

URIBE

SOLUÇÕES DE SISTEMAS SIMÉTRICOS HIPERBÓLICOS  
E UM TIPO PARTICULAR DE PERTURBAÇÃO

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pela Srta. Eugenia Brunilda Opazo Uribe e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 1 de Dezembro de 1989

Prof. Dr.

Jerald J. J. J.

Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, Unicamp, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Às pessoas que eu amo,  
dedico.

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Geraldo S.S. Ávila, pela valiosa orientação que me possibilitou o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores Maria Elena San Martín e Víctor Ayala da Universidad Austral de Chile, pelo apoio e incentivo.

Aos meus pais e irmãos, que souberam suportar e compreender a minha ausência, respeitando a minha escolha.

À Doris, pela amizade, apoio e segurança que me transmitiu nos momentos difíceis.

Aos colegas Emília de Mendonça Rosa, Carlos Roberto de Moraes, Joselito de Oliveira, Geraldo Marcio de Azevedo Botelho, amigos inesquecíveis.

Ao Ciro, pelo apoio durante toda realização deste trabalho.

À Emma, Rosangela, Olga, Nilda, pela convivência agradável de todos os dias.

Ao CNPq e CAPES pelo apoio financeiro.

A todos aqueles que direta ou indiretamente me apoiaram e incentivaram.

*Eugenia.*

## INDICE

INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 1	
A EQUAÇÃO DAS ONDAS	4
1.1. Introdução	4
1.2. A equação das ondas em uma dimensão	4
1.2.1. Solução geral e problema de Cauchy	4
1.2.2. Domínio de dependência e influência	6
1.3. A equação das ondas em três dimensões	8
1.3.1. O problema de Cauchy	8
1.3.2. Domínios de dependência e influência	11
1.3.3. Interpretação física	12
1.4. A equação das ondas em duas dimensões	13
1.4.1. O problema de Cauchy	13
1.4.2. Interpretação física	14
CAPÍTULO 2	
SISTEMAS HIPERBÓLICOS. CONSERVAÇÃO DE ENERGIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO	16
2.1. Introdução	16
2.2. Propriedades dos autovalores e autovetores	20

2.3. Conservação da energia. Unicidade	22
2.4. O teorema do domínio de dependência	30
CAPÍTULO 3	
EXISTÊNCIA DA SOLUÇÃO	34
3.1. Introdução	34
3.2. Existência de solução com dado inicial em $[Y(\mathbb{R}^n)]^k$	37
3.3. Solução com dado inicial em $[C^\infty(\mathbb{R}^n)]^k$	43
3.4. Dependência contínua da solução com relação ao dado inicial	45
CAPÍTULO 4	
SOLUÇÕES COM ENERGIA FINITA	50
4.1. Introdução	50
4.2. Soluções com energia finita	51
CAPÍTULO 5	
O PROBLEMA PERTURBADO E A EXISTÊNCIA DO OPERADOR DE ONDA	60
5.1. Introdução	60
5.2. Existência do operador de onda	64
OBSERVAÇÕES FINAIS	71
BIBLIOGRAFIA	73

## INTRODUÇÃO

O presente trabalho será dedicado ao estudo de soluções de sistemas simétricos hiperbólicos de equações diferenciais parciais. Sistemas deste tipo representam a forma geral de muitas equações da física matemática, como por exemplo as equações de Maxwell, as equações de linhas de transmissão, as equações de elasticidade e das ondas acústicas.

O capítulo 1, sobre a equação das ondas em uma, duas e três dimensões espaciais, serve como introdução, onde mostramos numa situação bem simples, fatos válidos, em geral, para sistemas.

Discutiremos o problema de Cauchy para o sistema

$$E(x) \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

com dado inicial

$$u(x, 0) = f(x), \quad (2)$$

onde  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}$  representa o tempo,  $u = u(x, t)$  é um vetor de  $k$  componentes e  $E(x), A_1, \dots, A_n$  são matrizes  $k \times k$  com as seguintes propriedades:

- (i)  $E(x)$  é real, simétrica e definida positiva,
- (ii) As matrizes  $A_1, \dots, A_n$  são reais, simétricas e constantes.

Primeiro faremos a discussão do problema de Cauchy para o

caso em que  $E(x) = I$ , isto é,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0, \quad (3)$$

e que chamaremos de problema não perturbado.

Em geral, sistemas deste tipo são estudados fazendo hipóteses adicionais sobre as matrizes  $A_j$ 's. Lax ([7], cap. 6), por exemplo, estudou estes sistemas exigindo que as raízes  $\lambda = \lambda(p)$  da equação característica

$$P(\lambda, p) = \det(\lambda I - \sum_{j=1}^n p_j A_j) = 0$$

fossem todas diferentes de zero para  $p \neq 0$ .

Para o nosso trabalho não faremos mais hipóteses sobre as matrizes  $A_j$ 's que as especificadas em (ii). Isto é importante porque existem alguns sistemas, como os da magnetogasdinâmica, que possuem raízes  $\lambda(p)$  que se anulam para certos  $p \neq 0$ , mas não identicamente [1]. Foi provado em [1], que se as raízes características  $\lambda(p)$  não são identicamente nulas então o conjunto dos  $p$  onde  $\lambda(p) = 0$  é de medida zero.

No capítulo 2 fazemos a apresentação do sistema; introduzimos o conceito de energia da solução e demonstramos o teorema de conservação da energia que nos permite fazer uma demonstração simples da unicidade da solução do problema (3). Demonstramos também o teorema do domínio de dependência que mais tarde nos permitirá considerar o dado inicial em  $[C^{\infty}(\mathbb{R}^n)]^k$ .

No capítulo 3, usamos a transformada de Fourier para mostrar a existência da solução do problema de Cauchy (2), (3)

quando o dado inicial pertence a  $[\mathcal{Y}(\mathbb{R}^n)]^k$ . Usamos o teorema do domínio de dependência provado no capítulo 2 para remover a restrição no infinito para o dado inicial de maneira que este último possa ser uma função arbitrária em  $[C^0(\mathbb{R}^n)]^k$ . Como consequência da unicidade da solução, provada no capítulo 2, e do teorema do gráfico fechado, provamos a dependência contínua com relação ao dado inicial.

No capítulo 4, consideramos os dados iniciais no espaço de Hilbert  $\mathcal{X} = [L^2(\mathbb{R}^n)]^k$  e usamos o teorema de Stone para provar que o sistema (3) com dado inicial em  $\mathcal{X}$  tem uma única solução que será chamada solução com energia finita.

Finalmente, no capítulo 5, consideramos o problema de Cauchy (1),(2) que chamaremos de problema perturbado. Neste caso, como  $E(x)$  não é constante, não podemos usar a transformada de Fourier para obter uma solução explícita de (1),(2); o teorema de Stone nos fornece uma solução para este problema. Fazendo certas restrições sobre a matriz  $E(x)$  mostramos a existência do operador de onda, que aparece de maneira natural ao comparar as soluções obtidas usando o teorema de Stone para o problema perturbado e o problema não perturbado.

# CAPÍTULO 1

## A EQUAÇÃO DAS ONDAS

### 1.1. INTRODUÇÃO

As equações diferenciais parciais hiperbólicas caracterizam-se como aquelas para as quais o problema de Cauchy é sempre bem posto na classe das funções infinitamente diferenciáveis.

O protótipo deste tipo de equações é a chamada equação das ondas,

$$\frac{1}{c^2} \cdot u_{tt} - \Delta u = 0,$$

cujas propriedades tipificam muito bem tudo o que se passa com equações hiperbólicas mais gerais. Daí a conveniência de começarmos com uma súpula de resultados para a equação das ondas.

### 1.2. A EQUAÇÃO DAS ONDAS EM UMA DIMENSÃO.

#### 1.2.1. SOLUÇÃO GERAL E PROBLEMA DE CAUCHY.

Consideremos a equação das ondas em uma dimensão,

$$\frac{1}{c^2} \cdot u_{tt} - u_{xx} = 0, \tag{1}$$

onde  $u$  é uma função de duas variáveis independentes  $x$  e  $t$ , geralmente identificadas com a posição e o tempo respectivamente;  $c$  é uma constante positiva dada.

D'Alembert mostrou, em 1.747, que a equação (1) tem uma solução geral dada por

$$u(x,t) = F(x + ct) + G(x - ct), \quad (2)$$

onde  $F$  e  $G$  são funções arbitrárias, ([5],cap.2). Esta fórmula mostra que qualquer solução da equação (1) é a superposição de ondas de dois tipos:  $F(x + ct)$ , que permanece constante ao longo das retas  $x + ct = \text{cte.}$ ; e  $G(x - ct)$ , que permanece constante ao longo das retas  $x - ct = \text{cte.}$  Fisicamente,  $F(x + ct)$  representa uma perturbação que se propaga ao longo do eixo dos  $x$  sem se deformar, com velocidade  $-c$  e  $G(x - ct)$  uma que se propaga com velocidade  $c$ .

Se à equação (1) impomos as condições iniciais

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) \quad (3)$$

obtemos a fórmula de d'Alembert adaptada a essas condições:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \left[ f(x + ct) + f(x - ct) \right] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi. \quad (4)$$

Para  $f \in C^2$  e  $g \in C^1$  a fórmula (4) representa uma solução  $u \in C^2$  do problema de valores iniciais (1),(3). Deste raciocínio segue, em particular, que esta solução é única.

A solução  $u$  do problema de valores iniciais (1),(3) depende continuamente dos dados iniciais, isto é, se  $u_1$  e  $u_2$  são soluções do problema de Cauchy (1),(3) com dados  $f_1, g_1$  e  $f_2, g_2$ ; e se restringimos  $t$  a um intervalo  $0 \leq t \leq T$ , temos que dado  $\varepsilon > 0$ , basta tomar  $\delta < \varepsilon(1 + T)^{-1}$  para obtermos

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \varepsilon,$$

toda vez que

$$|f_1(x) - f_2(x)| < \delta \quad \text{e} \quad |g_1(x) - g_2(x)| < \delta.$$

Portanto, o problema de Cauchy para a equação da onda em uma dimensão é um problema bem posto no sentido de Hadamard:

o problema tem solução,

a solução é única,

a solução depende continuamente dos dados iniciais.

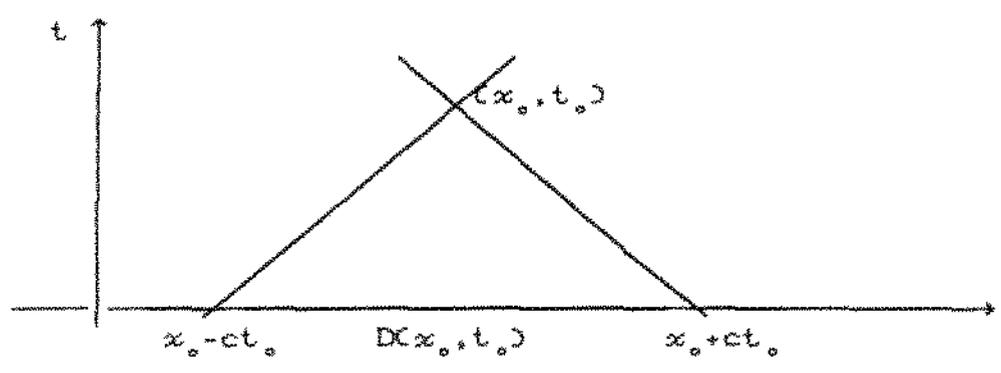
### 1.2.2. DOMINIO DE DEPENDENCIA E INFLUENCIA

A fórmula (4) mostra que a solução do problema de valor inicial no ponto  $x_0$  no instante  $t_0$  depende unicamente dos dados iniciais  $f$  e  $g$  no intervalo

$$D(x_0, t_0) = \left\{ \xi : x_0 - ct_0 \leq \xi \leq x_0 + ct_0 \right\}.$$

Por esta razão este intervalo é chamado, de maneira natural, o

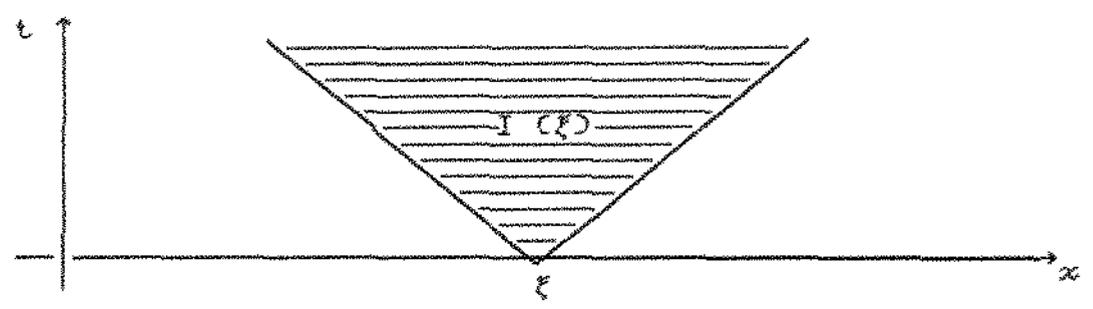
domínio de dependência do ponto  $(x_0, t_0)$ . Os valores dos dados iniciais fora do domínio de dependência não afetam o valor da solução em  $(x_0, t_0)$ .



