BARROS

HOMOTOPIA REGULAR DE GRAFOS

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e definida pelo Sr. TOMAS EDSON BARROS e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 4 de fevereiro de 1991.

Prof. Dr. JOSÉ CARLOS DE SOUZA KIIHL
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Agradecimentos

Gostaria de deixar meus agradecimentos a todos que colaboraram direta ou indiretamente para o resultado final desse trabalho. Em especial quero agradecer ao professor David Carlo Demaria o qual sugeriu algumas modificações e fez a revisão final do texto.

Introdução

Realizamos no presente trabalho uma apresentação da Teoria de Homotopia Regular de Grafos, a qual se faz de maneira similar à Teoria de Homotopia Clássica. Tal teoria nos permite associar a cada grafo orientado seus grupos de o–homotopia e o^*–homotopia, os quais refletem propriedades estruturais dos grafos orientados.

O trabalho está composto em três partes.

Na primeira introduzimos os conceitos e definições necessárias para o desenvolvimento da teoria de homotopia regular de grafos, a qual não necessita ser desenvolvida sobre a categortia dos espaços topológicos e funções contínuas mas somente sobre a categoria dos pré–espaços e funções pré–contínuas que são versões mais fracas da primeira, e portanto mais gerais.

Uma vez que podemos identificar os digrafos com os pré–espaços finitos, podemos então associar a cada grafo orientado G dois pré–espaços finitos e com este artifício definimos naturalmente o n–ésimo grupo de o–homotopia e o n–ésimo grupo de o^*–homotopia denotados por $Q_n(G)$ e $Q_n^*(G)$, respectivamente.

Na segunda parte apresentamos vários resultados centrais para a demonstração de dois teoremas fundamentais para o cálculo de $Q_n(G)$ e $Q_n^*(G)$.

Finalmente na última parte apresentamos uma interessante aplicação dos resultados precedentes dando uma caracterização estrutural dos torneios tendo o primeiro grupo de homotopia não nulo.

Filtros. Pré–Espaços. Digrafos.
Grupos de Homotopia.

Para o desenvolvimento da teoria de homotopia regular precisamos definir uma estrutura pré–topológica sobre um conjunto, a qual se faz através da noção de filtro sobre um conjunto. Assim sendo, começamos com algumas definições rápidas a respeito de filtros.

Definição 1. Seja A um conjunto. Uma coleção não vazia F de subconjuntos de A é chamada um *filtro* sobre A, se as seguintes condições forem verificadas:

(i) $X \in F,\ Y \in F \Longrightarrow X \cap Y \in F,$

(ii) $X \in F,\ X \subseteq Y \Longrightarrow Y \in F.$

Se além disso, $F \neq \exp A$ (onde $\exp A$ denota o conjunto das partes de A), ou seja, se $\phi \notin F$, então F é chamado um *filtro próprio* sobre A.

Seja β uma coleção de conjuntos. Se A é um conjunto, $\beta \subseteq \exp A$ e F é um filtro sobre A que consiste dos $Y \subseteq A$ tais que existe $X \in \beta$ com $X \subseteq Y$, então diremos que β é uma *base* do filtro F (sobre A). Diremos também que β é um *filtro base* (um *filtro base próprio*) sobre A, se existe um filtro (um filtro próprio) F sobre A do qual β é base (se existe um tal filtro F, então ele é, naturalmente, unicamente determinado, por isso denotaremos tal filtro por $\overline{\beta}$).

Uma coleção de conjuntos β é um filtro base se, e somente se, para qualquer $X \in \beta$, $Y \in \beta$, existe um $Z \in \beta$ com $Z \subseteq X \cap Y$; β é um filtro próprio se, e somente se, em adição, $\phi \notin \beta$.

Dados dois filtros F e F' em X, dizemos que F' é mais fino que F, $F' \leq F$, se $F \subseteq F'$. Se além disso $F \neq F'$, dizemos que F' é estritamente mais fino que F.

Um filtro F sobre A é chamado filtro principal se existe um subconjunto $B \subseteq A$ tal que $F = \overline{\{B\}}$, ou seja, $F = \{X \subseteq A \mid B \subseteq X\}$.

Definição 2. Sejam dados, um conjunto não vazio I e para cada elemento $x \in I$ um filtro F_x sobre I tal que $\overline{\{x\}} \leq F_x$. Chamamos de filtro de vizinhanças do ponto x ao filtro F_x. Denominamos pré–topologia sobre I à família dos filtros $\mathcal{P} = \{F_x\}$ $(x \in I)$, e chamamos de espaço pré–topológico ou pré–espaço de suporte I e pré–topologia $\mathcal{P}$ ao par $P = \{I, \mathcal{P}\}$.

Se os filtros da família $\mathcal{P}$ são principais dizemos que P é um pré–espaço a filtros principais ou um pf–pré–espaço.

Finalmente, dois pf–pré–espaços $P = \{I, \mathcal{P}\}$ e $P' = \{I, \mathcal{P}'\}$, possuindo o mesmo suporte I e pré–topologias $\mathcal{P} = \{\overline{A_x}\}$ $(x \in I)$ e $\mathcal{P}' = \{\overline{A'_x}\}$ $(x \in I)$ são ditos simétricos se para cada $x \in I$ e cada $y \in I$ tem–se: $x \in A'_y \iff y \in A_x$.

Observação 1. Os pré–espaços coincidem com os espaços fecho de Čech. De fato, se pode definir um operador fecho u para P, pondo para cada subconjunto $X \subseteq I$:

$$u(X) = \{x \in I \,|\, U \in F_x \Longrightarrow U \cap X \neq \phi\}.$$

É imediata a verificação das seguintes propriedades:

(1) $u(\phi) = \phi$;

pois para todo $x \in I$ e todo $U \in F_x$ tem–se $U \cap \phi = \phi$.

(2) $X \subseteq u(X)$ $\forall$ $X \subseteq I$.

Pois se $x \in X$ então como $x \in U$ para cada $U \in F_x$ temos que $x \in U \cap X \Longrightarrow U \cap X \neq \phi$.

(3) $u(X \cup Y) = u(X) \cup u(Y)$ $\quad \forall X \subseteq I, \quad \forall Y \subseteq I.$

Porque se $x \in (u(X) \cup u(Y))$, então cada conjunto de F_x encontra X ou Y e consequentemente, $X \cup Y$, logo $x \in u(X \cup Y) \Longrightarrow u(X) \cup u(Y) \subseteq u(X \cup Y)$. Para provar a inclusão contrária, seja $x \notin (u(X) \cup u(Y))$, pela definição de u existem U e V em F_x com $U \cap X = \phi = V \cap Y$, disto segue que $(U \cap V) \cap (X \cup Y) = \phi$ e como $U \cap V \in F_x$ temos, pela definição de u que $x \notin u(X \cup Y)$. O que prova que $u(X \cup Y) \subseteq (u(X) \cup u(Y))$. Donde: $u(X) \cup u(Y) = u(X \cup Y)$.

Reciprocamente, pode–se demonstrar que um espaço fecho de Čech é um pré–espaço. (cf. [8], cap III sec. 14).

Usaremos de agora em diante a notação $\overline{X} = u(X)$ para o operador fecho de

Čech definido acima.

Observação 2. Os espaços topológicos são em particular pré–espaços. De fato, acrescentando a seguinte condição:

$$\text{“}\forall x \in P \quad \text{e} \quad \forall\, U \in F_x \quad \text{existe} \quad V \in F_x \quad \text{tal que:}$$
$$\text{para cada } y \in V \quad \exists\, W \in F_y \quad \text{tal que } W \subseteq U\text{”};$$

à definição 2 temos que o pré–espaço $P = \{I, \mathcal{P}\}$ torna-se um espaço topológico. De fato, neste caso vale $u(u(X)) = u(X)$ para cada subconjunto X de I (cf. [8], pg. 251).

Introduziremos a seguir as funções pré–contínuas entre pré–espaços de modo perfeitamente análogo ao caso das funções contínuas entre espaços topológicos.

Definição 3. Sejam $P = \{I, \mathcal{P}\}$ e $P' = \{I', \mathcal{P}'\}$ dois pré–espaços. Uma função $f : I \longrightarrow I'$ é dita pré–contínua se para cada $x \in I$ resulta:

$$\overline{f(F_x)} \leq F_{f(x)} :\equiv (\forall U \in F_{f(x)}\ \exists\, V \in F_x \quad \text{tal que} \quad f(V) \subseteq U)$$

Observação 3. Considerando dois pré–espaços P e P' como espaço fecho de Čech, a função $f : I \longrightarrow I'$ é pré–contínua se, e somente se para cada $A' \subseteq I'$ e para cada $B' \subseteq I'$ vale a implicação:

$$A' \cap \overline{B'} = \phi \Longrightarrow f^{-1}(A') \cap \overline{f^{-1}(B')} = \phi;$$

pois supondo que $f : I \longrightarrow I'$ é tal que $\overline{f(F_x)} \leq F_{f(x)}$ temos que dados A', $B' \in I'$ tais que $f^{-1}(A') \cap \overline{f^{-1}(B')} \neq \phi$

$$\Longrightarrow \phi \neq f(f^{-1}(A') \cap \overline{f^{-1}(B')}) \quad \subseteq \quad ff^{-1}(A') \cap f\overline{f^{-1}(B')} \subseteq A' \cap f\overline{f^{-1}(B')} \subseteq$$

$$\overset{(*)}{\subseteq} \quad A' \cap \overline{ff^{-1}(B')} \subseteq A' \cap \overline{B'}$$

$$\Longrightarrow A' \cap \overline{B'} \neq \phi$$

(*) é uma consequência do seguinte resultado:

$$f\overline{f^{-1}(B')} \subseteq \overline{ff^{-1}(B')}.$$

De fato, dado $y \in f\overline{f^{-1}(B')} \Longrightarrow \exists\ x \in \overline{f^{-1}(B')}$ tal que $f(x) = y$. Assim, se $U \in F_y = F_{f(x)} \Longrightarrow \exists\, V \in F_x$ tal que $f(V) \subseteq U$ pois f é pré–contínua. Logo:

$$U \cap ff^{-1}(B') \supseteq f(V) \cap ff^{-1}(B') \supseteq f(V \cap f^{-1}(B')) \neq \phi,$$

pois $V \cap f^{-1}(B) \neq \phi$ já que $V \in F_x$ e $x \in \overline{f^{-1}(B')}$ donde $U \cap ff^{-1}(B') \neq \phi$ e portanto $y \in \overline{ff^{-1}(B')}$. Reciprocamente, se $f : I \longrightarrow I'$ é tal que, para todos $A', B' \subseteq I'$ tais que $A' \cap \overline{B'} = \phi \Longrightarrow f^{-1}(A') \cap \overline{f^{-1}(B')} = \phi$, mostremos que $\overline{f(F_x)} \leq F_{f(x)}$ (onde F_x denota neste caso o sistema de vizinhanças de x segundo o operador fecho definido na observação 1, denotado aqui por uma barra —).

Dado $U \in F_{f(x)} \Longrightarrow f(x) \in \operatorname{int} U = I' - \overline{(I' - U)}$. Quero mostrar que existe $V \in I$ tal que $x \in I - \overline{(I - V)}$ e $f(V) \subseteq U$. Afirmo que $V = f^{-1}(U)$ satisfaz as propriedades desejadas. Como:

$$\begin{aligned} f(x) \quad &\in \quad \operatorname{int} U = I' - \overline{(I' - U)} \Longrightarrow f^{-1}\{f(x)\} \subseteq f^{-1}(I' - \overline{(I' - U)}) = \\ &\qquad = I - f^{-1}\overline{(I' - U)} \overset{(**)}{\subseteq} \\ &\overset{(**)}{\subseteq} \quad I - \overline{f^{-1}(I' - U)} = I - \overline{(I - f^{-1}(U))} = \operatorname{int} f^{-1}(U) = \operatorname{int} V \\ &\Longrightarrow \quad x \in f^{-1}\{f(x)\} \subseteq \operatorname{int} V \quad \text{ e } \quad f(V) = ff^{-1}(U) \subseteq U. \end{aligned}$$

Resta mostrar (**) o que é equivalente a mostrar que:

$$\overline{f^{-1}(I' - U)} \subseteq f^{-1}\overline{(I' - U)}.$$

Mas se $x \in \overline{f^{-1}(I' - U)} \Longrightarrow f^{-1}\{f(x)\} \cap \overline{f^{-1}(I' - U)} \neq \phi$ isso implica por hipótese que

$$\{f(x)\} \cap \overline{(I' - U)} \neq \phi \Longrightarrow f(x) \in \overline{(I' - U)} \Longrightarrow x \in f^{-1}\overline{(I' - U)}.$$

Podemos desenvolver uma teoria de homotopia para os pré–espaços de maneira similar à clássica. Consideramos como um n–caminho de um pré–espaço P uma função pré–contínua $f : I^n \longrightarrow P$, tendo como domínio o n–cubo unitário I^n e como contradomínio o pré–espaço P. Fixamos para isso, um pré–espaço P e um ponto $x \in P$ obtemos deste modo os grupos de homotopia $\pi_n(P, x)$ de P com ponto base x.

A fim de obter uma interpretação combinatória dos grupos de homotopia dos pré–espaços finitos devemos associar a cada grafo orientado dois particulares pré–espaços finitos.

Definição 4. Sejam I um conjunto finito não vazio e $\mathcal{A}$ um conjunto de pares ordenados formados com elementos distintos de I. Denominamos *grafo orientado* ou *digrafo* ao par $G = \{I, \mathcal{A}\}$.

