RESOLUBILIDADE LOCAL DE ESTRUTURAS LOCALMENTE INTEGRÁVEIS EM VARIEDADES COM BORDO

Luiz Fernando Cassiani Camargo

RESOLUBILIDADE LOCAL DE ESTRUTURAS LOCALMENTE INTEGRÁVEIS EM VARIEDADES COM BORDO

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Luiz Fernando Cassiani Camargo e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 20 de novembro de 1990

Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro

Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a diversas pessoas e instituições que me ajudaram nesta trajetória tão longa. Ao Paulo, meu orientador e amigo de longa data, pela atenção, disponibilidade e, claro, pelas boas idéias, sem as quais esta tese jamais teria saido. À Leilá e Marly por terem sugerido que o Paulo me orientasse. Ao Franco e Richard pela torcida e incentivo. Ao Oscar por ter lido o manuscrito original. À UNICAMP e a todos os professores do IMECC que me acompanharam desde a graduação, em particular ao Mujica, Mario Matos, Torriani, Orlando, Marco Antonio, Engler, Paques, Kiihl, Luiz Paulo e Paulo Brumatti. À UFES e aos colegas do Departamento de Matemática da UFES por terem me liberado por um período longo. À CAPES pelo apoio financeiro. Aos meus pais e pessoas queridas que aguentaram o meu mau humor quando as coisas não iam tão bem e, finalmente, ao Sr. Wilson Góes pelo competente trabalho de datilografia.

Luiz Fernando C. Camargo

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Neste trabalho lidamos com sistemas de campos vetoriais complexos de classe C^∞ em variedades com bordo, denotadas aqui por $\mathcal{M}$. Assumimos que o sistema é localmente integrável, i.e., se este, localmente, é dado pelos campos vetoriais linearmente independentes $L_1, \ldots, L_n$ então existem funções C^∞ $Z_1, \ldots, Z_m$ (chamadas integrais primeiras do sistema) satisfazendo $L_j Z_k = 0$, $dZ_1 \wedge \ldots \wedge dZ_m \neq 0$; $m + n = \dim \mathcal{M}$. Assumimos também que o bordo $\partial\mathcal{M}$ é não-característico para o sistema: isto significa que, em cada ponto de $\partial\mathcal{M}$, pelo menos um dos vetores básicos $L_1, \ldots, L_n$ é transversal ao bordo. Localmente, associamos a estes sistemas complexos diferenciais, C^∞ e distribucionais, determinados pela derivação exterior e consideramos o problema de resolubilidade local, ou seja, a validade ou não do Lema de Poincaré para estes complexos.

Organizamos o texto em três capítulos e três apêndices. Usamos basicamente a notação, já bastante estabelecida, de Treves: [T5] é uma boa referência.

No Capítulo I, através de uma argumentação intrínseca simples, concluimos que, para pontos $\mathrm{p} \in \partial\mathcal{M}$, existem dois casos de naturezas distintas a serem considerados, Proposições 1.1.16 e 1.1.19. Estes casos serão tratados separadamente no Capítulo II. Ainda no Capítulo I obtemos representações locais mais explícitas que, por exemplo, aquela descrita em [T5], que não faz distinção entre os casos mencionados acima. Apresentamos também a noção de forma de Levi em um covetor característico, relacionando-a com a expansão em série de Taylor de integrais primeiras apropriadas do sistema, conforme [T5], e introduzimos os complexos diferenciais já mencionados. Na construção dos complexos distribucionais usamos algumas idéias de Melrose, [M].

Em [A-H], Andreotti e Hill apresentaram uma condição necessária para resolubilidade local do complexo tangencial de Cauchy-Riemann em hipersuperfícies reais S de $\mathbf{C}^n$. O resultado estabelecido foi o seguinte: se a forma de Levi num ponto $\mathrm{p} \in S$ é não-degenerada, tem p autovalores positivos e q autovalores negativos $(p + q = n - 1)$ então o Lema de Poincaré falha em dimensões p e q do complexo no ponto p. Em [A-F-N], Andreotti-Fredricks-Nacinovich estenderam o resultado para quando S não é mais uma hipersuperfície, mas uma subvariedade "genérica" de $\mathbf{C}^n$ (a subvariedade S determinada pelas relações $\rho_1 = \cdots = \rho_k = 0$ é "genérica" se $\overline{\partial}\rho_1 \wedge \ldots \wedge \overline{\partial}\rho_k \neq 0$ em S). Esta extensão foi obtida com uma adaptação do argumento usado por Hörmander para a obtenção de condições necessárias para resolubilidade local de equações diferenciais parciais lineares ([H], Cap.VI). No Capítulo II, usando uma versão adaptada desta técnica, Lema 2.1.1', estendemos este resultado para sistemas, não necessariamente de Cauchy-Riemann, com forma de Levi "fortemente não-degenerada" (veja Seção 1.3 para a definição): Teorema 2.2.1 e Corolário 2.2.17. De maneira quase que idêntica obtemos, para pontos $\mathbf{p} \in \partial\mathcal{M}$, os Teoremas 2.3.1 e 2.3.5. No primeiro, as condições sobre a forma de Levi implicam, no caso de uma hipersuperfície S de uma variedade aberta, na falha do Lema de Poincaré em dimensão q em ambos os lados de S. No segundo, as condições sobre a forma de Levi implicam na falha do lema em dimensão q de um lado (apontamos qual!) e em dimensão $n-q-1$ do outro. Estes dois últimos resultados não poderiam ter sido obtidos, como se poderia imaginar, via Teorema 2.2.1 e a seqüência de Mayer-Vietoris (veja [T5]).

Em [T3], Treves considerou sistemas de campos vetoriais sobredeterminados da forma

$$(*) \qquad L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + \lambda_j(x,t)\frac{\partial}{\partial x}, \qquad j = 1, \ldots, n$$

onde os coeficientes $\lambda_j(x,t)$ são funções real-analíticas (a valores complexos), em abertos de $\mathbf{R}^{n+1}$, satisfazendo as condições de involução $L_j\,\lambda_k = L_k\,\lambda_j$ e demonstrou que a assim chamada Propriedade (P) é a condição exata para a validade do Lema de Poincaré em dimensão 1. A Propriedade (P) pode ser definida usando-se, por exemplo, a única solução analítica do problema de Cauchy $L_j Z = 0$, $j = 1, \ldots, n$, $Z|_{t=0} = x$: a Propriedade (P) é verificada no ponto $\mathbf{p}$ se $\mathbf{p}$ tem uma base de vizinhanças em cada uma das quais as fibras de Z são conexas. A demonstração deste fato se apoia fortemente na teoria de conjuntos analíticos, semianalíticos e subanalíticos. Mas os coeficientes λ_j não precisam ser analíticos para que a Propriedade (P) possa ser definida; usando-se o princípio de invariância local das fibras das integrais primeiras, a Propriedade (P) pode ser formulada para sistemas de classe C^∞ (veja [T4], [B-T2]). Recentemente, Mendoza e Treves (veja [M-T]) demonstraram que a hipótese de analiticidade dos coeficientes pode ser dispensada. No Capítulo III deste trabalho estendemos estes resultados para semi-espaços fechados de $\mathbf{R}^{n+1}$. Assumimos analiticidade, contudo. Por outro lado, acreditamos que as técnicas utilizadas em [C-T] podem ser adaptadas a estruturas com bordo para se demonstrar que a Propriedade (P) é condição necessária para a validade do lema em classe C^∞.

