o aut.

ZURITA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MEDIDAS VETORIAIS E REPRESENTAÇÃO DE OPERADORES

JÉSSICA RUTH GAVIA ZURITA

ORIENTADOR: PROF. DR. RAYMUNDO LUIZ ALENCAR

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de mestre.

Z89m

13215/BC

TÍTULO DA TESE

MEDIDAS VETORIAIS E REPRESENTAÇÃO DE OPERADORES

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pela Srta. JÉSSICA RUTH GAVIA ZURITA e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 19 de Novembro de 1990.

Prof. Dr. Rogério L. de A.
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE EM MATEMÁTICA.

Bo/10/1129

À Maria, minha mãe

INDICE

<u>Introdução</u>	4
<u>Capítulo I</u> - Medida e Integração Vetorial	1
<u>Capítulo II</u> - Representação de funcionais sobre $C(K, X)$ e operadores sobre $C(K)$	37
<u>Capítulo III</u> - Caracterização de $L^1_B(F)$, com F medida vetorial	64
<u>Bibliografía</u>	75

AGRADECIMENTOS

- 00 Ao *Raymundo* pela orientação, paciência e amizade.
- 00 Ao Professor *Klaus Floret* pelas valiosas sugestões feitas e pela sua ajuda neste trabalho.
- 00 Ao *CAPES* e *CNPq* pelo auxílio financeiro.
- 00 A minha mãe pelo apoio e carinho dedicado. À *Patty, Alejandro*, e a meus sobrinhos *Daniel* e *Catalina*.
- 00 Aos amigos *Rosane, Emilia, Eugenia, Sergio, Gustavo*, e ao *Filidor*, pela amizade e companherismo.
- 00 À *Dirce, Leni, Edna* e *Cidinha* pela amizade.
- 00 Acima de tudo a *Deus* pela direção e sustentação da minha vida.

INTRODUÇÃO

A teoria das Medidas a valores vetoriais, mais que uma generalização formal, tem hoje importantes aplicações. Por exemplo, no estudo da Teoria dos Espaços de Banach, os teoremas de Radon-Nikodym para integral de Bochner, o teorema de Orlicz-Pettis, a teoria de Representação de operadores sobre espaços de funções e muitos outros resultados mostram esta importância.

Nesta dissertação, fazemos um estudo das Medidas Vetoriais e teorias de Integração Vetorial, direcionado à suas aplicações na representação de operadores e funcionais sobre espaços de funções.

O Capítulo I, versa sobre Medidas Vetoriais e conceitos associados. Também apresentamos os principais resultados das teorias de integração vetorial segundo Bartle e Bochner.

O Capítulo II, trata de duas aplicações das Medidas Vetoriais na Representação de aplicações lineares sobre espaços de funções contínuas, sendo centrais o Teorema de Bartle-Dunford-Schwartz ([4]) e o Teorema de Singer ([17]).

No Capítulo III, estudamos uma caracterização do dual do espaço de funções reais integráveis com relação a uma medida vetorial. Esta caracterização sendo um espaço do tipo L^∞ , conforme ao caso clássico. Este estudo é baseado no trabalho ([12]) de Egghe .

Neste trabalho, além da preocupação de estudar a Teoria da Medida e Integração em níveis mais gerais tentamos escrever um texto acessível a um leitor familiarizado com os tópicos básicos em Teoria da Medida escalar, Topologia Geral e Análise Funcional.

CAPÍTULO I

MEDIDA E INTEGRAÇÃO VETORIAL

I. 1. Introdução

Neste capítulo estamos interessados em estudar duas teorias de integração vetorial: a Integral bilinear de Bartle e a Integral de Bochner. Estas generalizam a teoria clássica de Lebesgue, no sentido de considerar funções e medidas a valores em espaços de Banach.

Inicialmente, no item I.2 introduzimos as medidas vetoriais, suas propriedades, vemos alguns exemplos, e conceitos relativos. Destacamos que surgem conceitos próprios das medidas vetoriais,

que não têm seu análogo na teoria das medidas escalares.

Em I.3, estudamos a teoria de Integração Bilinear de Bartle para funções a valores vetoriais com respeito a uma medida vetorial, sob hipóteses adequadas às posteriores aplicações. Neste item, vemos mediante exemplos, que em geral as extensões de alguns resultados clássicos, como o Teorema da Convergência Dominada, falham.

Esta teoria pode ser desenvolvida em níveis mais gerais (ver [2]), porém não são adequados aos objetivos deste trabalho.

Em I.4, apresentamos a Integral de Bochner de uma função a valores vetoriais com respeito a uma medida escalar. Esta integral se define sob condições mais fortes e portanto apresenta melhores propriedades que a anterior. Finalizamos este parágrafo com o desenvolvimento do conceito de espaço L^p .

1. 2. Medidas vetoriais

Seja Ω um conjunto não vazio, diremos que uma coleção Σ de subconjuntos de Ω é uma σ -álgebra se satisfaz as condições abaixo:

(i) $\phi, \Omega \in \Sigma$.

(ii) Se $A \in \Sigma$, então $\Omega \setminus A \in \Sigma$.

(iii) Se (A_n) é uma sequência de elementos de Σ então

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma.$$

No que segue X, Y, Z denotam espaços de Banach, e Σ representa uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω .

Definição 1.1.

Uma aplicação de conjuntos $F: \Sigma \rightarrow X$ é chamada medida vetorial finitamente aditiva, ou simplesmente medida vetorial se dados elementos disjuntos $A, B \in \Sigma$ então,

$$F(A \cup B) = F(A) + F(B).$$

Além disso, F é dita medida vetorial σ -aditiva, se para toda sequência (A_n) de elementos disjuntos de Σ , temos:

$$F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F(A_n), \quad \text{na norma de } X, \text{ ou seja:}$$

$$\lim_n \left\| F\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) - \sum_{i=1}^n F(A_i) \right\| = 0.$$

Algumas propriedades elementares das medidas escalares, continuam sendo válidas para medidas vetoriais, tais como:

(i) $F(\emptyset) = 0$.

(ii) $F(A \setminus B) = F(A) - F(B)$, $A, B \in \Sigma$, $A \subseteq B$.

(iii) Se (A_n) é uma sequência crescente $(A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots)$ de elementos de Σ , então $F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_i F(A_i)$.

(iv) Se (A_n) é uma sequência decrescente de elementos de Σ , então $F\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_i F(A_i)$.

Exemplos 1.2.

(a) Uma medida vetorial, que não é σ -aditiva

Sejam $\Omega = [0,1]$,

$\Sigma = \sigma$ -álgebra dos conjuntos Lebesgue mensuráveis em $[0,1]$,

$\mu =$ medida de Lebesgue em $[0,1]$,

$L_\infty(\mu)$ = espaço de Banach clássico das funções $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, μ -mensuráveis e essencialmente limitadas. Sendo a norma dada por $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} \text{ess } |f(t)|$.

Defina a aplicação $F: \Sigma \rightarrow L_\infty(\mu)$ como $F(A) = \chi_A$, onde χ_A representa a função característica de A .

Claramente, F é uma medida vetorial finitamente aditiva, mas F não é σ -aditiva. De fato, seja (A_n) uma sequência disjunta de conjuntos não vazios de Σ e chamemos $B_n = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i$, então

$$\|F(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) - \sum_{i=1}^n F(A_i)\|_\infty = \|F(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i)\|_\infty = \|\chi_{B_n}\|_\infty = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, $\lim_n \|F(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) - \sum_{i=1}^n F(A_i)\|_\infty \neq 0$.

(b) Uma medida vetorial σ -aditiva

Sejam Ω, Σ, μ como no exemplo anterior e $L_1(\mu)$ o espaço de Banach clássico das funções Lebesgue integráveis. Sejam X um espaço de Banach qualquer e $T \in \mathcal{L}(L_1(\mu), X)$.

Para cada $E \in \Sigma$ definamos $F: \Sigma \rightarrow X$, como $F(A) = T(\chi_A)$.

Pela linearidade de T , é fácil ver que F é uma medida vetorial. Além disso, mostraremos que F é σ -aditiva.

Com efeito, seja uma sequência (A_n) de elementos disjuntos de Σ , se chamarmos $B_n = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i$ então

$$\|F(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) - \sum_{i=1}^n F(A_i)\| = \|F(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i)\| = \|T(\chi_{B_n})\| \leq \|T\| \mu(B_n).$$

Desde que μ é σ -aditiva, $\lim_n \|F(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i) - \sum_{i=1}^n F(A_i)\| = 0$.

Definição 1.3.

Seja $F: \Sigma \rightarrow X$ uma medida vetorial. A variação de F é a função de conjuntos $|F|: \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ definida como,

$$|F|(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \|F(A_i)\| \right\}, \quad A \in \Sigma,$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições $\{A_1, \dots, A_n\}$ de A , em um número finito de elementos de Σ .

Diremos que F é de variação limitada, se $|F|(\Omega) < \infty$.

Proposição 1.4.

A variação de uma medida vetorial $F: \Sigma \rightarrow X$, tem as seguintes propriedades:

(a) $|F|$ é uma medida aditiva, escalar e não negativa.

(b) Se $|F|(\Omega) < \infty$ então, $|F|$ é σ -aditiva se, e somente se, F é σ -aditiva.

(c) $\|F(A)\| \leq |F|(A)$, $\forall A \in \Sigma$.

Para as provas destas propriedades ver [10], página 33.

Outra função de conjuntos associada a uma medida vetorial é a semivariação. O conceito de semivariação está diretamente relacionado com o estudo da teoria de integração bilinear relativamente a medidas vetoriais.

Para o desenvolvimento desta teoria em maior grau de generalidade, onde por exemplo a função integrando assume valores num espaço de Banach Y , se faz necessário assumir a existência de uma aplicação bilinear contínua, definida em $X \times Y$ tomando valores num espaço vetorial Z , contornando a natural dificuldade de "multiplicar" elementos de espaços diferentes que não possuam estrutura para tal.

Como o nosso propósito é estudar alguns teoremas de representação de operadores lineares, introduzimos aqui apenas os conceitos relacionados com o tipo de integração envolvidos com aqueles teoremas.

Observação 1.5.

No que segue vamos a indicar por X e Y espaços de Banach nas condições: X é um espaço qualquer e Y é o corpo dos escalares ou Y é o dual topológico de X , ou vice-versa.

Assim, de uma maneira natural contamos com uma aplicação bilinear, contínua, definida sobre $X \times Y$, a saber: a multiplicação por escalar ou a avaliação funcional. Em ambos casos, denotamos esta aplicação pelo símbolo $."$, e por Z a seu respectivo contradomínio.

Definição 1.6.

Sejam X, Y espaços de Banach conforme à observação anterior, e seja $F: \Sigma \rightarrow X$ uma medida vetorial. A semivariação de F é a função de conjuntos $\|F\|: \Sigma \rightarrow [0, \infty]$, dada por:

$$\|F\|(A) = \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot F(A_i) \right\| \right\},$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições finitas $\{A_1, \dots, A_n\}$ de A , em elementos de Σ e sobre todas as coleções $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ de elementos de Y , tais que $\|\gamma_i\| \leq 1$.

Diremos que F tem semivariação limitada, se $\|F\|(\Omega) < \infty$.

Proposição 1.7.

A semivariação de uma medida vetorial $F: \Sigma \rightarrow X$, tem as seguintes propriedades:

(a) $\|F\|$ é monótona.

(b) $\|F\|$ é subaditiva, isto é: se dados conjuntos disjuntos $A, B \in \Sigma$ então $\|F\|(A \cup B) \leq \|F\|(A) + \|F\|(B)$.

(c) Se F é σ -aditiva então, $\|F\|$ é σ -subaditiva, isto é: dada uma sequência (A_n) de elementos disjuntos de Σ , temos que

$$\|F\|\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|F\|(A_i).$$

(d) $\forall A \in \Sigma \quad \sup \{ \|F(E)\| \mid E \in \Sigma, E \subseteq A \} \leq \|F\|(A) \leq |F|(A)$.

Para as demonstrações ver [10], página 52.

No caso $Y = \mathbb{C}$, a semivariação tem ainda as seguintes propriedades:

Proposição 1.8.

Sejam $F: \Sigma \rightarrow X$ uma medida vetorial, e $A \in \Sigma$, então

$$(i) \|F\|_K(A) = \sup \{ |x^* F|(A) / x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \}.$$

$$(ii) \sup \{ \|F(E)\| / E \in \Sigma, E \subseteq A \} \leq \|F\|_K(A) \leq 4 \sup \{ \|F(E)\| / E \in \Sigma, E \subseteq A \}.$$

Demonstração:

(i) Sejam $\{A_1, \dots, A_n\}$ uma partição de A em elementos de Σ , e $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ uma coleção de escalares tais que $|\alpha_i| \leq 1$.

Seja $x^* \in X^*$, $\|x^*\| \leq 1$ então,

$$|x^*(\sum_{i=1}^n \alpha_i F(A_i))| = |\sum_{i=1}^n \alpha_i x^* F(A_i)| \leq \sum_{i=1}^n |x^* F(A_i)| \leq |x^* F|(A).$$

$$\text{Logo, } \|\sum_{i=1}^n \alpha_i F(A_i)\| \leq \sup \{ |x^* F|(A) / x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \}.$$

$$\text{Assim, temos que } \|F\|_K(A) \leq \sup \{ |x^* F|(A) / x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \}.$$

Para provar a desigualdade contrária considere a função sinal, dada por $\text{sgn}(x) = e^{-i(\arg x)}$, $x \in \mathbb{C}$. Note que $|\text{sgn}(x)| = 1$ e que $|x| = \text{sgn}(x) \cdot x$, $x \in \mathbb{C}$.

Se $x^* \in X^*$, $\|x^*\| \leq 1$, então

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x^* F(A_i)| &= \sum_{i=1}^n \text{sgn}(x^* F(A_i)) \cdot x^* F(A_i) = x^*(\sum_{i=1}^n \text{sgn}(x^* F(A_i)) \cdot F(A_i)) \\ &\leq \|\sum_{i=1}^n \text{sgn}(x^* F(A_i)) \cdot F(A_i)\| \leq \|F\|_K(A). \end{aligned}$$

Se tomamos o supremo sobre todas as partições $\{A_1, \dots, A_n\}$ de A , obtemos $|x^* F|(A) \leq \|F\|_K(A)$.

$$\text{Consequentemente, } \sup \{ |x^* F|(A) / x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \} \leq \|F\|_K(A).$$

(d) A primeira desigualdade resulta da monotonicidade da semivariação.

Por outro lado, para cada medida escalar x^*F temos, $|x^*F|(A) \leq 4 \sup \{|x^*F(E)| / E \in \Sigma, E \subseteq A\}$ (ver [11], página 97).

Logo, por (d) resulta $\|F\|(A) \leq 4 \sup \{\|F(E)\| / E \in \Sigma, E \subseteq A\}$. $\square$

Nota: Se temos uma medida vetorial $F: \Sigma \rightarrow X^*$, então adequando demonstração de 1.8(d), é possível provar que a semivariação está dada por

$$\|F\|(A) = \sup \{|x \circ F|(A) / x \in X, \|x\| \leq 1\}, \quad A \in \Sigma,$$

note que estamos considerando $x \in X \subseteq X^{**}$.

Exemplos 1.9.

(a) Uma medida vetorial de variação limitada

Considere a medida vetorial σ -aditiva $F: \Sigma \rightarrow X$ dada no exemplo 1.2(b). Vejamos que F tem variação limitada:

Seja $\{A_1, \dots, A_n\}$ uma partição de $[0,1]$ em elementos de Σ , então $\sum_{i=1}^n \|F(A_i)\| = \sum_{i=1}^n \|T(\chi_{A_i})\| \leq \sum_{i=1}^n \|T\| \mu(A_i) \leq \|T\| \mu([0,1]) = \|T\|$.

Assim obtemos que, $|F|([0,1]) \leq \|T\| < \infty$.

(b) Uma medida vetorial de semivariação limitada, mas com variação não limitada

Seja $F: \Sigma \rightarrow L_\infty(\mu)$ a medida dada no exemplo 1.2(a). Veremos que F tem semivariação limitada.

