Edson José Teixeira

Estrutura lagrangiana para fluidos isentrópicos compressíveis no semiespaço com condição de fronteira de Navier

Campinas
2014

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

EDSON JOSÉ TEIXEIRA

ESTRUTURA LAGRANGIANA PARA FLUIDOS ISENTRÓPICOS COMPRESSÍVEIS NO SEMIESPAÇO COM CONDIÇÃO DE FRONTEIRA DE NAVIER

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE
DEFENDIDA PELO ALUNO EDSON JOSÉ TEIXEIRA
E ORIENTADA PELO PROF. DR. MARCELO MARTINS DOS SANTOS

Assinatura do Orientador

CAMPINAS
2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

T235e Teixeira, Edson José, 1984-
Estrutura lagrangiana para fluidos isentrópicos compressíveis no semiespaço com condição de fronteira de Navier / Edson José Teixeira. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Marcelo Martins dos Santos.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Estrutura lagrangiana. 2. Fluidos isentrópicos. 3. Fluidos compressíveis. 4. Semiespaço (Matemática). 5. Navier-Stokes, Equações de. I. Santos, Marcelo Martins dos,1961-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Lagrangean structure for isentropic compressible fluid in halfspace with the Navier boundary condition
Palavras-chave em inglês:
Lagrangian structure
Isentropic fluids
Compressible fluids
Halfspace (Mathematics)
Navier-Stokes equations
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Marcelo Martins dos Santos [Orientador]
Lucas Catão de Freitas Ferreira
Helena Judith Nussenzveig Lopes
Waldemar Donizete Bastos
José Felipe Linares Ramirez
Data de defesa: 23-04-2014
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 23 de abril de 2014 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). MARCELO MARTINS DOS SANTOS

Prof(a). Dr(a). LUCAS CATÃO DE FREITAS FERREIRA

Prof(a). Dr(a). HELENA JUDITH NUSSENZVEIG LOPES

Prof(a). Dr(a). WALDEMAR DONIZETE BASTOS

Prof(a). Dr(a). JOSÉ FELIPE LINARES RAMIREZ

ABSTRACT/RESUMO

Abstract

In this work we study the Lagrangian structure for the velocity field of the Navier-Stokes equations for isentropic compressible fluid in the halfspace in $\mathbb{R}^3$ with the Navier boundary condition. We consider the solution of this model obtained by David Hoff in the paper *Compressible Flow in a Half-Space with Navier Boundary Conditions*, J. Math. Fluid Mech. 7 (2005) 315-338. Our main result states that if the initial velocity belongs to the Sobolev space H^s, with $s > 1/2$, then the integral curves of the velocity field, i.e. the particles paths, there exist and are unique. We also show some properties of this flow map.

Key words: Lagrangian structure, isentropic fluids, compressible fluids, halfspace (Mathematics), Navier-Stokes equations.

Resumo

Neste trabalho estudamos a estrutura lagrangiana para o campo de velocidade solução das equações de Navier-Stokes para um fluido isentrópico compressível no semiespaço do $\mathbb{R}^3$, com a condição de fronteira de Navier. Consideramos a solução deste modelo obtida por David Hoff no artigo *Compressible Flow in a Half-Space with Navier Boundary Conditions*, J. Math. Fluid Mech. 7 (2005) 315-338. Demonstramos que se a velocidade inicial pertence ao espaço de Sobolev H^s com $s > 1/2$, então as curvas integrais do campo de velocidade, ou seja, as trajetórias de partículas, existem e são únicas, e mostramos também algumas propriedades desse fluxo.

Palavras Chaves: estrutura lagrangiana, fluidos isentrópicos, fluidos compressíveis, semi-espaço (Matemática), equações de Navier-Stokes.

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus, por mais esta vitória em minha vida acadêmica e por sempre estar presente na minha vida.

À minha família, em especial aos meu pais José de Assis e Maria Imaculada por sempre me apoiar e incentivar, a quem podia recorrer nas horas difíceis.

Às minhas irmãs Áurea e Aline, pela convivência e constantes conversas que não me deixavam desaminar. Aos meus sobrinhos Mariah Alice e Gustavo pelo carinho, bagunças e agradáveis momentos que passamos juntos.

Aos meus grandes amigos de Guiricema: Afonso, Juliano, Edilberto e Aloísio que sempre lembravam de mim e me proporcionaram excelentes risadas e momentos agradáveis. Agradeço também a todos os meus amigos e famíliares que torceram pelo meu sucesso, em especial à minha tia Ilza e minha prima Marilza.

Ao meu orientador, Prof. Marcelo Martins dos Santos, pelo apoio, incentivo e confiança depositada em mim. O seu incentivo no momento mais difícil deste trabalho foi fundamental para que o mesmo não tivesse sido abandonado. Meus sinceros agradecimentos.

Agradeço ao Pedro Maluendas pela amizade e por vŕias reuniões de estudos.

Ao Jorge Orlando, sua esposa Áurea Cristina e seus filhos pelo incentivo, amizade e acolhimento em sua casa em Viçosa. Muito obrigado.

Agradeço também aos meus tios João Bastista e Elaine, que me incentivaram e ajudaram em minha estada em Campinas. Agradeço também à Rafaela e ao Gustavo.

Ao meu grande amigo e colega de trabalho Kennedy, pelas longas conversas e palavras de apoio. O horário do jantar era o melhor momento do dia pelas agradáveis conversas.

Aos meus amigos do IMECC/UNICAMP, em particular aos meus colegas da sala 4A, Paulo e Rafael pelos estudos em conjunto e pelos excelentes momentos agradáveis de discontração. Também não posso deixar de lembrar e agradecer ao Júlio e Kléber pela amizade e auxílio em minhas viagens a Campinas.

Aos meus colegas de trabalho Ariane, Lilian, Diogo e Ady pela troca de experiências em nossos doutorados e apoio mútuo. Também agradeços aos meu grande amigo Paulo César e sua noiva Kamilla pelo incentivo e pelos agradáveis momentos de risadas e descontração.

Agradeço a todos os membros da comissões de ensino e pesquisa do Departamento de Matemática da UFV, que na medida do possível, tentaram me ajudar. Ao Mercio que no início do meu processo de conciliação de trabalho e estudo, me incentivou a não desistir do doutorado.

Agradeço aos meus colegas de trabalho que me apoiaram e torceram pelo meu sucesso, em especial ao Anderson que sempre esteve disposto a me ajudar. Agradecimento também ao Abílio, Alexandre, Bráz e Laerte pela amizade.

Aos funcionários da Secretaria de Pós-Graduação do IMECC/UNICAMP, pela paciência que sempre tem me atendido. Durante minha permanência em Campinas, foram como minha segunda família. Nos momentos de angústia, eu sabia que podia contar com o apoio e palavras amigas. Ao Edinaldo, à Tânia, à Lívia e à Eliana, meu muito obrigado. Sentirei saudades.

Agradeço à Suely da PPG/UFV pela calma, paciência e excelente atendimento. Sempre disposta a ajudar com minhas dúvidas relacionadas ao meu processo de regularização do doutorado.

Agradeço à UFV pelo apoio financeiro que tenho recebido em minhas viagens.

À CAPES, pelo apoio financeiro durante 12 meses de meu doutorado.

INTRODUÇÃO

As equações de Navier-Stokes são equações diferenciais que descrevem o movimento de um fluido, sendo portanto equações de muita importância descrevendo fluxo de água em canais, deslocamento de massas de ar, aerodinâmica, como fluxo de ar em aerofólios, propagação de fumaça no ar ou de óleo no mar, dentre várias outras aplicações que estão presentes em nosso cotidiano.

O objetivo desta tese é garantir a estrutura lagrangiana das equações ou sistema de Navier-Stokes para fluidos compressíveis **no semiespaço** $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}_{+}$:

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ (\rho u^j)_t + \operatorname{div}(\rho u^j u) + P(\rho)_{x_j} = \mu \Delta u^j + \lambda \operatorname{div} u_{x_j} + \rho f^j \end{cases} \tag{1}$$

para $x \in \mathbb{R}^3_+ \equiv \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 > 0\}$, com a condição de fronteira

$$(u^1(x), u^2(x), u^3(x)) = K(x)(u^1_{x_3}(x), u^2_{x_3}(x), 0), \quad x \in \partial\mathbb{R}^3_+, \tag{2}$$

onde ρ e $u = (u^1, u^2, u^3)$ são, respectivamente, a densidade e o vetor velocidade do fluido, definidas para $x \in \mathbb{R}^3_+$ e $t \geq 0$; $P(\rho)$ é a pressão, $f = (f^1, f^2, f^3)$ é uma determinada força externa, μ, λ são constantes de viscosidade e K é uma função suave e positiva.

A primeira equação apresentada em (1) representa a conservação de massa e a segunda, a conservação do momento. A equação de conservação de massa também é conhecida como equação da continuidade. Tais equações não serão deduzidas neste trabalho, mas tal dedução pode ser consultada e.g. em [11].

Dizemos que o sistema (1) ou o campo u tem estrutura lagrangiana quando a existência e unicidade de trajetória de partículas do fluido é garantida, ou seja, quando o campo u tem curvas integrais únicas. De uma maneira informal podemos dizer que, neste caso, as partículas do fluido tem um bom comportamento, no sentido de que uma vez conhecido o campo em questão e a posição de uma determinada partícula em um instante de tempo específico, podemos garantir que em um instante de tempo posterior tal partícula possui uma posição no espaço muito bem determinada.

Na literatura podemos citar alguns trabalhos nesta linha de pesquisa sobre estrutura lagrangiana para fluidos compressíveis. Inicialmente, temos os trabalhos feitos por D. Hoff [16] e D. Hoff & M. Santos [20]. No primeiro a estrutura lagrangiana é garantida no espaço $\mathbb{R}^2$, com a velocidade inicial no espaço de Sobolev H^s, para qualquer $s > 0$ fixado. No segundo, usando que parte do campo é um campo log-lipschitziano, a estrutura lagrangiana é obtida no espaço $\mathbb{R}^n$ para $n = 2$ e $n = 3$ e a velocidade inicial no espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$, com $s > 0$ no caso $n = 2$ e $s > 1/2$ no caso $n = 3$. Outros trabalhos surgiram posteriormente a estes, como o trabalho de T. Zhang & D. Fang [29], onde a estrutura lagrangiana é obtida para o caso bidimensional e coeficiente de viscosidade $\lambda = \lambda(\rho)$ depende da densidade do fluido, mas com dado inicial em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Mais recentemente temos o artigo devido a D. Hoff & M. Perepelitsa [19], que garante a estrutura lagrangiana para o fecho do semiplano, com dado inicial $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2_+)$, e a tese de doutorado de P. M. Pardo [24], onde se mostra a estrutura lagrangiana para fluidos não isentrópicos no plano com a velocidade inicial em H^s, $s > 0$, e com a hipótese de que a derivada convectiva da energia interna específica seja de quadrado integrável.

As principais contribuições desta tese devem-se à condição de fronteira (2). Esta condição gera naturalmente o aparecimento de termos adicionais nas estimativas da Seção 2.3 e na verificação de que parte do campo solução é lipschitiziano. Podemos citar como principal dificuldade a estimativa na norma $L^p(\mathbb{R}^3_+)$ do termo $D^2u_{F,\omega}$. Este termo é dado explicitamente por uma formulação integral, envolvendo termos integrais sobre $\mathbb{R}^3_+$ e termos integrais sobre $\partial\mathbb{R}^3_+$. O núcleo da integral sobre a fronteira é um núcleo singular. Tal estimativa é possível graças a um teorema devido a S. Agmon, A. Douglis & L. Nirenberg, isto é, o Teorema 3.3 em [3].

A tese está dividida em três capítulos. No Capítulo 1 apresentaremos as principais ferramentas matemáticas utilizadas para o desenvolvimento deste trabalho. Começaremos fazendo uma breve apresentação da notação utilizada ao longo do texto. Posteriormente faremos uma breve exposição de algumas desigualdades básicas e também de algumas imersões de Sobolev bastante conhecidas. Deste ponto em diante passaremos a algumas ferramentas menos conhecidas, como a classe de campos log-lipschitizianos, a teoria de espaços de interpolação e integrais singulares.

A classe de campos log-lipschitzianos, consultada em [2] e [7], é mais ampla que a dos campos lipschitzianos e será extremamente importante, visto que o campo u proveniente das equações de Navier-Stokes pertence a essa classe. A teoria de interpolação, encontrada principalmente em [5] e [27], faz-se necessária para se obter estimativas com peso quando o dado inicial se encontra em um espaço de Sobolev fracionário. A importância destas estimativas com peso, detalhamos mais a frente. Finalizando o primeiro capítulo apresentaremos o conceito de integral singular bem como alguns resultados relacionados ao mesmo. Tal ferramenta é essencial, visto que em vários momentos trabalharemos com soluções explícitas do laplaciano que são representadas na forma integral. Como principais referências para esta teoria indicamos [3], [6], [13], [9] e [26]. Os dois principais resultados de integrais singulares utilizados neste trabalho foram apresentados originalmente em [3] e [6]. Estes resultados são fundamentais para obtenção de estimativas das soluções explícitas da equação de Laplace. Em [3] encontramos o resultado principal de integral singular sobre a fronteira de $\mathbb{R}^n_+$ e em [6] resultados de integrais singulares sobre o $\mathbb{R}^n$.

O Capítulo 2 é dedicado principalmente à obtenção de estimativas para solução suave do problema (1)-(2). Mas antes fazemos uma breve apresentação do problema, com a definição de solução fraca e do resultado devido a D. Hoff sobre existência e regularidade da solução, encontrados em [15]. As estimativas apresentadas na segunda seção podem ser encontradas em [15], mas sem muitos dos detalhes aqui apresentados. Aqui, nos propusemos a apresentar as mesmas com grande riqueza de detalhes. Para se obter tais estimativas é essencial o fato de que a "energia" inicial do sistema seja pequena e isso ficará evidente ao final da Subseção 2.2.2. Na terceira seção desta tese, algumas estimativas obtidas por D. Hoff em [15] são melhoradas, no sentido de que aqui assumimos o dado inicial u_0 no espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^3_+)$, $0 \leq s \leq 1$, e obtemos estimativas dependentes de s que se reduzem àquelas de [15] quando $s = 0$. Para a obtenção de tais estimativas procedemos de maneira análoga a [16]. A estimativa é obtida decompondo o campo u em duas componentes: uma componente v que é solução de um problema linear homogêneo com dado inicial u_0 e uma componente w que é solução de um problema linear não-homogêneo, mas com dado inicial nulo. No problema envolvendo w aparece a contribuição da pressão do fluido. Para se obter as estimativas para v faz-se uso da teoria de interpolação. Caso o dado inicial tenha maior regularidade, ou seja, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3_+)$, a estimativa é obtida sem peso e caso o dado inicial esteja somente em $L^2(\mathbb{R}^3_+)$, necessitaremos de um peso σ nas estimativas. Desta forma, com dado inicial em um espaço de Sobolev fracionário, obteremos estimativas com o peso σ elevado a um expoente fracionário.

No Capítulo 3 apresentaremos e demonstraremos o resultado central deste trabalho. O teorema em questão garante a existência e unicidade de solução de trajetória associada ao campo u presente na solução de (1), quando assumimos $\inf \rho_0 \geq \underline{\rho} > 0$ em $\mathbb{R}^3_+$ e $||u_0||_{H^s(\mathbb{R}^3_+)} \leq C_0$, com $s > 1/2$ e $C_0 + C_f$ suficientemente pequeno, onde C_0 e C_f são constantes que majoram os dados iniciais e a força externa f (v. (2.11) e (2.12)), ou seja, desde que a energia inicial do sistema seja suficientemente pequena. A existência de tal trajetória não é 'problema', pois é obtida facilmente por passagem ao limite nas soluções aproximadas. O problema é a unicidade. A estratégia consiste em decompor o campo u em outros dois campos denotados por $u_{F,\omega}$ e u_P, onde $u_{F,\omega}$ é referente ao *fluxo viscoso* F e a *matriz de vorticidade* ω (v.(2.14) e (2.15)) e u_P é relacionado à pressão do fluido. Não podemos garantir que a parte referente à pressão seja um campo lipschitziano, na variável espacial, mas podemos mostrar que esta parte é um campo log-lipschitziano. Apresentamos os campos log-lipschitzianos no primeiro capítulo. O campo u_P é log-lipschitziano graças ao fato de que temos estimativas para $(P - \tilde{P})$ em $L^2(\mathbb{R}^3_+)$ e $L^\infty(\mathbb{R}^3_+)$, uniformes em relação ao tempo.

O campo $u_{F,\omega}$ é lipschitziano, para qualquer $t > 0$. Apesar disto, este campo apresenta dificuldades quanto à verificação da integrabilidade em relação ao tempo, numa vizinhança de zero, da sua norma de Lipschitz espacial. Tomando o dado inicial u_0 somente em $L^2(\mathbb{R}^3_+)$, não podemos verificar tal integrabilidade. É justamente neste ponto que exigimos, como em [20], que u_0 esteja no espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^3_+)$, para $s > 1/2$.

Além da unicidade de curvas integrais do campo u, mostramos também no Teorema principal do Capítulo 3 que a aplicação fluxo X do campo u tem as seguintes propriedades: $X(t, .), t > 0$, é bijetiva em todo o semiespaço $\overline{\mathbb{R}^3_+}$, deixa a fronteira $\partial\mathbb{R}^3_+$ invariante, é uma aplicação aberta em $\mathbb{R}^3_+$ e preserva variedades parametrizadas de classe Hölder contínuas, ou seja, a imagem por esta aplicação de uma variedade parametrizada de classe C^α é uma variedade parametrizada de classe C^β, para certos α e $\beta \in (0, 1)$. Mostramos também que para $0 < t_1 < t_2$, a aplicação

$X(t_1, y) \mapsto X(t_2, y)$, $y \in \mathbb{R}^3_+$, é Hölder contínua.

CAPÍTULO 1

CONCEITOS PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos as principais ferramentas utilizadas no desenvolvimento deste texto, visando deixar este trabalho o mais autossuficiente possível. Apresentaremos os resultados de maneira bastante superficial e sem muitas demonstrações.

1.1 Notações

Antes de mais nada façamos algumas considerações sobre a notação. Trabalharemos sempre no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Seja $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ uma n-upla de números inteiros não negativos. Chamaremos α de multi-índice e denotaremos

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Derivadas de ordem superior serão denotadas por

$$D^\alpha \equiv D_1^{\alpha_1}...D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}$$

onde $D_i \equiv \partial/\partial x_i$. Também utilizaremos as notações $\partial u/\partial x_i \equiv u_{x_i}$ para as derivadas de primeira ordem de uma função u. Nos capítulos seguintes, a fim de simplificar a notação faremos uso também da notação u_i para representar a $i-$ésima derivada da função u.

O gradiente de uma função com valores reais u será denotada por

$$\nabla u(x) = (u_{x_1}(x), ..., u_{x_n}(x)).$$

Quando escrevermos produtos de termos com índices repetidos (podendo ter índices inferiores ou superiores), estaremos assumindo, para simplificar a notação, um somatório sobre estes índices, ou seja, se $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$ e $g = (g_1, g_2, ..., g_n)$, então escrevemos

$$f_i g_i \equiv \sum_{i=1}^{n} f_i g_i.$$

Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $C^0(\Omega)$ o conjunto de todas as funções reais contínuas em Ω. Mais geralmente, se k é um inteiro não negativo ou ∞, denotaremos por $C^k(\Omega)$ o conjunto

$$C^k(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}^n; D^\alpha u \in C^0(\Omega), 0 \leq |\alpha| < k+1\}.$$

Dada uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$, definimos o seu suporte, denotado por $\operatorname{supp} u$, como sendo o conjunto,

$$\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}.$$

Denotaremos por $C_0^k(\Omega)$ o subconjunto das funções em $C^k(\Omega)$ com suporte compacto em Ω. Mais ainda, denotaremos por $C^k(\overline{\Omega})$ o seguinte conjunto:

$$C^k(\overline{\Omega}) = C^k(\Omega) \cap \{u; D^\alpha u \text{ tem uma extensão contínua a } \overline{\Omega}, 0 \leq |\alpha| \leq k\}.$$

Seja $\gamma \in (0,1)$. Diremos que u é Hölder contínua em Ω com expoente γ se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\gamma,$$

para todos $x, y \in \Omega$. Denotaremos o espaço das funções com esta propriedade por $C^\gamma(\Omega)$, munido da norma

$$||u||_{C^\gamma(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} |u(x)| + \sup_{x_1 \neq x_2} \frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\gamma}.$$

Denotaremos a norma dos espaços $L^p(\Omega)$ por $||.||_{L^p(\Omega)}$. Nos capítulos seguintes, quando estivermos com o caso particular $\Omega = \mathbb{R}^3_+$, simplificaremos a notação escrevendo simplesmente $||.||_p$ para denotar a norma de $L^p(\mathbb{R}^3_+)$.

Para $p \geq 1$ e k inteiro não-negativo, definimos o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ por

$$W^{k,p}(\Omega) = L^p(\Omega) \cap \{u; D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ com } |\alpha| \leq k\},$$

que é um espaço de Banach munido da norma

$$||u||_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq k} |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}$$

que é equivalente a

$$\sum_{|\alpha|\leq k} ||D^\alpha u||_{p,\Omega}.$$

No caso particular $p = 2$, temos um espaço de Hilbert e o denotaremos por

$$H^k(\Omega) = W^{k,p}(\Omega).$$

Denotamos por $W_0^{k,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$, com a norma induzida de $W^{k,p}(\Omega)$.

Denotaremos por $D^{k,p}(\Omega)$ ao seguinte espaço

$$D^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^1_{loc}(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| = k\}.$$

Em toda a tese, C ou C_1, C_2, etc. representará qualquer constante e quando escrevermos $C(a)$ ou $C(a_1, a_2, etc.)$ estaremos representando uma constante que depende da quantidade a ou, respectivamente, das quantidades $a_1, a_2, etc.$

1.2 Imersões e Desigualdades Básicas

Nesta seção faremos uma breve apresentação de algumas desigualdades e imersões de Sobolev utilizadas neste trabalho. Também enunciaremos o Teorema do Transporte e um teorema sobre o operador de multiplicação, e, finalizando a seção, apresentaremos uma fórmula de integração por partes no semiespaço que usaremos com frequência. As principais referências para esta seção são [1], [10], [11], [12], [21], [23], [26] e [30].

Primeiramente temos a desigualdade de Hölder generalizada garantindo que para quaisquer funções $f_1, f_2, ..., f_k$ com $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, vale a seguinte desigualdade

$$||f_1 f_2 ... f_k||_{L^p(\Omega)} \leq ||f_1||_{L^{p_1}(\Omega)}.||f_2||_{L^{p_2}(\Omega)}....||f_k||_{L^{p_k}(\Omega)},$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com Ω mensurável e $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} = \frac{1}{p}$.

Outra desigualdade também bastante conhecida e utilizada é a interpolação dos espaços L^p, apresentada na seguinte proposição:

Proposição 1.1. *Se $0 < p < q < r \leq \infty$, então $L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, com inclusão contínua satisfazendo*

$$||f||_{L^q(\Omega)} \leq ||f||^{\lambda}_{L^p(\Omega)}.||f||^{1-r}_{L^r(\Omega)},$$

onde $\lambda \in (0,1)$ satisfaz $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}$.

A seguinte proposição é um resultado clássico conhecida como desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev.

Proposição 1.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n > 1$ um aberto. Existe uma constante $C > 0$ tal que se $n > p$, $p \geq 1$ e $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$, então*

$$||u||_{L^{np/(n-p)}(\Omega)} \leq C||\nabla u||_{L^p(\Omega)}.$$

Para uma consulta a este resultado vide Teorema 2.4.1 de [30]. Esta proposição é de grande importância para estabelecermos uma desigualdade também conhecida por desigualdade de interpolação que nos permite estimar a norma L^p de uma função em termos da norma L^2 da mesma função e de sua derivada com expoentes adequados.

Mas antes de apresentar tal resultado, enunciaremos um resultado clássico de imersão dos espaços de Sobolev bastante utilizado.

Teorema 1.3. *(Desigualdade de Morrey) Seja $p > n$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

para toda $u \in (C^1 \cap W^{1,p})(\mathbb{R}^n)$, onde $\gamma = 1 - n/p$.

Ver Teorema 4, pág 266 em [10].

Observação 1.4. *Uma vez que $\mathbb{R}^n_+$ possui a propriedade do prolongamento, ou seja, existe um operador linear contínuo*

$$\mathcal{L} : W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+) \to W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$$

tal que $\mathcal{L}[v]|_{\mathbb{R}^3_+} = v$ para toda $v \in W^{k,p}(\mathbb{R}^3_+)$. Neste caso, o operador linear pode ser dado explicitamente e além disso se $u \in C^1(\overline{\mathbb{R}^3_+})$, então $\mathcal{L}[u] \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Ver Teorema 5.19 em [1], pág. 148, e sua demonstração.

Sejam $p > 3$ e $\gamma = 1 - 3/p$. Pela Observação 1.4 e pela Desigualdade de Morrey (Teorema 1.3), para toda função $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^3_+) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}^3_+})$, temos

$$\begin{aligned}
||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^3_+)} &\leq \|\mathcal{L}[u]\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq ||\mathcal{L}[u]||_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq C(||\mathcal{L}[u]||_{L^p(\mathbb{R}^3)} + ||\nabla\mathcal{L}[u]||_{L^p(\mathbb{R}^3)}) \\
&\leq C(||u||_{L^p(\mathbb{R}^3_+)} + ||\nabla u||_{L^p(\mathbb{R}^3_+)}) \\
&\leq C(||u||^{\frac{2}{p}}_{L^2(\mathbb{R}^3_+)}||u||^{1-2/p}_{L^\infty(\mathbb{R}^3_+)} + ||\nabla u||_{L^p(\mathbb{R}^3_+)}).
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young, obtemos

$$||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^3_+)} \leq \frac{1}{2}||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^3_+)} + C||u||_{L^2(\mathbb{R}^3_+)} + C||\nabla u||_{L^p(\mathbb{R}^3_+)}.$$

Logo,

$$||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^3_+)} \leq C(||u||_{L^2(\mathbb{R}^3_+)} + ||\nabla u||_{L^p(\mathbb{R}^3_+)}). \tag{1.1}$$

Apresentaremos agora a desigualdade de interpolação que nos permite estimar a norma L^p de uma aplicação através da norma L^2 da própria função e de sua derivada.

Proposição 1.5. *Seja $w \in H^1(\mathbb{R}^3_+)$. Então vale a seguinte desigualdade*

$$||w||_{L^p(\mathbb{R}^3_+)} \leq C(p)||w||^{6-p/2p}_{L^2(\mathbb{R}^3_+)}||\nabla w||^{3p-6/2p}_{L^2(\mathbb{R}^3_+)}, \text{ para } \quad p \in [2, 6].$$

Demonstração: Primeiramente verificaremos tal resultado para qualquer $w \in H^1(\mathbb{R}^3) \equiv H_0^1(\mathbb{R}^3)$. Pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, temos que w satisfaz a seguinte desigualdade

$$||w||_{L^6(\mathbb{R}^3)} \leq C||\nabla w||_{L^2(\mathbb{R}^3)},$$

ou seja, a desigualdade

$$\int_{\mathbb{R}^3} |w|^p dx \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^3} |w|^2 dx\right)^{(6-p)/4}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w|^2 dx\right)^{(3p-6)/4}$$

é satisfeita para $p = 2$ e $p = 6$. Por interpolação dos espaços L^p e novamente pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, para qualquer $p \in [2, 6]$ obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} |w|^p dx &\leq ||w||^p_{L^p(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq ||w||^{\frac{6-p}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}||w||^{\frac{3p-6}{2}}_{L^6(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} |w|^2 dx\right)^{\frac{6-p}{4}}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |w|^6 dx\right)^{\frac{3p-6}{12}} \\
&\leq C(p)\left(\int_{\mathbb{R}^3} |w|^2 dx\right)^{\frac{6-p}{4}}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w|^2 dx\right)^{\frac{3p-6}{4}} \\
&= C(p)||w||^{\frac{6-p}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}||\nabla w||^{\frac{3p-6}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}$$

O resultado continua sendo válido para o semiespaço. Para isso, utilizaremos a Observação 1.4, pondo $\overline{w} = \mathcal{L}(w)$:

$$\begin{aligned}
||w||_{L^p(\mathbb{R}^3_+)} &\leq \tilde{C}||\overline{w}||_{L^p(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq C||\overline{w}||^{(6-p)/2p}_{L^2(\mathbb{R}^3)}||\nabla \overline{w}||^{(3p-6)/2p}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq C||w||^{(6-p)/2p}_{L^2(\mathbb{R}^3_+)}||\nabla w||^{(3p-6)/2p}_{L^2(\mathbb{R}^3_+)},
\end{aligned}$$

concluindo a demonstração do resultado. ∎

Apresentaremos agora um teorema de traço que será útil na obtenção de estimativas da segunda derivada da solução do laplaciano com condição de Robin sobre a fronteira, como está na seção II.8 em [13]. Antes devemos apresentar algumas notações adotadas. Seja $1 < q < \infty$. Definimos o espaço $D^{1-1/q,q}(\partial\mathbb{R}^n_+)$ como sendo o conjunto das funções mensuráveis $\phi : \partial\mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ tais que

$$\langle\langle\phi\rangle\rangle_{1-1/q,q} < \infty,$$

onde

$$\langle\langle\phi\rangle\rangle_{1-1/q,q} \equiv \left(\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|^q}{|x - y|^{n-2+q}} dxdy\right)^{1/q}. \tag{1.2}$$

Observe que $\langle\langle\phi\rangle\rangle_{1-1/q,q}$ é apenas uma seminorma, mas identificando as funções nesse conjunto que diferem por uma constante, teremos que $\langle\langle\phi\rangle\rangle_{1-1/q,q}$ será uma norma em $D^{1-1/q,q}(\partial\mathbb{R}^n_+)$ e $D^{1-1/q,q}(\partial\mathbb{R}^n_+)$ é completo nesta norma.

Podemos então enunciar o teorema de traço que será utilizado para obtenção de estimativa da solução do laplaciano no semiespaço com condição de fronteira de Robin:

Teorema 1.6. *Seja $\phi \in D^{1,q}(\mathbb{R}^n_+)$ com $1 < q < \infty$. Então o traço $\bar{\phi}$ de ϕ em $\partial\mathbb{R}^n_+$ pertence a $D^{1-1/q,q}(\partial\mathbb{R}^n_+)$ e satisfaz*

$$\langle\langle\bar{\phi}\rangle\rangle_{1-1/q,q} \leq C||\nabla\phi||_q,$$

onde C é uma constante que depende somente de n e q.

Ver [13], pág. 125.

A seguir apresentaremos o teorema conhecido como o Teorema do Transporte. Consideramos um fluido qualquer com trajetória de partículas bem definida. As funções aqui envolvidas serão suficientemente diferenciáveis para que os cálculos abaixo façam sentido.

Sejam uma função $f(x,t)$ e $x(t)$ a trajetória de uma partícula x do fluido em uma determinada região do espaço. Calculando a derivada desta função ao longo da trajetória de partículas $x(t)$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(x(t),t) &= \nabla f(x(t),t).\frac{dx}{dt}(x(t),t) + \frac{\partial f}{\partial t}(x(t),t) \\ &= \left(u\cdot\nabla f + \frac{\partial f}{\partial t}\right)(x(t),t). \end{aligned}$$

No caso unidimensional, ∇f se resume a $\frac{\partial f}{\partial x}$ e a velocidade é um escalar, logo, a fórmula anterior toma a forma:

$$\frac{d}{dt}f(x(t),t) = (uf_x + f_t)(x(t),t).$$

Definição 1.7. *Definimos a* derivada material*, ou* derivada convectiva*, da função f por*

$$\dot{f} \equiv \frac{Df}{Dt} = u\cdot\nabla f + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Pela definição dada acima temos que a derivada material de f é a derivada de f em relação ao tempo ao longo da trajetória de uma partícula.

Feitas estas considerações, enunciamos com rigor, o Teorema do Transporte:

Teorema 1.8. ***(Teorema do Transporte)***
Sejam $u = u(.,t)$, $t \geq 0$, um campo de vetores, definido num aberto A do $\mathbb{R}^n$, de classe $C^1(A \times [0,\infty))$, e $X(x,\cdot)$ a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = u(X(t),t), \quad t > 0 \\ X(0) = x \end{cases}$$

para x qualquer em A. Então para toda $f \in C^1(A \times [0,\infty))$ e qualquer $\Omega \subset A$, com $\overline{\Omega} \subset A$, vale a fórmula

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} f(x,t)dx = \int_{\Omega_t}\left[\frac{Df}{Dt}(x,t) + (\operatorname{div} u)f\right]dx,$$

onde $\Omega_t = X(\Omega,t)$.

Ver [23], pág. 3.

O próximo resultado é muito importante para obtenção de estimativas L^p para derivadas da solução do problema do laplaciano em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.9. *Seja $m : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k, onde $k > n/2$, tal que*

$$\left|\frac{\partial^\alpha m}{\partial \xi^\alpha}(\xi)\right| \leq C|\xi|^{-\alpha},$$

para cada multi-índice α, com $|\alpha| \leq k$. Seja o operador T definido por

$$\widehat{T(v)}(\xi) = m(\xi)\widehat{v}(\xi),$$

onde o símbolo $\widehat{\ }$ indica a Transformada de Fourier. Então, o operador T é linear e limitado em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$.

Ver [26], pág. 96.

Ao longo desta tese utilizaremos com muita frequência integração por partes em $\mathbb{R}^3_+$, ou seja, utilizaremos que valem as seguintes fórmulas de integração por partes para funções $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n_+}(\partial_i u)v dx = -\int_{\mathbb{R}^n_+} u(\partial_i v)dx,$$

se $i \in \{1, \cdots, n-1\}$, e

$$\int_{\mathbb{R}^n_+}(\partial_n u)v dx = -\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} uv dS_x - \int_{\mathbb{R}^n_+} u(\partial_n v)dx.$$

É fácil demonstrar estas fórmulas. Com efeito, para u e v no espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ o resultado segue-se por integração por partes em bolas de raio r interceptadas com $\mathbb{R}^n_+$ e fazendo r tender a infinito. Daí, o resultado geral segue-se pela densidade do espaço das funções em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ restritas a $\mathbb{R}^n_+$; v. Teorema 3.22 em [1], pág 68. (Na integral acima sobre a fronteira $\partial\mathbb{R}^n_+$ as funções u e v são tomadas no sentido do traço.)

1.3 Campos Log-lipschitzianos

Apresentaremos aqui uma classe de campos de vetores um pouco maior que a classe de campos lipschtzianos, que serão os campos log-lipschitzianos. A partir da apresentação de tal classe o nosso objetivo é apresentar um resultado análogo ao teorema de Picard sobre existência e unicidade de curvas integrais para este determinado campo de vetores e apresentar um resultado que nos fornece uma família de campos inseridos nesta classe. Para isso faz-se necessário a apresentação de um resultado que generaliza o lema de Gronwall, chamado Lema de Osgood. Para esta seção podemos consultar [2] e [7].

Definição 1.10. *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Um campo de vetores v em Ω é dito log-lipschitziano quando satisfaz:*

$$\langle v \rangle_{LL} \equiv \sup_{\substack{0 < |x_1 - x_2| \leq 1 \\ x_1, x_2 \in \Omega}} \frac{|v(x_1) - v(x_2)|}{|x_1 - x_2|(1 - \log |x_1 - x_2|)} < \infty.$$

Denotaremos por LL ou $LL(\Omega)$ o espaço dos campos limitados que são log-lipschitzianos em Ω, munido da norma $\| \cdot \|_{L^\infty} + \langle \cdot \rangle_{LL}$; v. Observação 1.12 abaixo.

Mais geralmente, temos [7]:

Definição 1.11. *Seja $\mu : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função contínua, crescente e tal que $\mu(r) \to 0$ quando $r \to 0^+$. Sejam (X, d) e (Y, δ) espaços métricos. Denotamos por $C_\mu(X, Y)$ o espaço das funções limitadas $u : X \longrightarrow Y$ tal que existe uma constante C satisfazendo*

$$\delta(u(x), u(y)) \leq C\mu(d(x, y)),$$

para quaisquer $x, y \in X$.

