UNICAMP

Graziane Sales Teodoro

Cálculo Fracionário e as Funções de Mittag-Leffler

CAMPINAS
2014

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

GRAZIANE SALES TEODORO

CÁLCULO FRACIONÁRIO E AS FUNÇÕES DE MITTAG-LEFFLER

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em matemática aplicada.

Orientador: Edmundo Capelas de Oliveira

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELA ALUNA GRAZIANE SALES TEODORO, E ORIENTADA PELO PROF. DR. EDMUNDO CAPELAS DE OLIVEIRA.

Assinatura do Orientador

____

CAMPINAS
2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

T264c
Teodoro, Graziane Sales, 1990-
Cálculo fracionário e as funções de Mittag-Leffler / Graziane Sales Teodoro. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Edmundo Capelas de Oliveira.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Laplace, Transformadas de. 2. Mittag-Leffler, Funções de. 3. Caputo, Derivadas fracionárias de. 4. Osciladores fracionários. I. Oliveira, Edmundo Capelas de,1952-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Fractional calculus and the Mittag-Leffler functions
Palavras-chave em inglês:
Laplace transform
Mittag-Leffler functions
Caputo fractional derivatives
Fractional oscillators
Área de concentração: Matemática Aplicada
Titulação: Mestra em Matemática Aplicada
Banca examinadora:
Edmundo Capelas de Oliveira [Orientador]
Rubens de Figueiredo Camargo
Jayme Vaz Junior
Data de defesa: 28-02-2014
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Dissertação de Mestrado defendida em 28 de fevereiro de 2014 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

____

Prof.(a). Dr(a). EDMUNDO CAPELAS DE OLIVEIRA

____

Prof.(a). Dr(a). JAYME VAZ JUNIOR

____

Prof.(a). Dr(a). RUBENS DE FIGUEIREDO CAMARGO

Abstract

The fractional calculus, which is the nomenclature used to the non-integer order calculus, has important applications due to its direct involvement in problem resolution and discussion in many fields, such as mathematics, physics, engineering, economy, applied sciences and many others. In this sense, we studied the fractional integral and fractional derivates: one proposed by Caputo and the other by Riemann-Liouville. Among the fractional calculus's functions, one of most important is the Mittag-Leffler function. This function naturally occurs as the solution for fractional order differential equations with constant coeficients. Due to the importance of the Mittag-Leffler functions, various properties and generalizations are presented in this dissertation. We also presented an application in fractional calculus, in which we solved the differential equation associated the with fractional harmonic oscillator. To solve this fractional oscillator equation, we used the Laplace transform and Caputo fractional derivate.

Keywords: Laplace transform, Caputo fractional derivate, fractional oscillator, Mittag-Leffler functions.

Resumo

O cálculo fracionário, nomenclatura utilizada para cálculo de ordem não inteira, tem se mostrado importante e, em muitos casos, imprescindível na discussão de problemas advindos de diversas áreas da ciência, como na matemática, física, engenharia, economia e em muitos outros campos. Neste contexto, abordamos a integral fracionária e as derivadas fracionárias, segundo Caputo e segundo Riemann-Liouville. Dentre as funções relacionadas ao cálculo fracionário, uma das mais importantes é a função de Mittag-Leffler, surgindo naturalmente na solução de várias equações diferenciais fracionárias com coeficientes constantes. Tendo em vista a importância dessa função, a clássica função de Mittag-Leffler e algumas de suas várias generalizações são apresentadas neste trabalho. Na aplicação resolvemos a equação diferencial associada ao problema do oscilador harmônico fracionário, utilizando a transformada de Laplace e a derivada fracionária segundo Caputo.

Palavras-chave: Transformada de Laplace, derivada fracionária segundo Caputo, oscilador fracionário, funções de Mittag-Leffler.

Sumário

Agradecimentos

A Deus pela proteção e por mais esse sonho realizado!

À UNICAMP, por hospedar sonhos e realiações. Ao IMECC e ao programa de pós-graduação em Matemática Aplicada pela possibilidade de concretizar mais essa importante etapa em minha vida. À Capes pela concessão da bolsa de estudo.

Agradeço imensamente ao meu excelente orientador, o professor Edmundo Capelas de Oliveira, pela orientação, dedicação, disposição em ajudar, atenção desmedida, valiosos ensinamentos e amizade. Não tenho palavras para expressar toda a minha gratidão.

Aos professores do IMECC por todo o aprendizado.

Aos membros da banca, Dr. Rubens de Figueiredo Camargo, Dr. Jayme Vaz Júnior, Dr. Bruto Max Pimentel Escobar e Dr. João Maurício Rosário que gentilmente aceitaram o convite e que muito enriqueceram esse trabalho.

Aos meus queridos amigos, Mauro, Carol e Kaleb, que tornaram meus dias mais felizes em Campinas. E aos meus amigos, Thais, Thiago, Gregory e Zé, que mesmo distantes estiveram sempre presente.

Aos colegas de orientação por eventuais ajudas em especial ao Júnior pela auxílio computacional.

Em especial, agradeço a meus pais, por todo amor, apoio, carinho e por serem os melhores pais que alguém poderia ter. Agradeço também a minha admirável irmã e amiga, Grazi, que sempre esteve presente em cada etapa de minha vida me apoiando e ajudando. Agradeço também aos meus pequenos, Larissa e Teo, que trouxeram um pouco mais de cor para essa jornada.

Enfim, agradeço a todas que passaram em minha vida e contribuiram de alguma forma para o que sou hoje.

Introdução

Em 1695 numa famosa carta, L'Hôpital pergunta a Leibniz o significado de $\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$, sendo n um número fracionário. A partir de então o cálculo fracionário[1] chamou a atenção de outros importantes matemáticos, tais como, Euler, Laplace, Fourier, Abel, Liouville, Riemann, Laurent entre outros. Devido à contribuições destes e de outros matemáticos, a teoria de operadores generalizados atingiu um nível de formalismo suficiente para dar início aos estudos mais modernos [7]. A partir de então o n deixou de ser apenas um número fracionário podendo ser também um número natural, inteiro, racional, irracional ou até mesmo complexo.

O cálculo fracionário tem se mostrado importante na discussão de problemas advindos de várias áreas do conhecimento. A vantagem mais importante de sua utilização em aplicações é a sua propriedade não-local, ou seja, o próximo estado de um sistema não depende apenas de seu estado atual, mas sim de todos os seus estados anteriores [4], traduzindo assim melhor a realidade da natureza.

Assim como o cálculo de ordem inteira tem a ele associado uma classe de funções, o cálculo de ordem fracionária tem a ele associado algumas funções. Dentre as funções relacionadas ao cálculo fracionário a função de Mittag-Leffler merece destaque, pois esta desempenha um papel fundamental na solução de equações diferenciais fracionárias, surgindo naturalmente na solução dessas equações [16]. Várias generalizações das funções de Mittag- Leffler foram desenvolvidos desde 1903.

Do mesmo modo que a função exponencial é solução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, a função de Mittag-Leffler é solução de equações diferenciais fracionária lineares com coeficientes constantes. E, portanto, a função de Mittag-Leffler pode ser interpretada como uma generalização da função exponencial.

Em 1903 Mittag-Leffler [21] introduziu a clássica função de Mittag-Leffler possuindo apenas um parâmetro complexo, em 1905 Wiman [35] generalizou essa função para dois parâmetros, definindo assim a função de Mittag-Leffler com dois parâmetros. Em 1971 Prabhakar [26] introduziu a chamada função de Mittag-Leffler com três parâmetros, sendo uma possível generalização da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros. Shukla e Prajapati [29] em 2007 introduziram a função de Mittag-Leffler com quatro parâmetros. Em 2012, Salim e Faraj [28] definiram uma função de Mittag-Leffler com seis parâmetros, sendo esta uma possível generalização das demais funções de Mittag-Leffler definidas com menos de seis parâmetros. E, recentemente, em 2013, Khan e Ahmed [17], introduziram uma função de Mittag-Leffler de cinco parâmetros.

Como aplicação, iremos considerar o problema de determinar a posição de uma mola, resistente a compressão e a extensão, suspensa verticalmente, presa superiormente a um suporte fixo e que na sua extremidade inferior estaja fixa a um corpo de massa m muito maior que a massa da mola, a ponto da massa da mola poder ser considerada desprezível. Este sistema também está sujeito a

[1] Nomenclatura utilizada para o cálculo de ordem não inteira.

uma força externa atuando sobre ele. Puxando esta massa verticalmente e soltando-a, este corpo entrará em movimento.

A equação diferencial que descreve este sistema sem amortecimento é

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \omega^2 x(t) = f(t).$$

Para refinar esta equação substituímos a derivada de ordem inteira pela derivada fracionária segundo Caputo e assim obtemos a equação diferencial fracionária do oscilador,

$${}_*D^\alpha x(t) + \omega^\alpha x(t) = f(t),$$

sendo $1 < \alpha \leq 2$. Por conveniência escrevemos ω^α, pois no caso em que $\alpha \to 2$ recupera a clássica equação. A solução da equação do oscilador fracionário é dada em termos da função de Mittag-Leffler e será obtida através da utilização da metodologia da transformada de Laplace.

Este trabalho possue quatro capítulos e três apêndices distribuídos da seguinte forma. No Capítulo 1, apresentamos as transformadas integrais de Fourier e Laplace e algumas de suas propriedades, uma vez que estas são muito úteis para a resolução de equações diferenciais. No Capítulo 2 apresentamos as definições das funções de Mittag-Leffler de um, dois, três, quatro, cinco e seis parâmetros, bem como apresentaremos algumas relações entre essas funções e o cálculo da transformada de Laplace das funções de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros. No Capítulo 3 apresentamos as definições das derivadas fracionárias segundo Riemann-Liouville e Caputo e da integral fracionária, encontramos as transformadas de Laplace da integral fracionária e das derivadas fracionárias, segundo Caputo e segundo Riemann-Liouville e também apresentamos a integral e as derivadas fracionárias da função de Mittag-Leffler de seis parâmetros. No Capítulo 4 apresentamos uma aplicação, resolvemos a equação diferencial fracionária do oscilador utilizando a derivada fracionária de Caputo e a metodologia da transformada de Laplace.

No Apêndice A apresentamos brevemente as funções gama e beta. No Apêndice B apresentamos as funções k-Mittag-Leffler com cinco parâmetros, que é uma generalização da função de Mittag-Leffler. Devido a função k-Mittag-Leffler ser definida através de uma série de potência envolvendo a função k-gama e o símbolo k-Pochhammer, apresentamos também essas definições. E por fim, no Apêndice C, apresentamos um pouco da biografia dos matemáticos cujos nomes são destaques nesse trabalho, a saber: Fourier, Mittag-Leffler e Laplace.

Capítulo 1

Transformadas de Fourier e Laplace

A metodologia das transformadas integrais [6] desempenha papel central na procura de uma solução particular de uma equação diferencial. Uma transformada integral tem a forma

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s,t) f(t) dt,$$

sendo K uma função dada, chamada de núcleo da transformação. Os limites α e β podem ser menos infinito e mais infinito, respectivamente. Essa operação transforma a função f em F, F é a chamada transformada de f.

Nesse capítulo iremos considerar apenas as transformadas de Fourier (Apêndice C.1) e Laplace (Apêndice C.3). Na transformada de Fourier os limites α e β são respectivamente menos e mais infinito e o núcleo da transformação é $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ist}$, já na transformada de Laplace os limites α e β são respectivamente zero e mais infinito e $K(s,t) = e^{-st}$. Essas transformadas são ferramentas poderosas para resolver equações diferenciais tanto ordinárias quanto parciais. Com a utilização delas transformamos uma equação dada em outra equação, aparentemente mais simples de resolver, resolvemos essa equação e calculamos a transformada inversa da solução da equação que foi transformada, logo encontramos a solução da equação original dada.

1.1 Transformada de Fourier

Nessa seção abordaremos as transformadas de Fourier direta e inversa e apresentaremos algumas propriedades das mesmas. Começamos essa seção apresentando a integral de Fourier.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função contínua por partes, integrável e absolutamente integrável, denotamos a seguinte expressão para a função f por integral de Fourier,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-i\omega(v-x)} dv d\omega.$$

Observemos que podemos escrever a integral de Fourier como,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-i\omega v} dv \right] e^{i\omega x} d\omega.$$

A função que aparece entre cochetes é conhecida como transformada de Fourier da função f, e é uma função de ω. Denotaremos essa transformada ora por $\widehat{f}(\omega)$ ora por $\mathcal{F}[f(x)]$. Assim,

$$\widehat{f}(\omega) \equiv \mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx. \tag{1.1.1}$$

E, portanto,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{iwx} d\omega, \tag{1.1.2}$$

é a transformada de Fourier inversa e algumas vezes escreveremos $\mathcal{F}^{-1}[f(w)]$.

1.1.1 Propriedades da transformada de Fourier

Nessa seção discutimos algumas propriedades das transformadas de Fourier direta e inversa [8, 10]. Essas propriedades estão apresentadas na forma de teoremas, e as respectivas demostrações envolvem apenas a transformada de Fourier direta.

Teorema 1.1. *A transformada de Fourier e sua inversa são operadores lineares. Ou seja, para c e d constante e f e g funções temos,*

$$\mathcal{F}[(cf + dg)(x)] = c\mathcal{F}[f(x)] + d\mathcal{F}[g(x)].$$

E, analogamente,

$$\mathcal{F}^{-1}[(cf + dg)(x)] = c\mathcal{F}^{-1}[f(x)] + d\mathcal{F}^{-1}[g(x)].$$

O teorema a seguir relaciona a transformada de Fourier de uma função f com a transformada do produto dessa função por x^n, sendo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.2. *A transformada de Fourier do produto de f por x^n é dada por,*

$$\mathcal{F}[x^n f(x)] \;=\; i^n \frac{d^n}{d\omega^n} \mathcal{F}[f(x)]. \tag{1.1.3}$$

E a transformada de Fourier inversa do produto de f por ω^n é dada por,

$$\mathcal{F}^{-1}[\omega^n f(\omega)] \;=\; (-i)^n \frac{d^n}{dx^n} \mathcal{F}^{-1}[f(\omega)]. \tag{1.1.4}$$

Demonstração. Para demonstrar a Eq.(1.1.3) observemos que

$$x^n f(x) e^{-i\omega x} = i^n \frac{d^n}{d\omega^n}[f(x) e^{-i\omega x}]. \tag{1.1.5}$$

De fato, a Eq.(1.1.5) vale, pois começando com o termo à direita dessa equação temos,

$$\begin{aligned}
i^n \frac{d^n}{d\omega^n}[f(x)e^{-i\omega x}] &= i^n f(x)(-ix)^n e^{-i\omega x} \\
&= i^n f(x)(-1)^n i^n x^n e^{-i\omega x} \\
&= i^{2n} f(x)(-1)^n x^n e^{-i\omega x} \\
&= (-1)^n(-1)^n f(x) x^n e^{-i\omega x} \\
&= x^n f(x) e^{-i\omega x}.
\end{aligned}$$

A transformada de Fourier do produto x^n por f é

$$\mathcal{F}[x^n f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Substituindo a Eq.(1.1.5) na equação acima temos,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x^n f(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} i^n \frac{d^n}{d\omega^n} [f(x) e^{-i\omega x}] dx \\ &= i^n \frac{d^n}{d\omega^n} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right] \\ &= i^n \frac{d^n}{d\omega^n} \mathcal{F}[f(x)], \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. ∎

Teorema 1.3. *Seja f uma função diferenciável tal que $f(x) = 0$ quando $|x| \to \infty$. Assim valem as seguintes propriedades:*

A transformada de Fourier da n-ésima derivada de f, $f^{(n)}$, é dada por,

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (i\omega)^n \mathcal{F}[f(x)].$$

A transformada de Fourier inversa da n-ésima derivada de f é dada por,

$$\mathcal{F}^{-1}[f^{(n)}(\omega)] = (-ix)^n \mathcal{F}^{-1}[f(\omega)].$$

Demonstração. A transformada de Fourier da n-ésima derivada de f é dada por,

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Integrando por partes temos,

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-i\omega x} f^{(n-1)}(x) |_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n-1)}(x) e^{-i\omega x} dx \right].$$

Como por hipotése $f(x) = 0$ quando $|x|$ é suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f^{(n)}(x)] &= i\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n-1)}(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= i\omega \mathcal{F}[f^{(n-1)}(x)]. \end{aligned}$$

Logo, repetindo o processo de integração por partes $n-1$ vezes e considerando $f(x) = 0$ quando $|x|$ tende ao infinito temos,

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (i\omega)^n \mathcal{F}[f(x)].$$

∎

Teorema 1.4. *A transformada de Fourier de um deslocamento é dado por,*

$$\mathcal{F}[f(x-a)] \;\; = \;\; e^{-i\omega a}\mathcal{F}[f(x)].$$

Demonstração. Por definição a transformada de Fourier do deslocamento da função f é dada por

$$\mathcal{F}[f(x-a)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-i\omega x}dx.$$

Considerando a mudança $x \to x+a$ na integral acima temos,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(x-a)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega(x+a)}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}e^{-i\omega a}dx \\
&= e^{-i\omega a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \\
&= e^{-i\omega a}\mathcal{F}[f(x)].
\end{aligned}$$

■

Teorema 1.5. *A transformada de Fourier da função $f(bx)$, sendo b uma constante diferente de zero, é*

$$\mathcal{F}[f(bx)](\omega) \;\; = \;\; \frac{1}{b}\mathcal{F}[f(x)]\left(\frac{\omega}{b}\right).$$

Demonstração. A transformada de Fourier da função f no ponto bx é dada por,

$$\mathcal{F}[f(bx)](\omega) \;\; = \;\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(bx)e^{-i\omega x}dx.$$

Com a mudança $x \to \dfrac{x}{b}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(bx)](\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega\frac{x}{b}}\frac{dx}{b} \\
&= \frac{1}{b}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\frac{\omega}{b}x}dx\right] \\
&= \frac{1}{b}\mathcal{F}[f(x)]\left(\frac{\omega}{b}\right).
\end{aligned}$$

■

A seguir temos um teorema que nos garante que a transformada de Fourier de uma função f é par ou ímpar e real ou complexa dependendo se essa função é par ou ímpar, respectivamente.

Teorema 1.6. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ então valem as seguintes propriedades:*

a) Se f é uma função par então $\widehat{f}$ é real e par;

b) Se f é uma função ímpar então $\widehat{f}$ é imaginária e ímpar;

c) A parte real da transformada de Fourier de f, $Re(\widehat{f})$, é uma função par e a parte imaginária, $Im(\widehat{f})$, é uma função ímpar.

Demonstração. Para demonstrarmos esses itens observemos que podemos escrever a transformada de Fourier em termos das funções seno e cosseno, uma vez que $e^{-i\omega x} = \cos(\omega x) - i \operatorname{sen}(\omega x)$, assim

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\cos(\omega x) - i \operatorname{sen}(\omega x)\right] dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x)\, dx - i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen}(\omega x)\, dx. \qquad (1.1.6)
\end{aligned}$$

Demonstraremos primeiro o item a). Considerando f uma função par, assim pela Eq.(1.1.6) temos

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x)\, dx.$$

Logo, $\widehat{f}$ é real. Mostraremos agora que $\widehat{f}$ é par, ou seja, mostraremos que $\widehat{f}(-\omega) = \widehat{f}(\omega)$.

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(-\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(-\omega x)\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x)\, dx \\
&= \widehat{f}(\omega).
\end{aligned}$$

Demonstraremos agora o item b). Seja f uma função ímpar então pela Eq.(1.1.6) temos

$$\widehat{f}(\omega) = -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen}(\omega x)\, dx.$$

Logo, $\widehat{f}$ é uma função imaginária. Mostraremos agora que $\widehat{f}$ é ímpar, ou seja, mostraremos que $\widehat{f}(-\omega) = -\widehat{f}(\omega)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(-\omega) &= -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen}(-\omega x)\, dx \\
&= i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen}(\omega x)\, dx \\
&= -\widehat{f}(\omega).
\end{aligned}$$

Por fim demonstraremos o item c). A parte real da transformada de Fourier da função f é dada por,

$$\text{Re}(\widehat{f}(\omega)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x)\, dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\text{Re}(\widehat{f}(-\omega)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(-\omega x)\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x)\, dx \\
&= \text{Re}(\widehat{f}(\omega)).
\end{aligned}$$

Logo, a parte real da transformada de Fourier é uma função par. A parte imaginária é dada por, $Im(\widehat{f}(\omega)) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen}(\omega x)\, dx$, e

$$\begin{aligned}
Im(\widehat{f}(-\omega)) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen}(-\omega x)\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen}(\omega x)\, dx \\
&= -Im(\widehat{f}(\omega)).
\end{aligned}$$

Portanto, a parte imaginária da transformada de Fourier é uma função ímpar. ■

Teorema 1.7. *Sejam $\widehat{f}$ e $\widehat{g}$ as respectivas transformada de Fourier das funções f e g então a transformada de Fourier do produto de convolução, $f * g$, definido por*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\tau) g(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(x-\tau) d\tau,$$

é igual a $\sqrt{2\pi}$ vezes o produto das transformadas, ou seja, vale a relação

$$\mathcal{F}[(f * g)(x)] = \sqrt{2\pi}\, \widehat{f}(\omega) \widehat{g}(\omega).$$

Demonstração. A transformada de Fourier do produto de convolução é dada por,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[(f * g)(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x) e^{-iwx} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(x-\tau) d\tau \right] e^{-iwx} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(x-\tau) e^{-iwx} d\tau dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x-\tau) e^{-iwx} dx \right] d\tau.
\end{aligned}$$

Considerando a mudança de variável $t = x - \tau$ na integral entre conchetes, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[(f*g)(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-iw(t+\tau)}dt\right]d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-iw\tau}\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-iwt}dt\right]d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-iw\tau}\sqrt{2\pi}\widehat{g}(\omega)d\tau \\ &= \sqrt{2\pi}\widehat{g}(\omega)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-iw\tau}d\tau \\ &= \sqrt{2\pi}\widehat{g}(\omega)\widehat{f}(\omega).\end{aligned}$$

Portanto, a transformada de Fourier do produto de convolução de duas funções é igual ao produto das transformadas dessas funções vezes $\sqrt{2\pi}$. ■

De maneira semelhante à série de Fourier de funções pares e ímpares que são dadas em séries de cossenos e senos, respectivamente, temos a transformada de Fourier de funções pares e ímpares são também transformada de Fourier em senos e cossenos, respectivamente [8, 9].

Pela Eq.(1.1.6) podemos escrever a transformada de Fourier em termos das funções seno e cosseno. Considerando f uma função par na Eq.(1.1.6) temos

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\omega x)\,dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)\cos(\omega x)\,dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)\cos(\omega x)\,dx,\end{aligned}$$

que é a transformada de Fourier em cossenos.

Consideremos agora f uma função ímpar então pela Eq.(1.1.6) temos

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\omega) &= -i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{sen}\,(\omega x)\,dx \\ &= -i\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{sen}\,(\omega x)\,dx \\ &= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{sen}\,(\omega x)\,dx,\end{aligned}$$

que é a transformada de Fourier em senos.

Veremos agora a transformada de Fourier inversa de uma função par e de uma função ímpar. A transformada de Fourier inversa é dada por,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{iwx}d\omega.$$

Escrevendo a exponencial complexa em termos das funções seno e cosseno obtemos,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)\left[\cos(\omega x)+i\,\mathrm{sen}(\omega x)\right]d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)\cos(\omega x)d\omega+\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)\,\mathrm{sen}(\omega x)d\omega. \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

Seja f uma função par. Então sabemos pelo **Teorema 1.6** que $\widehat{f}$ é par e real. De fato, pela Eq.(1.1.7) temos

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)\cos(\omega x)d\omega \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}\widehat{f}(\omega)\cos(\omega x)d\omega \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}\widehat{f}(\omega)\cos(\omega x)d\omega, \end{aligned}$$

que é a transformada de Fourier inversa em cossenos.

Consideremos agora f uma função ímpar, sabemos pelo **Teorema 1.6** que $\widehat{f}$ é ímpar e complexa. De fato, pela Eq.(1.1.7) temos

$$\begin{aligned} f(x) &= i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)\,\mathrm{sen}(\omega x)d\omega \\ &= i\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}\widehat{f}(\omega)\,\mathrm{sen}(\omega x)d\omega \\ &= i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}\widehat{f}(\omega)\,\mathrm{sen}(\omega x)d\omega, \end{aligned}$$

que é a transformada inversa de Fourier em senos.

Portanto, se f é uma função par temos

$$\widehat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)\cos(\omega x)\,dx,$$

que é conhecida como transformada de Fourier em cossenos cuja inversa é dada por

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}\widehat{f}(\omega)\cos(\omega x)d\omega.$$

Se f é uma função ímpar, temos

$$\widehat{f}(\omega) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{sen}(\omega x)\,dx,$$

que é conhecida como transformada de Fourier em senos cuja inversa é dada por

$$f(x) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}\widehat{f}(\omega)\,\mathrm{sen}(\omega x)d\omega.$$

1.2 Transformada de Laplace

Nessa seção, de modo análogo a seção anterior que tratamos sobre a transformada de Fourier, abordaremos a transformada de Laplace e sua inversa e veremos algumas de suas propriedades. Mais adiante, no Capítulo 4 usaremos a transformada de Laplace para resolver a equação diferencial fracionária associada ao problema do oscilador harmônico.