Sejam $x^* \in L_\infty(\mu)^*$, $\|x^*\| \leq 1$ e $\{A_1, \dots, A_n\}$ uma partição de $[0,1]$ em elementos de Σ , logo:

$$\sum_{i=1}^n |x^*(F A_i)| = \sum_{i=1}^n |x^*(\chi_{A_i})| = \sum_{i=1}^n \text{sgn}(x^*(\chi_{A_i})) x^*(\chi_{A_i}) =$$

$$x^*\left(\sum_{i=1}^n \text{sgn}(x^*(\chi_{A_i})) \chi_{A_i}\right) \leq \left\| \sum_{i=1}^n \text{sgn}(x^*(\chi_{A_i})) \chi_{A_i} \right\|_\infty =$$

$$\sup_{t \in [0,1]} \left| \sum_{i=1}^n \text{sgn}(x^*(\chi_{A_i})) \chi_{A_i}(t) \right| = 1.$$

Então, $\|F\|K([0,1]) = \sup \{ |x^*(F([0,1]))| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \} \leq 1.$

Mas F não tem variação limitada, pois se $\{A_1, \dots, A_n\}$ é uma partição de $[0,1]$ em elementos não vazios de Σ então,

$$|F|([0,1]) \geq \sum_{i=1}^n \|F A_i\| = \sum_{i=1}^n \|\chi_{A_i}\|_\infty = n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, $|F|([0,1]) = \infty.$

I. 3. Integral Bilinear de Bartle

Sejam X, Y e Z espaços de Banach. No sentido mais geral, esta teoria estuda a integração de funções a valores em Y com respeito a uma medida vetorial a valores em X .

O desenvolvimento tipo Lebesgue desta teoria, faz necessário supor a existência de uma aplicação bilinear, contínua, definida em $X \times Y$, a valores num espaço de Banach Z . Neste nível de generalidade várias propriedades da integral de Lebesgue são válidas, como os teoremas de Convergência de Vitali e de Convergência Limitada, embora a extensão natural do teorema da Convergência Dominada (TCD)

falha.

Como já mencionamos para os nossos propósitos basta considerar dois tipos de aplicações bilineares contínuas: a multiplicação por escalar e a avaliação funcional. Assim, no que segue consideramos os espaços X , Y e Z conforme à observação 1.5.

A seguir introduzimos alguns conceitos básicos da teoria da Medida vetorial.

Sejam $F: \Sigma \rightarrow X$ uma medida vetorial e (f_n) uma sequência de funções definidas em Ω com valores em Y . Diremos que,

(i) Um conjunto $A \in \Sigma$ é F-nulo se $\|F(A)\| = 0$.

(ii) (f_n) converge pontualmente F-quase sempre (F-q.s.) se existe um conjunto F-nulo N , tal que (f_n) converge pontualmente em $\Omega \setminus N$.

(iii) (f_n) converge uniformemente F-quase sempre se (f_n) converge uniformemente no complementar de um conjunto F-nulo.

(iv) Uma função $f: \Omega \rightarrow Y$ é F-essencialmente limitada sobre $A \in \Sigma$, se existe um conjunto F-nulo N , tal que f é limitada em $A \setminus N$. Neste caso definimos o supremo essencial de f sobre A como,

$$\sup_{t \in A} \text{ess} \|f(t)\| = \inf_N \sup_{t \in A \setminus N} \|f(t)\|.$$

(v) Uma função $f: \Omega \rightarrow Y$ é chamada simples, se f assume apenas um número finito de elementos de Y , $\{y_1, \dots, y_n\}$, de tal modo que $f^{-1}(y_i) \in \Sigma$. Note que f admite a representação $f = \sum_{i=1}^n y_i \chi_{A_i}$, com $A_i \in \Sigma$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ chamada forma canônica.

Denotamos por $\mathcal{G}_Y(\Sigma)$ ao espaço vetorial das funções simples a valores em Y , com as operações habituais.

Definição 1.10.

Sejam $F: \Sigma \rightarrow X$ uma medida vetorial, $f: \Omega \rightarrow Y$ uma função simples dada na forma canônica e $E \in \Sigma$, definimos a integral de f sobre E como,

$$\int_E f \cdot F(dt) = \sum_{i=1}^n y_i \cdot F(A_i \cap E).$$

$\int_E f \cdot F(dt)$ é um elemento bem definido de Z (i.é. independe da representação de f). Para a prova deste fato ver [10], página 108.

Vejamos algumas propriedades básicas derivadas desta definição.

Proposição 1.11.

Se F é uma medida vetorial, então a integral de uma função simples satisfaz,

(a) Para cada $E \in \Sigma$, a aplicação $f \in \mathcal{G}_Y(\Sigma) \rightarrow \int_E f \cdot F(dt)$ é linear.

(b) Para cada $f \in \mathcal{G}_Y(\Sigma)$, a aplicação de conjuntos $E \in \Sigma \rightarrow \int_E f \cdot F(dt)$, define uma medida vetorial, a qual é σ -aditiva quando F é σ -aditiva.

(c) Se $f \in \mathcal{G}_Y(\Sigma)$ e $E \in \Sigma$ então, $\|\int_E f \cdot F(dt)\| \leq \sup_{t \in \Omega} \|f(t)\| \cdot |F|(K \cap E)$.

Se F é de variação limitada temos, $\|\int_E f \cdot F(dt)\| \leq \int_E \|f\| |F|(dt)$.

Demonstração:

Para provar (a) e (b) basta trocarmos a multiplicação no corpo escalar pela aplicação bilinear " $\cdot$ ": $X \times Y \rightarrow Z$, e o módulo pela norma em Z , nas demonstrações clássicas.

(a) Sejam $f = \sum_{i=1}^n y_i \chi_{A_i} \in \mathcal{G}_Y(\Sigma)$, e $E \in \Sigma$.

A primeira desigualdade é óbvia se $f \equiv 0$. Então supondo $f \neq 0$ e chamando $M = \sup_{t \in \Omega} \|f(t)\| > 0$ temos,

$$\left\| \int_E f \cdot F(dt) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n y_i \cdot F(A_i \cap E) \right\| = M \left\| \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{M} \cdot F(A_i \cap E) \right\| \leq M \|F\|K\Omega.$$

Por outro lado, $\left\| \int_E f \cdot F(dt) \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|y_i\| \|F(A_i \cap E)\| \leq \sum_{i=1}^n \|y_i\| |F|(A_i \cap E) = \int_E \|f\| |F|(dt)$, o que prova a segunda desigualdade. $\square$

A seguir assumimos que $F: \Sigma \rightarrow X$ é uma medida vetorial σ -aditiva, de variação limitada. Vamos estender a noção de integral a uma classe maior de funções. Uma classe natural a considerar é a classe das funções que podem ser aproximadas por funções simples, isto leva a introduzir o conceito de função mensurável.

Definição 1.12

(a) A função $f: \Omega \rightarrow Y$ é F-mensurável com respeito a F se existe uma sequência de funções em $\mathcal{G}_Y(\Sigma)$ que converge a f F -q.s.

(b) A função $f: \Omega \rightarrow Y$ é dita totalmente mensurável se existe uma sequência de funções em $\mathcal{G}_Y(\Sigma)$ que converge

uniformemente a f .

Denotaremos por $\mathcal{M}_Y(\Sigma)$ o espaço vetorial das funções $f: \Omega \rightarrow Y$ totalmente mensuráveis, com as operações usuais. Se Y é o corpo escalar, usamos a notação $\mathcal{M}(\Sigma)$.

Definição 1.13.

Seja $F: \Sigma \rightarrow X$ uma medida vetorial σ -aditiva, de variação limitada. Diremos que uma função $f: \Omega \rightarrow Y$ é Bartle integrável com respeito a F , se existe uma sequência (f_n) de funções simples em $\mathcal{S}_Y(\Sigma)$ satisfazendo,

(D) (f_n) converge pontualmente a f F -q.s..

(U) Para cada $A \in \Sigma$, a sequência de integrais $\lambda_n(A) = \int_A f_n \cdot F(dt)$ converge na norma de Z .

O limite da sequência $(\lambda_n(A))_n$ é independente da sequência de funções (f_n) , conforme provamos abaixo. Este limite é denotado por $\int_A f \cdot F(dt)$ e é chamado integral de Bartle de f sobre A .

Para provar que $\int_A f \cdot F(dt)$ é bem definido faremos uso do seguinte teorema que é uma extensão de um teorema clássico.

Teorema 1.14 (teorema de Vitali-Hahn-Saks)

Sejam $\mu: \Sigma \rightarrow \mathbb{K}$ uma medida escalar e (λ_n) uma sequência de medidas vetoriais definidas sobre Σ a valores num espaço de Banach Z , nas seguintes condições,

(d) $\lim_{|\mu|(A) \rightarrow 0} \lambda_n(A) = 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

(e) $\lim_n \lambda_n(A)$ existe para cada $A \in \Sigma$.

Então, $\lim_{|\mu|(A) \rightarrow 0} \lambda_n(A) = 0$, uniformemente para $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Ver [11], página 158.

Lema 1.15

Se uma sequência de funções simples $f_n: \Omega \rightarrow Y$ satisfaz (d) da definição acima, então

$$\lim_{|F|(A) \rightarrow 0} \lambda_n(A) = 0, \quad \text{uniformemente para } n \in \mathbb{N}.$$

Frequentemente esta propriedade é enunciada dizendo que a sequência (λ_n) é uniformemente absolutamente contínua com respeito a $|F|$.

Demonstração:

Em consequência da proposição 1.11(c) temos que,

$$\lim_{|F|(A) \rightarrow 0} \int_A f_n \cdot F(dt) = 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N} \quad (*)$$

Também temos que, $\lim_n \int_A f_n \cdot F(dt)$ existe para cada $A \in \Sigma$.

Logo, pelo teorema de Vitali-Hahn-Saks para medidas vetoriais temos que o limite (*) é uniforme para $n \in \mathbb{N}$. $\square$

A seguir enunciamos o teorema de Egoroff para funções a valores vetoriais.

Teorema 1.16 (teorema de Egoroff)

Seja $\nu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ uma medida σ -aditiva e não negativa. Se $f_n : \Omega \rightarrow Y$ é uma sequência de funções ν -mensuráveis, convergente pontualmente a f , então dado $\varepsilon > 0$ existe $A \in \Sigma$, com $\nu(A) < \varepsilon$ tal que (f_n) converge uniformemente a f em $\Omega \setminus A$.

Demonstração: Basta trocar módulo por norma na demonstração clássica.

Proposição 1.17

Seja $f : \Omega \rightarrow Y$ Bartle integrável com respeito a F . Então a integral de f sobre A , está bem definida.

Demonstração:

Vamos supor primeiro que $f \equiv 0$. Neste caso, se (f_n) é uma sequência de funções simples nas condições da definição 1.13 afirmamos que $\lim_n \lambda_n(A) = 0$, onde $\lambda_n(A) = \int_A f_n \cdot F(d\omega)$. (1)

Com efeito, pelo lema 1.15 temos que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $|F|(E) < \delta$, então $\|\lambda_n(E)\| < \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$. (2)

Usando o teorema de Egoroff com $\nu = |F|$ obtemos um conjunto $N \in \Sigma$ com $|F|(N) < \delta$ e de modo que (f_n) converge uniformemente a zero sobre $\Omega \setminus N$.

Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{|F|(\Omega)}$, $\forall n \geq n_0$, $\forall t \in \Omega \setminus N$.

Como a proposição 1.11(c) garante que $\|\lambda_n(A \setminus N)\| \leq \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$, e em vista de (2) temos $\|\lambda_n(N)\| < \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então segue que

$$\|\lambda_n(A)\| < \|\lambda_n(A \setminus N)\| + \|\lambda_n(N)\| < 2\varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Isto prova a afirmação (1), em outras palavras o limite da sequência $(\lambda_n(A))$ independe da sequência de funções (f_n) .

No caso $f \neq 0$ é fácil ver que a integral de Bartle de f sobre A está bem definida, pois se (f_n) e (g_n) são sequências de funções simples satisfazendo as condições (i) e (ii) da definição 1.13, reduzimos ao caso anterior tomando $h_n = f_n - g_n$. $\square$

Observação 1.18

Nas condições da definição 1.13 a demonstração anterior mostra que $\lim_n \lambda_n(A)$ é uniforme para $A \in \Sigma$. Isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\forall n, m \geq n_0, \forall A \in \Sigma \|\lambda_n(A) - \lambda_m(A)\| < \varepsilon$.

Denotaremos por $\mathfrak{L}_B(F, Y)$ a classe das funções $f: \Omega \rightarrow Y$, Bartle integráveis com respeito à medida vetorial $F: \Sigma \rightarrow X$. Se $Y = \mathbb{R}$ escrevemos $\mathfrak{L}_B(F)$. Notemos que $\mathfrak{L}_B(F, Y)$ é um espaço vetorial com as operações habituais.

Proposição 1.19

Se $F: \Sigma \rightarrow X$ é uma medida vetorial σ -aditiva, de variação limitada, então a integral de Bartle com respeito a F tem as seguintes propriedades:

(a) Para cada $A \in \Sigma$ a aplicação $f \in \mathfrak{L}_B(F, Y) \rightarrow \int_A f \cdot F(dt)$ é um operador linear.

(b) Para cada $f \in \mathfrak{L}_B(F, Y)$, a aplicação de conjuntos $A \in \Sigma \rightarrow \int_A f \cdot F(dt)$ é uma medida vetorial (ou escalar) σ -aditiva.

(c) Se $f: \Omega \rightarrow Y$ é F -mensurável e F -essencialmente limitada sobre Ω e $A \in \Sigma$ então,

$$f \in \mathcal{L}_B(F, Y) \quad \text{e} \quad \left\| \int_A f \cdot F(dt) \right\| \leq \sup_{t \in \Omega} \text{ess} \|f(t)\| \|F\|K(A).$$

(d) Se $f \in \mathcal{L}_B(F, Y)$ então $\lim_{|F|(A) \rightarrow 0} \int_A f \cdot F(dt) = 0$.

(e) Seja $Y=K$. Se $f \in \mathcal{L}_B(F, Y)$, $A \in \Sigma$ e $T \in \mathcal{L}(X, Z)$, então f é Bartle integrável com relação à medida vetorial $T \cdot F$ e $T(\int_A f \cdot F(dt)) = \int_A f \cdot T \cdot F(dt)$.

Demonstração:

(a) e (b) são conseqüências da validade dessas asserções para funções simples.

(c) Primeiro provaremos que f é Bartle integrável. Como f é F -mensurável podemos tomar uma seqüência de funções simples (f_n) que converge pontualmente a f , F -q.s.

Sejam, $M = \sup_{t \in \Omega} \text{ess} \|f(t)\|$ e $N=M+1$.

Definimos a seqüência $f_n^N(t) = \begin{cases} f_n(t), & \text{se } \|f_n(t)\| \leq N. \\ 0, & \text{se } \|f_n(t)\| > N. \end{cases}$

Afirmamos que (f_n^N) converge pontualmente a f , F -q.s. De fato, seja S o conjunto F -nulo, tal que (f_n) convirja pontualmente a f em $\Omega \setminus S$.

Dado um número positivo $\varepsilon < 1$ e $t \in \Omega \setminus S$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_{n_0}(t) - f(t)\| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$.

Desde que $\|f_n(t)\| \leq \|f_n(t) - f(t)\| + \|f(t)\| < M + 1 = N$,
 $\forall n \geq n_0$, temos que $f_n^N(t) = f_n(t)$, $\forall n \geq n_0$.

Logo $\|f_n^N(t) - f(t)\| = \|f_n(t) - f(t)\| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$, o que
 prova a afirmação.

Agora, pelo teorema de Egoroff, dado $\eta > 0$ existe $S \in \Sigma$ com
 $|F|(S) < \eta$ tal que a sequência (f_n^N) converge uniformemente em $\Omega \setminus S$.

Logo,

$$\left\| \int_A (f_n^N - f_m^N) \cdot F(dt) \right\| \leq \left\| \int_{A \setminus S} (f_n^N - f_m^N) \cdot F(dt) \right\| +$$

$$\left\| \int_S (f_n^N - f_m^N) \cdot F(dt) \right\| \leq \int_{A \setminus S} \|f_n^N - f_m^N\| |F|(dt) + 2N\eta.$$

Segue que, $(\int_A f_n^N \cdot F(dt))_n$ é uma sequência de Cauchy e
 portanto converge em Z .

Assim, a condição (ii) da definição 1.13 é satisfeita,
 portanto f é Bartle integrável.

Em segundo lugar, sejam $\delta > 0$ e (f_n^N) a sequência de funções
 simples (f_n^N) tal que $N=M+\delta$.

