

Boché

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
(UNICAMP)

INSTITUTO DE MATEMÁTICA ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
(I.M.E.C.C.)

ESTIMAÇÃO NÃO TENDENCIOSA DO RISCO RELATIVO

Silvia Leonor Boché *m.t.*

Orientador : Prof. Sebastião de Amorim *m.t.*

CAMPINAS - SÃO PAULO - BRASIL

Outubro de 1990

13/10/2001

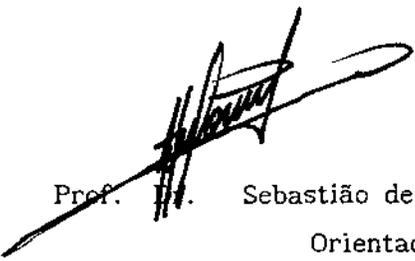
B631e

13211/BC

ESTIMACÃO NÃO TENDENCIOSA DO RISCO RELATIVO

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pela Srta SILVIA LEONOR BOCHÉ e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas , 30 de outubro de 1990



Prof. Dr. Sebastião de Amorim
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciências da Computação , U N I C A M P , como requisito parcial ao Título de Mestre em Estatística.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Sebastião de Amorim , pela confiança e orientação , bem como as sugestões e correções na edição.

Aos professores do IMECC , pelos ensinamentos recebidos.

Aos meus colegas e amigos , pela amizade, estímulo e solidariedade.

Às instituições CAPES , CNPq e UNICAMP , pelo apoio financeiro.

Ao Departamento de Matemática e Estatística da Universidad Nacional del Comahue, que me deu esta chance única permitindo o meu aperfeiçoamento.

A Anna Elisabeth e família por fazer do seu lar meu segundo lar .

Aos meus pais

Carlos e Marion

e à memória da minha avó

Eleonora

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 1 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	2
CAPÍTULO 2 - ESTIMAÇÃO NÃO VICIADA DE $\phi = p_2/p_1$	14
2.1 O Delineamento D . Propriedades associadas	14
2.2 Distribuição exata de $\hat{\phi}_u$	21
CAPÍTULO 3 - TESTANDO A HIPÓTESE $\phi = 1$	28
3.1 Estimador da variância de $\hat{\phi}_u$. Vício de $v(\hat{\phi}_u)$	29
3.2 Aproximação à distribuição Normal	33
3.3 Testes da hipótese $\phi = 1$ para pequenas amostras	36
3.4 Determinação do fator γ	46
3.5 Conclusões	49

Apêndice 1 .- Dedução de $P [M_2 = m_2]$ para $m_1 = 1$	51
Apêndice 2 .- Dedução de $P [M_2 = m_2]$ para $m_1 > 1$	54
Apêndice 3 .- Derivação dos estimadores de máxima verossimilhança para p_1 e p_2	71
Apêndice 4 .- Derivação do ponto de máxima verossimilhança restrito a uma reta	72
Apêndice 5 .- Estimação de p sob $\phi = 1$	77
Apêndice 6 .- Valores reais de α e γ para diversas combinações de p e m_1	78
 Bibliografia	 96

INTRODUÇÃO

Um problema prático de grande importância em Estatística Teórica e Experimental consiste em se estimar o risco relativo $\phi = p_2 / p_1$, a razão entre as taxas de risco em duas populações diferentes. Já foram propostas várias alternativas para fornecer estimações pontuais e intervalos de confiança para ϕ . Em geral essas propostas se baseiam na suposição de amostras aleatórias simples e independentes, com reposição (aas-cr), de tamanhos fixos n_1 e n_2 de duas populações P_1 e P_2 , de forma tal que a quantidade de sucessos x_1 e x_2 são variáveis aleatórias binomiais com parâmetros (n_1, p_1) e (n_2, p_2) respectivamente.

Na nossa proposta apresentamos um delineamento amostral diferente, que consiste em se amostrar, por aas-cr, itens da primeira população até se obter m_1 sucessos (m_1 fixo), e em seguida, mediante (aas-cr) se extrair uma amostra do mesmo tamanho da segunda população. Este delineamento nos leva a obter um estimador não viciado de ϕ , com uma expressão exata para a sua variância e com normalidade assintótica que pode ser facilmente estabelecida.

Apresentamos também uma maneira fácil de se construir intervalos de confiança para ϕ , para amostras pequenas, que se compara vantajosamente com as alternativas já existentes.

Todos os resultados são ilustrados com exemplos simulados por Monte Carlo.

CAPÍTULO I

ESTIMAÇÃO DA RAZÃO ENTRE DUAS PROPORÇÕES : REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Um problema prático de grande importância consiste em se estimar a razão entre as taxas de risco em duas populações distintas. Por exemplo, pode-se querer estimar a razão entre as taxas de incidência de determinada doença em duas populações ou, num contexto experimental, entre um grupo de tratamento e um de controle.

Formalmente, este problema pode ser apresentado como o de se estimar a razão entre duas proporções, $\phi = p_2/p_1$.

Considerando $X_1 \sim b(n_1, p_1)$ e

$X_2 \sim b(n_2, p_2)$, independentes,

temos que :

$$\hat{\phi} = \frac{X_2 / n_2}{X_1 / n_1}$$

apresenta alguns problemas óbvios : Dado que $P [X_1 = 0] > 0$, tem-se que $E (\hat{\phi}) = \infty$, e $V (\hat{\phi}) = \infty$, independentes de p_1 e p_2 .

Grande esforço teórico tem sido desenvolvido no tratamento deste problema, buscando construir intervalos de confiança adequados para ϕ , mediante métodos aproximados.

Noether (1957) sugeriu dois métodos para se construir intervalos de confiança para $\phi = p_2/p_1$, usando a estatística $\hat{\phi} = \hat{p}_2 / \hat{p}_1 = \frac{x_2/n_2}{x_1/n_1}$, que é o estimador de máxima verossimilhança de ϕ , e utilizando uma variável $t = \hat{p}_2 - \phi \cdot \hat{p}_1$, de média zero e de distribuição aproximadamente normal.

No trabalho apresentado por Buhrman (1977), são considerados dois experimentos A e B, repetidos N_1 e N_2 vezes respectivamente. Neste artigo, Buhrman considera N_1 como uma variável aleatória binomial:

$$N_1 \sim b (N, \pi)$$

e fazendo $N_2 = N - N_1$, resulta que :

$$N_2 \sim b (N, 1 - \pi)$$

Sejam X_1 e X_2 o número de sucessos obtidos nas n_1 e $n_2 = N - n_1$ repetições dos experimentos A e B respectivamente .

Logo :

$$X_1 / N_1 = n_1 \sim b (n_1, p_1)$$

$$X_2 / N_2 = n_2 \sim b (n_2, p_2)$$

Os números de falhas obtidas nestes experimentos também são variáveis aleatórias, $y_1 = n_1 - x_1$, $i = 1, 2$.

Logo :

$$Y_1 / N_1 = n_1 \sim b (n_1, 1 - p_1)$$

$$Y_2 / N_2 = n_2 \sim b(n_2, 1 - p_2)$$

Buhrman considera (X_1, Y_1, X_2, Y_2) como um vetor aleatório de distribuição multinomial de parâmetros N e $P = (p_1^*, p_1', p_2^*, p_2')$, com $p_1^* + p_1' + p_2^* + p_2' = 1$

Ao final do artigo o autor sugere uma outra forma de se testar hipóteses concernentes à razão p_2/p_1 , repetindo o experimento A até se obter y_1 falhas, e o experimento B até obter y_2 falhas. Desta forma N_1 e N_2 têm uma distribuição binomial negativa e a distribuição condicional de N_2 dado $N_1 + N_2$ depende de p_1 e p_2 somente através de p_2/p_1 , mas resulta ser um pouco mais complicado do que o método anteriormente apresentado.

Naquele mesmo ano, Thomas e Gart (1977) sugerem um método "exato" para encontrar os limites dos intervalos de confiança, baseado em tabelas de contingência 2x2 com marginais fixas (isto é, n_1 e n_2 fixos), considerando os experimentos A e B como se um deles fosse o tratamento e o outro o controle. Consideram a distribuição condicional de x_2 dado $x_1 + x_2 = m$, resultando:

$$f(x_2 / m, \phi) = \frac{\binom{n_2}{x_2} \binom{n_1}{m-x_2} \psi^{x_2}}{\sum_{i=0}^m \binom{n_2}{i} \binom{n_1}{m-i} \psi^i}, \quad x_2 = 0, 1, 2, \dots, m$$

onde $\Psi = \frac{p_2 (1 - p_1)}{p_1 (1 - p_2)}$ sendo p_1 e p_2 as probabilidades de sucesso nos experimentos A (tratamento) e B (controle) respectivamente.

Desta forma, eles encontram os limites de um intervalo de confiança para Ψ , e através destes limites, calculam o máximo e o mínimo valor para x_2 , usando-os na determinação de um intervalo de confiança para $\phi = p_2/p_1$. Os autores trabalham com tamanhos iguais de amostras para os experimentos A e B, ou seja, $n_1 = n_2 = n$, e apresentam os resultados numa tabela para diferentes valores de n , e para um nível de confiança de 95%.

Um ano mais tarde, o método de Thomas e Gart é considerado por Katz, Batista, Azen e Pike (1978) num artigo no qual este grupo propõe um outro método que emprega uma transformação logarítmica da estatística utilizada, isto é, $\log(\hat{p}_2/\hat{p}_1) = \log \hat{p}_2 - \log \hat{p}_1$, fazendo uma comparação entre estes dois métodos mais um outro que é uma adaptação do método de Fieller (1944) usando uma distribuição normal.

Através de simulações, Katz e seus colaboradores acabam concluindo que o método de Thomas e Gart é razoável, já que fornece resultados semelhantes aos deles, mas recomendam o seu próprio método por ser menos conservador e de mais simples cálculo.

Santner e Snell (1980) estudam o problema de se construir intervalos de confiança para a diferença e a razão de

proporções, baseados em pequenas amostras de tamanho n_1 e n_2 tiradas de duas populações. Eles propõem um método baseado nos conhecidos intervalos condicionais para $\Psi = p_2(1-p_1)/[p_1(1-p_2)]$ propostos por Thomas e Gart em 1978.

Este novo método, de Santner e Snell, fornece intervalos para $\Delta = p_2 - p_1$ e para $\phi = p_2/p_1$ de mais fácil cálculo do que aqueles apresentados por Thomas e Gart.

Nurminen (1981) considera o caso particular de duas séries de variáveis binomiais independentes X_j e Y_j com parâmetros p_{1j} e p_{2j} e tamanhos da amostra n_{1j} e n_{2j} respectivamente, ($j = 1, 2, \dots, k$), obtendo assim uma série de riscos relativos $\phi_j = p_{2j} / p_{1j}$, e também uma série de "odds-ratio" $\Psi_j = p_{2j}(1-p_{1j})/[p_{1j}(1-p_{2j})]$.

Nurminen utiliza os resultados obtidos por Gart (1962), que considerou diferentes métodos de estimação do parâmetro ϕ (risco relativo combinado), para k tabelas 2×2 com tamanhos de amostra não aleatórios e deixando livres os totais da outra marginal; assim, fixa n_{1j} e n_{2j} deixando $x_j + y_j$ aleatório.

Gart (1962) já havia mostrado como o seu método fornece estimadores eficientes e consistentes de ϕ sob condições assintóticas.

O artigo de Nurminen mostra, como antecipou Gart, que sob condições gerais de regularidade, uma função ponderada dos $\hat{\phi}_j$ é um estimador eficiente de ϕ .

Como a distribuição de $\hat{\phi} = \hat{p}_2 / \hat{p}_1$ é assimétrica à

direita, podendo obter valores no intervalo $[0, \infty]$, é razoável se pensar na variável $\log \hat{\phi}$, que apresenta distribuição aproximadamente normal. Assim, o intervalo será baseado na média geométrica dos $\hat{\phi}_j$ que é um estimador eficiente de ϕ :

$$\hat{\phi}_g = \exp \left\{ \hat{w}^{-1} \cdot \sum_{j=1}^k \hat{w}_j \log \hat{\phi}_j \right\}$$

sendo:

$$\hat{\phi}_j = \frac{\hat{p}_{2j}}{\hat{p}_{1j}}, \quad \hat{w}_j = \frac{\hat{p}_{1j}}{n_{1j}^{-1} + n_{2j}^{-1}} \quad e \quad \hat{w} = \sum_{j=1}^k \hat{w}_j$$

Este estimador $\hat{\phi}_g$ é tal que (Chiang, 1968) :

$$E(\log \hat{\phi}_g) \approx \log \phi$$

$$\text{Var}(\log \hat{\phi}_g) \approx \frac{\text{var}(\hat{\phi}_g)}{[E(\hat{\phi}_g)]^2} = \hat{w}^{-1} = \left(\sum_{j=1}^k \hat{w}_j \right)^{-1}$$

A maneira mais simples de se construir intervalos de confiança, baseados na aproximação apresentada, é resolvendo a seguinte equação para ϕ :

$$\hat{w} \cdot (\log \hat{\phi}_g - \log \phi)^2 = \chi_{\alpha}^2(1) \quad ,$$

onde $\chi_{\alpha}^2(1)$ é o ponto $(1-\alpha)$ da distribuição χ^2 com um grau

de liberdade. Desta equação, obtém-se :

$$\phi_l = \hat{\phi}_g \exp (-\chi_\alpha \cdot \hat{w}^{1/2})$$

$$\phi_u = \hat{\phi}_g \exp (\chi_\alpha \cdot \hat{w}^{1/2})$$

As condições para a eficiência assintótica deste estimador considerado por Nurminen, foram examinadas por Tarone , Gart e Hauck , (1983) ,chegando-se à conclusão de que, geralmente, estes estimadores do risco relativo comum ϕ são ineficientes para $\phi \neq 1$, isto é, quando $p_1 \neq p_2$.

Koopman (1984) propõe um método para obter , por inversão do teste descrito embaixo , intervalos de confiança aproximados para a razão de duas proporções, com base em duas variáveis aleatórias independentes de distribuição binomial:

$$X_1 \sim b (n_1 , p_1)$$

$$X_2 \sim b (n_2 , p_2)$$

Neste artigo, Koopman deriva um teste para $H_0 : \phi = \phi_0$ vs $H_1 : \phi \neq \phi_0$, para o qual não existe um teste uniformemente mais poderoso, mas o teste χ^2 parece uma alternativa razoável. A estatística de teste utilizada é U_{ϕ_0} dada por :

$$U_{\phi_0} (x_1 , x_2) = \frac{ (x_1 - n_1 \cdot \hat{p}_1)^2 }{ n_1 \hat{p}_1 \cdot (1 - \hat{p}_1) } + \frac{ (x_2 - n_2 \cdot \hat{p}_2)^2 }{ n_2 \hat{p}_2 \cdot (1 - \hat{p}_2) }$$

onde \hat{p}_1 e \hat{p}_2 são os estimadores de máxima verossimilhança sob a

restrição $\phi = \phi_0 \cdot U_{\phi_0}(x_1, x_2)$ como definido acima tende à χ^2 com um grau de liberdade quando n_1 e n_2 tendem a infinito.

Koopman comparou os intervalos de confiança do seu próprio método com aqueles fornecidos pelo método recomendado por Katz (1978) para várias escolhas dos parâmetros n_1, n_2, p_1 e p_2 , concluindo que o seu próprio método (do χ^2) geralmente dá uma melhor aproximação dos limites ao nível de confiança desejado. Infelizmente, estes intervalos só podem ser derivados iterativamente.

Miettinen e Nurminen (1985) propõem um método para a construção de intervalos de confiança para ϕ através de uma estatística que não envolve a transformação logarítmica de $\hat{\phi} = \hat{p}_2 / \hat{p}_1$ nem a aproximação de primeira ordem da série de Taylor para a variância de $\log(\hat{p}_2 / \hat{p}_1)$.

No cálculo da variância, este método utiliza os estimadores de máxima verossimilhança de p_1 e p_2 , restritos à condição $\phi = p_1 / p_2$. Isto é, se \tilde{p}_1 e \tilde{p}_2 representam os estimadores de máxima verossimilhança de p_1 e p_2 , então devem satisfazer a restrição $\tilde{p}_2 = \phi \cdot \tilde{p}_1$.

