntos  $\Sigma_0$  e  $\Sigma_1$  definidos em  $\mathbb{R}^3$

Neste ponto determinaremos as coordenadas do ponto  $p$  (Fig.2.6) que é o ponto no qual o campo definido em  $\mathbb{R}_0$  atinge o plano  $V_1$ .

Seja a terceira coordenada do fluxo  $\varphi(t)$

$$F(x, y, z, t) = e^{u_1 t} u_1^2 x + e^{\sigma t} \left[ (\sigma^2 - w^2) y + 2\sigma w z \right] \cos tw + e^{\sigma t} \left[ (\sigma^2 - w^2) z - 2\sigma w y \right]$$

Suponha que existe  $t^* = t^*(x, y, z) > 0$  tal que  $F(x, y, z, t^*) = 1$

Logo temos:

$$\varphi_{t^*}(x,y,z) = \begin{cases} e^{u_1 t^*} x + e^{\sigma t^*} \cos(t^* w) y + e^{\sigma t^*} \operatorname{sen}(t^* w) z \\ e^{u_1 t^*} u_1 x + e^{\sigma t^*} (\sigma y + w z) \cos(t^* w) + e^{\sigma t^*} (\sigma z - w y) \operatorname{sen}(t^* w) \\ 1 \end{cases}$$

O plano  $M = W^s(0)$  é dado por:

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 0\}$$

Definimos os seguintes conjuntos em  $\mathbb{R}^3$

$$\Sigma_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r_0^2, -x < z < 1\}, \quad r_0 \text{ fixo}$$

$$\Sigma_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < r_0^2, z = 1\}$$

Logo o ponto  $q$  definido em  $\Sigma_0$  é

$$q = (r_0, \theta, z) \quad -\pi < \theta < \pi, \quad -x < z < 1$$

Nota. o ponto  $q$  está escrito em coordenadas cilíndricas

Agora vamos determinar uma aplicação que está definida do conjunto  $\Sigma_0$  até  $\Sigma_1$ , isto é, uma aplicação definida num subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  em um subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ .

Fazendo a mudança de variáveis

$$x = r_0 \cos \theta$$

$$y = r_0 \operatorname{sen} \theta$$

onde  $r_0$  é fixo e  $\theta = \operatorname{tn}^{-1}(y/x)$  é tal que  $-\pi < \theta < \pi$  e portanto a aplicação procurada é dada pelas duas primeiras coordenadas do fluxo calculado em  $t^*$  e substituindo  $x$  e  $y$  temos:

$$\psi : \Sigma_0 \longrightarrow \Sigma_1$$

$$\begin{aligned} \psi(\theta, z) &= \left( r_0 e^{u_1 t^*} \cos \theta + r_0 e^{\sigma t^*} \cos(t^* w) \operatorname{sen} \theta + e^{\sigma t^*} \operatorname{sen}(t^* w) z, r_0 e^{u_1 t^*} u_1 \cos \theta + \right. \\ &\quad \left. + e^{\sigma t^*} \left( \sigma r_0 \operatorname{sen} \theta + w z \right) \cos(t^* w) + e^{\sigma t^*} \left( \sigma z - w r_0 \operatorname{sen} \theta \right) \operatorname{sen}(t^* w) \right) \\ &= \left( \varphi_1(\theta, z), \varphi_2(\theta, z) \right) \end{aligned}$$

Assim, o ponto  $p$  é dado por:

$$p = \left( \psi_1(\theta, z), \psi_2(\theta, z), 1 \right)$$

### CAPITULO III

#### 3.1. Bifurcação de Órbitas Periódicas

O objetivo desta seção é estudar as bifurcações do nosso sistema através da existência de órbitas periódicas  $\gamma$  onde a derivada da transformação de Poincaré associada, possui autovalores no círculo unitário.

O principal resultado é a obtenção de condições sobre o sistema para caracterizar os diferentes modelos de bifurcação.

A seguir daremos uma conveniente expressão para a derivada da transformação de Poincaré associada a uma órbita periódica do sistema.

##### 3.1.1 Proposição.

Seja  $x$  um ponto periódico, com período  $t_1+s_1+t_2+s_2+t_3+s_3$ . Então a derivada da aplicação de Poincaré  $\pi$  em  $x$  é dada por:

$$D\pi(x) = \begin{bmatrix} I - \frac{Ax\alpha^T}{\alpha^T Ax} \end{bmatrix} e^{B_s^n} e^{A_t^n} \dots e^{B_s^1} e^{A_t^1}$$

Para provar esta proposição usaremos o seguinte:

##### 3.1.2 Lema.

Seja  $\pi : V_1^-(y_3) \rightarrow V_1^-$  a aplicação de Poincaré associada ao ponto periódico  $y_3$ , onde  $V_1^-(y_3)$  é uma vizinhança de  $y_3$  em  $V_1^-$ . Então a derivada de  $\pi$  em  $y_3$  é :

$$D\pi(y_3) : E \rightarrow E$$

onde

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle \alpha, x \rangle = 0\}$$

é dada por:

$$D\pi(y_3) = \left[ I - \frac{A y_3 \alpha^T}{\alpha^T A y_3} \right] e^{B\beta_3} e^{At_3} e^{B\beta_2} e^{At_2} e^{B\beta_1} e^{At_1}$$

Demonstração.

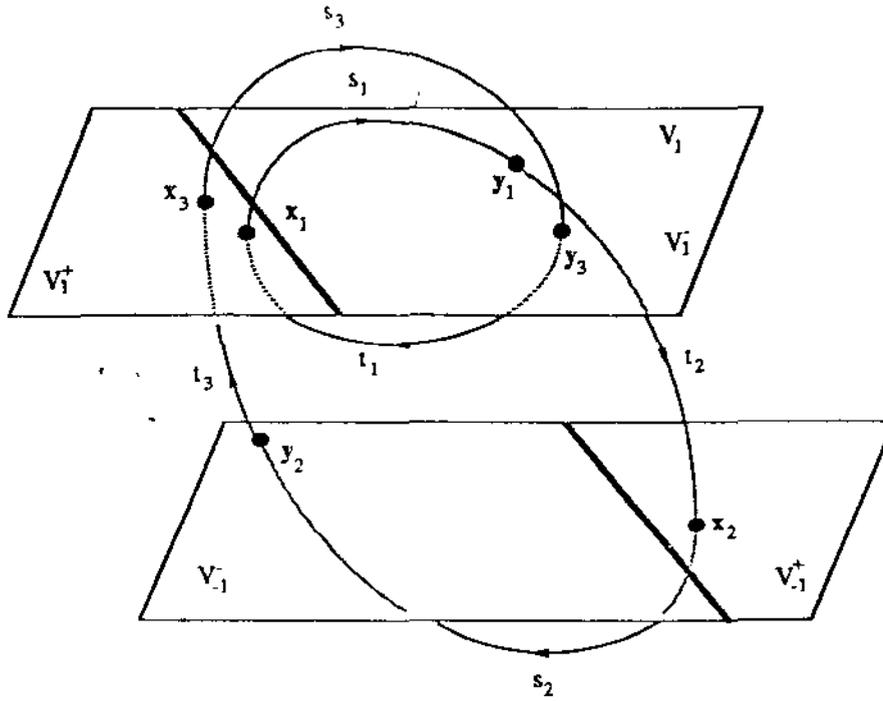


Fig 3.1

Órbita Fechada em que se baseia a demonstração do lema

Fórmula similar é obtida para outros tipos de órbitas, mostraremos esta em cinco passos:

Passo 1: órbita  $V_1^- \longrightarrow V_1^+$  (ou  $V_{-1}^- \longrightarrow V_{-1}^+$ )

Seja  $x_0 \in V_1^-$ . Suponha que existe  $t_0 > 0$  tal que

$$y_0 = e^{At_0} x_0 \in V_1^+ \quad e$$

$$|\alpha^T e^{At} x_0| \neq 1 \quad \text{para todo } t \text{ com } 0 < t < t_0$$

$$\text{Seja} \quad F(x,t) = \alpha^T e^{At} x - 1$$

$$F(x_0, t_0) = \alpha^T e^{At_0} x_0 - 1 = \alpha^T y_0 - 1 = 0 \quad \text{pois } y_0 \in V_1^+$$

$$\left. \frac{\partial F(x,t)}{\partial t} \right|_{(x_0, t_0)} = \alpha^T A e^{At} x \Big|_{(x_0, t_0)} = \alpha^T A e^{At_0} x_0 = \alpha^T A y_0 = \langle \alpha, A y_0 \rangle \neq 0$$

pois  $y_0 \in V_1^+$ .

Então pelo teorema da função implícita, existem uma vizinhança  $V_1^-(x_0)$  de  $x_0$  em  $V_1^-$  e uma função:

$$t : V_1^-(x_0) \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que:

$$(3.a) \quad F(x, t(x)) = 0 \quad e \\ t(x_0) = t_0$$

agora derivando 3.a, e calculando em  $x = x_0$ , temos:

$$\frac{\partial F(x, t(x))}{\partial x} + \frac{\partial F(x, t(x))}{\partial t} Dt(x) \Big|_{x = x_0} = 0$$

$$Dt(x_0) = - \frac{\partial F(x_0, t(x_0))}{\partial x} \left[ \frac{\partial F(x_0, t(x_0))}{\partial t} \right]^{-1}$$

$$= -\alpha^T e^{At_0} \left[ \alpha^T A y_0 \right]^{-1}$$

Define-se

$$f: V_1^-(x_0) \longrightarrow V_1^+$$

$$x \longrightarrow f(x) = e^{At(x)} x$$

$f$  é chamada a aplicação de retorno de  $V_1^-$  em  $V_1^+$ .