Logo,

$$\left\| \int_A f \cdot F(dt) \right\| \leq \left\| \int_A (f - f_n^N) \cdot F(dt) \right\| + \left\| \int_A f_n^N \cdot F(dt) \right\| \leq$$

$$\left\| \int_A (f - f_n^N) \cdot F(dt) \right\| + (M+\delta) \|F\|K(A), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ obtemos, $\left\| \int_A f \cdot F(dt) \right\| \leq (M+\delta) \|F\|K(A).$

Como $\delta > 0$ é arbitrário, então $\left\| \int_A f \cdot F(dt) \right\| \leq M \|F\|K(A).$

(d) Seja (f_n) a sequência de funções simples dada na
 definição 1.13.

Seja $\varepsilon > 0$, pela observação 1.18 podemos escolher $n_0 \in \mathbb{N}$ tal
 que $\left\| \int_A (f - f_{n_0}) \cdot F(dt) \right\| < \varepsilon$, $\forall A \in \Sigma$.

Além disso temos $\|\int_A f_{n_0} \cdot F(dt)\| \leq \sup_{t \in \Omega} \|f_{n_0}(t)\| |F|(A)$.

Da desigualdade $\|\int_A f \cdot F(dt)\| \leq \|\int_A (f - f_{n_0}) \cdot F(dt)\| +$

$\|\int_A f_{n_0} \cdot F(dt)\|$, resulta que $\overline{\lim}_{|F|(A) \rightarrow 0} \|\int_A f \cdot F(dt)\| \leq \epsilon$.

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário concluímos que,

$$\lim_{|F|(A) \rightarrow 0} \|\int_A f \cdot F(dt)\| = 0.$$

(e) Claramente, $T \cdot F : \Sigma \rightarrow Z$ é uma medida vetorial σ -aditiva, a qual satisfaz $\|T \cdot F\|(A) \leq \|T\| |F|(A)$, $\forall A \in \Sigma$. (*)

Agora provaremos que f é Bartle integrável. Efetivamente, se (f_n) é a sequência de funções simples da definição 1.13 então, em virtude de (*) podemos dizer que (f_n) converge pontualmente a f $T \cdot F$ -q.s..

Como, $\|\int_A (f_n - f_m) \cdot T \cdot F(dt)\| = \|T \{ \int_A (f_n - f_m) \cdot F(dt) \}\| \leq \|T\| \|\int_A (f_n - f_m) \cdot F(dt)\|$, então $(\int_A f_n \cdot T \cdot F(dt))_n$ converge. Isto prova que $f \in \mathcal{L}_B(T \cdot F)$.

Por último, pela continuidade de T , segue que,

$$\int_A f \cdot T \cdot F(dt) = \lim_n \int_A f_n \cdot T \cdot F(dt) = \lim_n T \{ \int_A f_n \cdot F(dt) \} = T \left(\int_A f \cdot F(dt) \right). \quad \square$$

Ao contrário do que acontece com as funções Lebesgue integráveis, a função norma de uma função Bartle integrável não é necessariamente integrável. É o que mostra o próximo exemplo.

Exemplo 1.20

Sejam $\Omega = [0,1]$,

$\Sigma = \sigma$ -álgebra dos conjuntos Lebesgue mensuráveis,

$\mu =$ medida de Lebesgue em $[0,1]$, e

$X = Y = \mathbb{R}^2$ e $Z = \mathbb{R}$. onde a aplicação bilinear em $X \times Y$ é dada pelo produto interno usual.

Denotemos por e_1, e_2 os vetores da base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Definimos uma medida vetorial F por, $F(A) = \mu(A)e_1$ e consideramos a função $g(t) = t^{-1}e_2$.

Nestas condições, temos que $g \in \mathcal{L}_B(F, \mathbb{R}^2)$ e $\int_A g \cdot F(dt) = 0$, mas $\|g(t)\| = t^{-1}$ não é integrável com respeito a $|F| = \mu$.

A seguir estudamos a convergência no espaço $\mathcal{L}_B(F, Y)$ onde um resultado importante é a extensão do teorema clássico da Convergência de Vitali. O seguinte lema nos auxiliará na prova.

Lema 1.21

Seja $f_n: \Omega \rightarrow Y$ uma sequência de funções simples que converge pontualmente a uma função f F -q.s.. Se a sequência de integrais $\lambda_n(A) = \int_A f_n \cdot F(dt)$ é uniformemente absolutamente contínua com respeito a $|F|$, então $(\lambda_n(A))_n$ converge.

Demonstração: O resultado se segue, usando as técnicas da demonstração 1.17.

Teorema 1.22 (teorema da Convergência de Vitali)

Seja $F: \Sigma \rightarrow X$ uma medida vetorial, σ -aditiva, de variação

limitada. Se $f_n: \Omega \rightarrow Y$ é uma sequência de funções Bartle integráveis que converge a uma função $f: \Omega \rightarrow Y$ F -q.s., tal que a sequência $\lambda_n(A) = \int_A f_n \cdot F(dt)$ é uniformemente absolutamente contínua com respeito a $|F|$, então f é Bartle integrável e,

$$\int_A f \cdot F(dt) = \lim_n \int_A f_n \cdot F(dt).$$

Demonstração:

Como cada f_n é integrável, para cada n temos uma sequência de funções simples nas condições da definição 1.13. Logo, em virtude do teorema de Egoroff, existem um conjunto $N_n \in \Sigma$ com $|F|(N_n) < 2^{-n}$, e uma função simples g_n de modo que,

$$\|f_n(t) - g_n(t)\| < 2^{-n}, \quad \forall t \in \Omega \setminus N_n.$$

Sejam, $M_k = \bigcup_{i=k}^{\infty} N_i$ e $M = \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k$. Note que $\|F\|_k(M) \leq \|F\|_k(M_k) \leq$

$$\sum_{i=k}^{\infty} 2^{-i} = 2^{1-k} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \text{ logo temos que } \|F\|_k(M) = 0.$$

Afirmamos que a sequência de funções simples (g_n) converge pontualmente a f F -q.s. De fato, se $t \notin M$, então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t \notin M_{k_0}$, isto é $\|f_n(t) - g_n(t)\| < 2^{-n}$, $\forall n \geq k_0$. Logo, como $\|f(t) - g_n(t)\| \leq \|f(t) - f_n(t)\| + \|f_n(t) - g_n(t)\|$ temos que $(g_n(t))$ converge a $f(t)$, para t fora de um conjunto F -nulo.

Agora provaremos que a sequência $\nu_n(A) = \int_A g_n \cdot F(dt)$ converge na norma de Z . De fato, pela uniformidade do limite (observação 1.18) para cada n podemos tomar a função simples (g_n) satisfazendo $\|\nu_n(A) - \lambda_n(A)\| < 2^{-n}$, $\forall A \in \Sigma$. (1)

$$\text{Logo } \|\nu_n(A)\| \leq \|\lambda_n(A)\| + 2^{-n}, \quad \forall A \in \Sigma. \quad (2)$$

Desta desigualdade, e desde que $(\lambda_n(A))$ é uniformemente absolutamente contínua com respeito a $|F|$, é claro que $(\lambda_n(A))$ também tem esta propriedade. Segue-se do lema 1.21 que $(\lambda_n(A))$ converge.

$$\text{Portanto } f \text{ é Bartle integrável e } \int_A f \cdot F(dt) = \lim_n \nu_n(A). \quad (3)$$

Finalmente, aplicando (1) e (3) na desigualdade abaixo:

$$\|\int_A f \cdot F(dt) - \lambda_n(A)\| \leq \|\int_A f \cdot F(dt) - \nu_n(A)\| + \|\nu_n(A) - \lambda_n(A)\|,$$

obtemos,
$$\int_A f \cdot F(dt) = \lim_n \lambda_n(A) = \lim_n \int_A f_n \cdot F(dt). \quad \square$$

Lamentavelmente, nesta teoria não é possível estender o teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (TCD), como se verifica no exemplo seguinte.

Exemplo 1.23

Sejam, F a medida vetorial descrita no exemplo 1.20,

$$f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ a sequência dada por } f_n(t) = t^{-1+\frac{1}{n}} e_1,$$

$$g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ a função } g(t) = t^{-1} e_2, \text{ se } t \in (0,1]$$

e $g(0) = 0$.

Temos que g e cada f_n são integráveis, e $\|f_n(t)\| \leq \|g(t)\|$, $\forall t \in [0,1]$. Mas o limite da sequência (f_n) é a função $f(t) = t^{-1} e_1$, a qual não é integrável.

Em certos casos, quando por exemplo $Y = \mathbb{R}$, é válido o teorema

mencionado (ver [4]). Embora em geral não vale o TCD, existe a seguinte versão dele:

Teorema 1.24 (teorema da Convergência Dominada)

Sejam $F : \Omega \rightarrow X$ uma medida vetorial σ -aditiva, de variação limitada, e $f_n : \Omega \rightarrow Y$ uma sequência de funções Bartle integráveis com respeito a F , que converge a uma função $f : \Omega \rightarrow Y$ F -q.s..

Se existe uma função integrável g , tal que,

$$\left\| \int_A f_n \cdot F(dt) \right\| \leq \left\| \int_A g \cdot F(dt) \right\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall A \in \Sigma.$$

Então, f é Bartle integrável e,

$$\int_A f \cdot F(dt) = \lim_n \int_A f_n \cdot F(dt), \quad \forall A \in \Sigma.$$

Demonstração:

Pelo teorema de Convergência de Vitali, é suficiente provar que a sequência $\lambda_n(A) = \int_A f_n \cdot F(dt)$ é uniformemente absolutamente contínua com relação a $|F|$.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, pela proposição 1.19(D) existe $\delta > 0$ tal que $|F|(A) < \delta$ implica $\left\| \int_A g \cdot F(dt) \right\| < \varepsilon$, $\forall A \in \Sigma$.

Logo, $\left\| \int_A f_n \cdot F(dt) \right\| < \varepsilon$, $\forall A \in \Sigma$ com $|F|(A) < \delta$, e $\forall n \in \mathbb{N}$. Em outras palavras, $(\lambda_n(A))$ é uniformemente absolutamente contínua com respeito a $|F|$. $\square$

Até aqui têm sido essenciais as hipóteses de σ -aditividade e variação limitada da medida vetorial F . Queremos destacar que para definir o conceito de integral de uma função totalmente

mensurável, estas condições não são necessárias, basta que a medida vetorial seja de semivariação limitada, como vemos abaixo.

Suponhamos que $F: \Sigma \rightarrow X$ seja uma medida vetorial de semivariação limitada, isto é $\|F\|(\Omega) < \infty$.

Introduzimos no espaço $\mathcal{M}_Y(\Sigma)$ das funções $f: \Omega \rightarrow Y$ totalmente mensuráveis a topologia da convergência uniforme determinada pela norma $\|f\|_\infty = \sup_{t \in \Omega} \|f(t)\|$, $f \in \mathcal{M}_Y(\Sigma)$. Desta forma, temos que $\mathcal{M}_Y(\Sigma)$ é um espaço de Banach contendo $\mathcal{G}_Y(\Sigma)$ como um subespaço denso.

Definamos o operador $T: \mathcal{G}_Y(\Sigma) \rightarrow Z$ por $T(f) = \int_{\Omega} f \cdot F(dt)$, onde $\int_{\Omega} f \cdot F(dt)$ é dada como na definição 1.10, e portanto T está bem definido.

É fácil ver o operador T é linear e contínuo, mas ainda temos que $\|T\| = \sup \left\{ \left\| \int_{\Omega} f \cdot F(dt) \right\| / f \in \mathcal{G}_Y(\Sigma), \sup_{t \in \Omega} \|f(t)\| \leq 1 \right\} = \|F\|(\Omega)$.

Logo T tem uma única extensão linear, contínua e com igual norma, ao espaço $\mathcal{M}_Y(\Sigma)$, a qual denotaremos por $\tilde{T}$.

Definição 1.25

Sejam, $F: \Sigma \rightarrow X$ uma medida vetorial de semivariação limitada e $f: \Omega \rightarrow Y$ uma função-totalmente mensurável. Definimos a integral de f , também chamada integral elementar de Bartle de f como:

$$\int_{\Omega} f \cdot F(dt) = \tilde{T}(f).$$

Se $A \in \Sigma$, naturalmente definimos, $\int_A f \cdot F(dt) = \int_{\Omega} f \chi_A \cdot F(dt)$.

Nota: Se F é uma medida vetorial, σ -aditiva, de variação limitada, então esta integral coincide com a Integral de Bartle (definição 1.13).

Assim, se verificam as seguintes propriedades:

(i) A integral elementar de Bartle herda as propriedades de linearidade do operador $\tilde{T}$.

(ii) Para cada $f \in \mathcal{M}_Y(\Sigma)$, a aplicação $A \in \Sigma \rightarrow \int_A f \cdot F(dt)$, determina uma medida vetorial limitada. É fácil verificar esta afirmação pois ela se mantém para funções simples.

(iii) Da continuidade do operador T resulta que $\forall f \in \mathcal{M}_Y(\Sigma)$,

$$\left\| \int_{\Omega} f \cdot F(dt) \right\| \leq \|F\|(\Omega) \sup_{t \in \Omega} \|f(t)\|.$$

(iv) Se $Y = \mathbb{C}$, então $x^* \left(\int_{\Omega} f \cdot F(dt) \right) = \int_{\Omega} f x^* F(dt)$, $x^* \in X^*$, $f \in \mathcal{M}(\Sigma)$.

Desde que esta propriedade é verdadeira para funções simples, logo pela densidade de $\mathcal{S}(\Sigma)$ em $\mathcal{M}(\Sigma)$, obtemos a validade para toda $f \in \mathcal{M}(\Sigma)$.

I. 4. Integral de Bochner

Para este parágrafo, Y denotará um espaço de Banach e (Ω, Σ, μ) será um espaço de medida não negativa, finita e σ -aditiva.

Algumas definições básicas são as seguintes:

Sejam $f : \Sigma \rightarrow Y$ uma função e $f_n : \Omega \rightarrow Y$ uma sequência de funções. Diremos que :

(i) Um conjunto $N \in \Sigma$, é μ -nulo se $\mu(N) = 0$.

(ii) (f_n) converge pontualmente à f μ -quase sempre, se existe um conjunto μ -nulo N , tal que $\lim_n \|f(t) - f_n(t)\| = 0, \forall t \in \Omega \setminus N$.

(iii) (f_n) converge uniformemente à f μ -quase sempre, se existe um conjunto μ -nulo, tal que (f_n) converge uniformemente em $\Omega \setminus N$.

(iv) (f_n) converge μ -quase uniformemente à f , se dado $\varepsilon > 0$ existe um conjunto $A \in \Sigma$ com $\mu(A) < \varepsilon$ tal que (f_n) converge uniformemente à f em $\Omega \setminus A$.

(v) f é elementar se existe uma sequência (y_i) em Y e uma sequência disjunta (E_i) em Σ tais que, $f = \sum_{i=1}^{\infty} y_i \chi_{E_i}$.

Agora, apresentaremos alguns conceitos relacionados com mensurabilidade com respeito à medida escalar μ .

Definição 1.26

Seja a função $f : \Omega \rightarrow Y$. Diremos que:

(i) f é μ -mensurável se existe uma sequência de funções simples que converge pontualmente à f μ -q.s..

(ii) f é fracamente μ -mensurável se para cada $y^* \in Y^*$ a

função escalar $y^* f$ é μ -mensurável.

(iii) f tem imagem μ -essencialmente separável, se existe um conjunto $E \in \Sigma$ com $\mu(E) = 0$ e tal que $f(\Omega \setminus E)$ é um subconjunto separável de Y .

Observações 1.27 :

(a) Toda função μ -mensurável f é fracamente μ -mensurável. De fato, sejam $y^* \in Y^*$ e (f_n) uma sequência de funções simples convergindo pontualmente à f μ -q.s.. Então, $y^* f_n$ é uma função simples e desde que $\|y^* f(t) - y^* f_n(t)\| \leq \|y^*\| \|f(t) - f_n(t)\|$, temos que $(y^* f_n)_n$ converge pontualmente a $y^* f$. Portanto f é fracamente μ -mensurável.

(b) Claramente toda função simples é μ -mensurável. Além disso é fácil ver que as funções elementares também são μ -mensuráveis. Com efeito, se f é elementar, podemos representar f como, $f = \sum_{i=1}^{\infty} y_i \chi_{E_i}$ onde a sequência (E_i) em Σ é disjunta, e (y_i) é uma sequência em Y . Tomando as funções simples $f_n = \sum_{i=1}^n y_i \chi_{E_i}$, vemos que (f_n) converge pontualmente à f . Portanto f é μ -mensurável.

