



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA



Modelagem Alternativa para Dinâmica Populacional: Sistemas Dinâmicos Fuzzy

Moiseis dos Santos Ceconello

Mestrado em Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi

Modelagem Alternativa para Dinâmica Populacional: Sistemas Dinâmicos Fuzzy

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Moiseis dos Santos Ceconello** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 10 de março de 2006.

Prof. Dr. **Rodney Carlos Bassanezi**
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi (IMECC/UNICAMP)

Prof. Dr. Laécio Carvalho de Barros (IMECC/UNICAMP)

Prof. Dr. Geraldo Lucio Diniz (UFMT)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática Aplicada**.

Dissertação de Mestrado defendida em 10 de março de 2006 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). RODNEY CARLOS BASSANEZI



Prof. (a). Dr (a). LAÉCIO CARVALHO DE BARROS



Prof. (a). Dr (a). GERALDO LUCIO DINIZ

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Cecconello, Moiseis dos Santos

C323m Modelagem alternativa para dinâmica populacional: sistemas dinâmicos fuzzy / Moiseis dos Santos Cecconello -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2006.

Orientador : Rodney Carlos Bassanezi

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Conjuntos difusos. 2. Sistemas dinâmicos. 3. Biomatemática. I. Bassanezi, Rodney Carlos. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Alternative modelling for populational dynamic: fuzzy dynamical systems.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Fuzzy sets. 2. Dynamical systems. 3. Biomathematics.

Área de concentração: Biomatemática

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

Banca examinadora: Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Laécio Carvalho de Barros (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Geraldo Lucio Diniz (UFMT)

Data da defesa: 10/03/2006

Agradecimentos

Ao meus pais, irmãos, cunhadas e sobrinhos pelo carinho à min concedido em todos os momentos desta jornada. Em especial, ao meu pai Sírío e minha mãe Evanir pelas orações ao meu favor.

Aos professores Rodney e Paulo Guimarães por terem acreditado em minha capacidade e pelo apoio fundamental para a conclusão deste trabalho. Ao professor Rodney, agradeço ainda pela orientação segura e dedicada.

À Gabriel Haeser e Ricardo Lopes pela amizade, companheirismo, momentos de alegria, idéias que contribuíram para este trabalho e apoio durante estes dois anos de mestrado. Sem dúvida, esta amizade foi fundamental para a conclusão desta etapa.

À todos meus amigos de Mato Grosso e aos amigos conquistados aqui em Campinas pela contribuição, seja esta direta ou indireta, e apoio.

À Deus por ter me possibilitado tudo isto.

Resumo

Neste trabalho utilizamos a teoria dos conjuntos fuzzy de duas maneiras distintas para a modelagem de dinâmica populacional como alternativa para a modelagem determinística: problema de valor inicial fuzzy e sistemas baseados em regras fuzzy.

Apresentamos algumas das principais propriedades da solução de um problema de valor inicial fuzzy obtida por extensão de Zadeh do campo variacional determinístico ou do fluxo determinístico.

Elaboramos bases de regras para dinâmica populacional de espécies isoladas com crescimento inibido e espécies em interação do tipo *competição*, *presa-predador* e *mutualismo*. Além disso, estabelecemos alguns resultados sobre a existência e unicidade de estados de equilíbrio para sistemas p-fuzzy unidimensionais e bidimensionais.

Experimentos computacionais são feitos para a validação dos resultados encontrados e modelos aqui propostos.

Sumário

Introdução	1
1 Revisitando os modelos clássicos	3
1.1 Introdução	3
1.2 Dinâmica Populacional para espécie isolada	3
1.2.1 Modelo de Malthus	6
1.2.2 Modelo de Verhulst	7
1.2.3 Modelo de Montroll	8
1.3 Modelos para interação entre espécies	9
1.3.1 Modelo <i>presa-predador</i> de Lotka-Volterra	12
1.3.2 Modelo <i>presa-predador</i> de Holling-Tanner	15
1.3.3 Equações de Volterra: competição, presa-predador e mutualismo	18
1.3.4 Mudança no modo de interação - modelo de Hernandez-Barradas	21
1.3.5 Modelo de Kolmogorov	24
1.4 Modelos discretos para dinâmica populacional	26
1.4.1 Modelo Logístico discreto	28
1.4.2 O Modelo de Nicholson-Bailey	29
2 Problemas de valor inicial fuzzy	32
2.1 Introdução	32
2.2 Extensão do campo determinístico	35
2.3 Extensão do fluxo determinístico	37
3 Sistemas p-fuzzy	46
3.1 Introdução	46
3.2 Sistemas p-fuzzy	47
3.3 Sistemas p-fuzzy unidimensionais	50
3.4 Sistemas p-fuzzy bidimensionais	51
4 Dinâmica populacional com sistemas p-fuzzy.	59
4.1 Introdução	59
4.2 Base de regras para espécie isolada com crescimento inibido	61
4.3 Ajuste de parâmetros	65
4.4 Algoritmo para busca de estado de equilíbrio para sistemas p-fuzzy.	68
4.5 Modelo p-fuzzy para interações do tipo competição	72

4.6	Modelo p-fuzzy para interações do tipo <i>presa-predador</i>	75
4.7	Modelo p-fuzzy para interações do tipo mutualismo.	80
4.8	Modelo p-fuzzy para interações densidade-dependente	86
4.9	Ajuste de parâmetros: competição e mutualismo	89
Conclusões		91
Referências Bibliográficas		92

Introdução

As equações diferenciais e de diferenças determinísticas constituem uma poderosa ferramenta para a modelagem de fenômenos cujas variáveis de estados estão sujeitas às variações ao longo do tempo. Em particular, estas ferramentas têm sido usadas desde o século XIX para a investigação do crescimento e declínio de populações. Os modelos de Malthus (1798), Verhulst (1838) e Lotka-Volterra (1926), são considerados os pioneiros nesta área de aplicação.

No entanto, a modelagem de dinâmica populacional através de equações determinísticas está quase sempre incompleta devido à complexidade do fenômeno e incertezas envolvidas nos parâmetros e condição inicial do modelo.

O surgimento da teoria dos conjuntos fuzzy em 1965 por L. A. Zadeh ([24]), tem contribuído de maneira significativa para o desenvolvimento de novas ferramentas para a modelagem de fenômenos incertos. Dentre estas contribuições destacamos o tratamento das equações diferenciais com incerteza nos parâmetros e condição inicial (equações diferenciais fuzzy), primeiramente estudadas por Kaleva ([7]) e Seikkala ([21]).

Embora a modelagem através de equações diferenciais fuzzy seja capaz de comportar subjetividades inerentes aos parâmetros (*fuzzyness ambiental*) e condição inicial (*fuzzyness demográfica*) de modelos de dinâmica populacional, esta ferramenta não é aplicável à modelagem de fenômenos onde as relações entre variáveis de estado e variações são somente conhecidas parcialmente. Isto vem do fato de que os modelos formulados por meio de equações diferenciais fuzzy estão associados a modelos determinísticos.

A modelagem envolvendo incerteza tanto nos estados assumidos pelas variáveis e variações quanto na relação entre as mesmas, também pode ser feita através da teoria dos conjuntos fuzzy, mais precisamente por meio de controladores fuzzy.

O que propomos neste trabalho é a modelagem de dinâmica populacional dada por um processo iterativo onde a relação entre os estados das variáveis e suas respectivas variações são dadas através de controlador fuzzy do tipo Mamdani. Tais sistemas são denominados sistemas dinâmicos *p-fuzzy*.

Este trabalho está estruturado em quatro capítulos como se segue.

No primeiro capítulo, vamos rever alguns dos principais modelos determinísticos para dinâmica populacional de espécies isoladas e em interação, bem como apresentaremos alguns dos resultados mais importantes da teoria de estabilidade no sentido de Lyapunov para sistemas dinâmicos. Na seção 1.2, apresentaremos modelos contínuos de dinâmica populacional para espécies isoladas com a análise do comportamento da solução de cada modelo e sua respectiva solução. Os modelos contínuos para interação entre espécies serão analisados matematicamente na seção 1.3. Alguns modelos discretos também são analisados na seção 1.4.

No capítulo 2, abordaremos as equações diferenciais autônomas com incertezas nos parâmetros ou na condição inicial através da extensão de Zadeh do campo e fluxo determinístico. Apresentaremos também alguns resultados sobre o comportamento da solução fuzzy obtidos por ambas as metodologias. Na seção 2.3, mostraremos que se o fluxo determinístico admite um ciclo limite globalmente assintoticamente estável, então o suporte do fluxo fuzzy associado converge para o mesmo ciclo limite. São dados alguns exemplos de aplicações dos métodos desenvolvidos neste capítulo em modelos de dinâmica populacional.

Algumas definições e resultados importantes sobre sistemas p-fuzzy são dados no capítulo 3. Veremos que se os conjuntos fuzzy que definem os estados das variáveis envolvidas na modelagem satisfazem algumas condições, então o sistema p-fuzzy admite um único estado de equilíbrio.

No capítulo 4 são dadas aplicações dos sistemas p-fuzzy para modelagem de dinâmica populacional de espécies isoladas com crescimento inibido e para espécies em interações do tipo *competição*, *presa-predador*, *mutualismo* e interação com dependência da densidade populacional. Na seção 4.4 desenvolvemos um algoritmo para busca do estado de equilíbrio baseado na base de regras do sistema p-fuzzy bidimensional. Além disso, usaremos dados fornecidos pela base de regras por meio do controlador fuzzy para a estimativa de parâmetros de modelos determinísticos para espécies isoladas e de interações do tipo competição e mutualismo.

Capítulo 1

Revisitando os modelos clássicos

1.1 Introdução

A investigação do crescimento e declínio de populações é, historicamente, o mais antigo ramo da ecologia matemática ([3], [18]).

As equações de diferenças e diferenciais, desenvolvidas após o aparecimento do Cálculo Integral e diferencial no final do século XVII, sem dúvida têm contribuído para a modelagem de dinâmica populacional.

Neste capítulo vamos rever alguns dos principais modelos determinísticos, no contexto histórico, para dinâmica populacional de espécies isoladas e em interação. Algumas propriedades sobre o comportamento da solução de equações diferenciais e de diferenças também serão apresentados para auxiliar na análise matemática dos modelos aqui apresentados.

1.2 Dinâmica Populacional para espécie isolada

As mudanças quantitativas que ocorrem na população de uma determinada espécie são ocasionadas por três fatores: a natalidade, a mortalidade e a migração. Sendo assim, a variação de uma população $p = p(t)$ em relação ao tempo t , é determinada por

$$\frac{dp(t)}{dt} = \textit{natalidade} - \textit{mortalidade} + \textit{migração}. \quad (1.1)$$

O processo migratório não é levado em consideração se a população for tratada isoladamente. Se a natalidade e a mortalidade são dadas em função da população p , então a equação (1.1) pode ser reescrita como uma equação autônoma

$$\frac{dp(t)}{dt} = f(p) \quad (1.2)$$

onde $f(p)$ satisfaz $f(0) = 0$, isto é, se não há nenhum elemento na população então esta não varia, pois não pode haver natalidade ou mortalidade em uma população nula. Essa condição é indispensável pois ela coíbe o aparecimento espontâneo de indivíduos.

Se a função $f(p)$ é suficientemente suave para que possamos expressá-la como uma série polinomial (série de Taylor), então temos

$$f(p) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i. \quad (1.3)$$

Porém, como $f(0) = 0$, então o primeiro termo da série acima é nulo, $a_0 = 0$, o que nos permite reescrever a equação (1.2) como

$$\begin{aligned} \frac{dp(t)}{dt} &= p(a_1 + a_2 p^1 + a_3 p^2 + \dots) \\ &= p\lambda(p). \end{aligned} \quad (1.4)$$

A função $\lambda(p)$ é denominada *índice de crescimento relativo* uma vez que,

$$\lambda(p) = \frac{1}{p} \frac{dp(t)}{dt}$$

Considerando que no instante inicial $t = 0$ o número de indivíduos é $p(0) = p_0 > 0$, então temos um problema de valor inicial para a expressão (1.4)

$$\begin{cases} \frac{dp(t)}{dt} = p\lambda(p) \\ p(0) = p_0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Em geral, queremos determinar o comportamento da dinâmica populacional em um período de tempo. Sendo assim, é importante obter o maior número de informações do modelo que descreve a situação como, por exemplo, os estados de equilíbrios.

Definição 1.2.1. Dizemos que o ponto p^* é um estado de equilíbrio para a equação (1.2) quando $p'(t) = f(p^*) = 0$

Se consideramos a dinâmica de uma determinada população modelada conforme (1.2)

então, pela formula de Taylor, temos que, suficientemente próximo de p^* vale

$$\frac{dp}{dt} = f(p) \approx f(p^*) + f'(p^*)(p - p^*)$$

logo, como $f(p^*) = 0$, separando as variáveis obtemos

$$\frac{dp}{p - p^*} = f'(p^*)dt$$

que por integração no intervalo $[0, t]$ nos fornece

$$\ln \frac{|p(t) - p^*|}{|p_o - p^*|} = f'(p^*)t \iff |p(t) - p^*| = |p_o - p^*|e^{f'(p^*)t}$$

Assim, dependendo do sinal de $f'(p^*)$, a solução converge para o estado de equilíbrio p^* ou diverge de p^* . Dizemos então que o estado de equilíbrio é localmente:

1. assintoticamente estável quando $f'(p^*) < 0$;
2. instável quando $f'(p^*) > 0$.

Do ponto de vista de aplicação em biomatemática, os modelos com crescimento inibido são os mais utilizados. Estes modelos são caracterizados por possuirem um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, isto é, a população tende a se estabilizar. Matematicamente, isto significa que existe $k \neq 0$ tal que $\lambda(k) = 0$. Este valor é denominado *capacidade suporte*.

Os modelos com crescimento populacional inibido têm algumas características básicas:

1. O crescimento relativo $\lambda(p)$ é decrescente com relação a p e $\lambda(p) \rightarrow 0$ quando p tende à capacidade suporte k (figura 1.1a);
2. A variação absoluta é crescente no início e depois decresce tendendo a zero (figura 1.1b);
3. A variação é negativa se $p(t) > k$ (figura 1.1c).

Estas características serão essenciais para a formulação dos modelos subjetivos usando a teoria fuzzy.

A seguir, apresentaremos a formulação em termos de equações diferenciais e as soluções analíticas de alguns modelos de dinâmica para espécies isoladas. Estes modelos são bem conhecidos na literatura.

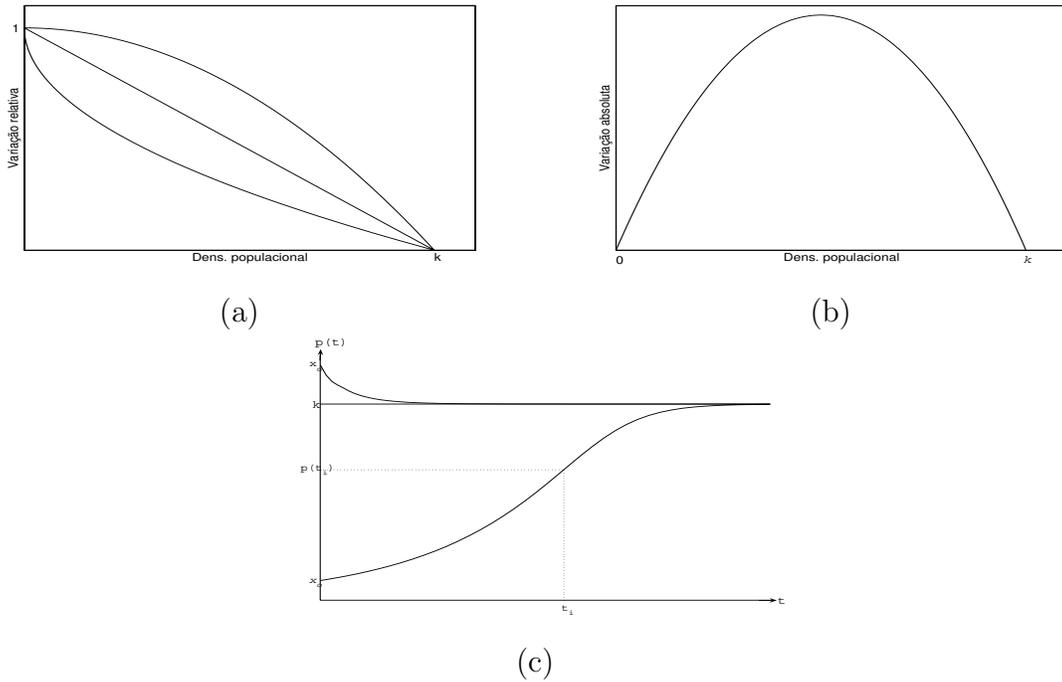


Figura 1.1: Gráficos para modelos inibidos; (a) - variações relativas; (b) - variação absoluta; (c) solução do modelo inibido.

1.2.1 Modelo de Malthus

Em 1798, o economista inglês T. Malthus publicou um artigo sobre o estudo do crescimento populacional humano que atualmente é conhecido como a primeira proposta de utilização da matemática na tentativa de avaliar a dinâmica populacional. Segundo Malthus, sob certas condições, a variação populacional ocorre à uma razão geométrica.

Embora Malthus não tenha formulado matematicamente, o atualmente conhecido como modelo de Malthus, em termos de equações diferenciais, é dado por:

$$\frac{dp(t)}{dt} = \lambda p(t). \quad (1.6)$$

onde λ é constante.

A equação diferencial (1.6) é um caso particular da equação geral (1.4) estabelecida na seção precedente como modelo de dinâmica populacional sem migração, onde o índice de crescimento relativo permanece constante ao longo do tempo.

Considerando $p(0) = p_0 > 0$, então temos um problema de valor inicial determinado pela equação (1.6) cuja solução

$$p(t) = p_0 e^{\lambda t} \quad (1.7)$$

é facilmente determinada por separação de variáveis e integração no intervalo $[0, t]$.

Biologicamente, as condições pressupostas neste modelo são ideais, o que não condiz com a realidade. No entanto, tal modelo serve como aproximação para problemas mais elaborados em intervalos de tempo relativamente curtos.

1.2.2 Modelo de Verhulst

Em 1838, Pierre F. Verhulst propôs um modelo de dinâmica populacional para uma espécie que leva em consideração a capacidade do ambiente suportar um número máximo de indivíduos, devido às limitações do espaço físico e disponibilidade de alimentos, ou seja, existe uma capacidade suporte para a população.

No modelo de Verhulst, a função de crescimento relativo é linear, decrescente com relação a $p(t)$ e tendendo a zero quando $p(t) \rightarrow k$. Isto é, a variação da população é menor quando o número de indivíduos se aproxima da capacidade suporte. Além disso, a variação populacional atinge seu valor máximo quando a população atinge a metade da capacidade suporte ($p(t_i) = k/2$), como podemos observar na equação (1.8) que é a formulação matemática do modelo de Verhulst.

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p \left(1 - \frac{p}{k} \right). \quad (1.8)$$

Na equação acima, também conhecida como equação logística, as constantes reais e positivas α e k são respectivamente, o índice intrínscico de crescimento e capacidade suporte.

A solução analítica para o problema de valor inicial determinado pela equação (1.8) com condição inicial $p(0) = p_o > 0$, é obtida através da separação de variáveis e integração no intervalo $[0, t]$, obtendo assim a expressão

$$\ln \left| \frac{p}{p_o} \right| - \ln \left| \frac{p - k}{p_o - k} \right| = \alpha t,$$

o que implica em

$$\ln \left| \frac{p(p_o - k)}{p_o(p - k)} \right| = \alpha t,$$

ou ainda,

$$\left| \frac{p_o(p - k)}{p(p_o - k)} \right| = e^{-\alpha t} \Rightarrow \frac{|p - k|}{|p|} = \frac{|p_o - k|}{|p_o|} e^{-\alpha t}.$$

Isolando $p(t)$ obtemos

$$p(t) = \frac{p_o k}{p_o + (k - p_o) e^{-\alpha t}}.$$

Como o termo exponencial no denominador tende a zero quando $t \rightarrow \infty$ então, independentemente da condição inicial $p(t) \rightarrow k$ quando $t \rightarrow \infty$, ou seja, o estado de estabilidade $p^* = k$ é assintoticamente estável.

1.2.3 Modelo de Montroll

O modelo de Montroll, proposto em 1971, pode ser considerado como a generalização do modelo de Verhulst. Neste modelo, a equação de crescimento relativo é decrescente com relação a $p(t)$, porém não necessariamente de forma linear como no modelo de Verhulst. A equação diferencial para o modelo de Montroll é:

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p \left[1 - \left(\frac{p}{k} \right)^\beta \right], \quad (1.9)$$

onde $k > 0$ é a capacidade suporte, α e β constantes reais positivas.

A diferença fundamental entre os modelos de Motroll e Verhulst está na posição do ponto de maior variação populacional. Enquanto na equação logística a variação máxima ocorre quando $p(t_i) = k/2$, no modelo de Montroll a variação máxima é atingida quando

$$p(t_i) = k \left(\frac{1}{1 + \beta} \right)^{\frac{1}{\beta}}$$

Dessa forma o ponto de inflexão de $p(t)$ pode ser alterado de acordo com a necessidade do problema, apenas modificando o valor de β . Para $\beta = 1$ temos o modelo de Verhulst.

O estado de equilíbrio não nulo no modelo de Montroll é $p^* = k$. Considerando $f(p)$ como a expressão à direita do sinal de igualdade na equação (1.9), então temos que

$$\left. \frac{df}{dp} \right|_{p^*} = -\alpha\beta < 0.$$

Consequentemente, o estado de equilíbrio $p^* = k$ é assintoticamente estável. Logo, podemos concluir que, independentemente da condição inicial, $p(t) \rightarrow k$ quando $t \rightarrow \infty$.

A solução do modelo de Montroll é dado por:

$$p(t) = \frac{p_o k}{[p_o^\beta + (k^\beta - p_o^\beta)e^{-\beta r t}]^{\frac{1}{\beta}}} \quad (1.10)$$

1.3 Modelos para interação entre espécies

Na natureza raramente são encontradas espécies isoladas conforme pressupomos na seção anterior. Geralmente as espécies em uma comunidade são encontradas interagindo de alguma forma, podendo essa interação ser prejudicial ou benéfica. Estas interações em geral, provocam alterações na dinâmica populacional dos indivíduos envolvidos. Dentre estas interações se destacam as interações do tipo *competição*, *presa-predador* e *mutualismo*.

É entendido como situação de *competição* quando o crescimento da população de uma das espécies envolvida na interação implica em decréscimo da população da segunda espécie. Isto geralmente ocorre quando duas espécies disputam os mesmos recursos naturais em um ambiente em comum. Este tipo de interação é prejudicial para ambas as espécies.

Quando o aumento no número de indivíduos de uma das espécies acarreta em aumento populacional à outra, porém o crescimento populacional da segunda espécie leva ao declínio populacional a primeira, então temos uma interação do tipo *presa-predador* (ou *parasita-hospedeiro* ou *planta-herbívoros*). Na interação *presa-predador* uma espécie é prejudicada (presa) e a outra é beneficiada (predador).

No caso em que ambas as espécies são beneficiadas pela interação ou seja, o crescimento populacional de uma espécie implica em crescimento da população da outra espécie e vice-versa, então temos uma interação denominada *mutualismo* ou *simbiose*.

Resumidamente, as interações descritas acima podem ser determinadas segundo a influência de cada espécie sobre a outra, isto é, se a interação é benéfica (+) ou prejudicial (-) para cada espécie, conforme a tabela abaixo:

interação	espécie 1	espécie 2
<i>competição</i>	-	-
<i>presa-predador</i>	+	-
<i>mutualismo</i>	+	+

Na formulação matemática de processos interativos, as características de cada interação são essenciais para a definição das funções de crescimento relativo que determinam a dinâmica populacional de cada espécie envolvida na interação. Entender o comportamento da dinâmica populacional é o principal objetivo da modelagem matemática de tais fenômenos.

Sendo assim, devido à dificuldade ou até mesmo impossibilidade de se obter soluções analíticas, desejamos estabelecer critérios que nos permitam avaliar qualitativamente as

soluções. Para isso, enunciaremos alguns conceitos e resultados básicos da teoria de estabilidade no sentido de Lyapunov.

Consideremos um sistema dinâmico bidimensional dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(x, y) \end{cases} \quad (1.11)$$

Definição 1.3.1. Um ponto (x^*, y^*) é denominado um estado de equilíbrio para (1.11) ou estado estacionário quando $f_1(x, y) = f_2(x, y) = 0$

O comportamento das trajetórias determinadas por $x(t)$ e $y(t)$ nas proximidades dos estados de equilíbrio são de particular interesse. Na definição a seguir, $d(a, b)$ é a métrica usual em \mathbb{R}^2 .

Definição 1.3.2. Seja $\mathbf{x}^* = (x^*, y^*)$ um ponto de equilíbrio e $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_o)$ a solução, com condição inicial $\mathbf{x}_o = (x_o, y_o)$, do sistema (1.11). Dizemos que \mathbf{x}^* é estável se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(\mathbf{x}_o, \mathbf{x}^*) < \delta \implies d(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_o), \mathbf{x}^*) < \varepsilon,$$

para todo $t \geq 0$. O estado de equilíbrio \mathbf{x}^* é assintoticamente estável quando é estável e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_o), \mathbf{x}^*) = 0.$$

O estado de equilíbrio é dito *instável* quando não for estável.

A análise de estabilidade local, no caso em que as funções $f_1(x, y)$ e $f_2(x, y)$ são não-lineares, é feita através dos autovalores da matriz jacobiana

$$\mathbf{J}_{(x^*, y^*)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x^*, y^*)}$$

Teorema 1.3.3 (linearização). Seja (x^*, y^*) um estado de equilíbrio para o sistema (1.11) e $\lambda_{1,2}$ autovalores da matriz jacobiana em (x^*, y^*) . Se $Re(\lambda_{1,2}) < 0$, então o estado de equilíbrio é localmente assintoticamente estável; se $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, o estado de equilíbrio é instável (ponto de sela); se $Re(\lambda_{1,2}) > 0$, o estado de equilíbrio é instável.

Demonstração. Consultar [20].

É importante observar que o teorema acima não permite conclusão quando os autovalores são imaginários puros (estados de equilíbrios não hiperbólicos, veja [20]). Observamos também, que a natureza do estado de equilíbrio é local, ou seja, as condições iniciais do sistema (1.11) devem estar suficientemente próximas de (x^*, y^*) para que as conclusões sejam garantidas. O teorema a seguir fornece resultados sobre o comportamento global da solução.

Teorema 1.3.4. *Seja $L(x, y)$ uma função de Lyapunov. O estado de equilíbrio (x^*, y^*) será:*

- (i) *estável quando $\nabla L(x, y) \cdot (f_1, f_2) \leq 0$ para todo x, y ;*
- (ii) *assintoticamente estável quando $\nabla L(x, y) \cdot (f_1, f_2) < 0$ para todo x, y ;*
- (iii) *instável quando $\nabla L(x, y) \cdot (f_1, f_2) > 0$ para todo x, y .*

Uma *função de Lyapunov* é uma função escalar não negativa, isto é, $L(x, y) > 0$ para todo $x \neq x^*$ e $y \neq y^*$, com derivadas parciais de primeira ordem contínuas. A local instabilidade de um estado de equilíbrio, abre o questionamento sobre o que acontece com a trajetória quando $t \rightarrow \infty$. Se as funções $x(t)$ e $y(t)$ são limitadas, é de se esperar que a trajetória não se afaste indefinidamente do estado de equilíbrio. Um dos principais resultados neste sentido é o *Teorema de Bendixson-Poincaré*.

Teorema 1.3.5 (Bendixson-Poincaré). *Se para $t \geq 0$ a trajetória $(x(t), y(t))$ do sistema (1.11) é limitada no plano- xy e não se aproxima de um estado de equilíbrio, então a trajetória $(x(t), y(t))$ é fechada ou se aproxima de uma trajetória fechada quando $t \rightarrow \infty$ (ciclo limite).*

É importante observar que se a trajetória $(x(t), y(t))$ é limitada, então temos um ciclo limite ou um estado de equilíbrio assintoticamente estável. Logo, análises de estabilidade locais são suficientes para garantir o comportamento global da solução.

Um critério de negação de existência de ciclos limite é denominado *critério de Dulac*

Teorema 1.3.6 (critério de Dulac). *Seja $\beta(x, y)$ continuamente diferenciável numa região simplesmente conexa $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^2$ e suponha que*

$$\frac{\partial(\beta f_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta f_2)}{\partial y}$$

seja estritamente positivo ou estritamente negativo em \mathbf{D} . Então não há trajetórias fechadas para o sistema (1.11).

A seguir, apresentaremos alguns dos principais modelos para interação entre espécies.

1.3.1 Modelo *presa-predador* de Lotka-Volterra

A primeira representação do comportamento de um sistema *presa-predador*, foi proposta por volta de 1926 pelo matemático italiano V. Volterra na tentativa de explicar o comportamento das populações de certas espécies de peixes no mar Adriático. Em 1925, o biofísico A. Lotka encontrou as mesmas equações em estudos sobre reações cinéticas.

O atualmente denominado modelo de Lotka-Volterra, leva em consideração as seguintes hipóteses:

1. na ausência de predadores a população de presas cresce de forma malthusiana;
2. na ausência de presas a população de predadores decresce proporcionalmente a sua população (malthusianamente);
3. o índice relativo de crescimento da população de presas diminui linearmente em relação à população de predadores;
4. o índice relatido de crescimento da população de predadores cresce linearmente com relação a população de presas.

Matematicamente estas informações estão sintetizadas no sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} = -by + \beta xy \end{cases} \quad (1.12)$$

onde $x = x(t)$ é a população de presas, $y = y(t)$ é população de predadores e a, b, α, β são constantes reais positivas.

A solução implícita para o sistema (1.12) é obtida eliminado o parâmetro t , obtendo

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x(a - \alpha y)}{y(-b + \beta x)}$$

que por separação de variáveis e integração permite relacionar as variáveis de estado:

$$y^a e^{-\alpha x} = cx^b e^{-\beta x},$$

onde c é uma constante univocamente determinada pela condição inicial (x_o, y_o) .

Os estados de equilíbrio do sistema (1.12) são dados pelo pela solução do sistema

$$\begin{cases} f_1(x, y) = ax - \alpha xy = 0 \\ f_2(x, y) = -by + \beta xy = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

os quais são $\mathbf{x}_1^* = (0, 0)$ e $\mathbf{x}_2^* = (b/\beta, a/\alpha)$.

A matriz jacobiana avaliada no estado de equilíbrio $(0, 0)$ é:

$$\mathbf{J}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}.$$

Como os autovalores de $\mathbf{J}_{(0,0)}$ possuem sinais diferentes, então pelo Teorema (1.3.3) o estado de equilíbrio $\mathbf{x}_1^* = (0, 0)$ é localmente instável (ponto de sela).

A matriz jacobiana em $(b/\beta, a/\alpha)$ é dada por:

$$\mathbf{J}_{(b/\beta, a/\alpha)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\alpha b}{\beta} \\ \frac{a\beta}{b} & 0 \end{bmatrix}$$

cujos autovalores são $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{ab}$. Como os autovalores de $\mathbf{J}_{(b/\beta, a/\alpha)}$ são imaginários puros, o Teorema 1.3.3 não fornece nenhum resultado quanto a natureza da estabilidade em $\mathbf{x}_2^* = (b/\beta, a/\alpha)$.