Observação 1.12. *Se $(E, ||.||)$ é um espaço de Banach, o espaço $C_\mu(X, E)$ é um espaço de Banach munido da norma*

$$||u||_\mu = ||u||_{L^\infty(E)} + \sup_{x \neq y} \frac{||u(x) - u(y)||}{\mu(d(x, y))}.$$

Desta forma, como a função $\mu : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mu(r) = \begin{cases} r(1 - \log r), & 0 < r < 1 \\ r, & r \geq 1 \end{cases}$$

satisfaz as condições da Definição 1.11, segue que LL é um espaço de Banach.

Para a demonstração da unicidade de curvas integrais e propriedades do fluxo, necessitaremos de um lema auxiliar, conhecido como Lema de Osgood (generalização do Lema de Gronwall):

Lema 1.13. ***(Lema de Osgood)***
Sejam $t_0 \in \mathbb{R}$, ρ uma função mensurável e positiva, γ uma função positiva, localmente integrável em $[t_0, \infty)$, e μ como na Definição 1.11. Suponhamos que, para um número real não negativo a tenhamos a desigualdade

$$\rho(t) \leq a + \int_{t_0}^{t} \gamma(s)\mu(\rho(s))ds.$$

- *Se $a \neq 0$, então*
$$-M(\rho(t)) + M(a) \leq \int_{t_0}^{t} \gamma(s)ds,$$
onde $M(x) = \int_x^1 \frac{dr}{\mu(r)}$.

- *Se $a = 0$ e μ satisfaz $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mu(r)}dr = +\infty$, então ρ é identicamente nula.*

Ver [7], pág. 91.

Observação 1.14. *Pela definição da função M, temos que ela é estritamente decrescente ($M'(x) = -1/\mu(x) < 0$ para $x > 0$), logo tem uma inversa M^{-1} (definida no intervalo $\left(-\int_1^\infty \frac{dr}{\mu(r)}, \int_0^1 \frac{dr}{\mu(r)}\right)$. Então no caso em que $M(a) - \int_{t_0}^t \gamma(s)ds \in Dom.M^{-1}$, a desigualdade dada quando $a \neq 0$ equivale a*

$$\rho(t) \leq M^{-1}(M(a) - \int_{t_0}^{t} \gamma(s)ds).$$

No caso particular (que nos interessa nessa tese) em que a função μ é a dada na Observação 1.12, podemos concluir facilmente que M e a sua inversa são dadas, respectivamente, por

$$M(x) = \begin{cases} \ln(1 - \ln x), & se\ 0 < x \leq 1 \\ -\ln x, & se\ x \geq 1 \end{cases} \quad e \quad M^{-1}(y) = \begin{cases} e^{-y}, & se\ y \leq 0 \\ e^{(1-\exp(y))}, & se\ y \geq 0 \end{cases}.$$

Logo, se $M(a) - \int_{t_0}^t \gamma(s)ds \geq 0$ e $a \leq 1$, i.e. $a \leq \min\{1, e^{(1-\exp(\int_{t_0}^t \gamma(s)ds))}\}$, temos

$$\rho(t) \leq e^{1-\exp(M(a)-\int_{t_0}^t \gamma(s)ds)} = e^{1-(1-\ln a)\exp(-\int_{t_0}^t \gamma(s)ds)},$$

i.e.

$$\rho(t) \leq a^{\exp(-\int_{t_0}^t \gamma(s)ds)} e^{1-\exp(-\int_{t_0}^t \gamma(s)ds)}. \tag{1.3}$$

Teorema 1.15. *Sejam E um espaço de Banach, Ω um subconjunto aberto de E, I um intervalo aberto da reta e $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$. Seja também $F \in L^1_{loc}(I; C_\mu(\Omega; E))$, onde μ é como na Observação 1.12. Suponhamos que*

$$\int_0^1 \frac{1}{\mu(r)}dr = +\infty. \tag{1.4}$$

Então existe um intervalo aberto $J \subset I$, J contendo t_0, tal que a equação

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))ds \tag{1.5}$$

tem uma única solução contínua $x : J \to E$.

Demonstração: A existência é garantida pelo mesmo processo iterativo do Teorema de Picard. A unicidade também é semelhante, porém utilizando o Lema de Osgood: sejam $x_1(t), x_2(t)$ duas soluções satisfazendo (1.5). Definamos, para $t, s \in J$, as funções $\rho(t) = ||x_1(t) - x_2(t)||$ e $\gamma(s) = \|F(s)\|_\mu$; v. Observação 1.12. Já que $F \in L^1_{loc}(I, C_\mu(\Omega; E))$, temos

$$\begin{aligned}
0 \le \rho(t) &= ||x_1(t) - x_2(t)|| \\
&= \left|\left|\int_{t_0}^{t} (F(s, x_1(s)) - F(s, x_2(s)))ds\right|\right| \\
&\le \int_{t_0}^{t} ||F(s, x_1(s)) - F(s, x_2(s))||ds \\
&= \int_{t_0}^{t} \mu(d(x_1, x_2))\frac{||F(s, x_1(s)) - F(s, x_2(s))||}{\mu(d(x_1, x_2))}ds \\
&\le \int_{t_0}^{t} \gamma(s)\mu(||x_1(s) - x_2(s)||)ds \\
&= \int_{t_0}^{t} \gamma(s)\mu(\rho(s))ds.
\end{aligned}$$

Pelo Lema de Osgood, segue que $\rho(t) \equiv 0$, ou seja, $x_1(t) = x_2(t)$ em J. ∎

Observação 1.16. *Como F está definida assumindo valores em um espaço de Banach, F é Bochner integrável.*

O próximo resultado nos fornece exemplos de campos log-lipschitzianos.

Proposição 1.17. *Seja $1 \le p < n$. Para cada $g \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, obtemos*

$$\nabla\Gamma * g \in LL(\mathbb{R}^n)$$

e satisfaz a seguinte desigualdade

$$||\nabla\Gamma * g||_{LL} \le C(||g||_{L^p(\mathbb{R}^n)} + ||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}),$$

onde Γ é a solução fundamental do laplaciano em $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$.

Demonstração: Primeiramente mostraremos que
$$||\nabla\Gamma * g||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C\left(||g||_{L^p(\mathbb{R}^n)} + ||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right).$$
De fato,
$$\begin{aligned}
|(\Gamma_{x_i} * g)(y)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^n} g(x)dx\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|g(x)|}{|x-y|^{n-1}}dx \\
&= \int_{B_1(y)} \frac{|g(x)|}{|x-y|^{n-1}}dx + \int_{B_1^c(y)} \frac{|g(x)|}{|x-y|^{n-1}}dx \\
&\leq ||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B_1(y)} \frac{1}{|x-y|^{n-1}}dx + ||g||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \left(\int_{B_1^c(y)} \frac{1}{|x-y|^{\frac{(n-1)p}{p-1}}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq C_1||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + C_2||g||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$
Notemos que $\dfrac{(n-1)p}{p-1} > n$, se e somente se, $p < n$.

Resta mostrar a segunda estimativa, ou seja,
$$\langle \nabla\Gamma * g\rangle_{LL} \leq C(||g||_{L^p(\mathbb{R}^n)} + ||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}).$$
Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ e consideremos $\varepsilon \equiv |x-y| \leq 1$. Caso tenhamos $|x-y| > 1$, então
$$\begin{aligned}
|(\nabla\Gamma * g)(x) - (\nabla\Gamma * g)(y)| &\leq 2||\nabla\Gamma * g||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq 2C(||g||_{L^p(\mathbb{R}^n)} + ||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)})|x-y|,
\end{aligned}$$
que nos garante trivialmente a estimativa acima.

Para o caso $|x-y| \geq 1$, tomamos $\bar{x} = \dfrac{x-y}{2}$ e para $j = 1, 2, ..., n$, escrevemos
$$\begin{aligned}
|(\Gamma_{x_j} * g)(x) - (\Gamma_{x_j} * g)(y)| &= \left|\int\limits_{B_\varepsilon(\bar{x}) \cup [B_2(\bar{x}) \setminus B_\varepsilon(\bar{x})] \cup B_2^c(\bar{x})} [\Gamma_{x_j}(x-z) - \Gamma_{x_j}(y-z)]g(z)dz\right| \\
&\leq I + II + III,
\end{aligned}$$
onde
$$\begin{aligned}
I &\equiv \left|\int_{B_\varepsilon(\bar{x})} [\Gamma_{x_j}(x-z) - \Gamma_{x_j}(y-z)]g(z)dz\right| \\
&= C\left|\int_{B_\varepsilon(\bar{x})} \left[\frac{x_j - z_j}{|x-z|^n} - \frac{y_j - z_j}{|y-z|^n}\right] g(z)dz\right| \\
&\leq C||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B_{2\varepsilon}(x)} \frac{1}{|x-z|^{n-1}}dz \\
&= C||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_0^{2\varepsilon} \frac{r^{n-1}}{r^{n-1}}dr \\
&= C\varepsilon||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
II &\equiv \left| \int\limits_{B_2(\bar{x})\setminus B_\varepsilon(\bar{x})} [\Gamma_{x_j}(x-z) - \Gamma_{x_j}(y-z)] g(z)dz \right| \\
&\leq C||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int\limits_{B_2(\bar{x})\setminus B_\varepsilon(\bar{x})} \left| \frac{x_j - z_j}{|x-z|^n} - \frac{y_j - z_j}{|y-z|^n} \right| dz \\
&\leq C||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \varepsilon \int_0^1 \int\limits_{B_2(\bar{x})\setminus B_\varepsilon(\bar{x})} |x_\theta - z|^{-n} dz d\theta,
\end{aligned}$$

onde $x_\theta = x + \theta(y-x)$, para algum $\theta \in (0,1)$. Uma vez que

$$B_2(\bar{x}) \setminus B_\varepsilon(\bar{x}) \subset B_3(x_\theta) \setminus B_{\varepsilon/2}(x_\theta),$$

segue que

$$\begin{aligned}
II &\leq C||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \varepsilon \int_0^1 \int\limits_{B_3(x_\theta)\setminus B_{\varepsilon/2}(x_\theta)} |x_\theta - z|^{-n} dz d\theta \\
&= C||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \varepsilon \int_0^1 \int_{\varepsilon/2}^3 \frac{r^{n-1}}{r^n} dr d\theta \\
&= C||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \varepsilon \ln r \Big|_{\varepsilon/2}^3 \\
&= C||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \varepsilon (\ln 3 + \ln 2 - \ln \varepsilon).
\end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned}
III &\equiv \left| \int\limits_{B_2^c(\bar{x})} [\Gamma_{x_j}(x-z) - \Gamma_{x_j}(y-z)] g(z)dz \right| \\
&\leq \int\limits_{B_2^c(\bar{x})} \left| \frac{x_j - z_j}{|x-z|^n} - \frac{y_j - z_j}{|y-z|^n} \right| |g(z)| dz \\
&\leq C\varepsilon \int_0^1 \int\limits_{B_1^c(x_\theta)} |x_\theta - z|^{-n} |g(z)| dz d\theta \\
&\leq C\varepsilon \int_0^1 ||g||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \left(\int\limits_{B_1^c(x_\theta)} |x_\theta - z|^{-n\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} d\theta \\
&\leq C\varepsilon ||g||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}|(\Gamma_{x_j} * g)(x) - (\Gamma_{x_j} * g)(y)| &\leq C\varepsilon(1-\ln\varepsilon)(||g||_{L^p(\mathbb{R}^n)} + ||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)})\\ &= C|x-y|(1-\ln|x-y|)(||g||_{L^p(\mathbb{R}^n)} + ||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle \nabla\Gamma * g\rangle_{LL} \leq C(||g||_{L^p(\mathbb{R}^n)} + ||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}),$$

que conclui a demonstração da proposição. ■

Corolário 1.18. *Sejam $1 \leq p < n$ e G a função de Green do laplaciano no $\mathbb{R}^n_+$, com condição de Neumann ou Dirichlet, isto é, $G(x,y) = \Gamma(x-y) \pm \Gamma(x-y^*)$, onde Γ é a solução fundamental do laplaciano em $\mathbb{R}^n$ e y^* é a reflexão de y em torno do hiperplano $y_n = 0$, isto é, $y^*_n = -y_n$. Então, para cada $g \in L^p(\mathbb{R}^n_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$, temos*

$$(\nabla\Gamma * g)(x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla_x G(x,y)g(y)dy$$

define uma função log-lipschitiziana em $\mathbb{R}^n_+$ e satisfaz

$$||\nabla\Gamma * g||_{LL} \leq C(||g||_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} + ||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^n_+)}).$$

Demonstração: Denotaremos por $\tilde{g}$ a extensão de g ao $\mathbb{R}^n$ por reflexão em torno do hiperplano $y_n = 0$, isto é, $\tilde{g}(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) = g(x_1, ..., x_{n-1}, -x_n)$, para $x_n < 0$.

Primeiramente vamos considerar a função de Green do laplaciano no $\mathbb{R}^n_+$ com condição de fronteira de Neumann, ou seja,

$$G(x,y) = \Gamma(x-y) + \Gamma(x-y^*).$$

Desta forma, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n_+} G_{x_i}(x,y)g(y)dy &= \int_{\mathbb{R}^n_+} \Big(\Gamma_{x_i}(x-y) + \Gamma_{x_i}(x-y^*)\Big)g(y)dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+} \Gamma_{x_i}(x-y)\tilde{g}(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n_+} \Gamma_{x_i}(x-y^*)\tilde{g}(y)dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+} \Gamma_{x_i}(x-y)\tilde{g}(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n_+} \Gamma_{x_i}(x-y^*)\tilde{g}(y^*)dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+} \Gamma_{x_i}(x-y)\tilde{g}(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n_-} \Gamma_{x_i}(x-y)\tilde{g}(y)dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_{x_i}(x-y)\tilde{g}(y)dy.\end{aligned}$$

Então, pela Proposição anterior, temos

$$\begin{aligned}\|\nabla G * g\|_{LL(\mathbb{R}^n_+)} &= \|\nabla \Gamma * \tilde{g}\|_{LL(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C\big(\|\tilde{g}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\tilde{g}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\big) \\ &\leq 2C\big(\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} + \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n_+)}\big).\end{aligned}$$

Agora, vamos considerar a função de Green do laplaciano no $\mathbb{R}^n_+$ com condição de fronteira de Diriclet, ou seja,

$$G(x,y) = \Gamma(x-y) - \Gamma(x-y^*).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n_+} G_{x_i}(x,y)g(y)dy &= \int_{\mathbb{R}^n_+} \Big(\Gamma_{x_i}(x-y) - \Gamma_{x_i}(x-y^*)\Big) g(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+} \Gamma_{x_i}(x-y)g(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n_+} \Gamma_{x_i}(x-y^*)g(y)dy \\ &\quad -2\int_{\mathbb{R}^n_+} \Gamma_{x_i}(x-y^*)g(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_{x_i}(x-y)\tilde{g}(y)dy - 2\int_{\mathbb{R}^n_+} \Gamma_{x_i}(x-y^*)g(y)dy.\end{aligned}$$

Observemos que a primeira parcela da expressão acima coincide com o caso anterior e a segunda parcela não apresenta singularidades e a estimativa L^p é imediata, ou seja, temos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}\|\nabla G * g\|_{LL(\mathbb{R}^n_+)} &\leq 2C\big(\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} + \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n_+)}\big) + 2C\big(\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} + \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n_+)}\big) \\ &= 4C\big(\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} + \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n_+)}\big).\end{aligned}$$

■

Observação 1.19. *O Corolário 1.18 vale para domínios mais gerais com a função de Green correspondente ao domínio, com condição de Neumann ou de Dirichlet (ou condições de fronteira mais gerais). Com efeito, na demonstração não precisa a forma explícita da função de Green, mas estimativas satisfeitas pela mesma; v. e.g. pág. 120-123 em [14].*

1.4 Espaços de Interpolação

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos e resultados sobre espaços de interpolação que serão extremamente úteis para obter estimativas com expoentes fracionários. Um estudo detalhado deste conteúdo pode ser encontrado em [5] e [27].

Sejam A_0 e A_1 espaços de Banach contidos em um espaço vetorial de Hausdorff $\mathcal{A}$. Definimos espaço de interpolação por um espaço de Banach denotado por $\{A_0, A_1\}$ que satisfaz as seguintes condições:

(i) $A_0 \cap A_1 \subset \{A_0, A_1\} \subset A_0 + A_1$

(ii) Se B_0 e B_1 são também espaços de Banach contidos em $\mathcal{A}$ e se um operador linear T de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}$ tal que $T \in L(A_i, B_i), i = 0, 1$, então $T \in L(\{A_0, A_1\}, \{B_0, B_1\})$ e satisfaz

$$||T||_{\{A_0,A_1\},\{B_0,B_1\}} \leq ||T||_{A_0,B_0}^{1-\theta} ||T||_{A_1,B_1}^{\theta},$$

para algum $\theta \in [0, 1]$.

Dados A_0 e A_1 espaços de Banach contidos em um espaço de Hausdorff $\mathcal{A}$, definimos para $0 < t < \infty$, o funcional

$$K(t, a) \equiv K(t, a; A_0, A_1) = \inf_{\substack{a = a_0 + a_1 \\ a_i \in A_i}} (||a_0||_{A_0} + t||a_1||_{A_1}), \quad a \in \mathcal{A}$$

e para $0 < \theta < 1$ e $1 \leq q \leq \infty$, o espaço

$$(A_0, A_1)_{\theta,q} = \{a \in A_0 + A_1; ||a||_{(A_0,A_1)_{\theta,q}} < \infty\},$$

onde

$$||a||_{(A_0,A_1)_{\theta,q}} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^\infty [t^{-\theta} K(t, a)]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, & \text{se} \quad q < \infty \\ \displaystyle\sup_{0<t<\infty} t^{-\theta} K(t, a), & \text{se} \quad q = \infty \end{cases}$$

Apresentaremos agora alguns resultados sobre os espaços de interpolação, explicitando alguns espaços intermediários.

Teorema 1.20. *O espaço $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ é um espaço de interpolação.*

Ver [27], pág. 25.

Os dois próximos resultados caracterizam espaços intermediários entre o L^2 e H^1 e entre os espaços L^p.

Teorema 1.21. *Seja $\theta \in (0, 1)$. Então*

$$\left(L^2(\mathbb{R}^n), H^1(\mathbb{R}^n)\right)_{\theta,2} = H^\theta(\mathbb{R}^n).$$

Ver [27], Seção 2.4.2, fórmula (14), pág.186.

Mais ainda, o mesmo resultado continua verdadeiro para $\mathbb{R}^n_+$ no lugar de $\mathbb{R}^n$, ou seja,

$$\left(L^2(\mathbb{R}^n_+), H^1(\mathbb{R}^n_+)\right)_{\theta,2} = H^\theta(\mathbb{R}^n_+),$$

como pode ser visto em [27], Seção 2.10.1, pág 226.

O resultado a seguir apresenta uma interpolação dos espaços L^p quando utilizamos uma medida com peso.

Teorema 1.22. ***(Teorema de Stein-Weiss)*** *Sejam $0 < p \leq \infty, \theta \in (0,1)$, w_0 e w_1 funções não-negativas e mensuráveis e $w(x) = w_0^{1-\theta}(x) w_1^{\theta}(x)$. Então,*

$$(L^p(w_0), L^p(w_1))_{\theta,p} = L^p(w),$$

onde $L^p(w) = L^p(\Omega, w d\mu)$, sendo (Ω, μ) um espaço de medida e μ uma medida positiva. Mais ainda, se

$$T : L^p(\Omega, w_0 d\mu) \to L^p(\tilde{\Omega}, \tilde{w}_0 d\mu)$$

e

$$T : L^p(\Omega, w_1 d\mu) \to L^p(\tilde{\Omega}, \tilde{w}_1 d\mu)$$

são operadores lineares contínuos com normas M_0 e M_1 respectivamente, então

$$T : L^p(\Omega, w d\mu) \to L^p(\tilde{\Omega}, \tilde{w} d\mu)$$

é contínuo com norma $M \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$, onde $\tilde{w}(x) = \tilde{w}_0^{1-\theta} \tilde{w}_1^{\theta}(x)$.

Ver [5], pág. 115.

1.5 Integrais Singulares

Nesta seção apresentaremos ferramentas essenciais para se obter estimativas L^p para a equação de Laplace, através da fórmula de representação. Em matemática, integrais singulares são fundamentais para a análise harmônica e estão intimamente ligados com o estudo de equações diferenciais parciais. De um modo geral a integral singular é um operador integral

$$T(f)(x) = \int K(x,y) f(y) dy$$

cujo núcleo K é singular ao longo da diagonal $x = y$. Uma vez que tais integrais não podem, em geral, ser absolutamente integrável, uma definição rigorosa deve defini-los como o limite da integral sobre $|y - x| > \varepsilon$ com $\varepsilon \to 0$. As principais referências para esta seção são [3], [13], [9] e [26].

Começaremos com a definição de núcleo singular.

Definição 1.23. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $k : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Diremos que a função $K : \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$K(x,y) = \frac{k(x,y)}{|y|^{\lambda}}, \quad \lambda > 0 \quad e \quad x \in \Omega$$

é um núcleo singular se $\lambda = n$ e satisfaz as seguintes condições:

(i) Para todos $x \in \Omega$, $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e para todo $\alpha > 0$, tem-se

$$k(x,y) = k(x, \alpha y)$$

(ii) Para todo $x \in \Omega$, a função $k(x, y)$ é integrável na esfera $|y| = 1$ e

$$\int_{|y|=1} k(x, y)dy = 0$$

(iii) Para algum $q > 1$,

$$\int_{|y|=1} |k(x, y)|^q dy \leq C, \text{ uniformemente em relação a } x.$$

Teorema 1.24. *Sejam $K(x, y)$ um núcleo singular e $N(x, y) = K(x, x - y)$. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\dfrac{q}{q-1} \leq p < \infty$, então*

$$\psi(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y-x| \geq \varepsilon} N(x, y) f(y) dy$$

existe q.t.p. $x \in \Omega$. Mais ainda,

$$||\psi||_p \leq C(p)||f||_p.$$

Este resultado é devido a A. Calderón & A. Zygmund, Teorema 2 em [6].

Podemos verificar que a segunda derivada da solução fundamental do laplaciano em $\mathbb{R}^n$ é um núcleo singular satisfazendo as condições do teorema acima, logo, a convolução de tal núcleo com uma função em $L^p(\mathbb{R}^n)$ está também em $L^p(\mathbb{R}^n)$. No próximo lema faremos tal verificação considerando $n = 3$, sendo as demais dimensões similares.

Lema 1.25. *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$, $1 < p < \infty$. Então a aplicação $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por*

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_{ij}(x - y) f(y) dy := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y-x| \geq \varepsilon} \Gamma_{ij}(x - y) f(y) dy$$

está bem definida q.t.p. em $\mathbb{R}^3$, $g \in L^p(\mathbb{R}^3)$ e satisfaz

$$||g||_p \leq C||f||_p,$$

onde Γ é a solução fundamental do laplaciano em $\mathbb{R}^3$ e Γ_{ij} denota a derivada mista de Γ nas direções i, j.

Demonstração: Lembremos que para $n = 3$, temos

$$\Gamma(x) = \frac{1}{3\omega_3} \frac{1}{|x|},$$

$$\Gamma_i(x) = -\frac{1}{3\omega_3}\frac{x_i}{|x|}$$

e

$$\Gamma_{ij}(x) = -\frac{1}{3\omega_3}\left(\frac{\delta_{ij}}{|x|^n} - \frac{3x_ix_j}{|x|^5}\right),$$

onde $\omega_3 = 4\pi/3$ é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^3$.

Mostraremos Γ_{ij} é um núcleo singular. De fato, consideraremos dois casos:

(i) Se $i \neq j$, seja

$$k(y,x) \equiv k(x) \equiv \frac{x_ix_j}{3\omega_3|x|^2} = \frac{x_ix_j}{4\pi|x|^2}$$

Neste caso, k satisfaz a condição $k(y,x) = k(y,\alpha x)$, para todo $\alpha > 0$. Além disso,

$$\int_{|x|=1} k(y,x)dx = \frac{1}{4\pi}\int_{|x|=1}\frac{x_ix_j}{|x|^2}dx = \frac{1}{4\pi}\int_{|x|=1} x_ix_jdx = 0.$$

Observemos também que $\sup\limits_{|x|=1}|k(y,x)| \leq \dfrac{1}{4\pi}$.

(ii) Se $i = j$, temos $\Gamma_{ii}(x) = -\dfrac{1}{3\omega_3}\left(\dfrac{1}{|x|^3} - 3\dfrac{x_i^2}{|x|^5}\right)$. Definimos

$$k(y,x) \equiv k(x) = -\frac{1}{12\pi}\left(1 - 3\frac{x_i^2}{|x|^2}\right).$$

Observa-se facilmente que $k(y,x) = k(y,\alpha x)$, para todo $\alpha > 0$. Além disso,

$$\int_{|x|=1} k(y,x)dx = -\frac{1}{12\pi}\int_{|x|=1}\left(1 - 3\frac{x_i^2}{|x|^2}\right)dx = -\frac{1}{12\pi}\left(4\pi - 3\int_{|x|=1} x_i^2dx\right) = 0,$$

uma vez que

$$\int_{|x|=1} x_i^2dx = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}\int_{|x|=1} x_j^2dx = \frac{4}{3}\pi, \tag{1.6}$$

pois a esfera centrada na origem é invariante pela transformação $x_i \mapsto x_j$. Mais ainda,

$$\sup_{|x|=1}|k(y,x)| = \sup_{|x|=1}\left|\frac{1}{3\omega_3}\left(\frac{1}{|x|^3} - \frac{x_i^2}{|x|^5}\right)\right| \leq \frac{1}{12\pi}.$$

Pelo Teorema 1.24 concluímos que

$$||g||_p \leq C(p)||f||_p.$$

■

Suponhamos agora que f seja uma função suave com decaimento no infinito. Mais precisamente, suponhamos que $f \in H^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Então a solução suave (em $H^{\infty}(R^n)$) do problema

$$-\Delta u = f_{x_j}, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n \tag{1.7}$$

possui a seguinte representação:

$$u(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) f_{x_j}(x)dx.$$

Podemos derivar sob o sinal de integração e escrever

$$\begin{aligned} u_{y_i}(y) &= -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_i \Gamma(x-y) f_{x_j}(x)dx \\ &= -\int\limits_{\mathbb{R}^n} (\partial_{x_i}\Gamma(x-y)) f_{x_j}(x)dx \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon(y)} (\partial_{x_i}\Gamma(x-y)) f_{x_j}(x)dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon(y)} \Gamma_{x_i x_j}(x-y) f(x)dx - \int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)} \Gamma_{x_i}(x-y) f(x)\nu^j dS(x)\right). \end{aligned}$$

Pelo Lema 1.25, concluímos que

$$\psi(y) := \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon(y)} \Gamma_{x_i x_j}(x-y) f(x)dx$$

existe q.t.p. $y \in \mathbb{R}^n$, e satisfaz

$$||\psi||_p \leq C(p)||f||_p.$$

Podemos verificar também que o termo de fronteira acima é dado por

$$-C \int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^n} f(x) \frac{y_j - x_j}{|x-y|} dS(x) = \int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)} \Gamma_{x_i}(x-y) f(x)\nu^j dS(x) \to \begin{cases} \dfrac{1}{n} f(y), & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases},$$

quando $\varepsilon \to 0$. De fato, suponhamos primeiramente que $i \neq j$. Como f é contínua, dado $\xi > 0$, existe $\delta > 0$ tal que quando$|x-y| = \varepsilon < \delta$, temos $|f(x) - f(y)| < \xi$. Assim,

$$
\begin{aligned}
&\left| C \int_{\partial B_\varepsilon(y)} \Gamma_{x_i}(x-y) f(x) \nu^j dS(x) \right| \\
= &\left| C \int_{\partial B_\varepsilon(y)} \Gamma_{x_i}(x-y) f(x) \nu^j dS(x) - C \int_{\partial B_\varepsilon(y)} \Gamma_{x_i}(x-y) f(y) \nu^j dS(x) \right| \\
\leq &\ \frac{C}{\varepsilon^{n+1}} \int_{\partial B_\varepsilon(y)} |(x_i - y_i)(x_j - y_j)||f(x) - f(y)| dS(x) \\
\leq &\ \xi \frac{C}{\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(y)} dS(x) = \xi,
\end{aligned}
$$

onde usamos que $\displaystyle\int_{\partial B_\varepsilon(y)} \Gamma_{x_i}(x-y) \nu^j dS(x) = 0$, no caso $i \neq j$.

Para o caso $i = j$ e nas mesmas condições acima, vem

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_{\partial B_\varepsilon(y)} \Gamma_{x_i}(x-y) f(x) \nu^j dS(x) - \frac{1}{n} f(y) \right| \\
= &\left| \frac{C}{\varepsilon^{n+1}} \int_{\partial B_\varepsilon(y)} (x_i - y_i)^2 f(x) dS(x) - C \frac{f(y)}{\varepsilon^{n+1}} \int_{\partial B_\varepsilon(y)} (x_i - y_i) dS(x) \right| \\
\leq &\ \frac{C}{\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(y)} |f(x) - f(y)| dS(x) < \xi,
\end{aligned}
$$

onde usamos que $\displaystyle\int_{\partial B_\varepsilon(y)} (x_i - y_i) dS(x) = C\epsilon^{n+1}/n$; cf. (1.6) acima.

Desta forma, pelas contas acima e Lema 1.25 obtemos que o gradiente da solução da equação de Poisson (1.7) acima (em $H^\infty(\mathbb{R}^n)$) satisfaz a estimativa

$$||\nabla u||_p \leq C||f||_p, \quad 1 < p < \infty.$$

Um resultado análogo sobre operadores integrais sobre $\partial\mathbb{R}^n_+$ é válido, ou seja, temos o resultado seguinte devido a S. Agmon, A. Douglis & L. Nirenberg.

Teorema 1.26. *Seja $K : \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$K(\bar{x}, x_n) = \frac{\tilde{w}(\frac{\bar{x}}{|x|}, \frac{x_n}{|x|})}{|x|^{n-1}},$$

onde $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ *e* $\tilde{\omega}$ *é uma função definida em* $\mathbb{R}^n_+$. *Suponhamos que* $D_iK, i = 1, 2, ..., n$, *e* D^2_n *sejam funções contínuas em* $\mathbb{R}^n_+$ *e limitadas em* $\mathbb{R}^n_+ \cap S^{n-1}$ *por uma constante positiva* k. *Mais ainda, suponhamos que*

$$\int_{|\bar{x}|=1} \tilde{w}(\bar{x}, 0) d\bar{x} = 0.$$

Então, para qualquer $\phi \in L^q(\partial\mathbb{R}^n_+)$, *com* $\langle\langle\phi\rangle\rangle_{1-1/q}$ *finito (como definida por 1.2), temos que a função*

$$\psi(\bar{x}, x_n) := \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(\bar{x} - \bar{y}, x_n)\phi(\bar{y})d\bar{y}$$

tem derivada parcial em qualquer direção, de norma $L^q(\mathbb{R}^n_+)$ *finita, e satisfaz a estimativa*

$$||\nabla\psi||_q \leq Ck\langle\langle\phi\rangle\rangle_{1-1/q},$$

onde C *é uma constante que depende somente de* q *e* n.

Ver Teorema 3.3 em [3].

Podemos utilizar este último resultado para obter uma estimativa para uma aplicação integral que aparece na solução explícita do laplaciano em $\mathbb{R}^n_+$, onde é considerada a condição de Robin para a fronteira. Novamente faremos as contas em dimensão 3.

Lema 1.27. *Seja* $\psi : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$ *uma função dada por*

$$\psi(x) = \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \frac{(x_i - y_i)}{(|\bar{x} - \bar{y}|^2 + x_3^2)^{3/2}}\phi(\bar{y})d\bar{y}, \quad i = 1, 2, 3$$

onde $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3_+$, $\bar{x} = (x_1, x_2), \bar{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $\phi \in L^q(\partial\mathbb{R}^3_+)$ *com* $\langle\langle\phi\rangle\rangle_{1-1/q,q}$ *finito. Então* $\partial_{x_i}\psi \in L^q(\mathbb{R}^3_+)$, *para qualquer* $i = 1, 2, 3$ *e satisfaz*

$$||\nabla\psi||_q \leq C\langle\langle\phi\rangle\rangle_{1-1/q,q}.$$

Demonstração: Seja $w^i : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$w^i(\bar{x}, x_3) = x_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Assim, $w^i\left(\frac{\bar{x}}{|x|}, \frac{x_3}{|x|}\right) = \frac{x_i}{|x|}$ é tal que

$$\int_{|\bar{x}|=1} w(\bar{x}, 0)d\bar{x} = \int_{|\bar{x}|=1} \frac{x_i}{|x|}d\bar{x} = 0.$$

Além disso, o núcleo

$$K(\bar{x}, x_3) = \frac{w^i(\bar{x}/|x|, x_3/|x|)}{|x|^2} = \frac{x_i}{|x|^3}$$

é tal que D_iK e D^2_nK são contínuas em $\mathbb{R}^3_+$ e limitadas em $\mathbb{R}^3_+ \cap S^2$. Logo, como $\phi \in L^q(\partial\mathbb{R}^3_+)$ com $\langle\langle\phi\rangle\rangle_{1-1/q,q}$ finito, temos pelo Teorema 1.26 que

$$||\nabla\psi||_q \leq Ck\langle\langle\phi\rangle\rangle_{1-1/q,q}.$$

■

1.6 Sobre o Problema de Poisson no Semiespaço $\mathbb{R}^3_+$

O objetivo desta seção é verificar que algumas funções expressas por fórmulas integrais, similares a potenciais de Riesz, resolvem o problema de Poisson (no sentido clássico) no semiespaço $\mathbb{R}^3_+$, quando a "fonte" (o lado direito da equação) é uma derivada parcial. Consideraremos tanto o problema de Neumann quanto o problema de Dirichlet. Primeiramente façamos algumas considerações: em toda esta seção consideramos uma função $f : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$ tal que $f \in H^k(\mathbb{R}^3_+)$, para k suficientemente grande, e funções contínuas $g, g_1 : \partial\mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$, com g limitada e g_1 em $H^k(\mathbb{R}^2)$. Consideraremos uma extensão $\tilde{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de f, com $\tilde{f} \in H^k(\mathbb{R}^3)$. As principais referências nesta seção são [8], [10] e [14].

Seja $\Gamma : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ a solução fundamental do laplaciano no $\mathbb{R}^3$, que é dada por

$$\Gamma(x) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x|}.$$

O conceito de função de Green é importante na representação de soluções do problema de Poisson. Sejam $G, G_1 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3_+ \setminus \{x = y\} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$G(x,y) = \Gamma(x-y) - \Gamma(x-y^*) \quad \text{e} \quad G_1(x,y) = \Gamma(x-y) + \Gamma(x-y^*),$$

onde y^* é a reflexão do ponto y em relação ao plano $y_3 = 0$, ou seja, se $y = (y_1, y_2, y_3)$, então $y^* = (y_1, y_2, -y_3)$. As funções G e G_1 são as funções de Green para o problema de Poisson no semiespaço com condições de Dirichlet e Neumann, respectivamente, como pode ser verificado em [14], pág 121.