Proposição 1.28

A soma finita e o limite pontual μ -q.s. de funções μ -mensuráveis é μ -mensurável. Em consequência, uma série pontualmente convergente de funções μ -mensuráveis também é μ -mensurável.

Demonstração:

Claramente a soma finita de funções μ -mensuráveis é μ -mensurável.

Agora, provaremos que se (f_n) é uma sequência de funções μ -mensuráveis, que converge a uma função f μ -q.s., então f é μ -mensurável.

Com efeito, desde que cada f_n é μ -mensurável, por uma aplicação do teorema de Egoroff, temos para cada $n \in \mathbb{N}$ uma função simples g_n e um conjunto $A_n \in \Sigma$ com $\mu(A_n) < 2^{-n}$, tais que $\|f_n(t) - g_n(t)\| < 2^{-n}$, $\forall t \in \Omega \setminus A_n$.

Tomemos $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=i}^{\infty} A_n \in \Sigma$, então $\mu(A) \leq \sum_{n=i}^{\infty} \mu(A_n) \leq 2^{1-i}$,

$\forall i \in \mathbb{N}$ ou seja, $\mu(A) = 0$.

Desta forma $\lim_n \|f_n(t) - g_n(t)\| = 0$, $\forall t \in \Omega \setminus A$. (1)

Chamemos B ao conjunto μ -nulo tal que $\lim_n \|f_n(t) - f(t)\| = 0$,

$\forall t \in \Omega \setminus B$. (2)

Considere agora $N = A \cup B$. Portanto usando (1) e (2) na desigualdade, $\|f(t) - g_n(t)\| \leq \|f(t) - f_n(t)\| + \|f_n(t) - g_n(t)\|$ obtemos $\lim_n \|f(t) - g_n(t)\| = 0$, $\forall t \in \Omega \setminus N$.

Dessa forma provamos que, f é μ -mensurável. $\square$

A seguir, apresentamos dois resultados que caracterizam as funções μ -mensuráveis. A demonstração do teorema enunciado abaixo aparecem em [9], pág. 42.

Teorema 1.29 (teorema da Mensurabilidade de Pettis)

Uma função $f : \Omega \rightarrow Y$ é μ -mensurável se, e somente se,

(i) f tem imagem μ -essencialmente separável.

(ii) Para cada $y^* \in Y^*$, a função $y^* f$ é μ -mensurável.

Proposição 1.30

Uma função $f : \Omega \rightarrow Y$ é μ -mensurável se, e somente se, f é limite uniforme μ -q.s. de uma sequência de funções elementares.

A demonstração desta proposição segue da prova do teorema 1.29.

Definição 1.31

Uma função μ -mensurável $f : \Omega \rightarrow Y$ é dita Bochner integrável se existe uma sequência de funções simples $f_n : \Omega \rightarrow Y$ tais que :

$$\lim_n \int_A \|f_n - f\| \mu(dt) = 0.$$

Notamos que para todo $A \in \Sigma$, a sequência $(\int_A f_n \mu(dt))_n$ é de Cauchy em Y e portanto converge. Naturalmente aqui a integral de uma função simples está dada na forma usual (definição 1.10). Assim, podemos definir a integral de Bochner de f sobre A , como:

$$\int_A f \mu(dt) = \lim_n \int_A f_n \mu(dt).$$

Nota: É fácil ver que esta definição independe da sequência tomada, pois se tomarmos outra sequência (g_n) nas mesmas condições

de (f_n) então,

$$\left\| \int_{\mathcal{A}} (f_n - g_n) \mu(dt) \right\| \leq \int_{\mathcal{A}} \|f_n - g_n\| \mu(dt) \leq \int_{\mathcal{A}} \|f_n - f\| \mu(dt) + \int_{\mathcal{A}} \|g_n - f\| \mu(dt).$$

$$\text{Logo, } \lim_n \left\| \int_{\mathcal{A}} (f_n - g_n) \mu(dt) \right\| = 0.$$

$$\text{Ou seja, } \lim_n \int_{\mathcal{A}} f_n \mu(dt) = \lim_n \int_{\mathcal{A}} g_n \mu(dt).$$

Denotaremos por $\mathfrak{L}^1(\mu, Y)$ ao espaço das funções Bochner integráveis com relação a μ . Claramente $\mathfrak{L}^1(\mu, Y)$ é um espaço vetorial com as operações usuais.

O seguinte teorema revela que as condições de integrabilidade são mais fortes que no caso da integral de Bartle.

Teorema 1.32

Uma função μ -mensurável $f : \Omega \rightarrow Y$ é Bochner integrável se, e somente se, $\int_{\Omega} \|f\| \mu(dt) < \infty$.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Seja (f_n) a sequência de funções simples dada na definição 1.31. Notemos que $\|f(t)\| = \lim_n \|f_n(t)\|$ μ -q.s., então a função $\|f\|$ é μ -mensurável.

Assim, $\int_{\Omega} \|f\| \mu(dt) \leq \int_{\Omega} \|f - f_n\| \mu(dt) + \int_{\Omega} \|f_n\| \mu(dt) < \infty$, quando n é suficientemente grande.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $\int_{\Omega} \|f\| \mu(dt) < \infty$.

Como f é μ -mensurável, usando a proposição 1.30, obtemos uma sequência (g_n) de funções elementares com $\|f - g_n\| < \frac{1}{n}$ e em consequência, $\int_{\Omega} \|f - g_n\| \mu(dt) < \frac{\mu(\Omega)}{n}$. (1)

Seja $g_n = \sum_{m=1}^{\infty} y_{nm} \chi_{E_{nm}}$, onde (E_{nm}) é uma sequência disjunta em Σ e $y_{nm} \in Y$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ a função real $t \rightarrow \|g_n(t)\|$ é Lebesgue integrável, ou seja $\int_{\Omega} \|g_n\| \mu(dt) < \infty$. Isto pois, $\|g_n(t)\| < \|f(t)\| + \frac{1}{n}$.

Dessa forma, existe $p_n \in \mathbb{N}$ tal que se $A = \bigcup_{m=p_n+1}^{\infty} E_{nm}$, então $\int_A \|g_n\| \mu(dt) < \frac{\mu(\Omega)}{n}$.

Logo se definimos funções simples f_n como $f_n = \sum_{m=1}^{p_n} y_{nm} \chi_{E_{nm}}$, temos que $\int_{\Omega} \|f_n - g_n\| \mu(dt) = \int_A \|g_n\| \mu(dt) < \frac{\mu(\Omega)}{n}$. (2)

Por (1) e (2) resulta,

$$\int_{\Omega} \|f_n - f\| \mu(dt) \leq \int_{\Omega} \|f_n - g_n\| \mu(dt) < 2 \frac{\mu(\Omega)}{n}.$$

Isto é, $\lim_n \int_{\Omega} \|f_n - f\| \mu(dt) = 0$. Portanto f é Bochner integrável. $\square$

Na seguinte proposição mostramos algumas propriedades que possui a integral de Bochner.

Proposição 1.33

Seja $f : \Omega \rightarrow Y$ uma função Bochner integrável, então valem as seguintes propriedades:

(i) Para cada $A \in \Sigma$, a aplicação $f \in \mathcal{L}^1(\mu, Y) \rightarrow \int_A f \mu(dt)$ é linear.

$$(ii) \left\| \int_A f \mu(dt) \right\| \leq \int_A \|f\| \mu(dt), \quad \forall A \in \Sigma.$$

$$(iii) \lim_{\mu(A) \rightarrow 0} \int_A f \mu(dt) = 0.$$

(iv) A aplicação $G : \Sigma \rightarrow Y$, dada por $G(A) = \int_A f \mu(dt)$ é uma medida vetorial σ -aditiva.

(v) Se $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$, então a função $T \circ f : \Sigma \rightarrow Z$ é Bochner integrável e $\int_A T \circ f \mu(dt) = T \left(\int_A f \mu(dt) \right)$, $\forall A \in \Sigma$.

Demonstração:

(i) É imediato, uma vez que vale para funções simples.

(ii) Seja (f_n) a sequência de funções simples da definição 1.31. Como a função $t \rightarrow \|f(t)\|$ é Lebesgue integrável então,

$$\int_A \left| \|f(t)\| - \|f_n(t)\| \right| \mu(dt) \leq \int_A \|f(t) - f_n(t)\| \mu(dt).$$

$$\text{Isto implica que, } \int_A \|f\| \mu(dt) = \lim_n \int_A \|f_n\| \mu(dt). \quad (*)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left\| \int_A f \mu(dt) \right\| &\leq \left\| \int_A (f - f_n) \mu(dt) \right\| + \left\| \int_A f_n \mu(dt) \right\| \\ &\leq \int_A \|f - f_n\| \mu(dt) + \int_A \|f_n\| \mu(dt). \end{aligned}$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, e usando $(*)$ obtemos,

$$\left\| \int_A f \, \mu(dt) \right\| \leq \int_A \|f\| \, \mu(dt)$$

(iv) Desde que a função norma de f é Lebesgue integrável, temos que, $\lim_{\mu(A) \rightarrow 0} \int_A \|f\| \, \mu(dt) = 0$.

Pela desigualdade anterior, $\lim_{\mu(A) \rightarrow 0} \int_A f \, \mu(dt) = 0$.

(v) É fácil ver que G é aditiva.

Agora seja (E_n) uma sequência de elementos disjuntos de Σ chamamos $A_n = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} E_i$.

Logo, $\left\| G\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) - \sum_{i=1}^n G(E_i) \right\| = \left\| G\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} E_i\right) \right\| = \left\| \int_{A_n} f \, \mu(dt) \right\| \leq \int \|f\| \chi_{A_n} \, \mu(dt)$.

Segue do T.C.D. clássico que,

$$\lim_n \left\| G\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) - \sum_{i=1}^n G(E_i) \right\| = 0.$$

Portanto G é uma medida vetorial σ -aditiva.

(vi) Claramente a função $T \circ f : \Omega \rightarrow Z$ é μ -mensurável.

Como $\|T \circ f(t)\| \leq \|T\| \|f(t)\|$, então pelo teorema 1.32 temos que $T \circ f$ é Bochner integrável.

Sejam (f_n) a sequência de funções simples da definição 1.3 e um conjunto $A \in \Sigma$.

Usando (iv) verificamos que a sequência $\int_A T \circ f_n \, \mu(dt)$ converge a $\int_A T \circ f \, \mu(dt)$.

Por outro lado, como $\int_A T \circ f_n \mu(dt) = T(\int_A f_n \mu(dt))$ e desde que T é contínuo temos que $\int_A T \circ f_n \mu(dt)$ converge a $T(\int_A f \mu(dt))$.

Portanto

$$\int_A T \circ f \mu(dt) = T(\int_A f \mu(dt)). \quad \square$$

A seguir demonstramos o teorema da Convergência Dominada para a integral de Bochner, na hipótese de convergência em medida.

Definição 1.34

Diremos que uma sequência (f_n) de funções definidas em Ω a valores em Y , converge em medida a uma função f , quando

$$\lim_n \mu\{t \in \Omega / \|f_n(t) - f(t)\| \geq \varepsilon\} = 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Teorema 1.35 (teorema da Convergência Dominada)

Seja (f_n) uma sequência de funções Bochner integráveis, definidas em Ω a valores em Y , as qual converge a f em medida.

Se existe uma função Lebesgue integrável $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|f_n\| \leq g$ μ -q.s., então f é Bochner integrável e,

$$\int_E f \mu(dt) = \lim_n \int_E f_n \mu(dt), \quad \forall E \in \Sigma.$$

Demonstração:

Em consequência do teorema clássico da Convergência Dominada ([3]), temos que a função $\|f(t)\|$ é Lebesgue integrável e portanto f é Bochner integrável.

Por outro lado, tomando as funções reais $h_n(t) = \|f_n(t) - f(t)\|$ as quais convergem a zero em medida, e como $h_n(t) \leq g(t) + \|f(t)\|$, temos pelo teorema do caso escalar que,

$$\lim_n \int_E \|f_n - f\| \mu(dt) = 0, \quad \forall E \in \Sigma.$$

Portanto segue-se que $\int_E f \mu(dt) = \lim_n \int_E f_n \mu(dt)$, $\forall E \in \Sigma$. □

De forma análoga ao caso clássico, podemos desenvolver o conceito de espaço L^p (o teorema 1.32 já sugere a forma de definir este conceito).

Com efeito, se $1 \leq p < \infty$, o símbolo $\mathfrak{L}^p(\mu, Y)$ denotará o espaço de funções Bochner integráveis, tais que $\int_{\Omega} \|f\|^p \mu(dt) < \infty$.

Como $\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} \|f\|^p \mu(dt) \right)^{\frac{1}{p}}$ define uma seminorma em $\mathfrak{L}^p(\mu, Y)$, de

forma natural definimos o espaço de Banach $L^p(\mu, Y) = \mathfrak{L}^p(\mu, Y) / N$,

onde $N = \{ f \in \mathfrak{L}^p(\mu, Y) / f \equiv 0 \text{ } \mu\text{-q.s.} \}$.

No caso $p = \infty$, definimos $L^\infty(\mu, Y) = \mathfrak{L}^\infty(\mu, Y) / M$ onde $\mathfrak{L}^\infty(\mu, Y)$ é o espaço das funções Bochner integráveis essencialmente limitadas e M é o subespaço de $\mathfrak{L}^\infty(\mu, Y)$ das funções nulas μ -q.s.. Resulta então, que $L^\infty(\mu, Y)$ é um espaço de Banach.

C A P Í T U L O I I

REPRESENTAÇÃO DE FUNCIONAIS SOBRE $C(K, X)$

E OPERADORES SOBRE $C(K)$

II. 1. Introdução

A representação de operadores sobre espaços de funções contínuas tem sido um tema clássico de estudo em Análise, e como veremos, as medidas vetoriais tem aqui uma importante aplicação.

No caso escalar, se K é um conjunto compacto de Hausdorff, $C(K)$ representa as funções escalares, contínuas, e se $M(K)$

representa o espaço das medidas escalares, regulares, σ -aditivas e de variação limitada, definidas sobre a σ -álgebra de Borel de K , temos o teorema de Representação de Riesz ([6]), para funcionais sobre $C(K)$, que enunciamos abaixo

Teorema de Representação de Riesz

O dual do espaço $C(K)$ é isomorfo e isométrico ao espaço de medidas $M(K)$. Se $\varphi \in C(K)^*$ e $\mu \in M(K)$, então a isometria vem dada por,

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_K f \mu(dt), \quad f \in C(K).$$

Em forma natural surgem as seguintes questões:

Existe um teorema de representação tipo Riesz para aplicações lineares contínuas, da forma:

(i) $T: C(K) \rightarrow X$, onde X é um espaço de Banach qualquer,

(ii) $T: C(K, X) \rightarrow \mathbb{C}$, onde $C(K, X)$ representa as funções contínuas definidas em K , a valores em X ?

Neste capítulo, apresentamos dois resultados que respondem estas questões, a saber o teorema de Bartle-Dunford-Schwartz ([4]) para o primeiro caso, e o teorema de Singer ([17]) no segundo caso.

II. 2. Representação de operadores lineares em $C(K)$

II.2.1 Conjuntos fracamente compactos em $ca(\Sigma)$

Seja Σ uma σ -álgebra de subconjuntos de um conjunto Ω . Denotamos por $ca(\Sigma)$ o espaço das medidas a valores no corpo escalar, σ -aditivas, definidas sobre Σ .

$ca(\Sigma)$ é um espaço de Banach com norma dada pela variação, isto é $\|\lambda\| = |\lambda|(\Omega)$, $\lambda \in ca(\Sigma)$.

Observação 2.1:

A convergência fraca de uma sequência (λ_j) no espaço de Banach $ca(\Sigma)$ implica que a sequência de escalares $(\lambda_j(E))_j$ converge para cada $E \in \Sigma$. isto é devido ao fato que a aplicação $\varphi_E(\lambda) = \lambda(E)$ define um funcional em $ca(\Sigma)^*$, logo $\varphi_E(\lambda_j) = \lambda_j(E)$ converge no corpo escalar.

Definição 2.2

Seja E um espaço de Banach, e seja $A \subseteq E$. Diremos que A é relativamente fracamente compacto se o fecho de A na topologia fraca é compacto.

O teorema de Eberlein-Smulian, ([6]) garante que num espaço de Banach E , um subconjunto A de E é relativamente fracamente compacto se, e somente se, ele é sequencialmente fracamente compacto. Isto é, toda sequência (x_n) em A , contém uma subsequência fracamente

convergente em E . Em consequência disto, como $ca(\Sigma)$ é um espaço de Banach, usaremos indistintamente esses conceitos de compacidade fraca e sequencial.