Podemos porém, analisar o comportamento global da solução do sistema (1.12) construindo uma função de Lyapunov conveniente, que neste caso é:

$$L(x, y) = x^* \left(\frac{x}{x^*} - \ln \frac{x}{x^*} - 1 \right) + \frac{a}{\beta} \left(\frac{y}{y^*} - \ln \frac{y}{y^*} - 1 \right)$$

onde (x^*, y^*) é o estado de equilíbrio não nulo. As derivadas parciais de $L(x, y)$ são:

$$\frac{\partial L(x, y)}{\partial x} = 1 - \frac{x^*}{x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial L(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{\beta} \left(\alpha - \frac{a}{y} \right).$$

Por cálculo direto é fácil verificar que $\nabla L(x, y) \cdot (f_1, f_2) = 0$. Logo, pelo Teorema 1.3.4, concluímos que a solução é estável, porém não assintoticamente estável.

Utilizando métodos numéricos para resolução de equações diferenciais, obtemos a solução para o sistema de Lotka-Volterra. As trajetórias determinadas por $x(t)$ e $y(t)$ no plano xy , são fechadas conforme observamos na figura 1.2 que representa a solução no plano de fase de $x(t)$ e $y(t)$, com distintas condições iniciais.

É importante observar que as funções $x(t)$ e $y(t)$ são periódicas e a amplitude aumenta conforme a condição inicial afasta-se do estado de equilíbrio $(b/\beta, a/\alpha)$.

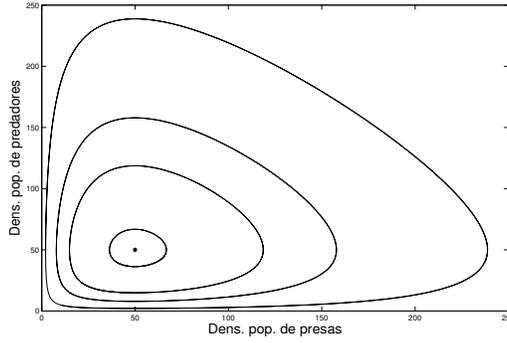


Figura 1.2: Soluções no plano de fase para o sistema (1.12) com $a = b = 0.05$, $\alpha = \beta = 0.001$ e condições iniciais $(10, 5)$, $(15, 15)$, $(20, 25)$, $(40, 40)$ e $(50, 50)$.

O modelo de Lotka-Volterra é muito criticado por ser um sistema conservativo ([16]), o que é uma idealização tornado-o menos realístico. Embora oscilações sejam inerentes à populações em processo interativos do tipo *presa-predador*, o modelo de Lotka-Volterra no entanto, não é apropriado para descrever o comportamento da dinâmica destas interações ([3]). Pois, sendo conservativo, a amplitude das oscilações estão sujeitas às condições iniciais, o que naturalmente não é observável. Assim, pequenas flutuações na condição inicial do sistema, provoca alterações que serão mantidas ao longo do tempo. Além disso, este modelo é estruturalmente instável, uma vez que, se acrescentarmos uma capacidade suporte para a população de presas, o estado de equilíbrio não nulo torna-se assintoticamente estável.

Na tentativa de contornar o problema acima exposto, algumas alterações têm sido propostas para o modelo de Lotka-Volterra. Quando não há competição interespecífica na população de predadores, a generalização do modelo de Lotka-Volterra é dado pelo sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = g(x)x - p(x)y \\ \frac{dy}{dt} = q(x)y \end{cases} \quad (1.14)$$

onde $g(x)$ é uma função que determina a capacidade suporte das presas; $p(x)$ é a resposta funcional; $q(x)$ é a função de crescimento relativo para os predadores.

Algumas hipóteses que determinam as condições de uma interação *presa-predador* são necessárias às funções g , p e q :

1. $g'(x) < 0$; $g(0) > 0 > g(\infty)$. Na ausência de predadores a população de presas não cresce indefinidamente. A capacidade suporte é um valor k tal que $g(k) = 0$;

2. $p(x) > 0$ para $x > 0$ e $p(0) = 0$. De modo geral a *resposta funcional* é limitada, ou seja, a capacidade de ataque dos predadores é limitada ([3], [16]);
3. $q'(x) > 0$; $q(0) < 0 < q(\infty)$. O índice de crescimento populacional de predadores é crescente com relação á população de presas.

No que se segue, temos algumas funções que satisfazem as condições expostas acima ([3]).

1. *Capacidade Suporte*: substituição do parâmetro a em (1.12)

- (a) $g(x) = r(1 - \frac{x}{k})$ Pielou (1969);
- (b) $g(x) = r[(\frac{k}{x})^{-s} - 1]$ ($1 \geq s > 0$) Rosenzweig (1971);
- (c) $g(x) = r(\frac{k}{x} - 1)$ Schoener (1973).

2. *Resposta funcional*: substituição do termo bx em (1.12)

- (a) $p(x) = m(1 - e^{-cx})$ Ivlev (1961);
- (b) $p(x) = \frac{mx^2}{x^2+d^2}$ Takahashi (1964);
- (c) $p(x) = \frac{mx}{x+d}$ Holling (1965);
- (d) $p(x) = mx^s$ ($1 \geq s > 0$) Rosenzweig (1971).

1.3.2 Modelo *presa-predador* de Holling-Tanner

O modelo para interação de espécies conhecido como modelo *presa-predador* de Holling-Tanner, apresenta algumas características que o torna um pouco mais realístico do que o modelo de Lotka-Volterra. Além de apresentar uma capacidade suporte para a população de presas, a resposta funcional usada no modelo de Holling-Tanner, é baseado no modelo de Michaelis-Mentem para concentrações de substâncias em reações enzimáticas. O modelo de Holling-Tanner apresenta ainda uma capacidade suporte para a população de predadores, que é proporcional à população de presas em cada instante (modelo de Leslie-Gower).

O modelo Holling-Tanner é determinado pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{mxy}{x+d} \\ \frac{dy}{dt} = \alpha y\left(1 - \frac{\beta y}{x}\right), \end{cases} \quad (1.15)$$

onde α , β , d , k e r são constantes reais positivas.

O sistema *presa-predador* (1.15) tem as seguintes características:

1. Na ausência de predador, a dinâmica populacional das presas segue o modelo logístico com capacidade suporte k e razão intrínseca r .
2. a constante m é o número máximo de presas que podem ser capturadas pelo predador por unidade de tempo;
3. O parâmetro d , está relacionado com a capacidade da presa evitar a predação. Quanto maior a capacidade da presa de evitar o ataque dos predadores, maior é o valor de d . Isto é evidente pois, se mantivermos os demais parâmetros constantes, quanto maior for d , menor será a influência do predador sobre a população de presas;
4. A população de predadores cresce logisticamente com razão intrínseca α e capacidade suporte proporcional à população de presas. Quanto maior se torna a razão $y(t)/x(t)$, menor é o número de presas disponíveis para cada predador e, conseqüentemente, o crescimento populacional dos predadores diminui;
5. β é a quantidade de presas necessárias para alimentar um predador quando as populações encontram-se no estado de equilíbrio não nulo.

O modelo de Holling-Tanner é estruturalmente instável, uma vez que o comportamento da solução depende dos valores dos parâmetros como veremos a seguir.

Se denotarmos a capacidade suporte e a resposta funcional, respectivamente, por:

$$g(x) = r\left(1 - \frac{x}{k}\right) \quad \text{e} \quad p(x) = \frac{mx}{x+d},$$

então as isóclinas para presas e predadores do sistema (1.15) são dadas por

$$h_1(x) = \frac{xg(x)}{p(x)} \quad \text{e} \quad h_2(x) = \frac{x}{\beta}.$$

Os estados de equilíbrio do sistema são: $(0, 0)$, $(k, 0)$ e a raiz positiva da equação

$$x^2 + \left(d - k + \frac{km}{\beta r}\right)x - kd = 0. \quad (1.16)$$

Para os dois primeiros estados de equilíbrio, as matrizes jacobianas são, respectivamente

$$\mathbf{J}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_{(k,0)} = \begin{bmatrix} kg'(k) & p(k) \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Como os autovalores de $\mathbf{J}_{(0,0)}$ são positivos, então o ponto $(0,0)$ é instável. Já o estado de equilíbrio $(k,0)$ é um ponto de sela, uma vez que, $g'(k) < 0$ e, portanto, temos autovalores com sinais diferentes.

Consideremos o estado de equilíbrio (x^*, y^*) , onde x^* é a raiz positiva da equação (1.16) e $y^* = x^*/\beta$. Para este ponto, a matriz jacobiana é:

$$\mathbf{J}_{(x^*, y^*)} = \begin{bmatrix} p(x^*)h_1'(x^*) & -p(x^*) \\ \frac{\alpha}{\beta} & -\alpha \end{bmatrix}$$

Os autovalores de $\mathbf{J}_{(x^*, y^*)}$ são determinados pela equação

$$\lambda^2 + (\alpha - p(x^*)h_1'(x^*))\lambda + \alpha p(x^*)\left(\frac{1}{\beta} - h_1'(x^*)\right) = 0$$

Portanto, segundo o Teorema 1.3.3, o estado de equilíbrio (x^*, y^*) é assintoticamente estável quando

$$\alpha - p(x^*)h_1'(x^*) > 0 \quad e \quad \frac{1}{\beta} - h_1'(x^*) > 0 \quad (1.17)$$

No entanto, a segunda condição é sempre satisfeita, uma vez que valem as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} - h_1'(x^*) &= \frac{y^*}{x^*} - \frac{r}{km}(-2x^* + k - d) \\ &= \frac{1}{x^*} \left[y^* - \frac{r}{km}(-2x^* + k - d)x^* \right] \\ &= \frac{r}{x^*km} \left[(k - x^*)(d + x^*) + 2(x^*)^2 - kx^* + dx^* \right] \\ &= \frac{r}{x^*km} \left[kd + (x^*)^2 \right] > 0 \end{aligned}$$

Podemos verificar a partir dessas condições que se x^* é maior que o ponto de máximo de $h_1(x)$, isto é,

$$x^* > \frac{k - d}{2},$$

então o ponto (x^*, y^*) é assintoticamente estável, uma vez que nesse caso, $h_1'(x^*) < 0$ e então, a primeira condição de (1.17) também é satisfeita. Devemos ressaltar que a análise de estabilidade apresentada aqui para o estado (x^*, y^*) é local. No entanto, a validade global é garantida pelo teorema de Bendixson-Poincaré, conforme veremos abaixo.

A função $x(t)$ é limitada pela capacidade suporte das presas ou pela condição inicial x_o .

De fato, supondo que exista t_o tal que $x(t_o) > m = \max\{x_o, k\}$ então, pela continuidade, $x(t)$ assume um máximo no intervalo $[0, t_o]$, ou seja, existe $t_1 \in [0, t_o]$ tal que $x(t_1) \geq x(t_o)$; se $t_1 \in (0, t_o)$, então $x'(t_1) = 0$; se o máximo for atingido em t_o , então $x'_-(t_o) \geq 0$, de modo que temos um absurdo em ambos os casos já que, se $x(t) > k$ temos $x'(t) < 0$. Por outro lado, se $t_1 = 0$ então temos que $x(0) = x_o \geq x(t_o) > x_o$, outro absurdo; portanto, $x(t) \leq m$. Com raciocínio análogo, concluímos que $y(t) \leq \max\{k/\beta, y_o\}$.

O fato de $x(t)$ e $y(t)$ serem limitadas, permite existência de ciclos limites estáveis quando as condições de estabilidade do estado de equilíbrio (x^*, y^*) não são satisfeitas. Isto quer dizer que as trajetórias no plano de fase converge para uma curva fechada, cuja amplitude e posição dependem somente dos coeficientes. As figuras (1.3) (a) e (b), são os planos de fase para a solução do sistema (1.15) para os casos em que há estabilidade assintótica e ciclo limite estável.

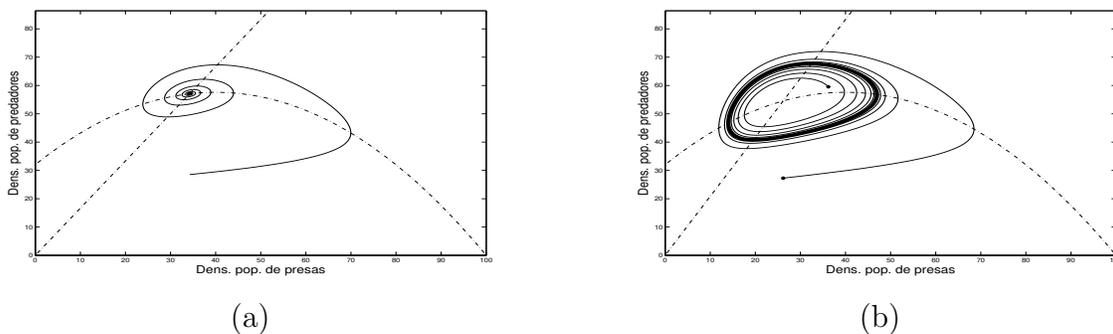


Figura 1.3: Plano de fase para o sistema (1.15). (a) parâmetros: $\alpha = 0.01$; $\beta = 0.48$; $d = 20$; $k = 100$; $m = 0.05$; $r = 0.01$. (b) $\beta = 0.4$; demais parâmetros como em (a).

1.3.3 Equações de Volterra: competição, presa-predador e mutualismo

Consideremos uma interação *facultativa* entre duas espécies, isto é, ambas as espécies sobrevivem quando a interação não ocorre.

Um modelo matemático que descreve essa situação, pode ser dado pelo sistema de equações autônomas

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r_1 x \frac{k_1 - x - \beta_{12} y}{k_1} \\ \frac{dy}{dt} = r_2 y \frac{k_2 - y - \beta_{21} x}{k_2}, \end{cases} \quad (1.18)$$

também conhecidas com equações de Volterra, onde $x(t)$ e $y(t)$ denotam as densidades

populacionais da espécie 1 e 2 respectivamente; $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ são os índices intrínscio de crescimento. Na ausência da espécie 1, segue diretamente do sistema (1.18) que a espécie 2 cresce logisticamente para k_2 . Analogamente, na ausência da espécie 2 a espécie 1 se estabiliza em k_1 . Portanto, $k_1 > 0$ e $k_2 > 0$ são as capacidades suporte para as espécies 1 e 2.

Os parâmetros β_{12} e β_{21} , são responsáveis pela determinação da natureza da interação que o sistema (1.18) está modelando. No caso de serem ambos positivos, a interação é do tipo *competição*, enquanto que se possuem sinais contrários então a interação modelada é do tipo *presa-predador*. Neste caso, a equação cujo parâmetro é positivo, representa a dinâmica populacional das presas. Por outro lado, se ambos os parâmetros são negativos, as equações modelam um interação de *mutualismo*.

O sistema (1.18) admite como estados de equilíbrio as soluções do sistema não-linear

$$\begin{cases} x(k_1 - x - \beta_{12}y) = 0 \\ y(k_2 - y - \beta_{21}x) = 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

cujas soluções são: $(0, 0)$, $(k_1, 0)$, $(0, k_2)$ e

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{\beta_{12}k_2 - k_1}{\beta_{12}\beta_{21} - 1}, \frac{\beta_{21}k_1 - k_2}{\beta_{12}\beta_{21} - 1} \right)$$

caso $\beta_{12}\beta_{21} \neq 1$, o que é biologicamente viável, somente se o numerador possuir o mesmo sinal do denominador.

As matrizes jacobianas em cada um dos estados de equilíbrio são:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{(0,0)} &= \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}; & \mathbf{J}_{(k_1,0)} &= \begin{bmatrix} -r_1 & r_1\beta_{12} \\ 0 & r_2(1 - \frac{\beta_{21}k_1}{k_2}) \end{bmatrix}; \\ \mathbf{J}_{(0,k_2)} &= \begin{bmatrix} r_1(1 - \frac{\beta_{12}k_2}{k_1}) & 0 \\ r_2\beta_{21} & -r_2 \end{bmatrix}; & \mathbf{J}_{(x^*,y^*)} &= \begin{bmatrix} \frac{-r_1}{k_1}x^* & \frac{r_1}{k_1}\beta_{12}x^* \\ \frac{r_2}{k_2}\beta_{21}y^* & -\frac{r_2}{k_2}y^* \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

O estado de equilíbrio $(0, 0)$ é instável, pois os autovalores de $\mathbf{J}_{(0,0)}$ são positivos. Para o ponto $(k_1, 0)$ temos que:

1. se $\beta_{21}k_1 > k_2$ então $(k_1, 0)$ é assintoticamente estável;
2. se $\beta_{21}k_1 < k_2$ então $(k_1, 0)$ é instável.

De modo análogo, concluímos que o estado se equilíbrio $(0, k_2)$ é:

1. assintoticamente estável quando $\beta_{12}k_2 > k_1$;

2. instável quando $\beta_{12}k_2 < k_1$.

Os autovalores de $\mathbf{J}_{(x^*, y^*)}$ são as raízes da equação

$$\lambda^2 + (ax^* + by^*)\lambda + (1 - \beta_{12}\beta_{21})abx^*y^* = 0 \quad a > 0, b > 0.$$

Pelo Teorema (1.3.3), (x^*, y^*) é:

1. instável (ponto de sela) quando $\beta_{12}\beta_{21} > 1$, pois o produto dos autovalores é negativo;
2. assintoticamente estável quando $\beta_{12}\beta_{21} < 1$; neste caso, os autovalores possuem o mesmo sinal e como $\lambda_1 + \lambda_2 = -(ax^* + dy^*) < 0$, então $\lambda_{1,2} < 0$.

Das análises de estabilidades feitas anteriormente concluímos que:

1. quando a interação é do tipo *competição* (β_{12} e β_{21} positivos), a instabilidade (estabilidade) do estado de equilíbrio (x^*, y^*) implica em estabilidade assintótica (instabilidade) de $(k_1, 0)$ e $(k_2, 0)$. É possível também, que apenas um dos pontos $(k_1, 0)$ ou $(0, k_2)$, seja assintoticamente estável; isto somente ocorre quando o ponto (x^*, y^*) não é biologicamente viável. Do ponto de vista biológico, as condições para coexistência das espécies significa que a interação é menos intensa, ou seja, a competição é fraca; por outro lado, quando a competição é forte, uma das espécies é extinta (*princípio da exclusão competitiva*);
2. se a interação é do tipo *presa-predador* (β_{12} e β_{21} com sinais contrários), então o ponto biologicamente viável (x^*, y^*) sempre será assintoticamente estável, já que $\beta_{12}\beta_{21} < 0 < 1$;
3. para o caso em que a interação é do tipo *mutualismo* (β_{12} e β_{21} negativos), as condições de estabilidade assintótica para os pontos $(k_1, 0)$ e $(0, k_2)$ nunca são satisfeitas. Já o ponto biologicamente viável (x^*, y^*) pode ser tanto assintoticamente estável quanto instável. Embora cada espécie apresente competição interespecífica, quando o ponto biologicamente viável (x^*, y^*) é instável, o efeito da interação é maior, de modo que as soluções crescem indefinidamente e isto não é biologicamente aceitável.

Aplicando o critério de Dulac com $\beta(x, y) = 1/xy$ no sistema (1.18), obtemos

$$\frac{\partial(\beta(x, y)f_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta(x, y)f_2)}{\partial y} = -\frac{r_1}{k_1y} - \frac{r_2}{k_2x} < 0$$

para todo $x > 0$ e $y > 0$. Portanto, as soluções não apresentam periodicidade.

Concluimos com raciocínio análogo ao apresentado no modelo de Holling-Tanner que, quando a interação é do tipo *competição* ou *presa-predador* as funções $x(t)$ e $y(t)$ do sistema (1.18) são limitadas. Segue então do teorema de Bendixson-Poincaré, que as trajetórias são periódicas ou convergem para um estado de equilíbrio. Porém, o critério de Dulac exclui as soluções periódicas. Logo, as análises locais são suficientes para estabelecer o comportamento global das soluções.

1.3.4 Mudança no modo de interação - modelo de Hernandez-Barradas

A natureza da interação entre duas espécies pode depender de vários fatores como, por exemplo, a densidade populacional ou condições ambientais. Recentemente, foi apresentado por Hernandez em [5] e [6] um modelo de interação entre espécies capaz de alterar o modo da interação.

Consideremos duas espécies, i e j , interagindo segundo o sistema de equações de Volterra

$$\frac{dx_i}{dt} = r_i x_i \frac{k_i - x_i + \alpha_{ij} x_j}{k_i}. \quad (1.20)$$

Suponhamos que a interação é benéfica para a espécie i quando a densidade populacional da espécie j é baixa, porém, prejudicial quando x_j é alto. Neste caso, o coeficiente de interação α_{ij} não pode ser constante, mas sim uma função da densidade populacional da espécie j ; com valores positivos quando x_j é baixo e negativos quando x_j é alto.

Um modelo geral para α_{ij} que apresenta este comportamento é:

$$\alpha_{ij} = \frac{b_i x_j - x_j^2}{1 + c_i x_j^2}$$

com b_i e c_i constantes reais positivas.

Substituindo α_{ij} na equação (1.20), obtemos o sistema de interação entre duas espécies

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = r_1 x_1 \left[1 - \frac{x_1}{k_1} + \left(\frac{b_1 x_2 - x_2^2}{1 + c_1 x_2^2} \right) \frac{x_2}{k_1} \right] \\ \frac{dx_2}{dt} = r_2 x_2 \left[1 - \frac{x_2}{k_2} + \left(\frac{b_2 x_1 - x_1^2}{1 + c_2 x_1^2} \right) \frac{x_1}{k_2} \right], \end{cases} \quad (1.21)$$

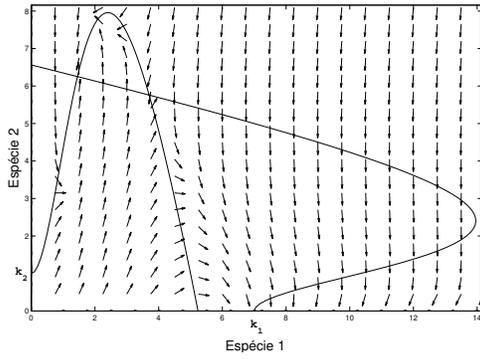
em que para baixas densidades a interação é do tipo mutualismo; para altas densidades, no entanto, a interação é do tipo competição.

Denotando por x_j^c o ponto de intersecção da isóclina $x_j'(t) = 0$ com o eixo x_i , as características do sistema quanto aos estados de equilíbrio podem ser:

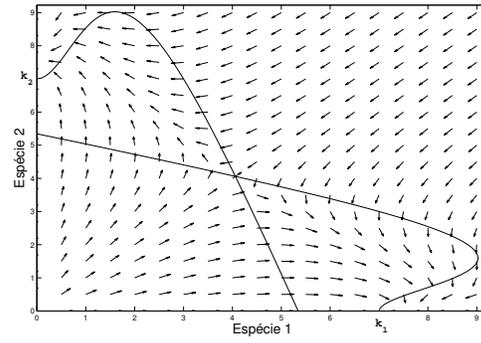
1. se ambos $k_i < x_j^c$ o sistema apresenta ao menos um estado de equilíbrio assintoticamente estável onde as espécies coexistem, podendo ter mais um ou dois pares de estados instável-estável. Os pontos $(k_1, 0)$ e $(0, k_2)$ são instáveis (figuras 1.5(a-b) e 1.6);
2. se algum $k_i > x_j^c$ pode existir um par de estados de equilíbrio instável-estável, onde as espécies coexistem. O estado de equilíbrio, $(k_1, 0)$ ou $(0, k_2)$, onde $k_i > x_j^c$ é assintoticamente estável (figura 1.4a);
3. se ambos $k_i > x_j^c$, então não há estado de equilíbrio estável onde as espécies coexistam. Ambos os estados de equilíbrio $(k_1, 0)$ e $(0, k_2)$ são assintoticamente estáveis (figura 1.4b).

Algumas observações são importantes sobre os parâmetros da função α_{ij} . Por exemplo, quanto maior for o valor de b_i , maior deve ser a densidade populacional de espécie j para que a interação seja prejudicial para a espécie i ; é esperado, portanto, que se a interação é prejudicial para i em baixas densidades de j o valor de b_i seja pequeno. Por outro lado, um aumento em c_i acarreta em diminuição no valor absoluto de a_{ij} . Portanto, para espécies onde a interação é menos sensível, é de se esperar que c_i seja alto. Como observamos, os parâmetros de α_{ij} alteram o modo de interação entre as espécies e, portanto, estes parâmetros são intrínsecos da interação.

A convergência da solução do sistema (1.21) para os estados de equilíbrio, depende das densidades populacionais das espécies i e j . No caso de haver dois estados de equilíbrio estáveis, as espécies podem coexistir em *mutualismo*, *presa-predador* ou ambas as interações. A figura 1.5(a), apresenta dois estados de equilíbrio estáveis, onde as espécies coexistem em *mutualismo*, em ambos os estados. Já na figura 1.5(b), um dos estados estáveis a coexistência é no modo *presa-predador*, enquanto no outro a interação é *mutualismo*. As espécies podem coexistir também em interação *presa-predador* em ambos os estados de equilíbrio. Neste caso, a espécie predadora em um estado de equilíbrio é a presa no outro ponto conforme podemos, observar na figura 1.5(b).

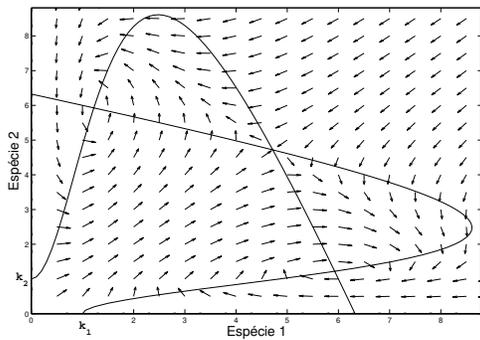


(a)

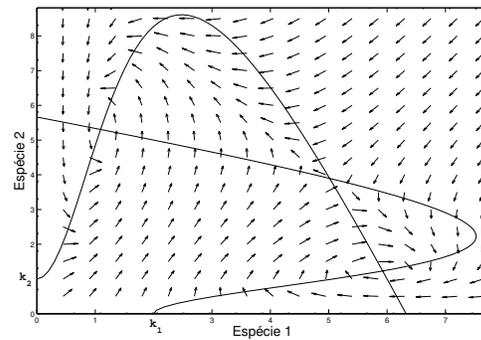


(b)

Figura 1.4: Campo de variações para o sistema 1.21. (a) Parâmetros $r_1 = r_2 = 0.1$; $k_1 = 7$ e $k_2 = 1$; $b_1 = b_2 = 5$; $c_1 = c_2 = 0.2$. (b) $r_1 = r_2 = 0.1$; $k_1 = k_2 = 7$; $c_1 = c_2 = 0.3$; $b_1 = b_2 = 3$.



(a)



(b)

Figura 1.5: Campo de variações para o sistema 1.21. (a) $r_1 = r_2 = 0.1$; $k_1 = k_2 = 1$; $c_1 = c_2 = 0.3$; $b_1 = b_2 = 6$; estados de equilíbrio estáveis: $(1.22, 5.93)$ e $(5.93, 1.23)$; ambos os estados em *mutualismo*. (b) $r_1 = r_2 = 0.1$; $k_1 = 2$ e $k_2 = 1$; $b_1 = 5$ e $b_2 = 6$; $c_1 = 0.3$; $c_2 = 0.4$; ; estados estáveis: $(5.92, 1.23)$ coexistência em *mutualismo*; $(1.09, 5.92)$ coexistência em *presa-predador*.

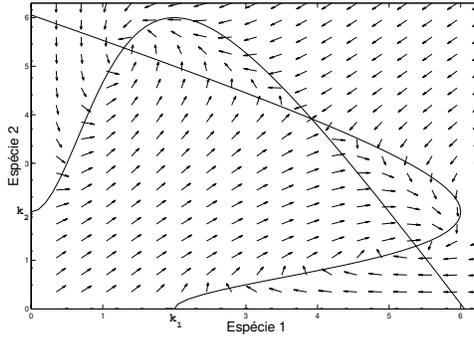


Figura 1.6: Campo de variações para o sistema (1.21). Parâmetros: $r_1 = r_2 = 0.1$; $k_1 = k_2 = 2$; $b_1 = b_2 = 5$; $c_1 = c_2 = 0.5$ estados de equilíbrio estáveis: $(5.38, 1.29)$ e $(1.29, 5.38)$; coexistência em *presa-predador* em ambos os pontos.

É importante ressaltar que na definição da função α_{ij} são utilizados termos subjetivos como *baixo* e *alto*, sendo assim possível a modelagem através de teoria fuzzy, como veremos no capítulo 4.

1.3.5 Modelo de Kolmogorov

Suponhamos que em um sistema interativo, as variações dependam somente das densidades populacionais das espécies em cada instante de tempo. Então, um modelo geral pode ser dado pelo sistema de equações autônomas

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xf(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = yg(x, y), \end{cases} \quad (1.22)$$

onde as características das interações determinam o comportamento das funções f e g . O sistema (1.22) foi proposto por A. N. Kolmogorov em 1936 (veja [3])

Se a interação considerada é do tipo *competição*, então ambas as espécies são prejudicadas, o que matematicamente pode ser representado por:

$$\frac{\partial f}{\partial y} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial x} < 0.$$

Supondo que a interação é *presa-predador*, então uma espécie é prejudicada e a outra

beneficiada. Neste caso as funções satisfazem

$$\frac{\partial f}{\partial y} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial x} > 0.$$

Quando ambas as espécies são beneficiadas pela interação, ou seja, interação é do tipo *mutualismo*, então temos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial x} > 0.$$

Como no início desta seção, as características das funções f e g com relações às densidades populacionais $y(t)$ e $x(t)$ respectivamente, podem ser resumidas na seguinte tabela:

interação	$\partial f/\partial y$	$\partial g/\partial x$
<i>competição</i>	-	-
<i>presa-predador</i>	+	-
<i>mutualismo</i>	+	+

Quando a competição interespecífica é levada em consideração, então as funções f e g devem ser decrescentes com relação à $x(t)$ e $y(t)$, pelo menos quando as densidades populacionais são altas. Isto significa que

$$\frac{\partial f}{\partial x} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial y} < 0. \tag{1.23}$$

Além disso, quando a interação é facultativa para alguma espécie, então é razoável pensar que existe uma capacidade suporte para tal. No caso de ser facultativa para ambas as espécies, devem existir $k_1 > 0$ e $k_2 > 0$ tais que $f(k_1, 0) = 0$ e $g(0, k_2) = 0$.

Pelo critério de Dulac, se as funções f e g satisfazem (1.23) para todo x e y respectivamente, então a órbita determinada por $(x(t), y(t))$ não converge para um ciclo limite. De fato, tomando $\beta(x, y) = 1/xy$ temos:

$$\frac{\partial(\beta(x, y)xf(x, y))}{\partial x} + \frac{\partial(\beta(x, y)yg(x, y))}{\partial y} = \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{x} \frac{\partial g}{\partial y} < 0.$$

Se as funções $x(t)$ e $y(t)$ são limitadas, então o teorema de Bendixson-Poincaré garante a existência de ciclo limite ou ponto de equilíbrio estável. Porém, como o resultado acima não permite soluções periódicas, a análise local é suficiente para determinar o comportamento global da solução.

Para a interação do tipo *presa-predador*, Kolmogorov estabeleceu condições para que as soluções $x(t)$ e $y(t)$ sejam oscilatórias como veremos no próximo teorema.