A fórmula de d'Alembert também nos mostra que os valores de  $f$  e  $g$ , no ponto  $\xi$ , influenciam os valores de  $u$  somente no conjunto

$$I(\xi) = \{ (x, t) : x - ct \leq \xi \leq x + ct \}$$

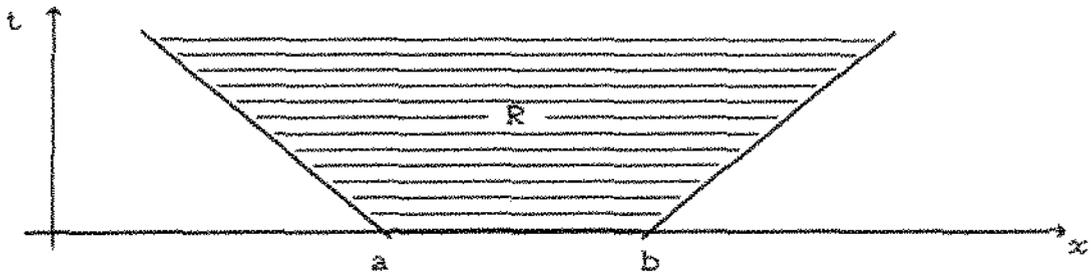
que, por esta razão, é chamado o domínio de influência do ponto  $\xi$ .



Supondo que os dados iniciais  $f$  e  $g$  se anulam fora de um

intervalo  $[a,b]$  segue-se que a solução (4) é, necessariamente, nula fora da região

$$R = \bigcup_{\xi \in [a,b]} I(\xi).$$



$R$  é chamada a região de influência dos dados iniciais. Portanto, se as perturbações iniciais estão concentradas em um intervalo  $[a,b]$ , elas podem afetar um ponto  $x_0 > b$  apenas depois de um tempo

$$t_0 = (x_0 - b)/c ,$$

e um ponto  $x_1 < a$  somente depois de um tempo

$$t_1 = (x_1 - a)/-c .$$

Vemos assim que as perturbações iniciais propagam-se com velocidades maiores ou iguais que  $-c$  e menores ou iguais que  $c$ .

### 1.3. A EQUAÇÃO DAS ONDAS EM TRÊS DIMENSÕES

#### 1.3.1. O PROBLEMA DE CAUCHY

Consideremos o problema de Cauchy para a equação das

ondas em três dimensões espaciais, o qual consiste em achar uma função  $u(x,t)$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$  tal que

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, \quad (5)$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x). \quad (6)$$

Um dos métodos usados para resolver o problema de valores iniciais (5),(6) é o das médias esféricas, devido a Poisson. A idéia fundamental é reduzir o problema ao caso unidimensional, cuja solução é dada pela fórmula de d'Alembert ([5], p.103).

Se  $h(x) = h(x_1, x_2, x_3)$  é uma função contínua, definimos sua média esférica pela fórmula

$$M_h(x,r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|y-x|=r} h(y) dS_y, \quad (7)$$

onde  $r$  é um número real não negativo e a integração é feita sobre a superfície da esfera de raio  $r$  e centro  $x$ . A média esférica de  $h$  pode ser definida de maneira equivalente, como

$$M_h(x,r) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\xi|=1} h(x + r\xi) dS_\xi, \quad (8)$$

onde agora integramos sobre a superfície da esfera unitária.

Supondo que o problema de valores iniciais (5),(6) tenha uma solução  $u(x,t)$  de classe  $C^2$  e formando a média esférica de  $u$  como função de  $x$ ,

$$M_u(x, r, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\xi|=1} u(x + r\xi, t) dS_\xi, \quad (9)$$

pode-se mostrar ([5], p.105) que  $rM_u(x, r, t)$  é uma solução da equação unidimensional das ondas com valores iniciais

$$rM_u = rM_f(x, r), \quad \frac{\partial}{\partial t} rM_u = rM_g(x, r). \quad (10)$$

Logo, da fórmula de d'Alembert segue-se que

$$rM_u(x, r, t) = \frac{1}{2} \left[ (r+ct)M_f(x, r+ct) + (r-ct)M_f(x, r-ct) \right] + \frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{ct+r} \xi M_g(x, \xi) d\xi,$$

donde obtemos

$$u(x, t) = tM_g(x, ct) + \frac{\partial}{\partial t} \left[ tM_f(x, ct) \right], \quad (11)$$

isto é,

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} g(y) dS_y + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} f(y) dS_y \right] \quad (12)$$

Assim, se  $u$  é solução do problema (5),(6) com  $f \in C^3$  e  $g \in C^2$ , então  $u$  será de classe  $C^2$  e será determinada de maneira única pela fórmula (12). Por outro lado, verifica-se diretamente que esta fórmula é de fato solução do problema (5),(6).

### 1.3.2. DOMÍNIOS DE DEPENDÊNCIA E INFLUÊNCIA

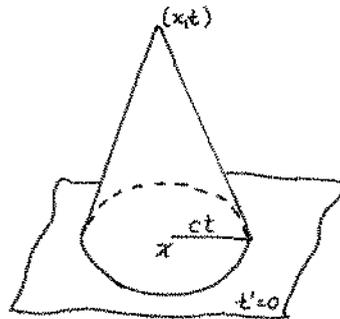
Examinando a fórmula (12) vemos que o valor de  $u(x,t)$  depende dos valores iniciais apenas sobre a esfera  $S(x,t)$  de centro  $x$  e raio  $ct$ . Assim o domínio de dependência para  $u(x,t)$  é a esfera  $S^2$

$$S(x,t) = \{y : |y - x| = ct\}.$$

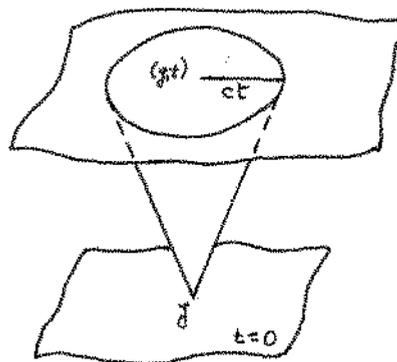
Note que ela é a interseção do cone em  $\mathbb{R}^4$ ,

$$C(x,t) = \{(y,t') : |y - x| = c(t - t')\}$$

com o hiperplano  $t' = 0$ .



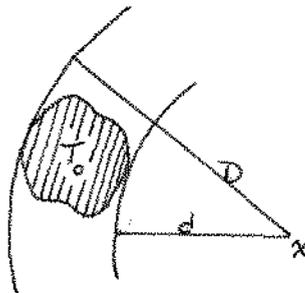
Reciprocamente, os valores dos dados iniciais num ponto  $y$  no plano  $t = 0$  somente influenciam  $u$  no tempo  $t$  em pontos  $(x,t)$  pertencentes à esfera  $|y - x| = ct$ .



### 1.3.3. INTERPRETAÇÃO FÍSICA

Vamos nos limitar ao estudo da propagação de uma perturbação local, isto é, quando as condições iniciais são diferentes de zero somente numa certa região limitada e fechada  $T_0$ .

Seja  $x$  um ponto fixado, fora da região  $T_0$ .



Pela fórmula (12),  $u(x,t)$  depende somente dos dados iniciais sobre a esfera  $S(x,t)$  de centro  $x$  e raio  $ct$ ; logo  $u(x,t) = 0$  para todo  $t$  para o qual  $S(x,t)$  não intersepta a região  $T_0$ . Então para  $t$  suficientemente pequeno

$$t < t_1 = d/c ,$$

a esfera  $S(x,t)$  não intersepta a região  $T_0$ , e as integrais na fórmula (12) são iguais a zero: a perturbação ainda não chegou ao ponto  $x$ . A partir do instante  $t_1 = d/c$ , até o instante  $t_2 = D/c$ , a esfera  $S(x,t)$  interseparará a região  $T_0$ ; as integrais em (12) serão, em geral, diferentes de zero: o ponto  $x$  foi perturbado. Se  $t$  continua aumentando, a região  $T_0$  estará contida na esfera

$S(x,t)$ , assim as integrais em (12) serão nulas: a perturbação passou pelo ponto  $x$  e não deixou marca. Este fenômeno é conhecido como princípio de Huygens na forma forte. É possível mostrar que, em geral, o princípio de Huygens na forma forte vale para todo  $n$  ímpar maior ou igual que 3 ([3],cap.2).

#### 1.4. A EQUAÇÃO DAS ONDAS EM DUAS DIMENSÕES

##### 1.4.1. O PROBLEMA DE CAUCHY

Podemos resolver o problema de Cauchy para a equação das ondas em duas dimensões espaciais usando o método da descida de Hadamard. Com este método podemos obter a solução de uma equação diferencial parcial considerando-a como uma solução especial de outra equação que envolve mais variáveis independentes e pode ser resolvida.

Neste caso particular uma solução  $u(x_1, x_2, t)$  de (5),(6) para  $n = 2$  pode ser vista como uma solução do mesmo problema com  $n = 3$  que não depende de  $x_3$ . Então  $u(x_1, x_2, t)$  é dada pela fórmula (12) para  $x_3 = 0$  com

$$g(y) = g(y_1, y_2) \quad , \quad f(y) = f(y_1, y_2)$$

as integrações sendo feitas sobre a esfera

$$|y - x| = \left[ (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + y_3^2 \right]^{1/2} = ct.$$

Observando que sobre a esfera

$$dS_y = \left[ 1 + \left( \frac{\partial y_3}{\partial y_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial y_3}{\partial y_2} \right)^2 \right]^{1/2} dy_1 dy_2 = \frac{ct}{|y_3|} dy_1 dy_2$$

e que os pontos  $(y_1, y_2, y_3)$  e  $(y_1, y_2, -y_3)$  produzem a mesma contribuição às integrais, encontramos

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi c} \iint_{r < ct} \frac{g(y_1, y_2)}{[c^2 t^2 - r^2]^{1/2}} dy_1 dy_2 + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2\pi c} \iint_{r < ct} \frac{f(y_1, y_2)}{[c^2 t^2 - r^2]^{1/2}} dy_1 dy_2 \right] \quad (13)$$

onde  $r = \left[ (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \right]^{1/2}$ .

#### 1.4.2. INTERPRETAÇÃO FÍSICA

Suponhamos que a perturbação inicial seja dada na região  $S_0$  do plano  $(x, y)$ . Estudemos  $u(x, t)$  no ponto  $x$ , fora de  $S_0$ . A partir da fórmula (13) temos que  $u(x, t)$  é determinada pelos valores iniciais nos pontos  $x$  que pertencem à bola fechada  $\bar{B}(x, ct)$  com centro em  $x$  e raio  $ct$ ; logo  $u(x, t) = 0$  para todo  $t$  para o qual  $\bar{B}(x, ct)$  não intersepta a região  $S_0$ . Sejam  $d$  e  $D$  as distâncias do ponto  $x$  ao ponto mais próximo e mais afastado da região  $S_0$ . Então para um instante  $t$  pequeno

$$t < t_1 = d/c,$$

a função  $u(x,t) = 0$  : a perturbação ainda não chegou até o ponto  $x$ . Se  $t > t_1$ , então  $u(x,t) \neq 0$ .

Vemos então que para o caso de duas dimensões a propagação de uma perturbação local é diferente do caso tridimensional. No caso  $n = 3$ , a perturbação passa pelo ponto  $x$  e não deixa marca; em duas dimensões a perturbação se faz sentir num ponto por todo o tempo subsequente ao instante em que ela atinge esse ponto. Portanto o princípio de Huygens na forma forte não é válido para  $n = 2$ . Pode-se mostrar que, em geral, para  $n = 1$  ou  $n$  par o princípio de Huygens na forma forte não é válido. Dizemos que neste caso vale o princípio de Huygens na forma fraca.