Definição 1.1. *Seja f uma função de t e definida para $t > 0$. Então a transformada de Laplace de f, que denotamos por $F(s)$ ou $\mathscr{L}[f(t)]$, é definida pela integral imprópria*

$$F(s) \equiv \mathscr{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt, \tag{1.2.1}$$

sendo s um parâmetro complexo[1].

Como vimos acima, a transformada de Laplace de uma dada função f envolve uma integral cujos limites são 0 e ∞. Assim, os valores de $f(t)$ para $t < 0$ não são considerados para o cálculo da transformada de Laplace dessa função. A fim de enfatizar isso, vamos considerar apenas as chamadas funções causais, ou seja, $f(t) = 0$ para $t < 0$. A função causal mais simples é a de Heaviside, $u(t)$, definida por

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } \ t \geq 0; \\ \\ 0, & \text{se } \ t < 0. \end{cases}$$

Observemos que há uma relação entre a transformada de Fourier e de Laplace, pois se $f(t) = 0$ para $t < 0$, temos

$$\mathcal{F}\left[f(t)\right](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathscr{L}[f(t)](i\omega).$$

De fato,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathscr{L}[f(t)](i\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-i\omega t} f(t)dt = \mathcal{F}\left[f(t)\right](\omega).$$

A transformada de Laplace de uma função f, $\mathscr{L}[f(t)]$, existe se f satisfaz certas condições. No teorema a seguir veremos quais são essas condições.

Teorema 1.8. *Se f é uma função seccionalmente contínua no intervalo $0 \leq t \leq A$, para qualquer A, e $|f(t)| \leq Ke^{at}$ quando $t \geq M$, sendo a, K e M constantes reais e K e M positivas. Então a transformada de Laplace de f, $\mathscr{L}[f(t)]$, existe para $Re(s) > a$.*

Demonstração. Separando a integral imprópria, $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$, em duas partes obtemos

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^M e^{-st} f(t)dt + \int_M^\infty e^{-st} f(t)dt. \tag{1.2.2}$$

[1] Neste trabalho vamos utilizar $\text{Re}(s)$, isto é, considerando uma variável real.

A primeira integral à direita do sinal de igualdade na Eq.(1.2.2) existe, pois por hipótese f é uma função seccionalmente contínua no intervalo $0 \leq t \leq A$, em particular para $A = M$. Mostraremos agora que a segunda integral também existe. Para $t \geq M$ temos

$$\begin{aligned} \left| \int_M^\infty e^{-st} f(t) dt \right| &\leq \int_M^\infty \mid e^{-st} f(t) \mid dt \\ &\leq \int_M^\infty e^{-st} \mid f(t) \mid dt \\ &\leq \int_M^\infty e^{-st} K e^{at} dt \\ &= K \int_M^\infty e^{(a-s)t} dt \\ &= K \lim_{A \to \infty} \int_M^A e^{(a-s)t} dt \\ &= K \lim_{A \to \infty} \frac{e^{(a-s)A} - e^{(a-s)M}}{a-s}. \end{aligned}$$

Para $\text{Re}(s) > a$ a segunda integral na Eq.(1.2.2) converge, e assim

$$\left| \int_M^\infty e^{-st} f(t) dt \right| \leq K \frac{-e^{(a-s)M}}{a-s}.$$

Portanto, a transformada de Laplace de f, $\mathscr{L}[f(t)]$ existe para $\text{Re}(s) > a$. ■

Dizemos que uma função f é de ordem exponencial a se existem constantes $M > 0$ e $a \in \mathbb{R}$, tal que para todo $t > 0$, $|f(t)| \leq M e^{at}$.

Tendo em mente o desenvolvimento do Capítulo 4, como exemplo, calculamos a transformada de Laplace da função $f(t) = t^\alpha$ com $\text{Re}(\alpha) > -1$.

Exemplo 1.1. *Calcular a transformada de Laplace de $f(t) = t^\alpha$ com Re$(\alpha) > -1$.*

Pela Definição 1.1 temos,

$$\mathscr{L}[t^\alpha] = \int_0^\infty e^{-st} t^\alpha dt.$$

Tomando a mudança $u = st$ obtemos,

$$\mathscr{L}[t^\alpha] = \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{s} \right)^\alpha \frac{du}{s} = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^\alpha du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}},$$

para $\text{Re}(\alpha+1) > 0$. Logo, $\mathscr{L}[t^\alpha] = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$. □

Assim como a transformada de Fourier, a transformada de Laplace também é um operador linear. Sejam f_1 e f_2 funções cujas transformadas de Laplace existam para $\text{Re}(s) > a_1$ e $\text{Re}(s) > a_2$, respectivamente. Assim, para α e β constantes e $\text{Re}(s) > \max(a_1, a_2)$ temos,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-st}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]dt\\
&= \int_0^{\infty} [\alpha e^{-st} f_1(t)+\beta e^{-st} f_2(t)]dt\\
&= \alpha\int_0^{\infty} e^{-st} f_1(t)+\beta\int_0^{\infty} e^{-st} f_2(t)dt\\
&= \alpha\mathscr{L}[f_1(t)]+\beta\mathscr{L}[f_2(t)].
\end{aligned}
$$

1.2.1 Propriedades da transformada de Laplace

Nessa seção apresentamos algumas propriedades da transformada de Laplace. Essas propriedades são apresentadas em forma de teoremas.

A primeira propriedade que apresentamos relaciona a transformada de Laplace da derivada primeira de uma função com a transformada de Laplace dessa função e será apresentada no **Teorema 1.9**. Em seguida temos o **Teorema 1.10**, que generaliza esse resultado, relacionando, então, a transformada de Laplace da derivada de ordem n de uma função com a transformada de Laplace dessa função.

Teorema 1.9. *Sejam f uma função contínua e f' seccionalmente contínua em qualquer intervalo $0 \leq t \leq A$. E, além disso, existem constantes K, M e a tais que $|f(t)| \leq Ke^{at}$ para $t \geq M$. Então a transformada de Laplace da derivada de f existe para $Re(s) > a$ e vale a relação*

$$\mathscr{L}[f'(t)] = s\mathscr{L}[f(t)] - f(0).$$

Demonstração. Consideremos a seguinte integral

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)dt. \tag{1.2.3}$$

Como a função f' é seccionalmente contínua no intervalo $0 \leq t \leq A$ iremos chamar os possíveis pontos de descontinuidades por ξ_0, ξ_1,$\cdots$,ξ_n, para $0 \leq \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_n \leq A$. Assim podemos escrever a Eq.(1.2.3) como

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)dt = \int_0^{\xi_0} e^{-st} f'(t)dt + \int_{\xi_0}^{\xi_1} e^{-st} f'(t)dt + \cdots + \int_{\xi_n}^{A} e^{-st} f'(t)dt. \tag{1.2.4}$$

Integrando por partes cada uma dessas integrais à direita do sinal de igualdade na Eq.(1.2.4) e rearanjando obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_0^A e^{-st} f'(t)dt &= e^{-st}f(t)\Big|_0^{\xi_0} + e^{-st}f(t)\Big|_{\xi_0}^{\xi_1} + \cdots + e^{-st}f(t)\Big|_{\xi_n}^{A} +\\
&\quad s\left(\int_0^{\xi_0} e^{-st}f(t)dt + \int_{\xi_0}^{\xi_1} e^{-st}f(t)dt + \cdots + \int_{\xi_n}^{A} e^{-st}f(t)dt\right).
\end{aligned}
$$

Como f é contínua temos

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)dt = -f(0) + e^{-sA}f(A) + s\int_0^A e^{-st}f(t)dt.$$

Como por hipótese $|f(t)|\leq Ke^{at}$ para $t \geq M$ temos que $|f(A)|\leq Ke^{aA}$ para $A \geq M$, e assim $|e^{-sA}f(A)|\leq Ke^{-(s-a)A}$. Logo, $e^{-sA}f(A) \to 0$ quando $A \to \infty$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}f'(t)dt &= \lim_{A\to\infty}\left[-f(0)+e^{-sA}f(A)+s\int_0^A e^{-st}f(t)dt\right] \\
\mathscr{L}[f'(t)] &= s\mathscr{L}[f(t)]-f(0),
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

O teorema a seguir apresenta uma generalização do **Teorema 1.9**.

Teorema 1.10. *Suponha que as funções f, f',$\cdots$, $f^{(n-1)}$ são contínuas e que $f^{(n)}$ é seccionalmente contínua em qualquer intervalo $0 \leq t \leq A$. E, além disso, existem constantes K, M e a tais que $|f(t)|\leq Ke^{at}$, $|f'(t)|\leq Ke^{at}$,$\cdots$, $|f^{(n)}(t)|\leq Ke^{at}$ para $t \geq M$. Então a transformada de Laplace da n-ésima derivada de f, $f^{(n)}$, existe para $Re(s) > a$ e vale a relação*

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^n\mathscr{L}[f(t)] - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-(j+1)}f^{(j)}(0).$$

Demonstração. Mostraremos por indução que vale a equação

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^n\mathscr{L}[f(t)] - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-(j+1)}f^{(j)}(0). \tag{1.2.5}$$

Pelo **Teorema 1.9** temos que a Eq.(1.2.5) vale para $n = 1$. Suponha que vale a Eq.(1.2.5) para $n = k$, ou seja,

$$\mathscr{L}[f^{(k)}(t)] = s^k\mathscr{L}[f(t)] - \sum_{j=0}^{k-1} s^{k-(j+1)}f^{(j)}(0).$$

Mostraremos que vale a Eq.(1.2.5) para $n = k + 1$, ou seja, mostraremos que

$$\mathscr{L}[f^{(k+1)}(t)] = s^{k+1}\mathscr{L}[f(t)] - \sum_{j=0}^{k} s^{k+1-(j+1)}f^{(j)}(0).$$

Como a função $f^{(k+1)}$ é seccionalmente contínua no intervalo $0 \leq t \leq A$, iremos chamar os possíveis pontos de descontinuidades por ξ_0, ξ_1,$\cdots$,ξ_n, sendo $0 \leq \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_n \leq A$. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[f^{(k+1)}(t)] &= \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}f^{(k+1)}(t)dt \\
&= \int_0^{\xi_0} e^{-st}f^{(k+1)}(t)dt + \int_{\xi_0}^{\xi_1} e^{-st}f^{(k+1)}(t)dt \\
&\quad + \cdots + \lim_{A\to\infty}\int_{\xi_n}^{A} e^{-st}f^{(k+1)}(t)dt. \qquad (1.2.6)
\end{aligned}$$

Integrando por partes cada uma dessas integrais à direita do sinal de igualdade na Eq.(1.2.6) obtemos

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f^{(k+1)}(t)] &= e^{-st}f^{(k)}(t)\Big|_0^{\xi_0} + e^{-st}f^{(k)}(t)\Big|_{\xi_0}^{\xi_1} + \cdots + \lim_{A\to\infty} e^{-st}f^{(k)}(t)\Big|_{\xi_n}^{A} + \\ & s\left(\int_0^{\xi_0} e^{-st}f^{(k)}(t)dt + \int_{\xi_0}^{\xi_1} e^{-st}f^{(k)}(t)dt + \cdots + \lim_{A\to\infty}\int_{\xi_n}^{A} e^{-st}f^{(k)}(t)dt\right).\end{aligned}$$

Como $f^{(k)}$ é contínua temos

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f^{(k+1)}(t)] &= -f^{(k)}(0) + \lim_{A\to\infty} e^{-sA}f^{(k)}(A) + s\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}f^{(k)}(t)dt \\ &= s\int_0^\infty e^{-st}f^{(k)}(t)dt - f^{(k)}(0).\end{aligned}$$

Como por hipótese $|f^{(k)}(t)|\leq Ke^{at}$ para $t \geq M$ temos que $|f^{(k)}(A)|\leq Ke^{aA}$ para $A \geq M$, e assim $|e^{-sA}f^{(k)}(A)|\leq Ke^{-(s-a)A}$. Logo, $e^{-sA}f^{(k)}(A) \to 0$ quando $A \to \infty$. Portanto,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f^{(k+1)}(t)] &= s\int_0^\infty e^{-st}f^{(k)}(t)dt - f^{(k)}(0) \\ &= s\mathscr{L}[f^{(k)}(t)] - f^{(k)}(0) \\ &= s\left(s^k\mathscr{L}[f(t)] - \sum_{j=0}^{k-1} s^{k-(j+1)}f^{(j)}(0)\right) - f^{(k)}(0) \\ &= s^{k+1}\mathscr{L}[f(t)] - \sum_{j=0}^{k-1} s^{k+1-(j+1)}f^{(j)}(0) - f^{(k)}(0) \\ &= s^{k+1}\mathscr{L}[f(t)] - \sum_{j=0}^{k} s^{k+1-(j+1)}f^{(j)}(0).\end{aligned}$$

Logo, vale a Eq.(1.2.5), como queríamos demonstrar. ■

Podemos calcular a derivada da transformada de Laplace em relação a variável s. Suponha que a transformada de Laplace da função f, $\mathscr{L}[f(t)]$, exista, então derivando-a obtemos,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathscr{L}[f(t)]}{ds} &= -\int_0^\infty tf(t)e^{-st}dt \\ &= -\mathscr{L}[tf(t)].\end{aligned}$$

E quando tomamos derivadas sucessivas da transformada de Laplace da função f em relação a s, obtemos

$$\frac{d^n\mathscr{L}[f(t)]}{ds^n} = (-1)^n\mathscr{L}[t^nf(t)].$$

A menos que se diga o contrário todas funções a seguir são seccionalmente contínuas e de ordem exponencial, de modo que a transformada de Laplace exista.

Teorema 1.11. *Se $\mathscr{L}[f(t)] \equiv F(s)$ existe para $Re(s) > a$ e se b é uma constante então a transformada de Laplace do produto das funções e^{bt} e f, $\mathscr{L}[e^{bt}f(t)]$, é dada por*

$$\mathscr{L}[e^{bt}f(t)] = F(s-b),$$

sendo $Re(s) > a+b$.

Demonstração. Por definição da transformada de Laplace temos,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[e^{bt}f(t)] &= \int_0^\infty e^{bt}f(t)e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty f(t)e^{-(s-b)t}dt \\ &= F(s-b).\end{aligned}$$

Como $|f(t)| \leq Ke^{at}$, pois estamos considerando f de ordem exponencial, temos $|e^{bt}f(t)| \leq Ke^{(a+b)t}$ e, portanto, $\text{Re}(s) > a+b$, como queríamos demonstrar. ∎

Teorema 1.12. *Se $\mathscr{L}[f(t)] \equiv F(s)$ existe e se $\lambda > 0$ então*

$$\mathscr{L}[f(\lambda t)] = \frac{1}{\lambda}F\left(\frac{s}{\lambda}\right).$$

Demonstração. Por definição temos,

$$\mathscr{L}[f(\lambda t)] = \int_0^\infty f(\lambda t)e^{-st}dt. \tag{1.2.7}$$

Consideremos a mudança $u = \lambda t$ na Eq.(1.2.7), logo

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f(\lambda t)] &= \int_0^\infty f(u)e^{-s\frac{u}{\lambda}}\frac{du}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda}F\left(\frac{s}{\lambda}\right),\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ∎

Teorema 1.13. *Sejam $\mathscr{L}[f(t)]$ e $\mathscr{L}[g(t)]$ as respectivas transformadas de Laplace das funções f e g, então a transformada de Laplace do produto de convolução, $f * g$, definido por*

$$(f*g)(t) = \int_0^\infty f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)d\tau,$$

é igual ao produto das transformadas, ou seja, vale a relação

$$\mathscr{L}[(f*g)(t)] = \mathscr{L}[f(t)]\mathscr{L}[g(t)].$$

Demonstração. Pela definição de transformada de Laplace temos,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[(f*g)(x)] &= \int_0^\infty (f*g)(t)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right] e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)e^{-st}d\tau dt \\
&= \int_0^\infty f(\tau)\left[\int_0^\infty g(t-\tau)e^{-st}dt\right] d\tau.
\end{aligned}$$

Considerando a mudança de variável $x = t - \tau$ na integral entre conchetes, temos

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[(f*g)(x)] &= \int_0^\infty f(\tau)\left[\int_0^\infty g(x)e^{-s(x+\tau)}dx\right] d\tau \\
&= \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\left[\int_0^\infty g(x)e^{-sx}dx\right] d\tau \\
&= \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\mathscr{L}[g(t)]d\tau \\
&= \mathscr{L}[g(t)]\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau \\
&= \mathscr{L}[g(t)]\mathscr{L}[f(t)].
\end{aligned}$$

Logo, a transformada de Laplace do produto de convolução é igual ao produto das transformadas de Laplace. ∎

1.2.2 Transformada de Laplace inversa

Como dito anteriormente, uma das principais utilidade do uso de transformadas integrais é na resolução de problemas, pois muitas vezes é mais fácil encontrar a solução da equação transformada do que a solução do problema original, assim é fundamental obter a partir da solução do problema transformado, a função original. Assim, justifica-se a importância da transformada de Laplace inversa. A seguir temos o teorema da inversão da transformada de Laplace.

Teorema 1.14. *Se $F(s)$ é a transformada de Laplace de uma função f admissível, de ordem exponencial α, vale a fórmula de inversão*

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}F(s)ds. \tag{1.2.8}$$

onde γ denota um número complexo arbitrário, fixo, tal que $Re(\gamma) > \alpha$. A integral acima deve ser compreendida como uma integral complexa ao longo da reta vertical que passa pelo ponto $Re(s) > \gamma$.

A integral da Eq.(1.2.8) fornece o resultado direto da transformada de Laplace, e é conhecido como integral ou fórmula complexa de inversão [8]. Existem vários outros métodos para obter a transformada de Laplace inversa tal como o método de frações parciais.

Capítulo 2

Funções de Mittag-Leffler

Uma das funções mais importante relacionada ao cálculo fracionário é a função de Mittag-Leffler (Apêndice C.2), desempenhando um papel fundamental no estudo de equações diferenciais de ordem não-inteira [7]. Tendo em vista a importância dessa função, a clássica função de Mittag-Leffler e as várias generalizações desta serão apresentadas neste capítulo[1].

Assim como a função exponencial é solução de equações diferenciais linear com coeficientes constantes, a função de Mittag-Leffler é solução de equações diferenciais fracionária lineares com coeficientes constantes. E, portanto, a função de Mittag-Leffler pode ser interpretada como uma generalização da função exponencial. Nesse capítulo veremos as funções de Mittag-Leffler de um, dois, três, quatro, cinco e seis parâmetros. Apresentaremos algumas de suas propriedades e relações entre elas, além disso, nesse capítulo, apresentaremos alguns exemplos dessas funções, visto que, pelo menos em português, não temos um livro texto com este conteúdo.

2.1 Função de Mittag-Leffler de um parâmetro

Em 1903, Mittag–Leffler [21] estudou e definiu uma função, hoje conhecida em sua homenagem por função de Mittag–Leffler, sendo uma possível generalização da função exponencial. A função definida por ele depende apenas de um parâmetro. Vejamos agora a definição dada por Mittag-Leffler.

Definição 2.1 (Função de Mittag-Leffler de um parâmetro)**.** *A função de Mittag-Leffler é dada pela série*

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(1+\alpha k)}, \tag{2.1.1}$$

sendo $\alpha \in \mathbb{C}, Re(\alpha) > 0$. $\Gamma(x)$ *é a função gamma (Apêndice A).*

De fato, a função $E_\alpha(x)$ assim definida é uma generalização da função exponencial, pois quando consideramos $\alpha = 1$ temos,

$$E_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(1+k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

[1] Para as funções k-Mittag-Leffler, ver Apêndice B.

Observemos da definição acima que quando tomamos na função de Mittag-Leffler, $x = 0$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, ou seja, $E_\alpha(0)$, obtemos 1, pois

$$E_\alpha(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = \frac{1}{\Gamma(1)} + \frac{0}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{0}{\Gamma(2\alpha+1)} + \cdots = 1.$$

Exemplo 2.1. *Calcularemos a função de Mittag-Leffler com $\alpha = 0$, isto é, $E_0(x)$.*

Por definição da função de Mittag-Leffler de um parâmetro temos

$$E_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(0k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

Observemos que a série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ é uma série geométrica, cuja soma é $\dfrac{1}{1-x}$, para $|x|< 1$. Logo, para $|x|< 1$, $E_0(x) = \dfrac{1}{1-x}$. $\square$

De acordo com Prajapati e Shukla [27], as funções de Mittag-Leffler de um parâmetro, $E_\alpha(x)$, com $0 < \alpha < 1$ interpola entre as funções exponencial e $\dfrac{1}{1-x}$. A seguir temos uma representação gráfica (Gráfico 2.1) da função de Mittag-Leffler com um parâmetro, sendo $0 < \alpha < 1$, que ilustra esse fato. Usamos $\alpha = 0,4$ e $\alpha = 0,7$.

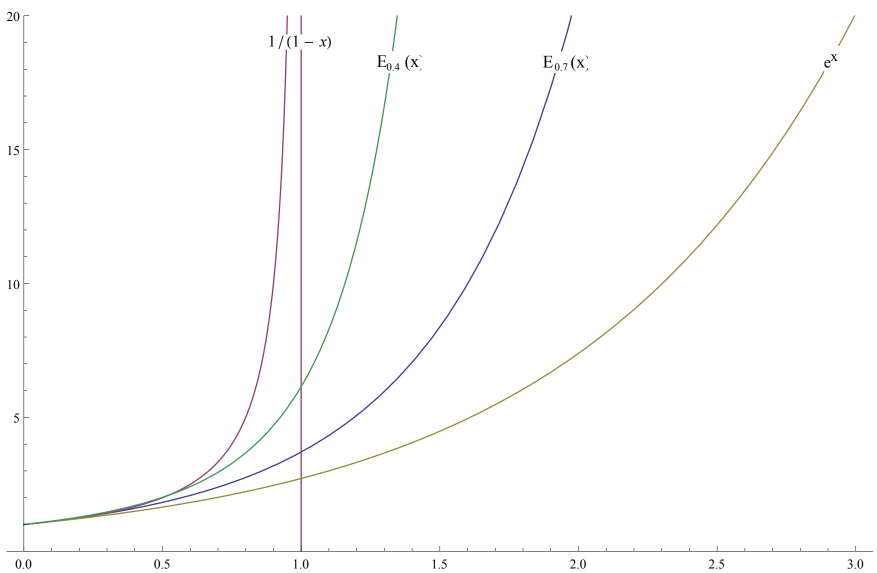

Gráfico 2.1: Função de Mittag-Leffler de um parâmetro, sendo $0 < \alpha < 1$.

Consideraremos agora as funções de Mittag-Leffler com parâmetro racional, ou seja, consideraremos $\alpha = \frac{p}{q}$ sendo $p, q \in \mathbb{N}$ e primos relativos. Assim temos o seguinte teorema[2]:

[2]Neste capítulo, para as demonstrações, algumas por outros métodos, ver [16, 17, 19, 26, 27, 28].

