# FLUXOS INCOMPRESSÍVEIS EM MEIOS POROSOS NÃO CONSOLIDADOS

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por João Paulo Lukaszczyk e aprovada pela comissão Julgadora.

Campinas, 12 de agosto de 1996.

José Luiz Boldrini

Prof. Dr. José Luiz Boldrini
Orientador

Tese apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de doutor em Matemática Aplicada.

Tese de Doutorado defendida e aprovada em 25 de julho de 1996

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). MARKO ANTONIO ROJAS MEDAR

Prof (a). Dr (a). SEBASTIAN ANTONIO LORCA PIZARRO

Gustavo Perla Menzala

Prof (a). Dr (a). GUSTAVO ALBERTO PERLA MENZALA

Vanilde Bisognin

Prof (a). Dr (a). VANILDE BISOGNIN

Prof (a). Dr (a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI

# Agradecimentos

A Capes, ao departamento de Matemática da UFSM e aos departamentos de Matemática e Matemática Aplicada do IMECC da UNICAMP.

Aos meus pais, Nicolau e Catarina e irmãos, Cláudia e Sergio, pelo constante apoio.

A Cidinha e a Fátima, pelo constante auxílio em problemas burocráticos.

Aos colegas e amigos que contribuiram de alguma forma neste doutoramento, entre eles especialmente: Professor Antônio Carlos Gilli Martins, Professor Francisco A. M. Gomes, Magda Kimico Kaibara e Antonio Justino Ruas Madureira (que foi um ótimo arguidor).

E por último, mas com maior ênfase, ao Professor Dr. José Luiz Boldrini, que orientou-me no doutorado com muita competência e dedicação, meu muito obrigado.

*A moralidade e o direito nasceram,*
*quando o homem deixou de viver*
*pela alma do universo.*
*Com a tirania do intelecto*
*começou a grande insinceridade;*
*quando se perdeu a noção da alma,*
*foi decretada a autoridade paterna*
*e a obediência dos filhos.*
*Quando morreu a consciência do povo,*
*falou-se em autoridade do governo*
*e lealdade dos cidadãos.*

Tao Te King , Lao Tse
18 aforismo.

*A sabedoria é a coisa principal. Ela é como a luz da aurora que vai brilhando mais e mais até ser dia perfeito. Adquire pois a sabedoria, emprega tudo que possues na aquisição de entendimento.*

Provérbios 4; 5-18

# Sumário

# Resumo

Neste trabalho estudamos equações que regem escoamentos em meios porosos nao consolidados sujeitos a um campo de forças externas.

Numa primeira parte, com a porosidade do sistema conhecida, utilizando método de Galerkin em espaços de Sobolev, obtemos resultados de existência, unicidade e regularidade de soluções semelhantes aos existentes para as equações clássicas de Navier-Stokes.

Na segunda parte, onde a porosidade é apresentada como função da pressão (o que é mais consistente fisicamente), utilizando argumentos de ponto fixo de Schauder em Espaços de Hölder, obtemos existência de soluções. E utilizando argumentos de ponto fixo de Banach obtemos existência e unicidade de soluções também em Espaços de Hölder.

# Introdução

Neste trabalho, mostraremos resultados de existência e unicidade de solução para um sistema de equações diferenciais parciais deduzido em Prieus Du Plessis e Masliyah [7] e que modela o fluxo de um fluido viscoso e incompressível num meio poroso do tipo granular (não consolidado).

A importância prática do estudo destas equações pode ser apreciada lembrando-se de que depósitos de petróleo podem eventualmente se encontrar em regiões com um material poroso do tipo granular (não consolidado) e de que vários filtros utilizados em laboratórios e processos industriais são baseados em materias porosos deste tipo.

As equações a serem estudadas neste trabalho são as seguintes:

$$\begin{cases} \rho u_t + \rho u \cdot \nabla \left(\dfrac{u}{n}\right) - \mu \Delta u + n \nabla p + \mu F(n)\, u = \rho n g \quad \text{em } Q_T, \\ div\ u = 0 \quad \text{em } Q_T, \\ u(x,0) = u_o(x) \ \ , \ \forall x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0 \ \ , \ \forall t \in (0,T) \ \ , \forall x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{0.1}$$

Aqui, são utilizadas as seguintes notações:

- $Q_T = \Omega \times (0,T)$, onde $\Omega \subset I\!R^d$, com $d = 2$ ou $3$, é um domínio limitado; $\Omega$ representa a região granular onde fisicamente se dá o escoamento do fluido. Denota-se $\partial\Omega$ a fronteira de $\Omega$.

- $u(x,t) \in I\!R^d$ denota a velocidade do fluido em um ponto $x \in \Omega$, $t \in [0,T]$.

- $p(x,t)$ é a pressão hidrostática no ponto $x$ e instante $t$. Por razões de unicidade, suporemos que em cada instante de tempo a pressão tem média integral nula, isto é: $\int_\Omega p(x,t)\, dx = 0, \forall t \in [0,T]$

- $\mu > 0$ é uma constante correspondendo à viscosidade do fluido.

- $\rho > 0$ é a densidade do fluido, a qual, sem perda de generalidade no caso de fluidos homogêneos, ao longo de todo este trabalho vamos supor constante e igual a um.

- $n(x,t) \in \mathbb{R}^+$ é a porosidade do meio poroso granular, isto é, em termos intuitivos é o volume de espaço vazio dividido pelo volume total de uma porção de $\Omega$ na vizinhança de $x$. A porosidade assume valores entre zero e um, podendo ter valores distintos em diferentes pontos do espaço e instantes do tempo. Quando a porosidade se torna nula, o meio material é puramente sólido e pode assim ser excluído da região de escoamento; quando a porosidade é igual a um em uma certa subregião de $\Omega$, é porque de fato nesta região não há material poroso e sim uma cavidade que permite livre circulação do fluido. Portanto, podemos sempre supor $0 < n(x,t) \leq 1$.

- $F$ representa uma força de atrito, decorrente da presença do meio poroso granular. Suporemos que $F$ satisfaz $\lim\limits_{z \to 1} F(z) = 0$ e $\lim\limits_{z \to 0} F(z) = \infty$;o que é consistente fisicamente.

- $g(x,t)$ é um campo de forças externas, o qual é suposto conhecido.

Nas equações acima, em coordenadas cartesianas, temos

$$\Delta u = (\Delta u_1, ..., \Delta u_d) \quad \text{e} \quad (u \cdot \nabla u)_i = \sum_{j=1}^{d} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{0.2}$$

O sistema acima é deduzido das equações clássicas de Navier-Stokes, fazendo-se médias integrais em volumes pequenos. Portanto, as variáveis $u$ e $p$ são médias macroscópicas da velocidade e pressão reais das partículas do fluido. Para maiores detalhes, veja referência Prieus Du Plessis e Masliyah [7].

Queremos ressaltar que estas equações são diferentes daquelas que modelam escoamentos em meios porosos consolidados, equações estas que são usualmente conhecidas como as equações dos meios porosos ("porous media equation"). Estas últimas estão associadas a meios porosos consolidados, nos quais a velocidade e a pressão são acopladas por uma relação chamada Lei de Darcy (ou suas variantes).

Neste trabalho, estaremos interessados em discutir a existência, a unicidade, bem como a regularidade de soluções do sistema (0.1) em duas situações: uma primeira, mais simples, na qual a porosidade do meio granular é conhecida a priori; uma segunda, mais difícil matematicamente, na qual a porosidade depende da pressão no meio material. Para isto, organizaremos o trabalho da seguinte forma:

No Capítulo 1 apresentamos resultados conhecidos que serão utilizados posteriormente; recordamos resultados sobre espaços de Sobolev, espaços de Hölder, bem como algum resultados gerais sobre espaços funcionais. Recordamos também alguns conceitos e espaços específicos ao estudos de escoamentos incompressíveis.

No Capítulo 2 estudaremos o sistema (0.1) quando a porosidade é um função conhecida da posição e do tempo. Utilizando o método de aproximação de Galerkin em um contexto de espaços de Sobolev, obteremos resultados de existência de soluções fracas (globais) em dimensão espacial 2 ou 3, bem como a unicidade para tais soluções no caso de dimensão espacial 2; também teremos um resultado de existência de soluções em um sentido forte, locais no tempo, e um resultado de exitência de soluções globais fortes sob condições de pequenez dos dados iniciais e forças externas.

Como se observa, fomos capazes de obter essencialmente os mesmos resultados já existentes para as equações clássicas de Navier-Stokes em espaços de Sobolev.

No Capítulo 3 estudaremos o sistema (0.1) no caso em que a porosidade depende da pressão no meio material. Neste capítulo, está a parte mais interessante do trabalho, pois o modelo fica mais acurado fisicamente, já que com um aumento da pressão em uma subregião relativamente às regiões vizinhas, a porosidade nela tende a aumentar. Do ponto de vista matemático, a equação fica bem mais complexa, com não linearidades bem mais difíceis de serem tratadas. De fato, tivemos que utilizar espaços de Hölder porque até o presente momento as estimativas obtidas em espaços de Sobolev não foram suficientes para poder controlar as fortes não linearidades provenientes do fato da porosidade ser uma função da pressão; trabalhando nestes espaços e utilizando argumentos do tipo ponto fixo, obtivemos um resultado de existência de solução (utilizando argumentos envolvidos na demonstração do Teorema de Ponto Fixo de Schauder) e um outro resultado que, sob certas condições, fornece a existência e a unicidade da solução (neste caso, utilizamos de argumentos envolvendo o Teorema de Ponto Fixo de Banach).

Finalmente, queremos ressaltar que, como é usual em trabalhos envolvendo estimativas em equações diferenciais parciais, também neste trabalho $C$ denotará uma constante positiva genérica dependendo somente de $\Omega$ e dos dados do problema. Somente nos casos em que for necessário distinguir certas constantes ou tornar mais claro a argumentação é que utilizaremos outras letras para denotar constantes.

# Capítulo 1

# Preliminares

Neste capítulo fixaremos a notação a ser utilizada e, por conveniência do leitor, recordaremos alguns resultados que serão empregados na análise das equações (0.1) nos próximos capítulos.

Iniciamos recordando alguns fatos sobre funções com valores em espaços de Banach. Sejam $X$ um espaço de Banach, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, e $1 \leq p < +\infty$; denotaremos por $L^p(a,b,X)$ a classe das funções $p$-integráveis no sentido de Bochner. $L^p(a,b,X)$ com a norma $||f||_{L^p(a,b,X)} = \left(\int_a^b ||f(t)||_X^p\right)^{1/p}$ torna-se um espaço de Banach. Similarmente ao caso escalar, define-se também $L^\infty(a,b,X)$ e $||f||_{L^\infty(a,b,X)}$. Vale então o seguinte resultado cuja prova pode ser encontrada em Temam [10], página 250:

**Lema 1.1** *Com a notação acima, sendo $X'$ o dual de $X$ sejam $u$ e $g$ duas funções pertencentes a $L^1(a,b,X)$. Então, as três condições seguintes são equivalentes:*

*(i) $u$ é, quase sempre em $t$, igual a uma função primitiva de $g$, isto é,*

$$u(t) = \xi + \int_0^t g(s)ds \ , \ \xi \in X, t \in [a,b] \ \ q.s.$$

*(ii) Para cada função teste $\phi \in C_0^\infty(a,b)$,* vale

$$\int_a^b u(t)\phi'(t)dt = -\int_a^b g(t)\phi(t)dt.$$

*(iii) Para cada $n \in X'$, no sentido de distribuições escalares em $(a,b)$, temos*

$$\frac{d}{dt}\langle u,n\rangle = \langle g,n\rangle .$$

*Se (i)-(iii) são satisfeitas, $u$, em particular, é q.s. em $t$ igual a uma função contínua de $[a,b]$ em $X$.*

**Observação 1.1** *A notação q.s. significa quase sempre, isto é, a menos de um conjunto de medida de Lebesgue nula.*

Também será necessário utilizar o seguinte lema, cuja demonstração também pode ser encontrada em Temam [10], página 263:

**Lema 1.2** *Sejam $X$ e $Y$ dois espaços de Banach tais que $X \subset Y$, com uma imersão contínua. Se uma função $\Phi$ pertence a $L^{\infty}(0,T,X)$ e é fracamente contínua com valores em $Y$, então $\Phi$ é fracamente contínua com valores em $X$.*

Para a obtenção de estimativas, teremos também que utilizar o seguinte resultado de Temam [10], página 260:

**Lema 1.3** *Sejam $V, H$ espaços de Banach e $V'$ o dual topológico de $V$ satisfazendo $V \subset H \subset V'$. Se uma função $u \in L^2(0,T,V)$ e sua derivada $u' \in L^2(0,T,V')$, então $u$ é q.s. igual a uma função contínua de $[0,T]$ em $H$ e nos temos a seguinte igualdade, que vale no sentido de distribuições escalares em $(0,T)$ :*

$$\frac{d}{dt}\|u\|_H^2 = 2\langle u', u\rangle_{V',V}$$

*A igualdade acima faz sentido posto que as funções $t \to \|u(t)\|_H^2$ e $t \to \langle u'(t), u(t)\rangle_{V',V}$ são ambas integráveis em $[0,T]$.*

O seguinte resultado de compacidade é o bem conhecido Lema de Aubin-Lions (referência Temam [10])

**Lema 1.4** *Sejam $X_0$,$X$,$X_1$ três espaços de Banach tais que $X_0 \subset X \subset X_1$, com imersões contínuas, $X_i$ reflexivo para $i = 0,1$ e a imersão $X_0 \subset X$ compacta. Sejam T>0 um número real fixo, e $\alpha_0$, $\alpha_1$ dois números reais tais que $\alpha_i > 0$, para $i = 0,1$.*

*Então o espaço* $A = \{v \in L^{\alpha_0}(0,T,X_0), v' \in L^{\alpha_1}(0,T,X_1)\}$, *equipado com a norma* $\|v\|_A = \|v\|_{L^{\alpha_o}(0,T,X_o)} + \|v'\|_{L^{\alpha_1}(0,T,X_1)}$ *a qual o torna um espaço de Banach, está imerso compactamente em* $L^{\alpha_o}(0,T,X)$.

As seguintes situações particulares das desigualdades do tipo Gagliardo-Niremberg que nos serão fundamentais, são dadas no lema abaixo cuja demonstração pode ser encontrada em Temam [10] nas páginas 291 e 296.

**Lema 1.5** *Para* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *aberto não vazio, vale:*

$(i)$ *Se* $d = 2$ *então* $\|v\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{\frac{1}{4}} \|v\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}$ , $\forall v \in H^1_o(\Omega)$

$(ii)$ *Se* $d = 3$ *então* $\|v\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{\frac{1}{2}} \|v\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|^{\frac{3}{4}}_{L^2(\Omega)}$ , $\forall v \in H^1_o(\Omega)$

Passemos agora a recordar certos resultados que são importantes na teoria clássica das equações de Navier-Stokes, e que também nos serão fundamentais. Inicialmente temos o seguinte resultado clássico de de Rham:

**Proposição 1.1** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *um aberto e* $f = \{f_1, f_2, ..., f_d\}$, *com* $f_i \in D'(\Omega)$, $i = 1, ..., d$. *Uma condição necessária e suficiente para que* $f = \nabla p$ *para alguma* $p$ *em* $D'(\Omega)$, *é que* $\langle f, v\rangle = 0$, $\forall v \in C^\infty_o(\Omega)$ *com* $div\, v \equiv 0$. *Onde* $D'(\Omega)$ *é o conjunto das distribuições definidas em* $\Omega$.

**Notação 1.1** $L^2(\Omega)/\mathbb{R} = \left\{p \in L^2(\Omega) : \int_\Omega p(x)dx = 0\right\}$.

Além disso, vale o seguinte:

**Proposição 1.2** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *um aberto limitado com fronteira Lipschitz.*

*(i) Se uma distribuição* $p$ *tem todas suas primeiras derivadas* $D^i p$ *em* $L^2(\Omega)$ *então* $p \in L^2(\Omega)$ *e vale:*

$$\|p\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C \|\nabla p\|_{L^2(\Omega)}$$

*(ii) Se uma distribuição* $p$ *tem todas suas primeiras derivadas* $D^i p$ *em* $H^{-1}(\Omega)$ *então* $p \in L^2(\Omega)$ *e vale:*

$$\|p\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C \|\nabla p\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

*Em ambos casos, se* $\Omega$ *é um aberto qualquer, então* $p \in L^2_{loc}(\Omega)$.

**Observação 1.2** *O item (ii) da Proposição (1.2) implica que o operador gradiente é um isomorfimo de $L^2(\Omega)/ I\!R$ em $(H^{-1}(\Omega))^n$; portanto, a imagem deste operador linear é fechada.*

Vamos também considerar os seguintes espaços funcionais:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \left\{u \in (C_o^\infty(\Omega))^d : \operatorname{div} u \equiv 0\right\} \\
V &= \left\{u \in (H_0^1(\Omega))^d : \operatorname{div} u \equiv 0\right\} \\
H &= \left\{u \in (L^2(\Omega))^d : \operatorname{div} u \equiv 0 \text{ e } u \cdot \overrightarrow{N}\Big|_{\partial\Omega} \equiv 0\right\} \\
H^\perp &= \left\{u \in (L^2(\Omega))^d : \; u = \nabla p, \text{ para algum } p \in H^1(\Omega)\right\}
\end{aligned}$$

Aqui, $H^\perp$ denota o ortogonal de $H$ no sentido de $(L^2(\Omega))^d$; nas expressões acima, div $u = 0$ e $\nabla p$ são entendidas no sentido de distribuições; $u \cdot \overrightarrow{N}\Big|_{\partial\Omega}$ denota o traço normal de $u$ sobre $\partial\Omega$ (veja, por exemplo,Temam [10]).

Utilizando Teorema de representação de Riesz, podemos identificar $H$ e o seu dual $H'$ obtendo as inclusões (contínuas e densas): $V \subset H \equiv H' \subset V$. Como consequência, o produto escalar em $H$ de $f \in H$ e $u \in V$ é o mesmo que o produto escalar de $f$ e $u$ na dualidade entre $V'$ e $V$:

$$\langle f, u\rangle_{V',V} = (f, u) \;\; , \; \forall f \in H \, , \; \forall u \in V$$

Denotaremos por $P$ a projeção ortogonal de $L^2(\Omega)$ em $H$. Resultados importantes sobre $P$ , e que podem ser encontrados por exemplo em Rautmann [8], páginas 427 e 428, são apresentados nos seguintes lemas:

**Lema 1.6** *O operador $-P\Delta : V \cap H^2(\Omega) \to H$ define em $V \subset H$ um operador simétrico, definido positivo, com inversa compacta $(-P\Delta)^{-1} : H \to H$.*

**Lema 1.7** *O operador $-P\Delta$ tem uma sequência $(\lambda_i)$ de autovalores positivos $\lambda_i > 0$, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ..., \lambda_i \to \infty$, e as correspondentes autofunções $(e_i)$ formam um conjunto ortonormal completo em $H$.*

**Lema 1.8** *As funções* $\left(\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right)$ *formam um conjunto ortonormal completo em* $V$. *Para cada* $f \in V$ *a sequência* $(P_i f)$ *converge para* $f$ *em* $V$.

Um resultado importante, envolvendo a projeção $P$ e o problema de Stokes estacionário é o seguinte:

**Proposição 1.3** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *um aberto limitado com fronteira de classe* $C^2$, *então a única solução* $v \in V, q \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ *do problema de Stokes estacionário:*

$$-\Delta v + \nabla q = g, \qquad div\, v \equiv 0, \qquad u|_{\partial\Omega} \equiv 0$$

*para* $g \in L^2(\Omega)$, *satisfaz:*

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} + \|q\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C \|g\|_{L^2(\Omega)}$$

**Observação 1.3** *Denotando* $\tilde{\Delta} = -P\Delta$, *a proposição acima implica que:*

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left\|\tilde{\Delta} v\right\|_{L^2(\Omega)}$$

*para* $v \in V \cap H^2$ *desde que* $\Delta v = \tilde{\Delta} v + \nabla q$ *deve valer para alguma função* $q \in H^1(\Omega)\big/\mathbb{R}$. *Para maiores considerações veja Heywood e Rannacher [6].*

Uma generalização do resultado acima é o seguinte lema (veja página 646 de Heywood [4]):

**Lema 1.9** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *um aberto com fronteira uniformemente de classe* $C^3$. *Suponhamos que* $v \in V$ *é uma solução generalizada do problema estacionário de Stokes, isto é,* $v$ *satisfaz* $\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \Phi dx = \int_\Omega g \cdot \Phi dx$ *para toda* $\Phi \in \mathcal{V}$. *Então* $v$ *possui derivadas segundas em* $L^2(\Omega)$ *e as desigualdades:*

$$(i)\ \left\|D^2 v\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|Pg\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

$$(ii)\ \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|Pg\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

*valem com constante* $C$ *dependendo somente da regularidade* $C^3$ *de* $\partial\Omega$ *(não do tamanho de* $\partial\Omega$ *ou de* $\Omega$*).*

**Observação 1.4** *A afirmação da constante $C$ do lema acima depender da regularidade $C^3$ de $\partial\Omega$ provém do fato do lema valer em domínios ilimitados. Em domínios limitados não temos tal condição.*

No contexto de espaços $L^q$, com $1 < q < +\infty$, é também interessante considerar de forma análoga ao feito anteriormente os seguintes espaços (veja Solonnikov [9] ou von Wahl [11] para maiores detalhes):

$$J_q(\Omega) = \left\{ u \in (L^q(\Omega))^d : u \cdot \vec{N}|_{\partial\Omega} = 0 \text{ e div } u = 0 \right\},$$
$$G_q(\Omega) = \left\{ u \in (L^q(\Omega))^d : u = \nabla\varphi \right\}.$$

Então, vale que $L^q(\Omega) = J_q(\Omega) \oplus G_q(\Omega)$, e isto define projeções contínuas $P_{J_q}$ e $P_{G_q}$ (com norma que depende apenas de $\Omega$ e $q$).

Observamos que $J_2(\Omega) = H$ e $G_2(\Omega) = H^{\perp}$. Além disso, uma caracterização mais cuidadosa de $P$ e $P_{J_q}$ implica que, para $f \in (L^2(\Omega))^d \cap (L^q(\Omega))^d$, temos $P(f) = P_{J_q}(f)$.

Isto induz a projeção contínua $L^p(0, T, (L^q(\Omega))^d)$ sobre $L^p(0, T, J_q(\Omega))$, definida de modo canônico por $P_{J^q}(u)(x, t) = P_{J^q}(u(., t))(x)$, cuja norma depende apenas de $\Omega$ e $q$.

Resultados análogos aos descritos valem também para os espaços de Sobolev $W^{m,q}(\Omega)$ (para maiores detalhes, consulte von Wahl [11]).

Com respeito à não linearidade correspondente ao termo de convecção, valem os seguintes resultados(Temam [10], páginas 281 e 292, respectivamente):

**Lema 1.10** *Se $d \leq 4$ e $u \in L^2(0, T, V)$, então a função $Bu$ definida por*

$$\langle Bu(t), v \rangle = b(u(t), u(t), v) = (u \cdot \nabla(u), v), \forall v \in V, \quad t \in [0, T] \ q.s.$$

*pertence a $L^1(0, T, V')$.*
*Em dimensão dois, se $u \in L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, H)$ então $Bu \in L^2(0, T, V')$ e vale:*

$$\|Bu\|_{L^2(0,T,V')} \leq 2^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^\infty(0,T,H)} \|u\|_{L^2(0,T,V)}$$

**Lema 1.11** *Seja $\Omega \subset I\!R^d$ aberto não vazio, então para $\forall u, v, w \in H_o^1(\Omega)$ temos:*

*(i)* $(u \cdot \nabla(v), v) = 0$

*(ii) Se $d = 2$ então vale:*

$\left\|(u \cdot \nabla(v), w)\right\|_{L^2(\Omega)} \leq 2^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}$

*(iii) Se $d = 3$ então vale:*

$\left\|(u \cdot \nabla(v), w)\right\|_{L^2(\Omega)} \leq 2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{4}} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{4}} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{4}} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{4}}$

Também será necessário trabalhar com os chamados espaços de Hölder, definidos como se segue: sejam $\Omega \subset I\!R^d$ um aberto não vazio, $\lambda \in I\!R$, com $0 < \lambda \leq 1$, e $m \in \{0, 1, 2, ...\}$.