Teorema 1.3.7 (Kolmogorov). *Para um sistema dinâmico como (1.22), suponhamos que as funções f e g satisfaçam as seguintes condições:*

1. $\frac{\partial f}{\partial y} < 0$;
2. $\frac{\partial g}{\partial x} > 0$;
3. para algum $y_1 > 0$, $f(0, y_1) = 0$;
4. para algum $x_1 > 0$, $g(x_1, 0) = 0$;
5. existe \bar{x}_2 tal que $f(\bar{x}_2, 0) = 0$
6. $\frac{\partial f}{\partial x} < 0$ para x grande (equivalentemente, $\bar{x}_2 > x_1$), porém para x pequeno, $\frac{\partial f}{\partial x} > 0$;
7. $\frac{\partial g}{\partial y} < 0$;
8. existe um estado de equilíbrio positivo (x^*, y^*) instável;

Então existe um ciclo limite estritamente positivo.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [2].

As duas primeiras condições do teorema garantem que a interação modelada pelo sistema (1.22) é do tipo *presa-predador*. Biologicamente, a terceira condição significa que existe um valor de densidade populacional de predadores que evita o crescimento das presas quando sua densidade populacional é baixa e, pelo quarto item, existe uma quantidade mínima de presas necessária para o crescimento populacional dos predadores. Isto significa que a interação é obrigatória aos predadores.

Das condições exigidas pelos itens 5, 6 e 7, concluímos que existe uma capacidade suporte para a população de presas e que os predadores competem entre si na busca pela presa. A condição 8 é necessária para a existência de ciclo limite pelo teorema de *Bendixson-Poincaré*.

1.4 Modelos discretos para dinâmica populacional

Existem situações em que as equações de diferenças são mais apropriadas para uma modelagem do que as equações diferenciais. Nesta seção, analisaremos alguns modelos de dinâmica populacional discretos.

Uma equação de diferenças de ordem k tem a forma

$$x_t = f(x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-k}, t),$$

onde f é uma função linear ou não, cuja solução é uma sequência numérica $(x_t)_{t \in \mathbb{N}}$.

Na modelagem de dinâmica populacional, podemos considerar que os fatores ambientais permanecem inalterados em um intervalo de tempo. Além disso, podemos considerar também que a variação no número de indivíduos entre os instantes t e $t + 1$ depende somente da população no instante t . Portanto, a forma geral neste caso passa a ser

$$x_{t+1} = F(x_t) \quad \text{ou} \quad x_{t+1} = x_t f(x_t). \quad (1.24)$$

Por razões biológicas, é suposto que $f(x) > 0$ para todo $x > 0$ e $f(0) = 0$. As limitações nos recursos naturais exigem que $f(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \infty$.

Novamente, estamos interessados no que acontece com a sequência gerada por x_t , ou seja, se a solução da equação de diferenças é convergente ou divergente.

Exemplo 1.4.1. Modelo de Malthus discreto

Consideremos a equação de diferenças

$$x_{t+1} = r x_t. \quad (1.25)$$

Dada uma condição inicial x_o é possível determinar x_t em qualquer instante, pois neste caso, a solução é $x_t = r^t x_o$. Vemos que a sequência é crescente, tendendo ao infinito quando $r > 1$ e decrescente tendendo a zero quando $0 < r < 1$. Para $r < 0$ a solução converge oscilando para zero se $-1 < r < 0$ ou diverge de forma oscilatória se $r < -1$.

Um estado de equilíbrio ocorre quando não há variação que, no caso discreto, significa

$$x_{t+1} = x_t = x^* \quad \text{ou} \quad f(x_t) = 1$$

Analogamente ao caso contínuo, dizemos que um estado de equilíbrio é estável quando toda solução, partindo de valores suficientemente próximo de x^* , permanece suficientemente próximo de x^* . Além disso, se a solução converge para x^* então temos uma estabilidade assintótica. Por outro lado, se soluções como valores iniciais próximos de x^* afastam-se do estado de equilíbrio, então x^* é instável.

A expansão em série de Taylor de F em torno de x^* resulta em

$$x_{t+1} = x^* + F'(x^*)(x_t - x^*) \quad \text{ou} \quad y_{t+1} = F'(x^*)y_t.$$

Portanto:

1. x^* é assintoticamente estável se $|F'(x^*)| < 1$;
2. instável se $|F'(x^*)| > 1$.

As equações de diferenças também admitem a existência de comportamento caótico ou ciclos, isto é, a partir de um instante t_o , a solução torna-se periódica. Podem ainda admitir comportamento caótico, ou seja, não é possível prever o comportamento da solução a partir de uma da condição inicial ([8]).

Para o caso bidimensional, isto é, quando temos um sistema do tipo

$$\begin{cases} x_{t+1} = F(x_t, y_t) \\ y_{t+1} = G(x_t, y_t), \end{cases} \quad (1.26)$$

a análise de estabilidade dos estados de equilíbrio é feita através dos autovalores da matriz jacobiana $\mathbf{J}_{(x^*, y^*)}$. Neste caso, se $|Re(\lambda_{1,2})| < 1$, então o estado de equilíbrio é assintoticamente estável. Caso contrário o estado de equilíbrio é instável.

1.4.1 Modelo Logístico discreto

O modelo discreto análoga à equação logística (1.8) é dado pela equação de diferenças não-linear

$$x_{t+1} = x_t \left[1 + \alpha \left(1 - \frac{x_t}{k} \right) \right]. \quad (1.27)$$

Entretanto, se para algum t , x_t exceder $k(1+r)/r$ então $x_{t+1} < 0$ o que não faz sentido biologicamente.

Um modelo com comportamento parecido, porém sem a inconveniência apresentada acima, é o modelo proposto por May em 1975:

$$x_{t+1} = x_t \exp \{ r(1 - x_t/k) \}$$

com r e k sendo a razão de crescimento e k a capacidade suporte ([19]).

O estado de equilíbrio não nulo para o modelo de May é $x^* = k$. Como $F'(k) = 1 - r$, então o estado de equilíbrio $x^* = k$ é localmente:

1. Instável se $r < 0$ ou $r > 2$;
2. Assintoticamente estável se $0 < r < 2$.

Para $2 < r < 3.102$, o sistema apresenta 2^n -ciclos estáveis, enquanto que para $r > 3.102$, a solução se torna caótica ([22]).

1.4.2 O Modelo de Nicholson-Bailey

Sistemas de equações de diferenças são fundamentais na modelagem de interações envolvendo espécies que possuem ciclos de vida distintos, em particular em interações *parasita-hospedeiro*.

Os modelos para interações *parasita-hospedeiro*, têm em comum as seguintes hipóteses:

1. Os hospedeiros que foram parasitados darão origem à próxima geração de parasitas;
2. Os hospedeiros que não foram parasitados darão origem a outros hospedeiros;
3. A fração de hospedeiros parasitados depende do encontro entre as duas espécies. Em geral, esta fração depende de ambas as espécies.

Um dos primeiros modelos discretos para este tipo de interação, foi proposto em 1935 por A. J. Nicholson e V. A. Bailey (veja [3]). Considerando N_t e P_t as populações de hospedeiros e parasitas no instante t respectivamente, o modelo de Nicholson-Bailey é dado por:

$$\begin{cases} N_{t+1} = \lambda N_t e^{-aP_t} \\ P_{t+1} = cN_t(1 - e^{-aP_t}) \end{cases} \quad (1.28)$$

onde c é o número médio de novos parasitas gerados por hospedeiro, a é uma constante que determina a eficiência dos parasitas e λ é a razão de reprodução dos hospedeiros.

Neste modelo, a fração dos hospedeiros que não foram parasitados é representada por e^{-aP_t} ; conseqüentemente, $1 - e^{-aP_t}$ representa a fração dos hospedeiros parasitados.

Os estados de equilíbrio do modelo de Nicholson-Bailey são: $(0, 0)$ e (N^*, P^*) ,

$$N^* = \frac{\lambda \ln \lambda}{(\lambda - 1)ac} \quad \text{e} \quad P^* = \frac{\ln \lambda}{a},$$

com matriz jacobiana

$$\mathbf{J}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{J}_{(N^*,P^*)} = \begin{bmatrix} 1 & aN^* \\ c(1 - \frac{1}{\lambda}) & ca\frac{N^*}{\lambda} \end{bmatrix}.$$

Como (N^*, P^*) faz sentido biologicamente somente se $\lambda > 1$, então o estado de equilíbrio $(0, 0)$ é instável. O determinante de $\mathbf{J}_{(N^*,P^*)}$ é

$$ca\frac{N^*}{a} - caN^* \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\lambda \ln \lambda}{\lambda - 1} > 1$$

quando $\lambda > 1$ ([3]). Logo o estado (N^*, P^*) é instável. A figura (1.7) representa a solução para o modelo (1.28)

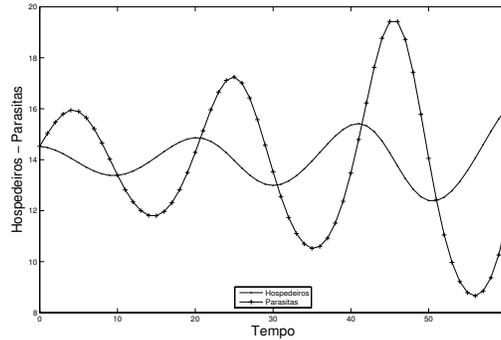


Figura 1.7: Gráfico do modelo de Nicholson-Bailey com $a = 0.0068$, $c = 11$, $\lambda = 1.1$ e $(N_o, P_o) = (14.52, 14.52)$; $(N^*, P^*) = (14.01, 14.01)$

Pelo fato das oscilações divergirem, o modelo de Nicholson-Bailey não é satisfatório para representar um sistema de interação entre espécies, em particular para um sistema *parasita-hospedeiro*. Os modelos mais adequados incorporam uma capacidade suporte para a população de hospedeiros. A forma geral para estes modelos é dada por:

$$\begin{cases} N_{t+1} = \lambda N_t f(N_t, P_t) \\ P_{t+1} = c N_t [1 - f(N_t, P_t)] \end{cases} \quad (1.29)$$

com $f(N_t, P_t)$ sendo a fração que representa os hospedeiros não parasitados.

Consideremos o caso particular de (1.29)

$$\begin{cases} N_{t+1} = N_t \exp \left[r \left(1 - \frac{N_t}{k} \right) - a P_t \right] \\ P_{t+1} = c N_t [1 - \exp(-a P_t)]. \end{cases} \quad (1.30)$$

Este modelo é uma modificação do modelo de Nicholson-Bailey, apresentando uma capacidade suporte para a população de hospedeiros.

Os estados de equilíbrio neste caso são:

1. $(0, 0)$, instável;
2. $(k, 0)$, instável;

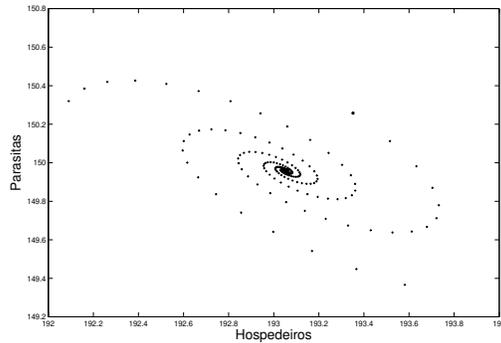
3. (N^*, P^*) , onde

$$P^* = \frac{r}{a} \left(1 - \frac{N^*}{k}\right)$$

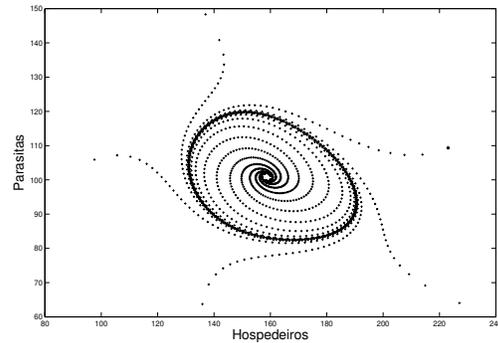
e N^* satisfaz

$$\frac{r}{aN^*} \left(1 - \frac{N^*}{k}\right) = 1 - \exp \left[-r \left(1 - \frac{N^*}{k}\right) \right],$$

cuja estabilidade depende de r e N^*/k ([16]).



(a)



(b)

Figura 1.8: Solução do sistema (1.30) no plano NP . Parâmetros: (a) $a = 0.01$, $r = 3.78$ e $k = 320$; (b) $r = 2$ e demais parâmetros como em (a)

As figuras (1.8) (a) e (b), são as trajetórias para o sistema (1.30). Na primeira, o estado de equilíbrio (N^*, P^*) é localmente estável. Na figura (1.8)b o estado de equilíbrio é localmente instável; porém, como N_t é limitada, temos um ciclo limite.

Capítulo 2

Problemas de valor inicial fuzzy

2.1 Introdução

Como vimos no capítulo anterior, os modelos de dinâmica populacional envolvem parâmetros que determinam as características ambientais, da espécie e até mesmo da interação, como por exemplo a capacidade suporte e o índice de crescimento relativo. De modo geral, estes parâmetros são obtidos através de observações e experimentos e portanto, estão sujeitos a imprecisões.

A principal características dos sistemas determinísticos é a precisão obtida pela solução. No entanto, esta precisão está comprometida quando os parâmetros envolvidos na formulação não são precisos o que, em geral, é o caso dos modelos para dinâmica populacional. Quando a subjetividade está na condição inicial, denominamos *fuzziness demográfica*, se a incerteza está nos parâmetros chamamos de *fuzziness ambiental*([1]).

Sendo assim, ferramentas que incorporam informações imprecisas são fundamentais para a modelagem. Em particular, a teoria dos conjuntos fuzzy é uma ferramenta que pode ser usada para modelagem de fenômenos envolvendo imprecisões e subjetividade.

Nesta seção, vamos fazer uso desta teoria para resolução de sistemas de equações diferenciais em que os parâmetros, a condição inicial ou ambos são incertos de tal modo que possam ser modelados por conjuntos fuzzy. Para isso, consideremos um sistema autônomo

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = \hat{x}_o \end{cases} \quad (2.1)$$

onde a condição inicial é imprecisa, isto é, $\hat{x}_o \in E^n$

Vamos abordar o sistema acima de duas maneiras distintas. Um delas, proposta por Seikkala ([21]), consiste em aplicar o princípio da extensão de Zadeh ao campo deter-

minístico determinado por f , obtendo assim um campo fuzzy a partir do qual são usados conceitos como a derivada de Hukuhara. A segunda, consiste em determinar primeiramente o solução determinística $\varphi_t(x_o)$ e então, aplicar o princípio da extensão de Zadeh, obtendo uma solução fuzzy $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)$ ([17]). Informalmente, na primeira abordagem primeiramente fuzzificamos o problema e, então, encontramos a solução, enquanto no segundo método, primeiramente a solução clássica é determinada e, então, fuzzificamos esta solução.

Como pré-requisito para as próximas seções deste capítulo, em que apresentaremos cada uma das abordagens acima citadas, vamos definir os conceitos de conjuntos fuzzy e números fuzzy bem como alguns resultados que utilizaremos posteriormente.

Definição 2.1.1. *Um subconjunto fuzzy F em X é caracterizado por uma função $\mu_F : X \rightarrow [0, 1]$, chamada função de pertinência do conjunto F , onde $\mu_F(x) = 1$ e $\mu_F = 0$ indicam, respectivamente, a pertinência e não pertinência do elemento x em F .*

Segundo esta definição cada subconjunto clássico de X é um subconjunto fuzzy em X , onde a função de pertinência é a função característica do subconjunto.

Usaremos a notação $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ para a família de subconjuntos fuzzy de \mathbb{R}^n , onde os α -níveis são dados por:

$$[A]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad \text{para todo } \alpha \in [0, 1] \quad \text{e}$$

$$[A]^0 = \overline{\text{supp}A}$$

são compactos e não vazios. Denotaremos por E^n , os elementos de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ cujo α -níveis são convexos para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Definição 2.1.2. *Seja $X = \mathbb{R}$. Dizemos que um subconjunto fuzzy A em \mathbb{R} é um número fuzzy quando:*

1. *existe x_o tal que $\mu_A(x_o) = 1$;*
2. *o suporte $\{x : \mu_A(x) > 0\} = \text{supp}A$ é limitado;*
3. *os α -níveis de A são intervalos fechados.*

O conjunto fuzzy definido pela função de pertinência

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{se } x < b \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{se } x \geq b \end{cases}$$

satisfaz as propriedades de um número fuzzy e é denominado número fuzzy triangular (figura 2.1). Usaremos a notação $A = (a/b/c)$ para representar um número fuzzy triangular em que $\mu_A(a) = \mu_A(c) = 0$ e $\mu_A(b) = 1$.

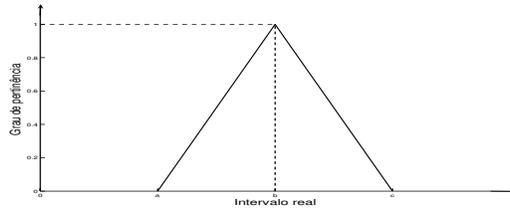


Figura 2.1: Número fuzzy triangular $(a/b/c)$.

Observemos que se o domínio de $\mu_A : [a, c] \rightarrow [0, 1]$ é multiplicado por uma constante λ , então obtemos um número fuzzy triangular $\lambda A = (\lambda a/\lambda b/\lambda c)$ onde $\mu_{\lambda A}(\lambda x) = \mu_A(x)$ para todo $x \in [a, c]$. Esta propriedade não é um caso particular somente dos números fuzzy triangulares.

O lema a seguir caracteriza um elemento em E através dos seus α -níveis.

Lema 2.1.3. *Seja $[a_1^\alpha, a_2^\alpha]$, $0 < \alpha \leq 1$ uma família de intervalos não vazios. Se*

i) $[a_1^\alpha, a_2^\alpha] \supset [a_1^\beta, a_2^\beta]$ para todo $0 < \alpha \leq \beta$;

e

ii) $[\lim_{k \rightarrow \infty} a_1^{\alpha_k}, \lim_{k \rightarrow \infty} a_2^{\alpha_k}] = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$

onde α_k é uma sequência não decrescente convergindo para $\alpha \in (0, 1]$, então a família $[a_1^\alpha, a_2^\alpha]$, $0 < \alpha \leq 1$, representa os α -níveis de um elemento em E . Por outro lado, se $[a_1^\alpha, a_2^\alpha]$, $0 < \alpha \leq 1$ representa os α -níveis de um elemento em E , então são válidas as condições i) e ii).

Definição 2.1.4. *A extensão de Zadeh de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função \hat{f} tal que,*

$$\mu_{\hat{f}(U)}(x) = \begin{cases} \sup_{\tau \in f^{-1}(x)} \mu_U(\tau) & \text{se } f^{-1}(x) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } f^{-1}(x) = \emptyset \end{cases}$$

onde U é um subconjunto fuzzy com suporte em \mathbb{R} .

A demonstração do teorema abaixo pode ser encontrada em [1].

Teorema 2.1.5. *Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua, então a extensão de Zadeh $\hat{f} : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ está bem definida e,*

$$[\hat{f}(u)]^\alpha = f([u]^\alpha)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$

Aplicando o teorema 2.1.5 à função $\hat{f}(U) = \lambda U$, então obtemos $[\hat{f}(U)]^\alpha = [\lambda A]^\alpha = \lambda[A]^\alpha$ de modo que multiplicar um número fuzzy A por escalar λ , é equivalente à multiplicar todos os α -níveis de A por λ . Portanto, temos que: $x \in [A]^\alpha$ se, e somente se $\lambda x \in [\lambda A]^\alpha$, ou equivalentemente $\mu_A(x) = \mu_{\lambda A}(\lambda x)$.

2.2 Extensão do campo determinístico

Consideremos a equação autônoma

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_o \end{cases} \quad (2.2)$$

com $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e $x_o \in \mathbb{R}$. Supondo que a variável de estado seja incerta, a idéia proposta por Seikkala ([21]), consiste em aplicar o princípio da extensão de Zadeh ao campo determinístico f obtendo assim um problema de valor inicial fuzzy proveniente do sistema (2.2)

$$\begin{cases} \hat{x}'(t) = \hat{f}(\hat{x}(t)) \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_o \end{cases} \quad (2.3)$$

com $\hat{f} : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ e \hat{x}_o subconjunto fuzzy de E .

Como a função f é contínua, o teorema 2.1.5 garante que os α -níveis do campo fuzzy \hat{f} satisfazem

$$[\hat{f}(\hat{x})]^\alpha = f([\hat{x}]^\alpha) = [f_1(x_1^\alpha, x_2^\alpha), f_2(x_1^\alpha, x_2^\alpha)]$$

onde

$$\begin{cases} f_1(x_1^\alpha, x_2^\alpha) = \min\{f(x) : x \in [\hat{x}(t)]^\alpha = [x_1^\alpha, x_2^\alpha]\} \\ f_2(x_1^\alpha, x_2^\alpha) = \max\{f(x) : x \in [\hat{x}(t)]^\alpha = [x_1^\alpha, x_2^\alpha]\}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Uma função $\hat{x}(t)$ que associa à cada $t \in [0, T]$ um subconjunto fuzzy em E , está bem definida se existem funções $x_1^\alpha : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_2^\alpha : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, tais que para todo $\alpha \in [0, 1]$

$$[\hat{x}(t)]^\alpha = [x_1^\alpha(t), x_2^\alpha(t)].$$

Se a função $\hat{x} : [0, T] \rightarrow E$ for diferenciável no sentido de Hukuhara ([1],[7]), então a derivada de $\hat{x}(t)$ pode ser definida como a função $\hat{x}' : [0, T] \rightarrow E$ cujos α -níveis satisfazem

$$[\hat{x}'(t)]^\alpha = [(x_1^\alpha)'(t), (x_2^\alpha)'(t)].$$

Pelas igualdades acima, o sistema associado (2.3) pode então ser reformulado em um sistema bidimensional determinístico

$$\begin{cases} (\hat{x}_1^\alpha)'(t) = f_1(x_1^\alpha, x_2^\alpha), & x_1^\alpha(0) = x_{01}^\alpha \\ (\hat{x}_2^\alpha)'(t) = f_2(x_1^\alpha, x_2^\alpha), & x_2^\alpha(0) = x_{02}^\alpha \end{cases} \quad (2.5)$$

de modo que para cada $\alpha \in [0, 1]$ as funções x_1^α e x_2^α determinam os α -níveis de $\hat{x}(t)$.

A existência de solução única para o sistema (2.3) é garantida pelo teorema abaixo devido à Seikkala.

Teorema 2.2.1. *Suponha que f satisfaça*

$$|f(t, x) - f(t, \bar{x})| \leq g(t, |x - \bar{x}|), \quad t \geq 0, \quad x, \bar{x} \in \mathbb{R}$$

onde $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ é contínua tal que $r \rightarrow g(t, r)$ é não decrescente e o problema de valor inicial

$$u'(t) = g(t, u(t)), \quad u(0) = u_o \quad (2.6)$$

tem uma solução em \mathbb{R}_+ para $u_o > 0$ e que $u(t) \equiv 0$ é a única solução de (2.6) para $u_o = 0$. Então o problema de valor inicial (2.3) tem solução fuzzy única.

Exemplo 2.2.2. Consideremos a equação diferencial fuzzy

$$\begin{cases} \hat{x}'(t) = -\hat{x}(t) \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_o \end{cases} \quad (2.7)$$

que é a extensão de Zadeh do modelo de Malthus. Para este problema, tomando a função $g(t, r) = r$, as condições do teorema (2.2.1) são satisfeitas. A solução única é determinada pelo sistema determinístico bidimensional

$$\begin{cases} (x_1^\alpha)'(t) = -x_2^\alpha(t), & x_1^\alpha(0) = x_{01}^\alpha \\ (x_2^\alpha)'(t) = -x_1^\alpha(t), & x_2^\alpha(0) = x_{02}^\alpha \end{cases} \quad (2.8)$$

cuja solução

$$\hat{x}_1^\alpha(t) = \frac{\hat{x}_{01}^\alpha - \hat{x}_{02}^\alpha}{2} e^t + \frac{\hat{x}_{01}^\alpha + \hat{x}_{02}^\alpha}{2} e^{-t}$$

$$\hat{x}_2^\alpha(t) = \frac{\hat{x}_{02}^\alpha - \hat{x}_{01}^\alpha}{2} e^t + \frac{\hat{x}_{01}^\alpha + \hat{x}_{02}^\alpha}{2} e^{-t}$$

são os α -níveis de $\hat{x}(t)$.

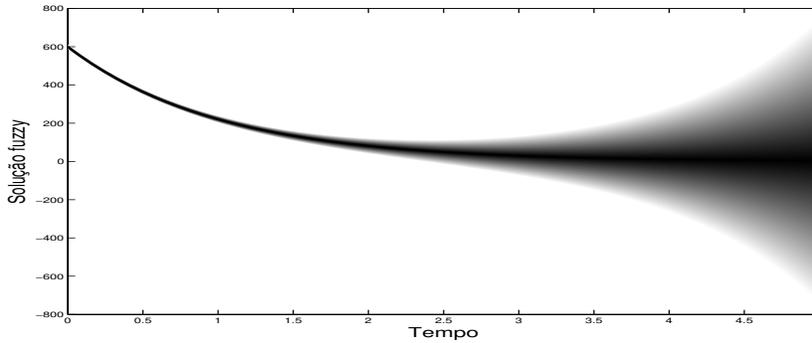


Figura 2.2: Solução do sistema fuzzy (2.7) com $\text{supp}\hat{x}_o = (595, 605)$.

Na figura 2.2, temos o gráfico da solução fuzzy $\hat{x}(t)$ do sistema 2.2 com condição inicial como sendo o número fuzzy triangular $\hat{x}_o = (595/600/605)$.

É importante observar que o comprimento do suporte de $\hat{x}(t)$ é crescente em relação ao tempo, uma vez que, $x_1^\alpha(t)$ é decrescente e $x_2^\alpha(t)$ é crescente para todo $0 \leq \alpha < 1$ a partir de um determinado t_1 . Portanto, conceitos relacionados aos estados de equilíbrio do sistema associado não estão bem definidos.

O fato do suporte da solução fuzzy $\hat{x}(t)$ ser crescente com relação à t não é um caso particular do exemplo acima segundo Kaleva [7].

Proposição 2.2.3. *Se $\hat{x} : I \rightarrow E^n$ é diferenciável em $I = [0, T]$, então para cada $\alpha \in [0, 1]$ a função $t \rightarrow \text{diam}[\hat{x}(t)]^\alpha$ é não decrescente em I .*

2.3 Extensão do fluxo determinístico

Consideremos o sistema de equações autônomas

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_o \end{cases} \quad (2.9)$$

Vamos supor que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, satisfaça algum critério que garanta existência e unicidade de solução. Neste caso, a solução $x(t)$ do sistema (2.9) é unicamente determinada

pela condição inicial e o tempo t ([20]). Para enfatizar isto, vamos representar tal solução por

$$\varphi_t(x_o) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ou seja, $\varphi_0(x_o) = x_o$ e $\varphi'_t(x_o) = f(\varphi_t(x_o))$; a solução $\varphi_t(x_o)$ é denominada *fluxo* gerado pela campo vetorial f .

Admitindo que a condição inicial seja incerta, ou seja, $x(0) = \hat{x}_o \in E^n$, então temos um sistema fuzzy associado

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = \hat{x}_o \end{cases} \quad (2.10)$$

Neste caso, a solução depende de uma condição inicial fuzzy. A solução para o sistema associado (2.10) por esta abordagem é definida como sendo a função obtida pela aplicação do princípio da extensão de Zadeh ao fluxo determinístico $\varphi_t(x_o)$, obtendo assim

$$\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o) : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n).$$

Pela continuidade de $\varphi_t(x_o)$ com relação à condição inicial x_o ([20]), a igualdade

$$[\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)]^\alpha = \varphi_t([\hat{x}_o]^\alpha) \quad (2.11)$$

é satisfeita para todo $\alpha \in [0, 1]$. Portanto, a trajetória determinada por $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)$ consiste de uma família de trajetórias determinísticas dadas por φ_t . Para cada $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, o grau de pertinência da trajetória $\varphi_t(\bar{x})$ em $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)$ é igual ao grau de pertinência de \bar{x} em \hat{x}_o pois, pelo princípio da extensão de Zadeh

$$\mu_{\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)}(\varphi_t(\bar{x})) = \sup\{\mu_{\hat{x}_o}(\tau) : \varphi_t(\tau) = \varphi_t(\bar{x})\}.$$

A igualdade $\varphi_t(\tau) = \varphi_t(\bar{x})$ vale, em particular para $t = 0$, ou seja, $\tau = \bar{x}$. Logo, o supremo é tomado em um conjunto unitário, portanto

$$\mu_{\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)}(\varphi_t(\bar{x})) = \mu_{\hat{x}_o}(\bar{x}).$$

Para o caso em que \hat{x}_o é um subconjunto fuzzy de E^n , então temos os α -níveis de \hat{x}_o convexos e compactos e, como consequência, $\varphi_t([\hat{x}_o]^\alpha)$ também é convexo e compacto para todo $\alpha \in [0, 1]$. Sendo assim, $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)$ é um subconjunto fuzzy de E^n para todo $t \in \mathbb{R}_+$.

Se considerarmos o caso em que a subjetividade aparece nos parâmetros da função f , então precisamos aplicar a extensão de Zadeh ao fluxo do sistema determinístico

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), b) \\ x(0) = x_o \end{cases} \quad (2.12)$$

onde $x_o \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$ é um vetor de parâmetros para f . Portanto, adicionando ao sistema acima as equações

$$\begin{cases} b'_1 = 0 \\ b'_b = 0 \\ \vdots \\ b'_m = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

temos um novo sistema de dimensão $n + m$

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ b'(t) = 0 \\ x(0) = (x_o, b) \end{cases} \quad (2.14)$$

onde o vetor de parâmetros b aparece agora na condição inicial. Dessa forma, voltamos ao caso descrito acima onde somente a condição inicial é fuzzy.

Para a metodologia apresentada nesta seção, M. T. Mizukoshi ([15]) verificou algumas propriedades sobre a estabilidade da solução fuzzy $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)$. A definição de estados de equilíbrio e estabilidade dada em ([15]) é análogo ao caso clássico, porém como estamos sobre espaços dos números fuzzy, a métrica utilizada é a de Hausdorff ([1]), isto é, dados conjuntos $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \in \mathbb{R}^n$, a distância entre A e B é dada por:

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{y \in A} \inf_{x \in B} \|x - y\|, \sup_{x \in B} \inf_{y \in A} \|x - y\| \right\}.$$

Proposição 2.3.1. *Se x^* é um estado de equilíbrio para (2.9) então $\chi_{\{x^*\}}$ é um estado de equilíbrio para (2.10). Além disso:*

1. $\chi_{\{x^*\}}$ é estável para o sistema (2.10) se, e somente se, x^* é estável para (2.9);
2. $\chi_{\{x^*\}}$ é assintoticamente estável para (2.10) se, e somente se, x^* é assintoticamente estável para (2.9);
3. $\chi_{\{x^*\}}$ é instável para (2.10) se, e somente se, x^* é instável para (2.9).

Demonstração. Consultar [15].

O ítem 2 da proposição acima pode ser reformulado em termos do suporte da solução fuzzy $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)$, conforme veremos na proposição abaixo. Antes porém, vamos enunciar e demonstrar um resultado meramente técnico.