Teorema 2.1. *Sejam $p, q \in \mathbb{N}$ e primos relativos e $x \in \mathbb{C}$ então vale a relação,*

$$\frac{d^p}{dx^p} E_{\frac{p}{q}}\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = E_{\frac{p}{q}}\left(x^{\frac{p}{q}}\right) + \sum_{k=0}^{q-1} \frac{x^{\frac{p}{q}k-p}}{\Gamma\left(k\frac{p}{q}+1-p\right)}. \tag{2.1.2}$$

Demonstração. Como $\operatorname{Re}\left(\frac{p}{q}\right) > 0$ temos,

$$\begin{aligned}
\frac{d^p}{dx^p} E_{\frac{p}{q}}\left(x^{\frac{p}{q}}\right) &= \frac{d^p}{dx^p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{\frac{pk}{q}}}{\Gamma\left(\frac{pk}{q}+1\right)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{pk}{q}\right)\left(\frac{pk}{q}-1\right)\cdots\left(\frac{pk}{q}-(p-1)\right) x^{\frac{pk}{q}-p}}{\Gamma\left(\frac{pk}{q}+1\right)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{pk}{q}\right)\left(\frac{pk}{q}-1\right)\cdots\left(\frac{pk}{q}-(p-1)\right) x^{\frac{pk}{q}-p}}{\left(\frac{pk}{q}\right)\left(\frac{pk}{q}-1\right)\cdots\left(\frac{pk}{q}-(p-1)\right)\Gamma\left(\frac{pk}{q}-(p-1)\right)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{p\left(\frac{k}{q}-1\right)}}{\Gamma\left(p\left(\frac{k}{q}-1\right)+1\right)}.
\end{aligned}$$

Considerando a mudança de índices $k \to k+q$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d^p}{dx^p} E_{\frac{p}{q}}\left(x^{\frac{p}{q}}\right) &= \sum_{k=-q}^{\infty} \frac{x^{\frac{pk}{q}}}{\Gamma\left(\frac{pk}{q}+1\right)} \\
&= \sum_{k=-q}^{-1} \frac{x^{\frac{pk}{q}}}{\Gamma\left(\frac{pk}{q}+1\right)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{\frac{pk}{q}}}{\Gamma\left(\frac{pk}{q}+1\right)} \\
&= \sum_{k=-q}^{-1} \frac{x^{\frac{pk}{q}}}{\Gamma\left(\frac{pk}{q}+1\right)} + E_{\frac{p}{q}}(x^{\frac{p}{q}}).
\end{aligned}$$

Mas uma vez, efetuamos a mudança de índices $k \to k-q$ obtemos o resultado desejado, i.e.,

$$\frac{d^p}{dx} E_{\frac{p}{q}}\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = E_{\frac{p}{q}}\left(x^{\frac{p}{q}}\right) + \sum_{k=0}^{q-1} \frac{x^{\frac{p}{q}k-p}}{\Gamma\left(k\frac{p}{q}+1-p\right)}.$$

∎

Como caso particular do **Teorema 2.1** temos o seguinte corolário,

Corolário 2.1. *Sejam $p \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{C}$ então,*

$$\frac{d^p}{dx^p} E_p(x^p) = E_p(x^p).$$

Demonstração. Tomando $q = 1$ na Eq. (2.1.2) temos

$$\begin{aligned} \frac{d^p}{dx^p} E_p(x^p) &= E_p(x^p) + \sum_{k=0}^{1-1} \frac{x^{pk-p}}{\Gamma\left(kp+1-p\right)} \\ &= E_p(x^p) + \sum_{k=0}^{0} \frac{x^{p(k-1)}}{\Gamma\left(kp+1-p\right)} \\ &= E_p(x^p) + \frac{x^{-p}}{\Gamma\left(1-p\right)} \\ &= E_p(x^p), \end{aligned}$$

conforme o enunciado desse corolário. ■

Veremos agora um teorema que nos apresenta a fórmula de duplicação para a função de Mittag-Leffler de um parâmetro.

Teorema 2.2. *Sejam $x \in \mathbb{C}$ e α um parâmetro real, assim*

$$E_{2\alpha}(x) = \frac{1}{2}\left[E_\alpha\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + E_\alpha\left(-x^{\frac{1}{2}}\right)\right]. \tag{2.1.3}$$

Demonstração. Desenvolveremos as funções $E_\alpha\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$ e $E_\alpha\left(-x^{\frac{1}{2}}\right)$ presentes no segundo membro da Eq.(2.1.3). Assim,

$$\begin{aligned} E_\alpha\left(x^{\frac{1}{2}}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}k}}{\Gamma(1+\alpha k)} \\ &= 1 + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{x}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \frac{x^2}{\Gamma(4\alpha+1)} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\Gamma(5\alpha+1)} + \cdots \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} E_\alpha\left(-x^{\frac{1}{2}}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^{\frac{1}{2}})^k}{\Gamma(1+\alpha k)} \\ &= 1 - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{x}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \frac{x^2}{\Gamma(4\alpha+1)} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\Gamma(5\alpha+1)} + \cdots. \end{aligned}$$

Logo, adicionando as duas últimas expressões, temos

$$\begin{aligned} E_\alpha\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + E_\alpha\left(-x^{\frac{1}{2}}\right) &= 2 + \frac{2x}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{2x^2}{\Gamma(4\alpha+1)} + \cdots \\ &= 2\left(1 + \frac{x}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{x^2}{\Gamma(4\alpha+1)} + \cdots\right) \\ &= 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(2\alpha k+1)} = 2E_{2\alpha}(x). \end{aligned}$$

■

Exemplo 2.2. *Vamos mostrar que* $E_2(x^2) = \cosh(x)$.

Usando o **Teorema 2.2** temos,

$$E_2\left(x^2\right) = \frac{E_1(x) + E_1(-x)}{2} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{\Gamma(k+1)}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x),$$

como queríamos mostrar. □

2.2 Função de Mittag-Leffler de dois parâmetros

Em 1905, Wiman [35] propôs e estudou uma generalização da função de Mittag–Leffler, que chamaremos de função de Mittag–Leffler com dois parâmetros.

Definição 2.2 (Função de Mittag-Leffler com dois parâmetro)**.** *A função de Mittag-Leffler de dois parâmetros é dada pela seguinte série,*

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\beta + \alpha k)}, \tag{2.2.1}$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $Re(\beta) > 0$ *e* $Re(\alpha) > 0$.

Observemos que quando $\beta = 1$ na Eq. (2.2.1) recuperamos a função de Mittag-Leffler de um parâmetro dada pela Eq. (2.1.1). De fato,

$$E_{\alpha,1}(x) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(1 + \alpha k)} = E_\alpha(x).$$

Exemplo 2.3. *Mostraremos que* $E_{1,2}(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$.

De fato, a partir da definição temos

$$E_{1,2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}.$$

Considerando a seguinte mudança de índices $k \to k - 1$ temos

$$E_{1,2}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{x}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1\right) = \frac{1}{x}\left(e^x - 1\right) = \frac{e^x - 1}{x}.$$

□

Como generalização do **Exemplo 2.3**, Mathai e Haubold [19] apresentam a seguinte relação para $n \in \mathbb{N}$,

$$E_{1,n}(x) = \frac{1}{x^{n-1}}\left(e^x - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{x^k}{k!}\right).$$

Mostraremos agora que essa relação é verdadeira. Começaremos com o lado direito dessa igualdade,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^{n-1}}\left(e^x - \sum_{k=0}^{n-2}\frac{x^k}{k!}\right) &= \frac{1}{x^{n-1}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(k+1)} - \sum_{k=0}^{n-2}\frac{x^k}{k!}\right)\\
&= \frac{1}{x^{n-1}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(k+1)} - \sum_{k=0}^{n-2}\frac{x^k}{\Gamma(k+1)}\right)\\
&= \frac{1}{x^{n-1}}\sum_{k=n-1}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(k+1)}\\
&= \sum_{k=n-1}^{\infty}\frac{x^{k-n+1}}{\Gamma(k+1)}
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de índices $k \to k+n-1$ temos,

$$\frac{1}{x^{n-1}}\left(e^x - \sum_{k=0}^{n-2}\frac{x^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(k+n-1+1)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(k+n)} = E_{1,n},$$

conforme desejávamos.

Exemplo 2.4. *Usaremos o* **Exemplo 2.2** *para mostrar que* $E_{2,2}(x^2) = \dfrac{\sinh(x)}{x}$.

Utilizando a definição de função de Mittag-Leffler de dois parâmetros podemos escrever,

$$\begin{aligned}
E_{2,2}(x^2) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{\Gamma(2k+2)}\\
&= \frac{1}{\Gamma(2)} + \frac{x^2}{\Gamma(4)} + \frac{x^4}{\Gamma(6)} + \frac{x^6}{\Gamma(8)} + \frac{x^8}{\Gamma(10)} + \cdots\\
&= \frac{1}{\Gamma(2)} - \frac{x}{\Gamma(3)} + \frac{x^2}{\Gamma(4)} - \frac{x^3}{\Gamma(5)} + \frac{x^4}{\Gamma(6)} - \frac{x^5}{\Gamma(7)} + \frac{x^6}{\Gamma(8)} - \frac{x^7}{\Gamma(9)} + \frac{x^8}{\Gamma(10)} + \cdots\\
&\quad + \frac{x}{\Gamma(3)} + \frac{x^3}{\Gamma(5)} + \frac{x^5}{\Gamma(7)} + \frac{x^7}{\Gamma(9)} + \cdots\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{\Gamma(k+2)} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{\Gamma(2k+3)}.
\end{aligned}$$

Vamos considerar a mesma mudança de índices nas duas séries, i.e., a mudança $k \to k-1$, assim

$$
\begin{aligned}
E_{2,2}(x^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^{k-1}}{\Gamma(k+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{\Gamma(2k+1)} \\
&= -\frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^{k}}{\Gamma(k+1)} + \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\Gamma(2k+1)} \\
&= \frac{1}{x} \left(- \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{k}}{\Gamma(k+1)} - 1 \right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\Gamma(2k+1)} - 1 \right) \right) \\
&= \frac{1}{x} \left(-E_1(-x) + E_2(x^2) \right).
\end{aligned}
$$

Usaremos agora o **Exemplo 2.2**. Por ele temos que $E_2(x^2) = \cosh(x)$. Assim, segue-se

$$
\begin{aligned}
E_{2,2}(x^2) &= \frac{1}{x} \left(-e^x + \cosh(x) \right) \\
&= \frac{1}{x} \left(-e^x + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \\
&= \frac{1}{x} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \\
&= \frac{1}{x} \sinh(x).
\end{aligned}
$$

□

O teorema a seguir apresenta uma propriedade da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros.

Teorema 2.3. *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tais que $Re(\alpha) > 0$ e $Re(\beta) > 0$, assim*

$$
E_{\alpha,\beta}(x) = x E_{\alpha,\alpha+\beta}(x) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}.
$$

Demonstração. Pela definição da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros temos,

$$
E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.
$$

Inserindo a mudança de índices $k \to k+1$, temos

$$
\begin{aligned}
E_{\alpha,\beta}(x) &= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1) + \beta)} \\
&= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x x^{k}}{\Gamma(\alpha k + \alpha + \beta)} = x \left(\frac{x^{-1}}{\Gamma(\beta)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k}}{\Gamma(\alpha k + \alpha + \beta)} \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k}}{\Gamma(\alpha k + \alpha + \beta)} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + x E_{\alpha,\alpha+\beta}(x).
\end{aligned}
$$

■

O teorema que apresentaremos a seguir é baseado em [16].

Teorema 2.4. *Se Re*$(\alpha) > 0$, *Re*$(\beta) > 0$ *e* $n \in \mathbb{N}$, *então*

$$x^n E_{\alpha,\beta+n\alpha}(x) = E_{\alpha,\beta}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.$$

Demonstração. Como $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $\mathrm{Re}(\beta) > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ temos,

$$E_{\alpha,\beta}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

Introduzindi a mudança de índices $k \to k + n$ temos,

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+n}}{\Gamma(\alpha(k+n) + \beta)} \\ &= x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha n + \beta)} = x^n E_{\alpha,\beta+n\alpha}(x). \end{aligned}$$

Logo, rearranjando, podemos escrever

$$x^n E_{\alpha,\beta+n\alpha}(x) = E_{\alpha,\beta}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)},$$

como queríamos mostrar. ■

Exemplo 2.5. *Mostraremos que*

$$x^2 E_{\alpha,\beta+2\alpha}(x) = E_{\alpha,\beta}(x) - \frac{1}{\Gamma(\beta)} - \frac{x}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

sendo Re$(\alpha) > 0$ *e Re*$(\beta) > 0$.

Tomando $n = 2$ no teorema acima, temos

$$x^2 E_{\alpha,\beta+2\alpha}(x) = E_{\alpha,\beta}(x) - \sum_{k=0}^{1} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = E_{\alpha,\beta}(x) - \frac{1}{\Gamma(\beta)} - \frac{x}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

□

2.3 Relações entre as funções de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros

Nessa seção apresentamos três relações entre as funções de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros, são elas

$$E_\alpha(-x) = E_{2\alpha}(x^2) - x E_{2\alpha,1+\alpha}(x^2), \tag{2.3.1}$$

$$E_{2\alpha}(-x^2) - ixE_{2\alpha,1+\alpha}(-x^2) = E_\alpha(-ix), \tag{2.3.2}$$

com $i^2 = -1$, e

$$E_\alpha(x) = xE_{\alpha,\alpha+1}(x) + 1. \tag{2.3.3}$$

Começaremos verificando a Eq.(2.3.1). Iniciaremos com o lado direito dessa equação,

$$\begin{aligned} E_{2\alpha}(x^2) - xE_{2\alpha,1+\alpha}(x^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\Gamma(2k\alpha+1)} - x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\Gamma(2k\alpha+1+\alpha)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\Gamma(2k\alpha+1)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{\Gamma(2k\alpha+1+\alpha)}. \end{aligned}$$

Consideraremos a mudança de índices $k \to k-1$ na segunda série, ou seja, em $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{\Gamma(2k\alpha+1+\alpha)}$. Assim, podemos escrever

$$E_{2\alpha}(x^2) - xE_{2\alpha,1+\alpha}(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\Gamma(2k\alpha+1)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{\Gamma(2k\alpha+1-\alpha)}.$$

Escreveremos agora essas séries na forma explícita

$$\begin{aligned} E_{2\alpha}(x^2) - xE_{2\alpha,1+\alpha}(x^2) &= 1 + \frac{x^2}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{x^4}{\Gamma(4\alpha+1)} + \frac{x^6}{\Gamma(6\alpha+1)} + \cdots \\ &\quad - \frac{x}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{x^3}{\Gamma(3\alpha+1)} - \frac{x^5}{\Gamma(5\alpha+1)} + \cdots \\ &= 1 - \frac{x}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{x^2}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{x^3}{\Gamma(3\alpha+1)} + \frac{x^4}{\Gamma(4\alpha+1)} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{\Gamma(k\alpha+1)} = E_\alpha(-x). \end{aligned}$$

Verificaremos agora a Eq.(2.3.2). Começamos por manipular o primeiro membro.

$$\begin{aligned} & E_{2\alpha}(-x^2) - ixE_{2\alpha,1+\alpha}(-x^2) \\ = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{\Gamma(2\alpha k+1)} - ix\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{\Gamma(2\alpha k+\alpha+1)} \\ = & 1 - \frac{x^2}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{x^4}{\Gamma(4\alpha+1)} - \frac{x^6}{\Gamma(6\alpha+1)} + \frac{x^8}{\Gamma(8\alpha+1)} + \cdots \\ & -ix\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{x^2}{3\Gamma(\alpha+1)} + \frac{x^4}{\Gamma(5\alpha+1)} - \frac{x^6}{\Gamma(7\alpha+1)} + \frac{x^8}{\Gamma(9\alpha+1)} + \cdots\right) \\ = & 1 - \frac{x^2}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{x^4}{\Gamma(4\alpha+1)} - \frac{x^6}{\Gamma(6\alpha+1)} + \frac{x^8}{\Gamma(8\alpha+1)} + \cdots \\ & - \frac{ix}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{ix^3}{3\Gamma(\alpha+1)} - \frac{ix^5}{\Gamma(5\alpha+1)} + \frac{ix^7}{\Gamma(7\alpha+1)} - \frac{ix^9}{\Gamma(9\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Por outro lado multiplicando cada terno dessa soma por $\left(\frac{i}{i}\right)^n$ sendo $n \in \mathbb{N}$ com n apropriado temos,

$$
\begin{aligned}
& E_{2\alpha}(-x^2) - ixE_{2\alpha,1+\alpha}(-x^2) \\
= \; & 1\frac{i}{i} - \frac{i^2}{i^2}\frac{x^2}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{i^4}{i^4}\frac{x^4}{\Gamma(4\alpha+1)} - \frac{i^6}{i^6}\frac{x^6}{\Gamma(6\alpha+1)} + \frac{i^8}{i^8}\frac{x^8}{\Gamma(8\alpha+1)} + \cdots \\
& -\frac{ix}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{i^2}{i^2}\frac{ix^3}{3\Gamma(\alpha+1)} - \frac{i^4}{i^4}\frac{ix^5}{\Gamma(5\alpha+1)} + \frac{i^6}{i^6}\frac{ix^7}{\Gamma(7\alpha+1)} - \frac{i^8}{i^8}\frac{ix^9}{\Gamma(9\alpha+1)} \\
= \; & 1 + \frac{i^2x^2}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{i^4x^4}{\Gamma(4\alpha+1)} + \frac{i^6x^6}{\Gamma(6\alpha+1)} + \frac{i^8x^8}{\Gamma(8\alpha+1)} + \cdots \\
& -\frac{ix}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{i^3x^3}{3\Gamma(\alpha+1)} - \frac{i^5x^5}{\Gamma(5\alpha+1)} - \frac{i^7x^7}{\Gamma(7\alpha+1)} - \frac{i^9x^9}{\Gamma(9\alpha+1)} \\
= \; & 1 - \frac{ix}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{i^2x^2}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{i^3x^3}{3\Gamma(\alpha+1)} + \frac{i^4x^4}{\Gamma(4\alpha+1)} + \cdots \\
= \; & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ix)^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \\
= \; & E_\alpha(-ix).
\end{aligned}
$$

Por fim, observemos que a Eq.(2.3.3) é um caso particular do **Teorema 2.3** tomando $\beta = 1$.

2.4 Função de Mittag-Leffler de três parâmetros

Em 1971, Prabhakar [26] introduziu a função de Mittag-Leffler com três parâmetros. Apresentamos agora sua definição:

Definição 2.3 (Função de Mittag-Leffler de três parâmetros)**.** *Sejam $\alpha, \beta, \rho \in \mathbb{C}$ tais que $Re(\beta) > 0$, $Re(\alpha) > 0$ e $Re(\rho) > 0$, assim*

$$E^{\rho}_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k \, x^k}{\Gamma(\beta+\alpha k)k!}, \tag{2.4.1}$$

sendo $(\rho)_k$ o símbolo de Pochhammer.

Definição 2.4. *O símbolo de Pochhammer é definido por:*

$$(\alpha)_n = \begin{cases} 1, & \text{para } n = 0; \\ \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1), & \text{para } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Observemos que podemos escrever o símbolo de Pochhammer em termo da função gama, de fato,

$$(\alpha)_n \;=\; \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}.$$

A função de Mittag-Leffler de três parâmetros é uma generalização das funções de Mittag-Leffler de um e de dois parâmetros. Pois tomando $\rho = 1$ na função de Mittag-Leffler de três parâmetros obtemos

$$E^{1}_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k\, x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta) k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!\, x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta) k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = E_{\alpha,\beta}(x).$$

Prabhakar [26] apresenta os seguintes resultados envolvendo a função de Mittag-Leffler de três parâmetros, aqui esses resultados são apresentados em forma de teorema. O teorema a seguir envolve a derivada primeira da função de Mittag-Leffler de três parâmetros.

Teorema 2.5. *Sejam $\alpha, \beta, \rho \in \mathbb{C}$ e Re$(\beta) > 0$, Re$(\alpha) > 0$ e Re$(\rho) > 0$. Então*

$$\left(x\frac{d}{dx} + \rho\right) E^{\rho}_{\alpha,\beta}(x) = \rho E^{\rho+1}_{\alpha,\beta}(x). \tag{2.4.2}$$

Demonstração. Como $\alpha, \beta, \rho \in \mathbb{C}$ e $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ e $\mathrm{Re}(\rho) > 0$ temos

$$\begin{aligned}
\left(x\frac{d}{dx} + \rho\right) E^{\rho}_{\alpha,\beta}(x) &= x\frac{d}{dx} E^{\rho}_{\alpha,\beta}(x) + \rho E^{\rho}_{\alpha,\beta}(x) \\
&= x\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta) k!} + \rho \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta) k!} \\
&= x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k k x^{k-1}}{\Gamma(\alpha k + \beta) k!} + \rho \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta) k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k k x^{k}}{\Gamma(\alpha k + \beta) k!} + \rho \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta) k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k x^{k}}{\Gamma(\alpha k + \beta) k!} (k + \rho) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{\rho(\rho+1)_k}{\rho+k} x^{k}}{\Gamma(\alpha k + \beta) k!} (k + \rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_k x^{k}}{\Gamma(\alpha k + \beta) k!} \frac{\rho}{\rho + k} (k + \rho) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_k x^{k}}{\Gamma(\alpha k + \beta) k!} \rho = \rho \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_k x^{k}}{\Gamma(\alpha k + \beta) k!} = \rho E^{\rho+1}_{\alpha,\beta}(x),
\end{aligned}$$

conforme queríamos mostrar. ∎

Teorema 2.6. *Sejam $\alpha, \beta, \rho \in \mathbb{C}$ tais que Re$(\beta - 1) > 0$, Re$(\alpha) > 0$ e Re$(\rho) > 0$. Então*

$$(\beta - \alpha\rho - 1) E^{\rho}_{\alpha,\beta}(x) = E^{\rho}_{\alpha,\beta-1}(x) - \alpha\rho E^{\rho+1}_{\alpha,\beta}(x). \tag{2.4.3}$$

Demonstração. Para demonstrarmos a Eq.(2.4.3) mostraremos que

$$(\beta - \alpha\rho - 1) E^{\rho}_{\alpha,\beta}(x) + \alpha\rho E^{\rho+1}_{\alpha,\beta}(x) = E^{\rho}_{\alpha,\beta-1}(x).$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}
(\beta-\alpha\rho-1)E^{\rho}_{\alpha,\beta}(x)+\alpha\rho E^{\rho+1}_{\alpha,\beta}(x) &= (\beta-\alpha\rho-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k(\rho)_k}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!}+\alpha\rho\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k(\rho+1)_k}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!}\\
&= (\beta-\alpha\rho-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k(\rho)_k}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!}+\alpha\rho\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k\frac{(\rho)_k(\rho+k)}{\rho}}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k(\rho)_k}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!}\left(\beta-\alpha\rho-1+\frac{\alpha\rho(\rho+k)}{\rho}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k(\rho)_k}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!}(\alpha k+\beta-1)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k(\rho)_k\,(\alpha k+\beta-1)}{(\alpha k+\beta-1)\Gamma(\alpha k+\beta-1)k!}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k(\rho)_k}{\Gamma(\alpha k+\beta-1)k!}\\
&= E^{\rho}_{\alpha,\beta-1}(x),
\end{aligned}$$

de onde segue-se

$$(\beta-\alpha\rho-1)E^{\rho}_{\alpha,\beta}(x)=E^{\rho}_{\alpha,\beta-1}(x)-\alpha\rho E^{\rho+1}_{\alpha,\beta}(x),$$

como queríamos mostrar. ■

2.5 Relação entre as funções de Mittag-Leffler de dois e três parâmetros

Nessa seção apresentaremos dois corolários que expressam uma função de Mittag-Leffler de três parâmetros, a saber, $E^2_{\alpha,\beta}(x)$, em função de funções de Mittag-Leffler de dois parâmetros. Veremos também uma relação entre a função de Mittag-Leffler de três parâmetros com a derivada de ordem m, sendo $m=0,1,2,\cdots$ da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros.

Corolário 2.2. *Se* α, $\beta\in\mathbb{C}$ *são tais que* $Re(\alpha)>0$ *e* $Re(\beta)>1$ *então*

$$\alpha E^2_{\alpha,\beta}(x)=E_{\alpha,\beta-1}(x)+(1-\beta+\alpha)E_{\alpha,\beta}(x).$$

Demonstração. Basta tomarmos $\rho=1$ no **Teorema 2.6**. ■

Corolário 2.3. *Sejam* $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, *sendo* $Re(\beta)>0$ *e* $Re(\alpha)>0$. *Então*

$$x\frac{d}{dx}E_{\alpha,\beta}(x)+E_{\alpha,\beta}(x)=E^2_{\alpha,\beta}(x).$$

Demonstração. Basta tomarmos $\rho = 1$ no **Teorema 2.5**. ■

Veremos agora uma relação entre a m-ésima derivada da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros e a função de Mittag-Leffler de três parâmetros. Sejam $m = 0, 1, 2, 3, \cdots$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tais que $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ e $\mathrm{Re}(\beta) > 0$ então vale a relação

$$\frac{d^m}{dx^m} E_{\alpha,\beta}(x) \;=\; m!\, E^{m+1}_{\alpha,\beta+\alpha m}(x). \tag{2.5.1}$$

De fato essa relação é verdadeira, pois

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{dx^m} E_{\alpha,\beta}(x) &= \frac{d^m}{dx^m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k)(k-1)...(k-m+1)x^{k-m}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{k!}{(k-m)!} x^{k-m}}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.
\end{aligned}$$

Considerando a mudança de índices $k \to k + m$ temos,

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{dx^m} E_{\alpha,\beta}(x) &= \sum_{k=-m}^{\infty} \frac{\frac{(k+m)!}{k!} x^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha m + \beta)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!\, x^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha m + \beta) k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!\, \frac{m!}{m!} x^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha m + \beta) k!} \\
&= m! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{(k+m)!}{m!} x^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha m + \beta) k!} \\
&= m! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m+1)_k x^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha m + \beta) k!} = m!\, E^{m+1}_{\alpha,\beta+\alpha m}(x)
\end{aligned}$$

2.6 Função de Mittag-Leffler de quatro parâmetros

Em 2007, Shukla e Prajapati [29], introduziram a função de Mittag-Leffler de quatro parâmetros, sendo uma generalização das funções de Mittag-Leffler de um, dois e três. Veremos agora a definição dada por eles.