Derivando  $f$  e calculando em  $x = x_0$ , temos:

$$Df(x) \Big|_{x = x_0} = A e^{At(x)} Dt(x) x + e^{At(x)} \Big|_{x = x_0}$$

Logo:

$$\begin{aligned} Df(x_0) &= -A e^{At_0} \left[ \alpha^T A y_0 \right]^{-1} \alpha^T e^{At_0} x_0 + e^{At_0} \\ &= -A y_0 \alpha^T \left[ \alpha^T A y_0 \right]^{-1} e^{At_0} + e^{At_0} \\ &= \frac{-A y_0 \alpha^T}{\alpha^T A y_0} e^{At_0} + e^{At_0} \end{aligned}$$

Assim:

$$Df(x_0) = \left[ I - \frac{Ay_0 \alpha^T}{\alpha^T Ay_0} \right] e^{At_0}$$

Para  $V_{-1}^- \longrightarrow V_{-1}^+$  o estudo é análogo, trocando  $\alpha$  por  $-\alpha$

Passo 2: órbita  $V_1^- \longrightarrow V_1^+$  (ou  $V_{-1}^- \longrightarrow V_{-1}^+$ )

Seja  $x_0 \in V_1^-$ , suponha que existe  $t_0 > 0$  tal que

$$y_0 = e^{At_0} x_0 \in V_{-1}^+ \text{ e}$$

$$|\alpha^T e^{At} x_0| \neq 1 \text{ para todo } t \text{ com } 0 < t < t_0.$$

então define-se

$$G(x,t) = \alpha^T e^{At} x + 1$$

como

$$G(x_0, t_0) = \alpha^T e^{At_0} x_0 + 1 = \alpha^T y_0 + 1 = 0 \text{ pois } y_0 \in V_{-1}^+$$

$$\frac{\partial G(x,t)}{\partial t} \Big|_{(x_0, t_0)} = \alpha^T A e^{At} x \Big|_{(x_0, t_0)} = \alpha^T A e^{At_0} x_0 = \alpha^T Ay_0 = \langle \alpha, Ay_0 \rangle \neq 0$$

pois  $y_0 \in V_{-1}^+$ .

Então pelo teorema da função implícita, existem uma vizinhança  $V_1^-(x_0)$  de  $x_0$  em  $V_1^-$  e uma função

$$t : V_1^-(x_0) \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que:

$$(3.b) \quad G(x, t(x)) = 0 \quad e$$

$$t(x_0) = t_0$$

Agora, derivando 3.b, e calculando em  $x = x_0$  temos:

$$\frac{\partial G(x, t(x))}{\partial x} + \frac{\partial G(x, t(x))}{\partial t} \cdot Dt(x) \Big|_{x = x_0} = 0$$

então

$$\alpha^T e^{At_0} + \alpha^T Ay_0 Dt(x_0) = 0$$

Logo

$$Dt(x_0) = -[\alpha^T Ay_0]^{-1} \alpha^T e^{At_0}$$

Define-se

$$g : V_1^-(x_0) \longrightarrow V_{-1}^+ \\ x \longrightarrow g(x) = e^{At(x)} x$$

$g$  é chamada aplicação de retorno de  $V_1^-$  em  $V_{-1}^+$ .

$$Dg(x_0) = A e^{At_0} x_0 Dt(x_0) + e^{At_0} \\ = -\frac{Ay_0 \alpha^T}{\alpha^T Ay_0} e^{At_0} + e^{At_0}$$

Assim:

$$Dg(x_0) = \left[ I - \frac{Ay_0 \alpha^T}{\alpha^T Ay_0} \right] e^{At_0}$$

**Passo 3:** órbita  $V_1^+ \longrightarrow V_1^-$  (ou  $V_{-1}^+ \longrightarrow V_{-1}^-$ )

Seja  $x_0 \in V_1^+$ , suponha que existe  $s_0 > 0$  tal que

$$y_0 = e^{Bs_0}(x_0 - P) + P \in V_1^- \quad e$$

$$\alpha^T \left\{ e^{Bs}(x_0 - P) + P \right\} \neq 1 \quad \text{para todo } s \text{ com } 0 < s < s_0$$

Então define-se:

$$H(x,t) = \alpha^T \left\{ e^{Bt}(x - P) + P \right\} - 1$$

como

$$H(x_0, s_0) = \alpha^T \left\{ e^{Bs_0}(x_0 - P) + P \right\} - 1 = \alpha^T y_0 - 1 = 0 \quad \text{pois } y_0 \in V_1^-$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(x,t)}{\partial t} \Big|_{(x_0, s_0)} &= \alpha^T B e^{Bt}(x - P) \Big|_{(x_0, s_0)} = \alpha^T B e^{Bs_0}(x_0 - P) \\ &= \alpha^T B(y_0 - P) = \alpha^T A y_0 = \langle \alpha, A y_0 \rangle \neq 0 \text{ pois } y_0 \in V_1^- \end{aligned}$$

Então pelo teorema da função implícita existem uma vizinhança  $V_1^+(x_0)$  de  $x_0$  em  $V_1^+$  e uma função

$$s : V_1^+(x_0) \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$(3.c) \quad \begin{aligned} H(x, s(x)) &= 0 \quad e \\ s(x_0) &= s_0 \end{aligned}$$

Logo, derivando 3.c, e calculando em  $x = x_0$ , temos:

$$\begin{aligned} Ds(x_0) &= - \left[ \frac{\partial H(x_0, s_0)}{\partial t} \right]^{-1} \frac{\partial H(x_0, s_0)}{\partial x} \\ &= - \left[ \alpha^T A y_0 \right]^{-1} \alpha^T e^{Bs_0} \end{aligned}$$

Define-se:  $h : V_1^+(x_0) \longrightarrow V_1^-$

$$x \longrightarrow h(x) = e^{Bs(x)}(x - P) + P$$

$h$  é dita aplicação de retorno de  $V_1^+$  em  $V_1^-$ .

Agora, derivando  $h$  e calculando em  $x = x_0$ , temos

$$\begin{aligned} Dh(x_0) &= B e^{Bs_0}(x_0 - P) Ds(x_0) + e^{Bs_0} \\ &= B(y_0 - P) Ds(x_0) + e^{Bs_0} \\ &= - Ay_0 \left[ \alpha^T A y_0 \right]^{-1} \alpha^T e^{Bs_0} + e^{Bs_0} \end{aligned}$$

Assim;

$$Dh(x_0) = \left[ I - \frac{Ay_0 \alpha^T}{\alpha^T A y_0} \right] e^{Bs_0}$$

Passo 4:

Aplicamos o passo 1 a  $y_3$   
o passo 2 a  $y_1$  e  $y_2$   
o passo 3 a  $x_1, x_2$  e  $x_3$

então obtemos:

$$\begin{array}{ll} f_3 : V_1^-(y_3) \longrightarrow V_1^+ & h_1 : V_1^+(x_1) \longrightarrow V_1^- \\ g_1 : V_1^-(y_1) \longrightarrow V_{-1}^+ & h_2 : V_{-1}^+(x_2) \longrightarrow V_{-1}^- \\ g_2 : V_{-1}^-(y_2) \longrightarrow V_1^+ & h_3 : V_1^+(x_3) \longrightarrow V_1^- \end{array}$$

Seja a aplicação composição

$$h_1 \circ f_3 : V_1^-(y_3) \longrightarrow V_1^-$$

Como:

$$\begin{aligned} e^{B_s^{-1}} A x_1 &= e^{B_s^{-1}} B(x_1 - P) = B e^{B_s^{-1}}(x_1 - P) \\ &= B(y_1 - P) = A y_1 \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} D(h_1 \circ f_3) &= Dh_1(f_3(y_3)) Df_3(y_3) \\ &= Dh_1(x_1) Df_3(y_3) \end{aligned}$$

pois:

$$f_3(y_3) = e^{A t(y_3)} y_3 = e^{A t_1} y_3 = x_1 \quad (\text{veja Fig. 3.1})$$

Assim:

$$\begin{aligned}
 Dh_1(x_1) Df_3(y_3) &= \left[ I - \frac{Ay_1 \alpha^T}{\alpha^T Ay_1} \right] e^{Bs_1} \left[ I - \frac{Ay_3 \alpha^T}{\alpha^T A y_3} \right] e^{At_1} \\
 &= \left[ I - \frac{Ay_1 \alpha^T}{\alpha^T Ay_1} \right] e^{Bs_1} \left[ e^{At_1} \frac{Ax_1 \alpha^T}{\alpha^T A y_3} \right] \\
 &= \left[ I - \frac{Ay_1 \alpha^T}{\alpha^T Ay_1} \right] \left[ e^{Bs_1} e^{At_1} - \frac{Ay_1 \alpha^T}{\alpha^T A y_3} \right] \\
 &= \left[ I - \frac{Ay_1 \alpha^T}{\alpha^T Ay_1} \right] e^{Bs_1} e^{At_1} - \left[ \frac{Ay_1 \alpha^T}{\alpha^T Ay_3} - \frac{Ay_1 (\alpha^T Ay_1) \alpha^T}{(\alpha^T Ay_1) \alpha^T Ay_3} \right] \\
 &= \left[ I - \frac{Ay_1 \alpha^T}{\alpha^T Ay_1} \right] e^{Bs_1} e^{At_1}
 \end{aligned}$$