Consideremos agora os seguintes problemas, com condições homogêneas sobre a fronteira:

$$\begin{cases} -\Delta u = f_{x_j} & \text{em } \mathbb{R}^3_+ \\ u = 0 & \text{em } \partial\mathbb{R}^3_+ \end{cases} \tag{1.8}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta u = f_{x_j} & \text{em } \mathbb{R}^3_+ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{em } \partial\mathbb{R}^3_+ \end{cases}, \tag{1.9}$$

onde $j = 1, 2, 3$. No que se segue, vamos mostrar que as funções $u, u_1 : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$ dadas por

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^3_+} [G(x,y)]_{y_j} f(y)dy \tag{1.10}$$

e

$$u_1(x) = \int_{\mathbb{R}^3_+} [(G_1)(x,y)]_{y_j} f(y)dy \tag{1.11}$$

são soluções de (1.8) e (1.9), respectivamente. Naturalmente, devemos observar inicialmente que estas funções estão bem definidas, ou seja, que as integrais acima existem. Mas isso é uma consequência imediata do Corolário 1.18, uma fez que $f \in H^k$ e k suficientemente grande implica que f está em $L^\infty \cap L^2$. Como pode ser visto pela demonstração da Proposição 1.17, essas funções estão bem definidas (as integrais existem) para todo $x \in R^3_+$. Vejamos que u tem derivadas parciais de ordem 2 e que é harmônica em $\mathbb{R}^3_+$. De maneira similar, poderá ver-se que o mesmo vale para u_1. De fato, verificaremos que u satisfaz (1.8). Para isso, reescrevemos u da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\mathbb{R}^3_+} [G(x,y)]_{y_j} f(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^3_+} [\Gamma(x-y)]_{y_j} f(y)dy - \int_{\mathbb{R}^3_+} [\Gamma(x-y^*)]_{y_j} f(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} [\Gamma(x-y)]_{y_j} \tilde{f}(y)dy - \int_{\mathbb{R}^3_-} [\Gamma(x-y)]_{y_j} \tilde{f}(y)dy - \int_{\mathbb{R}^3_+} [\Gamma(x-y^*)]_{y_j} f(y)dy. \end{aligned}$$

Observemos que a função $v : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$v(x) = -\int_{\mathbb{R}^3_-} [\Gamma(x-y)]_{y_j} \tilde{f}(y)dy - \int_{\mathbb{R}^3_+} [\Gamma(x-y^*)]_{y_j} f(y)dy$$

é harmônica em $\mathbb{R}^3_+$. De fato, podemos derivar sobre o sinal de integração, pois o integrando não apresenta nenhum tipo de singularidade e estamos assumindo $f \in H^k(\mathbb{R}^3_+)$ e $\tilde{f} \in H^k(\mathbb{R}^3)$. Desta forma, basta considerarmos a função

$$\tilde{u}(x) \equiv \int_{\mathbb{R}^3} [\Gamma(x-y)]_{y_j} \tilde{f}(y)dy = -\int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_{y_j}(y)\tilde{f}(x-y)dy$$

e mostrar que ela tem derivadas de ordem 2 e é harmônica em $\mathbb{R}^3_+$. Agora podemos proceder como na demonstração do Teorema 1, Seção 2.2, de [10], pág. 23. Devemos chamar a atenção para o seguinte fato: nesse teorema é exigido que a função $\tilde{f}$ seja de classe C^2 e que tenha suporte compacto. A condição de suporte compacto pode ser substituída pelo fato de que $\tilde{f} \in H^k(\mathbb{R}^3)$, pois a compacidade do suporte é utilizada em [10] somente para garantir que podemos "passar"as derivadas para dentro da integral acima. Vamos apresentar mais alguns detalhes desta demonstração.

Definamos $\tilde{w} : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$ por

$$\tilde{w}(x) = -\int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_{y_j}(y) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(x-y)dy.$$

Observamos que $\tilde{w}$ está bem definida pelo mesmo argumento apresentado acima para $\tilde{u}$. Seja $(\tilde{f}_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que $\tilde{f}_n \to \tilde{f}$ em $H^k(\mathbb{R}^3)$. Como $\tilde{f}_n$ possui suporte compacto, podemos proceder como na demonstração do Teorema 1 de [10], pág. 23, e garantir que $\tilde{u}_n : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{u}_n(x) = -\int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_{y_j}(y)\tilde{f}_n(x-y)dy$$

é tal que

$$\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_i}(x) = -\int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_{y_j}(y) \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial x_i}(x-y)dy, \quad i = 1,2,3.$$

Mostremos que $\tilde{w} = \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}$. Para cada $x \in \mathbb{R}^3_+$, temos

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{w}(x) - \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_i}(x)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^3_+} \Gamma_{y_j}(y)\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(x-y) - \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial x_i}(x-y)\right) dy\right| \\
&\leq \int_{B_1(0)} |\Gamma_{y_j}(y)| \left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(x-y) - \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial x_i}(x-y)\right| dy \\
&\quad + \int_{B_1^c(0)} |\Gamma_{y_j}(y)| \left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(x-y) - \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial x_i}(x-y)\right| dy \\
&\leq C\left\|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} - \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial x_i}\right\|_\infty + C\left\|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} - \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial x_i}\right\|_2 \to 0.
\end{aligned}$$

Logo, $\dfrac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_i}$ converge uniformemente a $\tilde{w}$ em $\mathbb{R}^3_+$. Além disso, com um argumento análogo ao anterior também podemos garantir que $\tilde{u}_n$ converge a $\tilde{u}$ em $\mathbb{R}^3_+$. Então $\tilde{u}$ possui a $i-$ésima derivada parcial e $\tilde{w} = \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}$.

De maneira similar, podemos garantir que

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i \partial x_j}(x) = -\int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_{y_j}(y) \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) dy, \quad 1 \leq i,j \leq 3.$$

Assim,

$$\Delta \tilde{u}(x) = -\int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_{y_j}(y) \Delta_x \tilde{f}(x-y) dy = -\int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_{y_j}(y) \Delta_y \tilde{f}(x-y) dy.$$

Observemos agora que, para qualquer $\varepsilon > 0$ e $j,k = 1,2,3$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(0)} \Gamma_{y_j}(y)[\tilde{f}(x-y)]_{y_k y_k} dy \\
= \ & -\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(0)} \Gamma_{y_j y_k}(y)[\tilde{f}(x-y)]_{y_k} dy + \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Gamma_{y_j}(y)[\tilde{f}(x-y)]_{y_k} \nu^k dS(y) \\
= \ & \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(0)} \Gamma_{y_k}(y)[\tilde{f}(x-y)]_{y_j y_k} dy + \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Gamma_{y_j}(y)[\tilde{f}(x-y)]_{y_k} \nu^k dS(y) \\
& -\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Gamma_{y_k}(y)[\tilde{f}(x-y)]_{y_k} \nu^j dS(y) \\
= \ & -\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(0)} \Gamma_{y_k y_k}(y)[\tilde{f}(x-y)]_{y_j} dy + \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Gamma_{y_j}(y)[\tilde{f}(x-y)]_{y_k} \nu^k dS(y) \\
& -\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Gamma_{y_k}(y)[\tilde{f}(x-y)]_{y_k} \nu^j dS(y) + \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Gamma_{y_k}(y)[\tilde{f}(x-y)]_{y_j} \nu^k dS(y),
\end{aligned}$$

onde usamos que não temos termos de fronteira no "infinito"devido a que, pela desigualdade de Hölder e o Teorema do Traço, temos, para qualquer função $f \in H^1(\mathbb{R}^3)$, que $\int_{\partial B_r(0)} |\Gamma_{y_k}(y)||f(x-y)|dy \leq C\|f\|_{H^1(R^3)}/r$, para qualquer $r > 0$.

Além disso,

$$\begin{aligned} & \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Gamma_{y_k}(y)[\tilde{f}(x-y)]_{y_k}\nu^j dS(y) - \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Gamma_{y_j}(y)[\tilde{f}(x-y)]_{y_k}\nu^k dS(y) \\ = \; & C\left(\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{y_j y_k}{|y|^4}\tilde{f}(x-y)]_{y_k} dS(y) - \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{y_j y_k}{|y|^4}\tilde{f}(x-y)]_{y_k} dS(y)\right) = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3\setminus B_\varepsilon(0)} \Gamma_{y_j}(y)[\tilde{f}(x-y)]_{y_k y_k} dy &= -\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_\varepsilon(0)} \Gamma_{y_k y_k}(y)[\tilde{f}(x-y)]_{y_j} dy \\ &\quad - \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Gamma_{y_k}(y)\tilde{f}_{y_j}(x-y)\nu^k dS(y). \end{aligned}$$

Daí, procedendo como na demonstração do Teorema 1, Seção 2.2, de [10], concluímos que, para todo $x \in \mathbb{R}^3_+$,

$$-\Delta u(x) = -\Delta\tilde{u}(x) = \tilde{f}(x) = f(x).$$

Para verificar que u_1 é harmônica em $\mathbb{R}^3_+$, podemos proceder de maneira similar ao caso da função u apresentada acima.

Tendo em vista o exposto acima, não é difícil mostrar que $u \in C^2(\mathbb{R}^3_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}^3_+})$ e $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3_+) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}^3_+})$. Para concluirmos então que u é uma solução do problema (1) resta só verificar que $u = 0$ em $\partial\mathbb{R}^3_+$. Mas isso obtém-se por substituição imediata de $x \in \partial\mathbb{R}^3_+$ na definição de u, visto que para $x \in \partial\mathbb{R}^3_+$, temos $(\Gamma(x-y) - \Gamma(x-y^*))_{y^j} = 0$. Quanto à condição de Neumann homogênea sobre a fronteira, basta observar que

$$\frac{\partial u_1}{\partial\nu}(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3_+}\left(\frac{x_3-y_3}{|x-y|^3} + \frac{x_3+y_3}{|x-y^*|^3}\right)f(y)dy.$$

Daí,

$$\frac{\partial u_1}{\partial\nu}(x_1,x_2,0) = 0.$$

Exibimos agora as funções $v, v_1 : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$ dadas por

$$v(x) = \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \frac{\partial G}{\partial\nu}(x,y)g(y)dy \tag{1.12}$$

e

$$v_1(x) = -\int_{\partial\mathbb{R}^3_+} G_1(x,y)g_1(y)dy, \tag{1.13}$$

que resolvem, respectivamente, os seguintes problemas com condições de fronteira não homogêneas sobre a fronteira:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^3_+ \\ u = g & \text{em } \partial\mathbb{R}^3_+ \end{cases} \tag{1.14}$$

e

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^3_+ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g_1 & \text{em } \partial\mathbb{R}^3_+ \end{cases}. \tag{1.15}$$

Temos que v satisfaz (1.14); v. Teorema 3, item 1, em [8]. Quanto à verificação de que v_1 satisfaz (1.15), basta proceder como na demonstração do Teorema 3, item 2, em [8], trocando a condição em [8] de g_1 ter suporte compacto por $g_1 \in H^k(\mathbb{R}^2)$, o que garante que v_1 está bem definida e podemos derivar sobre o sinal de integração. Para mostrar que v_1 satisfaz a condição de fronteira, basta proceder como na demonstração do Teorema 4 de [8]. Também é possível mostrar que $v \in C^2(\mathbb{R}^3_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}^3_+})$ e $v_1 \in C^2(\mathbb{R}^3_+) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}^3_+})$.

Finalizando esta Seção observamos que as soluções dos problemas acima são únicas na classe das funções integráveis ou em algum espaço L^p. Com efeito, no caso da condição de Dirichlet homogênea e a equação também homogênea, estendendo a solução a $\mathbb{R}^3_+$ de forma ímpar em relação a terceira variável obtemos uma função harmônica (no sentido das distribuições) e integrável, logo, pelo Teorema de Liouville, concluímos que a solução é nula. No caso da condição de Neumann vale o mesmo argumento, tomando a extensão ímpar.

CAPÍTULO 2

SOLUÇÃO FRACA E ESTIMATIVAS A PRIORI

Neste capítulo faremos uma exposição sobre o artigo de D. Hoff [15] apresentando as equações de Navier-Stokes para fluidos compressíveis no semiespaço satisfazendo a condição de Navier na fronteira, o teorema de existência de solução fraca para este modelo, estimativas de energia, e estimativas com peso. A nossa exposição aqui contém mais detalhes do que em [15]. Em particular, para a demonstração de uma das estimativas (estimativa (b) do Lema 2.9) usamos uma ideia que nos foi dada por email pelo D. Hoff, a saber, a mudança de variável "$v = \varphi u^j$".

Apresentamos também estimativas com pesos, de expoentes 1-s e 2-s (Seção 2.3), as quais desenvolvemos seguindo ideias de [16]. Estas estimativas serão usadas no Capítulo 3.

2.1 Existência de Solução Fraca

Nesta seção apresentaremos o resultado de existência de solução fraca global das equações de Navier-Stokes no semiespaço devido a D. Hoff em [15].

Consideremos as equações de Navier-Stokes para um fluido compressível,

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ (\rho u^j)_t + \operatorname{div}(\rho u^j u) + P(\rho)_{x_j} = \mu \Delta u^j + \lambda \operatorname{div} u_{x_j} + \rho f^j, \end{cases} \tag{2.1}$$

para $x \in \mathbb{R}^3_+ \equiv \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 > 0\}$, com a condição de fronteira de Navier,

$$(u^1(x), u^2(x), u^3(x)) = K(x)(u^1_{x_3}(x), u^2_{x_3}(x), 0), \quad x \in \partial\mathbb{R}^3_+, \tag{2.2}$$

e condições iniciais

$$(\rho(x,0), u(x,0)) = (\rho_0(x), u_0(x)), \tag{2.3}$$

onde ρ e $u = (u^1, u^2, u^3)$ são, respectivamente, a densidade e o vetor velocidade do fluido e definidas para $x \in \mathbb{R}^3_+$ e $t \geq 0$, $P(\rho)$ é a pressão, $f = (f^1, f^2, f^3)$ é uma determinada força externa, μ, λ são constantes de viscosidade e K é uma função suave e positiva.

Uma vez feita a apresentação das equações, podemos passar à definição de solução fraca de (2.1)-(2.3), como em [15]:

Definição 2.1. *Dizemos que (ρ, u) é solução fraca de (2.1)-(2.3) se ρ e u são localmente integráveis e satisfazem*

$$\int_{\mathbb{R}^3_+} \rho(x,.)\varphi(x,.)dx\bigg|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathbb{R}^3_+} (\rho\varphi_t + \rho u \nabla\varphi)dxdt, \tag{2.4}$$

para todo tempo $t_2 \geq t_1 \geq 0$ e toda $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^3_+ \times [t_1, t_2])$ com suporte $\operatorname{supp}\varphi(.,t)$ contido em um conjunto compacto fixado de $\mathbb{R}^3_+$, com $t \in [t_1, t_2]$ e também

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3_+} (\rho u)(x,.)\varphi(x,.)dx\bigg|_{t_1}^{t_2} &- \int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathbb{R}^3_+} [\rho u\varphi_t + \rho(\nabla\varphi u)u + P(\rho)\operatorname{div}\varphi]dxdt \\ &= -\mu\int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial\mathbb{R}^3_+} K^{-1}u\varphi dS_x dt - \int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathbb{R}^3_+} [\mu u^j_{x_k}\varphi^j_{x_k} + \lambda(\operatorname{div} u)(\operatorname{div}\varphi)]dxdt \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathbb{R}^3_+} \rho f\varphi dxdt, \end{aligned} \tag{2.5}$$

para $t_2 \geq t_1 \geq 0$ e toda $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)$, onde cada φ^i é da mesma forma como em (2.4) e $\varphi^3 = 0$ em $\partial\mathbb{R}^3_+$.

Faremos algumas considerações sobre os termos que constituem o problema. Para a pressão P, fixamos $\tilde{\rho}$ e $\bar{\rho}$ tais que $0 < \tilde{\rho} < \bar{\rho}$ e assumimos que

$$\begin{cases} P \in C^2([0,\bar{\rho}]) \\ P(0) = 0 \\ P'(\tilde{\rho}) > 0 \\ (\rho - \tilde{\rho})[P(\rho) - P(\tilde{\rho})] > 0, \rho \neq \tilde{\rho}, \rho \in [0,\bar{\rho}]. \end{cases} \tag{2.6}$$

Segue que a função

$$G(\rho) = \rho\int_{\tilde{\rho}}^{\rho} \frac{P(s) - P(\tilde{\rho})}{s^2}ds, \tag{2.7}$$

chamada de *densidade de energia potencial*, possui a propriedade de que para qualquer $g \in C^2([0,\bar{\rho}])$ satisfazendo $g(\tilde{\rho}) = g'(\tilde{\rho}) = 0$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|g(\rho)| \leq CG(\rho), \quad \rho \in [0,\bar{\rho}].$$

Em particular, utilizaremos com bastante frequência a função g dada $g(\rho) = (\rho - \tilde{\rho})^2$.

As constantes de viscosidade satisfazem

$$\mu > 0 \quad \text{e} \quad 0 < \lambda < \frac{5\mu}{4}. \tag{2.8}$$

Como consequência de (2.8) temos que qualquer q em algum intervalo aberto contendo $[6/5, 6]$ satisfaz a condição

$$\frac{\mu}{\lambda} > \frac{(q-2)^2}{4(q-1)}. \tag{2.9}$$

Em particular, usaremos esta desigualdade para $q > 6$ (próximo de 6).

Supomos que a função K satisfaz

$$\begin{cases} K \in (W^{2,\infty} \cap W^{1,3})(\mathbb{R}^2) \\ K(x) \geq \underline{K} > 0 \end{cases}, \tag{2.10}$$

para uma determinada constante positiva $\underline{K}$.

Além disso, supomos que

$$\int_{\mathbb{R}^3_+} \left[\frac{1}{2}\rho_0|u_0|^2 + G(\rho_0)\right] dx \leq C_0 \tag{2.11}$$

e

$$\begin{aligned} \sup_{t\geq 0} ||f(.,t)||_{L^2} \; &+ \int_0^\infty (||f(.,t)||_{L^2} + \sigma^7||\nabla f(.,t)||^2_{L^4})dt \\ &+ \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3_+} (|f|^2 + \sigma^5|f_t|^2)dxdt \leq C_f, \end{aligned} \tag{2.12}$$

onde C_0 e C_f são constantes, que serão assumidas arbitrariamente pequenas, e $\sigma \equiv \sigma(t) = \min\{1, t\}$. Também definimos

$$M_q = \int_{\mathbb{R}^3_+} \rho_0|u_0|^q dx + \sup_{t\geq 0} ||f(.,t)||_{L^q} + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3_+} |f|^q dxdt, \tag{2.13}$$

onde q é um número que será fixado satisfazendo (2.9).

Definimos a matriz de vorticidade ω e a função F que chamaremos de *fluxo efetivo viscoso (effective viscous flow)* por

$$\omega^{j,k} = u^j_{x_k} - u^k_{x_j} \tag{2.14}$$

$$F = (\lambda + \mu)\operatorname{div} u - P(\rho) + P(\tilde{\rho}) \tag{2.15}$$

e a *derivada convectiva*, de uma função w definida em $\mathbb{R}^3_+$, por

$$\frac{dw}{dt} \equiv \dot{w} = w_t + \nabla w \cdot u;$$

cf. Definição 1.7.

Enunciaremos agora o resultado devido a D. Hoff, que garante a existência de solução fraca global para o problema (2.1)-(2.3).

Teorema 2.2. *Suponhamos que as hipóteses (2.6)-(2.10) sejam satisfeitas. Então dados um número positivo M (não necessariamente pequeno) e $\overline{\rho_1} \in (\tilde{\rho}, \bar{\rho})$, existem números positivos ε e C dependentes de $\tilde{\rho}, \overline{\rho_1}, \bar{\rho}, P, \lambda, \mu, q, M$ e K, e existe uma constante universal θ tal que se os dados iniciais (ρ_0, u_0) e a força externa f satisfazendo*

$$\begin{cases} 0 \leq \inf_{\mathbb{R}^3_+} \rho_0 \leq \sup_{\mathbb{R}^3_+} \rho_0 \leq \overline{\rho_1} \\ C_0 + C_f \leq \varepsilon \\ M_q \leq M, \end{cases} \tag{2.16}$$

onde C_0, C_f e M_q são como em (2.11)-(2.13), temos que o problema (2.1)-(2.3) tem uma solução fraca global (ρ, u) no sentido de (2.4)-(2.6) satisfazendo:

$$C^{-1} \inf_{\mathbb{R}^3_+} \rho_0 \leq \rho \leq \bar{\rho}, \quad q.t.p, \tag{2.17}$$

$$\begin{cases} \rho - \tilde{\rho} \in C([0,\infty); H^{-1}(\mathbb{R}^3_+)) \\ \rho u \in C([0,\infty); (\tilde{H}^1(\mathbb{R}^3_+))^*) \\ \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^3_+ \times [0,\infty)), \end{cases}$$

com $\rho = \rho_0$ e $\rho u = \rho_0 u_0$ em $t = 0$, onde $(\tilde{H}^1(\mathbb{R}^3_+))^*$ é o espaço dual de

$$\tilde{H}^1(\mathbb{R}^3_+) = \{\varphi \in (H^1(\mathbb{R}^3_+))^3; \quad \varphi.\nu = 0 \text{ em } \partial\mathbb{R}^3_+\}.$$

Mais ainda,

$$\langle u \rangle^{1/2,1/4}_{\mathbb{R}^3_+ \times [\tau,\infty)}, \langle F \rangle^{1/2,1/8}_{\mathbb{R}^3_+ \times [\tau,\infty)}, \langle \omega \rangle^{1/2,1/8}_{\mathbb{R}^3_+ \times [\tau,\infty)} \leq C(\tau)(C_0 + C_f)^\theta, \tag{2.18}$$

para todo $\tau > 0$,

$$u(x,t) = -K\omega.\nu, \quad \text{pontualmente para } x \in \partial\mathbb{R}^3_+, t > 0, \tag{2.19}$$

e satisfaz a estimativa

$$\begin{aligned} &\sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^3_+} \left[\frac{1}{2}\rho(x,t)|u(x,t)|^2 + |\rho(x,t) - \tilde{\rho}|^2 + \sigma(t)|\nabla u(x,t)|^2\right] dx \\ &+ \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3_+} \left[|\nabla u|^2 + \sigma(t) \sum_{j=1}^3 ((\rho u^j)_t + \operatorname{div}(\rho u^j u))^2 + \sigma^3(t)|\nabla \dot{u}|^2\right] dxdt \\ \leq\ & (C_0 + C_f)^\theta. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Por fim, no caso de termos $\inf_{\mathbb{R}^3_+} \rho_0 > 0$, o termo $\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma|\dot{u}|^2 dxdt$ pode ser incluído do lado esquerdo de (2.20).

Ver Teorema 1.1 em [15].

Observação 2.3. *A solução (ρ, u) obtida por D. Hoff em [15], é o limite quando $\delta \to 0^+$ de soluções suaves (ρ^δ, u^δ), utilizando a seguinte regularização dos dados iniciais*

$$\rho_0^\delta = j_\delta * \rho_0 + \delta \quad e \quad u_0^\delta = j_\delta * u_0,$$

onde j_δ é o regularizador padrão. Observamos que os dados iniciais regularizados desta maneira satisfazem (2.11) com uma constante C_0 uniforme em relação ao parâmetro δ e com um novo $\tilde{\rho}$, a saber, $\tilde{\rho}^\delta := \tilde{\rho} + \delta$.

Por solução suave (ρ, u) de (2.1)-(2.3) entenderemos uma solução com a regularidade apresentada na Proposição 2.4 abaixo e satisfazendo também $\rho(\cdot,t)-\tilde{\rho}$, $u(\cdot,t) \in H^\infty(\mathbb{R}^3_+)$, para todo $t>0$; cf. a demonstração dessa proposição em [15].

Proposição 2.4. *Assumindo que as hipóteses e condições do Teorema 2.2 sejam satisfeitas e $\rho_0 - \tilde{\rho}$, $u_0 \in H^\infty(\mathbb{R}^3_+)$ com $\rho_0(x) > 0$ para todo x e que $P \in C^\infty([0,\bar{\rho}])$ e $K \in H^\infty(\mathbb{R}^3_+)$, então existem $\rho \in C^1(\overline{\mathbb{R}^3_+} \times [0,\infty))$ e $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}^3_+} \times [0,\infty))$, satisfazendo (2.1)-(2.2) pontualmente. Além disso, a densidade ρ é uniformemente limitada em relação aos dados iniciais (ρ_0, u_0). Mais precisamente, ρ satisfaz a Proposição 2.5 abaixo.*

Ver Proposição 3.2 em [15].

Proposição 2.5. *Dados números $0 \le \underline{\rho_2} < \underline{\rho_1} < \tilde{\rho} < \overline{\rho_1} < \overline{\rho_2} < \bar{\rho}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, se (ρ,u) é uma solução suave de (2.1)-(2.3) com $(C_0 + C_f) \le \varepsilon$, $0 < \rho_0(x) \le \overline{\rho_1}$, e $0 < \rho(x,t) \le \bar{\rho}$ para $x \in \mathbb{R}^3_+$ e $t \in [0,T]$, então $0 < \rho(x,t) \le \overline{\rho_2}$ para $(x,t) \in \overline{\mathbb{R}^3_+} \times [0,T]$. Similarmente, se $\rho_0(x) \ge \underline{\rho_1}$ para todo x, então $\rho(x,t) \ge \underline{\rho_2}$ para todo $(x,t) \in \overline{\mathbb{R}^3_+} \times [0,T]$.*

Ver Proposição 3.1 em [15].

Mais ainda, a solução tomada como limite de soluções suaves do problema aproximado são tais que, para alguma subsequência $\delta_j \to 0$, é tal que

$$\rho^{\delta_j}(.,t) \longrightarrow \rho(.,t) \text{ fortemente em } L^2(K),$$

para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^3$, $t > 0$, e

$$u^{\delta_j} \longrightarrow u$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $\overline{\mathbb{R}^3_+} \times (0,\infty)$; v. §4, pág. 335-336 em [15].

2.2 Estimativas a Priori

Nesta seção estabeleceremos algumas estimativas, devidas a D. Hoff [15], para a solução suave (ρ^δ, u^δ) do sistema (2.1)-(2.3), através da regularização dos dados iniciais apresentada anteriormente. Tais estimativas independem das soluções, ou seja, serão independentes de δ. Aqui, apresentamos as demonstrações dessas estimativas com mais detalhes do que em [15]. Para simplificar a notação, omitiremos o índice δ das soluções e dados iniciais regularizados.

2.2.1 Estimativas de Energia

Começaremos estabelecendo as estimativas de energia para as soluções aproximadas.

Teorema 2.6. ***(Estimativas de Energia)***
Se (ρ,u) é uma solução suave para o problema (2.1)-(2.3) em $\mathbb{R}^3_+ \times [0,T]$, com $0 < \rho(x,t) \le \bar{\rho}$, então existe $C = C(\bar{\rho})$ tal que

$$\sup_{0\le t\le T} \int_{\mathbb{R}^3_+} \left[\frac{1}{2}\rho|u|^2 + G(\rho)\right] dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} |u|^2 dS_x dt \le C(\bar{\rho})(C_0 + C_f), \quad (2.21)$$

onde G é dada em (2.7). Além disso, existe uma constante $C = C(\bar{\rho}, T)$ tal que

$$\sup_{0\le t\le T}\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|u|^q dx + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}|u|^{q-2}|\nabla u|^2 dxdt + \int_0^T\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}|u|^q dS_x dt \le C(\bar{\rho}, T)(C_0 + C_f + M_q), \tag{2.22}$$

onde $q > 6$ fixado satisfaz (2.9).

Demonstração: Para mostrar a primeira estimativa, multiplicamos a equação de continuidade por $G'(\rho)$ e obtemos

$$(G(\rho))_t + \operatorname{div}(G(\rho)u) + (P - \tilde{P})\operatorname{div} u = 0.$$

Integrando em $[0, t] \times \mathbb{R}^3_+$, temos

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}(G(\rho))_s dxds + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\operatorname{div}(G(\rho)u)dxds + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}(P - \tilde{P})\operatorname{div} u dxds = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}^3_+}G(\rho)dx\Big|_0^t - \int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}G(\rho)u.\nu dS_x ds + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}(P - \tilde{P})\operatorname{div} u dxds = 0,$$

onde $\nu = (0, 0, -1)$ é o vetor normal unitário à $\partial\mathbb{R}^3_+$. Como $u.\nu = 0$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^3_+}G(\rho)dx\Big|_0^t + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}(P - \tilde{P})\operatorname{div} u dxds = 0. \tag{2.23}$$

Multiplicando a equação do momento por u^j e somando em j, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}(\rho u^j)_t u^j dxds &+ \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\operatorname{div}(\rho u^j u)u^j dxds + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}P_j u^j dxds \\
&= \mu\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\Delta u^j u^j dxds + \lambda\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}(\operatorname{div} u)_j u^j dxds \\
&= \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho u^j f^j dxds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|u|^2 dx &- \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho_0|u_0|^2 dx + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho(u.\nabla u^j)u^j dxds \\
&- \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}(P - \tilde{P})\operatorname{div} u dxds + \int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}(P - \tilde{P})u.\nu dS_x ds \\
&= -\mu\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^2 dxds + \mu\int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}(u^j.\nabla u^j).\nu dS_x ds \\
&-\lambda\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}(\operatorname{div} u)^2 dxds + \lambda\int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}(\operatorname{div} u)u.\nu dS_x ds \\
&+ \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho u^j f^j dxds.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Somando (2.23) e (2.24), temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|u|^2dx+\int_{\mathbb{R}^3_+}G(\rho)dx &+ \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho u^j_t u^j dxds\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho(u.\nabla u^j)u^j dxds\\
&+\mu\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^2dxds+\lambda\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}(\operatorname{div}u)^2dxds\\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho_0|u_0|^2dx+\int_{\mathbb{R}^3_+}G(\rho_0)dx\\
&+\mu\int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}(u^j.\nabla u^j).\nu dS_xds+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho u^j f^j dxds.
\end{aligned}$$

Como $K^{-1}(u^1,u^2,u^3)=(u^1_{x_3},u^2_{x_3},0)$ em $\partial\mathbb{R}^3_+$, segue que

$$\mu\int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}u^j\nabla u^j\nu dS_xds=-\mu\int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}K^{-1}|u|^2dS_xds.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3_+}\left(\frac{1}{2}\rho|u|^2+G(\rho)\right)dx &+ \mu\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^2dxds+\lambda\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}(\operatorname{div}u)^2dxds\\
&+\mu\int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}K^{-1}|u|^2dS_xds\\
&+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho u^j_t u^j dxds+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho(u.\nabla u^j)u^j dxds\\
&\leq (C_0+C_f).
\end{aligned}$$

Pelo Teorema do Transporte, escrevemos

$$\begin{aligned}
\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho u^j_t u^j dxds+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho(u.\nabla u^j)u^j dxds &= \frac{1}{2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho\frac{D}{Dt}(|u|^2)dxds\\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|u|^2dx\Big|_0^t\\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|u|^2dx-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho_0|u_0|^2dx.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\sup_{0\leq t\leq T}\int\left(\frac{1}{2}\rho|u|^2+G(\rho)\right)dx+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^2dxds+\int_0^T\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}|u|^2dS_xds\leq C(C_0+C_f).$$

Para a segunda estimativa de energia, o procedimento é análogo à segunda parte da estimativa anterior. Multiplicando a equação do momento por $q|u|^{q-2}u^j$, temos

$$\begin{aligned} q\rho u_t^j u^j |u|^{q-2} + q\rho u \nabla u^j |u|^{q-2} u^j + qP_j |u|^{q-2} u^j &= q\mu \Delta u^j |u|^{q-2} u^j \\ &\quad + q\lambda(\operatorname{div} u_{x_j})|u|^{q-2}u^j + q\rho |u|^{q-2} u^j f^j \end{aligned}$$

$$\rho\left(|u|^q\right)_t + \rho u.\nabla\left(|u|^q\right) + qP_{x_j}|u|^{q-2}u^j = q\mu\Delta u^j |u|^{q-2}u^j + q\lambda(\operatorname{div} u_{x_j})|u|^{q-2}u^j + q\rho|u|^{q-2}u^j f^j.$$

$$\begin{aligned} \rho\left(|u|^q\right)_t + \rho u.\nabla\left(|u|^q\right) &+ q|u|^{q-2}u.\nabla P + q\mu|u|^{q-2}|\nabla u|^2 + \lambda q|u|^{q-2}(\operatorname{div} u)^2 \\ &= q|u|^{q-2}\left[\frac{1}{2}\mu\Delta(|u|^2) + \lambda \operatorname{div}((\operatorname{div} u)u) + \rho u^j f^j\right]. \end{aligned}$$

Integrando em $[0,t]\times\mathbb{R}^3_+$ e integrando por partes vem que

$$\begin{aligned} q\int \rho|u|^q dx\Big|_0^t &- \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+} \rho_t |u|^q dxds - \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+} \operatorname{div}(\rho u)|u|^q dxds \\ &-q\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}(P-\tilde{P})\operatorname{div}(|u|^{q-2}u)dxds + \int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+} q|u|^{q-2}(P-\tilde{P})u.\nu dS_x ds \\ &+\lambda\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+} q|u|^{q-2}(\operatorname{div} u)^2 dxds + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+} q\mu|u|^{q-2}|\nabla u|^2 dxds \\ = &-\frac{q}{2}\lambda\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\nabla(|u|^{q-2})u \operatorname{div} u dxds + q\lambda\int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}|u|^{q-2}(\operatorname{div} u)u.\nu dS_x ds \\ &-\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\mu(q-2)|\nabla|u||^2 dxds + \int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}\frac{q}{2}\mu|u|^{q-2}(\nabla|u|^2).\nu dS_x ds \\ &+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+} q|u|^{q-2}\rho u^j f^j dxds. \end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mu q|u|^{q-2}(\nabla|u|^2).\nu &= -\frac{1}{2}\mu q|u|^{q-2}(2u^1_{x_3}u^1 + 2u^2_{x_3}u^2) \\ &= -\mu q|u|^{q-2}K^{-1}|u|^2 \\ &= -q\mu K^{-1}|u|^q \leq 0, \text{ em } \partial\mathbb{R}^3_+. \end{aligned}$$

Uma vez que $|\nabla|u|| = \left|\frac{u.\nabla u}{|u|}\right| \leq |\nabla u|$, tem-se

$$
\begin{aligned}
q|u|^{q-2}\Big[\mu|\nabla u|^2 &+ \lambda(\operatorname{div} u)^2 + \mu(q-2)|\nabla|u||^2\Big] + q\lambda(\nabla|u|^{q-2})u \operatorname{div} u \\
&\geq q|u|^{q-2}\left[\mu|\nabla u|^2 + \lambda(\operatorname{div} u)^2 + \mu(q-2)|\nabla|u||^2 - \lambda(q-2)|\nabla|u||\,|\operatorname{div} u|\right] \\
&= q|u|^{q-2}\left[\mu|\nabla u|^2 + \lambda\left(\operatorname{div} u - \frac{1}{2}(q-2)|\nabla|u||\right)^2\right] \\
&\quad + q|u|^{q-2}\left[\mu(q-2) - \frac{1}{4}\lambda(q-2)^2\right]|\nabla|u||^2 \\
&\geq q|u|^{q-2}\left[\mu(q-1) - \frac{1}{4}\lambda(q-2)^2\right]|\nabla|u||^2 \\
&\geq C|u|^{q-2}|\nabla|u||^2,
\end{aligned}
$$

já que $\mu(q-1) - \frac{\lambda}{4}(q-2)^2 \geq c_0 > 0$ por (2.9).