Os resultados obtidos nos Capítulos II e III estão todos relacionados, como é transparente nas demonstrações, com a conectividade das fibras das integrais primeiras do sistema. Para evidenciar isto, no final da Seção 2.2 mostramos que, para complexos determinados por sistemas localmente integráveis do tipo (*) com forma de Levi não degenerada, o não anulamento do $(q-1)$-ésimo espaço de homologia reduzida das fibras das integrais primeiras do sistema determina, a menos de sinal, a assinatura da forma de Levi: esta deverá ser $\pm(n-2q)$.

Finalmente, no Apêndice A, seguindo idéias de Nirenberg em [N], damos um exemplo de um sistema involutivo de campos vetoriais em uma variedade com bordo que não é localmente integrável em um ponto do bordo.

CAPÍTULO I

CONCEITOS BÁSICOS E NOTAÇÕES

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade com bordo, de classe C^∞ e paracompacta. Escrevemos $N = \dim \mathcal{M}$; assim, o bordo de $\mathcal{M}$, $\partial\mathcal{M}$, é uma variedade aberta, de classe C^∞ e dimensão $N-1$.

Denotaremos respectivamente por $T\mathcal{M}$ e $T^*\mathcal{M}$ os fibrados tangente e cotangente de $\mathcal{M}$; eles são fibrados vetoriais, N é a dimensão das fibras, sendo eles próprios variedades com bordo de classe C^∞. Por $\mathbf{C}T\mathcal{M}$ e $\mathbf{C}T^*\mathcal{M}$ denotaremos suas respectivas complexificações.

O fibrado tangente do bordo, $T\partial\mathcal{M}$, é um subfibrado hiperplano de $T\mathcal{M}$. Ao ortogonal de $T\partial\mathcal{M}$ em $T^*\mathcal{M}$, (com respeito à dualidade entre vetores tangentes e cotangentes), nos referiremos como o fibrado conormal do bordo, $N^*\partial\mathcal{M}$, que é um fibrado de linhas sobre $\partial\mathcal{M}$. Analogamente, com prefixos $\mathbf{C}$, denotaremos as respectivas complexificações.

1.1 - Estruturas involutivas com bordo

1.1.0 Definição. Uma *estrutura involutiva (ou formalmente integrável)* sobre a variedade com bordo $\mathcal{M}$ é o dado de um subfibrado vetorial complexo $\mathcal{V}$ de $\mathbf{C}T\mathcal{M}$ satisfazendo as duas propriedades seguintes:

(1.1.1) Quaisquer que sejam as seções locais de classe C^∞ L_1 e L_2 de $\mathcal{V}$, o colchete de Lie $[L_1, L_2]$ também é uma seção local de $\mathcal{V}$

(1.1.2) $(\mathcal{V}|_{\partial\mathcal{M}}) \cap \mathbf{C}T\partial\mathcal{M}$ é um fibrado vetorial sobre $\partial\mathcal{M}$.

A propriedade (1.1.1) é conhecida como a *propriedade de Frobenius*.

Existe uma descrição dual da estrutura precedente. A dualidade a que nos referimos é aquela entre vetores tangentes (valores de campos vetoriais num dado ponto) e vetores cotangentes (valores de formas diferenciais no mesmo ponto). O ortogonal, no sentido desta dualidade, do subfibrado vetorial $\mathcal{V}$ de $\mathbf{C}T\mathcal{M}$ é um subfibrado vetorial do fibrado cotangente $\mathbf{C}T^*\mathcal{M}$ de $\mathcal{M}$, que denotaremos sempre por T'; escrevemos $T' = \mathcal{V}^\perp$, $\mathcal{V} = T'^\perp$. A dimensão das fibras de $\mathcal{V}$ será n, o *posto* da estrutura de $\mathcal{M}$, e a dimensão das fibras de T', m, o *coposto* da estrutura.

1.1.3 Definição. Diremos que um subfibrado T' de $\mathbf{C}T^*\mathcal{M}$ é *fechado* se dada qualquer seção C^∞ φ de T' sobre um subconjunto aberto Ω de $\mathcal{M}$ todo ponto $\mathrm{p} \in \Omega$ tem uma vizinhança aberta $\Omega_{\mathbf{p}} \subset \Omega$ sobre a qual existem seções C^∞ de T', $\theta_1, \ldots, \theta_m$ e igual número de formas diferenciais C^∞ $\psi_1, \ldots, \psi_m$ tais que, em $\Omega_{\mathbf{p}}$

$$d\varphi = \theta_1 \wedge \psi_1 + \cdots + \theta_m \wedge \psi_m.$$

1.1.4. Proposição. O subfibrado vetorial $\mathcal{V}$ de $\mathbf{C}T\mathcal{M}$ tem a propriedade de Frobenius se, e somente se, o subfibrado vetorial $T' = \mathcal{V}^\perp$ de $\mathbf{C}T^*\mathcal{M}$ é fechado.

Demonstração: Segue facilmente da identidade

$$\langle d\varphi, \theta_1 \wedge \theta_2 \rangle = \theta_1 \langle \varphi, \theta_2 \rangle - \theta_2 \langle \varphi, \theta_1 \rangle - \langle \varphi, [\theta_1, \theta_2] \rangle$$

onde $\langle\ ,\ \rangle$ é o colchete de dualidade entre p-vetores e p-covetores, φ forma diferencial complexa e θ_1, θ_2 campos vetoriais complexos em algum subconjunto aberto de $\mathcal{M}$. ∎

Por dualidade (1.1.2) é equivalente a

(1.1.3) $\quad (T'|_{\partial\mathcal{M}}) + \mathbf{C}N^*\partial\mathcal{M}$ é um fibrado vetorial sobre $\partial\mathcal{M}$.

Neste trabalho chamaremos tanto $\mathcal{V}$ como T' de o fibrado da estrutura involutiva de $\mathcal{M}$. Para diferenciá-los chamaremos $\mathcal{V}$ de o *fibrado tangente* da estrutura e T' o *fibrado cotangente* da estrutura.

Note que (1.1.2) é equivalente a

(1.1.4) $\quad (\mathcal{V}|_{\partial\mathcal{M}}) + \mathbf{C}T\partial\mathcal{M}$ é um fibrado vetorial sobre $\partial\mathcal{M}$.

Por dualidade em (1.1.4) temos que (1.1.2), (1.1.3) e (1.1.4) são equivalentes a

(1.1.5) $\quad (T'|_{\partial\mathcal{M}}) \cap \mathbf{C}N^*\partial\mathcal{M}$ é um fibrado vetorial sobre $\partial\mathcal{M}$.