Os *vértices* de G são os elementos de I; a *ordem* de G é a cardinalidade de I; os *arcos* de G são os pares de $\mathcal{A}$. Para indicar um arco orientado (x, y) usamos a notação mais expressiva $x \longrightarrow y$. Usaremos a notação $x \not\longrightarrow y$ para denotar que (x, y) não é um arco de G, ou seja, $(x, y) \notin \mathcal{A}$.

Finalmente se $x \longrightarrow y$ dizemos que x é um predecessor de y e que y é um sucessor de x.

Definição 5. Dado um grafo orientado $G = \{I, \mathcal{A}\}$ definimos os pré–espaços associados a G como sendo os dois pf– pré–espaços simétricos $P(G) = \{I, \mathcal{P}\}$ e $P^*(G) = \{I, \mathcal{P}^*\}$, de suporte I e de respectivas pré–topológicas, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}^*$, construidas da seguinte maneira:

Para cada vértice $x \in I$ consideramos dois subconjuntos

$$A(x) = \{x\} \cup \{y \in G \,|\, x \longrightarrow y\} \quad \text{e} \quad A^*(x) = \{x\} \cup \{y \in G \,|\, y \longrightarrow x\}$$

e pondo

$$\mathcal{P} = \{\overline{\overline{A(x)}}\} \;\; (x \in I) \quad \text{e} \quad \mathcal{P}^* = \{\overline{\overline{A^*(x)}}\} \;\; (x \in I).$$

Em outras palavras os filtros de vizinhanças do ponto $x \in I$ em $P(G)$ (em $P^*(G)$) têm como base os conjuntos formados por x e seus sucessores (por x e seus predecessores).

Exemplos: (1) $G = \{I, \mathcal{A}\}$ $I = \{x, y\}$ $\mathcal{A} = \{(x, y)\}$

Temos

$$A(x) = \{\{x,y\}\} \qquad A^*(x) = \{\{x\}\}$$

$$A(y) = \{\{y\}\} \qquad A^*(y) = \{\{x,y\}\}$$

$$\overline{A(x)} = \{\{x,y\}\} \qquad \overline{A^*(x)} = \{\{x\},\ \{x,y\}\}$$

$$\overline{A(y)} = \{\{y\},\ \{x,y\}\} \qquad \overline{A^*(y)} = \{\{x,y\}\}$$

$$P(G) = \{I, \{\overline{A(x)},\ \overline{A(y)}\}\} \quad P^*(G) = \{I,\ \{\overline{A^*(x)}, \overline{A^*(y)}\}\}.$$

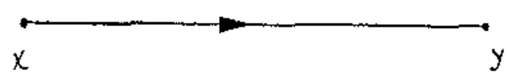


Figura 1

(2a). $G = \{I,\ \mathcal{A}\}$ $I = \{x,\ y,\ z\}$ $\mathcal{A} = \{(x,y),(x,z),(y,z),(z,x)\}$.

$$A(x) = \{\{x,y,z\}\} \qquad A^*(x) = \{\{x,z\}\}$$

$$A(y) = \{\{y,z\}\} \qquad A^*(y) = \{\{y,x\}\}$$

$$A(z) = \{\{z,x\}\} \qquad A^*(z) = \{\{x,y,z\}\}$$

$$\overline{A(x)} = \{\{x,y,z\}\} \qquad \overline{A^*(x)} = \{\{x,z\},\ \{x,y,z\}\}$$

$$\overline{A(y)} = \{\{y,z\},\ \{x,y,z\}\} \qquad \overline{A^*(y)} = \{\{y,x\},\ \{x,y,z\}\}$$

$$\overline{A(z)} = \{\{z,x\},\ \{x,y,z\}\} \qquad \overline{A^*(z)} = \{\{x,y,z\}\}$$

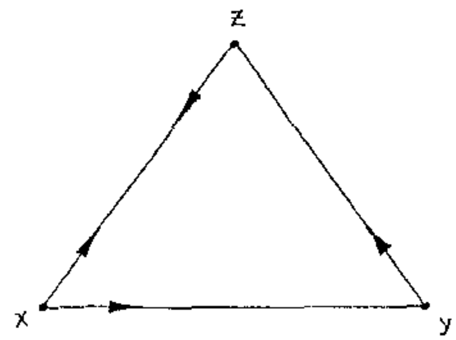


Figura 2

(2b). $G = \{I, \mathcal{A}\}$ $\quad I = \{x, y, z\}$ $\quad \mathcal{A} = \{(x, y), (z, x)\}$

$A(x) = \{\{x, y\}\}$ $\qquad A^*(x) = \{\{x, z\}\}$

$A(y) = \{\{y\}\}$ $\qquad A^*(y) = \{\{y, x\}\}$

$A(z) = \{\{z, x\}\}$ $\qquad A^*(z) = \{\{z\}\}$

$\overline{A(x)} = \{\{x, y\}, \{x, y, z\}\}$ $\qquad \overline{A^*(x)} = \{\{x, z\}, \{x, y, z\}\}$

$\overline{A(y)} = \{\{y\}, \{x, y\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$ $\qquad \overline{A^*(y)} = \{\{y, x\}, \{x, y, z\}\}$

$\overline{A(z)} = \{\{z, x\}, \{x, y, z\}\}$ $\qquad \overline{A^*(z)} = \{\{z\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$

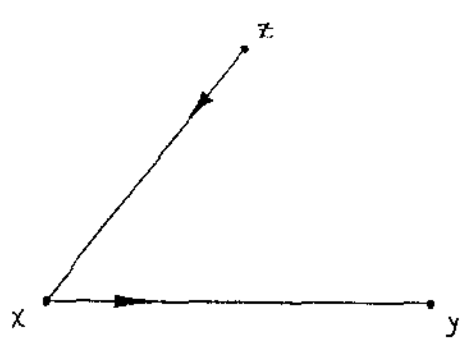


Figura 3

(2c). $G = \{I, \mathcal{A}\}$ $\quad I = \{x, y, z\}$ $\quad \mathcal{A} = \{(x,y),\ (y,z),\ (z,x)\}.$

$A(x) = \{\{x,y\}\}$ $\qquad A^*(x) = \{\{x,z\}\}$

$A(y) = \{\{y,z\}\}$ $\qquad A^*(y) = \{\{y,x\}\}$

$A(z) = \{\{x,z\}\}$ $\qquad A^*(z) = \{\{z,y\}\}$

$\overline{A(x)} = \{\{x,y\}\ \{x,y,z\}\}$ $\qquad \overline{A^*(x)} = \{\{x,z\},\ \{x,y,z\}\}$

$\overline{A(y)} = \{\{y,z\},\ \{x,y,z\}\}$ $\qquad \overline{A^*(y)} = \{\{y,x\},\ \{x,y,z\}\}$

$\overline{A(z)} = \{\{x,z\},\ \{x,y,z\}\}$ $\qquad \overline{A^*(z)} = \{\{z,y\},\ \{x,y,z\}\}$

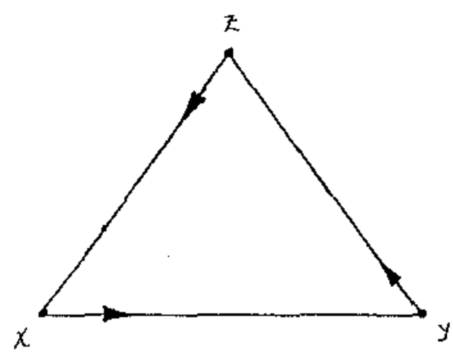


Figura 4

(3). $G = \{I, \mathcal{A}\}$ $\quad I = \{1,2,3,4\}$ $\quad \mathcal{A} = \{(1,2),(1,3),(1,4)\}.$

$A(1) = \{\{1,2,3,4\}\}$ $\qquad A^*(1) = \{\{1\}\}$

$A(2) = \{\{2\}\}$ $\qquad A^*(2) = \{\{1,2\}\}$

$A(3) = \{\{3\}\}$ $\qquad A^*(3) = \{\{1,3\}\}$

$A(4) = \{\{4\}\}$ $\qquad A^*(4) = \{\{1,4\}\}$

$\overline{A(1)} = \{\{1,2,3,4\}\}$

$\overline{A(2)} = \{\{2\},\ \{1,2\},\ \{3,2\},\ \{4,2\},\ \{1,2,3\},\ \{1,2,4\},\ \{2,3,4\},\ \{1,2,3,4\}\}$

$\overline{A(3)} = \{\{3\},\ \{1,3\},\ \{2,3\},\ \{4,3\},\ \{1,2,3\},\ \{1,3,4\},\ \{2,3,4\},\ \{1,2,3,4\}\}$

$\overline{A(4)} = \{\{4\},\ \{1,4\},\ \{2,4\},\ \{3,4\},\ \{1,2,4\},\ \{1,3,4\},\ \{2,3,4\},\ \{1,2,3,4\}\}$

$\overline{A^*(1)} = \{\{1\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{1,4\},\ \{1,2,3\},\ \{1,2,4\},\ \{1,3,4\},\ \{1,2,3,4\}\}$

$\overline{A^*(2)} = \{\{1,2\},\ \{1,2,3\},\ \{1,2,4\},\ \{1,2,3,4\}\}$

$\overline{A^*(3)} = \{\{1,3\},\ \{1,3,4\},\ \{1,2,3\},\ \{1,2,3,4\}\}$

$\overline{A^*(4)} = \{\{1,4\},\ \{1,2,4\},\ \{1,3,4\},\ \{1,2,3,4\}\}$

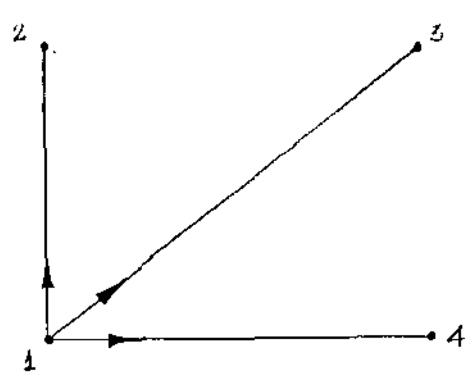


Figura 5

Observação 4. Reciprocamente cada pré-espaço finito $P = \{I, \mathcal{P}\}$ determina de um modo natural dois digrafos $G(P) = \{I, \mathcal{A}\}$ e $G^*(P) = \{I, \mathcal{A}^*\}$ dualmente orientados. Como o conjunto I é finito, segue que os filtros da família $\mathcal{P}$ são principais. Indicando então para cada $x \in I$, com A_x a base do filtro F_x obtemos os dois grafos G e G^* pondo $(x, y) \in \mathcal{A}$ ou $(x, y) \in \mathcal{A}^*$ conforme $y \in A_x$ ou $x \in A_y$, respectivamente.

Observação 5. Em particular temos $P(G) = P^*(G) \iff G \equiv G^*$ onde se $G = (I, \mathcal{A})$, então $G^* = (I, \mathcal{A}^*)$ com $\mathcal{A}^* = \{(x, y) \mid (y, x) \in \mathcal{A}\}$.

Neste caso, G pode ser identificado com um grafo não orientado.

Analogamente tiramos $G(P) = G^*(P) \iff$ o pré-espaço P é simétrico, ou seja, para cada $x \in I$ e para cada $y \in I$ tem-se $x \in A_y \iff y \in A_x$.

Observação 6. Notamos que em geral não é possível identificar o par (G, G') de grafos e subgrafos orientados com o par (P, P') de pré-espaço e sub-pré-espaço. De fato, dado o par (G, G') não é dito que o pré-espaço $P(G')$ seja um sub-pré-espaço de $P(G)$, porque a pré-topologia de $P(G')$ pode ser *estritamente mais fina* do que a pré-topologia induzida de $P(G)$, enquanto um subgrafo G' de G não deve necessariamente conter todos os arcos orientados de G.

Para ver isso, tome:

$$G = \{I, \mathcal{A}\} \quad \text{(fig. 6)} \qquad G' \subseteq G, \qquad G' = \{I', \mathcal{A}'\} \quad \text{(fig. 7)}$$

com

$$I = \{1, 2, 3, 4\} \qquad \mathcal{A} = \{(1,4), (2,4), (3,1), (3,2)\}$$

$$I' = \{1, 2, 3, 4\} \qquad \mathcal{A}' = \{(1,4), (2,4), (3,1)\}$$

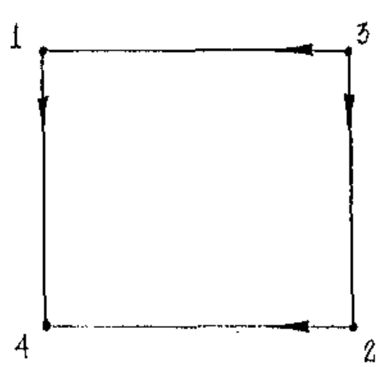


Figura 6

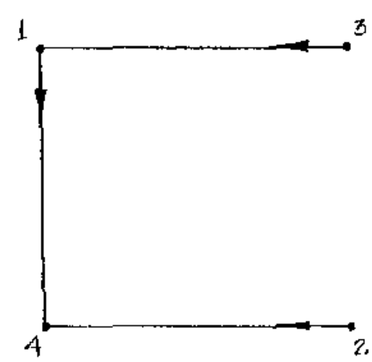


Figura 7

Então:

$$A(1) = \{\{1,4\}\} \qquad A(3) = \{\{3,1,2\}\}$$

$$A(2) = \{\{2,4\}\} \qquad A(4) = \{\{4\}\}$$

Donde $P(G) = \{I, \mathcal{P}\} = \{\{1,2,3,4\};\ \{\overline{A(1)}, \overline{A(2)}, \overline{A(3)}, \overline{A(4)}\}\}$ onde:

$\overline{A(1)} = \{\{1,4\},\ \{1,4,2\},\ \{1,4,3\},\ \{1,2,3,4\}\}$

$\overline{A(2)} = \{\{2,4\},\ \{2,4,1\},\ \{2,4,3\},\ \{1,2,3,4\}\}$

$\overline{A(3)} = \{\{1,2,3\},\ \{1,2,3,4\}\}$

$\overline{A(4)} = \{\{4\},\ \{1,4\},\ \{2,4\},\ \{3,4\},\ \{1,2,4\},\ \{1,3,4\},\ \{2,3,4\},\ \{1,2,3,4\}\}$

$A'(1) = A(1) = \{\{1,4\}\}$

$A'(2) = A(2) = \{\{2,4\}\}$

$A'(3) = \{\{1,3\}\}$

$A'(4) = A(4) = \{\{4\}\}$

Donde $P(G') = \{I', \mathcal{P}'\} = \{\{1,2,3,4\};\ \{\overline{A'(1)}, \overline{A'(2)}, \overline{A'(3)}, \overline{A'(4)}\}\}$ onde:

$$\overline{A'(1)} = \overline{A(1)}$$

$$\overline{A'(2)} = \overline{A(2)}$$

$$\overline{A'(3)} = \{\{1,3\},\ \{1,2,3\},\ \{1,3,4\},\ \{1,2,3,4\}\}$$

$$\overline{A'(4)} = \overline{A(4)}$$

Assim, vê-se que a pré-topologia de $P(G')$ é estritamente mais fina que a pré-topologia induzida por $P(G)$ (a qual neste caso coincide com a pré-topologia de $P(G)$).