Na desigualdade acima utilizamos também

$$
\begin{aligned}
q\lambda(\nabla|u|^{q-2})u \operatorname{div} u &\geq -q\lambda\left|\nabla|u|^{q-2}u \operatorname{div} u\right| \\
&= -q\lambda\left|\nabla|u|^{q-2}u\right|\,|\operatorname{div} u| \\
&= -q\lambda\left|(q-2)|u|^{q-4}u.\nabla|u|u\right|\,|\operatorname{div} u| \\
&\geq -q(q-2)\lambda|u|^{q-2}|\nabla|u||\,|\operatorname{div} u|.
\end{aligned}
$$

Observando também que

$$
\begin{aligned}
\left|\operatorname{div}(|u|^{q-2}u)\right| &= \left|\nabla|u|^{q-2}.u + |u|^{q-2}\operatorname{div} u\right| \\
&\leq \left|(q-2)|u|^{q-4}(u.\nabla|u|)u\right| + |u|^{q-2}|\nabla u| \\
&\leq C|u|^{q-2}|\nabla u| + |u|^{q-2}|\nabla u| \\
&\leq C|u|^{q-2}|\nabla u|.
\end{aligned}
$$

temos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|u|^q dx\Big|_0^t &+ \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}|u|^{q-2}|\nabla u|^2 dxds + \int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}|u|^q dS_x ds \\
&\leq C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\left[q\operatorname{div}(|u|^{q-2}u)(P-\tilde{P}) + q|u|^{q-2}\rho u^j f^j\right]dxds \\
&\leq C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}|u|^{q-2}(|\nabla u||\rho-\tilde{\rho}|)dxds + C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|u|^{q-1}|f|dxds \\
&\leq \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\left(\frac{1}{2}|u|^{q-2}|\nabla u|^2 + C|u|^{q-2}|\rho-\tilde{\rho}| + C\rho|u|^q + C|f|^q\right)dxds \\
&\leq \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\left(\frac{1}{2}|u|^{q-2}|\nabla u|^2 + C|u|^q + C|\rho-\tilde{\rho}|^2 + C\rho|u|^q + C|f|^q\right)dxds \\
&\leq C(C_0 + C_f + M_q) + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|u|^q dxds.
\end{aligned}
$$

Pelo Lema de Gronwall, concluímos que

$$\sup_{0\le t\le T}\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|u|^q dx+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}|u|^{q-2}|\nabla u|^2 dxds+\int_0^T\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}|u|^q dS_x ds\le C(C_0+C_f+M_q)$$

que completa a estimativa. ∎

2.2.2 Estimativas com Peso

Nesta seção estabeleceremos estimativas para os termos $A_1(T)$ e $A_2(T)$ definidos por

$$A_1(T)=\sup_{0\le t\le T}\sigma(t)\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^2dx+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma(t)\rho|\dot u|^2dxdt$$

e

$$A_2(T)=\sup_{0\le t\le T}\sigma^3(t)\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|\dot u|^2dx+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^3(t)|\nabla\dot u|^2dxdt,$$

para $T>0$ qualquer. Mais precisamente, o objetivo desta subseção é demonstrar a estimativa

$$(A_1+A_2)(T)\le 2C(C_0+C_f)^\theta, \tag{2.25}$$

(para constantes C e θ).

Em um primeiro momento tais termos serão estimados em função de alguns fatores que dependem das soluções. Posteriormente fecharemos tais estimativas.

Lema 2.7. *Seja (ρ,u) uma solução suave para (2.1)-(2.3). Então existe uma constante $C=C(\bar\rho)$ tal que*

$$\begin{aligned}A_1(T)\ &\le\ C(\bar\rho)\Big[C_0+C_f+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma(t)(|u|^2|\nabla u|+|u||\nabla u|^2)dxdt\\&\quad+\sum_{j_l,k_m=1}^{3}\left|\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma(t)u^{j_1}_{x_{k_1}}u^{j_2}_{x_{k_2}}u^{j_3}_{x_{k_3}}dxdt\right|\Big].\end{aligned}$$

Demonstração: Para simplificar a notação, escreveremos u^j_i para representar a derivada com relação à variável x_i da j-ésima coordenada da função vetorial u, ou seja, $u^j_{x_i}\equiv u^j_i$ e $D=\operatorname{div}u$. Multiplicamos a equação do momento por $\sigma\dot u^j$ e obtemos

$$\sigma\rho|\dot u|^2+\sigma\dot u^j(P(\rho))_j=\sigma\mu\Delta u^j\dot u^j+\lambda\sigma\dot u^j\operatorname{div}u_j+\sigma\dot u^j\rho f^j.$$

Integrando por partes em $[0,t]\times\mathbb{R}^3_+$,

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma\rho|\dot u|^2dxds\ &=\ -\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma\dot u^j(P(\rho))_jdxds+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma\mu\Delta u^j\dot u^jdxds\\&\quad+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma\dot u^j\operatorname{div}u_jdxds+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma\rho\dot u^jf^jdxds\\&\equiv\ I_1+I_2+I_3+I_4.\end{aligned}$$

Podemos estimar cada uma das parcelas separadamente da seguinte forma

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma \dot{u}^j P_j dxds \\
&= -\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma (u^j_t + u.\nabla u^j) P_j dxds \\
&= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma u^j_{jt} (P - \tilde{P}) dxds - \int_0^t \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \sigma (P - \tilde{P}) u^j_t . \nu^j dS_x ds - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma u^k u^j_k P_j dxds \\
&= \sigma \int_{\mathbb{R}^3_+} D(P - \tilde{P}) dx - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma_t D(P - \tilde{P}) dxds - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma P'(\rho)(\rho_t u^j_j + u^k u^j_k \rho_j) dxds \\
&= \sigma \int_{\mathbb{R}^3_+} D(P - \tilde{P}) dx - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma_t D(P - \tilde{P}) dxds \\
&\quad - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma P'(\rho)(-\rho D^2 - u^k \rho_k D + u^k u^j_k \rho_j) dxds \\
&= \sigma \int_{\mathbb{R}^3_+} D(P - \tilde{P}) dx - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma_t D(P - \tilde{P}) dxds \\
&\quad - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma \left\{ [P(u^j_k u^k - u^j D)]_j + P((D)^2 - u^j_k u^k_j) - \rho P'(D)^2 \right\} dxds \\
&\leq C\sigma \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u||\rho - \tilde{\rho}| dx + C \int_0^{1\wedge t} \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u||\rho - \tilde{\rho}| dxds \\
&\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma |\nabla u|^2 dxds + \int_0^t \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \sigma \left\{ P(u^j_k u^k - u^j D) \right\} \nu^j dS_x ds \\
&= C\sigma \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u||\rho - \tilde{\rho}| dx + C \int_0^{1\wedge t} \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u||\rho - \tilde{\rho}| dxds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma |\nabla u|^2 dxds,
\end{aligned}$$

uma vez que

$$\int_0^t \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \sigma \left\{ P(u^j_k u^k - u^j D) \right\} \nu^j dS_x ds = -\int_0^t \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \sigma \left\{ P(u^3_k u^k - u^3 u^k_k) \right\} dS_x ds = 0,$$

visto que $u^3 = 0$ em $\partial\mathbb{R}^3_+$ e que para $k = 1$ ou 2, então $u^3_k = 0$ em $\partial\mathbb{R}^3_+$;

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \lambda \sigma \dot{u}^j \operatorname{div} u_j dxds \\
&= \lambda \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma (u^j_t + u^k u^j_k) D_j dxds.
\end{aligned}$$

Continuando com a estimativa de I_3,

$$
\begin{aligned}
I_3 &= -\lambda\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma D_t D dxds + \lambda\int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}\sigma D u^j_t.\nu^j dS_x ds\\
&\quad -\lambda\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma D(u^k_j u^j_k + u^k u^j_{jk})dxds + \lambda\int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}\sigma D(u^k u^j_k)\nu^j dS_x ds\\
&= -\lambda\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\frac{\sigma}{2}(|D|^2)_t dxds - \lambda\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma D(u^k_j u^j_k + u^k u^j_{jk})dxds\\
&= -\frac{\lambda}{2}\sigma\int_{\mathbb{R}^3_+}|D|^2dx + \frac{\lambda}{2}\int_0^{1\wedge t}\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma'|D|^2dxds\\
&\quad -\lambda\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma u^k_j u^j_k u^k_k dxds - \frac{\lambda}{2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}u^k(D^2)_k dxds.
\end{aligned}
$$

Observemos que

$$
\begin{aligned}
-\frac{\lambda}{2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}u^k(D^2)_k dxds &= \frac{\lambda}{2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}D^3dxds - \frac{\lambda}{2}\int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}(D^2)u^k\nu^k dS_x ds\\
&= \frac{\lambda}{2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}D^3dxds.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
I_3 = \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\lambda\sigma\dot{u}^j\,\mathrm{div}\,u_j dxds = -\frac{\lambda}{2}\sigma\int_{\mathbb{R}^3_+}|D|^2dx + \frac{\lambda}{2}\int_0^{1\wedge t}\int_{\mathbb{R}^3_+}|D|^2dxds + O_3,
$$

onde O_3 é soma de termos limitados por termos da forma $\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma|\nabla u|^3dxds$.

Na segunda parcela I_2, os termos de fronteira não se anulam como nos termos anteriores. De fato, temos

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma\mu\Delta u^j\dot{u}^j dxds\\
&= \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma(u^j_t + u^k u^j_k)u^j_{ll}dxds\\
&= \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma\mu u^j_t u^j_{ll}dxds + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma\mu u^k u^j_k u^j_{ll}dxds\\
&= -\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma\mu u^j_{lt}u^j_l dxds + \int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}\sigma\mu u^j_t u^j_l\nu^l dS_x ds\\
&\quad -\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma\mu u^k_l u^j_k u^j_l dxds - \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma\mu u^k u^j_{kl}u^j_l dxds + \int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}\sigma\mu u^k u^j_k u^j_l\nu^l dS_x ds.
\end{aligned}
$$

Prosseguindo com a estimativa de I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 &= -\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma\frac{\mu}{2}[(u_l^j)^2]_t dxds+\int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}\sigma\mu u_t^j u_l^j\nu^l dS_x ds-\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma\mu u_l^k u_k^j u_l^j dxds\\ &\quad -\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma\frac{\mu}{2}u^k[(u_l^j)^2]_k dxds+\int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}\sigma\mu u^k u_k^j u_l^j\nu^l dS_x ds\\ &= -\frac{\sigma\mu}{2}\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^2dx+\int_0^{1\wedge t}\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma'\frac{\mu}{2}|\nabla u|^2dxds+\int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}\sigma\mu u_t^j u_l^j\nu^l dS_x ds\\ &\quad -\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma\mu u_l^k u_k^j u_l^j dxds+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma\frac{\mu}{2}D|\nabla u|^2dxds+\int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}\sigma\mu u^k u_k^j u_l^j\nu^l dS_x ds. \end{aligned}$$

Os termos de fronteira são dados por

$$\begin{aligned} \int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}\sigma\mu u_t^j u_l^j\nu^l dS_x ds &+ \int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}\sigma\mu u^k u_k^j u_l^j\nu^l dS_x ds\\ &= \int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}\sigma\mu(u_t^j+u^k u_k^j)u_l^j\nu^l dS_x ds\\ &= \int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}\sigma\mu\dot{u}^j u_l^j\nu^l dS_x ds, \end{aligned}$$

Vamos estimar estes termos. Como $\nu^l=-\delta_{l3}$ e $u_3^j=K^{-1}u^j$ em $\partial\mathbb{R}^3_+$ (condição de contorno (2.2)), pela limitação de K^{-1} e estimativa (2.21), temos

$$\begin{aligned} \int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}\sigma\mu\dot{u}^j u_k^j\nu^k dS_x ds &= -\mu\int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}\sigma u_3^j\dot{u}^j dS_x ds\\ &= -\mu\int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}\sigma u_3^j(u_t^j+u^k u_k^j)dS_x ds\\ &= -\mu\int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}\sigma K^{-1}u^j(u_t^j+u^k u_k^j)dS_x ds\\ &= -\frac{\mu}{2}\sigma\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}K^{-1}|u|^2dS_x+\frac{\mu}{2}\int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}\sigma' K^{-1}|u|^2dS_x ds\\ &\quad -\mu\int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}\sigma K^{-1}u^j u^k u_k^j dS_x ds\\ &\le C(C_0+C_f)-\mu\int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}\sigma K^{-1}u^j u^k u_k^j dS_x ds. \end{aligned}$$

Para completar a estimativa deste termo utilizaremos que para $h\in(C^1\cap W^{1,1})(\overline{\mathbb{R}^3_+})$, vale a seguinte igualdade

$$\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}h(x)dS_x=\int_{\overline{\mathbb{R}^3_+}\cap\{0\le x_3\le 1\}}[h(x)+(x_3-1)h_{x_3}(x)]dx. \tag{2.26}$$

Sabendo que $u^3 = u^3_1 = u^3_2 = 0$ em $\partial\mathbb{R}^3_+$, podemos considerar somente $j, k \in \{1, 2\}$. Assim,

$$\begin{aligned}
&-\mu \int_0^t \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \sigma K^{-1} u^j u^k u^j_k dS_x ds \\
= \;& -\mu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^1 \sigma K^{-1} u^j u^k u^j_k dx_3 d\bar{x} ds \\
& -\mu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^1 \sigma (K^{-1} u^j u^k u^j_k)_3 (x_3 - 1) dx_3 d\bar{x} ds \\
= \;& -\mu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^1 \sigma K^{-1} u^j u^k u^j_k dx_3 d\bar{x} ds \\
& +\mu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^1 \sigma (1 - x_3)(K^{-1})_k u^j u^k u^j_k dx_3 d\bar{x} ds \\
& +\mu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^1 \sigma (1 - x_3) K^{-1} [u^j_3 u^k u^j_k + u^j u^k_3 u^j_k + u^j u^k u^j_{3k}] dx_3 d\bar{x} ds \\
= \;& -\mu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^1 \sigma K^{-1} u^j u^k u^j_k dx_3 d\bar{x} ds \\
& +\mu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^1 \sigma (1 - x_3)(K^{-1})_k u^j u^k u^j_k dx_3 d\bar{x} ds \\
& +\mu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^1 \sigma (1 - x_3) K^{-1} \left(u^j_3 u^k u^j_k + u^j u^k_3 u^j_k \right) dx_3 d\bar{x} ds \\
& -\mu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^1 \sigma (1 - x_3) \left(K^{-1} u^j_k u^k u^j_3 + \alpha u^j u^k_k u^j_3 \right) dx_3 d\bar{x} ds \\
\leq \;& C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma (|u|^2 |\nabla u| + |u| |\nabla u|^2) dx ds.
\end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma \rho \dot{u}^j f^j dx ds \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma \rho |\dot{u}|^2 dx ds + C(C_0 + C_f).
\end{aligned}$$

Desta forma, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma \rho |\dot{u}|^2 dx ds &= -\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma \dot{u}^j P_j dx ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma \mu \Delta u^j \dot{u}^j dx ds \\
&\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma \dot{u}^j D_j dx ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma \rho \dot{u}^j f^j dx ds,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma\rho|\dot{u}|^2dxds &\leq \sigma\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u||\rho-\tilde{\rho}|dx + C\int_0^{1\wedge t}\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u||\rho-\tilde{\rho}|dxds + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma|\nabla u|^2dxds\\ &\quad -\frac{\lambda}{2}\sigma\int_{\mathbb{R}^3_+}|D|^2dx + \frac{\lambda}{2}\int_0^{1\wedge t}\int_{\mathbb{R}^3_+}|D|^2dxds - \frac{\sigma\mu}{2}\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^2dx\\ &\quad -\int_0^{1\wedge t}\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma'\frac{\mu}{2}|\nabla u|^2dxds + O_3 + EA + (C_0+C_f).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\sup_{0\leq t\leq T}\sigma\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^2dx &+ \int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma\rho|\dot{u}|^2dxds\\ &\leq \sigma\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u||\rho-\tilde{\rho}|dx + C(C_0+C_f) + O_3\\ &\quad +C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma(|u|^2|\nabla u| + |u||\nabla u|^2)dxds\\ &\leq \frac{\sigma}{2}\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^2dx + \int_{\mathbb{R}^3_+}|\rho-\tilde{\rho}|^2dx + C(C_0+C_f) + O_3\\ &\quad +C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma(|u|^2|\nabla u| + |u||\nabla u|^2)dxds\\ &\leq C(C_0+C_f) + CO_3 + C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma(|u|^2|\nabla u| + |u||\nabla u|^2)dxds\end{aligned}$$

e obtemos a estimativa desejada. ∎

Lema 2.8. *Existe uma $C = C(\bar{\rho})$ tal que*

$$\begin{aligned}A_2(T) &\leq C(C_0 + C_f + A_1(T))\\ &\quad +C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^3[|u|^4 + |\nabla u|^4 + |\dot{u}||\nabla u||u| + |\dot{u}||\nabla u|^2]dxds.\end{aligned}$$

Demonstração: Para simplificar a notação, continuaremos utilizando $D = \operatorname{div} u$. Aplicando o operador $\partial_t(.) + \operatorname{div}(u.)$ na equação do momento, chegamos a

$$\rho\frac{D}{Dt}\dot{u}^j + P_{jt} + \operatorname{div}(P_j u) = \mu\Delta u^j_t + \mu\operatorname{div}(\Delta u^j u) + \lambda D_{jt} + \lambda\operatorname{div}(uD_j) + \rho f^j_t + \rho u\nabla f^j.$$

Multiplicando esta igualdade por $\sigma^3\dot{u}^j$ e integrando em $[0,t]\times\mathbb{R}^3_+$, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^3\rho\dot{u}^j\frac{D}{Dt}\dot{u}^j dxds &= -\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^3[\dot{u}^j P_{jt}+\dot{u}^j\operatorname{div}(P_j u)]dxds\\
&\quad +\mu\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^3[\dot{u}^j\Delta u^j_t+\dot{u}^j\operatorname{div}(\Delta u^j u)]dxds\\
&\quad +\lambda\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^3[\dot{u}^j D_{jt}+\dot{u}^j\operatorname{div}(uD_j)]dxds\\
&\quad +\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^3\rho\dot{u}^j\frac{D}{Dt}f^j dxds\\
&\equiv J_1+J_2+J_3+J_4.
\end{aligned}$$

Vamos trabalhar cada termo separadamente. Pelo Teorema do Transporte, segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^3\dot{u}^j\rho\frac{D}{Dt}\dot{u}^j dxds &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^3\rho|\dot{u}|^2dx-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}3\sigma^2\sigma'\rho|\dot{u}|^2dxds\\
&= \frac{1}{2}\sigma^3\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|\dot{u}|^2dx-\frac{3}{2}\int_0^{1\wedge t}\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^2\rho|\dot{u}|^2dxds.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_1 &= -\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^3\dot{u}^j((P_{jt}+\operatorname{div}(P_j u)))dxds\\
&= \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^3\dot{u}^j_j P_t dxds-\int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}\sigma^3\dot{u}^j P_t\nu^j dS_x ds\\
&\quad +\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^3 P_j u^k\dot{u}^j_k dxds-\int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}\sigma^3\dot{u}^j P_j u.\nu dS_x ds\\
&= \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^3\dot{u}^j_j P'(\rho)\rho_t dxds+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^3 P'(\rho)\rho_j u^k\dot{u}^j_k dxds\\
&= \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^3\dot{u}^j_j P'(\rho)(-\rho\operatorname{div}u-\nabla\rho.u)dxds+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^3 P'(\rho)\rho_j u^k\dot{u}^j_k dxds\\
&= \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^3 P'(\rho)\left(\rho_j u^k\dot{u}^j_k-\rho\dot{u}^j_j u^k_k-\dot{u}^j_j u^k\rho_k\right)dxds\\
&= \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^3[P_j u^k\dot{u}^j_k-P'(\rho)\rho\dot{u}^j_j u^k_k-P_k\dot{u}^j_j u^k]dxds.
\end{aligned}$$

Dando continuidade à estimativa do termos J_1, temos

$$
\begin{aligned}
J_1 &= -\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 (P-\tilde{P})(u^k_j \dot{u}^j_k + u^k \dot{u}^j_{kj}) dxds + \int_0^t \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 (P-\tilde{P}) u^k \dot{u}^j_k \nu^j dS_x ds \\
&\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 (P-\tilde{P})(\dot{u}^j_{jk} u^k + \dot{u}^j_j u^k_k) dxds - \int_0^t \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 (P-\tilde{P}) \dot{u}^j_j u^k \nu^k dS_x ds \\
&\quad - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 P'(\rho)\rho \dot{u}^j_j u^k_k dxds \\
&= -\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 (P-\tilde{P})(u^k_j \dot{u}^j_k - \dot{u}^j_j u^k_k) dxds - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 P'(\rho)\rho \dot{u}^j_j u^k_k dxds \\
&\leq C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 |\nabla u|^2 dxds + \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 |\nabla \dot{u}|^2 dxds \\
&\leq C(C_0 + C_f) + \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 |\nabla \dot{u}|^2 dxds.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_2 &= \mu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 [\dot{u}^j \Delta u^j_t + \dot{u}^j \operatorname{div}(\Delta u^j u)] dxds \\
&= \mu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 [\dot{u}^j u^j_{llt} + \dot{u}(u^j_{ll} u^k)_k] dxds \\
&= -\mu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 \dot{u}^j_l u^j_{lt} dxds + \mu \int_0^t \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 \dot{u}^j u^j_{lt} \nu^l dS_x ds \\
&\quad -\mu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 \dot{u}^j_k u^j_{ll} u^k dxds \\
&= -\mu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 |\nabla \dot{u}|^2 dxds + \mu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 \dot{u}^j_l (u^k u^j_k)_l dxds \\
&\quad -\mu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 \dot{u}^j_k u^j_{ll} u^k dxds + \mu \int_0^t \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 \dot{u}^j u^j_{lt} \nu^l dS_x ds \\
&= -\mu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 |\nabla \dot{u}|^2 dxds + \mu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 \dot{u}^j_l u^k_l u^j_k dxds \\
&\quad +\mu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 \dot{u}^j_l u^k u^j_{kl} dxds - \mu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 \dot{u}^j_k u^j_{ll} u^k dxds \\
&\quad +\mu \int_0^t \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 \dot{u}^j u^j_{lt} \nu^l dS_x ds.
\end{aligned}
$$

Vamos trabalhar separadamente com os termos em que aparece derivada de segunda ordem.

Desta forma,

$$\begin{aligned}
\mu\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^3\dot{u}^j_l u^k u^j_{kl}dxds &- \mu\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^3\dot{u}^j_k u^j_{ll}u^k dxds \\
&= -\mu\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^3(\dot{u}^j_{kl}u^k u^j_l + \dot{u}^j_l u^k_k u^j_l)dxds \\
&\quad +\mu\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^3(\dot{u}^j_{kl}u^j_l u^k + \dot{u}^j_k u^j_l u^k_l)dxds \\
&\quad -\mu\int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}\sigma^3\dot{u}^j_k u^j_l u^k\nu^l dS_x ds \\
&= -\mu\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^3(\dot{u}^j_l u^k_k u^j_l - \dot{u}^j_k u^j_l u^k_l)dxds \\
&\quad -\mu\int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}\sigma^3\dot{u}^j_k u^j_l u^k\nu^l dS_x ds.
\end{aligned}$$

Notemos que os termos com derivada de segunda ordem se anulam. Logo, temos

$$J_2 \;\leq\; -\frac{\mu}{2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^3|\nabla\dot{u}|^2dxds + C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^3|\nabla u|^4dxds + TF,$$

onde TF são os termos de fronteira dados por

$$TF = \mu\int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}\sigma^3\dot{u}^j u^j_{lt}\nu^l dS_x ds - \mu\int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}\sigma^3\dot{u}^j_k u^j_l u^k\nu^l dS_x ds.$$

Trabalharemos separadamente agora com os termos de fronteira. Para o termo de fronteira abaixo podemos nos preocupar somente com $k = 1,2$, pois $u^3 = 0$ em $\partial\mathbb{R}^3_+$. Como $k = 1,2$ também poderemos nos preocupar somente com $j = 1,2$, uma vez que $\dot{u}^3_1 = \dot{u}^3_2 = 0$ em $\partial\mathbb{R}^3_+$. Sendo assim,

$$\begin{aligned}
&\mu\int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}\sigma^3\dot{u}^j_k u^j_3 u^k dS_x ds \\
=\;& \mu\int_0^t\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}\sigma^3K^{-1}\dot{u}^j_k u^j u^k dS_x ds \\
=\;& \mu\int_0^t\int_{\{0\leq x_3\leq 1\}}\sigma^3K^{-1}\dot{u}^j_k u^j u^k dxds \\
&+\mu\int_0^t\int_{\{0\leq x_3\leq 1\}}(x_3-1)\sigma^3K^{-1}(\dot{u}^j_{k3}u^j u^k + \dot{u}^j_k u^j_3 u^k + \dot{u}^j_k u^j u^k_3)dxds
\end{aligned}$$

Seguindo com a estimativa, vem

$$
\begin{aligned}
& \mu \int_0^t \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 \dot{u}^j_k u^j_3 u^k dS_x ds \\
= \ & \mu \int_0^t \int_{\{0\leq x_3\leq 1\}} \sigma^3 K^{-1} \dot{u}^j_k u^j u^k dx ds \\
& + \mu \int_0^t \int_{\{0\leq x_3\leq 1\}} (x_3-1) K^{-1} (\dot{u}^j_k u^j_3 u^k + \dot{u}^j_k u^j u^k_3) dx ds \\
& - \mu \int_0^t \int_{\{0\leq x_3\leq 1\}} \sigma^3 (x_3-1) K^{-1} (\dot{u}^j_3 u^j_k u^k + \dot{u}^j_3 u^j u^k_k) dx ds \\
& - \mu \int_0^t \int_{\{0\leq x_3\leq 1\}} \sigma^3 (x_3-1) (K^{-1})_k \dot{u}^j_3 u^j u^k dx ds \\
\leq \ & C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 (|\nabla \dot{u}||u|^2 + |\nabla \dot{u}||\nabla u||u|) dx ds.
\end{aligned}
$$

O termo de fronteira restante pode ser estimado da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
& -\mu \int_0^t \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 \dot{u}^k u^k_{3t} dS_x ds \\
= \ & -\mu \int_0^t \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 K^{-1} u^k_t \dot{u}^k dS_x ds \\
= \ & -\mu \int_0^t \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 K^{-1} |\dot{u}|^2 dS_x ds + \mu \int_0^t \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 K^{-1} \dot{u}^k u^j u^k_j dS_x ds \\
\leq \ & \mu \int_0^t \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 K^{-1} \dot{u}^k u^j u^k_j dS_x ds \\
= \ & \mu \int_0^t \int_{\{0\leq x_3\leq 1\}} \sigma^3 K^{-1} [\dot{u}^k u^j u^k_j + (x_3-1)\{\dot{u}^k_3 u^j u^k_j + \dot{u}^k u^j_3 u^k_j + \dot{u}^k u^j u^k_{j3}\}] dx ds \\
\leq \ & \mu C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 [|u||\nabla u||\dot{u}| + |u||\nabla u||\nabla \dot{u}| + |\dot{u}||\nabla u|^2] dx ds \\
& + \mu \int_0^t \int_{\{0\leq x_3\leq 1\}} \sigma^3 K^{-1} (x_3-1) \dot{u}^k u^j u^k_{j3} dx ds.
\end{aligned}
$$

Vamos estimar o segundo termo desta última expressão somente para $j \neq 3$, pois para $j = 3$ o termo é igual a zero

$$
\begin{aligned}
& \mu \int_0^t \int_{\{0\le x_3\le 1\}} \sigma^3 K^{-1}(x_3-1)\dot{u}^k u^j_{k3} u^k dxds \\
= \; & \mu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^1 \sigma^3 K^{-1}(x_3-1)\dot{u}^k u^j u^k_{3j} dx_3 d\bar{x} ds \\
= \; & -\mu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^1 \sigma^3 K^{-1}(x_3-1)(\dot{u}^k_j u^j u^k_3 + \dot{u}^k u^j_j u^k_3) dx_3 d\bar{x} ds \\
& -\mu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^1 \sigma^3 (K^{-1})_j (x_3-1)\dot{u}^k u^j u^k_3 dx_3 d\bar{x} ds \\
\le \; & C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma(|\dot{u}||\nabla u||u| + |\nabla \dot{u}||\nabla u||u| + |\dot{u}||\nabla u|^2) dxds.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
TF \le C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3(|u||\nabla u||\nabla \dot{u}| + |u||\nabla u||\dot{u}| + |\dot{u}||\nabla u|^2 + |\nabla \dot{u}||u|^2) dxds
$$

Mais ainda,

$$
\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 |u||\nabla u||\nabla \dot{u}| dxds \le C(\varepsilon) \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 (|u|^4 + |\nabla u|^4) dxds \right) + \epsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 |\nabla \dot{u}|^2 dxds
$$

e

$$
\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 |\nabla \dot{u}||u|^2 dxds \le \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 |\nabla \dot{u}|^2 dxds + C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 |u|^4 dxds.
$$

Passando ao termo contendo a constante de viscosidade λ.

$$
\begin{aligned}
J_3 &= \lambda \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 (\dot{u}^j D_{jt} + \dot{u}^j \operatorname{div}(uD_j)) dxds \\
&= -\lambda \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 (\dot{u}^j_j D_t + \dot{u}^j_k u^k D_j) dxds + \lambda \int_0^t \int_{\partial \mathbb{R}^3_+} \sigma^3 (\dot{u}^j D_t \nu^j + \dot{u}^j u^k D_j \nu^k) dS_x ds \\
&= -\lambda \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 (\dot{u}^j_j D_t + \dot{u}^j_k u^k D_j) dxds \\
&= -\lambda \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 (\dot{u}^j_j D_t - \dot{u}^j_{kj} u^k D - \dot{u}^j_k u^k_j D) dxds + \lambda \int_0^t \int_{\partial \mathbb{R}^3_+} \sigma^3 \dot{u}^j_k u^k D \nu^j dS_x ds \\
&= -\lambda \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 (\dot{u}^j_j D_t + \dot{u}^j_j u^k_k D + \dot{u}^j_j u^k D_k - \dot{u}^j_k u^k_j D) dxds - \lambda \int_0^t \int_{\partial \mathbb{R}^3_+} \sigma^3 \dot{u}^j_j u^k D \nu^k dS_x ds \\
&= -\lambda \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 (\dot{u}^j_j \dot{D} + \dot{u}^j_j u^k_k D - \dot{u}^j_k u^k_j D) dxds.
\end{aligned}
$$

Observemos que $\dot{D} = \dot{u}^j_j - u^k_j u^j_k$. Assim,

$$\begin{aligned} J_3 &= -\lambda \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 (\dot{u}^j_j \dot{u}^j_j - \dot{u}^j_j u^k_j u^j_k + \dot{u}^j_j u^k_k D - \dot{u}^j_k u^k_j D) dxds \\ &\leq -\lambda \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 |\nabla \dot{u}|^2 dxds + C\varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 |\nabla \dot{u}|^2 dxds + LD(A_2(T)). \end{aligned}$$

Finalmente, temos

$$\begin{aligned} J_4 &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \sigma^3 \rho \dot{u}^j (f^j_t + u.\nabla f^j) dxds \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \sigma^3 \rho \dot{u}^j f^j_t dxds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \sigma^3 \rho \dot{u}^j u.\nabla f^j dxds \\ &\leq \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \sigma \rho |\dot{u}|^2 dxds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \sigma^5 |f_t|^2 dxds \right)^{1/2} \\ &\quad + \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \sigma \rho |\dot{u}|^2 dxds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \sigma^5 |u|^2 |\nabla f|^2 dxds \right)^{1/2} \\ &\leq C(C_0 + C_f)^{1/2} A_1(T) + A_1(T)^{1/2} \left\{ \int_0^t \left(\sigma^3 \int_{\mathbb{R}^3_+} |u|^4 dx \right)^{1/2} \left(\sigma^7 \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla f|^4 dx \right)^{1/2} ds \right\}^{1/2} \\ &\leq C(C_0 + C_f)^{1/2} + C(C_0 + C_f)^{1/2} A_1(T)^{1/2} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \sigma^3 |u|^4 dxds \right)^{1/2} \\ &\leq C(C_0 + C_f) + A_1(T) + LD(A_2(T)). \end{aligned}$$

Juntando todas as estimativas, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma^3 \int_{\mathbb{R}^3_+} \rho |\dot{u}|^2 dx \;-\; & \frac{3}{2} \int_0^{1\wedge t} \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^2 \rho |\nabla \dot{u}|^2 dxds \\ &\leq C(C_0 + C_f) + \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 |\nabla \dot{u}|^2 dxds \\ &\quad -\mu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 |\nabla \dot{u}|^2 dxds + LD(A_2(T)) + TF \\ &\quad -\lambda \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 |\nabla \dot{u}|^2 dxds + C\varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 |\nabla \dot{u}|^2 dxds. \end{aligned}$$

Tomando ε suficientemente pequeno, temos

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \sigma^3 \int_{\mathbb{R}^3_+} \rho |\dot{u}|^2 dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 |\nabla \dot{u}|^2 dxds &\leq C(C_0 + C_f + A_1(T)) \\ &\quad + C(C_0 + C_f) + LD(A_2(T)) + TF. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}\sup_{0\le t\le T}\sigma^3\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|\dot{u}|^2dx \quad + \quad & \int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^3|\nabla\dot{u}|^2dxds \le C(\bar{\rho})[C_0+C_f+A_1(T)] \\ & +C(\bar{\rho})\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^3[|u|^4+|\nabla u|^4+|\dot{u}||\nabla u||u|+|\dot{u}||\nabla u|^2]dxds,\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração do lema. ∎

Para fechar a estimativa de $A_1(T)+A_2(T)$, precisaremos de mais algumas estimativas auxiliares, apresentadas no próximo lema.

Lema 2.9. *Existe uma constante $C(\bar{\rho})$ tal que, se (ρ, u) é solução suave das equações (2.1)-(2.3), então*

(a)
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3_+}|u|^pdx \quad & \le C(\bar{\rho})(C_0+C_f)^{(6-p)/4}\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^2dx\right)^{(3p-6)/4} \\ & +C(\bar{\rho})(C_0+C_f)^{(6-p)/6}\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^2dx\right)^{p/2}, \quad 2\le p\le 6\end{aligned}.$$

(b) $||\nabla u||_p \le C(||F||_p+||\omega||_p+||P-\tilde{P}||_p+||u||_p)$, $1<p<\infty$.

(c) $||\nabla F||_p+||\nabla\omega||_p \le C(||\rho\dot{u}||_p+||\nabla u||_p+||f||_p+||u||_p)$, $1<p<\infty$.

(d)
$$\begin{aligned}&\int(|F|^p+|\omega|^p)dx \le C(\bar{\rho})\Bigg[\left(\int\rho|\dot{u}|^2dx\right)^{(3p-6)/4}\left(\int(|\nabla u|^2+|P-\tilde{P}|^2)dx\right)^{(6-p)/4} \\ &+\left(\int(|\nabla u|^2+|P-\tilde{P}|^2+|f|^2)dx\right)^{p/2}\Bigg], \quad 2\le p\le 6.\end{aligned}$$

(e) $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^s|\rho-\tilde{\rho}|^rdxds \le C(\bar{\rho})\left[\int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^s|F|^rdxds+(C_0+C_f)\right]$, *para* $r\ge 2$, $s\ge 0$ *e* $0\le t_1\le t_2\le T$.

(f) $\|\nabla u\|_p \le C\|\nabla u\|_2^{\frac{6-p}{2p}}\left(\|\rho\dot{u}\|_2+\|\nabla u\|_2+\|u\|_2+\|f\|_2+\|P-\tilde{P}\|_6\right)^{\frac{3p-6}{2p}}, \quad 2\le p\le 6.$

Demonstração: (a) Aplicando em particular a desigualdade de interpolação dada na Proposição 1.5 e a desigualdade de Young com ε, temos

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}\int_{\mathbb{R}^3_+}|u|^2dx &\leq \int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|u|^2dx+\int_{\mathbb{R}^3_+}|\rho-\tilde{\rho}||u|^2dx\\
&\leq C(\bar{\rho})\left[(C_0+C_f)+\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}|\rho-\tilde{\rho}|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}|u|^4dx\right)^{1/2}\right]\\
&\leq C(\bar{\rho})\left[(C_0+C_f)+(C_0+C_f)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}|u|^4dx\right)^{1/2}\right]\\
&\leq C(\bar{\rho})\left[(C_0+C_f)+(C_0+C_f)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}|u|^2dx\right)^{1/4}\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^2dx\right)^{3/4}\right]\\
&\leq C(\bar{\rho})\left[(C_0+C_f)+\varepsilon C\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}|u|^2dx\right)+(C_0+C_f)^{2/3}\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^2dx\right)\right].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^3_+}|u|^2dx\leq C(\bar{\rho})\left((C_0+C_f)+(C_0+C_f)^{2/3}\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^2dx\right).$$

Utilizando novamente a desigualdade de interpolação dada na Proposição 1.5, juntamente com esta estimativa anterior, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3_+}|u|^pdx &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}|u|^2dx\right)^{\frac{6-p}{4}}\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^2dx\right)^{\frac{3p-6}{4}}\\
&\leq C\left((C_0+C_f)+(C_0+C_f)^{2/3}\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^2dx\right)^{\frac{6-p}{4}}\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^2dx\right)^{\frac{3p-6}{4}}\\
&\leq C(C_0+C_f)^{\frac{6-p}{4}}\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^2dx\right)^{\frac{3p-6}{4}}+C(C_0+C_f)^{\frac{6-p}{6}}\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^2dx\right)^{p/2},\quad 2\leq p\leq 6.
\end{aligned}$$

Com isso, concluímos a demonstração do ítem (a).