1.1.6 Proposição. Uma das duas seguintes propriedades mutuamente excludentes vale:

(1.1.7) $$(\mathcal{V}|_{\partial\mathcal{M}}) + \mathbf{C}T\partial\mathcal{M} = \mathbf{C}T\mathcal{M}|_{\partial\mathcal{M}}$$

(1.1.8) $$\mathcal{V}|_{\partial\mathcal{M}} \subset \mathbf{C}T\partial\mathcal{M}.$$

Demonstração: Imediata. ∎

Agora (1.1.7) é equivalente a

(1.1.9)
$$\mathbb{C}N^*\partial\mathcal{M} \not\subset T'|_{\partial\mathcal{M}}$$

enquanto que (1.1.8) é equivalente a

(1.1.10)
$$\mathbb{C}N^*\partial\mathcal{M} \subset T'|_{\partial\mathcal{M}}.$$

Denotaremos por T^o a intersecção de T' com o fibrado cotangente real $T^*\mathcal{M}$; T^o é o *conjunto característico* da estrutura. Vemos então que (1.1.7) e (1.1.9) são equivalentes a

(1.1.11)
$$N^*\partial\mathcal{M} \not\subset T^o|_{\partial\mathcal{M}}$$

enquanto que (1.1.8) e (1.1.10) são equivalentes a

(1.1.12)
$$N^*\partial\mathcal{M} \subset T^o|_{\partial\mathcal{M}}.$$

1.1.13 Definição. Diremos que o bordo $\partial\mathcal{M}$ é *não-característico* com respeito à estrutura de $\mathcal{M}$ se vale (1.1.9). Caso contrário, se vale (1.1.10), diremos que $\partial\mathcal{M}$ é *totalmente-característico.*

Observe agora que, em qualquer um dos casos, a aplicação natural de restrição

(1.1.14)
$$\pi: \mathbb{C}T^*\mathcal{M}|_{\partial\mathcal{M}} \to \mathbb{C}T^*\partial\mathcal{M}$$

cujo núcleo é $\mathbb{C}N^*\partial\mathcal{M}$, aplica $T'|_{\partial\mathcal{M}}$ sobre um subfibrado vetorial $T'_{\partial\mathcal{M}}$ de $\mathbb{C}T^*\partial\mathcal{M}$; $T'_{\partial\mathcal{M}}$ define uma estrutura involutiva sobre $\partial\mathcal{M}$ à qual nos referiremos como *a estrutura involutiva em $\partial\mathcal{M}$ induzida pela estrutura de $\mathcal{M}$.*

O bordo $\partial\mathcal{M}$ é não-característico se, e somente se, a aplicação (1.1.14) induz um isomorfismo $T'_{\partial\mathcal{M}} \simeq T'|_{\partial\mathcal{M}}$; o bordo $\partial\mathcal{M}$ é totalmente característico se, e somente se, a aplicação (1.1.14) induz um isomorfismo $T'_{\partial\mathcal{M}} \simeq T'|_{\partial\mathcal{M}}/\mathbb{C}N^*\partial\mathcal{M}$. Quando $\partial\mathcal{M}$ é não-característico a dimensão das fibras de $T'_{\partial\mathcal{M}}$ é igual a m e é igual a $m-1$ quando $\partial\mathcal{M}$ é totalmente característico.

Seja σ uma função C^∞ em algum subconjunto aberto Ω de $\mathcal{M}$ tal que $\partial\mathcal{M} \cap \Omega \neq \phi$ é definido por $\sigma = 0$ e tal que $d\sigma \neq 0$ em todo ponto de Ω. Então $d\sigma$ gera $\mathbb{C}N^*\partial\mathcal{M}$ em

$\partial\mathcal{M} \cap \Omega$. Dizer que $\partial\mathcal{M}$ é não característico é equivalente a dizer que $d\sigma \notin T'$ em todo ponto de $\partial\mathcal{M} \cap \Omega$, enquanto dizer que $\partial\mathcal{M}$ é totalmente característico é equivalente a dizer que $d\sigma$ é uma seção de T' sobre $\partial\mathcal{M} \cap \Omega$.

Denotaremos por $\mathcal{V}_{\partial\mathcal{M}}$ o fibrado tangente da estrutura involutiva de $\partial\mathcal{M}$ induzida pela estrutura de $\mathcal{M}$; $\mathcal{V}_{\partial\mathcal{M}}$ é o ortogonal de $T'_{\partial\mathcal{M}}$ em $\mathbf{C}T\partial\mathcal{M}$. Assim, $\mathcal{V}_{\partial\mathcal{M}} = \mathcal{V}|_{\partial\mathcal{M}} \cap \mathbf{C}T\partial\mathcal{M}$. Quando $\partial\mathcal{M}$ é não característico a dimensão das fibras de $\mathcal{V}_{\partial\mathcal{M}}$ é igual a $n-1$ e é igual a n quando $\partial\mathcal{M}$ é totalmente característico. Sobre $\partial\mathcal{M} \cap \Omega$ (veja acima) as seções de $\mathcal{V}_{\partial\mathcal{M}}$ são os campos vetoriais que são simultaneamente ortogonais a $T'|_{\partial\mathcal{M}}$ e a $d\sigma$.

1.1.15 Definição. Diremos que a estrutura involutiva de $\mathcal{M}$ é *localmente integrável* se todo ponto de $\mathcal{M}$ tem uma vizinhança aberta sobre a qual T' é gerado por formas diferenciais exatas.

É imediato que se T' é um subfibrado vetorial de $\mathbf{C}T^*\mathcal{M}$ localmente gerado por diferenciais exatos então T' é fechado. Por outro lado, nem toda estrutura involutiva com bordo é localmente integrável. No Apêndice A damos um exemplo de uma estrutura involutiva em $\mathbf{R}^2 \times \overline{\mathbf{R}}_+$ que não é localmente integrável em nenhuma vizinhança da origem.

Tudo o que foi dito aqui na categoria C^∞ pode ser repetido na "categoria analítica"; analítica aqui significa real-analítica. Se $\mathcal{M}$ é uma variedade com bordo de classe C^ω os fibrados $\mathcal{V}$ e T' da estrutura podem ser tomados analíticos, i.e., localmente, eles são gerados por campos vetoriais e formas diferenciais analíticas. Diremos então que $\mathcal{M}$ está munida de uma estrutura involutiva (ou formalmente integrável) analítica. Se, localmente, T' é gerado por diferenciais de funções analíticas, (a valores complexos), diremos que $\mathcal{M}$ está munida de uma estrutura localmente integrável analítica; desnecessário dizer aqui que por uma função analítica em um subconjunto aberto de $\mathcal{Z} = \mathbf{R}^{N-1} \times \overline{\mathbf{R}}_+$ entendemos uma função que se estende analiticamente a um subconjunto aberto de $\mathbf{R}^N$.

No restante desta seção assumiremos que o bordo $\partial\mathcal{M}$ de $\mathcal{M}$ é não-característico. Então a aplicação (1.1.14) induz um isomorfismo

$$\Theta\colon T'|_{\partial\mathcal{M}} \to T'_{\partial\mathcal{M}}.$$

Para cada ponto $\mathbf{p} \in \partial\mathcal{M}$ o espaço característico $T^{\circ}_{\mathbf{p}}$ da estrutura de $\mathcal{M}$ no ponto $\mathbf{p}$ se aplica linear e injetivamente sobre o espaço característico $(T_{\partial\mathcal{M}})^{\circ}_{\mathbf{p}}$, da estrutura em $\partial\mathcal{M}$ induzida pela estrutura de $\mathcal{M}$, no ponto $\mathbf{p}$. Mas esta injeção não é em geral uma sobrejeção; então, via Θ^{-1}, vamos identificar $(T_{\partial\mathcal{M}})^{\circ}_{\mathbf{p}}$ com o subespaço vetorial real $H_{\mathbf{p}} = \Theta^{-1}((T_{\partial\mathcal{M}})^{\circ}_{\mathbf{p}})$ de $T'_{\mathbf{p}}$.