Definição 6. Dados um pré-espaço P e um grafo orientado G, uma função $f : P \longrightarrow G$ é dita o-regular (o^*-regular) se f é uma função pré-contínua entre os pré-espaços P e $P(G)$ (entre os pré-espaços P e $P^*(G)$).

Propriedade 1. Uma função $f : P \longrightarrow G$ entre um pré-espaço P e um grafo orientado G é o-regular (o^*-regular) se, e somente se para cada par de vértices distintos x e y de G tais que $x \not\longrightarrow y$ tem-se $f^{-1}(x) \cap \overline{f^{-1}(y)} = \phi$ $\left(\overline{f^{-1}(x)} \cap f^{-1}(y) = \phi\right)$.

Demonstração. No caso em que f é o-regular:

$$x \neq y \quad \text{e} \quad x \not\longrightarrow y \Longleftrightarrow y \notin A(x) \Longleftrightarrow A(x) \cap \{y\} = \phi \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x \notin \overline{\{y\}} \Longleftrightarrow \{x\} \cap \overline{\{y\}} = \phi.$$

Assim, se f é o-regular, pela Observação 3 segue que para todo $x \neq y$ com $x \not\longrightarrow y$ tem-se $f^{-1}(x) \cap \overline{f^{-1}(y)} = \phi$.

Reciprocamente, se esta condição se verifica, então dados A', $B' \subseteq P(G)$, tais que $A' \cap \overline{B'} = \phi$ temos: uma vez que A' e B' são finitos, podemos por $A' = \{x_1, \ldots, x_k\}$ e $B' = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Assim:

$$A' \cap \overline{B'} = \phi \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \bigcup_{j=1}^{k} \{x_j\} \cap \overline{\bigcup_{i=1}^{n} \{y_i\}} = \bigcup_{j=1}^{k} \{x_j\} \cap \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\{y_i\}} = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{k} \{x_j\} \cap \overline{\{y_i\}} = \phi \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \{x_j\} \cap \overline{\{y_i\}} = \phi \quad i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, k \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x_j \neq y_i \quad \text{e} \quad x_j \not\longrightarrow y_i \quad i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots k \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow f^{-1}\{x_j\} \cap \overline{f^{-1}\{y_i\}} = \phi \quad i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots k \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{k} f^{-1}\{x_j\} \cap \overline{f^{-1}\{y_i\}} = \phi \Longrightarrow \bigcup_{j=1}^{k} f^{-1}\{x_j\} \cap \overline{\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}\{y_i\}} =$$

$$= f^{-1}(A') \cap \overline{f^{-1}(B')} = \phi$$

donde $f : P \longrightarrow G$ é o-regular em virtude da Observação 3.

Observamos neste ponto que uma função o–regular não é necessariamente o^*–regular, pois tomando $P = [0, 1]$ com a topologia usual de $I\!R^1$ e $G = \{\{u, v\}, \{(u, v)\}\}$ e $f : P \longrightarrow G$ dada por, $f([0, 1/2]) = u$ e $f((1/2, 1]) = v$, temos que f é o–regular, mas f não é o^*–regular.

Analogamente vê-se que $g : P \longrightarrow G$ tal que, $g([0, 1/2)) = u$ e $g([1/2, 1]) = v$ é o^*-regular e não é regular.

Definição 7. Seja S um espaço topológico e $I = [0, 1]$ o intervalo unitário em $I\!R^1$. Duas funções o–regulares (o^*–regulares) $f, g : S \longrightarrow G$ são chamadas o–homotópicas (o^*–homotópicas) se existe uma função o–regular (o^*–regular) $F : S \times I \longrightarrow G$, tal que

$$F(x, 0) = f(x), \qquad F(x, 1) = g(x), \qquad \forall x \in S$$

chamamos o–homotopia (o^*–homotopia) a função F.

Observação 7. A relação o–homotopia (o^*–homotopia) é uma relação de equivalência sobre o conjunto das funções o–regulares (o^*–regulares) de S em G. O conjunto das classes de o–homotopia (o^*–homotopia) é denotado por $Q(S, G)$ ($Q^*(S, G)$) (cf. [2], pg. 258).

Seja $S = I^n$ o n–cubo unitário em $I\!R^n$ e consideremos as funções $f : I^n, \dot{I}^n \longrightarrow G, \{v\}$ o–regulares (o^*–regulares), ou seja, $f : I^n \longrightarrow G$ e $f|_{\dot{I}^n} : \dot{I}^n \longrightarrow \{v\}$ são o–regulares (o^*–regulares), onde, $\dot{I}^n = \{(t_1, \ldots, t_n) \in I^n \,/\, \exists\, i, 1 \leq i \leq n, \;\; t_i = 0 \;\text{ ou }\; t_i = 1\}$ chamado bordo de I^n, e v é um vértice de G. Neste caso, sobre as condições da definição 7, duas funções o–regulares (o^*–regulares) $f, g : I^n, \dot{I}^n \longrightarrow G, \{v\}$ são chamadas o–homotópicas (o^*–homotópicas) se existe uma função o–regular (o^*–regular) $F : I^n \times I, \dot{I}^n \times I \longrightarrow G, \{v\}$ tal que

$F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)\ \forall x \in I^n$. Aqui também a relação de o–homotopia (o^*–homotopia) é uma relação de equivalência, denotamos o conjunto das classes dessa relação por $Q(I^n,\ \dot{I}^n;\ G,\ v)$ ($Q^*(I^n,\ \dot{I}^n;\ G,\ v)$).

Dadas $f, g : I^n, \dot{I}^n \longrightarrow G, \{v\}$ o–regulares (o^*–regulares) podemos definir, $(f+g) : I^n, \dot{I}^n \longrightarrow G, \{v\}$ da seguinte forma:

$$(f+g)(t_1,\ldots,t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \ldots, t_n) & 0 \le t_1 \le \dfrac{1}{2} \\ \\ g(2t_1 - 1,\ t_2, \ldots, t_n) & \dfrac{1}{2} \le t_1 \le 1. \end{cases}$$

Prova-se que $f+g$ é o-regular (o^*-regular) e pode-se por uma estrutura algébrica de grupo em $Q(I^n,\ \dot{I}^n;\ G,\ v)$ ($Q^*(I^n,\ \dot{I}^n;\ G,\ v)$) definindo-se

$$[f] + [g] = [f+g]$$

onde $[f]$ denota a classe de o–homotopia (o^*–homotopia) com representante f.

A demonstração dessas afirmações é virtualmente a mesma acerca dos grupos de homotopia clássica, a qual pode ser encontrada em [9] pgs. 5-8.

Observação 8. Se o grafo G é fracamente conexo, ou seja, se cada vértice $x \in G$ pode ser obtido de qualquer outro vértice $y \in G$ movendo-se ao longo de arcos e prescindindo de sua orientação, os grupos de homotopia de G não dependem do vértice base x e podem ser indicados simplesmente com $Q_n(G)$ e $Q^*_n(G)$.

Observação 9. Identificando os pré-espaços $P^*(G)$ e $P(G^*)$ obtemos uma lei de dualidade válida na teoria de homotopia dos grafos orientados. Essa nos permite colher de uma propriedade demonstrada a propriedade dual trocando seus conceitos duais de o–regularidade e o^*–regularidade, o–homotopia e o^*–homotopia, etc.

Cálculo dos Grupos de Homotopia De um Grafo Orientado

Dado um grafo orientado G, (que por simplicidade supomos fracamente conexo). O cálculo dos grupos de homotopia regular $Q_n(G)$ e $Q_n^*(G)$ está ligado aos correspondentes grupos de homotopia clássica $\pi_n(P)$ de um oportuno poliedro P mediante a aplição dos dois seguintes teoremas

Teoremas de Isomorfismo.

(1) Os grupos de homotopia regular $Q_n(G)$ e $Q_n^*(G)$ são isomorfos.

(2) O grupo de homotopia regular $Q_n(G)$ é isomorfo ao grupo de homotopia $\pi_n(|K_G|)$, onde K_G é o complexo simplicial associado ao grafo G. ($|K_G|$ é o espaço subjascente de K_G).

Uma vez que desejamos precisar a construção do complexo K_G e apresentar uma demonstração esquemática do primeiro teorema, precisamos introduzir algumas definições.

Definição 8. Sejam G um grafo orientado e $X \subseteq G$ um subconjunto não vazio. Um vértice v de G é dito *testa (cauda)* de X se v é um predecessor (um sucessor) de todos os outros vértices de X. Denotamos por $H_G(X)$ o conjunto das testas de X em G e por $T_G(X)$ o conjunto das caudas de X em G. O subconjunto X é dito *testado (caudado)* se X admite ao menos uma testa (uma cauda), ou seja, se $H_G(X) \neq \phi$ ($T_G(X) \neq \phi$). Enfim X é dito totalmente testado (totalmente caudado), se cada subconjunto não vazio de X é testado (caudado).

Observação 10. Se $X \subseteq G$ possui um único elemento ($X = \{v\}$ onde v é um vértice de G), dizemos que $H_G(X) = T_G(X) = X$. Assim X é totalmente testado e também totalmente caudado.

Se X é um par, X é testado $\Longleftrightarrow$ X é totalmente testado $\Longleftrightarrow$ X é totalmente caudado $\Longleftrightarrow$ X é caudado.

Observação 11. Um subconjunto X de G é totalmente testado se, e somente se é totalmente caudado, (cf. [3], pg. 43 Proposição 4).

Definição 9. Seja G um grafo orientado. Denominamos complexo simplicial associado a G ao complexo K_G tendo como vértices os vértices de G e como simplexos os simplexos gerados pelos subconjuntos totalmente testados de G: o poliédro $|K_G|$ do complexo simplicial K_G é chamado o poliédro de G.

Observação 12. Da observação 11 acima segue que os grafos G e G^* dualmente orientados, possuem o mesmo complexo simplicial associado, isto é, $K_G = K_{G^*}$. Portanto, podendo-se identificar $P^*(G)$ com $P(G^*)$, o primeiro teorema de isomofismo é também uma consequência do segundo, pois pelas identificações acima temos:

$$Q_n^*(G) = \pi_n(P^*(G)) = \pi_n(P(G^*)) = Q_n(G^*) \sim \pi_n(|K_{G^*}|) \sim \pi_n(|K_G|) \sim Q_n(G).$$

Exemplo 1. Seja $G = \{\{a, b, c, d\},\ \{(a, b),\ (a, c), (a, d),\ (b, c),\ (c, d),\ (b, d)\}\}$.
Então $K_G =$ tetraedro com vértices a, b, c, d (Fig. 9).

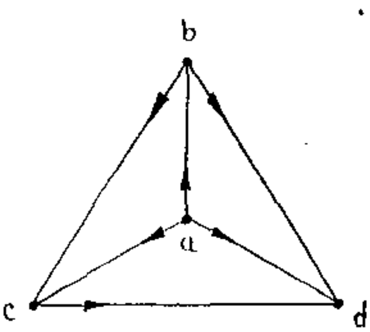


Figura 8

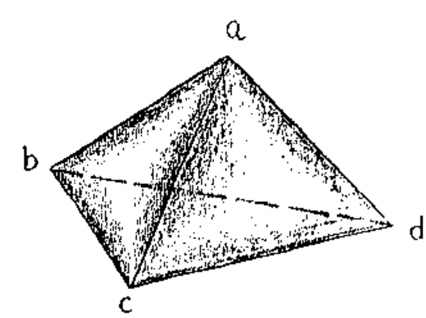


Figura 9

Pois os simplexos de K_G são:

0 – simplexos: a, b, c, d.
1 – simplexos: $[a, b]$, $[a, c]$, $[a, d]$, $[b, c]$, $[b, d]$, $[c, d]$.
2 – simplexos: $[a, b, c]$, $[a, c, d]$, $[a, b, d]$, $[b, c, d]$
3 – simplexos: $[a, b, c, d]$

Exemplo 2. Seja G como na figura 10.

