FENÔMENOS EXÓTICOS EM GEOMETRIA E TOPOLOGIA

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Llohann Dallagnol Sperança e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 10 de agosto de 2009.

Prof. Dr:.Carlos E. Durán Fernández
Orientador

Banca Examinadora:

1 Prof. Dr. Carlos E. Durán Fernández.
2 Prof. Dr. Alcibíades Rigas.
3 Prof. Dr. Tomas Edson Barros.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8 / 5094

	Dallagnol Sperança, Llohann
D161f	Fenômenos exóticos em geometria e topologia/Llohann Dallagnol Sperança-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2009.
	Orientador : Carlos Eduardo Durán Fernández
	Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
	1. Topologia diferencial. 2. Esfera. 3. Difeomorfismos. I. Duran Fernandez, Carlos Eduardo. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Exotic phenomenon in geometry and topology

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Differential topology. 2. Exotic spheres.
3. Diffeomorphisms.

Área de concentração: Topologia

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Carlos Eduardo Durán Fernández (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Alcibíades Rigas (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Tomas Edson Barros (DM - UFSCAR)

Data da defesa: 04/08/2009

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 04 de agosto de 2009 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). CARLOS EDUARDO DURÁN FERNÁNDEZ

Prof. (a). Dr (a). ALCIBÍADES RIGAS

Prof. (a). Dr (a). TOMAS EDSON BARROS

AGRADECIMENTOS

As pessoas envolvidas neste trabalho têm todo o respeito do aluno porém o mesmo acredita que o que é mais importante neste momento é a transformação interna do ser humano portanto o trabalho em si e seus agradecimentos são às pessoas que vivem para este fim, em especial à S. S. Shri Mataji Nirmala Devi por tudo que tem feito.

[1]Este projeto teve apoio financeiro da FAPESP através do processo 2007/05926-8.

Resumo

Apresentaremos neste trabalho alguns dos modelos clássicos em geometria e topologia diferencial para algumas variedades diferenciáveis com o mesmo tipo homotópico de uma esfera. Em seguida apresentaremos construções mais recentes dos mesmos e algumas de suas propriedades.

Palavras-chave: Sujeito (Matemática), esferas exóticas, difeomorfismos exóticos, esfera de Gromoll-Meyer, involuções exóticas.

Abstract

We show in this work some of the classical models in geometry and differential topology for some differentiable manifolds with the same homotopy type of the sphere. We follow with an exposition of recent work and some of its properties.

Key words: Subject (Matematics) exotic spheres, exotic diffeomorphisms, Gromoll-Meyer sphere, exotic involutions.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

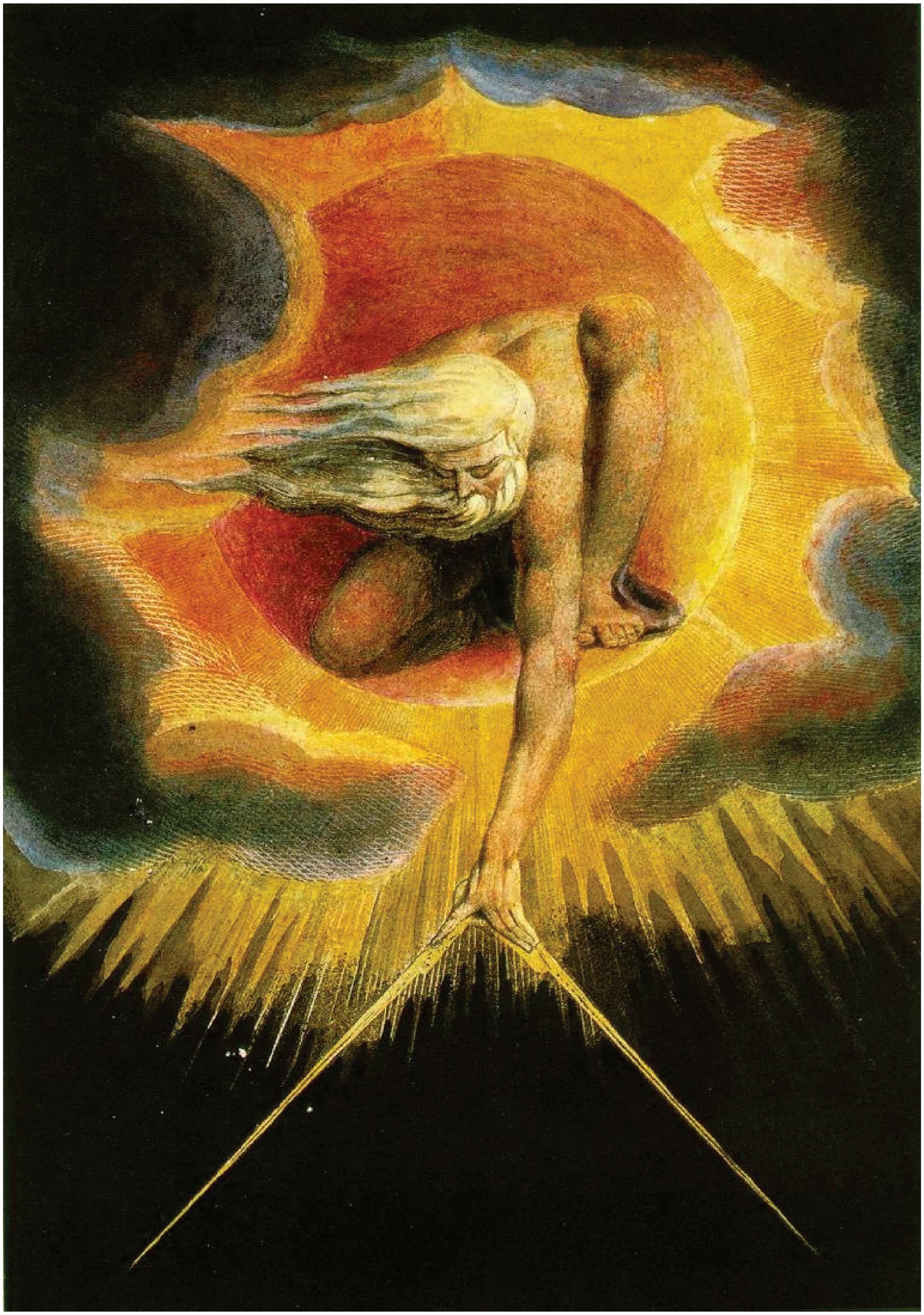
Em meados dos anos 50 quando os conceitos de variedades topológicas, PL e diferenciáveis já estavam bem estabelecidos ainda rondava a questão sobre o quanto estas categorias se diferenciavam uma das outras. Era sabido que variedades diferenciáveis sempre possuíam pelo menos uma estrutura PL e que variedades PL pelo menos uma topológica, no entanto palpites sobre o sentido contrário ainda eram completamente obscuros. Em 1956 a questão sobre bijetividade entre estruturas PL e diferenciáveis foi respondida de forma negativa por John Milnor no artigo "*On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*" que apresentou o primeiro exemplo de uma variedade diferenciável isomorfa a esfera padrão nas categorias topológicas e linear-por-partes porém não na diferenciável. Esta classe de variedades se tornou de interesse independente e sua classificação ainda foi amplamente estudada nas décadas de 50 e 60 porém ainda se carecia de apresentações explícitas das mesmas.

Em 1960 S. Smale junto a resolução da conjectura generalizada de Poincaré demonstrou que toda variedade diferenciável de dimensão maior ou igual a 5 homeomorfa a uma esfera pode ser escrita pela colagem de dois discos via um difeomorfismo cuja classe de isotopia define completamente sua estrutura diferenciável. Desde então a questão de apresentar um difeomorfismo da 6-esfera que resultasse em alguma das esferas de Milnor ainda estava em aberto, na própria expressão dos mesmos poderiam aparecer itens muito pouco inteligíveis, como soluções de equações diferenciais não triviais, etc, contudo um modelo geométrico para uma delas foi publicada em 1972 ([18]) e usando de aparatos geométricos o difeomorfismo associado pôde ser escrito explicitamente. Ainda mais, devido ao alto grau de simetrias nos passos da construção, novos candidatos e outras fórmulas apareceram. Estas não só apresentam aplicações em involuções e geometria mas também dá a possibilidade de escrever novas aplicações a partir de antigas.

Dedicamos esta dissertação a expôr, por referência histórica, os principais trabalhos relacionados aos estudos de involuções, variedades e difeomorfismos via exemplos explícitos. Estaremos especialmente interessados no caso de variedades homeomorfas ou relacionadas a esfera padrão. Temos por intenção expor pontos de vistas diferentes desde as construções clássicas em [18, 32] até uma das mais atuais ([1, 11]). Também temos por intenção apresentar os trabalhos mais recentes sobre possíveis candidatos a fenômenos exóticos.

Abordamos no primeiro capítulo boa parte dos pré-requisitos. Entre eles teoria de homotopia, cohomologia, classes características e teoria de cobordismo. No segundo capítulo apresentamos alguns dos trabalhos sobre existência e classificação destas esferas e involuções sobre as mesmas ([17, 21, 32]). No terceiro capítulo apresentamos os modelos geométricos até então conhecidos ([9, 11, 18]) e no quarto uma abordagem mais recente a fenomenologia exótica seguindo [15, 16]. No quinto capitulo damos uma outra forma de abordar estas construções abrindo uma nova possibilidade de conseguir resultados sobre elas.

Pedimos o perdão dos leitores pois, a fim de tentar seguir as notações originais, usamos localmente algumas notações com sentidos diferentes do usual. Porém em nenhum momento permitiremos que aconteça ambiguidade por causa disto.



[0]William Blake, *The Ancient of Days*, 1794; Museu Britânico, Londres.

CAPÍTULO 1

CONCEITOS PRELIMINARES

1.1 Cohomologia de variedades: Produtos *cup*, *cap* e Dualidade de Poincaré

Relembraremos aqui algumas definições e resultados tentando colocá-los ao máximo sobre um ponto de vista geométrico a fim de serem usadas mais tarde. Para qualquer detalhe nossas referências são [6, 20].

Definição 1.1.1. *Um funtor H_* da categoria de pares de espaços topológicos para a categoria de complexos de grupos abelianos é chamado de teoria homológica se respeita os seguintes axiomas*

Ax.1 *(Axioma de homotopia) Se $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ são homotópicas então $f_* = g_* : H_*(X, A) \to H_*(Y, B)$.*

Ax.2 *(Axioma de Exatidão) Para $A \overset{i}{\hookrightarrow} X \overset{j}{\hookrightarrow} (X, A)$ existe uma transformação natural ∂_* tal que a sequência*

$$\ldots \to H_p(A) \xrightarrow{i_*} H_p(X) \xrightarrow{j_*} H_p(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(A) \to \ldots$$

é exata.

Ax.3 *(Axioma de Excisão) Dado um par (X, A) e um aberto $U \subset \bar{U} \subset \mathrm{int}(A) \subset X$, a inclusão $k : (X - U, A - U) \to (X, A)$ induz isomorfismo nos respectivos grupos de homologia.*

Ax.4 *(Axioma de Dimensão) Para o espaço constituído de apenas um ponto P, $H_i(P) = 0$ para $i \neq 0$. $H_0(P) = G$ é chamado de grupo de coeficientes da teoria.*

Ax.5 *(Axioma de Adição) Para uma soma topológica $X = \sum_\alpha X_\alpha$ com inclusões $i_\alpha : X_\alpha \to X$ tem-se isomorfismo $\oplus(i_\alpha)_* : \oplus H_n(X_\alpha) \to H_n(X)$.*

Defina o n-simplexo Δ_n como o espaço

$$\Delta_n = \{(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} |\ x_i \geq 0 \ \ e \ \ \sum x_i = 1\},$$

e $\sigma_i : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$ como a inclusão da i-ésima face

$$(x_0, ..., x_{n-1}) \mapsto (x_0, ..., x_{i-1}, 0, x_i, ..., x_{n-1}).$$

Considere agora, para um espaço X, $C_i(X)$, o módulo livre abeliano gerado pelas aplicações do tipo $f : \Delta_i \to X$, e o complexo

$$\ldots \to C_3(X) \xrightarrow{\partial_2} C_2(X) \xrightarrow{\partial_1} C_1(X) \xrightarrow{\partial_0} C_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

onde $\partial_i : C_i(X, A) \to C_{i-1}(X)$ é dado por

$$\partial_i(f) = \sum_{l=0}^{i} (-1)^l f \circ \sigma^l.$$

Defina ainda, para um subespaço $A \subset X$, $C_i(X, A) = C_i(X)/C_i(A)$ com o operador induzido de $\partial_i : C_i(X) \to C_{i-1}(X)$ o qual notaremos pela mesma letra. Note que em ambos os casos $\partial_i \circ \partial_{i-1} = 0$ portanto $\mathrm{Im}(\partial_i) \subset \ker(\partial_{i-1})$ e o grupo $H_i^\Delta(C_*(X))$ e $H_i^\Delta(C_*(X, A)) = \mathrm{Im}(\partial_i)/\ker(\partial_{i-1})$ estão bem definidos.

Dada uma aplicação $\phi : X \to Y$ pode-se induzir uma aplicação $\phi_* : C_i(X) \to C_i(Y)$ como $\phi_*(f) = \phi \circ f$, respectivamente para uma aplicação de pares $\phi : (X, A) \to (Y, B)$. Checa-se em ambos os casos que $\partial_{i-1} \circ \phi_* = \phi_* \circ \partial_i$ portanto $\phi_* : H_i(C_*(X)) \to H_i(C_*(Y))$, respectivamente $\phi_* : H_i(C_*(X, A)) \to H_i(C_*(Y, B))$ são bem definidas. Ainda tem-se que para um par de espaços (X, A) podemos definir um novo operador também denotado por $\partial_* : H_{i+1}(X, A) \to H_i(A)$ como $\partial_* = i_*^{-1} \circ \partial \circ j_*^{-1}$ no seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
C_i(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\partial_i"] & C_i(X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "\partial_i"] & C_i(X, A) \arrow[d, "\partial_i"] \\
C_{i+1}(A) \arrow[r, "i_*"] & C_{i+1}(X) \arrow[r, "j_*"] & C_{i+1}(X, A),
\end{tikzcd}$$

onde as aplicações i_*, j_* são induzidas da sequência $A \overset{i}{\hookrightarrow} X \overset{j}{\hookrightarrow} (X, A)$. Este é bem definido apesar das aplicações i_*, j_* não serem necessariamente isomorfismos (neste caso basta escolher uma pré-imagem do elemento).

Define-se também $H_i^{\Delta}(X, A; G) = H_i(C_*(X, A) \otimes G)$, é fácil ver que este é um funtor, tem-se ainda que

Teorema 1.1 (de Homologia Singular)**.** *A aplicação $(X, A) \mapsto H_i^{\Delta}(X, A; G)$ é uma teoria homológica. Os grupos $H_i^{\Delta}(X; G)$ e $H_i^{\Delta}(X, A; G)$ são chamados respectivamente de i-ésimo grupo de homologia de X com coeficientes em G e i-ésimo grupo de homologia relativa do par (X, A) com coeficientes em G.*

Em vista de que todas as teorias homológicas são isomorfas ([6]) podemos usar a notação $H_i(X) = H_i^{\Delta}(X; \mathbb{Z})$ e $H_i(X; G) = H_i^{\Delta}(X; G)$ sem ambiguidade. Para apresentações geométricas sempre optaremos por homologia singular e ou de complexos CW ([6]), no entanto nosso interesse principal é a teoria de cohomologia que está intimamente ligada a homologia.

Seja A um grupo abeliano, considere o funtor entre grupos abelianos $B \mapsto \mathrm{Hom}(B, A)$. Seja $C_*(X)$ o complexo definido acima e considere o novo complexo

$$\ldots \overset{d_2}{\leftarrow} Hom(C_2(X), \mathbb{Z}) \overset{d_1}{\leftarrow} \mathrm{Hom}(C_1(X), \mathbb{Z}) \overset{d_0}{\leftarrow} \mathrm{Hom}(C_0(X), \mathbb{Z}) \overset{d_0}{\leftarrow} 0,$$

onde $d_i(f)(a \in C_i) = f(\delta_i a)$, também chamado de operador de cobordo.

Definição 1.1.2. *Definimos $H^*(X)$, a cohomologia do espaço X (analogamente do par (X, A)), como a homologia do complexo* $\mathrm{Hom}(C_*(X), \mathbb{Z})$*, isto é*

$$H^i(X) = \frac{\ker d_{i+1}}{\mathrm{Im}\ d_i},$$

define-se ainda $H^i(X; G) = H_i(\mathrm{Hom}(C_*(X) \otimes G, G))$.

Quando X ainda tem uma estrutura de variedade diferenciável, podemos associar a ele seu espaço de formas diferenciáveis $\Omega^p(X)$ o qual junto com o operador $d : \Omega^p(X) \to \Omega^{p+1}(X)$ é um complexo diferenciável (no sentido de [41]) cuja cohomologia $H^i_{\Omega}(X)$ é chamada *cohomologia de* de Rham. O mais interessante é que o Teorema de Stokes nos garante a existência de uma aplicação entre esta cohomologia e $H^i(X; \mathbb{R})$ e o Teorema de *de Rham* nos garante que este é isomorfismo. Enunciaremos isto logo abaixo porém nos referimos a [6] e [41] para demonstrações.

Teorema 1.2. *Para uma cadeia $c \in C_p(M)$ e uma forma $\omega \in \Omega^{p-1}(M)$ vale que*

1. *(Stokes)*
$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega;$$

2. *(de Rham) a aplicação*
$$\omega \mapsto \left(c \mapsto \int_c \omega \right)$$
induz isomorfismo $H^i_\Omega(M) \cong H^i(M; \mathbb{R})$. Ainda mais, se considerarmos $\Omega^p(M, A)$ o subespaço das formas que se anulam no aberto $A \subset M$ ao invés de $\Omega^p(M)$ então o teorema vale para a cohomologia relativa $H^i(M, A; \mathbb{R})$.

Notar que o interesse destes resultados para apresentações geométricas é amplo. Ainda mais, na cohomologia de formas diferenciáveis, ou de *de Rham*, o muito conhecido produto *cup* fica com expressão mais conhecida. Seguiremos com uma definição deste e de outro produto e algumas de suas propriedades. Para uma exposição mais completa nos referimos a [6].

Definição 1.1.3. *Seja $\sigma : \Delta_n \to X$ um complexo singular, $p + q = n$, $\hat{\sigma}_p : \Delta_p \to \Delta_n \to X$ a inclusão das primeiras p entradas e $\check{\sigma}_q : \Delta_1 \to \Delta_n \to X$ a inclusão das últimas q entradas. Então, para $f^p \in H^p(X)$ e $g^q \in H^q(X)$ definimos*

$$f^p \cup g^q(\sigma) = (-1)^{pq} f(\hat{\sigma}_p) \cdot g(\check{\sigma}_q).$$

Proposição 1.3. *As seguintes propriedades valem sempre que fizerem sentido:*

1. *$\cup$ é natural, isto é, se $f : X \to Y$ então $f^*(\alpha \cup g) = f^*(\alpha) \cup f^*(\beta)$;*

2. *$\alpha \cup 1 = 1 \cup \alpha = \alpha$ onde $< 1 >= H^0(X)$;*

3. *$\alpha \cup (\beta \cup \gamma) = (\alpha \cup \beta) \cup \gamma$;*

4. *$\alpha \cup \beta = (-1)^{deg(\alpha)deg(\beta)} \beta \cup \alpha$;*

5. *$d_*(\alpha \cup \beta) = d_*\alpha \cup \beta + (-1)^{deg(\alpha)} \alpha \cup d_*\beta$ and*

6. *$\delta^*(\alpha \cup i^*(\beta)) = \delta^*(\alpha) \cup \beta$ onde $\delta^* : H^p(A) \to H^{p+1}(X, A)$ é o operador de Bockenstein e $i : A \hookrightarrow X$ é a inclusão.*

Estas propriedades ainda valem para definições análogas do produto cup em cohomologias com valores em qualquer anel comutativo com identidade.

O grupo graduado $H^*(X)$ junto ao produto *cup* é conhecido como o *anel de cohomologia de* X. Em termos de cohomologia de *de Rham* fica claro pelas cinco primeiras propriedades enunciadas na proposição acima que o produto *cup* é traduzido como produto cunha. Temos ainda um outro pareamento

Definição 1.1.4. *Seja* $f^p \in H^p(X), \sigma_{p+q} \in H_{p+q}(X)$, *definimos o produto cap:*

$$\cap : H^n(X) \otimes H_p(X) \to H_{n-p}(X)$$

como

$$f^p \cap \sigma_{p+q} = (-1)^{pq} f(\check{\sigma}_p)\hat{\sigma}_q.$$

Proposição 1.4. *Seja* $\gamma \in H_p(X), \alpha \in H^n(X), \beta \in H^m(X)$ *então valem as seguintes propriedades:*

1. $1 \cap \gamma = \gamma$;
2. *se* $n = p$ *então* $(\alpha \cap \gamma) = \alpha(\gamma) \cdot 1$;
3. $(\alpha \cup \beta) \cap \gamma = \alpha \cap (\beta \cap \gamma)$;
4. *para* $f : X \to Y$, *uma função contínua, tem-se* $f_*(f^*(\alpha) \cap \gamma) = \alpha \cap f_*(\gamma)$ *e*
5. $\partial(\alpha \cap \gamma) = d\alpha \cap \gamma + (-1)^p \alpha \cap \partial\gamma$.

Analogamente para qualquer outro anel comutativo com identidade.

A fim de apresentarmos o teorema de dualidade de Poincaré-Alexander-Lefshetz enunciaremos um teorema preparatório sobre orientabilidade de variedades. Para uma exposição detalhada do assunto ver por exemplo [6].

Teorema 1.5. *Seja* M *uma variedade topológica compacta conexa n-dimensional então* $H_n(M; G) \cong G$ *se* M *for orientável e* $H_n(M; G) \cong \{g \in G \mid 2g = 0\}$ *caso contrário. Para* $G = \mathbb{Z}$ *a escolha de um gerador* $[M]$ *de* $H_n(M)$ *é dita uma escolha de orientação e* $[M]$ *é chamada de classe fundamental de* M. *Ainda mais, se nestas condições* $\partial M \neq \emptyset$ *então* ∂M *é orientável e* $[\partial M] = \partial_*[M]$ *é uma orientação.*

Fixaremos de agora em diante todas as variedades como fechadas conexas e orientadas a menos que dito o contrário.

Teorema 1.6 (Dualidade de Poincaré-Alexander-Lefshetz)**.** *Sejam $K \supset L$ subespaços compactos de M então:*

$$\cap[M] : H^p(K, L; G) \to H_{n-p}(M - L, M - K; G)$$

é um isomorfismo.

Corolário 1.7. *Nas mesmas condições acima vale o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas e isomorfismos nas verticais:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^p(M,L) \arrow[r] \arrow[d, "\cap[M]"] & H^p(M) \arrow[r] \arrow[d, "\cap[M]"] & H^p(L) \arrow[r] \arrow[d, "\cap[M]"] & H^{p+1}(M,L) \arrow[r] \arrow[d, "\cap[M]"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{n-p}(M-L) \arrow[r] & H_{n-p}(M) \arrow[r] & H_{n-p}(M, M-L) \arrow[r] & H_{n-p-1}(M,L) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

O qual vale para coeficientes arbitrários e também para variedades não-orientadas no caso de $\mathbb{Z}_2$.

Teorema 1.8. *Analogamente, se $\partial M \neq \emptyset$ vale o diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^p(M) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "\cap[M]"] & H^p(\partial M) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, "\cap[\partial M]"] & H^{p+1}(M, \partial M) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "\cap[M]"] & H^{p+1}(M) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "\cap[M]"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{n-p}(M, \partial M) \arrow[r, "\partial_*"] & Hn-p-1(\partial M) \arrow[r, "i_*"] & H_{n-p-1}(M) \arrow[r, "j_*"] & H_{n-p-1}(M, \partial M) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

comutativo a menos do sinal $(-1)^p$ no primeiro bloco e $(-1)^{p+1}$ no segundo, com linhas exatas e isomorfismos nas verticais.