Se μ e ν são medidas complexas definidas numa álgebra Σ , escreveremos $\mu \ll \nu$ para indicar que μ é absolutamente contínua com respeito a ν ou ν -absolutamente contínua, isto é $\lim_{|\nu|(E) \rightarrow 0} \mu(E) = 0$.

Se considerarmos Σ como uma σ -álgebra e $\mu, \nu \in ca(\Sigma)$, temos que $\mu \ll \nu$ se, e somente se, $\mu(E) = 0$ cada vez que $|\nu|(E) = 0$ (ver [11], página 131).

Lema 2.3

Se (λ_i) é uma sequência em $ca(\Sigma)$, então existe uma medida positiva $\nu \in ca(\Sigma)$, tal que $\lambda_i \ll \nu$, $i = 1, 2, \dots$.

Demonstração

Definamos uma medida $\nu: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ da forma,

$$\nu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{|\lambda_i|(E)}{1 + |\lambda_i|(\Omega)}, \quad E \in \Sigma.$$

Obviamente ν é uma medida σ -aditiva e limitada, portanto $\nu \in ca(\Sigma)$.

Notemos que se $\nu(E) = 0$ então $|\lambda_i|(E) = 0$, $i = 1, 2, \dots$.

Por comentário acima isto implica que $\lim_{\nu(E) \rightarrow 0} |\lambda_i|(E) = 0$.

Logo desde que, $|\lambda_i(E)| \leq |\lambda_i|(E)$ temos $\lim_{\nu(E) \rightarrow 0} \lambda_i(E) = 0$,

$i = 1, 2, \dots$. Ou seja $\lambda_i \ll \nu$, $i = 1, 2, \dots$. $\square$

Teorema 2.4

Seja K um subconjunto de $ca(\Sigma)$ então, K é relativamente fracamente compacto se, e somente se, satisfaz as condições abaixo:

(i) K é limitado.

(ii) Para toda sequência decrescente (E_i) em Σ , com interseção vazia temos que $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda(E_i) = 0$, uniformemente para $\lambda \in K$.

Demonstração:

($\rightarrow$) Por um lado, sabemos que toda sequência fracamente convergente é limitada, logo desde que K é sequencialmente fracamente compacto temos que toda sequência em K tem uma subsequência limitada. Por absurdo se mostra que K deve ser limitado, assim a condição (i) é satisfeita.

Agora suponhamos que (ii) não é válida, ou seja existe uma sequência (E_i) em Σ que decresce ao conjunto vazio e tal que o limite da sequência $(\lambda(E_i))$ não é uniforme. Em consequência, existem $\varepsilon > 0$ e subsequências $(E_{i(j)})_j$ de (E_i) e (λ_j) em K , tais que $|\lambda_j(E_{i(j)})| \geq \varepsilon$, $j = 1, 2, \dots$. (1)

Passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que (λ_j) é fracamente convergente, e em virtude da observação 2.1 temos que $(\lambda_j(E))_j$ converge para cada $E \in \Sigma$.

Além disso, sendo a medida ν como no lema 2.3, temos que cada λ_j é ν -absolutamente contínua.

Com estas condições sobre (λ_j) e pelo teorema de Vitali-Hahn-Saks (teorema 1.14) segue-se que $\lim_{\nu(E) \rightarrow 0} \lambda_j(E) = 0$, uniformemente para $j = 1, 2, \dots$.

Consequentemente $\lim_j \lambda_j(E_{i(j)}) = 0$, o qual contradiz (1).

($\Leftarrow$) Reciprocamente seja (λ_j) uma sequência arbitrária em K . desejamos provar que (λ_j) possui uma subsequência fracamente convergente em $ca(\Sigma)$. (2)

Seja ν uma medida como no lema anterior. É fácil ver que o espaço das medidas em $ca(\Sigma)$ as quais são ν -absolutamente contínuas é um subespaço fechado de $ca(\Sigma)$ contendo (λ_j) .

Logo por uma aplicação do teorema de Hahn-Banach, (2) é equivalente a provar que (λ_j) possui uma subsequência fracamente convergente no subespaço das medidas ν -absolutamente contínuas.

O teorema de Radon-Nikodym ([3]) estabelece uma isometria entre o subespaço das medidas ν -absolutamente contínuas e o espaço clássico $L^1(\Omega, \Sigma, \nu)$, logo existe uma sequência (f_j) em $L^1(\Omega, \Sigma, \nu)$ de tal modo que $\lambda_j(E) = \int_E f_j \nu(dt)$.

Seja $\{G_n : n=1, 2, \dots\}$ uma base da topologia no corpo escalar. Definamos a σ -álgebra Σ_1 como sendo gerada pelos conjuntos $E_{j(n)} = f_j^{-1}(G_n)$ $n=1, 2, \dots$ $j=1, 2, \dots$. Notemos que cada $f_j \in L^1(\Omega, \Sigma, \nu)$ ainda pertence a $L^1(\Omega, \Sigma_1, \nu)$ o qual é um subespaço fechado. Em consequência para concluir a demonstração basta provar que a sequência (f_j) possui uma subsequência fracamente convergente em $L^1(\Omega, \Sigma_1, \nu)$.

Com efeito, seja Σ_2 a álgebra gerada pelos conjuntos $E_{j(n)}$ $n=1, 2, \dots$ $j=1, 2, \dots$. Desde que Σ_2 é uma coleção enumerável, podemos escolher (usando o processo diagonal) uma subsequência tal que as sequências de escalares $(\lambda_{j(k)}(E))_k$ convergem para cada

$E \in \Sigma_2$. Considere a coleção $\Sigma_3 = \{E \in \Sigma_1 \mid (\lambda_{j(k)}(E))_k \text{ converge}\}$, então temos as inclusões $\Sigma_2 \subseteq \Sigma_3 \subseteq \Sigma_1$. Veremos que a família Σ_3 é uma σ -álgebra:

Se $E \in \Sigma_3$ então $\lambda_{j(k)}(\Omega \setminus E) = \lambda_{j(k)}(\Omega) - \lambda_{j(k)}(E)$, logo $(\lambda_{j(k)}(\Omega \setminus E))_k$ converge, ou seja $\Omega \setminus E \in \Sigma_3$.

Por outro lado, seja (E_i) uma sequência em Σ_3 , chamamos $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Notemos que $(A \setminus \bigcup_{i=1}^n E_i)_n$ decresce ao conjunto vazio, logo por (ii) da hipótese temos que $\lim_n \lambda_{j(k)}(\bigcup_{i=1}^n E_i) = \lambda_{j(k)}(A)$, uniformemente para $k \in \mathbb{N}$. Além disso, $\lim_k \lambda_{j(k)}(\bigcup_{i=1}^n E_i)$ existe para cada $n \in \mathbb{N}$. Isto garante a existência de $\lim_k \lambda_{j(k)}(A)$, portanto $A \in \Sigma_3$.

Assim, Σ_3 é uma σ -álgebra e conseqüentemente $\Sigma_3 = \Sigma_1$.

Tomando $x^* \in L^1(\Omega, \Sigma_1, \nu)^*$ e pelo teorema de Representação de Riesz, existe $g \in L^\infty(\Omega, \Sigma_1, \nu)$ tal que $x^*(f_{j(k)}) = \int_{\Omega} f_{j(k)} g \nu(dt)$.

Por argumentos de convergência e linearidade, basta analisar a convergência de $(x^* f_{j(k)})_k$ assumindo que g é uma função característica. Deste modo, seja $g = \chi_E$ com $E \in \Sigma$ então, $x^*(f_{j(k)}) = \int_E f_{j(k)} \chi_E \nu(dt) = \lambda_{j(k)}(E)$, portanto converge. Provamos desta forma que $(\lambda_{j(k)})_k$ é fracamente convergente em $L^1(\Omega, \Sigma_1, \nu)$. $\square$

Consideremos agora uma medida vetorial $G: \Sigma \rightarrow X$, tal que para cada $x^* \in X^*$, x^*G define uma medida escalar, σ -aditiva, ou seja $x^*G \in ca(\Sigma)$. Desta definição, resultam as seguintes conseqüências para G .

Proposição 2.5

Se $G: \Sigma \rightarrow X$ é uma medida vetorial, tal que $x^*G \in ca(\Sigma)$, para todo funcional $x^* \in X^*$, então

(i) G tem semivariação limitada.

(ii) G é uma medida vetorial σ -aditiva. (teorema de Orlicz-Pettis)

Demonstração:

(i) Como x^*G é limitada, logo para cada $x^* \in X^*$

$$\sup \{ |x^*G(A)| \mid A \in \Sigma \} < \infty.$$

Então pelo Princípio de Limitação Uniforme, temos que

$$\sup \{ \|G(A)\| \mid A \in \Sigma \} < \infty.$$

Da proposição 1.8, vemos que $\|G\|K\Omega < \infty$.

(ii) a demonstração deste teorema, aparece em [11], página 318.

Agora como aplicação do teorema 2.4 temos o seguinte resultado.

Corolário 2.6

O conjunto $S = \{ x^*G \mid \|x^*\| \leq 1 \}$ é relativamente fracamente compacto em $ca(\Sigma)$.

Demonstração:

Provemos que S satisfaz as condições do teorema 2.4,

(i) Pela proposição 2.5 (i), vemos claramente que S é limitado

pois $\|x^*G\| = |x^*G|(\Omega) \leq \|G\|K(\Omega)$, $\forall x^* \in X^*$, $\|x^*\| \leq 1$.

(ii) Seja (E_i) uma sequência decrescente com interseção vazia.

Pela proposição 2.5(ii) G é σ -aditiva, logo $\lim_i G(E_i) = 0$.

Como $|x^*G(E_i)| \leq \|G(E_i)\|$, $\forall x^* \in X^*$, $\|x^*\| \leq 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}$ (1)

segue que $\lim_i x^*G(E_i) = 0$ uniformemente para $x^* \in X^*$, $\|x^*\| \leq 1$.

Então pelo teorema 2.4 temos que S é relativamente fracamente compacto em $ca(\Sigma)$. $\square$

II.2.2. Representação de operadores lineares em CKO

K denotará um conjunto compacto e Hausdorff. Indicaremos por CKO o espaço das funções contínuas com a norma do supremo. $MCKO$ denotará o espaço das medidas escalares, σ -aditivas, regulares, definidas sobre a σ -álgebra dos subconjuntos de Borel de K .

Definição 2.7

Sejam X, Y espaços de Banach e $T: X \rightarrow Y$ um operador linear limitado.

(a) Diremos que T é fracamente compacto se $T(B)$ é um conjunto relativamente fracamente compacto em Y , onde B é a bola unitária fechada em X .

(b) Chamamos adjunto de T ao operador $T^*: Y^* \rightarrow X^*$ onde para $y^* \in Y^*$ o elemento $T^*(y^*) \in X^*$ está dado por:

$$\langle T^*(y^*), x \rangle = \langle y^*, T(x) \rangle, \quad x \in X.$$

A seguir enunciamos alguns resultados sobre operadores fracamente compactos, que serão de grande utilidade para nosso propósito. As provas deles se encontram em [11].

Teorema 2.8

Seja T um operador linear, limitado. Então, T é fracamente compacto se, e somente se, T^* é fracamente compacto.

Teorema 2.9

Seja $T: X \rightarrow Y$ um operador linear limitado. Então T é fracamente compacto se, e somente se, o operador $T^{**}: X^{**} \rightarrow Y^{**}$ leva X^{**} em Y . (onde Y é identificado como subespaço de Y^{**} pela inclusão natural).

O seguinte resultado fornece uma representação integral de um operador linear, limitado, $T: C(K) \rightarrow X$.

Teorema 2.10

Se $T: C(K) \rightarrow X$ é um operador linear limitado, então existe uma única medida vetorial com semivariação limitada $G: \Sigma \rightarrow X^{**}$, satisfazendo

(a) Para cada $x^* \in X^*$, $x^* \circ G \in M(K)$, (note que $x^* \in X^* \subseteq X^{***}$, então, $x^* \circ G(E) = \langle G(E), x^* \rangle$).

(b) A aplicação que leva $x^* \in X^* \rightarrow x^* \circ G \in M(K)$ é contínua, onde X^* e $M(K)$ têm as topologias fraca estrela respectivas.

$$(a) \quad x^* T(f) = \int_K f(x^* \cdot G)(dt), \quad \text{para todo } x^* \in X^* \text{ e } f \in C(K).$$

$$(b) \quad \|T\| = \|G\|_{CK}.$$

Reciprocamente, se $G: \Sigma \rightarrow X^{**}$ é uma medida vetorial de semivariação limitada satisfazendo (a) e (b), então (a) define um operador $T: C(K) \rightarrow X$ linear limitado, com norma dada por (b).

Demonstração:

Observemos que o operador $T^*: X^* \rightarrow C(K)^*$ leva $x^* \rightarrow x^* T$.

Logo pelo teorema de Riesz $C(K)^* = M(K)$, então $T^*(x^*)$ determina uma única medida $\lambda_{x^*} \in M(K)$.

Para cada $E \in \Sigma$, consideremos o funcional $\phi_E \in M(K)^*$ dado por $\phi_E(\lambda) = \lambda(E)$.

Definamos $G: \Sigma \rightarrow X^{**}$ como $G(E) = T^{**}(\phi_E)$.

Isto significa que para cada $E \in \Sigma$ e $x^* \in X^*$ temos, $\langle G(E), x^* \rangle = \langle \phi_E, T^*(x^*) \rangle = \lambda_{x^*}(E)$, por conseguinte $x^* \cdot G \in M(K)$ e também, $T(f) = \langle T^*(x^*), f \rangle = \int_{\Omega} f(x^* \cdot G)(dt)$, isto prova (a) e (b).

Por outro lado, é claro que o operador adjunto $T^*: X^* \rightarrow C(K)^*$ é contínuo, com as topologias fraca estrela sobre X^* e $C(K)^*$, logo como $T^*(x^*)$ se identifica com $x^* \cdot G$, podemos dizer que a aplicação dada em (b) é contínua.

Para provar (b) note que, $\|T\| = \|T^*\| = \sup \{ |T^*(x^*)| / \|x^*\| \leq 1 \} = \sup \{ \|x^* \cdot G\|_{CK} / \|x^*\| \leq 1 \}$, logo pela nota após a proposição 1.18 temos que $\|T\| = \|G\|_{CK}$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente suponha que (a) e (b) estejam satisfeitas.

Pela continuidade da aplicação dada em (b), temos que para cada $f \in C(K)$ o funcional linear $x^* \in X^* \rightarrow \int_K f(x^* \cdot G)(dt)$ (3) é fracamente estrela-contínuo. Logo existe um único elemento $x_f \in X$, tal que o funcional (3) é da forma $x^* \in X^* \rightarrow \langle x^*, x_f \rangle$. ([5])

Assim (a) define um único operador $T: C(K) \rightarrow X$ dado por $T(f) = x_f$. É fácil ver que T é linear.

$$\begin{aligned} \text{Observe que, } \|T\| &= \sup \{ \sup \{ |x^* T(f)| / \|x^*\| \leq 1 \} / \|f\|_\infty \leq 1 \} \\ &= \sup \{ \|x^* T\| / \|x^*\| \leq 1 \} = \sup \{ |x^* \cdot G| (K) / \|x^*\| \leq 1 \} = \|G\|. \end{aligned}$$

Portanto T é um operador limitado, com norma dada por (a). $\square$

Definição 2.11

Se $T: C(K) \rightarrow X$ é um operador limitado, então a medida G que satisfaz (a)-(c) do teorema 2.10 é chamada medida representante de T .

O próximo exemplo mostra que o teorema 2.10 não pode ser melhorado, no sentido que em geral, a medida $G: \Sigma \rightarrow X^{**}$ não é σ -aditiva nem toma valores em X .

Exemplo 2.12

Mostraremos um operador linear limitado cuja medida representante não é σ -aditiva nem toma valores em X .

Sejam $K = [0,1]$,

$\Sigma =$ a σ -álgebra dos conjuntos borelianos em $[0,1]$, e

$$X = c_0 = \{ (x_n) / \lim_n x_n = 0 \} \subseteq \ell_\infty.$$

Defina $T(f) = (f(\frac{1}{n}) - f(0))_n \in c_0$.

Claramente T é um operador linear limitado, logo T é representado por uma medida vetorial $G: \Sigma \rightarrow c_0^{***} = \ell_\infty$, definida por $\langle G(E), x^* \rangle = \phi_E(T^*(x^*))$.