## CAPÍTULO 2

### SISTEMAS HIPERBÓLICOS. CONSERVAÇÃO DE ENERGIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO

#### 2.1. INTRODUÇÃO

Consideraremos sistemas da forma:

$$E(x) \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0, \quad (1)$$

onde  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $u = u(x, t)$  é um vetor coluna de  $k$  componentes e  $E(x)$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\dots$ ,  $A_n$  são matrizes  $k \times k$  com as seguintes propriedades:

(i)  $E(x)$  é real, simétrica e definida positiva.

(ii) As matrizes  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\dots$ ,  $A_n$  são reais, simétricas e constantes.

O estudo deste tipo de sistemas é importante porque eles representam a forma geral de muitas equações da física matemática. Vejamos alguns exemplos:

EXEMPLO 1. A equação das ondas  $n$ -dimensional

$$\frac{1}{c^2} u_{tt} - \Delta u = 0 \quad (2)$$

pode ser escrita como um sistema do tipo (1). De fato, fazendo a mudança de variáveis

$$v_0 = u_t, \quad v_i = u_{x_i}$$

a equação (2) transforma-se no sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial v_0}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} - \frac{\partial v_0}{\partial x_i} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

que pode ser escrito como um sistema do tipo (1), desde que procedamos da seguinte maneira: pomos

$$v = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}; \quad E(x) = I$$

e  $A_j = (a_{kl}^j)$ ,  $k, l = 0, 1, \dots, n$ , onde  $a_{j0}^j = a_{0j}^j = -1$  para  $j = 1, \dots, n$ ; e os demais  $a_{kl}^j$  todos nulos. Assim temos:

$$\sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial}{\partial x_n} \\ -\frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial}{\partial x_n} & 0 & \dots & \cdot \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 2. As equações de linhas de transmissão.

As equações

$$\begin{aligned}L(x) \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial x} &= 0 \\C(x) \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial i}{\partial x} &= 0\end{aligned}\tag{4}$$

governam a corrente  $i$  e a tensão  $e$  numa linha de transmissão, onde  $L(x)$  e  $C(x)$  representam a indutância e a capacitância, respectivamente, por unidade de comprimento da linha. As equações (4) podem ser escritas na forma (1), pondo:

$$v = \begin{bmatrix} i \\ e \end{bmatrix} ; \quad E(x) = \begin{bmatrix} L(x) & 0 \\ 0 & C(x) \end{bmatrix} ; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

EXEMPLO 3. As equações de Maxwell.

As equações de Maxwell num meio homogêneo têm a forma:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{jk}(x) \frac{\partial E_k}{\partial t} - (\text{rot } H)_j &= 0, \quad j = 1, 2, 3; \\ \sum_{k=1}^3 \mu_{jk}(x) \frac{\partial H_k}{\partial t} + (\text{rot } E)_j &= 0, \quad j = 1, 2, 3;\end{aligned}$$

onde  $E = (E_1, E_2, E_3)$  e  $H = (H_1, H_2, H_3)$  são os vetores campo elétrico e campo magnético, respectivamente;  $\varepsilon = (\varepsilon_{jk})$  e  $\mu = (\mu_{jk})$  são os chamados tensores (simétricos) de permeabilidade dielétrica e magnética respectivamente.

Fazendo

$$\mu = \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}$$

podemos escrever as equações de Maxwell na forma de sistema com

$$E(x) = \begin{pmatrix} \delta(x) & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & \mu(x) \end{pmatrix}$$

e

$$\sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & -\frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & -\frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Outros exemplos são dados em ([9]) como as equações da elasticidade e das ondas acústicas.

Em geral, sistemas do tipo (1) são estudados fazendo hipóteses adicionais sobre as matrizes  $A_j$ 's. Lax ([7], cap. 6), por exemplo, estudou estes sistemas supondo que as raízes  $\lambda = \lambda(p)$  da equação característica

$$P(\lambda, p) = \det \left( \lambda I - \sum_{j=1}^n p_j A_j \right) \quad (5)$$

são todas diferentes de zero para  $p \neq 0$ .

Estudaremos o problema de Cauchy para sistemas do tipo (1) com  $E(x) = I$ , isto é,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0, \quad (6)$$

sem fazer mais hipóteses sobre os  $A_j$ 's que as especificadas anteriormente. Isto é importante porque existem sistemas tais como os de magnetogasdinâmica, que possuem raízes  $\lambda(p)$  que se anulam para certos  $p \neq 0$ , mas não identicamente [1].

Neste capítulo demonstraremos alguns resultados relacionando, em diferentes instantes do tempo, valores da quantidade chamada energia do sistema (6), em particular o teorema de conservação da energia no espaço todo. Entre outras coisas, este teorema propicia uma demonstração simples da unicidade da solução do problema de Cauchy para o sistema (6).

## 2.2. PROPRIEDADES DOS AUTOVALORES E AUTOVETORES

Antes de estabelecer os resultados sobre conservação da energia, estudaremos algumas propriedades importantes dos autovalores e autovetores de  $A(p)$ .

A equação (5) tem  $k$  raízes, todas reais, pois a matriz

$$A(p) = \sum_{j=1}^n p_j A_j \quad (7)$$

é real e simétrica, de ordem  $k$ .

As raízes  $\lambda = \lambda(p)$  da equação (5) são funções contínuas de  $p$  ([10]); isto permite provar que o conjunto de pontos onde as raízes características se anulam, isto é,

$$N_j = \left\{ p \in \mathbb{R}^n : \lambda_j(p) = 0 ; j=1, \dots, r \right\}$$

tem medida zero [1].

Enumeramos em ordem decrescente de grandeza as raízes que não são identicamente nulas, digamos um total de  $r$ , contando as multiplicidades:

$$\lambda_1(p) \geq \dots \geq \lambda_r(p) , \forall p;$$

em particular

$$\lambda_1(-p) \geq \dots \geq \lambda_r(-p) , \forall p.$$

Daqui segue-se que

$$-\lambda_r(-p) \geq \dots \geq -\lambda_1(-p) , \forall p.$$

Observe que estes números também são raízes da equação (5), pois  $P(-\lambda, -p) = -P(\lambda, p)$ . Portanto  $\{\lambda_1(p), \dots, \lambda_r(p)\}$  e  $\{-\lambda_1(-p), \dots, -\lambda_r(-p)\}$  são o mesmo conjunto de números para todo  $p$ , logo devemos ter

$$\lambda_j(p) = -\lambda_{r-j+1}(-p), \quad j = 1, \dots, r.$$

Notemos que se uma raiz não se anula identicamente, então ela pode assumir tanto valores positivos como negativos. Se

exigimos que estas raízes nunca se anulem, então seu número total  $r$  será par, as primeiras  $r/2$  delas serão estritamente positivas e as restantes  $r/2$  estritamente negativas.

Como as raízes  $\lambda_j(p)$  são funções contínuas de  $p$ , existe

$$c_m = \max_{|w|=1} \lambda_1(w) \quad (8)$$

Uma vez fixado  $p \in \mathbb{R}^n$  podemos escolher um sistema ortonormal completo  $\{e_1(p), \dots, e_k(p)\}$  de autovetores de  $A(p)$  correspondentes aos autovalores  $\lambda_1(p), \dots, \lambda_k(p)$ ; e esta escolha de autovetores pode ser feita de maneira que cada  $e_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^k$  seja uma função mensurável [10].

### 2.3. CONSERVAÇÃO DA ENERGIA. UNICIDADE

A energia de  $u(x,t)$  em uma região  $R$ , no instante  $t$ , é definida por:

$$E(u(\cdot, t), R) = \int_R |u^2(x, t)| dx \quad (9)$$

A energia no espaço todo é chamada simplesmente a energia de  $u$ , e é denotada por  $E(u(\cdot, t))$

$$E(u(\cdot, t)) = \int |u^2(x, t)| dx \quad (10)$$

Como se vê, é concebível que ela seja infinita. Mostraremos na página 29 que, se finita, ela é constante.

### TEOREMA 2.1

A energia de uma solução  $u(x,t)$ , de classe  $C^1$ , no instante  $t=s$ , contida na bola  $B_{R-c_m s} = \{x : |x| < R - c_m s\}$  não excede a energia de  $u$ , no tempo zero, contida na bola  $B_R = \{x : |x| < R\}$ , isto é,

$$E(u(\cdot, t), B_{R-c_m s}) \leq E(u(\cdot, 0), B_R).$$

Aqui  $c_m$  é a constante definida em (8).

### Demonstração

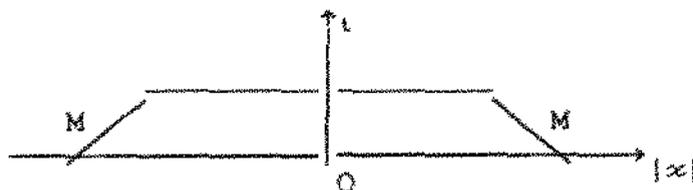
Formamos o produto escalar de (6) com  $u$

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^n u \cdot A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0, \quad (11)$$

esta expressão pode ser escrita como uma soma de derivadas

$$\frac{1}{2} (u \cdot u)_t + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (u \cdot A_j u)_{x_j} = 0 \quad (12)$$

Integramos (12) sobre a região  $G$  do espaço  $xt$ , delimitada pela superfície cônica



$$M = \{(x, t) : 0 \leq t \leq s, |x| = R - ct\}$$

Conde  $c$  é uma constante maior ou igual que  $c_m$ , e pelos hiperplanos  $t=0$  e  $t=s$ . Aplicando o teorema da divergência transformamos essa integral em uma integral de superfície sobre a fronteira  $\partial G$  de  $G$ :

$$\frac{1}{2i} \int_{\partial G} [u \cdot u N_t + \sum_{j=1}^n (u \cdot A_j \omega) N_j] dS = 0;$$

onde  $N_j$  e  $N_t$  são as componentes do vetor normal unitário exterior a  $\partial G$ ,

$$(N_1, \dots, N_n, N_t) = (N, N_t).$$

Esta última integral também se escreve

$$\int_{\partial G} [u \cdot (N_t I + \sum_{j=1}^n A_j N_j) u] dS = 0. \quad (13)$$

A superfície  $\partial G$  consiste de três partes:

a parte superior :  $S = \{(x, s) : |x| \leq R - cs\}$ ;

a parte inferior :  $I = \{(x, 0) : |x| \leq R\}$ ;

e o manto  $M$ .

A integral sobre a parte superior e a parte inferior é:

$$\int_{|x| \leq R - cs} |u^2(x, s)| dx - \int_{|x| \leq R} |u^2(x, 0)| dx. \quad (14)$$

que é a diferença entre a energia contida na bola  $B_{R-ct} = \{x : |x| \leq R - ct\}$  no tempo  $t=ct$  e a energia contida na bola  $B_R = \{x : |x| \leq R\}$  no tempo  $t=0$ . Substituindo (14) em (13) obtemos:

$$\int_{|x| \leq R-ct} |u^2(x, ct)| dx - \int_{|x| \leq R} |u^2(x, 0)| dx = - \int_M [u \cdot (N_t I + \sum_{j=1}^n A_j N_j) u] dS. \quad (15)$$

A diferença de energias em (14) será negativa se o integrando do lado direito de (15) for positivo.

Para nossa análise necessitaremos do vetor normal unitário sobre o manto. A equação da superfície que define o manto é:

$$|x| = R - ct \quad \text{ou} \quad \phi = |x|^2 - (R - ct)^2 = 0.$$

Portanto

$$\frac{1}{2} \nabla \phi = (x, c(R - ct))$$

e daí,

$$\left| \frac{1}{2} \nabla \phi \right|^2 = |x|^2 (1 + c^2)$$

Assim, o vetor normal unitário é dado por (observe que  $R - ct = |x|$ )

$$\frac{(x, c|x|)}{|x| \sqrt{1+c^2}}$$

e suas componentes são

$$N_t = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}, \quad N_j = \frac{x_j}{|x| \sqrt{1+c^2}}$$

Por isto

$$\begin{aligned}
 u \left[ N_t I + \sum_{j=1}^n A_j N_j \right] u &= u \left[ \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} I + \sum_{j=1}^n A_j \frac{x_j}{|x| \sqrt{1+c^2}} \right] u \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \left[ c |u|^2 + u \cdot A \left( \frac{x}{|x|} \right) u \right]
 \end{aligned}$$

Sabemos, da álgebra linear, que se  $\lambda_m$  e  $\lambda_M$  são o menor e o maior dos autovalores da matriz hermitiana A, então

$$\lambda_m |u|^2 \leq u \cdot Au \leq \lambda_M |u|^2$$

Ora, isto é verdade para nossa matriz  $A \left( \frac{x}{|x|} \right)$  (veja (7) e (8)), tomando  $-c_m$  em lugar de  $\lambda_m$  e  $c_m$  em lugar de  $\lambda_M$ , isto é,

$$-c_m |u|^2 \leq u \cdot A \left( \frac{x}{|x|} \right) u \leq c_m |u|^2.$$

Então,

$$u \left[ N_t I + \sum_{j=1}^n A_j N_j \right] u \geq (c - c_m) |u|^2$$

Como  $c \geq c_m$ , esta última expressão é não negativa, logo o membro direito de (15) é menor ou igual que zero, donde segue a conclusão do teorema.