Similarmente para as composições

$$h_2 \circ g_1 : V_1^-(y_1) \longrightarrow V_{-1}^-$$

$$h_3 \circ g_2 : V_{-1}^-(y_2) \longrightarrow V_1^-$$

temos:

$$D(h_2 \circ g_1)(y_1) = \left[ I - \frac{Ay_2 \alpha^T}{\alpha^T Ay_2} \right] e^{Bs_2} e^{At_2} \quad e$$

$$D(h_3 \circ g_2)(y_2) = \left[ I - \frac{Ay_3 \alpha^T}{\alpha^T Ay_3} \right] e^{Bs_3} e^{At_3}$$

Passo 5:

A aplicação de Poincaré  $\pi$  associada ao ponto periódico  $y_3 \in V_1^-$  é dado por:

$$\pi : V_1^-(y_3) \longrightarrow V_1^-$$

$$x \longrightarrow \pi(x) = h_3 \circ g_2 \circ h_2 \circ g_1 \circ h_1 \circ f_3(x)$$

como:

$$e^{At_{i+1}} A y_i = A e^{At_{i+1}} y_i = A x_{i+1}$$

$$(i = 1, 2, 3; \quad x_4 = x_1 \quad ; \quad t_4 = t_1)$$

$$e^{Bs_1} A x_i = e^{Bs_1} B(x_i - P) = B e^{Bs_1}(x_i - P)$$

$$= B(y_i - P) = A y_i \quad \text{onde } i = 1, 3$$

e

$$e^{Bs_2} A x_2 = e^{Bs_2} B(x_2 + P) = B e^{Bs_2}(x_2 + P)$$

$$= B(y_2 + P) = A y_2$$

temos para  $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}
 & \left[ I - \frac{A y_{i+1} \alpha^T}{\alpha^T A y_{i+1}} \right] e^{B s_{i+1}} e^{A t_{i+1}} \left[ I - \frac{A y_i \alpha^T}{\alpha^T A y_i} \right] = \\
 & = \left[ I - \frac{A y_{i+1} \alpha^T}{\alpha^T A y_{i+1}} \right] \left[ e^{B s_{i+1}} e^{A t_{i+1}} - \frac{A y_{i+1} \alpha^T}{\alpha^T A y_i} \right] \\
 & = \left[ I - \frac{A y_{i+1} \alpha^T}{\alpha^T A y_{i+1}} \right] e^{B s_{i+1}} e^{A t_{i+1}} - \left[ \frac{A y_{i+1} \alpha^T}{\alpha^T A y_i} - \frac{A y_{i+1} (\alpha^T A y_{i+1}) \alpha^T}{(\alpha^T A y_{i+1}) \alpha^T A y_i} \right] \\
 & = \left[ I - \frac{A y_{i+1} \alpha^T}{\alpha^T A y_{i+1}} \right] e^{B s_{i+1}} e^{A t_{i+1}}
 \end{aligned}$$

Logo, a derivada da aplicação de Poincaré  $D\pi$  em  $y_3$  é dada por

$$\begin{aligned}
 D\pi(y_3) &= Dh_3(y_3) Dg_2(y_2) Dh_2(x_2) Dg_1(y_1) Dh_1(x_2) Df_3(y_3) \\
 &= \left[ I - \frac{A y_3 \alpha^T}{\alpha^T A y_3} \right] e^{B s_3} e^{A t_3} \left[ I - \frac{A y_2 \alpha^T}{\alpha^T A y_2} \right] e^{B s_2} e^{A t_2} \\
 &\quad \cdot \left[ I - \frac{A y_1 \alpha^T}{\alpha^T A y_1} \right] e^{B s_1} e^{A t_1} \\
 &= \left[ I - \frac{A y_3 \alpha^T}{\alpha^T A y_3} \right] e^{B s_3} e^{A t_3} \left[ I - \frac{A y_2 \alpha^T}{\alpha^T A y_2} \right] e^{B s_2} e^{A t_2} e^{B s_1} e^{A t_1} \\
 &= \left[ I - \frac{A y_3 \alpha^T}{\alpha^T A y_3} \right] e^{B s_3} e^{A t_3} e^{B s_2} e^{A t_2} e^{B s_1} e^{A t_1}
 \end{aligned}$$

### Prova da Proposição 1.1.

Os argumentos utilizados na demonstração do lema 1.2 são facilmente estendidos para qualquer  $n$ , onde  $n$  é o período da órbita.

Assim, fica provada a proposição, ou seja:

$$D\pi(x) = \begin{bmatrix} I - \frac{AX\alpha^T}{\alpha^T AX} \end{bmatrix} e^{B_s n} e^{A_t n} \dots e^{B_s 1} e^{A_t 1}$$

### 3.1.3 Definição.

Seja  $x$  um ponto periódico e seja  $D\pi(x)$  a derivada da aplicação de Poincaré em  $x$ . Então uma bifurcação local ocorre quando um autovalor atinge o círculo unitário.

Em particular, temos:

- (1) *Bifurcação sela-nó*: se  $D\pi(x)$  tem um autovalor 1.
- (2) *Bifurcação período-duplo*: se  $D\pi(x)$  tem um autovalor -1.
- (3) *Bifurcação de Hopf*: se  $D\pi(x)$  tem um par de autovalores complexos conjugados com valor absoluto 1.

### 3.1.4 Lema .

Sejam  $M = e^{B_s n} e^{A_t n} \dots e^{B_s 1} e^{A_t 1}$ ,  $T = \text{tr } M$  e  $D = \det M$ .

Então  $Ax$  é um autovetor de  $M$  associado com o autovalor 1.

### Demonstração.

Para o caso  $n = 3$ ,  $x = y_3$  e pelo passo 5 da demonstração do Lema 3.1.2 temos que:

$$MAy_3 = e^{B_s 3} e^{A_t 3} e^{B_s 2} e^{A_t 2} e^{B_s 1} e^{A_t 1} Ay_3 = Ay_3$$

pois esta expressão é a aplicação de Poincaré associada à órbita do ponto periódico  $y_3$ .

Como estes argumentos são válidos para um  $n$  arbitrário, temos que:

$$MAx = e^{A_B}_n e^{A_t}_n \dots e^{A_B}_1 e^{A_t}_1 Ax = Ax$$

isto é,  $Ax$  é um autovetor de  $M$  associado ao autovalor 1.

**3.1.5 Proposição.**

O operador  $L = \left[ I - \frac{Ax\alpha^T}{\alpha^T Ax} \right]$  é a projeção de  $\mathbb{R}^3$  sobre

$\{x \in \mathbb{R}^3 : \langle \alpha, x \rangle = 0\}$  através de  $Ax$ .

**Observação.**

O plano  $\{x \in \mathbb{R}^3 : \langle \alpha, x \rangle = 0\}$  é chamado o ortogonal de  $\alpha$  e se escreve  $\text{ortg } \alpha$ .

**Prova da proposição 1.5:**

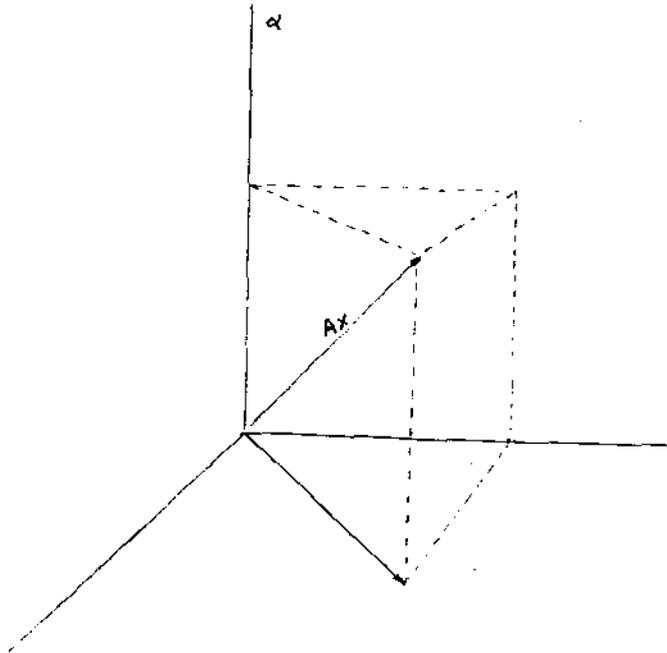


Fig 3.2 Projeção do vetor  $Ax$  sobre  $\text{ortg } \alpha$

$$\mathbb{R}^3 = Ax \oplus \text{ortg } \alpha$$

Seja  $z \in \mathbb{R}^3$  então  $z = \gamma Ax + y$  onde  $y \in \text{ortg } \alpha$

$y = z - \gamma Ax$  como  $\langle \alpha, y \rangle = 0$  temos que

$$0 = \langle \alpha, z - \gamma Ax \rangle = \langle \alpha, z \rangle - \gamma \langle \alpha, Ax \rangle$$

Logo

$$\gamma = \frac{\langle \alpha, z \rangle}{\langle \alpha, Ax \rangle}$$

então 
$$P_{Ax}(z) = z - \frac{\langle \alpha, z \rangle}{\langle \alpha, Ax \rangle} Ax = \left[ I - \frac{\langle \alpha, \cdot \rangle}{\langle \alpha, Ax \rangle} Ax \right](z)$$

$P_{Ax}(z)$  é a projeção de  $z$  ao ortogonal de  $\alpha$  na soma direta  $Ax \oplus \text{ortg } \alpha$ .