Definição 1.1.5. *Dada M^n definimos a forma bilinear em $H^*(M)$ dada por $Q(\alpha, \beta) = (\alpha \cup \beta)[M]$ como a forma de interseção de M. Definimos ainda $\sigma(M)$, o índice de M^n, como zero caso $n \neq 0 \mod 4$ e como a diferença das dimensões entre os subespaços maximais onde a forma Q restrita a $H^{2k}(M)$ é positiva definida e negativa definida caso contrário.*

Em relação a cohomologia de *de Rham* a forma bilinear acima tem especial importância, de fato vale o seguinte:

Proposição 1.9. *Seja $\bar{H}^q(M) = H^q(M)/TH^q(M)$ a q-ésima homologia quocientada pela própria torção então a forma bilinear acima é não degenerada, por consequência, induz isomorfismos $\bar{H}^q(M) \cong Hom(\bar{H}^q(M), \mathbb{Z}) \cong \bar{H}^{n-q}(M)$. Em particular a forma bilinear*

$$< \omega, \eta > \mapsto \int_M \omega \wedge \eta$$

é bem definida na cohomologia de de Rham *e é não degenerada.*

Voltaremos a usar esta proposição na próxima seção, encerraremos esta com alguns teoremas cujas demonstrações nos referimos novamente a [6].

Teorema 1.10 (Thom). *O índice de uma variedade possui as seguintes propriedades:*

1. $\sigma(M^n + N^n) = \sigma(M^n) + \sigma(N^n), \quad \sigma(-M^n) = -\sigma(M^n)$;

2. $\sigma(M^n \times N^m) = \sigma(M^n) \cdot \sigma(N^m)$;

3. *se* M^n *é bordo então* $\sigma(M^n) = 0$.

Teorema 1.11 (Hurewicz). *Considere* $f : (S^n, *) \to (X, *)$ *uma aplicação com ponto base e* $\hat{f} = f_*[S^n] \in H_n(X)$ *para alguma orientação escolhida de* S^n*. Então a aplicação* $h_n : \pi_n(X, *) \to H_n(X)$ *definida como* $h_n([f]) = \hat{f}$ *é homomorfismo com* $\ker h_1 = [\pi_1(X, *), \pi_1(X, *)]$ *e* h_n *é isomorfismo se* X *for* $(n-1)$*-conexo para* $n \geq 2$.

Teorema 1.12 (Whitehead). *Seja* $f : X \to Y$ *uma aplicação entre CW-complexos simplesmente conexos. Se* $f_* : H_*(X) \to H_*(Y)$ *for isomorfismo então* f *é uma equivalência homotópica.*

Teorema 1.13 (Hopf). *Seja* $f : M^n \to N^n$ *uma aplicação entre variedades compactas orientadas, define-se*

$$deg(f)[N] = f_*[M].$$

Então, para $N = S^n$*, o conjunto das classes de homotopia* $[M, S^n]$ *é naturalmente identificado com* $\mathbb{Z}$ *via a aplicação* $[f] \mapsto deg(f)$*. Em particular* $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$.

Teorema 1.14 (Künneth). *Sejam* $\pi_i : X_1 \times X_2 \to X_i$ *as projeções então:*

$$H^n(X \times Y, \mathbb{R}) \cong \bigoplus_{p+q=n} H^p(X, \mathbb{R}) \otimes H^q(Y, \mathbb{R}),$$

onde o isomorfismo na direção contrária é dado por

$$\alpha \otimes \beta \mapsto \pi_1^*(\alpha) \cup \pi_2^*(\beta).$$

1.2 Fibrados vetoriais, isomorfismo de Thom, teoria de interseção e classes características

Seguiremos essencialmente [37] para a parte de fibrados e [6, 35] para definições e resultados em suas cohomologias e classes características.

Seja $G_k(\mathbb{R}^\infty)$ a Grassmaniana de k-planos em $\mathbb{R}^\infty$ definida como o limite direto das inclusões $G_k(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow G_k(\mathbb{R}^{n+1})$ quando $n \to \infty$,

$$\gamma_k = \{([\theta], w) \in G_k(\mathbb{R}^\infty) \times \mathbb{R}^\infty \mid w \in [\theta]\}$$

e $\pi : \gamma_k \to G_k(\mathbb{R}^\infty)$ a projeção na primeira coordenada.

Definição 1.2.1. *Seja $\eta : X \to G_k(\mathbb{R}^\infty)$ uma aplicação qualquer então definimos o fibrado η de k-planos sobre X como a dupla $(E(\eta), p)$ tal que $E(\eta) = \{(x, v) \in X \times \gamma(k) \mid \eta(x) = \pi(v)\}$ e $p : E(\eta) \to X$ é a projeção na primeira coordenada. Denotaremos também $G_k(\mathbb{R}^\infty)$ por $BO(k)$, o espaço classificante de fibrados de k-planos.*

Consideraremos conhecidas as operações básicas entre fibrados assim como as definições de fibrados via aplicações de transição e por cartas e seus teoremas de classificação. Ainda observamos que a seção nula $i : X \to E(\eta)$ é uma inversa homotópica para $p : E(\eta) \to X$ sendo assim ambas equivalências homotópicas. Notaremos por $D(\eta)$ e $S(\eta)$ respectivamente *o fibrado de discos de η* e *o fibrado de esferas de η* (os quais podem ser construídos associando, quando possível, uma métrica ao fibrado $E(\eta)$, por exemplo) e $T(\eta) = D(\eta)/S(\eta)$ *o espaço de Thom do fibrado η.*

Definição 1.2.2. *Seja agora M^n uma variedade diferenciável compacta, note por $D : H_p(M) \to H^{n-p}(M)$ o inverso do isomorfismo de dualidade de Poincaré e dada $f : M^n \to N^m$ definimos*

$$f^! : H^{n-p}(M) \to H^{m-p}(N) \quad \textit{ou} \quad f^! : H^{n-p}(M, \partial M) \to H^{m-p}(N, \partial N)$$

como $f^! = D_N f_* D_M^{-1}$ e $f_! = D_M^{-1} f^* D_N$ o análogo para homologias. Notar que $D(a) \cap [M] = a$ e $f^!(a) \cap [N] = f_*(a \cap [N])$ por definição.

Usaremos um subíndice na aplicação D sempre que for necessário especificar em que variedades estamos vivendo.

Definição 1.2.3. *A classe de Thom do fibrado $\eta : M \to BO(k)$, $\tau \in H^k(D(\eta), S(\eta)) \cong H^k(T(\eta))$ é definida como*

$$\tau = D_{D(\eta)}(i_*[M]).$$

Equivalentemente

$$\tau \cap [D(\eta)] = i_*[M].$$

É conhecido que se restringirmos a classe de Thom a uma fibra $(A, \partial A) \cong (D^k, S^{k-1})$ temos um gerador para o k-ésimo grupo de cohomologia. De fato ela é a única (a menos de sinal) que se comporta dessa forma e esta propriedade pode ser usada como definição. Vale o seguinte teorema:

Teorema 1.15 (Isomorfismo de Thom)**.** *Dado $\eta : M \to BO(k)$ e $p : D(\eta) \to M$ temos os seguintes isomorfismos:*

$$H^p(M) \xrightarrow{p^*} H^p(D(\eta)) \xrightarrow{\mathcal{T}} H^{p+k}(D(\eta), S(\eta)) \cong H^{p+k}(T(\eta))$$

onde $\mathcal{T}(\alpha) = \alpha \cup \tau$ coincide com $i^!$.

Seja $i_N^W : N^n \to W^w$ um mergulho suave entre variedades com bordo e assuma que N intersecta ∂W transversalmente em ∂N.

Definição 1.2.4. *Nesta situação notamos $[N]_W = (i_N^W)_*[N] \in H_n(W, \partial W)$ e $\tau_N^W = D_W([N]_W) \in H^{w-n}(W)$ a classe de Thom da imersão, onde $D_W : H_n(W, \partial W) \to H^{w-n}(W)$.*

Notar que a classe de Thom definida acima é a imagem da classe de Thom do fibrado normal ν_N^W via

$$H_{w-n}(V, \partial V) \cong H^{w-n}(W, W - V) \to H^{w-n}(W),$$

onde V é uma vizinhança tubular da imersão e o primeiro isomorfismo é dado por excisão.

Suponho agora que K^k, N^n são duas subvariedades de W^w, suponha ainda que elas se intersectam transversalmente então ν_K^W pode ser restringido à $\nu_{K\cap N}^W$ e ainda mais $\nu_{K\cap N}^W = \nu_K^W|_{K\cap N}$ o que implica que a classe de Thom de K restrita a $K \cap N$ é a classe de Thom da última em N, isto é:

$$\tau_{K\cap N}^W = (i_N^W)^*(\tau_K^W).$$

Agora com este resultado é fácil estabelecer o seguinte teorema:

Teorema 1.16. *Sob a hipótese que K é transversal a N em W então*

$$\tau_{K\cap N}^W = \tau_K^W \cup \tau_N^W.$$

Isto é

$$D_W([N]_W) \cup D_W([K]_W) = D_W([K \cap N]_W).$$

Notar que o teorema acima mostra de uma forma explícita como calcular o produto *cup* de cociclos duais a classes de subvariedades via a interseção das mesmas. O termo 'duais' usado aqui tem excelente posição na cohomologia de *de Rham* via a Proposição 1.9 no sentido que a aplicação $\omega \mapsto \int_N (i_N^W)^*\omega \in \mathbb{R}$ é funcional linear sobre $H^n_\Omega(W)$ portanto pertence a $\mathrm{Hom}(H^n_\Omega(W), \mathbb{R}) \cong H^{w-n}_\Omega(W)$ e tem por imagem neste último a classe de Thom τ_N^W.

A última coisa a ser formulada é uma interpretação da classe de Thom sobre o ponto de vista de formas diferenciais.

Consideramos agora um fibrado vetorial definido por $\eta : M^n \to BSO(k)$. Tomamos a notação $p : E = E(\eta) \to M$ e seguiremos [5] no intuito de apresentar uma aplicação inversa ao isomorfismo de Thom denominada *integração ao longo da fibra*. Considere $\omega \in \Omega^*(D(\eta), S(\eta))$, a qual pode ser interpretada como uma forma $\omega \in \Omega^*(E)$ que se anula fora do fibrado de discos $D(\eta)$. Consideramos uma trivialização por cartas de M, $\{U_i, \phi_i\}$, isto é $\phi_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^k$ comutando com a projeção do fibrado. Logo, dada uma forma $\omega \in \Omega^*(E)$ podemos expressa-la localmente como

$$(\phi_i^{-1})^*\omega = f_{IJ} dx^I \wedge dy^J,$$

onde aqui estamos usando I, J como multi-índices e com a mesma notação de somatória de *Einstein*. Também supomos que $dx^I \in \Omega^{|I|}(U_i)$ e $dy^J \in \Omega^{|J|}(\mathbb{R}^k)$ são bases considerando $\Omega^{|J|}(\mathbb{R}^k)$ e $\Omega^{|I|}(U_i)$ como C^∞-módulos.

Definição 1.2.5. *Definimos a aplicação $\pi_* : \Omega^*(D(\eta), S(\eta)) \to \Omega^{*-k}(M)$ localmente como*

$$\pi_*(f_{IJ}(x, y_1, ..., y_r) dx^I \wedge dy^J) = \left(\int_{\mathbb{R}^k} f_{IJ}(x, y_1, ..., y_r) dy^1 \wedge dy^2 \wedge \ldots \wedge dy^r \right) dx^I,$$

se $\{1, 2, \ldots r\} \subset J$ e como 0 caso contrário. Esta aplicação será chamada de integração ao longo da fibra.

Notar que $\Omega^*(M) \otimes \Omega^*(\mathbb{R}^k) \to \Omega^*(M \times \mathbb{R}^k)$ induzido pelo produto cunha não é um isomorfismo, porém a nível de cohomologias isto é verídico como nos assegura o teorema de Künneth. Ainda mais:

Proposição 1.17. *i) A aplicação π_* comuta com a derivada externa, portanto*

$$\pi_* : H^*_\Omega(D(\eta), S(\eta)) \to H^{*-k}_\Omega(M)$$

é bem definida;

ii) *Para* $\alpha \in \Omega^*(M)$ *e* $\omega \in \Omega^*(D(\eta), S(\eta))$ *vale*

$$\pi_*(p^*\alpha \wedge \omega) = \alpha \wedge \pi_*(\omega);$$

iii) *Se* E *for equipado com a orientação única induzida pela orientação fibra a fibra e pela de* M*, para* $\omega \in \Omega^q(D(\eta), S(\eta))$ *e* $\alpha \in \Omega^{n+k-q}(M)$ *vale*

$$\int_E p^*\alpha \wedge \omega = \int_M \alpha \wedge \pi_*\omega.$$

Todas as afirmações acima são razoavelmente elementares para demonstrar porém nos referiremos a [5] caso haja necessidade.

Sobre este ponto de vista tomamos agora a definição da classe de Thom $\tau \in \Omega^k(D(\eta), S(\eta))$ como a única classe tal que dada uma classe $\omega(D(\eta), S(\eta))$ vale

$$\int_E \omega \wedge \tau = \int_M i^*\omega,$$

onde $i : M \hookrightarrow E$ é a inclusão da seção nula. Esta é uma definição apropriada para a classe de Thom através da aplicação π_*. Fica claro que:

$$\int_E p^*\alpha \wedge \tau = \int_M i^*p^*\alpha = \int_M \alpha.$$

Portanto $\pi_*(\tau) = 1$ é a unidade no anel $H^*_\Omega(M)$ e pela identidade abaixo

$$\pi_* \circ \mathcal{T}(\alpha) = \pi_*(p^*\alpha \wedge \tau) = \alpha,$$

e pela finitude da dimensão de $H^*_\Omega(M)$ conclui-se que π_* é um isomorfismo inverso ao isomorfismo de Thom.

Observação 1.18. *Neste momento o trabalho passa a ter recursos de interpretar geometricamente alguns objetos puramente algébricos, contudo tal investida não foi possível durante o período de mestrado só deixando ao trabalho esta parte de pré-requisitos.*

1.2.1 Classes Características

Classes de *Stiefel-Whitney*

Utilizaremos apenas das duas primeiras classes de *Stiefel-Whitney* e das classes de Pontrjagyn com coeficientes racionais. Optaremos por uma definição axiomática da primeira e via conexões da segunda. Também enunciaremos teoremas sobre a cohomologia dos espaços classificantes. Consideramos conhecidos os teoremas de existência e unicidade destas classes.

Definição 1.2.6. *Seja $\xi : X \to BO(k)$ um fibrado vetorial, definimos $w(\xi) = w_0(\xi)+w_1(\xi)+ ... + w_k(\xi) + ... \in H^*(X;\mathbb{Z}_2)$, a classe total de* Stiefel-Whitney*, pelos seguintes axiomas:*

Ax.1 *Para cada fibrado vetorial como acima temos $w_i(\xi) \in H^i(X,\mathbb{Z}_2)$ com $w_0(\xi) = 1$ e $w_i(\xi) = 0$ para $i > k$,*

Ax.2 *(naturalidade) Seja $f : Y \to X$ uma aplicação contínua e $f^*\xi$ o fibrado induzido então*

$$w(f^*\xi) = f^*w(\xi),$$

Ax.3 *(produto de* Whitney*) Para ξ, η fibrados sobre o mesmo espaço base temos*

$$w(\xi \oplus \eta) = w(\xi) \cup w(\eta),$$

Ax.4 *(normalização) Para o fibrado de linha tautológico $\gamma_1^1 : P^1 \to BO(1)$, $w_1(\gamma_1^1)$ é o elemento não nulo.*

Para as classes w_1 e w_2 existem definições com interpretações geométricas mais concretas. Considerando $P_O(\xi)$, o $O(k)$-fibrado principal associado a ξ, temos a seguinte sequência exata induzida pela fibração $O(n) \cdots P_O(\xi) \to X$:

$$\pi_1(X) \xrightarrow{\partial_1} \pi_0(O(n)) \to \pi_0(P_O(\xi)) \to \pi_0(X) \to 0.$$

Notar que a estrutura de grupo induz $\pi_0(O(n)) = \mathbb{Z}_2$ naturalmente e como $Hom(\pi_1(X), \mathbb{Z}_2) = Hom(\pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)], \mathbb{Z}_2) = Hom(H_1(X), \mathbb{Z}_2) = H^1(X, \mathbb{Z}_2)$, ∂_1 é de forma natural um elemento de $H^1(X, \mathbb{Z}_2)$ (aqui a primeira igualdade é teoria elementar de grupos, a segunda é o isomorfismo dado pelo Teorema 1.11 e a terceira por universalidade de coeficientes). É fácil notar que ∂_1 respeita os axiomas da primeira classe de *Stiefel-Whitney* e portanto, por unicidade, têm que ser a mesma coisa. Note ainda que $P_O(\xi)$ tem duas componentes se e somente se ξ é um fibrado orientável e neste caso $\partial_1 = 0$, o converso também é verdadeiro, portanto ξ é orientável se e somente se $w_1(\xi) = 0$, também equivalente ao fato de qualquer aplicação $f : S^1 \to X$ ter como fibrado induzido o trivial.

No caso $w_1 = 0$, identificando as classes de isomorfismos de G-fibrados principais com elementos do primeiro grupo da cohomologia de $\check{C}heck$ correspondente, temos que a sequência exata $0 \to \mathbb{Z}_2 \to Spin(n) \to SO(n) \to 1$ induz a nível de cohomologia a sequência exata

$$H^1(X;\mathbb{Z}_2) \to H^1(X; Spin(n)) \to H^1(X; SO(n)) \xrightarrow{\delta} H^2(X;\mathbb{Z}_2).$$

Notando que $\delta(\xi) \in H^2(X;\mathbb{Z}_2)$ respeita todos os axiomas relacionados a w_2 estes só podem ser o mesmo. Fica claro então que para um $SO(n)$-fibrado ter um duplo recobrimento induzido por um $Spin(n)$-fibrado é necessário e suficiente que esta classe seja nula. Para fibrados não orientados perdemos esta interpretação.

Sobre variedades paracompactas as classes de índice mais alto sempre podem ser consideradas como obstruções para a existência de seções linearmente independentes como o axioma do produto de *Whitney* deixa claro.

Classes de Pontrjagyn

Como estaremos evitando o uso de classes de Chern, por estas não serem necessárias neste trabalho usaremos uma definição pouco geométrica. A notação é a mesma de [35] e também tomamos este como referência.

Definição 1.2.7. *Seja* $\xi : M \to BSO(k)$ *um fibrado vetorial com uma conexão* $\nabla \in \Gamma(End(E(\xi)) \otimes \Omega^1(E))$ *sobre uma variedade orientada e paracompacta. Então, localmente, para* $\nabla = d + A$ *temos* $\Omega = dA + A \wedge A$ *a dois forma de curvatura de* ∇. *Definimos as classes de Pontrjagyn* $p_i(\xi) \in H^{4i}(M;\mathbb{R})$ *como* $p_i(\xi) = (2\pi)^{-2i}\sigma(\Omega)$ *onde estes são definidos pela fórmula:*

$$p(\xi) = det(I + \frac{1}{2\pi}\Omega) = 1 + \sigma_1(\Omega) + ... + \sigma_k(\Omega).$$

Como propriedades temos

Teorema 1.19. *As classes de Pontrjagyn gozam das seguintes propriedades:*

1. $p_i = 0$ *para* $4i > k$;
2. *Se* $f : M \to N$ *é uma aplicação contínua então* $p(f^*\xi) = f^*p(\xi)$;
3. *Para dois fibrados* ξ, η *sobre a mesma base vale* $p(\xi \oplus \eta) = p(\xi)p(\eta)$.

Pela nossa definição as propriedades (1) e (3) são facilmente verificadas e continuam valendo em contextos mais gerais, a menos de torção módulo 2 em (3). A segunda propriedade também é facilmente verificável para uma aplicação diferenciável porém de fato vale para aplicações contínuas e em contextos mais gerais. Denotaremos para uma vraiedade diferenciável M, $p_i(M)$ a i-ésima classe de Pontrjagyn associada ao seu fibrado tangente.

1.3 Uma nota sobre espaços classificantes de fibrados lineares e fibrados sobre esferas

Daremos uma abordagem elementar sobre grupos de homotopia de espaços classificantes pois iremos aplicá-la posteriormente. Acreditamos que ter a construção que será apresentada de forma explícita em mãos pode ajudar a tratar do problema que abordaremos nos Capítulos 4 e 5. Esta pode ser considerada um exercício de topologia algébrica e portanto tomamos qualquer livro da área como referência, por exemplo [6, 20].

Consideremos a seguinte apresentação de $G_k(\mathbb{R}^n)$ como espaço homogêneo: seja $S(O(n)\times O(n-k))$ o subgrupo de $O(n)\times O(n-k)$ das matrizes de determinante positivo, logo

$$G_k(\mathbb{R}^n) = \frac{SO(n)}{S(O(k)\times O(n-k))}.$$

É fácil concluir a existência de um recobrimento duplo

$$\frac{SO(n)}{SO(k)\times SO(n-k)} \to \frac{SO(n)}{S(O(k)\times O(n-k))},$$

onde o lado esquerdo é usualmente denotado por $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ a Grassmaniana de k-planos orientados. Portanto para sabermos os grupos de homotopia de $G_k(\mathbb{R}^n)$ é suficiente sabermos os de $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$.

Considere primeiramente a sequência exata do fibrado principal $SO(n) \hookrightarrow SO(n+1) \to S^n$:

$$\pi_{l+1}(S^n) \to \pi_l(SO(n)) \to \pi_l(SO(n+1)) \to \pi_l(S^n).$$

Portanto para $l+1 < n$ temos que a inclusão $SO(n) \to SO(n+i)$ induz isomorfismo no l-ésimo grupo de homotopia para qualquer $i > 0$. Denote por $p : V_{n,k} \to \tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ o fibrado $SO(n)/SO(k) \to SO(n)/SO(n-k)\times SO(k)$ então para $k > 0$

$$\pi_l\left(V_{n,n-k}\right) = 0, \quad l+1 < n-k.$$

Então considerando a sequência

$$\pi_{l+1}V_{n,n-k} \to \pi_{l+1}\big(\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)\big) \to \pi_l\big(SO(k)\big) \xrightarrow{\partial} \pi_l V_{n,n-k},$$

concluímos o seguinte

Teorema 1.20. *Sejam $l,k,n \in \mathbb{N}$ tal que $l+1 < n-k < n$. Então*

$$\pi_{l+1}G_k(\mathbb{R}^n) \overset{\partial}{\cong} \pi_l SO(k).$$

Considere agora $D^l_\pm \in \mathbb{R}^l$ dois discos de raio 1. Então $S^l = D_+ \cup D_-$ via colagem no complementar das origens dos discos pela função $y = (1-|x|)x$. Tome agora uma aplicação qualquer $f : S^l \to G_k(\mathbb{R}^n)$, para $n > l-k$ grande. Relembrando de [6], para estudarmos a imagem de f pelo isomorfismo $\pi_{l+1}G_k(\mathbb{R}^n) \to \pi_l SO(k)$, é necessário uma função $\tilde{f} : (D^l, S^{l-1}) \to (V_{n,n-k}, SO(k))$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$ e então $\tilde{f}|_{S^{l-1}} : S^{l-1} \to SO(k)$ terá a classe de homotopia desejada.

Por outro lado dada uma aplicação $f : (D^l, S^{l-1}) = (S^l, *) \to (G_k(\mathbb{R}^n), *)$ temos o fibrado induzido $\xi = f^*\gamma_k^n \to S^l$. Consideramos $P(\xi) = D_+ \times SO(k) \cup D_- \times SO(k)$, o $SO(k)$ fibrado principal associado a ξ, com função de transição dada por $g : D_+ \cap D_- \xrightarrow{l} S^{l-1} \to SO(k)$ onde l é a retração de $D_+ \cap D_-$ sobre o equador. Considere agora a composição $D_+ \hookrightarrow P(\xi) \hookrightarrow V_{n,k}$, sendo a última inclusão dada por trivialização local de $V_{n,k}$, então esta é claramente um levantamento do interior $D^+ \hookrightarrow (D^l, S^{l-1})$. Porém por estarmos trabalhando dentro de subespaços compactos de variedades fica fácil concluir que existe extensão para todo o disco. Tomando agora a inclusão $f_- : D_- \to V_{n,k}$ temos, para os pontos em comum dos dois discos:

$$f_+(x) = f_-((1 - |x|)x) \cdot g(x).$$

Sabendo *a priori* que o limite $|x| \to 1$ existe fica claro que $g|_{S^{l-1}} : S^{l-1} \to SO(k)$ é a imagem de f pelo operador de bordo. Por outro lado, dada uma aplicação $g : S^{l-1} \to SO(k)$, é fácil ver que o fibrado definido pela construção típica representa o elemento $g \in \pi_{l-1}SO(k)$. Fica fácil agora deixar de forma explícita todos os elementos necessários para um cálculo explícito da identificação $\pi_l G_k(\mathbb{R}^\infty) \to \pi_{l-1}SO(k)$.

1.4 Sequências Multiplicativas e Teoria de Cobordismo

Seguiremos com uma exposição breve da Teoria de Cobordismo de Thom ([40]) e uma apresentação dos trabalhos posteriores de Hirzebruch em sua teoria de invariantes algébricos ([22]). Nos referimos a estes dois trabalhos para demonstrações e mais detalhes.