Este resultado pode ser estendido, de uma maneira análoga, na direção negativa do tempo. Este é o objetivo do teorema seguinte:

## TEOREMA 2.2

A energia de uma solução  $u(x,t)$ , de classe  $C^1$ , no instante  $t=s < 0$ , contida na bola  $B_{R-c_m|s|} = \{x : |x| \leq R - c_m|s|\}$  não excede a energia de  $u$ , no tempo zero, contida na bola  $B_R = \{x : |x| \leq R\}$ , isto é,

$$E(u(\cdot, s), B_{R-c_m|s|}) \leq E(u(\cdot, 0), B_R).$$

Novamente,  $c_m$  é a constante definida em (8).

### Demonstração

Fazendo a mudança de variável  $t = -\tau$ , obtemos que

$$u(x, t) = u(x, -\tau) = v(x, \tau)$$

é solução do sistema

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} - \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial v}{\partial x_j} = 0.$$

Agora aplicamos o teorema anterior com  $\tau > 0$ :

$$E(v(\cdot, \tau), B_{R-c_m\tau}) \leq E(v(\cdot, 0), B_R).$$

Fazendo  $\tau = -s$ , com  $s < 0$ , obtemos a conclusão do teorema:

$$E(u(\cdot, s), B_{R-c_m|s|}) \leq E(u(\cdot, 0), B_R).$$

O próximo teorema relaciona as energias em dois instantes quaisquer:

### TEOREMA 2.3

Seja  $t_1 < t_2$  e  $T = t_2 - t_1$ , então

$$i) \quad ECu(\cdot, t_2), B_R \leq ECu(\cdot, t_1), B_{R+c_m T},$$

$$ii) \quad ECu(\cdot, t_1), B_R \leq ECu(\cdot, t_2), B_{R+c_m T},$$

onde  $c_m$  é a constante definida em (8).

### Demonstração

Para o caso i), fazemos  $t' = t - t_1$ , assim

$$u(x, t) = u(x, t' + t_1) = u(x, t').$$

Temos que  $u(x, t')$  é solução do sistema (6), portanto podemos aplicar o teorema 1, obtendo

$$ECu(\cdot, t'), B_{R-c_m t'} \leq ECu(\cdot, 0), B_R \quad \text{para } t' > 0,$$

donde

$$ECu(\cdot, t' + t_1), B_{R-c_m t'} \leq ECu(\cdot, t_1), B_R \quad \text{para } t' > 0 \quad (16)$$

Dados  $t_1$  e  $t_2 > t_1$ , seja  $t' = t_2 - t_1$  e substituindo em (16) obtemos a conclusão do teorema:

$$ECu(\cdot, t_2), B_{R-c_m(t_2-t_1)} \leq ECu(\cdot, t_1), B_R. \quad (17)$$

O caso ii) segue de maneira análoga.

### Observação

Os teoremas anteriores, embora referidos a bolas

centradas na origem, são válidos para bolas centradas num ponto  $x_0$ , qualquer.

Como uma consequência destes resultados obtemos:

#### TEOREMA 2.4 (CONSERVAÇÃO DA ENERGIA)

A energia associada com uma solução  $u$ , de classe  $C^1$ , do sistema (6) é constante, supondo-a finita para  $t = 0$ .

#### Demonstração

Dos teoremas anteriores obtemos, com  $t > 0$ ,

$$E(u(\cdot, t), B_R) \leq E(u(\cdot, 0), B_{R+ct}) \leq E(u(\cdot, t), B_{R+2ct}).$$

Fazendo  $R$  tender a infinito nesta desigualdade, obtemos

$$E(u(\cdot, t)) = E(u(\cdot, 0))$$

e o teorema está provado.

Daremos a seguir uma demonstração da unicidade de solução do sistema (6) usando o teorema de conservação da energia.

#### TEOREMA 2.5

O sistema (6) tem no máximo uma solução de classe  $C^1$ .

#### Demonstração

Suponhamos que  $u_1$  e  $u_2$  sejam duas soluções do sistema (6). Então:

$$u = u_1 - u_2$$

é uma solução de (6) com dado inicial  $u(x,0) = 0$ . Daqui obtemos  $(u(\cdot, 0)) = 0$ ; e pelo teorema anterior,

$$E(u(\cdot, t)) = 0 \quad \forall t$$

Considerando a definição de energia e o fato de  $u \in C^1$ , concluímos que  $u \equiv 0$ , logo  $u_1 \equiv u_2$ .

#### 2.4. O TEOREMA DO DOMÍNIO DE DEPENDÊNCIA

O seguinte teorema é comumente conhecido como o teorema do domínio de dependência. Ele nos diz que para cada  $T > 0$ , o valor de  $u(x, t)$  num ponto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  é independente do que aconteceu fora da bola fechada  $B(x_0, c_m T)$  no tempo  $t = 0$ .

##### TEOREMA 2.8

Seja  $u(x, t)$  uma solução de classe  $C^1$  do sistema (6) com dado inicial nulo na bola  $B_{c_m T}(x_0)$ <sup>1</sup>. Então  $u(x, t) = 0$  no cone

$$\left\{ (x, t) : |x - x_0| \leq c_m t, 0 < t < T \right\}$$

##### Demonstração

Suponhamos que o dado inicial  $u(x, 0)$  seja nulo para  $x \in B_{c_m T}(x_0)$ .

<sup>1</sup> usaremos essa notação para a bola de centro  $x_0$  e raio  $c_m T$ .

Daqui a energia inicial  $EC(u(\cdot, 0), B_{c_m T}(x_0))$  será nula. Temos, pelo teorema 2.1, com  $0 < t < T$ ,

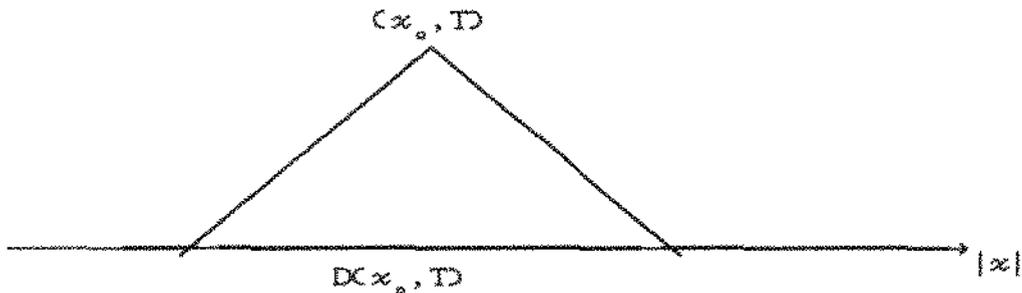
$$EC(u(\cdot, t), B_{c_m (T-t)}(\cdot)) \leq EC(u(\cdot, 0), B_{c_m T}(\cdot)).$$

Logo,

$$EC(u(\cdot, t), B_{c_m (T-t)}(\cdot)) = 0.$$

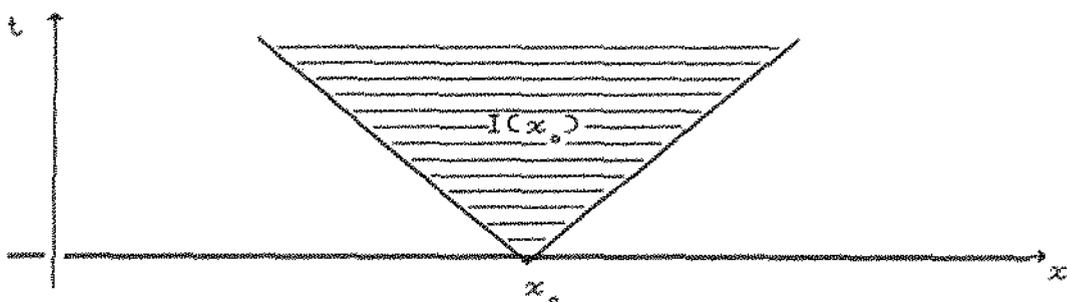
Daqui e da definição (9) de energia, concluímos que  $u(x, t)$  é identicamente nula no referido cone.

Por causa deste teorema, a bola fechada  $B_{c_m T}(x_0)$  é apropriadamente designada domínio de dependência do ponto  $x_0$  no instante  $t = T$ .



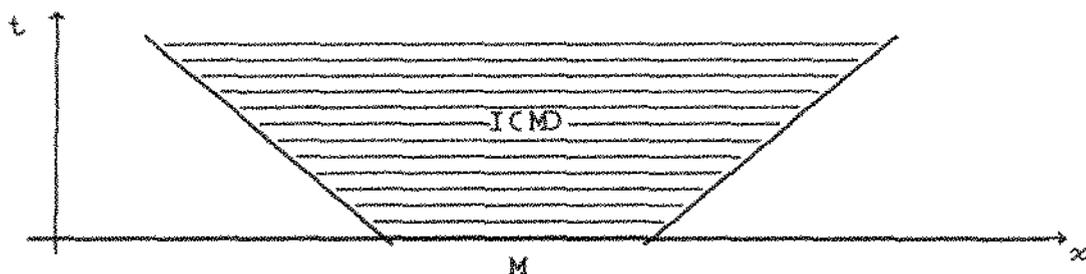
É apropriado também chamar domínio de influência de um ponto  $x_0$  no instante inicial como sendo o "cone futuro"

$$I(x_0) = \{ (x, t) : |x - x_0| \leq c_m t \};$$



e domínio de influência de um conjunto  $M$  a união

$$IC(M) = \bigcup_{x \in M} IC(x).$$



Dessas definições e do teorema anterior vemos claramente que se o dado inicial tem suporte  $M$  a solução para  $t > 0$  só pode ser diferente de zero no domínio de influência de  $M$ . Ela será certamente zero fora desse domínio.

Observação

No capítulo 1 vimos que no caso da equação  $n$ -dimensional das ondas, o princípio de Huygens na forma forte é válido para  $n$  ímpar maior ou igual que 3; para  $n = 1$  ou par vale o princípio de Huygens na forma fraca.

Analogamente, no caso dos sistemas do tipo (6) o princípio de Huygens na forma forte vale para  $n$  ímpar maior ou igual que 3 e não vale para  $n = 1$  ou par, ([7],cap.6).

## CAPÍTULO 3

### EXISTÊNCIA DA SOLUÇÃO

#### 3.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo nos ocuparemos de encontrar uma fórmula explícita para a solução do problema de valores iniciais

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$u(x, 0) = f(x). \quad (2)$$

Para isto usaremos a transformada de Fourier, que é apenas um dos métodos utilizados para mostrar existência de soluções.

Vamos resumir alguns resultados básicos da transformada de Fourier de que necessitaremos, ([4], cap. 7).

Dados os vetores  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  e  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  de componentes inteiras e não negativas, pomos

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \quad \text{e} \quad D^\beta = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\beta_1} \dots \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\beta_n}.$$

O espaço de Schwartz ou das funções rapidamente decrescentes é definido como sendo o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis  $f$  tais que

$$\sup_x |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty$$

para todo  $\alpha$  e  $\beta$ . Denotamos este espaço por  $\mathcal{S}$ .