Tomemos a base canônica $\{e_n: n=1, 2, \dots\}$ de ℓ_1 .

É fácil ver que o operador $T^*(e_n) \in C(K)^*$ é representado pela medida escalar $\nu_n(E) = \chi_E(\frac{1}{n}) - \chi_E(0)$.

Logo $\langle G(E), e_n \rangle = \phi_E(T^*(e_n)) = \chi_E(\frac{1}{n}) - \chi_E(0) = \nu_n(E)$.

Assim, $G(E) = (\chi_E(\frac{1}{n}) - \chi_E(0))_n$ é a medida representante de T .

Agora veremos que G não toma valores em c_0 . Efetivamente, tomando o conjunto boreliano $E = \{\frac{1}{2^i} / i = 1, 2, \dots\} \subseteq [0,1]$ temos que $G(E) = (0, 1, 0, 1, \dots) \in \ell_\infty$, mas $G(E) \notin c_0$.

Por outro lado, temos que G não é σ -aditiva. Para provar esta afirmação considere a sequência disjunta de elementos de Σ $E_i = \{\frac{1}{i}\} \quad i = 1, 2, \dots$

Logo $G(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = (1, 1, \dots)$, mais $G(\bigcup_{i=1}^n E_i) = (1, \dots, 1, 0, \dots)$ não converge quando $n \rightarrow \infty$. Portanto G não é σ -aditiva.

Teorema 2.13 (Bartle-Dunford-Schwartz)

Se $T: C(K) \rightarrow X$ é um operador linear, limitado, fracamente compacto, então existe uma única medida vetorial σ -aditiva, de semivariação limitada $G: \Sigma \rightarrow X$, que satisfaz:

(a) $T(f) = \int_K f \cdot G(dt)$, $f \in C(K)$, onde a integral está dada segundo a definição 1.25.

(b) $\|T\| = \|G\|_{K, X}$.

Reciprocamente, se $G: \Sigma \rightarrow X$ é uma medida vetorial σ -aditiva e se T está definido por (a), então $T: C(K) \rightarrow X$ é um operador fracamente compacto cuja norma está dada por (b).

Demonstração:

Suponhamos que T é fracamente compacto. Seja G a medida definida no teorema 2.10.

Pelo teorema 2.9, $T^{**}(C(K)^*) \subseteq X$, e como $G(E) = T^{**}(\phi_E)$ (veja a demonstração do teorema 2.10), então G toma valores em X .

Da parte (a) do teorema 2.10, segue que $x^*G \in M(K)$, $x^* \in X^*$; em particular $x^*G \in ca(\Sigma)$, $\forall x^* \in X^*$. Logo, pela proposição 2.5 decorre que G é σ -aditiva, e tem semivariação limitada.

Desde que $x^*T(f) = \int_K f x^*G(dt)$, $\forall x^* \in X^*$, temos que $T(f) = \int_K f \cdot G(dt)$.

Reciprocamente, seja $G: \Sigma \rightarrow X$ uma medida vetorial σ -aditiva e seja T definido por (a).

Note que $T^*(x^*) = x^*T \in C(K)^*$ é representado pela medida $x^*G \in M(K) \subseteq ca(\Sigma)$. Logo pelo corolário 2.6, o conjunto $\{T^*(x^*) / x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\}$ é relativamente fracamente compacto em $ca(\Sigma)$. Portanto T^* e consequentemente T , são fracamente compactos. $\square$

II. 3. Representação de funcionais em $C(K, X)$

Sejam X um espaço de Banach e K um conjunto compacto de

Hausdorff. $C(K)$ representará o espaço de Banach das funções complexas, contínuas sobre K com a norma usual. Por $C(K, X)$ denotaremos ao espaço de Banach das funções contínuas, definidas sobre K , a valores em X , com a norma dada por

$$\|f\|_{\infty} = \text{Sup} \{ \|f(t)\| \mid t \in K \}.$$

II. 3. 1. O espaço $C(K) \otimes X$

Vamos introduzir algumas noções básicas sobre o produto tensorial.

Sejam E, F, G espaços de Banach denotaremos por $B(E, F, G)$ ao espaço das aplicações bilineares contínuas sobre $E \times F$ em G , e por $B(E, F)$ ao espaço das formas bilineares contínuas sobre $E \times F$.

Consideremos a aplicação $\chi : E \times F \rightarrow B(E, F)^*$, dada por $\chi(x, y) = u_{xy}$, onde $B(E, F)^*$ representa o dual topológico de $B(E, F)$ e o elemento $u_{xy} \in B(E, F)^*$ está dado por $u_{xy}(f) = f(x, y)$, $f \in B(E, F)$. χ é chamada aplicação bilinear canônica.

Definição 2.14

O Produto Tensorial de E e F , é o espaço gerado por $\chi(E \times F)$, ou seja

$$E \otimes F = [\chi(E \times F)].$$

Denotando o elemento u_{xy} por $x \otimes y$, podemos descrever o produto tensorial como

$$E \otimes F = \left\{ u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \mid x_i \in E, y_i \in F \right\}.$$

Se percebe facilmente que a representação de cada elemento $u \in E \otimes F$, não é única.

Uma das principais vantagens do produto tensorial é que ele permite considerar espaços vetoriais de aplicações bilineares como espaços vetoriais de aplicações lineares. A seguinte proposição estabelece esta propriedade.

Proposição 2.15 (Propriedade Universal)

Seja $f: E \times F \rightarrow G$ uma aplicação bilinear, então existe uma única aplicação linear $h: E \otimes F \rightarrow G$ tal que o diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \xrightarrow{f} & G \\ \chi \searrow & & \nearrow h \\ & E \otimes F & \end{array}$$

Em particular, se $G = \mathbb{C}$ podemos dizer que existe um isomorfismo entre os espaços $(E \otimes F)^*$ e $B(E, F)$.

Observações 2.16

(a) O espaço $E \otimes F$ pode ser considerado como subespaço de $B(E^*, F^*)$, identificando cada elemento $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in E \otimes F$ com a forma bilinear sobre $E^* \times F^*$, dada por

$$u(x^*, y^*) = \sum_{i=1}^n x^*(x_i) y^*(y_i); \quad x^* \in E^*, y^* \in F^*.$$

(b) Pela própria definição, $E \otimes F$ é um subespaço linear de $B(E, F)^*$.

Estas observações são úteis para introduzir uma estrutura de espaço normado em $E \otimes F$.

Definições 2.17

(a) Denotamos por ε a norma induzida sobre $E \otimes F$, pelo espaço de Banach $B(E^*, F^*)$. Assim, se $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ então $\varepsilon(u)$ está dada por

$$\varepsilon(u) = \text{Sup} \left\{ \left| \sum_{i=1}^n x^*(x_i) y^*(y_i) \right| \mid x^* \in E^*, \|x^*\| \leq 1; y^* \in F^*, \|y^*\| \leq 1 \right\}.$$

O completamento do espaço $(E \otimes F, \varepsilon)$ é chamado Produto Tensorial Injetivo e este completado indicamos por $E \hat{\otimes}_{\varepsilon} F$.

(b) Denotamos por π a norma induzida sobre $E \otimes F$ pelo espaço de Banach $B(E, F)^*$. Se $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$, então $\pi(u)$ está dada por

$$\pi(u) = \text{Sup} \left\{ \left| \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \right| \mid f \in B(E, F), \|f\| \leq 1 \right\}.$$

O completamento do espaço $(E \otimes F, \pi)$ é chamado Produto Tensorial Projetivo e é denotado por $E \hat{\otimes}_{\pi} F$.

No que segue estudamos o caso particular $E = C(K)$ e $F = X$.

Dado $t \in K$, definimos o funcional $\delta_t \in C(K)^*$ por $\delta_t(f) = f(t)$.

Claramente δ_t é um funcional linear sobre $C(K)$. Desde que $|\delta_t(f)| = |f(t)| \leq \|f\|_{\infty}$, verificamos que δ_t é contínuo e em particular $\|\delta_t\| \leq 1$. Notamos também que

$$\|f\|_{\infty} = \text{Sup} \left\{ |\delta_t(f)| \mid t \in K \right\}.$$

Proposição 2.18

Seja $u = \sum_{i=1}^n f_i \otimes x_i \in C(K) \otimes X$, então

$$\varepsilon(u) = \text{Sup} \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \delta_t(f_i) \psi(x_i) \right| / t \in K, \psi \in X^*, \|\psi\| \leq 1 \right\}.$$

Demonstração:

Desde que $\delta_t \in C(K)^*$ e $\|\delta_t\| \leq 1$, temos da definição de ε que

$$\varepsilon(u) \geq \text{Sup} \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \delta_t(f_i) \psi(x_i) \right| / t \in K, \psi \in X^*, \|\psi\| \leq 1 \right\}.$$

Por outro lado, para todo $\psi_0 \in X^*$, $\|\psi_0\| \leq 1$

$$\begin{aligned} \text{Sup} \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \delta_t(f_i) \psi(x_i) \right| / t \in K, \psi \in X^*, \|\psi\| \leq 1 \right\} &\geq \text{Sup} \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \delta_t(f_i) \psi_0(x_i) \right| / \right. \\ &t \in K \left. \right\} = \text{Sup} \left\{ \left| \delta_t \left(\sum_{i=1}^n \psi_0(x_i) f_i \right) \right| / t \in K \right\} = \left\| \sum_{i=1}^n \psi_0(x_i) f_i \right\|_{\infty} = \\ &\text{Sup} \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \varphi(f_i) \psi_0(x_i) \right| / \varphi \in C(K)^*, \|\varphi\| \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Tomando supremo sobre os funcionais $\psi_0 \in X^*$, $\|\psi_0\| \leq 1$, temos a desigualdade contrária. $\square$

Teorema 2.19

O espaço $C(K) \hat{\otimes}_{\varepsilon} X$ é isometricamente isomorfo a $C(K, X)$.

Demonstração:

Seja $u = \sum_{i=1}^n f_i \otimes x_i \in C(K) \otimes X$, definamos $\varphi_u: K \rightarrow X$ como

$$\varphi_u(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) x_i, \quad t \in K. \quad \text{Claramente } \varphi_u \in C(K, X).$$

Considere a aplicação $\varphi: C(K) \hat{\otimes}_{\varepsilon} X \rightarrow C(K, X)$ dada por $\varphi(u) = \varphi_u$, $u \in C(K) \hat{\otimes}_{\varepsilon} X$, e verifiquemos que

(i) φ é bem definida:

Isto é claro se observarmos que $\varphi_u(t) = u(h_t)$ onde h_t é a aplicação bilinear tal que $h_t(f, x) = f(t)x$, $f \in C(K)$, $x \in X$.

(ii) φ é injetora:

Seja $u = \sum_{i=1}^n f_i \otimes x_i$, tal que $\varphi_u \equiv 0$.

Sempre podemos supor que os vetores $x_1, x_2, \dots, x_n$ são l.i. e desde φ_u independe da representação de u , então

$$\varphi_u(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) x_i = 0, \quad \forall t \in K, \quad \text{logo} \quad f_i(t) = 0, \quad \forall i=1, \dots, n;$$

$\forall t \in K$. Portanto $u = 0$.

(iii) φ é uma isometria sobre sua imagem:

$$\begin{aligned} \|\varphi_u\|_{\infty} &= \text{Sup} \{ \|\varphi_u(t)\| \mid t \in K \} = \text{Sup} \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n f_i(t) x_i \right\| \mid t \in K \right\} \\ &= \text{Sup} \left\{ \left| x^* \left(\sum_{i=1}^n f_i(t) x_i \right) \right| \mid t \in K, x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\} \\ &= \text{Sup} \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \delta_t(f_i) x^*(x_i) \right| \mid t \in K, x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Logo pela proposição anterior $\|\varphi_u\| = \varepsilon(u)$.

Pela densidade de $C(K) \otimes_{\varepsilon} X$ em $C(K) \hat{\otimes}_{\varepsilon} X$ podemos considerar $\tilde{\varphi}: C(K) \hat{\otimes}_{\varepsilon} X \rightarrow C(K, X)$ a extensão contínua de φ ao espaço completado $C(K) \hat{\otimes}_{\varepsilon} X$. Logo, para provar que $\tilde{\varphi}$ é sobrejetiva basta mostrar que $\varphi(C(K) \otimes X)$ é denso em $C(K, X)$.

Com efeito, sejam $f \in C(K, X)$ e $\eta > 0$.

Como $f(K) \subseteq X$ é compacto, então existem um número finito de bolas abertas em X , digamos $B(x_1, \eta), B(x_2, \eta), \dots, B(x_n, \eta)$ as quais cobrem $f(K)$. Fazendo uso do teorema da Partição da unidade ([6]), obtemos uma coleção de funções contínuas $h_i: X \rightarrow \mathbb{R}$, tais

que: $0 \leq h_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^n h_i \equiv 1$, onde o suporte de cada h_i está contido na bola $B(x_i, \eta)$.

Definido $g_i = h_i \circ f$, é fácil ver que $g_i \in C(K)$, $0 \leq g_i \leq 1$,

$$\sum_{i=1}^n g_i \equiv 1.$$

Seja agora $u \in C(K) \otimes X$ dado por $u = \sum_{i=1}^n g_i \otimes x_i$, então

$$\varphi_u(t) = \sum_{i=1}^n g_i(t) x_i, \quad t \in K. \text{ Mostraremos que } \|f - \varphi_u\|_\infty < \eta.$$

Efetivamente,

$$\|f(t) - \varphi_u(t)\| = \left\| \sum_{i=1}^n g_i(t) f(t) - \sum_{i=1}^n g_i(t) x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |g_i(t)| \|f(t) - x_i\|.$$

Como $|f(t) - x_i| \leq \eta$ quando $f(t) \in B(x_i, \eta)$ e $|g_i(t)| = 0$,

se $f(t) \notin B(x_i, \eta)$, então $|f(t) - \varphi_u(t)| \leq \eta, \quad \forall t \in K.$

Portanto $\|f - \varphi_u\|_\infty \leq \eta$, isto prova que $f(C(K) \otimes X)$ é denso em $C(K, X)$. $\square$

II. 3. 2. O dual do espaço $C(K, X)$

Indicaremos por Σ a σ -álgebra dos subconjuntos de Borel de K .

Observação 2.20

Seja uma medida vetorial $m: \Sigma \rightarrow X^*$. Para cada $x \in X$, representaremos por m_x a medida escalar dada por

$$m_x(A) = \langle m(A), x \rangle, \quad A \in \Sigma.$$

É fácil verificar que m_x herda as seguintes propriedades de m :

(a) Se m é σ -aditiva então m_x é σ -aditiva.

(b) Se m é de variação limitada então m_x é de variação limitada e $|m_x|(A) \leq \|x\| |m|(A)$.

Como consequência direta da linearidade de cada funcional $m(A)$, temos que

$$(c) m_{x+y} = m_x + m_y \text{ e}$$

$$m_{\alpha x} = \alpha m_x, \quad \forall x, y \in X; \alpha \in \mathbb{C}.$$

(d) Sejam $m: \Sigma \rightarrow X^*$ e $n: \Sigma \rightarrow X^*$ medidas vetoriais, então

$$(m+n)_x = m_x + n_x, \quad \forall x \in X.$$

Definição 2.21

Seja $m: \Sigma \rightarrow X^*$ uma medida vetorial. Diremos que

(a) m é completamente aditiva, se m_x é σ -aditiva $\forall x \in X$.

(b) m é completamente regular, se m_x é regular, $\forall x \in X$.

Representamos por $\mathfrak{M}(\Sigma, X^*)$ a classe de todas as medidas $m: \Sigma \rightarrow X^*$ completamente aditivas, completamente regulares e de variação limitada. Desta forma, $\mathfrak{M}(\Sigma, X^*)$ é um espaço linear normado com a norma dada por $\|m\| = |m|(X)$.

Proposição 2.22

$(\mathfrak{M}(\Sigma, X^*), \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach.

Demonstração:

$\mathfrak{M}(\Sigma, X^*)$ é um subespaço do espaço das medidas vetoriais de

variação limitada $bv(\Sigma, X^*)$, e desde que este é um espaço de Banach então basta provar que $\mathfrak{M}(\Sigma, X^*)$ é fechado.

Seja (m_j) uma sequência em $\mathfrak{M}(\Sigma, X^*)$ que converge a $m \in bv(\Sigma, X^*)$.