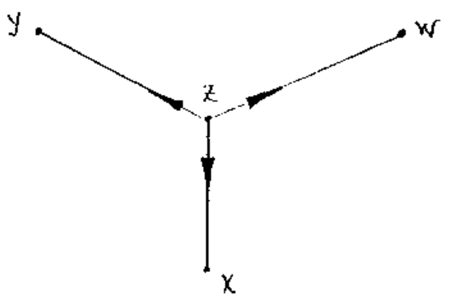


Figura 10

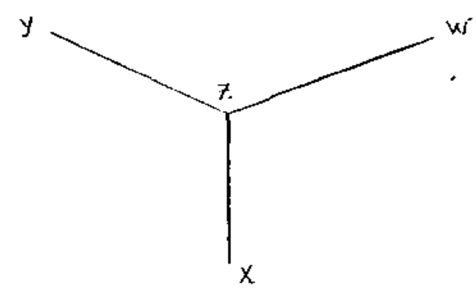


Figura 11

Então K_G è dado na figura 11.

Definição 10. Sejam dados um pré–espaço P, um ponto $x \in P$, um grafo orientado G e uma função $f : P \longrightarrow G$ entre P e G. Indicando com F_x o filtro das vizinhanças de x em P, denominamos embrulho da imagem de x por f ao subconjunto $\langle f(x)\rangle \subseteq G$, base do filtro imagem $f(F_x)$.

$$(\langle f(x)\rangle = \cap\{f(U_x) \,/\, U_x \in F_x\} = \cap f(F_x)).$$

Observação 13. O subconjunto $\langle f(x)\rangle$ admite também a seguinte definição

$$\langle f(x)\rangle = \{v \in G \,/\, x \in \overline{f^{-1}(v)}\}.$$

Um primeiro passo para desenvolver os dois teoremas de isomorfismo consiste em obter alguma propriedade (teoremas de Normalização) que pode ser considerada similar aos teoremas de aproximação simplicial de funções contínuas entre poliédros e que aqui servem para escolher um representante particular de cada uma das classes de homotopia regular.

Comecemos por um primeiro teorema de Normalização que nos permite substituir uma função regular por uma outra num certo sentido "sem singularidades". Da propriedade 1 e observação 13 segue imediatamente:

Propriedade 2. Uma função $f : P \longrightarrow G$ entre um pré–espaço P e um grafo orientado G é o–regular (o^*-regular) se, e somente se para cada ponto $x \in P$ resulta que:

(1) $\langle f(x)\rangle$ é testado (caudado);

(2) $f(x)$ é uma testa (uma cauda) de $\langle f(x)\rangle$ (cf. [4] Proposição 2).

Esta propriedade sugere a seguinte definição:

Definição 11. Uma função $f : P \longrightarrow G$ entre um pré–espaço P e um grafo orientado G é dita completamente o–regular (completamente o^*–regular) se:

(1) $\langle f(x)\rangle$ é totalmente testado (totalmente caudado);

(2) $f(x)$ é uma testa (uma cauda) de $\langle f(x)\rangle$.

Observação 14. Um subconjunto $X \subseteq G$ é dito singularidade de uma função o–regular (o^*–regular) $f : P \longrightarrow G$, se X é não–testado (não–caudado) e se em P a intercecção dos fechos das imagens inversas por f dos vértices de X é não vazia. Portanto uma função o–regular (o^*–regular) não possui singularidades se, e somente se ela é completamente o–regular (completamente o^*–regular) (cf. [4] Proposição 3).

Observação 15. Note que toda função completamente o–regular (completamente o^*–regular) é o–regular (o^*–regular), mas a recíproca não vale em geral, pois tomando $P = [0, 1]$ com a topologia usual de $I\!R^1$ e $G = \{\{u, v, w\}, \{(u, v), (u, w)\}$ vemos que $f : P \longrightarrow G$ dada por, $f([0, 1/2)) = v$, $f(1/2) = u$, $f((1/2, 1]) = w$ é o–regular mas não é completamente o–regular, pois embora $\langle f(1/2)\rangle$ seja testado, $\langle f(1/2)\rangle$ não é totalmente testado, e a propósito uma singularidade de f (neste caso a única) é dada por $\{v, w\}$.

Nota. De agora em diante, por brevidade omitiremos nos enunciados as propriedades e definições duais.

Propriedade 3. (Primeiro Teorema de Normalização). Sejam S um espaço topológico normal, G um grafo orientado e $f : S \longrightarrow G$ uma função o–regular entre S e G. Então, existe uma função completamente o–regular o–homotópica à f. Se o espaço produto $S \times I$ (onde $I = [0, 1]$) é normal, duas funções completamente o–regulares $f, g : S \longrightarrow G$ o–homotópicas são também completamente o–homotópicas (cf. [3], Teoremas 12 e 16).

Demonstração. Com um procedimento delicado se desenvolve inicialmente o seguinte resultado (cf. [2], Lema 6 e Corol. 7).

Sejam Y um subconjunto fechado de S e v um vértice de G tais que $f^{-1}(v) \cap Y = \phi$ e $\overline{f^{-1}(v)} \cap Y \neq \phi$, então existe uma função o–regular $h : S \longrightarrow G$ o–homotópica a f de modo que $\overline{h^{-1}(v)} \cap Y = \phi$. Além disso para cada n–upla $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de vértices de G com

$$\overline{f^{-1}(v_1)} \cap \overline{f^{-1}(v_2)} \cap \cdots \cap \overline{f^{-1}(v_n)} = \phi$$

implica

$$\overline{h^{-1}(v_1)} \cap \overline{h^{-1}(v_2)} \cap \cdots \cap \overline{h^{-1}(v_n)} = \phi.$$

Com isso pode–se provar que: (cf. [3], Proposição 11).

Se S é um espaço topológico normal, G um grafo orientado, $f : S \longrightarrow G$ uma função o–regular e $X = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma singularidade de f. Então existe uma função o–regular $h : S \longrightarrow G$, que é o–homotópica a f e tal que:

(i) X não é uma singularidade de h;

(ii) Todas as singularidades de h são também sigularidades de f.

Por repetidas aplicações desse resultado eliminamos sucessivamente as diversas singularidades de f e obtemos a função g.

A segunda parte da propriedade é enfim uma consequência da primeira.

Para podermos obter o segundo e terceiro teoremas de normalização precisamos por as seguintes definições:

Definição 12. Dado um conjunto S, definimos a decomposição de S relativa à partição $\mathcal{P} = \{X_j : j \in J\}$ ao par $(S, \mathcal{P})$ onde:

$$S = \bigcup_{j \in J} X_j \qquad \text{e} \qquad X_i \cap X_j = \phi \qquad \text{se} \qquad i \neq j.$$

Seja (S, d) um espaço métrico, definimos para cada $x \in S$

$$W^{\varepsilon}(x) = \{y \in S \,/\, d(x, y) < \varepsilon\}, \qquad \text{e}$$

$$W(X) = \bigcup_{x \in X} W(x) \qquad \text{onde} \qquad X \subseteq S.$$

Lema 1. Seja S um espaço métrico compacto e $X_1, \dots, X_n$ subconjuntos de S tais que $\overline{X}_1 \cap \cdots \cap \overline{X}_n = \phi$. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que:

$$W^{\varepsilon}(\overline{X}_1) \cap \cdots \cap W^{\varepsilon}(\overline{X}_n) = \phi.$$

Demonstração. Suponhamos por absurdo que para todo $m \in I\!N$ tem-se:

$$F_m = W^{1/m}(\overline{X}_1) \cap \cdots \cap W^{1/m}(\overline{X}_n) \neq \phi.$$

Tomando para cada $m \in I\!N$, $y_m \in F_m$ temos em virtude de S ser compacto que (y_m) possui uma subsequência convergente a um ponto $y \in S$.

Uma vez que:

$$W^{1/m}(\overline{X}_i) = \{y \in S \mid \exists x_i \in \overline{X}_i \quad \text{com} \quad d(x_i, y) < \frac{1}{m}\} = \{y \in S \mid d(y, \overline{X}_i) < \frac{1}{m}\}$$

é fechado, temos que cada F_m é fechado, e com:

$$F_m \supseteq F_{m+1} \qquad \forall m \in I\!N.$$

Segue que $y \in F_m$ para cada $m \in I\!N$, ou seja:

$$0 \leq d(y, \overline{X}_i) < \frac{1}{m} \qquad \forall m \in I\!N, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\iff d(y, \overline{X}_i) = 0, \qquad 1 \leq i \leq n \iff y \in \overline{X}_i, \qquad 1 \leq i \leq n$$

donde, $\overline{X}_1 \cap \cdots \cap \overline{X}_n \neq \phi$ o que contradiz a hipótese do lema.

Definição 13. Seja $f : S \longrightarrow G$ uma função de um espaço topológico S a um grafo orientado G. Uma função $g : S \longrightarrow G$ é chamada um o–molde (o^*-molde) de f, se para todo $x \in S$, $g(x)$ é uma testa de $\langle f(x) \rangle$ ($g(x)$ é uma cauda de $\langle f(x) \rangle$).

Definição 14. Uma função $f : S \longrightarrow G$ de um espaço topológico S a um grafo orientado G é chamada quase–o–regular (quase–o^*–regular), ou simplesmente $q.o$–regular ($q.o^*$–regular) se o embrulho $\langle f(x) \rangle$ é testado (caudado) para todo $x \in S$.

Além disso, a função f é chamada completamente quase regular, ou simplesmente *c.q.* regular, se $(f(x))$ é totalmente testado.

Observações:

16. Uma função $f : S \longrightarrow G$ é *q.o*–regular se, e somente se, existe um *o*–molde de f. (cf. [4] Proposição 5).

17. Uma função *c.q.*–regular é *q.o*–regular e *q.o**–regular. Portanto, existem ambos *o*–moldes e *o**–moldes para uma função *c.o.*–regular.

18. Se $f : S \longrightarrow G$ é *q.o*–regular então (cf. [4] Proposição 6):
(i) Todos os seus *o*–moldes são funções *o*–regulares;
(ii) Quaisquer dois *o*–moldes de f são *o*–homotópicos.

Dizemos que duas funções $f, g : S \longrightarrow G$ *c.o*–regulares (completamente *o*–regulares) são completamente *o*–homotópicas, *c.o*–homotópicas se existe uma *o*–homotopia *c.o*–regular entre f e g. A relação *c.o*–homotopia é uma relação de equivalência (cf. [4], Proposição 8). O conjunto das classes de *c.o*–homotopia será denotado por $Q_c(S, G)$.

19. Seja $f : S \longrightarrow G$ *c.q*–regular. Então (cf. [4] Proposição 7):
(i) Todos os seus *o*–moldes são funções *c.o*–regulares;
(ii) Quaisquer dois *o*–moldes de f são *c.o*–homotópicos.

Definição 15. Sejam S um conjunto (não vazio), $\mathcal{P} = \{X_j\}$ $(j \in J)$ uma partição de S e G um grafo. Uma função $f : S \longrightarrow G$ é dita quase constante com respeito a $\mathcal{P}$, se as restrições de f a cada subconjunto X_j são funções constantes. Se S é um espaço topológico, a função f é dita fracamente quase constante com respeito a $\mathcal{P}$, se as restrições de f aos interiores $\mathrm{int}(X_j)$ de cada X_j são funções constantes.

Propriedade 4. (Segundo Teorema de Normalização). Sejam S um espaço métrico compacto, G um grafo orientado e $f : S \longrightarrow G$ uma função *c.o*–regular. Podemos então determinar um número real r, tal que para cada partição $\mathcal{P} = \{X_j\}$ $(j \in J)$ de S em subconjuntos tendo diâmetro menor que r, existe uma função $g : S \longrightarrow G$

fracamente quase constante com respeito a $\mathcal{P}$, completamente o-regular e completamente o-homotópica a f.

Demonstração. Se $X = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq G$ é não–testado, como f é $c.o$-regular, segue que $\overline{f^{-1}(a_1)} \cap \cdots \cap \overline{f^{-1}(a_n)} = \phi$. Assim, pelo Lema 1 existe $\varepsilon_X > 0$ tal que:

$$F_{\varepsilon_X} = W^{\varepsilon_X}(\overline{f^{-1}(a_1)}) \cap \cdots \cap W^{\varepsilon_X}(\overline{f^{-1}(a_n)}) = \phi.$$

Tomando $r = \dfrac{1}{2} \min\{\varepsilon_X \,|\, X \subseteq G\}$ temos que cada $Y \subseteq S$ cujo diâmetro é menor do que r é tal que $f(Y) \subseteq G$ é testado, pois caso contrário, existe $Y \subseteq S$ com diâmetro menor que r e tal que $f(Y) = \{a_1, \ldots, a_n\}$ é não–testado. Assim tem-se:

$$f(y_i) = a_i \qquad 1 \leq i \leq n, \qquad \text{onde} \qquad \{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq Y.$$

Por um lado, temos que $F_{\varepsilon_Y} = \phi$, por outro temos, $d(y_i, y_j) < r \;\; 1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$.

Donde segue que:

$$y_1 \in W^r(y_1) \cap \cdots \cap W^r(y_n) \subseteq F_{\varepsilon_Y} = \phi \qquad \text{absurdo.}$$

Portanto se $\mathcal{P} = \{X_j\}$ é uma partição de S tal que cada X_j da partição tem diâmetro menor que r, podemos definir $h : S \longrightarrow G$ escolhendo como valor constante de h em cada X_j uma testa de $f(X_j)$.