Agora

$$\frac{Ax\alpha^T}{\alpha^T Ax}(z) = \frac{Ax\alpha^T z}{\alpha^T Ax} = \frac{\langle \alpha, z \rangle}{\langle \alpha, Ax \rangle} Ax$$

Logo

$$Lz = \left[ I - \frac{Ax\alpha^T}{\alpha^T Ax} \right](z)$$

então

$$L = P_{Ax}$$

isto é

$$L \text{ é a projeção de } \mathbb{R}^3 \text{ sobre } \text{ortg } \alpha = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \langle \alpha, x \rangle = 0 \right\}$$

através de  $Ax$ .

### 3.1.6 Lema.

Sejam  $(1, \lambda_2, \lambda_3)$  os autovalores de  $M$  associados aos autovetores  $(Ax, v_2, v_3)$ , então  $(0, \lambda_2, \lambda_3)$  são os autovalores de  $D\pi(x)$  associados aos autovetores  $(Ax, u_2, u_3)$ , onde  $Lv_i = u_i$ ,  $i = 2, 3$ .

Demonstração:

$D\pi(x) = LM$  e como  $Ax$  é autovetor de  $M$  associado a 1 temos:

$$D\pi(x)Ax = LMAx = LAx = 0 = 0 Ax$$

Logo:

$Ax$  é um autovetor de  $D\pi(x)$  associado ao autovalor 0.

Temos que provar que  $LAx = 0$ .

De fato

$$LAx = \left[ I - \frac{Ax\alpha^T}{\alpha^T Ax} \right] Ax = \left[ Ax - \frac{Ax(\alpha^T Ax)}{\alpha^T Ax} \right] = 0$$

Logo

$$LAx = 0$$

Agora, seja  $v \in \mathbb{R}^3$  então  $v = \gamma Ax + Lv$

$$\begin{aligned} D\pi(x)v &= LM(\gamma Ax + Lv) = \gamma LMAx + LM(Lv) \\ &= \gamma LAx + LM(Lv) = LM(Lv) \end{aligned}$$

Assim

$$D\pi(x)v_2 = D\pi(x)(Lv_2)$$

Por outro lado

$$D\pi(x)v_2 = LMv_2 = L\lambda_2 v_2 = \lambda_2 Lv_2$$

Logo

$$D\pi(x)(Lv_2) = \lambda_2 Lv_2$$

então

$Lv_2$  é o autovetor de  $D\pi(x)$  associado a  $\lambda_2$ .

Similarmente  $Lv_3$  é o autovetor de  $D\pi(x)$  associado a  $\lambda_3$ .  
Portanto, os autovetores de  $D\pi(x)$  são  $(Ax, u_2, u_3)$  associados aos autovalores  $(0, \lambda_2, \lambda_3)$  onde  $u_i = Lv_i$ ,  $i = 2, 3$ .

Estes fatos fornecem as condições de bifurcação no seguinte:

### 3.1.7 Teorema.

Sejam  $M$ ,  $T$  e  $D$  como no lema 3.1.4 e  $x$  um ponto periódico de  $V_{\pm 1}$ . Temos as seguintes propriedades:

- (i) Se existe uma bifurcação sela-nó então  $2 - T + D = 0$
- (ii) Se existe uma bifurcação período-duplo então  $T + D = 0$
- (iii) Se existe uma bifurcação de Hopf então  $D = 1$  e  $(1-T)^2 - 4 < 0$

#### Demonstração.

(i) Observemos que neste tipo de bifurcação temos que se  $D\pi(x)$  tem um autovalor 1 então  $M$  tem autovalores  $(1, 1, \lambda_3)$ .

Seja

$$h(\lambda) = \lambda^3 + a \lambda^2 + b \lambda + c$$

o polinômio característico de  $M$ . Como 1 é um autovalor temos:

$$1 + a + b + c = 0$$

Dai

$$-c = 1 + a + b$$

e por conseguinte

$$h(\lambda) = (\lambda - 1)f(\lambda)$$

onde

$$f(\lambda) = \lambda^2 + (a + 1)\lambda - c$$

como

$$a = -T \quad e \quad c = -D$$

temos:

$$f(\lambda) = \lambda^2 + (1 - T)\lambda + D$$

como 1 é um autovalor de multiplicidade dois, temos que 1 é solução de  $f(\lambda)$ ,

então

$$1 + 1 - T + D = 0$$

Logo

$$2 - T + D = 0$$

(ii) Se existe uma bifurcação de período duplo temos que  $D\pi(x)$  tem um autovalor  $-1$  então  $M$  tem autovalores  $(1, -1, \lambda_3)$ .

Seja

$$h(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$$

o polinômio característico de  $M$  e como  $-1$  é um autovalor, temos que:

$$-1 + a - b + c = 0$$

Dai:

$$c = 1 - a + b$$

e por conseguinte

$$h(\lambda) = (\lambda + 1) f(\lambda)$$

onde

$$f(\lambda) = \lambda^2 + (a - 1)\lambda + c$$

ou equivalentemente

$$f(\lambda) = \lambda^2 + (-T - 1)\lambda - D$$

como  $1$  é autovalor de  $M$ , então

$$1 - T - 1 - D = 0$$

Logo

$$T + D = 0$$

(iii) Neste caso  $D\pi(x)$  tem dois autovalores complexos conjugados então  $M$  tem autovalores  $(1, \lambda, \bar{\lambda})$ .

Seja

$$h(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$$

o polinômio característico de  $M$  e como  $1$  é também autovalor de  $M$  temos

$$h(\lambda) = (\lambda - 1)f(\lambda)$$

onde

$$f(\lambda) = \lambda^2 + (a + 1)\lambda - c$$

ou equivalentemente

$$f(\lambda) = \lambda^2 + (1 - T)\lambda + D$$

Agora

$$D = 1 \cdot \lambda \cdot \bar{\lambda} = |\lambda| = 1$$

então

$$D = 1$$

Logo

$$f(\lambda) = \lambda^2 + (1 - T)\lambda + 1$$

Como  $f(\lambda)$  tem duas raízes complexas conjugadas, temos que

$$(1 - T)^2 - 4 < 0.$$

E portanto,

$$D = 1 \text{ e } (1 - T)^2 - 4 < 0.$$

## CAPITULO IV

Neste capítulo vamos estudar as órbitas homoclínicas e heteroclínicas em seus pontos de equilíbrio. O principal resultado é a obtenção da aplicação de Poincaré, baseada nos campos de vetores em cada região, onde este está bem definido.

Ressaltamos que dependendo do itinerário das órbitas que definem a homoclinicidade (ou heteroclinicidade) obtemos diferentes expressões para a aplicação de Poincaré.

### 4.1 Definições e conceitos básicos

#### 4.1.1 Definição

Um ponto de equilíbrio  $p$  de um campo de vetores  $X$ , é dito um ponto homoclínico se existe uma trajetória  $\Gamma$  que tende a  $p$  quando  $t \rightarrow \pm \infty$ .

Tal trajetória é chamada de órbita homoclínica através de  $p$  e tem a particularidade que é uma autoconexão de sela, isto é, o ponto  $p$  é o  $\alpha$  e  $w$  limite da órbita.

#### 4.1.2 Definição

Sejam  $p$  e  $q$  dois pontos tipo sela de um campo de vetores  $X$  e  $\Gamma$  uma órbita que conecta  $p$  e  $q$  de tal maneira que  $p$  é o conjunto  $w$ -limite e  $q$  é o conjunto  $\alpha$ -limite da órbita então  $\Gamma$  é dita uma órbita heteroclínica.

### 4.2 Órbitas homoclínicas em 0.

Suponha que  $u_1$  é um real positivo e  $u_2, u_3$  são reais negativos ou complexos conjugados com parte real negativo.

Como os autovetores associados aos  $u_i$  são dados por  $C_i = (1, u_i, u_i^2)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , então temos uma variedade estável

2-dimensional  $w^s(0)$  e uma variedade instável 1-dimensional  $w^u(0)$  no ponto de equilíbrio  $0 = (0,0,0)$ , dadas por:

$$w^u(0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = r \overrightarrow{OC_1} , \alpha x - 1 \leq 0 , r \in \mathbb{R} \right\}$$

$$w^s(0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = r \overrightarrow{OC_2} + r' \overrightarrow{OC_3} , \alpha x - 1 ; r, r' \in \mathbb{R} \right\}$$

**Observação.**

Notemos que as variedades invariantes associadas ao ponto crítico  $0$  estão definidos de tal modo que todo ponto pertencente a uma destas é uma combinação linear dos autovetores associados aos autovalores que geram o espaço.