Lema 2.3.2. *Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto, $f : \mathbb{R}_+ \times K \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t, x) = x^*$ para todo $x \in K$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $T > 0$ tal que, para todo $t \geq T$, temos $|f(t, x) - x^*| < \varepsilon$ para todo $x \in K$.*

Demonstração. Do contrário existiria $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $T > 0$, existiriam $t > T$ e $x \in K$ tal que $|f(t, x) - x^*| \geq \varepsilon$. Em particular esta propriedade seria válida para $T_n = n$, $n \in \mathbb{N}$. Isto é, existiriam $t_n \geq T_n$ e $x_n \in K$ de modo que $|f(t_n, x_n) - x^*| \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Porém, como K é compacto, então, passando a uma subsequência se necessário, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_o$. Da continuidade da $f(t, x)$ teríamos que $\varepsilon \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |f(t_n, x_n) - x^*| = |f(x_o, \lim_{n \rightarrow \infty} t_n) - x^*| = 0$, de modo que chegaríamos a um absurdo. ■

Proposição 2.3.3. *Seja $x^* \in \mathbb{R}^n$ o único estado de equilíbrio globalmente assintoticamente estável em alguma região $D \subset \mathbb{R}^n$ e x^* não depende de parâmetros fuzzy para o fluxo $\varphi_t(x_o)$. Se $[\hat{x}_o]^\alpha \subset D$ para todo $\alpha \in [0, 1]$ então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{supp}(\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)) = \{x^*\}.$$

Demonstração. Pelo teorema (2.1.5) temos que $[\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)]^0 = \varphi_t([\hat{x}]^0)$. Para demonstrar a afirmação, precisamos mostrar que para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $t_o > 0$ a partir do qual, a distância, pela métrica de Hausdorff, do conjunto $S_{t_o} = \varphi_{t_o}([\hat{x}_o]^0) = \{\varphi_{t_o}(x) : x \in [\hat{x}_o]^0\}$ ao conjunto $\{x^*\}$ é menor do que ε . O lema 2.3.2 assegura que, existe $T > 0$ tal que para todo $t \geq T$ temos $|\varphi_t(x) - x^*| < \varepsilon/2$, para todo $x \in [\hat{x}_o]^0$. Logo, tomando $t_o > T$, temos que:

$$\begin{aligned} d_H(S_{t_o}, \{x^*\}) &= \max \left\{ \sup_{y \in S_{t_o}} \inf_{x \in \{x^*\}} \|x - y\|, \sup_{x \in \{x^*\}} \inf_{y \in S_{t_o}} \|x - y\| \right\} \\ &= \max \left\{ \sup_{y \in S_{t_o}} \|y - x^*\|, \inf_{y \in S_{t_o}} \|y - x^*\| \right\} \\ &= \sup_{y \in S_{t_o}} \|y - x^*\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \end{aligned}$$

o que prova a afirmação. ■

Para o caso em que o estado de equilíbrio é instável, se o fluxo determinístico bidimensional $\varphi_t(x_o)$ for limitado, o teorema de Bendixson-Poincaré garante a existência de um ciclo limite.

Proposição 2.3.4. *Seja $D \subset \mathbb{R}^2$. Suponhamos que $\varphi_t(x_o)$ admita um ciclo limite φ assintoticamente estável em D não dependente de parâmetros fuzzy. Se $[\hat{x}_o]^\alpha \subset D$ para todo $\alpha \in [0, 1]$ então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{supp}(\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)) = \{\varphi\}.$$

Demonstração. Pelo teorema 2.1.5 temos que $[\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)]^0 = \varphi_t([\hat{x}_o]^0)$. Por definição, se $y \in \{\varphi\}$, então existe uma sequência $t_n(y) \rightarrow \infty$, $n \in \mathbb{N}$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{t_n(y)}(x) = y$ para todo $x \in [\hat{x}_o]^0$. Dado $\varepsilon > 0$, consideremos o conjunto $S_k = \{\varphi_{t_k(y)}(x) : x \in [\hat{x}_o]^0, y \in \{\varphi\}\}$ onde, $k \in \mathbb{N}$ é tal que $|\varphi_{t_k(y)}(x) - y| < \varepsilon/2$. Tal k existe pois, caso contrário, poderíamos construir sequências $t_n \rightarrow \infty$ e $x_n \rightarrow x_o$ tal que $|\varphi_{t_n}(x_n) - y| \geq \varepsilon/2$. para todo $y \in \{\varphi\}$, o que seria um absurdo pois, φ é ciclo limite para o fluxo determinístico $\varphi_t(x)$. Logo, temos que:

$$d_H(S_k, \{\varphi\}) = \max \left\{ \sup_{y \in \{\varphi\}} \inf_{x \in S_k} \|x - y\|, \sup_{x \in S_k} \inf_{y \in \{\varphi\}} \|x - y\| \right\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

o que prova a afirmação. ■

Das proposições 2.3.3 e 2.3.4 concluímos que quando $t \rightarrow \infty$, a subjetividade das soluções desaparecem se a solução admitir um ponto de equilíbrio assintoticamente estável ou quando a solução é limitada. A hipótese de x^* não depender de parâmetros fuzzy é essencial como veremos no Exemplo 2.3.6.

Exemplo 2.3.5. Consideremos a equação fuzzy proveniente do modelo de Malthus

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda x \\ x(0) = \hat{x}_o. \end{cases}$$

O estado de equilíbrio para este sistema é $x^* = 0$ que satisfaz as condições da proposição (2.3.3) quando $\lambda < 0$. Portanto, podemos concluir que os α -níveis do fluxo $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)$ convergem para $\{0\}$. De fato pois, para o modelo determinístico a solução é $\varphi_t(x_o) = x_o e^{\lambda t}$ e pelo teorema 2.1.5 temos que os α -níveis de $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)$ são dados por $[\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)]^\alpha = [\hat{x}_o]^\alpha e^{\lambda t}$. Logo, se $\lambda < 0$ o termo exponencial tende a zero. A figura 2.3 ilustra a solução de $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)$ onde a condição inicial é o número fuzzy triangular $\hat{x}_o = (5/10/15)$.

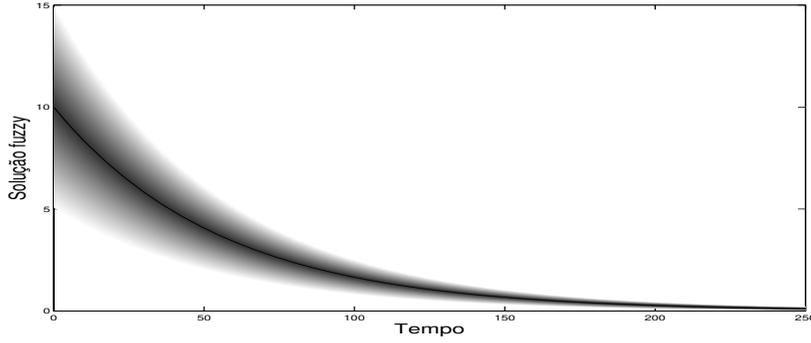


Figura 2.3: Solução fuzzy do Modelo de Malthus. Condição inicial fuzzy: $\hat{x}_o = (5/10/15)$ e $\lambda = -0.012$.

Exemplo 2.3.6. A solução determinística da equação logística é dada por

$$p_t(p_o, \lambda, k) = \frac{kp_o}{p_o + (k - p_o)e^{-\lambda t}}. \quad (2.15)$$

Considerando que a capacidade suporte k seja incerta, então os α -níveis da solução fuzzy são dados por

$$[\hat{p}_t(\hat{k})]^\alpha = \frac{[\hat{k}]^\alpha p_o}{p_o + ([\hat{k}]^\alpha - p_o)e^{-\lambda t}}. \quad (2.16)$$

Fazendo $t \rightarrow \infty$, temos que o $\text{supp}(\hat{p}_t(\hat{k})) \rightarrow \text{supp}(\hat{k})$. Isto, no entanto, não contradiz a proposição 2.3.3, já que o estado de equilíbrio da equação logística, $p^* = k$ é um número fuzzy. A solução fuzzy obtida pela extensão de Zadeh de (2.15) para $\hat{k} = (225/245/265)$ pode ser vista na figura 2.4a.

Para o caso em que o índice de crescimento relativo λ é fuzzy, os α -níveis da solução fuzzy são dados por

$$[\hat{p}_t(\hat{\lambda})]^\alpha = \frac{kp_o}{p_o + (k - p_o)e^{-[\hat{\lambda}]^\alpha t}}. \quad (2.17)$$

Neste caso, fazendo $t \rightarrow \infty$ temos que $e^{-[\hat{\lambda}]^\alpha t} \rightarrow 0$. Logo, $\text{supp}(\hat{p}_t(\hat{\lambda})) \rightarrow \{k\}$. Notemos que este resultado já era esperado da proposição 2.3.3. Na solução fuzzy da figura 2.4b, foi considerado que $\hat{\lambda} = (0.009/0.012/0.015)$.

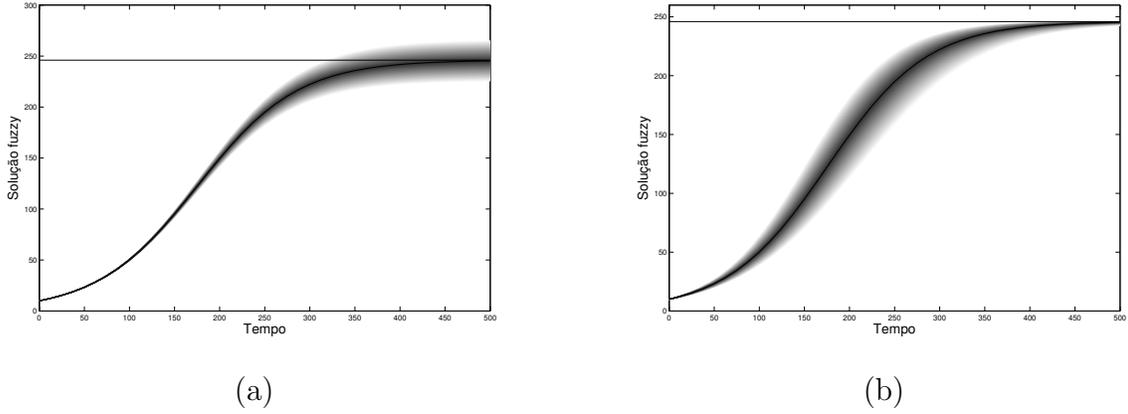


Figura 2.4: Solução fuzzy da equação logística. (a) Capacidade suporte fuzzy: $\hat{k} = (225/245/265)$, $r = 0.012$ e $x_o = 10$. (b) Parâmetro intrínseco de crescimento fuzzy: $\hat{\lambda} = (0.009/0.012/0.015)$, $k = 245$ e $x_o = 10$.

Se a condição inicial é fuzzy, a proposição 2.3.3 garante que o suporte da solução fuzzy tem como limite a capacidade suporte k . De fato, pois neste caso os α -níveis da solução fuzzy da equação logística são dados por

$$[\hat{p}_t(\hat{p}_o)]^\alpha = \frac{k[\hat{p}_o]^\alpha}{[\hat{p}_o]^\alpha + (k - [\hat{p}_o]^\alpha)e^{-\lambda t}}. \quad (2.18)$$

Logo, fazendo $t \rightarrow \infty$, temos que $\text{supp}(\hat{p}_t(\hat{p}_o)) \rightarrow \{k\}$. A solução para $\hat{p}_o = (10/15/20)$ está representada na figura 2.5

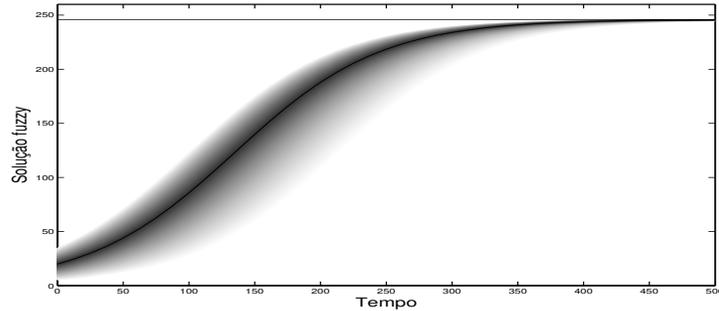


Figura 2.5: Solução fuzzy do Modelo de Verhulst com condição inicial fuzzy: $\hat{p}_o = (10/15/20)$, $k = 245$ e $\lambda = 0.012$.

Exemplo 2.3.7. Suponhamos que a condição inicial x_o ou y_o do modelo de Lotka-Volterra seja um número fuzzy. Por definição de produto cartesiano fuzzy, o grau de pertinência do par $\mathbf{x}_o = (x_o, y_o)$ em um subconjunto de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ é dado por $\mu_{\hat{\mathbf{x}}_o}(x_o, y_o) = \min\{\mu_{\hat{x}_o}(x_o), \mu_{\hat{y}_o}(y_o)\}$.

Das análises do capítulo 1, vimos que o estado de equilíbrio não nulo do modelo de Lotka-Volterra é estável. Pelo fato de $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)$ ser constituído de trajetórias determinísticas, então é esperado que a solução fuzzy $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)$ apresente periodicidade em torno do estado de equilíbrio.

Nas figuras 2.6(a-b), apenas a condição inicial para presas é considerada incerta, dada pelo número fuzzy $\hat{x}_o = (90/100/110)$. Notemos que embora somente a condição inicial de presas seja imprecisa, a população de predadores também é afetada por esta imprecisão.

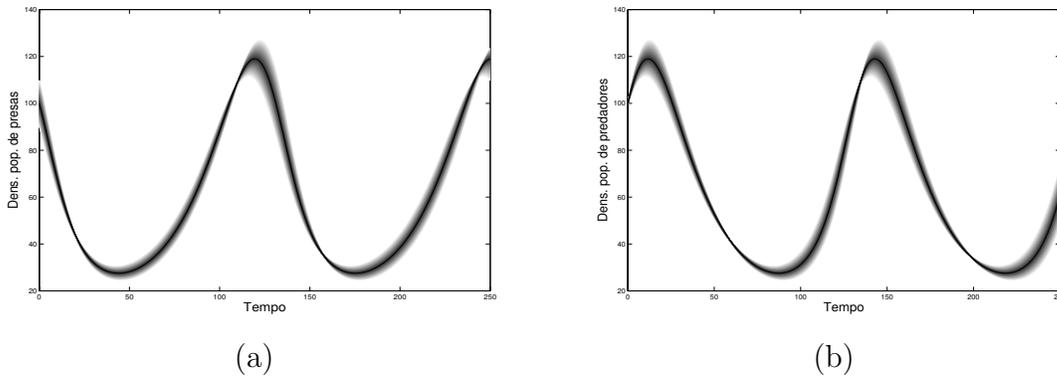


Figura 2.6: Solução fuzzy para o modelo de Lotka-volterra. Parâmetros: $a = 0.05$ $b = 0.08$, $\alpha = \beta = 0.0008$ e condição inicial $\hat{x}_o = (90/100/110)$ e $y_o = 100$; (a) população de presas; (b) população de predadores.

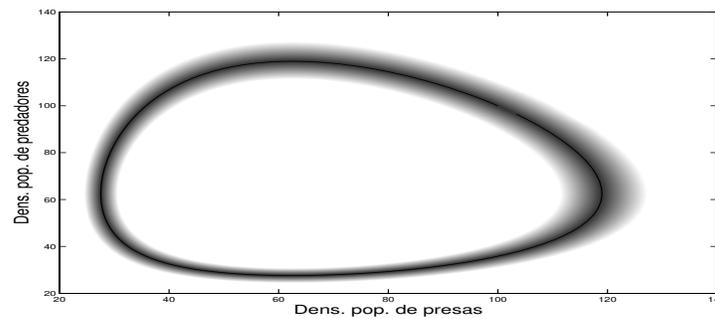
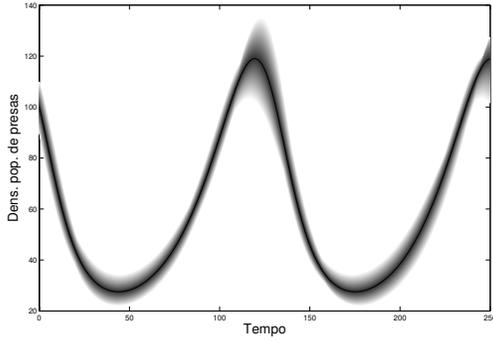
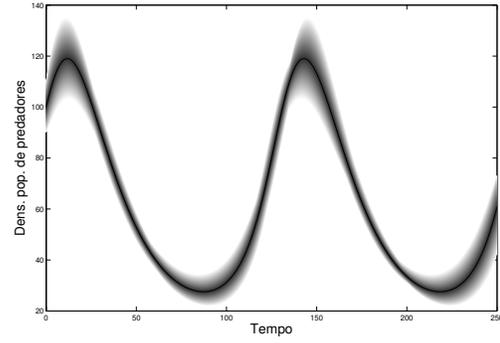


Figura 2.7: Plano de fase da solução fuzzy.

A solução para o caso em que ambas as condições iniciais são fuzzy podem ser vistas nas figuras 2.8(a-b). O plano de fase para este caso não é viável de ser representado, pois uma mesma trajetória pode assumir distintos valores de pertinência.



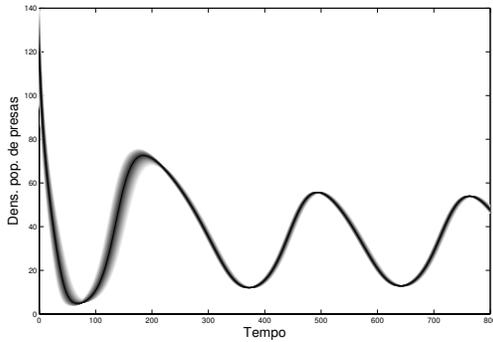
(a)



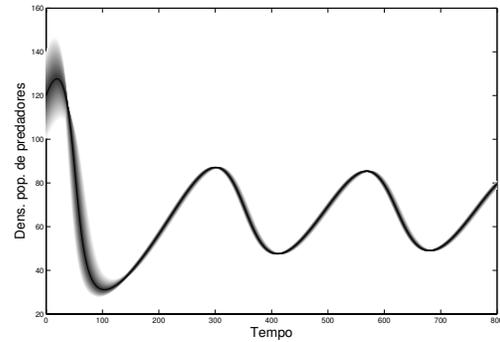
(b)

Figura 2.8: Solução fuzzy para o modelo de Lotka-volterra. Parâmetros: $a = b = 0.08$, $\alpha = 0.05$ e $\beta = 0.0008$ e condição inicial $\hat{x}_o = \hat{y}_o = (90/100/110)$; (a) - população de presas; (b) - população de predadores.

Exemplo 2.3.8. Como mostramos no capítulo 1, o modelo de Holling-Tanner admite a existência de um ciclo limite assintoticamente estável que independe da condição inicial. Pela proposição 2.3.4, o suporte do fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)$ do sistema associado ao determinístico deve convergir para o ciclo limite do fluxo determinístico se a condição inicial (x_o, y_o) é um número fuzzy. O gráfico de $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o)$ para a condição inicial dada por $\hat{x} = \hat{y} = (70/80/90)$ pode ser visto nas figuras 2.9(a-b).



(a)



(b)

Figura 2.9: Solução fuzzy para o modelo de Holling-Tanner. Parâmetros para ambas as figuras: $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.48$, $d = 20$, $k = 100$, $\lambda = 0.1$, $m = 0.05$ e condição inicial $\hat{x}_o = \hat{y}_o = (70/80/90)$.

Capítulo 3

Sistemas p-fuzzy

3.1 Introdução

As equações diferenciais e de diferenças determinísticas constituem uma poderosa ferramenta para a modelagem de fenômenos cujas variáveis de estados estão sujeitas a variações ao longo do tempo. No entanto, para a modelagem determinística ser eficiente é necessário que tenhamos um conhecimento um tanto profundo das relações existentes entre as variáveis e suas variações. É o conhecimento do fenômeno que torna possível a escolha das funções que determinam as variações com relação ao estado (valor) da variável. Em muitas situações porém, esta relação entre variáveis e variações é somente conhecida parcialmente, o que torna a modelagem determinística menos aplicável.

Por outro lado, a modelagem através de equações variacionais fuzzy embora comportando subjetividades, também não são aplicáveis à modelagem de fenômenos com relações parcialmente conhecidas. Isto vem do fato que estes modelos são provenientes de modelos determinísticos. A subjetividade suportada pelas equações fuzzy se refere à imprecisões quanto aos estados iniciais das variáveis (*fuzziness demográfica*) e parâmetros (*fuzziness ambiental*). De modo geral, ambos os tipos de *fuzziness* estão presentes em equações de dinâmica populacional.

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados sobre estabilidade para sistemas iterativos baseados em regras fuzzy ou, sistemas p-fuzzy. Os sistemas p-fuzzy incorporam informações subjetivas tanto nas variáveis quanto nas variações e suas relações com as variáveis, sendo portanto uma ferramenta muito útil para modelagem de fenômenos cujo comportamento é parcialmente conhecido.

3.2 Sistemas p-fuzzy

Denominamos de sistema p-fuzzy ao sistema iterativo

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k) \\ x_o \in \mathbb{R}^n \text{ dado} \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $f(x_k)$ é quase linear, isto é, $f(x) = x + \Delta(x)$, $\Delta(x_k) \in \mathbb{R}^n$ e $\Delta(x_k)$ é obtido por um sistema baseado em regras fuzzy.

Os sistemas p-fuzzy são basicamente constituídos de *variáveis linguísticas* de entrada e saída e um *controlador fuzzy* (ver figura 3.1).

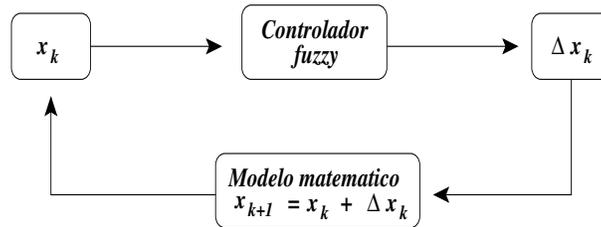


Figura 3.1: Estrutura de funcionamento de um sistema p-fuzzy

Variáveis linguísticas são variáveis de estado que, quantitativamente, são expressas por conjuntos fuzzy. Os conjuntos fuzzy representam os estados da variável que, em geral, são expressos por valores subjetivos como *pequeno*, *muito*, *alto*, etc. Por exemplo, supondo que a variável linguística seja *população*, seus estados subjetivamente podem ser *baixa*, *média* e *alta*. Os termos subjetivos que determinam os estados das variáveis são denominados *termos linguísticos*. Os termos linguísticos são importantes para a modelagem, pois definem os estados das variáveis. Quanto mais termos linguísticos, mais precisos estão os estados assumidos pelas variáveis.

Um *controlador fuzzy* é constituído basicamente por um *fuzzificador*, uma *base de regras*, um *método de inferência* e um *defuzzificador* (veja figura 3.2).

No *fuzzificador* cada entrada do sistema é transformada em um conjunto fuzzy, ou seja, se $x_o \in \mathbb{R}^n$ é uma entrada do sistema, o fuzzificador associa a esta entrada uma função de pertinência $\mu_{x_o}(a)$. Em muitos casos, a função $\mu_{x_o}(a)$ é a própria função característica de x_o .

A *base de regras* é um conjunto formado por regras fuzzy que relacionam os termos linguísticos das variáveis de entrada e saída. A base de regras é considerada como um elemento integrante do núcleo do controlador fuzzy. Cada regra da base satisfaz a seguinte estrutura:

SE a está em A_i ENTÃO b está em B_i .

onde A_i e B_i são conjuntos fuzzy que representam termos linguísticos das variáveis de entrada e saída, respectivamente. A expressão a está em A_i significa que $\mu_{A_i}(a) \in [0, 1]$. Tanto o conjunto fuzzy A_i quanto B_i podem ser produtos cartesianos de conjuntos fuzzy, isto é, $A_i = A_{i1} \times A_{i2} \times \dots \times A_{im}$ e $B_i = B_{i1} \times B_{i2} \times \dots \times B_{in}$. Neste caso, cada conjunto fuzzy A_{ij} e B_{ik} representa um termo linguístico para a j -ésima variável de entrada e k -ésima variável de saída e, a expressão a está em A_i significa que $\mu_{A_i}(a) = \min\{\mu_{A_{i1}}, \mu_{A_{i2}}, \dots, \mu_{A_{im}}\} \in [0, 1]$. É na definição da base de regras que as informações do fenômeno em estudo são utilizadas. Para cada estado definido pelos termos linguísticos da variável de entrada, é definido uma regra. Sendo assim, quanto mais termos linguísticos mais informações são incorporadas na modelagem.

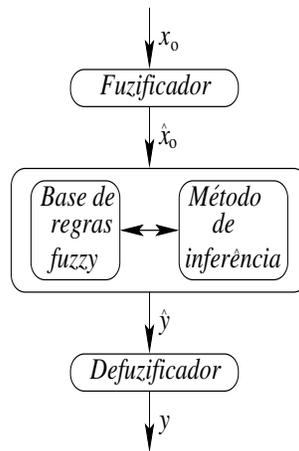


Figura 3.2: Estrutura do controlador fuzzy

O *método de inferência* é o mecanismo pelo qual as informações subjetivas definidas pela base de regras são avaliadas matematicamente. É neste estágio que para cada valor assumido pelas variáveis de entrada, o valor das variáveis de saída são determinadas de acordo com a base de regras. Assim como a base de regras, o método de inferência é considerado parte integrante do núcleo do controlador fuzzy. O método de inferência utilizado neste trabalho é conhecido como método de inferência de Mamdani ou método MAX-MIN. Neste método, cada regra é considerado como um relação fuzzy e não como implicação lógica. A relação entre as variáveis linguísticas é caracterizada pelo operador MIN, isto é, cada regra é considerada uma relação fuzzy R_i onde o grau de pertinência para cada par (a, b) é:

$$\mu_{R_i}(a, b) = \min\{\mu_{A_i}(a), \mu_{B_i}(b)\}.$$

A relação entre cada regra é caracterizada pelo operador máximo, ou seja, a relação fuzzy R que representa o modelo determinado por uma base de regras, é obtida pela união (máximo) de cada regra individual, de modo que para cada par (a, b) temos:

$$\mu_R(a, b) = \max_{1 \leq i \leq n} \{ \mu_{A_i}(a) \wedge \mu_{B_i}(b) \}$$

onde \wedge representa o operador MIN. Agora, para cada entrada desejamos encontrar uma

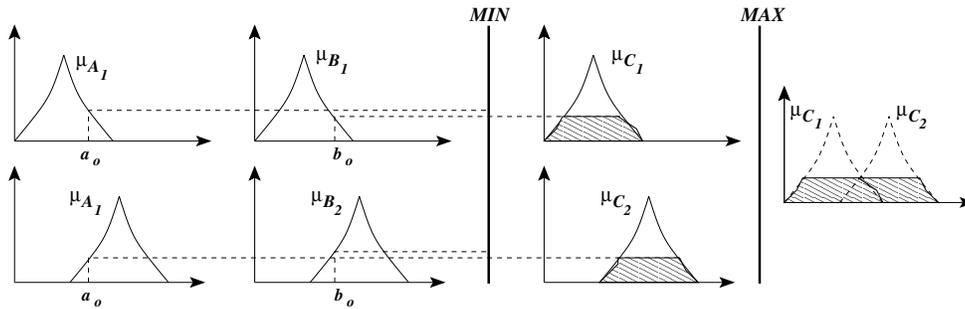


Figura 3.3: Mecanismo de inferência de Mamdani com duas variáveis linguísticas de entrada e uma de saída.

ação correspondente, isto é, para um conjunto A de dados de entrada, queremos determinar um conjunto B de dados de saída. Pelo método de Mamdani, a função de pertinência de B é dada por:

$$\mu_B(b) = \max_{1 \leq i \leq n} \{ \max_a \{ \mu_A(a) \wedge \mu_{A_i}(a) \} \wedge \mu_{B_i}(b) \}.$$

Se a entrada for um conjunto clássico unitário, então $\mu_A(a) = 1$ e $\mu_{A_i}(a) \leq 1$. Logo, a expressão acima resulta em:

$$\mu_B(b) = \max_{1 \leq i \leq n} \{ \mu_{A_i}(a) \wedge \mu_{B_i}(b) \}$$

e, portanto, temos o conjunto fuzzy B que representa a ação para cada entrada A (figura 3.3).

O papel do *defuzzificador* é converter cada conclusão obtida pelo método de inferência em um número real que melhor representa a ação a ser tomada. No caso dos sistemas p-fuzzy, o número real obtido pela defuzzificação é acrescentado ao valor assumido pela variável de entrada no instante k , alimentando o sistema interativo.

Um dos principais métodos de defuzzificação é o centro de massa, que para variáveis

contínuas é dado pela expressão

$$m(B) = \frac{\int_{\Omega} b\mu_B(b) db}{\int_{\Omega} \mu_B(b) db}.$$

Este método de defuzzificação será usado ao longo deste trabalho.

Notemos que o controlador fuzzy pode ser visto como uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, já que dado um valor de entrada, existe um único valor de saída correspondente.

3.3 Sistemas p-fuzzy unidimensionais

Nesta seção, faremos algumas definições e enunciaremos alguns resultados importantes sobre a existência e unicidade de estados de equilíbrio para sistemas p-fuzzy.

Consideremos o sistema p-fuzzy unidimensional

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \Delta(x_k) \\ x_o \in \mathbb{R} \end{cases}, \quad (3.2)$$

onde $\Delta(x)$ é a saída defuzzificada de um controlador fuzzy tipo Mamdani. O sistema acima está em estado de equilíbrio quando

$$x^* = x_k = x_{k+1} \iff \Delta(x_k) = 0$$

Definição 3.3.1. *Seja $\{A_i\}_{1 \leq i \leq k}$ uma família de subconjuntos fuzzy com $\text{supp}A_i = (a_i^1, a_{i+1}^2)$. Dizemos que os conjuntos A_i são sucessivos se satisfazem:*

1. $\text{supp}(A_i) \cap \text{supp}A_{(i+1)} \neq \phi$;
2. $\text{supp}(A_i) \cap \text{supp}(A_j) = \phi$ se $|i - j| \geq 2$;
3. sejam \hat{x} e \bar{x} tais que $\mu_{A_i}(\hat{x}) = \mu_{A_{i+1}}(\bar{x}) = 1$, então $\hat{x} < \bar{x}$.

As figuras 4.3, 4.4 e 4.6 são exemplos de conjuntos sucessivos.

Definição 3.3.2. *Consideremos um sistema p-fuzzy e uma família de subconjuntos sucessivos $\{A_i\}_{1 \leq i \leq k}$. Se para $x_1, x_2 \in \text{supp}(A_i \cup A_{i+1})$ as variações $\Delta(x_1)$ e $\Delta(x_2)$ possuem sinais contrários, então o subconjunto fuzzy $A^* = A_i \cap A_{i+1}$ é denominado conjunto viável de equilíbrio e $\text{supp}(A^*)$ é uma região viável de equilíbrio.*

Como veremos nos resultados seguintes, o sistema p-fuzzy admite um estado de equilíbrio digamos x^* , sempre que há uma região de equilíbrio $\text{supp}(A^*)$. Neste caso, as regras associadas aos conjuntos A_i e A_{i+1} da definição acima satisfazem:

1. se a está A_i então b está B_i ;
2. se a está A_{i+1} então b está B_{i+1} ;

com $\text{supp}A_i \subset \mathbb{R}_+(\mathbb{R}_-)$ e $\text{supp}(A_{i+1}) \subset \mathbb{R}_-(\mathbb{R}_+)$.