(i) h é uma função $c.q.$ regular.

Suponha que existe $x \in S$ e $X = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq \langle h(x) \rangle$ não–testado. Então segue que $x \in \overline{h^{-1}(a_1)} \cap \cdots \cap \overline{h^{-1}(a_n)}$ e assim, $W^r(x) \cap h^{-1}(a_i) \neq \phi \;\; i = 1, \ldots, n$. Portanto, em $W^r(x)$ existem n pontos $x_1, \ldots, x_n$ tais que $x_i \in h^{-1}(a_i) \;\; i = 1, \ldots, n$. Mas da definição de h, existem n elementos $X_i \in \mathcal{P}$ e n pontos y_i tais que $h(x_i) = a_i = f(y_i) \;\; i = 1, \ldots, n$ onde x_i, $y_i \in X_i$. Desde que $d(x_i, y_i) < r$ e $d(x, x_i) < r$ segue que

$$d(x, y_i) < \min\{\varepsilon_X \,/\, X \subseteq G\} = \delta$$

donde:

$$x \in W^\delta(y_i) \cap \cdots \cap W^\delta(y_n) \subseteq W^t(\overline{f^{-1}(a_i)}) \cap \cdots \cap W^t(\overline{f^{-1}(a_n)}) = \phi$$

onde t é o número real positivo fornecido pelo Lema 1, o que nos dá um absurdo.

(ii) A função $F : S \times I \longrightarrow G$, dada por:

$$F(x,t) = \begin{cases} f(x) & \forall x \in S, \quad \forall t \in [0, 1/2) \\ \\ h(x) & \forall x \in S, \quad \forall t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

é completamente quase-regular. Isto é verdade $\forall x \in S$, $\forall t \neq \frac{1}{2}$, desde que f e h são funções *c.q.* regulares. Temos que provar que

$$\langle F(x, \frac{1}{2}) \rangle = \langle f(x) \rangle \cup \langle h(x) \rangle \qquad \text{é totalmente testado} \quad \forall x \in S.$$

Suponha $x \in S$ e seja $X = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq \langle f(x) \rangle \cup \langle h(x) \rangle$ um subconjunto não testado de $\langle F(x, \frac{1}{2}) \rangle$. Podemos ordenar os a_i de tal modo que $a_i, \ldots, a_p \in \langle f(x) \rangle$ e $a_{p+1}, \ldots, a_n \in \langle h(x) \rangle - \langle f(x) \rangle$. Portanto $x \in \overline{f^{-1}(a_1)} \cap \cdots \cap \overline{f^{-1}(a_p)}$ e assim $W^r(x) \cap f^{-1}(a_i) \neq \phi$, $i = 1, \ldots, p$.

Logo existe em $W^r(x)$ p pontos $x_1, \ldots, x_p$ tais que $x_i \in f^{-1}(a_i)$ $i = 1, \ldots, p$ então:

$$x \in W^r(x_1) \cap \cdots \cap W^r(x_p) \subseteq W^r(\overline{f^{-1}(a_1)}) \cap \cdots \cap W^r(\overline{f^{-1}(a_p)})$$

Além disso $x \in \overline{h^{-1}(a_{p+1})} \cap \cdots \cap \overline{h^{-1}(a_n)}$ e pelo que acabamos de demonstrar em (i) $x \in W^r(\overline{f^{-1}(a_{p+1})}) \cap \cdots \cap W^r(\overline{f^{-1}(a_n)})$. Logo:

$$x \in W^r(\overline{f^{-1}(a_1)}) \cap \cdots \cap W^r(\overline{f^{-1}(a_n)}),$$

o que contradiz o fato de X ser não-testado. Agora, considerando qualquer o-molde g de h temos:

(i') $g : S \longrightarrow G$ é *c.o.*-regular (Observação 19.i)

(ii') g é fracamente $\mathcal{P}$-constante pela definição de o-molde de uma função quase-constante.

(iii') g é *c.o*-homotópica a f.

Desde que a homotopia F é *c.q*-regular, existe um o-molde E de F (que é *c.o*-regular pela Observação 19.i). Além disso podemos escolher E tal que $E(x,0) = f(x)$, $E(x,1) = g(x) \, \forall x \in S$, desde que f e g são *c.o*-regulares, i.e., $f(x) \in H_G(\langle f(x) \rangle) = H_G(\langle F(x,0) \rangle)$ e $g(x) \in H_G(\langle g(x) \rangle) = H_G(\langle F(x,1) \rangle)$ $\forall x \in S$. Então g é *c.o*-homotópica a f por E.

Observação 20. Podemos definir h, escolhendo como imagem constante de $X_j \in \mathcal{P}$ qualquer vértice de $H_G(\{f(\overline{X}_j)\})$. (cf. Observação 1 pag. 67 de [5]).

Usaremos agora certos termos e resultados da Teoria dos Complexos Simpliciais, os quais podem ser encontrados em [12] pgs. 78 a 108 ou em [13] pgs. 106 a 153.

Definição 16. Seja C um complexo simplicial e D um subconjunto de simplexos de C. Denotamos por $|C|$ uma realização de C, ou seja, $|C|$ é o espaço topológico constituido por pontos dos simplexos de C munido de uma topologia coerente. Denotamos por $|D|$ o subespaço de $|C|$ constituido pelos pontos dos simplexos de D. (cf. [13] pgs. 110 e 111).

Definição 17. Seja D um subconjunto não vazio de simplexos de um complexo simplicial C Chamamos estrela de um ponto $x \in |D|$, e escrevemos $st_D(x)$, o conjunto dos simplexos de D cujo fecho em $|C|$, e portanto em $|D|$ contém x. Além disso, chamamos estrela de um subconjunto $X \subseteq |D|$, e escrevemos $st_D(X)$, o conjunto dos simplexos de D, cujo fecho tem intersecção não vazia com X. Se $D = C$ escrevemos simplesmente $st(x)$, $st(X)$.

Definição 18. Seja D um subconjunto de simplexos de um complexo simplicial C. Um simplexo $\tau \in D$ é chamado simplexo maximal em D se $\tau = st_D(\tau)$.

Definição 19. Seja D um subconjunto de simplexos de um complexo C, x um ponto de $|D|$ e X um subconjunto de $|D|$. Denotamos por $st_D^m(x)$ $(st_D^m(X))$ o conjunto dos simplexos maximais de D, cujo fecho contém x (cujo fecho tem intersecção não-vazia com X). Se $D = C$ escrevemos simplesmente $st^m(x)$ e $st^m(X)$.

Definição 20. Um espaço topológico S é dito triangularizável se existem um complexo simplicial K e um homeomorfismo $h : |K| \longrightarrow S$. Definimos a triangulação C de S relativa a (K, h) como sendo a decomposição $C = (S, \mathcal{P})$ de S relativa à partição $\mathcal{P} = \{h(\sigma) \,/\, \sigma \in K\}$. Identificaremos C com o conjunto $\{h(\sigma) \,/\, \sigma \in K\}$ e $|C| = S$ chamado espaço subjascente a C.

Definição 21. Sejam S um espaço compacto triangularizável, T uma triangulação de S e G um grafo orientado. Uma função $f : S \longrightarrow G$ é dita pré–simplicial em relação a T se:

(1) f é completamente o–regular;

(2) f é quase constante com respeito à T;

(3) Para cada simplexo não–maximal $s \in T$ existe um simplexo s' distinto de s tal que $|s| \subseteq |\overline{s}'|$ e $f(|s'|) = f(|s|)$.

Uma função $f : |T| \longrightarrow G$ satisfazendo a condição (3) é chamada propriamente T–constante.

Lema 2. Seja C um complexo simplicial, G um grafo orientado e $f : |C| \longrightarrow G$ uma função quase–constante com respeito à partição determinada pela decomposição simplicial de $|C|$. Então tem–se:

$$\langle f(x) \rangle = f(st(x)), \qquad \forall x \in |C|.$$

Além disso, a função f é propriamente C–constante se, e somente se:

$$f(st(\sigma)) = f(st^m(\sigma)), \qquad \forall \sigma \in |C|$$

se, e somente se:

$$\langle f(x) \rangle = f(st^m(x)), \qquad \forall x \in |C|$$

(cf. [5] Proposição 4).

Propriedade 5. (Terceiro Teorema de Normalização). Sejam S um espaço triangularizável e compacto, G um grafo orientado e $f : S \longrightarrow G$ uma função completamente o–regular. Então existe uma função $g : S \longrightarrow G$ que é pré–simplicial com respeito a uma triangulação adequada de S e completamente o–homotópica a f. Além disso, dadas duas funções pré–simpliciais e completamente o–homotópicas $f, g : S \longrightarrow G$, existe entre elas uma homotopia, que é também pré–simplicial com respeito a uma triangulação adequada de $S \times I$.

Demonstração. Seja C uma triangulação de S, tal que:

$$\text{máx}\{\text{diam}\, \sigma \,/\, \sigma \in C\} < r$$

onde r é dado pelo Segundo Teorema de Normalização.

Então construimos a função g escolhendo, para todo $\sigma_i \in C$, um vértice em $H_G(\{f(\overline{\sigma}_i)\})$ (ver Observação 19).

Portanto, $\forall x \in |C|$ temos $H_G(g(st^m(x))) \subseteq H_G(\langle g(x)\rangle)$, pois: dado um vértice $a \in H_G(g(st^m(x)))$ e $\tau \in st^m(x)$ tal que $g(\tau) = a$, provaremos que a é um predecessor de todos os vértices de $\langle g(x)\rangle$. De fato, se $b \in \langle g(x)\rangle$ e a não é um predecessor de b então pelo Lema 2 $\langle g(x)\rangle = g(st(x))$ e assim, existe $\sigma \in st(x)$ tal que $b = g(|\sigma|)$ e $x \in |\overline{\sigma}|$, o que implica pela definição de g que $b \in H_G(\{f(|\overline{\sigma}|)\})$. Desde que τ é maximal, temos:

$$|\sigma| \subseteq |\overline{\tau}| \Longrightarrow |\overline{\sigma}| \subseteq |\overline{\tau}| \Longrightarrow f(|\overline{\sigma}|) \subseteq f(|\overline{\tau}|)$$

logo $b \in H_G(\{f(|\overline{\sigma}|)\}) \subseteq f(|\overline{\sigma}|) \subseteq f(|\overline{\tau}|)$, o que implica que $a \notin H_G(\{f(|\overline{\tau}|)\})$, o que é uma contradição, esta contradição surgiu da suposição de que $a \not\longrightarrow b$, portanto $a \longrightarrow b$.

Observando que, para todo $x \in |\sigma|$, $g(st^m(x)) = g(st^m(\sigma))$, podemos definir um o–molde h da seguinte maneira:

$$h(|\sigma|) = \text{um vértice de } H_G(g(st^m(\sigma))), \quad \forall \sigma \in C.$$

Resta mostrar que h é propriamente C–constante.

Se τ é um simplexo maximal, então $g(st^m(\tau)) = \{g(|\tau|)\}$, o que implica $h(|\tau|) = g(|\tau|)$. Portanto, por definição, temos:

$$h(|\sigma|) \in g(st^m(\sigma)) = h(st^m(\sigma)), \quad \forall \sigma \in C$$

o que nos mostra que

$$h(st(\sigma)) \subseteq h(st^m(\sigma))$$

e como tem–se trivialmente a inclus,ão contrária, segue do Lema 2 que h é propriamente C–constante.

Para uma demonstração da segunda afirmação da Propriedade 5 ver [5] Teorema 8.

Propriedade 6. Seja $S \times I$ um espaço topológico normal e G um grafo orientado. Então existe uma bijeção natural do conjunto das classes de $c.o$–homotopia $Q_c(S,G)$ sobre as classes de o–homotopia $Q(S,G)$.

Demonstração. Sejam $F(S,G)$ e $F_c(S,G)$ os conjuntos de funções o–regulares e $c.o$–regulares de S em G respectivamente, e $j : F_c(S,G) \longrightarrow F(S,G)$ a aplicação inclusão. Obviamente, j induz uma aplicação $\bar{j} : Q_c(S,G) \longrightarrow Q(S,G)$ a qual é bijetora em virtude do Primeiro Teorema de Normalização.

Propriedade 7. Seja S um espaço topológico e G um grafo orientado. Então existe uma bijeção natural do conjunto das classes de $c.o$–homotopia $Q_c(S,G)$ ao conjunto das classes de $c.o^*$–homotopia $Q_c^*(S,G)$.

Demonstração. Denotamos por $F_c(S,G)$ $(F_c^*(S,G))$ ao conjunto de todas as funções de S em G $c.o$–regulares ($c.o^*$–regulares). Definimos:

$$\varphi : F_c(S,G) \longrightarrow F_c^*(S,G)$$

a qual envia cada $f \in F_c(S,G)$ em qualquer de seus o^*–molde $\varphi(f)$ e similarmente:

$$\psi : F_c^*(S,G) \longrightarrow F_c(S,G)$$

a qual envia cada $h \in F_c^*(S,G)$ em qualquer um de seus o–molde $\psi(h)$

(i) φ induz uma função Φ de $Q_c(S,G)$ a $Q_c^*(S,G)$.

Pelas observações 17 e 19-(i) φ é definida sobre todo o conjunto $F_c(S,G)$ e pela observação 19-(ii) todo o^*–molde de f é $c.o^*$–homotópico a $\varphi(f)$. Então definimos $\overline{\varphi} : F_c(S,G) \longrightarrow Q_c^*(S,G)$ pondo:

$$\forall f \in F_c(S,G), \qquad \overline{\varphi}(f) = [\varphi(f)]$$

a classe de $\varphi(f)$ em $Q_c^*(S,G)$.