No mesmo ano, Gart (1985) considera pares de variáveis binomiais mutuamente independentes X_{1j}, X_{2j} , $j = 1, 2, \dots, k$ com correspondentes parâmetros p_{1j}, p_{2j} e tamanhos de amostra n_{1j}, n_{2j} , cujos riscos relativos assumam um valor constante ϕ , ou seja, $\phi_j = p_{2j} / p_{1j} = \phi$, $j = 1, 2, \dots, k$

Neste artigo, Gart apresenta, para o caso geral, um teste assintoticamente eficiente para $\phi = 1$. Deriva também limites de confiança aproximados para o risco relativo comum ϕ . Estas soluções implicam em cálculos iterativos, da mesma forma que o estimador de máxima verossimilhança apresentado por ele. O autor sugere ainda qual deveria ser o estimador inicial utilizado.

Outro aporte importante de Gart é o teste para a homogeneidade das k tabelas (2x2), isto é, a igualdade dos ϕ_j , $j = 1, 2, \dots, k$. Para isso, utiliza uma estatística de teste que envolve o estimador de máxima verossimilhança, e é assintoticamente distribuída segundo uma χ^2_{k-1} .

Gart, Thomas e Pettigrew (1986) formulam um novo estimador da variância do logaritmo de uma variável binomial ($\log p$), e analisam o seu vício, considerando para isso a transformação logarítmica corrigida, que pode ser escrita como $\log \{ (x + a) / (n + b) \}$, onde a e b são constantes especificadas, e $X \sim b(n, p)$. Walter (1975) havia introduzido a correção $a = b = 1/2$ para esta transformação, e sugeriu um estimador para sua variância. Fazendo $a = b = 1/2$, obtém-se um estimador de $\log p$ quase não tendencioso, sendo o vício da ordem n^{-2} . Denota-se este estimador por $l_{1/2}(x)$, assim:

$$l_{1/2}(x) = \log \{ (x + 1/2) / (n + 1/2) \}, \quad x = 0, 1, \dots, n$$

Nesse artigo, os autores apresentam uma aplicação da transformação logarítmica para a estimação do risco relativo $\phi = p_2/p_1$, para testar a hipóteses $\phi = 1$, que equivale a testar $p_1 = p_2 = p$. As inferências sobre ϕ são baseadas na

diferença entre as transformações logarítmicas de duas variáveis binomiais independentes, $l_{\bullet}(x_2) - l_{\bullet}(x_1)$. Os autores concluem que, embora a correção $a = 1/2$, proposta por Walter, seja adequada para reduzir o vício de um único $l_{\bullet}(x)$, ou uma combinação linear com coeficientes constantes, às vezes precisam de outras correções quando se utilizam ponderações empíricas.

De forma similar, os autores (Gart, Thomas e Pettigrew) derivaram um estimador da variância de $l_{1/2}(x)$, que denominaram $v_{1/2}(x) = \text{Var} [l_{1/2}(x)]$.

Devido à grande assimetria e kurtosis de $l_{1/2}(x)$, existem estatísticas que envolvem $l_{1/2}(x)$ e $v_{1/2}(x)$ que freqüentemente não são ajustadas adequadamente pelas distribuições normal ou χ^2 .

Para construir intervalos de confiança, Bailey (1987) propõe um método baseado numa potência da razão observada $\hat{\phi}$, isto é: $\hat{\phi}^t = \hat{p}_2^t / \hat{p}_1^t$, utilizando então a variável aleatória $u = \hat{p}_2^t - \hat{\phi}^t \cdot \hat{p}_1^t$, que para t constante tem uma distribuição aproximadamente normal, com média zero; logo, $u / \sqrt{\text{Var}(u)}$ se distribui aproximadamente segundo a normal padrão. Para utilização em inferências sobre ϕ , é necessário substituir $\text{Var}(u)$ por sua estimativa em termos de \hat{p}_1 e \hat{p}_2 . O expoente t será escolhido de forma tal que minimize a assimetria da estatística de teste

$$Z = \frac{\hat{p}_2^t - \hat{\phi}^t \cdot \hat{p}_1^t}{\sqrt{\text{Var}(\hat{u})}}$$

Ainda em 1987, Bedrick propõe uma nova família de intervalos de confiança aproximados, baseada na família de "potências de estatísticas divergentes", que inclui a estatística de Pearson como caso especial. Os resultados que ele obteve mostram que esses intervalos, correspondentes a amostras pequenas, têm uma probabilidade de cobertura próxima ao nível nominal. Também mostra que os intervalos de menor amplitude desta classe são preferíveis aos de Bailey (1987), quando a mínima frequência esperada numa casela é menor ou igual a 5.5.

Mais tarde, Gart e Nam (1988) fazem uma revisão e avaliam numericamente vários métodos (os métodos anteriores) de construção de intervalos de confiança para a razão de proporções binomiais $\phi = p_2/p_1$, e concluem que os métodos baseados na verossimilhança, juntamente com os métodos logarítmicos, se aproximam bastante ao nível de confiança em amostras de tamanho moderado. Na hora de comparar as probabilidades contidas nos extremos superior e inferior, eles encontram uma menor diferença nos métodos baseados na função de verossimilhança. Usando os resultados gerais de Bartlett, derivam uma correção da assimetria que continua melhorando este método.

A nossa proposta consiste em mudar o delineamento amostral atacando o problema em duas etapas, uma correspondente a cada população; onde a segunda etapa depende em certa forma da primeira. O resultado é a conjugação de uma binomial negativa com uma binomial.

Sejam as populações P_1 e P_2 com taxas de risco p_1 e p_2 respectivamente.

A primeira etapa consiste em se retirar de P_1 uma amostra de tamanho necessário até se obter uma quantidade pre-determinada de sucessos; esse tamanho da amostra tem então uma distribuição binomial negativa.

A segunda etapa consiste em se retirar de P_2 uma amostra cujo tamanho seja igual à obtida de P_1 . Assim, dado o tamanho da amostra no primeiro estágio, o número de sucessos no segundo estágio tem distribuição binomial.

Desta forma, o estimador $\hat{\phi}_u = \hat{p}_2 / \hat{p}_1$ está definido para qualquer resultado obtido na amostra, sem precisar de correções matemáticas. Este fato está garantido pelo próprio delineamento, já que se $m_1 > 0$ então \hat{p}_1 é necessariamente positivo. A característica mais interessante deste delineamento é que ele fornece um estimador não tendencioso de ϕ , cuja variância é facilmente determinada e cuja distribuição converge à Normal.

CAPÍTULO II

UM DELINEAMENTO PARA A ESTIMAÇÃO NÃO VICIADA DO RISCO RELATIVO ϕ

A estimação do risco relativo $\phi = p_2/p_1$, a razão entre as taxas de risco em duas populações distintas, é um problema muito importante e já bastante considerado pela literatura especializada. No capítulo anterior apresentamos uma revisão dos principais resultados existentes. De um modo geral observa-se que os procedimentos empregados são numericamente trabalhosos, envolvendo sempre estimadores tendenciosos de ϕ .

Neste capítulo apresentamos um delineamento amostral que permite obter um estimador não tendencioso de ϕ , o qual denominaremos $\hat{\phi}_u$, com propriedades básicas determináveis de forma simples e elegante.

A variância de $\hat{\phi}_u$ é determinada, e sua normalidade assintótica é estabelecida.

2.1. O DELINEAMENTO AMOSTRAL D . PROPRIEDADES ASSOCIADAS

Considere-se duas populações P_1 e P_2 , com taxas de risco p_1 e p_2 respectivamente. O delineamento que propomos, e que para brevidade denominaremos delineamento D, consiste em se amostrar por sorteio simples com reposição (aas-cr), itens de P_1 até se obter o m_1 -ésimo caso positivo, com m_1 pre-estabelecido.

Definindo N_1 como o número total de itens amostrados, tem-se então que:

$$N_1 \sim \text{binomial negativa} (m_1 , p_1)$$

Seja $N_1 = n_1$.

Em seguida sorteia-se, por aas-cr, $N_2 = n_1$ elementos de P_2 . Seja M_2 o número de sucessos obtidos. Assim, dado $N_1 = n_1$,

$$M_2 \sim b (n_1 , p_2)$$

Definindo-se

$$\hat{\phi}_u = \frac{M_2}{m_1} , \quad (2.1)$$

temos que

$$E(\hat{\phi}_u) = \phi , \quad (2.2)$$

$$\text{Var}(\hat{\phi}_u) = \frac{\phi}{m_1} [1 - p_2 + \phi (1 - p_1)] , \quad (2.3)$$

e finalmente

$$\frac{\hat{\phi}_u - \phi}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\phi}_u)}} \xrightarrow[m_1 \rightarrow \infty]{D} N(0; 1) \quad (2.4)$$

conforme mostramos a seguir .

Resultado 2.1 - Sob o delineamento D , e fazendo $\hat{\phi}_u = M_2/m_1$,
tem-se que :

$$E(\hat{\phi}_u) = \phi$$

Prova:

$$E (\hat{\phi}_u) = E \left(\frac{M_2}{m_1} \right) = \frac{1}{m_1} E(M_2) \quad (2.5)$$

com $E (M_2) = E [E (M_2 / N_1)]$

Mas $E (M_2 / N_1) = N_1 \cdot p_2$, uma vez que

$$M_2 / N_1 = n_1 \sim b (n_1 , p_2)$$

Logo

$$E (M_2) = E (N_1 \cdot p_2) = p_2 \cdot \frac{m_1}{p_1} \quad (2.6)$$

uma vez que $N_1 \sim$ binomial negativa (m_1 , p_1) , [ver , por exemplo, Tsokos, pág. 284] .

Substituindo (2.6) em (2.5) , conclue-se que

$$E (\hat{\phi}_u) = \frac{1}{m_1} \cdot p_2 \frac{m_1}{p_1} = \frac{p_2}{p_1} = \phi$$

q.e.d. ■

Vimos que $\hat{\phi}_u$ é um estimador não viciado de ϕ . A sua variância pode ser estabelecida de forma semelhante , conforme

mostramos a seguir .

Resultado 2.2 - Sob o delineamento D , definindo $\hat{\phi}_u = M_2 / m_1$,
tem-se :

$$\text{Var} \left(\hat{\phi}_u \right) = \frac{\phi}{m_1} [1 - p_2 + \phi (1 - p_1)]$$

Prova:

$$\text{Var} \left(\hat{\phi}_u \right) = \text{Var} \left(\frac{M_2}{m_1} \right) = \frac{1}{m_1^2} \text{Var} (M_2) \quad (2.7)$$

Mas

$$\text{Var} (M_2) = E [V(M_2 / N_1)] + V [E(M_2 / N_1)] \quad (2.8)$$

com

$$V (M_2 / N_1) = N_1 \cdot p_2 (1 - p_2) \quad (2.9)$$

e

$$E (M_2 / N_1) = N_1 \cdot p_2 \quad (2.10)$$

já que

$$M_2 / N_1 \sim b (N_1 , p_2)$$

Logo , substituindo (2.9) e (2.10) em (2.8),
resulta:

$$V (M_2) = p_2 (1 - p_2) \cdot E (N_1) + p_2^2 \cdot V (N_1) \quad (2.11)$$

Portanto, sendo

$$N_1 \sim \text{binomial negativa} (m_1 , p_1) ,$$

temos

$$E (N_1) = \frac{m_1}{p_1} \quad (2.12)$$

$$V (N_1) = m_1 \cdot \frac{1 - p_1}{p_1^2}$$

Logo, substituindo (2.12) em (2.11), obtem-se:

$$\begin{aligned} \text{Var} (M_2) &= p_2(1 - p_2) \frac{m_1}{p_1} + p_2^2 m_1 \frac{1 - p_1}{p_1^2} = \\ &= m_1 \frac{p_2}{p_1} \left(1 - p_2 + \frac{p_2}{p_1} (1 - p_1) \right) \end{aligned}$$

Então,

$$\text{Var} (M_2) = m_1 \cdot \phi \cdot \left[1 - p_2 + \phi (1 - p_1) \right] \quad (2.13)$$

Substituindo (2.13) em (2.7) conclue-se que

$$V \left(\hat{\phi}_u \right) = \frac{1}{m_1} \phi \cdot \left[1 - p_2 + \phi (1 - p_1) \right]$$

q.e.d. ■

Exemplo 2.1 : Considere P_1 e P_2 tais que $p_1 = 0.2$ e

$p_2 = 0.4$, e seja o delineamento D com $m_1 = 20$.

Temos :

$$E\left(\hat{\phi}_u\right) = \phi = 2.0$$

$$V\left(\hat{\phi}_u\right) = \frac{1}{20} 2.[1 - 0.4 + 2.(1 - 0.2)] = 0.1 .[0.6 + 1.6] = 0.22 \square$$

A convergência de $\hat{\phi}_u$ à normal pode ser estabelecida de forma bastante simples.

Resultado 2.3 - Sob o delineamento **D** e com $\hat{\phi}_u = M_2 / m_1$, temos que :

$$\frac{\hat{\phi}_u - \phi}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\phi}_u)}} \xrightarrow[m_1 \rightarrow \infty]{D} N(0, 1)$$

Prova : Considere o delineamento **D** dividido em m_1 etapas consecutivas idênticas e independentes. Em cada uma delas amostram-se com reposição de P_1 tantos itens quantos sejam necessários até se obter o primeiro sucesso ; seja N_{1i} o número de itens amostrados na etapa i , $i = 1, 2, \dots, m_1$. Em seguida, amostra-se, com reposição, $n_{2i} = n_{1i}$ itens de P_2 , e seja M_{2i} o número de sucessos obtidos.

Portanto teríamos o seguinte esquema

etapa 1, 2, ..., m_1

P_1 $m_{11}=1, m_{12}=1, \dots, m_{1m_1}=1$ tal que $\sum_{i=1}^{m_1} m_{1i} = 1$

$N_{11}, N_{12}, \dots, N_{1m_1}$

P_2 $M_{21}, M_{22}, \dots, M_{2m_1}$

Definindo-se

$$\hat{\phi}_{u1} = \frac{M_{21}}{m_{11}} = M_{21}$$

temos que

$$\hat{\phi}_{u1}, \hat{\phi}_{u2}, \dots, \hat{\phi}_{um_1}, \text{ i i d}$$

com

$$E(\hat{\phi}_{u1}) = \phi \quad e$$

$$V(\hat{\phi}_{u1}) = \phi \cdot [1 - p_2 + \phi \cdot (1 - p_1)]$$

finitos. Mas,

$$\hat{\phi}_u = \frac{1}{m_1} \cdot \sum_{i=1}^{m_1} \hat{\phi}_{ui}, \text{ já que } \sum_{i=1}^{m_1} \hat{\phi}_{ui} = \sum_{i=1}^{m_1} M_{2i} = M_2$$

Assim, pelo T . C . L . para soma de m_1 variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com esperança igual ao parâmetro e com variância finita [ver James, pág. 237], temos que :

$$\frac{\hat{\phi}_u - \phi}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\phi}_u)}} \xrightarrow[m_1 \rightarrow \infty]{D} N(0, 1)$$

q.e.d. ■

Determinaremos agora a distribuição exata de $\hat{\phi}_u$, que será útil no tratamento de pequenas amostras.

2.2. A DISTRIBUIÇÃO EXATA DE $\hat{\phi}_u$.

Como m_1 é fixo, então $\hat{\phi}_u = M_2/m_1$ só depende de M_2 . A distribuição da variável $\hat{\phi}_u$ coincide com a de M_2 , a menos de um fator de escala. Assim :

$$P [M_2 = m_2] = P \left(M_2 = \hat{\phi}_u \cdot m_1 \right)$$

$$\begin{aligned}
P \left(M_2 = m_2 \right) &= \sum_{n_1=1}^{\infty} P[M_2 = m_2 / N_1 = n_1] \cdot P[N_1 = n_1] \\
&= \sum_{n_1 = \max(m_1, m_2)}^{\infty} P[M_2 = m_2 / N_1 = n_1] \cdot P[N_1 = n_1] \\
&= \sum_{n_1 = \max(m_1, m_2)}^{\infty} C_{n_1}^{m_2} p_2^{m_2} q_2^{n_1 - m_2} \cdot C_{n_1 - 1}^{m_1 - 1} p_1^{m_1 - 1} q_1^{n_1 - m_1} \quad (2.14)
\end{aligned}$$

onde $q_i = 1 - p_i$, $i = 1, 2$.