Teorema 3.3.3. *Se um sistema p-fuzzy S admite uma região viável de equilíbrio $\text{supp}(A^*)$, então S possui ao menos um estado de equilíbrio em $\text{supp}(A^*)$, ou seja, existe $x^* \in \text{supp}(A^*)$ tal que $\Delta(x^*) = 0$.*

Demonstração. Consultar [14]. ■

A unicidade do estado de equilíbrio exige algumas restrições dos conjuntos sucessivos que determinam os termos linguísticos do sistema p-fuzzy S .

Teorema 3.3.4. *Sejam μ_{A_i} e $\mu_{A_{i+1}}$ monótonas em $\text{supp}(A^*) = (a_{i+1}^1, a_i^2)$, a_i e a_{i+1} tais que $\mu_{A_i}(a_i) = \mu_{A_{i+1}}(a_{i+1}) = 1$. Se $a_i < a_{i+1}^1$ e $a_{i+1} < a_i^2$ então o estado de equilíbrio é único em $\text{supp}(A^*)$.*

Demonstração. Consultar [14]. ■

A análise de estabilidade do estado de equilíbrio de um sistema p-fuzzy unidimensional é feita de modo análogo ao caso determinístico, isto é, avaliando a derivada de $f(x) = x + \Delta(x)$ em x^* . Portanto, o sistema p-fuzzy será estável quando $0 < \Delta'(x^*) < 2$ e instável caso contrário.

3.4 Sistemas p-fuzzy bidimensionais

Consideremos um sistema p-fuzzy bidimensional

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \Delta_x(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = y_k + \Delta_y(x_k, y_k). \end{cases} \quad (3.3)$$

As variações Δ_x e Δ_y do sistema acima são dadas por regras que satisfazem a seguinte estrutura:

Se x está em A_i e y está em B_i então Δ_x está em C_i e Δ_y está D_i .

Os valores assumidos pelas variações $\Delta_x(x_k, y_k)$ e $\Delta_y(x_k, y_k)$ são determinados pela defuzzificação dos conjuntos fuzzy C_i^* e D_i^* obtidos através da inferência de Mamdani. Pelo fato das variações dependerem somente dos valores de entrada, então podemos considerar que cada uma das variações Δ_x e Δ_y são determinadas por regras da forma

Se x está em A_i e y está em B_i então Δ_c está em C_i .

Obviamente regras com apenas uma variável de saída não fazem parte da base de regras de um sistema p-fuzzy bidimensional. No entanto, esta estrutura nos permite avaliar cada variação isoladamente, o que será útil para a determinação de condições para existência e unicidade de estados de equilíbrio para o sistema (3.3).

Como veremos a seguir, sempre existe um estado de equilíbrio para o sistema (3.3) se em alguma região do domínio cada uma das variações Δ_x e Δ_y são determinadas por regras do tipo:

1. se x está em A_1 e y está em B_1 então Δ_c está em C_1
2. se x está em A_1 e y está em B_2 então Δ_c está em C_2 (1)
3. se x está em A_2 e y está em B_1 então Δ_c está em C_3
4. se x está em A_2 e y está em B_2 então Δ_c está em C_4

com $\text{supp}(C_1 \cup C_2) \subset \mathbb{R}_-$ e $\text{supp}(C_4 \cup C_3) \subset \mathbb{R}_+$ e os conjuntos fuzzy A_i e B_i sucessivos. Neste caso, o conjunto fuzzy $A^* = A_1 \cap A_2$ é o *conjunto viável de equilíbrio* para Δ_c .

Definição 3.4.1. *Seja $\{A_i\}_{1 \leq i \leq n}$ e $\{B_i\}_{1 \leq i \leq m}$ subconjuntos fuzzy sucessivos para os termos linguísticos das variáveis de entrada. Se A^* e B^* são conjuntos viáveis de equilíbrio para as variações Δ_x e Δ_y , então dizemos que $R^* = \text{supp}(A^*) \times \text{supp}(B^*)$ é uma região viável de equilíbrio para o sistema (3.3).*

O próximo lema assegura que a função de pertinência do conjunto fuzzy C_i^* obtido pela inferência de Mamdani de cada regra da base de regras (1) é decrescente com relação a variável a se μ_{A_i} é decrescente e, $\mu_{C_i^*}$ é crescente com relação a a caso μ_{A_i} seja crescente. Antes de enunciarmos o lema, vamos fazer algumas definições que serão úteis para a sua demonstração.

$$\begin{aligned} \beta_1(a, b) &= \min\{\mu_{A_1}(a), \mu_{B_1}(b)\} & \beta_2(a, b) &= \min\{\mu_{A_1}(a), \mu_{B_2}(b)\} \\ \beta_3(a, b) &= \min\{\mu_{A_2}(a), \mu_{B_1}(b)\} & \beta_4(a, b) &= \min\{\mu_{A_2}(a), \mu_{B_2}(b)\} \\ \mu_{C_1^*}(c) &= \min\{\mu_{C_1}(c), \max\{\beta_1(a, b), \beta_2(a, b)\}\} \\ \mu_{C_2^*}(c) &= \min\{\mu_{C_2}(c), \max\{\beta_3(a, b), \beta_4(a, b)\}\} \end{aligned}$$

onde $C_1 = C_1 \cup C_2$ e $C_2 = C_3 \cup C_4$.

Para simplificar, vamos convencionar que $\tilde{\beta}_i = \beta_i(\tilde{a}, b_o)$, $\hat{\beta}_i = \beta_i(\hat{a}, b_o)$ e que $\tilde{\mu}_{C_i^*}(c)$ e $\hat{\mu}_{C_i^*}(c)$ seja $\mu_{C_i^*}(c)$ em $\tilde{\beta}_i$ e $\hat{\beta}_i$, respectivamente.

Lema 3.4.2. *Sejam $\{A_k\}_{k=1,2}$ e $\{B_k\}_{k=1,2}$ conjuntos fuzzy sucessivos, $b_o \in \Omega_B = \text{supp}(B_1 \cap B_2)$, \hat{a} e $\tilde{a} \in \Omega_A = \text{supp}(A_1 \cap A_2)$ com as funções de pertinência satisfazendo:*

(i) $\mu_{A_1}(a)$ é decrescente e $\mu_{A_2}(a)$ é crescente em Ω_A ;

(ii) $\mu_{B_1}(b)$ é decrescente e $\mu_{B_2}(b)$ é crescente em Ω_B ;

(iii) se $a_i \in \Omega_A$ e $b_i \in \Omega_B$ são tais que $\mu_{A_1}(a_i) = \mu_{A_2}(a_i)$ e $\mu_{B_1}(b_i) = \mu_{B_2}(b_i)$ então $\mu_{A_1}(a_i) = \mu_{B_1}(b_i)$.

Se $\hat{a} > \tilde{a}$ então

$$\hat{\mu}_{C_1^*}(c) \leq \tilde{\mu}_{C_1^*}(c) \quad \text{e} \quad \hat{\mu}_{C_2^*}(c) \geq \tilde{\mu}_{C_2^*}(c).$$

Além disso, existe \bar{c} tal que

$$\hat{\mu}_{C_1^*}(\bar{c}) < \tilde{\mu}_{C_1^*}(\bar{c}) \quad \text{ou} \quad \hat{\mu}_{C_2^*}(\bar{c}) > \tilde{\mu}_{C_2^*}(\bar{c}).$$

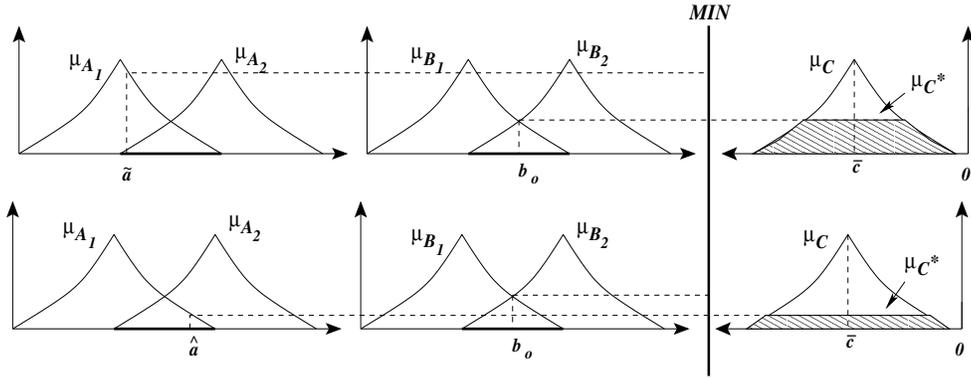


Figura 3.4: Representação geométrica do lema 3.4.2 para a função de pertinência $\mu_{C_1^*}(c)$.

Demonstração. Como μ_{A_1} é decrescente e μ_{A_2} é crescente em Ω_A então, $\mu_{A_1}(\hat{a}) < \mu_{A_1}(\tilde{a})$ e $\mu_{A_2}(\hat{a}) > \mu_{A_2}(\tilde{a})$. Assim temos que

$$\hat{\mu}_{C_1^*}(c) \leq \tilde{\mu}_{C_1^*}(c) \quad \text{e} \quad \hat{\mu}_{C_2^*}(c) \geq \tilde{\mu}_{C_2^*}(c),$$

o que prova a primeira parte do lema.

Para provar a segunda afirmação vamos separar em quatro casos: $b_o \leq b_i$ e $\hat{a} \leq a_i$; $b_o \geq b_i$ e $\tilde{a} \geq a_i$; $b_o \leq b_i$ e $\tilde{a} \geq a_i$; $b_o \geq b_i$ e $\hat{a} \leq a_i$. Como as demonstrações em cada um dos casos são semelhantes, vamos apresentar aqui apenas as demonstrações dos dois primeiros casos.

1º caso. Suponha $b_o \leq b_i$ e $\hat{a} \leq a_i$. Com efeito tomemos \bar{c} tal que $\mu_{C_2}(\bar{c}) = 1$. Neste caso,

o grau de pertinência de \bar{c} no conjunto fuzzy C_2^* com entradas (\hat{a}, b_o) e (\tilde{a}, b_o) são dados, respectivamente, por $\hat{\mu}_{C_2^*}(\bar{c}) = \max\{\hat{\beta}_3, \hat{\beta}_4\}$ e $\tilde{\mu}_{C_2^*}(\bar{c}) = \max\{\tilde{\beta}_3, \tilde{\beta}_4\}$.

Segue diretamente das hipóteses que

$$\mu_{A_2}(\tilde{a}) \stackrel{(i)}{<} \mu_{A_2}(\hat{a}) \leq \mu_{A_2}(a_i) \stackrel{(iii)}{=} \mu_{B_1}(b_i) \stackrel{(ii)}{\leq} \mu_{B_1}(b_o),$$

portanto, segue da definição de β_i que $\hat{\mu}_{C_2^*}(\bar{c}) = \mu_{A_2}(\hat{a})$ e $\tilde{\mu}_{C_2^*}(\bar{c}) = \mu_{A_2}(\tilde{a})$. Logo, pelo item (i) da hipótese, segue que

$$\hat{\mu}_{C_2^*}(\bar{c}) > \tilde{\mu}_{C_2^*}(\bar{c}).$$

2º caso. Suponha $b_i \leq b_o$ e $\tilde{a} \geq a_i$. Tomando \bar{c} tal que $\mu_{C_1} = 1$, então o grau de pertinência de \bar{c} no conjunto fuzzy C_1^* dado por $\hat{\mu}_{C_1^*}(\bar{c}) = \max\{\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2\}$ se a entrada é (\hat{a}, b_o) e $\tilde{\mu}_{C_1^*}(\bar{c}) = \max\{\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2\}$ para entrada (\tilde{a}, b_o) . Por hipótese temos que

$$\mu_{A_1}(\hat{a}) \stackrel{(i)}{<} \mu_{A_1}(\tilde{a}) \leq \mu_{A_1}(a_i) \stackrel{(iii)}{=} \mu_{B_2}(b_i) \stackrel{(ii)}{\leq} \mu_{B_2}(b_o).$$

Portanto, $\hat{\mu}_{C_1^*}(\bar{c}) = \mu_{A_1}(\hat{a})$ e $\tilde{\mu}_{C_1^*}(\bar{c}) = \mu_{A_1}(\tilde{a})$. Novamente, pelo item (i) da hipótese, temos que

$$\hat{\mu}_{C_1^*}(\bar{c}) < \tilde{\mu}_{C_1^*}(\bar{c}).$$

O caso em que $\tilde{a} < a_i < \hat{a}$ segue por combinação dos casos acima. ■

O lema que acabamos de demonstrar é essencial para garantir a existência de um estado de equilíbrio para um sistema p-fuzzy bidimensional em uma região viável de equilíbrio.

O próximo teorema surgiu na tentativa de validar a escolha de um passo para o algoritmo que propomos para a busca de um estado de equilíbrio. No entanto, foram obtidos alguns outros resultados importantes como a existência única de estados de equilíbrio para o sistema p-fuzzy quando a base de regras satisfaz algumas condições. A condição que vamos exigir é que cada variação do sistema p-fuzzy admita um conjunto viável de equilíbrio, ou seja, as variações em alguma região do domínio são determinadas pelas regras

1. Se a está A_1 e b está B_1 então c está C_1
2. Se a está A_1 e b está B_2 então c está C_2 (2)
3. Se a está A_2 e b está B_1 então c está C_3
4. Se a está A_2 e b está B_2 então c está C_4

com os conjuntos fuzzy sucessivos $\{A_k\}_{k=1,2}$ e $\{B_k\}_{k=1,2}$, satisfazendo

1. μ_{A_1} e μ_{A_2} são contínuas e decrescente e crescente em Ω_A respectivamente;
2. μ_{B_1} e μ_{B_2} são contínuas e decrescente e crescente em Ω_B respectivamente;
3. $\mu_{A_1}(a_{min}) > \mu_{A_2}(a_{min}) = 0$, $\mu_{A_2}(a_{max}) > \mu_{A_1}(a_{max}) = 0$ e analogamente para μ_{B_1} e μ_{B_2} ;
4. se $a_i \in \Omega_A$ e $b_i \in \Omega_B$ são tais que $\mu_{A_1}(a_i) = \mu_{A_2}(a_i)$ e $\mu_{B_1}(b_i) = \mu_{B_2}(b_i)$ então $\mu_{A_1}(a_i) = \mu_{B_1}(b_i)$.
5. $C_1 = \text{supp}(C_1 \cup C_2)$ e $C_2 = \text{supp}(C_3 \cup C_4)$ são conjuntos fuzzy com $\text{supp}(C_1) \subset \mathbb{R}_-$ e $\text{supp}(C_2) \subset \mathbb{R}_+$ e $\mu_{C_i^*}$ contínuas.

As funções $\hat{\mu}_{C_1^*}$ e $\tilde{\mu}_{C_2^*}$, são funções de pertinência de c obtidas pela inferência de Mamdani com entradas (\hat{a}, b_o) e (\tilde{a}, b_o) respectivamente.

Teorema 3.4.3. *Seja $\Omega_A = (a_{min}, a_{max})$, o suporte do conjunto viável de equilíbrio A^* , $\Omega_B = \text{supp}(B_1 \cap B_2)$ e $\Delta_c(a, b)$ o centro de massa da região obtida pela inferência de Mamdani através da base de regras (2) no ponto (a, b) . Suponha que as condições (1-5) acima sejam satisfeitas. Então são válidas as seguintes afirmações:*

- (a) $\Delta_c(a_{min}, b_o) < 0$ e $\Delta_c(a_{max}, b_o) > 0$, $b_o \in \Omega_B$;
- (b) existe um único $a^* \in \Omega_A$ tal que $\Delta_c(a^*, b_o) = 0$;
- (c) se $\tilde{a} < a^* < \hat{a}$, \hat{a} e $\tilde{a} \in \Omega_A$ então $\Delta_c(\tilde{a}, b_o) < 0$ e $\Delta_c(\hat{a}, b_o) > 0$.

Demonstração. Seja $\Omega_1 = \text{supp}(C_1)$ e $\Omega_2 = \text{supp}(C_2)$. Por hipótese (item 5) Ω_1 e Ω_2 são disjuntos e, portanto, o centro de massa da região delimitada por $\mu_{C_1^*}$ e $\mu_{C_2^*}$ pode ser calculado pela expressão

$$\Delta_c(a, b) = \frac{\int_{\Omega_1} c \mu_{C_1^*}(c) dc + \int_{\Omega_2} c \mu_{C_2^*}(c) dc}{\int_{\Omega_1} \mu_{C_1^*}(c) dc + \int_{\Omega_2} \mu_{C_2^*}(c) dc}. \quad (3.4)$$

(a) Pelo item 3, $\mu_{A_2}(a_{min}) = 0$, então $\mu_{C_2^*}(c) = 0$ para todo $c \in \Omega_2$, assim

$$\int_{\Omega_2} c \mu_{C_2^*}(c) dc = 0.$$

Portanto a expressão (3.4) se reduz à

$$\Delta_c(a_{min}, b_o) = \frac{\int_{\Omega_1} c \mu_{C_1^*}(c) dc}{\int_{\Omega_1} \mu_{C_1^*}(c) dc}.$$

Mas, como $c\mu_{C_1^*}(c) < 0$ para todo $c \in \Omega_1$, então $\Delta_c(a_{min}, b_0) < 0$. Por outro lado $\mu_{A_1}(a_{max}) = 0$, dessa forma $\mu_{C_1^*}(c) = 0$ para todo $c \in \Omega_1$. Então, a expressão (3.4) se reduz à

$$\Delta_c(a_{max}, b_0) = \frac{\int_{\Omega_2} c\mu_{C_2^*}(c) dc}{\int_{\Omega_2} \mu_{C_2^*}(c) dc}.$$

Como $c\mu_{C_2^*}(c) > 0$ para todo $c \in \Omega_2$, então $\Delta_c(a_{max}, b) > 0$.

(b) As funções de pertinência $\mu_{C_1^*}$ e $\mu_{C_2^*}$ obtidas pela inferência de Mamdani são contínuas para todo $(a, b) \in \Omega_A \times \Omega_B$ já que são definidas por máximos e mínimos das funções μ_{A_i} , μ_{B_i} e μ_{C_i} que são contínuas por hipótese. Dessa forma $\Delta_c(a, b)$ também é contínua (veja [11], página 43) e, pelo item anterior, $\Delta_c(a_{min}, b_0) < 0$ e $\Delta_c(a_{max}, b_0) > 0$. Logo, pelo teorema do valor intermediário, existe $a^* \in \Omega_A$ tal que $\Delta_c(a^*, b_0) = 0$.

Para demonstrar a unicidade vamos considerar $\eta(a, b)$ o numerador da expressão (3.4), ou seja,

$$\eta(a, b) = \int_{\Omega_1} c\mu_{C_1^*}(c) dc + \int_{\Omega_2} c\mu_{C_2^*}(c) dc.$$

Pelo lema 3.4.2, se $\tilde{a} < \hat{a}$ então $\tilde{\mu}_{C_1^*}(c) \geq \hat{\mu}_{C_1^*}(c)$ e $\tilde{\mu}_{C_2^*}(c) \leq \hat{\mu}_{C_2^*}(c)$. Além disso, existe \bar{c} tal que a desigualdade estrita é satisfeita. Como $c < 0$ se $c \in \Omega_1$ e $c > 0$ se $c \in \Omega_2$ concluímos que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} c\hat{\mu}_{C_1^*}(c) dc &> \int_{\Omega_1} c\tilde{\mu}_{C_1^*}(c) dc && \text{e} \\ \int_{\Omega_2} c\hat{\mu}_{C_2^*}(c) dc &> \int_{\Omega_2} c\tilde{\mu}_{C_2^*}(c) dc, \end{aligned}$$

portanto $\eta(\tilde{a}, b_0) < \eta(\hat{a}, b_0)$, ou seja, $\eta(a, b_0)$ é crescente com relação a variável a . Agora $\Delta_c(a^*, b_0) = 0$ se e somente se $\eta(a^*, b_0) = 0$. Dessa forma, supondo que existe \bar{a} tal que $\eta(\bar{a}, b_0) = 0$ temos, pelo fato de $\eta(a, b_0)$ ser crescente, que $\bar{a} = a^*$ e, portanto, a unicidade está garantida.

(c) Como $\eta(a, b_0)$ é crescente, então $\eta(\tilde{a}, b_0) < \eta(a^*, b_0)$ e $\eta(\hat{a}, b_0) > \eta(a^*, b_0)$. Pelo fato do numerador da expressão (3.4) ser sempre positivo, então $\Delta_c(\tilde{a}, b_0) < 0$ e $\Delta_c(\hat{a}, b_0) > 0$. ■

Segue diretamente do teorema acima o seguinte resultado:

Corolário 3.4.4. *Suponhamos que no teorema (3.4.3) $\text{supp}C_1 \subset \mathbb{R}_+$ e $\text{supp}C_2 \subset \mathbb{R}_-$ então:*

(a) $\Delta_c(a_{min}, b_0) > 0$ e $\Delta_c(a_{max}, b_0) < 0$;

(b) se $\tilde{a} < a^* < \hat{a}$, então $\Delta_c(\tilde{a}, b_0) > 0$ e $\Delta_c(\hat{a}, b_0) < 0$.

Demonstração. Substituindo c por $-c$ nas expressões obtidas na demonstração do teorema anterior obtemos as desigualdades dos itens (a) e (b). ■

O que acabamos de demonstrar nos permite concluir que quando existem conjuntos viáveis de equilíbrio A^* e B^* para as variações Δ_x e Δ_y satisfazendo as hipóteses do teorema 3.4.3 ou do Corolário 3.4.4, existem x^* e y^* tais que $\Delta(x^*, y) = \Delta(x, y^*) = 0$. Porém, a existência de um ponto (x^*, y^*) tal que $\Delta(x^*, y^*) = \Delta(x^*, y^*) = 0$ é garantida pelo próximo resultado.

Corolário 3.4.5. *Seja A^* e B^* conjuntos viáveis de equilíbrio para as variações Δ_x e Δ_y do sistema (3.3). Então, existe um único estado de equilíbrio (x^*, y^*) para (3.3) em $R^* = \text{supp}(A^*) \times \text{supp}(B^*)$.*

Demonstração. Pelo teorema 3.4.3, para cada $y \in \text{supp}(B^*)$ existe um único $x \in \text{supp}(A^*)$ tal que $\Delta_x(x, y) = 0$ e para cada $x \in \text{supp}(A^*)$ existe um único $y \in \text{supp}(B^*)$ tal que $\Delta_y(x, y) = 0$. Portanto, as trajetórias $\Delta_x(x, y) = 0$ e $\Delta_y(x, y) = 0$ em R^* são funções contínuas (veja [10]) com domínio em $\text{supp}(B^*)$ e $\text{supp}(A^*)$ respectivamente, isto é $x = g(y)$ e $y = f(x)$. Para mostrar que existe (x^*, y^*) tais que $\Delta_x(x^*, y^*) = \Delta_y(x^*, y^*) = 0$ precisamos mostrar que as funções se interceptam em R^* , ou seja, devemos mostrar que x^* e y^* são tais que $x^* = g(y^*)$ e $y^* = f(x^*)$. Para isso, definamos a função $h(y) = y - f(g(y))$. Como $\text{Im}(f) \subset \text{supp}(B^*)$, então existem y_1 e y_2 tais que $h(y_1) \leq 0 \leq h(y_2)$. Logo, pelo teorema do valor intermediário, existe y^* tal que $h(y^*) = 0$, ou seja, $y^* = f(x^*)$ e $x^* = g(y^*)$. Para a unicidade veja a demonstração em [14]. ■

As funções Δ_x e Δ_y são deriváveis em (x^*, y^*) (veja [14]) e portanto, a análise de estabilidade pode ser feita como no caso discreto determinístico apenas verificando os autovalores de $\mathbf{J}_{(x^*, y^*)}$. Neste caso, o estado de equilíbrio será assintoticamente estável se e somente se $|\text{Re}(\lambda_1)| < 1$ e $|\text{Re}(\lambda_2)| < 1$

Os estados de equilíbrio para um sistema p-fuzzy, dependem unicamente das regras da base de regras associada ao sistema e do domínio de definição das regras.

Se A^* é um conjunto viável de equilíbrio para a variação $\Delta_c(a, b)$, então o conjunto fuzzy λA^* obtido da multiplicação de A^* por λ também é um conjunto viável de equilíbrio para $\Delta_c(a, b)$, já que $\mu_{A^*}(a^*) = \mu_{\lambda A^*}(\lambda a^*)$ (veja página 35), conseqüentemente $\Delta_c(a, b) = \Delta_c(\lambda a, b)$. Além disso, se $a^* \in \text{supp}(A^*)$ é um estado de equilíbrio, então pela igualdade anterior $\lambda a^* \in \text{supp}(\lambda A^*)$ também é um estado de equilíbrio. De uma forma geral temos o seguinte resultado:

Proposição 3.4.6. *Seja $\Delta_c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a variação de um sistema p-fuzzy. $\Delta_c(a^*, b_o) = 0$ em $[a, b]$ se, e somente se, $\Delta_c(\lambda a^*, b_o) = 0$ em $[\lambda a, b]$.*

Esta proposição pode ser útil quando se pretende dar exemplos fictícios de sistemas p-fuzzy e seus pontos de equilíbrio. Num exemplo de fenômeno real, basta multiplicar o domínio por λ que o ponto de equilíbrio também será multiplicado por λ .

Capítulo 4

Dinâmica populacional com sistemas p-fuzzy.

4.1 Introdução

Neste capítulo, temos como objetivo o desenvolvimento de bases de regras para dinâmica populacional de espécies isoladas com crescimento inibido e espécies em interação.

Vimos no capítulo 1 que a natureza da interação entre 2 espécies, modelada por um sistema de equações autônomas na forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xf(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = yg(x, y), \end{cases} \quad (4.1)$$

pode ser definida apenas impondo algumas condições para as funções f e g .

O que pretendemos nesta seção, é estabelecer uma base de regras para um sistema p-fuzzy bidimensional discreto

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \Delta_x(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = y_k + \Delta_y(x_k, y_k), \end{cases} \quad (4.2)$$

com as mesmas informações utilizadas para a modelagem através do sistema (4.1). Isto é, as variações Δ_x e Δ_y devem satisfazer as mesmas condições impostas às funções $F(x, y) = xf(x, y)$ e $G(x, y) = yg(x, y)$. Como as características que definem as interações são dadas pelas derivadas parciais f_y e g_x , o comportamento de $F(x, y)$ e $G(x, y)$ com relação à y e

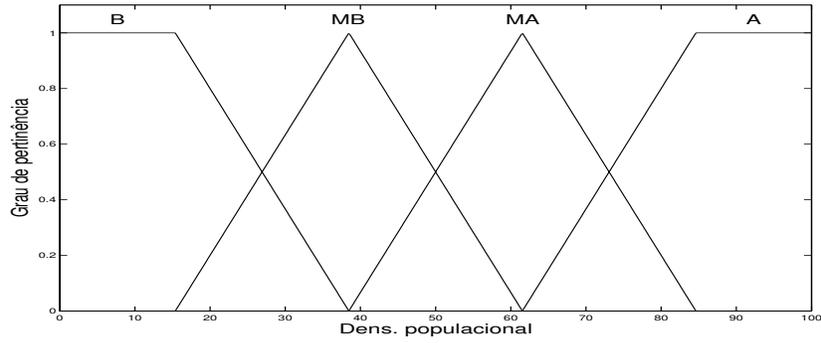
x , respectivamente, são semelhantes a das funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$, uma vez que

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = x \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial G(x, y)}{\partial y} = y \frac{\partial g(x, y)}{\partial x}.$$

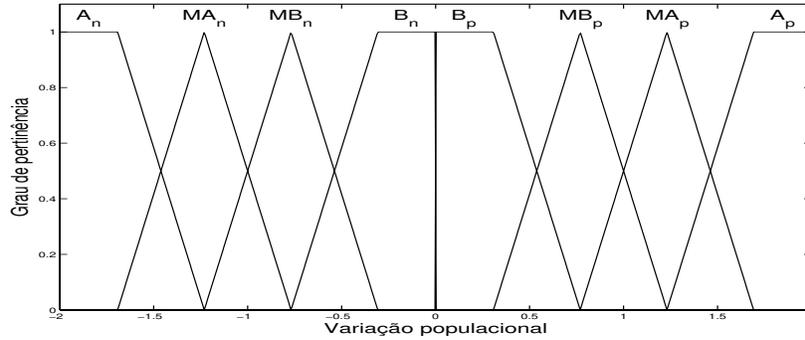
Por todo este capítulo serão usados os conjuntos de termos linguísticos $T_p = \{baixa, \text{média baixa}, \text{média alta}, alta\}$ e $T_{\Delta_p} = \{alta \text{ negativa}, \text{média alta negativa}, \text{média baixa negativa}, baixa \text{ negativa}, baixa \text{ positiva}, \text{média baixa positiva}, \text{média alta positiva}, alta \text{ positiva}\}$ para determinar os estados subjetivos assumidos pelas variáveis linguísticas *população* e *variação da população* de ambas as espécies. Os conjuntos fuzzy de cada termo linguístico estão representados na figura 4.1(a-b) onde a abreviação é evidente.

O fato de o domínio de ambas as espécies serem iguais nos exemplos apresentados neste capítulo, pode biologicamente não fazer sentido. No entanto, da proposição 3.4.6 no capítulo anterior, as análises quanto aos estados de equilíbrio aqui apresentadas são semelhantes para qualquer múltiplo dos domínios das variáveis *população* e *variação da população* deste capítulo.

Neste capítulo, também apresentaremos um algoritmo baseado em regras fuzzy para a determinação do estado de equilíbrio de um sistema p-fuzzy bidimensional. Além disso, faremos o ajuste de parâmetros para alguns modelos determinísticos a partir das bases de regras apresentadas



(a)



(b)

Figura 4.1: Conjuntos fuzzy para os termos linguísticos: (a) termos linguísticos T_p ; (b) termos linguísticos T_{Δ_p} .

4.2 Base de regras para espécie isolada com crescimento inibido

Como vimos na seção anterior, as partes fundamentais na modelagem através de um sistema p-fuzzy são a base de regras e os termos linguístico que definem subjetivamente os estados das variáveis. É na base de regras que estão incorporadas as informação do fenômeno modelado. Quanto mais precisas forem estas informações, melhor determinados estão os estados assumidos pelas variáveis de entrada e saída e, conseqüentemente, maior o número de termos linguísticos. Neste caso, a base de regras também pode incorporar mais regras, de modo que o sistema p-fuzzy descreve mais detalhadamente o fenômeno.

Nesta seção vamos elaborar um conjunto de regras básicas para modelos de dinâmica populacional de espécies isoladas, em particular espécies com crescimento inibido.

Os modelos com crescimento inibido são aqueles que pressupõe a existência de uma capacidade suporte k , geralmente determinada por fatores ambientais e intrínscos à espécie.

Como vimos no capítulo 1, quando a população está acima da capacidade suporte, então o número de indivíduos da espécie diminui, de modo que temos uma variação negativa. O contrário acontece quando o número de indivíduos é menor do que k (veja 4.2).



Figura 4.2: Campo de variações: (\leftarrow) variação negativa; (\rightarrow) variação positiva

Esta relação entre variáveis e variação pode ser determinada por uma equação

$$\frac{dp}{dt} = f(p)$$

que pode ser aproximada, por discretização, resultando em $p_{t+h} = p_t + hf(p)$, $h > 0$. Se $p_t < k$, então $f(p_t) > 0$ e se $p_t > k$, $f(p_t) < 0$.