Associamos com uma função  $f$  em  $\mathcal{S}$  sua transformada de Fourier  $\mathcal{F}f = \hat{f}$ , definida por

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i\xi x} \cdot f(x) dx, \quad (3)$$

que resulta ser também um elemento de  $\mathcal{S}$ . A correspondência  $\mathcal{F} : f \longrightarrow \hat{f}$  é biunívoca de  $\mathcal{S}$  sobre  $\mathcal{S}$ , e vale a fórmula de inversão

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{i\xi x} \cdot \hat{f}(\xi) d\xi. \quad (4)$$

Além disto, valem as relações

$$\left[ D^\alpha f(x) \right]^\wedge = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi), \quad (5)$$

ou seja o operador diferencial  $D^\alpha$  é transformado, em  $\mathcal{S}$ , no operador multiplicação por  $(i\xi)^\alpha$ . Temos também a importante identidade de Parseval,

$$\int f(x)g(x)dx = \int \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi. \quad (6)$$

Ela nos diz que a transformada de Fourier  $\mathcal{F} : f \longrightarrow \hat{f}$ , que é uma transformação linear do subespaço  $\mathcal{S}$  de  $L^2$  sobre  $\mathcal{S}$ , preserva o produto escalar, portanto é uma isometria. Como  $\mathcal{S}$  é denso em  $L^2$ ,  $\mathcal{F}$  pode ser estendida a todo o  $L^2$ , resultando num operador unitário de  $L^2$  em si mesmo. Portanto faz sentido definir a transformada de Fourier e sua inversa para elementos  $f$  e  $\hat{f}$  de  $L^2$ , desde que sob interpretação conveniente: dado  $f$  qualquer em  $L^2$ , existe uma seqüência  $(f_n)$  em  $\mathcal{S}$  tal que  $f_n \longrightarrow f$  em  $L^2$ ; como

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\| = \|f_n - f_m\|$$

vemos que  $(\hat{f}_n)$  é uma seqüência de Cauchy em  $L^2$  cujos elementos  $\hat{f}_n$  estão em  $\mathcal{S}$ ; logo existe um elemento  $\hat{f}$  em  $L^2$  tal que  $\hat{f}_n \longrightarrow \hat{f}$ . Definimos a imagem de  $f$  pelo operador  $\mathcal{F}$  como sendo  $\hat{f}$ . Portanto o significado preciso das fórmulas (3) e (4) para  $\hat{f}$  e  $f$  em  $L^2$  é dado por

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \text{l.i.m.} \int e^{-i\xi x} \cdot \xi f_n(x) dx$$

e

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \text{l.i.m.} \int e^{-i\xi x} \cdot \xi \hat{f}_n(\xi) d\xi.$$

onde l.i.m. significa "limite na norma  $L^2$ " ("limit in the mean").

### 3.2. EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO COM DADO INICIAL EM $[\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)]^k$

Vamos supor que o dado inicial (2) pertence ao espaço  $[\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)]^k$ .

Visto que sob transformada de Fourier diferenciação com relação a  $x_j$  muda em multiplicação por  $ip_j$ , a equação (1) transforma-se em

$$\hat{u}_t + iA(p)\hat{u} = 0, \quad (7)$$

onde  $A(p) = \sum_{j=1}^n p_j A_j$ . A condição inicial (2), por sua vez, transforma-se em

$$\hat{u}(p, 0) = \hat{f}(p). \quad (8)$$

Seja  $\{e_j(p)\}$  um conjunto completo de autovetores ortonormais de  $A(p)$  com correspondentes autovalores  $\lambda_j(p)$ . Fazemos o produto escalar da equação (7) por  $e_j(p)$ :

$$\hat{u}_t \cdot e_j(p) + iA(p)\hat{u} \cdot e_j(p) = 0.$$

Fazendo

$$\hat{u}_j(p, t) = \hat{u}(p, t) \cdot e_j(p)$$

$$\hat{f}_j(p) = \hat{f}(p) \cdot e_j(p)$$

temos que a equação (7) transforma-se em

$$\frac{\partial \hat{u}_j}{\partial t} = -\lambda_j(p) \hat{u}_j(p). \quad (9)$$

A solução desta equação que satisfaz a condição inicial  $\hat{u}_j(p, 0) = \hat{f}_j(p)$  é

$$\hat{u}_j(p, t) = \hat{f}_j(p) e^{-\lambda_j(p)t}.$$

Por isto,

$$\hat{u}(p, t) = \sum_{j=1}^k \hat{f}_j(p) e^{-\lambda_j(p)t} e_j(p). \quad (10)$$

Tomando então a inversa da transformada de Fourier da expressão (10), obtemos

$$u(x, t) = (2\pi)^{-n/2} \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_j(p) e^{i(p \cdot x - \lambda_j(p)t)} e_j(p) dp. \quad (11)$$

Observemos que esta expressão para  $u(x, t)$  foi obtida formalmente. Devemos provar em seguida que ela representa realmente uma solução para o problema de valores iniciais (1), (2).

### TEOREMA 3.1

Se  $f \in [\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)]^k$ , então  $u = u(x, t)$  definida por (11) pertence  $[C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})]^k$  e é solução do problema (1), (2).

### Demonstração

Observemos primeiro que se  $f \in [\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)]^k$ , então  $\hat{f} \in [\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)]^k$  e é

válida a seguinte estimativa

$$|\hat{f}(p)| \leq C_m / (1 + |p|)^m, \quad (12)$$

com constantes  $C_m > 0$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . Com efeito, seja  $p = (p_1, \dots, p_n)$ , e seja

$$p_j = \max_k |p_k|,$$

então

$$|p| = \sqrt{\sum_k p_k^2} \leq \sqrt{n} p_j.$$

Portanto

$$(1 + |p|)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} |p|^k \leq 2^m n^{m/2} \sum_{k=0}^m p_j^k.$$

Observe que esta última somatoria é o mesmo que

$$1 + p_j^2 + p_j^4 + \dots + p_j^m.$$

Ora, todos estes termos aparecem em

$$\sum_{|\alpha| \leq m} |p|^\alpha,$$

portanto

$$\sum_{k=0}^m |p_j|^k \leq \sum_{|\alpha| \leq m} |p|^\alpha.$$

Então,

$$C(1 + |p|)^m \leq 2^m n^{m/2} \sum_{|\alpha| \leq m} |p|^\alpha,$$

donde

$$C(1 + |p|)^m |\hat{f}(p)| \leq 2^m n^{m/2} \sum_{|\alpha| \leq m} |(ip)^\alpha \hat{f}(p)|$$

$$= 2^m n^{m/2} \sum_{|\alpha| \leq m} \left| \int e^{-ix \cdot p} D^\alpha f(x) dx \right|$$

$$\leq 2^m n^{m/2} \sum_{|\alpha| \leq m} \int |D^\alpha f(x)| dx \leq C_m < \infty$$

Fica assim provada a desigualdade (12).

Portanto, lembrando que os  $e_j(p)$ 's são funções mensuráveis, com  $|e_j(p)| = 1$ , e que  $|f_j(p)| \leq |f(p)|$ , concluímos que o integrando em (11) é em módulo, majorado por

$$C_m (1 + |p|)^{-m}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Isto prova que a integral em (11) converge uniformemente em  $x$  e  $t$ , e define  $u(x, t)$  como função contínua para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Provemos agora que  $u(x, t)$  é infinitamente diferenciável.

Ora, sendo  $c_m = \max_{|v|=1} |\lambda_j|$ , temos que

$$\left| \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^l D^\alpha \left\{ f_j(p) e^{i(p \cdot x - \lambda_j(p)t)} e_j(p) \right\} \right|$$

$$\begin{aligned}
&= |\lambda_j(p)|^\ell |p^\alpha| |f_j(p)| \leq |p|^\ell c_m^\ell |p^\alpha| |f(p)| \\
&\leq c_m^\ell |p|^{|\alpha|+\ell-m}.
\end{aligned}$$

Isto mostra que as derivações em (11), sob o sinal de integração, também resultam em integrais que convergem uniformemente. Fica assim provado que  $u(x,t)$ , dada em (11), é de classe  $C^\infty$ , e as derivações, de todas as ordens, podem ser efetuadas sob o sinal de integração. Em particular, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^n A_\nu \frac{\partial u}{\partial x_\nu} &= \\
&= (2\pi)^{-n/2} \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}^n} [-\Omega_j(p)] e^{i(p \cdot x - \lambda_j(p)t)} \hat{f}_j(p) e_j(p) dp + \\
&+ (2\pi)^{-n/2} \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}^n} [i \sum_{\nu=1}^n p_\nu A_\nu] e^{i(p \cdot x - \lambda_j(p)t)} \hat{f}_j(p) e_j(p) dp. \\
&= (2\pi)^{-n/2} \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}^n} [-\Omega_j(p) + i \sum_{\nu=1}^n p_\nu A_\nu] e^{i(p \cdot x - \lambda_j(p)t)} \hat{f}_j(p) e_j(p) dp \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois  $\lambda_j(p) e_j(p) = A(p) e_j(p) = \sum_{\nu=1}^n p_\nu A_\nu e_j(p)$ .

A condição inicial  $u(x,0) = f(x)$  é também facilmente verificada:

$$\begin{aligned}
u(x, 0) &= (2\pi)^{-n/2} \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}^n} e^{ip \cdot x} \hat{f}_j(p) e_j(p) dp \\
&= (2\pi)^{-n/2} \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}^n} e^{ip \cdot x} f_j(p) e_j(p) dp = f(x).
\end{aligned}$$

Isto completa a demonstração do teorema.

### Observação

A expressão (11) nos mostra que a solução  $u(x, t)$  do problema de valores iniciais (1), (2) é a superposição de  $k$  ondas: cada uma das quais é a superposição, dada pela integração sobre o  $p$ -espaço, das ondas planas

$$(2\pi)^{-n/2} e^{i(p \cdot x - \lambda_j(p)t)} \hat{f}_j(p) e_j(p).$$

Esta é uma onda plana que se propaga na direção  $p$  com velocidade

$$v_j(p) = \lambda_j(p) / |p|.$$

Cada um dos  $k$  termos da soma em (11) representa um modo normal de propagação. Vemos que cada modo é associado a um autovalor de  $A(p)$ , isto é, com uma velocidade de propagação de ondas planas. Um  $j$ -ésimo modo é excitado ou não, dependendo do valor inicial  $f$  ser tal que  $\hat{f}_j(p)$  é diferente de zero ou não respectivamente. Se  $\lambda_j(p) \equiv 0$ , então o modo associado não depende do tempo: ele é estático. Assim uma solução suave  $u$  é a superposição de suas partes estáticas e não estáticas.

$$u(x,t) = u_e(x,t) + u_{ne}(x,t).$$

### 3.3. SOLUÇÃO COM DADO INICIAL EM $[C^{\infty}(\mathbb{R}^n)]^k$

Em virtude dos teoremas 2.4 e 3.1 sabemos que o problema de Cauchy (1),(2) com dado inicial em  $[C^{\infty}(\mathbb{R}^n)]^k$  tem uma única solução em  $[C^{\infty}(\mathbb{R}^n)]^k$  a qual é dada por (11).

O teorema do domínio de dependência, provado no capítulo 2 nos permite remover a restrição no infinito para os dados iniciais de maneira que estes últimos possam ser funções arbitrárias em  $[C^{\infty}(\mathbb{R}^n)]^k$ . De fato, do teorema do domínio de dependência, sabemos que a solução  $u(x,t)$  do problema (1),(2) num ponto  $(x_0, t_0)$  depende somente do valor do dado inicial na bola  $B_{c t_0}^m(x_0)$ :

Sejam  $R > 0$  e  $\varepsilon > 0$  tais que

$$B_{c t_0}^m(x_0) \subset B_{R-2\varepsilon}(x_0) \subset B_R(x_0).$$

Assim, os conjuntos

$$A = \overline{B_{R-\varepsilon}(x_0)} \quad \text{e} \quad B = (B_{R+\varepsilon}(x_0))^c,$$

são fechados e disjuntos do  $\mathbb{R}^n$ ; logo, pelo Lema de Uryshon ([11], p.102) existe uma função contínua  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow [0,1]$  tal que

$$\psi(x) = 1, \quad \forall x \in A \quad \text{e} \quad \psi(x) = 0, \quad \forall x \in B.$$

Agora, considerando uma função arbitrária  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que

$$\int \varphi(x) dx = 1, \quad \varphi \geq 0, \quad \text{supp } \varphi = \{x : |x| \leq 1\},$$

podemos construir a função

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

que tem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon(x) \geq 0, \quad \varphi_\varepsilon(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \text{supp } \varphi_\varepsilon = \{x : |x| \leq \varepsilon\} \\ \int \varphi_\varepsilon(x) dx = \frac{1}{\varepsilon^n} \int \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = 1. \end{aligned}$$

Isto nos permite definir a seguinte função:

$$\psi_\varepsilon(x) = (\psi * \varphi_\varepsilon)(x) = \int_{|x| \leq \varepsilon} \psi(x-y) \varphi_\varepsilon(y) dy.$$

É fácil verificar que  $\psi_\varepsilon \in C_0^\infty$  e

$$\psi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x - x_0| \leq R - 2\varepsilon \\ 0 & \text{se } |x - x_0| \geq R + 2\varepsilon \end{cases}$$

Portanto, no caso em que o dado inicial  $f \in [C_0^\infty(\mathbb{R}^n)]^k$ , consideramos a função

$$f_\varepsilon(x) = \psi_\varepsilon(x) f(x),$$

como dado inicial para achar a solução no ponto  $(x_0, t_0)$ . Observe que  $f_\varepsilon(x) \equiv f(x)$  na bola  $|x - x_0| \leq R - 2\varepsilon$ , de sorte que o valor de  $u$  no ponto  $(x_0, t_0)$ , como o definimos aqui, independe de  $R$  e  $\varepsilon$ , bastando escolher estes parâmetros de modo a satisfazer (13).