A partir deste resultado, podemos explorar a qualidade da aproximação Normal em diversas situações, comparando-a com a distribuição exata de $\hat{\phi}_u$.

Na figura 2.1. representamos a distribuição acumulada exata de $\hat{\phi}_u$ para $p_1 = 0.2$, $p_2 = 0.4$ e $m_1 = 20$, como visto no Ex 2.1, superposta à F.D.P. da Normal de mesma média (2.0) e mesma variância (0.22).

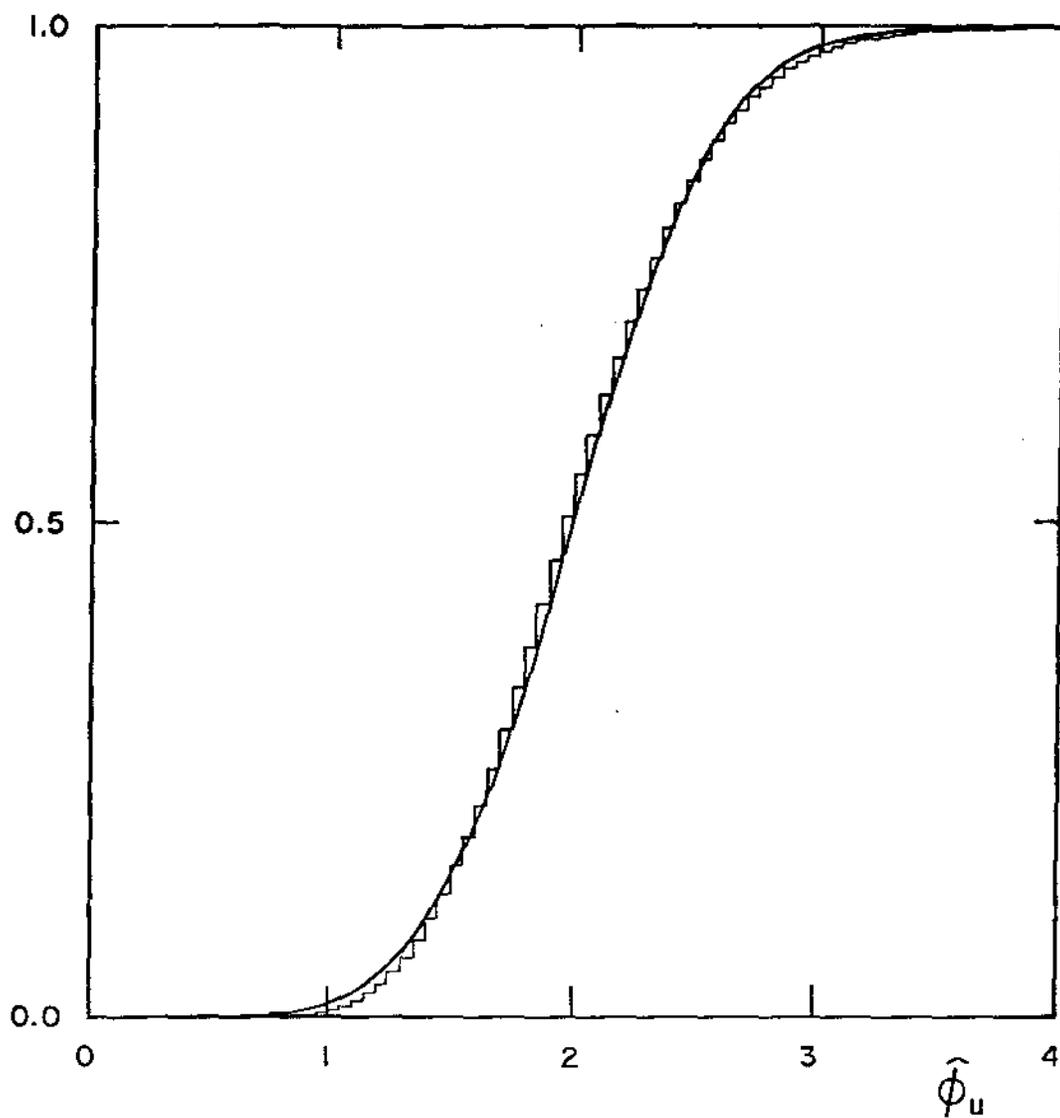


Fig. 2.1 - Distribuição acumulada exata de $\hat{\phi}_u$ para $p_1 = 0.2$,
 $p_2 = 0.4$ e $m_1 = 20$ superposta à F.D.P. da Normal
de média 2.0 e variância 0.22 .

Em (2.14) temos uma expressão para o cálculo de $P[M_2 = m_2]$, $m_2 = 0, 1, 2, \dots$, embora exata, esta expressão de $P[M_2 = m_2]$ tem o inconveniente de ser a soma de infinitos termos. Podemos determinar uma forma mais conveniente para $P[M_2 = m_2]$, que inclua um número finito de parcelas. Mostramos no Apêndice 1 que no caso particular de $m_1 = 1$, tem-se:

$$P[M_2 = x] = \begin{cases} \frac{p_1 \cdot q_2}{1 - q_1 \cdot q_2} & , \quad x = 0 \\ \frac{p_1 \cdot p_2}{(1 - q_1 q_2)^2} \left\{ \frac{p_2 \cdot q_1}{1 - q_1 q_2} \right\}^{x-1} & , \quad x > 0 \end{cases}$$

É possível de verificar que, para $m_1 = 1$, $P(M_2 = x)$ é função de distribuição de probabilidade, já que as probabilidades são todas positivas e a soma delas é igual à unidade.

No caso geral de ser m_1 diferente da unidade, é válido considerar o delineamento D constituído de m_1 etapas consecutivas, cada uma delas correspondente a $m_{1i} = 1$, $i = 1, 2, \dots, m_1$. Cada uma destas etapas vai-nos fornecer uma variável M_{2i} com distribuição de probabilidade agora conhecida:

$$P \left[M_{2i} = x \right] = \begin{cases} \frac{p_1 \cdot q_2}{1 - q_1 \cdot q_2} & , \quad x = 0 \\ \frac{p_1 \cdot p_2}{(1 - q_1 q_2)^2} \left\{ \frac{p_2 \cdot q_1}{1 - q_1 q_2} \right\}^{x-1} & , \quad x > 0 \end{cases}$$

$\forall i = 1, 2, 3, \dots, m_1$.

Foram utilizadas as distribuições de probabilidade das variáveis M_{2i} para desenvolver uma fórmula que permita calcular as probabilidades de $M_2 = m_2$ para $m_2 = 0, 1, 2, \dots$.

Sendo :

$$M_2 = \sum_{i=1}^{m_1} M_{2i} \quad \text{e} \quad m_2 = \sum_{i=1}^{m_1} m_{2i} .$$

Definindo $M_{\min} = \min \{ m_1, m_2 \}$ concluímos, como mostramos no Apêndice 2 :

$$P\{M_2 = m_2\} = \begin{cases} \left(\frac{p_1 \cdot q_2}{1 - q_1 \cdot q_2} \right)^{m_1} & m_2 = 0 \\ \frac{(p_1 \cdot q_2)^{m_1} \cdot (p_2 \cdot q_1)^{m_2}}{(1 - q_1 \cdot q_2)^{m_1 + m_2}} \cdot \sum_{k=1}^{M_{\min}} \binom{m_1}{k} \binom{m_2 - 1}{k-1} \cdot (q_1 \cdot q_2)^{-k} & m_2 > 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

que é uma expressão computacionalmente mais adequada que (2.14).

2.3. O CASO PARTICULAR ONDE $p_1 = p_2$

Um caso particular de grande interesse ocorre quando se quer testar a igualdade entre duas taxas de risco. Seja $p_1 = p_2 = p$; neste caso temos, considerando (2.3), que:

$$\text{Var}(\hat{\phi}_u) = \frac{1}{m_1} \cdot [1 - p + 1 - p] = \frac{2}{m_1} \cdot (1 - p) \quad (2.16)$$

Pela equação (2.15), sendo $p_1 = p_2 = p$, temos que a distribuição exata de M_2 , para $m_2 \geq 1$, é dada por:

$$P\{M_2 = m_2\} = \frac{(p \cdot q)^{m_1 + m_2}}{(p \cdot (2 - p))^{m_1 + m_2}} \cdot \sum_{k=1}^{Mm1n} \binom{m_1}{k} \binom{m_2 - 1}{k - 1} \cdot (q^2)^{-k}$$

Logo :

$$P\{M_2=m_2\} = \begin{cases} \left(\frac{q}{2-p}\right)^{m_1} & \text{se } m_2=0 \\ \left(\frac{q}{2-p}\right)^{m_1+m_2} \sum_{k=1}^{\min(m_1, m_2)} \binom{m_1}{k} \binom{m_2-1}{k-1} \cdot q^{-2k} & \text{se } m_2 > 0 \end{cases}$$

(2.17)

Mais adiante desenvolveremos uma série de resultados úteis no tratamento de pequenas amostras, para a situação particular de $\phi = 1$. A expressão (2.17) nos será bastante útil.

CAPÍTULO III

TESTANDO A HIPÓTESE $\phi = 1$

No Capítulo 2 apresentamos o delineamento D que permite a obtenção de um estimador não viciado do risco relativo $\phi = p_2 / p_1$, com variância conhecida. Associado ao delineamento D , representamos esse estimador por $\hat{\phi}_u$. Vimos que sob o delineamento D , este estimador é não viciado; determinamos sua variância, estabelecemos sua distribuição exata e demonstramos a sua normalidade assintótica.

Neste capítulo apresentamos um estimador consistente da variância de $\hat{\phi}_u$, e um roteiro simples para o teste da hipótese $\phi = 1$ em contextos de pequenas amostras. Para as diversas situações testadas, estes procedimentos se compararam vantajosamente com as alternativas já existentes.

No teste da hipótese $\phi = 1$ nos casos de grandes amostras, a aproximação à distribuição Normal dá bons resultados. Neste capítulo consideramos o caso de pequenas amostras.

3.1. ESTIMADOR DA VARIÂNCIA DE $\hat{\phi}_u$. VÍCIO DE $\widehat{\text{Var}}(\hat{\phi}_u)$

Quando a decomposição de m_2 em $m_{21}, m_{22}, \dots, m_{2m_1}$ (ver capítulo 2) é conhecida, um estimador não tendencioso óbvio da variância de $\hat{\phi}_u$ é dado por :

$$v(\hat{\phi}_u) = \frac{1}{m_1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{m_1} (m_{2i} - \hat{\phi}_u)^2}{m_1 - 1}$$

e intervalos de confiança - bem como testes - para ϕ , podem ser construídos pela forma clássica com o emprego da distribuição t de Student, com excelentes resultados para amostras de tamanho moderado .

Na tabela abaixo apresentamos os resultados de simulações de Monte Carlo para $\phi = 1$, com p variando de décimo em décimo, de 0.10 a 0.50, e para $m_1 = 5, 10, 25$ e 50. Em cada caso registramos o número de vezes em que o intervalo de confiança construído como sugerido acima não cubriu o valor verdadeiro de ϕ , em 1000 repetições Monte Carlo.

TABELA 3.1 : Número de vezes em que o valor verdadeiro de ϕ não foi coberto pelo intervalo de confiança de 95% baseado na distribuição t de Student com a estimativa não viciada de $\text{Var}(\hat{\phi}_u)$, para diversos valores de p e m_1 .

		m_1			
		5	10	25	50
p	0.10	91	100	80	68
	0.20	75	97	61	63
	0.30	75	76	79	65
	0.40	47	79	74	51
	0.50	47	74	56	52

Desta forma, quando os dados estão sendo levantados, é recomendável que se procure, sempre que possível, registrar as informações sobre aquela decomposição. Nós tratamos aqui do caso em que aquela decomposição não é conhecida.

Utilizando o resultado 2.1, temos que

$$\text{Var}(\hat{\phi}_u) = \frac{1}{m_1} \cdot \phi \cdot \left[\phi \cdot (1 - p_1) + 1 - p_2 \right]. \text{ Considerando que}$$

$\phi \cdot p_1 = p_2$, resulta:

$$\text{Var}(\hat{\phi}_u) = \frac{1}{m_1} \cdot \phi \cdot \left[\phi + 1 - 2 \cdot p_2 \right].$$

Logo, é razoável supor que a variância de $\hat{\phi}_u$ poderá ser estimada por:

$$v(\hat{\phi}_u) = \frac{1}{m_1} \cdot \hat{\phi}_u \cdot \left[\hat{\phi}_u + 1 - 2 \cdot \hat{p}_2 \right] , \text{ ou}$$

$$v(\hat{\phi}_u) = \frac{1}{m_1} \cdot \left[\hat{\phi}_u^2 + \hat{\phi}_u - 2 \cdot \hat{p}_2 \cdot \hat{\phi}_u \right] . \quad (3.1)$$

Analizaremos agora o vício desse estimador :

$$\begin{aligned} E\left\{ v(\hat{\phi}_u) \right\} &= \frac{1}{m_1} \cdot E\left\{ \hat{\phi}_u^2 + \hat{\phi}_u - 2 \cdot \hat{p}_2 \cdot \hat{\phi}_u \right\} = \\ &= \frac{1}{m_1} \cdot \left\{ E(\hat{\phi}_u^2) + E(\hat{\phi}_u) - 2 \cdot E(\hat{p}_2 \cdot \hat{\phi}_u) \right\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Mas:

$$E(\hat{\phi}_u^2) = V(\hat{\phi}_u) + E(\hat{\phi}_u)^2 = V(\hat{\phi}_u) + \phi^2 \quad (3.3)$$

e

$$\begin{aligned} E(\hat{p}_2 \cdot \hat{\phi}_u) &= E\left(\frac{m_2}{n_1} \cdot \frac{m_2}{m_1} \right) = \frac{1}{m_1} \cdot E\left(\frac{m_2^2}{n_1} \right) = \\ &= \frac{1}{m_1} \cdot E\left\{ E\left(\frac{m_2^2}{n_1} / n_1 \right) \right\} = \frac{1}{m_1} \cdot E\left\{ \frac{1}{n_1} E\left(m_2^2 / n_1 \right) \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{m_1} E \left\{ \frac{1}{n_1} \left(V(m_2 / n_1) + E(m_2 / n_1)^2 \right) \right\} = \\
&= \frac{1}{m_1} E \left\{ \frac{1}{n_1} \left(n_1 \cdot p_2 \cdot q_2 + n_1^2 \cdot p_2^2 \right) \right\} = \frac{1}{m_1} E \left\{ p_2 \cdot q_2 + n_1 \cdot p_2^2 \right\} = \\
&= \frac{1}{m_1} \left\{ p_2 \cdot q_2 + p_2^2 \cdot E(n_1) \right\} = \frac{1}{m_1} \left\{ p_2 \cdot q_2 + p_2^2 \cdot \frac{m_1}{p_1} \right\} =
\end{aligned}$$

Logo :

$$E(\hat{p}_2 \cdot \hat{\phi}_u) = \frac{1}{m_1} \cdot p_2 \cdot q_2 + p_2 \cdot \phi \quad (3.4)$$

Substituindo os resultados obtidos em (3.3) e (3.4) na equação (3.2) tem-se :

$$\begin{aligned}
E[v(\hat{\phi}_u)] &= \frac{1}{m_1} \left\{ V(\hat{\phi}_u) + \phi^2 + \phi - 2 \cdot \left(\frac{1}{m_1} \cdot p_2 \cdot q_2 + p_2 \cdot \phi \right) \right\} = \\
&= \frac{1}{m_1} \left\{ \phi^2 + \phi - 2 \cdot p_2 \cdot \phi \right\} + \frac{1}{m_1} \left\{ V(\hat{\phi}_u) - \frac{2}{m_1} \cdot p_2 \cdot q_2 \right\}
\end{aligned}$$

Nessa expressão, o primeiro termo é igual a $V(\hat{\phi}_u)$, portanto:

$$E \left[v(\hat{\phi}_u) \right] = V(\hat{\phi}_u) + \frac{1}{m_1} \left(V(\hat{\phi}_u) - \frac{2}{m_1} p_2 \cdot q_2 \right) \quad (3.5)$$

onde o vício de $v(\hat{\phi}_u)$ é :

$$\begin{aligned} b\left(v(\hat{\phi}_u)\right) &= \frac{1}{m_1} \left[V(\hat{\phi}_u) - \frac{2}{m_1} \cdot p_2 \cdot q_2 \right] = \\ &= \frac{1}{m_1^2} \left[\phi \cdot (q_2 - \phi \cdot q_1) - 2 \cdot p_2 \cdot q_2 \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

Vemos que $b[v(\hat{\phi}_u)] \rightarrow 0$ para $m_1 \rightarrow \infty$, logo $v(\hat{\phi}_u)$ é um estimador consistente de $V(\hat{\phi}_u)$.