1.1.16 Proposição. Uma das duas seguintes propriedades mutuamente excludentes vale

$$H_{\mathbf{p}} = T^o_{\mathbf{p}} \tag{1.1.17}$$

$$H_{\mathbf{p}} \underset{\neq}{\supset} T^o_{\mathbf{p}}; \text{ neste caso } \dim H_{\mathbf{p}} = \dim T^o_{\mathbf{p}} + 1. \tag{1.1.18}$$

Demonstração: Se $\theta \in H_{\mathbf{p}}$, $\Theta(\theta) = \pi(\theta) = \pi(\operatorname{Re}\theta) + i\pi(\operatorname{Im}\theta) \in (T_{\partial\mathcal{M}})^o_{\mathbf{p}}$. Logo, $\pi(\operatorname{Im}\theta) = 0$, ou seja, $\operatorname{Im}\theta \in (N^*\partial\mathcal{M})_{\mathbf{p}}$. Agora suponha que $\theta \in H_{\mathbf{p}} \setminus T^o_{\mathbf{p}}$; então $\operatorname{Im}\theta \neq 0$ e se $\omega \in H_{\mathbf{p}}$, $\operatorname{Im}\omega = c\operatorname{Im}\theta$ para algum $c \in \mathbf{R}$. Assim, $\omega - c\theta \in T^o_{\mathbf{p}}$. ∎

1.1.19 Proposição. A condição (1.1.17) é equivalente a

$$(\mathbf{C}N^*\partial\mathcal{M})_{\mathbf{p}} \not\subset T'_{\mathbf{p}} + \overline{T}'_{\mathbf{p}} \tag{1.1.20}$$

e a condição (1.1.18) é equivalente a

$$(\mathbf{C}N^*\partial\mathcal{M})_{\mathbf{p}} \subset T'_{\mathbf{p}} + \overline{T}'_{\mathbf{p}}. \tag{1.1.21}$$

$\overline{T}'$ indica o fibrado vetorial obtido de T' por conjugação complexa.

Demonstração: Suponha que vale (1.1.17) e tome $\theta \in (N^*\partial\mathcal{M})_{\mathbf{p}} \cap (T'_{\mathbf{p}} + \overline{T}'_{\mathbf{p}})$. Se $\theta = \omega + \overline{\omega}$ com $\omega \in T'_{\mathbf{p}}$,

$$i\omega|_{T\partial\mathcal{M}} = i\operatorname{Re}\omega|_{T\partial\mathcal{M}} - \operatorname{Im}\omega|_{T\partial\mathcal{M}} = -\operatorname{Im}\omega|_{T\partial\mathcal{M}}$$

de modo que $i\omega \in T^o_{\mathbf{p}}$ e portanto $\operatorname{Re}\omega = 0$, ou seja, $\theta = 0$.

Agora suponha que vale (1.1.18) e tome $\omega \in H_{\mathbf{p}} \setminus T^o_{\mathbf{p}}$. Podemos escrever $\omega = \omega_o + i\theta_o$ onde $\omega_o \in (T^*\mathcal{M})_{\mathbf{p}}$ e $\theta_o \in (N^*\partial\mathcal{M})_{\mathbf{p}}$, $\theta_o \neq 0$. Então $\overline{\omega} = \omega_o - i\theta_o$ e portanto $\theta_o = \omega_1 + \overline{\omega}_1$ onde $\omega_1 = \frac{1}{2i}\omega \in T'_{\mathbf{p}}$. ∎

1.1.22 Corolário. As condições (1.1.17) e (1.1.20) são equivalentes a

$$(\mathcal{V} \cap \overline{\mathcal{V}})_{\mathbf{p}} \not\subset (\mathbf{C}T\partial\mathcal{M})_{\mathbf{p}} \tag{1.1.23}$$

e as condições (1.1.18) e (1.1.21) são equivalentes a

$$(\mathcal{V} \cap \overline{\mathcal{V}})_{\mathbf{p}} \subset (\mathbf{C}T\partial\mathcal{M})_{\mathbf{p}}. \tag{1.1.24}$$

Demonstração: O resultado segue por dualidade. ∎

1.1.25 Corolário. As condições (1.1.17), (1.1.20) e (1.1.23) são equivalentes a

$$\mathcal{V}_{\mathbf{p}}^{o} \not\subset (T\partial\mathcal{M})_{\mathbf{p}} \tag{1.1.26}$$

e as condições (1.1.18), (1.1.21) e (1.1.24) são equivalentes a

$$\mathcal{V}_{\mathbf{p}}^{o} \subset (T\partial\mathcal{M})_{\mathbf{p}}. \tag{1.1.27}$$

Aqui $\mathcal{V}_{\mathbf{p}}^{o} = \mathcal{V}_{\mathbf{p}} \cap (T\mathcal{M})_{\mathbf{p}}$.

Demonstração: Óbvia. ∎

1.2 - Representações locais

Procuraremos agora obter representações locais especiais da estrutura localmente integrável de $\mathcal{M}$ onde $\partial\mathcal{M}$ é (parte de) um hiperplano em $\mathbf{R}^N$. Vamos nos reportar aqui tão somente ao caso em que $\partial\mathcal{M}$ é não-característico, que é o nosso interesse neste trabalho. Raciocinaremos numa vizinhança aberta Ω de um ponto $\mathbf{p} \in \partial\mathcal{M}$ reduzindo esta vizinhança tantas vezes quantas forem necessárias.

Começamos escolhendo uma função real σ de classe C^∞ em Ω tal que $\Omega \cap \partial\mathcal{M}$ é definido por $\sigma = 0$ e tal que $d\sigma \neq 0$ em todo ponto de Ω. Por hipótese, existem m funções de classe C^∞ $Z_1, \ldots, Z_m$ cujos diferenciais formam uma base de T' em Ω; podemos assumir que estas funções se anulam em $\mathbf{p}$. Como $\partial\mathcal{M}$ é não-característico, $d\sigma \wedge dZ_1 \wedge \ldots \wedge dZ_m \neq 0$ sobre $\Omega \cap \partial\mathcal{M}$. Após uma substituição $\mathbf{C}$-linear podemos assumir também que

$$d\sigma \wedge d(\operatorname{Re} Z_1) \wedge \ldots \wedge d(\operatorname{Re} Z_m) \neq 0$$

e as funções $\operatorname{Re} Z_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ assim como σ podem ser tomadas como parte de um sistema de coordenadas em Ω. Fazemos então $t_n = \sigma$ e selecionamos $n-1$ funções reais adicionais $t_1, \ldots, t_{n-1}$ de classe C^∞, se anulando em $\mathbf{p}$, tais que $dt_1, \ldots, dt_{n-1}, dt_n$ geram em Ω um complementar de T' em $\mathbf{C}T^*\mathcal{M}$. Escrevemos $x_j = \operatorname{Re} Z_j$; assim $Z_j = x_j + i\phi_j(x,t)$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $t = (t_1, \ldots, t_n)$ $\phi_j|_{\mathbf{p}} = 0$. Façamos agora a matriz $\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^{-1}\Big|_{\mathbf{p}}$ agir no m-vetor $Z = (Z_1, \ldots, Z_m) : Z' = \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^{-1}\Big|_{\mathbf{p}} .Z$. Temos

$$Z_j' = x_j + R_j(x,t) + i\varphi_j(x,t)$$

onde $\varphi_j|_{\mathrm{p}} = 0$, $d_x\varphi_j|_{\mathrm{p}} = 0$ e $R_j = O(|x|^2 + |t|)$ $(j = 1, \ldots, m)$.