Definição 2.5. *[Função de Mittag-Leffler de quatro parâmetros] Sejam $\alpha, \beta, \rho \in \mathbb{C}$ e $q \in (0,1) \cup \mathbb{N}$ tais que $Re(\alpha) > 0$, $Re(\beta) > 0$ e $Re(\rho) > 0$, assim*

$$E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_{qk}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{x^k}{k!},$$

sendo $(\rho)_{qk}$ uma generalização do símbolo de Pochhammer, ou seja, $(\rho)_{qk} = \dfrac{\Gamma(\rho + qk)}{\Gamma(\rho)}$.

De fato a função de Mittag-Leffler de quatro parâmetros recupera as funções de Mittag-Leffler de três parâmetros, pois tomando $q = 1$ na função de Mittag-Leffler de quatro parâmetros temos

$$E_{\alpha,\beta}^{\rho,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k (\rho)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta) k!} = E_{\alpha,\beta}^{\rho}(x).$$

A seguir temos alguns teoremas que nos apresentam propriedades da função de Mittag-Leffler de quatro parâmetros. Esses teoremas são baseados em [29].

Teorema 2.7. *Se $\alpha, \beta, \rho \in \mathbb{C}$ e $q \in (0,1) \cup \mathbb{N}$ são tais que $Re(\beta) > Re(\alpha) > 0$ e $Re(\rho) > 0$, então*

$$E_{\alpha,\beta-\alpha}^{\rho,q}(x) - E_{\alpha,\beta-\alpha}^{\rho-1,q}(x) = qx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_{kq+q-1} x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta) k!}. \tag{2.6.1}$$

Demonstração. Para demonstrar a Eq.(2.6.1) usaremos as duas relações a seguir

$$(\rho)_k = (\rho + k - 1)(\rho)_{k-1} \qquad \text{e} \qquad (\rho - 1)_k = \frac{(\rho)_k (\rho - 1)}{\rho + k - 1}.$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta-\alpha}^{\rho,q}(x) - E_{\alpha,\beta-\alpha}^{\rho-1,q}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k (\rho)_{qk}}{\Gamma(\alpha k + \beta - \alpha) k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k (\rho - 1)_{qk}}{\Gamma(\alpha k + \beta - \alpha) k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k (\rho)_{qk}}{\Gamma(\alpha(k-1) + \beta) k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k (\rho - 1)_{qk}}{\Gamma(\alpha(k-1) + \beta) k!}. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de índices $k \to k + 1$ temos,

$$\begin{aligned} &E_{\alpha,\beta-\alpha}^{\rho,q}(x) - E_{\alpha,\beta-\alpha}^{\rho-1,q}(x) \\ = \;& \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^{k+1} (\rho)_{qk+q}}{\Gamma(\alpha k + \beta)(k+1)!} - \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^{k+1} (\rho - 1)_{qk+q}}{\Gamma(\alpha k + \beta)(k+1)!} \\ = \;& \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^{k+1} (\rho)_{qk+q-1} (\rho + qk + q - 1)}{\Gamma(\alpha k + \beta)(k+1)!} - \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^{k+1} \frac{(\rho)_{qk+q}(\rho-1)}{\rho+qk+q-1}}{\Gamma(\alpha k + \beta)(k+1)!} \\ = \;& \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^{k+1} (\rho)_{qk+q-1} (\rho + qk + q - 1)}{\Gamma(\alpha k + \beta)(k+1)!} - \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^{k+1} \frac{(\rho)_{qk+q-1}(\rho+qk+q-1)(\rho-1)}{\rho+qk+q-1}}{\Gamma(\alpha k + \beta)(k+1)!} \\ = \;& \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^{k+1} (\rho)_{qk+q-1} (\rho + qk + q - 1)}{\Gamma(\alpha k + \beta)(k+1)!} - \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^{k+1} (\rho)_{qk+q-1} (\rho - 1)}{\Gamma(\alpha k + \beta)(k+1)!} \\ = \;& \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^{k+1} (\rho)_{qk+q-1} (\rho + qk + q - 1 - (\rho - 1))}{\Gamma(\alpha k + \beta)(k+1)!} = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^{k+1} (\rho)_{qk+q-1} (qk + q)}{\Gamma(\alpha k + \beta)(k+1)!} \\ = \;& \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^{k+1} (\rho)_{qk+q-1} q(k+1)}{\Gamma(\alpha k + \beta)(k+1)!} = qx \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^k (\rho)_{qk+q-1}}{\Gamma(\alpha k + \beta) k!} = qx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_{kq+q-1} x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta) k!}, \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. ∎

Observemos que com a Eq.(2.6.1) do teorema acima, podemos recuperar uma relação entre funções de Mittag-Leffler de três parâmetros.

Corolário 2.4. *Se* $\alpha, \beta, \rho \in \mathbb{C}$ *são tais que* $Re(\alpha) > 0$, $Re(\beta) > 0$ *e* $Re(\rho) > 0$, *então*

$$E^{\rho}_{\alpha,\beta-\alpha}(x) - E^{\rho-1}_{\alpha,\beta-\alpha}(x) = xE^{\rho}_{\alpha,\beta}(x).$$

Demonstração. Se considerarmos $q = 1$ na Eq.(2.6.1) temos

$$E^{\rho}_{\alpha,\beta-\alpha}(x) - E^{\rho-1}_{\alpha,\beta-\alpha}(x) = x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!} = xE^{\rho}_{\alpha,\beta}(x).$$

■

A seguir temos alguns resultados envolvendo diferenciação da função de Mittag-Leffler de quatro parâmetros.

Teorema 2.8. *Se* $\alpha, \beta, \rho \in \mathbb{C}$ *e* $q \in \mathbb{N}$ *são tais que* $Re(\alpha) > 0$, $Re(\beta) > 0$ *e* $Re(\rho) > 0$ *então para* $m \in \mathbb{N}$,

$$\frac{d^m}{dx^m} E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}(x) = (\rho)_{qm} E^{\rho+qm,q}_{\alpha,\beta+m\alpha}(x). \tag{2.6.2}$$

Demonstração. Vamos primeiro observar que

$$\begin{aligned}
(\rho)_{kq+mq} &= (\rho)(\rho+1)\cdots(\rho+kq+mq-1) \\
&= \underbrace{(\rho)(\rho+1)\cdots(\rho+mq-1)}_{(\rho)_{mq}}\underbrace{(\rho+mq)(\rho+mq+1)\cdots(\rho+mq+kq-1)}_{(\rho+m)_{kq}}
\end{aligned}$$

Logo, podemos escrever $(\rho)_{kq+mq} = (\rho)_{mq}(\rho+m)_{kq}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{dx^m} E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}(x) &= \frac{d^m}{dx^m}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k(\rho)_{kq}}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k-m}(\rho)_{kq}k(k-1)...(k-m+1)}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k-m}(\rho)_{kq}\frac{k!}{(k-m)!}}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k-m}(\rho)_{kq}}{\Gamma(\alpha k+\beta)(k-m)!}.
\end{aligned}$$

Tomando a mudança de índices $k \to k+m$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{dx^m} E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}(x) &= \sum_{k=-m}^{\infty} \frac{x^k(\rho)_{kq+mq}}{\Gamma(\alpha k+\alpha m+\beta)k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k(\rho)_{kq+mq}}{\Gamma(\alpha k+\alpha m+\beta)k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k(\rho)_{mq}(\rho+mq)_{kq}}{\Gamma(\alpha k+\alpha m+\beta)k!} \\
&= (\rho)_{mq}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k(\rho+mq)_{kq}}{\Gamma(\alpha k+\alpha m+\beta)k!} = (\rho)_{qm} E^{\rho+qm,q}_{\alpha,\beta+m\alpha}(x).
\end{aligned}$$

■

Tomando $q = 1$ na Eq.(2.6.2) do **Teorema 2.8** recuperamos uma relação da função de Mittag-Leffler de três parâmetros, a saber,

$$\frac{d^m}{dx^m} E^{\rho}_{\alpha,\beta}(x) = (\rho)_m E^{\rho+m}_{\alpha,\beta+m\alpha}(x).$$

E tomando $\rho = q = 1$ recuperamos a relação entre as funções de Mittag-Leffler de dois e três parâmetros apresentada na Eq.(2.5.1).

O seguinte teorema foi proposto em [27].

Teorema 2.9. *Se $\alpha, \beta, \rho \in \mathbb{C}$ são tais que $Re(\alpha) > 0$, $Re(\beta) > 0$, $Re(\rho) > 0$ e $q \in (0,1) \cup \mathbb{N}$ então*

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\rho-1} E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}(wx^{\alpha})\right] = x^{\rho-2}\left[E^{\rho,q}_{\alpha,\beta-1}(wx^{\alpha}) + (\rho-\beta) E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}(wx^{\alpha})\right]. \tag{2.6.3}$$

Demonstração. Começando pelo lado direito dessa equação temos,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[x^{\rho-1} E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}(wx^{\alpha})\right] &= \frac{dx^{\rho-1}}{dx} E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}(wx^{\alpha}) + x^{\rho-1}\frac{d}{dx} E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}(wx^{\alpha}) \\
&= (\rho-1)x^{\rho-2} E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}(wx^{\alpha}) + x^{\rho-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^k \alpha k x^{\alpha k-1}(\rho)_{kq}}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!} \\
&= (\rho-1)x^{\rho-2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^k x^{\alpha k}(\rho)_{kq}}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!} + x^{\rho-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^k \alpha k x^{\alpha k-1}(\rho)_{kq}}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\rho-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^k x^{\alpha k+\rho-2}(\rho)_{kq}}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^k \alpha k x^{\alpha k+\rho-2}(\rho)_{kq}}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^k x^{\alpha k+\rho-2}(\rho)_{kq}(\rho-1+\alpha k)}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!} \\
&= x^{\rho-2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^k x^{\alpha k}(\rho)_{kq}(\rho-\beta+\beta-1+\alpha k)}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!} \\
&= x^{\rho-2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^k x^{\alpha k}(\rho)_{kq}(\rho-\beta)}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^k x^{\alpha k}(\rho)_{kq}(\beta-1+\alpha k)}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!}\right] \\
&= x^{\rho-2}\left[(\rho-\beta)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^k x^{\alpha k}(\rho)_{kq}}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^k x^{\alpha k}(\rho)_{kq}(\beta-1+\alpha k)}{(\alpha k+\beta-1)\Gamma(\alpha k+\beta-1)k!}\right] \\
&= x^{\rho-2}\left[(\rho-\beta)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^k x^{\alpha k}(\rho)_{kq}}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^k x^{\alpha k}(\rho)_{kq}}{\Gamma(\alpha k+\beta-1)k!}\right] \\
&= x^{\rho-2}\left[(\rho-\beta)E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}(wx^{\alpha}) + E^{\rho,q}_{\alpha,\beta-1}(wx^{\alpha})\right],
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar. ■

Tomando $q = 1$ e $q = \rho = 1$ na Eq.(2.6.3) recuperamos duas relações da função de Mittag-Leffler de três e dois parâmetros, respectivamente, a saber

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\rho-1} E^{\rho}_{\alpha,\beta}(wx^{\alpha})\right] = x^{\rho-2}\left[E^{\rho}_{\alpha,\beta-1}(wx^{\alpha}) + (\rho-\beta) E^{\rho}_{\alpha,\beta}(wx^{\alpha})\right].$$

e

$$\frac{d}{dx}E_{\alpha,\beta}(wx^{\alpha}) = x^{-1}\left[E_{\alpha,\beta-1}(wx^{\alpha}) + (1-\beta)E_{\alpha,\beta}(wx^{\alpha})\right].$$

Consideraremos agora a diferenciação das funções de Mittag-Leffler com um parâmetro racional, ou seja, consideraremos $\alpha = \dfrac{p}{r}$ sendo $p, r \in \mathbb{N}$ e primos relativos.

Teorema 2.10. *Se $\beta, \rho \in \mathbb{C}$, $q \in (0,1) \cup \mathbb{N}$ e $\alpha = \dfrac{p}{r}$ sendo $p, r \in \mathbb{N}$ e primos relativos, então*

$$\frac{d^p}{dx^p}E^{\rho,q}_{\frac{p}{r},\beta}(x^{\frac{p}{r}}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\rho)_{kq}\Gamma(\frac{kp}{r}+1)x^{(\frac{k}{r}-1)p}}{\Gamma(\frac{kp}{r}+\beta)\Gamma(\frac{kp}{r}-p+1)k!}.$$

Demonstração. Sejam $p, r \in \mathbb{N}$ primos relativos, $\beta, \rho \in \mathbb{C}$ e $q \in (0,1) \cup \mathbb{N}$ assim

$$\begin{aligned}
\frac{d^p}{dx^p}E^{\rho,q}_{\frac{p}{r},\beta}(x^{\frac{p}{r}}) &= \frac{d^p}{dx^p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{\frac{p}{r}k}(\rho)_{kq}}{\Gamma(\frac{p}{r}k+\beta)k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{p}{r}k)(\frac{p}{r}k-1)...(\frac{p}{r}k-p+1)x^{\frac{p}{r}k-p}(\rho)_{kq}}{\Gamma(\frac{p}{r}k+\beta)k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\frac{\Gamma(\frac{p}{r}k+1)}{\Gamma(\frac{p}{r}k-p+1)}x^{\frac{p}{r}k-p}(\rho)_{kq}}{\Gamma(\frac{p}{r}k+\beta)k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\rho)_{kq}\Gamma(\frac{kp}{r}+1)x^{(\frac{k}{r}-1)p}}{\Gamma(\frac{kp}{r}+\beta)\Gamma(\frac{kp}{r}-p+1)k!},
\end{aligned}$$

conforme queríamos demonstrar. ■

2.7 Função de Mittag-Leffler de cinco parâmetros

Khan e Ahmed [17], introduziram a função de Mittag-Leffler de cinco parâmetros, sendo uma generalização das funções de Mittag-Leffler de um, dois, três e quatro parâmetros. Apresentamos agora a definição dada por eles.

Definição 2.6 (Função de Mittag-Leffler de cinco parâmetros)**.** *Sejam $\alpha, \beta, \rho, \delta \in \mathbb{C}$ e $q \in (0,1) \cup \mathbb{N}$ tais que $Re(\alpha) > 0$, $Re(\beta) > 0$, $Re(\rho) > 0$ e $Re(\delta) > 0$ assim*

$$E^{\rho,q}_{\alpha,\beta,\delta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k(\rho)_{qk}}{\Gamma(\alpha k+\beta)(\delta)_k},$$

*sendo $(\rho)_{qk}$ conforme **Definição 2.5**.*

A função de Mittag-Leffler de cinco parâmetros assim definida recupera as funções de Mittag-Leffler de um, dois, três, quatro parâmetros e a função exponencial.

De fato, a função de Mittag-Leffler de cinco parâmetros recupera a função de Mittag-Leffler de quatro parâmetros, pois basta considerarmos $\delta = 1$,

$$E^{\rho,q}_{\alpha,\beta,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k(\rho)_{kq}}{\Gamma(\alpha k+\beta)(1)_k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k(\rho)_{kq}}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!} = E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}(x).$$

2.8 Função de Mittag-Leffler de seis parâmetros

Nessa seção apresentamos a função de Mittag-Leffler de seis parâmetros conforme definida em 2012, por Salim e Faraj [28].

Definição 2.7 (Função de Mittag-Leffler de seis parâmetros)**.** *A função de Mittag-Leffler de seis parâmetros é definida pela seguinte série,*

$$E_{\alpha,\beta,p}^{\rho,\delta,q}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k (\rho)_{kq}}{\Gamma(\alpha k + \beta)(\delta)_{kp}},$$

sendo $\alpha, \beta, \rho, \delta \in \mathbb{C}$, $p, q > 0$, $Re(\beta) > 0$, $Re(\alpha) > 0$, $Re(\rho) > 0$, $Re(\delta) > 0$ *e* $Re(\alpha) + p \geq q$.

Observemos que a função de Mittag-Leffler de seis parâmetros assim definida é uma generalização das funções de Mittag-Leffler de um, dois, três, quatro e cinco.

Tomando $p = 1$ na função de Mittag-Leffler de seis parâmetros recuperamos a de cinco parâmetros, pois

$$E_{\alpha,\beta,1}^{\rho,\delta,q}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k (\rho)_{kq}}{\Gamma(\alpha k + \beta)(\delta)_{k}} = E_{\alpha,\beta,\delta}^{\rho,q}(x).$$

Veremos agora algumas propriedades da função de Mittag-Leffler de seis parâmetros, propriedades essas que serão apresentadas em forma de teoremas.

Teorema 2.11. *Sejam* $\alpha, \beta, \rho, \delta \in \mathbb{C}$ *e* $p, q > 0$ *tais que* $Re(\beta) > 0$, $Re(\alpha) > 0$, $Re(\rho) > 0$, $Re(\delta) > 0$, $Re(\alpha) + p \geq q$ *e* $\delta \neq 1$ *então*

$$E_{\alpha,\beta,p}^{\rho,\delta,q}(x) - E_{\alpha,\beta,p}^{\rho,\delta-1,q}(x) = \frac{xp}{1-\delta} \frac{d}{dx} E_{\alpha,\beta,p}^{\rho,\delta,q}(x). \tag{2.8.1}$$

Demonstração. Usaremos na demonstração desse teorema a seguinte igualdade,

$$\frac{1}{(\delta)_{pk}} - \frac{1}{(\delta)_{pk}} = \frac{\Gamma(\delta)\frac{pk}{1-\delta}}{\Gamma(\delta + pk)}. \tag{2.8.2}$$

Demonstraremos primeiro a Eq.(2.8.2).

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(\delta)_{pk}} - \frac{1}{(\delta)_{pk}} &= \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta + pk)} - \frac{\Gamma(\delta - 1)}{\Gamma(\delta - 1 + pk)} \\
&= \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta + pk)} - \frac{\Gamma(\delta - 1)}{\frac{\Gamma(\delta + pk)}{\delta + pk}} \\
&= \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta + pk)} - \frac{\Gamma(\delta - 1)(\delta - 1 + pk)}{\Gamma(\delta + pk)} \\
&= \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta + pk)} - \frac{\frac{\Gamma(\delta)}{\delta - 1}(\delta - 1 + pk)}{\Gamma(\delta + pk)} \\
&= \frac{\Gamma(\delta)\left(1 - \frac{\delta - 1 + pk}{\delta - 1}\right)}{\Gamma(\delta + pk)} \\
&= \frac{\Gamma(\delta)\frac{pk}{1-\delta}}{\Gamma(\delta + pk)}.
\end{aligned}$$

Demonstraremos agora que vale a Eq.(2.8.1).

$$
\begin{aligned}
E^{\rho,\delta,q}_{\alpha,\beta,p}(x) - E^{\rho,\delta-1,q}_{\alpha,\beta,p}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_{qk} x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)(\delta)_{pk}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_{qk} x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)(\delta-1)_{pk}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_{qk} x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \left(\frac{1}{(\delta)_{pk}} - \frac{1}{(\delta-1)_{pk}} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_{qk} x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \left(\frac{\Gamma(\delta)\frac{pk}{1-\delta}}{\Gamma(\delta+pk)} \right) \\
&= \frac{xp}{1-\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_{qk} k x^{k-1}}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta+pk)} = \frac{xp}{1-\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_{qk} k x^{k-1}}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \frac{1}{(\delta)_{pk}} \\
&= \frac{xp}{1-\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_{qk} \frac{d}{dx} x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)(\delta)_{pk}} = \frac{xp}{1-\delta} \frac{d}{dx} E^{\rho,\delta,q}_{\alpha,\beta,p}(x),
\end{aligned}
$$

como queríamos demonstrar. ■

Tomando $p = 1$ na Eq.(2.8.1) do **Teorema 2.11** recuperamos uma relação da função de Mittag-Leffler de cinco parâmetros, a saber

$$
E^{\rho,q}_{\alpha,\beta,\delta}(x) - E^{\rho,q}_{\alpha,\beta,\delta-1}(x) = \frac{x}{1-\delta} \frac{d}{dx} E^{\rho,q}_{\alpha,\beta,\delta}(x).
$$

Teorema 2.12. *Se $\alpha, \beta, \rho, \delta \in \mathbb{C}$ e $p, q > 0$ são tais que $Re(\beta) > 0$, $Re(\alpha) > 0$, $Re(\rho) > 0$, $Re(\delta) > 0$ e $Re(\alpha) + p \geq q$, então*

$$
E^{\rho,\delta,q}_{\alpha,\beta,p}(x) = \beta E^{\rho,\delta,q}_{\alpha,\beta+1,p}(x) + \alpha x \frac{d}{dx} E^{\rho,\delta,q}_{\alpha,\beta+1,p}(x). \tag{2.8.3}
$$

Demonstração. Desenvolvendo o lado direito da Eq.(2.8.3) temos,

$$
\begin{aligned}
& \beta E^{\rho,\delta,q}_{\alpha,\beta+1,p}(x) + \alpha x \frac{d}{dx} E^{\rho,\delta,q}_{\alpha,\beta+1,p}(x) \\
= & \beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k(\rho_{kq})}{\Gamma(\alpha k+\beta+1)(\delta)_{kp}} + \alpha x \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k(\rho_{kq})}{\Gamma(\alpha k+\beta+1)(\delta)_{kp}} \\
= & \beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k(\rho_{kq})}{\Gamma(\alpha k+\beta+1)(\delta)_{kp}} + \alpha x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k x^{k-1}(\rho_{kq})}{\Gamma(\alpha k+\beta+1)(\delta)_{kp}} \\
= & \beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k(\rho_{kq})}{\Gamma(\alpha k+\beta+1)(\delta)_{kp}} + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k x^{k}(\rho_{kq})}{\Gamma(\alpha k+\beta+1)(\delta)_{kp}} \\
= & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k(\rho_{kq})}{\Gamma(\alpha k+\beta+1)(\delta)_{kp}} (\beta+\alpha k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k(\rho_{kq})(\beta+\alpha k)}{(\alpha k+\beta)\Gamma(\alpha k+\beta)(\delta)_{kp}} \\
= & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k(\rho_{kq})}{\Gamma(\alpha k+\beta)(\delta)_{kp}} = E^{\rho,\delta,q}_{\alpha,\beta,p}(x),
\end{aligned}
$$

conforme queríamos mostrar. ■

Observemos que tomando $p=1$, $p=\delta=1$, $p=\delta=q=1$ e $p=\delta=q=\rho=1$ na Eq.(2.8.3) do **Teorema 2.12** recuperamos as relações das funções de Mittag-Leffler de cinco, quatro, três e dois parâmetros, respectivamente, são elas

$$E^{\rho,q}_{\alpha,\beta,\delta}(x)=\beta E^{\rho,q}_{\alpha,\beta+1,\delta}(x)+\alpha x\frac{d}{dx}E^{\rho,q}_{\alpha,\beta+1,\delta}(x),$$

$$E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}(x)=\beta E^{\rho,q}_{\alpha,\beta+1}(x)+\alpha x\frac{d}{dx}E^{\rho,q}_{\alpha,\beta+1}(x),$$

$$E^{\rho}_{\alpha,\beta}(x)=\beta E^{\rho}_{\alpha,\beta+1}(x)+\alpha x\frac{d}{dx}E^{\rho}_{\alpha,\beta+1}(x),$$

$$E_{\alpha,\beta}(x)=\beta E_{\alpha,\beta+1}(x)+\alpha x\frac{d}{dx}E_{\alpha,\beta+1}(x),$$

e tomando $p=\delta=q=\rho=\beta=1$ recuperamos uma relação entre as funções de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros, a saber

$$E_{\alpha}(x)=E_{\alpha,2}(x)+\alpha x\frac{d}{dx}E_{\alpha,2}(x).$$

Agora temos um teorema envolvendo a derivada de ordem m da função de Mittag-Leffler de seis parâmetros, sendo $m\in\mathbb{N}$.