Sejam (A_i) uma sequência disjunta em Σ , $x \in X$ e chamemos $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Desde que $|(m_j)_x \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) - m_x \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)| = |(m_j - m)_x \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)| \leq \|x\| |m_j - m|(K)$, temos que

$$\lim_j (m_j)_x \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = m_x \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right), \text{ uniformemente para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Além disso, notamos que $\lim_n (m_j)_x \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = (m_j)_x(A)$, e em particular existe para cada $j \in \mathbb{N}$. (2)

De (1) e (2) resulta que

$$m_x(A) = \lim_j (m_j)_x(A) = \lim_n m_x \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} m_x(A_i).$$

Portanto m_x é σ -aditiva.

Agora veremos que m_x é uma medida regular. Com efeito, observe que

$$|m_x(S)| \leq |m_x(S) - (m_j)_x(S)| + |(m_j)_x(S)| \leq \|x\| \|m - m_j\| + |(m_j)_x(S)|, \quad \forall S \in \Sigma, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Dado $A \in \Sigma$ e $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|m - m_N\| \leq \frac{\varepsilon}{2\|x\|}$.

Como $(m_N)_x$ é regular, então existem conjuntos $F, O \subseteq K$, onde F é fechado, O é aberto e $F \subseteq A \subseteq O$, tais que $|(m_N)_x(S)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $S \subseteq O \setminus F$.

Logo $|m_x(S)| < \varepsilon$, $\forall S \subseteq O \setminus F$. Isto prova que m_x é regular.

Portanto temos que $m \in \mathfrak{M}(\Sigma, X^*)$. $\square$

Teorema 2.23 (J. Singer)

$C(K, X)^*$ é isomorfo e isométrico ao espaço $\mathfrak{M}(\Sigma, X^*)$. Onde a isometria é dada por,

$$\langle \phi, f \rangle = \int_K f \cdot m(dt), \quad \phi \in C(K, X)^*, \quad m \in \mathfrak{M}(\Sigma, X^*).$$

A integral considerada aqui é a integral elementar de Bartle (ver capítulo I).

Demonstração:

Pela densidade de $C(K) \otimes_\epsilon X$ em $C(K, X)$ (teorema 2.19), basta provar que $(C(K) \otimes_\epsilon X)^* \cong \mathfrak{M}(\Sigma, X^*)$.

Seja pois, $\phi \in (C(K) \otimes_\epsilon X)^*$. Para cada $x \in X$, consideremos o funcional $\phi_x \in C(K)^*$ definido por $\langle \phi_x, f \rangle = \langle \phi, f \otimes x \rangle$. Notemos que $\phi_x \in C(K)^*$ e que $\|\phi_x\| \leq \|x\| \|\phi\|$, logo pelo teorema de representação de Riesz (ver II.1), existe uma única medida escalar μ_x σ -aditiva, regular e tal que

$$\langle \phi_x, f \rangle = \int_K f \mu_x(dt), \quad \forall f \in C(K). \quad (1)$$

Definamos a aplicação de conjuntos $m_\phi: \Sigma \rightarrow X^*$ por,

$$\langle m_\phi(A), x \rangle = \mu_x(A), \quad A \in \Sigma, \quad x \in X.$$

Observamos que m_ϕ está bem definida, pois a medida μ_x é única. Agora verificaremos que efetivamente m_ϕ toma valores em X^* .

De fato, dados $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ notamos que,

$$\begin{aligned} \int_K f \mu_{\alpha x + y}(dt) &= \langle \phi, f \otimes (\alpha x + y) \rangle = \alpha \langle \phi, f \otimes x \rangle + \langle \phi, f \otimes y \rangle \\ &= \alpha \int_K f \mu_x(dt) + \int_K f \mu_y(dt) = \int_K f (\alpha \mu_x + \mu_y)(dt), \quad \forall f \in C(K). \end{aligned}$$

Logo pela unicidade da representação integral, resulta que $\mu_{\alpha x + y} = \alpha \mu_x + \mu_y$. Isto prova que $m_\phi(A)$ é um funcional linear.

Por outro lado, $|\langle m_{\mathbb{F}}(A), x \rangle| = |\mu_x(A)| \leq |\mu_x|(K) = \|\phi_x\| \leq \|\phi\| \|x\|$. Logo $\|m_{\mathbb{F}}(A)\| \leq \|\phi\| < \infty$, portanto $m_{\mathbb{F}}(A)$ é contínuo.

Assim temos provado que $m_{\mathbb{F}}(A) \in X^*$.

Mais ainda, afirmamos que $m_{\mathbb{F}} \in \mathfrak{M}(\Sigma, X^*)$. Levando em conta que $m_{\mathbb{F}}x = \mu_x$ segue que $m_{\mathbb{F}}$ é completamente aditiva e completamente regular. Além disso, se $A_1, \dots, A_n$ é uma partição de K em elementos disjuntos de Σ , então dado $\varepsilon > 0$ existem $x_1, \dots, x_n \in X$ com $\|x_i\| = 1$, $i=1, 2, \dots, n$ e tais que

$$\sum_{i=1}^n \|m_{\mathbb{F}}(A_i)\| - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^n |\langle m_{\mathbb{F}}(A_i), x_i \rangle| = \sum_{i=1}^n \langle m_{\mathbb{F}}(A_i), z_i \rangle.$$

A última igualdade é válida, se escolhermos convenientemente x_i ou $-x_i$.

Note que $\langle m_{\mathbb{F}}(A_i), z_i \rangle = \mu_{z_i}(A_i) = \int_K \chi_{A_i} \mu_{z_i}(dt)$, $i = 1, \dots, n$,

$$\text{logo } \sum_{i=1}^n \|m_{\mathbb{F}}(A_i)\| - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^n \int_K \chi_{A_i} \mu_{z_i}(dt). \quad (2)$$

Por outro lado, o espaço $C(K)$ é denso em cada um dos espaços clássicos $L^1(\mu_{z_i})$, $i = 1, \dots, n$, em consequência, existem seqüências $(g_j^1), (g_j^2), \dots, (g_j^n)$ de funções em $C(K)$ tais que,

$$\int_K \chi_{A_i} \mu_{z_i}(dt) = \lim_j \int_K g_j^i \mu_{z_i}(dt), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Usando (3) e (1) em (2), temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|m_{\mathbb{F}}(A_i)\| - \varepsilon &\leq \lim_j \sum_{i=1}^n \int_K g_j^i \mu_{z_i}(dt) = \lim_j \sum_{i=1}^n \phi_{z_i}(g_j^i) = \\ \lim_j \sum_{i=1}^n \phi(g_j^i \otimes z_i) &= \lim_j \phi\left(\sum_{i=1}^n g_j^i \otimes z_i\right) \leq \|\phi\| \lim_j \left\| \sum_{i=1}^n g_j^i \otimes z_i \right\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Para obter $|m_{\mathbb{F}}|(K) \leq \|\phi\|$, é suficiente construir seqüências $(h_j^1), \dots, (h_j^n)$ em $C(K)$, satisfazendo (3) e tais que

$$\left\| \sum_{i=1}^n h_j^i \otimes z_i \right\|_{\infty} \leq 1, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Considerando $\nu = \sum_{i=1}^n |\mu_{z_i}|$ e a densidade de $C(K)$ em $L^1(\nu)$ podemos supor que (g_j^i) converge pontualmente ν -q.s. a χ_{A_i} (passando a uma subsequência se for necessário). Note que convergência ν -q.s. implica na convergência μ_{z_i} -q.s. de (g_j^i) para cada $i = 1, \dots, n$.

Definamos as funções h_j^i , da seguinte forma:

$$h_j^i(t) = \frac{g_j^i(t)}{\frac{1}{j} + \left\| \sum_{i=1}^n g_j^i \otimes z_i \right\|_{\infty}}, \quad t \in K, \quad i = 1, \dots, n, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Por um lado temos que h_j^i satisfaz,

$$\left\| \sum_{i=1}^n h_j^i \otimes z_i \right\|_{\infty} = \frac{\left\| \sum_{i=1}^n g_j^i \otimes z_i \right\|_{\infty}}{\frac{1}{j} + \left\| \sum_{i=1}^n g_j^i \otimes z_i \right\|_{\infty}} \leq 1, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, para cada $i = 1, \dots, n$

$$\lim_j h_j^i(t) = \frac{\chi_{A_i}(t)}{\left\| \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} z_i \right\|_{\infty}} = \chi_{A_i}(t), \quad \mu_{z_i}\text{-q. s.}$$

Logo, pelo teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$\int_K \chi_{A_i} \mu_{z_i}(dt) = \lim_j \int_K h_j^i \mu_{z_i}(dt), \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Assim, h_j^i satisfaz as condições desejadas, em consequência $|m_{\Phi}|(K) \leq \|\phi\|$, e em particular m_{Φ} tem variação limitada.

Desta forma, temos uma medida vetorial $m_{\Phi} \in \mathfrak{M}(\Sigma, X^*)$ e

temos que se verifica $\langle \phi, f \rangle = \int_{\mathbf{K}} f \cdot m_{\Phi}(dt)$, $\forall f \in C(\mathbf{K}) \otimes X$.

Agora provaremos que a aplicação $J : (C(\mathbf{K}) \otimes_{\epsilon} X)^* \rightarrow \mathfrak{M}(\Sigma, X^*)$, que leva ϕ em m_{Φ} é uma isometria.

Com efeito, vejamos que

(i) J está bem definida. Consideremos $\phi \in (C(\mathbf{K}) \otimes_{\epsilon} X)^*$, e suponhamos que existe $m \in \mathfrak{M}(\Sigma, X^*)$ tal que $\langle \phi, f \rangle = \int_{\mathbf{K}} f \cdot m(dt)$, $\forall f \in C(\mathbf{K}) \otimes X$. Então para cada $x \in X$

$$\phi_x(f) = \phi(f \otimes x) = \int_{\mathbf{K}} f \otimes x \cdot m(dt) = \int_{\mathbf{K}} f \cdot m_x(dt).$$

Logo pela unicidade na representação integral de ϕ_x resulta que $m_x \equiv \mu_x$, e portanto $m \equiv m_{\Phi}$.

(ii) J é linear. Sejam $\phi, \psi \in (C(\mathbf{K}) \otimes_{\epsilon} X)^*$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.

Desde que para cada $x \in X$, a aplicação $\phi_x \rightarrow \mu_x$ é linear, então podemos dizer que, $\langle m_{\alpha\Phi + \Psi}(A), x \rangle = \alpha \langle m_{\Phi}(A), x \rangle + \langle m_{\Psi}(A), x \rangle$. Logo, $m_{\alpha\Phi + \Psi} = \alpha m_{\Phi} + m_{\Psi}$.

(iii) J é bijetora. Isto é óbvio, pois cada $m \in \mathfrak{M}(\Sigma, X^*)$ define um único funcional $\phi \in (C(\mathbf{K}) \otimes X)^*$, dado por

$$\langle \phi, f \rangle = \int_{\mathbf{K}} f \cdot m(dt).$$

Finalmente, $\|\phi\| = \sup \{ \|\int_{\mathbf{K}} f \cdot m(dt)\| / \|f\| \leq 1 \} \leq |m|(\mathbf{K})$, prova que $\|\phi\| = |m|(\mathbf{K})$. $\square$

Nota: Por uma observação do professor K. Floret, seria possível uma demonstração alternativa (mais simples) do teorema acima, fazendo uso do seguinte teorema de Grothendieck:

Teorema ([8], cap. I, 4.6)

Seja $\varphi: E \otimes F \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação linear. Então $\varphi \in (E \otimes_e F)^*$ se, e somente se, existe uma medida de Borel-Radon μ sobre $B_{E^*} \times B_{F^*}$ (munido com as topologias fracas respectivas) tal que, para todo $z \in E \otimes F$

$$\langle \varphi, z \rangle = \int_{B_{E^*} \times B_{F^*}} \langle x^* \otimes y^*, z \rangle \mu(d(x^*, y^*)).$$

A medida μ pode ser escolhida positiva e tal que,

$$\|\mu\| = \mu(B_{E^*} \times B_{F^*}) = \|\varphi\|.$$

Neste caso, a medida vetorial m_φ correspondente a um elemento $\varphi \in C(K, X)^*$ estaria definida diretamente pela representação acima após algumas identificações.

C A P I T U L O I I I

C A R A C T E R I Z A Ç Ã O D E $L^1_B(F)^*$, C O M F M E D I D A V E T O R I A L

I I I . 1 . I n t r o d u ç ã o

Denotaremos por Ω a um conjunto qualquer, por Σ a uma σ -álgebra e por X a um espaço de Banach.

Motivada pela dualidade entre os espaços clássicos de funções $L^1(\mu)$ e $L^\infty(\mu)$ é natural perguntar quando que esta dualidade pode ser estendida para espaços mais gerais, como por exemplo para funções vetoriais e/ou medidas vetoriais.

Quando μ é uma medida escalar e $L^1(\mu, X)$ o espaço das funções a valores em X , Bochner integráveis, conhece-se o seguinte fato:

" $L^1(\mu, X)^*$ é isomorfo a $L^\infty(\mu, X^*)$ se, e somente se, X^* tem a propriedade de Radon-Nikodym". (ver [9], pág. 98)

Para espaços sem a propriedade de Radon-Nikodym, $L^1(\mu, X)^*$ pode ser caracterizado como uma classe de funções fracamente mensuráveis (ver [1]).

No caso em que $F: \Sigma \rightarrow X$ é uma medida vetorial, ainda é possível estabelecer uma dualidade entre o espaço $L^1_B(F)$, das funções reais, Bartle integráveis (introduzido em I.3) e um espaço de funções essencialmente limitadas. Neste capítulo, estudamos o trabalho de Egghe [12], onde é introduzido uma estrutura conveniente de espaço normado em $L^1_B(F)$ para estabelecer esta dualidade.

III. 2. Estrutura do espaço $L^1_B(F)$

Seja $F: \Sigma \rightarrow X$ uma medida vetorial, σ -aditiva, de variação limitada.

Como a função real $f \in \mathfrak{L}^1_B(F)$ (veja I.3) é $|x^*F|$ -integrável (proposição 1.19), podemos definir uma seminorma sobre $\mathfrak{L}^1_B(F)$ por,

$$\|f\|_a = \text{Sup} \left\{ \int_{\Omega} |f| |x^*F|(dt) \mid x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\}, \quad f \in \mathfrak{L}^1_B(F).$$

Na proposição 3.1 veremos que $\|f\|_a < \infty$. Desta forma, temos que $\|\cdot\|_a$ é uma seminorma, uma vez que é dada por um supremo de seminormas.

Além disso, com a proposição 1.8(D), é fácil ver que

$$\|f\| = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0 \text{ F-q.s. .}$$

Podemos então introduzir um espaço quociente dado por,

$$L_{\mathbb{B}}^1(F) = \mathfrak{L}_{\mathbb{B}}^1(F) / N, \text{ onde } N = \{ f \in \mathfrak{L}_{\mathbb{B}}^1 / f \equiv 0 \text{ F-q.s.} \}.$$

Em consequência, $L_{\mathbb{B}}^1(F)$ é um espaço normado munido da norma quociente.

Proposição 3.1

As definições abaixo determinam normas equivalentes em $L_{\mathbb{B}}^1(F)$.

$$(i) \quad \|f\|_a = \text{Sup} \left\{ \int_{\Omega} |f| |x^* F| (dt) / x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\}.$$

(ii) $\|f\|_b = \|G\|_{K\Omega}$, onde a medida vetorial $G: \Sigma \rightarrow X$ está dada por $G(A) = \int_A f F (dt)$.

$$(iii) \quad \|f\|_c = \text{Sup} \left\{ \|G(A)\| / A \in \Sigma \right\}.$$

Demonstração:

Por definição, $\|f\|_b = \|G\|_{K\Omega} = \text{Sup} \left\{ |x^* G|(\Omega) / x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\}$ e lembrando que $|x^* G|(\Omega) = \int_{\Omega} |f| |x^* F| (dt)$ (ver [13]), segue-se que $\|f\|_b = \|f\|_a$.

Pela proposição 1.8(ii) obtemos,

$$\|f\|_c \leq \|f\|_b \leq 4 \|f\|_c.$$

Além disso, como a medida escalar $x^* G$ é σ -aditiva, então em vista da proposição 2.5(i) temos que $\|G\|_{K\Omega} < \infty$, logo $\|f\|_b < \infty$.

Portanto (i), (ii) e (iii) são normas equivalentes em $L_{\mathbb{B}}^1(F)$. $\square$

Nota: A norma $\| \cdot \|_a$ é chamada semivariacional.