Fazemos então a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} x'_j &= x_j + R_j(x,t) \qquad & j &= 1, \ldots, m \\ t'_\ell &= t_\ell & \ell &= 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Com isto, temos provada a seguinte proposição:

1.2.1 Proposição. Seja $\mathrm{p} \in \partial\mathcal{M}$. Existe um sistema de coordenadas U em torno de p onde U é uma vizinhança aberta da origem em $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{n-1} \times \overline{\mathbf{R}}_+$ (aqui escrevemos as coordenadas como (x, t, t_n), $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $t = (t_1, \ldots, t_{n-1})$), tal que a origem corresponde ao ponto p e, em U, T' é gerado pelos diferenciais das funções

$$z_j = x_j + i\,\phi_j(x,t) \qquad j = 1, \ldots, m$$

onde cada ϕ_j é uma função real C^∞ com ϕ_j e $d_x\,\phi_j$ se anulando na origem, $\partial\mathcal{M}$ é definido pela relação $t_n = 0$ e $dz_1, \ldots, dz_m, dt_1, \ldots, dt_n$ é uma base de $\mathbf{C}T^*\mathcal{M}$.

Usaremos a Proposição 1.2.1 no Capítulo III. Entretanto, no Capítulo II necessitaremos de representações locais mais sensíveis, que façam clara distinção entre os casos $(\mathbf{C}N^*\partial\mathcal{M})_{\mathrm{p}} \subset T'_{\mathrm{p}} + \overline{T}'_{\mathrm{p}}$ e $(\mathbf{C}N^*\partial\mathcal{M})_{\mathrm{p}} \not\subset T'_{\mathrm{p}} + \overline{T}'_{\mathrm{p}}$ (veja Seção 1.1). Para isto alguns fatos de álgebra linear real/complexa nos serão úteis:

Seja E um subespaço vetorial complexo de $\mathbf{C}^N$, $\overline{E}$ o seu conjugado complexo. Existe então um subespaço vetorial (complexo) E_1 de E tal que

$$E = (E \cap \overline{E}) \oplus E_1. \tag{1.2.1}$$

Obviamente $E \cap \overline{E}_1 = 0$ de modo que temos

$$E + \overline{E} = E \oplus \overline{E}_1 = (E \cap \overline{E}) \oplus E_1 \oplus \overline{E}_1. \tag{1.2.2}$$

Se $E^o = E \cap \mathbf{R}^N$ então $E \cap \overline{E} = E^o + (iE^o)$ ou, equivalentemente,

$$E \cap \overline{E} = E^o \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{C}. \tag{1.2.3}$$

Suponha agora que existe um vetor real distinto $\theta \in (E + \overline{E}) \setminus E$ pelo qual temos um interesse especial (quem é este vetor ficará claro nas aplicações). De (1.2.2) e (1.2.3) $\theta = \omega + v + \overline{v}$ onde $\omega \in E^o$ e $v \in E^1$; assim $\theta = v_1 + \overline{v}_1$ onde $v_1 = \frac{1}{2}\omega + v \in E \setminus (E \cap \overline{E})$.

Isto mostra que quando tomamos o subespaço vetorial E_1 de E satisfazendo (1.2.1) poderíamos tê-lo escolhido de forma que E_1 satisfizesse ainda

(1.2.4) $$\theta \in E_1 \oplus \overline{E}_1.$$

Vamos então assumir que assim o fizemos na situação hipotética explicada acima. Façamos agora $\nu = \dim_{\mathbf{C}} E_1 = \dim_{\mathbf{C}} \overline{E}_1$ e $d = \dim_{\mathbf{R}} E^o = \dim_{\mathbf{C}} E \cap \overline{E}$. Seja $\{e_1, \ldots, e_\nu\}$ uma base de E_1; então $\{\overline{e}_1, \ldots \overline{e}_\nu\}$ é uma base de $\overline{E}_1$. Tome uma base qualquer $\{e_{\nu+1}, \ldots, e_{\nu+d}\}$ de E^o para obter uma base de E consistindo dos vetores $e_1, \ldots, e_\nu, e_{\nu+1}, \ldots, e_{\nu+d}$ (portanto, $m = \dim_{\mathbf{C}} E = \nu + d$) tais que

$$e_{\nu+1}, \ldots, e_{\nu+d} \text{ são reais}$$
$$e_1, \ldots, e_\nu, e_{\nu+1}, \ldots, e_{\nu+d}, \overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_\nu \text{ são } LI \text{ sobre } \mathbf{C}.$$

Aplicamos agora estas considerações às fibras de $T'_{\mathbf{p}}$: substituimos $\mathbf{C}^N$ por $(\mathbf{C}T^*\mathcal{M})_{\mathbf{p}}$, $\mathbf{R}^N$ por $(T^*\mathcal{M})_{\mathbf{p}}$ e E por $T'_{\mathbf{p}}$. No caso em que $(\mathbf{C}N^*\partial\mathcal{M})_{\mathbf{p}} \subset T'_{\mathbf{p}} + \overline{T}'_{\mathbf{p}}$, como $\partial\mathcal{M}$ é não-característico, podemos tomar θ como qualquer covetor não nulo em $(N^*\partial\mathcal{M})_{\mathbf{p}}$; no caso em que $(\mathbf{C}N^*\partial\mathcal{M})_{\mathbf{p}} \not\subset T'_{\mathbf{p}} + \overline{T}'_{\mathbf{p}}$ não temos interesse especial em nenhum vetor em $(T'_{\mathbf{p}} + \overline{T}'_{\mathbf{p}}) \setminus T'_{\mathbf{p}}$. Em ambos os casos obtemos então uma base $\{e_1, \ldots, e_\nu, e_{\nu+1}, \ldots, e_{\nu+d}\}$ de $T'_{\mathbf{p}}$ com

$$e_{\nu+1}, \ldots, e_m \in T^o_{\mathbf{p}}$$
$$e_1 \wedge \ldots \wedge e_\nu \wedge e_{\nu+1} \wedge \ldots \wedge e_m \wedge \overline{e}_1 \wedge \ldots \wedge \overline{e}_\nu \neq 0.$$

No caso em que $(\mathbf{C}N^*\partial\mathcal{M})_{\mathbf{p}} \subset T'_{\mathbf{p}} + \overline{T}'_{\mathbf{p}}$ teremos ainda

(1.2.5) $$(\mathbf{C}N^*\partial\mathcal{M})_{\mathbf{p}} \subset \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_\nu, \overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_\nu\}.$$