(b) Para a demonstração do item (b) usaremos a identidade

$$\begin{aligned}
(\lambda+\mu)\Delta u^j &= [(\lambda+\mu)\operatorname{div}u-(P(\rho)-P(\tilde{\rho}))]_{x_j}+(\lambda+\mu)(u^j_{x_k}-u^k_{x_j})_{x_k}+(P(\rho)-P(\tilde{\rho}))_{x_j}\\
&= F_{x_j}+(\lambda+\mu)\omega^{j,k}_{x_k}+(P-\tilde{P})_{x_j},\qquad \text{em } \mathbb{R}^3_+, \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

com a condição de fronteira (2.2):

$$\begin{cases} u^1_{x_3} & = & K^{-1}u^1, \\ u^2_{x_3} & = & K^{-1}u^2, \quad \text{em } \partial\mathbb{R}^3_+ \\ u^3 & = & 0 \end{cases}.$$

Queremos estimar $\|\nabla u^j\|_p$ para $j = 1, 2, 3$. Façamos primeiramente a estimativa para $j = 1, 2$ e supondo que a condição de Neumann sobre a fronteira seja homogêna. Neste caso temos a estimativa

$$\|\nabla u\|_p \leq C(\|F\|_p + \|\omega\|_p + \|P - \tilde{P}\|_p). \tag{2.28}$$

De fato, suponhamos que $u^j_{x_3} = 0$ em $\partial\mathbb{R}^3_+$. Desta forma, fazendo a extensão par na terceira variável, obten-se que u^j satisfaz

$$(\lambda + \mu)\Delta u^j = F_{x_j} + (\lambda + \mu)\omega^{j,k}_{x_k} + (P - \tilde{P})_{x_j}$$

no sentido das distribuições temperadas em todo o espaço $\mathbb{R}^3$. Assim, tomando a transformada de Fourier temos

$$-(\lambda + \mu)|\xi|^2\widehat{u^j} = i\xi_j\widehat{F} + (\lambda + \mu)i\xi_k\widehat{\omega^{j,k}} + i\xi_j(\widehat{P - \tilde{P}}).$$

Como $(\widehat{\partial_{x_i} f}) = i\xi_i\widehat{f}$ segue que

$$-(\lambda + \mu)\widehat{\partial_{x_i} u^j} = \frac{i\xi_j\xi_i}{|\xi|^2}\widehat{F} + (\lambda + \mu)\frac{i\xi_k\xi_i}{|\xi|^2}\widehat{\omega^{j,k}} + \frac{i\xi_j\xi_i}{|\xi|^2}(\widehat{P - \tilde{P}}).$$

Logo, pelo Teorema 1.9,

$$\|\nabla u^j\|_p \leq C\bigg(\|F\|_p + \|\omega\|_p + \|P - \tilde{P}\|_p\bigg), \quad 1 < p < \infty.$$

Observamos que um fato importante para obtermos a estimativa (2.28) acima é termos o lado direito da equação (2.27) ser uma derivada total.

Para a condição de fronteira não homogênea (como sugerido pelo D. Hoff; v. Introdução), considerando uma função $\varphi : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$ suave limitada com primeira derivada limitada, limitada inferiormente por uma constante positiva, e tal que $\varphi(x_1, x_2, x_3) = e^{-K^{-1}x_3}$ para $x_3 > 0$ próximo de zero, temos que $v = \varphi u^j$ satisfaz $v_{x_3} = 0$ em $\partial\mathbb{R}^3_+$ (visto que u^j satisfaz a condição de fronteira $u^j_{x_3} = K^{-1}u^j$, para $j = 1, 2$) e

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)\Delta v \;\; = \;\; & (\varphi F)_{x_j} + (\varphi(P - \tilde{P}))_{x_j} \\ & + (\lambda + \mu)(\varphi\omega^{j,k})_{x_k} + (\lambda + \mu)(\varphi_{x_i}u^j)_{x_i} \\ & - (\lambda + \mu)(\varphi_{x_j}u^k_{x_k} - \varphi_{x_k}u^k_{x_j}). \end{aligned}$$

Definindo $v_R^j : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$ por

$$(\lambda+\mu)v_R^j = -\int_{\mathbb{R}^3_+} (\Gamma(x-y)+\Gamma(x-y^*))(\varphi_{y_j}u^k_{y_k} - \varphi_{y_k}u^k_{y_j})dy,$$

temos v_R^j satisfazendo o problema (v. Seção 1.6)

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)\Delta v_R^j = -(\lambda+\mu)(\varphi_{x_j}u^k_{x_k} - \varphi_{x_k}u^k_{x_j}), & \text{em } \mathbb{R}^3_+ \\ \left(v_R^j\right)_{x_3} = 0, & \text{em } \partial\mathbb{R}^3_+ \end{cases}.$$

Integrando por partes v_R^j, obtemos

$$\begin{aligned} (\lambda+\mu)v_R^j(x) &= \int_{\mathbb{R}^3_+} (\Gamma_{y_k}(x-y) \pm \Gamma_{y_k}(x-y^*))\varphi_{y_j}u^k dy \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^3_+} (\Gamma_{y_j}(x-y) + \Gamma_{y_j}(x-y^*))\varphi_{y_k}u^k dy. \end{aligned}$$

Aqui, também queremos estimar ∇v_R^j em L^p mas não vamos aplicar o Teorema 1.9 usado no caso anterior porque o lado direito da equação em questão não é uma derivada total. No entanto, usando a fórmula acima para v_R^j, podemos aplicar o Lema 1.25, obtendo

$$\|\nabla v_R^j\|_p \le C\|(\nabla\varphi)u\|_p.$$

Agora, definindo $v_T^j(x) \equiv v - v_R^j$, garantimos que v_T^j satisfaz o problema

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)\Delta v_T^j = (\varphi F)_{x_j} + (\varphi(P-\tilde{P}))_{x_j} + (\lambda+\mu)(\varphi\omega^{j,k})_{x_k} + (\lambda+\mu)(\varphi_{x_i}u^j)_{x_i}, & \text{em } \mathbb{R}^3_+ \\ \left(v_T^j\right)_{x_3} = 0, & \text{em } \partial\mathbb{R}^3_+ \end{cases},$$

cujo lado direito da primeira equação é uma derivada total. Assim, pela estimativa (2.28), segue que

$$\|\nabla v_T^j\|_p \le C\Big(\|\varphi F\|_p + \|\varphi\omega\|_p + \|\varphi(P-\tilde{P})\|_p + \|(\nabla\varphi)u\|_p\Big).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|\varphi\nabla u^j\|_p - \|(\nabla\varphi)u^j\|_p &\le \|\nabla(\varphi u^j)\|_p \\ &\le C\Big(\|\varphi F\|_p + \|\varphi\omega\|_p + \|\varphi(P-\tilde{P})\|_p + \|(\nabla\varphi)u\|_p\Big), \end{aligned}$$

donde obtemos (b) para u^j com $j = 1, 2$, tendo em vista as propriedades da função φ, isto é,

$$\|\nabla u^j\|_p \le C\Big(\|F\|_p + \|\omega\|_p + \|P-\tilde{P}\|_p + \|u\|_p\Big).$$

O caso $j=3$ é mais simples. Com efeito, como u^3 é nulo na fronteira $\partial\mathbb{R}^3_+$, podemos estender u^3 de maneira ímpar em relação a terceira variável x_3 e proceder de maneira análoga à estimativa com condição de Neumann homogênea, obtendo

$$\|\nabla u^3\|_p \leq C\bigg(\|F\|_p + \|\omega\|_p + \|(P-\tilde{P})\|_p\bigg).$$

Portanto,

$$\|\nabla u\|_p \leq C\bigg(\|F\|_p + \|\omega\|_p + \|(P-\tilde{P})\|_p + \|u\|_p\bigg).$$

(c) Para limitar $\nabla\omega^{j,k}$, derivamos a j-ésima coordenada do campo u com respeito à variável x_k e derivamos k-ésima coordenada do campo u com respeito a x_j e encontramos

$$(\rho\dot{u}^j)_{x_k} + (P(\rho))_{x_jx_k} = \mu\Delta u^j_{x_k} + \lambda \operatorname{div} u_{x_jx_k} + (\rho f^j)_{x_k}$$

e

$$(\rho\dot{u}^k)_{x_j} + (P(\rho))_{x_jx_k} = \mu\Delta u^k_{x_j} + \lambda \operatorname{div} u_{x_jx_k} + (\rho f^k)_{x_j}.$$

Subtraindo uma equação da outra, vem

$$\mu\Delta\omega^{j,k} = (\rho\dot{u}^j)_{x_k} - (\rho\dot{u}^k)_{x_j} + (\rho f^k)_{x_j} - (\rho f^j)_{x_k}.$$

Definindo

$$H \equiv \omega^{1,3} - K^{-1}u^1,$$

obtemos

$$H(x) = \omega^{1,3}(x) - K^{-1}u^1(x) = u^1_{x_3}(x) - u^3_{x_1}(x) - K^{-1}u^1(x) = -u^3_{x_1}(x) = 0, \quad \text{para } x \in \partial\mathbb{R}^3_+.$$

Além disso, H satisfaz

$$\begin{aligned}
\mu\Delta H &= (\rho\dot{u}^j)_{x_k} - (\rho\dot{u}^k)_{x_j} + (\rho f^{x_k})_{x_j} - (\rho f^j)_{x_k} - \mu\Delta(K^{-1}u^1) \\
&= (\rho\dot{u}^j)_{x_k} - (\rho\dot{u}^k)_{x_j} + (\rho f^{x_k})_{x_j} - (\rho f^j)_{x_k} - \mu\sum_{i=1}^{3}((K^{-1})_{x_i}u^1 + K^{-1}u^1_{x_i})_{x_i}, \quad \text{em } \mathbb{R}^3_+.
\end{aligned}$$

Por estimativa elíptica, temos

$$||\nabla H||_p \leq C\left[||\rho\dot{u}||_p + ||\nabla u||_p + ||u||_p + ||f||_p\right]$$

que fornece

$$||\nabla\omega^{1,3}||_p \leq C\left[||\rho\dot{u}||_p + ||\nabla u||_p + ||u||_p + ||f||_p\right].$$

De maneira análoga, temos

$$||\nabla\omega^{2,3}||_p \leq C\left[||\rho\dot{u}||_p + ||\nabla u||_p + ||u||_p + ||f||_p\right].$$

Resta estimar somente o termo $\nabla\omega^{1,2}$. Para isso, escrevemos

$$\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\omega^{1,2}=(\rho\dot{u}^1)_{x_2}-(\rho\dot{u}^2)_{x_1}+\mu(\omega^{2,3}_{x_3x_1}-\omega^{1,3}_{x_3,x_2})+(\rho f^1)_{x_2}-(\rho f^2)_{x_1}.$$

Logo, para cada x_3 fixado, temos

$$\begin{aligned}&||\nabla_{x_1,x_2}\omega^{1,2}(.,.,x_3)||^p_{L^p(\mathbb{R}^2)}\\ \leq\ & C\left[||\rho\dot{u}(.,.,x_3)||^p_{L^p(\mathbb{R}^2)}+||(\rho f)(.,.,x_3)||^p_p+||\nabla\omega^{2,3}(.,.,x_3)||^p_{L^p(\mathbb{R}^2)}+||\nabla\omega^{1,3}(.,.,x_3)||^p_{L^p(\mathbb{R}^2)}\right].\end{aligned}$$

Integrando com respeito a x_3 em $(0,\infty)$ e utilizando a estimativa já obtida para $\nabla\omega^{1,3}$ e $\nabla\omega^{2,3}$, obtemos

$$||\nabla_{x_1,x_2}\omega^{1,2}||_{L^p(\mathbb{R}^3_+)}\leq C\left[||\rho\dot{u}||_{L^p(\mathbb{R}^3_+)}+||\nabla u||_{L^p(\mathbb{R}^3_+)}+||u||_{L^p(\mathbb{R}^3_+)}+||f||_{L^p(\mathbb{R}^3_+)}\right].$$

Uma vez que

$$\begin{aligned}\omega^{1,2}_{x_3}&=(u^1_{x_2}-u^2_{x_1})_{x_3}\\&=u^1_{x_3x_2}-u^2_{x_3x_1}\\&=(u^1_{x_3}-u^3_{x_1})_{x_2}-(u^2_{x_3}-u^3_{x_2})_{x_1}\\&=\omega^{1,3}_{x_2}-\omega^{2,3}_{x_1},\end{aligned}$$

e já temos a estimativa L^p para $\omega^{1,3}_{x_2}$ $\omega^{2,3}_{x_1}$, segue a estimativa L^p para o termo $\omega^{1,2}_{x_3}$, completando a estimativa para o gradiente de $\omega^{1,2}$, ou seja,

$$||\nabla\omega^{1,2}||_{L^p(\mathbb{R}^3_+)}\leq C\left[||\rho\dot{u}||_{L^p(\mathbb{R}^3_+)}+||\nabla u||_{L^p(\mathbb{R}^3_+)}+||u||_{L^p(\mathbb{R}^3_+)}+||f||_{L^p(\mathbb{R}^3_+)}\right],$$

de onde concluímos

$$||\nabla\omega||_{L^p(\mathbb{R}^3_+)}\leq C\left[||\rho\dot{u}||_{L^p(\mathbb{R}^3_+)}+||\nabla u||_{L^p(\mathbb{R}^3_+)}+||u||_{L^p(\mathbb{R}^3_+)}+||f||_{L^p(\mathbb{R}^3_+)}\right].$$

Já que

$$\rho\dot{u}^j=F_{x_j}+\mu\omega^{j,k}_{x_k}$$

e possuímos limitação para $\nabla\omega$, segue que

$$||\nabla F||_{L^p(\mathbb{R}^3_+)}\leq C\left[||\rho\dot{u}||_{L^p(\mathbb{R}^3_+)}+||\nabla u||_{L^p(\mathbb{R}^3_+)}+||u||_{L^p(\mathbb{R}^3_+)}+||f||_{L^p(\mathbb{R}^3_+)}\right],$$

concluindo a estimativa do ítem (c).

(d) Para esta estimativa, basta combinar as anteriores

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3_+}(|F|^p+|\omega|^p)dx &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}|F|^2dx\right)^{\frac{6-p}{4}}\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla F|^2dx\right)^{\frac{3p-6}{4}}\\
&\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}(|\nabla u|^2+|P-\tilde{P}|^2)dx\right)^{\frac{6-p}{4}}\\
&\quad\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}(\rho|\dot{u}|^2+|\nabla u|^2+|u|^2+|f|^2)dx\right)^{\frac{3p-6}{4}}\\
&\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|\dot{u}|^2dx\right)^{\frac{3p-6}{4}}\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}(|\nabla u|^2+|P-\tilde{P}|^2)dx\right)^{\frac{6-p}{4}}\\
&\quad+C\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}(|\nabla u|^2+|P-\tilde{P}|^2+|u|^2+|f|^2)dx\right)^{\frac{p}{2}}.
\end{aligned}$$

(e) Multiplicando a equação de conservação da massa por $r\sigma^s|\rho-\tilde{\rho}|^{r-1}sgn(\rho-\tilde{\rho})$, temos

$$r\sigma^s|\rho-\tilde{\rho}|^{r-1}sgn(\rho-\tilde{\rho})\rho_t+r\sigma^s|\rho-\tilde{\rho}|^{r-1}sgn(\rho-\tilde{\rho})\operatorname{div}(\rho u)=0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(\partial_t+\operatorname{div}(u\cdot))(\sigma^s|\rho-\tilde{\rho}|^r) &= s\sigma^{s-1}\sigma'|\rho-\tilde{\rho}|^r+r\sigma^s|\rho-\tilde{\rho}|^{r-1}sgn(\rho-\tilde{\rho})\rho_t\\
&\quad+r\sigma^s|\rho-\tilde{\rho}|^{r-1}sgn(\rho-\tilde{\rho})\nabla\rho.u+\sigma^s|\rho-\tilde{\rho}|^r\operatorname{div}u\\
&\quad+r\sigma^s|\rho-\tilde{\rho}|^{p-1}sgn(\rho-\tilde{\rho})\rho\operatorname{div}u\\
&\quad-r\sigma^s|\rho-\tilde{\rho}|^{r-1}sgn(\rho-\tilde{\rho})\rho\operatorname{div}u\\
&= s\sigma^{s-1}\sigma'|\rho-\tilde{\rho}|^p+\sigma^s|\rho-\tilde{\rho}|^p\operatorname{div}u\\
&\quad-r\sigma^s|\rho-\tilde{\rho}|^{r-1}\rho sgn(\rho-\tilde{\rho})\operatorname{div}u.
\end{aligned}$$

Como $F=(\lambda+\mu)\operatorname{div}u-(P-\tilde{P})$, temos

$$\operatorname{div}u=\frac{F+(P-\tilde{P})}{(\lambda+\mu)}.$$

Substituindo esta igualdade acima, temos

$$\begin{aligned}
(\partial_t+\operatorname{div}(u\cdot))(\sigma^s|\rho-\tilde{\rho}|^r) &= s\sigma^{s-1}\sigma'|\rho-\tilde{\rho}|^r\\
&\quad+\left(\sigma^s|\rho-\tilde{\rho}|^r-r\sigma^s|\rho-\tilde{\rho}|^{r-1}\rho sgn(\rho-\tilde{\rho})\right)\frac{F+(P-\tilde{P})}{(\lambda+\mu)}.
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
|\rho-\tilde{\rho}|^r-r|\rho-\tilde{\rho}|^{r-1}\rho sgn(\rho-\tilde{\rho}) &= |\rho-\tilde{\rho}|^{r-1}(\rho-\tilde{\rho})sgn(\rho-\tilde{\rho})\\
&\quad-r|\rho-\tilde{\rho}|^{r-1}\rho sgn(\rho-\tilde{\rho})\\
&= -(r-1)|\rho-\tilde{\rho}|^{r-1}sgn(\rho-\tilde{\rho})\rho-\tilde{\rho}|\rho\\
&\quad-\tilde{\rho}|^{r-1}sgn(\rho-\tilde{\rho}).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\Big(\partial_t + \mathrm{div}(u\cdot)\Big)(\sigma^s|\rho-\tilde{\rho}|^r) \;&+\; \frac{\sigma^s}{\lambda+\mu}\Big((r-1)\rho+\tilde{\rho}\Big)|\rho-\tilde{\rho}|^{r-1}|P-\tilde{P}| \\ &= s\sigma^{s-1}\sigma'|\rho-\tilde{\rho}|^r - \frac{\sigma^s}{\lambda+\mu}\Big((r-1)\rho+\tilde{\rho}\Big)sgn(\rho-\tilde{\rho})|\rho-\tilde{\rho}|^{r-1}F.\end{aligned}$$

Integrando em $\mathbb{R}^3_+ \times (t_1, t_2)$, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^s|\rho-\tilde{\rho}|^r dx\Big|_{t_1}^{t_2} \;&+\; C^{-1}\int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^s|\rho-\tilde{\rho}|^r dxds \\ &\le C\left(\int_{t_1}^{\sigma(t_2)\vee t_1}\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^{s-1}|\rho-\tilde{\rho}|^r dxds + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^s|F|^r dxds\right).\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^s|\rho-\tilde{\rho}|^r dxds \le C\left(\int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^s|F|^r dxds + (C_0+C_f)\right),$$

uma vez que $\sup_{0\le t\le T}\int_{\mathbb{R}^3_+} G(\rho)dx \le C(C_0+C_f)$.

(f) Para demonstrar este item faremos como Z. Xin em [28]. Utilizando a Proposição 1.1, Lema 2.9 item (b), Teorema 1.5 e Lema 2.9 item (c), nesta ordem, temos

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_p &\le \|\nabla u\|_2^{\frac{6-p}{2p}}\|\nabla u\|_6^{\frac{3p-6}{2p}} \\ &\le C\|\nabla u\|_2^{\frac{6-p}{2p}}\Big(\|F\|_6+\|\omega\|_6+\|P-\tilde{P}\|_6+\|u\|_6\Big)^{\frac{3p-6}{2p}} \\ &\le C\|\nabla u\|_2^{\frac{6-p}{2p}}\Big(\|\nabla F\|_2+\|\nabla\omega\|_2+\|\nabla u\|_2+\|P-\tilde{P}\|_6\Big)^{\frac{3p-6}{2p}} \\ &\le C\|\nabla u\|_2^{\frac{6-p}{2p}}\Big(\|\rho\dot{u}\|_2+\|\nabla u\|_2+\|u\|_2+\|f\|_2+\|P-\tilde{P}\|_6\Big)^{\frac{3p-6}{2p}}.\end{aligned}$$

■

Agora estamos aptos a estimar os termos que aparecem do lado direito nas desigualdades dos lemas 2.7 e 2.8. Começamos pela desigualdade no Lema 2.8 limitando o termo

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^3|\nabla u|^4 dxds \le \int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^3\Big[|F|^4+|\omega|^4+|u|^4+|\rho-\tilde{\rho}|^4\Big]dxds,$$

Agora vamos estimar cada termo no lado direito desta desigualdade separadamente. Pela desigualdade de interpolação (Proposição 1.5), estimativa de energia e Lema 2.9 (c), temos

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 |F|^4 dxds &\leq C \int_0^T \sigma^3 \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} F^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla F|^2 dx \right)^{3/2} dt \\
&\leq C \sup_{0\leq t\leq T} \left(\sigma \int_{\mathbb{R}^3_+} |F|^2 dx \right)^{1/2} \sup_{0\leq t\leq T} \left(\sigma^3 \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla F|^2 \right)^{1/2} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma |\nabla F|^2 dxds \right) \\
&\leq C(A_1(T) + (C_0 + C_f))^{1/2} \sup_{0\leq t\leq T} \left(\sigma^3 \int_{\mathbb{R}^3_+} (\rho |\dot{u}|^2 + |\nabla u|^2 + |u|^2) dx \right)^{1/2} \\
&\quad \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma (\rho |\dot{u}|^2 + |\nabla u|^2 + |u|^2) dxds \right) \\
&\leq C(T)(C_0 + C_f) \left[1 + A_2^{1/2}(T) + A_1^2(T) \right].
\end{aligned}
$$

A estimativa para o termo $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 |\omega|^4 dxds$ é análogo ao anterior. Pelo Lema 2.9 (e), segue a estimativa

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 (\rho - \tilde{\rho})^4 dxds &\leq C(C_0 + C_f) + C \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 |F|^4 dxds \\
&\leq C(C_0 + C_f) + C(C_0 + C_f) \left[1 + A_2^{1/2}(T) + A_1^2(T) \right].
\end{aligned}
$$

A estimativa restante é obtida através novamente do Lema 2.9 (a):

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 |u|^4 dxds &\leq C(C_0 + C_f)^{1/2} \int_0^T \sigma^3 \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u|^2 dx \right)^{3/2} ds \\
&\quad + C(C_0 + C_f)^{1/3} \int_0^T \sigma^3 \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u|^2 dx \right)^2 ds \\
&\leq C(C_0 + C_f)^{1/2} \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^2 |\nabla u|^2 dx \right)^{3/2} ds \\
&\quad + C(C_0 + C_f)^{1/2} \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^{3/2} |\nabla u|^2 dx \right)^2 ds \\
&\leq C(C_0 + C_f)^{1/2} A_1^{3/2}(T) + C(C_0 + C_f)^{1/3} A_1^2(T).
\end{aligned}
$$

Quanto aos demais termos que aparecem no lado direito da desigualdade no Lema 2.8, ou seja,

$$
\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 \Big[|\dot{u}||\nabla u||u| + |\dot{u}||\nabla u|^2 \Big] dxds,
$$

aplicando a desigualdade de Hölder, observamos que as estimativas para os mesmos recaem nas mesmas estimativas acima. Logo, pelo Lema 2.8, conclui-se

$$A_2(T) \leq C(C_0+C_f)^\theta + C(C_0+C_f)^\theta \sum_{p>1} A_1^p(T) + C(C_0+C_f)^\theta \sum_{q>1} A_2^q(T).$$

Passaremos agora às estimativas dos termos que aparecem à direita da desigualdade no Lema 2.7. Para isso necessitaremos da seguinte estimativa, obtida de forma similar às estimativas obtidas anteriormente:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^{3/2} |\nabla u|^3 dxds &\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^{3/2} (|F|^3 + |\omega|^3 + |\rho - \tilde{\rho}|^3 + |u|^3) dxds \\
&\leq C(C_0+C_f) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^{3/2} (|F|^3 + |\omega|^3 + |u|^3) dxds \\
&\leq C(C_0+C_f) + \int_0^T \sigma^{3/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} |F|^2 dx \right)^{3/4} \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla F|^2 dx \right)^{3/4} ds \\
&\quad + \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^{3/2} |u|^4 dxds \right)^{1/2} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} |u|^2 dxds \right)^{1/2} \\
&\leq C(C_0+C_f) \\
&\quad + \int_0^T \sigma^{3/2} \left((C_0+C_f) + \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u|^2 dx \right)^{3/4} \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} \rho |\dot{u}|^2 dx \right)^{3/4} ds \\
&\leq C(C_0+C_f) + C(C_0+C_f)^{3/4} \\
&\quad + C \int_0^T \left(\sigma \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u|^2 dx \right)^{3/4} \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma \rho |\dot{u}|^2 dx \right)^{3/4} ds \\
&\leq C(C_0+C_f) + C(C_0+C_f)^{3/4} + C A_1^{3/4} \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma \rho |\dot{u}|^2 dx \right)^{3/4} ds \\
&\leq C(C_0+C_f) + C(C_0+C_f)^{3/4} + C A_1^{3/2}. \qquad (2.29)
\end{aligned}$$

Desta forma, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma |u| |\nabla u|^2 dxds &\leq \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^{3/2} |\nabla u|^3 dxds \right)^{2/3} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} |u|^3 dxds \right)^{1/3} \\
&\leq (C(C_0+C_f)^\theta + C A_1^{3/2})^{2/3} \\
&\quad \times \left(\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} |u|^2 dx \right)^{3/4} \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u|^2 dx \right)^{3/4} ds \right)^{1/3} \\
&\leq C(C_0+C_f)^\theta A_1^{1/4} + C(C_0+C_f) A_1^{4/3}.
\end{aligned}$$

Estimando o outro termo do lado direito da desigualdade do Lema 2.7, temos:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma |u|^2 |\nabla u| dx ds \\
\leq\ & \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u|^2 dx ds \right)^{1/2} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^2 |u|^4 dx ds \right)^{1/2} \\
\leq\ & C(C_0 + C_f)^{1/2} \left(\int_0^T \sigma^2 \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} |u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u|^2 dx \right)^{3/2} ds \right)^{1/2} \\
\leq\ & C(C_0 + C_f)^{3/4} A_1^{3/4}.
\end{aligned}$$

Resta estimar agora o termo

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma u^{j_1}_{k_1} u^{j_2}_{k_2} u^{j_3}_{k_3} dx dt.$$

Para isso, vamos considerar três casos:

(i) Um dos subindices k_1, k_2, k_3, correspondente às derivadas, é diferente de 3. Suponhamos, sem perda de generalidade, $k_1 \neq 3$. Para as estimativas que se seguem faremos uma decomposição $u^j = z^j + w^j$. Esta mesma decomposição será efetuada no Capítulo 3 desta tese com $z^j \equiv u^j_{F,\omega}$ e $w^j \equiv u^j_P$. Para simplificar a notação utilizaremos z^j e w^j.

Definimos w^j e z^j por

$$\begin{aligned}
(\lambda + \mu) w^j(x) &= -\int_{\mathbb{R}^3_+} (\Gamma(x-y) + \Gamma(x-y^*))(P - \tilde{P})_{y_j} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^3_+} (\Gamma(x-y) + \Gamma(x-y^*))_{y_j} (P - \tilde{P}) dy, \quad x \in \mathbb{R}^3_+. \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

e $z^j \equiv u^j - w^j$. Maiores detalhes sobre esta decomposição serão apresentados no Capítulo 3. Desta forma, w^j e z^j satisfazem (v. Seção 1.6)

$$\begin{cases} (\lambda + \mu) \Delta w^j = (P - \tilde{P})_{x_j}, & \text{em } \mathbb{R}^3_+ \\ (w^1_{x_3}, w^2_{x_3}) = (0,0) \quad \text{e} \quad w^3 = 0, & \text{em } \partial\mathbb{R}^3_+ \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} (\lambda + \mu) \Delta z^j = F_{x_j} + (\lambda + \mu) \omega^{j,k}_{x_k}, & \text{em } \mathbb{R}^3_+ \\ (z^1_{x_3}, z^2_{x_3}) = K^{-1}(u^1, u^2) \quad \text{e} \quad z^3 = 0, & \text{em } \partial\mathbb{R}^3_+ \end{cases}.$$

Podemos escrever a integral a ser estimada como sendo

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma u^{j_1}_{k_1} u^{j_2}_{k_2} u^{j_3}_{k_3} dx dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma u^{j_1}_{k_1} (z^{j_2}_{k_2} + w^{j_2}_{k_2})(z^{j_3}_{k_3} + w^{j_3}_{k_3}) dx dt.$$

Desta forma, é suficiente estimar cada uma das seguintes integrais

$$I \equiv \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma |\nabla u||\nabla z||\nabla w| dxdt,$$

$$II \equiv \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma |\nabla u||\nabla w|^2 dxdt,$$

$$III \equiv \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma u^{j_1}_{k_1} z^{j_2}_{k_2} z^{j_3}_{k_3} dxdt.$$

Antes de estimar estas integrais, observamos que, pela demonstração do item (b) do Lema 2.9 temos que z e w satisfazem, para cada $t > 0$ fixado, as seguintes estimativas

$$||\nabla z||_p \leq C(||F||_p + ||\omega||_p + ||u||_p)$$

e

$$||\nabla w||_p \leq C||P - \tilde{P}||_p,$$

para $1 < p < \infty$.

Começaremos estimando a integral II como segue:

$$\begin{aligned}
II &\leq \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u|^2 dxdt\right)^{1/2} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla w|^4 dxdt\right)^{1/2} \\
&\leq C(C_0 + C_f)^{1/2} \left((C_0 + C_f) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} |P - \tilde{P}|^4 dxdt\right)^{1/2} \\
&\leq C(C_0 + C_f)^{\theta}.
\end{aligned}$$

Quanto a I, temos:

$$\begin{aligned}
I &\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma |\nabla u||\nabla w|(|\nabla u| + |\nabla w|) dxdt \\
&\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma |\nabla u|^2 |\nabla w| dxdt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma |\nabla u||\nabla w|^2 dxdt.
\end{aligned}$$

O segundo termo desta última desigualdade é do tipo II e já foi estimada. A estimativa do primeiro termo é dada por

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma |\nabla u|^2 |\nabla w| dxdt &\leq \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^{3/2} |\nabla u|^3 dxdt \right)^{2/3} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla w|^3 dxdt \right)^{1/3} \\
&\leq \left(C(C_0 + C_f) + C(C_0 + C_f)^{3/4} + C A_1^{3/2} \right)^{2/3} \\
&\quad \times \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} |P - \tilde{P}|^3 dxdt \right)^{1/3} \\
&\leq C(C_0 + C_f)^{\theta} + C(C_0 + C_f)^{\theta} A_1(T),
\end{aligned}
$$

onde usamos (2.29). Uma vez que estamos supondo que $k_1 \neq 3$, a integral III é estimada da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
|III| &= \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma u^{j_1}_{k_1} z^{j_2}_{k_2} z^{j_3}_{k_3} dxdt \right| \\
&= \left| - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma u^{j_1} z^{j_2}_{k_1 k_2} z^{j_3}_{k_3} dxdt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma u^{j_1} z^{j_2}_{k_2} z^{j_3}_{k_1 k_3} dxdt \right| \\
&\leq \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma |u|^2 |\nabla z|^2 dxdt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma |D^2 z|^2 dxdt \right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Utilizaremos na próxima limitação a estimativa L^p do termo $D^2 z$ dada por

$$
||D^2 z||_p \leq C(||\nabla F||_p + ||\nabla \omega||_p + ||u||_p),
$$

que será demonstrada no Capítulo 3. Desta forma,

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma |D^2 z|^2 dxdt &\leq C \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma (|\nabla F|^2 + |\nabla \omega|^2 + |u|^2) dxdt \\
&\leq C \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma (\rho |\dot{u}|^2 + |\nabla u|^2 + |u|^2) dxdt \\
&\leq C(C_0 + C_f) + C A_1(T),
\end{aligned}
$$

onde usamos o Lema 2.9 (c). Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}|u|^2|\nabla z|^2dxdt &\leq 2\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}(|u|^2|\nabla u|^2+|u|^2|\nabla w|^2)dxdt\\
&\leq 2\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^2dxdt\right)^{1/2}\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}|u|^4|\nabla u|^2dxdt\right)^{1/2}\\
&\quad +2\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}|u|^6dxdt\right)^{1/3}\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla w|^3dxdt\right)^{2/3}\\
&\leq (C_0+C_f)^{1/2}((C_0+C_f)+M_q)^{1/2}\\
&\quad +(C_0+C_f)^{2/3}((C_0+C_f)+M_q)^{1/3},
\end{aligned}$$

onde usamos a estimativa (2.22).

Logo, a estimativa do primeiro caso está completa.

(ii) O segundo caso é quando todos os subindices, os quais correspondem à derivadas, são iguais a 3 e pelo menos um dos sobreindices, os quais correspondem à coordenadas, é igual a 3. Suponhamos, sem perda de generalidade, $j_1=3$. Procedendo de forma análoga ao caso anterior, basta considerar as três integrais I,II e III. As estimativas para as integrais I e II são de maneira idêntica ao caso anterior. Devemos nos preocupar somente com a integral III que é trabalhada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
III &= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma u^{j_1}_{x_3}z^{j_2}_{x_3}z^{j_3}_{x_3}dxdt\\
&= -\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma u^{j_1}z^{j_2}_{x_3x_3}z^{j_3}_{x_3}dxdt-\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma u^{j_1}z^{j_2}_{x_3}z^{j_3}_{x_3x_3}dxdt\\
&\quad -\int_0^T\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}\sigma u^{j_1}z^{j_2}_{x_3}z^{j_3}_{x_3}dS_xdt.
\end{aligned}$$

Neste caso, como estamos considerando $j_1=3$, o termo de fronteira é nulo devido à condição $u^3=0$ em $\partial\mathbb{R}^3_+$.

Logo, seguindo a mesma estimativa do caso anterior, segue que

$$\begin{aligned}
|III| &\leq C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma|u||\nabla z||D^2z|dxdt\\
&\leq C\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma|u|^2|\nabla z|^2dxdt\right)^{1/2}\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma|D^2z|^2\right)^{1/2}\\
&\leq C(C_0+C_f)((C_0+C_f)+M_q)^{1/3}+C(C_0+C_f)((C_0+C_f)+M_q)^{1/2}
\end{aligned}$$

e a estimativa para o segundo caso está completa.