Agora seja g uma função $c.o$–homotópica a f pela homotopia H, e seja $\varphi(g)$ um o^*–molde de g. Construimos a $c.o$–homotopia:

$$F(x,t) = \begin{cases} f(x) & 0 \le t \le \dfrac{1}{3} \\ H(x,\, 3t-1) & \dfrac{1}{3} \le t \le \dfrac{2}{3} \\ g(x) & \dfrac{2}{3} \le t \le 1. \end{cases}$$

Seja $\widehat{F}$ um o^*–molde de F, segue da observação dual à Observação 19 que $\widehat{F}$ é uma $c.o^*$–homotopia entre as restrições $\widehat{f} = \widehat{F}|_{S\times\{0\}}$ e $\widehat{g} = \widehat{F}|_{S\times\{1\}}$. Desde que $f = F|_{S\times\{0\}}$ e H não interferem na construção de $\widehat{f}$, $\widehat{f}$ é um o^*–molde de f. Similarmente, $\widehat{g}$ é um o^*–molde de g. $\varphi(f)$ e $\widehat{f}$ são $c.o^*$–homotópicas, e o mesmo acontece com $\varphi(g)$ e $\widehat{g}$ em virtude da mesma observação dual à Observação 19, logo $\varphi(f)$ e $\varphi(g)$ são $c.o^*$–homotópicas. Isso mostra que φ induz uma função Φ de $Q_c(S,G)$ em $Q_c^*(S,G)$ dada por: $\forall \alpha \in Q_c(S,G)$, $\Phi(\alpha) = [\varphi(f)]$, onde f é um representante de α.

(ii) ψ induz uma função Ψ de $Q_c^*(S,G)$ em $Q_c(S,G)$.

Por argumentos duais podemos provar que Ψ é dada por: $\forall \beta \in Q_c^*(S,G)$, $\Psi(\beta) = [\psi(h)]$, onde h é um representante de β.

(iii) Φ e Ψ são funções bijetoras.

Temos somente que provar que $\Psi\,\Phi$ é a identidade em $Q_c(S,G)$ e $\Phi\,\Psi$ é a identidade em $Q_c^*(S,G)$.

Seja α uma classe de $Q_c(S,G)$ e f um representante de α. Temos que $\Phi(\alpha) = [\varphi(f)]$, e por conseguinte, $\Psi\,\Phi(\alpha) = [\psi\,\varphi(f)]$. E como

$$\forall v \in G, \quad \overline{\psi\varphi(f)^{-1}(v)} \subseteq \overline{\varphi(f)^{-1}(v)} \subseteq \overline{f^{-1}(v)} \quad \text{segue que}$$

$$\langle \psi\,\varphi(f)(x)\rangle \subseteq \langle f(x)\rangle \qquad \forall x \in S.$$

Logo, pondo:

$$K(x,t) = \begin{cases} \psi\,\varphi(f)(x) & \text{para} \quad t = 0 \\ \\ f(x) & \forall t \in (0,1]. \end{cases}$$

Temos que K é uma $c.o$–homotopia entre $\psi\,\varphi(f)$ e f, pois:

$$\langle K(x,t)\rangle = \begin{cases} \langle \phi\,\varphi(f)(x)\rangle \cup \langle f(x)\rangle = \langle f(x)\rangle & \text{para} \quad t = 0 \\ \\ \langle f(x)\rangle & \forall t \in (0,1] \end{cases}$$

e desde que $\langle f(x)\rangle$ é totalmente testada segue que $\langle K(x,t)\rangle$ é totalmente testado e $K(x,t)$ é obviamente uma testa de $\langle K(x,t)\rangle$ donde K é *c.o*–regular.

Consequentemente $\Psi\,\Phi(\alpha) = [\psi\,\varphi(f)] = [f] = \alpha$. Similarmente

$$\forall \beta \in Q_c^*(S,G), \quad \Phi\,\Psi(\beta) = \beta.$$

Os tres teoremas de Normalização bem como os dois precedentes resultados podem ser desenvolvidos com uma certa dificuldade para pares de espaços e grafos orientados. Portanto isso pode ser aplicado aos grupos de homotopia regular $Q_n(G,v)$ e $Q_n^*(G,v)$. Temos que as funções similares $\overline{j}$, ϕ e ψ para o par I^n, $\dot{I}^n$ são também homomorfismos (cf. [4] Teorema 34). Com isso obtemos a:

Propriedade 8 (Primeiro Teorema de Isomorfismo). Os grupos de homotopia regular $Q_n(G)$ e $Q_n^*(G)$ de um grafo orientado G são isomorfos de um modo natural.

Propriedade 9 (Segundo Teorema de Isomorfismo). Sejam G um grafo orientado e K_G o complexo simplicial associado a G (ver Definição 8). Então o grupo de homotopia regular $Q_n(G)$ é isomorfo ao grupo de homotopia $\pi_n(|K_G|)$.

Uma demonstração detalhada desse teorema se encontra em [6] o qual faz uso do Terceiro Teorema de Normalização.

Exemplos (1) Seja G o grafo da figura 12. Então $|K_G|$ é homeomorfo a $E^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \le 1\}$, e temos $Q_n(G) \sim \pi_n(E^2) = 0$.

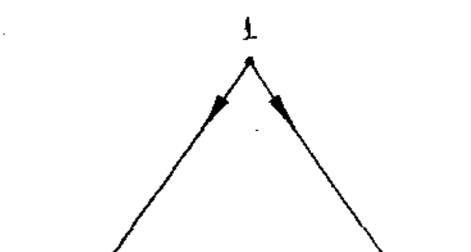


Figura 12

(2) Se G é o grafo da figura 13, ou o 3–ciclo (figura 14), então $|K_G|$ é homeomorfo a

S' (o círculo), e obtemos $Q_1(G) \sim \pi_1(S') = \mathbb{Z}$ e para $n > 1$ $Q_n(G) \sim \pi_n(S') = 0$.

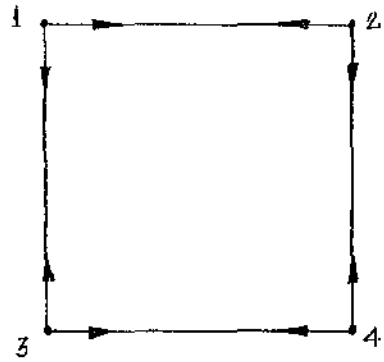


Figura 13

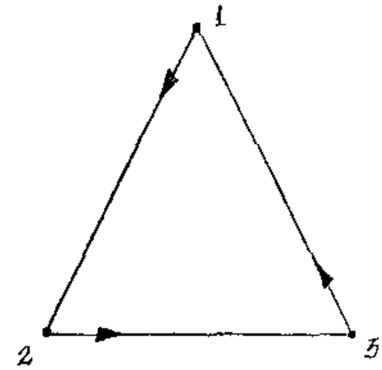


Figura 14

(3) Se G é o grafo da figura 15 ou o grafo da figura 16, então $|K_G|$ é homeormorfo a S^2 (a esfera) e $Q_n(G) \sim \pi_n(S^2)$.

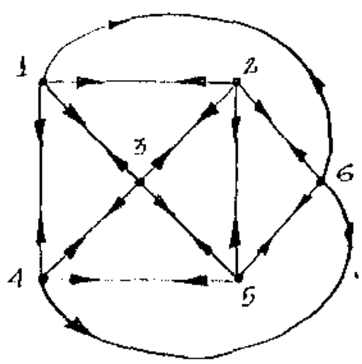


Figura 15

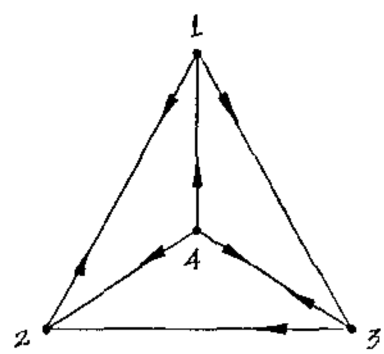


Figura 16

Torneios e sua Estrutura Algébrica

Apresentamos agora uma interessante aplicação dos resultados precedentes, caracterizando estruturalmente a classe dos torneios tendo o primeiro grupo de homotopia não nulo. Para tal fim precisamos apresentar algumas definições.

Definição 22. Um grafo orientado é chamado um torneio, se cada par de vértices distintos do mesmo, forma um e somente um arco.

Um torneio T é dito transitivo se, para cada $x \in T$, para cada $y \in T$ e para cada $z \in T$, $x \longrightarrow y$ e $y \longrightarrow z$ implica $x \longrightarrow z$. Enfim, um torneio é dito Hamiltoniano se existe um ciclo passante (uma só volta) atravessando todos os vértices de T.

Definição 23. Um torneio T é dito regular se, para cada $x \in T$, o número dos predecessores de x é igual ao número de seus sucessores (e como consequência a ordem de T é ímpar). Um torneio T é dito altamente regular se existe uma ordenação cíclica $v_1, v_2, \ldots, v_{2m+1}, v_1$ dos vértices de T tais que $v_i \longrightarrow v_j$ se, e só se v_j é um dos primeiros m sucessores de v_i na ordenação cíclica dos vértices de T.

Exemplo I. Seja G o grafo da figura 17. Vê-se que G é um torneio:

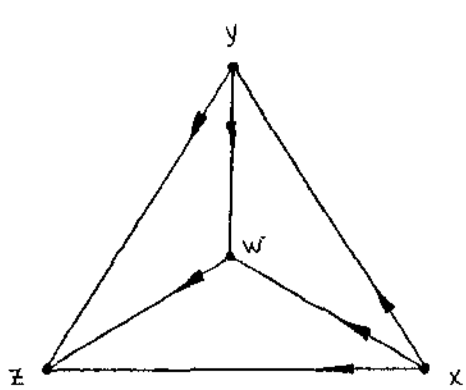


Figura 17

(1) Transitivo

(2) Não Hamiltoniano. Pois os únicos ciclos são:

$x \longrightarrow z$	$x \longrightarrow w$	$y \longrightarrow w$
$x \longrightarrow w \longrightarrow z$	$x \longrightarrow y$	$y \longrightarrow w \longrightarrow z$
$x \longrightarrow y \longrightarrow w$	$x \longrightarrow y \longrightarrow z$	$y \longrightarrow z$
$x \longrightarrow y \longrightarrow w \longrightarrow z$		

como vemos, nenhuma dessas rotas é um ciclo (rota fechada).

(3) Não Regular: pois G tem ordem par.

Exemplo II. Sejam G como na figura 18 e G' como na figura 19. Então G e G' são torneios.

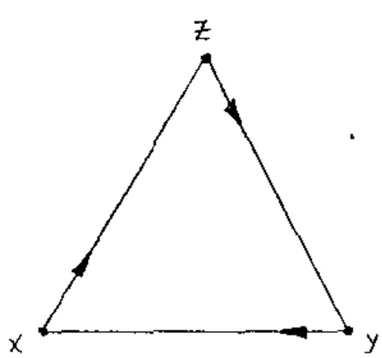


Figura 18

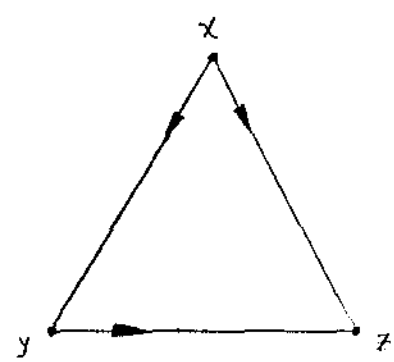


Figura 19

(1) G não é transitivo, pois $x \longrightarrow z$, $z \longrightarrow y$ e $x \not\longrightarrow y$. G' é transitivo.

(2) G é Hamiltoniano, pois existe o ciclo passante $x \longrightarrow z \longrightarrow y \longrightarrow x$ contendo todos os vértices de G.

G' não é Hamiltoniano, pois não contém 3–ciclo.

(3) G é altamente regular e G' não é regular, porque G admite a seguinte ordenação $v_1 = x$, $v_2 = z$, $v_3 = y$ e em G' x possui dois sucessores e nenhum predecessor.

Exemplo III. Considere o grafo G. (Figura 20)

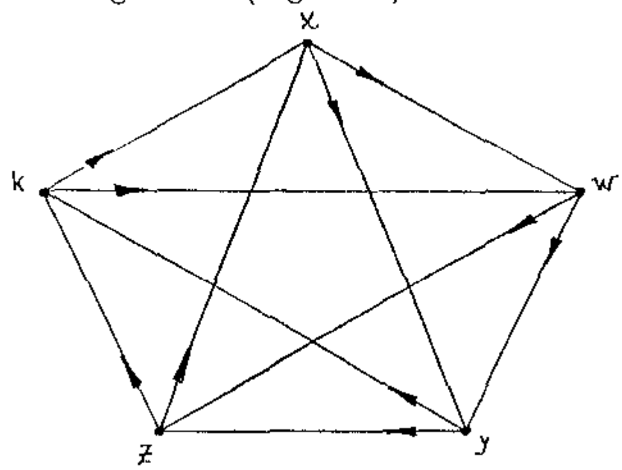


Figura 20

G é um torneio altamente regular onde a ordenação é dada por:

$$x = v_1, \quad w = v_2, \quad y = v_3, \quad z = v_4, \quad k = v_5$$

e vemos que

$$\begin{array}{ll} v_1 \longrightarrow v_2, & v_1 \longrightarrow v_3 \\ v_2 \longrightarrow v_3, & v_2 \longrightarrow v_4 \\ v_3 \longrightarrow v_4, & v_3 \longrightarrow v_5 \\ v_4 \longrightarrow v_5, & v_4 \longrightarrow v_1 \\ v_5 \longrightarrow v_1, & v_5 \longrightarrow v_2. \end{array}$$

Logo, G é também Hamiltoniano.