Definimos:

$$\mathcal{H}^{m+\lambda}(\Omega) = \left\{u : \Omega \to I\!R \text{ , } u \in C^m\left(\bar{\Omega}\right) \text{ tal que } \|u\|_{\mathcal{H}^{m+\lambda}(\Omega)} < \infty\right\},$$

onde

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{m+\lambda}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)| + \sum_{|\alpha| = m} \left(\sup_{x,y \in \Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x - y|^\lambda}\right) \tag{1.1}$$

Os espaços acima são bem conhecidos, e uma referência é, por exemplo, Adams [1]

Os espaços abaixo são, num certo sentido, generalizações nas variáveis espaciais e temporais dos espaços de Hölder definidos acima:

Sejam $0 < \lambda \leq 1$ e $m \in \{0, 1, 2, ...\}$. Definimos:

$$\mathcal{H}^{2m+\lambda}(Q_T) = \left\{ \begin{array}{l} u : \bar{\Omega} \times [0, T] \to I\!R \text{ tais que } u(., t) \in C^{2m}\left(\bar{\Omega}\right), \forall t \in [0, T] \text{ e} \\ u(x, .) \in C^m[0, T], \forall x \in \bar{\Omega} \text{ , e } \|u\|_{\mathcal{H}^{2m+\lambda}(Q_T)} < \infty \end{array} \right\},$$

onde

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{2m+\lambda}(Q_T)} = \sum_{|\alpha| \leq 2m} \sup_{Q_T} |D_x^\alpha u(x, t)| + \sum_{k=1}^{m} \sup_{Q_T} \left|D_t^k u(x, t)\right|$$

$$+ \sum_{|\alpha| = 2m} \left(\sup_{x,y,t} \frac{|D_x^\alpha u(x, t) - D_x^\alpha u(y, t)|}{|x - y|^\lambda} + \sup_{x,t,s} \frac{|D_x^\alpha u(x, t) - D_x^\alpha u(x, s)|}{|t - s|^{\frac{\lambda}{2}}}\right)$$

$$+ \sup_{x,y,t} \frac{|D_t^m u(x, t) - D_t^m u(y, t)|}{|x - y|^\lambda} + \sup_{x,t,s} \frac{|D_t^m u(x, t) - D_t^m u(x, s)|}{|t - s|^{\frac{\lambda}{2}}}$$

$$\mathcal{H}^{1+\lambda}(Q_T) = \left\{ \begin{array}{l} u : \bar{\Omega} \times [0,T] \to I\!R \text{ tais que } u(.,t) \in C^1(\bar{\Omega}), \forall t \in [0,T] \\ \text{e } u(x,.) \in C^0[0,T], \forall x \in \bar{\Omega} \text{ , e } \|u\|_{\mathcal{H}^{1+\lambda}(Q_T)} < \infty \end{array} \right\},$$

onde

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{1+\lambda}(Q_T)} = \sum_{|\alpha| \le 1} \sup_{Q_T} |D_x^\alpha u(x,t)| + \sum_{|\alpha|=1} \sup_{x,y,t} \frac{|D_x^\alpha u(x,t) - D_x^\alpha u(y,t)|}{|x-y|^\lambda}$$

$$+ \sum_{|\alpha|=1} \sup_{x,t,s} \frac{|D_x^\alpha u(x,t) - D_x^\alpha u(x,s)|}{|t-s|^{\frac{\lambda}{2}}}$$

Com a intenção de simplificar a notação, uma vez que estará claro do contexto se estaremos com uma função que depende apenas das variáveis espaciais $(x)$ ou também do tempo $(t)$, denotaremos:

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{H}^{m+\lambda}(\Omega)} &= \|u\|_{m+\lambda} \\ \|u\|_{\mathcal{H}^{2m+\lambda}(Q_T)} &= \|u\|_{2m+\lambda} \\ \|u\|_{\mathcal{H}^{1+\lambda}(Q_T)} &= \|u\|_{1+\lambda} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Temos os seguintes resultados de imersão para funções em espaços de Hölder:

**Teorema 1.1** *Sejam $m$ um inteiro não negativo e $\Omega$ um aberto limitado de $I\!R^d$, $d \in I\!N = \{1, 2, 3, ...\}$, $T > 0$ e $0 < \nu < \lambda \le 1$. Então as seguintes imersões são contínuas e compactas.*

**(i)** $\mathcal{H}^{m+\lambda}(\Omega) \hookrightarrow C^m\left(\overline{\Omega}\right)$

**(ii)** $\mathcal{H}^{m+\lambda}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{H}^{m+\nu}(\Omega)$

**(iii)** $\mathcal{H}^{2m+\lambda}(Q_T) \hookrightarrow C^{2m,m}\left(\overline{Q_T}\right)$

**(iv)** $\mathcal{H}^{2m+\lambda}(Q_T) \hookrightarrow \mathcal{H}^{2m+\nu}(Q_T)$

**(v)** $\mathcal{H}^{1+\lambda}(Q_T) \hookrightarrow C^{1,0}\left(\overline{Q_T}\right)$

As demonstrações de (i) e (ii) acima podem ser encontradas em Adams [1]; as demontrações de (iii), (iv) e (v) são obtidas de modo semelhante, com o uso do Teorema de Arzela-Ascoli.

A notação $C^{m,n}(Q_T)$ significa funções que são $C^m$ na variável espacial e $C^n$ na variável temporal; aqui $m$ e $n$ são inteiros não negativos.

Outra importante propriedade destes espaços é:

$$\|u.v\|_{j+\lambda} \leq C(j)\,\|u\|_{j+\lambda}\,\|v\|_{j+\lambda}\,; \forall u, v \in \mathcal{H}^{j+\lambda}(\Omega)\left(\text{ou } \mathcal{H}^{j+\lambda}(Q_T)\right), \tag{1.3}$$

onde, no caso de funções definidas sobre $\Omega$, temos $j \in \mathbb{N}$ , e no caso de funções definidas sobre $Q_T$, temos $j = 1$ ou $j = 2m$, com $m \in \mathbb{N}$ .

Para funções com valores vetoriais, sendo $u = (u_1, u_2, ..., u_d)$, dizemos que $u$ é uma função de um espaço de Hölder de ordem $j + \lambda$, com $j$ como antes, se $u \in (\mathcal{H}^{j+\lambda}(\Omega))^d \left(ou\left(\mathcal{H}^{j+\lambda}(Q_T)\right)^d\right)$.

Tomaremos então como norma $\|u\|_{j+\lambda} = \sum_{k=1}^{d} \|u_k\|_{j+\lambda}$, o que garante, obviamente, propriedades equivalentes às anteriormente descritas.

No contexto de espaços de Hölder, podemos introduzir os subespaços

$$J^{m+\lambda}(\Omega) = \left\{u \in (\mathcal{H}^{m+\lambda}(\Omega))^d : u \cdot \vec{N}|_{\partial\Omega} = 0 \text{ e div } u = 0\right\},$$

$$G^{m+\lambda}(\Omega) = \left\{u \in (\mathcal{H}^{m+\lambda}(\Omega))^d : u = \nabla\varphi\right\}$$

Similarmente ao que é valido no contexto de espaços $L^q$, temos $\mathcal{H}^{m+\lambda}(\Omega) = J^{m+\lambda}(\Omega) \bigoplus \mathrm{G}^{m+\lambda}(\Omega)$, o que define projeções contínuas $P_J$ e $P_G$ sobre $J^{m+\lambda}$ e $G^{m+\lambda}$, respectivamente. As normas destas projeções dependem apenas de $\Omega$ e $\lambda$. Como antes, uma caracterização mais cuidadosa destas projeções, no caso de haver suficiente regularidade de $\partial\Omega$ (é suficiente aquela que garante a correspondente regularidade elítica para operadores de segunda ordem em espaços de Hölder), temos que $P_J(f) = P(f)$, para $f \in (\mathcal{H}^{m+\lambda}(\Omega))^d \cap (L^2(\Omega))^d = (\mathcal{H}^{m+\lambda}(\Omega))^d$, já que $\Omega$ é limitado, e assim podemos simplificar a notação usando apenas $P$.

Esta projeção induz uma projeção canônica sobre $(\mathcal{H}^{j+\lambda}(Q_T))^d$, com $j$ como acima, ainda denotada por $P$ e definida para cada $u \in (\mathcal{H}^{j+\lambda}(Q_T))^d$ da forma

$P(u)(x,t) = (Pu(.,t))(x)$. Com esta definição, $P$ comuta com o operador $\dfrac{\partial}{\partial t}$ e tem-se, então, que $P((\mathcal{H}^{j+\lambda}(Q_T))^d) \subset (\mathcal{H}^{j+\lambda}(Q_T))^d$ e, em particular, $P(u)(.,t) \in J^{j+\lambda}(\Omega)$ para cada $t$ fixo . Além disso,

$$\|P(u)\|_{j+\lambda} \leq C\,\|u\|_{j+\lambda}\,, \forall u \in (\mathcal{H}^{j+\lambda}(Q_T))^d, \tag{1.4}$$

onde a constante $C = C(\Omega, j, \lambda)$, mas ela não depende de $T$. Mais detalhes podem ser encontrados em von Wahl [11] e Solonnikov [9].

O seguinte teorema, devido a Solonnikov, será muito importante para os argumentos a serem utilizados no Capítulo 3:

**Teorema 1.2 (Solonnikov)** *Suponhamos que $\Omega \subset I\!R^d$ é um domínio limitado com $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{H}^{2+\lambda}$ (isto é, $\partial\Omega$ pode ser localmente mapeada por uma aplicação de classe $\mathcal{H}^{2+\lambda}$) e que sejam dadas $v_o \in (\mathcal{H}^{2+\lambda}(\Omega))^d$ e $f \in (\mathcal{H}^{\lambda}(Q_T))^d$ satisfazendo as seguintes condições: $P(f) \in (\mathcal{H}^{\lambda}(Q_T))^d$; $div\ v_o \equiv 0$; $v_o\,|_{\partial\Omega} \equiv 0$ e*

$$P\left(f(x,0) + \mu\Delta v_o(x)\right) = 0\ ,\quad \forall x \in \partial\Omega \tag{1.5}$$

*Então o problema:*

$$\begin{cases} \rho v_t - \mu\Delta v + \nabla p = f & em \quad Q_T\,, \\ div\ v = 0 & em \quad Q_T\,, \\ v(x,0) = v_o(x) & \forall x \in \Omega\,, \\ v(x,t) = 0 & \forall t \in (0,T)\ ,\quad \forall x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.6}$$

*Tem uma única solução $(v,p)$ onde $v \in \left(\mathcal{H}^{2+\lambda}(Q_T)\right)^d$ e $\nabla p \in \left(\mathcal{H}^{\lambda}(Q_T)\right)^d$ e vale:*

$$\|v\|_{2+\lambda} + \|\nabla p\|_{\lambda} \leq C_1\left(\|f\|_{\lambda} + \|P(f)\|_{\lambda} + \|v_o\|_{2+\lambda}\right) + C_2 \max_{Q_T} |v(x,t)| \tag{1.7}$$

*Além disso, as constantes $C_1$ e $C_2$ não dependem de $T$.*

**Observação 1.5** *A hipótese (1.5) é uma condição de consistência.*

**Observação 1.6** *O resultado em Solonnikov [9] é um pouco mais geral do que o enunciado acima: De fato, a equação considerada em Solonnikov [9] é:*

$$\rho v_t - \mu \Delta v + a(x,t)\, v + \sum_{k=1}^{3} a_k(x,t) \frac{\partial v}{\partial x_k} + \nabla p = f(x,t),$$

*onde $a$ e $a_k$ são certas matrizes. Neste trabalho temos $a \equiv a_k \equiv 0$.*

**Observação 1.7** *Fazendo uso do Teorema do gráfico fechado, temos:*

$$\sup_{Q_T} |v(x,t)| \leq C \|f\|_\lambda$$

A demosntração é a seguinte: Seja $S$ o operador $\rho \dfrac{\partial}{\partial t} - \mu\Delta + \nabla$ definido no conjunto $X \subset \mathcal{H}^{2+\lambda}(Q_T) \times \mathcal{H}^{1+\lambda}(Q_T)$ e com valores em $Y \subset \mathcal{H}^{\lambda}(Q_T)$ onde:

$$Y = \left\{ f \in \mathcal{H}^{\lambda}(Q_T) : \text{vale } (1.5) \right\}$$

$X$ é constituído pelas soluções do sistema (1.6) com $f \in Y$.

Segundo o Teorema 1.2, $S$ é injetor e sobrejetor. Também temos que $S$ é fechado, pois:

Sejam $(v_n, p_n) \to (v,p)$ quando $n \to \infty$ em $X$ e $f_n = S(v_n, p_n) \to f$ quando $n \to \infty$ em $Y$. Temos que:

i) $(v,p) \in \mathcal{H}^{2+\lambda}(Q_T) \times \mathcal{H}^{1+\lambda}(Q_T)$ pois é um espaço de Banach e a condição (1.5) é satisfeita no limite.

ii) $f = S(v,p)$ pois:

$$\begin{aligned} \|S(v,p) - f\|_Y &= \|S(v,p) - S(v_n,p_n) + S(v_n,p_n) - f\|_Y \\ &\leq \|S(v_n,p_n) - S(v,p)\|_Y + \|S(v_n,p_n) - f\|_Y \end{aligned}$$

A segunda parcela converge para 0 por hipótese, quanto a primeira observemos que:

$$\|S(v_n,p_n) - S(v,p)\|_Y = \left\| \frac{\rho\, \partial (v_n - v)}{\partial t} - \mu \Delta (v_n - v) + \nabla (v_n - v) \right\|_Y$$

$$\leq \rho \left\| \frac{\rho\, \partial (v_n - v)}{\partial t} \right\|_Y + \mu \|\mu\, \Delta (v_n - v)\|_Y + \|\nabla (v_n - v)\|_Y$$

E as três parcelas convergem a 0, por hipótese. $S$ possui uma inversa que também é fechada, pelo Teorema do gráfico fechado temos que $S^{-1}$ é contínua. Portanto se $S(v,p) = f$ então:

$$\|(v,p)\|_X = \left\|S^{-1}(f)\right\|_X \leq \left\|S^{-1}\right\| \|f\|_Y$$

Portanto:

$$\max_{Q_T} |v(x,t)| \leq \|v\|_{2+\lambda} \leq \|(v,p)\|_X \leq C \|f\|_Y$$

□

**Observação 1.8** *Com a hipótese de que a pressão tem média zero, isto é,* $\int_\Omega p(x,t)\,dx = 0, \forall t \in [0,T]$ *obtemos (fazendo uso do Teorema do valor médio do cálculo) que* $\sup_{Q_T} |p(x,t)| \leq \sup_{Q_T} |\nabla p(x,t)|$ *neste sentido* $p \in \mathcal{H}^{1+\lambda}(Q_T)$.

A idéia da demonstração é a seguinte: para cada instante de tempo $\bar{t}$ temos que existe $x_{\bar{t}}$ tal que $p(x_{\bar{t}}, \bar{t}) = 0$. Por outro lado, Como $\Omega$ é um domínio com fronteira regular $\left(\mathcal{H}^{2+\lambda}\right)$, ele tem a propriedade da poligonal e, asssim, podemos usar o Teorema do Valor Médio em cada segmento da poligonal que une um ponto $x \in \Omega$ arbitrário até $x_{\bar{t}}$, obtendo:

$$\sup_{Q_T} |p(x,t)| \leq C(\Omega) \sup_{Q_T} |\nabla p(x,t)|$$

onde $C(\Omega)$ depende somente de $\Omega$. □

Fazendo uso das observações acima e (1.4) podemos reescrever (1.7) na seguinte forma:

$$\|v\|_{2+\lambda} + \|p\|_{1+\lambda} \leq C\left(\|f\|_\lambda + \|v_\circ\|_{2+\lambda}\right) \tag{1.8}$$

Aqui C não depende de T.

Finalmente, recordamos o seguinte lema de Gronwall bem conhecido em equações diferenciais ordinárias, por exemplo veja em Hale [3] na página 36.

**Lema 1.12 (Gronwall)** *Seja* $f(t)$ *uma função absolutamente contínua, não negativa em* $[0,T]$*, que satisfaz, para quase todo* $t$*, a seguinte desigualdade* *diferencial* $f'(t) \leq \phi(t)f(t) + \psi(t)$,*onde* $\phi(t)$ *e* $\psi(t)$ *são funções integráveis, não negativas em* $[0,T]$ .*Então:*

$$f(t) \leq \exp\left(\int_0^t \phi(s)ds\right)\left[f(0) + \int_0^t \psi(s)ds\right] \quad para\ todo\ 0 \leq t \leq T$$

Uma generalização do resultado acima é o seguinte lema, que pode ser encontrado em Heywood [4] na página 656:

**Lema 1.13** *Sejam* $\Phi(t), \Psi(t), f(t)$ *e* $h(t)$ *funções suaves não negativas, definidas para todo* $t \geq 0$. *Suponhamos que* $\Phi(0) = \Phi_o$ *e* $\Phi'(t) + \Psi(t) \leq g(\Phi(t)) + f(t)$, *para* $t \geq 0$, *onde* $g$ *é uma função Lipschitz, contínua e não negativa definida para* $\Phi \geq 0$. *Então vale* $\Phi(t) \leq F(t, \Phi_o)$, *para* $t \in [0, T(\Phi_o)]$, *onde* $F(\cdot, \Phi_o)$ *é a solução do problema de valor inicial* $F'(t) = g(F(t)) + f(t)$, $F(0) = \Phi_o$, *e* $[0, T(\Phi_o)]$ *é o intervalo no qual* $F$ *pode ser definida. Também, se* $g$ *é não decrescente, então* $\int_0^t \psi(\sigma)d\sigma \leq \widetilde{F}(t, \Phi_o)$, *onde* $\widetilde{F}(t, \Phi_o) = \Phi_o + \int_0^t [g(F(\sigma, \Phi_o)) + f(\sigma)]\, d\sigma$.

Finalmente, como é usual neste contexto de equações associadas às equações de Navier-Stokes, para simplificar a notação não distinguiremos notacionalmente funções escalares de funções a valores vetoriais a menos que o contexto assim o exija para evitar confusão; em geral a situação estará clara no contexto.

# Capítulo 2

# Resultados quando a porosidade é conhecida

Para fazer uma formulação fraca de (0.1) vamos, como nas equações de Navier-Stokes, eliminar a pressão, para tanto fazemos o produto interno em $L^2(\Omega)$ da equação (dividida por $n$) por uma função de $V$ e observando que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{u'}{n} - \frac{un'}{n^2}$$

nos podemos reescrever (0.1) na seguinte forma:

Para $g, n$ e $u_o$ dados, com $g \in L^2(0, T, V')$ e $u_o \in H$ devemos encontrar $u$ satisfazendo $u \in L^2(0, T, V)$ e:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{u}{n}, v\right) + \left(\dfrac{n'}{n^2}u, v\right) + \left(\dfrac{u}{n} \cdot \nabla\left(\dfrac{u}{n}\right), v\right) + \mu\left(\nabla(u), \nabla\left(\dfrac{1}{n}\right)v\right) \\ +\mu\left(\nabla(u), \nabla(v)\dfrac{1}{n}\right) + \mu\left(\dfrac{F(n)}{n}u, v\right) = \langle g, v\rangle \quad \forall v \in V \text{ em } D'(0, T) \\ u(0) = u_o \in H \end{cases} \tag{2.1}$$

## 2.1 Existência de soluções

O seguinte teorema é o resultado de existência de solução básico que obtemos, no sentido de que as hipóteses são as mínimas para obtermos uma solução em $L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, H)$.

**Teorema 2.1 (existência)** *Seja* $\Omega \subset I\!R^d$: $d = 2, 3$ *um aberto limitado com fronteira* $C^{1,1}$, $u_o \in H$ , $g \in L^2(0, T, V')$. *Seja* $n : Q_T = \Omega \times (0, T) \rightarrow I\!R$ *uma função satisfazendo:*

$$\begin{aligned}
&0 < n_o \leq n(x,t) < 1 \quad \forall (x,t) \in Q_T \\
&n' \in L^2\left(0, T, L^{\frac{3}{2}}(\Omega)\right) \\
&n' \in L^1\left(0, T, L^{\infty}(\Omega)\right) \\
&\nabla n \in L^2\left(0, T, L^{\infty}(\Omega)\right) \cap L^{\infty}\left(0, T, L^3(\Omega)\right)
\end{aligned}$$

*Ou então as duas últimas condições podem ser substituídas por:*

$$\begin{aligned}
&n' \in L^{\infty}\left(0, T, L^{\frac{3}{2}}(\Omega)\right) \quad \textit{com norma pequena.} \\
&\nabla n \in L^{\infty}\left(0, T, L^3(\Omega)\right) \quad \textit{com norma pequena.}
\end{aligned}$$

*Seja* $F : (0,1) \rightarrow I\!R$ *uma função satisfazendo:*

$$0 < F(n(x,t)) \leq F_o < \infty \quad \forall (x,t) \in Q_T$$

*Então existe ao menos uma função* $u \in L^2(0, T, V) \cap L^{\infty}(0, T, H)$ *satisfazendo (2.1).*

**Observação 2.1** *Em dimensão dois, as condições em* $n'$ *e* $\nabla n$ *podem ser substituídas por:*

$$\begin{aligned}
&n' \in L^2\left(0, T, L^p(\Omega)\right) \quad \textit{para algum } p > 1. \\
&n' \in L^1\left(0, T, L^{\infty}(\Omega)\right) \\
&\nabla n \in L^2\left(0, T, L^{\infty}(\Omega)\right) \cap L^{\infty}\left(0, T, L^p(\Omega)\right) \quad \textit{para algum } p > 2
\end{aligned}$$

*Ou então as duas últimas podem ser substituídas por:*

$$\begin{aligned}
&n' \in L^{\infty}\left(0, T, L^p(\Omega)\right) \quad \textit{para algum } p > 1, \textit{com norma pequena.} \\
&\nabla n \in L^{\infty}\left(0, T, L^p(\Omega)\right) \quad \textit{para algum } p > 2, \textit{ com norma pequena.}
\end{aligned}$$

**Observação 2.2** *A condição* $n' \in L^2\left(0, T, L^{\frac{3}{2}}(\Omega)\right)$ *garante que a formulação variacional (2.1) faz sentido, isto é, que a segunda parcela é finita. Aqui, na verdade, bastaria* $n' \in L^2_{loc}\left(0, T, L^{\frac{3}{2}}(\Omega)\right)$. *Esta condição também garante que* $u(t) \rightarrow u_o$ *em* $V'$ *quando* $t \rightarrow 0$.