Voltemos à situação inicial: temos numa vizinhança aberta Ω de $\mathbf{p}$, em $\mathcal{M}$, m funções de classe C^∞ $Z_1, \ldots, Z_m$ que se anulam em $\mathbf{p}$ e cujos diferenciais geram T' em Ω. Substituindo-se cada Z_j, $j = 1, \ldots, m$ por combinações lineares apropriadas de $Z_1, \ldots$, Z_m podemos assumir que

(1.2.6) $$dZ_j\big|_{\mathbf{p}} = e_j \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Escolha agora $n' = n - \nu$ funções reais $t_1, \ldots, t_{n'}$, de classe C^∞ em Ω, que se anulam em $\mathbf{p}$ e tais que, em Ω,

$$dZ_1 \wedge \ldots \wedge dZ_\nu \wedge dZ_{\nu+1} \wedge \ldots \wedge dZ_m \wedge d\overline{Z}_1 \wedge \ldots \wedge d\overline{Z}_\nu \wedge dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_{n'} \neq 0.$$

No caso em que $(\mathbf{C}N^*\partial\mathcal{M})_{\mathbf{p}} \not\subset T'_{\mathbf{p}} + \overline{T}'_{\mathbf{p}}$ podemos assumir que $t_{n'} = \sigma$ onde σ é uma função de classe C^∞ em Ω tal que $\partial\mathcal{M} \cap \Omega$ é definido em Ω por $\sigma = 0$ e $d\sigma \neq 0$ em todo ponto de Ω.

Façamos agora

$$x_j = \operatorname{Re} Z_j, \quad y_j = \operatorname{Im} Z_j \qquad 1 \leq j \leq \nu$$
$$s_k = \operatorname{Re}\ Z_{\nu+k} \qquad 1 \leq k \leq d$$

onde $d = m - \nu$. Teremos também, em Ω,

$$dZ_1 \wedge \ldots \wedge dZ_\nu \wedge ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_d \wedge d\overline{Z}_1 \wedge \ldots \wedge d\overline{Z}_\nu \wedge dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_{n'} \neq 0.$$

Assim, a aplicação $(Z_1, \ldots, Z_\nu, s_1, \ldots, s_d, t_1, \ldots, t_{n'})$ define um difeomorfismo C^∞ de Ω sobre uma subvariedade com bordo U de $\mathbf{C}^\nu \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{n'}$; este difeomorfismo aplica $\mathbf{p}$ sobre $(0,0,0) \in \partial U$. Temos então demonstrado o seguinte resultado:

1.2.7 Proposição. Suponha que $(\mathbf{C}N^*\partial\mathcal{M})_{\mathbf{p}} \not\subset T'_{\mathbf{p}} + \overline{T}'_{\mathbf{p}}$. Então existe um sistema de coordenadas U em torno de $\mathbf{p}$, onde U é uma vizinhança aberta da origem em $\mathbf{C}^\nu \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{n'-1} \times \overline{\mathbf{R}}_+$, (aqui escrevemos as coordenadas como $(z, s, t, t_{n'})$), tal que a origem corresponde ao ponto $\mathbf{p}$ e, em U, T' é gerado pelos diferenciais das funções

$$z_1, \ldots, z_\nu, \quad w_k = s_k + i\,\varphi_k(z, s, t, t_{n'}) \quad 1 \leq k \leq d$$

onde cada φ_k é uma função real C^∞, com φ_k e $d\varphi_k$ se anulando na origem, $\partial\mathcal{M}$ é definido pela relação $t_{n'} = 0$ e $dz_1, \ldots, dz_\nu$, $dw_1, \ldots, dw_d$, $d\bar{z}_1, \ldots, d\bar{z}_\nu$, $dt_1, \ldots, dt_{n'}$ é uma base de $\mathbf{C}T^*\mathcal{M}$.

Por outro lado, se $(\mathbf{C}N^*\partial\mathcal{M})_{\mathbf{p}} \subset T'_{\mathbf{p}} + \overline{T}'_{\mathbf{p}}$ e σ é uma função definidora do bordo, como acima, de (1.2.5) e (1.2.6) segue que

$$d\sigma = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\partial\sigma}{\partial z_j}(0,0,0)dz_j + \frac{\partial\sigma}{\partial\bar{z}_j}(0,0,0)d\bar{z}_j.$$

Podemos assumir que $\frac{\partial\sigma}{\partial z_\nu}(0,0,0) \neq 0$; na verdade, após uma mudança linear nas variáveis $z_j = x_j + iy_j$, $1 \leq j \leq \nu$, podemos assumir que

(1.2.8)
$$\frac{\partial\sigma}{\partial x_j}(0,0,0) = 0,\ 1 \leq j \leq \nu; \quad \frac{\partial\sigma}{\partial y_j}(0,0,0) = 0,\ 1 \leq j \leq \nu - 1;$$
$$\frac{\partial\sigma}{\partial y_\nu}(0,0,0) = -1.$$

Do teorema das funções implícitas aplicado a $\sigma = \sigma(z,s,t)$, (aqui $t = (t_1,\dots,t_{n'})$), obtemos uma função real de classe C^∞ $\varphi_o(z_1,\dots,z_{\nu-1},x_\nu,s,t)$ em U tal que $\sigma(z,s,t) = 0$ se, e somente se, $y_\nu = \varphi_o(z_1,\dots,z_{\nu-1},x_\nu,s,t)$; note que (1.2.8) implica que $d\varphi_o(0,0,0) = 0$. Fazemos então a seguinte mudança de variáveis

$$y'_\nu = y_\nu - \varphi_o(z_1,\dots,z_{\nu-1},x_\nu,s,t).$$

Não mudamos a notação: denotamos por U o novo sistema de coordenadas e passamos a denotar y'_ν por t_o e x_ν por s_o. Provamos então o seguinte:

1.2.9 Proposição. Suponha que $(\mathbf{C}N^*\partial\mathcal{M})_{\mathbf{p}} \subset T'_{\mathbf{p}} + \overline{T}'_{\mathbf{p}}$. Então existe um sistema de coordenadas U em torno de $\mathbf{p}$, onde U é uma vizinhança aberta da origem em $\mathbf{C}^{\nu-1} \times \mathbf{R}^{d+1} \times \overline{\mathbf{R}}_- \times \mathbf{R}^{n'}$, (aqui escrevemos as coordenadas como (z,s,t_o,t) com $z = (z_1,\dots,z_{\nu-1})$, $s = (s_o,s_1,\dots,s_d)$, $t_o \le 0$ e $t = (t_1,\dots,t_{n'})$), tal que a origem corresponde ao ponto $\mathbf{p}$ e, em U, T' é gerado pelos diferenciais das funções

$$z_1,\dots,z_{\nu-1},\ w_o = s_o + i(t_o + \varphi_o(z,s,t)),\ w_k + i\varphi_k(z,s,t_o,t) \quad 1 \le k \le d$$

onde cada φ_k é uma função real C^∞ com φ_k e $d\varphi_k$ se anulando na origem, $0 \le k \le d$, $\partial\mathcal{M}$ é definido pela relação $t_o = 0$ e $dz_1,\dots,dz_{\nu-1}$, $d\omega_o, dw_1,\dots,dw_d$, $d\overline{z}_1,\dots,d\overline{z}_{\nu-1}$, $dt_o, dt_1,\dots,dt_{n'}$ é uma base de $\mathbf{C}T^*\mathcal{M}$.