A caracteristica mais marcante que diferencia os torneios dos outros grafos orientados consiste no fato de que os torneios podem ser dotados de modo natural de uma estrutura algébrica. De fato vale a

Propriedade 10. Um torneio T torna–se o grupoide comutativo $A(T)$, quando se introduz em T a operação binária $\circ$ assim definida:

$$\forall x, y \in T \quad x \circ y = y \circ x = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \longrightarrow y \quad \text{ou} \quad x = y \\ \\ y, & \text{se} \quad y \longrightarrow x \end{cases}$$

Observação 21. De maneira análoga podemos associar a T o grupoide comutativo dual $A^*(T)$, pondo

$$x \circ^* y = y \circ^* x = \begin{cases} x, & \text{se} \quad y \longrightarrow x \quad \text{ou} \quad x = y \\ \\ y, & \text{se} \quad x \longrightarrow y \end{cases}$$

Obervação 22. Obviamente cada homomorfismo entre dois torneios T e T' é também um homomorfismo algébrico entre os grupoides comutativos $A(T)$ e $A(T')$ ($A^*(T)$ e $A^*(T')$), e vice–versa. (Aqui por homomorfismo entre grafos G e G' significamos uma função $f : G \longrightarrow G'$ tal que para todo $x, y \in G$, tal que $x \longrightarrow y$ tem–se, ou $f(x) \longrightarrow f(y)$ ou $f(x) = f(y)$).

Definição 24. Sejam T um torneio, A e B subtorneios de T. Se cada vértice de A é um predecessor de cada vértice de B, escrevemos $A \longrightarrow B$. Os vértices de um subtorneio A são chamados equivalentes se, para qualquer $q \in T - A$, ou $q \longrightarrow A$ ou $A \longrightarrow q$.

Agora, seja T_n um torneio de ordem n. Podemos particioná–lo em subtorneios disjuntos $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(m)}$ de vértices equivalentes, e se R_m denota o torneio constituido por m vertices $w_1, w_2, \ldots, w_m$ tal que $w_i \longrightarrow w_j$ se, e somente se $S^{(i)} \longrightarrow S^{(j)}$, então T_n é chamado a composição $T_n = R_m(S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(m)})$ dos m torneios $S^{(i)}$, para $i = 1, 2, \ldots, m$, com o torneio R_m.

Sobre as mesmas suposições temos

Definição 25. Se $T_n = R_m(S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(m)})$, R_m é chamado um torneio quociente de T_n e $S^{(i)}$ é chamado componente de T_n. Dizemos enfim que um torneio T_n é simples, se a única composição possível de T_n se obtém para $m = 1$ ou para $m = n$, ou seja, quando o torneio quociente é o torneio trivial T_1 ou é isomorfo a T_n (neste último caso cada componente é trivial).

Para os torneios quociente as seguintes propriedades são válidas.

Propriedade 11. Sejam T um torneio e T' um torneio quociente de T. Então existe um subtorneio T'' de T isomorfo a T' ([7], prop. 1.1).

Demonstração. Para obtermos T'' é suficiente eleger um vértice em cada uma das componentes de T e considerar o subtorneio de T formado por estes vértices.

Propriedade 12. Sejam X e Y subtorneios do torneio T constituidos por vértices equivalentes. Se $X \cap Y \neq \phi$ e $X \cup Y \neq T$, então $X \cup Y$ é um subtorneio composto de vértices equivalentes.

Demonstração. De fato, seja u um vértice em $X \cap Y$ e v um vértice em $T - (X \cup Y)$. Para todo vértice $w \in X \cup Y$ temos que

$$w \longrightarrow v \Longleftrightarrow u \longrightarrow v \qquad \text{e}$$

$$v \longrightarrow w \Longleftrightarrow v \longrightarrow u.$$

Propriedade 13. Todo torneio não trivial admite um, e somente um quociente simples não-trivial.

Demonstração. Por absurdo, sejam $P_h(S^{(1)}, \ldots, \ldots, S^{(h)})$ e $Q_k(T^{(1)}, \ldots, T^{(k)})$ duas composições distintas do torneio D, tais que os torneios quocientes P_h e Q_k são não-triviais e simples. Então devemos ter:

$$D = P_h(S^{(1)}, \ldots, S^{(h)}) \simeq Q_k(T^{(1)}, \ldots, T^{(k)}).$$

Suponhamos $h \geq 3$. Desde que as duas partições são distintas, existe necessariamente duas componentes S e T diferentes entre si tendo intersecção não vazia. Se assumimos que S não está contida em T e considerando as outras componentes T tendo intersecção não vazia com S, temos que ao menos uma destas não pode estar contida em S, pois caso contrário na partição Q podemos substituir estas componentes particulares T pela única componente S, mas isso contradiz a simplicidade de Q_k.

Portanto existe ao menos uma componente S e uma componente T tal que $S \cap T \neq \phi$, $S \not\subseteq T$ e $T \not\subseteq S$. Escolhemos essas componentes como sendo $S^{(1)}$ e $T^{(1)}$. Numeramos as componentes S de tal modo que $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(r)}$ intersectam $T^{(1)}$ enquanto o resto $S^{(r+1)}, S^{(r+2)}, \ldots, S^{(h)}$ não intersectam $T^{(1)}$. Devemos distinguir dois casos:

(a) $1 < r < h$

Desde que as componentes $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(r)}$ intersectam $T^{(1)}$, a união $\cup = S^{(1)} \cup S^{(2)} \cup, \ldots, \cup S^{(r)}$ é um subtorneio de vértices equivalentes em virtude da Propriedade 12, portanto à partição $P' = (\cup, S^{(r+1)}, S^{(r+2)}, \ldots S^{(h)})$ podemos associar uma nova composição D, que induzirá uma composiçãp de P_h. Mas isso contradiz a simplicidade de P_h.

(b) $r = h$.

Dado $u \in S^{(1)} - T^{(1)}$ tem-se pela Propriedade 12 que:

$$V \longrightarrow u \qquad \text{ou} \qquad u \longrightarrow V$$

onde $V = S^{(2)} \cup S^{(3)} \cup \cdots \cup S^{(h)}$, pois todas as componentes $S^{(i)}$ $i = 2, 3, \ldots, h$ intersectam a componente $T^{(1)}$. Isto nos diz que a partição $(S^{(1)}, V)$ é uma composição de D. Absurdo, pois supomos que o quociente P_h é simples de ordem $h > 2$.

Finalmente se $h = 2$, k deve ser também igual a 2, pois caso contrário podemos trocar h com k e repetir o processo acima, e neste caso obviamente P_2 é isomorfo a Q_2.

Observação. Para $h \geq 3$ não somente o quociente simples de T é único, mas são também univocamente determinadas as componentes de T. Isso não é verdade para $h = 2$, por exemplo, para o torneio transitivo $T_3 = \{a, b, c;\ a \longrightarrow b,\ a \longrightarrow c,\ b \longrightarrow c\}$ temos $T_3 = T_2(\{a, b\}, \{c\}) = T_2(\{a\}, \{b, c\})$, onde T_2 é o torneio transitivo de ordem 2.

Torneios Simplesmente Desconexos

Damos inicialmente a definição homotópica da classe dos torneios Hamiltonianos que vamos caracterizar em seguida.

Definição 26. Um torneio T é dito simplesmente desconexo (simplesmente conexo) se seu primeiro grupo de homotopia regular $Q_1(T)$ é não nulo (é nulo).

Para o cálculo de $Q_1(T)$ observamos que $Q_1(T)$ é isomorfo a $\pi_1(|K_T|)$ e que os subconjuntos totalmente testados em T, gerando os simplexos de K_T, coincidem com os subtorneios transitivos de T. Recordamos, além disso que o grupo $\pi_1(|K_T|)$ pode também ser determinado usando unicamente laços formados pelas rotas to poliedro $|K_T|$, procedendo da seguinte maneira:

(1) Um laço rota com base x é uma sucessão–finita de vértices de T do tipo $x\,x_1\,x_2,\ldots,x_h\,x$ onde um par qualquer de vértices distintos gera um 1–simplexo de K_T.

(2) Dois laços rota com base x são homotópicos se podem ser obtidos um a partir do outro aplicando-se um número finito das seguintes operações.

(a) Um vértice repetido yy pode ser substituido por um só vértice y e vice-versa;

(b) se uma terna de vértices consecutivos $y\,z\,t$ gera um simplexo de K_T, (isto é, se os três vértices não são todos distintos ou se o subtorneio de vértices y, z, t é transitivo), a terna $y\,z\,t$ pode ser substituida pelo par $y\,t$ e vice-versa.

(c) O conjunto das classes de equivalência de laços rota com base x, dotado da seguinte operação de multiplicação:

$$\{x\,x_1\,x_2\,,\ldots,x_h\,x\}\cdot\{x\,y_1\,y_2\,,\ldots,y_h\,x\}=\{x\,x_1\,x_2\,,\ldots,x_h\,x\,x\,y_1\,y_2\,,\ldots,y_h\,x\}$$

é um grupo isomorfo a $\pi_1(|K_T|)$. (cf. [12], Teorema 5).

Propriedade 14. Um torneio T_n é simplesmente conexo (simplesmente desconexo) se, e somente se, cada um de seus torneios quociente não triviais é simplesmente conexo (simplesmente desconexo).

Demonstração. Seja $T_n = R_m\,(S^{(1)},\ldots,S^{(m)})$, com $m > 1$. Obteremos a propriedade mostrando que os grupos fundamentais $Q_1(T_n)$ e $Q_1(R_m)$ são isomorfos,

(i) Primeiro, notamos que se $\gamma = v\cdots baa'b'\cdots v$ é um laço–rota de K_{T_n}

tal que $a, a' \in S^{(i)}$ e $b, b' \in S^{(j)}$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, então γ é homotópico a $\gamma' = v \cdots bb' \cdots v$ desde que:

— Se $i \neq j$, $\gamma, v \cdots bab' \cdots v$, γ' são laços–rotas homotópicos;

— Se $i = j$, $\gamma, v \cdots bcaa'b' \cdots v$, $v \cdots bca'b' \cdots v$, $v \cdots bcb' \cdots v$, γ' são laços–rotas homotópicos, onde $c \notin S^{(i)}$.

(ii) Escolhamos um vértice $v'_i \in S^{(i)}$, para cada $i = 1, 2, \ldots, m$. Pela Propriedade 11 R_m é isomorfo ao subtorneio $T'_m = \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_m\}$. Se provarmos que $Q_1(T'_m)$ é isomorfo a $Q_1(T_n)$, obteremos também o isomorfismo entre $Q_1(T_n)$ e $Q_1(R_m)$.

A projeção $p : T_n \longrightarrow T'_n$ dada por $p(v_i) = v'_i$, para todo $v_i \in S^{(i)}, i = 1, 2, \ldots, m$, induz um homomorfismo $p^* : Q_1(T_n) \longrightarrow Q_1(T'_m)$ da seguite maneira:

$$p^*([v'v^1v^2 \cdots v^kv']) = [v'p(v^1)p(v^2) \cdots p(v^k)v']$$

onde podemos escolher o ponto base v' em T'_m (já que torneios são digrafos fracamente conexos).

Desde que T'_m é um subtorneio de T_n, a inclusão $j : T'_m \longrightarrow T_n$ induz um homomorfirmo $j^* : Q_1(T'_m) \longrightarrow Q_1(T_n)$.

Diretamente das definições, $p^* \circ j^*$ é a aplicação identidade em $Q_1(T'_m)$. Resta provarmos que $j^* \circ p^*$ também é a aplicação identidade em $Q_1(T_n)$. Seja $\gamma = v'v^1v^2 \cdots v^kv'$, um laço–rota de K_{T_n}. Considere $\gamma' = (j^* \circ p^*)([\gamma]) = p^*([\gamma]) = [v'p(v^1)p(v^2) \cdots p(v^k)v']$ e construamos:

$$\gamma(\gamma')^{-1} = v'v^1v^2 \cdots v^kv'v'p(v^k) \cdots p(v^1)v'$$

Usando (i), temos que $\gamma(\gamma')^{-1}$ é homotópico ao laço–rota trivial v'. Portanto γ e γ' são homotópicos, ou seja, $j^* \circ p^*$ é a identidade em $Q_1(T_n)$.

Para provarmos o seguinte teorema necessitamos dos seguintes lemas topológicos, que são facilmente provados (cf. [10]).

Lema 3. Seja S um espaço topológico e sejam X e Y subespaços fechados de S tais que $X \cup Y = S$. Se Z é um retrato por deformação de Y tal que $X \cap Y \subseteq Z$, então $X \cup Z$ é um retrato por deformação de S.

Lema 4. Se X é um retrato por deformação de um espaço topológico S e Z é um retrato por deformação de X, então Z é um retrato por deformação de S.

Teorema 1. Todo torneio altamente regular não–trivial é simplesmente desconexo.

Demonstração. Seja T_{2n+1} $(n > 1)$ um torneio altamente regular com vértices $v_1, v_2, \ldots, v_{2n+1}$. Consideremos os subtorneios $T_{2n} = T_{2n+1} - v_{n+1}$ e $T_{2n-1} = T_{2n} - v_{2n+1}$.