No entanto, se a dinâmica populacional de uma espécie é somente parcialmente conhecida, a capacidade suporte não pode ser precisamente determinada e, como consequência, também não sabemos com exatidão quando a variação é positiva ou negativa. Porém, é possível dizer que quando o número de indivíduos é *muito grande* a população decresce.

Isto sugere que usemos termos linguísticos para fazer a relação entre a população p e a variação $f(p)$, ou seja, devemos determinar o campo determinístico f por um controlador fuzzy. Para a escolha das regras que vão formar a base de regras para dinâmica populacional com crescimento inibido, vamos levar em consideração a hipótese geral sobre variação absoluta para dinâmicas com crescimento inibido, ou seja, que a variação absoluta é crescente no início atingindo um valor máximo a partir do qual decresce assumindo valores negativos, quando a capacidade suporte é ultrapassada.

Vamos utilizar o conjunto de termos linguísticos $T_p = \{baixa, \text{média baixa}, \text{média}, \text{média alta}, \text{alta}, \text{altíssima}\}$ para determinar subjetivamente os estados assumidos pela variável população e $T_{\Delta p} = \{baixa negativa, baixa positiva, média positiva, alta positiva\}$ para os estados assumidos pela variável linguística *variação da população*. Considerando A_i e B_i os conjuntos fuzzy para os termos linguísticos dos conjuntos T_P e $T_{\Delta p}$, uma base de regras para dinâmica populacional com crescimento inibido pode ser dada pelas 6 regras seguintes:

1. se a população é *baixa* (B) então a variação é *baixa positiva* (B_p);
2. se a população é *média baixa* (MB) então a variação é *média positiva* (M_p);
3. se a população é *média* (M) então a variação é *alta positiva* (A_p);

4. se a população é *média alta* (MA) então a variação é *média positiva* M_p ; (1)
5. se a população é *alta* (A) então a variação é *baixa positiva* (B_p);
6. se a população é *altíssima* (AL) então a variação é *baixa negativa* (B_n).

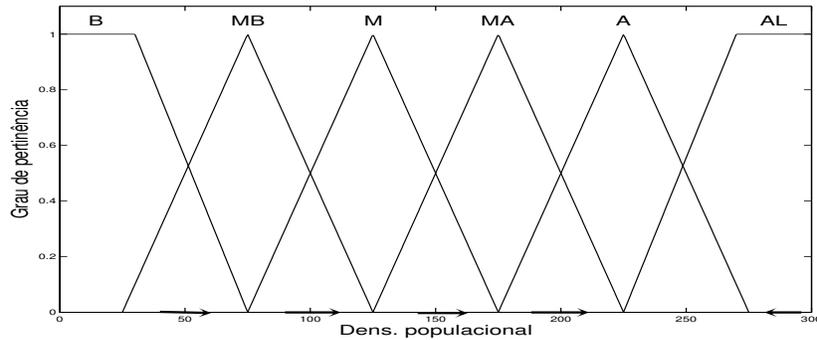


Figura 4.3: Conjuntos fuzzy dos termos linguísticos da variável *população* T_p .

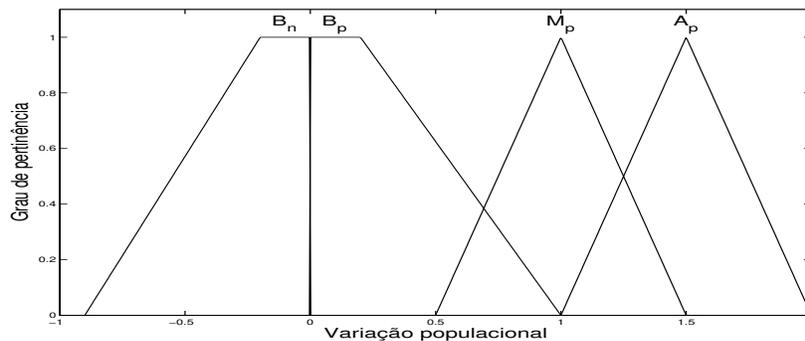


Figura 4.4: Conjuntos fuzzy dos termos linguísticos da variável *variação da população* $T_{\Delta p}$.

As figuras 4.3 e 4.4 são exemplos de conjuntos fuzzy A_i e B_i . A base de regras está representada no domínio da variável população. As flechas apontadas para a direita (esquerda) na figura 4.3 simbolizam variações positivas (negativas). Observemos que enquanto a população não atingir um valor *altíssimo* a variação é sempre positiva, ou seja, a população está crescendo.

Conforme podemos ver na figura 4.5, o sistema p-fuzzy com controlador fuzzy alimentado através da base regras (1) e termos linguísticos como nas figuras 4.3 e 4.4, gera uma sequência limitada como esperado. O conjunto viável de equilíbrio para a base de regras (1) é $A^* = A \cap AL$, portanto existe $x^* \in \text{supp}(A^*) = (240, 260)$ tal que $\Delta(x^*) = 0$, isto é,

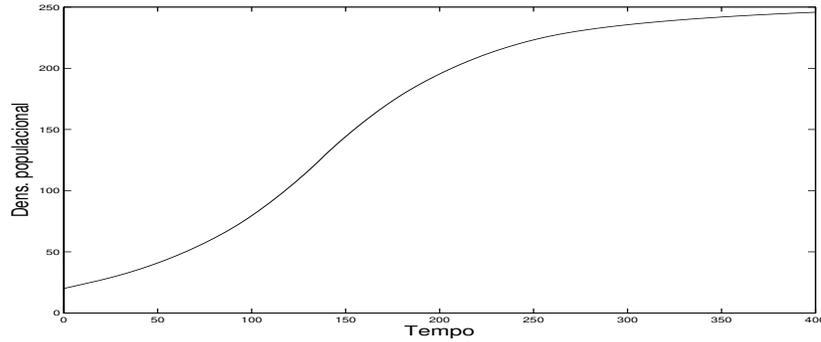


Figura 4.5: Solução do sistema p-fuzzy pela base de regras (1) e termos linguísticos como nas figuras 4.3 e 4.4

o sistema p-fuzzy está em estado de equilíbrio, mais precisamente, $x^* = 248.71$. Como o conjunto fuzzy A^* satisfaz as condições do teorema 3.3.4 então, x^* é único.

A base de regras (1) fornece a variação absoluta da população em cada instante de tempo. No entanto, é possível também o comportamento de uma dinâmica populacional com crescimento inibido através de uma base de regras que define a variação relativa. Neste caso, a iteração não é feita por um sistema p-fuzzy, mas por um sistema iterativo da forma

$$x_{k+1} = (1 + \Delta(x_k))x_k$$

onde $\Delta(x_k)$ é fornecido por um controlador fuzzy. Obviamente, as bases de regras para variações absolutas e relativas não devem ser as mesmas. Neste caso, as informações para a montagem da base de regras deve ser coerente com as características de variação relativa para crescimento inibido, ou seja, a variação deve ser decrescente com relação à população. No exemplo a seguir elaboramos uma base de regras para a variação relativa.

Exemplo 4.2.1. Consideremos o conjunto de termos linguísticos T_p para a variável de entrada análogo ao da base regras (1) e para a variável de saída $T_{\Delta_{prel}} = \{baixa\ negativa, baixa\ positiva, média\ baixa\ positiva, média\ positiva, média\ alta\ positiva, alta\ positiva\}$. Consideremos também $T_{\Delta_{prel}}$ modelado pelos conjuntos fuzzy sucessivos conforme figura 4.6. A base de regras que estabelecemos abaixo leva em consideração as características de uma variação relativa para crescimento inibido:

1. se a população é B então a variação é A_p ;
 2. se a população é MB então a variação é MA_p ;
 3. se a população é M então a variação é M_p ;
- (2)

4. se a população é MA então a variação é MB_p ;
5. se a população é A então a variação é B_p ;
6. se a população é AL então a variação é B_n .

A figura 4.7a mostra a trajetória da sequência gerada pelo sistema iterativo $x_{k+1} = (1 + \Delta(x_k))x_k$.

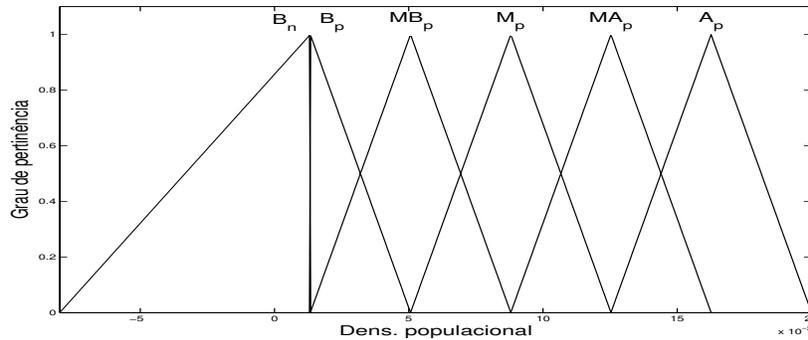
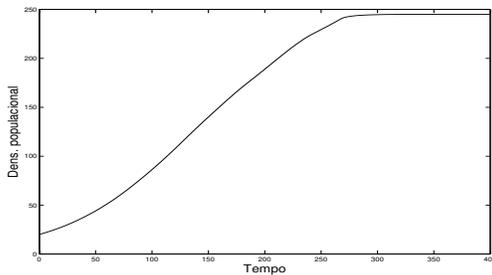
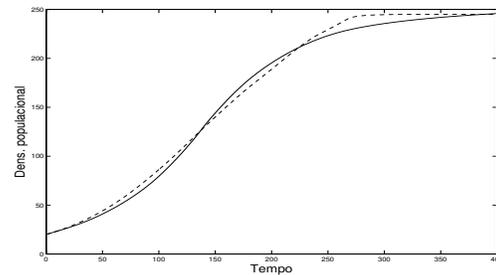


Figura 4.6: Conjuntos fuzzy dos termos linguísticos da variável *variação relativa da população* $T_{\Delta_{prel}}$.



(a)



(b)

Figura 4.7: Crescimento inibido: (a) trajetória do sistema iterativo com variação relativa (base de regras (2)); (b) trajetórias geradas com variação relativa (linha segmentada) e absoluta (linha contínua).

4.3 Ajuste de parâmetros

A base de regras fornece um conjunto de dados através do controlador fuzzy que pode ser usado para estimativa de parâmetros de campos determinísticos. Nesta seção, vamos

utilizar o método dos mínimos quadrados para obter parâmetros de campos determinísticos para dinâmica populacional com crescimento inibido.

Dado um conjunto de dados $\{(x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ o método dos quadrados mínimos consiste em encontrar $z_o \in \mathbb{R}^m$ que minimiza a soma

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i, z) - y_i|^2.$$

Se f é uma combinação linear de funções, $f(x, z) = \sum_{k=1}^m z_k f_k(x)$, então o problema equivalente à soma acima é determinar $z_o \in \mathbb{R}^m$ que minimiza a norma usual em \mathbb{R}^2 do resíduo

$$r = Az - y$$

onde $z = (z_1, z_2, \dots, z_m) \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ com $a_{i,j} = f_j(x_i)$. Quando $n > m$, se as colunas de A são linearmente independentes, então existe uma única solução para o problema de quadrados mínimos (veja [23]). Tal solução é dada por

$$z_o = (A^t A)^{-1} A^t y$$

Exemplo 4.3.1. Consideremos o modelo de Verhulst para dinâmica populacional de espécies isoladas. A variação absoluta neste modelo é dada por

$$f(x) = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) = z_1 x + z_2 x^2$$

onde $z_1 = r$ e $z_2 = -r/k$. A solução do problema de quadrados mínimos para $x = (0, 1, 2, \dots, 300)$ e $y = \Delta_x(x)$ obtido por controlador fuzzy é, $z_1 = 0.0185$ e $z_2 = 0.7^{-5}$ que é única pois as colunas de A , formadas por x e x^2 , são linearmente independentes.

Na figura 4.8 temos as soluções do modelo de Verhulst (segmentada) com $r = 0.18$ e $k = 257$ e p-fuzzy (contínua) com condição inicial $x_o = 20$. A trajetória pontilhada é a sequência gerada pelo modelo discreto de May com os mesmos parâmetros acima.

Exemplo 4.3.2. A variação do modelo de Montroll é dada por

$$f(x) = rx \left[1 - \left(\frac{x}{k}\right)^\beta\right].$$

Os parâmetros r , k e β podem ser obtidos por minimização de $F(r, k, \beta) = \sum_{i=1}^n |f(x_i) - \Delta_x(x_i)|^2$. Para $x = (0, 1, 2, \dots, 300)$ temos $r = 0.023$, $k = 257.707$ e $\beta = 0.648$. A solução do modelo de Montroll com estes parâmetros pode ser vista na figura 4.8.

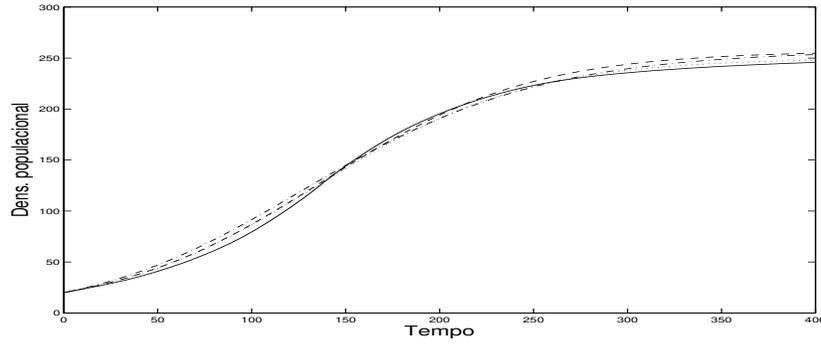
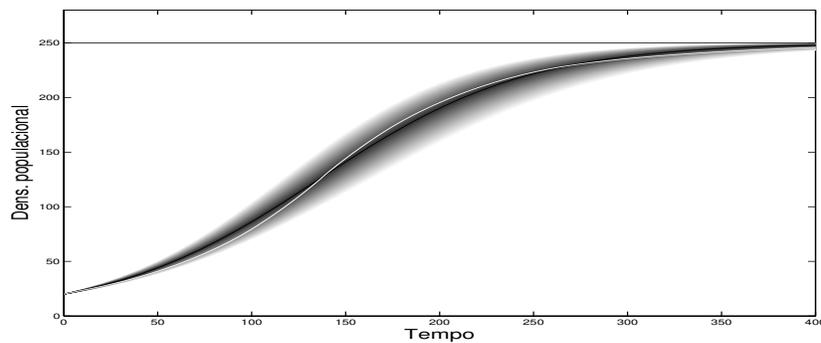


Figura 4.8: Ajuste de parâmetros: soluções dos modelos de Verhulst (segmentada), May (pontilhada), Montroll (ponto-segmentada) e p-fuzzy (linha contínua).

Como podemos observar na figura 4.8, as soluções de modelos determinísticos contínuos e discretos apresentam comportamentos semelhantes ao modelo p-fuzzy.

Exemplo 4.3.3. Podemos considerar o parâmetro intrínseco de crescimento do modelo de Verhulst como sendo um número triangular fuzzy com $\hat{r} = (0.015/0.018/0.021)$ conforme capítulo 2. Neste caso, usando o método da extensão de Zadeh do fluxo determinístico apresentado no capítulo 2, obtemos a solução fuzzy da figura 4.9.

Observemos que a solução do sistema p-fuzzy (linha branca na figura 4.9) pertence ao suporte do conjunto fuzzy obtido pela extensão do fluxo.



(b)

Figura 4.9: Solução fuzzy do modelo de Verhulst com $\hat{r} = (0.015/0.018/0.021)$ e condição inicial $x_o = 20$.

4.4 Algoritmo para busca de estado de equilíbrio para sistemas p-fuzzy.

Consideremos o sistema p-fuzzy bidimensional

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \Delta_x(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = y_k + \Delta_y(x_k, y_k). \end{cases} \quad (4.3)$$

Como vimos na seção 3.4 do capítulo anterior, o sistema (4.3) admite um estado de equilíbrio em uma região R^* se os conjuntos fuzzy da base de regras satisfazem as hipóteses do teorema 3.4.3. Exceto no caso em que os conjuntos fuzzy das variáveis de saídas são simétricos, isto é, $\mu_{C_1}(-c) = \mu_{C_2}(c)$ o estado de equilíbrio não é fácil de ser determinado. A dificuldade se torna ainda maior se o estado de equilíbrio é instável.

O que propomos nesta seção é um algoritmo para aproximação numérica do estado de equilíbrio, baseado nas regras do sistema (4.3), que é equivalente a encontrar o minimizador de $\|\Delta_{xy}(x, y)\|$ com $\Delta_{xy} = (\Delta_x, \Delta_y)$. O algoritmo aqui proposto consiste em determinar uma aproximação $\tilde{v}_{k+1} = (\tilde{x}_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})$ a partir de um determinado \tilde{v}_k de modo que $\|\Delta_{xy}(\tilde{v}_{k+1})\| < \|\Delta_{xy}(\tilde{v}_k)\|$. Para isso dado \tilde{v}_k , devemos encontrar uma *direção de descida* $d_k = (d_1(\tilde{v}_k), d_2(\tilde{v}_k))$ tal que $\tilde{v}_{k+1} = \tilde{v}_k + d_k$ ou, ainda,

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = \tilde{x}_k + d_1(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) \\ \tilde{y}_{k+1} = \tilde{y}_k + d_2(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) \end{cases} \quad (4.4)$$

Embora algoritmos para minimizar funções que usam direções de descidas seja bem conhecidos e estruturados matematicamente, conforme vemos em [4] e [13], entretanto, aqui não podemos utilizar tais métodos. Para garantir a convergência, eles dependem do valor da derivada da função em cada iteração, o que pode não ser o caso de $\|\Delta_{xy}(v_k)\|$. Então, um método para minimizar $\|\Delta_{xy}(v_k)\|$ onde Δ_{xy} é dado por regras fuzzy, deve levar em consideração a possibilidade dela não ser derivável.

A proposição a seguir fornece uma condição suficiente para garantir a convergência do sistema (4.4).

Proposição 4.4.1. *Se a série $\sum_{k=1}^{\infty} \|d_k\|$ converge, então a sequência gerada pelo sistema (4.4) converge.*

Demonstração. Seja $\tilde{v}_k = (\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)$ e $d_k = (d_1(\tilde{v}_k), d_2(\tilde{v}_k))$. A sequência gerada pelo

sistema (4.4) é dada por

$$\tilde{v}_k = \tilde{v}_1 + \sum_{i=1}^{k-1} \|d_i\|.$$

Colocando $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n-1} \|d_i\|$, então se $n > m$,

$$\|\tilde{v}_n - \tilde{v}_m\| = \left\| \sum_{i=m}^{n-1} d_i \right\| \leq \sum_{i=m}^{n-1} \|d_i\| = |\sigma_n - \sigma_m| \leq |\sigma_n - \sigma| + |\sigma - \sigma_m|$$

onde σ é o limite da série $\sum \|d_k\|$. Dessa forma, tomando o limite em m e n , temos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\tilde{v}_n - \tilde{v}_m\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma_n - \sigma| + \lim_{m \rightarrow \infty} |\sigma - \sigma_m| = 0.$$

Como \mathbb{R}^2 é completo, então a sequência \tilde{v}_k é convergente, ou seja, existe $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\bar{v} = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{v}_k,$$

o que confirma a proposição. ■

A proposição que acabamos de demonstrar é fundamental para o desenvolvimento do algoritmo, uma vez que agora podemos determinar uma condição para a convergência da série de valores reais $\sum \|d_k\|$. O teste da razão nos garante que se existir uma constante α tal que

$$\frac{\|d_{k+1}\|}{\|d_k\|} \leq \alpha < 1 \tag{4.5}$$

então a série $\sum \|d_k\|$ será absolutamente convergente e, como consequência, convergente ([12]). Sendo assim, vamos pedir que o passo d_k satisfaça (4.5).

No entanto, somente a convergência do sistema (4.4) não é suficiente para garantir que $\|\Delta_{xy}(v_k)\| \rightarrow 0$, pois pode ocorrer que o passo d_k convirja a zero antes mesmo que Δ_{xy} . Sendo assim, vamos exigir que $\|d_k\| \geq \beta \|\Delta_{xy}(v_k)\|$ para algum $\beta > 0$.

Agora já podemos estabelecer um algoritmo incorporando as informações citadas anteriormente.

Algoritmo 4.4.2. *Seja $\alpha \in (0, 1)$ e $\beta > 0$. Dado \tilde{v}_k tal que $\|\Delta_{xy}(\tilde{v}_k)\| > 0$, então a nova aproximação \tilde{v}_{k+1} é encontrada através dos seguintes passos:*

1º passo: encontrar d_k satisfazendo:

$$\|d_{k+1}\| \leq \alpha \|d_k\| \quad \text{e} \quad \|d_k\| \geq \beta \|\Delta_{xy}(\tilde{v}_k)\|$$

2º passo: *calcular a nova aproximação*

$$\tilde{v}_{k+1} = \tilde{v}_k + d_k$$

3º passo: *verificar se $\|\Delta_{xy}(\tilde{v}_{k+1})\| = 0$. Caso contrário, retornar ao 1º passo.*

O teorema a seguir garante a convergência do algoritmo para um ponto de equilíbrio do sistema (4.3).

Teorema 4.4.3. *A sequência \tilde{v}_k gerada pelo algoritmo 4.4.2 é tal que:*

- (a) $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{v}_k = \bar{v}$;
- (b) $\|\Delta_{xy}(\bar{v})\| = 0$.

Demonstração:

(a) como $\|d_{k+1}\| \leq \alpha \|d_k\|$, para todo $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < 1$, então $\sum \|d_k\|$ converge. Logo, pela proposição (4.4.1), existe \bar{v} tal que

$$\bar{v} = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{v}_k.$$

(b) Sabemos que $\|\Delta_{xy}(\tilde{v}_k)\| \leq \beta \|d_k\|$. Portanto

$$\|\Delta_{xy}(\bar{v})\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\Delta_{xy}(\tilde{v}_k)\| \leq \beta \lim_{k \rightarrow \infty} \|d_k\| = \beta \lim_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{v}_{k+1} - \tilde{v}_k\| = 0,$$

logo $\|\Delta_{xy}(\bar{v})\| = 0$, o que prova (b). ■

Observemos que a condição $\|d_{k+1}\| \leq \alpha \|d_k\|$ é suficiente para a convergência do algoritmo 4.4.2 e não necessária. O exigido é que a sequência \tilde{v}_k gerada pelo algoritmo seja convergente pois, neste caso, $\|d_k\| \rightarrow 0$ e, portanto, o item (b) do teorema acima continua válido.

A escolha da direção do passo em algoritmos de minimização é fundamental para a convergência de maneira eficiente para o ponto desejado. Entretanto, tal direção nem sempre é fácil de ser determinada. Em geral, esta escolha leva em consideração a direção do gradiente da função. Para encontrar o estado de equilíbrio de uma base de regras, no entanto, a direção do passo pode ser facilmente identificada apenas verificando os sinais das variações Δ_x e Δ_y em um dado ponto $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)$ conforme garantido pelo item (c) do teorema 3.4.3.

Exemplo 4.4.4. Como veremos nas próximas seções, as variações do sistema p-fuzzy na região viável de equilíbrio para interação do tipo *presa-predador* pela base de regras da figura 4.17 são dadas pelas regras:

1. Se x é MB e y é MB então Δ_x é MB_p e Δ_y é MB_n ;
2. Se x é MB e y é MA então Δ_x é MB_n e Δ_y é MB_n ;
3. Se x é MA e y é MB então Δ_x é MB_p e Δ_y é MB_p ;
4. Se x é MA e y é MA então Δ_x é MB_n e Δ_y é MB_p .

Os conjuntos viáveis de equilíbrio $A^* = B^* = MB \cap MA$ satisfazem as condições do teorema 3.4.3, portanto pelo item (c) do mesmo teorema, temos que: se $x_1 < x^* < x_2$, então $\Delta_y(x_1, y) < 0 < \Delta_y(x_2, y)$ e, pelo corolário 3.4.4, se $y_1 < y^* < y_2$, então $\Delta_x(x, y_2) < 0 < \Delta_x(x, y_1)$. Dessa forma, é possível determinar a localização de um ponto (\bar{x}, \bar{y}) com relação à (x^*, y^*) , apenas verificando os sinais de $\Delta_x(\bar{x}, \bar{y})$ e $\Delta_y(\bar{x}, \bar{y})$, conseqüentemente, a escolha da direção do passo pode ser baseada nesta informação.

É importante observar que se $\bar{x} \approx x^*$, então $\Delta_y(\bar{x}, y) \approx 0$ e, se $\bar{y} \approx y^*$, então $\Delta_x(x, \bar{y}) \approx 0$. Neste caso, o passo escolhido para este exemplo em particular será: $d_k = 10(-\Delta_y(\bar{v}_k), \Delta_x(\bar{v}_k))$. A segunda condição exigida para o passo do algoritmo 4.4.2 é satisfeita, uma vez que $\|d_k\| = 10\|\Delta_{xy}(\bar{v}_k)\|$. A primeira condição, $\|d_{k+1}\| \leq \alpha\|d_k\|$, também é satisfeita conforme podemos observar na figura 4.11.

A sequência gerada pelo algoritmo com aproximação inicial (42, 61) pode ser vista na figura 4.10a. O ponto obtido após 67 iterações é $(\bar{x}, \bar{y}) = (49.9995, 50.0005)$ com $\|\Delta_{xy}(\bar{x}, \bar{y})\| \leq 10^{-10}$. A figura 4.10b mostra a sequência no plano de fase; podemos observar que a direção escolhida para o passo segue aproximadamente a direção da reta ligando a aproximação inicial e o estado de equilíbrio.

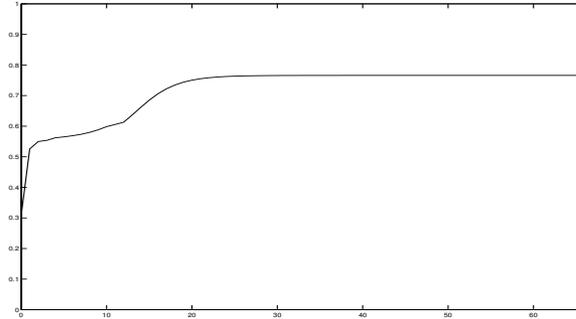


Figura 4.11: Gráfico de $\alpha_k = \|d_k\|/\|d_{k+1}\|$.

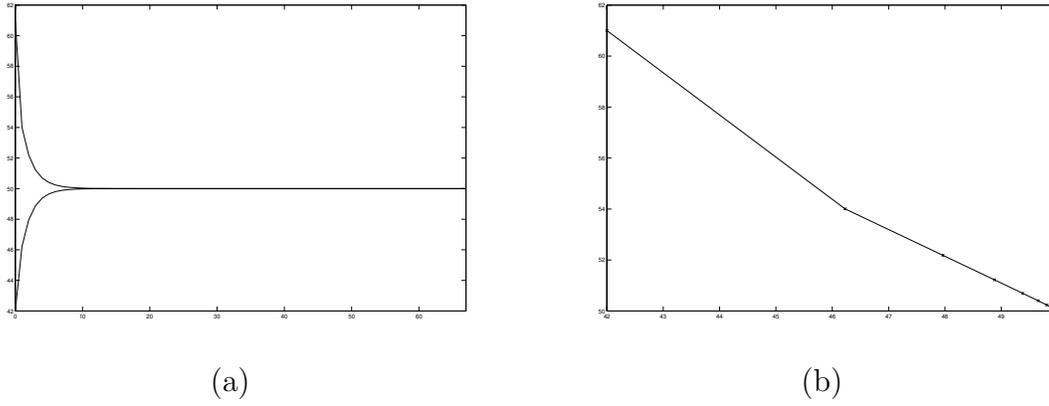


Figura 4.10: Sequência gerada pelo algoritmo 4.4.2 com aproximação inicial (42, 61).
(a) Interação *versus* aproximação. (b) Sequência no plano de fase

4.5 Modelo p-fuzzy para interações do tipo competição

O modelo geral proposto por Kolmogorov considera que a variação populacional de uma espécie é decrescente com relação a outra quando as espécies estão em competição. Além disso, se a interação é facultativa para ambas as espécies, então é assumido que existe uma capacidade suporte para cada espécie.

Devido à competição interespecífica, é razoável considerarmos que as populações de ambas as espécies crescem de forma inibida, quando ausentes da interação, isto é, a variação absoluta é crescente quando as densidades populacionais são baixas, porém decrescentes à partir de um valor atingido pela densidade populacional.

Se considerarmos os termos linguísticos das variáveis de entrada e saída dados pelos conjuntos T_p e T_{Δ_p} , respectivamente, então uma base de regras que satisfaz as condições de uma interação do tipo competição pode ser dada pelas 16 regras abaixo:

1. Se x é B e y é B então Δ_x é MA_p e Δ_y é MA_p ;
2. Se x é B e y é MB então Δ_x é MA_p e Δ_y é A_p ;
3. Se x é B e y é MA então Δ_x é MB_p e Δ_y é MB_p ;
4. Se x é B e y é A então Δ_x é B_p e Δ_y é B_n ;
5. Se x é MB e y é B então Δ_x é A_p e Δ_y é MA_p ;
6. Se x é MB e y é MB então Δ_x é MB_p e Δ_y é MB_p ;
7. Se x é MB e y é MA então Δ_x é B_p e Δ_y é B_n ;

8. Se x é MB e y é A então Δ_x é B_n e Δ_y é MB_n ;
9. Se x é MA e y é B então Δ_x é MB_p e Δ_y é MB_p ;
10. Se x é MA e y é MB então Δ_x é B_n e Δ_y é B_p ;
11. Se x é MA e y é MA então Δ_x é MB_n e Δ_y é MB_n ;
12. Se x é MA e y é A então Δ_x é MA_n e Δ_y é MA_n ;
13. Se x é A e y é B então Δ_x é B_n e Δ_y é B_p ;
14. Se x é A e y é MB então Δ_x é MB_n e Δ_y é B_n ;
15. Se x é A e y é MA então Δ_x é MA_n e Δ_y é MB_n ;
16. Se x é A e y é A então Δ_x é A_n e Δ_y é A_n ;

Graficamente, podemos representar esta base de regras no “campo vetorial” delimitado pelo domínio das variáveis *população* conforme a figura 4.12. Podemos observar na figura 4.13(a-b) que as variações da população da espécie 1 é decrescente com relação à espécie 2 e, analogamente, para a variação da população da espécie 2.

A área destacada na figura 4.12 é a região viável de equilíbrio do sistema p-fuzzy. Nesta região, as variações do sistema são dadas pelas regras

1. Se x é MB e y é MB então Δ_x é MB_p e Δ_y é MB_p ;
2. Se x é MB e y é MA então Δ_x é B_p e Δ_y é B_n ;
3. Se x é MA e y é MB então Δ_x é B_n e Δ_y é B_p ;
4. Se x é MA e y é MA então Δ_x é MB_n e Δ_y é MB_n .

Os conjuntos fuzzy $A^* = B^* = MB \cap MA$, são conjuntos viáveis de equilíbrio para as variações Δ_x e Δ_y , respectivamente. Ambos os conjuntos satisfazem as hipóteses do teorema 3.4.3 e do corolário 3.4.4. Logo, pelo corolário 3.4.5 existe um único estado de equilíbrio em $R^* = \text{supp}(A^* \cap B^*)$ para o sistema p-fuzzy com a base de regras da figura 4.12. Considerando o domínio das variáveis conforme a figuras 4.1(a-b) na página 61, o estado de equilíbrio não nulo é $(50, 50)$. A capacidade suporte das espécies em isolamento é $k_1 = k_2 = 79.53$.