### 3.4. DEPENDÊNCIA CONTÍNUA DA SOLUÇÃO COM RELAÇÃO AO DADO INICIAL

Até agora mostramos que existe uma única solução para o problema de Cauchy (1),(2). Nesta seção mostraremos que essa solução  $u(x,t)$  depende continuamente do dado inicial: a solução sofre pequenas variações quando o dado inicial sofre pequenas variações. Mais precisamente, mostraremos que a aplicação linear

$$f \in [C^\infty(\mathbb{R}^n)]^k \longrightarrow u \in [C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})]^k$$

é contínua na topologia usual do espaço  $[C^\infty(\mathbb{R}^n)]^k$ , a qual é gerada por exemplo, pelas seminormas

$$v_{k,j}(\phi) = \sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq j}} |D^\alpha \phi(x)|,$$

onde  $K \subset \mathbb{R}^n$  é um compacto arbitrário e  $j$  um inteiro não negativo qualquer.

Nesta topologia, uma vizinhança fundamental de zero é definida por

$$V_{K,j}^{\delta} = \left\{ f \in [C^{\infty}(\mathbb{R}^n)]^k : \nu_{K,j}(f) < \delta \right\},$$

e uma vizinhança de  $f_0 \in [C^{\infty}(\mathbb{R}^n)]^k$  qualquer é dada por

$$f_0 + V_{K,j}^{\delta} = \left\{ g \in [C^{\infty}(\mathbb{R}^n)]^k : g = f_0 + f, f \in V_{K,j}^{\delta} \right\}.$$

Face a estas definições, uma sequência  $f^{(D)} \longrightarrow 0$  em  $[C^{\infty}(\mathbb{R}^n)]^k$  se dada qualquer vizinhança de zero  $V_{K,j}^{\delta}$ , existe  $l_0$  tal que para  $l \geq l_0$ ,  $f^{(D)} \in V_{K,j}^{\delta}$ . O teorema seguinte é de fácil demonstração.

### TEOREMA 3.2

$f^{(D)} \longrightarrow 0$  na topologia usual de  $[C^{\infty}(\mathbb{R}^n)]^k$  se e somente se, dado qualquer compacto  $K$  e qualquer multi-índice  $\alpha$ ,  $D^{\alpha} f^{(D)} \longrightarrow 0$  uniformemente em  $K$ .

Dizemos que uma aplicação linear

$$\phi : [C^{\infty}(\mathbb{R}^n)]^k \longrightarrow [C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})]^k$$

é contínua se, dada  $V_{K',j}^{\epsilon}$  vizinhança de zero em  $[C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})]^k$ , existe  $V_{K,j}^{\delta}$  em  $[C^{\infty}(\mathbb{R}^n)]^k$  tal que

$$f \in V_{K,j}^{\delta} \text{ implica } \phi(f) \in V_{K',j}^{\epsilon}.$$

Observemos que tanto  $[C^{\infty}(\mathbb{R}^n)]^k$  como  $[C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})]^k$  são

espaços de Fréchet ou F-espaços, isto é, espaços topológicos cuja topologia é induzida por métricas invariantes completas ([8], p. 8).

Destacamos o seguinte resultado, conhecido como teorema do gráfico fechado ([8], p. 50):

### TEOREMA 3.3

Sejam  $X$  e  $Y$  F-espaços e  $\Lambda : X \longrightarrow Y$  uma aplicação linear. Se o gráfico de  $\Lambda$ ,  $G = \{(x, \Lambda x) : x \in X\}$ , é fechado em  $X \times Y$ , então  $\Lambda$  é contínua.

Como consequência da unicidade da solução do problema (1),(2) e do teorema do gráfico fechado, obtemos o seguinte resultado, que nos dá a dependência contínua da solução com relação ao dado inicial:

### TEOREMA 3.4

A solução do problema de Cauchy (1),(2) depende continuamente do dado inicial, isto é, a aplicação linear

$$\phi : f \in [C^{\infty}(\mathbb{R}^n)]^k \longrightarrow u \in [C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})]^k$$

é contínua.

Para a demonstração deste teorema usaremos o seguinte lema:

### LEMA

Um operador diferencial linear a coeficientes constantes

$$PCD) : C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$$

é contínuo.

#### Demonstração

Como  $PCD) = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha D^\alpha$ , basta provar que

$$D^\alpha : f \longrightarrow D^\alpha f$$

é contínua. Para isto, consideramos uma sequência  $(f^{(D)})$  em  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que  $f^{(D)} \longrightarrow 0$  e provamos que  $D^\alpha f^{(D)} \longrightarrow 0$ .

Mas  $f^{(D)} \longrightarrow 0$  significa que  $\forall K \subseteq \mathbb{R}^n$  compacto e multi-índice  $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ ,  $D^\beta f^{(D)} \longrightarrow 0$  uniformemente em  $K$ ; em particular, qualquer derivada  $D^\gamma$  de  $D^\alpha f^{(D)}$  converge a zero uniformemente em  $K$ .

#### Demonstração do teorema 3.4

Mostraremos que o gráfico de  $\phi$ ,

$$G(\phi) = \{ (f, u) : f \in [C^\infty(\mathbb{R}^n)]^k \},$$

é fechado.

Seja  $(f^{(m)}, u^{(m)})$  uma sequência em  $G(\phi)$ , que seja convergente. Então existem  $f_0$  e  $v$  tais que  $f^{(m)} \longrightarrow f_0$  em  $[C^\infty(\mathbb{R}^n)]^k$  e  $u^{(m)} \longrightarrow v$  em  $[C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})]^k$ . Provaremos que  $(f_0, v) \in G(\phi)$ . Mais precisamente, provaremos que  $v$  é solução do sistema (1), com dado inicial  $v(x, 0) = f_0$ . Com efeito,

$$u^{(m)}(x, 0) \longrightarrow v(x, 0)$$

$$f^{(m)}(x) \longrightarrow f_0(x),$$

de sorte que  $v(x, 0) = f_0(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Por outro lado, temos, pelo lema anterior que

$$0 = u_t^{(m)} + \sum_{j=1}^n A_j u_{x_j}^{(m)} \longrightarrow v_t + \sum_{j=1}^n A_j v_{x_j}.$$

Portanto  $v$  é solução do sistema (1).

A conclusão do teorema segue do teorema do gráfico fechado.

## CAPÍTULO 4

### SOLUÇÕES COM ENERGIA FINITA

#### 4.1. INTRODUÇÃO

Até agora estudamos o problema de Cauchy para o sistema

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0, \quad (1)$$

com dados iniciais

$$u(x, 0) = f(x) \in [C^k(\mathbb{R}^n)]^k; \quad (2)$$

num sentido clássico. Provamos, no capítulo 2, que em cada instante  $t \in \mathbb{R}$ , uma solução  $u(x, t)$  do sistema (1) tem energia finita em todo o  $\mathbb{R}^n$ , a qual se mantém constante:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, 0)|^2 dx, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Isto nos permite introduzir uma norma, que é naturalmente chamada norma da energia. Indicando-a com  $\|f\|_e$ , ela é assim definida:

$$\| f \|_*^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} |f_j(x)|^2 dx. \quad (4)$$

Uma maneira natural de estender as soluções clássicas obtidas até aqui, é considerar os dados iniciais no espaço de Hilbert  $\mathcal{X} = [L^2(\mathbb{R}^n)]^k$ , com o produto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx \quad (5)$$

Como se vê, claramente, a norma induzida por este produto escalar é exatamente a norma da energia. Os elementos de  $\mathcal{X}$  serão chamados os dados iniciais com energia finita e a solução obtida a partir de cada  $f \in \mathcal{X}$  será chamada a solução com energia finita de (1) com dado inicial  $f$ . Este é o tipo de soluções que estudaremos neste capítulo.

#### 4.2. SOLUÇÕES COM ENERGIA FINITA

Para estudarmos as soluções com energia finita, utilizaremos um teorema importante devido a Marshall Stone. Vamos considerá-lo a seguir.

Seja  $\mathcal{X}$  um espaço de Hilbert e  $U(t)$  uma família de operadores lineares de  $\mathcal{X}$  em  $\mathcal{X}$ , família esta dependendo do parâmetro  $t \in \mathbb{R}$ . Diz-se que  $\langle U(t) \rangle$  é um grupo uniparamétrico contínuo de operadores unitários em  $\mathcal{X}$ , se:

- (i)  $U(t)f$  é contínuo para todo  $f \in \mathcal{X}$ ;
- (ii)  $U(t+s) = U(t)U(s)$  para todo par de números reais  $t$  e  $s$ ;
- (iii)  $U(0) = I$ , onde  $I$  é o operador identidade sobre  $\mathcal{X}$ .

Para esses grupos, Stone demonstrou o seguinte teorema ([7], p. 253):

TEOREMA 4.1

A todo grupo uniparamétrico contínuo de operadores unitários  $\langle U(t) \rangle$  num espaço de Hilbert  $\mathcal{X}$  está associado um único operador autoadjunto  $A$  tal que:

- 1) para todo  $t$ ,  $U(t)D(A) = D(A)$ , onde  $D(A)$  é o domínio de  $A$ ;
- 2) Dado  $f \in D(A)$ , então  $U(t)f$  é diferenciável e

$$\frac{dU(t)f}{dt} = -iAU(t)f; \tag{6}$$

reciprocamente, dado um operador autoadjunto  $A$ , existe um único grupo  $\langle U(t) \rangle$  satisfazendo as condições acima.

Observemos que  $U(t)$  é um operador linear de  $\mathcal{X}$  em  $\mathcal{X}$ , e a derivada  $\frac{dU(t)f}{dt}$  que estamos considerando é definida com a ajuda da norma de  $\mathcal{X}$ :

$$\frac{dU(t)f}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(t)f - U(0)f}{t}$$

isto é,

$$\left\| \frac{U(t)f - U(0)f}{t} - \frac{dU(t)f}{dt} \right\| \rightarrow 0$$

quando  $t \rightarrow 0$ .

O operador  $-iA$  é chamado o gerador infinitesimal do grupo.  $A$  e  $U(t)$  estão relacionados pela equação (8) que também se escreve:

$$-iAf = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(t)f - f}{t},$$

para cada  $f \in D(A)$ , onde o limite é tomado na topologia forte de  $\mathcal{X}$ . Por analogia com a função exponencial, o grupo  $\langle U(t) \rangle$  é frequentemente indicado com a notação  $e^{-itH}$ .

O sistema (1) pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = -iHu,$$

onde

$$H = -i \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Introduzimos o fator  $-i$  para fazer o operador  $H$  autoadjunto sobre o espaço  $\mathcal{X} = [L^2(\mathbb{R}^n)]^k$  considerado com sua norma usual definida em (5). Isto será provado no seguinte teorema:

#### TEOREMA 4.2

O operador definido por

$$D(H) = \left\{ f \in \mathcal{X} : A(p)\hat{f}(p) \in \mathcal{X} \right\}$$

$$Hf = -i \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

é um operador autoadjunto sobre  $\mathcal{X}$ .

Demonstração

Como as matrizes  $A_j$ 's são constantes temos:

$$\left[ -i \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right]^{\wedge} = -i \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_j} = - \sum_{j=1}^n i A_j i p_j \hat{f} = A(p) \hat{f}.$$

Portanto,

$$Hf = \mathcal{F}^{-1} [A(p) \hat{f}].$$

Definamos o operador  $\hat{H}$  da seguinte maneira:

$$D(\hat{H}) = \left\{ \hat{f} \in \mathcal{X} : A(p) \hat{f}(p) \in \mathcal{X} \right\}$$

$$(\hat{H}\hat{f})(p) = A(p) \hat{f}(p).$$

Vemos que

$$H = \mathcal{F}^{-1} \hat{H} \mathcal{F},$$

isto é,  $H$  e  $\hat{H}$  são unitariamente equivalentes; assim para demonstrar que  $H$  é autoadjunto basta demonstrar que  $\hat{H}$  é autoadjunto.