Considere B um anel comutativo com identidade e $\mathcal{B} = B[p_1, p_2, ...]$ o módulo gerado nos indeterminados p_i com sua graduação natural dada por

$$\mathcal{B} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_k, \qquad \mathcal{B}_k =< p_{j_1}...p_{j_r} \mid j_1 + ... + j_r = k > .$$

Claramente o posto de $\mathcal{B}_k$ é $\pi(k)$, o número de partições naturais de k.

Definição 1.4.1. *Chamamos de* sequência multiplicativa *uma sequência* $\{K_i\}$ *onde* $K_0 = 1$,

$K_i \in \mathcal{B}_k$ *e vale:*

$$\begin{aligned} 1 + p_1 z + p_2 z^2 + ... &= (1 + p'_1 z + p'_2 z^2 + ...)(1 + p''_1 z + p''_2 z^2 + ...) \\ \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} K_j(p_1, ..., p_j) z^j &= (\sum_{i=0}^{\infty} K_i(p'_1, ..., p'_i) z^i)(\sum_{k=0}^{\infty} K_k(p''_1, ..., p''_k) z^k). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Notaremos por $K(1 + p_1 z + p_2 z^2 + ...) = \sum K_i(p_1, ..., p_i) z^i$.

Nos vale o seguinte resultado

Lema 1.21. *Existe uma correspondência biunívoca entre séries de potências formais com termo constante 1 e sequências multiplicativas. Este é dado por* $\{K_i\} \mapsto K(1 + z)$. *O polinômio* $K(1 + z)$ *será chamado de polinômio característico de* K.

1.4.2. *Fixaremos a seguinte notação:*

$$L(1 + z) = \frac{\sqrt{z}}{\tanh \sqrt{z}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k}}{(2k)!} B_k z^k,$$

$$A(1 + z) = \frac{2\sqrt{z}}{\sinh 2\sqrt{z}}, \quad \hat{A}(1 + z) = \frac{\sqrt{z}}{2 \sinh 2^{-1} \sqrt{z}} = 2^{-4k} A_k,$$

onde B_k *denota os números de Bernoulli.*

Considere agora variedades diferenciáveis V^n, W^m e seus fibrados tangentes TV, TW. Notamos por $f_1 : V \times W \to V$ e $f_2 : V \times W \to W$ as projeções do produto, portanto

$$T(V \times W) = f_1^*(TV) \oplus f_2^*(TW).$$

Pelo Teorema 1.19 vale que, módulo torção

$$p(T(V \times W)) = f_1^* p(TV) f_2^* p(TW),$$

e para $x \in H^n(V) \otimes B$ e $y \in H^m(W) \otimes B$

$$(f_1^*(x) \cup f_2^*(y))[V \times W] = x[V] \cdot y[W] \in B.$$

Definição 1.4.3. *Se* $\{K_i(p_1, ..., p_i)\}$ *é uma sequência multiplicativa então definimos o* K*-gênus de* V, $K(V)$, *como zero se a dimensão de* V *não é divisível por 4 e* $K_n(p_1(V), ..., p_n(V))[V^{4n}]$ *caso contrário.*

Aqui as classes de Pontrjagyn assumem valores em $H^{4i}(V; \mathbb{Z}) \otimes B$ ou $H^{4i}(V; \mathbb{Q}) \otimes B$ de forma que $K(V) \in B$. Já é fácil concluir o seguinte resultado.

Lema 1.22. *Para qualquer sequência multiplicativa* $\{K_i\}$, *o* K*-gênus é multiplicativo:*

$$K(V \times W) = K(V) \cdot K(W).$$

1.4.1 O anel de Cobordismo de Thom

Seguiremos a abordagem de [22] e nos referimos a [40] para demonstrações.

Definição 1.4.4. *Dada uma variedade diferenciável V^n definimos os números de Pontrjagyn como zero se n não é divisível por 4 e $i_{j_1 \dots j_r} = p_{j_1} \cdots p_{j_r}[V]$ para cada sequência $j_1 + \dots + j_r = k$ de números inteiros onde $n = 4k$. Definimos Ω^k o grupo abeliano de variedades diferenciáveis orientadas com a operação de soma conexa e a menos de cobordismo, isto é $M = N$ se e só se existe W^{k+1} tal que $\partial W = M\#(-N)$. Dado V^{4k} temos a aplicação $\mathcal{B}_k \ni a \mapsto a[V] \in B$, nota-se facilmente que este é homomorfismo entre grupos abelianos.*

Teorema 1.23 (Thom). *Duas variedades orientáveis V^{4k}, W^{4k} têm os mesmos números de Pontrjagyn se e somente se algum múltiplo inteiro de $V + (-W)$ é bordo, i.é., existe uma variedade orientável M^{4k+1} tal que $\partial M = n(V + (-W))$ para algum n inteiro. Ainda mais, os grupos de cobordismo Ω^r são finitos se r não é divisível por 4 e uma soma direta de $\pi(k)$ cópias de $\mathbb{Z}$ e um grupo finito caso contrário.*

Em [40] o método de demonstração deste teorema é baseado em imersões de esferas em $T(\gamma_k)$ e sua transversalidade em relação a sessão zero garantida pelo Teorema de Transversalidade demonstrado no mesmo artigo. Outra referência é [35].

Concluí-se, pelo teorema acima, que de fato a aplicação $\Omega^{4k} \otimes \mathbb{Q} \to Hom(\mathcal{B}_{4k}, \mathbb{Q})$ em 1.4.4 é um isomorfismo. Dualmente também podemos afirmar:

Teorema 1.24. *Se $\psi(V^n) \in \mathbb{Q}$ com:*

1. $\psi(V^n + W^n) = \psi(V^n) + \psi(W^n), \quad \psi(-V^n) = -\psi(V^n)$,
2. $\psi(V^n \times W^m) = \psi(V^n) \cdot \psi(W^m)$,
3. *se V^n é bordo então $\psi(V^n) = 0$.*

Então $\psi(V^n) = 0$ se n não for divisível por 4 e existe uma única sequência multiplicativa $\{K_i\}$ tal que

$$\psi(V^{4i}) = K_i(p_1, \dots, p_i)[V^{4i}].$$

Isto é, dada qualquer variedade V^n, $\psi(V^n)$ se identifica com o seu respectivo K-gênus.

Se considerarmos o anel $\Omega = \bigoplus \Omega^k$ com o produto cartesiano entre variedades então vale o

Teorema 1.25. *Os espaços projetivos complexos $P\mathbb{C}^{2k}$ formam uma base para o anel de cobordismo racional $\Omega \otimes \mathbb{Q}$.*

Vale notar que $\sigma(P\mathbb{C}^{2k}) = 1$. Também temos o seguinte

Lema 1.26. *Se* $p_i = \begin{pmatrix} 2k+1 \\ i \end{pmatrix}$ *então* $L_k(p_1, ..., p_k) = 1$.

Aplicando L_k em $P\mathbb{C}^{2k}$ concluímos o

Corolário 1.27. *Dada uma variedade diferenciável, compacta e orientada* V^{4k}*, o índice de* V *se identifica com o seu L-gênus. Isto é,* $L_k(p_1, ..., p_k)[V] = \sigma(V)$.

Que será a base dos invariantes construídos no próximo capítulo.

CAPÍTULO 2

APRESENTAÇÕES CLÁSSICAS DE ALGUNS FENÔMENOS EXÓTICOS

Começaremos o capítulo expondo baseado em [31, 32] o primeiro modelo de esfera exótica e em [17, 32] os invariantes usados nos cálculos relacionados.

2.1 Sobre variedades homeomorfas a 7-esfera

Nós podemos começar a exposição com a seguinte ampla, fundamental e altamente não-trivial

> *Questão: Quais espaços topológicos localmente homeomorfos ao espaço euclidiano são de fato realizáveis como uma variedade diferenciável?*

Um primeiro passo para atacar esta questão seria nos focar em um caso específico. Na década de 50 com a *Conjectura Generalizada de Poincaré* ainda em aberto e sem saber como atacá-la o caso de variedades homotopicamente equivalentes a esfera parecia inacessível. Poderia se pensar então que o caso mais simples possível após este é o de $2n$-variedades $(n-1)$-conexas. Naquela época já eram bem estabelecidos vários resultados e técnicas para lidar com tais variedades, por exemplo já era fácil de descrever que seu tipo homotópico tinha que ser dado por colar o bordo de um disco D^{2n} em um buquê de esferas. Isto é

$$M^{2n} \cong S^n \vee S^n \vee ... \vee S^n \cup D^{2n}.$$

A (co)homologia é classificada completamente pelo número de esferas a nível n e como $\mathbb{Z}$ em 0 e $2n$. Vale ainda que a forma de interseção é completamente definida pela colagem. Supondo ainda que seja admitida uma estrutura diferenciável valeríamos de classes de Pontrjagyn. Ambas, quando n par, ligadas pelo Corolário 1.27 conjecturado e demonstrado por Hirzebruch, sendo que para n ímpar não havia análogo. Ainda simplificando o problema para começarmos poderíamos considerar o caso mais simples, com $n = 2m$ e apenas uma esfera

$$M^{4m} = S^{2n} \cup D^{4m}.$$

O que se sabe sobre variedades assim? Temos como exemplos os planos projetivos complexos, quaterniônicos e Cayley. Também sabemos pelo teorema de mergulho de Whitney ([37, 28]) que S^{2n} pode ser mergulhada de forma suave como gerador do grupo de homotopia e considerando uma vizinhança tubular fica fácil ver que o complemento tem que ser um disco. Também é fácil ver que qualquer fibrado vetorial sobre a esfera é realizável como um fibrado normal de um mergulho. Portanto só nos resta a questão de entender melhor estes fibrados. Isto é, quando o bordo de um fibrado sobre S^{2m} é uma esfera?

Agora usando métodos modernos, considere um fibrado de esferas $S^{n-1} \hookrightarrow M^{2n-1} \to S^n$. A partir da sequência exata da fibração conclui-se que $\pi_k(M^{2n-1}) = 0$ para $k < n-1$ e

$$\pi_n S^n \to \pi_{n-1} S^{n-1} \to \pi_{n-1} M^{2n-1} \to 0.$$

Se tivermos por algum acaso $\pi_{n-1}(M^{2n-1}) = 0$, pelos Teoremas 1.11,1.6,1.12,1.13 e [39], teríamos uma variedade homeomorfa a esfera. Para o caso $n = 2$ é facilmente observável que sempre acabaríamos com a esfera padrão. Considere agora o caso $n = 4$. Temos então os fibrados classificados por $\pi_3 SO(4) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ gerado pelas funções $f_{ij}(u)v = u^i v u^j$ em $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$. Segundo a sessão 1.3 a aplicação bordo na sequência $\pi_4 S^4 \to \pi_3 S^3 \to \pi_3 M^7 \to 0$ é dada pelo grau da aplicação $u \mapsto f_{ij}(u)1$, mas esta tem grau $i + j$ e portanto os fibrados de esferas com $i + j = 1$ são de fato homeomorfas a S^7. Notando por $\xi_{i,j}$ o fibrado de esferas classificado por f_{ij} e $M^7_{i,j}$ (ou M^7_k para $k = i - j$, k ímpar) o seu espaço total temos o seguinte

Teorema 2.1. *A variedade diferenciável $M^7_{i,j}$ é homeomorfa à esfera padrão se e somente se $i + j = 1$.*

Demonstração. Se $i + j = 1$ então os argumentos acima demonstra o homeomorfismo. Para $i + j \neq 1$ vale pela sequência acima que $\pi_3(M^7_{i,j}) \cong \mathbb{Z}_{i+j}$. □

Estas variedades são realizáveis naturalmente como o bordo do fibrado de discos associado $D^4 \hookrightarrow B^8_k \to S^4$, $k = i - j$, portanto o então recente trabalho de Thom ([40]), sugeria que seria uma questão razoável encontrar algum invariante algébrico sobre as classes de cobordismo destas variedades. Considere por exemplo a fórmula da assinatura de Hirzebruch para uma variedade fechada:

$$\sigma(V^8) = \frac{7p_2 - p_1^2}{45}[V^8].$$

É fácil ver que $\sigma(B_k^8 \cup D^8) = +1$, a menos de uma troca de orientação portanto se pudéssemos colar um disco D^8 em B_k^8 pelo seu bordo de forma diferenciável, isto é, se o bordo de B_k^8 for difeomorfo a S^7 valerá

$$p_1^2[B_k^8 \cup D^8] + 45 \equiv 0 \quad mod\ 7.$$

De fato neste momento conseguimos o invariante sobre estruturas diferenciáveis desenvolvido por Milnor em [32].

2.1.1 Um invariante $\lambda(M_k^7)$

Na forma mais geral possível, seja $M^{4k-1} \overset{i}{\hookrightarrow} W^{4k} \overset{j}{\to} (W^{4k}, M^{4k-1})$ com $\partial W = M$. Suponha ainda que as seguintes aplicações sejam isomorfismos

$$j^* : H^{2k}(W, M) \to H^{2k}(W) \tag{2.1}$$

$$j^* : H^{4i}(W, M) \to H^{4i}(W) \qquad (0 \leq i \leq k), \tag{2.2}$$

de forma que as classes $(j_*)^{-1}p_i(W) \in H^{4i}(W, M)$ sejam bem definidas, então

Teorema 2.2. *(Milnor, [32]) Se M satisfaz as hipóteses acima para $\partial W_1 = \partial W_2 = M$, seja $X = W_1 \cup_\partial (-W_2)$, então*

$$\sigma(X) = \sigma(W_1) - \sigma(W_2),$$

e para qualquer sequência multiplicativa K

$$K'(X) = K'(W_1) - K'(W_2),$$

onde notamos por $K'(W_i) = K((j^*)^{-1}p_1, ..., (j^*)^{-1}p_{k-1}, 0)[W_i, M]$.

Demonstração. Consideramos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
H^r(M,M) = 0 & H^r(W_1,M) \oplus H^r(W_2,M) \arrow[l] \arrow[d, "j_1^* \oplus j_2^*"] & H^r(X,M) \arrow[l, "h"'] \arrow[d, "j^*"] & 0 = H^{r-1}(M,M) \arrow[l] \\
& H^r(W_1) \oplus H^r(W_2) & H^r(X) \arrow[l, "k"'] &
\end{tikzcd}$$

Composto horizontalmente da sequência de Mayers-Vietoris para o par (X, M) e verticalmente de sequências de pares. Para $r = 4i$ ou $r = 2k$ concluímos que h é isomorfismo portanto j^* é monomorfismo. Porém pelas hipóteses e pela sequência do par (W_1, M) temos:

$$\begin{tikzcd}
H^r(M) & H^r(W_1) \arrow[l, "zero"'] & H^r(W_1, M) \arrow[l, "iso"'] \\
H^r(M) \arrow[u, "id"] & H^r(X) \arrow[l, "i^*"'] \arrow[u, "k_1^*"'] & H^r(X, M) \arrow[l, "j^*"'] \arrow[u, "(k_1, id)^*"']
\end{tikzcd}$$

concluindo que j^* é epimorfismo e portanto o quadrado central do primeiro diagrama é composto por isomorfismos. Aqui $i : M \to X$ e $k_1 : W_1 \to X$ são as inclusões. Seja agora $\alpha = j^* h^{-1}(\alpha_1 \oplus \alpha_2) \in H^{4k}(X)$ logo:

$$\alpha^2[X] = j^* h^{-1}(\alpha_1^2 \oplus \alpha_2^2)[W_1 \cup (-W_2)] = \alpha_1^2[W_1] - \alpha_2^2[W_2].$$

O que conclui a primeira parte do teorema.

Definimos $\alpha_i^k = (j_k^*)^{-1} p_i(W_j)$. Como, por 1.19 e pela definição de k, $k(p_i(X)) = p_i(W_1) \oplus p_i(W_2)$ então pelo primeiro diagrama $jh^{-1}(\alpha_i^1 \oplus \alpha_i^2) = p_i(X)$. Agora a segunda parte do teorema segue por um cálculo semelhante ao da primeira parte. $\square$

Como resultados imediatos temos:

Corolário 2.3. *Seja (W_i, M) como acima para $i = 1, 2$ e*

$$\lambda(W_i, M) = \{p_1^2[W_i, M] - 4\sigma(W_i, M)\} \ mod\ 7.$$

Então $\lambda(W_1, M) = \lambda(W_2, M)$, isto é, $\lambda(M)$ não depende da escolha de cobordo de M.

Demonstração. Isto é claro pelos argumentos acima e pelo fato que $p_1^2[W_i, M] - 4\sigma(W_i, M) \cong L'(W_i) - 4\sigma(W_i)$. $\square$

Proposição 2.4. *Seja M^7 uma variedade que admite um par (W^8, M^7) satisfazendo as hipóteses acima. Então se $\lambda(M^7) \neq 0 \mod 7$, M^7 não pode ser bordo de um disco, em particular não pode ser difeomorfa a S^7.*

Na realidade λ é um invariante sobre variedades diferenciáveis e $\lambda(S^7) = 0$ portanto não é necessária esta observação para concluir que M^7 não é difeomorfa à esfera padrão quando $\lambda(M^7) \neq 0$. Considere agora o caso das variedades descritas como fibrados de 3-esferas sobre S^4.

Proposição 2.5. *B^8_k satisfaz as hipóteses para o invariante λ e tem a primeira classe de Pontrjagyn igual a $\pm 2(i-j)\alpha$ para α a imagem de um gerador de $H^4(S^4)$ por π^*.*

Demonstração. Como S^4 é paracompacto qualquer fibrado $\pi : E \to S^4$ admite uma distribuição $\mathcal{H}_p \subset T_pE$ com $H_p \oplus V_p = T_pE$ onde V_p é o espaço dos vetores verticais sobre o ponto p, portanto $p(E) = p(H)p(V)$ porém $H \cong \pi^*TS^4$ e $V \cong \pi^*E$, logo $p(E) = \pi^*(p(S^4)p(E))$. Como é conhecido que $p(S^4) = 1$ basta calcularmos $p(E)$.

Considerando $g_{ij} : S^4 \to \tilde{G}_4(\mathbb{R}^\infty)$, uma aplicação que classifica ξ_{ij}, é conhecido que $p(\xi_{ij}) = g^*_{ij}p(\gamma_4)$ portanto, como homotopicamente $[g_{ij}] = i[g_{10}]+j[g_{01}]$, temos que a aplicação $(i,j) \mapsto p(\xi_{ij})$ é linear. Vale ainda o seguinte

Lema 2.6. *O fibrado $\xi_{i,j}$ com a orientação invertida é isomorfo a $\xi_{-j,-i}$.*

Demonstração. Basta trabalharmos com $B^8_{i,j}$. Considere a seguinte definição

$$B^8_{ij} = \mathbb{H} \times \mathbb{H} \cup_h \mathbb{H} \times \mathbb{H},$$

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{H} \times (\mathbb{H} - \{0\}) & \to & \mathbb{H} \times (\mathbb{H} - \{0\}) \\ (u,v) & \mapsto & \left(\dfrac{u}{|u|^2}, \dfrac{u^i v u^j}{|u|} \right). \end{array}$$

Então a aplicação $(u,v) \mapsto (u,\bar{v})$ é um isomorfismo bem definido entre B^8_{ij} e $B^8_{-j,-i}$ que inverte a orientação da fibra. □

Como a primeira classe de Pontrjagyn não depende da orientação então podemos concluir que $p_1(\xi_{i,j}) = c(i-j)a$ para algum $c \in \mathbb{Z}$ e algum gerador $a \in H^4(S^4)$. É sabido porém que $p_1(\xi_{10}) = \pm 2a$ ([23]) o que conclui a demonstração. □

Como a seção nula $S^4 \hookrightarrow B^8_k$ é um retrato por deformação podemos assumir a assinatura de B^8_k igual a 1 e fixar $a \in H^4(S^4)$ tal que $\pi^*(a \cup a)[B^8_k, M^7_k] = +1$. Concluímos a seguinte proposição.

Proposição 2.7 (Milnor)**.** *$\lambda(M^7_k) \cong k^2 - 1 \mod 7$.*

Ou seja, M^7_k é topologicamente uma 7-esfera porém com uma estrutura diferenciável diferente da padrão quando $k^2 \neq 1 \mod 7$. $M^7_{2,-1}$, por exemplo, realiza $k^2 \cong 2 \mod 7$ e portanto não é uma esfera padrão.

2.2 Um invariante de certas variedades diferenciáveis

Apresentaremos nesta seção, baseados no artigo [17] homônimo de J. Eells e N. Kuiper, um invariante sobre certas variedades diferenciáveis. Teremos por base o seguinte teorema de índice de Hirzebruch.

Teorema 2.8 (Hirzebruch [3]). *Seja V^{4n} uma variedade diferenciável fechada, orientável e spin, i.é. $w_2(V) = 0$. Então $\hat{A}$-genus de V é um número inteiro e ainda mais, se n é ímpar, então $\hat{A}(V)$ é um número par.*

Este invariante se demonstra um pouco mais refinado quando aplicado a 7-esferas, de fato ele classifica os 28 tipos diferentes de estruturas diferenciáveis orientadas sobre S^7 ([17, 26]).

Considere novamente as hipóteses 2.2 junto a hipótese adicional de que $w_2(W^{4n}) = 0$ e a inclusão $i^* : H^1(W^{4n}; \mathbb{Z}_2) \to H^1(M^{4n-1}; \mathbb{Z}_2)$ é sobrejetora então definimos um novo invariante $\mu(M^{4n-1})$:

Definição 2.2.1. *Sejam*

$$t_n = \hat{A}_n(0, ..., 0, 1)/L_n(0, ..., 0, 1), \quad a_n = 4/(3 + (-1)^n),$$
$$N_n = \hat{A}_n(p_1, ..., p_{n-1}, 0) - t_n L_n(p_1, ..., p_{n-1}, 0).$$

Então, para um par (W^{4n}, M^{4n-1}) como acima defina o número:

$$\mu(W, M) = \frac{1}{a_n}\{N_n(p_1, ..., p_{n-1})[W, M] + t_n \tau(W, M)\} \tag{2.3}$$

De fato este é um invariante sobre M^{4n-1} como afirma o próximo

Teorema 2.9 (Eells-Kuiper, [17]). *Se W_1 e W_2 satisfazem todas as hipóteses acima então $\mu(W_1, M) \equiv \mu(W_2, M) \equiv \mu(M)$ módulo 1.*

Demonstração. Sendo $X = W_1 \cup_\partial (-W_2)$, pelo Teorema (2.2) e um cálculo rápido vale que

$$\mu(W_1, M) - \mu(W_2, M) = \frac{1}{a_k}\{N_k(p_1, ..., p_{k-1})[X] + t_k \tau(X)\} = \frac{1}{a_k}\hat{A}(X).$$

Portanto se X é spin $\frac{1}{a_k}\hat{A}(X)$ é um número inteiro e temos o resultado desejado. De fato, pela sequência de Mayers-Vietoris de X temos:

$$\cdots \leftarrow H^2(W_1; \mathbb{Z}_2) \oplus H^2(W_2; \mathbb{Z}_2) \xleftarrow{k_1^* \oplus k_2^*} H^2(X; \mathbb{Z}_2) \xleftarrow{\Delta} H^1(M; \mathbb{Z}_2)$$
$$\xleftarrow{i_1^* - i_2^*} H^1(W_1; \mathbb{Z}_2) \oplus H^1(W_2; \mathbb{Z}_2) \leftarrow \cdots$$

onde $i_\alpha : M \to W_\alpha$ e $k_\alpha : W_\alpha \to X$ são as inclusões. Novamente pela naturalidade da classe de Stiefel-Whitney temos:

$$(k_1^* \oplus k_2^*)w_2(X) = w_2(W_1) \oplus w_2(W_2) = 0.$$

Visto que $i_1 - i_2$ é epimorfismo então $Im(\Delta) = Ker(k_1^* \oplus k_2^*) = 0$, portanto $w_2(X) = 0$ como desejado. □

Teorema 2.10. *Para $n = 2$ e $k = 2h - 1$ vale*

$$\mu(M^7_{2h-1}) \equiv \frac{h(h-1)}{56} \quad mod\ 1.$$

Em particular $\mu(M^7_3) \equiv 1/28$ é gerador de $\theta^7 \cong \mathbb{Z}_{28}$, isto é, dada uma esfera homotópica Σ de dimensão 7 então ela é difeomorfa a $\#_{28\mu(\Sigma)} M^7_3$.