**4.2.1 Lema.**

Sejam  $V_1$  como na definição 2.1.5 e  $u = \left( 0, \frac{u_2 + u_3}{u_2 u_3}, \frac{-1}{u_2 u_3} \right)^T$

então

$$w^s(0) \cap V_1 = \left\{ \vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : u^T \vec{x} = 1 , x = 1 \right\}$$

**Demonstração.**

$$\vec{x} \in w^s(0) \text{ então } \vec{x} = r \overrightarrow{OC_2} + r' \overrightarrow{OC_3} \text{ e } \alpha^T \vec{x} \leq 1$$

$$\vec{x} \in V_1 \text{ então } \alpha^T \vec{x} = 1$$

Logo

$$(4.a) \quad \alpha^T \vec{x} = 1$$

Portanto

$$(1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow x = 1$$

Como  $\overrightarrow{OC_1} = (1, u_1, u_1^2)^T$  então temos que

$$(4.b) \quad \vec{x} = r \begin{pmatrix} 1 \\ u_2 \\ u_2^2 \end{pmatrix} + r' \begin{pmatrix} 1 \\ u_3 \\ u_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r + r' \\ ru_2 + r'u_3 \\ ru_2^2 + r'u_3^2 \end{pmatrix}$$

substituindo (4.b) em (4.a) temos que:

$$r + r' = 1$$

Agora vamos mostrar que  $u^T \vec{x} = 1$

$$\begin{aligned} u^T \vec{x} &= \left( 0, \frac{u_2 + u_3}{u_2 u_3}, \frac{-1}{u_2 u_3} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{(u_2 + u_3)}{u_2 u_3} y - \frac{z}{u_2 u_3} = \\ &= \frac{(u_2 + u_3)}{u_2 u_3} (r u_2 + r' u_3) - \frac{(r u_2^2 + r' u_3^2)}{u_2 u_3} = r + r' = 1 \end{aligned}$$

Logo

$$u^T \vec{x} = 1$$

Portanto

$$w^s(0) \cap V_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : u^T x = 1, x = 1 \right\}$$

#### 4.2.2 Itinerários dinâmicos de órbitas homoclínicas .

Nesta seção vamos exibir os diversos tipos de órbitas homoclínicas associadas à origem e condições necessários sobre as aplicações de retorno para a existência destas órbitas.

Tipo 1:  $0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_1 \longrightarrow 0$  (Fig 4.1)

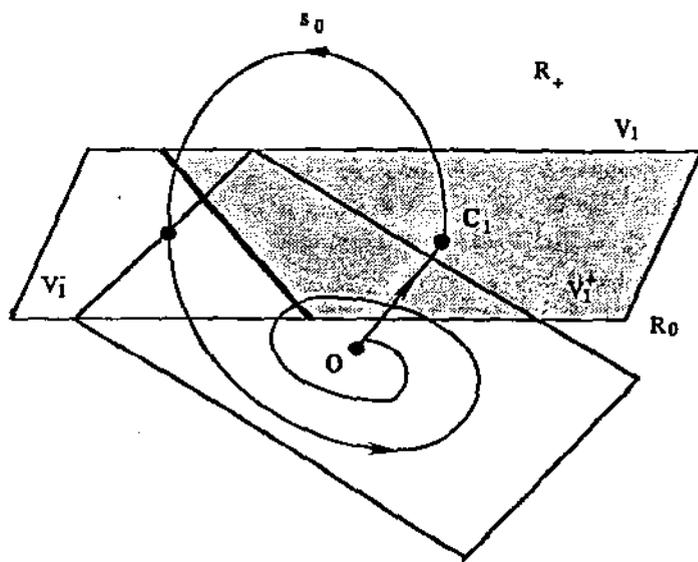


Fig 4.1 órbita homoclínica do itinerário do tipo 1

(a)  $\alpha^T e^{Cs} \circ C_1 = 1$

(b)  $u^T e^{Cs} \circ C_1 = 1$

Com as condições na aplicação de retorno

(c)  $\alpha^T e^{Cs} C_1 \neq 1 \quad \forall s \text{ tal que } 0 < s < s_0$

(d)  $\alpha^T e^{At} e^{Cs} \circ C_1 \neq 1 \quad \forall t > 0$

A condição (a) diz que o campo de vetores definido na região  $R_+$  aplicado ao ponto  $C_1$  atinge num tempo  $s_0$  o plano  $V_1$ .

A condição (b) obriga o ponto  $p = e^{Cs} \circ C_1$  a pertencer a  $V_1 \cap W^S(0)$ .

A condição (c) diz que  $s_0$  é o menor tempo tal que o campo atinge  $V_1$ .

A condição (d) garante a existência da órbita homoclínica, pois para qualquer  $t > 0$ ,  $e^{At} \notin V_1$  e portanto este converge ao ponto periódico zero quando  $t$  tende a infinito, através da variedade estável.

Tipo 2:  $0 \rightarrow V_1 \rightarrow V_1 \rightarrow V_1 \rightarrow V_1 \rightarrow 0$  (Fig 4.2)

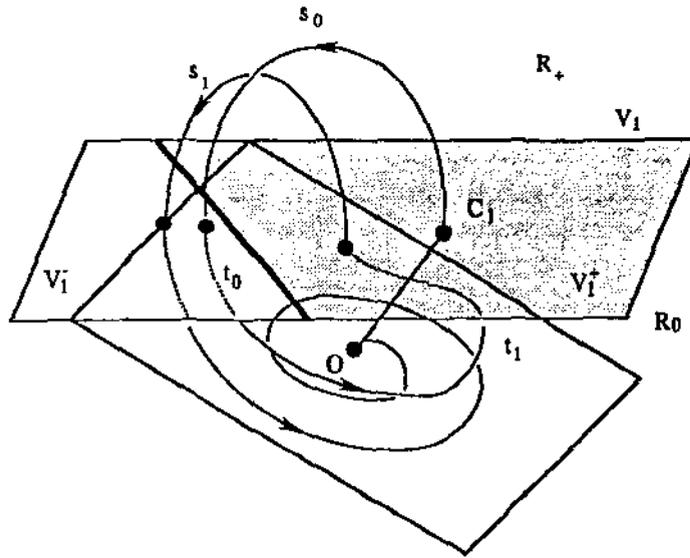


Fig 4.2 órbita homoclínica do itinerário do tipo 2.

$$x = K(t_1, s_1)h_1$$

(a)  $\alpha^T e^{Cs} {}^o C_1 = 1$

(b)  $e^{Cs} {}^o C_1 = e^{-At} {}^o K(t_1, s_1)h_1$

(c)  $u^T e^{Cs_1} K(t_1, s_1)h_1 = 1$

Com as condições na aplicação de retorno

(d)  $\alpha^T e^{Cs} C_1 \neq 1 \quad \forall s \text{ tal que } 0 < s < s_0$

(e)  $|\alpha^T e^{-At} x| \neq 1 \quad \forall t \text{ tal que } 0 < t < t_0$

(f)  $\alpha^T e^{Cs} x \neq 1 \quad \forall s \text{ tal que } 0 < s < s_1$

(g)  $|\alpha^T e^{At} e^{Cs_1} x| \neq 1 \quad \forall t > 0$

Estas condições têm interpretação similar as do tipo 1.

Tipo 3:  $0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_{-1} \longrightarrow V_{-1} \longrightarrow 0$  (Fig 4.3)

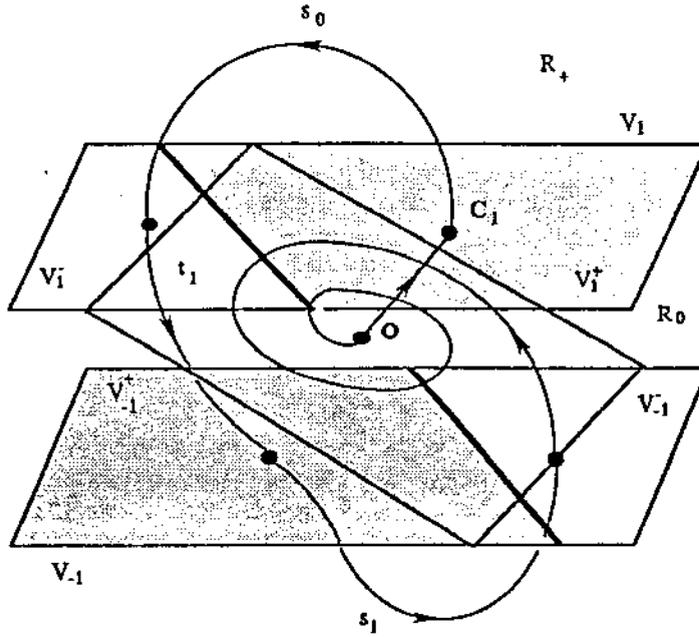


Fig 4.3 órbita homoclínica do itinerário do tipo 3

$$y = K(t_1, s_1)h_2$$

(a)  $\alpha^T e^{Cs} {}^0 C_1 = 1$

(b)  $e^{Cs} {}^0 C_1 = -e^{-At} {}^1 y$

(c)  $u^T e^{Cs} {}^1 y = 1$

Com condições na aplicação de retorno

(d)  $\alpha^T e^{Cs} C_1 \neq 1 \quad \forall s \text{ tal que } 0 < s < s_0$

(e)  $|\alpha^T e^{-At} y| \neq 1 \quad \forall t \text{ tal que } 0 < t < t_1$

(f)  $\alpha^T e^{Cs} y \neq 1 \quad \forall s \text{ tal que } 0 < s < s_1$

(g)  $|\alpha^T e^{At} e^{Cs} {}^1 y| \neq 1 \quad \forall t > 0$

### 4.2.3 Aplicação de Poincaré numa órbita homoclínica

Nesta seção exibiremos a aplicação de Poincaré associada a uma órbita homoclínica; para este caso escolhemos a órbita do tipo 1 (Fig 4.1).

O campo definido na região  $R_0$ , têm associado um sistema de equações diferenciais  $\dot{x} = Ax$  onde  $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  e os seus autovalores são:  $\lambda_1 = \sigma + iw$ ,  $\lambda_2 = \sigma - iw$  e  $\lambda_3 = \gamma$  onde  $-\sigma > 0$  e  $\gamma > 0$ .

Logo pelo lema (2.2.4) temos que existe um sistema de coordenadas tal que  $A$  é transformada na sua forma de Jordan real  $J$ , isto é:

$$J = \begin{pmatrix} \sigma & -w & 0 \\ w & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Mais ainda, a variedade estável  $M = W^s(0)$  é transformado no plano  $x - y$ , o plano de descontinuidade  $V$  é dado pela equação  $x + z = 1$  e a variedade instável  $W^u(0)$  é transformado no eixo  $z$ .