Observação 3.2

O espaço das funções simples $\mathcal{S}(\Sigma)$, introduzido em I.3, é denso em $L^1_B(F)$, pois se $f \in L^1_B(F)$ então por definição existe uma sequência de funções simples (f_n) tal que,

$$\lim_n \left\| \int_A (f - f_n) \cdot F(dt) \right\| = 0, \text{ uniformemente para } A \in \Sigma.$$

Logo dado $\varepsilon > 0$, existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\left\| \int_A (f - f_n) \cdot F(dt) \right\| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N, \quad \forall A \in \Sigma.$$

Então, $\| f - f_n \|_c = \text{Sup} \left\{ \left\| \int_A (f - f_n) \cdot F(dt) \right\| / A \in \Sigma \right\} \leq \varepsilon$,

$\forall n \geq N$. Portanto (f_n) converge a f na norma semivariacional.

Observação 3.3

Em seu trabalho, Egghe afirma que o espaço $(L^1_B(F), \| \cdot \|_a)$ é completo. Embora não usarmos esta propriedade, não foi possível demonstra-la.

III. 3. Caracterização do dual do espaço $(L^1_B(F), \| \cdot \|_a)$

O próximo teorema é um importante resultado de Debieve que faremos uso para caracterizar o dual de $L^1_B(F)$. O resultado de Debieve garante a existência da derivada de Radon-Nikodym de $|F|$ com respeito a F em qualquer espaço de Banach X . A prova está baseada no lema de Exaustão que introduzimos abaixo.

Lema 3.4 (Lema de Exaustão)

Sejam μ uma medida não negativa definida sobre Σ e $\mathcal{G}$ uma coleção de conjuntos mensuráveis, tais que:

(i) Se $A \in \mathcal{G}$, logo todo subconjunto mensurável de A pertence a $\mathcal{G}$.

(ii) Para cada $A \in \Sigma$ com $\mu(A) > 0$, existe um subconjunto E de A tal que $E \in \mathcal{G}$ e $\mu(E) > 0$.

Então, existe uma sequência (A_n) de elementos disjuntos de $\mathcal{G}$ tal que $\mu(\Omega \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$.

Este lema é consequência do lema de exaustão que aparece em [9], pág. 70.

Teorema 3.5

Seja $F: \Sigma \rightarrow X$ uma medida vetorial, σ -aditiva e de variação limitada. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe uma aplicação Bochner integrável $f: \Omega \rightarrow X^*$, $f \in \mathfrak{B}^{\infty}(|F|, X^*)$, de modo que $1 \leq \|f(t)\| \leq 1 + \varepsilon$, $\forall t \in \Omega$ e

$$|F|(A) = \int_A f \cdot F(dt), \quad \forall A \in \Sigma.$$

Demonstração:

Seja $x^* \in X^*$, $\|x^*\| < 1$. Note que a medida escalar x^*F é absolutamente contínua com respeito a $|F|$, logo pelo teorema de Radon-Nikodym clássico temos uma função $f_{x^*} \in L^{\infty}(|F|)$, que satisfaz

$$|f_{x^*}(t)| \leq 1, \quad |F| \text{-q.s.} \quad \text{e} \quad x^*FCAD = \int_A f_{x^*} |F|(dt), \quad \forall A \in \Sigma.$$

Defina agora o conjunto $A_{x^*} = \{ t \in \Omega / |f_{x^*}(t)| \geq \frac{1}{1+\varepsilon} \}$ e a coleção $\mathfrak{C} = \{ E \in \Sigma / \text{existe } x^* \in X^*, \|x^*\| = 1 \text{ tal que } E \subseteq A_{x^*} \}$.

Afirmação: $\mathfrak{C}$ satisfaz as condições do lema anterior, com $\mu = |F|$.

De fato, é claro que a condição (D) do lema 3.4 é satisfeita.

Por outro lado, seja o conjunto $E \in \Sigma$ com $|F|(E) > 0$, logo $|F|(E) > \frac{1}{1+\varepsilon} |F|(E)$. Então existe uma partição finita de E em elementos de Σ , digamos $E_1, E_2, \dots, E_n$ tais que,

$$|F|(E) \geq \sum_{i=1}^n \|FCE_i\| > \frac{1}{1+\varepsilon} |F|(E) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\varepsilon} |F|(E_i).$$

Em consequência, existe um índice $1 \leq i_0 \leq n$, tal que $\|FCE_{i_0}\| > \frac{1}{1+\varepsilon} |F|(E_{i_0})$.

Desta desigualdade obtemos um funcional $x^* \in X^*$, $\|x^*\| = 1$ que verifica $\|FCE_{i_0}\| \geq |x^*FCE_{i_0}| > \frac{1}{1+\varepsilon} |F|(E_{i_0})$. (1)

Colocado $A = E_{i_0} \cap A_{x^*}$, temos claramente que $A \in \mathfrak{C}$, $A \subseteq E$. Resta provar que $|F|(A) > 0$.

De fato, suponha que $|F|(A) = 0$. Chamemos $B = E_{i_0} \setminus A_{x^*}$, então pela definição de A_{x^*} temos,

$$|x^*F|(B) = \int_B |f_{x^*}| |F|(dt) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} |F|(B).$$

Como $|F|(A) = 0$ então $|x^*FCE_{i_0}| \leq |x^*F|(E_{i_0}) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} |F|(E_{i_0})$.

Logo, $\|FCE_{i_0}\| \leq \frac{1}{1+\varepsilon} |F|(E_{i_0})$, o que contradiz a escolha de E_{i_0} .

Assim se verificam as hipóteses do lema 3.4, logo existe uma sequência (A_n) de conjuntos disjuntos, onde cada $A_n \in \mathfrak{C}$, e

$$|F|(\Omega \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0.$$

Seja φ_n o funcional tal que $A_n \subseteq A_{\varphi_n}$ e definamos:

$$f(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} (f_{\varphi_n}(t))^{-1} \varphi_n \chi_{A_n}(t), & \text{se } t \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \\ 0, & \text{se } t \in \Omega \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \end{cases} \quad (2)$$

Vamos ver que $f: \Omega \rightarrow X^*$ satisfaz as condições do teorema.

Em primeiro lugar temos $\|f(t)\| = \|(f_{\varphi_n}(t))^{-1} \varphi_n\| = \|f_{\varphi_n}(t)\|^{-1}$, se $t \in A_n$ então, $1 \leq \|f(t)\| \leq 1 + \varepsilon$, $|F|$ -q.s. .

Além disso, pela proposição 1.28, $f(t)$ é $|F|$ -mensurável, pois cada parcela da série (2) é mensurável. Segue então que $f \in L^{\infty}(|F|, X^*)$.

Por outro lado, seja $A \in \Sigma$. Para cada n a função f restrita a A_n está dada por $f(t) = (f_{\varphi_n}(t))^{-1} \varphi_n$. É fácil ver que existe uma sequência de funções simples (f_j) definidas em A_n , da forma $f_j(t) = g_j(t) \varphi_n$ onde as g_j são funções simples reais, e as f_j verificam:

$$\int_{A \cap A_n} f \cdot F(dt) = \lim_j \int_{A \cap A_n} g_j \varphi_n \cdot F(dt). \quad (3)$$

Se escrevermos $g_j(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \chi_{A_{ij}}$ então,

$$\begin{aligned} \int_{A \cap A_n} g_j \varphi_n \cdot F(dt) &= \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \langle \varphi_n, F(E_{ij}) \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \int_{E_{ij}} f \varphi_n |F|(dt) = \\ &= \int_{A \cap A_n} g_j f \varphi_n |F|(dt). \end{aligned} \quad (4)$$

Por T.C.D. de Lebesgue $\lim_j \int_{A \cap A_n} \varepsilon_j f \varphi_n |F|(dt) = |F|(A \cap A_n)$.

Segue de (3) e (4) que, $\int_{A \cap A_n} f \cdot F(dt) = |F|(A \cap A_n)$.

Finalmente, $\int_A f \cdot F(dt) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A \cap A_n} f \cdot F(dt) = |F|(A)$. $\square$

Lema 3.6

Se $f \in L^{\infty}(|F|, X^*)$, então

$$\int_A f \cdot F(dt) = 0, \quad \forall A \in \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\Omega} fg \cdot F(dt) = 0, \quad \forall g \in L^1(|F|).$$

Aqui a função $fg: \Omega \rightarrow X^*$ é dada pela multiplicação escalar $fg(t) = f(t)g(t)$, $t \in \Omega$.

Demonstração:

($\Leftarrow$) Se $\int_{\Omega} fg \cdot F(dt) = 0$, $\forall g \in L^1(|F|)$, em particular tomando $g = \chi_A$ obtemos $\int_A f \cdot F(dt) = 0$, $\forall A \in \Sigma$.

($\Rightarrow$) Notamos que $\int_{\Omega} fg \cdot F(dt) = 0$ (*), quando g é uma função característica. Logo (*) é válida quando g é qualquer função simples. Desde que existe uma sequência de funções simples (g_n) , tal que,

$$\int_{\Omega} fg \cdot F(dt) = \lim \int_{\Omega} fg_n \cdot F(dt) = 0, \quad \forall g \in L^1(|F|),$$

temos que (*) vale para toda $g \in L^1(|F|)$. $\square$

Nota: $(L^1(|F|), \|\cdot\|_a)$ é o subespaço de $(L^1_B(F), \|\cdot\|_a)$, das funções $|F|$ -Lebesgue integráveis munido com a norma induzida.

Lema 3.7

$$(L^1_B(F), \| \cdot \|_a)^* = L^1(|F|)^*.$$

Demonstração:

Pela observação 3.2 vemos que o subespaço de $(L^1(|F|), \| \cdot \|_a)$ das funções simples é denso em $(L^1_B(F), \| \cdot \|_a)$. Então todo funcional sobre $L^1(|F|)$ estende-se de maneira única a $L^1_B(F)$. Portanto

$$(L^1_B(|F|), \| \cdot \|_a)^* = (L^1_B(F), \| \cdot \|_a)^*. \quad \square$$

O seguinte teorema caracteriza o dual de $L^1_B(F)$.

Teorema 3.8

$$(L^1_B(F), \| \cdot \|_a)^* \cong L^\infty(|F|, X^*) / M.$$

Onde $M = \{ f \in L^\infty(|F|, X^*) / \int_A f \cdot F dt = 0, \forall A \in \Sigma \}$.

Demonstração:

Pelo lema anterior é suficiente provar que $(L^1(|F|), \| \cdot \|_a)^*$ é isomorfo a $L^\infty(|F|, X^*) / M$.

Seja $g \in L^\infty(|F|, X^*) / M$, ou seja g tem a forma $g = g' + M$, onde $g' \in L^\infty(|F|, X^*)$.

Definamos $\varphi_g: L^1(|F|) \rightarrow \mathbb{R}$, como $\varphi_g(f) = \int_\Omega f g \cdot F dt$, esta definição tem sentido pois $f g \in L^1_B(F)$.

Para ver que φ_g está bem definida tomemos $g = g' + M = g'' + M$,

onde $g, g' \in L^\infty(|F|, X^*)$, então $g - g' \in M$ e pelo lema 3.6, temos $\int_{\Omega} (g - g')f \cdot F(dt) = 0, \quad \forall f \in L^1(|F|)$. Portanto,

$$\int_{\Omega} gf \cdot F(dt) = \int_{\Omega} g'f \cdot F(dt) = \varphi_g(f).$$

Afirmamos que a aplicação $\varphi : L^\infty(|F|, X^*) / M \rightarrow (L^1(|F|), \|\cdot\|_1)^*$ dada por $\varphi(g) = \varphi_g$ é um isomorfismo. De fato:

(i) Da linearidade do operador integral, segue-se que φ é linear.

(ii) Para ver que φ é contínua, seja $g = g + M$, onde $g \in L^\infty(|F|, X^*)$. Analogamente a demonstração 1.19(ii) prova-se que dado um número $N > \|g\|_\infty$ existe uma sequência (g_n) em $\mathcal{E}_X^*(\Sigma)$, uniformemente limitada por N , convergindo pontualmente a g e tal que $\int_{\Omega} g \cdot F(dt) = \lim_n \int_{\Omega} g_n \cdot F(dt)$.

Logo se colocamos $g_n = \sum_{i=1}^p \alpha_{ni} \chi_{A_{ni}}$, então $\forall f \in L^1(|F|)$,

$$\left| \int_{\Omega} g_n f \cdot F(dt) \right| \leq N \left\| \sum_{i=1}^p \frac{1}{N} \alpha_{ni} \int_{A_{ni}} f \cdot F(dt) \right\| \leq N \|f\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente, $|\varphi_g(f)| = \left| \int_{\Omega} gf \cdot F(dt) \right| \leq N \|f\|$.

Como N foi tomado arbitrariamente, satisfazendo $N \geq \|g\|_\infty$, então, $|\varphi_g(f)| \leq \|g\|_\infty \|f\|, \quad \forall f \in L^1(|F|)$. Portanto φ é contínua.

(iii) φ é injetora. Pois se $\varphi_g \equiv 0$, então $\int_{\Omega} gf \cdot F(dt) = 0, \quad \forall f \in L^1(|F|)$, logo pelo lema 3.6 $g \in M$. Portanto $g \equiv 0$.

(iv) φ é sobrejetora. Para provar isto observemos que $\|f\|_c \leq \int_{\Omega} |f| \cdot |F|(dt) = \|f\|_1$. Logo se $\phi \in (L^1(|F|), \|\cdot\|_1)^*$ então $\phi \in (L^1(|F|), \|\cdot\|_1)^* = L^\infty(|F|, \|\cdot\|_\infty)$. Seja $l \in L^\infty(|F|)$ a função

tal que $\phi(f) = \int_{\Omega} f \ell |F|(dt)$, $\forall f \in L^1(|F|)$.

Pelo teorema 3.5 temos uma aplicação $h: \Omega \rightarrow X^*$, $h \in L^\infty(|F|, X^*)$ tal que, $|F|(A) = \int_A h \cdot F(dt)$ (*). Em consequência a igualdade $\int_{\Omega} f |F|(dt) = \int_{\Omega} hf \cdot F(dt)$ é válida para toda $f \in \mathcal{G}(\Sigma)$ e portanto para toda $f \in L^1(|F|)$.

Como $f \ell \in L^1(|F|)$, então de (*) temos que,

$$\phi(f) = \int_{\Omega} f \ell |F|(dt) = \int_{\Omega} hf \ell \cdot F(dt).$$

Seja $g = \ell h + M$. Claramente $g \in L^1(|F|, X^*)/M$ e também

ϕ_g . $\square$

BIBLIOGRAFIA

- [1] Badrikian, A. - Prolegomènes au calcul des probabilités dans les Banach. Lecture Notes in Math., vol 539, 1976.
- [2] Bartle, R. G. - A general bilinear vector integral. Studia Math., 15, 337-352, 1956.
- [3] Bartle R. G. - The elements of integration. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1966.
- [4] Bartle R. G., Dunford, N. & Schwartz, J. - Weak compactness and vector measures. Canadian J. Math., 7, 289-305, 1955.
- [5] Beauzamy, B. - Introduction to Banach spaces and their geometry. Notas de Matemática, 86, North-Holland Publishing Company, 1982.
- [6] Conway, J. - A course in functional analysis. Springer-Verlag, 1985.
- [7] Debiève, C. - On a Radon-Nikodym problem for vector-valued measures. Pacific J. Math., 107, 335-339, 1983.

- [8] Defant, A. & Floret, K. - Tensor norms and operator ideals. A aparecer.
- [9] Diestel, J. & Uhl, J. J. - Vector measures. Math. Surveys of the A.M.S., vol 15, 1977.
- [10] Dinculeanu, N. - Vector measures. Pergamon Press, New York, 1967.
- [11] Dunford, N. & Schwartz, J. - Linear Operators, part I, Interscience, New York and London, 1958.
- [12] Egghe, L. - The dual of $L^1(\mu)$, with μ a vector measure. Rev. Roumaine Math. Pures et Appl., 29, 467-471, 1984.
- [13] Halmos, P. R. - Measure Theory. Graduate Texts in Mathematics, vol 18, Springer-Verlag. Inc., New York, 1974.
- [14] Lewis, D. R. - Integration with respect to vector measures. Pac. J. Math., 33, 1, 157-165, 1970.
- [15] Schaefer, H. - Topological vector spaces. Springer-Verlag, 1970.
- [16] Singer, I. - Les duals de certaines espaces de Banach de champs de vecteurs I. Bull. Sci. Math., 82, 29-40, 1958.
- [17] Singer, I. - Sur les applications linéaires intégrales des espaces de fonctions continues I, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 4, 391-401, 1959.