Podemos assim obter um estimador para a variância cujo vício é da ordem $O(m_1^{-2})$.

3.2. APROXIMAÇÃO À DISTRIBUIÇÃO NORMAL

Baseado no resultado 2.3. temos que, para grandes amostras, a distribuição de $\hat{\phi}_u$ aproxima-se à Normal.

Logo, nestos casos a construção dos intervalos de confiança deverá ser feita considerando (2.4).

Então, os limites do intervalo $I = (\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_s)$ de nível assintótico $(1-\alpha).100\%$ de confiança, baseado em uma amostra de tamanho necessário para se obter m_1 casos

positivos na primeira população, serão :

$$\phi_1 = \hat{\phi}_u - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{v(\hat{\phi}_u)} \quad (3.7)$$

$$\phi_2 = \hat{\phi}_u + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{v(\hat{\phi}_u)}$$

onde $z_{\alpha/2}$ é o valor da distribuição Normal que acumula uma probabilidade de $1 - \alpha/2$, e $v(\hat{\phi}_u)$ está dado por (3.1).

Para ilustração fizemos algumas simulações Monte Carlo para $\phi = 1$, com $p_1 = p_2 = 0.01, 0.05, 0.10, 0.20, 0.25, 0.30, 0.40$ e 0.50 , e $m_1 = 1, 2, 5, 10, 15, 20, 25$ e 50 . Com base em 1000 repetições Monte Carlo, obtivemos os resultados apresentados na Tabela 3.2. Nesta tabela, para cada combinação (p_1, m_1) está representado o número total de vezes em que o intervalo de confiança não cobriu o valor verdadeiro $\phi = 1$.

TABELA 3.2 : Número de vezes em que o intervalo de 95% de confiança baseado a) na aproximação normal (superior) e b) na t de Student para m_1 graus de liberdade (inferior) para $\hat{\phi}_u$ não cobriu o valor verdadeiro $\phi = 1$, em 1000 simulações Monte Carlo para cada combinação (p, m) .

		m_1							
		1	2	5	10	15	20	25	50
P_1	0.01	486	264	87	102	92	83	81	73
		486	264	87	102	64	83	63	72
	0.05	493	234	95	82	100	76	105	77
		493	234	95	82	62	74	70	59
	0.10	462	226	105	75	76	73	71	56
		462	226	100	70	52	68	70	53
	0.20	439	204	136	127	67	73	56	61
		439	204	72	61	66	52	47	49
	0.25	414	184	146	102	73	87	73	57
		414	184	71	60	71	77	55	55
	0.30	380	184	147	108	76	72	57	63
		380	184	55	67	72	69	51	59
	0.40	394	137	152	75	73	64	56	51
		394	137	46	56	51	50	49	48
0.50	326	116	117	58	62	66	69	54	
	326	116	40	46	48	49	54	51	

Na tabela acima vemos que as distorções no nível de significância são consideráveis para m_1 pequeno. Para $m_1=50$ os valores já se tornam bastante satisfatórios, embora haja ainda evidência de que o α real é um pouco maior que o valor nominal de 0.05. O uso da distribuição t de Student com m_1

graus de liberdade melhora a performance, dando resultados satisfatórios para $m_1 \geq 15$, e até para valores menores que 15, desde que p_1 não seja muito pequeno.

3.3. TESTES DA HIPÓTESE $\phi = 1$ PARA PEQUENAS AMOSTRAS

Para amostras pequenas a aproximação normal se torna inadequada. Aqui desenvolvemos uma alternativa para o teste da hipótese $\phi = 1$ baseada na razão de verossimilhança.

Partindo de (2.14), temos a seguinte função de distribuição conjunta de probabilidade para N_1 e M_2 , em termos dos parâmetros p_1 e p_2 :

$$P\left[n_1, m_2 \right] = \binom{n_1-1}{m_1-1} \binom{n_1}{m_2} \cdot p_1^{m_1} \cdot (1-p_1)^{n_1-m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot (1-p_2)^{n_1-m_2} \quad (3.8)$$

Logo, para valores observados n_1 e m_2 , a função de verossimilhança é:

$$L(p_1, p_2) = \binom{n_1-1}{m_1-1} \binom{n_1}{m_2} \cdot p_1^{m_1} \cdot (1-p_1)^{n_1-m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot (1-p_2)^{n_1-m_2} \quad (3.9)$$

e os estimadores de máxima verossimilhança de p_1 e p_2 são dados por (ver Apêndice 3):

$$\tilde{p}_1 = \frac{m_1}{n_1} \quad , \quad \tilde{p}_2 = \frac{m_2}{n_1} \quad (3.10)$$

Portanto, o máximo valor de $L(p_1, p_2)$ corresponde

ao ponto $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \left(\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_1} \right)$ e é igual a :

$$\begin{aligned} L(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) &= \\ &= \binom{n_1-1}{m_1-1} \binom{n_1}{m_2} \cdot \left(\frac{m_1}{n_1}\right)^{m_1} \cdot \left(1 - \frac{m_1}{n_1}\right)^{n_1-m_1} \cdot \left(\frac{m_2}{n_1}\right)^{m_2} \cdot \left(1 - \frac{m_2}{n_1}\right)^{n_1-m_2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

É razoável pretender que, dados os valores observados o intervalo de confiança para ϕ inclua os valores do parâmetro para os quais a função de verossimilhança é alta, deixando de fora aqueles em que a função de verossimilhança é baixa, relativamente ao seu valor máximo $L(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$. Assim, usamos o critério da razão de verossimilhança, definindo o intervalo de confiança para ϕ como o conjunto dos valores de ϕ associados aos pares (p_1, p_2) que satisfazem à condição :

$$\frac{L(p_1, p_2)}{L(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)} \geq \gamma \quad (3.12)$$

onde γ é uma constante determinada para se ter o nível de confiança desejado do intervalo. Assim, terão que ser determinados os pontos (p_1, p_2) tais que :

$$\frac{\binom{n_1-1}{m_1-1} \binom{n_1}{m_2} \cdot p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot (1-p_1)^{n_1-m_1} \cdot (1-p_2)^{n_1-m_2}}{\binom{n_1-1}{m_1-1} \binom{n_1}{m_2} \cdot \left(\frac{m_1}{n_1}\right)^{m_1} \cdot \left(\frac{m_2}{n_1}\right)^{m_2} \cdot \left(1 - \frac{m_1}{n_1}\right)^{n_1-m_1} \cdot \left(1 - \frac{m_2}{n_1}\right)^{n_1-m_2}} \geq \gamma$$

ou

$$p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot (1-p_1)^{n_1-m_1} \cdot (1-p_2)^{n_1-m_2} \geq \gamma \cdot \left(\frac{m_1}{n_1}\right)^{m_1} \cdot \left(\frac{m_2}{n_1}\right)^{m_2} \cdot \left(1 - \frac{m_1}{n_1}\right)^{n_1-m_1} \cdot \left(1 - \frac{m_2}{n_1}\right)^{n_1-m_2}$$

onde o termo da direita é uma constante determinada pelos resultados obtidos n_1, m_2 e pela constante γ .

Os resultados assintóticos para a razão de verossimilhança são bem conhecidos, (ver Bickel e Doksum, pág. 227). Em particular, no nosso contexto, temos que :

$$-2 \cdot \log \frac{\max_{0 < p_1 = p_2 < 1} L(p_1, p_2; n_1, m_2)}{\max_{0 < p_1, p_2 < 1} L(p_1, p_2; n_1, m_2)} \xrightarrow[m_1 \rightarrow \infty]{D} \chi_1^2 \quad (3.13)$$

Desenvolvendo, temos de (3.10) que

$$\max_{0 < p_1, p_2 < 1} L(p_1, p_2; n_1, m_2) = L\left(\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_1}; n_1, m_2\right)$$

cuja expressão completa é dada em (3.11) .

Por outro lado, restrito a $p_1 = p_2$, temos que o estimador de máxima verossimilhança comum a p_1 e p_2 é dado por (ver Apêndice 5) :

$$\tilde{p} = \frac{m_1 + m_2}{2 \cdot n_1} = \frac{\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2}{2} \quad (3.14)$$

e portanto , de (3.9) :

$$\begin{aligned} & \max_{0 < p_1 = p_2 < 1} L(p_1, p_2; n_1, m_2) = \\ & = \binom{n_1 - 1}{m_1 - 1} \binom{n_1}{m_2} \cdot \left(\frac{m_1 + m_2}{2 \cdot n_1}\right)^{m_1 + m_2} \cdot \left(\frac{2 \cdot n_1 - m_1 - m_2}{2 \cdot n_1}\right)^{2 \cdot n_1 - m_1 - m_2} \end{aligned}$$

Então, (3.13) nos leva a

$$\begin{aligned}
 & -2. \left[(m_1+m_2). \log \left(\frac{m_1+m_2}{2n_1} \right) + (2n_1-m_1-m_2). \log \left(\frac{2n_1-m_1-m_2}{2n_1} \right) - \right. \\
 & - m_1. \log \left(\frac{m_1}{n_1} \right) - (n_1-m_1). \log \left(\frac{n_1-m_1}{n_1} \right) - m_2. \log \left(\frac{m_2}{n_1} \right) - \\
 & \left. - (n_1-m_2). \log \left(\frac{n_1-m_2}{n_1} \right) \right] \xrightarrow[m_1 \rightarrow \infty]{D} \chi_1^2
 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
 & 2. \left[m_1. \log \left(\frac{2m_1}{m_1+m_2} \right) + m_2. \log \left(\frac{2m_2}{m_1+m_2} \right) + (n_1-m_1). \log \left(\frac{2(n_1-m_1)}{2n_1-m_1-m_2} \right) + \right. \\
 & \left. + (n_1-m_2). \log \left(\frac{2(n_1-m_2)}{2n_1-m_1-m_2} \right) \right] \xrightarrow[m_1 \rightarrow \infty]{D} \chi_1^2
 \end{aligned}$$

portanto

$$2 \cdot \log \left[\left(\frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \right)^{m_1} \left(\frac{2 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \right)^{m_2} \left(\frac{2(n_1 - m_1)}{2n_1 - m_1 - m_2} \right)^{n_1 - m_1} \left(\frac{2(n_1 - m_2)}{2n_1 - m_1 - m_2} \right)^{n_1 - m_2} \right] \xrightarrow[m_1 \rightarrow \infty]{D} \chi_1^2$$

Este resultado é interessante e pode também ser utilizado no contexto de grandes amostras. Contudo devemos aqui trabalhar mesmo com a distribuição exata da razão de verossimilhança pois estamos interessados justamente em problemas de pequenas amostras.

O nosso objetivo neste capítulo é estabelecer um procedimento para se testar a hipótese $\phi = 1$ versus a alternativa $\phi \neq 1$. Desta forma nós vamos determinar γ no sentido de se garantir um nível de significância próximo a $\alpha = 0.05$ quando $\phi = 1$, para várias alternativas de $p_1 = p_2 = p$ e m_1 .

Vamos assim considerar o espaço paramétrico definido por $(0, 1) \times (0, 1)$, como na figura 3.1. Vemos que retas passando pela origem correspondem a um valor constante de ϕ .

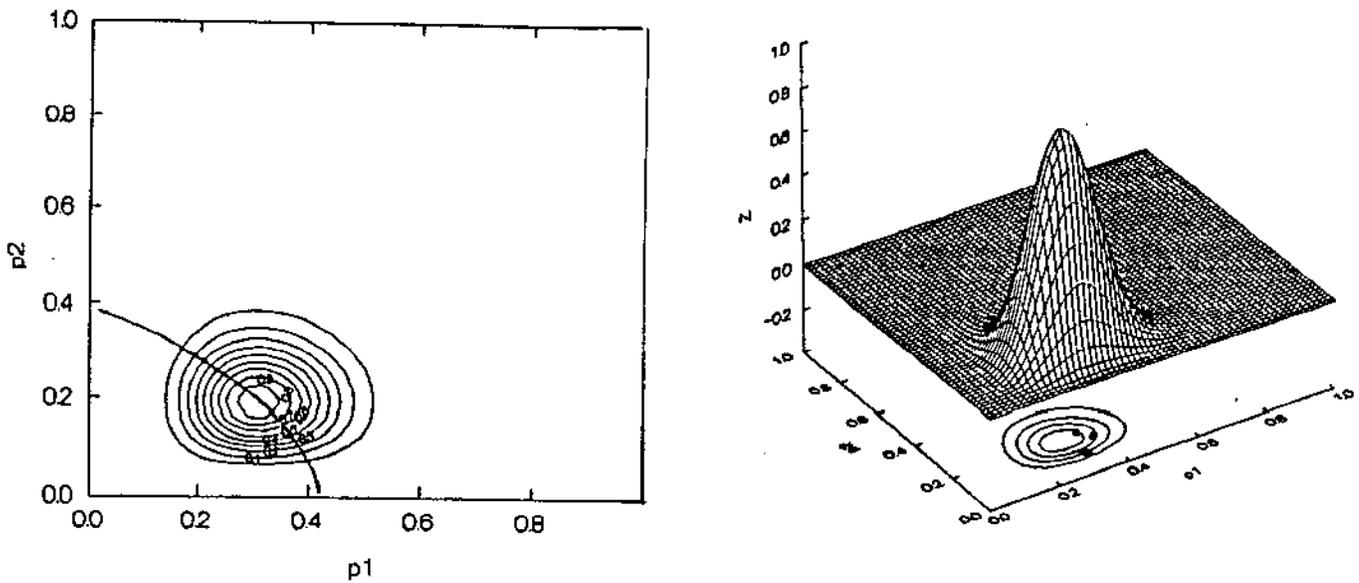


Fig 3.1 : À esquerda o espaço paramétrico do vetor (p_1, p_2) , com o ponto de máximo e curvas de nível da função de verossimilhança correspondendo a $\gamma = 0.9, 0.8, \dots, 0.1$, sobrepostas pela curva que demarca o lugar geométrico dos pontos de máximo da função de verossimilhança, para cada valor fixo da razão p_2/p_1 . Os cálculos foram feitos para $m_1 = 8$, $n_1 = 26$ e $m_2 = 5$. À direita temos uma representação tridimensional da mesma função de verossimilhança, com as respectivas curvas de nível correspondentes a $\gamma = 0.8, 0.6, 0.4$ e 0.2 .

Considere-se todas as retas que passam pela origem. Elas estão representadas pela equação $p_2 = k.p_1$, com $k > 0$. Em particular, para $k = \hat{\phi}_u$, obtemos a reta que passa pelo ponto $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$, onde a função de verossimilhança é máxima.

Agora , analisemos o que acontece nos outros segmentos de retas $p_2 = k.p_1$, para $k > 0$, restritas ao espaço paramétrico. Para cada um deles, existe um ponto (p_1^* , p_2^*) que maximiza a função de verossilhança L , entre todos aqueles pontos que pertencem ao segmento . Se a função de verossilhança avaliada naquele ponto é menor que $\gamma \cdot L(\tilde{p}_1 , \tilde{p}_2)$, então o valor do risco relativo correspondente a esta reta - isto é, a própria constante k - não será incluído no intervalo de confiança que estamos construindo para ϕ .