Graficamente, temos, (fig. 4.4)

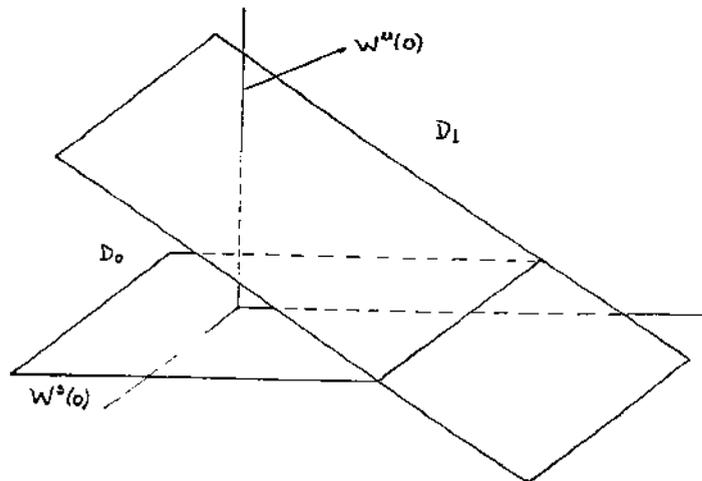


Fig 4.4 efeito do novo sistema de coordenadas

Agora neste novo sistema de coordenadas, o sistema de equações diferenciais é dado por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \sigma & -w & 0 \\ w & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad , \quad \mathbf{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

Assim

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma x - w y \\ \dot{y} &= w x + \sigma y \\ \dot{z} &= \gamma z \end{aligned}$$

Passando a coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= \gamma z \end{aligned}$$

onde  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  é a coordenada radial e  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  é a coordenada angular de qualquer ponto  $p = (x,y)$

Então temos nosso sistema equivalente

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \sigma r \\ \dot{\theta} &= w \\ \dot{z} &= \gamma z \end{aligned}$$

Logo a solução deste sistema de equações para condições

iniciais  $(r_0, \theta_0, z_0)$  é:

$$\begin{aligned} r(t) &= r_0 e^{\sigma t} \\ \theta(t) &= \theta_0 + w t \\ z(t) &= z_0 e^{\gamma t} \end{aligned}$$

Portanto o fluxo na região  $D_0$  é dado por:

$$\varphi_t(r, \theta, z) = \begin{cases} r_0 e^{\sigma t} \\ \theta_0 + w t \\ z_0 e^{\sigma t} \end{cases}$$

Define-se então,  $\Sigma_0$  uma seção transversal ao fluxo na variedade instável  $w^u(0)$ , a uma altura  $\tilde{t} = h$  e  $\Sigma_1$  uma outra seção bidimensional tal que ela intersecta a variedade estável  $w^s(0)$  (Fig 4.5)

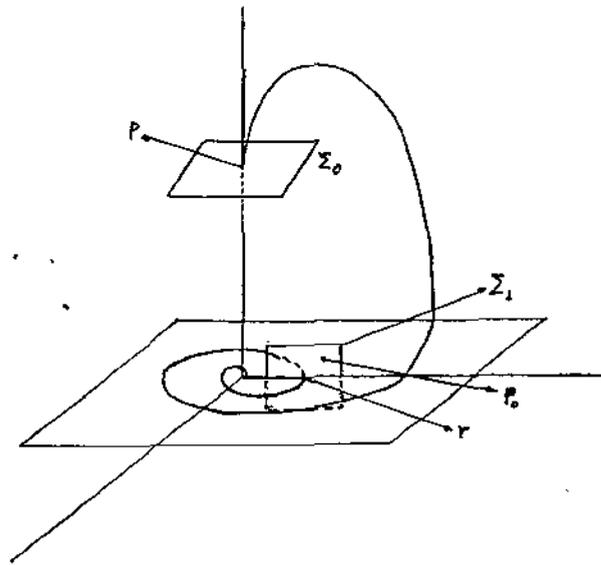


Fig 4.5 Definição das seções

$$\Sigma_0 \text{ e } \Sigma_1$$

Queremos agora determinar uma aplicação  $\varphi$  de  $\Sigma_1$  em  $\Sigma_0$ .

Assim, uma trajetória começando em  $p_0 = (r_0, 0, z_0)$  em  $\Sigma_1$  atinge  $\Sigma_0$  em um tempo  $\tilde{t}$ , onde a terceira coordenada do fluxo  $\varphi_t$  é igual a  $h$ , isto é, quando

$$z_0 e^{\sigma \tilde{t}} = h$$

então

$$\tilde{t} = \frac{1}{\gamma} \ln \left( \frac{\gamma}{z_0} \right)$$

Logo, a aplicação

$$\varphi : \Sigma_1 \longrightarrow \Sigma_0$$

é dada por

$$\varphi \left( r_0, \theta, z_0 \right) = \left( r_0 \left( \frac{h}{z_0} \right)^{\sigma/\gamma}, \theta_0 + \frac{w}{\gamma} \ln \left( \frac{h}{z_0} \right), h \right)$$

e definindo

$$\varphi(r) = p$$

Nosso passo seguinte é determinar uma aplicação  $\psi$  de uma vizinhança  $V_s$  de  $s$  em  $\Sigma_1$ , isto é, suficiente pois a aplicação de  $\Sigma_0$  a  $V_s$  é dado pela composição dos fluxos associados aos campos definidos na região  $D_0$  e  $D_1$ , segundo o novo sistema de coordenadas (Fig 4.6)

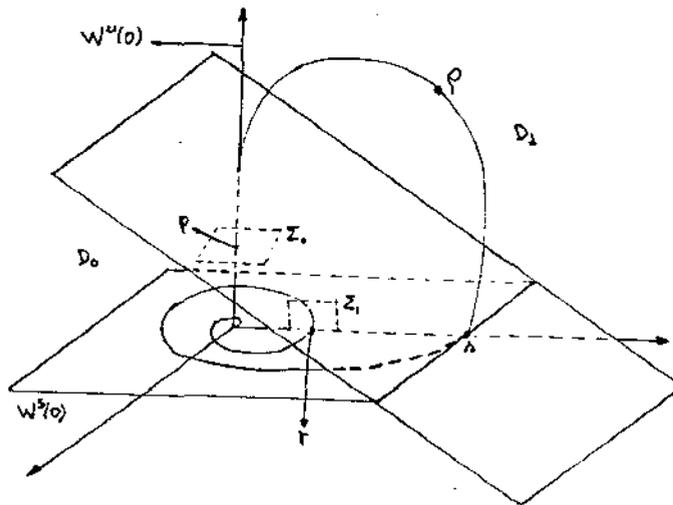


Fig 4.6: fluxos do campo segundo o novo sistema de coordenadas

Temos que  $x_0 = s \in V_s$  e suponha que existe  $t_0$  tal que  $\varphi_{t_0}(s) = r$ , então seja

$$F : V_s \times (t_0 - \int, t_0 + \int) \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$F(x, t) = \pi_2 \varphi_t(x) - r$$

onde  $\varphi_t(x)$  é o fluxo associado ao campo definido em  $D_0$  e  $\pi_2$  é a projeção na segunda coordenada.

Como:

$$F(x_0, t_0) = F(s, t_0) = \pi_2 \varphi_{t_0}(x_0) - r = \pi_2(r) - r = r - r = 0$$

e

$$DF(x, t)|_{(x_0, t_0)} = \pi_2'(\varphi_t(x)) \cdot \varphi_t'(x)|_{(x_0, t_0)} = \pi_2'(\varphi_{t_0}(x_0)) \varphi_{t_0}'(x_0)$$

$$= \pi_2(r) f(s) = r f(s)$$

onde  $f$  é o campo de vetores e  $s$  não é ponto crítico de  $f$ .

Logo

$$DF(x_0, t_0) \neq 0$$

Portanto, pelo teorema das funções implícitas, existe uma vizinhança  $\tilde{V}_s \subset V_s$  de  $s$  e uma função

$$t : \tilde{V}_s \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$F(x, t(x)) = 0 \quad \text{em} \quad t(s) = t_0$$

Agora, define-se

$$f : \tilde{V}_s \longrightarrow \Sigma_1$$

dada por

$$f(x) = \pi_2 \varphi_{t(x)}(x)$$

Portanto, a aplicação

$$\psi : \Sigma_0 \longrightarrow \Sigma_1$$

é

$$\psi = f \circ \rho \circ \varphi$$

onde

$$\varphi_{t'}(p) = q \quad \text{com} \quad t' > 0$$

$$\rho_{t''}(q) = s \quad \text{com} \quad t'' > 0$$

Assim,

$$\psi(p) = r, \quad p \in \Sigma_0 \quad \text{e} \quad r \in \Sigma_1$$

De fato;

$$\begin{aligned} \psi(p) &= f(\rho(\varphi(p))) = f(\rho(q)) = f(s) \\ &= \pi_2 \varphi_{t(s)}(s) = \pi_2 \varphi_{t_0}(s) = F(s, t_0) + r \\ &= r \end{aligned}$$

Finalmente, concluímos que a aplicação de Poincaré associada a esta órbita homoclínica é dada pela seguinte composição:

$$\pi = \varphi \circ \psi : \Sigma_0 \longrightarrow \Sigma_0$$

a qual têm um ponto fixo.