Demonstração. Basta observar que

$$\mu(M^7) = \{p_1^2[W^8, M^7] - 4\tau(W^8, M^7)\}/2^7 \cdot 7 \quad mod\ 1,$$

para qualquer par (W^8, M^7) com as hipóteses necessárias e aplicar os cálculos feitos na última sessão. O fato que M^7_3 é gerador vem do fato facilmente dedutível que $28\mu : \theta^7 \to \mathbb{Z}_{28}$ é homomorfismo e que $|\theta^7| = 28$ ([26]). □

O artigo [32] tamb´rem responde a questão de quais variedades homeomorfas a S^7 são realizáveis como um fibrado de esferas sobre S^4.

Proposição 2.11 ([17])**.** *Para $n = p2^r$ e p primo a equação*

$$h(h-1) \equiv j \quad mod\ n,$$

tem solução para $(p+1)2^{r-2}$ valores diferentes de j mod n. Os valores de $h(h-1)/2$ mod 28 são 0,1,3,6,7,8,10,13,14,15,17,20,21,22,24 e 27.

Observação 2.12. *É fácil notar que $\mu(M_1\#M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2)$ para quaisquer duas variedades com as hipóteses do teorema 2.9 resultando que qualquer variedade M^7 com estas hipóteses tem pelo menos 28 estruturas diferenciáveis distintas. Um caso particular é $S^2 \times S^5$ que é diferenciavelmente um produto de esferas porém $(S^2 \times S^5)\#M^2_3$ não o é.*

Observação 2.13. *Considerando o fato que μ é um invariante por difeomorfismo e que $\mu(-M) = -\mu(M)$ concluímos que uma variedade M possui um difeomorfismo que reverte a orientação se e só se $2\mu(M) \equiv 0$ o que, para esferas de dimensão 7, só acontece com S^7 e $\#_{14}M^7_3$.*

Apêndice A: Algumas involuções do ponto de vista clássico

Assim como se era questionada a existência de esferas não difeomorfas à padrão a mesma questão pode ser feita para qualquer outra variedade. Dada uma involução (diferenciável) $T : S^n \to S^n$ sem pontos fixos é verdade que a variedade S^n/T é difeomorfa ao plano projetivo $P^n = G_1(\mathbb{R}^{n+1})$? Note que com essas informações os únicos dados que se conhecem são os grupos de homotopia, isto é, $\pi_k(S^n/T) = \pi_k(P^n)$ para todo k, portanto esta exoticidade pode ser questionada ainda na categoria de espaços topológicos. Uma forma de entender e classificar este tipo de fenômeno é notando que se existir difeomorfismo $g : S^n \to S^n$ tal que $gTg^{-1} = a$, a aplicação antipodal então o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "g"] \arrow[d] & S^n \arrow[d] \\ S^n/T \arrow[r, dashed] & S^n/a \end{tikzcd}$$

se completa com um difeomorfismo na parte inferior. Analogamente, dado um difeomorfismo entre uma variedade qualquer M e S^n/T, a teoria de espaços de recobrimento e levantamento de aplicações (ver por exemplo [6]) mais uma verificação local de diferenciabilidade, induz uma involução T' e um difeomorfismo $g' : S^n \to S^n$ tal que $g'T'(g')^{-1} = T$. É claro então que o que na verdade estamos estudando são as classes de conjugação das involuções de S^n pelo grupo $Diff^+(S^n)$. É notório que dado um espaço M qualquer o recobrimento admite somente uma estrutura diferenciável que torna a projeção diferenciável. Em particular, caso este seja uma esfera exótica, M não pode ser difeomorfo a P^n.

Relembrando a definição de $M_3^7 = M_{2,-1}^7$ dada acima considere a involução sem pontos fixos induzida por aplicar a antípoda fibra-a-fibra. De fato ela está bem definida, notando $\tilde{T}(u, v) = (u, -v)$ temos $f_{2,-1}(u, -v) = \tilde{T}(f_{2,-1}(u, v))$. Já é claro que $M_3^7/\tilde{T}$ de fato é um espaço projetivo exótico, como denominado acima, porém ainda mais, existem subespaços $S^5 \cong S_0^5 \subset S_0^6 \cong S^6 \subset M_3^7$ cujas restrições $T = \tilde{T}|_{S_0^6 \subset M_3^7}$, $T' = T|_{S_0^5 \subset S_0^6}$ ainda são bem definidas. Vale ainda:

Teorema 2.14. *Os espaços $S_0^6 \subset M_3^7$ e , $S_0^5 \subset S_0^6$, definidos por $\Re(v') = \Re(uv) = 0$ e $\Re(v) = \Re(u'(v')^{-1}) = 0$ são difeomorfos as esferas de respectivas dimensões e admitem restrições T, T' de $\tilde{T}$ tal que seus quocientes não são difeomorfos aos espaços projetivos P^6, P^5.*

Demonstração. Usaremos a demonstração clássica de [32]. Considere o seguinte lema

Lema 2.15 ([32])**.** *Seja M uma variedade fechada e orientada e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função com apenas dois pontos críticos não degenerados. Então M é homeomorfa a uma esfera.*

Dada a aplicação $f_{ij}(u)v = u^i v u^j$ e tomamos a seguinte função de colagem (notada pelo mesmo nome):

$$f_{ij} : \mathbb{H} - \{0\} \times S^3 \to \mathbb{H} - \{0\} \times S^3 \tag{2.4}$$

$$(u, v) \mapsto \left(\frac{u}{|u|^2}, \frac{u^i}{|u|^i} v \frac{u^j}{|u|^j} \right). \tag{2.5}$$

Agora para $i + j = 1$ é fácil ver que $f : M^7_{2,-1} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(u, v) = \frac{\Re(uv)}{(1 + |u|^2)^{1/2}} = \frac{\Re(v')}{(1 + |u'|^2)^{1/2}},$$

respeita as hipóteses acima e que a pré-imagem do zero tem que ser homeomorfa a S^6. O mesmo argumento vale para S^5_0 considerando a função $f' : S^6_0 \to \mathbb{R}$:

$$f'(u, v) = \frac{\Re(v)}{(1 + |u|^2)^{1/2}} = \frac{\Re(u'(v')^{-1})}{(1 + |u'|^2)^{1/2}}.$$

Segue que estes espaços são esferas padrões por não existir esferas exóticas em dimensões 5 e 6 ([26]).

Agora uma conta direta garante que $\tilde{T}$ fixa estes dois espaços, portanto são involuções bem definidas. Para estudar as classes de difeomorfismo dos espaços quocientes considere primeiramente o caso S^6_0/T. Note que a pré-imagem de qualquer vizinhança $(-\epsilon, \epsilon)$ pela função f é uma vizinhança tubular de S^6_0 e que ainda $M^7_3 - S^6_0$, segundo [32], são dois discos identificados um com o outro via T (veja a demonstração do lema acima em [32]). Isto implica que o complemento de qualquer vizinhança tubular pequena o suficiente de S^6_0/T em $M^7/\tilde{T}$ é um disco e portanto esta só pode ser um fibrado de linha não trivial sobre S^6_0/T (se fosse trivial seriam dois discos como a função f deixa claro). Considere a mesma situação para $P^6 \hookrightarrow P^7$. Caso colarmos um disco D^7 na fronteira do espaço total do fibrado de linha não trivial sobre P^6 colando com um difeomorfismo h teremos P^7 com no máximo o erro de uma soma direta com a esfera $\Sigma^7_h = D^7 \cup_h D^7$. Isto é $\nu(P^6) \cup_h D^7 = P^7 \# \Sigma^7_h$. É claro que o espaço de recobrimento deste tem como estrutura diferenciável $\Sigma^7_h \# \Sigma^7_h$ com seu invariante μ divisível por 2, o que não acontece com M^7_3. Um argumento similar com S^5_0/T' mostraria que S^6_0/T é difeomorfo a $P^6 \# \Sigma$ para alguma esfera Σ, porém só existe a esfera padrão e acabaríamos com a igualdade $S^6_0/T = P^6$ que já provamos ser um absurdo. $\square$

Existe uma outra forma mais sucinta porém menos elementar para demonstrar a exoticidade destes quocientes. Note por $hS(P^n)$ o conjunto de variedades diferenciáveis homotopicamente equivalentes a P^n. Temos então o seguinte teorema

Teorema 2.16 ([30])**.** *Existem bijeções*

$$\begin{aligned} hS(P^5) &\cong \mathbb{Z}_4, \\ hS(P^6) &\cong \mathbb{Z}_4, \\ hS(P^7) &\cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{28} \oplus \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

E sequências exatas

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{Z}_2 & \to & hS(P^5) & \xrightarrow{\Sigma} & hS(P^6) & \to & 0 & & \\ 0 & \to & hS(P^6) \oplus \theta^7 & \xrightarrow{\Sigma} & hS(P^7) & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{Z} & \to & 0. \end{array}$$

Onde σ é o invariante de Browder-Livsay que corresponde ao fator $\mathbb{Z}$ em $hS(P^7)$ e não influi nos grupos mais baixos e Σ é dada pela construção de colar um disco via um difeomorfismo feita na demonstração anterior. Ainda mais, considerando $\kappa : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2$ com valores $0, 1 \in \mathbb{Z}$ como a redução módulo 2, o duplo recobrimento $hS(P^7) \to \theta^7$ é dada por $(\alpha, \theta, \sigma) \mapsto \kappa(\alpha) + 2\theta + \sigma \mod 28$.

Caso o leitor venha a verificar nossa referência, será necessário observar que os grupos $hS_0(P^n)$ puderam ser substituídos no teorema devido a outra sequência exata

$$\theta^{n+1} \to hS_0(P^n) \to hS(P^n) \to \theta^n,$$

que aparece no mesmo livro.

Para a involução $\tilde{T}$ o invariante σ é nulo (este invariante é nulo se e somente se a involução deixa uma esfera invariante cujo complemento é composto por duas componentes conexas que são mapeadas bijetivamente uma na outra pela involução). Temos para $S_0^6/T \in hS(P^6)$, $\Sigma(S_0^6/T) = \tilde{T}$ e T é do tipo $(\alpha, \theta, 0)$ com $\kappa(\alpha) + 2\theta = 1 \mod 28$, portanto $\kappa(\alpha) = 1$, pois $1 \in \mathbb{Z}_{28}$ não é par, logo $S_0^6/T \neq 0 \in hS(P^6)$ e como $\Sigma : hS(P^5) \to hS(P^6)$ é sobrejetor, $S_0^5/T' \in \mathbb{Z}_4$ também não é o elemento trivial.

No próximo capítulo daremos identificações explícitas dos espaços S_0^6 e S_0^5 com as esferas padrões revelando alguma geometria da mesma.

CAPÍTULO 3

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Em [18] Gromoll e Meyer apresentaram a variedade M_3^7 como quociente de um grupo de Lie G por uma ação de um subgrupo de $G \times G$ e a partir da estrutura do grupo provaram a existência de curvatura não-negativa em M_3^7. Recentemente foi publicado um artigo respondendo positivamente a questão muito mais complicada de existência de alguma métrica de curvatura estritamente positiva ([36]) contudo a importância do trabalho de Gromoll e Meyer é inquestionável. Iremos apresentar esta construção então seguiremos com as construções de difeomorfismos exóticos e elementos de Blackers-Massey em [9, 11, 1], e encerraremos o capítulo com a apresentação de todas as esferas de dimensão 7 como quocientes de fibrados principais sobre S^7 em [13].

3.1 Uma apresentação de M_3^7 como um biquociente

Iniciaremos com uma apresentação da esfera de Gromoll-Meyer baseado em [11].

Considere $Sp(2)$ o grupo de matrizes quaterniônicas 2x2 tais que $QQ^* = \mathrm{Id}$. Consideramos a seguinte ação livre de $S^3 = Sp(1)$ em $Sp(2)$

$$\begin{aligned} S^3 \times Sp(2) &\rightarrow Sp(2) && (3.1)\\ \left(q, \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right) &\mapsto \begin{pmatrix} qa\bar{q} & qc \\ qb\bar{q} & qd \end{pmatrix} && (3.2) \end{aligned}$$

É fácil observar que a projeção da segunda coluna em S^4 como uma fibração de Hopf é conservada por esta ação. Isto é, note $\Sigma^7_{GM} = Sp(2)/S^3$ como acima então temos uma fibração de 3-esferas $S^3 \hookrightarrow \Sigma^7_{GM} \to S^4 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{H}$ com

$$\Sigma^7_{GM} \quad \to \quad S^4 \tag{3.3}$$

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} |d|^2 - |c|^2 \\ -2\bar{d}c \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Teorema 3.1 (Gromoll e Meyer [18])**.** *O quociente Σ^7_{GM} é difeomorfo a M^7_3.*

Demonstração. A fim de ser útil mais tarde iremos utilizar a demonstração indicada em [11] e não a original. Considere $S^4 = D_+ \cup D_-$ com $D_\pm = S^4 - \{(\mp 1, 0)\}$ como acima e aplicações $\phi_\pm : D_\pm \times S^3 \to \Sigma^7_{GM}$ definidas por

$$\phi_-(x, \xi, k) \quad \mapsto \quad \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\xi k}{\sqrt{1-x}} & -\sqrt{1-x} \\ \sqrt{1-x}k & \frac{\bar{\xi}}{\sqrt{1-x}} \end{pmatrix} \right] \tag{3.5}$$

$$\phi_+(y, \zeta, h) \quad \mapsto \quad \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1+y}h & -\frac{\zeta}{\sqrt{1+y}} \\ \frac{\bar{\zeta}h}{\sqrt{1+y}} & \sqrt{1+y} \end{pmatrix} \right] \tag{3.6}$$

Pode-se notar que estas são apenas composições das aplicações em [18] com funções estereográficas sobre S^4. De fato $\phi_- = h_1 \circ \varphi_- \times \mathrm{Id}$ e $\phi_+ = h_2 \circ \varphi_+ \times \mathrm{Id}$ onde φ_+ é a inversa da aplicação estereográfica em relação ao polo norte e φ_- é a inversa da aplicação estereográfica em relação ao polo sul composta com conjugação quaterniônica, portanto $\phi_+ \circ \phi_- = (h_2 \circ \varphi_+ \times \mathrm{Id})^{-1} \circ (h_1 \circ \varphi_- \times \mathrm{Id}) = (\varphi_+^{-1} \times \mathrm{Id}) h_2^{-1} h_1 \circ (\varphi_- \times \mathrm{Id})$ o que é essencialmente a função de transição $f_{2,-1}$ encontrada na demonstração original de Gromoll e Meyer. Consideremos ainda uma demonstração mais algébrica no espírito dos trabalhos mais recentes ([11]). Considere a imagem das aplicações acima nos subconjuntos $x, y \neq \pm 1$:

$$\begin{pmatrix} \frac{s\xi k\bar{s}}{\sqrt{1-x}} & -\sqrt{1-x}s \\ \sqrt{1-x}sk\bar{s} & \frac{s\bar{\xi}}{\sqrt{1-x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1+y}h & -\frac{\zeta}{\sqrt{1+y}} \\ \frac{\bar{\zeta}h}{\sqrt{1+y}} & \sqrt{1+y} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Do canto inferior direito temos $s\bar{\xi} = \sqrt{(1-x)(1+y)}$, tomando módulos $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1-x)(1+y)}$, portanto $x = y$ e $s = \xi/|\xi|$. Pela entrada superior direita concluímos que $s = \frac{\zeta}{\sqrt{(1-x)(1+y)}}$, novamente tomando módulos e usando que $x = y$ concluímos que $s = \zeta/|\zeta|$ portanto $\xi = \zeta$. Agora tomando qualquer posição na coluna da direita temos

$$h = \frac{\xi^2}{|\xi|^2} k \frac{\zeta}{|\zeta|},$$

como desejado. □

Observação 3.2. *Uma vez demonstrado este fato Gromoll e Meyer no mesmo artigo utilizam uma fórmula de O'Neil para verificar que a métrica em Σ^7_{GM} induzida pela métrica biinvariante de $Sp(2)$ tem curvatura seccional não negativa.*

Iremos notar este modelo neste capítulo por Σ^7 mas ainda esquecendo qualquer estrutura geométrica.

3.2 Alguns difeomorfismos sobre S^6 e outros resultados

Em 2001 Carlos Durán apresentou a partir da construção de uma métrica do tipo Kaluza-Klein em $Sp(2)$ uma função de colagem para Σ^7. É notório que o primeiro exemplo desta foi publicado somente 45 anos depois da primeira aparição de tal esfera.

Note por $\star$ a ação de Gromoll-Meyer sobre $Sp(2)$ e considere ainda a ação

$$q \bullet \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c\bar{q} \\ b & d\bar{q} \end{pmatrix}$$

com espaço quociente difeomorfo a S^7 via projeção da primeira coluna. Acabamos com o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & S^3 \arrow[d, dotted, no head, "\star"] & \\
S^3 \arrow[r, dotted, no head, "\bullet"] & Sp(2) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & S^7 \\
 & \Sigma^7 &
\end{tikzcd}$$

É imprescindível para a demonstração dos próximos teoremas perceber que as fibras de ambas fibrações são idênticas como conjuntos sobre

$$SO(2)[\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \in Sp(2) \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \tag{3.8}$$

e é esta propriedade que torna os métodos que serão apresentados viáveis.

3.2.1 Uma métrica com a propriedade *wiedersehen* sobre Σ^7

Nas mesmas palavras do autor do artigo, é surpreendente notar que se induzirmos uma métrica em S^7 pela métrica biinvariante de $Sp(2)$ nós *não* recuperamos a métrica redonda. Motivado por este fato seguimos com um procedimento de Kaluza-Klein a fim de inserir em $Sp(2)$ uma métrica que recupera a forma redonda de S^7. Em noções mais gerais podemos repartir o fibrado tangente de um fibrado principal $q : P \to B$ em uma parte vertical e outra horizontal de forma que para $TP = V \oplus H$ temos

1. $V = \ker q$;
2. $q_* : H \to TB$ é isomorfismo;
3. para $p \in P$ e g um elemento do grupo estrutural temos $g \cdot H_p = H_{gp}$.

Lema 3.3. *Seja $H = V^\perp$ o fibrado formado pelos subespaços ortogonais a $V \subset TSp(2)$ pela métrica biinvariante, então H é invariante por translação à esquerda.*

Demonstração. Tome $w \in H$ e $u \in TSp(2)$ então, para $[u, w] = uw - wu$, $< [u, w], v >= - < w, [u, v] >$ para qualquer elemento $v \in V$. Porém $[u, v] \in V$ pois pode ser considerado como derivada de uma translação, portanto $< [u, w], v >= 0$ como desejado. □

Seja g a métrica induzida por Kaluza-Klein usando H como espaço horizontal, a métrica biinvariante em V e a métrica padrão de curvatura 1 na esfera.

Lema 3.4. *g é invariante pela esquerda.*

Demonstração. Dada $A \in Sp(2)$, note também por A a multiplicação pela esquerda, então temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} Sp(2) \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\pi"] & Sp(2) \arrow[d, "\pi"] \\ S^7 \arrow[r, "A"] & S^7, \end{tikzcd}$$

como as setas horizontais são isometrias concluímos que g é invariante por translações em vetores horizontais, porém ela também é em verticais já que sua restrição a eles é a métrica biinvariante. □

É conhecido que a álgebra de Lie de $Sp(2)$ é descrita por

$$\mathfrak{sp}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} p & -\bar{q} \\ q & s \end{pmatrix} \mid p, s \in \mathrm{Im}\mathbb{H},\ q \in \mathbb{H} \right\}.$$

Trivializamos o fibrado tangente de $Sp(2)$ pela translação a esquerda e temos

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \right\}, \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} p & -\bar{q} \\ q & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

pois

$$\pi_* \begin{pmatrix} p & -\bar{q} \\ q & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Lema 3.5. *Seja $\xi \in sp(2)$,*

$$\xi = \begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & z \end{pmatrix}$$

então $g(\xi, \xi) = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2$.

Demonstração. Tome $\xi = \xi^H + \xi^V$ a decomposição de ξ em componentes horizontais e verticais, então $g(\xi, \xi) = g_{can}(\pi_*\xi, \pi_*\xi) + g_{biinv}(\xi^V, \xi^V)$, como $\pi_*(\xi) = (x\ y)$ e $g_{biinv}(\xi^V, \xi^V) = |z|^2$ segue o resultado. □

Pelo outro lado temos

Lema 3.6. *A métrica g é invariante pela direita pelo subgrupo $S^3 \times S^3 \subset Sp(2)$ de matrizes diagonais.*

A demonstração é consequência direta da expressão em 3.5. O lema anterior junto ao lema 3.4 garante que a métrica g descende para Σ^7 como uma métrica h que tem a propriedade *wiedersehen* em alguns pontos como descreveremos no próximo lema.

Lema 3.7. *Seja $p \in \Sigma^1 \subset \Sigma^7$ um ponto na imagem do subgrupo $SO(2) \subset Sp(2)$ em 3.8. Então existe um ponto $-p \in \Sigma^1$ tal que qualquer geodésica de velocidade unitária $\gamma_{\Sigma^7} \subset \Sigma^7$ saindo de p encontra $-p$ em tempo π e retorna a p em tempo 2π.*

Demonstração. Note que multiplicação pela esquerda por $SO(2) \subset Sp(2)$ comuta com a ação $\star$ e é isométrica em relação a g, portanto induz isometria em Σ^7, logo basta provarmos esta afirmação para o caso $p = [\mathrm{Id}]$. Agora observe que $\pi : (Sp(2), g) \to (S^7, g_{can})$ é uma submersão riemmanniana, o levantamento de qualquer geodésica de S^7 é uma geodésica horizontal em $Sp(2)$. Também qualquer geodésica em $Sp(2)$ que seja horizontal em um ponto é horizontal em todos os pontos. Tomamos então uma geodésica γ_{Σ^7} saindo de $[\mathrm{Id}]$ e um levantamento $\tilde{\gamma}_{\Sigma^7}$ com velocidade $X \in \mathfrak{sp}(2)$, agora esta é uma geodésica horizontal em relação à submersão $\pi : (Sp(2), g) \to (S^7, g_{can})$ no ponto $(1, 0)$, portanto é sempre horizontal e descende via π a uma geodésica em S^7. Como o levantamento desta geodésica em S^7 e a de Σ^7 coincidem portanto estudando-a em S^7 podemos afirmar que em tempo π o seu levantamento passara pela fibra de $[-\mathrm{Id}]$ e em tempo 2π retornara a fibra de $[\mathrm{Id}]$ e como tais fibras coincidem para ambas fibrações concluímos o lema. $\square$

3.2.2 Geodésicas a partir da identidade

Seja $\gamma : [0, 2\pi] \to Sp(2)$ uma geodésica unitária horizontal, $\gamma(0) = \mathrm{Id}$ então

$$\gamma'(0) = \begin{pmatrix} p & -\bar{w} \\ w & 0 \end{pmatrix},$$

onde p é imaginário puro e $|p|^2 + |w|^2 = 1$. O ponto principal desta seção é o seguinte

Teorema 3.8. *Seja $\gamma : [0, 2\pi] \to Sp(2)$ como acima então:*

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t)p & -\sin(t)e^{tp}\bar{w} \\ \sin(t)w & \frac{w}{|w|}(\cos(t) - \sin(t)p)e^{tp}\frac{\bar{w}}{|w|} \end{pmatrix},$$

para $w \neq 0$ e

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t)p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

para $w = 0$.