Primeiramente, mostremos que:
(i) O poliédro $|K_{T_{2n}}|$ é retrato por deformação de $|K_{T_{2n+1}}|$;
(ii) O poliédro $|K_{T_{2n-1}}|$ é retrato por deformação de $|K_{T_{2n}}|$.

Demonstração de (i). Desde que T_{2n+1} é altamente regular, o poliédro do complexo–simplicial associado a T_{2n+1} pode ser escrito do seguinte modo:

$$|K_{T_{2n+1}}| = \overline{|(v_1v_2\cdots v_{n+1})|} \cup \overline{|(v_2v_3\cdots v_{n+2})|} \cup \cdots \cup \overline{|(v_{2n+1}v_1\cdots v_n)|}.$$

então: $|K_{T_{2n+1}}| = \overline{Y} \cup \overline{X}$, onde:

$$\overline{Y} = \overline{|(v_1v_2\cdots v_{n+1})|} \cup \overline{|(v_2v_3\cdots v_{n+2})|} \cup \cdots \cup \overline{|(v_{n+1}v_{n+2}\cdots v_{2n+1})|} = \overline{|st(v_{n+1})|}$$

$$\overline{X} = \overline{|(v_{n+2}v_{n+3}\cdots v_1)|} \cup \overline{|(v_{n+3}v_{n+4}\cdots v_2)|} \cup \cdots \cup \overline{|(v_{2n+1}v_1\cdots v_n)|}.$$

Agora, seja $\overline{Z}$ a união dos fechos dos simplexos, obtidos dos simplexos de $\overline{Y}$, pela supressão de v_{n+1}, ou seja:

$$\overline{Z} = \overline{|(v_1v_2\cdots v_n)|} \cup \overline{|(v_2v_3\cdots v_nv_{n+2})|} \cup \cdots \cup \overline{|(v_{n+2}v_{n+3}\cdots v_{2n+1})|}.$$

Segue que $\overline{Y}$ é o cone $|v_{n+1}\overline{Z}|$ com vértice , v_{n+1}.

Podemos provar que $\overline{Z}$ e homeomorfo ao cubo unitário I^{n-1}. Procedendo por indução sobre o número m de termos da união, temos:

Se $m = 1$ então a asserção é verdadeira. Assumamos que

$$\overline{|(v_1v_2\cdots v_n)|} \cup \overline{|(v_2v_3\cdots v_nv_{n+2})|} \cup \cdots \cup \overline{|(v_mv_{m+1}\cdots v_nv_{n+2}\cdots v_{n+m})|}$$

é homeomorfo a I^{n-1}. Se adicionarmos o $(m+1)$–ésimo termo $\overline{|(v_{m+1}\cdots v_nv_{n+2}\cdots v_{n+m+1})|}$ ainda obteremos um espaço homeomorfo a I^{n-1}, desde que v_{n+m+1} não é um vértice dos simplexos anteriores.

Por um processo análogo se mostra que $\overline{Y}$ é homeomorfo a I^n, assim, como I^{n-1} é retrato de I^n, segue que $\overline{Z}$ é retrato por deformação de $\overline{Y}$. E como $\overline{X} \cap \overline{Y} \subseteq \overline{Z}$, segue do Lema 3 que $\overline{Z} \cup \overline{X}$ é um retrato por deformação de $\overline{Y} \cup \overline{X} = |K_{T_{2n+1}}|$. Mas, por construção, temos que $\overline{Z} \cup \overline{X} = |K_{T_{2n}}|$, e com isso fica mostrado (i).

Demonstração de (ii). Seja $\overline{W}$ a união dos fechos dos simplexos, obtidos dos simplexos de $\overline{X}$, pela supressão de v_{2n+1}, ou seja:

$$\overline{W} = \overline{|(v_{n+2}v_{n+3}\cdots v_{2n}v_1)|} \cup \overline{|(v_{n+3}v_{n+4}\cdots v_{2n}v_1v_2)|} \cup \cdots \cup \overline{|(v_1v_2\cdots v_n)|}.$$

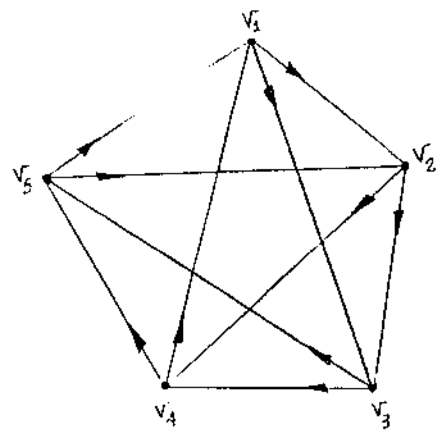
Como antes, podemos provar que $\overline{W}$ é homeomorfo a I^{n-1} e, portanto $\overline{W}$ é um retrato por deformação de $\overline{X}$. Então, pelo Lema 3, $\overline{Z} \cup \overline{W}$ é um retrato por deformação de $\overline{Z} \cup \overline{X} = |K_{T_{2n}}|$. Mas, por construção, $\overline{Z} \cup \overline{W}$ coincide com $|K_{T_{2n-1}}|$, e assim fica mostrado (ii).

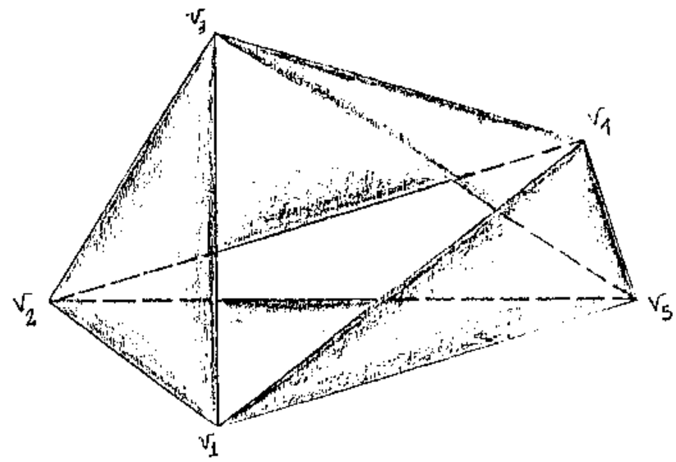
Pelo Lema 4, (i) e (ii) segue que $|K_{T_{2n-1}}|$ é um retrato por deformação de $|K_{T_{2n+1}}|$. Então, os grupos fundamentais $Q_1(T_{2n+1})$ e $Q_1(T_{2n-1})$ são isomorfos.

Agora o teorema pode ser provado por indução sobre o número n, relacionado à ordem do torneio T_{2n+1}. Para $n = 1$, T_3 é o 3-ciclo e $Q_1(T_3) \simeq \mathbb{Z}$.

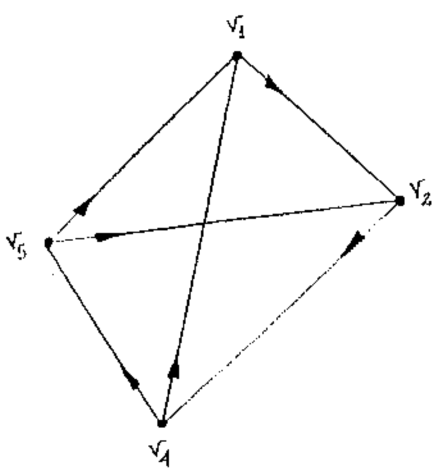
Assumamos que, para $n - 1$, a asserção é verdadeira e considere T_{2n+1} e $T_{2n-1} = T_{2n+1} - \{v_{n+1}, v_{2n+1}\}$. Se T'_{2n-1} é o torneio altamente regular com vértices ordenados $w_1, w_2, \ldots, w_{2n-1}$, segue directamente que a função g, definida por $g(w_i) = v_i$, $1 \leq i \leq n$, e $g(w_i) = v_{i+1}$, $n + 1 \leq i \leq 2n - 1$, é um isomorfismo entre os torneios T'_{2n-1} e T_{2n-1}. Por hipótese de indução segue que T'_{2n-1} e T_{2n-1} são simplesmente desconexos. Finalmente, desde que $Q_1(T_{2n+1})$ e $Q_1(T_{2n-1})$ são isomorfos, T_{2n+1} é também simplesmente desconexo.

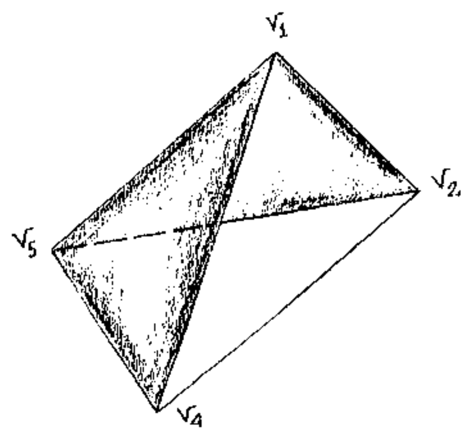
Desenho da demonstação para $n = 2$



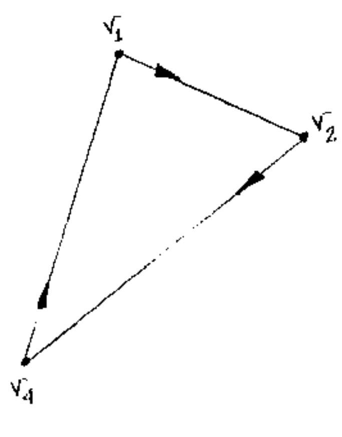


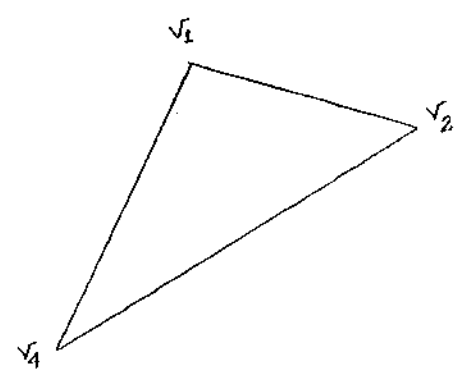
Faixa de Möbius





$|K_{T_4}| = |K_{T_5} - v_2|$ **retrato de** K_{T_7}





$S^1 \sim |K_{T_3}| = |K_{T_4} - v_5|$ **retrato de** K_{T_4}

Corolário. Seja T um torneio não trivial. Se o torneio–quociente simples não trivial T é altamente regular, então T é simplesmente desconexo.

A recíproca do corolário também pode ser provada a partir do seguinte raciocínio, indutivo.

Para $n = 3$ temos que T_3 é simplesmente desconexo implica que T_3 é o 3–ciclo.

Agora, supondo o resultado válido para n, temos o seguinte:

Se T_{n+1} é um torneio simplesmente desconexo, então T_{n+1} contém um 3–ciclo não homotópico a zero, reordenando os índices de T_{n+1} se necessário, podemos supor que esse 3–ciclo não homotópico a zero seja (x_1, x_2, x_3, x_1) onde $T_{n+1} = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}\}$. Considerando agora o subtorneio $T_n = T_{n+1} - \{x_{n+1}\}$ temos que $(x_1, x_2, x_3, x_1) \in T_n$ donde segue que T_n é simplesmente desconexo, assim por hipótese de indução segue que $T_n = R_{2m+1}(S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(2m+1)})$ onde R_{2m+1} é um torneio simples não–trivial altamente regular. De posse disso, analisando as possíveis direções de x_{n+1} com os outros vértices de T_n chegamos à conclusão de que o torneio–quociente simples não–trivial de T_{n+1} é altamente regular (cf. [7], Proposição 3.9).

Com isso chegamos ao seguinte resultado:

Teorema 2. Dado um torneio não trivial T tem-se: T é simplesmente desconexo se, e somente se, seu quociente simples não trivial é altamente regular.

Bibliografia

[1] BOURBAKI N., Topologie Générale, Chapitre 2, IV ed., Hermann, Paris, (1982).

[2] BURZIO M. and DEMARIA D. C., A Normalization Theorem for Regular Homotopy of Finite Directed Graphs, Rend. Cir. Mat. Palermo, (2), 30 (1981), 255-286.

[3] BURZIO M. and DEMARIA D. C., The First Normalization Theorem for Regular Homotopy of Finite Directed Graphs, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste, 13 (1981), 38-50.

[4] BURZIO M. and DEMARIA D. C., Duality Theorems for Regular Homotopy of Finite Directed Graphs, Rend. Circ. Mat. Palermo, (2), 31 (1982), 371-400.

[5] BURZIO M. and DEMARIA D. C., The Second and Third Normalization Theorems for Regular Homotopy of Finite Directed Graphs, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste, 15 (1983), 61-82.

[6] BURZIO M. and DEMARIA D. C., Homotopy of Polyhedra and Regular Homotopy of Digraphs, Atti II^{a} Conv. Topologia, Suppl. Rend. circ. Mat. Palermo, (2), 12 (1986), 189-204.

[7] BURZIO M. and DEMARIA D. C., On Simply Disconnected Tournaments, Ars Combin., 24-A (1987), 149-161.

[8] ČECH E., Topological Spaces, Interscience, London (1966).

[9] HILTON P. J., An Introduction to Homotopy Theory, Cambridge University Press, (1953).

[10] HILTON P. J. and S. WYLIE, Homology Theory, Combridge University Press, Combridge, (1960).

[11] KOWALSKY H. J., Topological Spaces, Academic Press, New York and London (1965).

[12] SINGER, J. M. and THORPE J. A., Lectures Notes on Elementary Topology and Geometry, Springer–Verlag, New York (1967).

[13] SPANIER E. H., Algebraic Topology, McGraw–Hill, New York, (1966).