Os autovalores da matriz jacobiana no estado de equilíbrio não nulo são $\lambda_1 = 0.98$ e $\lambda_2 = 0.97$, portanto (x^*, y^*) é assintoticamente estável.

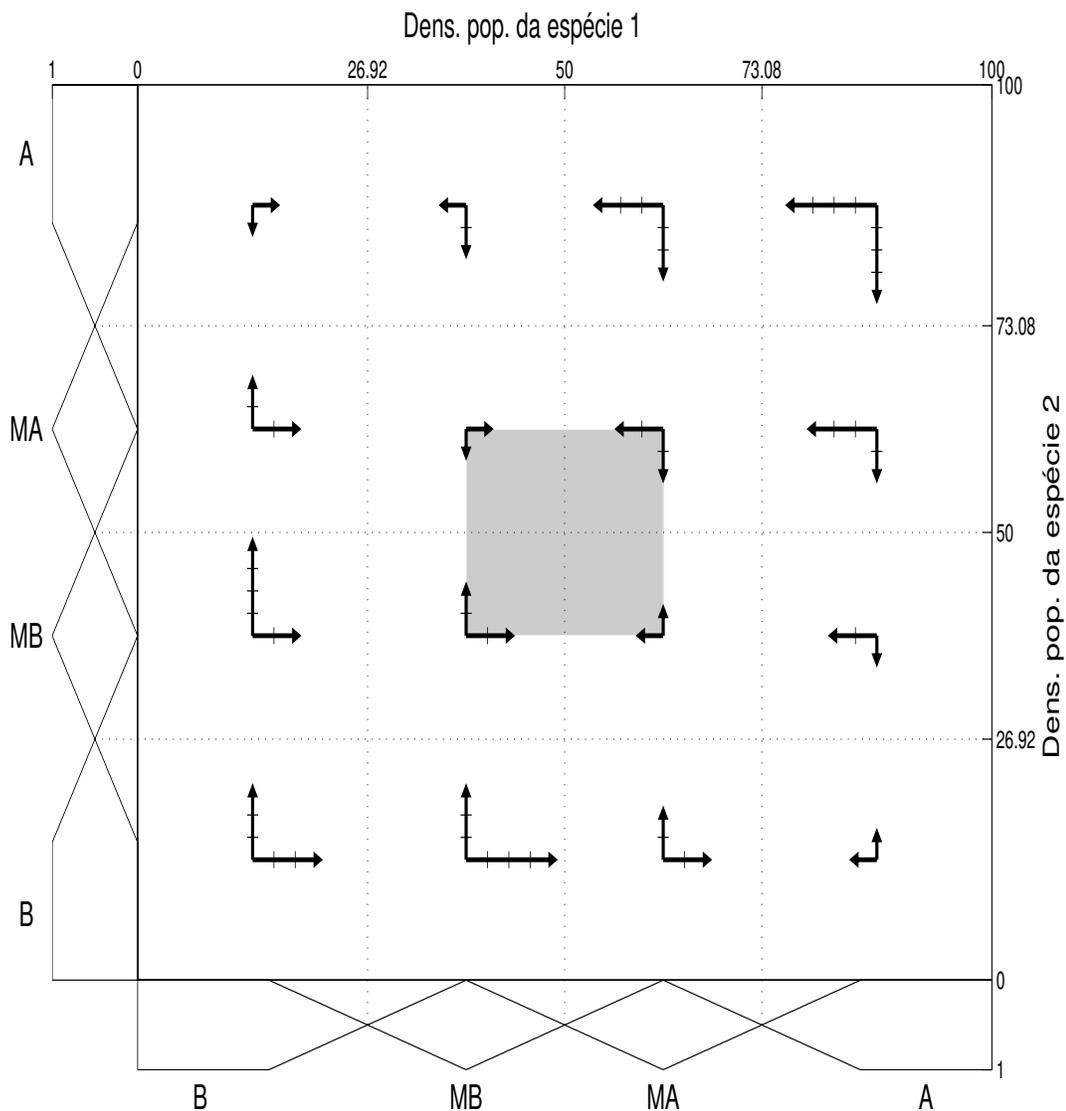
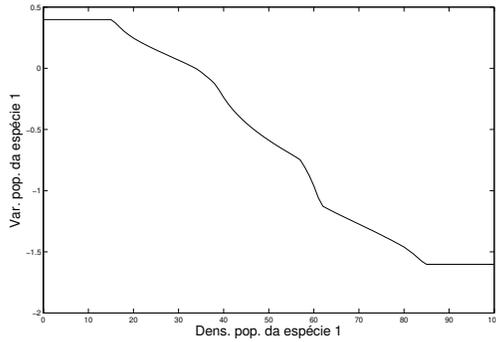


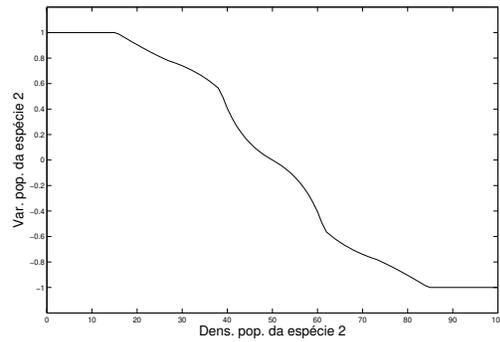
Figura 4.12: Base de regras para interações do tipo *competição*. As variações negativas são representadas pelos símbolos \downarrow e \leftarrow enquanto que variações positivas são representadas por \uparrow e \rightarrow

As figuras 4.14(a-b) são as soluções do sistema p-fuzzy para espécies 1 e 2, respectivamente. A trajetória segmentada representa a dinâmica populacional das espécies em isolamento, enquanto que a trajetória contínua é a dinâmica de cada espécie em interação. Como é de característica de espécies em competição, as densidades populacionais das espécies 1 e 2 se estabilizam em valores inferiores à sua respectiva capacidade suporte.

Embora a interação seja de competição, a densidade populacional de ambas as espécies



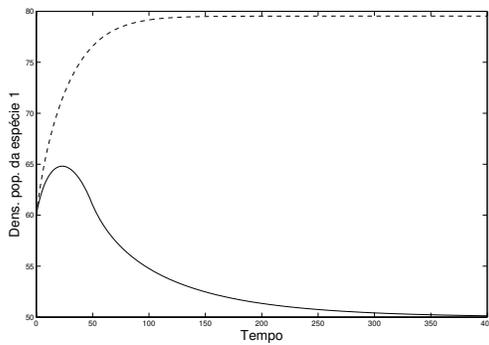
(a)



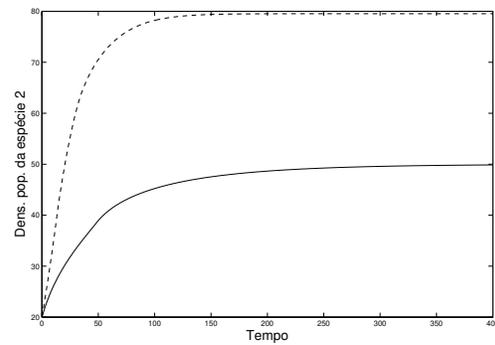
(b)

Figura 4.13: Variações de uma espécie com relação a outra: (a) variação da espécie 1 com relação a espécie 2; (b) variação da espécie 2 com relação a espécie 1.

é crescente no início. Isto se deve ao fato de que a contribuição negativa para a espécie 1, provocada pela interação com a espécie 2, é menor inicialmente do que o crescimento populacional da espécie 1.



(a)



(b)

Figura 4.14: Solução do modelo p-fuzzy pela base de regras da figura 4.12. (a) espécie 1 em isolamento (segmentada) e em interação (linha contínua); (b) espécie 2 em isolamento (segmentada) e em interação (linha contínua).

4.6 Modelo p-fuzzy para interações do tipo *presa-predador*

Uma interação do tipo presa-predador tem como característica principal ser prejudicial para uma espécie e benéfica à outra. Quando a interação é facultativa para ambas as espécies então as densidades populacionais de presas e predadores são limitadas por suas

respectivas capacidades suporte. Neste caso, a densidade populacional dos predadores é maior no estado de equilíbrio não nulo do que sua capacidade suporte; por outro lado, a densidade populacional das presas é menor no estado de equilíbrio do que a capacidade suporte.

De modo geral, a interação é obrigatória para os predadores, isto é, a presença de presas é essencial para a sobrevivência dos predadores.

De acordo com o Modelo geral de Kolmogorov, para uma interação do tipo *presa-predador* as variações populacionais devem satisfazer basicamente duas condições:

1. a variação populacional para presas é decrescente com relação a população de predadores ($\frac{\partial f}{\partial y} < 0$);
2. a variação populacional para predadores é crescente com relação a população de presas ($\frac{\partial g}{\partial x} > 0$).

Para estabelecimento de uma base de regras para interações do tipo *presa-predador*, vamos considerar ainda que a interação é facultativa para as presas, de modo que: se a densidade populacional de presas for alta, então a variação em sua população será negativa. A base de regras a seguir incorpora todas as informações essenciais expostas acima:

1. Se x é B e y é B então Δ_x é MB_p e Δ_y é MA_p ;
2. Se x é B e y é MB então Δ_x é MA_p e Δ_y é A_p ;
3. Se x é B e y é MA então Δ_x é MB_p e Δ_y é MB_p ;
4. Se x é B e y é A então Δ_x é B_n e Δ_y é B_n ;
5. Se x é MB e y é B então Δ_x é A_p e Δ_y é MA_p ;
6. Se x é MB e y é MB então Δ_x é MB_p e Δ_y é MB_p ;
7. Se x é MB e y é MA então Δ_x é B_p e Δ_y é B_n ;
8. Se x é MB e y é A então Δ_x é B_n e Δ_y é MB_n ;
9. Se x é MA e y é B então Δ_x é MB_p e Δ_y é MB_p ;
10. Se x é MA e y é MB então Δ_x é B_n e Δ_y é B_p ;
11. Se x é MA e y é MA então Δ_x é MB_n e Δ_y é MB_n ;
12. Se x é MA e y é A então Δ_x é MA_n e Δ_y é MA_n ;

13. Se x é A e y é B então Δ_x é B_n e Δ_y é B_p ;
14. Se x é A e y é MB então Δ_x é MB_n e Δ_y é B_n ;
15. Se x é A e y é MA então Δ_x é MA_n e Δ_y é MB_n ;
16. Se x é A e y é A então Δ_x é A_n e Δ_y é A_n ;

A figura 4.15 representa cada uma das regras no “campo vetorial” delimitado pelo domínio das variáveis *população* de presas e predadores.

As variações do sistema na região de equilíbrio destacada na figura 4.15, são determinadas pelas regras:

1. Se x é MB e y é MB então Δ_x é MB_p e Δ_y é B_n ;
2. Se x é MB e y é MA então Δ_x é B_n e Δ_y é MB_n ;
3. Se x é MA e y é MB então Δ_x é B_p e Δ_y é MB_p ;
4. Se x é MA e y é MA então Δ_x é MB_n e Δ_y é B_p .

Pelo teorema 3.4.3 e corolários 3.4.4 e 3.4.5, o estado de equilíbrio $(50, 50)$ é único em R^* . Os autovalores de $\mathbf{J}_{(x^*, y^*)}$ são $\lambda_{1,2} = 0.991 \pm 0.0201i$ e, portanto, (x^*, y^*) é assintoticamente estável. A capacidade suporte para as presas na ausência de predadores é $k_1 = 79.53$. Na figura 4.16 temos a solução do sistema p-fuzzy com a base de regras dada pela figura 4.15. A trajetória pontilhada é a solução para a população de presas na ausência de predadores, enquanto a curva ponto-segmentada é a solução da população de presas em interação. A trajetória contínua é a solução de predadores em interação.

Em interações do tipo *presa-predador* as densidades populacionais em geral apresentam flutuações em torno do estado de equilíbrio ao longo do tempo. Embora a solução do sistema p-fuzzy gerada pela base de regras da figura 4.15 apresente oscilações, a amplitude destas oscilações tornam-se nulas quando $t \rightarrow \infty$. No entanto, é possível obter soluções com periodicidade apenas fazendo algumas alterações na base de regras da figura 4.15, de modo que as características de interações *presa-predador* sejam mantidas.

Na região destacada na figura 4.17 as variações do sistema p-fuzzy são dadas pelas regras:

1. Se x é MB e y é MB então Δ_x é MB_p e Δ_y é MB_n ;
2. Se x é MB e y é MA então Δ_x é MB_n e Δ_y é MB_n ;

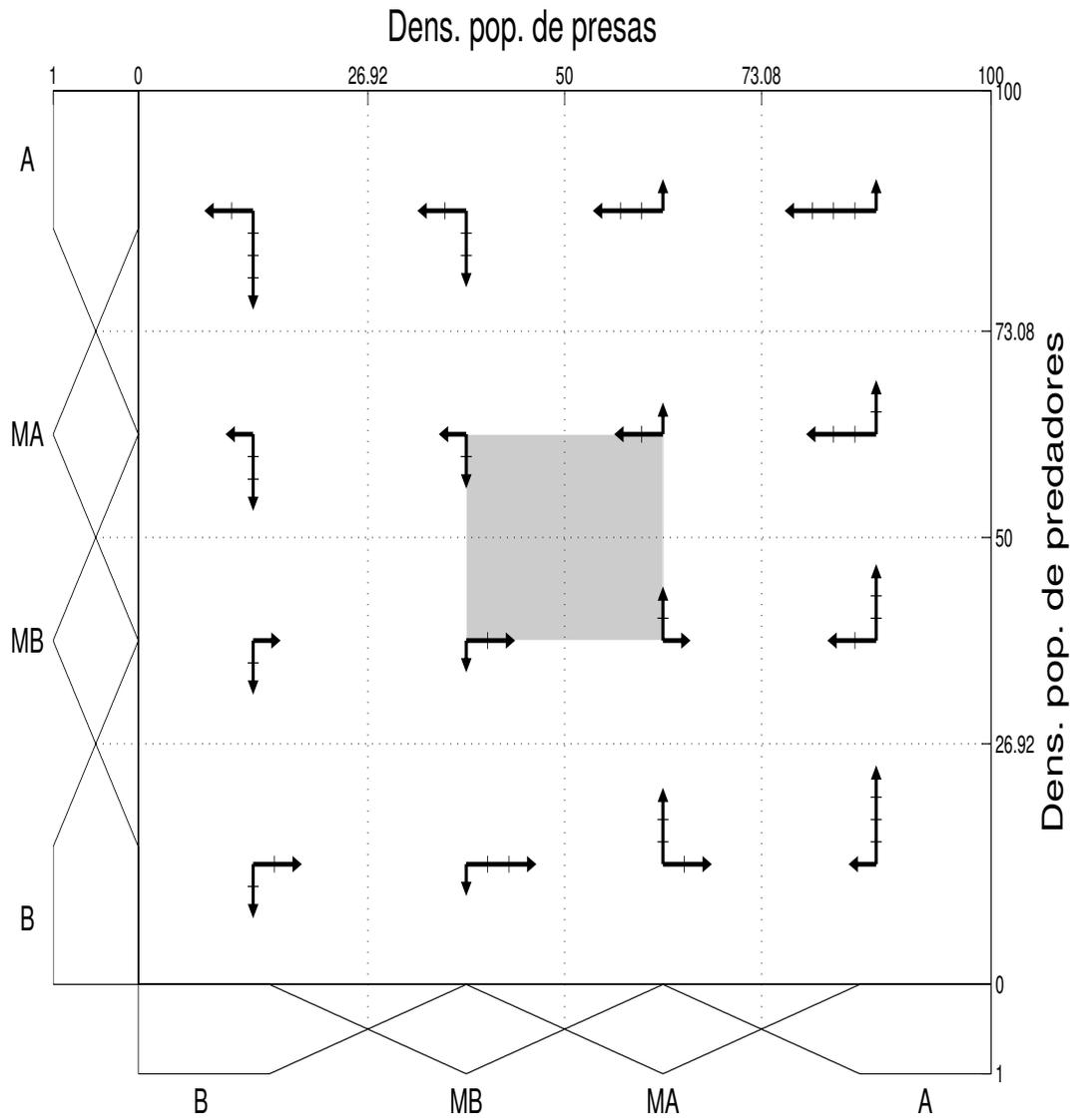


Figura 4.15: Base de regras para uma interação *presa-predador*.

3. Se x é MA e y é MB então Δ_x é MB_p e Δ_y é MB_p ;

4. Se x é MA e y é MA então Δ_x é MB_n e Δ_y é MB_p .

O estado de equilíbrio para esta base de regras é $(50, 50)$. Os autovalores de $\mathbf{J}_{(50,50)}$ são $\lambda_{1,2} = 1.012 \pm 0.031i$, logo o estado de equilíbrio é instável.

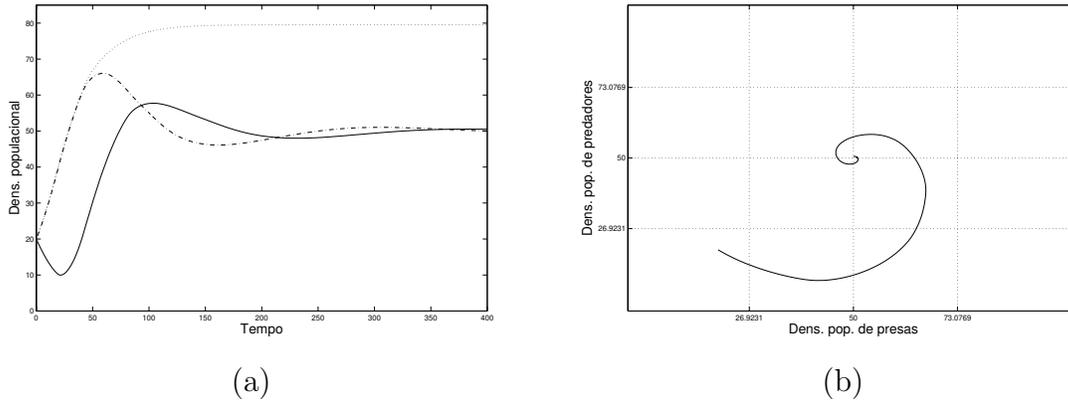


Figura 4.16: Solução do modelo p-fuzzy com base de regras conforme figura 4.15.

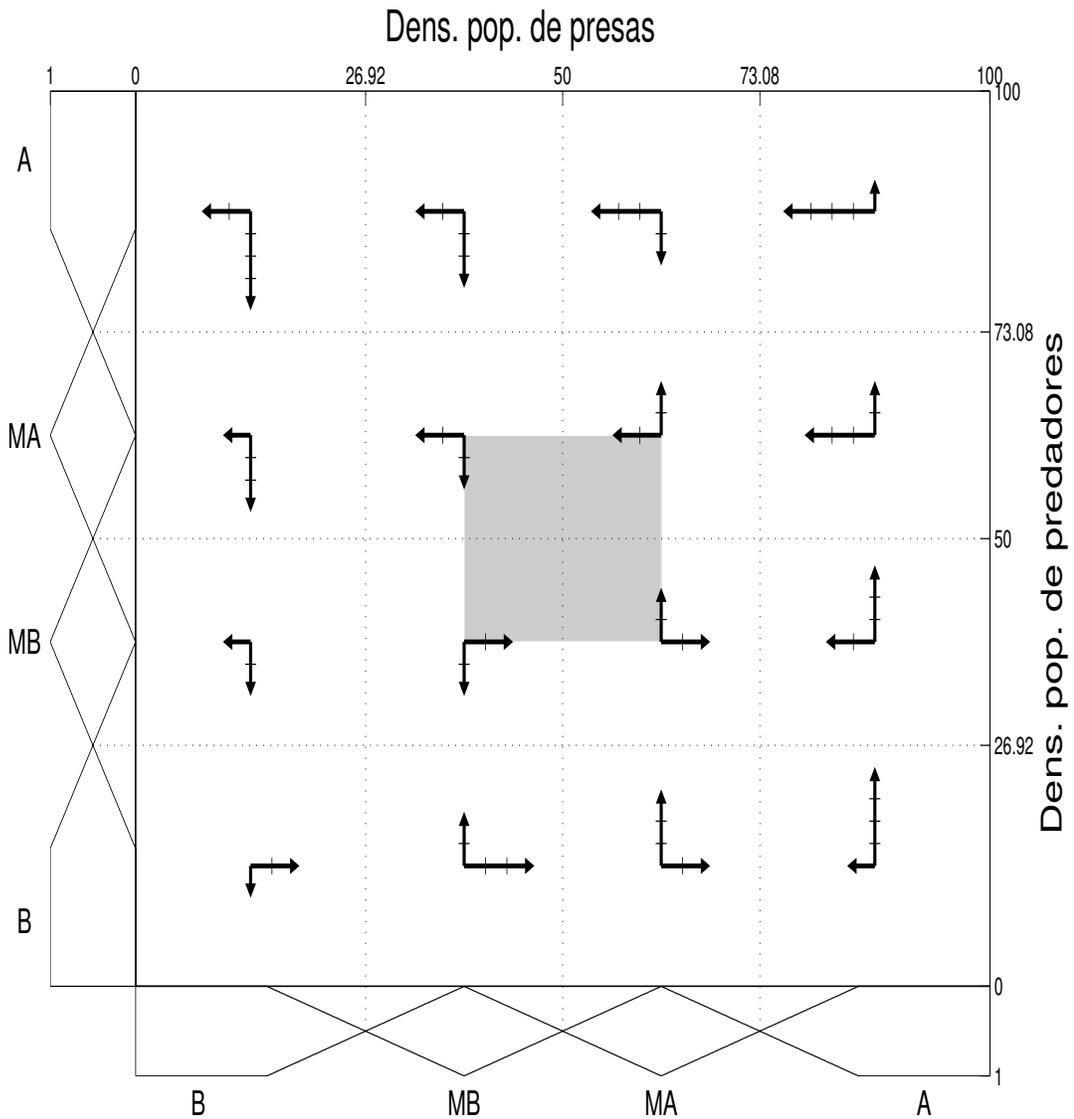


Figura 4.17: Base de regras para uma interação *presa-predador* com ciclo limite.

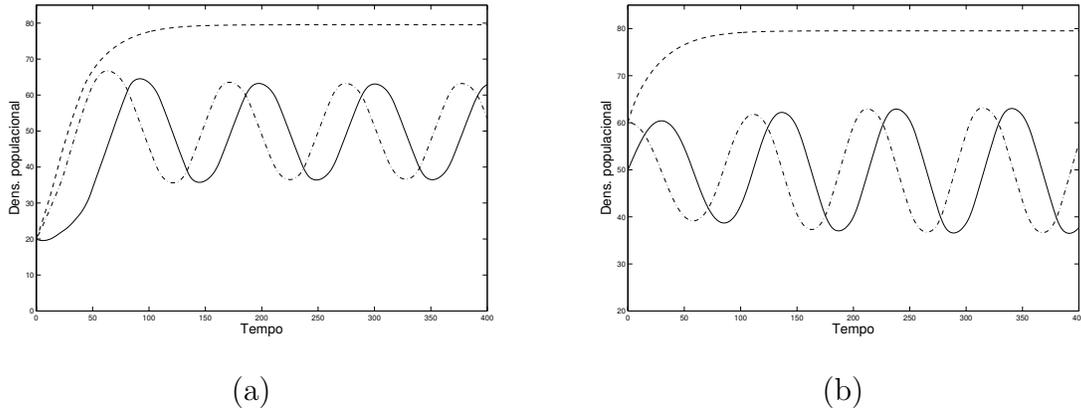


Figura 4.18: Solução do modelo p-fuzzy com base de regras conforme figura 4.17.

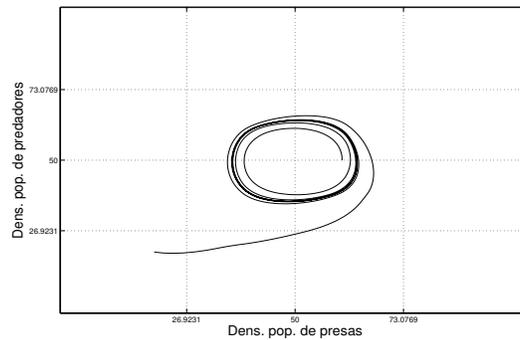


Figura 4.19: Plano de fase do sistema p-fuzzy associado à base de regras da figura 4.17.

A solução do sistema p-fuzzy com a base de regras da figura 4.17 pode ser vista nas figuras 4.18(a-b). Como o estado de equilíbrio é instável, então as trajetórias se afastam do ponto $(50, 50)$. No entanto, como existe a capacidade suporte para a população de presas, as oscilações das soluções não podem crescer indefinidamente, como podemos observar na figura 4.18, de modo que as soluções tendem a se tornarem periódicas, ou equivalentemente, as trajetórias do sistema p-fuzzy no plano de fase convergem para um ciclo limite.

Como nos modelos determinísticos, a solução da população de predadores está em atraso com relação a população de presas.

4.7 Modelo p-fuzzy para interações do tipo mutualismo.

A principal característica de um interação do tipo *mutualismo* é que ambas as espécies envolvidas na interação são beneficiadas. Para modelagem, Kolmogorov considera que a

variação de uma espécie é crescente com relação à outra.

O mutualismo pode ser tanto facultativo quanto obrigatório para as espécies. Nesta seção, vamos elaborar uma base de regras para ambos os casos.

Como já mencionamos, se a interação é facultativa, é razoável considerarmos uma limitação para o crescimento populacional devido à disponibilidade de recursos naturais. Outro fato importante a ser considerado é que, quando as populações atigem valores altos de densidade, a contribuição deve ser anulada pela competição interespecífica da espécie para evitar crescimento indefinido.

Na base de regras que propomos abaixo, a variação populacional para a espécie 2 é crescente com relação à espécie 1 e, analogamente, para a espécie 1 conforme podemos ver na figura 4.20.

1. Se x é B e y é B então Δ_x é MB_p e Δ_y é MA_p ;
2. Se x é B e y é MB então Δ_x é MA_p e Δ_y é A_p ;
3. Se x é B e y é MA então Δ_x é MB_p e Δ_y é MB_p ;
4. Se x é B e y é A então Δ_x é B_n e Δ_y é B_n ;
5. Se x é MB e y é B então Δ_x é A_p e Δ_y é MA_p ;
6. Se x é MB e y é MB então Δ_x é MB_p e Δ_y é MB_p ;
7. Se x é MB e y é MA então Δ_x é B_p e Δ_y é B_n ;
8. Se x é MB e y é A então Δ_x é B_n e Δ_y é MB_n ;
9. Se x é MA e y é B então Δ_x é MB_p e Δ_y é MB_p ;
10. Se x é MA e y é MB então Δ_x é B_n e Δ_y é B_p ;
11. Se x é MA e y é MA então Δ_x é MB_n e Δ_y é MB_n ;
12. Se x é MA e y é A então Δ_x é MA_n e Δ_y é MA_n ;
13. Se x é A e y é B então Δ_x é B_n e Δ_y é B_p ;
14. Se x é A e y é MB então Δ_x é MB_n e Δ_y é B_n ;
15. Se x é A e y é MA então Δ_x é MA_n e Δ_y é MB_n ;
16. Se x é A e y é A então Δ_x é A_n e Δ_y é A_n ;

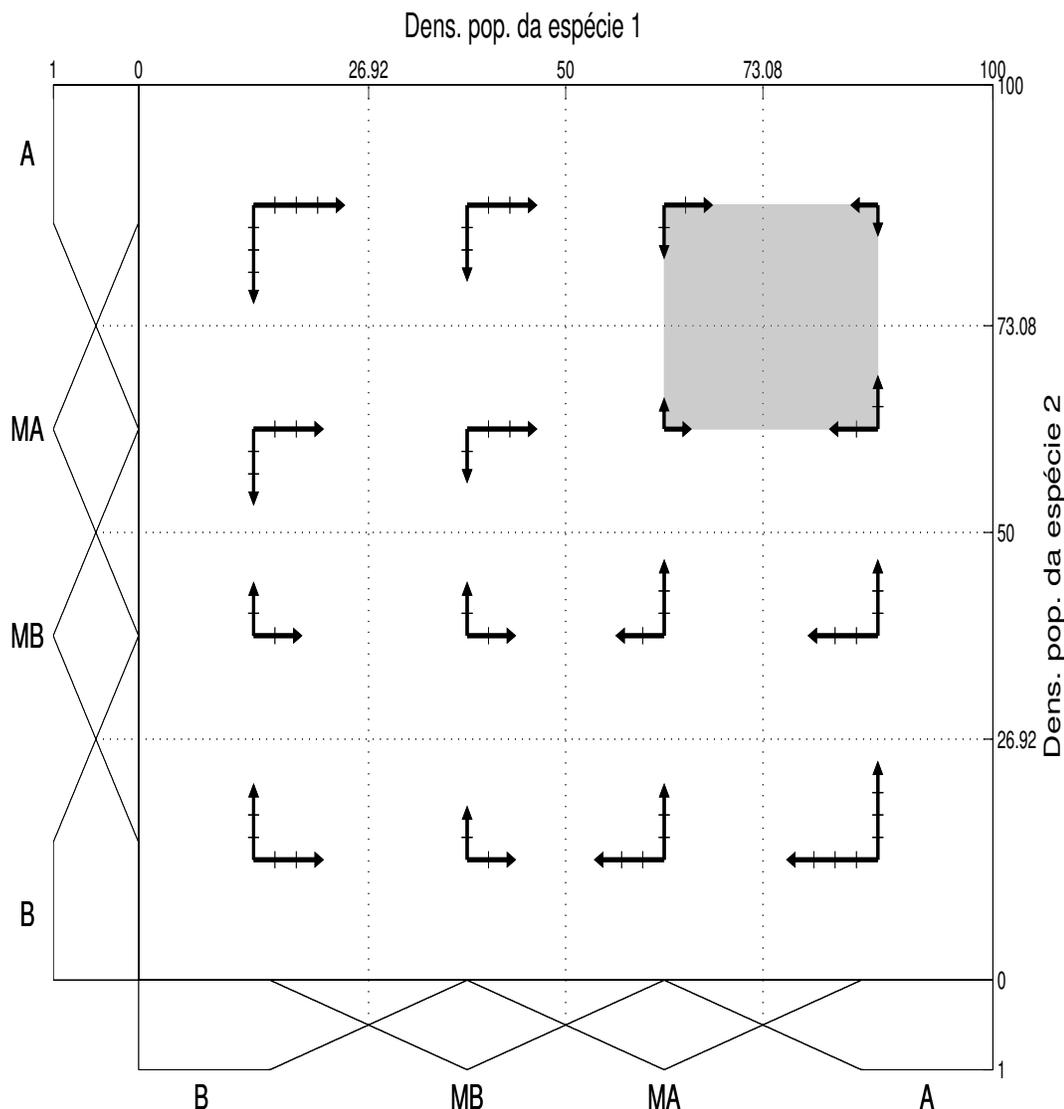


Figura 4.20: Base de regras para mutualismo facultativo

Observemos que na regra 16, ambas as variações poderiam ser positivas que mesmo assim as características de mutualismo ainda seriam satisfeitas. No entanto, como mencionamos anteriormente isto faria com que a competição interespecífica fosse superado pela interação mesmo em altas densidades populacionais.