Teorema 2.13. *Sejam $m\in\mathbb{N}$, $\alpha,\beta,\rho,\delta,w\in\mathbb{C}$ e $p,q>0$ tais que $Re(\beta)>0$, $Re(\alpha)>0$, $Re(\rho)>0$, $Re(\delta)>0$ e $Re(\alpha)+p\geq q$, então*

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[x^{\beta-1}E^{\rho,\delta,q}_{\alpha,\beta,p}(wx^{\alpha})\right]=x^{\beta-m-1}E^{\rho,\delta,q}_{\alpha,\beta-m,p}(wx^{\alpha}). \tag{2.8.4}$$

Demonstração. Como $\alpha,\beta,\rho,\delta,w\in\mathbb{C}$, $m\in\mathbb{N}$ e $p,q>0$ tais que $\mathrm{Re}(\beta)>0$, $\mathrm{Re}(\alpha)>0$, $\mathrm{Re}(\rho)>0$, $\mathrm{Re}(\delta)>0$ e $\mathrm{Re}(\alpha)+p\geq q$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{dx^m}\left[x^{\beta-1}E^{\rho,\delta,q}_{\alpha,\beta,p}(wx^{\alpha})\right] &= \frac{d^m}{dx^m}\left[x^{\beta-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^k x^{\alpha k}(\rho)_{pk}}{\Gamma(\alpha k+\beta)(\delta)_{kp}}\right]=\frac{d^m}{dx^m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^k x^{\alpha k+\beta-1}(\rho)_{pk}}{\Gamma(\alpha k+\beta)(\delta)_{kp}}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha k+\beta-1)(\alpha k+\beta-2)\cdots(\alpha k+\beta-m)w^k x^{\alpha k+\beta-1-m}(\rho)_{pk}}{\Gamma(\alpha k+\beta)(\delta)_{kp}}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\frac{\Gamma(\alpha k+\beta)}{(\alpha k+\beta-m)}w^k x^{\alpha k+\beta-1-m}(\rho)_{pk}}{\Gamma(\alpha k+\beta)(\delta)_{kp}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^k x^{\alpha k+\beta-1-m}(\rho)_{pk}}{\Gamma(\alpha k+\beta-m)(\delta)_{kp}}\\
&= x^{\beta-1-m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^k x^{\alpha k}(\rho)_{pk}}{\Gamma(\alpha k+\beta-m)(\delta)_{kp}}=x^{\beta-m-1}E^{\rho,\delta,q}_{\alpha,\beta-m,p}(wx^{\alpha}),
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar. ■

Tomando $p = 1$, $p = \delta = 1$, $p = \delta = q = 1$ e $p = \delta = q = \rho = 1$ na Eq.(2.8.4) recuperamos as seguintes relações das funções de Mittag-Leffler de cinco, quatro, três e dois parâmetros, respectivamente,

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[x^{\beta-1}E^{\rho,q}_{\alpha,\beta,\delta}(wx^\alpha)\right] = x^{\beta-m-1}E^{\rho,q}_{\alpha,\beta-m,\delta}(wx^\alpha),$$

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[x^{\beta-1}E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}(wx^\alpha)\right] = x^{\beta-m-1}E^{\rho,q}_{\alpha,\beta-m}(wx^\alpha),$$

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[x^{\beta-1}E^{\rho}_{\alpha,\beta}(wx^\alpha)\right] = x^{\beta-m-1}E^{\rho}_{\alpha,\beta-m}(wx^\alpha),$$

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[x^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(wx^\alpha)\right] = x^{\beta-m-1}E_{\alpha,\beta-m}(wx^\alpha),$$

e tomando $p = \delta = q = \rho = \beta = 1$ recuperamos uma relação entre as funções de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros, a saber

$$\frac{d^m}{dx^m}E_\alpha(wx^\alpha) = x^{-m}E_{\alpha,1-m}(wx^\alpha).$$

2.9 Transformada de Laplace das Funções de Mittag-Leffler

Nessa seção calcularemos duas transformadas de Laplace envolvendo as funções de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros, são elas:

i)$\mathscr{L}[E_\alpha(-\lambda t^\alpha)]$;

ii)$\mathscr{L}[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha)]$.

Em [33] se obtém a transformada em i) usando a metodologia da transformada de Laplace inversa. A transformada em ii) será muito útil no Capítulo 4 para a obter a solução do oscilador fracionário.

Vamos primeiro encontrar a transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler de um parâmetro, para isso usaremos a equação encontrada no **Exemplo 1.1**, a saber, $\mathscr{L}[t^\alpha] = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[E_\alpha(-\lambda t^\alpha)] &= \int_0^\infty e^{-st}E_\alpha(-\lambda t^\alpha)dt = \int_0^\infty e^{-st}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-\lambda t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+1)}dt \\
&= \sum_{k=0}^\infty\left[\frac{(-\lambda)^k}{\Gamma(\alpha k+1)}\int_0^\infty e^{-st}t^{\alpha k}dt\right] = \sum_{k=0}^\infty\left[\frac{(-\lambda)^k}{\Gamma(\alpha k+1)}\frac{\Gamma(\alpha k+1)}{s^{\alpha k+1}}\right] \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-\lambda)^k}{s^{\alpha k+1}}. \qquad (2.9.1)
\end{aligned}$$

A série na Eq.(2.9.1) é uma série geométrica, cuja soma é dada por $\dfrac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha+\lambda}$ para $\left|\frac{\lambda}{s^\alpha}\right| < 1$. Logo, para $\left|\frac{\lambda}{s^\alpha}\right| < 1$, $\mathscr{L}[E_\alpha(-\lambda t^\alpha)] = \dfrac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha+\lambda}$.

Calcularemos agora $\mathscr{L}[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha)]$. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha)] &= \int_0^\infty e^{-st}t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha)dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st}t^{\beta-1}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-\lambda t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}dt \\
&= \sum_{k=0}^\infty \left[\frac{(-\lambda)^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\int_0^\infty e^{-st}t^{\alpha k+\beta-1}dt\right] \\
&= \sum_{k=0}^\infty \left[\frac{(-\lambda)^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\frac{\Gamma(\alpha k+\beta)}{s^{\alpha k+\beta}}\right] \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-\lambda)^k}{s^{\alpha k+\beta}}. \qquad (2.9.2)
\end{aligned}$$

A série na Eq.(2.9.2) é uma série geométrica, cuja soma é dada por $\dfrac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha+\lambda}$ para $\left|\frac{\lambda}{s^\alpha}\right| < 1$. E, portanto, para $\left|\frac{\lambda}{s^\alpha}\right| < 1$, $\mathscr{L}[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha)] = \dfrac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha+\lambda}$.

Portanto, as transformadas de Laplace envolvendo as funções de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros, são dadas por

$$\mathscr{L}[E_\alpha(-\lambda t^\alpha)] = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha+\lambda}, \qquad (2.9.3)$$

e

$$\mathscr{L}[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha)] = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha+\lambda}. \qquad (2.9.4)$$

As respectivas transformadas de Laplace inversa são dadas por

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha+\lambda}\right] = E_\alpha(-\lambda t^\alpha),$$

e

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha+\lambda}\right] = t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha).$$

Capítulo 3

Cálculo Fracionário

"Assim como a mecânica de Newton parecia estar completa até o surgimento das teorias de Einstein, também o cálculo como nós o conhecíamos parecia estar completo, e com o advento do cálculo fracionário estamos diante de uma evolução cujas consequências podem ser tão formidáveis quanto às advindas da física quântica."

Rubens de Figueiredo Camargo

O cálculo fracionário, nomenclatura utilizada para o cálculo de ordem não inteira, tem origem em 30 de setembro de 1695, quando L'Hospital, em carta, pergunta a Leibniz qual o significado de uma derivada de ordem um meio, ou seja, qual seria o significado de $\frac{d^n y}{dx^n}$ sendo $n = \frac{1}{2}$.

Nesse capítulo vamos introduzir o conceito de integral fracionária, e apresentar duas formulações das derivadas fraciónaria, a derivada segundo Caputo e a derivada segundo Riemann-Liouville. Ao final, esboçamos um parelelo entre as duas formulações.

3.1 Integral Fracionária

Aqui, vamos introduzir a integral fracionária a partir da fórmula integral de Cauchy, a saber,

$$J^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{n-1} d\tau,$$

sendo $n \in \mathbb{N}$ e f uma função causal. O operador J^n representa a repetição n-éssima da integral, ou seja,

$$J^n f(t) := \int_0^t \int_0^{\tau_n - 1} \cdots \int_0^{\tau_1} f(\tau) d\tau d\tau_1 \cdots d\tau_{n-1}.$$

Utilizando a expressão anterior temos a chamada fórmula da integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem α de uma função f causal, sendo $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ e $t > 0$.

Definição 3.1. *A integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem α de uma função f causal é dada por,*

$$J^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \tag{3.1.1}$$

sendo $Re(\alpha) > 0$ e $t > 0$.

Podemos também escrever a integral fracionária, Eq.(3.1.1), como um produto de convolução das funções f e ϕ_α (função de Gel'fand-Shilov), sendo $\alpha > 0$ e

$$\phi_\alpha(t) := \begin{cases} \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{se} \quad t > 0, \\ \qquad 0, & \text{se} \quad t < 0. \end{cases}$$

Assim, podemos escrever

$$J^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau = \phi_\alpha(t) * f(t). \tag{3.1.2}$$

Temos que a integral fracionária de ordem $\alpha = 0$ de uma função f é a própria função f, ou seja, $J^0 = I$, sendo I o operador identidade.

Devido a sua importância mostraremos agora uma propriedade da função ϕ_α.

Proposição 3.1. *A função ϕ_α satisfaz a propriedade, $\phi_\alpha(t) * \phi_\beta(t) = \phi_{\alpha+\beta}(t)$, sendo $\alpha, \beta > 0$.*

Demonstração. A partir da definição do produto de convolução de Fourier temos,

$$(\phi_\alpha * \phi_\beta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\alpha(\tau)\phi_\beta(t-\tau) d\tau. \tag{3.1.3}$$

Observemos que

$$\phi_\alpha(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \tau > 0; \\ 0, & \tau < 0. \end{cases}$$

e

$$\phi_\beta(t-\tau) = \begin{cases} \frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & \tau < t; \\ 0, & \tau > t. \end{cases}$$

Assim, o produto $\phi_\alpha(\tau)\phi_\beta(t-\tau)$ só será diferente de zero para $0 < \tau < t$. Logo pela Eq.(3.1.3) temos,

$$\phi_\alpha(t) * \phi_\beta(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \frac{\tau^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} d\tau, & 0 < \tau < t; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.1.4}$$

Resolveremos agora a integral presente na Eq.(3.1.4), para isso usaremos a função beta, a saber,

$$B(p,q) := \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1} du,$$

e a relação da função beta com a função gama,

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{\tau^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}d\tau &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^t \tau^{\alpha-1}(t-\tau)^{\beta-1}d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^t \tau^{\alpha-1}\frac{t^{\beta-1}}{t^{\beta-1}}(t-\tau)^{\beta-1}d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^t \tau^{\alpha-1}t^{\beta-1}\left(\frac{1}{t}(t-\tau)\right)^{\beta-1}d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^t \tau^{\alpha-1}t^{\beta-1}\left(1-\frac{\tau}{t}\right)^{\beta-1}d\tau. \qquad (3.1.5)
\end{aligned}$$

Introduzindo a mudança de variável $u = \dfrac{\tau}{t}$ na Eq.(3.1.5), temos

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{\tau^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}d\tau &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 (ut)^{\alpha-1}t^{\beta-1}(1-u)^{\beta-1}\,tdu \\
&= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 (u)^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du \\
&= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}B(\alpha,\beta) \\
&= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \qquad (3.1.6)
\end{aligned}$$

Logo pelas Eq.(3.1.6) e Eq.(3.1.4) temos

$$\phi_\alpha(t) * \phi_\beta(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}, & t>0, \\ 0, & \text{t<0.} \end{cases} = \phi_{\alpha+\beta}(t),$$

como queríamos mostrar. ■

A partir de agora, iremos considerar apenas funções causais. Nos dois exemplos a seguir calcularemos a integral fracionária segundo Riemann-Liouville de ordem α de duas funções, a saber, a função constante e função potência.

Exemplo 3.1. *Encontraremos a integral fracionária segundo Riemann-Liouville de ordem α, sendo Re$(\alpha) > 0$, da função $f(t) = c$, sendo c uma constante.*

A partir da definição, Eq.(3.1.1), podemos escrever

$$J^\alpha c = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}c\,d\tau = \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}d\tau = \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\frac{t^\alpha}{\alpha} = \frac{t^\alpha c}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

□

Exemplo 3.2. *Calcularemos a integral fracionária de ordem α, $Re(\alpha) > 0$ da função $f(t) = t^\gamma$, sendo $\gamma > -1$ e $t > 0$.*

Por definição, Eq.(3.1.1), temos

$$J^\alpha t^\gamma = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^\gamma d\tau, \tag{3.1.7}$$

Consideremos a mudança de variável $\tau = tx$ na integral da Eq.(3.1.7), assim,

$$\begin{aligned} J^\alpha t^\gamma &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-tx)^{\alpha-1} (tx)^\gamma t dx = \frac{t^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x^\gamma dx \\ &= \frac{t^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \gamma+1) = \frac{t^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} = \frac{t^{\alpha+\gamma}\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)}, \end{aligned}$$

de onde segue-se

$$J^\alpha t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} t^{\alpha+\gamma}. \tag{3.1.8}$$

□

A proposição a seguir apresenta uma propriedade da integral de Riemann-Liouville.

Proposição 3.2. *A integral de Riemann-Liouville satisfaz a sequinte propriedade*

$$J^\alpha J^\beta f(t) = J^{\alpha+\beta} f(t), \tag{3.1.9}$$

sendo $\alpha, \beta \geq 0$.

Demonstração. Para mostrarmos que $J^\alpha J^\beta f(t) = J^{\alpha+\beta} f(t)$, para qualquer função f, usaremos as propriedades demonstradas na **Proposição 3.1**. Assim,

$$\begin{aligned} J^\alpha J^\beta f(t) &= J^\alpha(\phi_\beta(t) * f(t)) = \phi_\alpha(t) * (\phi_\beta(t) * f(t)) \\ &= (\phi_\alpha(t) * \phi_\beta(t)) * f(t) = \phi_{\alpha+\beta}(t) * f(t) = J^{\alpha+\beta} f(t). \end{aligned}$$

■

Como consequência imediata da **Proposição 3.2** temos que $J^\alpha J^\beta f(t) = J^\beta J^\alpha f(t)$. De fato, $J^\alpha J^\beta f(t) = J^{\alpha+\beta} f(t) = J^{\beta+\alpha} f(t) = J^\beta J^\alpha f(t)$.

3.1.1 Transformadas da Integral Fracionária de Riemann-Liouville

As transformadas de Laplace e de Fourier são ferramentas muito utilizadas na resolução de problemas que envolvem equações diferenciais. Nesta seção, vamos encontrar as transformadas de Fourier e de Laplace da integral de ordem fracionária segundo Riemman-Liouville.

Transformada de Laplace

Agora iremos calcular a transformada de Laplace da integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem α de uma dada função f, mas precisamente mostraremos que

$$\mathscr{L}[J^\alpha f(t)] = \frac{\mathscr{L}[f(t)]}{s^\alpha}, \tag{3.1.10}$$

onde $\mathscr{L}$ é o operador de Laplace.

Usando a Eq.(3.1.2), podemos escrever

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[J^\alpha f(t)] &= \mathscr{L}[\phi_\alpha(t) * f(t)] \\
&= \mathscr{L}[\phi_\alpha(t)]\mathscr{L}[f(t)] \\
&= \mathscr{L}[f(t)] \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-st} dt \\
&= \frac{\mathscr{L}[f(t)]}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-st} dt \\
&= \frac{\mathscr{L}[f(t)]}{\Gamma(\alpha)} \mathscr{L}[t^{\alpha-1}] \\
&= \frac{\mathscr{L}[f(t)]}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha} \\
&= \frac{\mathscr{L}[f(t)]}{s^\alpha},
\end{aligned}$$

conforme queríamos mostrar.

Transformada de Fourier

Nessa seção iremos calcular a transformada de Fourier da integral fracionária de ordem α segundo Riemann-Liouville. Assim temos,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[J^\alpha f(x)] &= \mathcal{F}[\phi_\alpha(t) * f(t)] \\
&= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[f(x)]\mathcal{F}[\phi_\alpha(t)].
\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

Resolveremos separadamente a transformada de Fourier da função ϕ_α, presente na Eq.(3.1.11). Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\phi_\alpha(t)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-i\omega t} dt.
\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

Introduzindo a mudança de variável $u = i\omega t$ na integral da Eq.(3.1.12), temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\phi_\alpha(t)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{u}{i\omega}\right)^{\alpha-1} e^{-u} \frac{du}{i\omega} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\alpha)(i\omega)^\alpha} \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\alpha)(i\omega)^\alpha} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(i\omega)^\alpha}.
\end{aligned} \tag{3.1.13}$$

Assim pelas Eq.(3.1.11) e Eq.(3.1.13) podemos escrever

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[J^\alpha f(x)] &= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[f(x)] \frac{1}{\sqrt{2\pi}(i\omega)^\alpha} \\
&= \frac{\mathcal{F}[f(x)]}{(i\omega)^\alpha}.
\end{aligned}$$

Portanto, a transformada de Fourier da integral fracionária de ordem α de uma função f é dada por,

$$\mathcal{F}[J^\alpha f(x)] = \frac{\mathcal{F}[f(x)]}{(i\omega)^\alpha}.$$

3.2 Derivadas Fracionárias

Nessa seção vamos apresentar uma generalização para o operador diferencial D^n, sendo $D = \frac{d}{dx}$ e n um número natural, a saber, o operador diferencial fracionário, D^α, sendo $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$. Discutimos apenas as formulações segundo Riemann-Liouville e Caputo, bem como faremos um paralelo entre essas definições.

3.2.1 Segundo Riemann-Liouville

Definição 3.2. *Sejam α um número complexo tal que $Re(\alpha) > 0$ e m o menor inteiro maior ou igual a $Re(\alpha)$, ou seja, $m - 1 < Re(\alpha) \leq m$. A derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de uma função causal, suficientemente bem comportada f é dada por,*

$$D^\alpha f(t) = D^m J^{m-\alpha} f(t).$$

Observemos da **Definição 3.2** que para $m - 1 < \mathrm{Re}(\alpha) \leq m$, temos

$$\begin{aligned}
D^\alpha f(t) &= D^m J^{m-\alpha} f(t) \\
&= \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau,
\end{aligned}$$

e se $\alpha = m$, sendo m inteiro, temos,

$$D^\alpha f(t) \;=\; D^m J^{m-\alpha} f(t) = D^m J^0 f(t) = D^m f(t).$$

Portanto,

$$D^\alpha f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \dfrac{d^m}{dt^m} \displaystyle\int_0^t \dfrac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau, & \text{se} \;\; m-1 < \mathrm{Re}(\alpha) < m; \\ \\ \dfrac{d^m}{dt^m} f(t), & \text{se} \;\; \alpha = m. \end{cases}$$

Note que a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de ordem α, D^α, é a inversa à esquerda da integral fracionária de ordem α, J^α, ou seja,

$$D^\alpha J^\alpha = I.$$

De fato, temos que $D^\alpha J^\alpha = D^m J^{m-\alpha} J^\alpha = D^m J^{m-\alpha+\alpha} = D^m J^m = I$.

Observemos também que $J^\alpha D^\alpha \neq I$ e para $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$J^n D^n f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}. \tag{3.2.1}$$

Mostraremos que vale a Eq.(3.2.1) por indução. De fato vale a Eq.(3.2.1) para $n = 1$, pois

$$J^1 D^1 f(t) = J^1 f'(t) = \int_0^t f'(\tau) d\tau = f(t) - f(0).$$

Suponha que vale a Eq.(3.2.1) para $n = s$, ou seja,

$$J^s D^s f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{s-1} f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!},$$

sendo $s \in \mathbb{N}$. Mostraremos que vale a Eq.(3.2.1) para $n = s+1$, ou seja, mostraremos que vale a seguinte equação,

$$J^{s+1} D^{s+1} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{s} f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} J^{s+1} D^{s+1} f(t) &= J^1 J^s D^s D^1 f(t) \\ &= J^1 J^s D^s f'(t). \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Como por hipótese de indução vale a Eq.(3.2.1) para $n = s$, temos,

$$\begin{aligned}
J^{s+1}D^{s+1}f(t) &= J^1\left(f'(t) - \sum_{k=0}^{s-1} f^{(k+1)}(0)\frac{t^k}{k!}\right) \\
&= \int_0^t f'(\tau)d\tau - \int_0^t \sum_{k=0}^{s-1} f^{(k+1)}(0)\frac{\tau^k}{k!}d\tau \\
&= f(t) - f(0) - \sum_{k=0}^{s-1} f^{(k+1)}(0)\int_0^t \frac{\tau^k}{k!}d\tau \\
&= f(t) - f(0) - \sum_{k=0}^{s-1} f^{(k+1)}(0)\frac{\tau^{k+1}}{(k+1)k!}\Big|_0^t \\
&= f(t) - f(0) - \sum_{k=0}^{s-1} f^{(k+1)}(0)\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}. \qquad (3.2.3)
\end{aligned}$$

Considerando a mudança de índice $k \to k-1$ na Eq.(3.2.3), temos

$$J^{s+1}D^{s+1}f(t) = f(t) - f(0) - \sum_{k=1}^{s} f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}. \qquad (3.2.4)$$

Observemos que

$$f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}\Big|_{k=0} = f(0). \qquad (3.2.5)$$

Portanto, pelas Eq.(3.2.4) e Eq.(3.2.5) temos,

$$J^{s+1}D^{s+1}f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{s} f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}.$$

Logo, vale a Eq.(3.2.1).

Exemplo 3.3. *Mostraremos que a derivada fracionária de ordem α da função $f(t) = t^\gamma$, sendo $Re(\alpha) > 0$, $\gamma > -1$ e $t > 0$ é $\dfrac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha)}t^{\gamma-\alpha}$.*

Seja $m - 1 < \mathrm{Re}(\alpha) \leq m$, assim $D^\alpha t^\gamma = D^m J^{m-\alpha} t^\gamma$. Pelo **Exemplo 3.2**, mais precisamente pela Eq.(3.1.8) temos,

$$\begin{aligned}
D^\alpha t^\gamma &= D^m\left(\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(m-\alpha+\gamma+1)}t^{m-\alpha+\gamma}\right) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(m-\alpha+\gamma+1)}\frac{\Gamma(m-\alpha+\gamma+1)}{\gamma+1-\alpha}t^{\gamma-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha)}t^{\gamma-\alpha},
\end{aligned}$$

conforme queríamos mostrar. □

No exemplo a seguir mostraremos que a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de uma constante nem sempre é zero, diferente do que ocorre no cálculo de ordem inteira, onde a derivada de uma constante é zero.

Exemplo 3.4. *Encontraremos a derivada fracionária de ordem α segundo Riemann-Liouville de uma constante c.*

Seja $m-1 < \mathrm{Re}(\alpha) \leq m$. Assim,

$$D^\alpha c = D^m J^{m-\alpha} c$$

Pelo **Exemplo 3.1** temos que $J^\alpha c = \dfrac{t^\alpha c}{\Gamma(\alpha+1)}$. Logo,

$$\begin{aligned} D^\alpha c &= D^m \frac{t^{m-\alpha} c}{\Gamma(m-\alpha+1)} \\ &= c\frac{\Gamma(m-\alpha+1)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+1)} \\ &= \frac{c}{t^\alpha \Gamma(1-\alpha)}. \end{aligned}$$

Observemos se $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $\alpha \notin \mathbb{N}$ a derivada fracionária de ordem α segundo Riemann-Liouville de uma constante não é zero [18]. $\square$

Teorema 3.1. *Duas funções f e g possuem a mesma derivada fracionária de ordem α segundo Riemann-Liouville, ou seja, $D^\alpha f(t) = D^\alpha g(t)$, sendo $t > 0$ e Re$(\alpha) > 0$, se e somente se, $f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^{m} c_j t^{\alpha-j}$, com c_j constantes arbitrárias e $m-1 < Re(\alpha) \leq m$.*

Demonstração. Dividiremos essa demonstração em duas partes, a saber,

i) Se $D^\alpha f(t) = D^\alpha g(t)$ então $f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^{m} c_j t^{\alpha-j}$;

ii) Se $f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^{m} c_j t^{\alpha-j}$ então $D^\alpha f(t) = D^\alpha g(t)$.

Demostraremos primeiro *i)*. Seja $m-1 < \alpha \leq m$, por hipótese $D^\alpha f(t) = D^\alpha g(t)$, portanto,

$$D^m J^{m-\alpha} f(t) = D^m J^{m-\alpha} g(t). \tag{3.2.6}$$

Seja $J^{m-\alpha} f(t) = f_1(t)$ e $J^{m-\alpha} g(t) = g_1(t)$, assim podemos reescrever a Eq.(3.2.6) como,

$$D^m f_1(t) = D^m g_1(t). \tag{3.2.7}$$

Aplicando em ambos os membros da Eq.(3.2.7) o operador J^m, temos

$$J^m D^m f_1(t) = J^m D^m g_1(t),$$

e usando a Eq.(3.2.1) podemos escrever

$$f_1(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f_1^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!} = g_1(t) - \sum_{k=0}^{m-1} g_1^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}.$$

Logo, rearranjando, obtemos

$$f_1(t) = g_1(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} \left[f_1^{(k)}(0) - g_1^{(k)}(0) \right]. \tag{3.2.8}$$

Escrevendo a Eq.(3.2.8) em função de f e g temos,

$$J^{m-\alpha} f(t) = J^{m-\alpha} g(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} \left[f_1^{(k)}(0) - g_1^{(k)}(0) \right]. \tag{3.2.9}$$

Aplicando o operador $J^{\alpha-m}$ em ambos os membros da Eq.(3.2.9) temos,

$$\begin{aligned}
f(t) &= g(t) + J^{\alpha-m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} \left[f_1^{(k)}(0) - g_1^{(k)}(0) \right] \\
&= g(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha-m)} \frac{t^{k+\alpha-m}}{k!} \left[f_1^{(k)}(0) - g_1^{(k)}(0) \right] \\
&= g(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{k+\alpha-m}}{\Gamma(k+1+\alpha-m)} \left[f_1^{(k)}(0) - g_1^{(k)}(0) \right].
\end{aligned}$$

Consideremos a mudança de índices $k = m - j$, assim

$$f(t) = g(t) + \sum_{j=m}^{1} \frac{t^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} \left[f_1^{(m-j)}(0) - g_1^{(m-j)}(0) \right].$$

Seja $c_j = \dfrac{f_1^{(m-j)}(0) - g_1^{(m-j)}(0)}{\Gamma(\alpha-j+1)}$, assim $f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^{m} c_j t^{\alpha-j}$, como queríamos mostrar.