**Observação 2.3** *A pequenez dos dados acima depende somente de $n_o$ e $\mu$ e será precisada no decorrer da demonstração.*

**Prova do Teorema 2.1:** Vamos, antes de tudo, precisar o sentido em que o dado inicial $u(0)$ é assumido:

A formulação variacional (2.1) é equivalente a:

$$\frac{d}{dt}\left\langle \frac{u}{n}; v\right\rangle = \left\langle g - Au - B\left(\frac{u}{n}\right); v\right\rangle \quad \forall v \in V$$

onde

$$\langle Au; v\rangle = \left(\frac{n'}{n^2}u, v\right) + \mu\left(\nabla(u), \nabla\left(\frac{1}{n}\right)v\right) + \mu\left(\nabla(u), \nabla(v)\frac{1}{n}\right) + \mu\left(\frac{F(n)}{n}u, v\right)$$

$$\left\langle B\left(\frac{u}{n}\right); v\right\rangle = \left(\frac{u}{n}\cdot\nabla\left(\frac{u}{n}\right), v\right)$$

Isto é:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{n}\right) = g - Au - B\left(\frac{u}{n}\right)$$

Por hipótese temos que $g \in L^2(0, T, V')$, não é difícil de mostrar que $Au \in L^1(0, T, V')$: aqui nos usamos a hipótese $n' \in L^2\left(0, T, L^{\frac{3}{2}}(\Omega)\right)$ na primeira parcela de $A$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$, da seguinte forma:

$$\int_0^T \sup_{\|\nabla v\| \leq 1} \left|\left(\frac{n'}{n^2}u, v\right)\right| dt \leq C\int_0^T \sup_{\|\nabla v\| \leq 1} \|n'\|_{L^p(\Omega)} \|u\|_{L^q(\Omega)} \|v\|_{L^r(\Omega)}\, dt.$$

com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$, como $q$ e $r$ podem ser no máximo 6, então $p$ é, no mínimo $\frac{3}{2}$, e assim majoramos a expressão acima por:

$$\int_0^T \sup_{\|\nabla v\| \leq 1} \|n'\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} \|\nabla u\| \|\nabla v\|\, dt \leq \left(\int_0^T \|n'\|^2_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|\nabla u\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Em dimensão 2, $q$ e $r$ podem ser qualquer número finito maior que 2, assim $p$ pode ser qualquer número maior que um. Isto justifica a condição para $n'$ na Observação 2.1.

E segundo o Lema 1.10 temos que $B\left(\frac{u}{n}\right) \in L^1(0,T,V')$. Assim, utilizando o Lema 1.1, obtemos que $\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{n}\right) \in L^1(0,T,V')$ e $\frac{u}{n} \in C(0,T,V')$. Desta forma, $u(0)$ faz sentido.

Seja agora $(v_i)_{i\in N} \subset V$ a base espectral, isto é, a base constituída pelos autovetores do operador $-P\Delta$. (Veja lema 1.8).

Definimos o seguinte subespaço m-dimensional $V_m = [v_1, v_2, ..., v_m]$.

Seja $u_m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} c_{i,m}(t)v_i(x)$

A formulação fraca (2.1) em cada $V_m$ fica:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{u_m}{n}, v_i\right) + \left(\frac{n'}{n^2}u_m, v_i\right) + \left(\frac{u_m}{n}\cdot\nabla\left(\frac{u_m}{n}\right), v_i\right) + \mu\left(\nabla(u_m), \nabla\left(\frac{1}{n}\right)v_i\right) \\ \\ +\mu\left(\nabla(u_m), \nabla(v_i)\frac{1}{n}\right) + \mu\left(\frac{F(n)}{n}u_m, v_i\right) = \langle g, v_i\rangle \quad \forall v_i \in V_m \text{ em } D'(0,T) \\ \\ u_m(0) = u_{o,m} \in H \end{cases} \tag{2.2}$$

Onde $u_{o,m}$ converge para $u_o$ em $H$.

Utilizando $(i)$ do Lema 1.11 e passando a derivada em $t$ na primeira parcela para dentro do produto interno em $L^2(\Omega)$ e então multiplicando a equação por $c_{i,m}(t)$ e fazendo a soma sobre $i$ obtemos:

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 + 2\left(\frac{n'}{n^2}u_m, u_m\right) + 2\mu\left(\nabla(u_m), \nabla\left(\frac{1}{n}\right)u_m\right)$$

$$+2\mu\left\|\frac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|^2 + 2\mu\left\|\sqrt{\frac{F(n)}{n}}u_m\right\|^2 = 2\langle g, u_m\rangle$$

Isto é:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 + 2\mu\left\|\frac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|^2 + 2\mu\left\|\sqrt{\frac{F(n)}{n}}u_m\right\|^2 \le C\|g\|_{V'}^2 + a\|\nabla(u_m)\|^2 \\ &-2\left(\frac{n'}{n^2}u_m, u_m\right) - 2\mu\left(\nabla(u_m), \nabla\left(\frac{1}{n}\right)u_m\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Com o objetivo de usar a desigualdade de Gronwall (Lema 1.12) podemos majorar as duas últimas parcelas da inequação acima de duas formas diferentes:

Majorações para $\left(\frac{n'}{n^2}u_m, u_m\right)$:

(I) Suponhamos que $n' \in L^1\left(0, T, L^\infty(\Omega)\right)$, neste caso $|n'(x,t)| \leq \|n'(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}$ e temos:

$$\left(\frac{n'}{n^2}u_m, u_m\right) \leq C\,\|n'(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 \tag{2.4}$$

(II) Suponhamos que $n' \in L^\infty\left(0, T, L^{\frac{3}{2}}(\Omega)\right)$, neste caso:

$$\left(\frac{n'}{n^2}u_m, u_m\right) \leq C\,\|n'\|^2_{L^\infty\left(0,T,L^{\frac{3}{2}}(\Omega)\right)}\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2_{L^6(\Omega)} \leq C\,\|n'\|^2_{L^\infty\left(0,T,L^{\frac{3}{2}}(\Omega)\right)}\left\|\frac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|^2 \tag{2.5}$$

Majorações para $\left(\nabla(u_m), \nabla\left(\frac{1}{n}\right)u_m\right)$:

(I) Suponhamos que $\nabla n \in L^\infty\left(0, T, L^3(\Omega)\right)$, neste caso:

$$\begin{aligned}
\left(\nabla(u_m), \nabla\left(\frac{1}{n}\right)u_m\right) &= -\left(\nabla(u_m), \frac{\nabla(n)}{n^2}u_m\right) \leq a\left\|\frac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|^2 \\
+C\left\|\nabla(n)\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 &\leq a\left\|\frac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|^2 + C\,\|\nabla n(t)\|^2_{L^3(\Omega)}\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2_{L^6(\Omega)} \\
&\leq a\left\|\frac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|^2 + C\,\|\nabla(n)\|^2_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}\left\|\frac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|^2
\end{aligned} \tag{2.6}$$

(II) Suponhamos que $\nabla n \in L^2\left(0, T, L^\infty(\Omega)\right)$, neste caso:

$$\begin{aligned}
\left(\nabla(u_m), \frac{\nabla(n)}{n^2}u_m\right) &\leq C\,\|\nabla n(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\left\|\frac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\| \\
&\leq a\left\|\frac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|^2 + C\,\|\nabla n(t)\|^2_{L^\infty(\Omega)}\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Se usarmos as condições (2.5) e (2.6) a inequação (2.3) fica:

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 + 2\mu\left\|\frac{\nabla\left(u_m\right)}{\sqrt{n}}\right\|^2 + 2\mu\left\|\sqrt{\frac{F(n)}{n}}u_m\right\|^2 \leq C\left\|g\right\|_{V'}^2$$

$$+aC\left\|\frac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|^2 + C\left\|n'\right\|_{L^\infty\left(0,T,L^{\frac{3}{2}}(\Omega)\right)}^2\left\|\frac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|^2$$

$$+a\left\|\frac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|^2 + C\left\|\nabla\left(n\right)\right\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2\left\|\frac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|^2$$

Desta forma, se $K = 2\mu - aC - C\left\|n'\right\|_{L^\infty\left(0,T,L^{\frac{3}{2}}(\Omega)\right)}^2 - a - C\left\|\nabla\left(n\right)\right\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2 > 0$ obtemos:

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 + K\left\|\frac{\nabla\left(u_m\right)}{\sqrt{n}}\right\|^2 + 2\mu\left\|\sqrt{\frac{F(n)}{n}}u_m\right\|^2 \leq C\left\|g\right\|_{V'}^2 \tag{2.8}$$

Descartando o terceiro termo e integrando obtemos:

$$\frac{u_m}{\sqrt{n}} \in L^\infty\left(0,T,L^2\left(\Omega\right)\right) \text{ e } \frac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}} \in L^2\left(0,T,L^2\left(\Omega\right)\right)$$

Isto é:

$$u_m \in L^2\left(0,T,V\right) \cap L^\infty\left(0,T,H\right) \tag{2.9}$$

uniformemente em um conjunto limitado.

De forma semelhante, se usarmos (2.4) e (2.7) em (2.3) obteremos:

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 + 2\mu\left\|\frac{\nabla\left(u_m\right)}{\sqrt{n}}\right\|^2 + 2\mu\left\|\sqrt{\frac{F(n)}{n}}u_m\right\|^2 \leq C\left\|g\right\|_{V'}^2 + aC\left\|\frac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|^2$$

$$+C\left\|n'(t)\right\|_{L^\infty(\Omega)}\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 + a\left\|\frac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|^2 + C\left\|\nabla n(t)\right\|_{L^\infty(\Omega)}^2\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2$$

Escolhendo $a$ tal que $K = 2\mu - aC - a > 0$ nos obtemos:

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 + K\left\|\frac{\nabla\left(u_m\right)}{\sqrt{n}}\right\|^2 + 2\mu\left\|\sqrt{\frac{F(n)}{n}}u_m\right\|^2 \leq C\left\|g\right\|_{V'}^2$$

$$+C\left(\left\|n'(t)\right\|_{L^\infty(\Omega)} + \left\|\nabla n(t)\right\|_{L^\infty(\Omega)}^2\right)\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2$$

Descartando o terceiro termo e usando a desigualdade de Gronwall também obtemos (2.9).

Do obtido em (2.9), concluimos a existência de uma subsequência (por simplicidade ainda denotada por $u_m$ ) que converge fraco em $L^2(0,T,V)$ e fraco * em $L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$. Para passar o limite na forma trilinear precisamos, como em Navier-Stokes clássica, de uma convergência forte em $L^2(0,T,L^2(\Omega))$. Isto é conseguido utilizando-se o Lema de Aubin-Lions (Lema 1.4).

Para isto vamos mostrar que $u'_m \in L^{\frac{4}{3}}(0,T,V')$ :

Passando a derivada temporal da primeira parcela de (2.2) para dentro do produto interno em $L^2(\Omega)$ podemos reescrever esta formulação da seguinte forma:

$$\left\langle \frac{u'_m}{n}; v \right\rangle = \left\langle g - Au - B\left(\frac{u_m}{n}\right); v \right\rangle \quad \forall v \in V_m$$

onde

$$\langle Au_m; v\rangle = \mu\left(\nabla(u_m), \nabla\left(\frac{1}{n}\right)v\right) + \mu\left(\nabla(u_m), \nabla(v)\frac{1}{n}\right) + \mu\left(\frac{F(n)}{n}u_m, v\right)$$

$$\left\langle B\left(\frac{u_m}{n}\right); v\right\rangle = \left(\frac{u_m}{n}\cdot\nabla\left(\frac{u_m}{n}\right), v\right)$$

Isto é:

$$\frac{u'_m}{n} = g - Au_m - B\left(\frac{u_m}{n}\right) = Tu_m \text{ em } V'_m$$

Para definirmos a equação acima em $V'$ utilizamos a projeção $P_m : H^1_o \to V_m$ da seguinte forma:

$$\left(\frac{u'_m}{n}; v\right) = (T, P_m v) \quad \forall v \in H^1_o(\Omega)$$

Observando que se $v \in H^1_o(\Omega)$ então $nv \in H^1_o(\Omega)$ temos:

$$(u'_m; v) = \left(u'_m; \frac{nv}{n}\right) = \left(\frac{u'_m}{n}; nv\right) = (T, P_m(nv)) = (nP^*_m T, v)$$

Assim:

$$u'_m = nP_m\left(g - Au_m - B\left(\frac{u_m}{n}\right)\right) \text{ em } H^{-1}(\Omega)$$

Acima utilizamos o fato de $P_m$ ser auto-adjunta, pois a base é a espectral.

Para mostrar que $u'_m \in L^{\frac{4}{3}}(0,T,V')$, vamos examinar as diversas parcelas da equação acima:

Temos que $nP_m g \in L^2(0,T,V')$ pois $\langle nP_m g, v\rangle_{V'V} = \langle g, P_m(nv)\rangle_{V'V} \leq \|g\|_{V'} \|P_m(nv)\|_V$ $\leq \|g\|_{V'} \|v\|_V$. Aqui utilizamos o fato de que $\|P_m v\|_V \leq \|v\|_V$.

Vamos mostrar que $nP_m A u_m \in L^2(0,T,V')$, pois:

$A_1 u_m \in L^2(0,T,V')$ onde $\langle A_1 u_m, v\rangle = \mu\, n \left(\nabla(u_m), \nabla\left(\frac{1}{n}\right) P_m v\right)$, $v \in V$, pois:

$$\int_0^T \|A_1 u_m\|_{V'}^2 dt \leq \int_0^T \sup_{\|\nabla v\| \leq 1} |\langle A_1 u_m, P_m v\rangle|^2 dt$$

$$= \int_0^T \sup_{\|\nabla v\| \leq 1} \left| \int_\Omega \nabla(u_m) \nabla\left(\frac{1}{n}\right) P_m v dx \right|^2 dt$$

$$\leq C \int_0^T \sup_{\|\nabla v\| \leq 1} \|\nabla u_m\|^2 \|\nabla n\|_{L^3(\Omega)}^2 \|P_m v\|_{L^6(\Omega)}^2 dt$$

$$\leq C \left(\int_0^T \|\nabla u_m\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla n\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))} < \infty$$

$A_2 u_m \in L^2(0,T,V')$ onde $\langle A_2 u_m, v\rangle = \mu\, n \left(\nabla(u_m), \nabla(P_m v)\frac{1}{n}\right)$ pois, observando que $P_m \nabla(v) = \nabla(P_m v)$ temos:

$$\int_0^T \|A_2 u_m\|_{V'}^2 dt \leq C \int_0^T \sup_{\|\nabla v\| \leq 1} \left| \left(\nabla(u_m), P_m \nabla(v)\frac{1}{n}\right) \right|^2 dt$$

$$\leq C \int_0^T \sup_{\|\nabla v\| \leq 1} \left(\int_\Omega |\nabla(u_m)|^2 dx\right) \left(\int_\Omega |\nabla(v)|^2 dx\right) dt$$

$$\leq C \int_0^T \|\nabla(u_m)\|^2 dt < \infty$$

$A_3 u_m \in L^2(0,T,V')$ onde $\langle A_3 u_m, v\rangle = \mu\, n \left(\frac{F(n)}{n} u_m, P_m v\right)$ pois:

$$\int_0^T \|A_3 u_m\|_{V'}^2 \, dt \leq C \int_0^T \sup_{\|\nabla v\| \leq 1} \left| \left( \frac{F(n)}{n} u_m, P_m v \right) \right|^2 dt$$

$$\leq C \int_0^T \sup_{\|\nabla v\| \leq 1} \left( \int_\Omega |\nabla (u_m)|^2 \, dx \right) \left( \int_\Omega |\nabla (v)|^2 \, dx \right) dt$$

$$\leq C \int_0^T \|\nabla (u_m)\|^2 \, dt < \infty$$

Assim $Au_m \in L^2(0, T, V')$.

Vamos mostrar que $B\left(\frac{u_m}{n}\right) \in L^{\frac{4}{3}}(0, T, V')$, pois:

$$\frac{u_m}{n} \in L^\infty\left(0, T, L^2(\Omega)\right) \quad \text{e} \quad \frac{u_m}{n} \in L^2\left(0, T, H_o^1(\Omega)\right) \hookrightarrow L^2\left(0, T, L^6(\Omega)\right)$$

Interpolando, obtemos:

$$\frac{u_m}{n} \in L^{p_\theta}\left(0, T, L^{q_\theta}(\Omega)\right) \quad \text{com } p_\theta \text{ e } q_\theta \text{ satisfazendo } p_\theta = \frac{2}{\theta} \text{ e } q_\theta = \frac{6}{3 - 2\theta}$$

Portanto $\frac{u_m}{n} \in L^{\frac{2}{\theta}}\left(0, T, L^{\frac{6}{3-2\theta}}(\Omega)\right); \forall \theta \in [0, 1]$

Como $\nabla\left(\frac{u_m}{n}\right) \in L^2\left(0, T, L^2(\Omega)\right)$ então $\frac{u_m}{n} \nabla\left(\frac{u_m}{n}\right) \in L^p\left(0, T, L^q(\Omega)\right)$

Onde $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{2}{1+\theta}$ e $\frac{1}{q} = \frac{3-2\theta}{6} + \frac{1}{2} \Rightarrow q = \frac{3}{3-\theta}$

Devemos ter $\frac{2}{1+\theta} > 1 \Rightarrow \theta < 1$

Para $\theta = \frac{1}{2}$ temos que $\frac{u_m}{n} \nabla\left(\frac{u_m}{n}\right) \in L^{\frac{4}{3}}\left(0, T, L^{\frac{6}{5}}(\Omega)\right)$.
Temos que $g \in L^{\frac{6}{5}}(\Omega) \hookrightarrow V'$ pois para $v \in H_o^1(\Omega)$ $\langle g, v \rangle = \int_\Omega g v dx$ está bem definido pois como $v \in L^6(\Omega)$ então $gv \in L^r$ onde $\frac{1}{r} = \frac{1}{6/5} + \frac{1}{6} = 1$.
Portanto $\frac{u_m}{n} \nabla\left(\frac{u_m}{n}\right) \in L^{\frac{4}{3}}(0, T, V')$.

Assim:

$$\left\|u_m'\right\|_{V'} \leq \|ng\|_{V'} + \|n\, Au_m\|_{V'} + \left\|nB\left(\frac{u_m}{n}\right)\right\|_{V'}$$

$$\text{Portanto } \left\|u_m'\right\|_{V'}^{\frac{4}{3}} \leq C\left(\|g\|_{V'}^{\frac{4}{3}} + \|Au_m\|_{V'}^{\frac{4}{3}} + \left\|B\left(\frac{u_m}{n}\right)\right\|_{V'}^{\frac{4}{3}}\right)$$

Integrando de 0 a $T$ obtemos que $u_m' \in L^{\frac{4}{3}}(0, T, V')$.

Utilizando o Lema de Aubin-Lions (Lema 1.4) obtemos uma subsequência de $(u_m)$, ainda denotada por $(u_m)$, fortemente convergente em $L^2(0, T, L^2(\Omega))$.

Para passar o limite em $m$ na formulação variacional, multiplicamos (2.2) por uma função $\phi \in C^1(0, T)$ com $\phi(T) = 0$ e integramos em t:

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\left(\frac{u_m}{n}, v_i\right)\phi(t)\, dt + \int_0^T \left(\frac{n'}{n^2}u_m, v_i\right)\phi(t)\, dt + \int_0^T \left(\frac{u_m}{n}\cdot\nabla\left(\frac{u_m}{n}\right), v_i\right)\phi(t)\, dt$$

$$+\mu\int_0^T \left(\nabla(u_m), \nabla\left(\frac{1}{n}\right)v_i\right)\phi(t)\, dt + \mu\int_0^T \left(\nabla(u_m), \nabla(v_i)\frac{1}{n}\right)\phi(t)\, dt$$

$$+\mu\int_0^T \left(\frac{F(n)}{n}u_m, v_i\right)\phi(t)\, dt = \int_0^T \langle g, v_i\rangle\,\phi(t)\, dt \quad \forall v_i \in V_m$$

Integrando o primeiro termo, obtemos:

$$-\int_0^T \left(\frac{u_m}{n}, \phi'(t)\, v_i\right) dt - \left(\frac{u_{mo}}{n(0)}, \phi(0)\, v_i\right) + \int_0^T \left(\frac{u_m}{n}\cdot\nabla\left(\frac{u_m}{n}\right), \phi(t)\, v_i\right)$$

$$+\mu\int_0^T \left(\nabla(u_m), \nabla\left(\frac{1}{n}\right)\phi(t)\, v_i\right) dt + \mu\int_0^T \left(\nabla(u_m), \phi(t)\,\nabla(v_i)\frac{1}{n}\right) dt$$

$$+\int_0^T \left(\frac{n'}{n^2}u_m, \phi(t)\, v_i\right) dt + \mu\int_0^T \left(\frac{F(n)}{n}u_m, \phi(t)\, v_i\right) dt = \int_0^T \langle g, \phi(t)\, v_i\rangle\, dt \quad \forall v_i \in V_m$$

A passagem do limite nos termos lineares é fácil e justificada pelas convergências: $u_{mo} \to u_o$ em $L^2(\Omega)$, $u_m \to u$ fraco em $L^2(0, T, V)$ e $u_m \to u$ forte em $L^2(0, T, L^2(\Omega))$. A convergência do termo não linear é justificada pelo seguinte lema:

**Lema 2.1** *Se $u_m$ converge para $u$ fraco em $L^2(0, T, V)$ e fortemente em $L^2(0, T, H)$ então para qualquer função vetorial $v$ com componentes em $C^1(Q_T)$ temos:*

$$\int_0^T \left(\frac{u_m}{n}\cdot\nabla\left(\frac{u_m}{n}\right), v\right) dt \to \int_0^T \left(\frac{u}{n}\cdot\nabla\left(\frac{u}{n}\right), v\right) dt$$

**Prova:**

$$\int_0^T \left(\frac{u_m}{n}\cdot\nabla\left(\frac{u_m}{n}\right),v\right)dt = -\int_0^T\left(\frac{u_m}{n}\cdot\nabla(v),\frac{u_m}{n}\right)dt$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{3}\int_0^T\int_\Omega\left(\frac{u_m}{n}\right)_i\frac{\partial}{\partial x_i}(v_j)\left(\frac{u_m}{n}\right)_j dxdt$$

Esta última parcela converge para:

$$-\sum_{i,j=1}^{3}\int_0^T\int_\Omega\left(\frac{u}{n}\right)_i\frac{\partial}{\partial x_i}(v_j)\left(\frac{u}{n}\right)_j dxdt = \int_0^T\left(\frac{u}{n}\cdot\nabla\left(\frac{u}{n}\right),v\right)dt$$

□

Desta forma, passando o limite em $m\to\infty$ obtemos:

$$-\int_0^T\left(\frac{u}{n},\phi'(t)\,v_i\right)dt-\left(\frac{u_o}{n(0)},\phi(0)\,v_i\right)+\int_0^T\left(\frac{u}{n}\cdot\nabla\left(\frac{u}{n}\right),\phi(t)\,v_i\right)dt$$

$$+\mu\int_0^T\left(\nabla(u),\nabla\left(\frac{1}{n}\right)\phi(t)\,v_i\right)dt+\mu\int_0^T\left(\nabla(u),\phi(t)\,\nabla(v_i)\,\frac{1}{n}\right)dt$$

$$+\int_0^T\left(\frac{n'}{n^2}u,\phi(t)\,v_i\right)dt+\mu\int_0^T\left(\frac{F(n)}{n}u,\phi(t)\,v_i\right)dt=\int_0^T\langle g,\phi(t)\,v_i\rangle\,dt\quad\forall v_i\in V_m$$

Como $(v_i)$ é denso em $V$ vemos que $u$ satisfaz:

$$-\int_0^T\left(\frac{u}{n},\phi'(t)\,v\right)dt-\left(\frac{u_o}{n(0)},\phi(0)\,v\right)+\int_0^T\left(\frac{u}{n}\cdot\nabla\left(\frac{u}{n}\right),\phi(t)\,v\right)dt$$

$$+\mu\int_0^T\left(\nabla(u),\nabla\left(\frac{1}{n}\right)\phi(t)\,v\right)dt+\mu\int_0^T\left(\nabla(u),\phi(t)\,\nabla(v)\,\frac{1}{n}\right)dt$$

$$+\int_0^T\left(\frac{n'}{n^2}u,\phi(t)\,v_i\right)dt+\mu\int_0^T\left(\frac{F(n)}{n}u,\phi(t)\,v\right)dt=\int_0^T\langle g,\phi(t)\,v\rangle\,dt\quad\forall v\in V$$

Em particular, com $\phi\in C_o^\infty(0,T)$ vemos que u satisfaz (2.1) no sentido de distribuições em t.