Demonstração. Como são equivalentes as questões de horizontalidade pela fibra de $\star$ e de $\bullet$ na identidade então *a priori* sabemos que $\gamma(t)$ terá que ser da forma

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t)p & c(t) \\ \sin(t)w & d(t) \end{pmatrix},$$

com $c(0) = 0,\ d(0) = 1,\ c'(0) = -\bar{w},\ d'(0) = 0$. Suponha primeiramente que $w = R$ real então para a geodésica com velocidade inicial (p, R) em S^7 teríamos por exemplo o seguinte levantamento

$$\gamma_0(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t)p & -\sin(t)R \\ \sin(t)R & \cos(t) - \sin(t)p \end{pmatrix}.$$

Pela trivialização escolhida do fibrado tangente de $Sp(2)$, γ_0 será horizontal se e só se $\gamma_0^{-1}(t)\gamma_0'(t)$ tem a coluna inferior direita identicamente nula. Considerando que $p^2 = -|p|^2$ e que R é real isto é equivalente a

$$\sin(t)\cos(t)R - (\cos(t) + \sin(t)p)(\sin(t) + \cos(t)p) = -p.$$

Portanto este levantamento só é horizontal quando $p = 0$. Contudo qualquer outro levantamento em relação à fibração induzida por $\bullet$ pode ser escrito como $\gamma(t) = \gamma_0(t)Q(t)$ com

$$Q(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q(t) \end{pmatrix}.$$

O qual concluímos que é horizontal se e só se

$$\bar{q}(t)q'(t) - \bar{q}(t)pq(t) = 0.$$

Tome então $q(t) = e^{tp}$, temos a

Proposição 3.9. *Seja $\gamma(t) \in Sp(2)$ como acima com*

$$\gamma'(0) = \begin{pmatrix} p & -R \\ R & 0 \end{pmatrix},$$

e R real. Então

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t)p & -\sin(t)e^{tp}R \\ \sin(t)R & (\cos(t) - \sin(t)p)e^{tp} \end{pmatrix}.$$

Considere agora a forma geral

$$\gamma'(0) = \begin{pmatrix} p & -\bar{w} \\ w & 0 \end{pmatrix},$$

para w qualquer e $T_w \in Sp(2)$ dado por

$$T_w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\bar{w}}{|w|} \end{pmatrix}.$$

Pelas observações já feitas podemos concluir que conjugação por T_w é uma isometria e ainda mais

$$\gamma_R(t) = T_w\gamma(t)T_w^{-1}$$

é uma geodésica horizontal nas condições de 3.9 com $R = |w|$, portanto $\gamma(t) = T_w^{-1}\gamma_R(t)T_w$ concluindo a demonstração do Teorema 3.8. □

3.2.3 Difeomorfismos explícitos não-isotópicos à identidade

Considere $D([\pm\mathrm{Id}], r)$ o disco de raio r em $T_{\pm\mathrm{Id}}\Sigma^7$. Concluí-se pelo lema 3.4 que $\Sigma^7 = \exp D([\mathrm{Id}], \pi/2) \cup \exp D([-\mathrm{Id}], \pi/2)$ identificados por um difeomorfismo $\sigma : S^6 \to S^6$ tal que

$$\exp \pi/2\rho_+ v = \exp \pi/2\rho_-\sigma(v)$$

onde $\rho_\pm : D \to D([\pm\mathrm{Id}], \pi/2)$ são as inclusões do disco de raio $\pi/2$ nos discos acima. Este difeomorfismo não pode ser isotópico a identidade pois se fosse Σ^7 seria difeomorfa a esfera padrão ([39]). Seja $\gamma(t) = \exp t\rho_+ v$ então $\gamma'(0) = \rho_+ v$ e $-\rho_-^{-1}(\gamma'(\pi)) = \sigma(v)$.

Considerando $D \subset \{(p, w) \in \mathrm{Im}\mathbb{H} \times \mathbb{H},\ \ |p|^2 + |w|^2 \leq 1\}$ então as inclusões $\rho_\pm$ são dadas por

$$\rho_\pm(p, w) = (p_*)_{\pm\mathrm{Id}} \left(\pm\mathrm{Id}, \begin{array}{cc} p & -\bar{w} \\ w & 0 \end{array}\right),$$

aqui $p : Sp(2) \to \Sigma^7$ é a projeção e estamos trivializando o fibrado tangente de $Sp(2)$ por translação a esquerda. Notar que os espaços horizontais em $\pm\mathrm{Id}$ coincidem. Denote agora por $\gamma(t)$ a geodésica em $Sp(2)$ partindo de Id com vetor inicial $(p, w) \in \partial D$ e $w \neq 0$. Então

$$\gamma(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{w}{|w|}e^{\pi p}\frac{\bar{w}}{|w|} \end{pmatrix}, \quad \gamma'(\pi) = \begin{pmatrix} p & e^{\pi p}\bar{w} \\ w & 0 \end{pmatrix}.$$

Relembrando da seção 1.3 podemos notar que já temos explicitamente a aplicação de bordo $\pi_6(S^6) \to \pi_6(S^3)$ das sequências exatas relacionadas tanto à $Sp(2) \to S^7$ quanto $Sp(2) \to \Sigma^7$. Este elemento foi chamado na literatura como *elemento de Blackers-Massey* e prosseguiremos com a mesma nomenclatura.

Teorema 3.10. *Seja $S^6 \subset \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ e $b : S^6 \to S^3$ a seguinte aplicação*

$$b(p, w) = \begin{cases} \frac{w}{|w|}e^{-\pi p}\frac{\bar{w}}{|w|}, & w \neq 0, \\ -1, & w = 0 \end{cases}.$$

Então b é um gerador analítico de $\pi_6(S^3)$.

Demonstração. Como a métrica que foi induzida em $Sp(2)$ é claramente analítica e a expressão acima não passa da restrição da exponencial em $Sp(2)$ ao bordo do disco de raio π do espaço horizontal de Id então esta aplicação é *a priori* analítica. O fato dela ser um gerador de $\pi_6(S^3)$ é conhecido na literatura ([4]).

Agora identificando o espaço horizontal em $\gamma(\pi)$ com o espaço horizontal em $-\mathrm{Id}$ via ação estrela:

$$\begin{pmatrix} -\frac{w}{|w|}e^{-\pi p}\frac{\bar{w}}{|w|} & 0 \\ 0 & -\frac{w}{|w|}e^{-\pi p}\frac{\bar{w}}{|w|} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & e^{\pi p}\bar{w} \\ w & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{w}{|w|}e^{\pi p}\frac{\bar{w}}{|w|} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{w}{|w|}e^{-\pi p}\frac{\bar{w}}{|w|}p\frac{w}{|w|}e^{\pi p}\frac{\bar{w}}{|w|} & -\frac{w}{|w|}e^{-\pi p}\frac{\bar{w}}{|w|}\bar{w}\frac{w}{|w|}e^{\pi p}\frac{\bar{w}}{|w|} \\ \frac{w}{|w|}e^{-\pi p}\frac{\bar{w}}{|w|}w\frac{w}{|w|}e^{\pi p}\frac{\bar{w}}{|w|} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

E para $w = 0$ temos

$$\gamma(\pi) = -\mathrm{Id}, \quad \gamma'(\pi) = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

O que descreve completamente σ.

Teorema 3.11. *Seja* $S^6 = \{(p, w) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}\ ,\ |p|^2 + |w|^2 = 1\}$ *então* $\sigma : S^6 \to S^6$ *é dado por:*

$$\sigma(p, w) = \begin{cases} \left(we^{-\pi p}\frac{\bar{w}pw}{(1+p^2)^2}e^{\pi p}w, we^{-\pi p}\frac{w}{1+p^2}e^{\pi p}w\right), & w \neq 0, \\ (p, 0), & w = 0 \end{cases}.$$

Ou de forma mais concisa:

$$\sigma(p, w) = (b(p, w)pb(p, w)^{-1}, b(p, w)wb(p, w)^{-1}).$$

Em breve discutiremos alguns resultados decorrentes desta expressão que parecem dar uma melhor ideia de sua estrutura.

3.3 Alguns representantes para o n-ésimo elemento de θ^7

Considere nesta seção $\rho_n : S^7 \to S^7$ dado por potenciação na álgebra de Cayley. Em termos de geodésicas, isto é:

$$\begin{pmatrix} \cos t + p \sin t \\ w \sin t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos nt + p \sin nt \\ w \sin nt \end{pmatrix},$$

onde $(p, w) \in S^6 \subset \mathrm{Im}\mathbb{H} \times \mathbb{H}$. Considere ainda $< u, v >:= \bar{u}^t v$ o produto Hermitiano padrão induzido por $\mathbb{H}$ em $\mathbb{H}^2$. Então definimos as (segundo teorema de função implícita, [41]) subvariedades

$$E_n^{10} = \{(u, v) \in S^7 \times S^7 \mid\ < \rho_n(u), v >= 0\}$$

equipadas com a ação livre

$$S^3 \times E_n^{10} \to E_n^{10}, \quad q \star (u, v) = (qu\bar{q}, qv).$$

Dando origem a uma família de variedades $\Sigma_n^7 := E_n^{10}/S^3$. Para $n = 1$ temos $E_1^{10} = Sp(2)$ e a ação de Gromoll-Meyer descrita em [18], portanto $\Sigma_1^7 = \Sigma^7$ com a notação da seção anterior e $\Sigma_0^7 = S^7$. O principal objetivo desta seção é demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 3.12. *A variedade diferenciável Σ_n^7 é um representante do n-ésimo elemento de $\theta^7 = \mathbb{Z}_{28}$ se tomarmos Σ^7 como gerador.*

Os métodos usados na demonstração são essencialmente geométricos e baseados na seção anterior. Começaremos estudando um pouco mais a estrutura dos espaços E_n^{10}.

3.3.1 S^3-fibrados sobre S^7

Seja $E_n^{10} \subset S^7 \times S^7$ como definido acima, isto é:

$$E_n^{10} = \{(u, v) \in S^7 \times S^7 \mid\ < \rho_n(u), v >= 0\}.$$

É notório que E_1^{10} é idêntico a $Sp(2)$ e que os outros tem uma estrutura natural de fibrado principal sobre S^7.

Lema 3.13. *A aplicação $E_n^{10} \to S^7$ definida por $(u, v) \overset{p_n}{\mapsto} u$ é um S^3-fibrado principal isomorfo ao pull-back de $E_1^{10} = Sp(2)$ pela aplicação $\rho_n : S^7 \to S^7$.*

Demonstração. Note que a ação $q\bullet(u, v) = (u, v\bar{q})$ faz E_n^{10} fibrado principal, só falta mostrar o isomorfismo. Pela construção de fibrado pull-back (ver por exemplo [35]) temos $\rho_n^*(Sp(2)) = \{(u, A) \in S^7 \times Sp(2) \mid \rho_n(u) = \pi(A)\}$, de forma que a primeira coluna de A é completamente determinada por u, por tanto basta esquecê-la que temos um isomorfismo explícito para E_n^{10}. Desta forma também demonstramos que E_n^{10} são de fato variedades diferenciáveis. □

Esta construção ainda herda uma aplicação $\tilde{\rho}_n : E_n^{10} \to Sp(2)$ que recobre $\rho_n : S^7 \to S^7$ dada por $(u, v) \mapsto (\rho_n(u), v)$. Considere agora a conexão em E_n^{10} induzida pelo *pull-back* da conexão em $Sp(2)$ construída na seção anterior e a métrica de curvatura constante 1 nas fibras. É claro que tal métrica é a mesma herdada pela construção de Kaluza-Klein escolhendo o espaço horizontal adequadamente e também que $p_n : E^{10}_n \to S^7$ induz a métrica de curvatura constante 1 em S^7. Agora se considerarmos $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \subset O(2)$ o subgrupo de matrizes diagonais temos as seguintes ações por isometrias:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times E^{10}_n \to E^{10}_n : \quad (u,v) & \mapsto & (Bu, Bv); \\ S^3 \times S^3 \times S^3 \times E^{10}_n \to E^{10}_n : \quad ((q_i,u,v)) & \mapsto & \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2. \end{pmatrix}(u,v)\begin{pmatrix} \bar{q}_1 & 0 \\ 0 & \bar{q}_3 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Tomando $q_3 = 1$ e $q_1 = q_2$ temos a ação $\star$ descrita no início da seção e portanto estas métricas descendem a Σ^7_n. A ação $\bullet$ também é isométrica com respeito a estas métricas e induz uma ação efetiva de $SO(3)$ sobre Σ^7_n com

Lema 3.14. *O conjunto de pontos fixos da ação de $SO(3)$ acima é exatamente*

$$\Sigma^1_n = \{[(u,v)] \in \Sigma^7_n \mid u \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{H} \times \mathbb{H}\}.$$

A ação de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ em Σ^1_n é idêntica a ação do mesmo grupo sobre o círculo unitário padrão, portanto para qualquer ponto $p \in \Sigma^1_n$ existe uma antípoda $-p = (-1,-1) \cdot p \in \Sigma^1_n$, exatamente como no caso de $Sp(2) \to \Sigma^7$.

Teorema 3.15. *Toda geodésica unitária γ partindo de $p \in \Sigma^1_n$ é minimizante em $[0,\pi[$ e obedece $\gamma(\pi) = -p$, $\gamma(2\pi) = p$.*

Nos referimos a [13] para demonstração.

Agora já temos a ferramenta adequada para demonstrar o Teorema 3.12.

Demonstração do Teorema 3.12: Considere $(p,w) \in S^6 \subset \mathrm{Im}\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ e sua geodésica a partir de $(1,0)$ em S^7:

$$\beta(t) = \begin{pmatrix} \cos t + p \sin t \\ w \sin t \end{pmatrix}.$$

Um levantamento $\tilde{\gamma}_n(t) \in E^{10}_n$ desta é descrito por

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t)p & -\sin(t)e^{ntp}\bar{w} \\ \sin(t)w & \frac{w}{|w|}(\cos(nt) - \sin(nt)p)e^{ntp}\frac{\bar{w}}{|w|} \end{pmatrix}.$$

Notando que $\tilde{\rho}_n(\tilde{\gamma}_n(t)) = \tilde{\gamma}_1(nt)$ temos que este é seu único levantamento horizontal iniciando da identidade portanto $\gamma_n(t) = p_n(\gamma_n(t))$ é uma geodésica em Σ^7_n. Também se observa que, para (p, w) como acima e $t \in [0, \pi/2]$, as aplicações geodésicas γ_n e $-\gamma_n \cdot (-\mathrm{id})$ induzem mergulhos do disco $D^7_{\frac{\pi}{2}}$ sobre $[\pm\mathrm{Id}]$ e que ainda Σ^7_n é obtido pela a colagem destes. Agora é fácil notar que

$$\tilde{\gamma}_n(p, w, \pi/2) = q \star (-\tilde{\gamma}_n(\phi(p, w), \pi/2)),$$

se e somente se $\phi = \sigma^n$ com $\sigma : S^6 \to S^6$ descrito na seção anterior. Sabemos no entanto por (2.10) que Σ^7 é um gerador de θ^7 e que este é grupo em relação a soma conexa só restando observar que $\#_k \Sigma^7$ pode ser descrito pela colagem de dois discos via σ^k ([28]). □

3.4 Sobre $b : S^6 \to S^3$

Na seção anterior construímos um representante analítico explícito de $\pi_6(S^3)$ o qual parece bastante presente no Teorema 3.11. Nesta daremos uma demonstração um pouco mais direta das propriedades de b e no próximo capítulo usaremos de suas simetrias para construir novas aplicações.

Definimos $S^6_0 = \{(p, w) \in S^6 \subset \mathrm{Im}\mathbb{H} \times \mathbb{H} |\ w \neq 0\}$, $\alpha : S^6_0 \to S^3 \times S^3$ por $\alpha(p, w)[w/|w|, e^{\pi p}]$ e denotamos o comutador de quatérnions por $\mathcal{M} : S^3 \times S^3 \to S^3$, por $\rho : S^3 \times S^3 \to S^3 \wedge S^3$ a projeção com ponto base a identidade em ambos S^3 e por $m : S^3 \wedge S^3 \to S^3$ a aplicação induzida por $\mathcal{M}$. É fácil ver que $S^3 \wedge S^3$ é homeomorfo a S^6 e vale que m é um gerador de $\pi_6(S^3)$ [4]. Agora seguiremos [11] para demonstrar que a aplicação b é homotópica a a m.

Para isso usaremos da aplicação auxiliar $(p, w) \mapsto [w/|w|, e^{\pi p}]$ que é homotópica a b via $H(p, w, t) = \frac{w}{|w|} e^{\pi p} \frac{\bar{w}}{|w|} e^{t\pi p}$, com $t \in [0, 1]$, agora este último é exatamente a composição $\mathcal{M} \circ \alpha = m\rho\alpha$. Temos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc} S^6_0 & \xrightarrow{\alpha} & S^3 \times S^3 & \xrightarrow{\rho} & S^3 \wedge S^3 \cong S^6 \\ & & \mathcal{M} \searrow & & \swarrow m \\ & & & S^3 & . \end{array} \tag{3.11}$$

Proposição 3.16. *A aplicação $\rho\alpha : S^6_0 \to S^6$ pode ser estendida para uma aplicação $\phi : S^6 \to S^6$ que induz isomorfismo em $\pi_6(S^6)$.*

Demonstração. Basta definir $\phi(p, 0)$ como o ponto distinguido de $S^3 \wedge S^3$ para todo p. Para provar que esta induz isomorfismo considere a aplicação $F : S^n \times S^n \to S^{2n}$ definida por

$$F(x, y) = (1, 0, 0) + 2\left(1 + \frac{|x_1|}{(1 - x_0)^2} + \frac{|y_1|}{(1 - y_0)^2}\right)^{-1}\left(-1, \frac{x_1}{1 - x_0}, \frac{y_1}{1 - y_0}\right),$$

onde $x = (x_0, x_1) \in S^n \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Esta em realidade é a composição $S^n \times S^n - S^n \vee S^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n} \to S^{2n} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$ e com imagem $(1, 0, 0)$ no complementar, onde a primeira seta na composição é produto de aplicações estereográficas. Fica claro que esta induz um homeomorfismo $f : S^n \wedge S^n \to S^{2n}$. Considere agora $F \circ \alpha$:

$$F \circ \alpha(p, w) = (1, 0, 0) - \left(1 - \frac{2(|w| - w_0)}{w_1^2 + (|w| - w_0)^2 \sec(\pi|p|/2)^2}\right)\left(|w| - w_0, w_1, \frac{(|w| - w_0)\tan(\pi|p|/2)p}{|p|}\right). \tag{3.12}$$

Pode-se ver que a primeira entrada tende a 1 e, como $|F \circ \alpha(p, w)| = 1$, as outras componentes têm que se anular. Para provar que ϕ induz isomorfismo basta notar que esta tem grau ± 1, o que é facilmente feito usando, por exemplo, a proposição IV, 7.2 de [6]. $\square$

Copiando-a passo-a-passo este resultado temos uma versão octoniônica do Teorema 3.10:

Teorema 3.4'. *Seja $S^6 \subset \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ e $b : S^6 \to S^3$ ou $S^{14} \subset \mathbb{O} \times \mathbb{O}$ e $b : S^6 \to S^3$ ou $b : S^{14} \to S^7$ definida pela seguinte fórmula:*

$$b(p, w) = \begin{cases} \frac{w}{|w|} e^{-\pi p} \frac{\bar{w}}{|w|}, & w \neq 0, \\ -1, & w = 0 \end{cases}.$$

Então b é analítica e é um gerador de $\pi_6(S^3) \cong \mathbb{Z}_{12}$ ou $\pi_{14}(S^7) \cong \mathbb{Z}_{120}$.

Demonstração. Sabendo que $m : S^6 \to S^3$ ou $m : S^{14} \to S^7$ definidos pela fórmula acima são representantes do gerador dos grupos de homotopia indicados basta então aplicar os funtores π_6 respectivamente π_{14} ao diagrama (3.11). $\square$

Apêndice B: Involuções do ponto de vista de simetrias

Não é difícil verificar que se consideramos a aplicação $\sigma : S^6 \to S^6$ e a involução antípoda $\alpha : S^6 \to S^6$ então $\rho = \alpha\sigma$ é uma involução, esta ainda apresenta outras propriedades. Prosseguiremos expondo parte do trabalho apresentado em [1].

Teorema 3.17. *A aplicação $\rho : S^6 \to S^6$ é uma involução livre não equivalente a antípoda.*

Demonstração. É fácil verificar que $\alpha\sigma = \sigma^{-1}\alpha$ logo $\rho \circ \rho = 1$. Uma conta rápida também permite concluir que é uma involução livre. Para verificar que ela não é equivalente a antípoda considere a seguinte ação de $\mathbb{Z}_2$ em $Diff^+(S^n)$,

$$\mathcal{A}(h) = \alpha \circ h \circ \alpha^{-1} = \alpha \circ h \circ \alpha,$$

ou simplesmente

$$\mathcal{A}(h)(x) = -h(-x).$$

Note que $\mathcal{A}$, sendo conjugação, é um isomorfismo de grupos. Ainda mais, se h_t é uma curva que liga h_0 a h_1 então $\mathcal{A}(h_t)$ é uma curva que liga $\mathcal{A}(h_0)$ a $\mathcal{A}(h_1)$, portanto ela descende a uma ação em $\pi_0 Diff^+(S^n)$, a qual também notaremos por $\mathcal{A}$. Via a propriedade $\alpha\sigma = \sigma^{-1}\alpha$ temos explicitamente a ação de $\mathcal{A}$ nos grupos $\theta^7 \cong \mathbb{Z}_{28}$:

$$\mathcal{A}(n) = -n.$$

Agora suponha que existe $h \in Diff(S^n)$ tal que $h\rho h^{-1} = \alpha$. Porém,

$$h\rho h^{-1} = \alpha \Leftrightarrow \sigma = \alpha h^{-1}\alpha h \Leftrightarrow \sigma = \mathcal{A}(h^-1)(h).$$

Tomando classes de isotopia temos

$$[\sigma] = [\mathcal{A}(h^{-1})][h] = 2[h].$$

O que faz concluir que σ tem ordem par em $\mathbb{Z}_{28}$ contradizendo o fato que ele gera o grupo. $\square$

É interessante observar que $\rho_k = \alpha\sigma^k$ também são involuções livres e que ainda

$$\sigma^{-l}\rho_k\sigma^l = \sigma^{-l}\alpha\sigma^{k+l} = \rho_{k+2l}.$$

Portanto a paridade de k define completamente a classe de equivalência de ρ_k em particular ρ_{2k} é equivalente a α e ρ_{2k+1} a ρ. Também pode-se observar que a classe em $\pi_0 Diff(S^6) \cong \theta^7$ é alterada somente pelo sinal pela composição por α portanto todo difeomorfismo de S^6 é isotópico a uma involução livre.

Considere a esfera $S^5 \subset S^6$ dada por tomar parte real de $w \in S^6$ como zero, então a restrição de ρ a esta define uma nova involução em $Diff^+(S^5)$. Temos

Teorema 3.18. *A restrição de ρ a esfera S^5 definida acima é uma involução não conjugada à antípoda.*

A demonstração é exatamente a mesma que a do Teorema 2.14. Também nos referimos a [1] para uma outra demonstração que admite generalização para o caso de dimensão 13.

A geometria da involução de Hirsh-Milnor

Faremos agora uma identificação explícita das involuções de Hirsh-Milnor com as apresentada neste apêndice. Segundo [1] o próprio fato de ρ ser uma involução é, no mínimo, curioso e esta identificação pode nos ajudar a entender o que acontece. Considere as involuções $T : M^7_{2,-1} \to M^7_{2,-1}$, $\rho : S^6 \to S^6$ e $m : Sp(2) \to Sp(2)$ definida por multiplicação pela matriz $-\mathrm{Id}$. Temos,

Proposição 3.19. *Ambas as involuções, a de Hirsh-Milnor e a de Abresch-Durán-Puettmann-Rigas $\rho : S^6 \to S^6$, são explicitamente equivalentes à induzida pela aplicação m definida acima. Ainda mais, as esferas invariantes são a projeção dos seguintes subespaços*

$$\mathcal{S}_6 = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in Sp(2) | \Re(a) = 0 \right\}, \tag{3.13}$$

$$\mathcal{S}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in Sp(2) | \Re(a) = \Re(b) = 0 \right\}. \tag{3.14}$$

Demonstração. Construímos acima um quociente $S^3 \cdots Sp(2) \to \Sigma^7$ com seções locais do tipo $(\Sigma^7 - \{\textit{polo norte}\}) \times S^3 \to Sp(2)$, em particular temos trivializações dos fibrados induzidos em $S^3 \cdots \mathcal{S}_6 \to S^6$ e $S^3 \cdots \mathcal{S}_5 \to S^5$ sendo que estes últimos são dados por $t = \pi/2$ e $\Re(w) = 0$, isto é

$$\psi : S^6 \times S^3 \to \mathcal{S}_6 \subset Sp(2) \tag{3.15}$$

$$((p, w), q) \mapsto q \star \gamma_{(p,w)}(\pi/2), \tag{3.16}$$

com inversa

$$\psi^{-1} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ((\bar{q}aq, \bar{q}bq), q) \tag{3.17}$$

onde

$$q \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = -\frac{b}{|b|} e^{-\frac{\pi}{2}a} \frac{c}{|c|}.$$

A involução m em $Sp(2)$ fica como

$$\psi^{-1} \circ m \circ \psi((p, w), q) = (\alpha\sigma^{-1}(p, w), qb(p, w)).$$

Logo claramente temos a involução $\alpha\sigma^{-1}$ que é conjugada a ρ por σ^{-1}.