Como todo ponto (p_1 , p_2) que pertence à reta satisfaz a condição $p_1 = k.p_2$, com $0 < p_1 < 1$ e $0 < p_2 < 1$, então , sobre o segmento da reta $p_1 = k.p_2$ restrito a $(0,1) \times (0,1)$ se verifica :

$$L (p_1 , p_2) = L (p_1 , k.p_1) = L^* (p_1) , \quad \text{onde}$$

$$\begin{aligned} L^* (p_1) &= \binom{n_1-1}{m_1-1} \binom{n_1}{m_2} \cdot p_1^{m_1} \cdot (1-p_1)^{n_1-m_1} \cdot (k.p_1)^{m_2} \cdot (1-k.p_1)^{n_1-m_2} = \\ &= \binom{n_1-1}{m_1-1} \binom{n_1}{m_2} \cdot p_1^{m_1+m_2} \cdot (1-p_1)^{n_1-m_1} \cdot k^{m_2} \cdot (1-k.p_1)^{n_1-m_2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Para se determinar o ponto de máxima verossimilhança nessa reta, derivamos o logaritmo de $L^*(p_1)$, resultando :

$$\frac{\partial \ln L^*(p_1)}{\partial p_1} = \frac{m_1 + m_2}{p_1} - \frac{n_1 - m_1}{1-p_1} - k \cdot \frac{n_1 - m_2}{1-k \cdot p_1} \quad (3.16)$$

Fazendo:

$$\frac{\partial \ln L^*(p_1)}{\partial p_1} = 0$$

obteve-se a seguinte equação quadrática em termos de p_1 :

$$2 \cdot k \cdot n_1 \cdot p_1^2 - [k \cdot (n_1 + m_1) + (n_1 + m_2)] \cdot p_1 + m_1 + m_2 = 0 \quad (3.17)$$

cuja solução vai-nos fornecer o valor da probabilidade p_1 que maximiza a função de verossimilhança restrita a esse segmento.

Derivando (3.16) com relação a p_1 , obtemos :

$$\frac{\partial^2 \ln L^*(p_1)}{\partial p_1^2} = - \frac{(m_1 + m_2)}{p_1^2} - \frac{n_1 - m_1}{(1-p_1)^2} - k \cdot \frac{n_1 - m_2}{(1-k \cdot p_1)^2}$$

estritamente negativo para todo p_1 no intervalo $(0, 1)$.

Isto garante que os valores que satisfazem a (3.17) maximizam a função de verossimilhança restrita ao segmento de $p_2 = k.p_1$ em $(0, 1) \times (0, 1)$.

Mas, como demostramos no Apêndice 4, das duas soluções dessa equação só uma pertence ao espaço paramétrico $(0,1) \times (0,1)$ do vetor (p_1, p_2) . Logo, restrito àquele segmento de reta, existe um único valor de p_1 que maximiza a função de verossimilhança, e é dado por :

$$p_1^* = \frac{k(n_1+m_1) + n_1+m_2 - \sqrt{[k(n_1+m_1) + n_1+m_2]^2 - 8.k.n_1(m_1+m_2)}}{4.k.n_1}$$

(3.18)

e naturalmente $p_2^* = k . p_1^*$.

3.4. DETERMINAÇÃO DO FATOR γ

Restringimos nosso trabalho à situação de maior interesse prático onde $\phi = 1$. Para todos os valores inteiros de m_1 variando de 1 até 10, e ainda para os valores 15, 20 e 25, obtivemos valores de γ que garantiam um nível de significância exata próximo de 5%, para valores de p iguais a 0.01, e de 0.05 até 0.50 variando de 0.05 em 0.05.

Assim, para cada contexto, podemos recomendar o valor de γ mais apropriado, bem como o nível de significância exato a ele associado.

Por causa do caráter discreto associado ao problema, não encontramos em cada caso valores de γ que garantissem um nível de significância exatamente igual a 0.05. Na tabela abaixo resumizamos os resultados, apresentando os valores de γ recomendados bem como o nível de significância exato correspondente, para cada combinação (m_1, p) .

TABELA 3.3 : Melhores valores de γ , com correspondente α exato , para cada combinação de m_1 e p .

		p										
		0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
1		0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24
		3.08	2.89	2.68	2.57	2.59	2.76	3.02	3.31	3.57	3.75	3.84
2		0.24	0.21	0.18	.149	.148	.135	.064	.064	.064	.064	0.64
		5.64	4.82	5.47	5.48	4.27	5.00	5.05	5.84	6.44	6.81	6.92
3		.122	.112	.101	.092	.083	.077	.075	.075	.075	.077	.093
		4.64	5.21	5.25	4.70	5.16	5.01	4.43	4.76	4.81	5.25	5.00
4		.062	.058	.055	.055	0.09	0.12	0.14	.145	.145	.145	.139
		6.68	5.03	5.00	5.00	5.00	5.04	5.00	4.98	4.93	4.96	5.06
5		.156	0.19	.185	.171	0.16	0.15	.141	.137	.131	0.13	0.12
		5.16	5.00	5.05	4.96	4.99	5.10	5.06	4.96	5.08	5.04	5.05
6		.137	.137	.137	.138	.138	.138	.138	.138	.138	.136	.124
		3.62	3.61	3.52	6.18	5.88	5.43	5.12	5.09	5.22	5.01	5.26
7		0.10	.149	.165	.158	.148	.138	0.13	.125	.125	.125	0.12
		5.13	5.04	5.00	5.02	4.97	4.92	4.99	4.88	5.00	5.03	5.01
8		.142	.131	.121	.115	.125	.142	.145	0.14	.132	.131	0.12
		4.76	4.94	4.97	4.98	5.05	5.01	4.96	4.97	5.06	4.83	4.98
9		0.15	.147	0.16	0.15	0.14	.132	.127	0.13	.138	.138	.137
		4.94	4.92	4.97	4.97	4.94	4.94	4.99	5.00	5.01	4.97	4.98
0		.133	.125	.117	.133	0.15	0.15	0.14	.135	.132	.132	.132
		4.21	5.09	5.05	4.98	4.97	5.05	4.98	4.98	5.08	5.12	5.13

		p									
		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
m ₁	15	.135	.142	0.15	.149	0.14	.135	0.14	.142	.141	0.14
		5.44	4.99	4.92	5.03	5.02	5.05	5.0	4.98	4.96	5.06
	20	.157	.154	0.14	.135	0.15	.145	.142	0.14	.142	.142
	5.13	4.94	5.01	5.0	5.08	5.09	5.03	4.95	5.03	5.06	
25	.145	.167	0.16	.143	0.14	.145	.143	.142	.143	.143	
	5.33	4.86	4.99	5.02	5.09	4.95	4.96	5.02	4.95	4.94	

No Apêndice 6 apresentamos as tabelas completas, das quais retiramos os valores acima .

3.5. CONCLUSÕES

A estimativa de ϕ é um problema importante, mas as soluções propostas até agora padecem do inconveniente de envolverem aproximações freqüentemente muito trabalhosas, além de processos iterativos complicados e pouco intuitivos.

O delineamento D , permitindo uma estimativa não tendenciosa de ϕ , com variância conhecida e normalidade assintótica estabelecida, trás o problema para um contexto de melhor e mais confortável tratamento. O conhecimento da função de distribuição de probabilidade exata de $\hat{\phi}_u$ permite um tratamento do problema de pequenas amostras que formalmente não difere do problema clássico associado à inferência sobre o parâmetro p de $X \sim b(n, p)$.

Em poucas palavras, o problema de se estimar ϕ fica agora reduzido à mesma situação formal de se estimar o parâmetro p de uma binomial. Tudo depende da possibilidade de se utilizar o delineamento D .

Nos casos em que o delineamento D pode ser empregado, é recomendável o registro de M_{2i} , $i = 1, 2, \dots, m_1$, como definidos no resultado 2.3 e, mais adiante, na seção 3.1.

Os resultados sobre γ apresentados neste trabalho, podem com mais tempo, serem ampliados para se abranger uma variedade maior de situações de interesse, inclusive com tratamento sobre potência dos testes, que só não incluímos aqui

por restrições de prazos .

Outros problemas que ainda restam são :

- Desenvolver procedimentos para a construção de intervalos de confiança para ϕ no contexto de pequenas amostras, onde a abordagem pelo teste t de Student provoca distorções inadmissíveis.

- Generalizar o delineamento empregado, para os casos em que $\phi \ll 1$ ou $\phi \gg 1$. Nestes casos surgem dificuldades operacionais com respeito aos tamanhos amostrais envolvidos.

Mais trabalho sobre o delineamento D está sendo desenvolvido, tanto no sentido de cobrir as lacunas óbvias deixadas por este trabalho quanto no tratamento de situações mais elaboradas como o teste de homogeneidade de ϕ em k pares de populações . Estes trabalhos serão apresentados brevemente em outra tese de mestrado já em andamento neste departamento.

APÊNDICE 1

DEDUÇÃO DE $P(M_2 = m_2)$ PARA $m_1 = 1$

Seja n_1 o número necessário de itens a ser retirados até se obter o primeiro com caso positivo . Então :

$$n_1 \sim \text{Geom} (p_1) ,$$

e a distribuição da variável M_2 é dada por (2.14), para $m_1 = 1$:

$$P[M_2 = m_2] = \sum_{n_1 = \max}^{\infty} \binom{n_1}{m_2} \cdot p_1 \cdot p_2^{m_2} \cdot q_1^{n_1 - 1} \cdot q_2^{n_1 - m_2}$$

$$\text{onde } \max = \max \{ 1 , m_2 \} = \begin{cases} 1 & \text{se } m_2 = 0 , 1 \\ m_2 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Logo :

$$P[M_2 = m_2] = \frac{p_1}{q_1} \cdot \left(\frac{p_2}{q_2} \right)^{m_2} \cdot \sum_{n_1 = \max}^{\infty} \binom{n_1}{m_2} \cdot \left(q_1 \cdot q_2 \right)^{n_1}$$

para $m_2 = 0 , 1 , 2 , 3 , \dots$

Para este caso particular, $m_1 = 1$, vamos desenvolver uma fórmula que permita calcular as probabilidades de ser $M_2 = m_2$ para $m_2 = 0, 1, 2, \dots$

Logo:

$$P \left[M_2 = 0 \right] = \frac{p_1}{q_1} \sum_{k=1}^{\infty} (q_1 \cdot q_2)^k = \frac{p_1 \cdot q_2}{1 - q_1 \cdot q_2}$$

$$P \left[M_2 = 1 \right] = \frac{p_1}{q_1} \frac{p_2}{q_2} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (q_1 \cdot q_2)^k = \frac{p_1 \cdot p_2}{(1 - q_1 \cdot q_2)^2}$$

Considerando que todo número combinatório de denominador não nulo é possível de se obter como a soma de outros números combinatórios, em particular, utilizando a relação :

$$\binom{i}{x+1} = \sum_{k=x}^{i-1} \binom{k}{x} \quad (\text{A1.1})$$

que pode ser facilmente demonstrada por indução, resulta que :

$$\sum_{i=x+1}^{\infty} \binom{i}{x+1} \cdot (q_1 \cdot q_2)^i = \sum_{i=x+1}^{\infty} \sum_{k=x}^{i-1} \binom{k}{x} \cdot (q_1 \cdot q_2)^i =$$

$$= \sum_{k=x}^{\infty} \sum_{l=k+1}^{\infty} \binom{k}{x} \cdot (q_1 \cdot q_2)^l = \sum_{k=x}^{\infty} \binom{k}{x} \cdot (q_1 \cdot q_2)^{k+1} \cdot \frac{1}{1 - q_1 \cdot q_2}$$

Sustituindo o sub-índice k por i , resulta que :

$$\sum_{l=x+1}^{\infty} \binom{i}{x+1} \cdot (q_1 \cdot q_2)^l = \frac{q_1 \cdot q_2}{1 - q_1 \cdot q_2} \sum_{l=x}^{\infty} \binom{i}{x} \cdot (q_1 \cdot q_2)^l \quad (A1.2)$$

Utilizando a relação (A1.2), é possível expressar a probabilidade $P [M_2 = x+1]$ em termos de $P [M_2 = x]$, chegando ao seguinte resultado:

$$P [M_2 = x+1] = \frac{p_2 \cdot q_1}{1 - q_1 \cdot q_2} \cdot P [M_2 = x] \quad (A1.3)$$

para $x = 1, 2, 3, \dots$

Note-se que (A1.3) é uma fórmula recursiva. Portanto, pode ser expressada em termos de $P [M_2 = 1]$. Assim, resulta que:

$$P [M_2 = x+1] = \left(\frac{p_2 \cdot q_1}{1 - q_1 \cdot q_2} \right)^x \cdot P [M_2 = 1] \quad (A1.4)$$

Logo:

$$P [M_2 = x] = \begin{cases} \frac{p_1 \cdot q_2}{1 - q_1 \cdot q_2} & , \quad x = 0 \\ \frac{p_1 \cdot p_2}{(1 - q_1 \cdot q_2)^2} \left\{ \frac{p_2 \cdot q_1}{1 - q_1 \cdot q_2} \right\}^{x-1} & , \quad x > 0 \end{cases}$$

APÊNDICE 2

DEDUÇÃO DE $P(M_2 = m_2)$ PARA $m_1 > 1$

Como $m_2 = 0 \Rightarrow m_{2i} = 0$, $i = 1, 2, \dots, m_1$
 e por ser $M_{21}, M_{22}, \dots, M_{2m_1}$ i.i.d., temos que :

$$P\{M_2 = 0\} = P[M_{2i} = 0]^{m_1} = \left(\frac{p_1 \cdot q_2}{1 - q_1 \cdot q_2} \right)^{m_1} \quad (A2.1)$$

$m_2 = 1 \Rightarrow \exists i \in \{1, 2, \dots, m_1\}$ tal que $m_{2i} = 1$
 $\wedge m_{2j} = 0 \forall j \neq i$.

$$P\{M_2 = 1\} = \sum_{i=1}^{m_1} P[M_{2i} = 1] \cdot P[M_{2j} = 0]^{m_1 - 1}$$

$$= \sum_{i=1}^{m_1} \frac{p_1 \cdot p_2}{(1 - q_1 \cdot q_2)^2} \cdot \left(\frac{p_1 \cdot q_2}{1 - q_1 \cdot q_2} \right)^{m_1 - 1} =$$

$$P\{M_2 = 1\} = m_1 \cdot \frac{p_1^{m_1} \cdot p_2 \cdot q_2^{m_1 - 1}}{(1 - q_1 \cdot q_2)^{m_1 + 1}} \quad (A2.2)$$

$m_2 = 2 \Rightarrow (\exists i \in \{ 1, 2, \dots, m_1 \} \text{ tal que } m_{2i} = 2 \wedge$
 $m_{2j} = 0 \ \forall j \neq i) \quad \vee \quad (\exists i, k \in \{ 1, 2, \dots, m_1 \}, \ i \neq k,$
 tal que $m_{2i} = m_{2k} = 1 \ \wedge \ m_{2j} = 0 \ \forall j \neq i, j \neq k)$

$$\begin{aligned}
 P\{ M_2 = 2 \} &= \sum_{i=1}^{m_1} P [M_{2i} = 2] \cdot P [M_{2j} = 0]^{m_1-1} + \\
 &+ \sum_{i=1}^{m_1-1} \sum_{k=i+1}^{m_1} P [M_{2i} = 1]^2 \cdot P [M_{2j} = 0]^{m_1-2} = \\
 &= m_1 \cdot \frac{p_1 p_2^2 q_1}{(1-q_1 q_2)^3} \cdot \left(\frac{p_1 q_2}{1-q_1 q_2} \right)^{m_1-1} + \binom{m_1}{2} \cdot \left[\frac{p_1 \cdot p_2}{(1-q_1 q_2)^2} \right]^2 \cdot \left(\frac{p_1 q_2}{1-q_1 q_2} \right)^{m_1-2} = \\
 &= \binom{m_1}{1} \cdot \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot q_1 \cdot q_2^{m_1-1}}{(1-q_1 \cdot q_2)^{m_1+2}} + \binom{m_1}{2} \cdot \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot q_2^{m_1-2}}{(1-q_1 \cdot q_2)^{m_1+2}} \\
 \therefore P\{ M_2 = 2 \} &= \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot q_1 \cdot q_2^{m_1-1}}{(1-q_1 \cdot q_2)^{m_1+2}} \cdot \left[\binom{m_1}{1} \cdot q_1 \cdot q_2^{m_1-1} + \binom{m_1}{2} \cdot q_2^{m_1-2} \right] \\
 &\hspace{20em} (A2.3)
 \end{aligned}$$

Utilizando o mesmo método para calcular $P[M_2 = 3]$,
 sempre que seja $m_1 \geq 3$, obteve-se :

$$P\{M_2=3\} = \frac{p_1^{m_1} \cdot p_2^3}{(1-q_1q_2)^{m_1+3}} \cdot \left[\binom{m_1}{1} \cdot q_1^2 \cdot q_2^{m_1-1} + 2 \binom{m_1}{2} \cdot q_1 \cdot q_2^{m_1-2} + \binom{m_1}{3} \cdot q_2^{m_1-3} \right]$$

(A2.4)

Continuando o cálculo para $m_2 = 4, 5, 6, \dots$ descobre-se a lei que permite achar o valor de $P[M_2=m_2]$. A demonstração foi feita atacando o problema indiretamente :

Considere-se o vetor m_1 -dimensional dos resultados m_{2i} , $i = 1, 2, \dots, m_1$, com $\sum m_{2i} = m_2$. Logo, defina-se

$$\vec{m_2} = (m_{21}, m_{22}, \dots, m_{2m_1})$$

Para $M_2 = m_2 > 0$, é conveniente ordenar os resultados possíveis segundo a quantidade de $m_{2i} = 0$.

$$1.- (m_1-1) \text{ zeros} \Rightarrow \exists i \in \{1, 2, \dots, m_1\} \text{ tal que } m_{2i} = m_2 \wedge m_{2j} = 0 \forall j \neq i$$

Logo, existem m_1 arranjos que representam os diferentes resultados possíveis de obter, tendo todos eles a mesma probabilidade.

$$\begin{aligned} P\{(m_1-1) \text{ zeros}\} &= \sum_{i=1}^{m_1} P\left[m_{2i} = m_2 \wedge m_{2j} = 0 \forall j \neq i \right] \\ &= m_1 \cdot P(m_{2i} = m_2) \cdot P(m_{2j} = 0)^{m_1-1} = \end{aligned}$$

$$\therefore P \{ (m_1 - 1) \text{ zeros} \} =$$

$$= m_1 \cdot P \left[m_{2i} = 1 \right] \cdot \left\{ \frac{p_2 \cdot q_1}{1 - q_1 \cdot q_2} \right\}^{m_2 - 1} \cdot P \left[m_{2j} = 0 \right]^{m_1 - 1} \quad (A2.5)$$

2.- $(m_1 - 2)$ zeros $\Rightarrow \exists i, k \in \{1, 2, \dots, m_1\}, i \neq k$ tais
 que $m_{2i} > 0, m_{2k} > 0, m_{2i} + m_{2k} = m_2$
 $\wedge m_{2j} = 0 \forall j \neq i, j \neq k$.