Como podemos ver na figura 4.21, a densidade populacional da espécie 1 é decrescente no início. Isto pode ser explicado pelo fato que a densidade populacional da espécie 2 é baixa e da espécie 1 está acima da capacidade suporte, de modo que a contribuição da interação não supera a competição interespecífica da espécie 1. Na figura 4.21, a curva

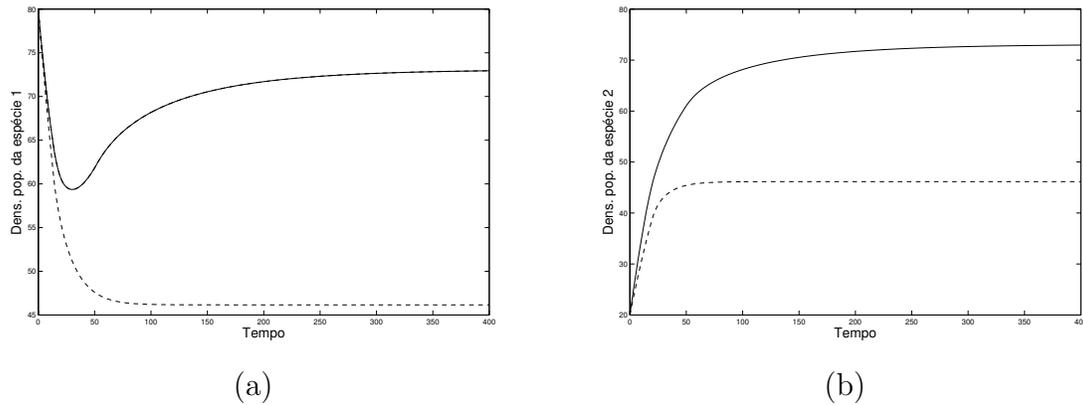


Figura 4.21: Solução do modelo p-fuzzy com base de regras conforme figura 4.20

segmentada representa a dinâmica populacional das espécies quando isoladamente.

O estado de equilíbrio para o sistema p-fuzzy pela base de regras da figura 4.20 é $(73.08, 73.08)$ que é assintoticamente estável, já que os autovalores da matriz jacobiana neste ponto são: $\lambda_1 = 0.98$; $\lambda_2 = 0.97$. A capacidade suporte de cada espécie, $k_1 = k_2 = 46.16$ são ambas menores do que x^* e y^* , respectivamente, como esperado numa interação de mutualismo.

Podemos considerar também que o mutualismo é obrigatório para ambas as espécies. Neste caso, se uma das populações está abaixo de um valor crítico, ambas as espécies tendem a desaparecer do ambiente. Na figura 4.22 temos uma base de regras para interações do tipo mutualismo obrigatório para ambas as espécies. Também é considerado que, para altas densidades populacionais, a contribuição da interação é menor que a competição interespecífica.

O sistema p-fuzzy associado à base de regras da figura 4.22 admite dois estados de equilíbrio não nulos $(33.81, 33.81)$ e $(81.15, 73.08)$. O primeiro tem uma estabilidade do tipo ponto de sela, pois os autovalores de $\mathbf{J}_{(33.81, 33.81)}$ são $\lambda_1 = 1.0445$ e $\lambda_2 = 0.9661$. Os autovalores de $\mathbf{J}_{(81.15, 73.08)}$ são $\lambda_1 = 0.9413$ e $\lambda_2 = 0.9806$. Portanto, o segundo estado é assintoticamente estável.

Na figura 4.23a temos a solução do sistema p-fuzzy com condição inicial $(45, 20)$. Como podemos ver, o crescimento de uma espécie não é suficiente para evitar a extinção de ambas. A solução do sistema p-fuzzy com condição inicial $(70, 5)$ converge para o estado de equilíbrio $(81.15, 73.08)$ (figura 4.23b). Embora a densidade populacional de uma espécie seja baixa, a alta densidade populacional da outra espécie contribui o necessário para que a interação seja benéfica para ambas as espécies. As figuras 4.24(a-b) são os planos de fase de cada uma das soluções.

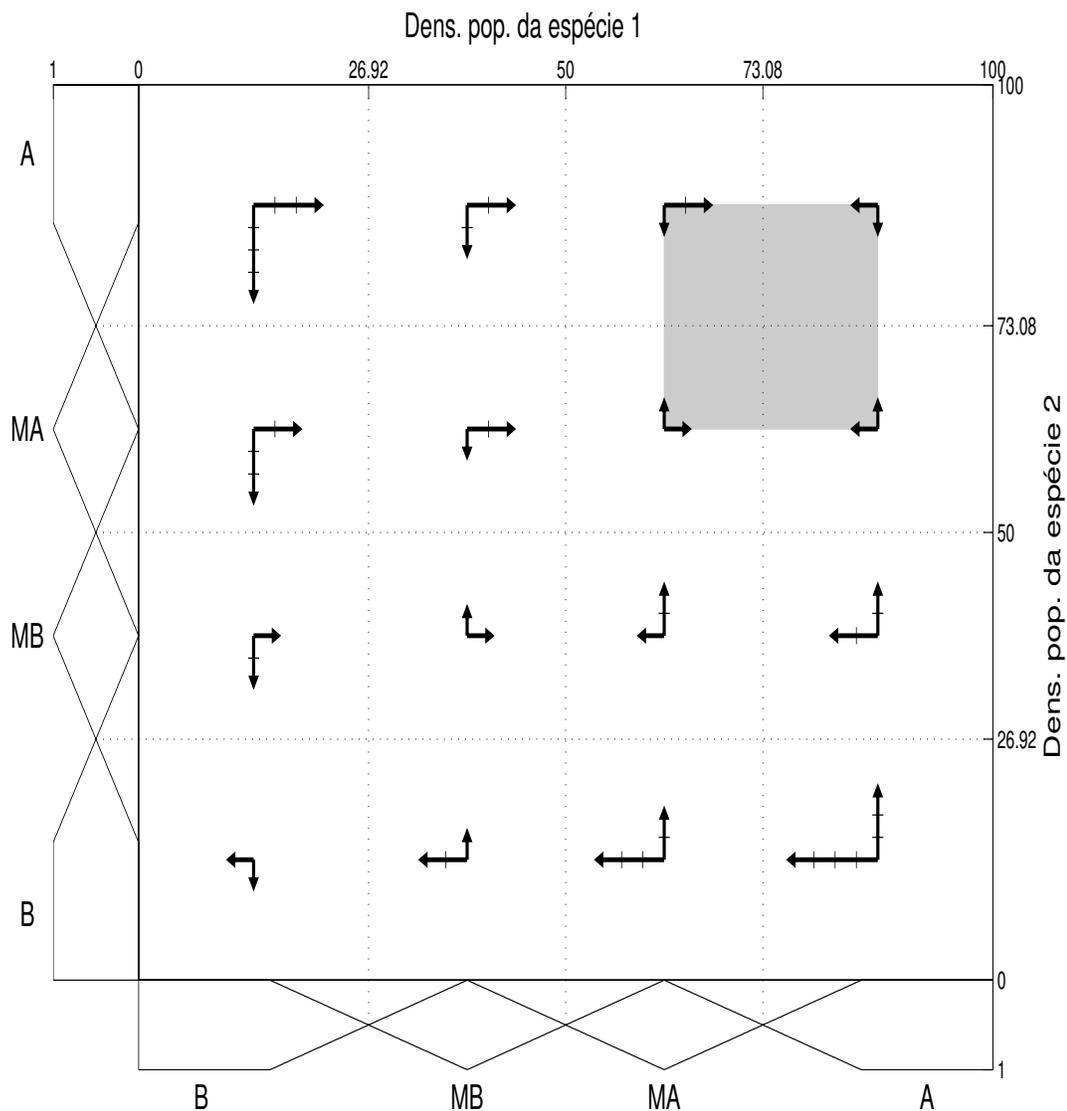
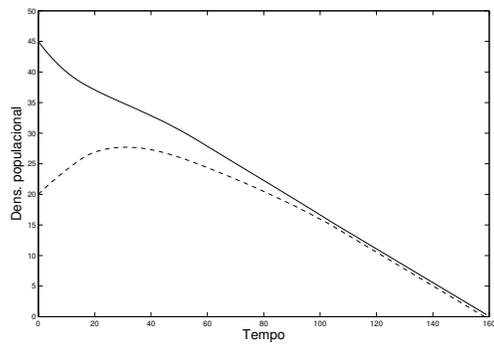
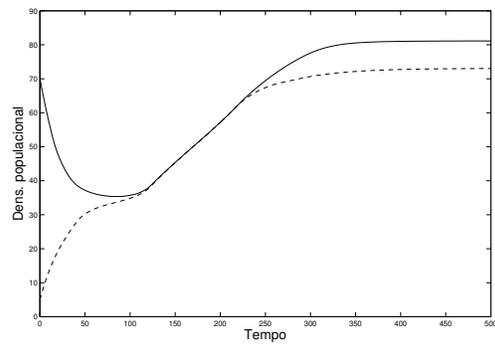


Figura 4.22: Base de regras para mutualismo obrigatório

Pelo campo vetorial da figura 4.25 percebe-se a existência de uma separatriz delimitando as densidades populacionais que levam à extinção ou a coexistência em $(81.15, 73.08)$. Para condições iniciais sobre a separatriz, as espécies coexistem em $(33.81, 33.81)$.

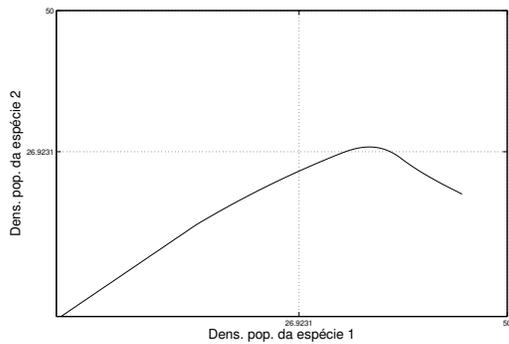


(a)

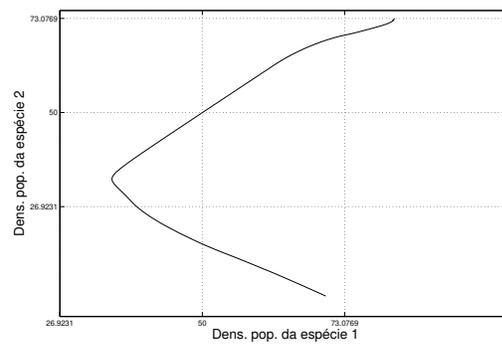


(b)

Figura 4.23: Solução do modelo p-fuzzy com base de regras conforme figura 4.22



(a)



(b)

Figura 4.24: Solução do modelo p-fuzzy com base de regras conforme figura 4.22

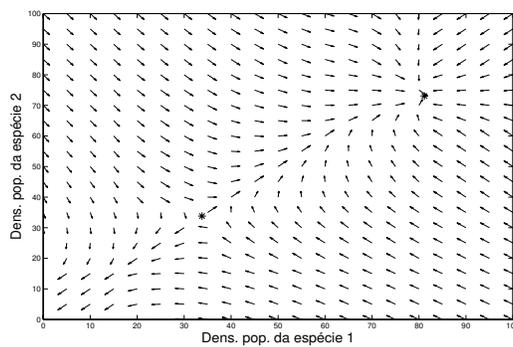


Figura 4.25: Campo vetorial do sistema p-fuzzy pela base de regras da figura 4.22.

4.8 Modelo p-fuzzy para interações densidade-dependente

Consideremos uma interação entre espécies que se comporta como mutualismo à baixas densidades populacionais porém, a interação se torna competitiva quando as densidades populacionais são altas. O modelo determinístico que comporta essa situação quando a interação é facultativa que apresentamos no primeiro capítulo (modelo de Josefina-Barradas) supõe que os parâmetros que determinam a natureza da interação, β_{12} e β_{21} , nas equações de Volterra sejam dependentes das densidades populacionais. No entanto, a generalização pode ser dada através do modelo de Kolmogorov. Neste caso as funções de crescimento relativo devem satisfazer:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} > 0 \text{ se } y \text{ é pequeno e } \frac{\partial f}{\partial y} < 0 \text{ se } y \text{ é grande} \\ \frac{\partial g}{\partial x} > 0 \text{ se } x \text{ é pequeno e } \frac{\partial g}{\partial x} < 0 \text{ se } x \text{ é grande.} \end{aligned}$$

Pela subjetividade envolvida nos termos *pequeno* e *grande*, a modelagem por sistemas p-fuzzy pode ser preferível ao invés da modelagem determinística. Na base de regras que propomos abaixo, para interações envolvendo densidades populacionais, estamos supondo que a interação é facultativa a ambas as espécies e que o benefício da interação é maior para a espécie 2 quando a densidade populacional é baixa.

1. Se x é B e y é B então Δ_x é MB_p e Δ_y é MB_p ;
2. Se x é B e y é MB então Δ_x é MA_p e Δ_y é B_p ;
3. Se x é B e y é MA então Δ_x é B_p e Δ_y é B_n ;
4. Se x é B e y é A então Δ_x é B_n e Δ_y é MB_n ;
5. Se x é MB e y é B então Δ_x é B_p e Δ_y é A_p ;
6. Se x é MB e y é MB então Δ_x é MA_p e Δ_y é MA_p ;
7. Se x é MB e y é MA então Δ_x é B_n e Δ_y é MA_p ;
8. Se x é MB e y é A então Δ_x é MB_n e Δ_y é B_p ;
9. Se x é MA e y é B então Δ_x é B_n e Δ_y é B_p ;
10. Se x é MA e y é MB então Δ_x é MA_p e Δ_y é B_n ;

11. Se x é MA e y é MA então Δ_x é MA_n e Δ_y é MA_n ;
12. Se x é MA e y é A então Δ_x é MA_n e Δ_y é A_n ;
13. Se x é A e y é B então Δ_x é MB_n e Δ_y é B_n ;
14. Se x é A e y é MB então Δ_x é B_p e Δ_y é MB_n ;
15. Se x é A e y é MA então Δ_x é MA_n e Δ_y é A_n ;
16. Se x é A e y é A então Δ_x é A_n e Δ_y é A_n ;

A base regras acima está representada na figura 4.26.

O sistema p-fuzzy associado a esta base de regras admite três estados de equilíbrio não nulos que são: $(x_1^*, y_1^*) = (19.62, 66.76)$, $(x_2^*, y_2^*) = (48.07, 48.07)$ e $(x_3^*, y_3^*) = (66.76, 19.62)$.

Os autovalores de $\mathbf{J}_{(x_1^*, y_1^*)}$ são $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.98 \pm 0.03i$. Logo o estado de equilíbrio (x_1^*, y_1^*) é assintoticamente estável. Para o segundo estado, os autovalores de $\mathbf{J}_{(x_2^*, y_2^*)}$ são $\lambda_1 = 1.01$ e $\lambda_2 = 0.95$, portanto temos uma instabilidade onde (x_2^*, y_2^*) é um ponto de sela. O estado de equilíbrio (x_3^*, y_3^*) é assintoticamente estável já que os autovalores de $\mathbf{J}_{(x_3^*, y_3^*)}$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.98 \pm 0.064i$, têm ambos parte real menor do que 1. A capacidade suporte de cada espécie isolada é $k_1 = k_2 = 50.0148$.

A convergência da solução do sistema p-fuzzy para um dos estados de equilíbrio depende somente da condição inicial como podemos ver pelo campo variacional na figura 4.27. Nos estados de equilíbrio (x_1^*, y_1^*) e (x_3^*, y_3^*) a coexistência das espécies ocorre em interação do tipo presa-predador. No primeiro ponto, a espécie 1 é a presa ($k_1 < x_1^*$), enquanto no segundo a espécie 1 é o predador ($k_1 > x_3^*$).

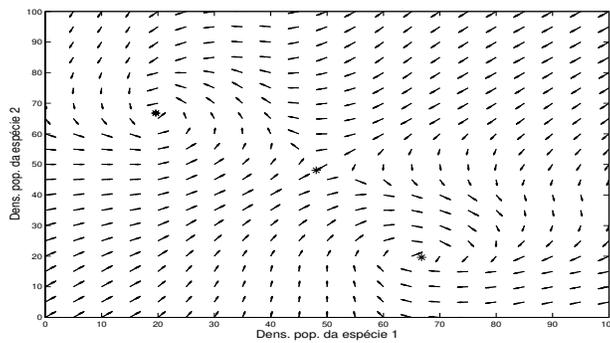


Figura 4.27: Campo variacional do sistema p-fuzzy com base de regras conforme figura 4.26

Para a solução mostrada na figura 4.28a, a condição inicial é $(x_o, y_o) = (10, 10)$. Observamos que a densidade populacional de ambas as espécies são crescentes no início, porém a

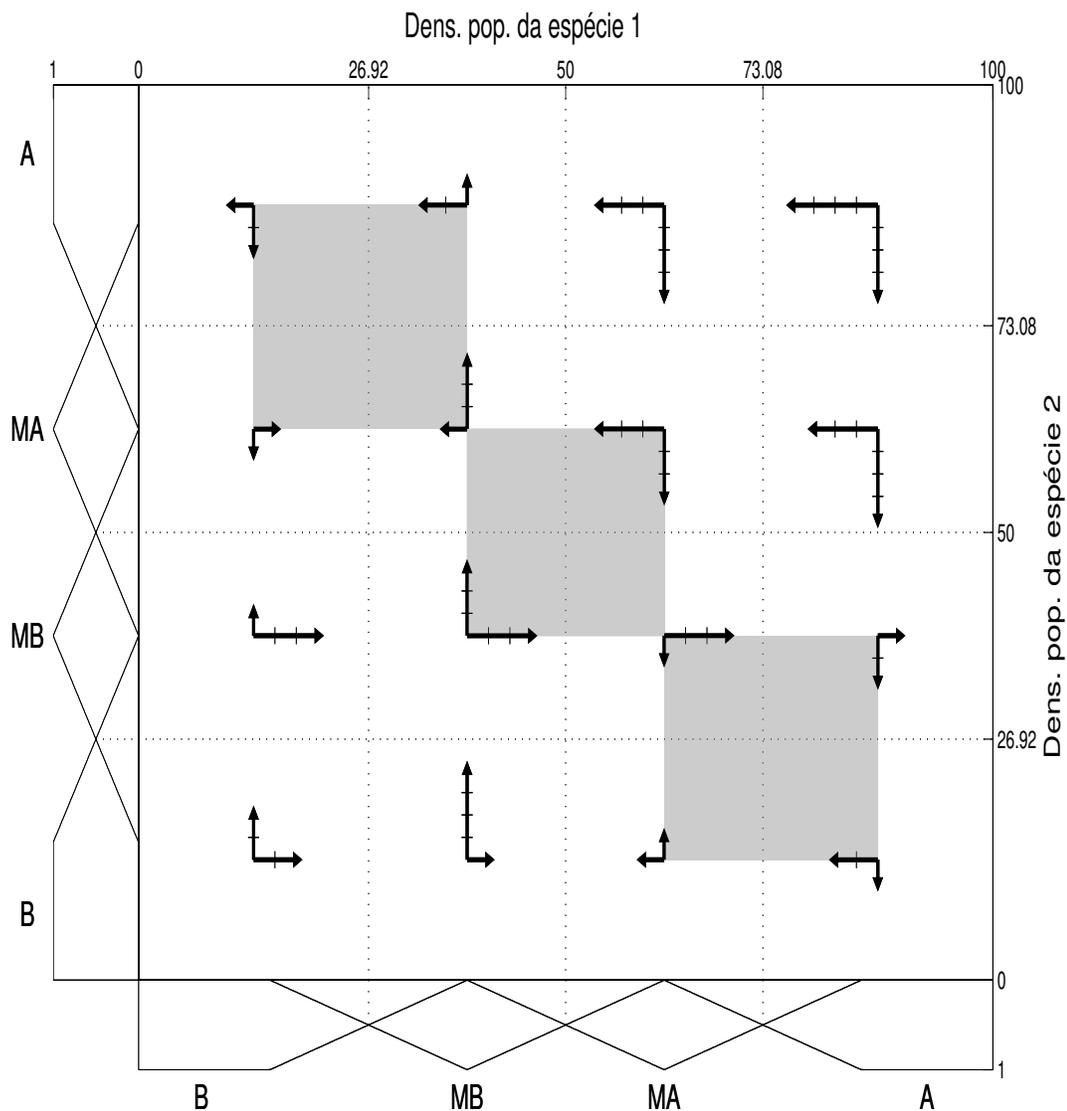


Figura 4.26: Base de regras para interações densidade-dependente.

espécie 2 (linha segmentada) atinge primeiramente o valor crítico em que a interação passa a ser prejudicial à espécie 1 (linha contínua). A inibição do crescimento provocada pela a densidade populacional da espécie 2, faz com que a densidade populacional da espécie 1 permaneça baixa, contribuindo assim para o crescimento populacional da espécie 2. Caso semelhante ocorre na solução da figura 4.28b onde $(x_o, y_o) = (90, 89)$ porém, neste caso, a espécie 1 é a beneficiada.

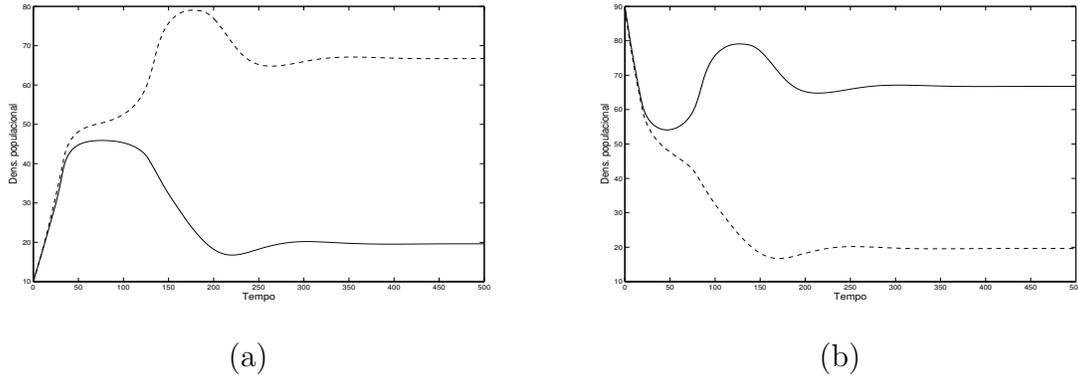


Figura 4.28: Solução do modelo p-fuzzy com base de regras conforme figura 4.26.

O plano de fase para ambas as soluções pode ser visto na figura 4.29

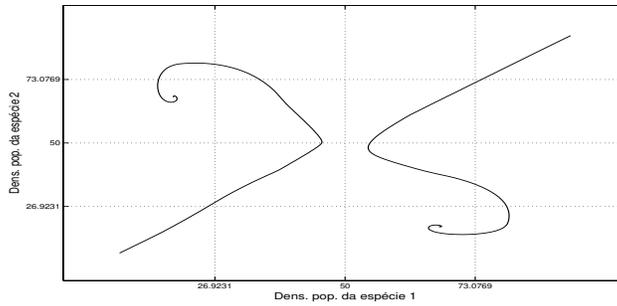


Figura 4.29: Plano de fase do sistema p-fuzzy com base de regras conforme figura 4.26.

4.9 Ajuste de parâmetros: competição e mutualismo

Nesta seção, vamos utilizar dados obtidos através das bases de regras para ajustar parâmetros de modelos determinísticos de interação com a ajuda de resultados obtidos nas análises do capítulo 1.

As equações de Volterra dadas por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r_1 x \frac{k_1 - x - \beta_{12} y}{k_1} \\ \frac{dy}{dt} = r_2 y \frac{k_2 - y - \beta_{21} x}{k_2}, \end{cases} \quad (4.6)$$

são usadas na modelagem de interações facultativas para ambas as espécies. Os parâmetros destas equações podem ser estimados pelas bases de regras que propusemos nas seções anteriores, para interações do tipo competição e mutualismo facultativas.

Os parâmetros de crescimento intrínscico r_1 e r_2 e as capacidades suporte k_1 e k_2 podem ser obtidas por procedimentos semelhantes aos usados para os modelos unidimensionais. Por exemplo, considerando que a espécie está ausente da interação, então ajustamos os valores r_1 e k_1 com os dados obtidos por $\Delta_x(x, 0)$.

As isóclinas das equações de Volterra são dadas pelas equações

$$k_1 - x - \beta_{12}y = 0 \quad \text{e} \quad k_2 - y - \beta_{21}x = 0.$$

Pelo algoritmo apresentado na seção anterior, podemos determinar o estado de equilíbrio (x^*, y^*) , que pertence a ambas as isóclinas, de modo que os parâmetros β_{12} e β_{21} são determinados por

$$\beta_{12} = \frac{k_1 - x^*}{y^*} \quad \text{e} \quad \beta_{21} = \frac{k_2 - y^*}{x^*}.$$

Exemplo 4.9.1. Consideremos a base de regras da figura 4.12 para espécies em competição. O estado de equilíbrio para o sistema p-fuzzy associado a esta base de regras é $(50, 50)$ e $k_1 = k_2 = 79.53$. Portanto, $\beta_{12} = \beta_{21} = 0.5906$. Os parâmetros r_1 e r_2 podem ser determinados por minimização das funções

$$F_1(r) = \sum_{i=1}^n |f_1(x_i, r) - \Delta_x(x_i, 0)|^2 \quad \text{e} \quad F_2(r) = \sum_{i=1}^n |f_2(y_i, r) - \Delta_y(0, y_i)|^2$$

que, para $x = y = (0, 1, 2, \dots, 80)$, são $r_1 = 0.0685$ e $r_2 = 0.0856$.

As soluções do modelo de Volterra e p-fuzzy pela base de regras da figura 4.12 estão nas figuras 4.30(a-b).

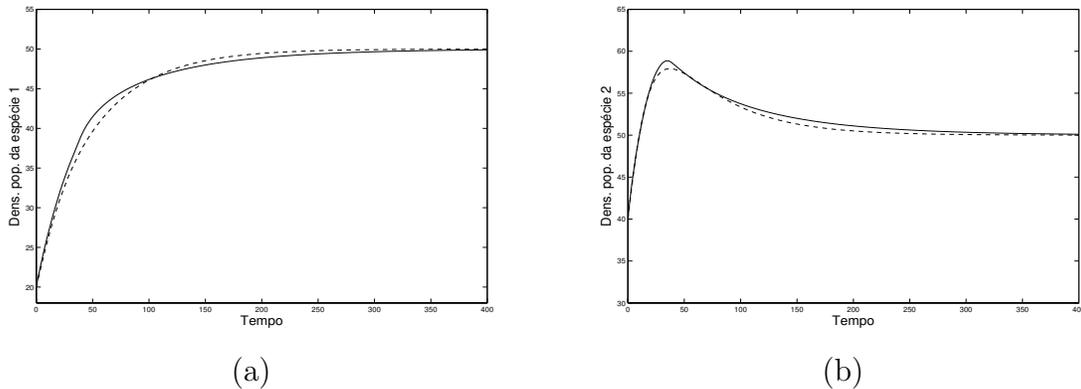


Figura 4.30: Soluções dos modelos de Volterra (segmentada) e p-fuzzy (contínua): condição inicial $(14.8, 34.8)$; $r_1 = 0.0685$ e $r_2 = 0.0856$; $k_1 = k_2 = 79.53$; $\beta_{12} = \beta_{21} = 0.5906$. (a) Dinâmica populacional da espécie 1. (b) Dinâmica populacional da espécie 2

Conclusões

Neste trabalho, mostramos que o suporte da solução fuzzy de um sistema dinâmico com condição inicial ou parâmetros fuzzy, solução esta obtida pela extensão de Zadeh do fluxo determinístico, converge assintoticamente para um estado de equilíbrio, conforme a solução determinística associada converge assintoticamente para um estado de equilíbrio. Mostramos ainda, no caso em que o sistema dinâmico é bidimensional, que se o fluxo determinístico admite um ciclo limite assintoticamente estável, então o suporte da solução fuzzy converge para o mesmo ciclo limite.

Estabelecemos algumas condições que garantem a existência e unicidade de estados de equilíbrio para os sistemas dinâmicos p-fuzzy bidimensionais. Apresentamos aplicações de sistemas p-fuzzy tanto em dinâmica populacional para espécies isolados com crescimento inibido, como para dinâmica populacional de espécies em interações do tipo competição, presa-predador, mutualismo e interações com dependência da densidade populacional de ambas as espécies.

Desenvolvemos um algoritmo baseado em regras fuzzy para aproximação numérica do estado de equilíbrio de um sistema p-fuzzy e mostramos que, sob certas condições, a sequência gerada pelo algoritmo converge para o estado de equilíbrio, seja este estável ou instável.

Referências Bibliográficas

- [1] L. C. Barros. *Sobre sistemas dinâmicos fuzzy – teoria e aplicações*. PhD thesis, IMECC - UNICAMP, 1997.
- [2] V. M. P. Dos Santos. Sistema presa-predador generalizado. Master’s thesis, IMECC - UNICAMP, Campinas - SP, abril 1989.
- [3] L. Edelstein-Keshet. *Mathematical models in biology*. Random House, 1988.
- [4] A. Friedlander. *Elementos de programação não-linear*. IMECC - UNICAMP.
- [5] M.-J. Hernandez. Dynamics of transitions between populatios interactions: a nolinear interaction α -function defined. *Proc. R. Soc. Lond.*, B(265):1433–1440, 1998.
- [6] M.-J. Hernandez and I. Barradas. Variation in the outcome of populations interactions: bifurcations and catastrophes. *J. Math. Biol.*, (46):571–594, 2003.
- [7] O. Kaleva. Fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 24(3):301–317, 1987.
- [8] W. G. Kelley and A. C. Peterson. *Difference equations: an introduction with applications*. Harcourt Brace Jovanovich, London, 1991.
- [9] G. J. Klir. *Fuzzy sets: an overview of fundamentals, applications and personal views*. Beijing Normal University Press, Beijing, 1995.
- [10] E. Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*. USA, 1989.
- [11] E. L. Lima. *Análise no espaço \mathbb{R}^n* . Brasília, 1970.
- [12] E. L. Lima. *Análise real*. Coleção Matemática Universitária, 6 edition, 2002.
- [13] J. S. Martínez and S. A. Santos. *Métodos computacionais de otimização*. IMECC - UNICAMP, 1995.

- [14] J. D. Mendes da Silva. *Análise de estabilidade de sistemas dinâmicos p-fuzzy com aplicações em biomatemática*. PhD thesis, IMECC - UNICAMP, Campinas, 2005.
- [15] M. T. Mizukoshi. *Estabilidade de sistemas dinâmicos fuzzy*. PhD thesis, IMECC - UNICAMP, 2004.
- [16] J. D. Murray. *Mathematical Biology*, volume 19. Springer, 2 edition, 1989.
- [17] M. Oberguggenberger and S. Pittschmann. Differential equations with fuzzy parameters. *Math. Mod. Systems*, 5:181–202, 1999.
- [18] E. C. Pielou. *Mathematical ecology*. Kingston, July 1969.
- [19] E. Renshaw. *Modelling biological populations in space and time*. 1991.
- [20] C. Robinson. *Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics and chaos*. 2 edition, 1998.
- [21] S. Seikkala. On the fuzzy initial value problem. *Fuzzy Sets and Systems*, 24(3):319–330, 1987.
- [22] Yu. M. Svirezhev and D. O. Logofet. *Stability of biological communities*. Mir, 1983.
- [23] L. N. Trefethen and D. Bau III. *Numerical linear algebra*. SIAM, Philadelphia, 1997.
- [24] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *INFORMATION AND CONTROL*, (8):338–353, 1965.