Para a involução de Hirsh-Milnor basta lembrarmos das aplicações $\phi_\pm$ em (3.6) e verificar diretamente suas composições $\phi_\pm \circ T$. Então $-\mathrm{Id} \star \phi_\pm \circ T$ é exatamente o representante que procurávamos na órbita. $\square$

CAPÍTULO 4

NOVAS APLICAÇÕES A PARTIR DE ANTIGAS

4.1 Homeomorfismos equivariantes a partir de aplicações equivariantes

Seja G um grupo de Lie, $\cdot$ uma ação de G em uma variedade M e uma aplicação $\alpha : M \to G$. Definimos $\hat{\alpha} : M \to M$ a *aplicação associada a* α como $\hat{\alpha}(m) = \alpha(m) \cdot m$. Temos

Teorema 4.1. *Seja $\hat{\alpha} : M \to M$ como acima e seja $\alpha : M \to G$ uma aplicação equivariante com respeito a conjugação em G. Então $\hat{\alpha}$ é uma bijeção com inversa $(\hat{\alpha})^{-1} = \hat{\alpha}^{-1}$ e suas potências são dadas por $\widehat{\alpha}^n = \hat{\alpha}^n$.*

Demonstração. Por hipótese $\alpha(g \cdot m) = g\alpha(m)g^{-1}$, portanto

$$\widehat{\alpha^{-1}}(\hat{\alpha}(m)) = \widehat{\alpha^{-1}}(\alpha(m) \cdot m) = \alpha^{-1}(\alpha(m) \cdot m) \cdot \alpha(m) \cdot m \tag{4.1}$$

$$= (\alpha(m)\alpha^{-1}(m)\alpha(m)^{-1})\alpha(m) \cdot m = m. \tag{4.2}$$

Idem para potenciação. □

Suponha agora uma aplicação $\alpha_t : M \to S^3$ que seja como acima para cada instante t. Então $\hat{\alpha}_t$ será uma isotopia entre estas aplicações. Notando que se tomarmos $\alpha = b : S^6 \to S^3$ e a ação de $SO(3)$ induzida pela conjugação de quatérnions em cada coordenada temos então $\hat{\alpha} = \sigma$ e o seguinte resultado:

Proposição 4.2. *Não existe uma homotopia equivariante em relação a ação acima entre as aplicações* $b^{12} : S^6 \to S^3$ *e* $S^6 \to \{1\} \subset S^3$.

Pois se tal existisse (aplicando teoria de aproximação caso não seja diferenciável, [7]) a aplicação associada induziria uma isotopia entre σ^{12} e a identidade, o que não é possível (ver por exemplo [28]). Seja agora $\alpha : M \to G$ como no Teorema 4.1 então:

Proposição 4.3. *Seja* $\delta : M \to M$ *uma involução que satisfaz* $\alpha(\delta(m)) = \alpha^{-1}(m)$ *e que comuta com a ação de* G *então para qualquer par de inteiros* m, n $\hat{\alpha}^n\delta\hat{\alpha}^m : M \to M$ *são involuções.*

Demonstração. Note que com as hipóteses apresentadas $\hat{\alpha}^k\delta = \delta\hat{\alpha}^{-k}$. Calculando diretamente:

$$(\hat{\alpha}^n\delta\hat{\alpha}^m)(\hat{\alpha}^n\delta\hat{\alpha}^m) = \hat{\alpha}^n(\delta\hat{\alpha}^{m+n}\delta)\alpha^m = \hat{\alpha}^n(\hat{\alpha}^{-(m+n)})\hat{\alpha}^m = \mathrm{Id}.$$

□

A princípio todas essas involuções são distintas. Note que temos uma relação de comutação $\delta\hat{\alpha} = \hat{\alpha}^{-1}\delta$, e ainda mais

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}^m\delta\hat{\alpha}^n = \hat{\alpha}^r\delta\hat{\alpha}^s \quad &\iff \quad \hat{\alpha}^{m-r}\delta\hat{\alpha}^{n-s} = \delta \\ &\iff \quad \hat{\alpha}^{m+s-r-n}\delta = \delta, \text{ usando a relação de comutação} \\ &\iff \quad \hat{\alpha}^{m+s-r-n} = \text{identidade}, \end{aligned}$$

o que geralmente não acontece para $m+s-r-n \neq 0$ (de fato para o caso $\alpha = b$, o elemento de Blackers-Massey apresentado posteriormente, isso não acontece).

O caso $n = 0, m = 1$ tem papel importante em algumas fórmulas que serão apresentadas daqui em diante e também no momento de identificar as bordas dos disco para se obter uma esfera em dimensões ímpares é interessante que o difeomorfismo inverta a orientação a fim de que as inclusões dos discos preservem a orientação.

É possível ainda enfraquecer o critério de igualdade e apenas pedir que elas comutem, temos por exemplo o resultado

Proposição 4.4. *Seja* δ *e* α *aplicações como acima. Então* $\delta\hat{\alpha}$ *comuta com* $\hat{\alpha}\delta$ *se e somente se* $\hat{\alpha}$ *é uma raiz quarta da unidade.*

Demonstração. Basta considerar os dois lados do comutador:

$$\hat{\alpha}^2 = (\hat{\alpha}\delta)(\delta\hat{\alpha}) = (\delta\hat{\alpha})(\hat{\alpha}\delta) = (\hat{\alpha}^{-1}\delta)(\delta\hat{\alpha}^{-1}) = \hat{\alpha}^{-2}$$

logo $\delta\hat{\alpha}$ comuta com $\hat{\alpha}\delta \iff \hat{\alpha}^4 = $ identidade. □

Este é o mesmo resultado de [16] considerada a identidade $\widehat{(\alpha\delta)} = \hat{\alpha}^{-1}$.

4.2 Novas aplicações Ad-equivariantes a partir de antigas

Daremos agora uma exposição da alguns processos que se mostram naturais candidatos a gerarem fenômenos exóticos.

Considere primeiramente a definição formal do produto join:

$$S^n * S^m = \frac{S^n \times S^m \times I}{S^n \times \{y_0\} \times \{0\} \cup \{x_0\} \times S^m \times \{1\}},$$

onde $I = [0, \pi/2]$. Considere ainda a aplicação geodésica que identifica este espaço com a esfera padrão $S^{m+n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{m+1}$:

$$\Lambda : S^n * S^m \to S^{n+m+1} \tag{4.3}$$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ w \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t)\xi \\ \sin(t)w \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

É fácil notar que esta aplicação é um homeomorfismo e portanto induz uma estrutura diferenciável no produto.

Temos que a aplicação $B : S^2 \times S^3 \times I \to S^3$ dada por:

$$B(\xi, w, t) = \begin{cases} we^{\cos(t)\xi}\bar{w}, & w \neq 0 \\ -1, & w = 0. \end{cases}$$

se identifica com a aplicação b do capítulo anterior via $B = b \circ \Lambda$.

Produtos *Join*: Tome uma aplicação qualquer $\alpha : S^n \to S^3$. Definimos α^* como a seguinte composição:

$$\begin{array}{ccccc} S^2 * S^n & \to & S^2 * S^3 & \xrightarrow{b} & S^3 \\ \begin{pmatrix} \xi \\ w \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \xi \\ |w|\alpha\left(\frac{w}{|w|}\right) \end{pmatrix} & \mapsto & \mathrm{Ad}_{\alpha\left(\frac{w}{|w|}\right)} e^{\pi\xi}, \end{array} \tag{4.5}$$

onde $S^k * S^l = S^{k+l+1} \subset \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^{l+1}$ pela identificação acima. Esta é uma nova aplicação e idêntica ao elemento de Blakers-Massey produzido anteriormente para $\alpha = id : S^3 \to S^3$. É notório que ela preserva a Ad-equivariancia e torna $\widehat{\alpha^*}$ um difeomorfismo.

Produto Smash: Considere a identificação usual $S^3 \wedge S^n \cong S^{n+3}$. Tome agora $\alpha : S^n \to S^3$ e defina uma nova aplicação $\alpha^\wedge : S^{n+3} \to S^3$ como:

$$\alpha^\wedge(q, x) = [q, \alpha(x)] = q\alpha(x)q^{-1}\alpha(x)^{-1}.$$

A aplicação é bem definida se considerarmos os pontos bases como $1 \in S^3$ e um ponto na pré-imagem de $(1, 0, ..., 0) \in S^n$. A equivariancia pela adjunta é garantida. Note por exemplo que a aplicação original de Blackers-Massey foi apresentada desta maneira (ver o primeiro parágrafo e o Teorema 2 de [4]).

Aplicações de Hopf: Consideramos a aplicação de *Hopf* $h : S^3 \to S^2$ dada pela fórmula $q \mapsto qi\bar{q}$ e procedemos de duas formas. Dada $\alpha : S^n \to S^3$ definimos ${}^h\alpha : S^3 * S^n \to S^3$ como

$$ {}^h\alpha(q, x, t) = \alpha^*(h(q), x, t). $$

Podemos ainda considerar α^h, uma pós-composição com $h(z, w, t) = (\cos(2t) + \sin(2t)z\bar{w})$, a aplicação de *Hopf* em coordenadas do *join*, isto é

$$ \alpha^h(q, x, t) = (\cos(2t) + \sin(2t)h(\alpha(x)\bar{q})). $$

Sobre a diferenciabilidade das aplicações acima temos os seguintes resultados:

Proposição 4.5. *Seja $\alpha : S^n \to S^3$ uma aplicação com a primeira derivada contínua, então α e ${}^h\alpha$ são de classe C^1.*

Demonstração. Como a aplicação $(q, x) \mapsto (h(q/|q|)|q|, x)$ é de classe C^1 será suficiente mostrar que α^* é analítica. Consideraremos sempre a estrutura em $S^2 * S^n$ induzida por Λ, ou equivalentemente, consideraremos a fórmula explícita a partir dessa identificação. É claro ainda que o único conjunto crítico é o dos pontos com $w = 0$. Escrevendo explicitamente a exponencial, temos:

$$ \alpha^*(\xi, v) = \cos(\pi|\xi|) + \sin(\pi|\xi|)\alpha\left(\frac{w}{|w|}\right)\frac{\xi}{|\xi|}\alpha\left(\frac{w}{|w|}\right)^{-1}. $$

o que também deixa claro que a parte real é bem comportada nesses pontos. Consideramos ainda a aplicação inversa à estereográfica $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^n \to S^{n+3} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n$ dada por:

$$ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi(u, v) \\ w(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2u}{1+||x||^2} \\ \frac{||x||^2+2v-1}{1+||x||^2} \end{pmatrix}. $$

Seja θ a aplicação que normaliza vetores em $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^n - \{0\}$, logo a parte imaginária fica:

$$ \mathrm{Im}(\alpha^*(\xi, w)) = \sin\frac{2\pi|u|}{1 + ||x||^2}\alpha(\theta(w))\theta(u)\alpha(\theta(w))^{-1}. $$

Como a derivada do seno também é bem comportada quando $|w| \neq 0$ e limitada quando $w = 0$, então basta tomarmos a derivada da outra parcela:

$$\frac{\partial}{\partial p}\left\{\alpha(\theta(w))\theta(u)\alpha(\theta(w))^{-1}\right\} = [D\alpha_{\theta(w)} D\theta_w \left(\frac{\partial w}{\partial p}\right) \alpha(\theta(w))^{-1}, Ad_{\alpha(\theta(w))}\theta(u)] + Ad_{\alpha(\theta(w))}\frac{\partial \theta}{\partial p}(u),$$

onde $[a, b] = ab - b\bar{a}$ é $\mathbb{R}$-bilinear. É fácil notar que o segundo termo no lado direito da equação é bem comportado para $w = 0$. Para o primeiro termo temos

$$\sin \pi|\xi| D\theta_w = \frac{\sin \pi(1 - |\xi|)}{1 - |\xi|} \frac{1}{1 + |\xi|} \left\{\delta^i_j |w| - \frac{w_i w_j}{|w|}\right\}_{ij}.$$

Como $D\alpha$ e α têm normas limitadas e a expressão acima e a derivada de $\sin(\pi|\xi|)$ se anulam quando $w \to 0$ então a derivada de α^* também o faz. Falta apenas mostrar que a derivada para $w = 0$ de fato existe. Basta tomarmos $|u| = 1$ qualquer e $\beta(t) = (\beta_u(t), \beta_v(t)) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^n$, uma curva suave com $\beta(0) = 0$ e provarmos o seguinte:

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{|\beta(t)|} \left| \sin \frac{2\pi|u + \beta_u(t)|}{1 + |u + \beta(t)|^2} \alpha(\theta(w(u + \beta(t))))\theta(u + \beta_u(t))\alpha(\theta(w(u + \beta(t))))^{-1} \right| = 0.$$

Como $|\alpha(\theta(w))\theta(u)\alpha(\theta(w))^{-1}| = 1$ para qualquer u, w então o limite acima é igual a:

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{|\beta(t)|} \left| \sin \frac{2\pi|u + \beta_u(t)|}{1 + |u + \beta(t)|^2} \right| = 0.$$

Sabendo que $\sin(\beta) = \sin(\pi - \beta)$ e usando a série de Taylor do seno ao redor do zero temos:

$$\frac{\pi}{|\beta|}\left(1 - \frac{2|u + \beta_u|}{1 + |u + \beta|^2}\right) = \frac{\pi}{|\beta|} \cdot \frac{(|u + \beta_u| - 1)^2 + |\beta_v|^2}{1 + |u + \beta|^2} \leq$$
$$\leq \frac{\pi}{|\beta|} \cdot \frac{(|u| + |\beta_u| - 1)^2 + |\beta_v|^2}{1 + |u + \beta|^2} = \frac{\pi}{1 + |u + \beta|^2} \cdot \frac{|\beta|^2}{|\beta|}.$$

Agora o primeiro termo tende a $\pi/2$ e o segundo para zero, o que demonstra a proposição. □

Proposição 4.6. *Se a aplicação definida por $\alpha(x/|x|)|x|$ for analítica então α^* também o é.*

Demonstração. Basta observar que neste caso todos os termos em 4.5 são analíticos. □

Apenas observamos que, segundo H. Whitney ([42]), que uma estrutura C^1 sempre pode ser substituída por uma estrutura C^∞ e difeomorfismos de classe C^1 por difeomorfismos de classe C^∞. Vale ainda um outro resultado sobre as construções acima:

Proposição 4.7. *Dada $\alpha : S^n \to S^3$ com as hipóteses acima então existe uma aplicação de grau 1, $\phi : S^{n+3} \to S^{n+3}$, equivariante pelas ações especificadas tal que $\alpha^\wedge \circ \phi = \gamma$, para uma aplicação γ Ad-equivariantemente homotópica a α^*, em particular $[\alpha^*] = [\alpha^\wedge] \in \pi_{S^{n+3}}(S^3)$.*

Demonstração. Podemos supor a menos de uma translação que $\alpha(\text{polo norte}) = 1$. Nesta condição consideramos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} S_0^{n+3} \arrow[r, "\beta"] & S^3 \times S^n \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\mathcal{M}"'] & S^3 \wedge S^n \cong S^{n+3} \arrow[dl, "m"] \\ & S^3 & \end{tikzcd} \tag{4.6}$$

onde ρ é a projeção, $S_0^{n+3} = S^{n+3} - \{x = 0\}$, $\beta(\xi, w) = (e^{\pi\xi}, w/|w|)$, $\mathcal{M}(\xi, w) = [\xi, \alpha(w)]$ e m é a aplicação induzida por $\mathcal{M}$ no quociente. Notar que $m = \alpha^\wedge$ e $\mathcal{M} \circ \beta = e^{\pi\xi}\alpha(w/|w|)e^{-\pi\xi}\alpha(w/|w|)^{-1}$ que é homotópica a α^* via $H(t, \xi, w) = e^{t\pi\xi}\alpha(w/|w|)e^{-\pi\xi}\alpha(w/|w|)^{-1}$. A aplicação ϕ é definida como $\phi|_{S_0^{n+3}} = \rho\beta$ e leva o conjunto $\{x = 0\}$ no ponto distinguido do produto *smash*. Agora para demonstrar a boa definição e o grau desta aplicação basta copiar a demonstração da Proposição 3.16 fazendo as adaptações necessárias. □

4.2.1 Realizações geométricas

Considere novamente o espaço $Sp(2)$ munido das duas ações apresentadas na seção 3.1:

$$\begin{tikzcd} & S^3 \arrow[d, dotted, no head] & \\ S^3 \arrow[r, dotted, no head] & Sp(2) \arrow[r] \arrow[d] & S^7 \\ & \Sigma^7 & \end{tikzcd}$$

A ação vertical no diagrama acima apresentada por Gromoll e Meyer garantiu a esta esfera a existência de uma métrica de curvatura não negativa (ver [18]) e a existência desta junto a uma ação padrão equivalente a fibração de *Hopf* garantiu, com intuição geométrica, a descrição explícita de todos os difeomorfismos de S^6 a menos de isotopia, descrição tal que, por alguma sorte, se apresentou com muita estrutura algébrica como visto até então. Baseando-se neste modelo e no desejo de uma compreensão mais profunda das estruturas exóticas é interessante a apresentação de novos modelos geométricos para tais esferas. De fato, dada uma aplicação $\alpha : S^n \to S^3$ novos espaços modelos podem ser construídos.

Considere o disco $D^{n+1} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid |x|^2 = 1 \text{ e } t \in [0,\pi[\}$ e $D_0^{n+1} = D^{n+1} - \{0\}$, uma ação $\cdot$ de S^3 em S^n e uma aplicação $\alpha : S^n \to S^3$, *Ad*-equivariante em relação a essa ação, munida de uma involução $\delta : S^n \to S^n$ tal que $\alpha(\delta x) = \alpha(x)^{-1}$ e defina as seguintes funções:

$$f, g : D_0^{n+1} \times S^3 \to D_0^{n+1} \times S^3 \tag{4.7}$$

$$\Big(x,t,q\Big) \overset{f}{\mapsto} \Big(\delta\hat{\alpha}(x), \pi - t, q\alpha(x)^{-1}\Big)\,, \tag{4.8}$$

$$\Big(x,t,q\Big) \overset{g}{\mapsto} \Big(\delta(x), \pi - t,\ q\alpha(x)\Big)\,. \tag{4.9}$$

Logo temos os espaços $\Sigma p(\alpha) = D^{n+1} \times S^3 \cup_f D^{n+1} \times S^3$ e $\mathbb{S}p(\alpha) = D^{n+1} \times S^3 \cup_g D^{n+1} \times S^3$. É fácil observar que a ação $(x,t,q) \mapsto (x,t,gq)$ é bem definida em ambos os espaços as quais definem fibrados principais $S^3 \cdots \Sigma p(\alpha) \to \Sigma^{n+1}_{\delta\hat{\alpha}}$ e $S^3 \cdots \mathbb{S}p(\alpha) \to S^{n+1}$, onde Σ^{n+1}_{σ} é esfera resultante da colagem pelo difeomorfismo $\sigma : S^n \to S^n$. Então a base do trabalho citado até então em relação a difeomorfismos é o seguinte teorema:

Teorema 4.8. *Os espaços $\Sigma p(\alpha)$ e $\mathbb{S}p(\alpha)$ são difeomorfos entre si.*

Demonstração. Considere a aplicação $F : D^{n+1} \times S^3 \to D^{n+1} \times S^3$ definida por $(x,t,q) \mapsto (q \cdot x, t, \bar{q})$. É notório que $fF = Fg$ e $gF = Ff$, de fato, computando diretamente:

$$\begin{aligned}
fF(x,t,q) &= \\
&= (\delta\hat{\alpha}(q\cdot x), \pi - t, \bar{q}\alpha(q\cdot x)^{-1}) \\
&= (\alpha(q\cdot x)\cdot\delta(q\cdot x), \pi - t, \bar{q}\alpha(q\cdot x)^{-1}) && \text{pela comutação de } \delta \text{ com } \cdot \\
&= (q\alpha(x)\bar{q}\cdot\delta(q\cdot x), \pi - t, \alpha(x)^{-1}\bar{q}) && \text{Ad-equivariancia de } \alpha \\
&= (q\alpha(x)\cdot\delta(x), \pi - t, \alpha(x)^{-1}\bar{q}) && \text{por } \delta \text{ novamente} \\
&= F(\delta(x), \pi - t, q\alpha(x)) = Fg(x,t,q).
\end{aligned}$$

A outra igualdade é provada de forma similar. A diferenciabilidade de F é clara e sua bijetividade é garantida pelo fato dele ser uma involução. Fica claro que as aplicações $F_\Sigma : \Sigma p(\alpha) \to \mathbb{S}p(\alpha)$ e $F_\mathbb{S} : \mathbb{S}(\alpha)p \to \Sigma p(\alpha)$ definidas por $(x,t,q) \mapsto F(x,t,q)$ são bem definidas e inversas entre si. $\square$

Corolário 4.9. *O espaço $Sp(\alpha) = \Sigma p(\alpha)$ ou $\mathbb{S}p(\alpha)$ admite o seguinte diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
 & S^3 \arrow[d, dash, dotted] & \\
S^3 \arrow[r, dash, dotted] & Sp(\alpha) \arrow[r] \arrow[d] & S^{n+1} \\
 & \Sigma_{\delta\hat{\alpha}} &
\end{tikzcd}
$$

As fórmulas explícitas das ações herdadas desta identificação são:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{S}p(\alpha) & \xrightarrow{F_{\mathbb{S}}} & \Sigma p(\alpha) & \xrightarrow{g\cdot} & \Sigma p(\alpha) & \xrightarrow{F_{\Sigma}} & \mathbb{S}p(\alpha) \\
(x,t,q) & \mapsto & (qx\bar{q}, t, \bar{q}) & \mapsto & (qx\bar{q}, t, g\bar{q}) & \mapsto & (gx\bar{g}, q\bar{g}),
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\Sigma p(\alpha) & \xrightarrow{F_{\Sigma}} & \mathbb{S}p(\alpha) & \xrightarrow{g\cdot} & \mathbb{S}p(\alpha) & \xrightarrow{F_{\mathbb{S}}} & \Sigma p(\alpha) \\
(x,t,q) & \mapsto & (qx\bar{q}, t, \bar{q}) & \mapsto & (qx\bar{q}, t, g\bar{q}) & \mapsto & (gx\bar{g}, q\bar{g}).
\end{array}
$$

O fato das fórmulas serem as mesmas era esperado devido a identificação dos espaços ser dada por uma involução. O que motiva a introdução desses espaços é de seu estudo ser muito bem-sucedido no caso principal deste trabalho, $\alpha = b : S^6 \to S^3$. De fato as aplicações geodésicas e a fibração $S^3 \cdots Sp(2) \to S^7$ assumidas na seção 3.2 garantem os seguinte teorema

Teorema 4.10. *Para $b : S^6 \to S^3$ o elemento de Blackers-Massey supracitado vale $\Sigma p(b) \cong \mathbb{S}p(b) \cong Sp(2)$.*

Observação 4.11. *O esforço de construir estes espaços e estudar estas aplicações é realmente de valia. É conhecido que para um elemento Σ^{4k-1} do subgrupo $bP_{4k} \subset \theta^{4k-1}$ de esferas que são bordo de variedades paralelizáveis sempre vale $\Sigma^{4k-1} \times S^3 \equiv S^{4k-1} \times S^3$, logo para qualquer uma dessas esferas existe um fibrado principal $S^3 \cdots S^{4k-1} \times S^3 \to \Sigma^{4k-1}$ (ver [8, 24, 39]). Isto válido até para $\Sigma^{4k-1} \times S^2$, porém nos é interessante a estrutura de grupo em S^3.*

4.3 Apresentações singulares

É notório que o caso $\alpha = b : S^6 \to S^3$ apresentado no início deste capítulo possui ainda mais um elemento no diagrama em cruz como visto na seção anterior:

$$\begin{tikzcd}
 & S^3 \arrow[d, dotted, no head] & S^3 \arrow[d, dotted, no head] \\
S^3 \arrow[r, dotted, no head] & Sp(2) \arrow[r] \arrow[d] & S^7 \arrow[d] \\
S^3 \arrow[r, dotted, no head] & \Sigma^7 \arrow[r] & S^4
\end{tikzcd}$$

Basta uma breve leitura do capítulo 2 para conceber a importância do mesmo através da fibração $S^3 \cdots \Sigma^7 \to S^4$ no cálculo dos invariantes desejados ou até mesmo em [36] para resultados geométricos. Este fibrado não é principal, porém é realizável como fibrado linear. Fator tal que permite escrever de forma simples um cobordo para Σ^7.

Ao longo dos estudos alguns problemas interessantes foram levantados e este simboliza o principal deles: dada uma esfera construída pela união de dois discos com um difeomorfismo explícito, será que existe uma variedade que a tem como bordo tal que algum invariante análogo ao de Eells-Kuiper possa ser calculado. Note que até mesmo os métodos usados por Milnor e Eells-Kuiper usam de outro tipo de construção que permite um cálculo indireto. Isso torna este trabalho não-trivial. Apesar de não termos sido bem-sucedidos acreditamos ainda que existe a possibilidade de algum material dessa seção ser útil no futuro.

Começaremos com o caso da família $\sigma^k : S^6 \to S^6$ que produz as esferas da seção 3.3 e em seguida apresentaremos uma construção associada ao caso de um difeomorfismo resultante de um dos processos descritos anteriormente. Em toda a seção tomaremos a ação em S^n como conjugação quaterniônica coordenada a coordenada.