Desde que $m_1 \geq 2$ e $m_2 \geq 2$:

$$P\{(m_1 - 2) \text{ zeros}\} = \sum_{a=1}^{m_2 - 1} \sum_{k>1=1}^{m_1} P \left[m_{2i} = a \wedge m_{2k} = m_2 - a \wedge m_{2j} = 0 \forall j \neq i, k \right] =$$

$$= \sum_{a=1}^{m_2 - 1} \binom{m_1}{2} \cdot P \left[m_{2i} = a \right] \cdot P \left[m_{2k} = m_2 - a \right] \cdot P \left[m_{2j} = 0 \right]^{m_1 - 2} =$$

$$= (m_2 - 1) \cdot \binom{m_1}{2} \cdot P \left[m_{2i} = 1 \right] \cdot \left(\frac{p_2 q_1}{1 - q_1 q_2} \right)^{a-1} \cdot P \left[m_{2k} = 1 \right] \cdot \left(\frac{p_2 q_1}{1 - q_1 q_2} \right)^{m_2 - a - 1} \cdot$$

$$\cdot P \left[m_{2j} = 0 \right]^{m_1 - 2} =$$

Logo :

$$P \{ (m_1 - 2) \text{ zeros} \} =$$

$$= (m_2 - 1) \binom{m_1}{2} \cdot P \left[m_{2i} = 1 \right]^2 \cdot \left(\frac{p_2 q_1}{1 - q_1 q_2} \right)^{m_2 - 2} \cdot P \left[m_{2j} = 0 \right]^{m_1 - 2}$$

(A2.6)

3.- $(m_1 - 3)$ zeros $\Rightarrow \exists i, k, l \in \{1, 2, \dots, m_1\}$, $i \neq k \neq l$,

$$\begin{aligned} &\text{tais que } m_{2i}, m_{2k}, m_{2l} > 0 \wedge m_{2i} + m_{2k} + m_{2l} = m_2 \\ &\wedge m_{2j} = 0 \quad \forall j \neq i, k, l. \end{aligned}$$

Desde que $m_1 \geq 3$ e $m_2 \geq 3$:

$$\begin{aligned} P\{(m_1 - 3) \text{ zeros}\} &= \sum_{a=1}^{m_2 - 2} \sum_{b=1}^{m_2 - a - 1} \sum_{l > k > i=1}^{m_1} P \left[m_{2i} = a \wedge m_{2k} = b \wedge \right. \\ &\quad \left. \wedge m_{2l} = m_2 - a - b \wedge m_{2j} = 0 \quad \forall j \neq i, k, l \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{a=1}^{m_2 - 2} \sum_{b=1}^{m_2 - a - 1} \binom{m_1}{3} \cdot P \left[m_{2i} = a \right] \cdot P \left[m_{2k} = b \right] \cdot P \left[m_{2l} = m_2 - a - b \right] \cdot \\ &\quad \cdot P \left[m_{2j} = 0 \right]^{m_1 - 3} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{a=1}^{m_2-2} (m_2 - a - 1) \cdot \binom{m_1}{3} \cdot P[m_{21}=1] \cdot \left(\frac{p_2 q_1}{1-q_1 q_2}\right)^{a-1} \cdot P[m_{2k}=1] \cdot \left(\frac{p_2 q_1}{1-q_1 q_2}\right)^{b-1} \\
&\quad \cdot P[m_{21}=1] \cdot \left(\frac{p_2 q_1}{1-q_1 q_2}\right)^{m_2-a-b-1} \cdot P[m_{2j}=0]^{m_1-3} = \\
&= \binom{m_1}{3} \cdot P[m_{21}=1]^3 \cdot \left(\frac{p_2 q_1}{1-q_1 q_2}\right)^{m_2-3} \cdot P[m_{2j}=0]^{m_1-3} \cdot \sum_{a=1}^{m_2-2} (m_2-a-1) ,
\end{aligned}$$

onde :

$$\begin{aligned}
\sum_{a=1}^{m_2-2} (m_2 - a - 1) &= (m_2 - 2) + (m_2 - 3) + \dots + (1) = \sum_{y=1}^{m_2-2} y = \\
&= (m_2 - 1) \cdot (m_2 - 2) / 2 = \binom{m_2-1}{2}
\end{aligned}$$

Logo , $P \{ (m_1 - 3) \text{ zeros} \} =$

$$= \binom{m_2-1}{2} \cdot \binom{m_1}{3} \cdot P[m_{21}=1]^3 \cdot \left(\frac{p_2 q_1}{1-q_1 q_2}\right)^{m_2-3} \cdot P[m_{2j}=0]^{m_1-3}$$

(A2.7)

Note-se que, para um determinado resultado $M_2 = m_2$, (e m_1 fixo) e desde que a quantidade de zeros obtidos nas m_1 etapas do delineamento seja constante, as probabilidades dos resultados possíveis são iguais. Logo, basta conhecer o número de resultados possíveis que correspondem a uma quantidade de zeros determinada.

Sejam $m_1 \geq 4$ e $m_2 \geq 4$, e seja o vetor m_1 -dimensional $\tilde{m}_2 = (a, b, c, d, 0, \dots, 0)$ um dos resultados possíveis, sendo $a + b + c + d = m_2$.

A probabilidade de se obter aquele resultado é :

$$\begin{aligned} P\left(\tilde{m}_2\right) &= P(m_{21} = a).P(m_{22} = b).P(m_{23} = c).P(m_{24} = d). P(m_{21} = 0)^{m_1 - 4} = \\ &= P(m_{21} = 1) \cdot \left[\frac{p_2 q_1}{1 - q_1 q_2}\right]^{a-1} \cdot P(m_{22} = 1) \cdot \left[\frac{p_2 q_1}{1 - q_1 q_2}\right]^{b-1} \cdot \\ &\cdot P(m_{23} = 1) \cdot \left[\frac{p_2 q_1}{1 - q_1 q_2}\right]^{c-1} \cdot P(m_{24} = 1) \cdot \left[\frac{p_2 q_1}{1 - q_1 q_2}\right]^{d-1} \cdot P(m_{21} = 0)^{m_1 - 4} = \end{aligned}$$

Logo, a probabilidade desse resultado será :

$$P\left(\tilde{m}_2\right) = P\left(m_{21} = 1\right) \cdot \left[\frac{p_2 q_1}{1 - q_1 q_2}\right]^{m_2 - 4} \cdot P\left(m_{21} = 0\right)^{m_1 - 4} \quad (A2.8)$$

Sem considerar os diferentes valores que possam assumir a, b, c, d , mas apenas diferenciando eles dos valores "zero",

existem $\binom{m_1}{4}$ resultados diferentes, (A2.9)

todos eles com a mesma probabilidade de ocorrência .

Consideremos agora todos os valores positivos que possam assumir a, b, c, d , tal que $a + b + c + d = m_2$. Este número estará dado pela seguinte somatória :

$$\begin{aligned} & \sum_{a=1}^{m_2-3} \sum_{b=1}^{m_2-a-2} \sum_{c=1}^{m_2-a-b-1} 1 = \sum_{a=1}^{m_2-3} \sum_{b=1}^{m_2-a-2} (m_2 - a - b - 1) = \\ & = (m_2 - a - 2) + \dots + (1) = \sum_{a=1}^{m_2-3} \sum_{k=1}^{m_2-a-2} k = \\ & = \sum_{a=1}^{m_2-3} (m_2 - a - 1) \cdot (m_2 - a - 2) / 2 = \sum_{a=1}^{m_2-3} \binom{m_2-a-1}{2} = \\ & = \binom{m_2-2}{2} + \dots + \binom{2}{2} = \sum_{h=2}^{m_2-2} \binom{h}{2} \end{aligned}$$

Utilizando (A1.1) temos que :

$$\sum_{h=2}^{m_2-2} \binom{h}{2} = \binom{m_2-1}{3} \quad (A2.10)$$

Portanto, de (A2.9) e (A2.10) existe um total de :

$$\binom{m_2 - 1}{3} \cdot \binom{m_1}{4} \quad (\text{A2.11})$$

resultados diferentes que satisfazem a condição da soma dos quatro valores positivos ser igual a m_2 . Logo, usando (A2.8) e (A2.11), conclui-se que a probabilidade de se obter $(m_1 - 4)$ zeros é a seguinte :

$$\begin{aligned} P \{ (m_1 - 4) \text{ zeros} \} &= \\ &= \binom{m_2 - 1}{3} \cdot \binom{m_1}{4} \cdot P \left[m_{2i} = 0 \right]^{m_1 - 4} \cdot P \left[m_{2j} = 1 \right]^4 \cdot \left(\frac{p_2 \cdot q_1}{1 - q_1 \cdot q_2} \right)^{m_2 - 4} \end{aligned} \quad (\text{A2.12})$$

Logo, em geral, desde que $1 \leq k \leq \min \{ m_1, m_2 \}$,

$$\begin{aligned} \text{parece que } P \left[(m_1 - k) \text{ zeros} \right] &= \\ &= \binom{m_2 - 1}{k - 1} \cdot \binom{m_1}{k} \cdot P \left[m_{2i} = 0 \right]^{m_1 - k} \cdot P \left[m_{2j} = 1 \right]^k \cdot \left(\frac{p_2 \cdot q_1}{1 - q_1 \cdot q_2} \right)^{m_2 - k} \end{aligned} \quad (\text{A2.13})$$

Demonstração

Seja \tilde{m}_2 o vetor m_1 -dimensional dos resultados obtidos, dos quais $(m_1 - k)$ são "zeros" e os restantes k valores são

positivos e tais que a soma deles seja igual a m_2 .

$$\text{Exemplo : } \underset{\sim}{m_2} = (a_1, a_2, \dots, a_k, 0, \dots, 0)$$

$$\begin{aligned} P(\underset{\sim}{m_2}) &= \left\{ \prod_{i=1}^k P[m_{2i} = a_i] \right\} \cdot \left\{ \prod_{i=k+1}^{m_1} P[m_{2i} = 0] \right\} = \\ &= \prod_{i=1}^k \left\{ P(m_{2i} = 1) \cdot \left(\frac{p_2 \cdot q_1}{1 - q_1 \cdot q_2} \right)^{a_i - 1} \right\} \cdot \left\{ [P(m_{2i} = 0)]^{m_1 - k} \right\} = \\ &= \left[P(m_{2i} = 1) \right]^k \cdot \left(\frac{p_2 \cdot q_1}{1 - q_1 \cdot q_2} \right)^{\sum (a_i - 1)} \cdot [P(m_{2i} = 0)]^{m_1 - k} \end{aligned}$$

$$\text{onde } \sum_{i=1}^k (a_i - 1) = \sum_{i=1}^k a_i - k = m_2 - k$$

Logo :

$$P(\underset{\sim}{m_2}) = [P(m_{2i} = 0)]^{m_1 - k} \cdot [P(m_{2i} = 1)]^k \cdot \left(\frac{p_2 \cdot q_1}{1 - q_1 \cdot q_2} \right)^{m_2 - k}$$

Mas. existem $\binom{m_1}{k}$ formas diferentes de se obter

$(m_1 - k)$ zeros e k valores diferentes de zero. Logo, falta provar que a quantidade de resultados possíveis para se obter com k valores positivos cuja soma seja m_2 , está

dada por :

$$\binom{m_2 - 1}{k - 1}.$$

Deve-se provar que $\forall k, 2 \leq k \leq m_2$, verifica-se :

$$\sum_{a_{k-1}=1}^{m_2 - (k-1)} \sum_{a_{k-2}=1}^{m_2 - a_{k-1} - (k-2)} \dots \sum_{a_1=1}^{m_2 - \sum_{i=2}^{k-1} a_i - 1} 1 = \binom{m_2 - 1}{k - 1}$$

Pelo princípio de Indução Generalizado, basta verificar que essa igualdade é satisfeita para $k=2$, e logo, desde que seja satisfeita para um número qualquer ($k = h$), provar que também satisfaz para o próximo número ($k = h + 1$).

1.- Verifiquemos que satisfaz para $k = 2$.

$$\sum_{a_1=1}^{m_2 - 1} 1 = m_2 - 1 = \binom{m_2 - 1}{1} \quad \blacksquare$$

2.- Provaremos que a igualdade é satisfeita para $k=h+1$ dado que ela é satisfeita para $k=h$.

hipótesis :

$$\sum_{a_{h-1}=1}^{m_2 - (h-1)} \dots \sum_{a_1=1}^{m_2 - \sum_{i=2}^{h-1} a_i - 1} 1 = \binom{m_2 - 1}{h - 1}$$

tesis :

$$\sum_{a_h=1}^{m_2-h} \sum_{a_{h-1}=1}^{m_2-a_h-(h-1)} \dots \sum_{a_1=1}^{m_2-\sum_{i=2}^h a_i - 1} 1 = \binom{m_2-1}{h}$$

Demostração :

Considerando que :

$$m_2 - \sum_{i=2}^h a_i - 1 = m_2 - a_h - \sum_{i=2}^{h-1} a_i - 1$$

e supondo a hipótese verdadeira, temos que :

$$\sum_{a_{h-1}=1}^{m_2-a_h-(h-1)} \dots \sum_{a_1=1}^{m_2-a_h-\sum_{i=2}^{h-1} a_i - 1} 1 = \binom{m_2-a_h-1}{h-1}$$

Logo :

$$\sum_{a_h=1}^{m_2-h} \sum_{a_{h-1}=1}^{m_2-a_h-(h-1)} \dots \sum_{a_1=1}^{m_2-a_h-\sum_{i=2}^{h-1} a_i - 1} 1 = \sum_{a_h=1}^{m_2-h} \binom{m_2-a_h-1}{h-1} \Rightarrow$$

$$\sum_{a_h=1}^{m_2-h} \dots \sum_{a_1=1}^{m_2-\sum_{i=2}^h a_i-1} 1 = \binom{m_2-2}{h-1} + \dots + \binom{h-1}{h-1} =$$

$$= \sum_{j=h-1}^{m_2-2} \binom{j}{h-1} = \binom{m_2-1}{h} \quad (\text{utilizando A1.1.})$$

■ q.e.d.