Falta mostrar que $u$ satisfaz $u(0) = u_o$. Para isto multiplicamos (2.1) por $\phi \in C^1(0,T)$ com $\phi(T) = 0$ e integramos em t obtendo:

$$-\int_0^T \left(\frac{u}{n}, \phi'(t)\, v\right) dt - \left(\frac{u(0)}{n(0)}, \phi(0)\, v\right) + \int_0^T \left(\frac{u}{n} \cdot \nabla\left(\frac{u}{n}\right), \phi(t)\, v\right) dt$$

$$+\mu \int_0^T \left(\nabla(u), \nabla\left(\frac{1}{n}\right) \phi(t)\, v\right) dt + \mu \int_0^T \left(\nabla(u), \phi(t)\, \nabla(v)\, \frac{1}{n}\right) dt$$

$$+\int_0^T \left(\frac{n'}{n^2} u, \phi(t)\, v_i\right) dt + \mu \int_0^T \left(\frac{F(n)}{n} u, \phi(t)\, v\right) dt = \int_0^T \langle g, \phi(t)\, v\rangle\, dt \quad \forall v \in V$$

Comparando com a equação acima, vemos que:

$$\left(\frac{u(0) - u_o}{n(0)}, v\,\phi(0)\right) \quad \forall v \in V$$

Escolhemos $\phi$ com $\phi(0) = 1$ assim $\left(\frac{u(0) - u_o}{n(0)}, v\right)$ $\forall v \in V$ e como $V$ é denso em $H$ temos que $u(0) = u_o$.

A pressão é recuperada de forma semelhante que para a equação de Navier-Stokes clássica (veja por exemplo Temam [10]):

Sejam:

$$U(t) = \int_0^T \frac{u(s)}{n(s)} ds;\ G(t) = \int_0^T g(s)\, ds;\ \alpha(s) = \int_0^T Au(s)\, ds;\ \beta(s) = \int_0^T B\left(\frac{u(s)}{n(s)}\right) ds$$

Se $u$ é solução de:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{n}\right) = g - Au - B\left(\frac{u}{n}\right) \tag{2.10}$$

então $U, G, \alpha$ e $\beta \in C([0,T], V')$. Integrando (2.10) em relação a t, obtemos:

$$F(t) = G(t) - \alpha(t) - \beta(t) - \frac{u(t)}{n(t)} + \frac{u_o}{n(0)} = 0$$

Aplicando $v \in V$ temos:

$$\langle F(t), v\rangle = 0 \ \ \forall v \in V$$

Utilizamos agora as proposições 1.1 e 1.2 e obtemos que: $\exists\ P(t) \in L^2(\Omega)$; $\forall t \in [0,T]$ com $\nabla P(t) = F(t)$, isto é:

$$\frac{u(t)}{n(t)} - \frac{u_o}{n(0)} + \alpha(t) + \beta(t) + \nabla P(t) = G(t) \tag{2.11}$$

Como o operador $\nabla$ é um isomorfismo de $L^2(\Omega)/I\!R$ em $H^{-1}(\Omega)$ (veja Observação 1.2) então: $\nabla P \in C\left([0,T], H^{-1}(\Omega)\right)$ e portanto $P \in C\left([0,T], L^2(\Omega)\right)$.

Isto nos permite diferenciar (2.11) no sentido de distribuições e obter:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{n}\right) + Au + B\left(\frac{u}{n}\right) + \nabla\frac{\partial P}{\partial t} = g$$

Escrevendo $\dfrac{\partial P}{\partial t} = p$ obtemos:

$$\frac{(u)'}{n} + \frac{u}{n}\cdot\nabla\left(\frac{u}{n}\right) - \mu\frac{\Delta u}{n} + \nabla p + \mu\frac{F(n)}{n}u = g$$

□

## 2.2 Unicidade de soluções

O seguinte resultado nos dá existência e unicidade de solução fraca em dimensão dois:

**Teorema 2.2 (Unicidade)** *Seja $\Omega \subset I\!R^2$ um aberto limitado com fronteira $C^{1,1}$, $u_o \in H$ , $g \in L^2(0,T,V')$. Seja $n : Q_T = \Omega \times (0,T) \to I\!R$ uma função satisfazendo:*

$0 < n_o \leq n(x,t) < 1 \quad \forall (x,t) \in Q_T$

$n' \in L^1(0,T,L^\infty(\Omega))$

$n' \in L^\infty(0,T,L^p(\Omega))$ *para algum $p > 1$, com norma pequena.*

$\nabla n \in L^\infty(0,T,L^p(\Omega))$ *para algum $p > 2$, com norma pequena.*

*Seja $F : (0,1) \to I\!R$ uma função satisfazendo:*

$$0 < F(n(x,t)) \leq F_o < \infty \quad \forall (x,t) \in Q_T$$

*Então existe uma única função $u \in L^2(0,T,V) \cap L^\infty(0,T,H)$ satisfazendo (2.1).*

**Observação 2.4** *A pequenez dos dados acima depende somente de* $n_o$, *e* $\mu$ *e será precisada no decorrer da demonstração.*

**Observação 2.5** *Aqui* $T$ *pode ser* $\infty$, *pois com as condições em* $n'$ *e* $\nabla n$ *garantimos a existência de uma solução para qualquer* $0 < T \leq \infty$ *(veja (2.8)).*

**Prova do Teorema 2.2:** A existência de solução em $L^2(0,T,V) \cap L^\infty(0,T,H)$ está assegurada pelo Teorema 2.1 pois suas hipóteses são satisfeitas (veja Observação 2.1). Vamos agora provar a unicidade.

A formulação variacional (2.1) é equivalente a:

$$\frac{d}{dt}\left\langle \frac{u}{n}; v \right\rangle = \left\langle g - Au - B\left(\frac{u}{n}\right); v \right\rangle \quad \forall v \in V$$

Onde:

$$\langle Au; v \rangle = \left(\frac{n'}{n^2}u, v\right) + \mu\left(\nabla(u), \nabla\left(\frac{1}{n}\right)v\right) + \mu\left(\nabla(u), \nabla(v)\frac{1}{n}\right) + \mu\left(\frac{F(n)}{n}u, v\right)$$

$$\left\langle B\left(\frac{u}{n}\right); v \right\rangle = \left(\frac{u}{n} \cdot \nabla\left(\frac{u}{n}\right), v\right)$$

Isto é:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{n}\right) = g - Au - B\left(\frac{u}{n}\right) \qquad \text{em } V'$$

Em dimensão 2 temos que $B\left(\frac{u}{n}\right) \in L^2(0,T,V')$, como afirma o Lema 1.11. É fácil ver que $Au \in L^2(0,T,V')$, assim $\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{n}\right) \in L^2(0,T,V')$. Isto implica que $\frac{du}{dt} \in L^2(0,T,V')$. Pois:

$$\frac{u'}{n} = \left(\frac{u}{n}\right)' + u\frac{n'}{n^2}$$

A primeira parcela do lado direito está em $L^2(0,T,V')$ por hipótese; quanto a segunda temos:

$$\int_0^T \left\|\frac{un'}{n^2}\right\|_{V'}^2 dt = \int_0^T \sup_{\|\nabla v\|\leq 1} \left|\left(\frac{un'}{n^2}, v\right)\right|^2 dt \leq \int_0^T \sup_{\|\nabla v\|\leq 1} \|u\|_{L^p(\Omega)}^2 \|n'\|_{L^q(\Omega)}^2 \|v\|_{L^r(\Omega)}^2 dt$$

Onde $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$ , aqui $r,p<\infty$ portanto $q>1$.

$$\leq \int_0^T \|\nabla u\|^2 \|n'\|_{L^q(\Omega)}^2 dt \leq \|u\|_{L^2(0,T,V)}^2 \|n'\|_{L^\infty(0,T,L^q(\Omega))}^2 < \infty$$

Sejam $u_1$ e $u_2$ duas soluções e seja $u=u_1-u_2$ a diferença.

Temos que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u_1}{n}\right) = g - Au_1 - B\left(\frac{u_1}{n}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u_2}{n}\right) = g - Au_2 - B\left(\frac{u_2}{n}\right)$$

Subtraindo a segunda equação da primeira obtemos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{n}\right) + Au = B\left(\frac{u_2}{n}\right) - B\left(\frac{u_1}{n}\right)$$

Isto é:

$$\frac{u'}{n} - \frac{n'u}{n^2} + Au = B\left(\frac{u_2}{n}\right) - B\left(\frac{u_1}{n}\right)$$

$$u' = \frac{n'u}{n} - nAu + nB\left(\frac{u_2}{n}\right) - nB\left(\frac{u_1}{n}\right)$$

Aplicando $u$ obtemos:

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 + 2n\langle Au;u\rangle = 2n\left\langle B\left(\frac{u_2}{n}\right);u\right\rangle - 2n\left\langle B\left(\frac{u_1}{n}\right);u\right\rangle + 2\left(\frac{n'u}{n};u\right) \quad (2.12)$$

Observe que na primeira parcela utilizamos Lema (1.3) da página 6.

Vamos agora majorar as diversas parcelas:

$$2n\langle Au;u\rangle = 2n\left(\frac{n'}{n^2}u,u\right) + 2n\mu\left(\nabla(u), \nabla\left(\frac{1}{n}\right)u\right) + 2n\mu\left\|\frac{\nabla(u)}{\sqrt{n}}\right\|^2 + 2n\mu\left\|\sqrt{\frac{F(n)}{n}}u\right\|^2$$

As duas primeiras parcelas do lado direito de (2.12) são majoradas da seguinte forma:

$$2n\left\langle B\left(\frac{u_2}{n}\right);u\right\rangle - 2n\left\langle B\left(\frac{u_1}{n}\right);u\right\rangle = -2n\left(\frac{u}{n}\cdot\nabla\left(\frac{u_2}{n}\right),u\right)$$

$$\leq C\|u\|\,\|\nabla u\|\,\|\nabla u_2\| \leq A\|\nabla u\|^2 + \frac{C}{A}\|u\|^2\|\nabla u_2\|^2$$

A equação (2.12) fica:

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 + 2n\mu\left\|\frac{\nabla(u)}{\sqrt{n}}\right\|^2 \leq a\|\nabla u\|^2 + \frac{C}{a}\|u\|^2\|\nabla u_2\|^2$$

$$+C\|n'\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|^2 + \left(a + C\|\nabla n\|^2_{L^\infty(0,T,L^p(\Omega))}\right)\left\|\frac{\nabla(u)}{\sqrt{n}}\right\|^2;\ p>2.$$

Isto é:

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \left(2n_o\mu - 2aC - C\|\nabla n\|^2_{L^\infty(0,T,L^p(\Omega))}\right)\left\|\frac{\nabla(u)}{\sqrt{n}}\right\|^2$$

$$\leq C\left(\|\nabla u_2\|^2 + \|n'\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\|u\|^2;\ \text{com } p>2.$$

Seja $a>0$ tal que $2n_o\mu - 2aC > 0$ e se $\|\nabla n\|^2_{L^\infty(0,T,L^p(\Omega))}$, com $p>2$, for suficientemente pequena para que $2n_o\mu - 2aC - C\|\nabla n\|^2_{L^\infty(0,T,L^p(\Omega))} > 0$ então:

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 \leq C\left(\|\nabla u_2\|^2 + \|n'\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\|u\|^2$$

Portanto:

$$\frac{d}{dt}\left\{\exp\left(-C\int_o^t\left(\|\nabla u_2(s)\|^2 + \|n'(s)\|_{L^\infty(\Omega)}\right)ds\right)\|u(t)\|^2\right\} \leq 0$$

Assim $\|u(t)\|^2 \leq 0$ $\forall t \in [0,T]$ o que implica que $u_1 = u_2$ $q.s.$ em $t\in[0,T]$. □

## 2.3 Regularidade

O seguinte teorema nos fornece condições para obtermos uma solução com derivadas segundas em $L^2(\Omega)$, mas em contrapartida, (como também ocorre nas equações de Navier-Stokes) a existência da solução não é global.

**Teorema 2.3 (Regularidade espacial)** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^d; d = 2, 3$ *um aberto limitado com fronteira de classe* $C^3$, $u_o \in V \cap H^2(\Omega)$, $g \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$.
*Seja* $n : Q_T = \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}$ *uma função satisfazendo:*

$$\begin{aligned}
&0 < n_o \leq n(x,t) < 1 \quad \forall (x,t) \in Q_T \\
&n(x,t) = c + \delta(x,t) \\
&n' \in L^\infty\left(0, T, L^{\frac{3}{2}}(\Omega)\right) \quad \textit{com norma pequena.} \\
&\nabla n \in L^\infty(0, T, L^3(\Omega)) \quad \textit{com norma pequena}
\end{aligned}$$

*Seja* $F : (0, 1) \to \mathbb{R}$ *uma função satisfazendo:*

$$0 < F(n(x,t)) \leq F_o < \infty \quad \forall (x,t) \in Q_T$$

*Suponhamos que* $\varepsilon = \dfrac{\delta}{c + \delta} \in L^\infty(Q_T)$ *com norma pequena, então existe ao menos uma função* $u \in L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, H)$ *satisfazendo (2.1) além disto,*
$u \in L^2\left(0, \overline{T}, H^2(\Omega)\right)$ *onde* $\overline{T} = F(T, \Omega, u_o)$.

**Observação 2.6**

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{c + \delta} = \frac{1}{c}(1 - \varepsilon)$$

**Observação 2.7** *Aqui* $T$ *pode ser* $\infty$, *pois com as condições em* $n'$ *e* $\nabla n$ *garantimos a existência de uma solução para qualquer* $0 < T \leq \infty$ *(veja (2.8)).*

**Observação 2.8** *Aqui* $u(t) \to u_o$, *em* $V$, *quando* $t \to 0$, *pois* $u \in L^2(0, T, V)$ *e* $u' \in L^\infty(0, T, H) \subset L^2(0, T, V')$, *e devido ao Lema 1.1 temos que* $u \in C(0, T, V)$.

**Observação 2.9** *A pequenez dos dados acima será definida no decorrer da demonstração e depende, como nos teoremas anteriores, de* $n_o$ *e* $\mu$.

**Observação 2.10** *A existência de solução em* $L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, H)$ *está assegurada pelo Teorema 2.1 pois suas hipóteses são satisfeitas.*

**Prova do Teorema 2.3:** A base de $V$ considerada aqui (como nos teoremas de existência e unicidade) é a espectral do operador $-P\Delta$, isto é: $(a_i)$ onde $i \in I\!\!N$ e satisfaz:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\Delta} a_i = -P\Delta a_i = \lambda_i a_i \quad ; \quad a_i \in H^2(\Omega) \\
&V_m = [a_1, a_2, ..., a_m] \\
&u_m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} c_{i,m}(t) a_i(x)
\end{aligned}$$

A formulação variacional (2.1) em cada $V_m$ pode ser reescrita, neste caso, da seguinte forma:

$$\begin{cases}
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{u_m}{n}, a_i\right) + \left(\dfrac{n'}{n^2} u_m, a_i\right) + \left(\dfrac{u_m}{n} \cdot \nabla\left(\dfrac{u_m}{n}\right), a_i\right) - \mu\left(\dfrac{\Delta(u_m)}{n}, a_i\right) \\
+\mu\left(\dfrac{F(n)}{n} u_m, a_i\right) = (g, a_i) \quad \forall a_i \in V_m \text{ em } D'(0,T) \\
u_m(0) = u_{mo} \in V \cap H^2(\Omega)
\end{cases} \tag{2.13}$$

Passando a derivada em $t$ para dentro do produto interno em $L^2(\Omega)$ na primeira parcela obtemos:

$$\begin{cases}
\left(\dfrac{u_m'}{n}, a_i\right) + \left(\dfrac{u_m}{n} \cdot \nabla\left(\dfrac{u_m}{n}\right), a_i\right) + \mu\left(\nabla u_m, \nabla\left(\dfrac{a_i}{n}\right)\right) \\
+\mu\left(\dfrac{F(n)}{n} u_m, a_i\right) = (g, a_i)
\end{cases} \tag{2.14}$$

Multiplicando esta formulação variacional por $\lambda_i c_{i,m}(t)$ e somando em $i$ obtemos:

$$\begin{cases}
\left(\dfrac{u_m'}{n}, \tilde{\Delta} u_m\right) + \left(\dfrac{u_m}{n} \cdot \nabla\left(\dfrac{u_m}{n}\right), \tilde{\Delta} u_m\right) - \mu\left(\dfrac{\Delta(u_m)}{n}, \tilde{\Delta} u_m\right) \\
+\mu\left(\dfrac{F(n)}{n} u_m, \tilde{\Delta} u_m\right) = \left(g, \tilde{\Delta} u_m\right)
\end{cases} \tag{2.15}$$

Utilizando a observação 1.3 o primeiro termo pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\left(\frac{u'_m}{n},\tilde{\Delta}u_m\right)=\left(\frac{u'_m}{n},\Delta u_m-\nabla q_m\right)=\left(\frac{u'_m}{n},\Delta u_m\right)-\left(\frac{u'_m}{n},\nabla q_m\right)$$

$$=-\left(\nabla\left(\frac{u'_m}{n}\right),\nabla u_m\right)-\left(\frac{u'_m}{n},\nabla q_m\right) \tag{2.16}$$

$$=-\left(\frac{\nabla u'_m}{n},\nabla u_m\right)-\left(u'_m\nabla\left(\frac{1}{n}\right),\nabla u_m\right)-\left(\frac{u'_m}{n},\nabla q_m\right)$$

**Observação 2.11** *Observemos que:*

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2=\frac{d}{dt}\int_\Omega\frac{|\nabla u_m|^2}{n}dx=2\int_\Omega\frac{\nabla u_m\cdot\nabla u'_m}{n}dx+\int_\Omega|\nabla u_m|^2\left(\frac{1}{n}\right)'dx$$

$$=2\left(\frac{\nabla u_m}{n},\nabla u'_m\right)+\left(\nabla u_m,\nabla u_m\left(\frac{1}{n}\right)'\right)$$

Utilizando a observação, acima no primeiro termo da última igualdade de (2.16) obtemos:

$$\left(\frac{u'_m}{n},\tilde{\Delta}u_m\right)=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2+\frac{1}{2}\left(\nabla u_m,\nabla u_m\left(\frac{1}{n}\right)'\right)$$

$$-\left(u'_m\nabla\left(\frac{1}{n}\right),\nabla u_m\right)-\left(\frac{u'_m}{n},\nabla q_m\right)$$

O terceiro termo de (2.15) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\left(\frac{\Delta(u_m)}{n},\tilde{\Delta}u_m\right)=\left(\frac{\tilde{\Delta}(u_m)+\nabla q_m}{n},\tilde{\Delta}u_m\right)=\left\|\frac{\tilde{\Delta}u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2+\left(\frac{\nabla q_m}{n},\tilde{\Delta}u_m\right)$$

Fazendo estas substituições na equação (2.15) acima obtemos:

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2+\frac{1}{2}\left(\nabla u_m,\nabla u_m\left(\frac{1}{n}\right)'\right)-\left(u'_m\nabla\left(\frac{1}{n}\right),\nabla u_m\right)-\left(\frac{u'_m}{n},\nabla q_m\right)$$

$$+\left(\frac{u_m}{n}\cdot\nabla\left(\frac{u_m}{n}\right),\tilde{\Delta}u_m\right)-\mu\left\|\frac{\tilde{\Delta}u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2-\mu\left(\frac{\nabla q_m}{n},\tilde{\Delta}u_m\right)$$

$$+\mu\left(\frac{F(n)}{n}u_m,\tilde{\Delta}u_m\right)=\left(g,\tilde{\Delta}u_m\right)$$

Isto é:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 + \mu\left\|\frac{\tilde{\Delta} u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\nabla u_m, \nabla u_m\left(\frac{1}{n}\right)'\right) - \left(u_m'\nabla\left(\frac{1}{n}\right), \nabla u_m\right)$$

$$-\left(\frac{u_m'}{n}, \nabla q_m\right) + \left(\frac{u_m}{n}\cdot\nabla\left(\frac{u_m}{n}\right), \tilde{\Delta} u_m\right) - \mu\left(\frac{\nabla q_m}{n}, \tilde{\Delta} u_m\right) \tag{2.17}$$

$$+\mu\left(\frac{F(n)}{n}u_m, \tilde{\Delta} u_m\right) - \left(g, \tilde{\Delta} u_m\right)$$

Multiplicando a formulação variacional (2.14) por $c_{i,m}'(t)$ e somando em $i = 1, ..., m$ vem:

$$\begin{cases} \left(\frac{u_m'}{n}, u_m'\right) + \left(\frac{u_m}{n}\cdot\nabla\left(\frac{u_m}{n}\right), u_m'\right) + \mu\left(\nabla u_m, \nabla\left(\frac{u_m'}{n}\right)\right) \\ +\mu\left(\frac{F(n)}{n}u_m, u_m'\right) = (g, u_m') \end{cases}$$

Desenvolvendo o terceiro termo, obtemos:

$$\begin{cases} \left(\frac{u_m'}{n}, u_m'\right) + \left(\frac{u_m}{n}\cdot\nabla\left(\frac{u_m}{n}\right), u_m'\right) + \mu\left(\nabla u_m, \frac{\nabla u_m'}{n}\right) \\ +\mu\left(\nabla u_m, \nabla\left(\frac{1}{n}\right)u_m'\right) + \mu\left(\frac{F(n)}{n}u_m, u_m'\right) = (g, u_m') \end{cases}$$

Utilizando a Observação 2.11 no terceiro termo da equação acima obtemos:

$$\begin{cases} \left\|\frac{u_m'}{\sqrt{n}}\right\|^2 + \left(\frac{u_m}{n}\cdot\nabla\left(\frac{u_m}{n}\right), u_m'\right) + \frac{\mu}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 - \frac{\mu}{2}\left(\nabla u_m, \nabla u_m\left(\frac{1}{n}\right)'\right) \\ +\mu\left(\nabla u_m, \nabla\left(\frac{1}{n}\right)u_m'\right) + \mu\left(\frac{F(n)}{n}u_m, u_m'\right) = (g, u_m') \end{cases}$$

Isto é:

$$\begin{cases} \left\|\frac{u_m'}{\sqrt{n}}\right\|^2 + \frac{\mu}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 = \frac{\mu}{2}\left(\nabla u_m, \nabla u_m\left(\frac{1}{n}\right)'\right) - \left(\frac{u_m}{n}\cdot\nabla\left(\frac{u_m}{n}\right), u_m'\right) \\ -\mu\left(\nabla u_m, \nabla\left(\frac{1}{n}\right)u_m'\right) - \mu\left(\frac{F(n)}{n}u_m, u_m'\right) + (g, u_m') \end{cases} \tag{2.18}$$