Provemos primeiro que  $\hat{H} \subseteq \hat{H}^*$ : sejam  $f, g \in D(\hat{H})$ , então

$$\langle \hat{H}f, g \rangle = \int A(p) f(p) \cdot \overline{g(p)} dp,$$

onde o integrando que aí aparece é o produto escalar, em  $\mathbb{C}^k$ . Pondo

$f = (f_1, \dots, f_k)$ ,  $g = (g_1, \dots, g_k)$  e  $A(p) = (a_{lm})$ , e lembrando que  $A(p)$  é hermitiana simétrica, ou seja,  $a_{lm} = \overline{a_{ml}}$ , teremos:

$$A(p)f(p) \cdot \overline{g(p)} = \sum_{l,m} a_{lm} f_m \cdot \overline{g_l} = \sum_{l,m} f_m \cdot \overline{a_{ml} g_l} = f(p) \cdot \overline{A(p)g(p)}.$$

Logo

$$\langle \hat{H}f, g \rangle = \int f(p) \cdot \overline{A(p)g(p)} dp = \langle f, \hat{H}g \rangle.$$

Portanto  $\hat{H} \subset \hat{H}^*$ .

Provemos agora que  $\hat{H}^* \subseteq \hat{H}$ : sejam  $f \in D(\hat{H})$ ,  $g \in D(\hat{H}^*)$  e  $h = \hat{H}^*g$ . Assim

$$\langle \hat{H}f, g \rangle = \langle f, h \rangle, \quad \forall f \in D(\hat{H}),$$

isto é,

$$\int A(p)f(p) \cdot \overline{g(p)} dp = \int f(p) \overline{h(p)} dp.$$

Daqui segue-se que

$$\int f(p) \overline{[A(p)g(p) - h(p)]} dp = 0, \quad \forall f \in D(\hat{H}) \quad (8)$$

Para podermos concluir que  $\hat{H}^* \subseteq \hat{H}$ , devemos verificar primeiro que  $A(p)g(p) - h(p) \in \mathcal{X}$ ; como  $h \in \mathcal{X}$  isto equivale a verificar que  $A(p)g(p) \in \mathcal{X}$ . Para isto, primeiro vamos usar a condição (8) para elementos  $f$  que tenham suporte compacto; digamos na esfera  $|p| \leq R$ . Isto nos permite concluir que  $A(p)g(p) = h(p)$  para quase todo,  $|p| \leq R$ . Como  $R$  é arbitrário, temos que esta igualdade se

verifica para quase todo  $p$ . Ora,  $h \in \mathcal{H}$ , logo  $A(p)g(p) \in \mathcal{H}$ , portanto  $\hat{H}^* \subseteq \hat{H}$  e a conclusão do teorema segue-se.

Pelo teorema de Stone, podemos concluir que existe um único grupo uniparamétrico contínuo de operadores unitários  $\langle U(t) \rangle$  no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  satisfazendo as condições (1) e (2) do teorema 1.

Sejam  $u(x,t)$  uma solução do sistema (1) com dado inicial

$$u(x,0) = f(x) \in [C_0^\infty(\mathbb{R}^n)]^k,$$

e  $X$  o espaço  $[C_0^\infty(\mathbb{R}^n)]^k$  com o produto escalar usual de  $\mathcal{H}$ . Definamos o operador  $V(t): X \longrightarrow X$  por

$$V(t)f = u(\cdot, t).$$

Mostraremos no seguinte teorema  $\langle V(t) : t \in \mathbb{R} \rangle$  é um grupo uniparamétrico contínuo de operadores isométricos em  $X$ .

#### TEOREMA 4.3

Se  $V(t)$  é o operador definido em (9), então  $\langle V(t) : t \in \mathbb{R} \rangle$  é um grupo uniparamétrico contínuo de operadores isométricos em  $X$ .

#### Demonstração

Da igualdade (3) segue-se que  $V(t)$  é uma isometria para cada  $t \in \mathbb{R}$ , isto é,

$$\| V(t) \|_2 = \| f \|_2, \quad f \in X, \quad t \in \mathbb{R} \quad (10)$$

Além disso,

$$V(0)f = u(x,0) = f, \quad (11)$$

isto é,  $V(0)$  é o operador identidade sobre  $X$  e, como temos unicidade para o problema de Cauchy (1),(2), podemos concluir que

$$V(t + t') = V(t)V(t'), \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

Mostraremos agora que

$$g(\cdot, t) = V(t)f,$$

é contínua para todo  $f \in X$ , isto é, provaremos que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|g(\cdot, t) - g(\cdot, t_0)\| < \varepsilon, \quad \text{desde que } |t - t_0| < \delta.$$

Da definição de  $V(t)$ , temos que  $g(\cdot, t)$  é uma função contínua em  $x$  e em  $t$ . Como as funções  $f$  que estamos considerando pertencem ao espaço  $X$ , podemos supor que

$$\text{supp } f = B_R = \{x : |x| < R\}.$$

Assim, para  $0 \leq t \leq T$ ,  $t_0 < T$

$$\text{supp } g = \{x : |x| \leq R + ct, 0 \leq t \leq T\}$$

Portanto, dado  $\varepsilon' > 0$ , existe  $\delta > 0$  (tomamos  $\delta < T - t_0$  e  $\delta < t_0$ ) tal que

$$|g(x, t) - g(x, t_0)| < \varepsilon',$$

$\forall x \in B_{R+ct}$  e  $|t - t_0| < \delta$ , ou seja  $g$  é contínua no compacto

$$\{(x, t) : |x| < R + ct, |t - t_0| < \delta\}$$

portanto  $g$  é uniformemente contínua. Integrando no espaço todo temos que

$$\|V(t)f - V(t_0)f\|^2 < \varepsilon'^2 V(B_{R+c}),$$

onde  $V(B_{R+c})$  é o volume da bola  $B_{R+c}$ . Tomando

$$\varepsilon' = \sqrt{\frac{\varepsilon}{V(B_{R+c})}},$$

obtemos

$$\|V(t)f - V(t_0)f\| < \varepsilon, \quad (13)$$

logo  $g(\cdot, t)$  é uma função contínua para todo  $f \in X$ . De (10), (11), (12) e (13) obtemos a conclusão do teorema:  $\{V(t) : t \in \mathbb{R}\}$  é um grupo uniparamétrico contínuo de operadores isométricos no espaço  $X$ .

Como o espaço de Hilbert  $\mathcal{K}$  é o complemento de  $X$ , o grupo  $V(t)$  estende-se por continuidade a um operador unitário de  $\mathcal{K}$  sobre  $\mathcal{K}$ , as propriedades (10), (11), (12), (13) permanecendo válidas para essa extensão de  $V(t)$ . Daqui e da unicidade do grupo  $U(t)$  prevista no teorema de Stone, concluímos que  $U(t)f = V(t)f$  para  $f \in X$ ; ou seja,  $U(t)$  é precisamente a extensão, por continuidade, do grupo  $V(t)$ . Concretamente, dada  $f \in \mathcal{K}$ , existe uma seqüência  $(f_n)$  em  $X$  tal que  $f_n \rightarrow f$  em  $\mathcal{K}$  e assim

$$U(t)f = \lim V(t)f_n,$$

Pode-se provar que, quando  $f \in DCHD$ ,  $U(t)f = u(x,t)$  é uma função mensurável que é solução de (1),(2) no sentido das distribuições ([3 ],cap 4).

## CAPÍTULO 5

### O PROBLEMA PERTURBADO E A EXISTÊNCIA DO OPERADOR DE ONDA

#### 5.1. INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo será estudar o problema de Cauchy

$$E(x) \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

com dado inicial

$$u(x, 0) = f(x), \quad (2)$$

onde  $E(x)$  é uma matriz  $k \times k$  hermitiana definida positiva e que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) Existem constantes positivas  $c$  e  $c'$  tais que  $cI \leq E(x) \leq c'I$ ,

(ii)  $(1 + |x|^2) |E(x) - I| \in L^2$ .

Definimos o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_E$  como o conjunto de todas as funções de valores vetoriais mensuráveis  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))$  tais que

$$\|f\|_E^2 = \int f(x) \cdot \overline{E(x)f(x)} dx < \infty, \quad (4)$$

Esta expressão, como se vê, é o quadrado de uma norma, precisamente a norma induzida pelo seguinte produto escalar:

$$\langle f, g \rangle_E = \int f \cdot \overline{Eg}.$$

A condição (i) significa que

$$c f \cdot \overline{g} \leq f \cdot \overline{Eg} \leq c' f \cdot \overline{g}$$

Ora, fazendo  $f = g$ , isto implica que

$$c \| f \|^2 \leq \| f \|_E^2 \leq c' \| f \|^2,$$

donde segue, então,

$$c^{1/2} \| f \|^2 \leq \| f \|_E^2 \leq c'^{1/2} \| f \|^2,$$

ou seja, a norma  $\| \cdot \|_E$  definida em (4) é equivalente à norma  $\| \cdot \|$  do espaço  $\mathcal{X}$  considerado no capítulo 3.

O problema de Cauchy (1),(2) será chamado o problema perturbado. Como a matriz  $E(x)$  não é constante, não podemos aplicar a transformada de Fourier para obter uma solução explícita como foi feito no capítulo 3 para o problema não perturbado

$$\frac{\partial u^0}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial u^0}{\partial x_j} = 0, \quad (5)$$

$$u^0(x, 0) = f^0(x). \quad (6)$$

Podemos escrever o sistema (1) na forma de uma equação de

evolução:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = E(x)^{-1} \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = -iH_E u, \quad (7)$$

onde

$$H_E = -iE(x)^{-1} \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (8)$$

Mais precisamente o operador  $H_E$  é definido por

$$H_E u = E(x)^{-1} H u, \quad D(H_E) = D(H), \quad (9)$$

onde  $H$  é o operador definido no teorema 4.2.

Como  $H$  é autoadjunto, podemos provar que  $H_E$  é autoadjunto. Isto nos permite usar o teorema de Stone para obter uma solução do problema de Cauchy (1),(2) em termos do operador  $H_E$

$$u = U(t)f = e^{-itH_E} f.$$

Aliás, foi isto que fizemos no capítulo 4, ao interpretarmos a solução do problema não perturbado como resultando da ação de um grupo uniparamétrico  $U^*(t)$ .

No teorema seguinte provamos que o operador  $H_E$  é autoadjunto.

### TEOREMA 5.1

O operador  $H_E$  definido em (9) é autoadjunto.

### Demonstração

Dados  $\varphi$  e  $\psi$  em  $\mathcal{X}_E$  quaisquer, temos

$$\langle \varphi, \psi \rangle_E = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \cdot \overline{E(x)\psi(x)} dx = \langle \varphi, E\psi \rangle, \quad (10)$$

onde  $\langle \dots \rangle_E$  e  $\langle \dots \rangle$  são os produtos internos em  $\mathcal{X}_E$  e  $\mathcal{X}$ , respectivamente. Em particular, se  $\varphi \in DCH_E$ ,  $\psi \in \mathcal{X}_E$  obtemos de (9)

$$\langle H_E \varphi, \psi \rangle_E = \langle \overline{\psi, H_E \varphi} \rangle_E = \langle \overline{\psi, E H_E \varphi} \rangle = \langle \overline{\psi, H\varphi} \rangle = \langle H\varphi, \psi \rangle. \quad (11)$$

Provaremos primeiro que  $H_E \subseteq H_E^*$ : sejam  $\varphi, \psi \in DCH_E = DCH$ . Então usando (11) e o fato de  $H$  ser autoadjunto,

$$\begin{aligned} \langle H_E \varphi, \psi \rangle_E &= \langle H\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, H\psi \rangle = \langle \overline{H\psi, \varphi} \rangle \\ &= \langle \overline{H_E \psi, \varphi} \rangle_E = \langle \varphi, H_E \psi \rangle_E. \end{aligned}$$

Assim,  $\psi \in DCH_E^*$  e  $H_E^* \psi = H_E \psi$ , isto é,  $H_E \subseteq H_E^*$ .

Provemos agora que  $H_E^* \subseteq H_E$ . Seja  $\psi \in DCH_E^*$  e  $\mu = H_E^* \psi$ .