Logo, $\forall k, 2 \leq k \leq m_2$, verifica-se :

$$\sum_{a_{k-1}=1}^{m_2-(k-1)} \dots \sum_{a_1=1}^{m_2-\sum_{i=2}^{k-1} a_i-1} 1 = \binom{m_2-1}{k-1} \quad \blacksquare$$

Logo para cada uma das $\binom{m_1}{k}$ combinações que existem para se obter (m_1-k) "zeros" e k valores positivos, existem

$\binom{m_2-1}{k-1}$ maneiras diferentes de se obter $\sum_{i=1}^{m_1} a_i = m_2$, e cada

um desses $\binom{m_1}{k} \cdot \binom{m_2-1}{k-1}$ resultados tem a mesma probabilidade de acontecer.

Portanto, sob a condição $\sum a_i = m_2$, para $1 \leq k \leq \min\{m_1, m_2\}$:

$$P\left[(m_1-k) \text{ zeros}\right] = \binom{m_1}{k} \binom{m_2-1}{k-1} \cdot P(m_{21}=0)^{m_1-k} \cdot P(m_{21}=1)^k \cdot \left(\frac{p_2 q_1}{1-q_1 q_2}\right)^{m_2-k}$$

como foi enunciado em (A2.13).

Desde que $m_2 > 0$, $\exists i \in \{1, 2, \dots, m_1\}$ tal que $m_{2i} > 0$, portanto, a máxima quantidade de "zeros" é $(m_1 - 1)$.

A mínima quantidade de "zeros" depende do valor de m_2 , já que $k \leq \min\{m_1, m_2\} \Rightarrow k \leq m_1 \wedge k \leq m_2$. Assim:

. Se $m_2 < m_1$, então $1 \leq k \leq m_2$, logo $m_1 - m_2 \leq m_1 - k \leq m_1 - 1$.
Tem-se então, que a mínima quantidade de "zeros" é $(m_1 - m_2)$.

. Se $m_2 \geq m_1$, então $1 \leq k \leq m_1$, logo $0 \leq m_1 - k \leq m_1 - 1$.

Tem-se então, que a mínima quantidade de "zeros" é 0, ou seja, nenhum "zero".

Definindo $j =$ número de "zeros", é $j = m_1 - k$, sendo k o número de valores positivos, é possível expressar $P(M_2 = m_2)$ como $\sum P\{j \text{ "zeros"}\}$, todas elas correspondientes ao valor de m_2 especificado.

$$\blacksquare \text{ CASO } m_2 < m_1 \Rightarrow m_1 - m_2 \leq j \leq m_1 - 1 \Leftrightarrow 1 \leq k \leq m_2$$

$$P\left[M_2 = m_2\right] = \sum_{j=m_1-m_2}^{m_1-1} P(j \text{ "zeros"}) = \sum_{k=1}^{m_2} P[(m_1 - k) \text{ "zeros"}] =$$

$$= \sum_{k=1}^{m_2} \binom{m_1}{k} \binom{m_2-1}{k-1} . P(m_{21}=0)^{m_1-k} . P(m_{21}=1)^k . \left(\frac{p_2 q_1}{1-q_1 q_2} \right)^{m_2-k} \quad (A2.14)$$

■ CASO $m_2 \geq m_1 \Rightarrow 0 \leq j \leq m_1 - 1 \Leftrightarrow 1 \leq k \leq m_1$

$$P[M_2 = m_2] = \sum_{j=0}^{m_1-1} P(j \text{ "zeros" }) = \sum_{k=1}^{m_1} P[(m_1 - k) \text{ "zeros" }] =$$

$$= \sum_{k=1}^{m_1} \binom{m_1}{k} \binom{m_2-1}{k-1} . P(m_{21}=0)^{m_1-k} . P(m_{21}=1)^k . \left(\frac{p_2 q_1}{1-q_1 q_2} \right)^{m_2-k} \quad (A2.15)$$

Note-se que estes dois resultados , (A2.14) e (A2.15), diferem apenas no limite superior da somatória. Logo, é possível escrever eles em apenas uma expressão .

Definindo $M_{\min} = \min \{ m_1 , m_2 \}$, tem-se :

$$P[M_2 = m_2] = \sum_{k=1}^{M_{\min}} \binom{m_1}{k} \binom{m_2-1}{k-1} . P(m_{21}=0)^{m_1-k} . P(m_{21}=1)^k . \left(\frac{p_2 q_1}{1-q_1 q_2} \right)^{m_2-k} \quad (A2.16)$$

sendo :

$$P(m_{21} = 0) = \frac{p_1 \cdot q_2}{1 - q_1 \cdot q_2}$$

$$P(m_{21} = 1) = \frac{p_1 \cdot p_2}{(1 - q_1 \cdot q_2)^2}$$

$$\text{Logo, } P \left[M_2 = m_2 \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{M_{\min}} \binom{m_1}{k} \binom{m_2-1}{k-1} \cdot \left(\frac{p_1 q_2}{1 - q_1 q_2} \right)^{m_1-k} \cdot \left(\frac{p_1 p_2}{(1 - q_1 q_2)^2} \right)^k \cdot \left(\frac{p_2 q_1}{1 - q_1 q_2} \right)^{m_2-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{M_{\min}} \binom{m_1}{k} \binom{m_2-1}{k-1} \cdot \frac{p_1^{m_1-k} \cdot p_2^k \cdot q_2^{m_1-k} \cdot q_1^{m_2-k}}{(1 - q_1 \cdot q_2)^{m_1-k + 2k + m_2-k}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{M_{\min}} \binom{m_1}{k} \binom{m_2-1}{k-1} \cdot \frac{(p_1 \cdot q_2)^{m_1-k} \cdot (p_2 \cdot q_1)^k \cdot (q_1 \cdot q_2)^{-k}}{(1 - q_1 \cdot q_2)^{m_1 + m_2}} =$$

$$= \frac{(p_1 \cdot q_2)^{m_1} \cdot (p_2 \cdot q_1)^{m_2}}{(1 - q_1 \cdot q_2)^{m_1 + m_2}} \cdot \sum_{k=1}^{M_{\min}} \binom{m_1}{k} \binom{m_2-1}{k-1} \cdot (q_1 \cdot q_2)^{-k} \quad (\text{A2.17})$$

para $m_2 = 1, 2, 3, \dots$

Logo, por (A2.1) e (A2.17), temos que :

$$P[M_2=m_2] = \begin{cases} \left(\frac{p_1 \cdot q_2}{1 - q_1 \cdot q_2} \right)^{m_1} & m_2 = 0 \\ \frac{(p_1 \cdot q_2)^{m_1} \cdot (p_2 \cdot q_1)^{m_2}}{(1 - q_1 \cdot q_2)^{m_1+m_2}} \sum_{k=1}^{\min(m_1, m_2)} \binom{m_1}{k} \binom{m_2-1}{k-1} (q_1 \cdot q_2)^{-k} & m_2 \geq 1 \end{cases}$$

APÊNDICE 3

DERIVAÇÃO DOS ESTIMADORES DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA

$$L(p_1, p_2) = \binom{n_1-1}{m_1-1} \cdot \binom{n_1}{m_2} \cdot p_1^{m_1} \cdot (1-p_1)^{n_1-m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot (1-p_2)^{n_1-m_2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \ln L &= \ln \left[\binom{n_1-1}{m_1-1} \binom{n_1}{m_2} \right] + m_1 \cdot \ln p_1 + (n_1 - m_1) \cdot \ln (1-p_1) + \\ &+ m_2 \cdot \ln p_2 + (n_1 - m_2) \cdot \ln (1-p_2) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p_1} = m_1 \cdot \frac{1}{p_1} + (n_1 - m_1) \cdot \frac{1}{1-p_1} \cdot (-1)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p_2} = m_2 \cdot \frac{1}{p_2} + (n_1 - m_2) \cdot \frac{1}{1-p_2} \cdot (-1)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p_1} = 0 \Rightarrow \tilde{p}_1 = \frac{m_1}{n_1} \quad \blacksquare$$

q.e.d.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p_2} = 0 \Rightarrow \tilde{p}_2 = \frac{m_2}{n_1} \quad \blacksquare$$

APÊNDICE 4

DERIVAÇÃO DO PONTO DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA RESTRITO A UMA RETA

Consideremos a reta $p_2 = k.p_1$ com $k > 0$, e seja (p_1^*, p_2^*) o ponto de máxima verossimilhança sobre essa reta.

Logo, (p_1^*, p_2^*) deve satisfazer :

$$1.- p_2^* = k.p_1^* \quad (A4.1)$$

$$2.- 0 \leq p_1^* \leq 1 \quad e$$

$$0 \leq p_2^* \leq 1 \Rightarrow 0 \leq k.p_1^* \leq 1 \Rightarrow 0 \leq p_1^* \leq \frac{1}{k}$$

Logo :

$$0 \leq p_1^* \leq \min \{ 1, 1/k \} \quad (A4.2)$$

e portanto:

$$0 \leq p_2^* \leq \min \{ k, 1 \} \quad (A4.3)$$

$$3.- \left. \frac{\partial \ln L(p_1)}{\partial p_1} \right|_{p_1 = p_1^*} = 0 \quad (A4.4)$$

A condição (A4.4) implica na equação quadrática (3.14) cuja solução é :

$$p_1^* = \frac{k.(n_1+m_1)+n_1+m_2 \pm \sqrt{[k.(n_1+m_1)+n_1+m_2]^2 - 8.k.n_1(m_1+m_2)}}{4.k.n_1} \quad (A4.5)$$

onde :

$$[k.(n_1+m_1)+n_1+m_2]^2 - 8.k.n_1.(m_1+m_2) =$$

$$[k.(n_1+m_1) - (n_1+m_2) + 2.(n_1+m_2)]^2 - 8.k.n_1.(m_1+m_2) =$$

$$[k.(n_1+m_1) - (n_1+m_2)]^2 + 4.(n_1+m_2).[k.(n_1+m_1) - (n_1+m_2)] + 4.(n_1+m_2)^2 - 8.k.n_1.(m_1+m_2) =$$

$$[k.(n_1+m_1) - (n_1+m_2)]^2 + 4.k.(n_1+m_2).(n_1+m_1) - 8.k.n_1.(m_1+m_2) =$$

$$[k.(n_1+m_1) - (n_1+m_2)]^2 + 4.k.((n_1+m_2).(n_1+m_1) - 2.n_1(m_1+m_2)) =$$

$$\begin{aligned}
&= [k.(n_1 + m_1) - (n_1 + m_2)]^2 + 4.k.(n_1 - m_2).(n_1 - m_1) \geq \\
&\geq [k.(n_1 + m_1) - (n_1 + m_2)]^2
\end{aligned}$$

Logo , temos que :

$$[k.(n_1 + m_1) + n_1 + m_2]^2 - 8.k.n_1.(m_1 + m_2) \geq [k.(n_1 + m_1) - (n_1 + m_2)]^2$$

e portanto :

$$\sqrt{[k.(n_1 + m_1) + n_1 + m_2]^2 - 8.k.n_1.(m_1 + m_2)} \geq |k.(n_1 + m_1) - (n_1 + m_2)|$$

(A4. 6)

Logo, (A4.5) e (A4.6) implicam nas inequações para $p_1^{* (+)}$ e $p_1^{* (-)}$ dadas a seguir :

$$\begin{aligned}
p_1^{* (+)} &= \frac{k.(n_1 + m_1) + n_1 + m_2 + \sqrt{[k.(n_1 + m_1) + n_1 + m_2]^2 - 8.k.n_1.(m_1 + m_2)}}{4.k.n_1} \geq \\
&\geq \frac{k.(n_1 + m_1) + n_1 + m_2 + |k.(n_1 + m_1) - (n_1 + m_2)|}{4.k.n_1}
\end{aligned}$$

$$\therefore p_1^* (+) \approx \begin{cases} \frac{2.k.(n_1 + m_1)}{4.k.n_1} = \frac{n_1 + m_1}{2.n_1} & \text{se } k \geq \frac{n_1 + m_2}{n_1 + m_1} \\ \frac{2.(n_1 + m_2)}{4.k.n_1} = \frac{n_1 + m_2}{2.n_1.k} & \text{se } k < \frac{n_1 + m_2}{n_1 + m_1} \end{cases}$$

(A4.7)

Mas, analisando (A4.7), observa-se que a condição (A4.2) não é satisfeita para todo valor de k . Logo, isto nos leva a descartar este resultado como solução possível do ponto de máxima verossimilhança.

A expressão de $p_1^* (-)$ obtida de (A4.5) e (A4.6) é a seguinte :

$$p_1^* (-) = \frac{k.(n_1 + m_1) + n_1 + m_2 - \sqrt{[k.(n_1 + m_1) + n_1 + m_2]^2 - 8.k.n_1(m_1 + m_2)}}{4.k.n_1} \leq$$

$$\leq \frac{k.(n_1 + m_1) + n_1 + m_2 - |k.(n_1 + m_1) - (n_1 + m_2)|}{4.k.n_1}$$

$$\therefore p_1^* (-) \leq \begin{cases} \frac{2.k.(n_1 + m_1)}{4.k.n_1} = \frac{n_1 + m_1}{2.n_1} & \text{se } k < \frac{n_1 + m_2}{n_1 + m_1} \\ \frac{2.(n_1 + m_2)}{4.k.n_1} = \frac{n_1 + m_2}{2.n_1.k} & \text{se } k \geq \frac{n_1 + m_2}{n_1 + m_1} \end{cases} \quad (\text{A4.8})$$

Note-se que (A4.8) satisfaz as condições (A4.2) e (A4.3) para qualquer valor de k , por tanto, é mesmo a solução buscada, implicando para $p_2^* (-)$ os seguintes resultados, dependendo do valor de k :

$$p_2^* (-) = k.p_1^* (-) \leq \begin{cases} \frac{n_1 + m_1}{2.n_1} . k & \text{se } k < \frac{n_1 + m_2}{n_1 + m_1} \\ \frac{n_1 + m_2}{2.n_1} & \text{se } k \geq \frac{n_1 + m_2}{n_1 + m_1} \end{cases} \quad (\text{A4.9})$$

Logo, o ponto de máxima verossimilhança sobre a reta $p_2 = k.p_1$ será $p^* = (p_1^*, p_2^*) = (p_1^* (-), p_2^* (-))$ onde $p_1^* (-)$ e $p_2^* (-)$ satisfazem as inequações (A4.8) e (A4.9) respectivamente.

APÊNDICE 5

ESTIMAÇÃO DE p SOB $\phi = 1$

Sob $\phi = 1$, é $p_1 = p_2 = p$. Então a função de verossimilhança $L(p_1, p_2)$, segundo (3.9), é a seguinte:

$$L(p_1, p_2) = \binom{n_1 - 1}{m_1 - 1} \binom{n_1}{m_2} \cdot p^{m_1 + m_2} \cdot (1-p)^{2n_1 - m_1 - m_2}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial p} = \frac{m_1 + m_2}{p} - \frac{2 \cdot n_1 - m_1 - m_2}{1 - p}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial p} = 0 \Rightarrow \tilde{p} = \frac{m_1 + m_2}{2 \cdot n_1} = \frac{1}{2} \left(\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 \right) \quad \blacksquare$$

APÊNDICE 6

Valores de α real para diversos valores de $p_1=p_2=p$,
para cada combinação considerada de m_1 e p .