Somando-se as equações (2.17) e (2.18) obtemos:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1+\mu}{2}\right)\dfrac{d}{dt}\left\|\dfrac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 + \mu\left\|\dfrac{\tilde{\Delta} u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 + \left\|\dfrac{u'_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 = \dfrac{1+\mu}{2}\left(\nabla u_m, \nabla u_m\left(\dfrac{1}{n}\right)'\right) \\ -(1+\mu)\left(u'_m\nabla\left(\dfrac{1}{n}\right), \nabla u_m\right) - \left(\dfrac{u'_m}{n}, \nabla q_m\right) + \left(\dfrac{u_m}{n}\cdot\nabla\left(\dfrac{u_m}{n}\right), \tilde{\Delta} u_m\right) \\ -\mu\left(\dfrac{\nabla q_m}{n}, \tilde{\Delta} u_m\right) + \mu\left(\dfrac{F(n)}{n}u_m, \tilde{\Delta} u_m\right) - \left(g, \tilde{\Delta} u_m\right) \\ -\left(\dfrac{u_m}{n}\cdot\nabla\left(\dfrac{u_m}{n}\right), u'_m\right) - \mu\left(\dfrac{F(n)}{n}u_m, u'_m\right) + (g, u'_m) \end{cases} \tag{2.19}$$

Vamos agora majorar os diferentes termos do lado direito da equação acima:

O primeiro termo é majorado da seguinte forma:

$$\frac{1+\mu}{2}\left(\nabla u_m, \nabla u_m\left(\frac{1}{n}\right)'\right) \leq C\left\|\nabla u_m\right\|_{L^p(\Omega)}\left\|\nabla u_m\right\|_{L^q(\Omega)}\left\|n'\right\|_{L^r(\Omega)}$$

Onde $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}=1$ , aqui $p=q=6$ portanto $r=\dfrac{3}{2}$

$$\leq C\left\|u_m\right\|^2_{H^2(\Omega)}\left\|n'\right\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} \leq C\left\|\tilde{\Delta} u_m\right\|^2\left\|n'\right\|_{L^\infty\left(0,T,L^{\frac{3}{2}}(\Omega)\right)}$$

O segundo termo é majorado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &C\left(\nabla u_m, \nabla\left(\frac{1}{n}\right)u'_m\right) \leq \frac{C}{a}C\left\|\nabla n\cdot\nabla u_m\right\|^2 + a\left\|u'_m\right\|^2 \\ &\leq C\left\|\nabla n\right\|^2_{L^3(\Omega)}\left\|\nabla u_m\right\|^2_{L^6(\Omega)} + a\left\|u'_m\right\|^2 \\ &\leq C\left\|\nabla n\right\|^2_{L^3(\Omega)}\left\|\tilde{\Delta} u_m\right\|^2 + a\left\|u'_m\right\|^2 \end{aligned}$$

O terceiro termo é majorado da seguinte forma:

$$\left(\frac{u'_m}{n}, \nabla q_m\right) = \frac{1}{c}\left(u'_m, \nabla q_m\right) + \left(\frac{\varepsilon}{c}u'_m, \nabla q_m\right) \leq 0 + \frac{\left\|\varepsilon\right\|_{L^\infty(Q_T)}}{c}\left\|u'_m\right\|\left\|\nabla q_m\right\|$$

$$\leq C\frac{\left\|\varepsilon\right\|_{L^\infty(Q_T)}}{a}\left\|\frac{u'_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 + a\left\|\frac{\tilde{\Delta} u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2$$

O quarto termo é o mais trabalhoso e é majorado da seguinte forma:

$$\left(\frac{u_m}{n}\cdot\nabla\left(\frac{u_m}{n}\right),\tilde{\Delta}u_m\right)=\left(\frac{u_m}{n}\cdot\frac{\nabla u_m}{n},\tilde{\Delta}u_m\right)+\left(\frac{u_m}{n}\cdot\nabla\left(\frac{1}{n}\right)u_m,\tilde{\Delta}u_m\right)$$

A primeira parcela é majorada (utilizando-se Lema 1.5) por:

$$\begin{aligned}&\|u_m\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla u_m\|_{L^4(\Omega)}\left\|\tilde{\Delta}u_m\right\|\le\|u_m\|^{\frac{1}{4}}\|\nabla u_m\|^{\frac{3}{4}}\|\nabla u_m\|^{\frac{1}{4}}\|u_m\|_{H^2(\Omega)}^{\frac{3}{4}}\left\|\tilde{\Delta}u_m\right\|\\&\le C\|\nabla u_m\|^{\frac{5}{4}}\left\|\tilde{\Delta}u_m\right\|^{\frac{7}{4}}\le\frac{C}{a}\|\nabla u_m\|^{10}+a\left\|\tilde{\Delta}u_m\right\|^2\end{aligned}\tag{2.20}$$

A segunda parcela .é majorada por:

$$\|u_m\|_{L^r(\Omega)}\|\nabla n\cdot u_m\|_{L^s(\Omega)}\left\|\tilde{\Delta}u_m\right\|\le C\|u_m\|_{L^r(\Omega)}\|\nabla n\|_{L^{sp}(\Omega)}\|u_m\|_{L^{sq}(\Omega)}\left\|\tilde{\Delta}u_m\right\|$$

Onde $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$ e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Aqui $r=6$ (maior valor possível); portanto $s=\frac{6}{5}$ e $sq=6$ (maior valor); portanto $q=5$. Assim $p=\frac{5}{4}$ e portanto $sp=\frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned}&C\|u_m\|_{L^6(\Omega)}\|\nabla n\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}\|u_m\|_{L^6(\Omega)}\left\|\tilde{\Delta}u_m\right\|\le C\|\nabla n\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}\|\nabla u_m\|^2\left\|\tilde{\Delta}u_m\right\|\\&\le\frac{C}{a}\|\nabla n\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}^2\|\nabla u_m\|^4+a\left\|\tilde{\Delta}u_m\right\|^2\end{aligned}\tag{2.21}$$

O quinto termo é majorado da seguinte forma:

$$\left(\frac{\nabla q_m}{n},\tilde{\Delta}u_m\right)=\frac{1}{c}\left(\nabla q_m,\tilde{\Delta}u_m\right)+\left(\frac{\varepsilon}{c}\nabla q_m,\tilde{\Delta}u_m\right)\le 0+C\|\varepsilon\|_{L^\infty(Q_T)}\left\|\frac{\tilde{\Delta}u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2$$

O sexto termo é majorado da seguinte forma:

$$\left(\frac{F(n)}{n}u_m,\tilde{\Delta}u_m\right)\le C\|\nabla u_m\|^2+a\left\|\tilde{\Delta}u_m\right\|^2$$

A majoração do sétimo e do último termo é semelhante:

$$\left(g,\tilde{\Delta}u_m\right)\le C\|g\|^2+a\left\|\frac{\tilde{\Delta}u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2$$

$$(g,u_m')\le C\|g\|^2+a\left\|\frac{u_m'}{\sqrt{n}}\right\|^2$$

A majoração do oitavo termo é semelhante a do quarto:

$$\left(\frac{u_m}{n}\cdot\nabla\left(\frac{u_m}{n}\right),u'_m\right)=\left(\frac{u_m}{n}\cdot\frac{\nabla u_m}{n},u'_m\right)+\left(\frac{u_m}{n}\cdot\nabla\left(\frac{1}{n}\right)u_m,u'_m\right)$$

A primeira parcela, com $a$ e $b$ positivos adequados é majorada por

$$\begin{aligned}&\|u_m\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla u_m\|_{L^4(\Omega)}\|u'_m\|\le\|u_m\|^{\frac14}\|\nabla u_m\|^{\frac34}\|\nabla u_m\|^{\frac14}\|u_m\|^{\frac34}_{H^2(\Omega)}\|u'_m\|\\&\le C\|\nabla u_m\|^{\frac54}\left\|\tilde{\Delta}u_m\right\|^{\frac34}\|u'_m\|\le\frac{C}{a}\|\nabla u_m\|^{\frac52}\left\|\tilde{\Delta}u_m\right\|^{\frac32}+a\|u'_m\|^2\\&\le\frac{C}{ab}\|\nabla u_m\|^{10}+b\left\|\tilde{\Delta}u_m\right\|^2+a\|u'_m\|^2\end{aligned}$$

A segunda parcela é majorada de modo semelhante ao feito em (2.21):

$$\begin{aligned}&C\|u_m\|_{L^6(\Omega)}\|\nabla n\|_{L^{\frac32}(\Omega)}\|u_m\|_{L^6(\Omega)}\|u'_m\|\le C\|\nabla n\|_{L^{\frac32}(\Omega)}\|\nabla u_m\|^2\|u'_m\|\\&\le\frac{C}{a}\|\nabla n\|^2_{L^{\frac32}(\Omega)}\|\nabla u_m\|^4+a\|u'_m\|^2\end{aligned}$$

E finalmente, o nono termo é majorado da seguinte forma:

$$\left(\frac{F(n)}{n}u_m,u'_m\right)\le C\|\nabla u_m\|^2+a\|u'_m\|^2$$

Substituindo os itens acima na equação (2.19) obtemos:

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{1+\mu}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2+\mu\left\|\frac{\tilde{\Delta}u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2+\left\|\frac{u'_m}{\sqrt{n}}\right\|^2\le C\|n'\|_{L^\infty\left(0,T,L^{\frac32}(\Omega)\right)}\left\|\frac{\tilde{\Delta}u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2\\&+2\frac{C}{a}\|\nabla n\|^2_{L^3(\Omega)}\left\|\frac{\tilde{\Delta}u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2+5a\left\|\frac{\tilde{\Delta}u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2+\frac{C}{a}\|\varepsilon\|_{L^\infty(Q_T)}\left\|\frac{u'_m}{\sqrt{n}}\right\|^2\\&+C\left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2+\frac{C}{a}\|\nabla n\|^2_{L^{\frac32}(\Omega)}\left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^4+5a\left\|\frac{u'_m}{\sqrt{n}}\right\|^2\\&+C\|\varepsilon\|_{L^\infty(Q_T)}\left\|\frac{\tilde{\Delta}u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2+C\|g\|^2+\frac{C}{ab}\left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^{10}+b\left\|\frac{\tilde{\Delta}u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2\end{aligned}\right.$$

Reagrupando os termos semelhantes obtemos:

$$\begin{cases} \dfrac{1+\mu}{2}\dfrac{d}{dt}\left\|\dfrac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 + \left(1-5a-\dfrac{C}{a}\|\varepsilon\|_{L^\infty(Q_T)}\right)\left\|\dfrac{u_m'}{\sqrt{n}}\right\|^2 \\ + \left(\mu-5a-b-\|\varepsilon\|_{L^\infty(Q_T)}-2\dfrac{C}{a}\|\nabla n\|^2_{L^3(\Omega)}-\|n'\|_{L^\infty\left(0,T,L^{\frac{3}{2}}(\Omega)\right)}\right)\left\|\dfrac{\tilde{\Delta} u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 \\ \leq C\left\|\dfrac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 + \dfrac{C}{a}\|\nabla n\|^2_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}\left\|\dfrac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^4 + \dfrac{C}{ab}\left\|\dfrac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^{10} + C\|g\|^2 \end{cases} \tag{2.22}$$

Assim, podemos escolher $a$ e $b$ tais que $\mu - 5a - b > 0$ e $1 - 5a > 0$ e se $\|\varepsilon\|_{L^\infty(Q_T)}$, $\|\nabla n\|^2_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}$ e $\|n'\|_{L^\infty\left(0,T,L^{\frac{3}{2}}(\Omega)\right)}$ forem pequenos o suficiente para que as constantes na segunda e terceira parcelas sejam positivas, poderemos utilizar o Lema 1.13 para concluir que:

$$\begin{cases} \left\|\dfrac{\nabla u_m(t)}{\sqrt{n(t)}}\right\|^2 \leq F(t) \quad \forall t\in\left[0,\overline{T}\right] \text{ com } \overline{T}\leq T \\ \displaystyle\int_0^t \left\|u_m'(t)/\sqrt{n(t)}\right\|^2 dt \leq \tilde{F}(t) \quad \forall t\in\left[0,\overline{T}\right] \text{ com } \overline{T}\leq T \\ \displaystyle\int_0^t \left\|\tilde{\Delta} u_m(t)/\sqrt{n(t)}\right\|^2 dt \leq \tilde{F}(t) \quad \forall t\in\left[0,\overline{T}\right] \text{ com } \overline{T}\leq T \end{cases}$$

Onde $F(t)$ e $\tilde{F}(t)$ são funções contínuas.

Utilizando, agora, o Lema 1.9, na página 9, concluimos que:

$$\left\|D_x^2 u_m(t)\right\| \leq C\left(\left\|\tilde{\Delta} u_m(t)\right\| + \|\nabla u_m(t)\|\right) \quad \forall t\in[0,T]$$

Portanto, $D^2 u_m \in L^2\left(0,\overline{T},L^2(\Omega)\right)$. □

**Observação 2.12** *Se a dimensão do espaço é dois, então a solução* $u(\cdot,t)$ *em* $H^2(\Omega)$ *está definida globalmente para todo* $t\in[0,T]$. *A razão está na majoração (2.20) da página 39:*

$$\begin{aligned} &\|u_m\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla u_m\|_{L^4(\Omega)}\left\|\tilde{\Delta} u_m\right\| \leq \|u_m\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla u_m\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla u_m\|^{\frac{1}{2}}\|u_m\|^{\frac{1}{2}}_{H^2(\Omega)}\left\|\tilde{\Delta} u_m\right\| \\ &\leq \|u_m\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla u_m\|\left\|\tilde{\Delta} u_m\right\|^{\frac{3}{2}} \leq C\|u_m\|\|\nabla u_m\|^4 + a\left\|\tilde{\Delta} u_m\right\|^2 \end{aligned}$$

*a função* $\sigma(t) = \int_0^t \|u_m(s)\| \|\nabla u_m(s)\|^2 ds$ *está bem definida, pois* $u_m \in L^2(0,T,V) \cap L^\infty(0,T,H)$ *e portanto poderemos usar o Lema de Gronwall na equação equivalente (2.22).*

## 2.4 Existência global de soluções fortes

Vamos utilizar um raciocínio semelhante ao feito em Heywood e Rannacher [6] nas páginas 284 a 286 para obtermos condições que garantam a existência de uma solução forte (nos moldes da secção anterior) em todo tempo.

**Teorema 2.4** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^d; d = 2,3$ *um aberto limitado com fronteira de classe* $C^3$, $u_o \in V \cap H^2(\Omega)$ , $g \in L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$ . *Seja* $n : Q_T = \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ *uma função satisfazendo:*

$$
\begin{aligned}
&0 < n_o \leq n(x,t) < 1 \quad \forall\, (x,t) \in Q_T \\
&n(x,t) = c + \delta(x,t) \\
&n' \in L^\infty\left(0,T,L^{\frac{3}{2}}(\Omega)\right) \quad \textit{com norma pequena.} \\
&\nabla n \in L^\infty(0,T,L^3(\Omega)) \quad \textit{com norma pequena}
\end{aligned}
$$

*Seja* $F : (0,1) \to \mathbb{R}$ *uma função satisfazendo:*

$$0 < F(n(x,t)) \leq F_o < \infty \quad \forall (x,t) \in Q_T$$

*Então existe ao menos uma função* $u \in L^2(0,T,V) \cap L^\infty(0,T,H)$ *satisfazendo (2.1) e se* $\varepsilon = \dfrac{\delta}{c+\delta} \in L^\infty(Q_T)$ *com norma suficientemente pequena e se* $\exists C > 0$ *tal que* $\sup_{0 \leq t \leq T} \|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C$ *então* $u(\cdot,t) \in H^2(\Omega)$ *para quase todo* $t \in [0,T]$ *e vale:*

$$e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha\sigma} \|u(\sigma)\|^2_{H^2(\Omega)} d\sigma < \infty \quad ; \quad \forall t \in [0,T]$$

*Onde* $\alpha > 0$.

**Observação 2.13** *A existência de solução em* $L^2(0,T,V) \cap L^\infty(0,T,H)$ *está assegurada pelo Teorema 2.1 pois suas hipóteses são satisfeitas.*

**Observação 2.14** *Aqui $T$ pode ser $\infty$, pois com as condições em $n'$ e $\nabla n$ garantimos a existência de uma solução para qualquer $0 < T \leq \infty$ (veja (2.8)).*

**Observação 2.15** *A condição $\sup\limits_{0\leq t\leq T} \|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C$ pode ser garantida a priori, desde que $\|u_o\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}$ seja suficientemente pequena.*

A demonstração é a seguinte:

A equação (2.22) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 + C\left\|\frac{\tilde{\Delta} u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 \leq C_1\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 + C_2\left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^4 + C_3\left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^{10} + C_4\|g\|^2$$

Aqui, na primeira parcela do lado direito, utilizamos a seguinte majoração para os termos com a força de atrito $F$:

$$\left(\frac{F(n)}{n}u_m, u'_m\right) \leq C\|u_m\|^2 + a\|u'_m\|^2$$

$$\left(\frac{F(n)}{n}u_m, \tilde{\Delta} u_m\right) \leq C\|u_m\|^2 + a\left\|\tilde{\Delta} u_m\right\|^2$$

Utilizamos agora a desigualdade $\|\nabla u_m\| \leq C\left\|\tilde{\Delta} u_m\right\|$ na segunda parcela do lado esquerdo da inequação acima e obtemos:

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 \leq C_1 S(u_o, g) + C_2\left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^4 + C_3\left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^{10} - C_4\left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2$$

Onde $S(u_o,g) = C\left(\|u_o\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}\right)$.

Escrevendo $f(t) = \left\|\dfrac{\nabla u_m(\cdot,t)}{\sqrt{n(\cdot,t)}}\right\|^2_{L^2(\Omega)}$ a inequação acima fica:

$$f' \leq C_1 S(u_o, g) + C_2 f^2 + C_3 f^5 - C_4 f$$

Onde $C_i > 0$ para $i = 1, ..., 4$.

Tomemos inicialmente $N$ suficientemente grande para que:

$$C_2 N^3 + C_3 < \frac{C_4}{2} N^4$$

Tomemos agora $S(u_o, g) \leq \dfrac{1}{N}\dfrac{C_4}{2C_1}$. Nestas condições:

$$f' \leq \frac{C_4}{2N} + C_2 f^2 + C_3 f^5 - C_4 f$$

Com estas condições a função $F(f) = \dfrac{C_4}{2N} + C_2 f^2 + C_3 f^5 - C_4 f$ satisfaz $F(0) > 0$ e:

$$F\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{C_4}{2N} + \frac{C_2}{N^2} + \frac{C_3}{N^5} - \frac{C_4}{N} = \frac{C_2 N^3 + C_3 - \frac{C_4}{2} N^4}{N^5} < 0$$

Como $F(\cdot)$ é contínua, existe $R$ raiz de $F$ tal que $0 < R < \dfrac{1}{N}$.

Seja agora a equação $z' \leq \dfrac{C_4}{2N} + C_2 z^2 + C_3 z^5 - C_4 z$ como $F(0) > 0$ e $R > 0$, para qualquer dado inicial $z(0) \in (0, R)$ temos $z(t) < R$. Assim, por resultados de desigualdades diferenciais, para dados iniciais e forças externas satisfazendo ao mesmo tempo:

$$\begin{cases} \|u_o\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leq \dfrac{1}{N}\dfrac{C_4}{2C_1} \\ \|\nabla u_o\|_{L^2(\Omega)} < R \end{cases}$$

Temos que $0 \leq F(t) \leq z(t) \leq R$, $\forall t$. □

**Prova do Teorema 2.4:** No teorema anterior, na página 41 obtivemos a seguinte desigualdade:

$$C\frac{d}{dt}\left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 + C\left\|\frac{\tilde{\Delta} u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 + C\left\|\frac{u_m'}{\sqrt{n}}\right\|^2$$

$$\leq C\left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 + C\left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^4 + C\left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^{10} + C\|g\|^2$$

Multiplicando a equação acima por $e^{\alpha t}$ e utilizando a hipótese sobre $u$ de limitação em $L^\infty(0, T, V)$ obtemos:

$$\mu\, e^{\alpha t}\frac{d}{dt}\left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 + Ce^{\alpha t}\left\|\frac{\tilde{\Delta} u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 + Ce^{\alpha t}\left\|\frac{u_m'}{\sqrt{n}}\right\|^2 \leq Ce^{\alpha t}$$

Que pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\alpha t}\left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2\right) + Ce^{\alpha t}\left\|\frac{\tilde{\Delta} u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 + Ce^{\alpha t}\left\|\frac{u_m'}{\sqrt{n}}\right\|^2 \leq Ce^{\alpha t}$$

Integrando de 0 até $t$, obtemos:

$$e^{\alpha t}\left\|\frac{\nabla u_m(t)}{\sqrt{n(t)}}\right\|^2+C\int_0^t e^{\alpha\sigma}\left\|\tilde{\Delta}u_m(\sigma)/\sqrt{n(\sigma)}\right\|^2 d\sigma$$

$$+C\int_0^t e^{\alpha\sigma}\left\|u_m'(\sigma)/\sqrt{n(\sigma)}\right\|^2 d\sigma\leq C\int_0^t e^{\alpha\sigma}d\sigma$$

Desconsiderando a primeira parcela e multiplicando o resto por $e^{-\alpha t}$ obtemos:

$$e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha\sigma}\left\|\tilde{\Delta}u_m(\sigma)/\sqrt{n(\sigma)}\right\|^2 d\sigma+e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha\sigma}\left\|u_m'(\sigma)/\sqrt{n(\sigma)}\right\|^2 d\sigma\leq C$$

Desta forma, utilizando agora a desigualdade (i) do Lema 1.9 da página 9 com $g=-\Delta u_m$ obtemos que:

$$e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha\sigma}\left\|D^2u_m(\sigma)\right\|^2 d\sigma\leq C$$

Uniformemente em $m$, assim obtemos:

$$e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha\sigma}\left\|u_m(\sigma)\right\|^2_{H^2(\Omega)}d\sigma\leq C$$

Limitação que é estendida para $u$ pois $u_m\to u$ fraco em $L^2(0,T,H^2(\Omega))$ e portanto:

$$e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha\sigma}\left\|u(\sigma)\right\|^2_{H^2(\Omega)}d\sigma\leq e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha\sigma}\liminf\left\|u_m(\sigma)\right\|^2_{H^2(\Omega)}d\sigma\leq C$$

$\square$

O seguinte teorema nos fornece uma solução global forte em $L^\infty(0,T,H^2(\Omega))$ como a obtida em Heywood e Rannacher [6] para as equações clássicas de Navier-Stokes, mas o resultado somente foi obtido com a porosidade variando exclusivamente com a posição.