(iii) O caso restante é quando todos os subíndices são iguais a 3 e nenhum dos sobreíndices é igual a 3. A única diferença deste caso para o caso anterior diz respeito ao termo de fronteira na integral III. Sendo assim, trabalharemos somente com tal termo de fronteira que é dado por

$$TF \equiv \int_0^T \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \sigma u^{j_1} z^{j_2}_{x_3} z^{j_3}_{x_3} dS_x dt.$$

Utilizando a condição de fronteira sobre z, TF é estimado da seguinte maneira, onde usaremos (2.26):

$$\begin{aligned}
TF &= \int_0^T \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \sigma K^{-2} u^{j_1} u^{j_2} u^{j_3} dS_x dt \\
&= \int_0^T \int_{\overline{\mathbb{R}^3_+}\cap\{0\le x_3\le 1\}} [\sigma K^{-2}(x_3-1) u^{j_1} u^{j_2} u^{j_3}]_{x_3} dx dt \\
&= \int_0^T \int_{\{0\le x_3\le 1\}} \sigma K^{-2} u^{j_1} u^{j_2} u^{j_3} dx dt \\
&\quad + \int_0^T \int_{\{0\le x_3\le 1\}} (x_3-1)\sigma K^{-2}(u^{j_1}_{x_3} u^{j_2} u^{j_3} + u^{j_1} u^{j_2}_{x_3} u^{j_3} + u^{j_1} u^{j_2} u^{j_3}_{x_3}) dx dt \\
&\le C\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma |u|^3 dx dt + C\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma |\nabla u||u|^2 dx dt \\
&\le C\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} |u|^2 dx dt\right)^{1/2} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} |u|^4 dx dt\right)^{1/2} \\
&\quad + C\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u|^2 dx dt\right)^{1/2} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} |u|^4 dx dt\right)^{1/2} \\
&\le C(C_0+C_f)^{1/2}((C_0+C_f)+M_q)^{1/2},
\end{aligned}$$

onde usamos também a Proposição 1.5. Isso conclui as estimativas para o lado direito de $A_1(T)$.

Desta maneira, temos uma estimativa do seguinte tipo

$$A_1(T) + A_2(T) \le C(C_0+C_f)^{\theta} + C(C_0+C_f)^{\theta} \sum_{p>1} (A_1(T)+A_2(T))^p, \tag{2.31}$$

onde a soma acima é uma soma de um número finito de termos. Daí vejamos que podemos estimar $A_1(T) + A_2(T)$ por $2C(C_0+C_f)^{\theta}$, possivelmente alterando as constantes C e θ, com a condição de que $C_0 + C_f$ seja suficientemente pequeno. Para fechar a estimativa desejada consideremos a função

$$g(\xi) = \varepsilon \left(\sum_{p>1} \xi^p + 1 \right) - \xi,$$

onde $\varepsilon = C(C_0 + C_f)^\theta$.

Se $\bar{p}$ é o menor expoente p da soma acima, temos para $\xi \in [0,1]$ que

$$\begin{aligned} g'(\xi) &= \varepsilon \sum_{p>1} p\xi^{p-1} - 1 \\ &\leq \varepsilon \xi^{\bar{p}-1} \left(\sum_{p>1} p \right) - 1 \\ &\leq \varepsilon \left(\sum_{p>1} p \right) - 1 < 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g(2\varepsilon) &= \varepsilon \left(\sum_{p>1} 2^p \varepsilon^p + 1 \right) - 2\varepsilon \\ &\leq \varepsilon^{\bar{p}+1} \left(\sum_{p>1} 2^p \right) - \varepsilon \\ &= \varepsilon \left[\varepsilon^{\bar{p}} \left(\sum_{p>1} 2^p \right) - 1 \right] < 0, \end{aligned}$$

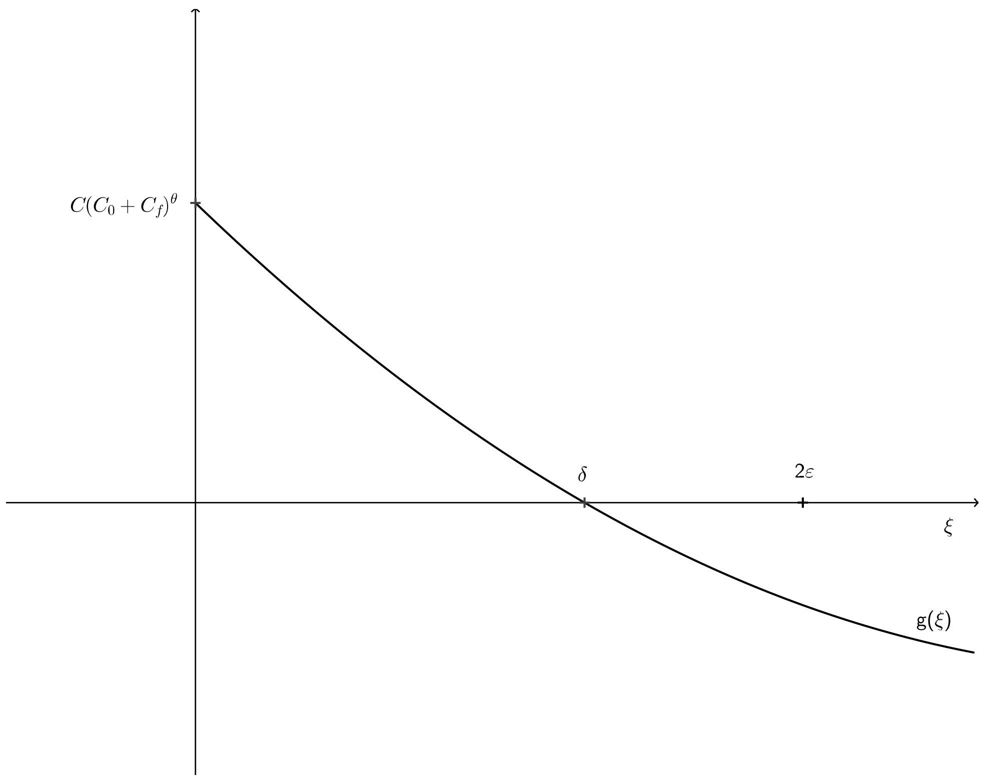
para $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \min \left\{ \dfrac{1}{\sum_{p>1} p}, \dfrac{1}{\left(\sum_{p>1} 2^p \right)^{1/\bar{p}}} \right\}$.

Desta forma, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, g é descrecente para $\xi \in [0,1)$, g assume valor negativo em 2ε e $g(0) = \varepsilon > 0$. Logo, existe $\delta > 0$ tal que $g(\delta) = 0$, com $g(\xi) > 0$ em $[0,\delta)$ e $g(\xi) < 0$ para valores de ξ próximos de δ e $\xi > \delta$. Veja figura abaixo.

Como $g((A_1 + A_2)(t)) \geq 0$ para todo $t \geq 0$ (em virtude de (2.31) e da definição de g), $(A_1 + A_2)(0) = 0$ e $(A_1 + A_2)(t)$ é uma função contínua, concluímos que

$$(A_1 + A_2)(T) < \delta < 2\varepsilon,$$

isto é, obtemos (2.25).



2.3 Estimativa com Expoente Fracionário

Nesta seção estaremos interessados em obter as estimativas

$$\sup_{0\le t\le T} \sigma^{1-s}\int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u|^2 dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^{1-s}\rho|\dot{u}|^2 dxdt \le C(C_0 + \|u_0\|_{H^s} + C_f)^\theta \tag{2.32}$$

e

$$\sup_{0\le t\le T} \sigma^{2-s}\int_{\mathbb{R}^3_+} \rho|\dot{u}|^2 dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^{2-s}|\nabla \dot{u}|^2 dxdt \le C(C_0 + \|u_0\|_{H^s} + C_f)^\theta \tag{2.33}$$

como dado inicial $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^3_+)$. Estas estimativas são extremamente importantes para se obter a integrabilidade local do tempo da seminorma de log-Lipschitz do campo u (em relação à variável x) numa vizinhança de $t = 0$. Para isso supomos adicionalmente que

$$\int_0^\infty \sigma^r(t)||\nabla f(.,t)||_{L^4} dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^r(t)|f_t|^2 dxdt \le C_f, \tag{2.34}$$

para algum $r > 2$.

2.3.1 Estimativa com Expoente $1 - s$

Começaremos estimando o termo com expoente $1 - s$. A técnica para se obter este tipo de estimativa consiste em escrever a solução suave u do problema original como sendo

$$u = v + w,$$

onde v é solução suave de um problema linear homogêneo com condição inicial $v_0(x) = u_0(x)$ e w corresponde à solução suave de um problema linear não-homogêneo e com condição inicial $w_0(x) = 0$. Obteremos a estimativa para v através da teoria de interpolação com dado inicial $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^3_+)$ e a estimativa para w será obtida sem a necessidade do fator σ^{1-s}, visto que a condição inicial é nula.

Para isso, consideramos o operador diferencial $\mathcal{L} \equiv (\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2, \mathcal{L}^3)$ dado por

$$\mathcal{L}^j(z) = \rho \dot{z}^j - \mu \Delta z^j - \lambda \operatorname{div} z_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad z = (z^1, z^2, z^3),$$

onde $\dot{z} \equiv z_t + u \nabla z$ (a derivada material de z, em relação a u; v. Definição 1.7).

Sejam v e w as soluções suaves de

$$\left\{ \begin{array}{cc} \mathcal{L}(v) = 0, & \text{em } \mathbb{R}^3_+ \\ (v^1, v^2, v^3) = K^{-1}(v^1_{x_3}, v^2_{x_3}, 0), & \text{em } \partial\mathbb{R}^3_+ \\ v(.,0) = u_0, & \end{array} \right. \tag{2.35}$$

e

$$\left\{ \begin{array}{cc} \mathcal{L}(w) = -\nabla(P - \tilde{P}) + \rho f, & \text{em } \mathbb{R}^3_+ \\ (w^1, w^2, w^3) = K^{-1}(w^1_{x_3}, w^2_{x_3}, 0), & \text{em } \partial\mathbb{R}^3_+ \\ w(.,0) = 0, & \end{array} \right. \tag{2.36}$$

respectivamente. De forma análoga à estimativa de energia, obtemos

$$\sup_{0 \le t \le T} \int_{\mathbb{R}^3_+} \rho |v|^2 dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla v|^2 dx dt \le C(\bar{\rho}) ||u_0||^2_{L^2(\mathbb{R}^3_+)}$$

e

$$\sup_{0 \le t \le T} \int_{\mathbb{R}^3_+} \rho |w|^2 dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla w|^2 dx dt \le C(\bar{\rho})(C_0 + C_f).$$

A idéia consiste em obter a estimativa (2.32) para $s = 1$, quando $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3_+)$ e $s = 0$, quando $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3_+)$ e obter, via interpolação, a estimativa desejada para qualquer $s \in [0, 1]$, desde que $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^3_+)$.

Teorema 2.10. *Sejam $s \in [0, 1]$ e v a solução suave de (2.35). Se $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^3_+)$, então*

$$\sup_{0 \le t \le T} \sigma^{1-s}(t) \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla v|^2 dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^{1-s}(t) \rho |\dot{v}|^2 dx dt \le C ||u_0||^2_{H^s(\mathbb{R}^3_+)}.$$

Demonstração: Multiplicando a equação $\rho\dot{v}^j = \mu\Delta v^j + \lambda(\operatorname{div} v)_j$ por v_t^j, temos

$$\rho|\dot{v}|^2 - \rho\dot{v}^j u.\nabla v^j = \mu\Delta v^j v_t^j + \lambda(\operatorname{div} v)_j v_t^j.$$

Integrando em $\mathbb{R}^3_+$, temos

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^3_+} \rho|\dot{v}|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3_+} \rho\dot{v}^j u.\nabla v^j dx \\
= \; & \mu\int_{\mathbb{R}^3_+} \Delta v^j v_t^j dx + \lambda\int_{\mathbb{R}^3_+} (\operatorname{div} v)_j v_t^j dx \\
= \; & -\mu\int_{\mathbb{R}^3_+} \nabla v^j.\nabla v_t^j dx + \mu\int_{\partial\mathbb{R}^3_+} v_t^j \nabla v^j.\nu dS_x \\
& -\lambda\int_{\mathbb{R}^3_+} (\operatorname{div} v)(\operatorname{div} v)_t dx + \lambda\int_{\partial\mathbb{R}^3_+} (\operatorname{div} v) v_t^j \nu^j dS_x \\
= \; & -\frac{\mu}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla v|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3_+} |\operatorname{div} v|^2 dx + \mu\int_{\partial\mathbb{R}^3_+} v_t^j v_k^j \nu^k dS_x \\
= \; & -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\mu\int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla v|^2 dx + \lambda\int_{\mathbb{R}^3_+} (\operatorname{div} v)^2 dx + \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \mu K^{-1}|v|^2 dS_x\right\}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\mu||\nabla v||_2^2 + \lambda||\operatorname{div} v||_2^2 + \mu\int_{\partial\mathbb{R}^3_+} K^{-1}|v|^2 dS_x\right) + \int_{\mathbb{R}^3_+} \rho|\dot{v}|^2 dx \\
= \; & \int_{\mathbb{R}^3_+} \rho\dot{v}^j(u.\nabla v^j) dx \\
\leq \; & C(\bar{\rho})\left(\int_{\mathbb{R}^3_+} \rho|\dot{v}|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^3_+} \rho|u|^3 dx\right)^{1/3}\left(\int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla v|^6 dx\right)^{1/6} \\
\leq \; & C(\bar{\rho})(C_0 + C_f + M_q)||\rho\dot{v}||_2||\nabla v||_6.
\end{aligned}$$

Definindo $\tilde{F} = (\lambda+\mu)\operatorname{div} v$ e $\tilde{\omega}^{j,k} = v^j_{x_k} - v^k_{x_j}$, temos

$$(\lambda+\mu)\Delta v^j = \tilde{F}_{x_j} + (\lambda+\mu)\tilde{\omega}^{j,k}_{x_k}$$

e a seguinte estimativa

$$||\nabla v||_p \leq C(||\tilde{F}||_p + ||\tilde{\omega}||_p + ||v||_p);$$

v. demonstração do Lema 2.9 (b). Procedendo de maneira análoga à demonstração do item (c) do Lema 2.9, obtemos

$$||\nabla\tilde{F}||_p + ||\nabla\tilde{\omega}||_p \leq C(||\rho\dot{v}||_p + ||\nabla v||_p + ||v||_p).$$

Desta maneira, pela desigualdade de interpolação (Teorema 1.5) e estimativa (2.22), vem que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3_+} \rho\dot{v}(u.\nabla v^j)dx &\leq C||\rho\dot{v}||_2\left(||v||_6+||\tilde{w}||_6+||\tilde{F}||_6\right)\\
&\leq C(C_0+C_f)^\theta||\rho\dot{v}||_2\left(||\nabla v||_2+||\nabla\tilde{w}||_2+||\nabla\tilde{F}||_2\right)\\
&\leq C(C_0+C_f)^\theta||\rho\dot{v}||_2\left(||\nabla v||_2+||\rho\dot{v}||_2+||v||_2\right)\\
&= C(C_0+C_f)^\theta||\rho\dot{v}||_2||\nabla v||_2+C(C_0+C_f)^\theta||\rho\dot{v}||_2^2\\
&\quad +C(C_0+C_f)^\theta||\rho\dot{v}||_2||v||_2\\
&\leq C(C_0+C_f)^\theta||\nabla v||_2^2+C(C_0+C_f)^\theta||\rho\dot{v}||_2^2+C||v||_2^2\\
&= C(C_0+C_f)^\theta\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla v|^2dx+C(C_0+C_f)^\theta\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|\dot{v}|^2dx\\
&\quad +C(C_0+C_f)^\theta\int_{\mathbb{R}^3_+}|v|^2dx.
\end{aligned}$$

Assim, utilizando o fato de que $(C_0+C_f)^\theta$ é suficientemente pequeno, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\mu||\nabla v||_2^2+\lambda||\operatorname{div} v||_2^2+\mu\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}K^{-1}|v|^2dS_x\right)+\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|\dot{v}|^2\\
\leq\;& C\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla v|^2dx+C\int_{\mathbb{R}^3_+}|v|^2dx. \qquad (2.37)
\end{aligned}$$

Suponhamos que $u_0\in H^1(\mathbb{R}^3_+)$. Integrando esta expressão em $(0,t)$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\mu}{2}\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla v|^2dx+\frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^3_+}|\operatorname{div} v|^2dx &+ \frac{\mu}{2}\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}K^{-1}|v|^2dS_x+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|\dot{v}|^2dxds\\
&\leq \frac{\mu}{2}\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u_0|^2dx+\frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^3_+}|\operatorname{div} u_0|^2dx\\
&\quad +\frac{\mu}{2}\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}K^{-1}|u_0|^2dS_x+C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}|v|^2dxds\\
&\leq C||u_0||^2_{H^1(\mathbb{R}^3_+)}.
\end{aligned}$$

Suponhamos agora que $u_0\in L^2(\mathbb{R}^3_+)$. Multiplicando (2.37) por $\sigma\equiv\sigma(t)$, temos

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\sigma'\left(\mu||\nabla v||_2^2+\lambda||\operatorname{div} v||_2^2+\mu\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}K^{-1}|v|^2dS_x\right)+\sigma\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|\dot{v}|^2dx\\
&+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\mu\sigma||\nabla v||_2^2+\lambda\sigma||\operatorname{div} v||_2^2+\mu\alpha\sigma\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}K^{-1}|v|^2dS_x\right)\\
\leq\ &\sigma C\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla v|^2dx+C\int_{\mathbb{R}^3_+}|v|^2dx.
\end{aligned}
$$

Integrando em $(0,t)$, temos pela estimativa de energia

$$
\begin{aligned}
\sigma\frac{\mu}{2}||\nabla v||_2^2\ &+\ \sigma\frac{\lambda}{2}||\operatorname{div} v||_2^2+\sigma\frac{\mu}{2}\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}K^{-1}|v|^2dS_x+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma\rho|\dot{v}|^2dxds\\
&\leq\ \int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma'|\nabla v|^2dxds+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma'|\operatorname{div} v|^2dxds\\
&\quad+\int_0^T\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}\sigma'K^{-1}|v|^2dxdS_x+\sigma\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla v|^2dx+C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla v|^2dxds\\
&\leq\ C||u_0||_2^2.
\end{aligned}
$$

Portanto, temos as seguintes estimativas para v

$$
\sup_{0\leq t\leq T}\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla v|^2dx+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|\dot{v}|^2dxdt\leq C||u_0||^2_{H^1(\mathbb{R}^3_+)}
$$

e

$$
\sup_{0\leq t\leq T}\sigma(t)\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla v|^2dx+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma(t)\rho|\dot{v}|^2dxdt\leq C||u_0||^2_{L^2(\mathbb{R}^3_+)}.
$$

Assim, para cada $t>0$ fixado, os operadores

$$
\begin{aligned}
T:\ L^2(\mathbb{R}^3_+,dx)\ &\longrightarrow\ [L^2(\mathbb{R}^3_+,dx)]^3\\
u_0\ &\longmapsto\ \nabla v
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
T:\ H^1(\mathbb{R}^3_+,dx)\ &\longrightarrow\ [L^2(\mathbb{R}^3_+,dx)]^3\\
u_0\ &\longmapsto\ \nabla v
\end{aligned}
$$

são contínuos com $||T||=M_0\leq C\sigma(t)^{-1/2}$ e $||T||=M_1\leq C$ respectivamente. Pelo Teorema 1.21, segue que $(L^2(\mathbb{R}^3_+),H^1(\mathbb{R}^3_+))_{s,2}=H^s(\mathbb{R}^3_+)$. Logo a aplicação linear

$$
\begin{aligned}
T:\ H^s(\mathbb{R}^3_+,dx)\ &\longrightarrow\ (L^2(\mathbb{R}^3_+,dx))^3\\
u_0\ &\longmapsto\ \nabla v
\end{aligned}
$$

é limitada e além disso,

$$||T|| \leq C^{1-s}\sigma(t)^{-\frac{1-s}{2}}C^s = C\sigma(t)^{-\frac{1-s}{2}},$$

ou seja, temos

$$\sup_{0\leq t\leq T} \sigma(t)^{1-s}\int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla v|^2 dx \leq C||u_0||^2_{H^s(\mathbb{R}^3_+)}.$$

Além disso, os operadores

$$\begin{array}{rrcl} S: & L^2(\mathbb{R}^3_+, dx) & \longrightarrow & L^2((0,T)\times\mathbb{R}^3_+, \sigma(t)dtdx) \\ & u_0 & \longmapsto & \dot{v} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rrcl} S: & H^1(\mathbb{R}^3_+, dx) & \longrightarrow & L^2((0,T)\times\mathbb{R}^3_+, dtdx) \\ & u_0 & \longmapsto & \dot{v} \end{array}$$

são lineares contínuos. Novamente pelo Teorema 1.21, temos $(L^2(\mathbb{R}^3_+), H^1(\mathbb{R}^3_+))_{s,2} = H^s(\mathbb{R}^3_+)$. Pelo Teorema 1.22, obtemos

$$(L^2([0,T]\times\mathbb{R}^3_+, \sigma(t)dxdt), L^2([0,T]\times\mathbb{R}^3_+, dxdt))_{s,2} = L^2([0,T]\times\mathbb{R}^3_+, \sigma^{1-s}(t)dxdt).$$

Logo, a aplicação linear

$$\begin{array}{rrcl} S: & H^s((0,T)\times\mathbb{R}^3_+, dtdx) & \longrightarrow & L^2((0,1)\times\mathbb{R}^3_+, \sigma^{1-s}(t)dtdx) \\ & u_0 & \longmapsto & \dot{v} \end{array}$$

é linear limitada, ou seja, existe $C>0$ tal que

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^{1-s}(t)\rho|\dot{v}|^2 dxdt \leq C||u_0||^2_{H^s(\mathbb{R}^3_+)}.$$

Portanto, se $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^3_+)$, vale a seguinte estimativa

$$\sup_{0\leq t\leq T} \sigma^{1-s}(t)\int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla v|^2 dx + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^{1-s}(t)\rho|\dot{v}|^2 dxdt \leq C||u_0||^2_{H^s(\mathbb{R}^3_+)},$$

que é a estimativa desejada para v. ■

Para estabelecer estimativas semelhantes para w, necessitaremos de uma limitação que será demonstrada no próximo lema em seu caso geral, mas que será apenas utilizada para o caso particular $p=2$.

Lema 2.11. *Seja w a solução suave de (2.36). Então*

$$||\nabla((\lambda+\mu)\operatorname{div} w - (P-\tilde{P}))||_p \leq C(||\rho\dot{w}||_p + ||\rho f||_p + ||\nabla w||_p + ||w||_p).$$

Demonstração: De maneira análoga à v, podemos escrever a identidade

$$(\lambda+\mu)\Delta w^j = \tilde{\tilde{F}}_{x_j} + (\lambda+\mu)\tilde{\tilde{\omega}}^{j,k}_{x_k} + (P-\tilde{P})_{x_j},$$

onde $\tilde{\tilde{F}} = (\lambda+\mu)\operatorname{div} w - P(\rho) + P(\tilde{\rho})$ e $\tilde{\tilde{\omega}}^{j,k} = w^j_{x_k} - w^k_{x_j}$.

Pela mesma demonstração do Lema 2.9, garantimos que

$$||\nabla\tilde{\tilde{F}}||_p + ||\nabla\tilde{\tilde{\omega}}||_p \leq C(||\rho\dot{w}||_p + ||\nabla w||_p + ||w||_p + ||\rho f||_p),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} ||\nabla\tilde{\tilde{F}}||_p &= ||\nabla((\lambda+\mu)\operatorname{div} w - (P-\tilde{P}))||_p \\ &\leq C(||\rho\dot{w}||_p + ||\rho f||_p + ||\nabla w||_p + ||w||_p). \end{aligned}$$

■

Agora vamos obter estimativa semelhante para a solução suave do problema (2.36). Como w_0 é nulo, obteremos estimativas sem os pesos que se fizeram necessários para a estimativa de v.

Teorema 2.12. *Seja w a solução suave de (2.36). Então*

$$\sup_{0\leq t\leq T}\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla w|^2dx + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|\dot{w}|^2dxdt \leq C(C_0+C_f)^\theta.$$

Demonstração: Multiplicando (2.36) por w^j_t e somando em j, temos

$$\rho|\dot{w}|^2 - \rho\dot{w}^j u.\nabla w^j = \mu(\Delta w^j)w^j_t + \lambda(\operatorname{div} w)_j w^j_t - (P-\tilde{P})_j w^j_t + \rho f^j w^j_t.$$

Integrando em $\mathbb{R}^3_+$, vem

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|\dot{w}|^2dx - \int_{\mathbb{R}^3_+}\rho\dot{w}^j u.\nabla w^j dx &= -\mu\int_{\mathbb{R}^3_+}(\nabla w^j)(\nabla w^j)_t dx + \mu\int_{\partial\mathbb{R}^3_+} w^j_t(\nabla w^j).\nu dS(x) \\ &\quad -\lambda\int_{\mathbb{R}^3_+}(\operatorname{div} w)(\operatorname{div} w)_t dx + \int_{\mathbb{R}^3_+}(P-\tilde{P})(\operatorname{div} w)_t dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^3_+}\rho f^j w^j_t dx. \end{aligned}$$

Dai,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|\dot{w}|^2dx &+ \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{2}\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla w|^2dx + \frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^3_+}|\operatorname{div} w|^2dx - \int_{\mathbb{R}^3_+}(P-\tilde{P})\operatorname{div} w\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3_+}\rho\dot{w}^j u.\nabla w^j dx - \int_{\mathbb{R}^3_+}P_t w^j_j dx \\ &\quad + \mu\int_{\partial\mathbb{R}^3_+} w^j_t(\nabla w^j).\nu dS(x) + \int_{\mathbb{R}^3_+}\rho f^j w^j_t dx \\ &\equiv I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Vamos estimar cada integral separadamente. Temos que

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathbb{R}^3_+} \rho \dot{w}^j u.\nabla w^j dx \\
&\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^3_+} \rho|\dot{w}|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^3_+} \rho|u|^3 dx\right)^{1/3}||\nabla w||_6 \\
&\leq C(C_0+C_f)^\theta\left(\int_{\mathbb{R}^3_+} \rho|\dot{w}|^2 dx\right)^{1/2}\Big(||\rho\dot{w}||_2+||\nabla w||_2+||f||_2+||w||_2+||P-\tilde{P}||_6\Big) \\
&\leq C(C_0+C_f)^\theta + C(C_0+C_f)^\theta\int_{\mathbb{R}^3_+} \rho|\dot{w}|^2 dx + C(C_0+C_f)^\theta\int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla w|^2 dx,
\end{aligned}$$

onde usamos a estimativa de energia, (2.22) e estimativa do mesmo tipo do Lema 2.9 item (f) para w.

Pelo Lema 2.11 e seguindo a demonstração do Lema 3.3 de [28], segue que

$$\begin{aligned}
I_2 &= -\int_{\mathbb{R}^3_+} P_t w^j_j dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^3_+} P'(\rho)\rho_t w^j_j dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3_+} P'(\rho)\operatorname{div}(\rho u) w^j_j dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3_+} P'(\rho)(u.\nabla\rho) w^j_j dx + \int_{\mathbb{R}^3_+} P'(\rho)\rho \operatorname{div} u \operatorname{div} w dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3_+} \nabla(P-\tilde{P}) u \operatorname{div} w dx + C\int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u||\nabla w| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3_+} \operatorname{div}((P-\tilde{P})u)\operatorname{div} w dx - \int_{\mathbb{R}^3_+} (P-\tilde{P})(\operatorname{div} u)(\operatorname{div} w) dx + C\int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u||\nabla w| dx \\
&\leq -\int_{\mathbb{R}^3_+} (P-\tilde{P}) u.\nabla(\operatorname{div} w) dx + C\int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u||\nabla w| dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^3_+} (P-\tilde{P}) u.\nabla\left(\operatorname{div} w - \frac{(P-\tilde{P})}{\lambda+\mu}\right) dx - \int_{\mathbb{R}^3_+} (P-\tilde{P}) u.\nabla\left(\frac{P-\tilde{P}}{\lambda+\mu}\right) dx \\
&\quad + C\int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u||\nabla w| dx.
\end{aligned}$$

Seguindo com a estimativa de I_2, obtemos

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq C\int_{\mathbb{R}^3_+}|u|\left|\nabla\left(\operatorname{div}w-\frac{(P-\tilde{P})}{\lambda+\mu}\right)\right|dx-\frac{1}{2(\lambda+\mu)}\int_{\mathbb{R}^3_+}u.\nabla\left((P-\tilde{P})^2\right)dx\\
&\quad +C\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u||\nabla w|dx\\
&= C\int_{\mathbb{R}^3_+}|u|\left|\nabla\left(\operatorname{div}w-\frac{(P-\tilde{P})}{\lambda+\mu}\right)\right|dx+C\int_{\mathbb{R}^3_+}\operatorname{div}u(P-\tilde{P})^2dx+C\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u||\nabla w|dx\\
&\leq C(C_0+C_f)^\theta\int_{\mathbb{R}^3_+}\left|\nabla\left(\operatorname{div}w-\frac{(P-\tilde{P})}{\lambda+\mu}\right)\right|^2dx+C\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^2dx+C\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla w|^2dx\\
&\leq C(C_0+C_f)^\theta+C(C_0+C_f)^\theta\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|\dot{w}|^2dx+C\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^2dx+C\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla w|^2dx.
\end{aligned}$$

Quanto a I_3, temos:

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{\mathbb{R}^3_+}\rho f^j w^j_t dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^3_+}\rho f^j(\dot{w}^j-u.\nabla w^j)dx\\
&\leq C(C_0+C_f)^\theta\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|\dot{w}|^2dx+C\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|f|^3dx\right)^{1/3}\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}|u|^6dx\right)^{1/6}\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla w|^2dx\right)^{1/2}\\
&\leq C(C_0+C_f)^\theta\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|\dot{w}|^2dx+C(C_0+C_f)^\theta\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla w|^2dx\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Finalmente para I_4 temos:

$$\begin{aligned}
I_4 &= \mu\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}w^j_t(\nabla w^j).\nu dS(x)\\
&= \mu\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}w^j_t w^j_k\nu^k dS(x)\\
&= -\mu\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}w^j_t w^j_3 dS(x)\\
&= -\mu\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}K^{-1}w^j_t w^j dS(x)\\
&= -\frac{\mu}{2}\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}(K^{-1}|w|^2)_t dS(x)\\
&= -\frac{\mu}{2}\frac{d}{dt}\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}K^{-1}|w|^2 dS(x).
\end{aligned}$$

Logo, concluímos que

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^3_+} \rho|\dot{w}|^2 dx \\
& + \left(\frac{\mu}{2} \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla w|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^3_+} |\operatorname{div} w|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3_+} (P - \tilde{P}) \operatorname{div} w dx + \frac{\mu}{2} \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} K|w|^2 dS(x) \right)_t \\
\leq \; & C(C_0 + C_f)^\theta + C(C_0 + C_f)^\theta \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u|^2 dx + C \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u||\nabla w| dx \\
& + C(C_0 + C_f)^\theta \int_{\mathbb{R}^3_+} \rho|\dot{w}|^2 dx + C \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla w|^2 dx \\
& + C(C_0 + C_f)^\theta \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla w|^2 dx \right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Integrando em $(0, t)$ e utilizando o fato de que $C(C_0 + C_f)^\theta$ é suficientemente pequeno, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} \rho|\dot{w}|^2 dx ds \; & + \; \frac{\mu}{2} \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla w|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^3_+} |\operatorname{div} w|^2 dx + \frac{\mu}{2} \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} K|w|^2 dS(x) \\
& \leq \; C(C_0 + C_f)^\theta + \int_{\mathbb{R}^3_+} (P - \tilde{P})(\operatorname{div} w) dx \\
& \quad + CM_q \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u|^2 dx ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla w|^2 dx ds \right)^{1/2} \\
& \leq \; C(C_0 + C_f)^\theta + C(C_0 + C_f)^\theta \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla w|^2 dx.
\end{aligned}
$$

Daí, usando novamente que $C_0 + C_f$ é arbitrariamente pequeno, obtemos o resultado. ■

Agora sim estamos aptos a concluir a estimativa (2.32). De fato, como v e w são soluções de (2.35) e (2.36), respectivamente, e $u_0 = v_0$, podemos garantir que $u = v + w$. (Aqui estamos usando a unicidade do sistema linear $\mathcal{L}(z) = \nabla(P - \tilde{P}) + \rho f$ com a condição inicial $z_{t=0} = u_0$. Notemos que $z = v + w$ e $z = u$ são soluções desse problema). Desta forma, pelos Teoremas 2.10 e 2.12, obtemos (2.32).

2.3.2 Estimativa com Expoente $2 - s$

O objetivo dessa subseção será estabelecer a estimativa (2.33). Neste caso, não necessitaremos separar a solução u como soma de outras duas funções e nem necessitaremos do argumento de interpolação, como foi feito na subseção anterior. Porém para se obter tal estimativa necessitamos da estimativa (2.32).