$m_1 = 1$	$p = 0.01$	γ	0.200	0.240	0.250
		α (%)	1.53	3.08	11.0
	$p = 0.05$	γ	0.200	0.240	0.250
		α (%)	1.51	2.89	7.83
	$p = 0.10$	γ	0.200	0.240	0.250
		α (%)	2.0	2.68	11.68
$p = 0.15$	γ	0.200	0.240	0.250	
	α (%)	2.34	2.57	15.32	
$p = 0.20$	γ	0.200	0.240	0.250	
	α (%)	2.42	2.59	18.59	
$p = 0.25$	γ	0.200	0.240	0.250	
	α (%)	2.50	2.76	21.51	

$m_1 = 2$	$p = 0.30$	γ	0.200	0.240	0.250
		α (%)	2.62	3.02	24.02
	$p = 0.35$	γ	0.200	0.240	0.250
		α (%)	2.93	3.31	26.06
	$p = 0.40$	γ	0.200	0.240	0.250
		α (%)	3.21	3.57	27.53
	$p = 0.45$	γ	0.200	0.240	0.250
		α (%)	3.46	3.75	28.50
	$p = 0.50$	γ	0.200	0.240	0.250
		α (%)	3.63	3.84	28.84
	$p = 0.01$	γ	0.225	0.230	0.240
		α (%)	2.57	4.12	5.64
	$p = 0.05$	γ	0.200	0.210	0.212
		α (%)	3.69	4.82	5.81
	$p = 0.10$	γ	0.170	0.180	0.190
		α (%)	3.76	5.47	5.72

p = 0.15	γ	0.148	0.149	0.150
	α (%)	3.10	5.48	5.48

p = 0.20	γ	0.147	0.148	0.149
	α (%)	4.09	4.27	7.43

p = 0.25	γ	0.130	0.135	0.140
	α (%)	4.91	5.0	5.09

p = 0.30	γ	0.062	0.064	0.065
	α (%)	0.59	5.0	5.08

p = 0.35	γ	0.062	0.064	0.065
	α (%)	0.62	5.84	5.91

p = 0.40	γ	0.062	0.064	0.065
	α (%)	0.66	6.44	6.58

p = 0.45	γ	0.062	0.064	0.065
	α (%)	0.67	6.81	7.06

p = 0.50	γ	0.062	0.064	0.065
	α (%)	0.67	6.92	7.32

$m_1 = 3$

$p = 0.01$	γ	0.120	0.122	0.123
	α (%)	2.33	4.64	7.61

$p = 0.05$	γ	0.111	0.112	0.115
	α (%)	4.67	5.21	7.06

$p = 0.10$	γ	0.100	0.101	0.102
	α (%)	4.64	5.25	5.27

$p = 0.15$	γ	0.092	0.093	0.095
	α (%)	4.70	5.55	5.59

$p = 0.20$	γ	0.082	0.083	0.084
	α (%)	4.11	5.16	5.17

$p = 0.25$	γ	0.075	0.077	0.080
	α (%)	3.79	5.01	5.06

$p = 0.30$	γ	0.075	0.076	0.077
	α (%)	4.43	5.58	5.58

$p = 0.35$	γ	0.075	0.076	0.077
	α (%)	4.76	5.74	5.74

	$p = 0.40$	γ	0.075	0.076	0.077
		α (%)	4.81	5.59	5.59
	$p = 0.45$	γ	0.075	0.076	0.077
		α (%)	4.64	5.25	5.25
	$p = 0.50$	γ	0.090	0.092	0.093
		α (%)	4.97	4.99	5.0
$m_1 = 4$	$p = 0.01$	γ	0.061	0.062	0.065
		α (%)	3.20	6.68	7.74
	$p = 0.05$	γ	0.057	0.058	0.060
		α (%)	4.21	5.03	6.12
	$p = 0.10$	γ	0.050	0.055	0.057
		α (%)	2.99	5.0	5.45
	$p = 0.15$	γ	0.050	0.055	0.057
		α (%)	4.12	5.0	5.08
	$p = 0.20$	γ	0.080	0.090	0.100
		α (%)	4.87	5.0	5.07

$m_1 = 5$	$p = 0.25$	γ	0.110	0.120	0.130
		α (%)	4.84	5.04	5.17
	$p = 0.30$	γ	0.135	0.140	0.145
		α (%)	4.88	5.0	5.09
	$p = 0.35$	γ	0.140	0.145	0.146
		α (%)	4.89	4.98	5.95
	$p = 0.40$	γ	0.140	0.145	0.146
		α (%)	4.88	4.93	6.21
$p = 0.45$	γ	0.140	0.145	0.146	
	α (%)	4.94	4.96	6.45	
$p = 0.50$	γ	0.138	0.139	0.140	
	α (%)	4.82	5.06	5.06	
$p = 0.01$	γ	0.150	0.155	0.156	
	α (%)	4.56	4.72	5.16	
$p = 0.05$	γ	0.180	0.185	0.190	
	α (%)	4.97	4.98	5.0	

p = 0.10	γ	0.180	0.185	0.190
	α (%)	4.8	5.05	5.38

p = 0.15	γ	0.170	0.171	0.172
	α (%)	4.92	4.96	5.11

p = 0.20	γ	0.155	0.160	0.165
	α (%)	4.66	4.99	5.33

p = 0.25	γ	0.149	0.150	0.155
	α (%)	4.83	5.10	5.18

p = 0.30	γ	0.140	0.141	0.142
	α (%)	4.77	5.06	5.06

p = 0.35	γ	0.133	0.137	0.140
	α (%)	4.94	4.96	5.08

p = 0.40	γ	0.130	0.131	0.133
	α (%)	4.86	5.08	5.14

p = 0.45	γ	0.120	0.130	0.131
	α (%)	4.89	5.04	5.21

$m_1 = 6$	$p = 0.50$	γ	0.115	0.120	0.130
		α (%)	4.91	5.05	5.16
	$p = 0.01$	γ	0.136	0.137	0.138
		α (%)	3.62	3.62	8.16
	$p = 0.05$	γ	0.136	0.137	0.138
		α (%)	3.61	3.61	7.52
	$p = 0.10$	γ	0.136	0.137	0.138
		α (%)	3.52	3.52	6.73
	$p = 0.15$	γ	0.136	0.137	0.138
	α (%)	3.54	3.57	6.18	
$p = 0.20$	γ	0.136	0.137	0.138	
	α (%)	3.77	3.80	5.88	
$p = 0.25$	γ	0.136	0.137	0.138	
	α (%)	3.80	3.81	5.43	
$p = 0.30$	γ	0.136	0.137	0.138	
	α (%)	3.85	3.86	5.12	

$m_1 = 7$	$p = 0.35$	γ	0.135	0.137	0.138
		α (%)	4.13	4.13	5.09
	$p = 0.40$	γ	0.135	0.137	0.138
		α (%)	4.55	4.55	5.22
	$p = 0.45$	γ	0.135	0.136	0.138
		α (%)	4.94	5.01	5.45
	$p = 0.50$	γ	0.123	0.124	0.125
	α (%)	4.37	5.26	5.26	
	$p = 0.01$	γ	0.095	0.100	0.150
		α (%)	4.54	5.13	5.13
	$p = 0.05$	γ	0.148	0.149	0.150
		α (%)	4.94	5.04	5.15
	$p = 0.10$	γ	0.160	0.165	0.170
		α (%)	4.93	5.0	5.11
	$p = 0.15$	γ	0.150	0.158	0.160
		α (%)	4.69	5.02	5.05

p = 0.20	γ	0.145	0.148	0.149
	α (%)	4.94	4.97	5.26
p = 0.25	γ	0.135	0.138	0.139
	α (%)	4.87	4.92	5.28
p = 0.30	γ	0.127	0.130	0.135
	α (%)	4.89	4.99	5.39
p = 0.35	γ	0.125	0.126	0.127
	α (%)	4.88	5.17	5.18
p = 0.40	γ	0.120	0.125	0.127
	α (%)	4.90	5.0	5.22
p = 0.45	γ	0.120	0.125	0.127
	α (%)	4.92	5.03	5.20
p = 0.50	γ	0.120	0.125	0.127
	α (%)	5.01	5.08	5.26
$m_1 = 8$ p = 0.01	γ	0.140	0.142	0.145
	α (%)	4.09	4.76	7.48

p = 0.05	γ	0.130	0.131	0.132
	α (%)	4.67	4.94	5.25

p = 0.10	γ	0.120	0.121	0.122
	α (%)	4.81	4.97	5.18

p = 0.15	γ	0.110	0.115	0.120
	α (%)	4.45	4.98	5.29

p = 0.20	γ	0.120	0.125	0.130
	α (%)	4.94	5.05	5.18

p = 0.25	γ	0.140	0.142	0.145
	α (%)	4.97	5.01	5.04

p = 0.30	γ	0.140	0.145	0.150
	α (%)	4.83	4.96	5.27

p = 0.35	γ	0.140	0.142	0.145
	α (%)	4.97	5.01	5.09

p = 0.40	γ	0.131	0.132	0.133
	α (%)	4.58	5.06	5.06

$m_1 = 9$	$p = 0.45$	γ	0.131	0.132	0.133
		α (%)	4.83	5.28	5.28
	$p = 0.50$	γ	0.120	0.130	0.133
		α (%)	4.98	5.13	5.47
	$p = 0.01$	γ	0.140	0.150	0.160
		α (%)	4.94	4.94	5.25
	$p = 0.05$	γ	0.145	0.147	0.150
		α (%)	4.71	4.92	5.20
$p = 0.10$	γ	0.145	0.150	0.160	
	α (%)	4.67	4.72	4.97	
$p = 0.15$	γ	0.145	0.150	0.160	
	α (%)	4.61	4.97	6.05	
$p = 0.20$	γ	0.137	0.140	0.145	
	α (%)	4.72	4.94	5.37	
$p = 0.25$	γ	0.130	0.132	0.135	
	α (%)	4.91	4.94	5.19	

	$p = 0.30$	γ	0.125	0.127	0.130
		α (%)	4.82	4.99	5.17
	$p = 0.35$	γ	0.125	0.130	0.132
		α (%)	4.81	5.0	5.01
	$p = 0.40$	γ	0.137	0.138	0.140
		α (%)	4.90	5.01	5.32
	$p = 0.45$	γ	0.137	0.138	0.140
		α (%)	4.83	4.97	5.43
	$p = 0.50$	γ	0.135	0.137	0.138
		α (%)	4.98	4.98	5.12
$m_1 = 10$	$p = 0.01$	γ	0.130	0.133	0.135
		α (%)	3.93	4.21	6.30
	$p = 0.05$	γ	0.120	0.125	0.130
		α (%)	3.53	5.09	6.04
	$p = 0.10$	γ	0.100	0.117	0.120
		α (%)	2.87	5.05	5.37

p = 0.15	γ	0.130	0.133	0.135
	α (%)	4.89	4.98	5.05

p = 0.20	γ	0.140	0.150	0.200
	α (%)	4.85	4.97	5.67

p = 0.25	γ	0.133	0.140	0.150
	α (%)	4.47	4.68	5.05

p = 0.30	γ	0.133	0.140	0.150
	α (%)	4.62	4.98	5.42

p = 0.35	γ	0.133	0.135	0.140
	α (%)	4.92	4.98	5.26

p = 0.40	γ	0.130	0.132	0.133
	α (%)	4.76	5.08	5.08

p = 0.45	γ	0.130	0.132	0.133
	α (%)	4.75	5.12	5.12

p = 0.50	γ	0.130	0.132	0.133
	α (%)	4.63	5.13	5.13

$m_1 = 15$	$p = 0.05$	γ	0.130	0.135	0.140
		α (%)	4.47	5.44	5.45
	$p = 0.10$	γ	0.140	0.142	0.145
		α (%)	4.92	4.99	5.14
	$p = 0.15$	γ	0.148	0.149	0.150
		α (%)	4.89	4.91	4.92
	$p = 0.20$	γ	0.148	0.149	0.150
		α (%)	4.94	5.03	5.13
$p = 0.25$	γ	0.135	0.140	0.142	
	α (%)	4.91	5.02	5.14	
$p = 0.30$	γ	0.130	0.135	0.140	
	α (%)	4.74	5.05	5.20	
$p = 0.35$	γ	0.135	0.140	0.142	
	α (%)	4.81	5.0	5.21	
$p = 0.40$	γ	0.140	0.142	0.145	
	α (%)	4.91	4.98	5.19	

$m_1 = 20$	$p = 0.45$	γ	0.140	0.141	0.142
		α (%)	4.96	4.96	5.04
	$p = 0.50$	γ	0.135	0.140	0.150
		α (%)	4.77	5.06	5.60
	$p = 0.05$	γ	0.156	0.157	0.160
		α (%)	4.51	5.13	5.16
	$p = 0.10$	γ	0.152	0.154	0.155
		α (%)	4.79	4.94	5.15
	$p = 0.15$	γ	0.135	0.140	0.145
		α (%)	4.61	5.01	5.41
$p = 0.20$	γ	0.130	0.135	0.140	
	α (%)	4.71	5.0	5.21	
$p = 0.25$	γ	0.145	0.150	0.152	
	α (%)	4.90	5.08	5.13	
$p = 0.30$	γ	0.142	0.145	0.150	
	α (%)	4.84	5.09	5.37	

$m_1 = 25$	$p = 0.35$	γ	0.140	0.142	0.145
		α (%)	4.98	5.03	5.23
	$p = 0.40$	γ	0.140	0.142	0.145
		α (%)	4.95	5.06	5.17
	$p = 0.45$	γ	0.140	0.142	0.145
		α (%)	4.86	5.03	5.13
	$p = 0.50$	γ	0.140	0.142	0.145
	α (%)	4.89	5.06	5.24	
	$p = 0.05$	γ	0.143	0.145	0.150
		α (%)	4.13	5.33	5.33
	$p = 0.10$	γ	0.165	0.167	0.168
		α (%)	4.79	4.86	5.49
	$p = 0.15$	γ	0.150	0.160	0.165
		α (%)	4.35	4.99	5.34
	$p = 0.20$	γ	0.142	0.143	0.145
		α (%)	4.95	5.02	5.19

p = 0.25	γ	0.	0.140	0.145
	α (%)		5.09	5.20

p = 0.30	γ	0.140	0.145	0.150
	α (%)	4.77	4.95	5.15

p = 0.35	γ	0.142	0.143	0.145
	α (%)	4.95	4.96	5.08

p = 0.40	γ	0.140	0.142	0.145
	α (%)	4.93	5.02	5.16

p = 0.45	γ	0.140	0.143	0.145
	α (%)	4.88	4.95	5.13

p = 0.50	γ	0.140	0.143	0.145
	α (%)	4.88	4.94	5.17

BIBLIOGRAFIA

BAILEY, B.J.R. (1987). Confidence limits to the risk ratio. *Biometrics* 43 , 201-205

BEDRICK, E.J. (1987). A family of confidence intervals for the ratio of two binomial proportions. *Biometrics* 43 , 993-998

BICKEL, P.J. e DOKSUM, J.A. (1977). *Mathematical Statistics* . San Francisco : Holden Day.

BUHRMAN, J.M. (1977). Tests and confidence intervals for the difference and ratio of two probabilities. *Biometrika* 64 , 160-162

CHIANG, C.L. (1968). *Introduction to Stochastic Processes in Biostatistics* . New York : Wiley .

GART, J.J. (1962). On the combination of relative risks. *Biometrics* 18 , 601-610

GART, J.J. (1985). Approximate tests and interval estimation of the common relative risk in the combination of 2x2 tables. *Biometrika* 72 , 673-677

GART, J.J. e NAM, J. (1988). Approximate intervals estimation of the ratio of binomial parameters : A review and corrections for skewness. *Biometrics* 44 , 323-338

JAMES, B.R. (1981). *Probabilidade : Um curso em nível intermediário*. Rio de Janeiro . I.M.P.A.

KATZ, D., BAPTISTA, J., AZEN, S.P. e PIKE, M.C. (1978). Obtaining confidence intervals for the risk ratio in cohort studies. *Biometrics* 34 , 469-474

KOOPMAN, P.A.R. (1984). Confidence intervals for the ratio of two binomial proportions. *Biometrics* 40 , 513-517

MIETTINEN, O. e NURMINEN, M. (1985). Comparative analysis of two rates. *Statistics in Medicine* 4 , 213-226

NOETHER, G.E. (1957). Two confidence intervals for the ratio of two probabilities and some measures of effectiveness. *Journal of the American Statistical Association* 52 , 36-45

NURMINEN, M. (1981). Asymptotic efficiency of general noniterative estimators of common relative risk. *Biometrika* 68 , 525-530

PETTIGREW, H.M. , GART, J.J. e THOMAS, D.G. (1986). The bias and higher cumulants of the logarithm of a binomial variate. *Biometrika* 73 , 425-435

SANTNER, T.J. e SNELL, M.K. (1980). Small-sample confidence intervals for $p_1 - p_2$ and p_1 / p_2 in 2x2 contingency tables. *Journal of the American Statistical Association* 75 , 386-394

TARONE, R.E. , GART, J.J. e HAUCK, W.W. (1983). On the asymptotic inefficiency of certain noniterative estimators of a common relative risk or odds ratio. *Biometrika* 70 , 519-522

THOMAS, D.G. e GART, J.J. (1977). A table of exact confidence limits for differences and ratios of two proportions and their odds ratios. *Journal of the American Statistical Association* 72 , 73-76

Tsokos, C.P. (1972). *Probability distributions : An introduction to probability theory with applications* . Belmont , Duxbury .

WALTER, S.D. (1975). The distribution of Levin's measure of attributable risk . *Biometrika* 62 , 371-374