Denotaremos por $\mathring{\mathcal{M}}$ o interior de $\mathcal{M}$

$$\mathring{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \setminus \partial\mathcal{M}$$

e diremos que $\mathbf{p} \in \mathring{\mathcal{M}}$ é um ponto interior de $\mathcal{M}$. Das considerações que precedem a Proposição 1.2.7 é aparente que se $\mathbf{p}$ é um ponto interior de $\mathcal{M}$ então vale o seguinte resultado:

1.2.10 Proposição. Seja $\mathbf{p} \in \mathring{\mathcal{M}}$. Então existe um sistema de coordenadas U em torno de $\mathbf{p}$, onde U é uma vizinhança aberta da origem em $\mathbf{C}^\nu \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{n'}$ (aqui escrevemos as coordenadas como (z,s,t)) tal que a origem corresponde ao ponto $\mathbf{p}$ e, em U, T' é gerado pelos diferenciais das funções

$$z_1,\dots,z_\nu,\ w_k = s_k + i\varphi_k(z,s,t) \qquad 1 \le k \le d$$

onde cada φ_k é uma função real, com φ_k e $d\varphi_k$ se anulando na origem, e $dz_1, \ldots, dz_\nu$, $dw_1, \ldots, dw_d$, $d\bar{z}_1, \ldots, d\bar{z}_\nu$, $dt_1, \ldots, dt_{n'}$ é uma base de $\mathbf{C}T^*\mathcal{M}$.

1.3 - A forma de Levi

Sejam $\mathbf{p}$ um ponto qualquer de $\mathcal{M}$, L_1 e L_2 seções C^∞ de $\mathcal{V}$ em alguma vizinhança aberta Ω de $\mathbf{p}$ em $\mathcal{M}$, ω um elemento não-nulo no conjunto característico $T^o_{\mathbf{p}}$.

1.3.1 Lema. O valor do número complexo

$$\frac{1}{2i}\left\langle \omega, [L_1, \overline{L}_2]\big|_{\mathbf{p}} \right\rangle \tag{1.3.2}$$

depende apenas dos valores $L_1\big|_{\mathbf{p}}$ e $L_2\big|_{\mathbf{p}}$ das seções L_1 e L_2 no ponto $\mathbf{p}$.

Demonstração: Como ω é um covetor real, tomar o conjugado complexo de (1.3.2) é o mesmo que substituir L_1 por L_2 e L_2 por L_1. Por esta razão é suficiente mostrar que (1.3.2) não se altera se substituirmos L_1 por uma outra seção C^∞ de $\mathcal{V}$ em Ω cujo valor no ponto $\mathbf{p}$ é o mesmo de L_1. Por subtração isto equivale a mostrar que (1.3.2) é igual a zero se o valor de L_1 em $\mathbf{p}$ é igual a zero. Suponha que existe uma base C^∞ $\tilde{L}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ de $\mathcal{V}$ sobre Ω e escreva

$$L_1 = \sum_{j=1}^{n} c_j \tilde{L}_j$$

com $c_j \in C^\infty(\Omega)$. Devemos ter $c_j(\mathbf{p}) = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Mas então

$$[L_1, \overline{L}_2]_{\mathbf{p}} = -\sum_{j=1}^{n} (\overline{L}_2 c_j)(\mathbf{p})\ \tilde{L}_j\Big|_{\mathbf{p}}$$

é ortogonal a $\omega \in T'_{\mathbf{p}}$. ∎

Podemos então definir, em $\mathcal{V}_{\mathbf{p}}$, o produto hermitiano

$$B_\omega(v_1, v_2) \tag{1.3.3}$$

como aquele cujo valor no ponto (v_1, v_2) é igual ao número (1.3.2) com seções L_1 e L_2 que assumem, no ponto $\mathbf{p}$, os valores v_1 e v_2 respectivamente. Denotamos por $Q_\omega(v)$ a forma quadrática em $\mathcal{V}_{\mathbf{p}}$

$$Q_\omega(v) = B_\omega(v, v). \tag{1.3.4}$$

1.3.5 Definição. A forma quadrática (1.3.4) será chamada a *forma de Levi no ponto característico* ω da estrutura formalmente integrável de $\mathcal{M}$. A (1.3.3) nos referiremos como o *produto hermitiano associado a* Q_ω.

Se $\mathbf{p} \in \partial\mathcal{M}$ e $\omega \in T^o_{\mathbf{p}}$ indicaremos por ω_∂ a restrição

$$\omega_\partial = \omega|_{\mathbf{C}T\partial\mathcal{M}} \in (T_{\partial\mathcal{M}})^o_{\mathbf{p}}$$

se $\omega_\partial \neq 0$, (que é sempre o caso quando $\partial\mathcal{M}$ é não-característico), teremos duas formas de Levi a considerar: Q_ω, a forma de Levi no ponto característico ω da estrutura formalmente integrável de $\mathcal{M}$ e Q_{ω_∂}, a forma de Levi no ponto característico ω_∂ da estrutura formalmente integrável de $\partial\mathcal{M}$ induzida pela de $\mathcal{M}$. Claramente,

$$Q_{\omega_\partial} = Q_\omega|_{(\mathcal{V}_{\partial\mathcal{M}})_{\mathbf{p}}}.$$

Note que a definição da forma de Levi no ponto característico $\omega \in T^o_{\mathbf{p}}$, $\mathbf{p} \in \partial\mathcal{M}$, não faz referência alguma a uma extensão de $\mathcal{M}$ (e da estrutura de $\mathcal{M}$) a uma variedade aberta $\tilde{\mathcal{M}}$. Todavia, isto é sempre possível localmente, pelo menos no caso de estruturas localmente integráveis, e muitas vezes conveniente. Suponha então para o restante desta seção, que a estrutura involutiva de $\mathcal{M}$ é localmente integrável e $\mathbf{p} \in \overset{\circ}{\mathcal{M}}$. Vamos procurar obter uma expressão mais concreta para a forma de Levi Q_ω. Do Teorema 1.2.10 podemos supor que T' é gerado, em uma vizinhança aberta da origem em $\mathbf{C}^\nu \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{n'}$, pelos diferenciais das funções básicas

$$z_j = x_j + iy_j \quad (1 \leq j \leq \nu), \qquad w_k = s_k + i\varphi_k(z,s,t) \quad (1 \leq k \leq d)$$

com φ_k e $d\varphi_k$ se anulando no ponto $\mathbf{p}$, i.e., na origem. Um cálculo simples mostra então que o fibrado $\mathcal{V}$ é gerado por campos vetoriais da forma

$$\begin{aligned} L_j &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} + \sum_{k=1}^{d} \lambda_{jk}(z,s,t)\frac{\partial}{\partial s_k} \qquad 1 \leq k \leq \nu \\ L_{\nu+\ell} &= \frac{\partial}{\partial t_\ell} + \sum_{k=1}^{d} \mu_{\ell,k}(z,s,t)\frac{\partial}{\partial s_k} \qquad 1 \leq \ell \leq n' \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

onde λ_{jk} e $\mu_{\ell,k}$ são funções de classe C^∞ que se anulam na origem.