Aqui, a formulação variacional (2.1) se torna:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{u}{n},v\right)+\left(\dfrac{u}{n}\cdot\nabla\left(\dfrac{u}{n}\right),v\right)+\mu\left(\nabla(u),\nabla\left(\dfrac{1}{n}\right)v\right)\\[2ex] +\mu\left(\nabla(u),\nabla(v)\dfrac{1}{n}\right)+\mu\left(\dfrac{F(n)}{n}u,v\right)=\langle g,v\rangle\quad\forall v\in V\text{ em }D'(0,T)\\[2ex] u(0)=u_o\in V\cap H^2(\Omega)\end{cases}\tag{2.23}$$

A formulação fraca acima em cada $V_m$ fica:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{u_m}{n}, v_i\right) + \left(\dfrac{u_m}{n}\cdot\nabla\left(\dfrac{u_m}{n}\right), v_i\right) + \mu\left(\nabla(u_m), \nabla\left(\dfrac{1}{n}\right)v_i\right) \\ +\mu\left(\nabla(u_m), \nabla(v_i)\dfrac{1}{n}\right) + \mu\left(\dfrac{F(n)}{n}u_m, v_i\right) = \langle g, v_i\rangle \quad \forall v_i \in V_m \text{ em } D'(0,T) \\ u_m(0) = u_{o,m} \in V\cap H^2(\Omega) \end{cases} \tag{2.24}$$

**Teorema 2.5** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d; d = 2,3$ um aberto limitado com fronteira de classe $C^3$, $u_o \in V\cap H^2(\Omega)$ , $g \in L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$ e $g' \in L^\infty(0,T,V')$. Seja $n : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo:*

$$0 < n_o \le n(x) < 1 \quad \forall x \in \Omega$$
$$n(x) = c + \delta(x)$$
$$\nabla n \in L^3(\Omega) \quad \textit{com norma pequena}$$

*Seja $F : (0,1) \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo:*

$$0 < F(n(x)) \le F_o < \infty \quad \forall x \in \Omega$$

*Então existe ao menos uma função $u \in L^2(0,T,V)\cap L^\infty(0,T,H)$ satisfazendo (2.23) e se $\varepsilon = \dfrac{\delta}{c+\delta} \in L^\infty(\Omega)$ com norma suficientemente pequena e se $\exists C > 0$ tal que $\sup\limits_{0\le t\le T} \|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \le C$ então $u \in L^\infty(0,T,H^2(\Omega))$.*

**Observação 2.16** *A existência de solução em $L^2(0,T,V)\cap L^\infty(0,T,H)$ está assegurada pelo Teorema 2.1 pois suas hipóteses são satisfeitas.*

**Observação 2.17** *Aqui $T$ pode ser $\infty$, pois com a condição em $\nabla n$ garantimos a existência de uma solução para qualquer $0 < T \le \infty$ (veja (2.8)).*

**Prova do Teorema 2.5:** Adaptando a equação (2.15) para as condições deste teorema temos:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{u'_m}{n}, \widetilde{\Delta} u_m\right) + \left(\dfrac{u_m}{n} \cdot \nabla\left(\dfrac{u_m}{n}\right), \widetilde{\Delta} u_m\right) \\ -\mu\left(\dfrac{\Delta\left(u_m\right)}{n}, \widetilde{\Delta} u_m\right) + \mu\left(\dfrac{F(n)}{n} u_m, \widetilde{\Delta} u_m\right) = \left(g, \widetilde{\Delta} u_m\right) \end{cases}$$

Isto é:

$$\begin{cases} \mu\left\|\dfrac{\widetilde{\Delta} u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 = -\left(g, \widetilde{\Delta} u_m\right) + \left(\dfrac{u'_m}{n}, \widetilde{\Delta} u_m\right) + \left(\dfrac{u_m}{n} \cdot \nabla\left(\dfrac{u_m}{n}\right), \widetilde{\Delta} u_m\right) \\ -\mu\left(\dfrac{\nabla q_m}{n}, \widetilde{\Delta} u_m\right) + \mu\left(\dfrac{F(n)}{n} u_m, \widetilde{\Delta} u_m\right) \end{cases}$$

Utilizando as majorações já obtidas na página 38 para os diversos termos do lado direito de (2.19), obtemos:

$$\begin{cases} \mu\left\|\dfrac{\widetilde{\Delta} u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 \leq \|g\|\left\|\dfrac{\widetilde{\Delta} u_m}{\sqrt{n}}\right\| + \left\|\dfrac{u'_m}{\sqrt{n}}\right\|\left\|\dfrac{\widetilde{\Delta} u_m}{\sqrt{n}}\right\| + \|\nabla n\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}\left\|\dfrac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2\left\|\dfrac{\widetilde{\Delta} u_m}{\sqrt{n}}\right\| \\ +C\left\|\dfrac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^{10} + a\left\|\dfrac{\widetilde{\Delta} u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 + \dfrac{\mu}{C}\|\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}\left\|\dfrac{\widetilde{\Delta} u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 + \left\|\dfrac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|\left\|\dfrac{\widetilde{\Delta} u_m}{\sqrt{n}}\right\| \end{cases}$$

Isto é:

$$\begin{cases} \left(\mu - a - \dfrac{\mu}{C}\|\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\left\|\dfrac{\widetilde{\Delta} u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 \leq \|g\|\left\|\dfrac{\widetilde{\Delta} u_m}{\sqrt{n}}\right\| + \left\|\dfrac{u'_m}{\sqrt{n}}\right\|\left\|\dfrac{\widetilde{\Delta} u_m}{\sqrt{n}}\right\| \\ +\|\nabla n\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}\left\|\dfrac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2\left\|\dfrac{\widetilde{\Delta} u_m}{\sqrt{n}}\right\| + C\left\|\dfrac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^{10} + \left\|\dfrac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|\left\|\dfrac{\widetilde{\Delta} u_m}{\sqrt{n}}\right\| \end{cases}$$

Escolhendo $a$ tal que $\mu - a > 0$ e se $\|\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}$ satisfaz $\mu - a - \dfrac{\mu}{C}\|\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} > 0$ teremos:

$$C\left\|\frac{\widetilde{\Delta} u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 \leq \left(\|g\| + \left\|\frac{u'_m}{\sqrt{n}}\right\| + \left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\| + \|\nabla n\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}\left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2\right)\left\|\frac{\widetilde{\Delta} u_m}{\sqrt{n}}\right\| + C\left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^{10}$$

Esta é uma inequação do segundo grau em $\left\|\frac{\tilde{\Delta} u_m}{\sqrt{n}}\right\|$ que equivale a:

$$\left\|\frac{\tilde{\Delta} u_m}{\sqrt{n}}\right\| \leq \frac{K + \sqrt{K^2 + 4C \left\| \nabla u_m / \sqrt{n} \right\|^{10}}}{2C}$$

$$\text{Onde } k = \|g\| + \left\|\frac{u_m'}{\sqrt{n}}\right\| + \left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\| + \|\nabla n\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} \left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2$$

Portanto:

$$\left\|\frac{\tilde{\Delta} u_m}{\sqrt{n}}\right\| \leq C \left( \|g\| + \left\|\frac{u_m'}{\sqrt{n}}\right\| + \left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\| + \left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^5 + \|\nabla n\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} \left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 \right)$$

Utilizando as hipóteses do teorema, obtemos:

$$\left\|\frac{\tilde{\Delta} u_m}{\sqrt{n}}\right\| \leq C + C \left\|\frac{u_m'}{\sqrt{n}}\right\| \tag{2.25}$$

Derivando em $t$ a formulação variacional (2.24) obtemos:

$$\begin{cases} \left(\frac{D_t^2 u_m}{n}, v_i\right) + \left(\frac{u_m'}{n} \cdot \nabla \left(\frac{u_m}{n}\right), v_i\right) + \left(\frac{u_m}{n} \cdot \nabla \left(\frac{u_m'}{n}\right), v_i\right) + \mu \left(\nabla \left(u_m'\right), \nabla \left(\frac{1}{n}\right) v_i\right) \\ \\ +\mu \left(\nabla \left(u_m'\right), \nabla \left(v_i\right) \frac{1}{n}\right) + \mu \left(\frac{F(n)}{n} u_m', v_i\right) = \langle g', v_i \rangle \quad \forall v_i \in V_m \text{ em } D'(0,T) \end{cases}$$

Multiplicando a equação por $c_{i,m}'(t)$ e somando em $i = 1$ até $m$, obtemos:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{1}{2} \left\|\frac{u_m'}{\sqrt{n}}\right\|^2 + \left(\frac{u_m'}{n} \cdot \nabla \left(\frac{u_m}{n}\right), u_m'\right) + \mu \left(\nabla \left(u_m'\right), \nabla \left(\frac{1}{n}\right) u_m'\right) \\ \\ +\mu \left(\nabla \left(u_m'\right), \nabla \left(u_m'\right) \frac{1}{n}\right) + \mu \left(\frac{F(n)}{n} u_m', u_m'\right) = \langle g', u_m' \rangle \quad \text{em } D'(0,T) \end{cases}$$

Isto é:

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2} \left\|\frac{u_m'}{\sqrt{n}}\right\|^2 + \mu \left\|\frac{\nabla u_m'}{\sqrt{n}}\right\|^2 + \mu \left\|\sqrt{\frac{F(n)}{\sqrt{n}}} u_m'\right\|^2 = \langle g', u_m' \rangle - \left(\frac{u_m'}{n} \cdot \nabla \left(\frac{u_m}{n}\right), u_m'\right)$$

$$-\mu \left(\nabla \left(u_m'\right), \nabla \left(\frac{1}{n}\right) u_m'\right) \tag{2.26}$$

As três parcelas do lado direito podem ser majoradas da seguinte forma:

A primeira parcela de (2.26) é majorada da seguinte forma:

$$\langle g', u'_m \rangle \leq \|g'\|_{V'} \|u'_m\|_V \leq C \|g'\|^2_{V'} + a \|\nabla u'_m\|^2 \leq C \|g'\|^2_{V'} + aC \left\| \frac{\nabla u'_m}{\sqrt{n}} \right\|^2$$

A segunda parcela de (2.26) é a mais difícil e é majorada da seguinte forma:

$$\left( \frac{u'_m}{n} \cdot \nabla \left( \frac{u_m}{n} \right), u'_m \right) = \left( \frac{u'_m}{n} \cdot \frac{\nabla u_m}{n}, u'_m \right) + \left( \frac{u'_m}{n} \cdot \nabla \left( \frac{1}{n} \right) u_m, u'_m \right)$$

A primeira parcela é majorada (utilizando-se Lema 1.5) por:

$$\begin{aligned} &\|u'_m\|_{L^6(\Omega)} \|\nabla u_m\| \|u'_m\|_{L^3(\Omega)} \leq C \|\nabla u'_m\| \|\nabla u_m\| \|u'_m\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq C \|\nabla u'_m\| \|\nabla u_m\| \|u'_m\|^{\frac{1}{4}} \|\nabla u'_m\|^{\frac{3}{4}} \\ &= C \|\nabla u'_m\|^{\frac{7}{4}} \|u'_m\|^{\frac{1}{4}} \leq aC \|\nabla u'_m\|^2 + C \|u'_m\|^2 \end{aligned}$$

A segunda parcela é majorada por:

$$\|u'_m\|_{L^r(\Omega)} \|\nabla n \cdot u_m\|_{L^s(\Omega)} \|u'_m\| \leq C \|u'_m\|_{L^r(\Omega)} \|\nabla n\|_{L^{sp}(\Omega)} \|u_m\|_{L^{sq}(\Omega)} \|u'_m\|$$

Onde $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Aqui $r = 6$ (maior valor possível); portanto $s = \frac{6}{5}$ e $sq = 6$ (maior valor); portanto $q = 5$. Assim $p = \frac{5}{4}$ e portanto $sp = \frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned} &C \|u'_m\|_{L^6(\Omega)} \|\nabla n\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} \|u_m\|_{L^6(\Omega)} \|u'_m\| \leq C \|\nabla u'_m\| \|\nabla n\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} \|\nabla u_m\| \|u'_m\| \\ &\leq a \|\nabla u'_m\|^2 + C \|\nabla n\|^2_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} \|\nabla u_m\|^2 \|u'_m\|^2 \end{aligned}$$

A terceira parcela de (2.26) é majorada da seguinte forma:

$$\left( \nabla (u'_m), \nabla \left( \frac{1}{n} \right) u'_m \right) \leq C \|\nabla n \cdot u'_m\|^2 + a \|\nabla u'_m\|^2$$

$$\leq C \|\nabla n\|^2_{L^3(\Omega)} \|u'_m\|^2_{L^6(\Omega)} + a \|\nabla u'_m\|^2$$

$$\leq C \|\nabla n\|^2_{L^3(\Omega)} \|\nabla u'_m\|^2 + a \|\nabla u'_m\|^2 = \left( a + \frac{C}{a} \|\nabla n\|^2_{L^3(\Omega)} \right) \|\nabla u'_m\|^2$$

Substituindo as majorações acima na equação (2.26) obtemos, após descartar a terceira parcela do lado esquerdo:

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left\|\frac{u_m'}{\sqrt{n}}\right\|^2+\mu\left\|\frac{\nabla u_m'}{\sqrt{n}}\right\|^2\leq C\left\|g'\right\|_{V'}^2+aC\left\|\frac{\nabla u_m'}{\sqrt{n}}\right\|^2+aC\left\|\frac{\nabla u_m'}{\sqrt{n}}\right\|^2+C\left\|\frac{u_m'}{\sqrt{n}}\right\|^2$$

$$+aC\left\|\frac{\nabla u_m'}{\sqrt{n}}\right\|^2+C\left\|\nabla n\right\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}^2\left\|\nabla u_m\right\|^2\left\|\frac{u_m'}{\sqrt{n}}\right\|^2+\left(a+\frac{C}{a}\left\|\nabla n\right\|_{L^3(\Omega)}^2\right)\left\|\frac{\nabla u_m'}{\sqrt{n}}\right\|^2$$

Isto é:

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{u_m'}{\sqrt{n}}\right\|^2+\left(2\mu-3aC-\frac{C}{a}\left\|\nabla n\right\|_{L^3(\Omega)}^2\right)\left\|\frac{\nabla u_m'}{\sqrt{n}}\right\|^2$$

$$\leq C\left\|g'\right\|_{V'}^2+C\left\|\nabla n\right\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}^2\left\|\frac{u_m'}{\sqrt{n}}\right\|^2$$

Escolhemos $a>0$ tal que $2\mu-3aC>0$ e se $\left\|\nabla n\right\|_{L^3(\Omega)}^2$ for suficientemente pequena para que $2\mu-3aC-\frac{C}{a}\left\|\nabla n\right\|_{L^3(\Omega)}^2>0$ então teremos:

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{u_m'}{\sqrt{n}}\right\|^2+C\left\|\frac{\nabla u_m'}{\sqrt{n}}\right\|^2\leq C\left\|g'\right\|_{V'}^2+C\left\|\frac{u_m'}{\sqrt{n}}\right\|^2$$

Multiplicando por $e^{\alpha t}$, reescrevendo a primeira parcela e integrando em $t$ a inequação acima obtemos que:

$$\begin{cases}\sup\limits_{t\in[0,T]}\left\|\frac{u_m'}{\sqrt{n}}\right\|\leq C\\ \\ e^{-\alpha t}\displaystyle\int_0^t e^{\alpha\sigma}\left\|\nabla u_m'(\sigma)/\sqrt{n(\sigma)}\right\|^2 d\sigma<\infty\quad\forall t\in[0,T]\end{cases}$$

Utilizando (2.25) temos que:

$$\widetilde{\Delta}u_m\in L^\infty\left(0,T,L^2(\Omega)\right)$$

Desta forma, utilizando agora a desigualdade (i) do Lema 1.9 da página 9 com $g=-\Delta u_m$ obtemos que:

$$D_x^2u_m\in L^\infty\left(0,T,L^2(\Omega)\right)$$

Uniformemente em $m$, limitação que é estendida para $u$ pois $u_m\to u$ fraco em $L^2(0,T,H^2(\Omega))$. □

# Capítulo 3

# Resultados quando a porosidade é função da pressão

Neste capítulo, vamos considerar que a porosidade é uma função da pressão hidrostática mais especificamente, é da forma $n = n_o + \delta f(p)$ , onde $\delta$ é um número positivo.Tal maneira de se considerar a porosidade é motivada pelo fato de que fisicamente ela variar com a pressão, isto é, nas regiões onde a pressão é maior, a porosidade tenderá a ser também maior. A expressão considerada para $n$ significa que a porosidade variará em função da pressão, mas em torno de uma porosidade $n_o$, que chamaremos de básica. O parâmetro $\delta$ servirá como um controle da influência da pressão na porosidade.

Obtemos basicamente dois resultados, um de existência de solução, utilizando argumentos de Ponto Fixo de Schauder; e outro de existência e unicidade, utilizando argumentos de Ponto Fixo de Banach.

Neste capítulo, a velocidade inicial é considerada nula, para velocidades inicias não nulas o problema ainda está sob estudo. Também como já observamos em (1.2) nos utilizaremos a notação simplificada para as normas em espaços de Hölder.

Antes de apresentarmos os resultados, vamos demonstrar dois lemas preliminares:

**Lema 3.1** *Sejam $f$ e $f'$ localmente lipschitz. Então $N_f$ (o operador de Nemytskii associado a $f$) é localmente Lipschitz em $\mathcal{H}^{\lambda}(Q_T)$.*

**Prova:** Seja $B$ uma bola em $\mathcal{H}^{\lambda}(Q_T)$ e $v_1, v_2 \in B$. Portanto existe $M < \infty$ tal que

$\|v_1\|_\lambda ; \|v_2\|_\lambda \leq M$. Seja $L_1 = L_1(B)$ a constante de Lipschitz que vale para $f$ restrita ao intervalo $[-3M, 3M]$. Seja $L_2 = L_2(B)$ a constante de Lipschitz que vale para $f'$ restrita ao intervalo $[-3M, 3M]$.

Agora temos:

$$\|N_f(v_2) - N_f(v_1)\|_\lambda = \sup_{Q_T} |N_f(v_2)(x,t) - N_f(v_1)(x,t)|$$

$$+ \sup_{x,y,t} \frac{|N_f(v_2)(x,t) - N_f(v_1)(x,t) - (N_f(v_2)(y,t) - N_f(v_1)(y,t))|}{|x-y|^\lambda}$$

$$+ \sup_{x,t,s} \frac{|N_f(v_2)(x,t) - N_f(v_1)(x,t) - (N_f(v_2)(x,s) - N_f(v_1)(x,s))|}{|t-s|^{\frac{\lambda}{2}}}$$

A primeira parcela acima é facilmente majorada:

$$\sup_{Q_T} |N_f(v_2)(x,t) - N_f(v_1)(x,t)| = \sup_{Q_T} |f(v_2(x,t)) - f(v_1(x,t))|$$

$$\leq L_1(B) \sup_{Q_T} |v_2(x,t) - v_1(x,t)| \leq L_1(B) \|v_2 - v_1\|_\lambda$$

Vamos fazer as majorações somente para a segunda parcela, a terceira é majorada de forma semelhante. Neste sentido seja $v_1 = v$ e $w = v_2 - v_1$.

$$\frac{|N_f(v_2)(x,t) - N_f(v_1)(x,t) - (N_f(v_2)(y,t) - N_f(v_1)(y,t))|}{|x-y|^\lambda}$$

$$= \frac{|f(v_2(x,t)) - f(v_1(x,t)) - (f(v_2(y,t)) - f(v_1(y,t)))|}{|x-y|^\lambda}$$

Somando e subtraindo a parcela $f(v(x,t) + w(y,t))$ obtemos:

$$\leq \frac{|f(v(x,t) + w(x,t)) - f(v(x,t) + w(y,t))|}{|x-y|^\lambda}$$

$$+ \frac{|f(v(x,t) + w(y,t)) - f(v(x,t)) - (f(v(y,t) + w(y,t)) - f(v(y,t)))|}{|x-y|^\lambda}$$

$$= I + II$$

A parcela $I$ acima é facilmente majorada:

$$\frac{|f(v(x,t)+w(x,t))-f(v(x,t)+w(y,t))|}{|x-y|^{\lambda}} \leq L_1(B)\frac{|w(x,t)-w(y,t)|}{|x-y|^{\lambda}}$$

$$\leq L_1(B)\|w\|_{\lambda}$$

Para a parcela $II$ acima temos:

$$II=\frac{1}{|x-y|^{\lambda}}\left|\int_0^1 f'(v(x,t)+sw(y,t))\,w(y,t)\,ds-\int_0^1 f'(v(y,t)+sw(y,t))\,w(y,t)\,ds\right|$$

$$\leq \frac{|w(y,t)|}{|x-y|^{\lambda}}\int_0^1 |f'(v(x,t)+sw(y,t))-f'(v(y,t)+sw(y,t))|\,ds$$

$$\leq \frac{|w(y,t)|}{|x-y|^{\lambda}}\int_0^1 L_2(B)\,|v(x,t)-v(y,t)|\,ds \leq L_2(B)\|w\|_{\lambda}\|v\|_{\lambda}$$

Portanto:

$$\|N_f(v_2)-N_f(v_1)\|_{\lambda} \leq (L_1(B)+L_2(B)\|v\|_{\lambda})\,\|v_2-v_1\|_{\lambda}$$

□

**Lema 3.2** *Sejam* $\delta>0, R>0, 0<n_o<1. f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *uma função localmente Lipschitz com derivada também localmente Lipschitz satisfazendo* $f(0)=0$ *e* $F:(0,1)\to\mathbb{R}$ *uma função localmente Lipschitz satisfazendo* $\lim\limits_{x\to 1} F(x)=0$ *e* $\lim\limits_{x\to 0} F(x)=\infty$ *e* $g\in\mathcal{H}^{\lambda}(Q_T)$.
*Então para* $\|u\|_{1+\lambda}<R$ *e* $\|p-\Psi\|_{1+\lambda}<R$ *temos:*

$i)\ \|f(p)\|_\lambda \leq C\,\|p\|_\lambda$

$ii)\ \|f'(p)\|_\lambda \leq |f'(0)| + C\left(R + \|\Psi\|_{1+\lambda}\right)$

$iii)\ \|F(n_o + \delta f(p))\|_\lambda \leq F(n_o) + \delta C\left(R + \|\Psi\|_{1+\lambda}\right)$

$iv) n_o+\delta f(p(x,t)) \geq \dfrac{n_o}{2}; \forall (x,t) \in Q_T$ se, e somente se, $\delta \leq \dfrac{n_o}{2C\left(R + \|\Psi\|_{1+\lambda}\right)}$

$v)$Se $n_o + \delta f(p) \geq \dfrac{n_o}{2}$ então $\left\|\dfrac{1}{n_o + \delta f(p)}\right\|_\lambda \leq C + \delta C\left(R + \|\Psi\|_{1+\lambda}\right)$

$vi)\ \|(n_o + \delta f(p))\,g\|_\lambda \leq n_o\|g\|_\lambda + \delta C\left(R + \|\Psi\|_{1+\lambda}\right)\|g\|_\lambda$

$vii)\ \|f(p)\,\nabla(p-\Psi)\|_\lambda \leq RC\left(R + \|\Psi\|_{1+\lambda}\right)$

$viii)\ \|F(n_o + \delta f(p))\,u\|_\lambda \leq F(n_o)\,R + \delta RC\left(R + \|\Psi\|_{1+\lambda}\right)$

$ix)\ \left\|u \cdot \nabla\left(\dfrac{u}{n_o + \delta f(p)}\right)\right\|_\lambda \leq C\sum_{i,j}\left(\delta^i R^j\right)$, onde $0\leq i \leq 3$ e $2\leq j \leq 5$

**Observação 3.1** *De acordo com o lema 3.1 as hipóteses sobre $f$ garantem que esta função satisfaz uma condição de Lipschitz local em $\mathcal{H}^\lambda(Q_T)$ :*

$$\|N_f(u) - N_f(v)\|_\lambda = \|f(u) - f(v)\|_\lambda \leq C\,\|u-v\|_\lambda\ ,$$
$$\forall u, v \in \mathcal{H}^\lambda(Q_T)\ \ com\ \ \|u\|_\lambda ; \|v\|_\lambda \leq R$$

**Prova do Lema 3.2:**

i)A demonstração do primeiro item é a seguinte:

Se $\|p-\Psi\|_{1+\lambda} < R$ então $|p(x,t)| < R + \|\Psi\|_{1+\lambda} < R_o + \|\Psi\|_{1+\lambda}$.