Teorema 2.13. *Sejam $s > 1/2$ e u a solução suave de (2.1) com $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^3_+)$. Então*

$$\sigma^{2-s}\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|\dot{u}|^2dx + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^{2-s}|\nabla\dot{u}|^2dxdt \leq C(C_0 + \|u_0\|_{H^s} + C_f)^\theta. \tag{2.38}$$

Demonstração: Tomaremos mais uma vez a equação do momento escrita como

$$\rho\dot{u}^j + P_j = \mu\Delta u^j + \lambda \operatorname{div} u_j + \rho f^j.$$

Como em [16] e [28], aplicando o operador $\sigma^m\dot{u}^j\left(\partial_t(.) + \operatorname{div}(.u)\right)$, para $m \geq 1$, temos

$$\begin{aligned}
\sigma^m\rho\dot{u}^j_t\dot{u}^j + \sigma^m\rho u.\nabla\dot{u}^j\dot{u}^j \quad &+ \quad \sigma^m\dot{u}^jP_{jt} + \sigma^m\dot{u}^j\operatorname{div}(P_ju)\\
&= \quad \mu\sigma^m\dot{u}^j(\Delta u^j_t + \operatorname{div}(u\Delta u^j))\\
&\quad\quad +\lambda\sigma^m\dot{u}^j(\partial_t\partial_j\operatorname{div} u + \operatorname{div}(u\partial_j\operatorname{div} u))\\
&\quad\quad +\sigma^m\rho\dot{u}^jf^j_t + \sigma^m\rho u^kf^j_k.
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\sigma^m\rho\dot{u}^j_t\dot{u}^j + \sigma^m\rho u.\nabla\dot{u}^j\dot{u}^j &= \frac{\sigma^m}{2}\left(\rho\partial_t(|\dot{u}|^2) + \rho u.\nabla(|\dot{u}|^2)\right)\\
&= \partial_t\left(\frac{\sigma^m}{2}\rho|\dot{u}|^2\right) - \frac{m}{2}\sigma^{m-1}\sigma'\rho|\dot{u}|^2\\
&\quad -\frac{\sigma^m}{2}\rho_t|\dot{u}|^2 + \frac{\sigma^m}{2}\rho u.\nabla(|\dot{u}|^2).
\end{aligned}$$

Integrando em $\mathbb{R}^3_+$, temos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sigma^m}{2}\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|\dot{u}|^2dx\right)_t \quad &- \quad \frac{m}{2}\sigma'\sigma^{m-1}\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|\dot{u}|^2dx\\
&= \quad -\sigma^m\int_{\mathbb{R}^3_+}\dot{u}^j\left(P_{jt} + \operatorname{div}(P_ju)\right)dx\\
&\quad\quad +\mu\sigma^m\int_{\mathbb{R}^3_+}\dot{u}^j(\Delta u^j_t + \operatorname{div}(u\Delta u^j))dx\\
&\quad\quad +\lambda\sigma^m\int_{\mathbb{R}^3_+}\dot{u}^j(\partial_t\partial_j\operatorname{div} u + \operatorname{div}(u\partial_j\operatorname{div} u))dx\\
&\quad\quad +\sigma^m\int_{\mathbb{R}^3_+}(\rho\dot{u}^jf^j_t + \rho u^kf^j_k)dx\\
&\equiv \quad \sum_{i=1}^4 N_i.
\end{aligned}$$

Vamos estimar cada termo separadamente. Integrando por partes,

$$\begin{aligned}
N_1 &= -\int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^m \dot{u}^j \left(\partial_t P_j + \operatorname{div}(P_j u)\right) dx \\
&= \sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j_j P' \rho_t dx - \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \sigma^m \dot{u}^j \nu^j P_t dS_x \\
&\quad +\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j_k P_j u^k - \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \sigma^m \dot{u}^j P_j u.\nu dS_x \\
&= \sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j_j P'(-\rho \operatorname{div} u - u.\nabla\rho) dx + \sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j_k P_j u^k dx \\
&= -\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} P' \rho \dot{u}^j_j \operatorname{div} u dx - \sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j_j u.\nabla P dx \\
&\quad -\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} (P - \tilde{P})(\dot{u}^j_{jk} u^k + \dot{u}^j_k u^k_j) dx + \sigma^m \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} (P - \tilde{P}) \dot{u}^j_k u^k \nu^j dS_x \\
&= -\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} P' \rho \dot{u}^j_j \operatorname{div} u dx + \sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} (P - \tilde{P})(\dot{u}^j_{jk} u^k + \dot{u}^j_j u^k_k) dx \\
&\quad -\sigma^m \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} (P - \tilde{P})(\dot{u}^j_j u.\nu) dS_x - \sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} (P - \tilde{P})(\dot{u}^j_{jk} u^k + \dot{u}^j_k u^k_j) dx \\
&= -\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} \left(P' \rho \dot{u}^j_j \operatorname{div} u - P \dot{u}^j_j u^k_k + P \dot{u}^j_k u^k_j\right) dx \\
&\leq C(\bar{\rho}) \sigma^m ||\nabla u||_2 ||\nabla \dot{u}||_2 \\
&\leq C(\bar{\rho}) C(\varepsilon) \sigma^m ||\nabla u||_2^2 + C(\bar{\rho}) \varepsilon \sigma^m ||\nabla \dot{u}||_2^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_2 &= \mu \sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j (\Delta u^j_t + \operatorname{div}(u \Delta u^j)) dx \\
&= \mu \sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} (\dot{u}^j u^j_{kkt} + \dot{u}^j (u^k u^j_{ll})_k) dx \\
&= -\mu \sigma^m \left\{ \int_{\mathbb{R}^3_+} (\dot{u}^j_k u^j_{kt}) dx - \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j u^j_{kt} \nu^k dS_x \right\} \\
&\quad -\mu \sigma^m \left\{ \int_{\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j_k u^k u^j_{ll} dx - \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j u^k u^j_{ll} \nu^k dS_x \right\} \\
&= -\mu \sigma^m \left\{ \int_{\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j_k (\dot{u}^j_k - (u.\nabla u^j)_k) dx - \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j u^j_{kt} \nu^k dS_x \right\} \\
&\quad +\mu \sigma^m \left\{ \int_{\mathbb{R}^3_+} (\dot{u}^j_{kl} u^k u^j_l + \dot{u}^j_k u^k_l u^j_l) dx - \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j_k u^k u^j_l \nu^l dS_x \right\}.
\end{aligned}$$

Proceguindo com a estimativa de N_2, segue que

$$\begin{aligned}
N_2 &= -\mu\sigma^m \left\{ \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla \dot{u}|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j_k u^l_k u^j_l dx - \int_{\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j_k u^l u^j_{kl} dx - \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j u^j_{kt} \nu^k dS_x \right\} \\
&\quad +\mu\sigma^m \left\{ \int_{\mathbb{R}^3_+} (\dot{u}^j_{kl} u^k u^j_l + \dot{u}^j_k u^k_l u^j_l) dx - \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j_k u^k u^j_l \nu^l dS_x \right\} \\
&= -\mu\sigma^m \left\{ \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla \dot{u}|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j_k u^l_k u^j_l dx + \int_{\mathbb{R}^3_+} (\dot{u}^j_{kl} u^l u^j_k + \dot{u}^j_k u^l_l u^j_k) dx - \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j u^j_{kt} \nu^k dS_x \right\} \\
&\quad +\mu\sigma^m \left\{ \int_{\mathbb{R}^3_+} (\dot{u}^j_{kl} u^k u^j_l + \dot{u}^j_k u^k_l u^j_l) dx - \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j_k u^k u^j_l \nu^l dS_x \right\} \\
&= -\mu\sigma^m \left\{ \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla \dot{u}|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3_+} (\dot{u}^j_k u^l_k u^j_l - \dot{u}^j_k u^l_l u^j_k + \dot{u}^j_k u^k_l u^j_l) dx \right\} \\
&\quad +\mu\sigma^m \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} (\dot{u}^j u^j_{kt} \nu^k - \dot{u}^j_k u^k u^j_l \nu^l) dS_x.
\end{aligned}$$

Para estimar o termo de fronteira acima, escrevemos

$$\mu\sigma^m \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} (\dot{u}^j u^j_{kt} \nu^k - \dot{u}^j_k u^k u^j_l \nu^l) dS_x \equiv N_{21} + N_{22},$$

utilizaremos novamente que para toda $h \in (C^1 \cap W^{1,1})(\overline{\mathbb{R}^3_+})$, tem-se

$$\int_{\partial\mathbb{R}^3_+} h(x) dS_x = \int_{\{0 \le x_3 \le 1\}} [h(x) + (x_3 - 1) h_{x_3}(x)] dx.$$

Observemos primeiramente que podemos assumir que $j \neq 3$ em N_{21} e $k \neq 3$ em N_{22} uma vez que $u^3 = 0$ em $\partial\mathbb{R}^3_+$. Estimando cada parcela separadamente, temos

$$\begin{aligned}
N_{21} &= -\mu\sigma^m \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j u^j_{3t} dS_x \\
&= -\mu\sigma^m \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} K^{-1} \dot{u}^j u^j_t dS_x \\
&= -\mu\sigma^m \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} K^{-1} \dot{u}^j (\dot{u}^j - u^k u^j_k) dS_x \\
&= -\mu\sigma^m \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} K^{-1} |\dot{u}|^2 dS_x + \mu\sigma^m \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} K^{-1} \dot{u}^j u^k u^j_k dS_x \\
&\le \mu\sigma^m \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} K^{-1} \dot{u}^j u^k u^j_k dS_x \\
&= \mu\sigma^m \int_{\{0 \le x_3 \le 1\}} K^{-1} (\dot{u}^j u^k u^j_k + (x_3 - 1)[\dot{u}^j_3 u^k u^j_k + \dot{u}^j u^k_3 u^j_k + \dot{u}^j u^k u^j_{k3}]) dx.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
N_{21} &\leq C\mu\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} (|\nabla\dot{u}||u||\nabla u| + |\dot{u}||\nabla u||u| + |\dot{u}||\nabla u|^2)dx \\
&\quad -\mu\sigma^m \int_{\{0\leq x_3\leq 1\}} (x_3-1)(K^{-1}\dot{u}^j_k u^k u^j_3 + K^{-1}\dot{u}^j u^k_k u^j_3 + (K^{-1})_k \dot{u}^j u^k u^j_3)dx \\
&\quad +\mu\sigma^m \int_{\{x_3=0\}\cup\{x_3=1\}} K^{-1}(x_3-1)\dot{u}^j u^k u^j_3 \nu^k dS_x.
\end{aligned}$$

Notemos que este termo de fronteira que aparece na estimativa acima é nulo, pois em $x_3 = 0$ temos $u^k\nu^k = 0$ e na parte $x_3 = 1$ o termo $(x_3 - 1)$ anula o integrando. Desta forma,

$$N_{21} \leq C\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} (|\nabla\dot{u}||u||\nabla u| + |\dot{u}||\nabla u||u| + |\dot{u}||\nabla u|^2)dx$$

A outra parcela de fronteira é estimada de maneira similar:

$$\begin{aligned}
N_{22} &= \mu\sigma^m \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} (\dot{u}^j_k u^k u^j_3)dS_x \\
&= \mu\sigma^m \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} K^{-1}(\dot{u}^j_k u^k u^j)dS_x \\
&= \mu\sigma^m \int_{\{0\leq x_3\leq 1\}} K^{-1}(\dot{u}^j_k u^k u^j + (x_3-1)[\dot{u}^j_{k3} u^k u^j + \dot{u}^j_k u^k_3 u^j + \dot{u}^j_k u^k u^j_3])dx \\
&\leq C\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} (|\nabla\dot{u}||u|^2 + |\nabla\dot{u}||\nabla u||u|)dx \\
&\quad -\int_{\{0\leq x_3\leq 1\}} (x_3-1)(K^{-1}\dot{u}^j_3 u^k_k u^j + K^{-1}\dot{u}^j_3 u^k u^j_k + (K^{-1})_k \dot{u}^j_3 u^k u^j)dx \\
&\quad +\mu\sigma^m \int_{\{x_3=0\}\cup\{x_3=1\}} (x_3-1)K^{-1}(\dot{u}^j_3 u^k u^j \nu^k)dS_x.
\end{aligned}$$

De modo análogo, o termo de fronteira é nulo. Assim,

$$N_{22} \leq C\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} (|\nabla u||u|^2 + |\nabla\dot{u}||\nabla u||u| + |\nabla\dot{u}||u|^2)dx.$$

Quanto a N_3, temos:

$$\begin{aligned}
N_3 &= \lambda\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j \left(\partial_t\partial_j \operatorname{div} u + \operatorname{div}(u\partial_j \operatorname{div} u)\right) dx \\
&= -\lambda\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} (\dot{u}^j_j D_t)dx + \lambda\sigma^m \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j D_t \nu^j dS_x + \lambda\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j (DD_j + u^k D_{jk})dx \\
&= -\lambda\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} (\dot{u}^j_j D_t)dx + \lambda\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j DD_j dx + \int_{\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j u^k D_{jk} dx \\
&\equiv N_{31} + N_{32} + N_{33}.
\end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} N_{31} &= -\lambda\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j_j D_t dx \\ &= -\lambda\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j_j \dot{D} dx + \lambda\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j_j u.\nabla D dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{32} &= \frac{\lambda}{2}\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j (|D|^2)_j dx \\ &= -\frac{\lambda}{2}\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j_j |D|^2 dx + \frac{\lambda}{2}\sigma^m \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j \nu^j |D|^2 dS_x \\ &\leq C\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla\dot{u}||\nabla u|^2 dx \\ &\leq C\varepsilon\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla\dot{u}|^2 dx + C\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u|^4 dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{33} &= \lambda\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} u^k \dot{u}^j D_{jk} dx \\ &= -\lambda\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} (\dot{u}^j_j u^k D_k + \dot{u}^j u^k_j D_k) dx + \lambda\sigma^m \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} D_k u^k \dot{u}^j \nu^j dS_x \\ &= -\lambda\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j_j u.\nabla D dx + \lambda\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} (\dot{u}^j_k u^k_j D + \dot{u}^j u^k_{kj} D) dx \\ &\quad -\lambda\sigma^m \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j u^k_j u^l_l \nu^k dS_x \\ &= -\lambda\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j_j u.\nabla D dx + \lambda\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j_k u^k_j D dx \\ &\quad -\frac{\lambda}{2}\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j_j |D|^2 dx + \frac{\lambda}{2}\sigma^m \int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j \nu^j |D|^2 dS_x. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} N_{31} + N_{33} &= -\lambda\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j_j \dot{D} dx + \lambda\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j_k u^k_j D dx - \frac{\lambda}{2}\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j_j |D|^2 dx \\ &\leq -\lambda\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} \dot{u}^j_j \dot{D} dx + \varepsilon\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla\dot{u}|^2 dx + C\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u|^4 dx \\ &= -\lambda\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} \dot{D}(u^j_t + u.\nabla u^j)_j dx + \varepsilon\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla\dot{u}|^2 dx + C\sigma^m \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u|^4 dx \end{aligned}$$

Continuando com a estimativa acima, segue que

$$
\begin{aligned}
N_{31}+N_{33} &\leq -\lambda\sigma^m\int_{\mathbb{R}^3_+}\dot{D}(D_t+u.\nabla D+u^k_ju^j_k)dx+\varepsilon\sigma^m\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla\dot{u}|^2dx+C\sigma^m\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^4dx\\
&= -\lambda\sigma^m\int_{\mathbb{R}^3_+}|\dot{D}|^2dx-\lambda\sigma^m\int_{\mathbb{R}^3_+}\dot{D}u^k_ju^j_kdx\\
&\quad +\varepsilon\sigma^m\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla\dot{u}|^2dx+C\sigma^m\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^4dx\\
&\leq -\lambda\sigma^m\int_{\mathbb{R}^3_+}|\dot{D}|^2dx+\varepsilon\sigma^m\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla\dot{u}|^2dx+C\sigma^m\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^4dx,
\end{aligned}
$$

Por fim, temos

$$
\begin{aligned}
N_4 &= \sigma^m\int_{\mathbb{R}^3_+}(\rho\dot{u}^jf^j_t+\rho\dot{u}^ju^kf^j_k)dx\\
&\leq \varepsilon\sigma^{m-1}\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|\dot{u}|^2dx+C\sigma^{m+1}\int_{\mathbb{R}^3_+}|f_t|^2dx\\
&\quad +\varepsilon\sigma^m\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|\dot{u}|^2dx+C\sigma^{m+1}\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla f|^2|u|^2dx\\
&\leq \varepsilon\sigma^{m-1}\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|\dot{u}|^2dx+C\sigma^{m+1}\int_{\mathbb{R}^3_+}|f_t|^2dx\\
&\quad +C\left(\sigma^{(3-3s)/2}\int_{\mathbb{R}^3_+}|u|^4dx\right)^{1/2}\left(\sigma^{(4m+1+3s)/2}\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla f|^4dx\right)^{1/2}\\
&\leq \varepsilon\sigma^{m-1}\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|\dot{u}|^2dx+C\sigma^{m+1}\int_{\mathbb{R}^3_+}|f_t|^2dx\\
&\quad +C(C_0+C_f)^\theta\left(\sigma^{(4m+1+3s)/2}\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla f|^4dx\right)^{1/2},
\end{aligned}
$$

uma vez que

$$
\begin{aligned}
\sigma^{(3-3s)/2}||u||_4^4d\tau &\leq C\sigma^{(3-3s)/2}||u||_2||\nabla u||_2^3\\
&= C\sigma^{(3-3s)/2}\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}|u|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^2dx\right)^{3/2}\\
&\leq C(C_0+C_f)\sigma^{(3-3s)/2}\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^2\right)^{3/2}\\
&= C(C_0+C_f)\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^{1-s}|\nabla u|^2dx\right)^{3/2}\\
&\leq C(C_0+C_f)^\theta.
\end{aligned}
$$

Com estas estimativas, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\sigma^m}{2}\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|\dot{u}|^2dx\right)_t &- \frac{m}{2}\sigma'\sigma^{m-1}\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|\dot{u}|^2dx\\
&\leq C(\bar{\rho})C(\varepsilon)\sigma^m\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^2dx + C(\bar{\rho})\varepsilon\sigma^m\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla\dot{u}|^2dx\\
&-\mu\sigma^m\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla\dot{u}|^2dx + C\sigma^m\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^4dx\\
&+C\varepsilon\sigma^m\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla\dot{u}|^2dx + C\sigma^m\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^4dx - \lambda\sigma^m\int_{\mathbb{R}^3_+}|\dot{D}|^2dx\\
&+C\sigma^m\int_{\mathbb{R}^3_+}|\dot{u}|^2dx + C\sigma^m\int_{\mathbb{R}^3_+}|u|^4dx\\
&+\varepsilon\sigma^{m-1}\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|\dot{u}|^2dx + C\sigma^{m+1}\int_{\mathbb{R}^3_+}|f_t|^2dx\\
&+C(C_0+C_f)^\theta\left(\sigma^{(4m+1+3s)/2}\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla f|^4dx\right)^{1/2},
\end{aligned}
$$

Integrando em $(0,T)$, fazendo $m=2-s$ e utilizando a estimativa com expoente $1-s$, temos

$$
\begin{aligned}
\sigma^m\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|\dot{u}|^2dx &+ \int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^m|\nabla\dot{u}|^2dxds\\
&\leq C(C_0+C_f)^\theta + C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^m(|\nabla u|^4+|u|^4)dxds\\
&+\int_0^T\sigma^{3-s}\int_{\mathbb{R}^3_+}|f_t|^2dxdt + \int_0^T\sigma^{(9-s)/4}\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla f|^4dx\right)^{1/2}dt\\
&\leq C(C_0+C_f)^\theta + C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+}\sigma^m(|\nabla u|^4+|u|^4)dxdt.
\end{aligned}
$$

Para concluir o resultado devemos estimar o termo $\int_0^T\sigma^{2-m}\int_{\mathbb{R}^3_+}(|\nabla u|^4+|u|^4)dxd\tau$. Utilizando o Teorema 1.5, podemos estimar o seguinte termo da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\int_0^T\sigma^{2-s}\|u\|_4^4d\tau &\leq \int_0^T\sigma^{2-s}\|u\|_2\|\nabla u\|_2^3d\tau\\
&= \int_0^T\sigma^{2-s}\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}|u|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^2dx\right)^{3/2}d\tau\\
&\leq C(C_0+C_f)^\theta\int_0^T\sigma^{2-s}\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^2dx\right)^{3/2}d\tau.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_0^T \sigma^{2-s}\|u\|_4^4 d\tau &\leq C(C_0+C_f)^{\theta}\int_0^T \sigma^{\frac{1+s}{2}}\left(\sigma^{1-s}\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^2dx\right)^{3/2}d\tau\\ &\leq C(C_0+C_f)^{\theta}.\end{aligned}$$

Quanto ao primeiro termos, façamos como no Lema 3.3 em [28]. Pelo Lema 2.9 item (f), estimativa de energia e (2.32), temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \sigma^{2-s}\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^4 dx d\tau\\
= &\int_0^T \sigma^{2-s}\|\nabla u\|_4^4 d\tau\\
\leq &\; C\int_0^T \sigma^{2-s}\|\nabla u\|_2\left(\|\rho\dot{u}\|_2+\|\nabla u\|_2+\|u\|_2+\|f\|_2+\|P-\tilde{P}\|_6\right)^3 d\tau\\
\leq &\; C\int_0^T \sigma^{2-s}\|\nabla u\|_2\left(\|\rho\dot{u}\|_2^3+\|\nabla u\|_2^3+\|u\|_2^3+\|f\|_2^3+\|P-\tilde{P}\|_6^3\right) d\tau\\
\leq &\; C(C_0+C_f)^{\theta}+C\int_0^T \sigma^{2-s}\|\nabla u\|_2\|\rho\dot{u}\|_2^3 d\tau\\
\leq &\; C(C_0+C_f)^{\theta}+C\int_0^T \sigma^{2-s}\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|\dot{u}|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|\dot{u}|^2dx\right)d\tau\\
\leq &\; C(C_0+C_f)^{\theta}\\
&+C\int_0^T \sigma^{\frac{2s-1}{2}}\left(\sigma^{1-s}\int_{\mathbb{R}^3_+}|\nabla u|^2dx\right)^{1/2}\left(\sigma^{2-s}\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|\dot{u}|^2dx\right)^{1/2}\left(\sigma^{1-s}\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|\dot{u}|^2dx\right)d\tau\\
\leq &\; C(C_0+C_f)^{\theta}+C(C_0+C_f)^{\theta}\sup_{0\leq t\leq T}\left(\sigma^{2-s}\int_{\mathbb{R}^3_+}\rho|\dot{u}|^2dx\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Novamente utilizando que C_0+C_f é suficientemente pequeno temos (2.33).

■

CAPÍTULO 3

ESTRUTURA LAGRANGIANA

Neste capítulo apresentaremos o principal resultado deste trabalho que é o estabelecimento de estrutura lagrangiana para o campo solução u do problema de Navier-Stokes (2.1)-(2.3) com dado inicial $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^3_+)$ para $s > 1/2$, ou seja, dados $t_0 \geq 0$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}^3_+}$, existe uma única aplicação $X \equiv X(.,x_0,t_0) \in C^1(I;\overline{\mathbb{R}^3_+})$, $t \in I \subset [0,\infty)$, tal que

$$X(t) \equiv X(t;x_0,t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} u(X(\tau;x_0,t_0),\tau)d\tau.$$

Vamos supor também que $\inf\limits_{\mathbb{R}^3_+} \rho_0 > 0$.

Para estabelecer tal resultado, procederemos como em [20], onde o campo velocidade u é escrito como

$$u = u_{F,\omega} + u_P,$$

sendo $u_{F,\omega}(t,.)$ um campo lipschitziano, em relação à variável espacial, e $u_P(t,.)$ é um campo log-lipschitziano, também em relação à variável espacial, para cada $t > 0$. Além disso, garantiremos que a seminorma de log-Lipschtiz do campo $u(t,.)$ é localmente integrável em relação a t.

A existência de tal curva integral $X(t;x_0,t_0)$, como veremos abaixo, é garantida sem maiores dificuldades. A dificuldade está na unicidade de tal curva integral, mais especificamente na integrabilidade local no tempo da seminorma de Lipschitz da componente $u_{F,\omega}$, numa vizinhança de $t = 0$.

Na literatura podemos citar alguns trabalhos nesta linha de pesquisa. Inicialmente, temos os trabalhos feitos por D. Hoff em [16] e M. Santos & D. Hoff em [20], onde tal estrutura lagrangiana é garantida em todo o espaço $\mathbb{R}^n$, $n = 2$ e $n = 3$, para dado inicial $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$, sendo $s > 0$ para $n = 2$, e $s > 1/2$ para $n = 3$. Outros trabalhos surgiram posteriormente a estes, como o trabalho de T. Zhang & D. Fang em [29], onde a estrutura lagrangiana é demonstrada para o caso bidimensional e coeficiente de viscosidade $\lambda = \lambda(\rho)$ dependente da densidade ρ do fluido, mas com dado inicial em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Mais recentementes temos o artigo devido a D. Hoff & M. Perepelitsa [19], que garante a estrutura lagrangiana no semiplano $\overline{\mathbb{R}^2_+}$, com dado inicial $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2_+)$, e a tese de doutorado de P. M. Pardo [24], onde se mostra a estrutura lagrangiana para fluidos não isentrópicos no plano com a velocidade inicial em H^s, $s > 0$, e com a hipótese de que a derivada convectiva da energia interna específica seja de quadrado integrável.

Primeiramente, vamos apresentar a decomposição $u = u_{F,\omega} + u_P$; cf. [19]. Para $j = 1, 2$ podemos escrever a seguinte identidade juntamente com a condição de fronteira

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)\Delta u^j = F_{x_j} + (P-\tilde{P})_{x_j} + (\lambda+\mu)\omega^{j,k}_{x_k}, & \text{em } \mathbb{R}^3_+ \\ u^j_{x_3} = K^{-1}u^j & \text{em } \partial\mathbb{R}^3_+ \end{cases}.$$

Definimos u^j_P por

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)u^j_P(x) &= -\int_{\mathbb{R}^3_+}(\Gamma(x-y)+\Gamma(x-y^*))(P-\tilde{P})_{y_j}dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^3_+}(\Gamma(x-y)+\Gamma(x-y^*))_{y_j}(P-\tilde{P})dy, \quad x\in\mathbb{R}^3_+. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Para realizar a integração por partes da expressão anterior é necessário fazer a integração sobre o conjunto $\mathbb{R}^3_+ \setminus B_\varepsilon(x)$ e depois fazer $\varepsilon \to 0$. Neste ponto aparecem dois termos de fronteira. Um deles é o termo

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)}(\Gamma(x-y)+\Gamma(x-y^*))(P-\tilde{P})\nu^j dS(y)$$

que tende a zero quando $\varepsilon \to 0$, uma vez que $(P-\tilde{P})$ é limitado, $\Gamma(x-y)+\Gamma(x-y^*)$ é da ordem ε^{-1} e $|\partial B_\varepsilon(x)|$ é da ordem de ε^2. O outro termo de fronteira é dado por

$$\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}(\Gamma(x-y)+\Gamma(x-y^*))(P-\tilde{P})\nu^j dS(y)$$

e é nulo, visto que $\nu^j = 0$ para $j = 1, 2$.

Temos que $u^j_P \in L^\infty(R^3_+)$, pela Proposição 1.17, e satisfaz o seguinte problema

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)\Delta u^j_P = (P-\tilde{P})_{x_j}, & \text{em } \mathbb{R}^3_+ \\ \left(u^j_P\right)_{x_3} = 0, & \text{em } \partial\mathbb{R}^3_+ \end{cases};$$

v. Seção 1.6. Além disso, fazendo a extensão par na terceira variável de u^j_P, garantimos que u^j_P satisfaz

$$(\lambda+\mu)\Delta u^j_P = (P-\tilde{P})_{x_j}$$

no sentido das distribuições temperadas em todo o espaço $\mathbb{R}^3$. Daí, tomando a transformada de Fourier, temos

$$-(\lambda+\mu)|\xi|^2\widehat{u^j_P} = i\xi_j\widehat{(P-\tilde{P})}.$$

Como $\widehat{(\partial_{x_i}u^j_P)} = i\xi_i\widehat{u^j_P}$ segue que

$$-(\lambda+\mu)\widehat{(\partial_{x_i}u^j_P)} = \frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}\widehat{(P-\tilde{P})}.$$

Logo, pelo Teorema 1.9, concluímos que

$$\|\nabla u_P^j\|_p \leq C\|P - \tilde{P}\|_p, \quad 1 < p < \infty.$$

Definimos $u_{F,\omega}^j \equiv u^j - u_P^j$. Assim, $u_{F,\omega}^j$ satisfaz o seguinte problema

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)\Delta u_{F,\omega}^j = F_{x_j} + (\lambda+\mu)\omega_{x_k}^{j,k}, & \text{em } \mathbb{R}_+^3 \\ \left(u_{F,\omega}^j\right)_{x_3} = K^{-1}(y)u^j(y), & \text{em } \partial\mathbb{R}_+^3 \end{cases}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \|\nabla u_{F,\omega}\|_p &\leq \|\nabla u\|_p + \|\nabla u_P^j\|_p \\ &\leq C(\|F\|_p + \|\omega\|_p + \|P - \tilde{P}\|_p + \|u\|_p), \quad 1 < p < \infty. \end{aligned}$$

Necessitaremos também da segunda derivada da componente $u_{F,\omega}^j$. Para isso, faremos uma nova decomposição. Definimos u_B^j por

$$u_B^j(x) = -\int_{\partial\mathbb{R}_+^3} \Gamma(x-y)K^{-1}(y)u^j(y)dS(y).$$

Desta forma, u_B^j satisfaz o seguinte problema (v. Seção 1.6)

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)\Delta u_B^j = 0, & \text{em } \mathbb{R}_+^3 \\ \left(u_B^j\right)_{x_3} = K^{-1}u^j, & \text{em } \partial\mathbb{R}_+^3 \end{cases}$$

Logo, definindo $u_I^j \equiv u_{F,\omega}^j - u_B^j$, obtemos que u_I^j satisfaz

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)\Delta u_I^j = F_{x_j} + (\lambda+\mu)\omega_{x_k}^{j,k}, & \text{em } \mathbb{R}_+^3 \\ \left(u_I^j\right)_{x_3} = 0, & \text{em } \partial\mathbb{R}_+^3 \end{cases}$$

Seguindo raciocínio análogo à estimativa da pressão, podemos estender a equação de u_I^j a todo o $\mathbb{R}^3$ e tornar a transformada de Fourier da mesma. Assim,

$$-(\lambda+\mu)|\xi|^2\widehat{u}_I = i\xi_j\widehat{F} + (\lambda+\mu)i\xi_k\widehat{\omega^{j,k}}.$$

Como $(\widehat{\partial_{x_ix_l}u_I}) = -\xi_i\xi_l\widehat{u_I}$, temos

$$(\lambda+\mu)(\widehat{\partial_{x_i\xi_l}u_I}) = \frac{\xi_i\xi_l}{|\xi|^2}\widehat{F_{x_j}} + (\lambda+\mu)\frac{\xi_i\xi_l}{|\xi|^2}\widehat{\omega_{x_k}^{j,k}}$$

Logo, pelo Teorema 1.9, segue que

$$\|D^2u_I\|_p \leq C(\|\nabla F\|_p + \|\nabla\omega\|_p), \quad 1 < p < \infty.$$

A segunda derivada de u_B^j é estimada utilizando um resultado de integral singular sobre o bordo. Primeiramente, notemos que a primeira derivada de u_B^j está bem definida e é dada por

$$(u_B^j)_{x_i}(x) = 2\int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \Gamma_{x_i}(x-y)K^{-1}(y)u^j(y)dS(y),$$

onde

$$\Gamma_{x_j}(x-y) = C\frac{(x_i-y_i)}{(|\bar{x}-\bar{y}|^2+x_3^2)^{3/2}}$$

em $\partial\mathbb{R}^3_+$. Logo, pelo Lema 1.27 e Teorema 1.6 temos

$$||D^2u_B^j||_p \leq Ck\langle\langle K^{-1}u^j\rangle\rangle_{1-1/p,p} \leq Ck||\nabla u||_p.$$

Logo,

$$||D^2u_{F,\omega}^j||_p \leq C\left(||\nabla F||_p + ||\nabla\omega||_p + ||\nabla u||_p\right), \quad 1<p<\infty.$$

O caso $j=3$ é mais simples. Faz-se uma decomposição semelhante à anterior. Como neste caso, estamos trabalhando com com condição de Dirichlet nula sobre o bordo, a definição de u_P^3 é dada por

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)u_P^3(x) &= -\int_{\mathbb{R}^3_+}(\Gamma(x-y)-\Gamma(x-y^*))(P-\tilde{P})_{y_3}dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^3_+}(\Gamma(x-y)-\Gamma(x-y^*))_{y_3}(P-\tilde{P})dy. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Para se obter tal expressão de u_P^3 procede-se de maneira parecida ao caso $j=1,2$, onde a integral sobre $\partial\mathbb{R}^3_+$ é nula devido ao fato de $\Gamma(x-y)=\Gamma(x-y^*)$ e a integral sobre $\partial B_\varepsilon(x)$ tende a zero quando $\varepsilon\to 0$ pelo mesmo argumento do caso $j=1,2$.

Observe que u_P^3 satisfaz o problema (v. Seção 1.6)

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)\Delta u_P^3 = (P-\tilde{P})_{x_3}, & \text{em } \mathbb{R}^3_+ \\ u_P^3 = 0, & \text{em } \partial\mathbb{R}^3_+ \end{cases}.$$

Desta forma, definindo $u_{F,\omega}^3$ por $u_{F,\omega}^3 \equiv u^3 - u_P^3$, observamos que $u_{F,\omega}^3$ satisfaz

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)\Delta u_{F,\omega}^3 = F_{x_j} + (\lambda+\mu)\omega^{3,k}_{x_k}, & \text{em } \mathbb{R}^3_+ \\ u_{F,\omega}^3 = 0, & \text{em } \partial\mathbb{R}^3_+ \end{cases}$$

Utilizando o mesmo procedimento de extensão de cada uma das funções e aplicando a transformada de Fourier como anteriormente, obtemos, para $1<p<\infty$, as seguintes estimativas

$$\|\nabla u_P^3\|_p \leq C\|P-\tilde{P}\|_p$$

$$\|\nabla u_{F,\omega}^3\|_p \leq C(\|F\|_p + \|\omega\|_p)$$

e

$$\|D^2u_{F,\omega}^3\|_p \leq C(\|\nabla F\|_p + \|\nabla\omega\|_p)$$

Portanto, obtemos as seguintes estimativas com $p \in (1, \infty)$

$$\|\nabla u_P\|_p \leq C\|P - \tilde{P}\|_p$$

$$\|\nabla u_{F,\omega}\|_p \leq C(\|F\|_p + \|\omega\|_p + \|P - \tilde{P}\|_p + \|u\|_p) \tag{3.3}$$

e

$$\begin{aligned} \|D^2 u_{F,\omega}\|_p &\leq C(\|\nabla F\|_p + \|\nabla\omega\|_p + \|\nabla u\|_p) \\ &\leq C(\|\nabla F\|_p + \|\nabla\omega\|_p + \|F\|_p + \|\omega\|_p + \|u\|_p). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Observação 3.1. *O Teorema 1.9 utilizado nas estimativas acima, poderia ter sido substituído por Operadores de Riesz, como pode ser consultado na págs. 87-88 em [11]. Neste caso, deveríamos compor dois operadores de Riesz.*

3.1 Estrutura Lagrangiana para $t_0 = 0$.

Nesta seção enunciaremos e demonstraremos o resultado principal deste trabalho que é a estrutura lagrangiana para trajetórias, iniciando em tempo $t_0 = 0$, do campo solução do problema (2.1)-(2.3). A dificuldade encontra-se na integrabilidade local na vizinhança de $t = 0$ da seminorma de Lipschitz da parte $u_{F,\omega}$. Nesta etapa é que se fazem necessárias as estimativas (2.32) e (2.33).

Apesar dos resultados nesta seção serem para trajetórias iniciando em tempo $t_0 = 0$, na demonstração do resultado principal, Teorema 3.2 abaixo, usaremos trajetórias iniciando também em tempo $t_0 > 0$. As trajetórias iniciando em tempo $t_0 = 0$ serão denotadas apenas por $X(t; x_0)$ ao invés de $X(t; x_0, t_0)$.

Teorema 3.2. *Seja u o campo do Teorema 2.2. Além disso, suponhamos que $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^3_+)$, $s > 1/2$, (2.34) seja satisfeita e que $\inf\limits_{\mathbb{R}^3_+} \rho_0 > 0$. Então*

(a) Para cada $x_0 \in \overline{\mathbb{R}^3_+}$, existe uma única curva $X(., x_0) \in C([0, \infty); \overline{\mathbb{R}^3_+}) \cap C^1((0, \infty); \overline{\mathbb{R}^3_+})$ satisfazendo

$$X(t, x_0) = x_0 + \int_0^t u(X(\tau, x_0), \tau)d\tau, \tag{3.5}$$

onde fazemos a identificação $X(t, x_0) \equiv X(t, x_0, 0)$.

(b) Para cada $t > 0$, a aplicação $X(t, .) : \overline{\mathbb{R}^3_+} \to \overline{\mathbb{R}^3_+}$ é injetiva.

(c) A aplicação $X(t, .) : \overline{\mathbb{R}^3_+} \to \overline{\mathbb{R}^3_+}$ é sobrejetiva, com $\partial\mathbb{R}^3_+$ invariante.

(d) Para cada $t > 0$, $V^t \equiv X(t, .)V$ é aberto para todo conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^3_+$.

(e) *Se* $t_1, t_2 \geq 0$, *então a aplicação* $X(t_1, y) \to X(t_2, y)$, $y \in \mathbb{R}^3_+$, *é Hölder contínua. Mais precisamente, dado* $T > 0$ *tal que* $0 \leq t_1, t_2 \leq T$, *existem constantes positivas* L *e* γ *tais que, para quaisquer* $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^3_+$

$$|X(t_2, y_2) - X(t_2, y_1)| \leq C(T)|X(t_1, y_2) - X(t_1, y_1)|^{e^{-LT^\gamma}},$$

com L *e* γ *independentes de* t_1 *e* t_2 *em* $[0, T]$.

(f) *Seja* M *uma variedade parametrizada de classe* C^α, *para algum* $\alpha \in [0, 1)$, *de dimensão* $k = 1$ *ou* 2. *Então para cada* $t > 0$, $M^t \equiv X(t, .)M$ *é uma variedade de classe* C^β *de dimensão* k, *onde* $\beta = \alpha e^{L t^\gamma}$, *sendo* L *e* γ *são as mesmas constantes do item anterior.*

Faremos a demonstração dos itens desse teorema - resultado central desta tese - separadamente.

Demonstração do item (a) - Existência: Para mostrarmos a existência de uma curva satisfazendo (3.5) tomamos $X^\delta(., x_0)$ como sendo a curva integral de u^δ com ponto inicial $x_0 \in \overline{\mathbb{R}^3_+}$, isto é

$$X^\delta(t, x_0) = x_0 + \int_0^t u^\delta(X^\delta(\tau, x_0), \tau)d\tau, \quad t \in [0, \infty), \tag{3.6}$$

onde u^δ é o campo suave aproximando; v. Observação 2.3.

Mostremos que a aplicação $X^\delta(., x_0)$ é Hölder contínua em $[0, \infty)$ uniformemente em δ. Suponhamos sem perda de generalidade $t_1 \leq t_2$. Da igualdade acima, segue que

$$\begin{aligned} |X^\delta(t_1, x_0) - X^\delta(t_2, x_0)| &\leq \int_{t_1}^{t_2} ||u^\delta(x, .)||_\infty dt \\ &\leq C\int_{t_1}^{t_2} (||u^\delta||_2 + ||\nabla u^\delta||_p)dt, \quad p > 3. \end{aligned}$$

Vamos estimar separadamente cada um destes termos:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} ||u^\delta||_2 dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} |u^\delta|^2 dx\right)^{1/2} dt \\ &\leq C(t_2 - t_1)^{1/2}\left(\int_{t_1}^{t_2}\left[(C_0 + C_f) + (C_0 + C_f)^{2/3}\int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u^\delta|^2 dx\right] dt\right)^{1/2} \\ &\leq C(C_0 + C_f)^\theta((t_2 - t_1) + (t_2 - t_1)^{1/2}), \end{aligned}$$

onde usamos o Lema 2.9 item (a) e a estimativa de energia (2.21).