Mostraremos agora que vale *ii)*. Por hipótese temos que

$$f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^{m} c_j t^{\alpha-j}. \tag{3.2.10}$$

Aplicando o operador D^α em ambos os lados da Eq.(3.2.10) obtemos

$$\begin{aligned}
D^\alpha f(t) &= D^\alpha \left(g(t) + \sum_{j=1}^{m} c_j t^{\alpha-j} \right) \\
&= D^\alpha g(t) + D^\alpha \sum_{j=1}^{m} c_j t^{\alpha-j}.
\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Mostramos que $D^\alpha \sum_{j=1}^{m} c_j t^{\alpha-j}$ presente na Eq.(3.2.10) é zero. Seja $m - 1 < \mathrm{Re}(\alpha) \leq m$, assim

$$
\begin{aligned}
D^{\alpha}\sum_{j=1}^{m} c_j t^{\alpha-j} &= D^m J^{m-\alpha}\sum_{j=1}^{m} c_j t^{\alpha-j} \\
&= D^m \sum_{j=1}^{m} c_j J^{m-\alpha} t^{\alpha-j} \\
&= D^m \sum_{j=1}^{m} c_j \frac{\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(m-j+1)} t^{m-j} \\
&= \sum_{j=1}^{m} c_j \frac{\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(m-j+1)} D^m t^{m-j} \\
&= \sum_{j=1}^{m} c_j \frac{\Gamma(m-j+1)}{\Gamma(-j+1)} t^{-j} \frac{\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(m-j+1)} \\
&= \sum_{j=1}^{m} c_j \frac{\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(-j+1)} t^{-j}
\end{aligned}
$$

Devido ao fato de $\lim_{x\to m}|\Gamma(x)|\to\infty$ para $m = 0, -1, -2, -3, \cdots$ temos que

$$
D^{\alpha}\sum_{j=1}^{m} c_j t^{\alpha-j} = 0. \tag{3.2.12}
$$

Logo, pelas Eq.(3.2.11) e Eq.(3.2.12) temos que $D^{\alpha}f(t) = D^{\alpha}g(t)$. ■

Transformada de Laplace da Derivada Fracionária Segundo Riemann-Liouville

Nessa seção mostraremos que

$$
\mathscr{L}[D^{\alpha}f(t)] = s^{\alpha}\mathscr{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} g^{(k)}(0),
$$

sendo $g(t) = J^{m-\alpha}f(t)$ e $m-1 < \mathrm{Re}(\alpha) \leq m$.

Assim, para $m-1 < \mathrm{Re}(\alpha) \leq m$, temos

$$
\mathscr{L}[D^{\alpha}f(t)] = \mathscr{L}[D^m J^{m-\alpha}f(t)], \tag{3.2.13}
$$

seja $g(t) = J^{m-\alpha}f(t)$ na Eq.(3.2.13), assim $\mathscr{L}[D^{\alpha}f(t)] = \mathscr{L}[D^m g(t)]$. Pelo **Teorema 1.10** demostrado no Capítulo 1 temos

$$
\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^n\mathscr{L}[f(t)] - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-(j+1)} f^{(j)}(0).
$$

Portanto, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}[D^{\alpha}f(t)] &= s^m\mathscr{L}[g(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-(k+1)} g^{(k)}(0) \\
&= s^m\mathscr{L}[J^{m-\alpha}f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-(k+1)} g^{(k)}(0).
\end{aligned}
$$

Pela Eq.(3.1.10) temos que $\mathscr{L}[J^\alpha f(t)] = \dfrac{\mathscr{L}[f(t)]}{s^\alpha}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[D^\alpha f(t)] &= s^m \frac{\mathscr{L}[f(t)]}{s^{m-\alpha}} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-(k+1)} g^{(k)}(0) \\
&= s^\alpha \mathscr{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} g^{(k)}(0),
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

3.2.2 Segundo Caputo

Definição 3.3. *Sejam α um número complexo tal que $Re(\alpha) > 0$ e m o menor inteiro maior ou igual a $Re(\alpha)$, assim $m-1 < Re(\alpha) \leq m$. A derivada fracionária segundo Caputo de uma função causal, suficientemente bem comportada, f é dada por,*

$$_*D^\alpha f(t) = J^{m-\alpha} D^m f(t).$$

O índice $_*$ foi adicionado ao símbolo da derivada fracionária segundo Caputo para diferenciar da derivada fracionária segundo Riemann-Liouville. A notação $_CD^\alpha f(t)$ também é utilizada.

A derivada fracionária segundo Caputo é mais restritiva que a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville, uma vez que para a derivada fracionária segundo Caputo de uma função f é necessário a integrabilidade da derivada de ordem m dessa função f, sendo $m-1 < \mathrm{Re}(\alpha) \leq m$ e α a ordem da derivada fracionária [7].

Observemos que se $\alpha = m$ então pela **Definição 3.3** temos que

$$_*D^\alpha f(t) = J^0 D^m f(t) = \frac{d^m}{dt^m} f(t),$$

e se $m-1 < \mathrm{Re}(\alpha) \leq m$ temos

$$_*D^\alpha f(t) = J^{m-\alpha} D^m f(t) = J^{m-\alpha} f^{(m)}(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)} f^{(m)}(\tau) d\tau,$$

de onde segue-se

$$_*D^\alpha f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \displaystyle\int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau, & \text{se } \ m-1 < \mathrm{Re}(\alpha) \leq m; \\[2ex] \dfrac{d^m}{dt^m} f(t), & \text{se } \ \alpha = m. \end{cases}$$

Note também que a derivada fracionária de ordem α, segundo Caputo, de uma constante é sempre zero. De fato,

$$_*D^\alpha c = J^{m-\alpha} D^m c = J^{m-\alpha} 0 = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)} 0 d\tau = 0,$$

sendo c uma constante e $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$.

A derivada fraciónaria segundo Caputo é um operador linear [24], ou seja, $D^\alpha(\lambda f(t) + \gamma g(t)) = \lambda D^\alpha f(t) + \gamma D^\alpha g(t)$, sendo f e g funções causais e λ e γ constantes.

Exemplo 3.5. *Calcularemos a derivada fracionária segundo Caputo de ordem α, sendo $Re(\alpha) > 0$, da função $f(t) = t^\gamma$ com $\gamma > -1$ e $t > 0$.*

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} {}_*D^\alpha t^\gamma &= J^{m-\alpha} D^m t^\gamma \\ &= J^{m-\alpha} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-m+1)} t^{\gamma-m} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-m+1)} J^{m-\alpha} t^{\gamma-m}, \end{aligned}$$

que, pela Eq.(3.1.8) fornece

$$\begin{aligned} {}_*D^\alpha t^\gamma &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-m+1)} \frac{\Gamma(\gamma-m+1)}{\Gamma(\gamma-m+m-\alpha+1)} t^{\gamma-m+m-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} t^{\gamma-\alpha}. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.2. *Duas funções f e g possuem a mesma derivada fracionária de ordem α segundo Caputo, ou seja, ${}_*D^\alpha f(t) = {}_*D^\alpha g(t)$, sendo $t > 0$ e $Re(\alpha) > 0$, se e somente se, $f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^{m} c_j t^{m-j}$, sendo c_j constantes arbitrárias e $m - 1 < Re(\alpha) \leq m$.*

Demonstração. Dividiremos essa demostração em duas partes, a saber,

i) Se $f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^{m} c_j t^{m-j}$ então ${}_*D^\alpha f(t) = {}_*D^\alpha g(t)$.

ii) Se ${}_*D^\alpha f(t) = {}_*D^\alpha g(t)$ então $f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^{m} c_j t^{m-j}$;

Demonstraremos primeiro *i)*. Seja $m - 1 < \alpha \leq m$, por hipótese temos que

$$f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^{m} c_j t^{m-j}. \tag{3.2.14}$$

Aplicando o operador ${}_*D^\alpha$ em ambos membros da Eq.(3.2.14) temos

$$\begin{aligned} {}_*D^\alpha f(t) &= {}_*D^\alpha \left(g(t) + \sum_{j=1}^{m} c_j t^{m-j} \right) \\ &= {}_*D^\alpha g(t) + {}_*D^\alpha \sum_{j=1}^{m} c_j t^{m-j}. \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

Mostraremos que ${}_*D^{\alpha}\sum_{j=1}^{m} c_j t^{m-j}$ presente na Eq.(3.2.15) é zero. Assim,

$$\begin{aligned}
{}_*D^{\alpha}\sum_{j=1}^{m} c_j t^{m-j} &= \sum_{j=1}^{m} {}_*D^{\alpha} c_j t^{m-j} \\
&= \sum_{j=1}^{m} c_j J^{m-\alpha} D^m t^{m-j} \\
&= \sum_{j=1}^{m} c_j J^{m-\alpha} \frac{\Gamma(m-j+1)}{\Gamma(-j+1)} t^{-j} \\
&= \sum_{j=1}^{m} c_j \frac{\Gamma(m-j+1)}{\Gamma(-j+1)} J^{m-\alpha} t^{-j}. \qquad (3.2.16)
\end{aligned}$$

Observemos que $\dfrac{\Gamma(m-j+1)}{\Gamma(-j+1)}$ presente na Eq.(3.2.16) é zero para todo $j \in [1,m]$, pois para $1 \leq j \leq m$, $\Gamma(-j+1) = \infty$. Logo,

$$ {}_*D^{\alpha}\sum_{j=1}^{m} c_j t^{m-j} = 0. \qquad (3.2.17)$$

Assim, pelas Eq.(3.2.15) e Eq.(3.2.17) temos ${}_*D^{\alpha} f(t) = {}_*D^{\alpha} g(t)$.

Agora mostraremos que vale *ii)*. Para $m-1 < \mathrm{Re}(\alpha) \leq m$ e por hipótese temos,

$$\begin{aligned}
{}_*D^{\alpha} f(t) &= {}_*D^{\alpha} g(t) \\
J^{m-\alpha} D^m f(t) &= J^{m-\alpha} D^m g(t). \qquad (3.2.18)
\end{aligned}$$

Aplicando o operador $D^{m-\alpha}$ em ambos membros da Eq.(3.2.18) temos

$$ D^m f(t) = D^m g(t). \qquad (3.2.19)$$

Tomando o operador J^m em ambos membros da Eq.(3.2.19) obtemos

$$ J^m D^m f(t) = J^m D^m g(t).$$

Utilizando a Eq.(3.2.1) podemos escrever

$$\begin{aligned}
f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!} &= g(t) - \sum_{k=0}^{m-1} g^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!} \\
f(t) &= g(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \left[f^{(k)}(0) - g^{(k)}(0)\right] \frac{t^k}{k!}. \qquad (3.2.20)
\end{aligned}$$

Consideremos a mudança de índices $j = m-k$ no somatório da Eq.(3.2.20). Logo,

$$ f(t) = g(t) - \sum_{j=m}^{1} \left[f^{(m-j)}(0) - g^{(m-j)}(0)\right] \frac{t^{m-j}}{(m-j)!}. \qquad (3.2.21)$$

Seja $c_j = \dfrac{f^{(m-j)}(0) - g^{(m-j)}(0)}{(m-j)!}$. Assim, podemos reescrever a Eq.(3.2.21) na forma $f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^{m} c_j t^{m-j}$, como queríamos mostrar. ∎

Transformada de Laplace da Derivada Fracionária Segundo Caputo

Nessa seção encontraremos a transformada de Laplace da derivada fracionária de ordem α segundo Caputo, sendo $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$. Mostraremos que para $m-1 < \mathrm{Re}(\alpha) \leq m$, vale a equação

$$\mathscr{L}[{}_*D^\alpha f(t)] = s^\alpha \mathscr{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-1-k} f^{(k)}(0), \tag{3.2.22}$$

sendo $f^{(k)}(0) = \lim_{t \to 0} D^k f(t)$.

Assim, para $m-1 < \mathrm{Re}(\alpha) \leq m$, temos

$$\mathscr{L}[{}_*D^\alpha f(t)] = \mathscr{L}[J^{m-\alpha} D^m f(t)]. \tag{3.2.23}$$

Seja $g(t) = D^m f(t)$, logo pela Eq.(3.2.23) temos $\mathscr{L}[{}_*D^\alpha f(t)] = \mathscr{L}[J^{m-\alpha} g(t)]$. Pela Eq.(3.1.10) temos que $\mathscr{L}[J^\alpha f(t)] = \dfrac{\mathscr{L}[f(t)]}{s^\alpha}$. Logo, obtemos

$$\mathscr{L}[{}_*D^\alpha f(t)] = \frac{\mathscr{L}[g(t)]}{s^{m-\alpha}}. \tag{3.2.24}$$

Pelo **Teorema 1.10** demostrado no Capítulo 1 temos

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \mathscr{L}[f(t)] - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-(j+1)} f^{(j)}(0),$$

de onde segue-se

$$\mathscr{L}[g(t)] = \mathscr{L}[D^m f(t)] = s^m \mathscr{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} f^{(k)}(0). \tag{3.2.25}$$

Logo, pelas Eq.(3.2.24) e Eq.(3.2.25) temos,

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[{}_*D^\alpha f(t)] &= \frac{1}{s^{m-\alpha}} \left(s^m \mathscr{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} f^{(k)}(0) \right) \\ &= s^\alpha \mathscr{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

Uma outra maneira de se obter tal resultado é através da função de Gel'fand-Shilov.

3.2.3 Riemann-Liouville $\times$ Caputo

Nas seções anteriores vimos que a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville é a derivada de ordem inteira de uma integral fracionária, já a derivada fracionária segundo Caputo inverte a ordem entre a derivada e a integração fracionária, ou seja, a derivada frecionária segundo Caputo é a integral fracionária de uma derivada de ordem inteira. Nessa seção faremos um paralelo entre as derivadas fracionárias segundo Riemann-Liouville e Caputo.

Ao contrário do operador integral, J^α, os operadores diferenciais, D^α e ${}_*D^\alpha$ não satisfazem a propriedade comutativa nem a propriedade que o operador de ordem α do operador de ordem β é o operador de ordem $\alpha+\beta$ [7, 12, 15], ou seja,

$$D^\alpha D^\beta \neq D^\beta D^\alpha \qquad \text{e} \qquad D^\alpha D^\beta \neq D^{\alpha+\beta}.$$

Iremos mostrar a seguinte relação entre as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville e Caputo para $m-1 < \mathrm{Re}(\alpha) \leq m$,

$${}_*D^\alpha f(t) = D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}. \tag{3.2.26}$$

Para mostrarmos a Eq.(3.2.26) primeiro observemos que

$$D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} = D^\alpha\left[f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}\right]. \tag{3.2.27}$$

De fato a Eq.(3.2.27) vale pois,

$$\begin{aligned}
D^\alpha\left[f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}\right] &= D^\alpha f(t) - D^\alpha \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!} \\
&= D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)\frac{t^{k-\alpha}}{k!}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} \\
&= D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

Assim, para mostrar que vale a Eq.(3.2.26) mostraremos que vale a seguinte equação

$${}_*D^\alpha f(t) = D^\alpha\left[f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}\right]. \tag{3.2.28}$$

A partir da Eq.(3.2.1), para $m-1 < \mathrm{Re}(\alpha) \leq m$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
D^\alpha\left[f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}\right] &= D^\alpha\left[J^m D^m f(t)\right] \\
&= D^m J^{m-\alpha} J^m D^m f(t) \\
&= D^m J^{m-\alpha+m} D^m f(t) \\
&= D^m J^m J^{m-\alpha} D^m f(t) \\
&= J^{m-\alpha} D^m f(t) \\
&= {}_*D^\alpha f(t).
\end{aligned}$$

Logo, segue-se

$$ {}_*D^\alpha f(t) = D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}, $$

como queríamos mostrar.

Assim, em geral, temos

$$ \underbrace{D^\alpha f(t) = D^m J^{m-\alpha} f(t)}_{\text{Derivada segundo Riemann-Liouville}} \neq \underbrace{{}_*D^\alpha f(t) = J^{m-\alpha} D^m f(t)}_{\text{Derivada segundo Caputo}} $$

Observemos pela Eq.(3.2.26) que as derivadas fracionárias de ordem α segundo Caputo e Riemann-Liouville de uma mesma função f serão iguais se as derivadas de ordem inteiras menores ou iguais a $m-1$ de f, sendo $m-1 < \mathrm{Re}(\alpha) \le m$, forem nulas em $t=0$. A exemplo desse fato temos pelos **Exemplo 3.3** e **Exemplo 3.5** que as derivadas fracionárias de ordem α segundo Riemann-Liouville e Caputo da função $f(t) = t^\gamma$ com $\gamma > -1$ e $t > 0$ são iguais, uma vez que as derivadas de ordem inteira dessa função em $t=0$ são sempre nulas.

Observemos também pela Eq.(3.2.26) que a derivada fracionária segundo Caputo leva em consideração os valores iniciais da função e de suas derivadas de ordens inteiras menores que m. A transformada de Laplace também leva em consideração essas condições iniciais. Esses motivos nos levam a optar pela formulação da derivada de Caputo na aplicação que vamos discutir no capítulo a seguir.

3.3 Integral e Derivadas Fracionária da Função de Mittag-Leffler

Nessa seção, calcularemos a integral fracionária, a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville e segundo Capudo da função de Mittag-Leffler de seis parâmetros, e por sua vez recuperaremos a integral fracionária, a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville e segundo Capudo das demais funções de Mittag-Leffler com menos de seis parâmetros.

3.3.1 Integral Frácionária da Função de Mittag-Leffler

Nessa seção calcularemos a integral fracionária de ordem ν de uma função que será muito útil no Capítulo 4, a saber, $t^{\beta-1}E^{\rho,\delta,q}_{\alpha,\beta,p}(wt^\alpha)$. Assim

$$ \begin{aligned} J^\nu\left[t^{\beta-1}E^{\rho,\delta,q}_{\alpha,\beta,p}(wt^\alpha)\right] &= J^\nu\left[t^{\beta-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(wt^\alpha)^k(\rho)_{qk}}{\Gamma(\alpha k+\beta)(\delta)_{pk}}\right] \\ &= J^\nu \sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^k t^{\alpha k+\beta-1}(\rho)_{qk}}{\Gamma(\alpha k+\beta)(\delta)_{pk}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^k J^\nu t^{\alpha k+\beta-1}(\rho)_{qk}}{\Gamma(\alpha k+\beta)(\delta)_{pk}}. \end{aligned} $$

Utilizando a Eq.(3.1.8), temos

$$\begin{aligned} J^{\nu}\left[t^{\beta-1}E^{\rho,\delta,q}_{\alpha,\beta,p}(wt^{\alpha})\right] &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^k\frac{t^{\alpha k+\beta-1+\nu}\Gamma(\alpha k+\beta)}{\Gamma(\alpha k+\beta+\nu)}(\rho)_{qk}}{\Gamma(\alpha k+\beta)(\delta)_{pk}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^k t^{\alpha k+\beta-1+\nu}(\rho)_{qk}}{\Gamma(\alpha k+\beta+\nu)(\delta)_{pk}} \\ &= t^{\beta+\nu-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(wt^{\alpha})^k(\rho)_{qk}}{\Gamma(\alpha k+\beta+\nu)(\delta)_{pk}} \\ &= t^{\beta+\nu-1}E^{\rho,\delta,q}_{\alpha,\beta+\nu,p}(wt^{\alpha}). \end{aligned}$$

Logo, podemos escrever

$$J^{\nu}\left[t^{\beta-1}E^{\rho,\delta,q}_{\alpha,\beta,p}(wt^{\alpha})\right] = t^{\beta+\nu-1}E^{\rho,\delta,q}_{\alpha,\beta+\nu,p}(wt^{\alpha}). \tag{3.3.1}$$

3.3.2 Derivada Frácionária segundo Riemann-Liouville da Função de Mittag-Leffler

Calcularemos a derivada fracionária de ordem ν segundo Riemann-Liouville da função $t^{\beta-1}E^{\rho,\delta,q}_{\alpha,\beta,p}(wt^{\alpha})$. Assim,

$$D^{\nu}\left[t^{\beta-1}E^{\rho,\delta,q}_{\alpha,\beta,p}(wt^{\alpha})\right] = D^m J^{m-\nu}\left[t^{\beta-1}E^{\rho,\delta,q}_{\alpha,\beta,p}(wt^{\alpha})\right].$$

Pela Eq.(3.3.1) podemos escrever

$$D^{\nu}\left[t^{\beta-1}E^{\rho,\delta,q}_{\alpha,\beta,p}(wt^{\alpha})\right] = D^m\left[t^{\beta+m-\nu-1}E^{\rho,\delta,q}_{\alpha,\beta+m-\nu,p}(wt^{\alpha})\right],$$

e pela Eq.(2.8.4) temos

$$D^{\nu}\left[t^{\beta-1}E^{\rho,\delta,q}_{\alpha,\beta,p}(wt^{\alpha})\right] = t^{\beta-\nu-1}E^{\rho,\delta,q}_{\alpha,\beta-\nu,p}(wt^{\alpha}). \tag{3.3.2}$$

3.3.3 Derivada Frácionária segundo Caputo da Função de Mittag-Leffler

Nessa seção encontraremos a derivada fracionária de ordem ν segundo Caputo da função $t^{\beta-1}E^{\rho,\delta,q}_{\alpha,\beta,p}(wt^{\alpha})$. Assim,

$${}_*D^{\nu}\left[t^{\beta-1}E^{\rho,\delta,q}_{\alpha,\beta,p}(wt^{\alpha})\right] = J^{m-\nu}D^m\left[t^{\beta-1}E^{\rho,\delta,q}_{\alpha,\beta,p}(wt^{\alpha})\right].$$

Pela Eq.(2.8.4) temos

$${}_*D^{\nu}\left[t^{\beta-1}E^{\rho,\delta,q}_{\alpha,\beta,p}(wt^{\alpha})\right] = J^{m-\nu}\left[t^{\beta-m-1}E^{\rho,\delta,q}_{\alpha,\beta-m,p}(wt^{\alpha})\right],$$

e pela Eq.(3.3.1) temos

$${}_*D^{\nu}\left[t^{\beta-1}E^{\rho,\delta,q}_{\alpha,\beta,p}(wt^{\alpha})\right] = t^{\beta-\nu-1}E^{\rho,\delta,q}_{\alpha,\beta-\nu,p}(wt^{\alpha}). \tag{3.3.3}$$

Capítulo 4

Oscilador Fracionário

Nesse capítulo resolveremos a equação diferencial fracionária do oscilador. O oscilador harmônico representado por uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes, é a base da mecânica clássica [30]. Equações diferenciais de ordem fracionária podem ser entendidas como sendo generalizações das equações diferenciais [36]. A vantagem mais importante da utilização de equações diferenciais fracionárias em aplicações é a sua propriedade não-local, ou seja, o próximo estado de um sistema não depende apenas de seu estado atual, mas sim de todos os seus estados anteriores [4].

A equação diferencial do movimento de uma partícula de massa m, presa a uma mola cuja extremidade superior está fixa, sujeita a uma força harmônica $F = -kx$, sendo k a constante elástica (Lei de Hooke), força de atrito $F = -bv$, sendo b uma constante positiva e v a velocidade, e a uma força externa g, é dada pela segunda lei de Newton por

$$\begin{aligned} F_r &= ma \\ g(t) - kx(t) - bv &= ma \\ ma + bv + kx(t) &= g(t) \\ m\frac{d^2}{dt^2}x(t) + b\frac{d}{dt}x(t) + kx(t) &= g(t) \end{aligned}$$

onde $x(t)$ é o deslocamento num tempo t. Dividindo pela massa m, temos

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \frac{b}{m}\frac{d}{dt}x(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{g(t)}{m}.$$

Introduzindo os parâmetros $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, a chamada frequência angular, $\gamma = \frac{b}{2m}$ e $f(t) = \frac{g(t)}{m}$ obtemos

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2\gamma\frac{d}{dt}x(t) + \omega^2 x(t) = f(t),$$

onde γ é o parâmetro que indica a intensidade de amortecimento do movimento e ω^2 é a frequência do oscilador não amortecido [5].