Agora:

$$\|f(p)\|_\lambda = \sup_{Q_T} |f(p(x,t))| + \sup_{x,y,t} \frac{|f(p(x,t)) - f(p(y,t))|}{|x-y|^\lambda} + \cdots$$

$$\leq C_{R_o,\Psi} \sup_{Q_T} |p(x,t)| + C_{R_o,\Psi} \sup_{x,y,t} \frac{|p(x,t) - p(y,t)|}{|x-y|^\lambda} + \cdots$$

$$\leq C \|p\|_\lambda \leq C \left(R + \|\Psi\|_{1+\lambda}\right)$$

ii)A demonstração do segundo item é semelhante a (i).

iii)A demonstração do terceiro item é a seguinte: Temos $F : [\varepsilon, 1] \to I\!R$ função localmente Lipschitz, fazendo cálculos semelhantes aos feitos em (i) obtemos:

$$\|F(n_o + \delta f(p))\|_\lambda \leq F(n_o) + \delta C_{\varepsilon,R_o,\Psi} \|p\|_\lambda \leq F(n_o) + \delta C_{\varepsilon,R_o,\Psi} \left(R + \|\Psi\|_{1+\lambda}\right)$$

$\varepsilon > 0$ é escolhido com a condição que $\varepsilon < \overline{n}$; onde $\overline{n} = \min\{n : \mu CF(n) < n\} < 1$.

iv)A demonstração do quarto item é a seguinte:

$$\begin{aligned} &n_o + \delta f(p) \geq n_o - \delta |f(p)| \geq n_o - \delta \|f(p)\|_\lambda \geq n_o - \delta C \|p\|_\lambda \\ &\geq n_o - \delta C \left(R + \|\Psi\|_{1+\lambda}\right) \geq \frac{n_o}{2} \text{ se, e somente se, } \delta \leq \frac{n_o}{2C\left(R + \|\Psi\|_{1+\lambda}\right)} \end{aligned}$$

v)Para demonstrar o quinto item, somente temos que desenvolver a $\lambda-$norma de $\dfrac{1}{n_o + \delta f(p)}$ e usar item (i):

$$\left\|\frac{1}{n_o + \delta f(p)}\right\|_\lambda = \sup_{Q_T} \left|\frac{1}{n_o + \delta f(p)}\right| + \sup_{x,y,t} \frac{\left|\frac{1}{n_o + \delta f(p(x,t))} - \frac{1}{n_o + \delta f(p(y,t))}\right|}{|x-y|^\lambda} + \cdots$$

$$\leq C + \delta \sup_{x,y,t} \frac{|f(p(x,t)) - f(p(y,t))|}{|x-y|^\lambda |n_o + \delta f(p(x,t))| \, |n_o + \delta f(p(y,t))|} + \cdots$$

$$\leq C + \delta\, C \sup_{x,y,t} \frac{|f(p(x,t)) - f(p(y,t))|}{|x-y|^\lambda} + \cdots \leq C + \delta C \|p\|_{1+\lambda}$$

$$\leq C + \delta C \left(R + \|\Psi\|_{1+\lambda}\right)$$

vi)A demonstração do sexto item é análogo ao feito no item acima:

$$\|(n_o + \delta f(p))\, g\|_\lambda \leq n_o \|g\|_\lambda + \delta \|f(p)\, g\|_\lambda \leq n_o \|g\|_\lambda + \delta C \|p\|_\lambda \|g\|_\lambda$$
$$\leq n_o \|g\|_\lambda + \delta C \left(R + \|\Psi\|_{1+\lambda}\right) \|g\|_\lambda$$

Na segunda desigualdade usamos a hipótese sobre $f$ e na última, usamos a hipótese sobre $p$.

vii)Para obter a desiguladade do sétimo item usamos (1.3) e a hipótese sobre $p$.

viii)Para demonstrar esta desigualdade. nos também usamos (1.3) e item (iii)

ix)A demonstração do nono item é a mais trabalhosa e é feita da seguinte forma:

$$\left\|u \cdot \nabla \left(\frac{u}{n_o + \delta f(p)}\right)\right\|_\lambda \leq \left\|\frac{u \cdot \nabla(u)}{n_o + \delta f(p)}\right\|_\lambda + \left\|u \cdot \nabla \left(\frac{1}{n_o + \delta f(p)}\right) u\right\|_\lambda$$

No lado direito. na primeira parcela, temos o produto definido em (0.2), e na segunda temos um produto interno usual em $\mathbb{R}^d$.

A primeira parcela do lado direito é limitada da seguinte forma:

$$\left\|\frac{u \cdot \nabla(u)}{n_o + \delta f(p)}\right\|_\lambda \leq C \|u\|_\lambda \|\nabla(u)\|_\lambda \left\|\frac{1}{n_o + \delta f(p)}\right\|_\lambda$$

Agora usamos itens (iv) e (v) acima e a hipótese sobre u para concluir:

$$\leq R^2 C \left(C + \delta C \|p\|_\lambda\right) \leq R^2 C \left(1 + \delta \left(R + \|\Psi\|_{1+\lambda}\right)\right)$$

A segunda parcela fica:

$$\left\|u \cdot \nabla \left(\frac{1}{n_o + \delta f(p)}\right) u\right\|_\lambda \leq C \|u\|_\lambda^2 \left\|\nabla \left(\frac{1}{n_o + \delta f(p)}\right)\right\|_\lambda$$

$$= C \|u\|_\lambda^2 \left\|\frac{\delta f'(p) \nabla(p)}{(n_o + \delta f(p))^2}\right\|_\lambda \tag{3.1}$$

$$\leq C\delta \|u\|_{1+\lambda}^2 \|f'(p)\|_\lambda \|\nabla(p)\|_\lambda \left\|\frac{1}{(n_o + \delta f(p))^2}\right\|_\lambda$$

Agora, usando as hipótese sobre $u, p$, e $f'$; com (ii) e (v) obtemos:

$$\delta R^2 \left(|f'(0)| + C\left(\left(R + \|\Psi\|_{1+\lambda}\right)\right)\right) \left(R + \|\Psi\|_{1+\lambda}\right) \left(C + \delta C \left(R + \|\Psi\|_{1+\lambda}\right)\right)^2$$

Desta forma temos provado (ix). □

## 3.1 Existência de soluções

**Teorema 3.1 (Existência)** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 2$ ou $3$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega \in \mathcal{H}^{2+\lambda}$. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função localmente Lipschitz com derivada também localmente Lipschitz satisfazendo $f(0) = 0$. Seja $F : (0,1) \to \mathbb{R}$ uma função localmente Lipschitz satisfazendo $\lim_{x \to 1} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to 0} F(x) = \infty$. Seja $g = g_1 + g_2$ onde $g_1 \in \mathcal{H}^\lambda(Q_T)$ com $g_1(x,0) = 0, \forall x \in \Omega$ e $g_2 = \nabla\Psi$ onde $\Psi \in \mathcal{H}^{1+\lambda}(Q_T)$ e $\int_\Omega \Psi(x,0)\, dx = 0$.*
*Então para $\delta > 0, R > 0$ e $\|g_1\|_\lambda$ suficientemente pequenos com $\mu C F(n_o) < n_o$ o problema (0.1) com $u_o = 0$, $n = n_o + \delta f(p)$ e $0 < C \leq n < 1$ tem uma solução $(u,p) \in \left(\mathcal{H}^{2+\lambda}(Q_T)\right)^d \times \mathcal{H}^{1+\lambda}(Q_T)$ com $\|u\|_{1+\lambda} < R$; $\|p - \Psi\|_{1+\lambda} < R$ e $p(x,0) = \Psi(x,0)$.*

**Observação 3.2** *Somente por razões físicas consideramos a dimensão como 2 ou 3. O argumento é ainda válido em dimensões maiores.*

**Observação 3.3** *A condição $\mu C F(n_o) < n_o$ nos diz que existe uma porosididade básica $\bar{n}$ para a qual dado $n_o$ com $n_o > \bar{n}$ temos $\mu C F(n_o) < n_o$.*
*Uma possível interpretação para isto é: garantimos a existência de solução quando a equação fica próxima de uma equação de Navier-Stokes pura (onde $n = 1$).*

**Observação 3.4** *A constante $C$ em $\mu C F(n_o) < n_o$ é explicitada no decorrer da demonstração.*

**Observação 3.5** *Consideramos a velocidade inicial nula devido as grandes dificuldades ainda encontradas para garantirmos a condição (1.5) no caso em que $u_o \neq 0$.*

**Prova do Teorema 3.1:** A idéia geral para a demonstração deste teorema é a seguinte:

Construiremos sequências $p_m \in \mathcal{H}^{1+\lambda}(Q_T)$ ; $u_m \in \left(\mathcal{H}^{2+\lambda}(Q_T)\right)^d$ definidas recursivamente de modo que possamos usar o Teorema 1.2.

E com isto, obteremos limitação uniforme das sequências $p_m$ e $u_m$ em $\mathcal{H}^{1+\lambda}(Q_T)$ e $\left(\mathcal{H}^{2+\lambda}(Q_T)\right)^d$ respectivamente.

Usando resultados de compacidade em espaços de Hölder obteremos subsequências convergentes a uma solução do problema (0.1).

As sequências são recursivamente definidas da seguinte forma:

$$u_1(x,t) \in \left(\mathcal{H}^{1+\lambda}(Q_T)\right)^d \text{ com a condição } u_1(x,0) = 0 \ \forall x \in \Omega$$
$$p_1(x,t) \in \mathcal{H}^{1+\lambda}(Q_T) \text{ com a condição } p_1(x,0) = \Psi(x,0) \ \forall x \in \Omega$$

Supondo que $u_{m-1} \in \left(\mathcal{H}^{1+\lambda}(Q_T)\right)^d$ e $p_{m-1} \in \mathcal{H}^{1+\lambda}(Q_T)$ são conhecidas, obtemos $u_m$ e $p_m$ satisfazendo:

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} - \mu\Delta u_m + \nabla\left(n_o\left(p_m - \Psi\right)\right) = \left(n_o + \delta f\left(p_{m-1}\right)\right)g_1 - \delta f\left(p_{m-1}\right)\nabla\left(p_{m-1} - \Psi\right)$$
$$-\mu F\left(n_o + \delta f\left(p_{m-1}\right)\right)u_{m-1} - u_{m-1}\cdot\nabla\left(\frac{u_{m-1}}{n_o + \delta f\left(p_{m-1}\right)}\right) \tag{3.2}$$

Com:

$$\begin{cases} \operatorname{div} u_m = 0 \quad \text{em } Q_T\,, \\ u_m(x,0) = 0 \quad \forall x \in \Omega\,, \\ u_m(x,t) = 0 \ ,\ \forall t \in (0,T) \ ,\ \forall x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Esta forma de definição das sequências é motivada pelo Teorema de Solonnikov (Teorema 1.2), o qual garante a existência das sequências.

**Observação 3.6** *Observe que a condição (1.5) do Teorema 1.2 é satisfeita, porque se $u_{m-1}$ e $p_{m-1}$ satisfazem $p_{m-1}(x,0) = \Psi(x,0)$ então $p_m$ satisfará a mesma condição.*

A demonstração da Observação 3.6 é a seguinte:

A equação ligando $p_m$ e $p_{m-1}$ é:

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} - \mu\Delta u_m + \nabla\left(n_o\left(p_m - \Psi\right)\right) = \left(n_o + \delta f\left(p_{m-1}\right)\right) g_1 - \delta f\left(p_{m-1}\right)\nabla\left(p_{m-1} - \Psi\right)$$

$$-\mu F\left(n_o + \delta f\left(p_{m-1}\right)\right) u_{m-1} - u_{m-1}\cdot\nabla\left(\frac{u_{m-1}}{n_o + \delta f\left(p_{m-1}\right)}\right)$$

Fazendo $t = 0$ obtemos:

$$\frac{\partial u_m\left(x,0\right)}{\partial t} - \mu\Delta u_m\left(x,0\right) + \nabla\left(n_o\left(p_m\left(x,0\right) - \Psi\left(x,0\right)\right)\right)$$

$$= -\delta f\left(p_{m-1}\left(x,0\right)\right)\nabla\left(p_{m-1}\left(x,0\right) - \Psi\left(x,0\right)\right)$$

Pois $g_1\left(x,0\right) = 0$ e $u_{m-1}\left(x,0\right) = 0$. Portanto, a pressão inicial é dada por (veja Heywood e Rannacher [[6]] na página 280):

$$\begin{cases} \Delta\left(n_o\left(p_m\left(x,0\right) - \Psi\left(x,0\right)\right)\right) = \operatorname{div}\left(-\delta f\left(p_{m-1}\left(x,0\right)\right)\nabla\left(p_{m-1}\left(x,0\right) - \Psi\left(x,0\right)\right)\right) \\ \dfrac{\partial\left(n_o\left(p_m\left(x,0\right) - \Psi\left(x,0\right)\right)\right)}{\partial\overrightarrow{N}} = \left(-\delta f\left(p_{m-1}\left(x,0\right)\right)\nabla\left(p_{m-1}\left(x,0\right) - \Psi\left(x,0\right)\right)\right)\cdot\overrightarrow{N} \end{cases}$$

Onde $\overrightarrow{N}$ é o vetor normal unitário exterior a $\Omega$. Então, se $p_{m-1}\left(x,0\right) = \Psi\left(x,0\right)$ obtemos o sistema:

$$\begin{cases} \Delta\left(n_o\left(p_m\left(x,0\right) - \Psi\left(x,0\right)\right)\right) = 0 \;\; ; \;\; \forall x \in \Omega \\ \dfrac{\partial\left(n_o\left(p_m\left(x,0\right) - \Psi\left(x,0\right)\right)\right)}{\partial\overrightarrow{N}} = 0 \;\; ; \;\; \forall x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Portanto $p_m\left(x,0\right) - \Psi\left(x,0\right) = C$, mas com a hipótese de que $p_m$ e $\Psi$ têm média integral nula em $\Omega$ concluimos que $C = 0$. Desta forma, podemos continuar a iteração e obter $u_{m+1}$, porque a condição (1.5) é satisfeita.

Continuando com a demonstração do teorema, podemos portanto, usar estimativa (1.8) da página 16 em (3.2) obtendo:

$$\left\|u_m\right\|_{2+\lambda} + \left\|n_o\left(p_m - \Psi\right)\right\|_{1+\lambda} \leq C\left\|\left(n_o + \delta f\left(p_{m-1}\right)\right) g_1\right\|_\lambda$$

$$+\delta C\left\|f\left(p_{m-1}\right)\nabla\left(p_{m-1} - \Psi\right)\right\|_\lambda + \mu C\left\|F\left(n_o + \delta f\left(p_{m-1}\right)\right) u_{m-1}\right\|_\lambda \tag{3.3}$$

$$+C\left\|u_{m-1}\cdot\nabla\left(\frac{u_{m-1}}{n_o + \delta f\left(p_{m-1}\right)}\right)\right\|_\lambda$$

Suponhamos que $\|u_{m-1}\|_{2+\lambda} < R$ e $\|p_{m-1} - \Psi\|_{1+\lambda} < R$ agora, com o uso do Lema 3.2, limitaremos o lado direito de (3.3), desta forma obteremos limitações uniformes similares para $\|u_m\|_{2+\lambda}$ e $\|p_m - \Psi\|_{1+\lambda}$.
Então (3.3) fica:

$$\begin{aligned}
&\|u_m\|_{2+\lambda} + \|n_o(p_m - \Psi)\|_{1+\lambda} \leq Cn_o\|g_1\|_\lambda + \delta C\left(R + \|\Psi\|_{1+\lambda}\right)\|g_1\|_\lambda \\
&+\delta RC\left(R + \|\Psi\|_{1+\lambda}\right) + R\mu CF(n_o) + \delta RC\left(R + \|\Psi\|_{1+\lambda}\right) \\
&+C\sum_{i,j}\left(\delta^i R^j\right), \quad \text{onde } 0 \leq i \leq 3 \text{ e } 2 \leq j \leq 5
\end{aligned}$$

Agora, dividindo ambos os lados da inequação acima por $n_o$ e denominando por K o lado direito, obteremos:

$$\frac{\|u_m\|_{2+\lambda}}{n_o} + \|p_m - \Psi\|_{1+\lambda} \leq \frac{K}{n_o}$$

Se $K/n_o < R$ então $\|u_m\|_{2+\lambda} \leq n_o R < R$ e $\|p_m - \Psi\|_{1+\lambda} < R$.
Portanto, se $\mu CF(n_o) < n_o$ e $\|g_1\|_\lambda$ for pequena o suficiente, podemos escolher $\delta$ e $R$ suficientemente pequenos para que $\dfrac{K}{n_o} < R$.

Desta forma podemos garantir que:

$$\|u_m\|_{2+\lambda} < R \text{ e } \|p_m - \Psi\|_{1+\lambda} < R; \forall m \in I\!N \tag{3.4}$$

Devido a (3.4) e usando Teorema 1.1, da página 12, temos:

$$p_{m_i} \to p \text{ em } C^{1,0}(Q_T) \tag{3.5}$$

$$u_{m_i} \to u \text{ em } C^{2,1}(Q_T) \tag{3.6}$$

para subsequências de $p_m$ e $u_m$; por razões de simplicidade de notação, ainda denotaremos tais subsequências por $p_m$ e $u_m$.

Vamos passar o limite nas diversas parcelas de (3.2):

$a)\ \dfrac{\partial u_m}{\partial t} \to \dfrac{\partial u}{\partial t}$ em $C^0(Q_T)$ devido a (3.6).

$b)\ \Delta u_m \to \Delta u$ em $C^0(Q_T)$ devido a (3.6).

$c)\nabla(n_o(p_m - \Psi)) \to \nabla(n_o(p_m - \Psi))$ em $C^0(Q_T)$ devido a (3.5).

$d)\ f(p_{m-1}) \to f(p)$ em $C^0(Q_T)$ pois $\|f(p_{m-1})\|_\lambda \le C\|p_{m-1}\|_\lambda \le C$ portanto $f(p_{m-1}) \to h$ em $C^0(Q_T)$ para uma função $h$ de $C^0(Q_T)$. Mas $h = f(p)$ porque $p_{m-1}(x,t) \to p(x,t)$ então $f(p_{m-1}(x,t)) \to f(p(x,t))$ quando $m \to \infty$.

$e)\ F(n_o + \delta f(p_{m-1})) \to F(n_o + \delta f(p))$ em $C^0(Q_T)$ porque $f(p_{m-1}) \to f(p)$ em $C^0(Q_T)$ e $\|F(n_o + \delta f(p_{m-1}))\|_\lambda \le C$.

$f)\ u_{m-1}\cdot\nabla\left(\dfrac{u_{m-1}}{n_o+\delta f(p_{m-1})}\right) \to u\cdot\nabla\left(\dfrac{u}{n_o+\delta f(p)}\right)$ em $C^0(Q_T)$ porque $u_{m-1}\cdot\nabla\left(\dfrac{u_{m-1}}{n_o+\delta f(p_{m-1})}\right) = \dfrac{u_{m-1}\cdot\nabla(u_{m-1})}{n_o+\delta f(p_{m-1})} + u_{m-1}\cdot\nabla\left(\dfrac{1}{n_o+\delta f(p_{m-1})}\right)u_{m-1}$.
Portanto temos que, a primeira parcela converge a $\dfrac{u\cdot\nabla(u)}{n_o+\delta f(p)}$ em $C^0(Q_T)$ devido a (3.6) e (d) acima.

Para a segunda parcela, observemos que:

$$u_{m-1}\cdot\nabla\left(\frac{1}{n_o+\delta f(p_{m-1})}\right)u_{m-1} = -u_{m-1}\cdot\frac{\delta f'(p_{m-1})\nabla(p_{m-1})}{(n_o+\delta f(p_{m-1}))^2}u_{m-1}$$

E que $\|f'(p_{m-1})\|_\lambda \le C\|f'(0)\|_\lambda + C\|p_{m-1}\|_\lambda \le C$ portanto $f'(p_{m-1}) \to f'(p)$ em $C^0(Q_T)$.

Desta maneira nos temos:

$$u_{m-1}\cdot\frac{\delta f'(p_{m-1})\nabla(p_{m-1})}{(n_o+\delta f(p_{m-1}))^2}u_{m-1} \to u\cdot\frac{\delta f'(p)\nabla(p)}{(n_o+\delta f(p))^2}u \text{ em } C^0(Q_T)$$

Fazendo $m \to \infty$, a equação (3.2) fica:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu\Delta u + \nabla(n_o(p-\Psi)) = (n_o+\delta f(p))g_1 - \delta f(p)\nabla(p-\Psi)$$

$$-\mu F(n_o+\delta f(p))u - u\cdot\nabla\left(\frac{u}{n_o+\delta f(p)}\right)$$

Esta é a equação do problema (0.1), com a condição inicial e de contorno satisfeitas. □

**Observação 3.7** *Os mesmos resultados são válidos em* $\Omega\times(0,\infty)$, *porque a constante* $C$ *em (1.8) não depende de* $T$, *e para passarmos o limite, usamos um argumento do tipo diagonal de Cantor para concluir que a equação é ainda satisfeita em qualquer conjunto compacto de* $\Omega \times (0,\infty)$.

## 3.2 Existência e unicidade de soluções

**Teorema 3.2 (Existência e unicidade)** *Com os mesmos dados do Teorema 3.1, mas com as hipóteses adicionais de que* $f$ *e suas primeira e segunda derivadas são localmente Lipschitz e* $F$ *juntamente com sua primeira derivada é localmente Lipschitz e com condições de pequenez sobre* $\delta$, $R$ *e* $\|g_1\|_\lambda$ *temos que (0.1) com* $u_o = 0$, $n = n_o + \delta f(p)$ *e* $0 < C \leq n < 1$ *tem uma única solução* $(u,p)$ *com:* $(u,p) \in \left(\mathcal{H}^{2+\lambda}(Q_T)\right)^d \times \mathcal{H}^{1+\lambda}(Q_T)$ *com* $\|u\|_{1+\lambda} < R$; $\|p - \Psi\|_{1+\lambda} < R$ *e* $p(x,0) = \Psi(x,0)$.

**Observação 3.8** *As condições de pequenez sobre* $\delta$, $R$ *e* $\|g_1\|_\lambda$ *vem das exigências de se utilizar argumentos semelhantes ao da demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Estas condições são possivelmente mais restritivas do que as do Teorema 3.1.*

**Observação 3.9** *De acordo com o lema 3.1 as hipóteses sobre* $f$ *e* $F$ *garantem que* $f, f'$ *e* $F$ *satisfazem uma condição de Lipschitz local em* $\mathcal{H}^\lambda(Q_T)$ :

$$\begin{aligned}
&\|N_f(u) - N_f(v)\|_\lambda = \|f(u) - f(v)\|_\lambda \leq C\|u - v\|_\lambda \ , \\
&\|N_{f'}(u) - N_{f'}(v)\|_\lambda = \|f'(u) - f'(v)\|_\lambda \leq C\|u - v\|_\lambda \ , \\
&\|N_F(u) - N_F(v)\|_\lambda = \|F(u) - F(v)\|_\lambda \leq C\|u - v\|_\lambda \ , \\
&\forall u, v \in \mathcal{H}^\lambda(Q_T) \ \ com \ \ \|u\|_\lambda ; \|v\|_\lambda \leq R.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

**Prova do Teorema 3.2:** Para os propósitos de unicidade, usaremos o Teorema de Ponto Fixo de Banach.

Neste sentido, definimos um "operador solução" da forma:

$$A : D(A) \subset B(0,R) \times B(\Psi,R) \subset \left(\mathcal{H}^{1+\lambda}(Q_T)\right)^d \times \mathcal{H}^{1+\lambda}(Q_T) \to B(0,R) \times B(\Psi,R)$$

Onde $B(0,R)$ é a bola de centro 0 e raio $R$ e $D(A)$ é o conjunto de pontos $(q,p) \in B(0,R) \times B(\Psi,R)$ com $p$ satisfazendo

$$p(x,0) = \Psi(x,0). \tag{3.8}$$

e $q(x,0) = 0$; $q(x,t) = 0$ para $x \in \partial\Omega$ $\forall t \in [0,T]$ e obtemos $(u,P) = A(q,p) \in B(0,R) \times B(\Psi,R)$ com $P$ satisfazendo (3.8) e $(u,P)$ satisfazendo a seguinte equação:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - \mu\Delta u + \nabla(n_o(P-\Psi)) = (n_o + \delta f(p))\, g_1 - \delta f(p)\nabla(p-\Psi) \\ &-\mu F(n_o + \delta f(p))\, q - q\cdot\nabla\left(\frac{q}{n_o + \delta f(p)}\right) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Com:

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0 \ , \ \text{em } Q_T \\ u(x,0) = 0 \ , \ \forall x \in \Omega \\ u(x,t) = 0 \ , \ \forall t \in (0,T) \ , \forall x \in \partial\Omega \end{cases}$$

A existência de solução para (3.9) é garantida pelo Teorema 1.2.