Para estimar o segundo termo fazemos

$$\int_{t_1}^{t_2} ||\nabla u^\delta||_p dt \leq C\int_{t_1}^{t_2} (||F^\delta||_p + ||\omega^\delta||_p + ||P^\delta - \tilde{P}^\delta||_p + ||u^\delta||_p)dt,$$

onde usamos mais uma vez o Lema 2.9, item (b), e $P^\delta \equiv P(\rho^\delta), \tilde{P}^\delta \equiv P(\tilde{\rho}^\delta), \tilde{\rho}^\delta = \tilde{\rho} + \delta$. Prosseguimos estimando agora cada um dos termo do lado direito desta desigualdade.

O termo da pressão é facilmente estimado via interpolação dos espaços L^p, junto com a estimativa de energia e (2.17):

$$\int_{t_1}^{t_2} ||P^\delta - \tilde{P}^\delta||_p dt \leq \int_{t_1}^{t_2} ||P^\delta - \tilde{P}^\delta||_2^\eta ||P^\delta - \tilde{P}||_\infty^{1-\eta} dt \leq C(C_0 + C_f)(t_1 - t_2).$$

Quanto às estimativas para F^δ e ω^δ elas são idênticas, e consideraremos $t_1, t_2 < 1$, pois como se pode ver pela estimativa que se segue, o caso $t_1, t_2 > 1$ não traz problemas na integrabilidade no tempo e o caso $t_1 < 1 < t_2$ é estimado utilizando os dois primeiros. De fato, tal estimativa é dada por

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} (||F^\delta||_p + ||\omega^\delta||_p) dt &\leq \int_{t_1}^{t_2} \left(||F^\delta||_2^{1-\eta} ||\nabla F^\delta||_2^\eta + ||\omega^\delta||_2^{1-\eta} ||\nabla \omega^\delta||_2^\eta \right) dt \\
&\leq C \int_{t_1}^{t_2} \Bigg\{ \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} (|\nabla u^\delta|^2 + |P^\delta - \tilde{P}^\delta|^2) dx \right)^{\frac{1-\eta}{2}} \\
&\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} (\rho^\delta |\dot{u}|^2 + |\nabla u^\delta|^2 + |u^\delta|^2 + |f|^2) dx \right)^{\frac{\eta}{2}} \Bigg\} dt \\
&\leq C(C_0 + C_f)^\theta \int_{t_1}^{t_2} \left(1 + \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u^\delta|^2 dx \right)^{\frac{1-\eta}{2}} \\
&\quad \times \left\{ \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} (\sigma \rho^\delta |\dot{u}^\delta|^2) dx \right)^{\frac{\eta}{2}} \sigma^{-\frac{\eta}{2}} + \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} (|\nabla u^\delta|^2 + |u^\delta|^2) dx \right)^{\frac{\eta}{2}} \right\} dt \\
&= C(C_0 + C_f)^\theta \int_{t_1}^{t_2} \left(1 + \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u^\delta|^2 dx \right)^{\frac{1-\eta}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} (\sigma \rho^\delta |\dot{u}^\delta|^2) dx \right)^{\frac{\eta}{2}} \sigma^{-\frac{\eta}{2}} dt \\
&\quad + C(C_0 + C_f)^\theta \int_{t_1}^{t_2} \left(1 + \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u^\delta|^2 dx \right)^{\frac{1-\eta}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} (|\nabla u^\delta|^2 + |u^\delta|^2) dx \right)^{\frac{\eta}{2}} dt \\
&= I + II
\end{aligned}$$

onde na primeira desigualdade usamos a desigualdade de interpolação (1.5), sendo η uma constante no intervalo $(0, 1)$, e na segunda desigualdade usamos o Lema 2.9, item (c).

Utilizando agora a desigualdade de Hölder, a estimativa de energia (2.21) e a estimativa obtida para $A_1(T)$, (2.25), obtemos

$$
\begin{aligned}
I &\leq C(C_0+C_f)^\theta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sigma^{-\eta} dt\right)^{1/2} \left[\int_{t_1}^{t_2} \left(1+\int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u^\delta|^2 dx\right)^{1-\eta} \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma\rho^\delta |\dot{u}^\delta|^2 dx\right)^{\eta} dt\right]^{1/2} \\
&\leq C(C_0+C_f)^\theta \left(t^{1-\eta}\Big|_{t_1}^{t_2}\right)^{1/2} \left[\int_{t_1}^{t_2} \left(1+\int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u^\delta|^2 dx\right) dt\right]^{\frac{1-\eta}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma\rho^\delta |\dot{u}^\delta|^2 dx dt\right)^{\eta/2} \\
&\leq C(C_0+C_f)^\theta (t_2-t_1)^{\frac{1-\eta}{2}}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
II &\leq C(C_0+C_f)^\theta \int_{t_1}^{t_2} \left(1+\int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u^\delta|^2 dx\right)^{\frac{1-\eta}{2}} \left(1+\int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u^\delta|^2 dx\right)^{\frac{\eta}{2}} dt \\
&\leq C(C_0+C_f)^\theta \left(\int_{t_1}^{t_2} 1 dt\right)^{1/2} \left[\int_{t_1}^{t_2} \left(1+\int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla u^\delta|^2 dx\right) dt\right]^{1/2} \\
&\leq C(C_0+C_f)^\theta (t_2-t_1)^{1/2} \left[(t_2-t_1)^{1/2} + C(C_0+C_f)^\theta\right] \\
&\leq C(C_0+C_f)^\theta \left[(t_2-t_1) + (t_2-t_1)^{1/2}\right].
\end{aligned}
$$

Logo, concluímos que

$$
|X^\delta(t_1,x_0) - X^\delta(t_2,x_0)| \leq \int_{t_1}^{t_2} ||u^\delta(.,t)||_\infty dt \leq C(C_0+C_f)^\theta[(t_2-t_1)+(t_2-t_1)^\gamma], \tag{3.7}
$$

para algum $\gamma \in (0,1)$. Isto nos mostra que a aplicação $X^\delta(.,x_0) : [0,\infty) \to \overline{\mathbb{R}^3_+}$ é Hölder contínua em $[0,\infty)$, uniformemente em δ. Desta forma, existe uma subsequência $X^{\delta_j}(.,x_0)$, que pode depender do ponto x_0, e uma aplicação Hölder contínua $X(.,x_0)$ tal que $X^{\delta_j}(.,x_0) \to X(.,x_0)$ uniformemente em compactos de $[0,\infty)$. Resta mostrar que X satisfaz (3.5). No que segue, por simplicidade, vamos escrever $\delta_j = \delta$. Tomando o limite quando $\delta \to 0$ no lado esquerdo de (3.6), obtemos o lado esquerdo de (3.5). Resta verificar que podemos tomar o limite no lado direito da mesma equação. Para $\varepsilon > 0$ seja $t_1 \in [0,t)$ tal que

$$
2C(C_0+C_f)^\theta(t_1+t_1^\gamma) < \frac{\varepsilon}{3}.
$$

Como as aplicações $X^\delta(.,x_0), X(.,x_0)$ são contínuas e $X^\delta(.,x_0) \to X(.,x_0)$ uniformemente em $[t_1,t)$, existe um compacto $K \subset \overline{\mathbb{R}}^3_+$ tal que

$$
X^\delta(\tau,x_0), X(\tau,x_0) \subset K \quad \forall \tau \in [t_1,t) \text{ e } 0 < \delta << 1.
$$

Logo, para $\tau \in [t_1,t)$, temos $(X^\delta(\tau,x_0),\tau) \in K \times [t_1,t)$ que é um compacto de $\overline{\mathbb{R}}^3_+ \times (0,\infty)$. Como $u^\delta \to u$ uniformemente em $K \times [t_1,t)$, existe $\delta > 0$ tal que

$$
|u^\delta(X^\delta(\tau,x_0),\tau) - u(X^\delta(\tau,x_0),\tau)| < \frac{\varepsilon}{3(t-t_1)}.
$$

Além disso, como u é continua em $K \times [t_1, t)$, existe $\eta > 0$ tal que se $(x', t'), (x'', t'') \in K \times [t_1, t)$ com $|(x', t') - (x'' - t'')| < \eta$, então

$$|u(x', t') - u(x'', t'')| < \frac{\varepsilon}{3(t - t_1)}.$$

Como $X^\delta(., x_0) \to X(., x_0)$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|(X^\delta(\tau, x_0), \tau) - (X(\tau, x_0), \tau)| < \eta.$$

Logo,

$$|u(X^\delta(\tau, x_0), \tau) - u(X(\tau, x_0), \tau)| < \frac{\varepsilon}{3(t - t_1)}.$$

Assim, para todo $\varepsilon > 0$, usando também a segunda parte da desigualdade (3.7) temos

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^t \left[u^\delta(X^\delta(\tau, x_0), \tau) d\tau - u(X(\tau, x_0), \tau) d\tau \right] \right| &= \left| \int_0^{t_1} \left[u^\delta(X^\delta(\tau, x_0), \tau) - u(X(\tau, x_0), \tau) \right] d\tau \right| \\
&\quad + \left| \int_{t_1}^t \left[u^\delta(X^\delta(\tau, x_0), \tau) - u(X(\tau, x_0), \tau) \right] d\tau \right| \\
&\leq \int_0^{t_1} \|u^\delta(., \tau)\|_\infty d\tau + \int_0^{t_1} \|u(., \tau)\|_\infty d\tau \\
&\quad + \left| \int_{t_1}^t \left[u^\delta(X^\delta(\tau, x_0), \tau) - u(X^\delta(\tau, x_0), \tau) \right] d\tau \right| \\
&\quad + \left| \int_{t_1}^t \left[u(X^\delta(\tau, x_0), \tau) - u(X(\tau, x_0), \tau) \right] d\tau \right| \\
&\leq 2C(C_0 + C_f)^\theta (t_1 + t_1^\gamma) \\
&\quad + \int_{t_1}^t \frac{\varepsilon}{3(t - t_1)} d\tau + \int_{t_1}^t \frac{\varepsilon}{3(t - t_1)} d\tau \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo,

$$X(t, x_0) = x_0 + \int_0^t u(X(\tau, x_0), \tau) d\tau.$$

■

Quanto à unicidade, obteremos uma estimativa mais geral que será útil posteriormente. Consideramos duas curvas integrais $X_1(., y_1)$ e $X_2(., y_2)$ que começam em y_1 e y_2 respectivamente e vamos mostrar que elas dependem continuamente de y_1 e y_2 (mais precisamente, veremos a desigualdade (3.8) abaixo). Para isso, demonstraremos o seguinte lema:

Lema 3.3. *Seja $T > 0$. Então existem constantes $C > 0, \gamma > 0$, tais que*

$$\int_0^T \langle u(., t) \rangle_{LL} dt \leq C T^\gamma.$$

Demonstração: Pelo Lema de Fatou, é suficiente fazer a estimativa para o campo aproximado u^δ, uma vez que

$$\int_0^T \langle u(.,t)\rangle_{LL} dt \leq \liminf_{\delta\to 0} \int_0^T \langle u^\delta(.,t)\rangle_{LL} dt.$$

Para verificar tal integrabilidade local no tempo, faremos esta verificação para $u_P^\delta(.,t)$ e $u_{F,\omega}^\delta(.,t)$ separadamente. Pelo Corolário 1.18, as fórmulas de representação (3.1) e (3.2), e pelas estimativas (2.21) e (2.17), temos

$$\begin{aligned}\int_0^t \langle u_P^\delta(.,\tau)\rangle d\tau &\leq C\int_0^t (||P^\delta - \tilde{P}^\delta||_2 + ||P^\delta - \tilde{P}^\delta||_\infty) d\tau \\ &\leq Ct.\end{aligned}$$

A integrabilidade local no tempo do termo $\langle u_{F,\omega}^\delta(.,\tau)\rangle$ é bem mais delicada e nesta parte necessitaremos da condição $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^3_+)$, para $s > 1/2$. Notemos primeiramente que

$$\int_0^t \langle u_{F,\omega}^\delta\rangle_{LL} d\tau \leq \int_0^t \langle u_{F,\omega}^\delta\rangle_{\mathbb{R}^3_+} d\tau \leq \int_0^t ||\nabla u_{F,\omega}^\delta||_\infty d\tau.$$

Para $p > 3$, temos

$$\begin{aligned}||\nabla u_{F,\omega}^\delta||_\infty &\leq C(||\nabla u_{F,\omega}^\delta||_2 + ||D^2 u_{F,\omega}^\delta||_p) \\ &\leq C(||F^\delta||_2 + ||\omega^\delta||_2 + ||u^\delta||_2 + ||\nabla F^\delta||_p + ||\nabla\omega^\delta||_p + ||\nabla u^\delta||_p) \\ &\leq C(||\nabla u^\delta||_2 + ||\rho^\delta - \tilde{\rho}||_2 + ||u^\delta||_2 + ||\rho\dot{u}^\delta||_p + ||F^\delta||_p + ||\omega^\delta||_p + ||P^\delta - \tilde{P}^\delta||_p + ||u^\delta||_p),\end{aligned}$$

onde usamos (1.1), (3.4), (3.3) e o Lema 2.9 .

Os termos $||\nabla u^\delta||_2$, $||\rho^\delta - \tilde{\rho}||_2$ e $||u^\delta||_2$ são integráveis em $[0,T]$, devido à estimativa de energia. Para os demais termos, tomando agora p no intervalo $(3,6]$, temos

$$\begin{aligned}||F^\delta||_p + ||\omega^\delta||_p &\leq C(||F^\delta||_2 + ||\nabla F^\delta||_2 + ||\omega^\delta||_2 + ||\nabla\omega^\delta||_2) \\ &\leq C(||\rho\dot{u}^\delta||_2 + ||\nabla u^\delta||_2 + ||\rho^\delta - \tilde{\rho}||_2),\end{aligned}$$

onde usamos a Proposição 1.5 e Lema 2.9.

O único termo problemático com respeito integrabilidade no tempo é $||\rho\dot{u}^\delta||_2$ e será tratado separadamente. Os outros fatores da estimativa de $\nabla u_{F,\omega}$ são estimados da seguinte maneira:

$$||P^\delta - \tilde{P}^\delta||_p \leq ||P^\delta - \tilde{P}^\delta||_2^{2/p} ||P^\delta - \tilde{P}^\delta||_\infty^{\frac{p-2}{p}}$$

e

$$||u^\delta||_p \leq C(||u^\delta||_2 + ||\nabla u^\delta||_2).$$

Estes termos também não oferecem problema na integrabilidade em $[0,T]$.

Agora trabalharemos com os dois termos restantes, $||\rho\dot{u}^\delta||_2$ e $||\rho\dot{u}^\delta||_p$, que são justamente os fatores em que a integrabilidade no tempo precisa ser feita com mais detalhes.

Para qualquer s no intervalo $(0,1)$, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T ||\rho^\delta \dot{u}^\delta||_2 dt &\leq C\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} \rho^\delta|\dot{u}^\delta|^2 dx\right)^{1/2} dt \\
&= C\int_0^T \sigma^{\frac{s-1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^{1-s}\rho^\delta|\dot{u}^\delta|^2 dx\right)^{1/2} dt \\
&\leq C\left(\int_0^T \sigma^{s-1} dt\right)^{1/2} \left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^{1-s}\rho^\delta|\dot{u}^\delta|^2 dxdt\right)^{1/2} \\
&\leq CT^{s/2},
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos (2.32).

Agora, para $s > 1/2$ e $\eta = \dfrac{3p-6}{2p}$, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T ||\rho^\delta \dot{u}^\delta||_p dt &\leq C\int_0^T ||\dot{u}^\delta||_2^{1-\eta}||\nabla\dot{u}^\delta||_2^\eta dt \\
&\leq C\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} \rho^\delta|\dot{u}^\delta|^2 dx\right)^{\frac{1-\eta}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla\dot{u}^\delta|^2 dx\right)^{\eta/2} dt \\
&= C\int_0^T \sigma^{\frac{s-1-\eta}{2}} \left(\sigma^{1-s}\int_{\mathbb{R}^3_+} \rho^\delta|\dot{u}^\delta|^2 dx\right)^{\frac{1-\eta}{2}} \left(\sigma^{2-s}\int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla\dot{u}^\delta|^2 dx\right)^{\eta/2} dt \\
&\leq C\left(\int_0^T \sigma^{s-1-\eta} dt\right)^{1/2} \left[\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^{1-s}|\rho\dot{u}^\delta|^2 dx\right)^{1-\eta} \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^{2-s}|\nabla\dot{u}^\delta|^2 dx\right)^{\eta} dt\right]^{1/2} \\
&\leq CT^{\frac{s-\eta}{2}},
\end{aligned}$$

onde usamos (2.32) e (2.33).

Observemos que para se ter integrabilidade no tempo da primeira integral que envolve somente σ, devemos ter $1+\eta-s<1$, que equivale a $p(3-2s)<6$. Como $3<p\leq 6$, temos obrigatoriamente $s>1/2$.

Logo, para $s>1/2$,

$$\int_0^T \langle u(.,t)\rangle_{LL} dt \leq \liminf_{\delta\to 0}\int_0^T \langle u^\delta(.,t)\rangle_{LL} dt \leq \int_0^T \langle u^\delta_P(.,t)\rangle_{LL} dt + \int_0^T \langle u^\delta_{F,\omega}(.,t)\rangle_{LL} dt \leq C.$$

■

Demonstração do item (a) - Unicidade: Sejam $X_1(.,y_1)$ e $X_2(.,y_2)$ duas curvas integrais começando em y_1 e y_2 em $\overline{\mathbb{R}^3_+}$ respectivamente. Desta forma,

$$\begin{aligned}|X_1(t,y_1)-X_2(t,y_2)| &\leq |y_1-y_2|+\int_0^t |u(X_1(\tau,y_1),\tau)-u(X_2(\tau,y_2),\tau)|d\tau \\ &\leq |y_1-y_2|+\int_0^t \langle u(.,\tau)\rangle_{LL}\mu(|X(\tau,y_1)-X(\tau,y_2)|)d\tau,\end{aligned}$$

onde μ foi introduzida na Observação 1.12. Pelo Lema de Osgood, segue que $X_1=X_2$ se $y_1=y_2$. ■

Mais geralmente, da estimativa acima temos de (1.3) que

$$|X_1(t,y_1)-X_2(t,y_2)|\leq exp\left(1-e^{\int_0^t \langle u(.,\tau)\rangle_{LL}d\tau}\right)|y_1-y_2|^{exp\left(-\int_0^t \langle u(.,\tau)\rangle_{LL}d\tau\right)}, \quad (3.8)$$

para $|y_1-y_2|\leq \min\{1, e^{1-\int_0^t \langle u(\cdot,\tau)\rangle_{LL}d\tau}\}$.

Podemos continuar demonstrando os demais ítens do Teorema 3.2.

Demonstração do item (b): Mostraremos que a aplicação $X(t,.):\overline{\mathbb{R}^3_+}\to\overline{\mathbb{R}^3_+}$ é injetiva para cada $t>0$. Sejam $y_1,y_2\in\overline{\mathbb{R}^3_+}$ tais que $X(t,y_1)=X(t,y_2)$. Para cada $t^*\in(0,t)$, temos

$$\begin{aligned}|X(t^*,y_1)-X(t^*,y_2)| &= |X(t^*,y_1)-X(t,y_1)+X(t,y_2)-X(t^*,y_2)| \\ &\leq \int_{t^*}^t |u(X(\tau,y_1),\tau)-u(X(\tau,y_2),\tau)|d\tau \\ &\leq \int_{t^*}^t \langle u(.,\tau)\rangle_{LL}\mu(X(\tau,y_1)-X(\tau,y_2))d\tau.\end{aligned}$$

Logo, pelo Lema de Osgood e Lema 3.3, temos

$$X(t^*,y_1)=X(t^*,y_2), \qquad 0\leq t^*\leq t.$$

Portanto,

$$y_1=X(0,y_1)=X(0,y_2)=y_2$$

e desta forma, concluímos que $X(t,.)$ é injetiva. ■

Para continuarmos a demonstração do Teorema 3.2, usaremos a unicidade de trajetórias do campo de velocidade iniciando em tempo $t_0>0$. Neste caso temos essa unicidade sem pedir que a velocidade inicial u_0 esteja no espaço de Sobolev H^s, com $s>1/2$. É suficiente que esteja em L^2 :

Teorema 3.4. *Seja u o campo do Teorema 2.2 (com u_0 apenas em L^2). Então para cada $x_0\in\overline{\mathbb{R}^3_+}$ e $t_0>0$ existe uma única curva $X(.,x_0;t_0)\in C([0,+\infty),\overline{\mathbb{R}^3_+})\cap C^1((0,+\infty);\overline{\mathbb{R}^3_+})$ tal que*

$$X(t,x_0;t_0)=x_0+\int_{t_0}^t u(X(\tau,x_0),\tau)d\tau. \quad (3.9)$$

Demonstração: A demosntração deste resultado segue os mesmos passos da demonstração do item (a) do Teorema 3.2, com excessão somente na demonstração da integrabilidade local dos termos $\|\rho\dot{u}\|_2$ e $\|\rho\dot{u}\|_p$, que são feitas agora sem a necessidade dos pesos σ^{1-s} e σ^{2-s} :

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} ||\rho^\delta \dot{u}^\delta||_2 dt &\leq C \int_{t_0}^{t} \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} \rho^\delta |\dot{u}^\delta|^2 dx \right)^{1/2} dt \\
&= C \int_{t_0}^{t} \sigma^{-\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma\rho^\delta |\dot{u}^\delta|^2 dx \right)^{1/2} dt \\
&\leq C \left(\int_{t_0}^{t} \sigma^{-1} dt \right)^{1/2} \left(\int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma\rho^\delta |\dot{u}^\delta|^2 dx dt \right)^{1/2} \\
&\leq C,
\end{aligned}
$$

onde na última desigualdade usamos (2.20) (ou (2.32)), com $s = 0$.)

O termo restante é estimado por

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} ||\rho^\delta \dot{u}^\delta||_p dt &\leq C \int_{t_0}^{t} ||\dot{u}^\delta||_2^{1-\eta} ||\nabla \dot{u}^\delta||_2^{\eta} dt \\
&\leq C \int_{t_0}^{t} \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} \rho^\delta |\dot{u}^\delta|^2 dx \right)^{\frac{1-\eta}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla \dot{u}^\delta|^2 dx \right)^{\eta/2} dt \\
&= C \int_{t_0}^{t} \sigma^{\frac{2\eta+1}{2}} \left(\sigma \int_{\mathbb{R}^3_+} \rho^\delta |\dot{u}^\delta|^2 dx \right)^{\frac{1-\eta}{2}} \left(\sigma^3 \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla \dot{u}^\delta|^2 dx \right)^{\eta/2} dt \\
&\leq C \int_{t_0}^{t} \sigma^{\frac{2\eta+1}{2}} \left(\sigma^3 \int_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla \dot{u}^\delta|^2 dx \right)^{\eta/2} dt \\
&\leq C \left(\int_{t_0}^{t} \sigma^{2\eta+1} dt \right)^{1/2} \left(\int_{t_0}^{T} \left(\int_{\mathbb{R}^3_+} \sigma^3 |\nabla \dot{u}^\delta|^2 dx \right)^{\eta} dt \right)^{1/2} \\
&\leq C,
\end{aligned}
$$

onde usamos novamente (2.20)(v. também (2.32) e (2.33), com $s = 0$.) ∎

Demonstração dos itens (c), (d), (e) e (f): **(c)** A aplicação $X(t,.) : \overline{\mathbb{R}^3_+} \to \overline{\mathbb{R}^3_+}$ é sobrejetiva. De fato, seja $y \in \overline{\mathbb{R}^3_+}$. Então existe uma curva $Y : [0,t] \to \overline{\mathbb{R}^3_+}$ dada por

$$Y(s) = X(s; y, t).$$

Esta curva é tal que $Y(t) = X(t; y, t) = y$. Além disso, as curvas $Y(s)$ e $X(s, Y(0))$ satisfazem o problema

$$
\begin{cases}
\dfrac{d}{ds} Z(s) = u(Z(s), s) \\
Z(0) = Y(0)
\end{cases}
$$

Logo, pela unicidade de trajetórias temos $Y(s) = X(s; Y(0)), s \in [0, t]$. Em particular,

$$y = Y(t) = X(t; Y(0)),$$

ficando demonstrada a sobrejetividade da aplicação $X(t, .) : \overline{\mathbb{R}^3_+} \to \overline{\mathbb{R}^3_+}$.

Para demonstrar que $\partial\mathbb{R}^3_+$ é invariante pelo fluxo, seja $x_0 = (x_0^1, x_0^2, 0) \in \partial\mathbb{R}^3_+$. Definindo $X^i(\cdot, x_0)$ como sendo a solução (única) da equação

$$X^i(t, x_0) = x_0^i + \int_0^t u^i(X(\tau, x_0), \tau)d\tau,$$

para $i = 1, 2$, e considerando $Y(t, x_0) = (X^1(t, x_0), X^2(t, x_0), 0)$, eibimos uma trajetória contida na fronteira e que verifica

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}Y(t, x_0) = u(Y(t, x_0), t), \qquad t > 0 \\ \qquad\qquad Y(0) = x_0, \end{cases},$$

visto que $u^3 = 0$ na fronteira, logo, pela unicidade da solução desse problema (item (a)), temos $Y(t, x_0) = X(t, x_0)$, para todo $t \geq 0$, e assim concluímos que a fronteira é invariante pelo fluxo.

(d) Seja A um conjunto aberto de $\mathbb{R}^3_+$. Devemos mostrar que o conjunto $X(t, .)A$ é um aberto de $\mathbb{R}^3_+$. Seja $y_1 \in A$. Assim, existe $r > 0$ tal que $B_r(y_1) \subset A$. Seja $z_1 = X(t, y_1)$. Vamos mostrar a existência de $a_1 > 0$ tal que $B_{a_1}(z_1) \subset X(t, .)A$. Seja $Y(s) \equiv X(s; z, t)$ a curva integral do campo u satisfazendo $Y(t) = z$.

Pela segunda parte da estimativa (3.7), temos para $T < 1$, que

$$\int_0^T ||u(., \tau)||_\infty d\tau \leq C(C_0 + C_f)^\theta T^\gamma.$$

Logo, para $r_1 \in (0, r)$, podemos tomar $T > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\int_0^T ||u(., \tau)||_\infty d\tau \leq r - r_1$$

Para $s \leq t$, temos

$$\begin{aligned} |X(s, y_1) - Y(s)| &= \left| y_1 + \int_0^s u(X(\tau, y_1), \tau)d\tau - z - \int_t^s u(Y(\tau), \tau)d\tau \right| \\ &= \left| z_1 - \int_s^t u(X(\tau, y_1), \tau)d\tau - z - \int_t^s u(Y(\tau), \tau)d\tau \right| \\ &\leq |z_1 - z| + \int_s^t |u(X(\tau, y_1), \tau) - u(Y(\tau), \tau)|d\tau \\ &\leq |z_1 - z| + \int_s^t \langle u(., \tau)\rangle_{LL}\mu(|X(\tau, y_1) - Y(\tau)|)d\tau. \end{aligned}$$

Pelo Lema de Osgood,

$$|X(s,y_1)-Y(s)| \leq exp\left(1-e^{\left(-\int_s^t \langle u(.,\tau)\rangle_{LL} d\tau\right)}\right)|z_1-z|^{e^{\left(\int_s^t \langle u(.,\tau)\rangle_{LL} d\tau\right)}},$$

para $s \in (0,t)$. Em particular a inequação acima é válida para $s = T$ e podemos escolher $a_1 > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$|X(T,y_1)-Y(T)| < r_1.$$

Assim, pela estimativa (3.7) e a desigualdade acima, segue que

$$\begin{aligned}
|y_1 - Y(0)| &= \left|X(T,y_1)-Y(T)-\int_0^T [u(X(\tau,y_1),\tau)-u(Y(\tau),\tau)]d\tau\right| \\
&\leq |X(T,y_1)-Y(T)| + 2\int_0^T ||u(.,\tau)||_\infty d\tau \\
&\leq r_1 + (r-r_1) = r.
\end{aligned}$$

Logo, $Y(0) \in B_r(y_1) \subset A$ se $z \in B_{a_1}(z_1)$ para a_1 suficientemente pequeno. Uma vez que as curvas integrais de u com origem em $\mathbb{R}^3_+$ são únicas, temos

$$z = Y(t) = X(t, Y(0)) \in X(t,.)B_r(y_1) \subset X(t,.)A.$$

Isto mostra que $B_{a_1}(z_1) \subset X(t,.)A$ se a_1 é suficientemente pequeno.

(e) Vamos demonstrar agora que a aplicação ψ dada por $\psi(X(t_1,y)) = X(t_2,y)$ é Hölder contínua. Para isso utilizaremos a estimativa (1.3). Sejam $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^3_+$ tais que

$$|X(t_1,y_2)-X(t_1,y_1)| \leq \min\{1, e^{1-\exp\int_0^T \langle u(\cdot,\tau)\rangle d\tau}\},$$

onde $T \geq t_1, t_2$. Notemos que $e^{1-\exp\int_0^{t_1}\langle u(\cdot,\tau)\rangle d\tau} \leq e^{1-\exp\int_0^T\langle u(\cdot,\tau)\rangle d\tau}$. Além disso, como

$$\begin{aligned}
|X(t,y_2)-X(t,y_1)| &= |X(t_1,y_2)-X(t_1,y_1)+[X(t,y_2)-X(t_1,y_2)]-[X(t,y_1)-X(t_1,y_1)]| \\
&= \left|X(t_1,y_2)-X(t_1,y_1)+\int_{t_1}^t [u(X(\tau,y_2),\tau)-u(X(\tau,y_1),\tau)]d\tau\right| \\
&\leq |X(t_1,y_2)-X(t_1,y_1)| + \int_0^T |u(X(\tau,y_2),\tau)-u(X(\tau,y_1),\tau)|d\tau \\
&\leq |X(t_1,y_2)-X(t_1,y_1)| + \int_0^T \langle u(\cdot,\tau)\rangle_{LL}\mu(|X(\tau,y_2)-X(\tau,y_1)|)d\tau,
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,T]$, segue de (1.3) com $\rho(t) = |X(t,y_2)-X(t,y_1)|$, junto com a segunda parte da estimativa (3.7), que

$$|\psi(X(t_1,y_2))-\psi(X(t_1,y_1))| \leq C(T)|X(t_1,y_2)-X(t_1,y_1)|^{e^{-LT^\gamma}},$$

como queríamos demonstrar.

(f) Seja agora $M \subset \mathbb{R}^3_+$ uma variedade parametrizada de classe C^α, dimensão $k = 1$ ou 2, e seja $\psi : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^3_+$ uma parametrização de classe C^α para tal superfície, i. e.

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq C|x - y|^\alpha.$$

Definindo $\varphi_t(x) = X(t, \psi(x))$ e usando a Hölder continuidade do item anterior, temos

$$\begin{aligned} |\varphi_t(x) - \varphi_t(y)| &= |X(t, \psi(x)) - X(t, \psi(y))| \\ &\leq C(T)|\psi(x) - \psi(y)|^{e^{-LT^\gamma}} \\ &\leq C(T)|x - y|^{\alpha e^{-LT^\gamma}}. \end{aligned}$$

Logo, $X(t, .)M$ é uma variedade parametrizada de classe C^β, com $\beta = \alpha e^{-LT^\gamma}$. ■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Adams, R.A.; Fournier, J.J.F., *Sobolev Spaces*, Second edition, Academic Press, Amsterdam, 2003.

[2] Agarwal, R. P.; Lakshmikantham, V., *Uniqueness and Nonuniqueness Criteria for Ordinary Differential Equations*, World Scientific Publishing Co. Inc., Series in Real Analysis, **6**, 1993.

[3] Agmon, S.; Douglis, A.; Nirenberg, L., *Estimates Near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations Satisfying General Boundary Conditions. I*, Communications on Pure and Applied Mathematics **XII** (1959) 623-727.

[4] Bartle, R. G., *Elements of Real Analysis*, John Wiley & Sons, 1964.

[5] Bergh, J.; Lofstrom, J., *Interpolation Spaces. An Introduction.*, Springer-Verlag, 1976.

[6] Calderón, A. P. ; Zygmund, A. , *On Singular Integrals*, Amer. J. Math. **78** (1956) 289–309.

[7] Chemin, J. Y., *Perfect Incompressible Fluids*, Oxford University Press, 1998.

[8] Constantin, E.; Pavel, N. H., *Green Functions of the Laplacian for the Neumann Problem in* $\mathbb{R}^n_+$, Libertas Mathematica, **30** (2010) 57-69.

[9] Duoandikoetxea, J., *Análisis de Fourier*, American Mathematical Society, GSM **29**, 2001.

[10] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, GSM **19**, 1998.

[11] Feireisl, E., *Dynamics of Viscous Compressible Fluids*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, **26**, 2004.

[12] FOLLAND, G. B., *Real Analysis, Modern Techniques and their Applications*, John Wiley & Sons, 2nd ed., 1999.

[13] GALDI, G. P., *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations. Steady-state problems.* Second edition. Springer Monographs in Mathematics., Springer, New York, 2011.

[14] GILBARG, D.; TRUDINGER, N.S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, 2001.

[15] HOFF, D., *Compressible Flow in a Half-Space with Navier Boundary Conditions*, J. Math. Fluid Mech. **7** (2005) 315-338.

[16] HOFF, D., *Dynamics of Singularity Surfaces for Compressible, Viscous Flows in Two Space Dimensions*, Arch. Rational Mech. Anal. **188** (2008) 509-543.

[17] HOFF, D., *Discontinuous Solutions of the Navier-Stokes Equations for Multidimensional Flows of Heat-Conducting Fluids*, Arch. Rational Mech. Anal. **139** (1997) 303-354.

[18] HOFF, D., *Global Solutions of the Navier-Stokes Equations for Multidimensional Compressible Flow with Discontinuous Initial Data*, Journal Of Differential Equations, **120** (1995) 215-254.

[19] HOFF, D.; PEREPELITSA, M., *Boundary Tangency for Density Interfaces in Compressible Viscous Fluid Flows*, Journal of Differential Equations, **253** (2012) 3543-3567.

[20] HOFF, D.; SANTOS, M. M., *Lagrangean Structure and Propagation of Singularities in Multidimensional Compressible Flow*, Arch. Rational Mech. Anal. **188** (2008) 509-543.

[21] KREYSZIG, E., *Introductory Functional Analysis With Applications*, John Wiley and Sons, 1978.

[22] MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. M., *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elípiticos não Homogêneos)*, Texto do I. M. da UFRJ, 2000.

[23] MELO, S. T.; MOURA NETO, F., *Mecânica dos Fluidos e Equações Diferenciais*, 18o. Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1991.

[24] PARDO, P. M., *Estrutura lagrangiana para fluidos compressíveis não barotrópicos em dimensão dois*, Tese de doutorado, IMECC-UNICAMP, 2013, http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=000909785.

[25] SOTOMAYOR, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides **11**, IMPA, 1979.

[26] STEIN, E. M., *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, 1970.

[27] Triebel, H., *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, North-Holland Publishing Company Amsterdam, 1978.

[28] Xiangdi, H.; Jing, L.; Xin, Z., *Global Well-Posedness of Classical Solutions with Large Oscillations and Vacuum to the Three-Dimensional Isentropic Compressible Navier-Stokes Equations*, Comm. Pure Appl. Math. **65** (2012), no. 4, 549-585.

[29] Zhang, T.; Fang, D., *Compressible Flow with a Density-Dependent Viscosity Coeficient*, Siam J. Math. Anal **41** n°6 (2010) 2453-2488.

[30] Ziemer, W. P., *Weakly Diferentiable Functions*, Springer-Verlag, New York, 1989.