4.3.1 Cobordos singulares

Relembrando dos espaços E_k^{10} apresentados na seção 3.3, considere novamente $< u, v >= \bar{u}^t v$ e defina uma nova família de espaços

$$F_1^{11} = \{(u, v) \in D^8 \times S^7 \quad | \quad < u, v >= 0\}.$$

Note que $\partial F_1^{11} = E_1^{10}$ e que ele pode ser representado como um subespaço no conjunto de matrizes $\mathbb{M}_2(\mathbb{H})$:

$$F_1^{11} = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{H}) \;\middle|\; |a|^2 + |b|^2 \leq 1 \text{ e } |c|^2 + |d|^2 = 1 \right\}.$$

É claro que as mesmas fórmulas das ações $\bullet, \star : S^3 \times E_1^{10} \to E_1^{10}$ ainda são bem definidas:

$$g \bullet \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c\bar{g} \\ b & d\bar{g} \end{pmatrix}$$
$$g \star \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ga\bar{g} & gc \\ gb\bar{g} & gd \end{pmatrix},$$

e que suas propriedades principais ainda são verificadas, isto é, elas são livres e comutam entre si. É notável que F_1^{11} é o fibrado 'tangente quaterniônico' de S^7, porém ainda mais notável é que o espaço de órbitas da ação $\bullet$ é facilmente identificado com o fibrado tautológico sobre $\mathbb{H}P^1 = S^4$. Observe primeiramente que para o fibrado tautológico $\xi(\mathbb{H}P^1)$ vale:

$$\xi(\mathbb{H}P^1) = \{(u, x) \in \mathbb{H}^2 \times S^4 \;\mid\; h(u) + \lambda^2 x = 0 \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}, \}$$

onde abusamos da notação e estendemos a fórmula da aplicação de *Hopf* para $h : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}\times\mathbb{H}$. Visto isto é claro que $F_1^{11} \ni (u, v) \mapsto (u, \bar{h}(v)) \in \xi(\mathbb{H}P^1)$ fatora por um difeomorfismo entre F_1^{11}/S^3 e $\xi(\mathbb{H}P^1)$. Aqui notamos por $\bar{h}$ a fórmula tradicional da aplicação de *Hopf* invariante por multiplicação a direita. Porém o ponto importante do espaço F_1^{11} é referente à outra ação.

Proposição 4.12. *O espaço de órbitas $F_1^{11}/S^3 = B^8$ referente a ação $\star$ é difeomorfo ao fibrado de discos associado ao fibrado de esferas $M^7_{2,-1}$.*

Demonstração. Para existir este difeomorfismo basta apresentarmos trivializações adequadas. Porém estas podem ser dadas pelas aplicações $h_1, h_2 : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to B^8$:

$$h_1(u, q) = \left[\frac{1}{(1 + |u|^2)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} q & \bar{u} \\ -uq & 1 \end{pmatrix} \right]; \tag{4.10}$$

$$h_2(v, r) = \left[\frac{1}{(1 + |v|^2)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} \bar{v}r & 1 \\ -r & v \end{pmatrix} \right]. \tag{4.11}$$

As inversas são dadas por

$$h_1^{-1}\left(\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{|d|^2}\left(\bar{b}d, \frac{\bar{d}ad}{|a|}\right),$$
$$h_2^{-1}\left(\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{|c|^2}\left(\bar{c}d, \frac{\bar{c}bc}{|b|}\right).$$

Uma conta rápida prova que $h_2^{-1}h_1$ é a aplicação desejada (compare com [18]). $\square$

Podemos repetir o mesmo processo para toda a família $\{E_k^{10}\}$. Considere a nova família de espaços

$$F_k^{11} = \{(u,v) \in D^8 \times S^7 \quad | \quad <\rho_k(u), v>= 0\}.$$

É fácil verificar que as ações $\bullet$ e $\star$ são bem definidas e livres nesses espaços. Considere o espaço de órbitas da ação $\star$, $B_k^8 = F_k^{11}/S^3$, e note que a aplicação $\tilde{h}_k : F_k^{11} \to S^4$ definida pela nossa aplicação de Hopf na segunda coluna é invariante pela ação $\star$ bem definida nesse espaço, o mesmo acontece com suas respectivas restrições a E_k^{10} e Σ_k^7, denotaremos está última aplicação como h'_k. Uma conta rápida mostra a identidade

$$h_k^{-1}(S^4 - \{(\pm 1, 0)\}) \cong (\mathbb{R}^4 - \{0\}) \times \bigvee_k D^4.$$

O que, por ser um espaço topológico sem estrutura diferenciável contido em B_k^8 como um aberto, prova que B_k^8 não pode admitir estrutura diferenciável. O problema nessa construção reside no fato de ρ_k ser singular em $(0,0)$ para $k \neq \pm 1$. De qualquer forma é possível que este espaço ainda possua alguma informação de interesse. Apresentaremos algumas proposições que indicam essa possibilidade. O fator principal é que todos os invariantes usados para o cálculo do invariante de Eells-Kuiper são invariantes por homeomorfismo e não somente por difeomorfismo.

Proposição 4.13. *Os espaços B_k^8 são homeomorfos ao cilindro da aplicação $h'_k : \Sigma_k^7 \to S^4$.*

Demonstração. Relembre a definição do cilindro de uma aplicação:

$$\mathcal{C}(f : X \to Y) = \frac{X \times [0,1]}{\approx_f},$$

onde a relação $\approx_f$ é dada por $x \approx_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. Agora o homeomorfismo é óbvio e induzido pela aplicação

$$\Sigma_k^7 \times I \to B_k^8$$
$$([(u,v)], t) \mapsto [(tu, v)].$$

A inversa é dada por tomar t a norma de u. A boa definição de ambas acontece pois o subconjunto $\{[(0,v)]\} \subset B^8_k$ é homeomorfo a S^4 via h'_k. □

Proposição 4.14. *Seja $M \xrightarrow{i} W \xrightarrow{f} M$ para i um mergulho que também é um retrato por deformação. Então $TW \cong f^*\nu i \oplus f^*TM$.*

Demonstração. Basta notar que $i^*TW = \nu i \oplus TM$, logo $f^*\nu i \oplus f^*TM = f^*i^*TW = (i \circ f)^*TW \cong (id)^*TW \cong TW$. □

Notamos por νi o fibrado normal ao mergulho i. Se conseguíssemos um par de variedades $W \xleftarrow{i} M$ tal que $W - M \cong B^8_k - S^4$ (no sentido diferenciável) e que i ainda fosse uma equivalência homotópica, então já saberíamos de antemão que $i^*p(W) = p(\nu i)p(M)$ e que a forma de interseção seria definida a mesma de M.

Observação 4.15. *Por outro lado, o Teorema 4.1 de [39] afirma que no contexto acima W só pode ser um fibrado de células sobre M logo a construção se torna um tanto obsoleta.*

Observação 4.16. *A ideia de considerar o pull-back do fibrado de discos associado a $E^{10}_1 \to S^7$ via ρ_k também é válida porém a fórmula da ação de Gromoll-Meyer neste caso não fica bem definida para $k \neq \pm 1$, o que nos tira a possibilidade de conseguir uma variedade de dimensão 8 com o bordo desejado com os objetos conhecidos. De fato para $\rho_k^* E^{10}_1 = \{(u', u, v) \in S^7 \times D^8 \times S^7 \mid (u,v) \in F^{11}_1, \quad \rho_k(u') = v\}$ temos*

$$g \star (u', u, v) = (gu', gu\bar{g}, gv),$$

o que não necessariamente satisfaz $\rho_k(gu) = gv$. Contudo os espaços $\mathbb{S}p(\alpha)$, para $\alpha : S^{4n+2} \to S^3$, ainda admitem fibrações $S^3 \cdots \mathbb{S}p(\alpha) \to S^{4n+3}$ a qual, um estudo mais profundo pode resultar em uma construção de um fibrado $S^3 \cdots P \to D(\eta(\mathbb{H}P^n))$, notando como $D(\eta(\mathbb{H}P^n))$ o fibrado de discos associado ao fibrado tautológico $S^{4n+3} \to \mathbb{H}P^n$, e como a ação $\star$ em $\mathbb{S}p(\alpha)$ é equivariante pela projeção, é muito provável que seja possível defini-la de forma interessante neste novo espaço.

Apêndice C: Uma outra construção clássica

De fato o Teorema 4.1 não é inédito ([7]).

Teorema 4.1'. *Fixada uma variedade M e uma ação $\cdot : G \times M \to M$, a aplicação $\alpha \mapsto \hat{\alpha}$ entre o grupo de funções de M para G Ad-equivariantes e o grupo de difeomorfismos equivariantes é um anti-homomorfismo, i.é., $\widehat{\alpha \cdot \beta} = \hat{\beta}\hat{\alpha}$.*

Apresentaremos agora uma construção clássica que usa este ponto de vista. É importante para entender melhor estes fenômenos ter o máximo de exemplos possíveis. Porém continua notório o fato de que um difeomorfismo em S^6 tenha sido apresentado de forma explícita, ponto que difere das construções clássicas.

Considere uma aplicação $\theta : A \to G$ equivariante e seu homeomorfismo induzido $\hat{\theta} : A \to A$. Também induzimos um homeomorfismo em $A \times A$ via a diagonal da ação de G em A via $(a, a') \mapsto (\theta(a) \cdot a', \theta(a) \cdot a)$, o qual é claramente equivariante. Estaremos principalmente interessados no caso em que $\hat{\theta}(a) = a$, tal que tenhamos como homeomorfismo $(x, y) \mapsto (\theta(x) \cdot y, x)$.

Considere agora a ação diagonal de $O(n)$ em $S^{n-1} \times S^{n-1}$. Para uma aplicação $\theta : S^{n-1} \to O(n)$ com $\theta(gx) = g\theta(x)g^{-1}$ a imagem de x tem que comutar com todo o grupo de isotropia de x, $O(n)_x$ (que é conjugado a $O(n-1)$ no nosso caso), portanto fica claro que $\theta(x)$ só pode ser uma das seguintes quatro possibilidades: Id, $-$Id, a reflexão pelo hiperplano perpendicular a x e a reflexão pela reta $\mathbb{R}x$ (a última não passa da negativa da penúltima). A continuidade de θ indica que a aplicação não pode variar entre estes casos. Também pode-se concluir que os dois primeiros casos não são interessantes e que os dois últimos devem dar o mesmo exemplo. Consideraremos então somente o último caso. Temos para $x \in S^{n-1}$ e $y \in \mathbb{R}^n$ a aplicação:

$$\theta(x) \cdot y = 2 < x, y > x - y,$$

onde o produto interno é o euclidiano. Definimos via esta o homeomorfismo (de fato difeomorfismo)

$$\begin{aligned} \varphi : S^{n-1} \times S^{n-1} &\to S^{n-1} \times S^{n-1} \\ (x, y) &\mapsto (\theta(x) \cdot y, x). \end{aligned}$$

Que de fato é equivariante como todas as suas potências. Definimos então novas variedades

$$\Sigma_k^{2n-1} = S^{n-1} \times D^n \cup_{\varphi^k} S^{n-1} \times D^n.$$

Observação 4.17. *Respeitosamente pedimos o perdão do leitor por usar novamente esta notação mas nesta seção ela será usada para estes espaços e somente eles e futuramente podemos muda-la para* $\Sigma(\theta^k)$ *e* φ *para* $\hat{\theta}$ *só insistiremos na mesma por fatores históricos.*

É notório que a colagem feita para Σ_k^{2n-1} não induz uma estrutura diferenciável da forma que estamos acostumados neste trabalho. Contudo para casos assim existem métodos simples de 'estreitamento de ângulos' os quais o leitor pode deduzir através de estender φ^k por vizinhanças tubulares de $S^{n-1} \times S^{n-1}$ em seus respectivos domínios ou usar [27] como referência.

O primeiro passo para estudar estes espaços é calcular suas homologias. Note que é ponto principal conhecer os morfismos $\varphi_*^k : H_{n-1}(S^{n-1} \times S^{n-1}) \to H_{n-1}(S^{n-1} \times S^{n-1})$. Indicamos então $*$ como ponto base e via Teorema de Kunneth é fácil notar que as inclusões $i_l : S^{n-1} \times S^{n-1} \times S^{n-1}$, $l = 1, 2$ dependendo do fator, induzem isomorfismo $i_1 \oplus i_2 : H_{n-1}(S^{n-1}) \oplus H_{n-1}(S^{n-1}) \to H_{n-1}(S^{n-1} \times S^{n-1})$. Portanto basta calcularmos o graus das aplicações $S^{n-1} \overset{i_j}{\hookrightarrow} S^{n-1} \times S^{n-1} \overset{\varphi^k}{\to} S^{n-1} \times S^{n-1} \overset{p_l}{\to} S^{n-1}$ para todas as combinações $j, l = 1, 2$. Escolhendo geradores condizentes com as orientações de S^{n-1} não é difícil ver que teremos uma matriz

$$\varphi_* = \begin{bmatrix} 1 + (-1)^n & (-1)^{n-1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

No caso geral

$$\varphi_*^k = \begin{bmatrix} 1 + k & -k \\ k & 1 - k \end{bmatrix}, \text{para n par,}$$

$$\varphi_*^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{para k par e n ímpar e} \quad \varphi_*^k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ caso contrário.}$$

Agora aplicando a sequência de Mayer-Vietoris (ver [6] para mais detalhes sobre esta) temos

$$\cdots H_{j+1}(\Sigma_k^{2n-1}) \to H_j(S^{n-1} \times S^{n-1})$$
$$\overset{(i_*, \varphi_*^k)}{\to} H_j(S^{n-1} \times D^n) \oplus H_j(S^{n-1} \times D^n) \to H_j(\Sigma_k^{2n-1}) \to \cdots$$

o que mostra que para $H_j(\Sigma_k^{2n-1}) = 0$ para $j \neq 0, 1, n-1, n, 2n-1$. O caso $j = 1$ é claro via Van-Kampen e os casos $j = 0, 2n-1$ são naturais. Para os casos $j = n, n-1$ temos para o homomorfismo (i_*, φ_*^k) as seguintes matrizes

$$\varphi_*^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 + k & -k \end{bmatrix}, \text{para n par,}$$

$$\varphi_*^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{para k par e n ímpar e} \quad \varphi_*^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ caso contrário.}$$

Logo para n e k ímpares temos que Σ_k^{2n-1} é uma esfera homológica, como a trivialidade de seus grupos fundamentais é garantida via Van-Kampem conclui-se que são de fato homeomorficamente esferas. Vale ainda mais:

Proposição 4.18. *Para a família de variedades definidas acima, as variedades Σ_k^{4m+1} são homeomorfas a esfera S^{4m+1} sempre que k é ímpar. Ainda mais, Σ_k^{4m+1} herda uma estrutura diferenciável diferente da padrão para pelo menos uma subfamília não vazia de índices m, k.*

Os métodos para mostrar em qual classe de difeomorfismo cada um desses espaços pertence é essencialmente diferente dos que apresentamos até agora (via invariantes ou difeomorfismo explícitos). A família de índices indicada é relacionada ao fato de Σ_k^{4m-3} ser a *esfera de Kervaire* para $k = \pm 3 \mod 8$, a qual é exótica quando m não é uma potência de 2, para qualquer uma dessas questões indicamos [7] como referência.

CAPÍTULO 5

ALGUMAS ESFERAS SOBRE UM OUTRO PONTO DE VISTA

Apresentaremos neste capítulo alguns resultados obtidos durante o período de estudos relacionados aos difeomorfismos construídos no capítulo anterior. Estaremos neste capítulo utilizando métodos primeiramente encontrados em [33, 34] e alguns outros resultados sobre eles.

5.1 Uma outra construção da esfera padrão

Considere a esfera padrão nas seguintes coordenadas

$$S^{k+n+1} = \{(\lambda, \xi, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n+1} | \lambda^2 + |\xi|^2 + |w|^2 = 1\}$$

e defina os seguintes subespaços:

$$S_x^{k+n+1} = \{(\lambda, \xi, w) \in S^{k+n+1} | \ |w|^2 \neq 0\}, \tag{5.1}$$

$$S_\xi^{k+n+1} = \{(\lambda, \xi, w) \in S^{k+n+1} | \ \lambda^2 + |\xi|^2 \neq 0\} \tag{5.2}$$

$$S_{w,\xi}^{k+n+1} = S_x^{k+n+1} \cap S_\xi^{k+n+1}. \tag{5.3}$$

Temos então difeomorfismos:

$$\psi : S^{k+n+1}_w \to D^{k+1} \times S^n \qquad\qquad \phi : S^{k+n+1}_\xi \to S^k \times D^{n+1} \tag{5.4}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda\\ \xi\\ w\end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{matrix}\lambda\\ \xi\end{matrix}, \frac{w}{|w|}\right) \qquad\qquad \begin{pmatrix}\lambda\\ \xi\\ w\end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{matrix}\frac{\lambda}{(\lambda^2+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}}\\ \frac{\xi}{(\lambda^2+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}}\end{matrix}, w\right) \tag{5.5}$$

Vale então que $S^{k+n+1} = S^k \times D^{n+1} \cup D^{k+1} \times S^n$ pelo difeomorfismo em $S^{k+n+1}_{w,\xi}$ dado pela composição $\psi^{-1} \circ \phi|_{S^{k+n+1}_{w,\xi}}$. O que faremos de agora em diante é generalizar esta construção para as esferas Σ_α.

5.2 Caso Σ_α

Vamos agora fixar algumas notações: $\alpha : S^n \to S^3$ *Ad*-equivariante a uma ação fixa $\cdot :$ $S^3 \times S^n \to S^n$ cujo símbolo também notará $g\cdot(\xi, w) = (g\xi\bar{g}, g\cdot w)$ em $S^{n+3} = S^2 * S^n$. Notamos por $D^{n+4} = \{(\xi, w, t) \in \mathrm{Im}\mathbb{H} \times \mathbb{R}^{n+1} \times [0, \pi[\}$, o disco aberto de raio π, $\delta : D^{n+4} \to D^{n+4}$ definido por $\delta(\xi, w, t) = (-\xi, w, \pi - t)$ e a aplicação $\sigma : D^{n+4} - \{0\} \to D^{n+4} - \{0\}$ definida por $\sigma(\xi, w, t) = \delta(\hat{\alpha}^*(\xi, w), t)$. Notaremos por Σ a esfera resultante da colagem de duas cópias de D^{n+4} via σ ou Σ_α quando houver risco de ambiguidade.

Usaremos daqui em diante a esfera padrão S^{n+4} também como a colagem de dois discos via δ e notamos que algumas coisas que faremos se originam da construção acima via o difeomorfismo

$$(\xi, w, t) \mapsto (\cos(t), \sin(t)\xi, \sin(t)w),$$

entre D^{n+4} e $S^{n+4} - \{(-1, 0, 0)\}$ e composições com δ.

Dada a esfera Σ também temos subespaços parecidos com o caso padrão.

Lema 5.1. *As funções $\rho, \rho' : \Sigma \to \mathbb{R}$ definidas por*

$$\rho(\xi, w, t) = \sin(t)^2|w|^2, \quad \rho'(\xi, w, t) = \cos(t)^2 + \sin(t)^2|\xi|^2$$

são bem definidas.

Definindo $\rho, \rho' : D^{n+4} \to D^{n+4}$ pela mesma fórmula conseguimos subespaços semelhantes:

$$\Sigma_w = \Sigma - \rho^{-1}(0), \qquad D^{n+4}_w = D^{n+4}_w - \rho^{-1}(0) \tag{5.6}$$

$$\Sigma_\xi = \Sigma - \rho'^{-1}(0), \qquad D^{n+4}_\xi = D^{n+4}_\xi - \rho'^{-1}(0) \tag{5.7}$$

$$\Sigma_{w,\xi} = \Sigma_x \cap \Sigma_\xi, \qquad D^{n+4}_{w,\xi} = D^{n+4}_w \cap D^{n+4}_\xi. \tag{5.8}$$

O ponto principal nesse capítulo é que com a fórmula dos difeomorfismos construídos no capítulo anterior podemos definir aplicações com propriedades que possibilitam imitar o caso da esfera padrão. Estas são as seguintes (compare [11]):

$$\begin{aligned} m_\alpha : D_w^{n+4} &\longrightarrow S^3 \\ (\xi, w, t) &\mapsto \alpha\Big(\frac{w}{|w|}\Big)e^{-\xi t} \end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned} n_\alpha^+ : D_\xi^{n+4} &\longrightarrow S^3 \\ (\xi, w, t) &\mapsto \alpha\Big(\frac{w}{|w|}\Big)e^{-\xi t}e^{\tau\xi}\alpha\Big(\frac{w}{|w|}\Big)^{-1}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

onde

$$e^{\tau\xi} = \frac{\cos t + \sin t\xi}{|\cos t + \sin t\xi|}.$$

Temos:

Proposição 5.2. *Dada α como acima de classe C^r, $0 < r \le \infty$ temos que m_α e n_α^+ são Ad-equivariantes de classe C^r e C^1 e ainda mais*

$$\delta \circ \hat{m}_\alpha \circ \sigma = \hat{m}_\alpha, \quad \delta \circ \hat{n}_\alpha^+ \circ \sigma = \hat{n}_\alpha^-,$$

onde $\hat{n}_\alpha^-(\xi, w, t) = -n_\alpha^+(\xi, w, t)$. Em particular elas definem funções

$$\hat{m}_\alpha : \Sigma_w \longrightarrow S_w^{n+4}, \quad \hat{n}_\alpha : \Sigma_\xi \longrightarrow S_\xi^{n+4}, \tag{5.11}$$

onde $\hat{n}_\alpha$ é definido pelo seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} D^{n+4} & \hookleftarrow & D_\xi^{n+4} & \xrightarrow{\widehat{n_\alpha^+}} & D_\xi^{n+4} & \hookrightarrow & D^{n+4} \\ \uparrow & & & & & & \uparrow \\ D^{n+4} - \{0\} & & & & & & D^{n+4} - \{0\} \\ \downarrow\sigma & & & & & & \downarrow\delta \\ D^{n+4} & \hookleftarrow & D_\xi^{n+4} & \xrightarrow{\widehat{n_\alpha^-}} & D_\xi^{n+4} & \hookrightarrow & D_\xi^{n+4} \end{array}.$$

Demonstração. A única afirmação que não precede de verificação direta é a diferenciabilidade de n_α. Sendo o único problema o subespaço $\rho^{-1}(0)$. Seguindo a demonstração e notação da Proposição 4.5 basta provar a diferenciabilidade em $t = 0$ e os seguintes limites:

1) $\lim_{|\xi|\to 1} \left|\frac{|\xi|\cos(t|\xi|)\sin(t) - \cos(t)\sin(t|\xi|)}{1-|\xi|}\right| < M < \infty,$

2) $\lim_{s\to 0} \left|\frac{|\xi|\cos(t|\xi|)\sin(t) - \cos(t)\sin(t|\xi|)}{\beta(s)}\right| = 0.$

É fácil notar que a expressão conseguida expandindo a fórmula de n_α é analítica em t com uma série de potências pares. Logo por teorema de geometria Riemmanniana vale que n_α é analítico na origem pela direção polar. Para o primeiro limite notamos que

$$\cos(t)\sin(t|\xi|) = \sin(t)\cos(t|\xi|) - \sin(t(1-|\xi|)).$$

Temos

$$\frac{|\xi|\cos(t|\xi|)\sin t - \cos t \sin(t|\xi|)}{1-|\xi|} = \frac{(|\xi|-1)\cos(t|\xi|)\sin t}{(1-|\xi|)} + \frac{\sin(t(1-|\xi|))}{(1-|\xi|)} \to t - \cos t \sin t.$$

O segundo limite é relacionado à diferenciabilidade da parte da expressão de n_α que pode dar problema. Portanto, por teoremas de Calculo, podemos considerar este limite coordenada a coordenada. Ele é claro para a coordenada t. A aplicação é *a priori* diferenciável em ξ, pois a ação é transitiva na mesma e a função é equivariante. Basta então calcularmos para w. Temos

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0}\left|\frac{|\xi|\cos(t|\xi|)\sin t - \cos t\sin(t|\xi|)}{w}\right| &= \\ &= \lim_{s\to 0}\frac{||\xi|\cos(t|\xi|)\sin t - \cos t\sin(t|\xi|)|}{|w|^2}|w| \\ &= \lim_{s\to 0}\left|\frac{|\xi|\cos(t|\xi|)\sin t - \cos t\sin(t|\xi|)}{1-|\xi|}\right|\frac{|w|}{1+|\xi|}.\end{aligned}$$

Aqui $\beta(s) = w(s)$ e suprimimos esta notação para maior clareza do que estamos fazendo. Já vimos que o primeiro termo é limitado e o segundo vai para zero pois $|w| \to 0$ obtendo assim o resultado desejado. $\square$

Agora é fácil deduzir o seguinte:

Teorema 5.3. *Seja $r_\alpha : S^3 \times S^n \to S^3$ definido por $r_\alpha(\lambda+\xi, w) = (\lambda+\xi)\alpha(w)^{-1}$, então $\Sigma_\alpha = D^4 \times S^n \cup S^3 \times D^{n+1}$ onde a colagem é feita ao longo do bordo comum por $\hat{r}_\alpha$.*

Demonstração. Basta verificar a seguinte composição:

$$(D^4 - \{0\}) \times S^n \xrightarrow{\psi^{-1}} S^{n+4}_{w,\xi} \xrightarrow{\hat{m}_\alpha^{-1}} \Sigma_{w,\xi} \xrightarrow{\hat{n}_\alpha} S^{n+4}_{w,\xi} \xrightarrow{\phi} S^3 \times (D^{n+1} - \{0\}).$$

Temos

$$\hat{n}_\alpha \circ \hat{m}_\alpha^{-1}(\xi, w, t) = \widehat{m_\alpha^{-1} \cdot n_\alpha}(\xi, w, t) = e^{\tau\xi}\alpha\left(\frac{w}{|w|}\right)^{-1}.$$

Ainda mais:

$$m_\alpha^{-1} \cdot n_\alpha \circ \psi^{-1}(\lambda, \xi, w) = \left(\frac{\lambda+\xi}{|\lambda+\xi|}\right)\alpha(w)^{-1}.$$

Logo

$$\begin{aligned}\phi\circ \widehat{m_\alpha^{-1}\cdot n_\alpha}(\psi^{-1}(\lambda,\xi,w)) =& \\ &=\phi(m_\alpha^{-1}\cdot n_\alpha(\psi^{-1}(\lambda,\xi,w))\cdot\psi^{-1}(\lambda,\xi,w)) \\ &=\phi(r_\alpha(\lambda+\xi/|\lambda+\xi|,w)\cdot\psi^{-1}(\lambda,\xi,w)) \\ &=r_\alpha(\lambda+\xi/|\lambda+\xi|,w)\cdot\phi\circ\psi^{-1}(\lambda,\xi,w).\end{aligned}$$

Como desejado. □

5.3 Observações sobre *plumbing*

Seguiremos com alguns resultados e construções baseados em [25, 34]. Considere aplicações $\beta : S^k \to SO(n)$ e $\gamma : S^n \to SO(k)$ e difeomorfismos

$$\begin{array}{llll} F: S^k\times D^{n+1} & \to S^k\times D^{n+1}, & G: D^{k+1}\times S^n & \to D^{k+1}\times S^n \\ \quad (x,y) & \mapsto (x,\beta(x)\cdot y) & \quad (x,y) & \mapsto (\gamma(y)\cdot x, y), \end{array}$$

onde $\cdot$ denota a ação linear padrão de $SO(n)$ em D^{n+1} (resp. $SO(k)$ em D^{k+1}) que fixa a primeira coordenada. Note por f, g as restrições de F e G aos seus respectivos bordos.