Vamos mostrar que o operador $A$ transporta $D(A)$ em $D(A)$ e posteriormente que $A$ é uma contração.

Vamos mostrar, primeiramente, que $A$ é um operador limitado:

As contas aqui são bastante semelhantes as feitas no Teorema 3.1 de (3.3) até (3.4) e a conclusão é:

Se $\|q\|_{1+\lambda} \leq R$ , $\|p-\Psi\|_{1+\lambda} \leq R$ e $\mu CF(n_o) < n_o$ com $\|g_1\|_\lambda$ pequena o suficiente, podemos escolher $\delta$ e $R$ suficientemente pequenos para que $\|u\|_{1+\lambda} \leq R$ , $\|P-\Psi\|_{1+\lambda} \leq R$.

Vamos mostrar agora que $A$ é uma contração:

Para demontrar isto. escrevemos:

$$\begin{cases} A(q,p) = (u,P) \\ A(\overline{q},\overline{p}) = \left(\overline{u},\overline{P}\right) \end{cases}$$

E temos as duas equações seguintes (com respectivas condições de contorno):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu\Delta u + \nabla\left(n_o\left(P-\Psi\right)\right) = \left(n_o + \delta f(p)\right) g_1 - \delta f(p)\nabla(p-\Psi)$$

$$-\mu F\left(n_o + \delta f(p)\right) q - q\cdot\nabla\left(\frac{q}{n_o+\delta f(p)}\right)$$

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} - \mu\Delta \overline{u} + \nabla\left(n_o\left(\overline{P}-\Psi\right)\right) = \left(n_o + \delta f(\overline{p})\right) g_1 - \delta f(\overline{p})\nabla(\overline{p}-\Psi)$$

$$-\mu F\left(n_o + \delta f(\overline{p})\right) \overline{q} - \overline{q}\cdot\nabla\left(\frac{\overline{q}}{n_o+\delta f(\overline{p})}\right)$$

Agora subtraimos a segunda da primeira:

$$\frac{\partial (u-\overline{u})}{\partial t} - \mu\Delta (u-\overline{u}) + \nabla\left(n_o\left(P-\overline{P}\right)\right) = \delta\left(f(p) - f(\overline{p})\right) g_1 - \delta f(p)\nabla(p-\Psi)$$

$$+\delta f(\overline{p})\nabla(\overline{p}-\Psi) - \mu F\left(n_o+\delta f(p)\right) q + \mu F\left(n_o+\delta f(\overline{p})\right)\overline{q} - q\cdot\nabla\left(\frac{q}{n_o+\delta f(p)}\right)$$

$$+\overline{q}\cdot\nabla\left(\frac{\overline{q}}{n_o+\delta f(\overline{p})}\right)$$

Com as condições de contorno seguintes:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\ (u-\overline{u}) = 0 \quad \text{em } Q_T\,, \\ (u-\overline{u})(x,0) = 0 \quad \forall x\in\Omega\,, \\ (u-\overline{u})(x,t) = 0 \ ,\ \forall t\in(0,T)\ ,\ \forall x\in\partial\Omega. \end{cases}$$

Fazendo uso de (1.8) temos:

$$\|u-\overline{u}\|_{2+\lambda} + \left\|n_o\left(P-\overline{P}\right)\right\|_{1+\lambda} \le \delta C\left\|f(p)\nabla(p-\Psi) - f(\overline{p})\nabla(\overline{p}-\Psi)\right\|_\lambda$$

$$+\delta C\left\|\left(f(p)-f(\overline{p})\right)g_1\right\|_\lambda + C\mu\left\|F\left(n_o+\delta f(p)\right)q - F\left(n_o+\delta f(\overline{p})\right)\overline{q}\right\|_\lambda \tag{3.10}$$

$$+C\left\|q\cdot\nabla\left(\frac{q}{n_o+\delta f(p)}\right) - \overline{q}\cdot\nabla\left(\frac{\overline{q}}{n_o+\delta f(\overline{p})}\right)\right\|_\lambda$$

Agora majoraremos os diversos termos do lado direito da inequação acima. As contas são bastante semelhantes daquelas feitas no Lema 3.2.

a)O primeiro termo de (3.10) é majorado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\|f(p)\nabla(p-\Psi) - f(\overline{p})\nabla(\overline{p}-\Psi)\|_\lambda \leq \|(f(p)-f(\overline{p}))\nabla(p-\Psi)\|_\lambda \\
&+\|f(\overline{p})\nabla(p-\overline{p})\|_\lambda \leq C\|f(p)-f(\overline{p})\|_\lambda \|\nabla(p-\Psi)\|_\lambda + C\|\overline{p}\|_\lambda \|p-\overline{p}\|_{1+\lambda} \\
&\leq RC\|p-\overline{p}\|_{1+\lambda} + C\left(R+\|\Psi\|_{1+\lambda}\right)\|p-\overline{p}\|_{1+\lambda} \\
&\leq \left(R+\|\Psi\|_{1+\lambda}\right) C\|p-\overline{p}\|_{1+\lambda}
\end{aligned}$$

Na primeira desigualdade, adicionamos e subtraimos a parcela $f(\overline{p})\nabla(p-\Psi)$.

b)O segundo termo de (3.10) é majorado da seguinte forma:

$$\|(f(p)-f(\overline{p}))g_1\|_\lambda \leq C\|f(p)-f(\overline{p})\|_\lambda \|g_1\|_\lambda \leq C\|p-\overline{p}\|_\lambda \|g_1\|_\lambda$$

Na última desigualdade, nos usamos (3.7).

c)O terceiro termo de (3.10) é majorado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\|F(n_o+\delta f(p))q - F(n_o+\delta f(\overline{p}))\overline{q}\|_\lambda \\
&\leq \|F(n_o+\delta f(p))(q-\overline{q})\|_\lambda + \|[F(n_o+\delta f(p)) - F(n_o+\delta f(\overline{p}))]\overline{q}\|_\lambda \\
&\leq \left(F(n_o)+\delta C\|\overline{p}\|_{1+\lambda}\right)\|q-\overline{q}\|_{1+\lambda} + \delta C\|\overline{q}\|_{1+\lambda}\|f(p)-f(\overline{p})\|_\lambda \\
&\leq \left(F(n_o)+\delta C\left(R+\|\Psi\|_{1+\lambda}\right)\right)\|q-\overline{q}\|_{1+\lambda} + \delta RC\|p-\overline{p}\|_\lambda
\end{aligned}$$

Aqui adicionamos e subtraimos $F(n_o+\delta f(p))\overline{q}$ e usamos a propriedade (3.7) de $F$ e $f$.

d)O quarto termo de (3.10) é o mais complicado e é majorado da seguinte forma: primeiro adicionamos e subtarimos $\overline{q}\cdot\nabla\left(\dfrac{q}{n_o+\delta f(p)}\right)$ e obtemos:

$$\begin{aligned}
&\left\|q\cdot\nabla\left(\frac{q}{n_o+\delta f(p)}\right) - \overline{q}\cdot\nabla\left(\frac{\overline{q}}{n_o+\delta f(\overline{p})}\right)\right\|_\lambda \\
&\leq \left\|(q-\overline{q})\cdot\nabla\left(\frac{q}{n_o+\delta f(p)}\right)\right\|_\lambda + \left\|\overline{q}\cdot\nabla\left(\frac{q}{n_o+\delta f(p)} - \frac{\overline{q}}{n_o+\delta f(\overline{p})}\right)\right\|_\lambda
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Com o objetivo de simplificar a notação vamos escrever:

$$n_o+\delta f(p) = n \quad \text{e} \quad n_o+\delta f(\overline{p}) = \overline{n}$$

Agora, a primeira parcela do lado direito da inequação acima é majorada da seguinte forma:

$$\left\|(q-\overline{q})\cdot\nabla\left(\frac{q}{n}\right)\right\|_\lambda \leq \left\|(q-\overline{q})\cdot\nabla(q)\frac{1}{n}\right\|_\lambda + \left\|(q-\overline{q})\cdot\nabla\left(\frac{1}{n}\right)q\right\|_\lambda$$

$$\leq \|\nabla(q)\|_\lambda \left\|\frac{1}{n}\right\|_\lambda \|q-\overline{q}\|_\lambda + \|q\|_\lambda \left\|\nabla\left(\frac{1}{n}\right)\right\|_\lambda \|q-\overline{q}\|_\lambda$$

$$\leq R\left(C+\delta C\left(R+\|\Psi\|_{1+\lambda}\right)\right)\|q-\overline{q}\|_\lambda + R\left\|\frac{\delta f'(p)\,\nabla(p)}{(n)^2}\right\|_\lambda \|q-\overline{q}\|_\lambda$$

A segunda parcela acima é limitada como em (3.1) e nos obtemos as limitações seguintes:

$$\begin{aligned}&R\left(C+\delta C\left(R+\|\Psi\|_{1+\lambda}\right)\right)\|q-\overline{q}\|_\lambda + \delta R\left(|f'(0)|+C\left(\left(R+\|\Psi\|_{1+\lambda}\right)\right)\right)\cdot\\ &\cdot\left(R+\|\Psi\|_{1+\lambda}\right)\left(C+\delta C\left(R+\|\Psi\|_{1+\lambda}\right)\right)^2\|q-\overline{q}\|_\lambda\end{aligned}$$

Isto é:

$$\leq (R+\delta R)\,C\,\|q-\overline{q}\|_{1+\lambda}$$

Para a segunda parcela em (3.11) notemos que:

$$\frac{q}{n}-\frac{\overline{q}}{\overline{n}} = \frac{n_o(q-\overline{q})+\delta\left(qf(\overline{p})-\overline{q}f(p)\right)}{n\overline{n}}$$

Então:

$$\begin{aligned}\left\|\overline{q}\cdot\nabla\left(\frac{q}{n}-\frac{\overline{q}}{\overline{n}}\right)\right\|_\lambda &\leq \left\|\overline{q}\cdot\nabla\left(\frac{n_o(q-\overline{q})}{n\overline{n}}\right)\right\|_\lambda + \delta\left\|\overline{q}\cdot\nabla\left(\frac{qf(\overline{p})-\overline{q}f(p)}{n\overline{n}}\right)\right\|_\lambda \\ &= (I)+(II)\end{aligned} \tag{3.12}$$

A primeira parcela acima é limitada da seguinte forma:

$$(I) \leq n_o\left\|\frac{\overline{q}\cdot\nabla(q-\overline{q})}{n\overline{n}}\right\|_\lambda + n_o\left\|\overline{q}\cdot\nabla\left(\frac{1}{n\overline{n}}\right)(q-\overline{q})\right\|_\lambda$$

Portanto:

$$(I) \leq n_o\|\overline{q}\|_\lambda\|\nabla(q-\overline{q})\|_\lambda\left\|\frac{1}{n}\right\|_\lambda\left\|\frac{1}{\overline{n}}\right\|_\lambda + n_o\|\overline{q}\|_\lambda\left\|\nabla\left(\frac{1}{n\overline{n}}\right)\right\|_\lambda\|q-\overline{q}\|_\lambda$$

Observe que:

$$\nabla\left(\frac{1}{n\overline{n}}\right) = -\delta\frac{\overline{n}f'(p)\,\nabla(p) + nf'(\overline{p})\,\nabla(\overline{p})}{(n)^2(\overline{n})^2}$$

Então:

$$(I) \leq RC\left(C + \delta C\left(R + \|\Psi\|_{1+\lambda}\right)\right)^2 \|q - \overline{q}\|_{1+\lambda} + \delta RC\left\|\frac{f'(p)\,\nabla(p)}{(n)^2(\overline{n})}\right\|_\lambda \|q - \overline{q}\|_{1+\lambda}$$

$$+\delta RC\left\|\frac{f'(\overline{p})\,\nabla(\overline{p})}{(n)(\overline{n})^2}\right\|_\lambda \|q - \overline{q}\|_{1+\lambda} \leq RC\,\|q - \overline{q}\|_{1+\lambda} + \delta RC\,\|q - \overline{q}\|_{1+\lambda}$$

$$= (R + \delta R)\,C\,\|q - \overline{q}\|_{1+\lambda}$$

Agora, para $(II)$ em (3.12) temos, após somar e subtrair $\overline{q}f(\overline{p})$:

$$(II) \leq \delta\left\|\overline{q}\cdot\nabla\left(\frac{(q-\overline{q})\,f(\overline{p})}{n\overline{n}}\right)\right\|_\lambda + \delta\left\|\overline{q}\cdot\nabla\left(\frac{(f(\overline{p}) - f(p))\,\overline{q}}{n\overline{n}}\right)\right\|_\lambda = \delta\left((iii) + (iv)\right)$$

Para $(iii)$ temos:

$$(iii) \leq \left\|\overline{q}\cdot\nabla\left(\frac{1}{n\overline{n}}\right)(q-\overline{q})\,f(\overline{p})\right\|_\lambda + \left\|\overline{q}\cdot\nabla\left((q-\overline{q})\,f(\overline{p})\right)\frac{1}{n\overline{n}}\right\|_\lambda$$

$$\leq \|\overline{q}\|_\lambda\left\|\nabla\left(\frac{1}{n\overline{n}}\right)\right\|_\lambda \|q-\overline{q}\|_\lambda\,\|f(\overline{p})\|_\lambda \tag{3.13}$$

$$+\,\|\overline{q}\|_\lambda\,\|\nabla\left((q-\overline{q})\,f(\overline{p})\right)\|_\lambda\left\|\frac{1}{n}\right\|_\lambda\left\|\frac{1}{\overline{n}}\right\|_\lambda$$

A primeira parcela acima é limitada por:

$$\delta RC\left\|\frac{f'(p)\,\nabla(p)}{(n)^2(\overline{n})}\right\|_\lambda \|\overline{p}\|_\lambda\,\|q-\overline{q}\|_{1+\lambda} + \delta RC\left\|\frac{f'(\overline{p})\,\nabla(\overline{p})}{(n)(\overline{n})^2}\right\|_\lambda \|\overline{p}\|_\lambda\,\|q-\overline{q}\|_{1+\lambda}$$

$$\leq \delta RC\,\|q-\overline{q}\|_{1+\lambda}$$

A segunda parcela em (3.13) é limitada por:

$$\leq R\left(C + \delta C\left(R + \|\Psi\|_{1+\lambda}\right)\right)^2 \left\{\|\nabla(q-\overline{q})\,f(\overline{p})\|_\lambda + \|\nabla(f(\overline{p}))\,(q-\overline{q})\|_\lambda\right\}$$
$$\leq RC\,\|\nabla(q-\overline{q})\|_\lambda\,\|f(\overline{p})\|_\lambda + RC\,\|\nabla(f(\overline{p}))\|_\lambda\,\|q-\overline{q}\|_\lambda$$
$$\leq RC\,\|\overline{p}\|_\lambda\,\|q-\overline{q}\|_{1+\lambda} + RC\,\|f'(\overline{p})\|_\lambda\,\|\nabla(\overline{p})\|_\lambda\,\|q-\overline{q}\|_\lambda$$
$$\leq RC\,\|q-\overline{q}\|_{1+\lambda}$$

Portanto:

$$(iii) \leq (R + \delta R)\, C \,\|q - \overline{q}\|_{1+\lambda}$$

Agora, para $(iv)$ temos:

$$(iv) \leq \left\|\overline{q} \cdot \nabla\left(\frac{1}{n\overline{n}}\right)(f(\overline{p}) - f(p))\,\overline{q}\right\|_\lambda + \left\|\overline{q} \cdot \nabla\left((f(\overline{p}) - f(p))\,\overline{q}\right)\frac{1}{n\overline{n}}\right\|_\lambda$$

$$\leq \|\overline{q}\|_\lambda^2 \left\|\nabla\left(\frac{1}{n\overline{n}}\right)\right\|_\lambda \|f(\overline{p}) - f(p)\|_\lambda \tag{3.14}$$

$$+ \|\overline{q}\|_\lambda \left\|\nabla\left((f(\overline{p}) - f(p))\,\overline{q}\right)\right\|_\lambda \left\|\frac{1}{n}\right\|_\lambda \left\|\frac{1}{\overline{n}}\right\|_\lambda$$

A primeira parcela acima é limitada por:

$$\leq \delta R^2 \left\|\frac{f'(p)\,\nabla(p)}{(n)^2(\overline{n})}\right\|_\lambda \|p - \overline{p}\|_\lambda + \delta R^2 \left\|\frac{f'(\overline{p})\,\nabla(\overline{p})}{(n)(\overline{n})^2}\right\|_\lambda \|p - \overline{p}\|_\lambda$$

$$\leq \delta R^2 C \,\|p - \overline{p}\|_\lambda$$

A segunda parcela em (3.14) é limitada por:

$$\begin{aligned} &R\left(C + \delta C\left(R + \|\Psi\|_{1+\lambda}\right)\right)^2 \|\nabla(f(\overline{p}) - f(p))\|_\lambda \|\overline{q}\|_\lambda \\ &+R\left(C + \delta C\left(R + \|\Psi\|_{1+\lambda}\right)\right)^2 \|\nabla(\overline{q})\|_\lambda \|f(\overline{p}) - f(p)\|_\lambda \end{aligned} \tag{3.15}$$

Antes de limitar a a expressão acima, observemos que:

$$\begin{aligned} &\|\nabla(f(\overline{p}) - f(p))\|_\lambda \leq \|f'(\overline{p}) - f'(p)\|_\lambda \|\nabla(p)\|_\lambda + \|f'(\overline{p})\|_\lambda \|\nabla(p - \overline{p})\|_\lambda \\ &\leq C\,\|p - \overline{p}\|_{1+\lambda} \end{aligned}$$

Agora, usando a limitação acima, (3.15) é limitada por:

$$R^2 C \,\|p - \overline{p}\|_{1+\lambda} + R^2 C\,\|p - \overline{p}\|_{1+\lambda}$$

Finalmente:

$$(iv) \leq \left(R^2 + \delta R^2\right) C\,\|p - \overline{p}\|_{1+\lambda}$$

Portanto (3.11) pode ser majorada da seguinte forma:

$$\left\| q \cdot \nabla \left( \frac{q}{n_o + \delta f(p)} \right) - \overline{q} \cdot \nabla \left( \frac{\overline{q}}{n_o + \delta f(\overline{p})} \right) \right\|_\lambda$$

$$\leq \left( R + \delta R + \delta^2 R \right) C \|q - \overline{q}\|_{1+\lambda} + \left( \delta R^2 + \delta^2 R^2 \right) C \|p - \overline{p}\|_{1+\lambda}$$

Agora, substituindo na equação (3.10) todos os resultados de limitação obtidos em (a) até (d), temos:

$$\|u - \overline{u}\|_{2+\lambda} + \left\| n_o \left( P - \overline{P} \right) \right\|_{1+\lambda} \leq \delta C \|p - \overline{p}\|_{1+\lambda} \|g_1\|_\lambda + \delta C \left( R + \|\Psi\|_{1+\lambda} \right) \|p - \overline{p}\|_{1+\lambda}$$
$$+ \left( F(n_o) \mu C_S + \delta C \left( R + \|\Psi\|_{1+\lambda} \right) \right) \|q - \overline{q}\|_{1+\lambda} + \delta R C \|p - \overline{p}\|_{1+\lambda}$$
$$+ (R + \delta R + \delta^2 R) C \|q - \overline{q}\|_{1+\lambda} + (\delta R^2 + \delta^2 R^2) C \|p - \overline{p}\|_{1+\lambda}$$

Isto é:

$$\|u - \overline{u}\|_{2+\lambda} + \left\| n_o \left( P - \overline{P} \right) \right\|_{1+\lambda} \leq (F(n_o) \mu C_S + \delta + R + \delta R + \delta^2 R) C \|q - \overline{q}\|_{1+\lambda}$$
$$+ (\delta \|g_1\|_\lambda + \delta + \delta R^2 + \delta^2 R^2 + \delta R) C \|p - \overline{p}\|_{1+\lambda}$$

Portanto nos temos:

$$\|u - \overline{u}\|_{2+\lambda} + \left\| P - \overline{P} \right\|_{1+\lambda} \leq \frac{F(n_o) \mu C_S}{n_o} \|q - \overline{q}\|_{1+\lambda} + \left( \delta + R + \delta R + \delta^2 R \right) C \|q - \overline{q}\|_{1+\lambda}$$

$$+ \left( \delta \|g_1\|_\lambda + \delta + R^2 + \delta^2 R^2 + \delta R \right) C \|p - \overline{p}\|_{1+\lambda}$$

Desta forma, como $\dfrac{\mu C F(n_o)}{n_o} < 1$ então se $\|g_1\|_\lambda$ for pequena o suficiente, podemos escolher $\delta$ e $R$ suficientemente pequenos de modo que:

$$\frac{F(n_o) \mu C_S}{n_o} + \left( \delta + R + \delta R + \delta^2 R \right) C < 1$$

$$\left( \delta \|g_1\|_\lambda + \delta + \delta R^2 + \delta^2 R^2 + \delta R \right) C < 1$$

Então o operador $A$ será uma contração e teremos somente um ponto fixo $(u, p)$ em:

$$B[0, R] \times B[0, R] \subset \left( \mathcal{H}^{1+\lambda}(Q_T) \right)^d \times \mathcal{H}^{1+\lambda}(Q_T)$$

que será a solução do problema (0.1) com $n = n_o + \delta f(p)$ e com a condição inicial e condição de fronteira satisfeitas. □

# Bibliografia


[1] R.A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.

[2] H. Brezis. Analyse fonctionnelle - Théorie et applications. 2 tirage, Masson, 1987.

[3] J.K. Hale. Ordinary Diferential Equations, Wiley-Interscience, 1969.

[4] J.G. Heywood, The Navier-Stokes equations: On the existence, regularity and decay of solutions, Indiana University journal, Vol 29, number 5, 1980, pág. 639-681.

[5] J.G. Heywood, Classical solutions of the Navier-Stokes equation, Lecture notes in mathematics 771 - Aproximation methods for Navier-Stokes problem.

[6] J.G. Heywood, R. Rannacher, Finite element aproximation of the nonstationary Navier-Stokes problem. I- Regularity of solutions and second-order error estimates for spatial discretization, SIAM, J. Numer. anal., Vol.19, N.2, pág. 275-211, 1982.

[7] J. Prieus Du Plessis and J.H. Masliyah, Flow through isotropic granular porous media, Transport in porous media, number 6, pág. 207-221, 1991.

[8] R. Rautmann, On the convergence rate of nonstationary Navier-Stokes aproximation. Lecture notes in mathematics 771, Springer Verlag Pág. 425-449, 1979

[9] V.A. Solonnikov, Estimates for solutions of nonstationary Navier-Stokes equations, Journal of Soviet Mathematics, Vol. 8, number 4, pág. 467-529, 1977.

[10] R. Temam, Navier-Stokes equations-Theory and numerical analysis (revised edition). North-Holland Publ. comp., Amsterdam, 1979.

[11] W. von Wahl. The Equations of Navier-Stokes and Abstract Parabolic Equations, Fried. Vieweg & Sons, Braunschweig/Wiesbaden, 1985.