Para $\gamma = 0$ temos movimentos sem amortecimento. Iremos considerar somente esse caso. Podemos, sem perda de generalidade, considerar o caso $\gamma = 0$ pois sempre é possível eliminar, através de uma conveniente mudança de variável dependente, o termo envolvendo a derivada primeira. Isto é possível pois os coeficientes são constantes. Assim, a equação diferencial do oscilador a ser considerada é

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \omega^2 x(t) = f(t), \tag{4.0.1}$$

sujeito as condições iniciais, $x(0) = c_0$ e $x'(0) = c_1$, sendo c_0 e c_1 constantes. $x(0)$ é o deslocamento em $t = 0$, também chamado deslocamento inicial e $x'(0)$ é a velocidade do oscilador em $t = 0$, a chamada velocidade inicial e $f(t)$ é a função forçante [1].

Do ponto de vista do cálculo fracionário uma generalização natural da equação do oscilador (Eq.(4.0.1)) é obtida substituindo a ordem da derivada da equação diferencial pela derivada fracionária segundo Caputo de ordem α, denotada por ${}_*D^\alpha$ sendo $1 < \alpha \leq 2$ [2, 3, 15, 23, 25]. A escolha desta derivada reside na importância de preservar a interpretação das condições iniciais. No caso em que $\alpha = 2$ a equação do oscilador fracionário reduz a Eq.(4.0.1) [38]. Assim, a equação do oscilador fracionário é dada por

$$ {}_*D^\alpha x(t) + \omega^\alpha x(t) = f(t), \tag{4.0.2} $$

sujeito as condições iniciais, $x(0) = c_0$ e $x'(0) = c_1$, sendo c_0 e c_1 constantes e $1 < \alpha \leq 2$.

Para resolvermos a equação do oscilador fracionário usaremos a metodologia da transformada de Laplace e assim obteremos a solução da Eq.(4.0.2) em termos da função de Mittag-Leffler. Isolando a derivada fracionária segundo Caputo na Eq.(4.0.2) podemos escrever,

$$ {}_*D^\alpha x(t) = f(t) - \omega^\alpha x(t). \tag{4.0.3} $$

Agora aplicaremos em ambos os lados da Eq.(4.0.3) a transformada de Laplace, assim

$$ \mathscr{L}[{}_*D^\alpha x(t)] = \mathscr{L}[f(t) - \omega^\alpha x(t)]. \tag{4.0.4} $$

Conforme vimos no Capítulo 1, a transformada de Laplace é um operador linear, logo podemos reescrever a Eq.(4.0.4) da seguinte maneira

$$ \mathscr{L}[{}_*D^\alpha x(t)] = \mathscr{L}[f(t)] - \omega^\alpha \mathscr{L}[x(t)]. \tag{4.0.5} $$

Pela Eq.(3.2.22), Capítulo 3, e considerando que no caso do oscilador fracionário temos que $1 < \alpha \leq 2$, ou seja, $m = 2$, podemos reescrever a Eq.(4.0.5),

$$ \begin{gathered} s^\alpha \mathscr{L}[x(t)] - \sum_{k=0}^{1} s^{\alpha-1-k} x^{(k)}(0) = \mathscr{L}[f(t)] - \omega^\alpha \mathscr{L}[x(t)] \\ s^\alpha \mathscr{L}[x(t)] - s^{\alpha-1} x(0) - s^{\alpha-2} x'(0) = \mathscr{L}[f(t)] - \omega^\alpha \mathscr{L}[x(t)], \end{gathered} $$

e rearanjando temos

$$ \begin{aligned} \mathscr{L}[x(t)](s^\alpha + \omega^\alpha) &= \mathscr{L}[f(t)] + s^{\alpha-1} c_0 + s^{\alpha-2} c_1 \\ \mathscr{L}[x(t)] &= \frac{1}{s^\alpha + \omega^\alpha} \mathscr{L}[f(t)] + c_0 \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \omega^\alpha} + c_1 \frac{s^{\alpha-2}}{s^\alpha + \omega^\alpha}. \end{aligned} \tag{4.0.6} $$

Observemos pela Eq.(2.9.4), presente no Capítulo 2, que

$$ \mathscr{L}[t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega^\alpha t^\alpha)] = \frac{1}{(s^\alpha + \omega^\alpha)}. \tag{4.0.7} $$

Assim pelas equações do Capítulo 2, Eq.(2.9.3) e Eq.(2.9.4), e pela Eq.(4.0.7) podemos escrever a Eq.(4.0.6) como

$$\mathscr{L}[x(t)] = \mathscr{L}[t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega^\alpha t^\alpha)]\mathscr{L}[f(t)] + c_0\mathscr{L}[E_\alpha(-\omega^\alpha t^\alpha)] + c_1\mathscr{L}[tE_{\alpha,2}(-\omega^\alpha t^\alpha)].$$

Conforme visto no Capítulo 1, $\mathscr{L}[g(t) * h(t)] = \mathscr{L}[g(t)]\mathscr{L}[h(t)]$, obtemos

$$\mathscr{L}[x(t)] = \mathscr{L}[\Big(t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega^\alpha t^\alpha)\Big) * f(t)] + c_0\mathscr{L}[E_\alpha(-\omega^\alpha t^\alpha)] + c_1\mathscr{L}[tE_{\alpha,2}(-\omega^\alpha t^\alpha)].$$

Como a transformada de Laplace é um operador linear temos,

$$\mathscr{L}[x(t)] = \mathscr{L}[\Big(t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega^\alpha t^\alpha)\Big) * f(t) + c_0E_\alpha(-\omega^\alpha t^\alpha) + c_1tE_{\alpha,2}(-\omega^\alpha t^\alpha)].$$

Portanto, considerando a transformada de Laplace inversa, temos

$$x(t) = \Big(t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega^\alpha t^\alpha)\Big) * f(t) + c_0E_\alpha(-\omega^\alpha t^\alpha) + c_1tE_{\alpha,2}(-\omega^\alpha t^\alpha), \tag{4.0.8}$$

ou na forma,

$$x(t) = \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega^\alpha(t-\tau)^\alpha)f(\tau)d\tau + c_0E_\alpha(-\omega^\alpha t^\alpha) + c_1tE_{\alpha,2}(-\omega^\alpha t^\alpha),$$

A seguir apresentamos três exemplos numéricos para o oscilador fracionário.

Exemplo 4.1. *Seja a função forçante, f, uma constante, assim $f(t) = c$, sendo c uma constante. Nesse exemplo resolveremos a seguinte equação do oscilador fracionário*

$${}_*D^\alpha x(t) + \omega^\alpha x(t) = c, \tag{4.0.9}$$

sendo $1 < \alpha \leq 2$ e sujeito as condições iniciais, $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$.

Pela Eq.(4.0.8) temos que a solução da Eq.(4.0.9) é dada por

$$\begin{aligned}
x(t) &= \Big(t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega^\alpha t^\alpha)\Big) * c \\
&= \int_0^t \tau^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega^\alpha\tau^\alpha)c d\tau \\
&= c\int_0^t \tau^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\omega^\alpha\tau^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}d\tau \\
&= c\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k\omega^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\int_0^t \tau^{\alpha k+\alpha-1}d\tau\right] \\
&= c\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\omega^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\frac{t^{\alpha k+\alpha}}{\alpha k+\alpha} \\
&= ct^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\omega^\alpha t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha+1)} \\
&= ct^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\omega^\alpha t^\alpha).
\end{aligned}$$

No Gráfico 4.1 temos solução da Eq.(4.0.9) sujeita as condições $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$ para $\omega = 1$, $c = 2$ e $\alpha = 1.5, 1.7, 1.9, 2$. $\square$

Nos exemplos a seguir discutimos a solução da equação diferencial fracionária associada ao problema homogêneo (segundo membro da equação é nula) do oscilador sujeito a diferentes condições iniciais.

Exemplo 4.2. *Seja a função forçante igual a zero, assim resolveremos a seguinte equação diferencial homogênea fracionária associada ao problema do oscilador harmônico.*

$$_{*}D^{\alpha}x(t) + \omega^{\alpha}x(t) = 0, \tag{4.0.10}$$

sendo $1 < \alpha \leq 2$ *e sujeito as condições iniciais,* $x(0) = 1$ *e* $x'(0) = 1$.

Pela Eq.(4.0.8) temos que a solução da Eq.(4.0.10) é dada por

$$x(t) = E_{\alpha}(-\omega^{\alpha}t^{\alpha}) + tE_{\alpha,2}(-\omega^{\alpha}t^{\alpha}).$$

No Gráfico 4.2 temos a solução da Eq.(4.0.10) sujeita as condições iniciais $x(0) = 1$ e $x'(0) = 1$ para $\omega = 1$ e $\alpha = 1.5, 1.7, 1.9, 2$. $\square$

Exemplo 4.3. *Resolveremos a seguinte equação diferencial homogênea fracionária associada ao problema do oscilador harmônico,*

$$_{*}D^{\alpha}x(t) + \omega^{\alpha}x(t) = 0, \tag{4.0.11}$$

sendo $1 < \alpha \leq 2$ *e sujeito as condições iniciais,* $x(0) = 1$ *e* $x'(0) = 0$.

Pela Eq.(4.0.8) temos que a solução da Eq.(4.0.11) é dada por

$$x(t) = E_{\alpha}(-\omega^{\alpha}t^{\alpha}).$$

A seguir temos o Gráfico 4.3 da solução da Eq.(4.0.11) sujeita as condições iniciais $x(0) = 1$ e $x'(0) = 0$ para $\omega = 1$ e $\alpha = 1.5, 1.7, 1.9, 2$. $\square$

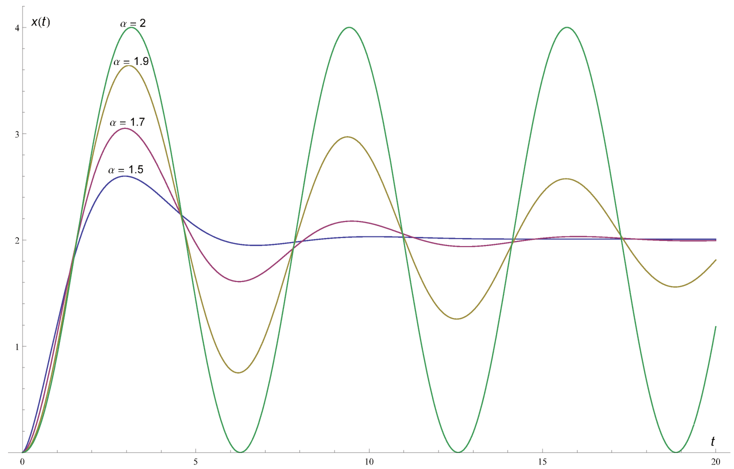

Gráfico 4.1: Solução da Eq.(4.0.9) para $\alpha = 1.5, 1.7, 1.9, 2$.

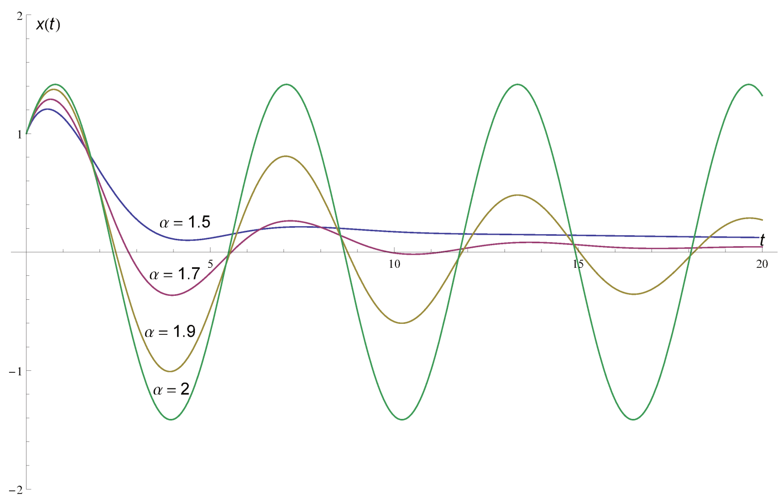

Gráfico 4.2: Solução da Eq.(4.0.10) para $\alpha = 1.5, 1.7, 1.9, 2$.

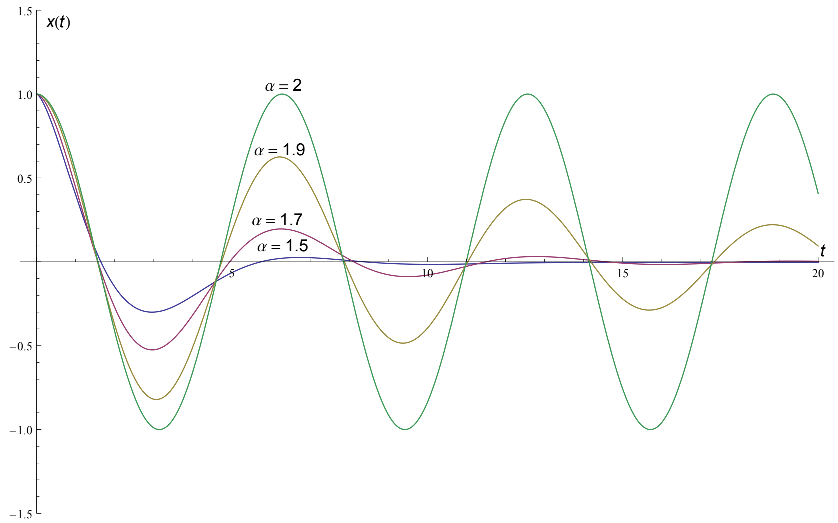

Gráfico 4.3: Solução da Eq.(4.0.11) para $\alpha = 1.5, 1.7, 1.9, 2$.

Conclusão

Nesse trabalho estudamos as transformadas integrais, em particular, as transformadas de Fourier e Laplace, visto ser este estudo parte importante na discussão e resolução da versão fracionária do problema do oscilador harmônico sem amortecimento e nele atuando uma força externa. Na solução do problema do oscilador harmônico, mais precisamente, da equação diferencial fracionária que descreve o fenômeno, emergem naturalmente as funções de Mittag-Leffler visto ser uma equação diferencial fracionária com coeficientes constantes.

No Capítulo 1, estudamos as transformadas de Fourier e de Laplace, tendo em vista que utilizamos a metodologia da transformada de Laplace para resolver a equação diferencial fracionária associada ao problema do oscilador harmônico.

A solução de uma equação diferencial fracionária com coeficientes constantes se dá em termos das funções de Mittag-Leffler, assim o conhecimento dessas funções se torna indispensável para o estudo das equações diferenciais fracionárias, o Capítulo 2 foi dedicado exclusivamente ao estudo destas funções.

No Capítulo 3, introduzimos os conceitos de integral e derivada fracionárias. Apresentamos as derivadas fracionárias apenas segundo Riemann-Liouville e segundo Caputo e justificamos o uso da derivada fracionária segundo Caputo na discussão e resolução de uma equação diferencial com condições iniciais.

A equação do oscilador harmônico sem amortecimento e nele atuando uma força externa é uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes. No Capítulo 4 apresentamos uma generalização fracionária para essa equação, cuja solução, obtida através da transformada de Laplace, se dá em termos das funções de Mittag-Leffler de dois parâmetros.

Uma continuação desse trabalho é discutir uma equação diferencial parcial em sua versão fracionária, em particular, uma equação do tipo onda com condições iniciais e condições de contorno periódicas, onde as séries de Fourier e a derivada segundo Riesz, além das transformadas de Laplace, emergem de forma natural [36]. Nesse estudo devemos considerar as funções de Mittag-Leffler de três parâmetros. Enfim, para as funções de Mittag-Leffler de mais de três parâmetros é de interesse o estudo da completa monotonicidade. Esse trabalho será parte dos estudo do doutorado [32].

Referências Bibliográficas

[1] ACHAR, B.N.N., HANNEKEN, J. W. *Response characteristics of a fractional oscillator*, Physica A, **309**, 275-288, (2002).

[2] ACHAR, B. N. N., HANNEKEN, J. W., CLARKE, T. *Damping characteristics of a fractional oscillator*, Physica A, **339**, 311-319, (2004).

[3] ACHAR, B. N. N., HANNEKEN, J. W., ENCK, T., CLARKE, T. *Dynamics of the fractional oscillator*, Physica A, **297**, 361-367, (2001).

[4] AL-RABTAH, A., ERTURK, V. S., MOMANI, S. *Solutions of a fractional oscillator by using differential transform method*, Comp. e Math. with Appl., **50**, 1356-1362, (2010).

[5] BERTUOLA A. C., HUSSEIN M. S., PATO, M.P. *O oscilador harmônico amortecido forçado revisitado*, Rev. Bras. Ens. Fís., **27**, 327-332, (2005).

[6] BOYCE, W.E., DIPRIMA, R.C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno,* LTC, Rio de Janeiro, (2010).

[7] CAMARGO, R. F. *Cálculo Fracionário e Aplicações*, Tese de Doutorado, Imecc-Unicamp, Campinas, (2009).

[8] CAPELAS DE OLIVEIRA, E. *Métodos Analíticos de Integração,* Livraria da Física, São Paulo, (2010).

[9] CAPELAS DE OLIVEIRA, E., MAIORINO J. E. *Introdução aos Métodos da Matemática Aplicada,* 3ª edição, Editora da UNICAMP, Campinas, (2010).

[10] CAPELAS DE OLIVEIRA, E. C., TYGEL, M. *Métodos Matemáticos para Engenharia,* 2ª edição, SBM, Rio de Janeiro, (2010).

[11] DIAZ, R., PARIGUAN, E. *On hypergeometric functions and k-Pochammer symbol*, Divulgaciones Matematicas, **15**, 179-192, (2007).

[12] DIETHELM, K. *The Analysis of Fractional Differential Equations,* Springer, Braunschweig, (2010).

[13] EVES, H. *Introdução à História da Matemática,* Campinas, UNICAMP, (1997).

[14] GEHLOT, K. S. *The generalized K-Mittag-leffler function*, Int. J. Contemp. Math. Sciences, **7**, 2213-2219, (2012).

[15] GORENFLO, R., MAINARDI, F. *Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order*, CISM courses and lecture, **378**, 223-276, (1997).

[16] HAUBOLD, H. J., MATHAI, A. M., SAXENA, R. K. *Mittag - Leffler functions and their applications*, J. Appl. Math., **2011**, 1 - 51, (2011).

[17] KHAN, M. A., AHMED, S. *On some properties of fractional calculus operators associated with generalized Mittag-Leffler function*, Thai J. Math., **11**, 645-654, (2013).

[18] MAINARDI, F. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity,* Imperial College Press, London, (2010).

[19] MATHAI, A.M., HAUBOLD, H.J. *Special Functions for Applied Scientists,* New York, Springer, (2008).

[20] MITTAG-LEFFLER, G. M. *Sur l'intégration de l'équation différentielle* $y" = Ay^3 + By^2 + Cy + D + (Ey + F)y'$, Acta Math., Paris, **18**, 233-246, (1894).

[21] MITTAG-LEFFLER, G. M. *Sur la nouvelle fonction* $E_\alpha(x)$, C. R. Acad. Sci. Paris, **137**, 554–558, (1903).

[22] MITTAG-LEFFLER, G. M. *Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogéne*, Acta Math., Paris, **29**,101-181, (1904).

[23] MOMANI, S., IBRAHIM, R. W. *Analytical solutions of a fractional oscillator by the decomposition method*, Int. J. Pure Appl. Math., **37**, 119-131, (2007).

[24] PETRÁS, I. *Nonlinear Physical Science,* Springer, New York, (2011).

[25] PODLUBNY, I. *Fractional Differential Equations,* Academic Press, New York (1999).

[26] PRABHAKAR, T. R. *A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel*, Yokohama Math. J., **19**, 7-15, (1971).

[27] PRAJAPATI, J. C. SHUKLA, A. K. *Decomposition of generalized Mittag-Leffler function and its properties*, Adv. Pure Math., **2**, 8-14, (2012).

[28] SALIM, T. O., FARAJ, A. W. *A generalization of Mittag-Leffler function and integral operator associated with fractional calculus*, J. Fract. Cal. Appl., **3**, 1 - 13, (2012).

[29] SHUKLA, A. K., PRAJAPATI J. C. *On a generalization of Mittag–Leffler function and its properties*, J. Math. Anal. Appl., **336**, 797–811, (2007).

[30] STANISLAVSKY, M. *Fractional Oscillator*, arXiv:1111.3060, (2011).

[31] STUBHAUG, A. *Gösta Mittag - Leffler: a man of conviction,* Springer, (2008).

[32] TEODORO, G. S. *Relaxação Anômala: modelos fracionários*, Tese de Doutorado, (Início Março 2013).

[33] TEODORO, G. S., OLIVEIRA, E. C. *Laplace transform and the Mittag-Leffler function*, Int. J. Math. Educ. Sci. Techn., 1-9, (2013). http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2013.851803

[34] TURNER, L. E. *The Mittag-Leffler theorem: the origin, evolution, and reception of a mathematical result, 1876-1884*, Dissertação de mestrado, Simon Fraser University, Burnaby, (2007).

[35] WIMAN, A. *Über den fundamental satz in der theorie der funktionen* $E_\alpha(x)$, Acta Math., **29**, 191- 201, (1905).

[36] ZHANG, H., LIU, F. *The fundamental solutions of the space, space-time Riesz fractional partial differential equations with periodic conditions*, J. Chin. Univ., **16**, 181-192, (2007).

[37] ZILL, D.G., CULLEN, M.R. *Equações Diferenciais,* Person Makron Books, São Paulo (2001).

[38] ZURIGAT, M. *Solving fractional oscillators using Laplace homotopy analysis method*, Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series, **38**, 1-11, (2011).

Apêndice A

Funções Gama e Beta

O objetivo dessE apêndice é introduzir algumas definições e resultados importantes utilizados neste trabalho. Apresentamos brevemente a função gama e beta, também chamadas de funções de Euler de segunda e primeira espécies, respectivamente.

A.1 Função Gama

Para se estudar as funções de Mittag-Leffler se faz necessário consideramos algumas propriedades da função gama, uma vez que as funções de Mittag-Leffler são definidas através de uma série de potência envolvendo essa função. Das diferentes maneira de se introduzir a função gama, optamos pela representação integral.

Definição A.1. *A função gama é definida pela seguinte integral imprópria*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \tag{A.1.1}$$

sendo $Re(x) > 0$.

A representação gráfica da função gama é dada pelo Gráfico A.1

Segue da Eq.(A.1.1), através da mudança $x \to x + 1$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt,$$

e que, após integração por partes podemos escrever

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = x\Gamma(x).$$

Logo, segue-se a chamada relação funcional

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \tag{A.1.2}$$

ou seja, a função gama é interpretada como uma generalização do conceito de fatorial. Uma vez que $\Gamma(1) = 1$ temos para $x = n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = n!\,.$$

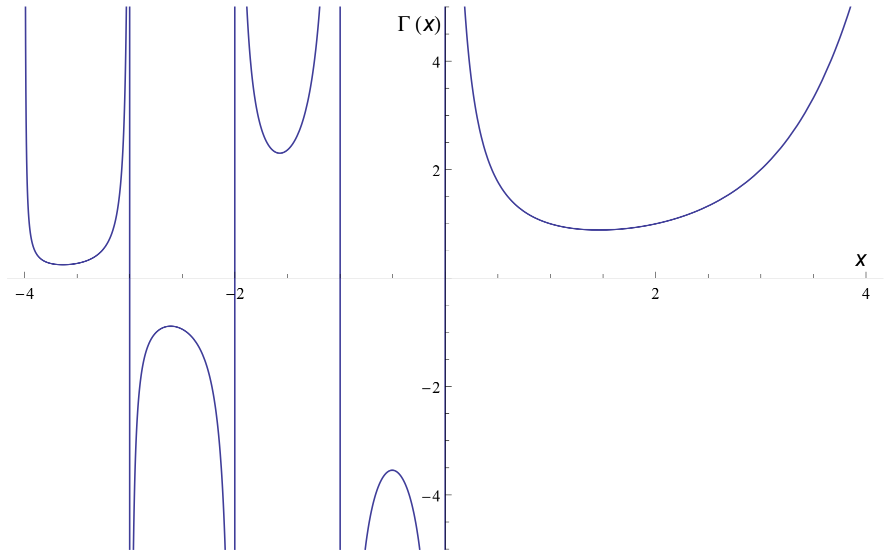

Gráfico A.1: Função gama.

A.2 Função Beta

Definição A.2. *Seja $Re(p) > 0$ e $Re(q) > 0$, a função beta, $B(p, q)$, é dada por*

$$B(p,q) = \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}du.$$

Podemos relacionar as funções gama e beta pela seguinte equação

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Apêndice B

Função k-Mittag-Leffler

Nesse apêndice apresentaremos uma generalização da função de Mittag-Leffler, a função k-Mittag-Leffler, $E^{\rho,q}_{k,\alpha,\beta}(x)$[1], que foi recentemente proposta por Gehlot [14]. Tal função possui cinco parâmetros e foi definida pela seguinte série

$$E^{\rho,q}_{k,\alpha,\beta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{(\rho)_{nq,k}}{\Gamma_k(\alpha n + \beta)}$$

sendo $\alpha, \beta, \rho \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{R}$, $q \in (0,1) \cup \mathbb{N}$, $(\rho)_{nq,k}$ o símbolo k-Pochhammer e $\Gamma_k(x)$ a função k-gama.