Então

$$\langle H_E \varphi, \psi \rangle_E = \langle \varphi, \mu \rangle_E \quad (12)$$

para todo  $\varphi \in DCH_E$ . Aplicando as equações (10), (11) na igualdade (12), obtemos

$$\langle H\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, E\mu \rangle, \quad \forall \varphi \in DCH_E = DCHD.$$

Como  $H$  é autoadjunto, isto implica que  $\psi \in DCHD = DCH_E$  e

$$E\mu = H\psi,$$

donde

$$\mu = E^{-1}H\psi = H_E\psi,$$

isto é,  $H_E^* \subseteq H_E$ . Está provado então que o operador  $H_E$  é autoadjunto.

## 5.2. EXISTÊNCIA DO OPERADOR DE ONDA

O operador de onda aparece naturalmente ao compararmos as soluções  $u^*$  e  $u$  dos problemas de Cauchy (1), (2) e (5), (6), obtidas em termos dos operadores  $H$  e  $H_E$ . Para esta comparação, tanto podemos usar a norma  $\| \cdot \|_E$  do espaço  $\mathcal{X}_E$  como podemos usar a norma  $\| \cdot \|$ , já que elas são equivalentes. Observemos que a solução de (1), (2) é dada por  $U(t)f = e^{-itH}f$ , enquanto que a solução de (5), (6) é dada por  $U^*(t)f^* = e^{itH}f^*$ . Assim,

$$\| U(t)f - U^*(t)f^* \|_E = \| e^{-itH}f - e^{itH}f^* \|_E.$$

Isto é equivalente a

$$\| f - e^{itH}e^{-itH}f^* \|_E,$$

pois  $\| e^{-itH_E} \|_E = 1$ .

Seja

$$W(t) = e^{itH_E} e^{-itH}, \quad -\infty < t < \infty. \quad (13)$$

Observemos que  $H$  tem no máximo um autovalor que é  $\lambda = 0$  ([1]). Começando com um dado  $f^*$ , é natural supor que sua projeção ortogonal no autoespaço de  $H$  é zero, pois tal projeção pode dar lugar somente a uma solução estática de (5). Em vista desta observação, o operador de onda é definido por

$$W_+ = W(H_E; H, P) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_E} e^{-itH} P, \quad (14)$$

onde  $P$  é a projeção ortogonal no complemento ortogonal do autoespaço de  $H$ :  $N(H)^\perp$ .

Provaremos a seguir a existência do operador de onda (14) sob as hipóteses (i) e (ii) sobre a matriz  $E(x)$ . Um desenvolvimento análogo pode ser feito para um segundo operador de onda  $W_-$  que é obtido quando  $t \rightarrow -\infty$  em (14).

### TEOREMA 5.2

Sob as condições (i) e (ii) sobre a matriz  $E(x)$ , o operador de onda  $W_+$  definido em (14) existe.

### Demonstração

Provaremos primeiro que para  $f$  num certo conjunto denso de  $N(H)^\perp$  a

expressão

$$I = \| CH_E - HDe^{-itH}f \|_E$$

é integrável em  $(T, \infty)$ ,  $T > 0$ . Isto é uma condição suficiente para a existência do operador de onda ([6], p.535), como veremos adiante.

No que segue  $C$  denota uma constante, não necessariamente a mesma em cada vez que aparece.

Da definição da norma  $\| \cdot \|_E$  e da desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned} \|g\|_E^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} g \cdot \overline{Eg} dx = \langle g, Eg \rangle \leq \|g\| \|Eg\| \\ &\leq C \|g\|_E \|Eg\|. \end{aligned}$$

donde  $\|g\|_E \leq C \|Eg\|$ . Daqui e de (9) obtemos

$$\begin{aligned} I^2 &= \|CE^{-1} - I\|He^{-itH}f\|_E^2 \leq C \|CI - E\|He^{-itH}f\|^2 \\ &= C \int_{\mathbb{R}^n} |(I - E(x))He^{-itH}f|^2 dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |E(x) - I|^2 |He^{-itH}f|^2 dx. \end{aligned} \tag{15}$$

Com a notação introduzida no capítulo 2,

$$\hat{f}(p) = \sum_{j=1}^n \hat{f}_j(p) e_j(p),$$

obtemos

$$He^{-itH}f = C \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\phi \cdot x} \prod_{j=1}^N \lambda_j(p) e^{-it\lambda_j(p)} \hat{f}_j(p) e_j(p) dp.$$

Introduzimos coordenadas polares  $\rho, \omega$  com  $\rho > 0$ ,  $|\omega| = 1$ , através da relação  $p = \rho\omega$ . Notando que  $dp = \rho^{n-1} d\rho d\omega$  e que

$$\lambda_j(\rho\omega) = \rho\lambda_j(\omega) \quad \text{e} \quad e_j(\rho\omega) = e_j(\omega),$$

temos

$$He^{-itH}f = C \sum_{j=1}^N \int_{|\omega|=1} \left[ \int_0^\infty e^{-it\rho\lambda_j(\omega)} e^{i\rho\omega \cdot x} \lambda_j(\omega) \hat{f}_j(\rho\omega) e_j(\omega) \rho^{n-1} d\rho \right] dS_\omega.$$

(16)

Como  $f \in N(\mathcal{H})^\perp$ ,  $\hat{f}_j = 0$  para aqueles  $j$  correspondentes a qualquer raiz que se anule identicamente. Então esses índices  $j$  são excluídos nas somas em (16). Além disso restringimos  $f$  na seguinte forma: supomos que as  $\hat{f}_j(\rho\omega)$  são da forma

$$\hat{f}_j(\rho\omega) = \psi_j(\omega) \phi(\rho),$$

onde  $\phi \in C_0^\infty(0, \infty)$  e  $\psi$  pertence ao conjunto das funções contínuas sobre a esfera unitária  $S^{n-1}$  que se anulam em alguma vizinhança de

$$N_j = \{ \omega \in S^{n-1}; \lambda_j(\omega) = 0 \}.$$

Se uma raiz  $\lambda_j(\omega)$  não se anula identicamente então o conjunto  $N_j$

correspondente é de medida zero em  $S^{n-1}$  ([1]). Usando este fato segue que as funções sob essas condições formam um conjunto denso em  $N(H)^\perp$ . Denotaremos este conjunto por  $S$ .

Agora estamos em posição de estimar a expressão em (16). Em vista desta escolha de  $\psi_j(\omega)$ , cada termo da soma em (16) pode ser escrito da seguinte maneira:

$$C \sum_{j=1}^n \int_{S^{n-1} \setminus V_j} \left[ \int_{\alpha}^{\beta} e^{-it\rho\lambda_j(\omega)} F_j d\rho \right] dS_\omega, \quad (17)$$

onde  $F_j = e^{i\rho\omega \cdot x} \lambda_j(\omega) \phi_j(\rho) \psi_j(\omega) e_j(\omega) \rho^{n-1}$ ,  $\phi_j \in C_0^\infty(\alpha, \beta)$  com  $0 < \alpha < \beta < \infty$ , e  $V_j$  é alguma vizinhança aberta de  $N_j$ . Integrando por partes duas vezes encontramos que a expressão em (16) se transforma em

$$C \sum_{j=1}^n \int_{S^{n-1} \setminus V_j} \left[ \int_{\alpha}^{\beta} e^{-it\rho\lambda_j(\omega)} \frac{F_j''}{[it\lambda_j(\omega)]^2} d\rho \right] dS_\omega,$$

onde  $F_j'' = \frac{\partial^2 F_j}{\partial \rho^2}$ . Como cada  $\lambda_j(\omega)$  é contínua, existe  $a_j > 0$  tal que

$|\lambda_j(\omega)| \geq a_j > 0$  sobre o conjunto  $S^{n-1} \setminus V_j$ . Assim vemos que a expressão em (16) é dominada por

$$\frac{C}{t^2} (1 + |x| + |x|^2). \quad (18)$$

Substituindo (18) em (15) obtemos

$$I \leq \frac{C}{t^4} \int_{\mathbb{R}^n} |E(x) - I|^2 (1 + |x| + |x|^2)^2 dx.$$

Finalmente usamos a condição (ii) para concluir que

$$I \leq C/t^2,$$

mostrando assim que  $I$  é de fato integrável em  $(T, \infty)$ .

Provaremos agora a existência do operador de onda definido em (14). Seja  $W(t)$  como definido em (13) e  $f \in S$ , obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)W(t)f &= \left(\frac{d}{dt}\right)e^{itH_E}e^{-itH_f} \\ &= ie^{itH_E}(H_E - H)e^{-itH_f}. \end{aligned}$$

Integrando obtemos

$$W(t_2)f - W(t_1)f = i \int_{t_1}^{t_2} e^{itH_E}(H_E - H)e^{-itH_f} dt.$$

Como  $\|e^{itH_E}\| = 1$ , temos

$$\|W(t_2)f - W(t_1)f\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \| (H_E - H)e^{-itH_f} \| dt.$$

Como o integrando do lado direito é integrável sobre  $(T, \infty)$ , o lado direito tende a zero quando  $t_1, t_2 \rightarrow \infty$  e  $s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} W(t)$  existe.

Como isto é verdade para todo  $f \in S$  que é denso em  $NCH \perp$ , e como

$W(t)$  é uniformemente limitado, segue que o mesmo limite existe para todo  $f$  em  $NCH \perp = P\mathcal{L}$ . Isto é equivalente à existência do operador de onda definido em (14), o que completa a demonstração do teorema.

## OBSERVAÇÕES FINAIS

A existência do operador de onda  $W_+$  mostra que a solução do problema perturbado é aproximada, assintoticamente com  $t \rightarrow \infty$ , pela solução do problema não perturbado, desde que  $f = W_+ f^\circ$ . De modo análogo, podemos provar a existência de um operador de onda

$$W_- = s\text{-}\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{itH} E e^{-itH_P},$$

que permite aproximar a solução do problema perturbado  $U(t)f$  por uma solução do problema não perturbado  $U^\circ(t)f^\circ$  assintoticamente com  $t \rightarrow -\infty$ .

Estas observações sugerem a seguinte situação: uma onda não perturbada  $U^\circ(t)f_-$  origina-se remotamente no passado ( $t \rightarrow -\infty$ ), interage com a perturbação em tempo finito - isto é, transforma-se em  $U(t)f$  - e evolui para nova solução não perturbada  $U^\circ(t)f_+$  no futuro  $t \rightarrow +\infty$ . Portanto o efeito da perturbação  $E(\infty)$  é o de transformar uma solução não perturbada  $U^\circ(t)f_-$  em  $t = -\infty$ , noutra  $U^\circ(t)f_+$  em  $t = +\infty$ . A questão central que se põe aqui é a de saber se, dado  $f_- \in P\mathcal{X}$ , sempre existe  $f_+$ :

$$f_- \xrightarrow{W_-^{-1}} f^\circ \xrightarrow{W_+} f_+.$$

Isto equivale a dizer que  $W_-$  é inversível. O operador

$$S = W_+ W_-^{-1}$$

é chamado o "operador de espalhamento".

## BIBLIOGRAFIA

1. G.S.S. Ávila, *Spectral resolution of differential operators associated with symmetric hyperbolic systems*, Appl. Anal. 1 (1972), 283 - 299.
2. G.S.S. Ávila and D.G.Costa, *Decay of solutions of symmetric hyperbolic systems of partial differential equations*, Rocky Mountain J. Math. Vol. 9, N° 3 (1979), 405 - 413.
3. D.G.Costa, *Equações Diferenciais Hiperbólicas*, 11° Colóquio Brasileiro de matemáticas (1977).
4. L.Hörmander, *The Analysis of Partial Differential Operators I*, Springer-Verlag (1983).
5. F.John, *Partial Differential Equations*, 3a.Ed., Springer-Verlag (1980).
6. T.Kato, *Perturbation Theory for linear Operators*, 2a.ed., Springer-Verlag (1976).
7. P.D.Lax and R.S.Phillips, *Scattering Theory*, Academic Press, (1967).
8. W.Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill Book Company (1973).
9. C.H.Wicox, *Wave operators and asymptotic solutions of wave propagation problems of classical physics*, Arch.Rat.Mech.Anal. 22 (1966), 37-78.

10. C.H. Wilcox, *Measurable eigenvectors for Hermitian matrix-valued polynomials*, J. Math. Anal. Applications **40** (1972), 12-19.
11. S. Willard, *General topology*, Addison-Wesley Publishing Company (1970).