De fato;

Temos que  $p \in \Sigma_0$  então

$$\begin{aligned} \pi(p) &= \varphi(\psi(p)) = \varphi(r) = p \\ \Rightarrow \quad \pi(p) &= p \end{aligned}$$

### 4.3 Órbitas homoclínicas em $p^+$

Nesta seção exibiremos o itinerário da órbita homoclínica que passa através do ponto crítico  $p^+$ , e pela simetria do campo também temos uma órbita homoclínica através do ponto crítico  $p^-$ .

O campo de vetores na região  $R_+$  é representado pela matriz B. Agora, para os autovalores de B, suponha que  $v_1$  é um real negativo e  $v_2, v_2$  são reais positivos ou complexos conjugados com parte real

positiva.

Pelo lema (2.1.10) os autovetores associados a  $v_1$  são dados por:

$$\overrightarrow{PD}_1 = \left( \frac{a_3}{b_3}, \left( v_1 - C_1 \right) \frac{a_3}{b_3}, \left( v_1 \left( v_1 - C_1 \right) - C_2 \right) \frac{a_3}{b_3} \right)^T$$

então existe uma variedade estável 1-dimensional e uma variedade instável 2-dimensional; dadas por:

$$W^s(P) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = r \overrightarrow{PD}_1 + P ; \alpha^T x - 1 \geq 0 ; r \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W^u(P) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = r \overrightarrow{PD}_2 + r' \overrightarrow{PD}_3 + P ; \alpha^T x - 1 \geq 0 ; r, r' \in \mathbb{R} \right\}$$

Observação:

As variedades invariantes associadas ao ponto crítico  $P^*$ , da mesma maneira que as associadas ao ponto crítico 0, definem-se de modo tal que todo ponto pertencente a uma destas variedades é uma combinação linear dos autovetores associados aos autovalores que geram a variedade.

#### 4.3.1. Lema

Sejam  $V_1$  como na definição 2.1.5 e

$$u = \left( 0, \frac{(v_2 + v_3 - c_1) b_3^T}{v_2 v_3 a_3}, - \frac{b_3}{v_2 v_3 a_3} \right)$$

então

$$W^u(P) \cap V_1 = \left\{ x = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : u^T x - 1 = 0, x = 1 \right\}$$

Prova:

Seja  $x \in W^u(P) \cap V_1$  então  $x \in W^u(P)$  e  $x \in V_1$

$$x \in W^u(P) \text{ então } x = r \overrightarrow{PD_2} + r' \overrightarrow{PD_3} + P ; \quad r, r' \in \mathbb{R}$$

onde  $\overrightarrow{PD_i}$  ;  $i = 2, 3$  ; são os autovetores associados aos autovalores  $v_i$  ;  $i = 2, 3$ , da matriz B.

Logo:

$$x = r \begin{pmatrix} a_3/b_3 \\ (v_2 - c_1) a_3/b_3 \\ (v_2(v_2 - c_1) - c_2) a_3/b_3 \end{pmatrix} + r' \begin{pmatrix} a_3/b_3 \\ (v_3 - c_1) a_3/b_3 \\ (v_3(v_3 - c_1) - c_2) a_3/b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - a_3/b_3 \\ c_1 a_3/b_3 \\ c_2 a_3/b_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (r + r') a_3/b_3 + 1 - a_3/b_3 \\ [r(v_2 - c_1) + r'(v_3 - c_1) + c_1] a_3/b_3 \\ [r(v_2^2 - v_2 c_1 - c_2) + r'[(v_3^2 - v_3 c_1) - c_2] + c_2] a_3/b_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Com } \alpha x = (r + r' - 1) a_3/b_3 + 1 \leq 1$$

então

$$r + r' \leq 1$$

Como  $x \in V_1$ , temos que  $\alpha^T x = 1$

Logo

$$\alpha^T x = 1$$

Assim,

$$r + r' = 1$$

Agora temos que provar que  $V^T x = 1$ , onde  $x = (x, y, z)^T$

$$\begin{aligned}
V^T x &= \frac{(v_2 + v_3 - c_1)b_3}{v_2 v_3 a_3} y - \frac{b_3}{v_2 v_3 a_3} z \\
&= \frac{(v_2 + v_3 - c_1)b_3}{v_2 v_3 a_3} \left[ r(v_2 - c_1) + r'(v_3 - c_1) + c_1 \right] \frac{a_3}{b_3} - \\
&- \left[ \frac{b_3}{v_2 v_3 a_3} \left[ r(v_2^2 - v_2 c_1 - c_2) + r'(v_3^2 - v_3 c_1 - c_2) + c_2 \right] \frac{a_3}{b_3} \right] \\
&= \frac{1}{v_2 v_3} \left[ (r + r')(v_2 v_3 - c_1 v_2 + c_1^2 - c_1 v_3 + c_2) + v_2 c_1 + c_1 v_3 - c_1^2 - c_2 \right]
\end{aligned}$$

Como  $r + r' = 1$

Logo  $V^T x = 1$

Portanto

$$W^u(P) \cap V_1 = \left\{ x = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : V^T x - 1 = 0, x = 1 \right\}$$

Neste ponto daremos o itinerário de uma órbita homoclínica no ponto de equilíbrio  $P^+$  e as condições de existência na aplicação de retorno.

*Itinerario 1:*  $P^+ \rightarrow V_1 \rightarrow V_1 \rightarrow V_1 \rightarrow V_1 \rightarrow P^+$  (Fig 4.7)

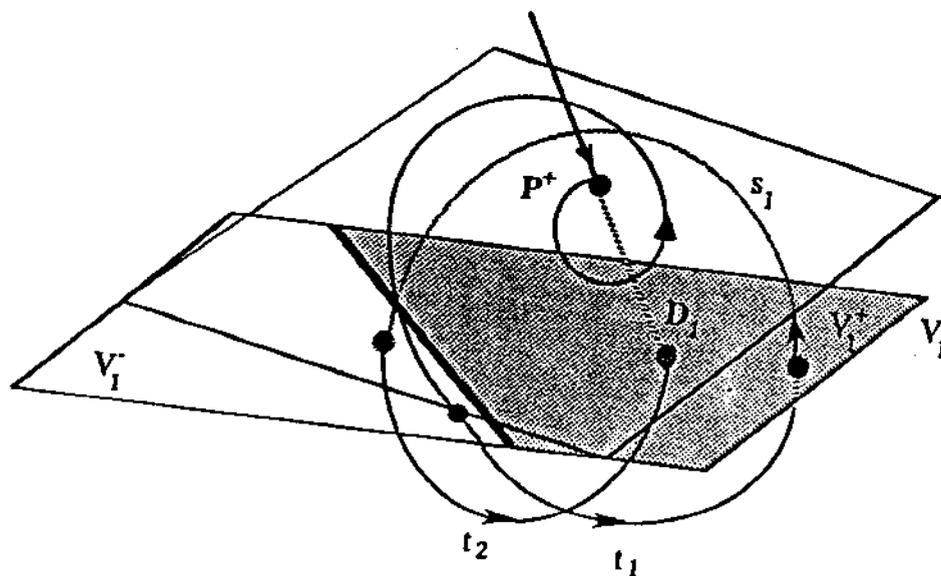


Fig 4.7 itinerário dinâmico da órbita homoclínica em  $P^+$

$$(a) \quad V^T e^{-At} {}^1K(t, s_1) h_1 = 1$$

$$(b) \quad e^{Cs} {}^1K(t, s_1) h_1 = e^{-At} {}^2D_1$$

Sob as condições na aplicação de retorno, temos:

$$(c) \quad \alpha^T e^{Cs} e^{-At} {}^1K(t, s_1) h_1 \neq 1 \quad \text{para todo } s > 0$$

$$(d) \quad |\alpha^T e^{-At} {}^1K(t, s_1) h_1| \neq 1 \quad \text{para todo } t \text{ com } 0 < t < t_0$$

$$(e) \quad \alpha^T e^{Cs} {}^1K(t, s_1) h_1 \neq 1 \quad \text{para todo } s \text{ com } 0 < s < s_1$$

$$(f) \quad |\alpha^T e^{-At} {}^2D_1| \neq 1 \quad \text{para todo } t \text{ com } 0 < t < t_2$$

#### 4.4 Órbitas heteroclínicas

Nesta seção exibiremos os itinerários de algumas órbitas heteroclínicas que se produzem neste sistema de equações.

Tal como no caso de órbitas homoclínicas, daremos as condições de existência na aplicação de retorno.

##### 4.4.1 Definição:

Sejam  $p$  e  $q$  dois pontos de sela, se existe uma órbita  $\tau$  que une  $p$  e  $q$ , isto é, uma correção de ponto de sela, então  $\tau$  é chamada de órbita heteroclínica.

##### 4.4.2 Itinerários de órbitas heteroclínicas

Para os autovalores de  $A$ , suponha que  $u_1$  é um real positivo e  $u_2, u_3$  são reais negativos ou complexos conjugados com parte real negativa. Assim, os autovetores associados geram as variedades invariantes, neste caso, temos uma variedade estável 2-dimensional e uma variedade instável 1-dimensional na região  $R_0$ .

Para os autovalores de  $B$ , suponha que  $v_1$  é uma real negativa e  $v_2, v_3$  são reais positivas de complexos conjugados com parte real

positiva. Deste modo, os autovetores associados geram uma variedade estável 1-dimensional e uma variedade instável 2-dimensional na região  $R_+$ .

Agora daremos os itinerários dinâmicos das órbitas heteroclínicas que unem os pontos de sela,  $O$  com  $P^+$ .