Proposição 5.4. *A variedade obtida por suavizar os ângulos de $D^{k+1}\times S^n \cup_{g^{-1}f} S^k\times D^{n+1}$ é homeomorfa a esfera e é bordo da variedade $E(\beta,\gamma)$ obtida por suavizar os ângulos do seguinte espaço*

$$\begin{tikzcd} D^{k+1}\times D^{n+1} & & D^{k+1}\times D^{n+1} & & D^{k+1}\times D^{n+1} \\ & D^{k+1}\times S^n \arrow[ul] \arrow[ur, "G"'] & & S^k\times D^{n+1} \arrow[ul, "F"'] \arrow[ur] & \\ & & S^k\times S^n \arrow[ul] \arrow[ur, "g^{-1}f"'] & & . \end{tikzcd} \tag{5.12}$$

Demonstração. A função $(x,y)\mapsto x_0$, a primeira coordenada de x, é bem definida e tem somente dois pontos críticos, vale então por [32] que esta variedade é homeomorfa a uma esfera. A outra afirmação é facilmente verificada. □

Observe que no diagrama acima os triângulos da parte superior direita e superior esquerda podem ser considerados como fibrados de disco sobre as esferas S^{k+1}, S^{n+1} respectivamente. Segue por argumentos encontrados em [25] que este espaço é retrato por deformação de

$S^{k+1} \vee S^{n+1}$. Seja $p_r : \pi_{4r-1}SO(q) \to \mathbb{Z}$ o homomorfismo de Potrjagyn definido por evaluar a r-ésima classe do fibrado em S^{4r} correspondente no elemento de volume. Segue de referências encontradas em [34] o seguinte resultado

Proposição 5.5. *O índice de $E(\beta, \gamma)$ é nulo e se $k = 4r - 1$ e $n = 4(l - r) - 1$ então o único número de Potrjagyn não nulo é $i_{r,r-l}$ dado por $p_r(\beta)p_{r-l}(\gamma)$. Se k, n não são dessa forma então todos eles são nulos.*

Segue de [17] o cálculo do invariante μ de $\partial E(\beta, \gamma) = \Sigma(\beta, \gamma)$

Proposição 5.6. *Seja $\Sigma(\beta, \gamma)$ como definido acima então*

$$\mu(\Sigma(\beta,\gamma)) \equiv \frac{B_r B_{l-r}\left\{1 + \frac{2(2^{2r-1}-1)(2^{2(l-r)-1}-1)}{2^{2l-1}}\right\} p_r(\beta)p_{k-r}(\gamma)}{4a_l(2r)!(2l-2r)!} \quad mod\ 1,$$

se $r \neq 2l$ ou

$$\mu(\Sigma(\beta,\gamma)) \equiv \frac{B_r^2}{8((2r)!)^2}\left(1 + \frac{2(2^{2r-1}-1)^2}{2^{4r-1}-1}\right)\Big(p_r(\beta)^2 w_{4r}(\beta)$$
$$\pm 2p_r(\beta)p_r(\gamma) + p_r(\gamma)^2 w_{4r}(\gamma)\Big) + t_{2r}\tau[E(\beta,\gamma)] \quad mod\ 1,$$

onde w_{4r} é a classe de Euler referente ao fibrado.

5.4 Aplicações

Estudaremos o caso $r = 1, l = 2$ onde conseguimos de fato calcular os invariantes. Faremos algumas observações antes de começar. Note por Σ_k (ou $\Sigma_{\alpha,k}$ quando houver risco de ambiguidade) a esfera construída pelo difeomorfismo $(\delta(\hat{\alpha^*})^k)$:

Proposição 5.7. *As funções $\rho_k, \rho'_k : \Sigma_k \to \mathbb{R}$ definidas pelas mesmas fórmulas de ρ, ρ' são bem definidas e ainda mais, as funções definidas pelas fórmulas $n_{\alpha,k}(\xi, w, t) = n_\alpha(\xi, w, kt)$ e $m_{\alpha,k}(\xi, w, t) = m_\alpha(\xi, w, kt)$ são bem definidas como funções Ad-equivariantes de $\Sigma_k - (\rho'_k)^{-1}(0) \to S^3$ e $\Sigma_k - \rho_k^{-1}(0) \to S^3$ respectivamente com a mesma classe de diferenciabilidade de n_α e m_α. Vale ainda que $\Sigma_k = D^4 \times S^n \cup_{r_{\alpha,k}} S^3 \times D^{n+1}$ com $r_{\alpha,k}(\lambda, \xi, w) = (\lambda + \xi)^k \alpha(w)^{-1}$.*

5.4.1 Um cobordo para $\Sigma_{\alpha,k}$

Considere a construção na Proposição 5.4 com $k = 3$ e as seguintes alterações

$$F(\lambda + \xi, w) = (\lambda + \xi)^k \cdot (\lambda + \xi, w), \quad G(\lambda + \xi, w) = \alpha(w) \cdot (\lambda + \xi, w).$$

Então fica clara a seguinte

Proposição 5.8. *A variedade $E(k, \alpha)$ definida por suavizar os ângulos da variedade definida pelo diagrama 5.12 tomando F, G como acima tem a propriedade $\partial E(k, \alpha) = \Sigma_{\alpha,k}$.*

Acreditamos que estas variedades tenham números de Pontrjagyn e índice calculados da mesma forma que $E(\beta, \gamma)$. O que podemos afirmar é que os triângulos superiores ainda continuam sendo fibrados de discos sobre esferas com a única diferença que o da direita projeta sobre a esfera obtida pelo difeomorfismo $\hat{\alpha}$. O nosso maior problema é a afirmação de Milnor que no caso estudado por ele os fibrados se intersetam em uma célula.

5.4.2 Caso $r = 1$,$l = 2$

É fácil verificar o seguinte:

Lema 5.9. *Considere na construção da seção anterior β e γ funções Ad-equivariantes com as propriedades $\beta(x) \cdot x = x, \gamma(y) \cdot y = y$ então $g^{-1}f(x, y) = \beta(x)\gamma(y)^{-1} \cdot (x, y)$ (agindo na diagonal).*

Considere $x = \lambda + \xi \in \mathbb{H}$, $y = w \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $\beta(\lambda + \xi) = [(\lambda + \xi)^{-k}] \in S^3/\mathbb{Z}_2 = SO(3)$, $\gamma(w) = [\alpha(w)^{-1}] \in S^3/\mathbb{Z}_2 = SO(3) \hookrightarrow SO(7)$ com o isomorfismo $S^3/\mathbb{Z}_2 = SO(3)$ dado por $a \mapsto \mathrm{Ad}_a$ e a inclusão em $SO(7)$ por conjugação coordenada a coordenada. Temos de [32]:

Lema 5.10. *Para β, γ como acima vale:*

$$p_1(\beta) = \pm 4k, \quad p_1(\gamma) = \pm 4k' \tag{5.13}$$

$$w_4(\beta) = w_4(\gamma) = 0, \tag{5.14}$$

com k' a imagem de $\alpha : S^3 \to S^3$ via o isomorfismo $\pi_3(S^3) \to \mathbb{Z}$ induzido por escolher a identidade como gerador.

Usando a fórmula da proposição 5.6 temos

Teorema 5.11.

$$\mu(\Sigma_{\alpha,k}) \equiv \frac{kk'}{28}.$$

Demonstração. A única coisa que não segue da substituição dos dados do lema acima na Proposição 5.6 é o sinal que é positivo pois o caso $k = k' = 1$ é a variedade $M^7_{2,-1}$ cujo invariante foi calculado no capítulo 2. □

Segue diretamente o seguinte

Corolário 5.12. *Seja $\pi_l^{S^3}(S^n)$, $n = 3, 6$ o grupo de aplicações equivariantes a menos de homotopia equivariante então vale o seguinte diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd}
\pi_3^{S^3}(S^3) \otimes \pi_3^{S^3}(S^3) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_6^{S^3}(S^3) \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \theta^7 \\
\pi_3(S^3) \otimes \pi_3(S^3) \arrow[r] \arrow[urr, dashed] & \pi_6(S^3) &
\end{tikzcd},$$

onde a linha de baixo é dado pelo produto de Samelson, as flechas verticais são induzidas por ‘esquecer´ equivariancia, a linha de cima é dada pelo produto definido em 3.16 e a aplicação $\beta \mapsto \hat{\beta}$ respectivamente e a seta longa pontilhada é dada por qualquer levantamento para $\pi_3^{S^3}(S^3)$.

Isto também responde, como caso particular, uma pergunta levantada em [11].

Corolário 5.13. *A construção $\alpha \mapsto \hat{\alpha}^*$ no caso $\alpha : S^3 \to S^3$ só depende da classe de homotopia de α, em particular não é possível conseguir um gerador de θ^7 por um elemento homotopicamente nulo.*

Sabendo que $\pi_6(S^3) \cong \mathbb{Z}_{12}$ e $\theta^7 \cong \mathbb{Z}_{28}$ também concluímos que a segunda seta vertical não pode ser isomorfismo.

5.4.3 S^3-fibrados sobre S^4

Seja $h_0 : S^7 \to S^4$ a aplicação de *Hopf* definida por $h_0(a, b) = (|a|^2 - |b|^2, 2a\bar{b})$ então temos as seguintes fórmulas:

$$h_0 \circ \psi^{-1}(\lambda, \xi, w) = (2(\lambda^2 + |\xi|^2) - 1, 2(1 - \lambda^2 - |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}(\lambda + \xi)\bar{w}), \tag{5.15}$$

$$h_0 \circ \phi^{-1}(\lambda, \xi, w) = (1 - 2|w|^2, 2(1 - |w|^2)^{\frac{1}{2}}(\lambda + \xi)\bar{w}). \tag{5.16}$$

Segue

Proposição 5.14. *Seja $\alpha = Id : S^3 \to S^3$, $r = r_\alpha$ e $\Sigma(r^k) = S^3 \times D^4 \cup_{\hat{r}^k} D^4 \times S^3$ então a aplicação $h_k : \Sigma(r^k) \to S^4$ definida pelas fórmulas acima é bem definida, analítica e define o fibrado $M^7_{k+1,-k}$ de 2.1.*

Demonstração. Para a boa definição precisamos que

$$h_0 \circ \psi^{-1}(\hat{r}^k(\lambda + \xi, w)) = h_0 \circ \phi^{-1}(\lambda + \xi, w),$$

porém ambas as expressões acima são invariantes por conjugações por $(\lambda+\xi)\bar{w}$. Para a segunda afirmação considere $\mathbb{R}\times\mathbb{H}\supset S^4_{\pm}=S^4-\{(\mp 1,0)\}$ e as trivializações $l_{\pm}: S^4_{\pm}\times S^3$ de h_0 dadas por

$$l_-\begin{pmatrix}\lambda\\ w\\ q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{wq}{\sqrt{2-2\lambda}}\\ q\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix},\quad l_+^{-1}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|a|^2-|b|^2\\ 2a\bar{b}\\ a/|a|\end{pmatrix}. \tag{5.17}$$

Seja $S^4_{+,-}=S^4_+\cap S^4_-$ e $D^4_{\cdot}=D^4-\{0\}$ então a função de trivialização do fibrado é dada por

$$S^4_{+,-}\times S^3\xrightarrow{l_-}S^7_{\xi,w}\xrightarrow{\psi}S^3\times D^4_{\cdot}\xrightarrow{r^k}D^4_{\cdot}\times S^3\xrightarrow{\phi^{-1}}S^7_{\xi,w}\xrightarrow{l_+^{-1}}S^4_{+,-}\times S^3$$

onde estamos usando a mesma notação para as funções e suas restrições. É fácil ver que

$$\phi^{-1}\circ\hat{r}^k\circ\psi(\lambda+\xi,w)=r^k\left(\frac{\lambda+\xi}{|\lambda+\xi|},\frac{w}{|w|}\right)\cdot\phi^{-1}\circ\psi(\lambda+\xi,w).$$

Substituindo no lado direito $\lambda+\xi$ por $\frac{wq}{\sqrt{2-2\lambda}}$ e w por $q\sqrt{\frac{1-\lambda}{2}}$ temos

$$\phi^{-1}\circ\hat{r}^k\circ\psi\circ l_-(\lambda,w,q)=r^k\left(\frac{wq}{|w|},q\right)\cdot\phi^{-1}\circ\psi\circ l_-(\lambda,w,q),$$

aplicando agora l_+^{-1} ao lado direito

$$\begin{aligned}l_+^{-1}(r^k(wq|w|^{-1},q)\cdot\phi^{-1}\circ\psi\circ l_-(\lambda,w,q))=&\\ &=l_+^{-1}(w^k\cdot\phi^{-1}\circ\psi\circ l_-(\lambda,w,q))\\ &=(\lambda,w,w^{k+1}q\bar{w}^k),\end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre sem dificuldades técnicas. □

Como corolário temos seu invariante μ calculado.

Corolário 5.15.

$$\mu(\Sigma(r^k))\equiv\frac{k(k+1)}{56}\quad mod\ 1.$$

Observação 5.16. *Conclui-se diretamente que colar ao longo de $S^3\times S^3$ não respeita a composição de funções pois temos*

$$\mu(\Sigma(r^2))\equiv\frac{3}{28}\neq\frac{2}{28}\equiv\mu(\Sigma(r)\#\Sigma(r)).$$

CONCLUSÃO

Foi apresentado nesta dissertação alguns dos trabalhos dedicados a construir candidatos de variedades, difeomorfismos e involuções não equivalentes às padrões. Em seguida apresentamos um novo resultado que pode ajudar a classificar algumas destas. Seguimos agora, como conclusão do trabalho, com uma lista desta e algumas outras questões formuladas de forma bem abrangentes cujas respostas podem ajudar a entender melhor a exoticidade destes fenômenos.

Questão 1. *Estudar como e quando podemos 'propagar' a exoticidade de $\hat{\alpha}^*$.*

Questão 2. *Estudar as esferas Σ_α em geral e entender quando e como o processo $\alpha \mapsto \hat{\alpha}^*$ gera uma esfera exótica.*

Esperamos que seja possível usar o Capítulo 5, em particular a construção em 5.4.1, para comparar as esferas conseguidas por difeomorfismos Ad-equivariantes do tipo $\widehat{\alpha^*}$ com os pares bilineares de Milnor e Novikov ([29]).

Questão 3. *Entender como ocorre a isotopia $\widehat{(\alpha^k)^*} \approx (\hat{\alpha}^*)^k$.*

Comparando a aplicação de *Hopf* $h_0 : S^7 \to S^3$ e a construção no Capítulo 5 talvez seja possível conseguir uma ideia de como levar a esfera colada por $\widehat{(\alpha^k)^*}$ na esfera colada por $(\hat{\alpha}^*)^k$.

Questão 4. *Fazer as mesmas construções substituindo S^3 por $O(n)$*

Esta seria uma outra forma de conseguir novas esferas. É possível que a construção no Apêndice C ajude bastante nesta generalização.

Questão 5. *Construir $\Sigma p(\alpha^*)$ via os métodos do último capítulo e tentar compará-lo com algum outro espaço conhecido.*

Questão 6. *Construir um invariante que depende de forma mais direta do difeomorfismo.*

Para o caso $n = 7$ basta encontrar alguma forma de recuperar, para $\widehat{\rho^*_{k'}}^k$, k, k' *mod* 28 de forma invariante por isotopia, onde $\rho_{k'} : S^3 \to S^3$ é definido por $\rho_{k'}(q) = q^{k'}$. Ainda deixamos algumas outras questões que ainda não temos ideia de como atacar.

Questão 7. *Entender por que algumas esferas de θ^7 não podem ser escritas como S^3 fibrados sobre S^4 e comparar 5.14 com [19].*

Questão 8. *Identificar a esfera Σ^7_{GM} com a esfera de Brieskorn em [2].*

Questão 9. *Trivializar o fibrado tangente de Σ^7_{GM}.*

Questão 10. *Estudar ações livres de $\mathbb{Z}_p$ sobre as esferas Σ_α assim como feito em [12].*

BIBLIOGRAFIA

[1] U. Abresh, C. Durán, T. Puettmann, A. Rigas, *Wiedersehen metrics and exotic involutions of Euclidean spheres*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. Crelles Journal, **605** (2007), 1-21.

[2] E. Brieskorn, *Beispiele zur Differentialgeometrie von Singulariäten*, Invent. Math. **2** (1966), 1-14.

[3] A. Borel, F. Hirzebruch, *Characteristic classes and homogeneous spaces III*, Am. J. Math. **82** (1960), 491-504.

[4] R. Bott, *A note on the Samelson products in the classical groups*, Comment. Math. Helv. **34** (1960), 249-256.

[5] R. Bott, L. W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer-Verlag, 1986.

[6] G. Bredon, *Topology and Geometry*, Sprnger.

[7] G. Bredon, *Introduction to Compact Transformation Groups*, Academic Press, 1972.

[8] R. De Sapio, *Differential Structures on a Product of Spheres*, Comment. Math. Helv. **44** (1969), 61-69.

[9] C. Durán, *Pointed Wiedersehen Metrics on Exotic Spheres and Diffeomorphisms of S^6*, Geometriae Dedicata **88** (2001).

[10] C. Durán, T. Puettmann, *A minimal Brieskorn 5-sphere in the Gromoll-Meyer sphere and its applications*,Michigan Math. J. **56**, No. 2 (2008), 419-451.

[11] C. Durán, A. Mendoza, A. Rigas, *Blakers-Massey Elements and Exotic Diffeomorphisms of S^6 and S^{14} via Geodesics*, Transactions of the A.M.S. **356**, No. 12 (2004).

[12] C. Durán, T. Puettmann, *A minimal Brieskorn 5-sphere in the Gromoll-Meyer sphere and its applications*, Michigan Mathematical Journal, **56**, No. 2 (2009), 419-451.

[13] C. Durán, T. Puettmann, A. Rigas, *An infinite family of Gromoll-Meyer spheres*, http://arxiv.org/abs/math/0610349.

[14] C. Durán, A. Rigas, *Gromoll-Meyer actions and triality*, Matemática Contemporânea, **33** (2007), 101-121.

[15] C. Durán, A. Rigas, *Equivariant homotopy and deformations of diffeomorphisms*, Differential Geometry and Its Applications, **27** (2009), 206-211.

[16] C. Durán, A. Rigas, L. D. Sperança *Bootstrapping Ad-equivariant maps, diffeomorphisms and involutions* artigo submetido à publicação.

[17] J. Eeells, N. Kuiper, *An invariant of certain smooth manifolds*, Annali Mat. Pura e Appl **60** (1962), 413-443.

[18] D. Gromoll, W. Meyer, *An exotic sphere with nonnegative curvature*, Ann. Math. **96** (1972), 413-443.

[19] K. Grove, W. Ziller, *Curvature and Symmetry of Milnor Spheres*, Annals of Mathematics, **152** (2000),331-367.

[20] A, Hatcher, *Algebraic Topology*, Versão eletrônica.

[21] M. Hirsch, J. Milnor, *Some curious involutions of spheres*, Bull. Amer. Math. Soc. **70**, No.3 (1964), 372-377.

[22] F. Hirzebruch, *Topological Methods in Algebraic Geometry*, Springer-Verlag (1978).

[23] F. Hirzebruch, *Ueber die quaternionalen projektiven Räume*, S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München (1953), 301-312.

[24] W.C. Hsiang, J. Levine, R.H. Szczarba, *On the normal bundle of a homotopy sphere embedded in euclidean space*, Topology **3** (1965), 173-181.

[25] P.J. Kahn, *Characteristic Numbers and Oriented Homotopy Type*, Topology **3** (1965), 81-95.

[26] M.A. Kervaire, J.W. Milnor, *Groups of homotopy spheres I*, Ann. of Math. **77** (1963), 504-537.

[27] R.C. Kirby, L. Siebenmann, *Foundational essays on topological manifolds, smoothings, and triangulations*, Princeton University Press, 1977.

[28] A. Kosinski, *Differentiable Manifolds*, Boston, MA: Academic Press, 1992.

[29] T. C. Lawson, *Remarks on the Pairing of Bredon, Milnor and Milnor-Munkres-Novikov*, Indiana University Math. J. **22**, No. 9 (1973), 833-843.

[30] S. L. Medrano, *Involutions on Manifolds*, Springer-Verlag, 1971.

[31] J. W. Milnor, *Classification of* $(n-1)$*-connected* $2n$*-manifolds and the discovery of exotic spheres*, Disponível em http://www.maths.ed.ac.uk/ aar/.

[32] J. W. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Ann. of Math. **64** (1956), 399-405.

[33] J. W. Milnor, *Differentiable manifolds wich are homotopy spheres*, Mimeographed notes, Princeton, 1958.

[34] J. W. Milnor, *Differentiable Structures on Spheres*, Amer. J. Math. **81** (1959), 962-971.

[35] J. W. Milnor, Stasheff, *Characteristic Classes*,

[36] P. Petersen, F. Wilhelm, *An exotic sphere with positive sectional curvature*, http://arxiv.org/abs/0805.0812.

[37] A. Ranicki, *Algebraic and Geometric Surgery*, Oxford Mathematical Monograph, 2002 (versão eletrônica).

[38] S. Smale, *The generalized Poncaré conjecture in higher dimension*, Bull. A.M.S. **66** (1960), 373-375.

[39] S. Smale, *On structure of manifolds*, American Journal of Mathematics, **84**, No. 3 (1962), 387-399.

[40] R. Thom, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*, Comment. Math Helv. **28** (1954), 17-86.

[41] Warner, *Diffentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer.

[42] H. Whitney, *Differentiable Manifolds*, Ann. Math. **37** (1936), 645-680.