Essa função recupera a clássica função de Mittag-Leffler [21], a função de Mittag-Leffler com dois parâmetros [35], a função de Mittag-Leffler com três parâmetros [26] e a função de Mittag-Leffler com quatro parâmetros [29].

Devido a função k-Mittag-Leffler ser definida através de uma série de potência envolvendo a função k-gama e o símbolo k-Pochhammer, veremos essas definições e além disso apresentaremos relações entre o símbolo k-Pochhammer e o símbolo de Pochhammer e entre a função k-gama e a função gama.

B.1 A função k-gama e o símbolo k-Pochhammer

Nessa seção são apresentados a função k-gama e o símbolo k-Pochhammer conforme definidos por [11] e veremos algumas de suas propriedades.

B.1.1 Função k-gama

Definição B.1. *A função k-gama é definida através da integral imprópria*

$$\Gamma_k(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-\frac{t^k}{k}} dt \tag{B.1.1}$$

sendo $x \in \mathbb{C}$ e $Re(x) > 0$.

Note que no caso em que $k = 1$ recuperamos a clássica função gama.

Tendo em vista a definição da função k-gama apresentamos algumas propriedades dessa função.

Proposição B.1. *A função k-gama satisfaz as seguintes propriedades:*

[1]Em [14] a função $E^{\rho,q}_{k,\alpha,\beta}(x)$ é denotada por $GE^{\rho,q}_{k,\alpha,\beta}(x)$.

i) $\Gamma_k(x+k) = x\Gamma_k(x)$;

ii) $\Gamma_k(k) = 1$.

Demonstração. Começaremos demonstrando o item *i)*. Pela **Definição B.1.1**, temos

$$\Gamma_k(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-\frac{t^k}{k}} dt.$$

Integrando por partes temos,

$$\begin{aligned}
\Gamma_k(x) &= e^{-\frac{t^k}{k}} \frac{t^x}{x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{t^x}{x} t^{k-1} e^{-\frac{t^k}{k}} dt \\
&= \frac{1}{x} \int_0^\infty t^{x+k-1} e^{-\frac{t^k}{k}} dt \\
&= \frac{1}{x} \Gamma_k(x+k),
\end{aligned}$$

logo,

$$\Gamma_k(x+k) = x\Gamma_k(x).$$

Demonstraremos agora o item *ii)*.

$$\Gamma_k(k) = \int_0^\infty t^{k-1} e^{-\frac{t^k}{k}} dt.$$

Introduzindo a mudança de variável $u = \frac{t^k}{k}$, temos

$$\begin{aligned}
\Gamma_k(k) &= \int_0^\infty t^{k-1} e^{-u} \frac{du}{t^{k-1}} \\
&= \int_0^\infty e^{-u} du \\
&= -e^{-u}\Big|_0^\infty \\
&= 1.
\end{aligned}$$

■

Veremos agora uma proposição que relaciona a função k-gama com a função gama.

Proposição B.2. *Sejam $x \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{R}$, então*

$$\Gamma_k(x) = k^{\frac{x}{k}-1} \Gamma\left(\frac{x}{k}\right). \tag{B.1.2}$$

Demonstração. Usando a definição da função gama no membro direito da Eq.(B.1.2), temos

$$k^{\frac{x}{k}-1} \Gamma\left(\frac{x}{k}\right) = k^{\frac{x}{k}-1} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{x}{k}-1} dt.$$

Seja $u = (tk)^{\frac{1}{k}}$, assim

$$\begin{aligned}
k^{\frac{x}{k}-1}\Gamma\left(\frac{x}{k}\right) &= k^{\frac{x}{k}-1}\int_0^\infty e^{-\frac{u^k}{k}}\left(\frac{u^k}{k}\right)^{\frac{x}{k}-1}\frac{du}{u^{1-k}} \\
&= k^{\frac{x}{k}-1}\int_0^\infty e^{-\frac{u^k}{k}}\frac{u^{x-k}}{k^{\frac{x}{k}-1}}\frac{du}{u^{1-k}} \\
&= \int_0^\infty e^{-\frac{u^k}{k}}u^{x-1}du \\
&= \Gamma_k(x),
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar. ■

B.1.2 Símbolo k-Pochhammer

Definição B.2. *Sejam $x \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, o símbolo k-Pochhammer é dado por*

$$(x)_{n,k} = x(x+k)(x+2k)\cdots(x+(n-1)k)\,.$$

Observemos da **Definição B.2** que

$$(x)_{n,k} = \frac{\Gamma_k(x+nk)}{\Gamma_k(x)}.$$

Pois, como $\Gamma_k(x+k) = x\Gamma_k(x)$, temos

$$\Gamma_k(x+nk) \;=\; (x+k(n-1))\Gamma(x+k(n-1)).$$

sendo $n \in \mathbb{N}$. Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\Gamma_k(x+nk) &= (x+k(n-1))(x+(n-2)k)(x+(n-3)k)\cdots x\Gamma_k(x) \\
&= (x)_{n,k}\Gamma_k(x).
\end{aligned}$$

Portanto, segue-se

$$(x)_{n,k} = \frac{\Gamma_k(x+nk)}{\Gamma_k(x)}.$$

A seguir temos uma proposição que tem como caso particular uma relação entre o símbolo k-Pochhammer e o símbolo de Pochhammer.

Proposição B.3. *Sejam $x \in \mathbb{C}$, $k, s \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então*

$$(x)_{n,s} = \left(\frac{s}{k}\right)^n \left(\frac{kx}{s}\right)_{n,s}, \tag{B.1.3}$$

e o caso particular,

$$(x)_{n,k} = k^n \left(\frac{x}{k}\right)_n. \tag{B.1.4}$$

Demonstração. Começando pelo termo do lado direito da Eq.(B.1.3) temos

$$\begin{aligned}\left(\frac{s}{k}\right)^n\left(\frac{kx}{s}\right)_{n,k} &= \left(\frac{s}{k}\right)^n\left(\frac{kx}{s}\right)\left(\frac{kx}{s}+k\right)\left(\frac{kx}{s}+2k\right)\cdots\left(\frac{kx}{s}+(n-1)k\right)\\ &= \left(\frac{s}{k}\right)^n\left(\frac{kx}{s}\right)\left(\frac{k(x+s)}{s}\right)\left(\frac{k(x+2s)}{s}\right)\cdots\left(\frac{kx+(n-1)s}{s}\right).\end{aligned}$$

Como o produto $\left(\frac{kx}{s}\right)\left(\frac{k(x+s)}{s}\right)\left(\frac{k(x+2s)}{s}\right)\cdots\left(\frac{kx+(n-1)s}{s}\right)$ possue n termos temos,

$$\begin{aligned}\left(\frac{s}{k}\right)^n\left(\frac{kx}{s}\right)_{n,k} &= \left(\frac{s}{k}\frac{kx}{s}\right)\left(\frac{s}{k}\frac{k(x+s)}{s}\right)\left(\frac{s}{k}\frac{k(x+2s)}{s}\right)\cdots\left(\frac{s}{k}\frac{kx+(n-1)s}{s}\right)\\ &= x(x+s)(x+2s)\cdots(x+(n-1)s)\\ &= (x)_{n,s},\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

Mostraremos agora que vale a Eq.(B.1.4).

$$\begin{aligned}(x)_{n,k} &= x(x+k)(x+2k)\cdots(x+(n-1)k)\\ &= (k)\frac{x}{k}(k)\left(\frac{x+k}{k}\right)(k)\left(\frac{x+2k}{k}\right)\cdots(k)\left(\frac{x+(n-1)k}{k}\right)\\ &= k^n\frac{x}{k}\left(\frac{x}{k}+1\right)\left(\frac{x}{k}+2\right)\cdots\left(\frac{x}{k}+(n-1)\right)\\ &= k^n\left(\frac{x}{k}\right)_n.\end{aligned}$$

■

B.2 Função k-Mittag-Leffler

Em 2012 Gehlot [14] introduziu a função k-Mittag-Leffler, sendo essa uma generalização das funções de Mittag-Leffler de um, dois, três e quatro parâmetros. Veremos agora sua definição.

Definição B.3 (Função k-Mittag-Leffler)**.** *Sejam $\alpha,\beta,\rho\in\mathbb{C}$, $k\in\mathbb{R}$ tal que $Re(\alpha)>0$, $Re(\beta)>0$, $Re(\rho)>0$ e $q\in(0,1)\cup\mathbb{N}$, a função k-Mittag-Leffler é dada por*

$$E^{\rho,q}_{k,\alpha,\beta}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\frac{(\rho)_{nq,k}}{\Gamma_k(\alpha n+\beta)} \tag{B.2.1}$$

sendo $(\rho)_{nq,k}$ o símbolo k-Pochhammer e $\Gamma_k(x)$ a função k-gama.

Tomando $k=1$ na Eq.(B.2.1) recuperamos a função de Mittag-Leffler com quatro parâmetros, pois

$$E^{\rho,q}_{1,\alpha,\beta}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\frac{(\rho)_{qn,1}}{\Gamma_1(\alpha n+\beta)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\frac{(\rho)_q n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}=E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}(x).$$

B.2.1 Alguns resultados da função k-Mittag-Leffler

Nessa seção veremos alguns teoremas envolvendo a função k-Mittag-Leffler. A seguir temos um teorema que relaciona a função k-Mittag-Leffler com sua derivada.

Teorema B.1. *Sejam $\alpha, \beta, \rho \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{R}$ tal que $Re(\alpha) > 0$, $Re(\beta) > 0$, $Re(\rho) > 0$ e $q \in (0,1) \cup \mathbb{N}$, então*

$$E^{\rho,q}_{k,\alpha,\beta}(x) = \beta E^{\rho,q}_{k,\alpha,\beta+k}(x) + \alpha x \frac{d}{dx} E^{\rho,q}_{k,\alpha,\beta+k}(x)$$

Demonstração. Começando pelo membro direito dessa equação temos,

$$\begin{aligned}
& \beta E^{\rho,q}_{k,\alpha,\beta+k}(x) + \alpha x \frac{d}{dx} E^{\rho,q}_{k,\alpha,\beta+k}(x) \\
= & \ \beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{(\rho)_{nq,k}}{\Gamma_k(\alpha n + \beta + k)} + \alpha x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{(\rho)_{nq,k}}{\Gamma_k(\alpha n + \beta + k)} \\
= & \ \beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{(\rho)_{nq,k}}{\Gamma_k(\alpha n + \beta + k)} + \alpha x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} \frac{(\rho)_{nq,k}}{\Gamma_k(\alpha n + \beta + k)} \\
= & \ \beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{(\rho)_{nq,k}}{\Gamma_k(\alpha n + \beta + k)} + \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^{n}}{n!} \frac{(\rho)_{nq,k}}{\Gamma_k(\alpha n + \beta + k)} \\
= & \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{(\rho)_{nq,k}}{\Gamma_k(\alpha n + \beta + k)} (\alpha n + \beta).
\end{aligned}$$

Pela **Proposição B.1**, $\Gamma_k(\alpha n + \beta + k) = (\alpha n + \beta)\Gamma_k(\alpha n + \beta)$, assim

$$\begin{aligned}
\beta E^{\rho,q}_{k,\alpha,\beta+k}(x) + \alpha x \frac{d}{dx} E^{\rho,q}_{k,\alpha,\beta+k}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{(\rho)_{nq,k}}{(\alpha n + \beta)\Gamma_k(\alpha n + \beta)} (\alpha n + \beta) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{(\rho)_{nq,k}}{\Gamma_k(\alpha n + \beta)} \\
&= E^{\rho,q}_{k,\alpha,\beta}(x).
\end{aligned}$$

■

Agora temos um teorema que relaciona a função k-Mittag-Leffler com sua j-ésima derivada.

Teorema B.2. *Sejam $j \in \mathbb{N}$ $\alpha, \beta, \rho \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{R}$ tal que $Re(\alpha) > 0$, $Re(\beta) > 0$, $Re(\rho) > 0$ e $q \in (0,1) \cup \mathbb{N}$, então*

$$\frac{d^j}{dx^j} E^{\rho,q}_{k,\alpha,\beta}(x) = (\rho)_{qj,k} E^{\rho+jkq,q}_{k,\alpha,j\alpha+\beta}(x).$$

Demonstração. Como $j \in \mathbb{N}$ $\alpha, \beta, \rho \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, $\mathrm{Re}(\rho) > 0$ e

$q \in (0,1) \cup \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{d^j}{dx^j} E^{\rho,q}_{k,\alpha,\beta}(x) &= \frac{d^j}{dx^j} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{(\rho)_{nq,k}}{\Gamma_k(\alpha n + \beta)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n)(n-1)\cdots(n-j+1)x^{n-j}}{n!} \frac{(\rho)_{nq,k}}{\Gamma_k(\alpha n + \beta)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{n!}{(n-j)!} x^{n-j}}{n!} \frac{(\rho)_{nq,k}}{\Gamma_k(\alpha n + \beta)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-j}}{(n-j)!} \frac{(\rho)_{nq,k}}{\Gamma_k(\alpha n + \beta)}.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de índice $n \to n + j$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{d^j}{dx^j} E^{\rho,q}_{k,\alpha,\beta}(x) &= \sum_{n=-j}^{\infty} \frac{x^n}{(n)!} \frac{(\rho)_{(n+j)q,k}}{\Gamma_k(\alpha(n+j) + \beta)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n)!} \frac{(\rho)_{(n+j)q,k}}{\Gamma_k(\alpha(n+j) + \beta)}.
\end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
(\rho)_{n+j,k} &= (\rho)(\rho + k)...(\rho + (n + j - 1)k) \\
&= \underbrace{(\rho)(\rho + k)...(\rho + (n + j - 1))}_{(\rho)_{j,k}} \underbrace{(\rho + (j+1)k)(\rho + (j+2)k)...(\rho + (j + n - 1)k)}_{(\rho+jk)_{n,k}}
\end{aligned}$$

logo, podemos escrever

$$(\rho)_{n+j,k} = (\rho)_{j,k}(\rho + jk)_{n,k}. \qquad \text{(B.2.2)}$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d^j}{dx^j} E^{\rho,q}_{k,\alpha,\beta}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n)!} \frac{(\rho)_{qj,k}(\rho + qjk)_{nq,k}}{\Gamma_k(\alpha(n+j) + \beta)} \\
&= (\rho)_{qj,k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n)!} \frac{(\rho + qjk)_{nq,k}}{\Gamma_k(\alpha n + \alpha j + \beta)} = (\rho)_{qj,k} E^{\rho+jkq,q}_{k,\alpha,j\alpha+\beta}(x),
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

B.2.2 Relação entre a função k-Mittag-Leffler e a função Mittag-Leffler com quatro parâmetros

Nessa seção apresentaremos um teorema que relaciona a função k-Mittag-Leffler com a função de Mittag-Leffler com quatro parâmetros.

Teorema B.3. *Sejam $\alpha, \beta, \rho \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{R}$ tal que $Re(\alpha) > 0$, $Re(\beta) > 0$, $Re(\rho) > 0$ e $q \in (0,1) \cup \mathbb{N}$, então vale a relação*

$$E_{k,\alpha,\beta}^{\rho,q}(x) = k^{1-\frac{\beta}{k}} E_{\frac{\alpha}{k},\frac{\beta}{k}}^{\frac{\rho}{k},q}\left(k^{q-\frac{\alpha}{k}}x\right).$$

Demonstração. Pela definição da função k-Mittag-Leffler temos,

$$E_{k,\alpha,\beta}^{\rho,q}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{(\rho)_{nq,k}}{\Gamma_k(\alpha n + \beta)}$$

Pela Eq.(B.1.2) temos que $\Gamma_k(n\alpha + \beta) = k^{\frac{n\alpha+\beta}{k}-1}\Gamma\left(\dfrac{n\alpha+\beta}{k}\right)$ e pela Eq.(B.1.4) temos $(\rho)_{nq,k} = k^{nq}\left(\dfrac{\rho}{k}\right)_{nq}$, logo

$$\begin{aligned}
E_{k,\alpha,\beta}^{\rho,q}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{k^{nq}\left(\frac{\rho}{k}\right)_{nq}}{k^{\frac{n\alpha+\beta}{k}-1}\Gamma\left(\frac{n\alpha+\beta}{k}\right)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{k^{n\left(q-\frac{\alpha}{k}\right)-\frac{\beta}{k}+1}\left(\frac{\rho}{k}\right)_{nq}}{\Gamma\left(\frac{n\alpha+\beta}{k}\right)} \\
&= k^{1-\frac{\beta}{k}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(k^{q-\frac{\alpha}{k}}x\right)^n}{n!} \frac{\left(\frac{\rho}{k}\right)_{nq}}{\Gamma\left(\frac{n\alpha+\beta}{k}\right)} \\
&= k^{1-\frac{\beta}{k}} E_{\frac{\alpha}{k},\frac{\beta}{k}}^{\frac{\rho}{k},q}\left(k^{q-\frac{\alpha}{k}}x\right).
\end{aligned}$$

■

Apêndice C

Dados biográficos

Nesse apêndice apresentamos brevemente a história de alguns matemáticos que possuem seus nomes envolvidos nesse trabalhado são eles Fourier, Mittag-Leffler e Laplace. Começaremos com algumas curiosidades sobre Fourier. Os dados biográficos de Fourier estão baseados em [13, 37].

C.1 Jean Baptiste Joseph Fourier

"O estudo profundo da natureza é a fonte mais rica de descobertas matemáticas."

Fourier

Figura C.1: Jean Baptiste Joseph Fourier.

Jean Baptiste Joseph Fourier foi um matemático competente e produtivo do século XIX. Fourier nasceu em Auxerre em 1766 e faleceu em Paris em 1830. Filho de um alfaiate, ficou órfão aos oito anos e foi educado em uma escola militar. Tendo ajudado a promover a Revolução Francesa foi recompensado com uma cátedra na Escola Politécnica, porém renunciou a essa posição para acompanhar Napoleão na expedição ao Egito.

Em 1807 Fourier apresentou um artigo à Academia de Ciência da França que deu início a um novo e frutífero capítulo da história da matemática. Esse artigo trata do problema prático da propagação do calor em barras, chapas e sólidos metálicos e em seu desenvolvimento Fourier fez a afirmação que toda função definida num intervalo finito pode ser decomposta numa soma de funções de senos e cossenos. Essa série não era novidade para os matemáticos da época, de fato, já tinha sido provado que muitas funções podem ser representadas por meio dessas séries.

Os sábios da Academia encararam com muito ceticismo a afirmação de Fourier e o artigo, julgado por Lagrange, Laplace e Legendre, foi rejeitado. Em 1811 Fourier submeteu o artigo revisado, porém esse não foi recomendado para publicação devido às críticas recebidas pela falta de rigor. Fourier continuou suas pesquisas sobre o calor e em 1822 publicou um dos grandes clássicos da matemática, *Théorie Analytique de la Chaleur*. Dois anos depois da publicação dessa obra, Fourier publicou o artigo de 1811 na forma original.

Existe uma história engraçada sobre o interesse de Fourier pelo calor: Fourier acreditava que o deserto oferecia condições ideais para uma boa saúde, por isso vestia várias camadas de roupa e aquecia à alta temperatura sua casa. Alguns dizem que seu fascínio por calor adiantou a sua morte, morrendo aos 63 com doença cardíaca e literalmente “cozido”.

C.2 Magnus Gösta Mittag-Leffler

“O melhor trabalho dos matemáticos é arte, arte perfeita, tão arrojada como os mais secretos sonhos da imaginação, clara e límpida.”

Mittag-Leffler

Devido as funções estudadas nesse trabalho levarem o nome de Mittag-Leffler achamos interessante mencionarmos brevemente sua trajetória, esses dados histórico foram baseados em [31, 34].

Magnus Gösta Mittag-Leffler foi um matemático importante na Suécia nos finais do século XIX, princípios do século XX. Magnus Gösta Mittag-Leffler nasceu em 16 de março de 1846 e faleceu em 7 Julho 1927, em Estocolmo, Suécia.

Ele foi fundamental para levar o desenvolvimento matemático dos grandes centros científicos da sua época para Suécia. Tornou-se um dos mais influentes na matemática no seu tempo, mediando entre as escolas francesas e alemãs.

Mittag-Leffler tinha dois irmãos, Alexander Leopold Fredrik e Artur Lorens Olof Abraão, e uma irmã, Anna Charlotte Gustava, todos eles utilizados Leffler como o sobrenome, que era de seu pai Johan Olof Leffler. Mittag-Leffler acrescentou Mittag ao seu sobrenome como homenagem ao lado da família de sua mãe, Gustava Vilhelmina Mittag-Leffler.

Desde o ginásio era notável sua aptidão pela matemática, no entanto suas atividades de matemático começaram em 1865 quando se tornou um estudante na Universidade de Uppsala. Em 1872 defendeu sua tese de doutorado intitulada *Applications of the Argument Principle* e, em seguida, foi nomeado professor.

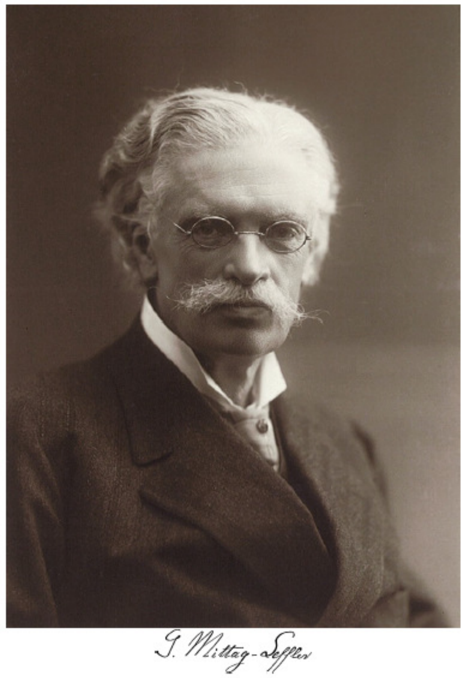

Figura C.2: Mittag-Leffler.

Em outubro de 1873 Mittag-Leffler vai a Paris com o intuito de encontrar e estudar com Charles Hermite, no entanto tem contado com vários outros matemáticos como Bouquet, Briot, Chasles, Darboux e Liouville. Em 1875 seguiu para Berlim, onde foi discípulo de Karl Weierstrass.

Em 1876, Mittag-Leffler foi nomeado para uma cadeira na Universidade de Helsínquia e em 1881 retorna a sua cidade natal, Estocolmo, para ocupar uma cadeira na universidade. Ele foi o primeiro titular da cátedra de matemática da nova universidade de Estocolmo.

Em 1882, fundou o primeiro jornal internacional de matemática, o *Acta Mathematica*. Mittag-Leffler contribuiu para a análise matemática, geometria analítica, teoria da probabilidade e trabalhou na teoria geral das funções, publicou vários trabalhos, apenas para citar alguns, temos as referências, [20, 21, 22].

Acredita-se que a não existência do prêmio Nobel da matemática está diretamente ligado a Mittag-Leffler, uma vez que este teve um caso amoroso com a mulher de Nobel. Como Mittag-Leffler era o principal matemático sueco no tempo em que Nobel escreveu seu desejo de instituir seus prêmios. Nobel saberia que, se houvesse esse prêmio em Matemática, Mittag-Leffler seria seu primeiro ganhador. Para evitar que tal coisa acontecesse, Nobel não teria permitido que essa premiação fosse concedida à matemática.

C.3 Pierre Simon Laplace

"O que sabemos não é muito. O que não sabemos é imenso."

Mittag-Leffler

Figura C.3: Pierre Simon Laplace.

Pierre Simon Laplace foi um importante matemático, astrônomo e físico francês. Nasceu em 23 de março de 1749 em Beaumont-en-Auge, Normandia, França e faleceu em Paris, no dia 5 de março de 1827. Seu interesse pela matemática foi manifestado durante os dois anos que estudou na Universidade de Caen. Aos dezenove anos, sem obter o diploma, mudou-se para Paris, onde começou a lecionar matemática na *École Militaire* (Escola Militar) e continuou seus estudos com o apoio de d'Alembert.

Uma de suas principais obras foi o "Tratado de Mecânica Celeste"(*Traité de mécanique analytique*), o qual reune trabalhos de vários cientistas sobre a gravitação universal. Além disso, Laplace contribuiu com inúmeros trabalhos de refração, pêndulos, velocidade do som e dilatação dos corpos sólidos.

A contribuição de Laplace para o cálculo iniciou-se em 1771, com o artigo intitulado de *Recherches sur le calcul intégral aux différences infiniment petites, et aux différences finies to the Mélanges de Turin,* o qual contém as equações que o tornaram conhecido tanto na mecânica quanto na fisíca, conhecida como equação de Laplace. A transformada de Laplace também é fundamental em todos os ramos da física matemática.