*Tipo 1:*  $O \rightarrow V_1 \rightarrow P^+$  (Fig 4.8)

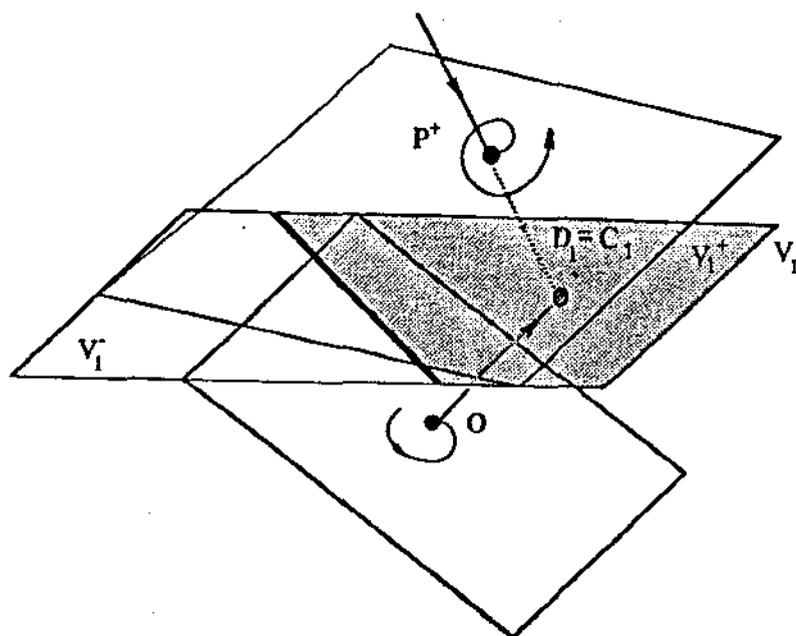


Fig 4.8  $\Gamma$  é a órbita heteroclínica unindo  $O$  a  $P^+$

(a)  $D_1 = C_1$

Tipo 2:  $0 \rightarrow V_1 \rightarrow V_1 \rightarrow V_1 \rightarrow \dots \rightarrow \dots$  (Fig 4.9)

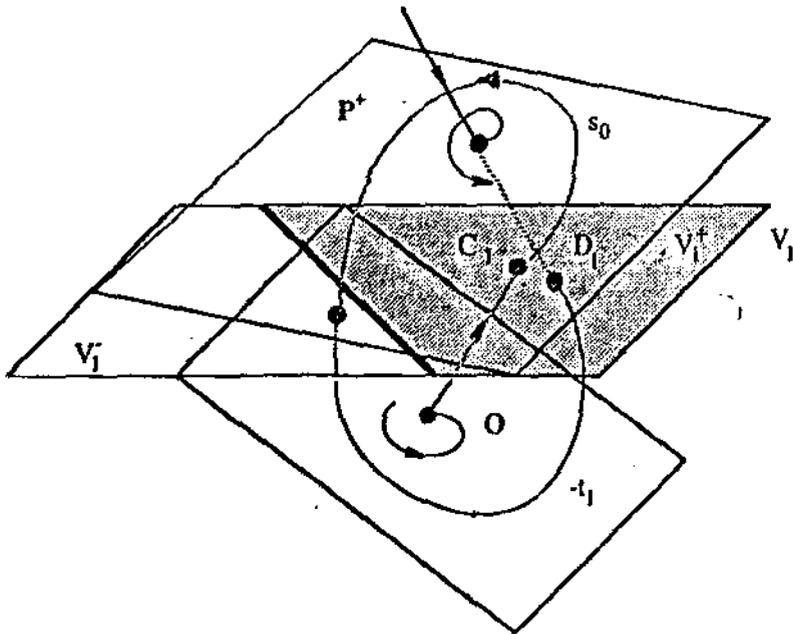


Fig 4.9  $\Gamma$  é a órbita homoclínica que une 0 a  $P^+$

(a)  $\alpha^T e^{Cs_0} C_1 = 1$

(b)  $e^{Cs_0} C_1 = e^{-At} {}^1D_1$

(c)  $\alpha^T e^{-At} {}^1D_1 = 1$

Com condições na aplicação de retorno

(d)  $\alpha^T e^{Cs} C_1 \neq 1 \quad \forall s \text{ com } 0 < s < s_0$

(e)

$$|\alpha^T e^{-At} D_1| \neq 1$$

$\forall t$  com  $0 < t < t_1$

Tipo 3:  $0 \rightarrow V_1 \rightarrow V_1 \rightarrow V_1 \rightarrow V_1 \rightarrow V_1 \rightarrow P^*$

(Fig 4.10)

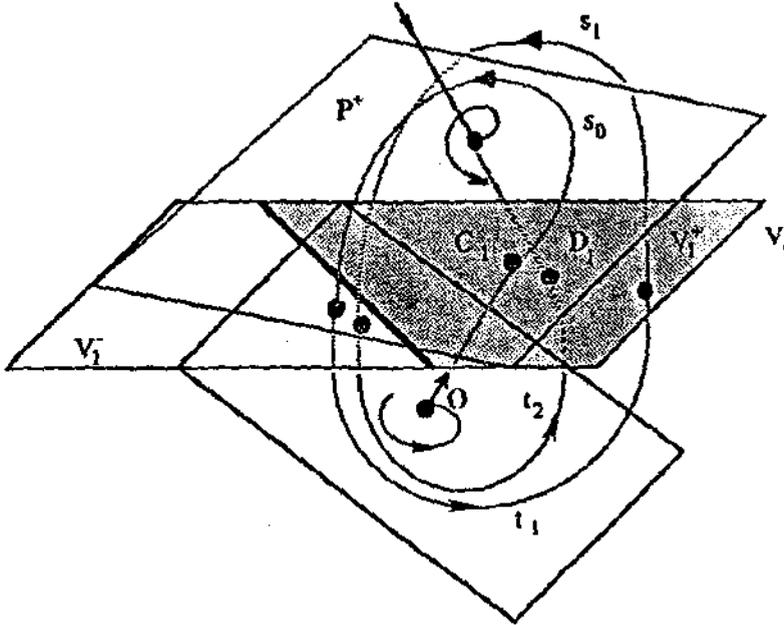


Fig 4.10

Orbita heteroclínica  $\Gamma$  unindo  $O$  com  $P^*$  onde  $x = K(t_1, s_1)h_1$

(a)  $\alpha^T e^{Cs_0} C_1 = 1$

(b)  $e^{Cs_0} C_1 = e^{-At_1} K(t_1, s_1)h_1$

(c)  $e^{Cs_1} K(t_1, s_1)h_1 = e^{-At_2} D_1$

(d)  $\alpha^T e^{-At_2} D_1 = 1$

Com condições na aplicação de retorno

$$(e) \quad \alpha^T e^{Cs} C_1 \neq 1 \quad \forall s \text{ com } 0 < s < s_0$$

$$(f) \quad |\alpha^T e^{-At} K(t, s_1) h_1| \neq 1 \quad \forall t \text{ com } 0 < t < t_1$$

$$(g) \quad \alpha^T e^{Cs} K(t, s_1) h_1 \neq 1 \quad \forall s \text{ com } 0 < s < s_1$$

$$(h) \quad |\alpha^T e^{-At} D_1| \neq 1 \quad \forall t \text{ com } 0 < t < t_2$$

## REFERÊNCIAS

- [A]       ARNOLD, V.I  
      *"Equações Diferenciais Ordinárias"*  
      Editora MIR, 1985.
- [ACT]     ARNEODO, S. COULLET, P. AND TRESSER, C.  
      *"Possible New Strong Attractors with Spiral Structure"*  
      Commun. Math. Physics 79, 1981.
- [B]       BRAUM, M.  
      *"Differential Equations and their Applications"*  
      Springer-Verlag, 1978.
- [CKM]     CHUA, L. KOMURO, M. AND MATSUMOTO, T.  
      *"The Double Scroll Family"*  
      IEEE Transactions on Circuits and Systems  
      Vol. Cas-33, nº 11, 1986.
- [GH]     GUCKENHEIMER, J. AND HOLMES, P.  
      *"Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations  
      of Vector Field"*  
      Springer-Verlag, New York, Berlin and Heidelberg, 1983.
- [GS]     GLENDINNING, P. AND SPARROW, C.  
      *"Local and Global Behavior Near Homoclinic Orbits"*  
      Journal of Statistical Physics, vol. 35, nº 5/6, 1984.

- [HS] HIRSCH, M. AND SMALE, S.  
*"Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra"*  
 Academic Press, 1974.
- [K] KOMURO, M.  
*"Normal Forms of Continuous Piecewise Linear Vector Field and Chaotic Attractors"*  
 Part I and II  
 Japan Journal of Applied Mathematics, vol. 5, nº 3, 1983.
- [KTMCH] KOMURO, M., TOKUNAGAR, R., MATSUMOTO, T., CHUA, L. AND HOITA, A.  
*"Global Bifurcations Qnalysis of the Double Scroll Circuits"*  
 International Journal of Bifurcations and Chaos in Applieds Sciences and Engineering.  
 Vol. 1, nº 1, 1991.
- [P] PERKO, L.  
*"Differential Equations and Dynamical Systems"*  
 Text in Applied Mathematics, nº 7  
 Springer-Verlag, 1991
- [S] SOTOMAYOR, J.  
*"Lições de Equações Diferenciais Ordinárias"*  
 Projeto Euclides, CNPq, 1979.
- [T] TRESSER, C.  
*"About Some Theorem by L.P. Phil'nikov"*  
 Ann. Inst. Henri Poincaré 40(4), 1984.