Qualquer covetor característico $\omega \in T^o_{\mathbf{p}}$ terá a expressão $\omega = \sigma.ds\big|_{\mathbf{p}}$ com $\sigma \in \mathbf{R}^d$. Assim, se L_1 e L_2 são seções C^∞ de $\mathcal{V}$ com $L_1\big|_{\mathbf{p}} = v_1$ e $L_2\big|_{\mathbf{p}} = v_2$ teremos:

$$\begin{aligned} B_\omega(v_1, v_2) &= \left\langle \omega, (2i)^{-1}[L_1, \overline{L}_2]\big|_{\mathbf{p}} \right\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{d} \sigma_k \left\langle ds_k, (2i)^{-1}[L_1, \overline{L}_2]\big|_{\mathbf{p}} \right\rangle \\ &= (2i)^{-1} \sum_{k=0}^{d} \sigma_k [L_1, \overline{L}_2] s_k \Bigg|_{\mathbf{p}} . \end{aligned}$$

Por outro lado, como $w_k = s_k + i\varphi_k$ anula L_1 e L_2

$$L_1 \overline{L}_2 s_k = i\, L_1 \overline{L}_2 \varphi_k$$

e

$$\overline{L}_2 L_1 s_k = -i \overline{L}_2 L_1 \varphi_k.$$

Tendo-se em conta que $d\varphi_k\big|_{\mathbf{p}} = 0$,

$$L_1 \overline{L}_2 \varphi_k\big|_{\mathbf{p}} = \left(L_1\big|_{\mathbf{p}}\right)\left(\overline{L}_2\big|_{\mathbf{p}}\right)\varphi_k = \left(\overline{L}_2\big|_{\mathbf{p}}\right)\left(L_1\big|_{\mathbf{p}}\right)\varphi_k = \overline{L}_2 L_1 \varphi_k\big|_{\mathbf{p}}$$

obtemos então

$$B_\omega(v_1, v_2) = \sum_{k=0}^{d} \sigma_k v_1 \overline{v}_2 \varphi_k. \tag{1.3.7}$$

De (1.3.6) segue que

$$L_j\big|_{\mathbf{p}} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \;\; 1 \le j \le \nu; \qquad L_{\nu+\ell}\big|_{\mathbf{p}} = \frac{\partial}{\partial t_\ell} \;\; 1 \le \ell \le n'. \tag{1.3.8}$$

Fazendo-se $\phi = \sigma_1\varphi_1 + \cdots + \sigma_d\varphi_d$ e levando-se (1.3.7) e (1.3.8) em consideração, a forma de Levi no ponto p pode ser identificada à seguinte forma quadrática em $\mathbf{C}^\nu \times \mathbf{C}^{n'}$ (onde a variável é denotada por (ζ, τ)),

$$\begin{aligned} Q(\zeta, \tau) = &\sum_{i,j=1}^{\nu} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \overline{z}_i \partial z_j}\right)(0)\zeta_i \overline{\zeta}_j \\ &+ 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{n'} \sum_{i=1}^{\nu} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \overline{z}_i \partial t_k}\right)(0)\zeta_i \overline{\tau}_k + \sum_{k,\ell=1}^{n'} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t_k \partial t_\ell}\right)(0)\tau_k \overline{\tau}_\ell. \end{aligned}$$

Abreviando-se um pouco a notação podemos escrever esta fórmula como

$$(1.3.9) \qquad \langle \phi_{z\bar z}(0)\zeta, \zeta\rangle + 2\,\mathrm{Re}\,\langle \phi_{t\bar z}(0)\zeta, \tau\rangle + \langle \phi_{tt}(0)\tau, \tau\rangle\,.$$

Aqui $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota o produto interno usual de $\mathbf{C}^{\nu}$ e $\mathbf{C}^{n'}$.

Agora nós fazemos uso das mudanças lineares de coordenadas do seguinte tipo:

$$(1.3.10) \qquad z' = Az, \quad t' = Bt + Ex + Fy, \qquad s' = s$$

onde A é uma matriz invertível $\nu \times \nu$, B uma matriz real invertível $n' \times n'$ e E e F matrizes reais $n' \times \nu$. Esta mudança de coordenadas implica nas seguintes substituições no espaço tangente complexo

$$\frac{\partial}{\partial z} = {}^tA\frac{\partial}{\partial z'} + {}^t\overline{G}\frac{\partial}{\partial t'} \qquad \frac{\partial}{\partial t} = {}^tB\frac{\partial}{\partial t'}$$

onde $G = \frac{1}{2}(E + iF)$. Devemos ainda fazer as substituições

$$\zeta' = \overline{A}\zeta \qquad\qquad \tau' = B\tau + G\zeta.$$

A idéia aqui é escolher A, B e G de modo que possamos obter uma expressão mais simples da forma quadrática (1.3.9) nas novas coordenadas. Vamos decompor esta transformação em três passos. No primeiro passo tomamos $G = 0$, $A = \mathrm{Id}$; escolhemos B de modo que

$${}^t(B^{-1})\phi_{tt}(0)B^{-1} = P_+ - P_-$$

onde

$$P_+ = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \bigcirc \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ \bigcirc & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$P_- = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & & \bigcirc \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ \bigcirc & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Assim a expressão da forma quadrática (1.3.9) nas novas coordenadas (que ainda denotamos por (ζ, τ)) será

$$\langle \phi_{z\bar{z}}(0)\zeta, \zeta\rangle + 2\operatorname{Re}\left\langle \phi_{t\bar{z}}(0)\zeta, B^{-1}\tau\right\rangle + |P_+\tau|^2 - |P_-\tau|^2 .$$

Escreveremos

$$\tau^{\#} = \tau - P_+\tau - P_-\tau.$$

Então,

$$\begin{aligned} &\left|P_+(\tau + {}^t(B^{-1})\phi_{t\bar{z}}(0)\zeta)\right|^2 - \left|P_-(\tau - {}^t(B^{-1})\phi_{t\bar{z}}(0)\zeta)\right|^2 = \\ &|P_+\tau|^2 - |P_-\tau|^2 + 2\operatorname{Re}\left\langle \tau - \tau^{\#}, {}^t(B^{-1})\phi_{t\bar{z}}(0)\zeta\right\rangle \\ &\quad + \left\langle (P_+ - P_-){}^t(B^{-1})\phi_{t\bar{z}}(0)\zeta, {}^t(B^{-1})\phi_{t\bar{z}}(0)\zeta\right\rangle . \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} Q(\zeta,\tau) = &\left|P_+(\tau + {}^t(B^{-1})\phi_{t\bar{z}}(0)\zeta)\right|^2 - \left|P_-(\tau - {}^t(B^{-1})\phi_{t\bar{z}}(0)\zeta)\right|^2 \\ &+ 2\operatorname{Re}\left\langle \tau^{\#}, {}^t(B^{-1})\phi_{t\bar{z}}(0)\zeta\right\rangle + \langle \Gamma\zeta, \zeta\rangle \end{aligned}$$

onde Γ é uma matriz hermitiana $\nu \times \nu$.

No segundo passo tomamos A e B como a identidade e tomamos

$$G = (P_+ - P_-){}^t(B^{-1})\phi_{t\bar{z}}(0).$$

Ficamos com a forma quadrática

$$|P_+\tau|^2 - |P_-\tau|^2 + 2\operatorname{Re}\left\langle \tau^{\#}, {}^t(B^{-1})\phi_{t\bar{z}}(0)\zeta\right\rangle + \langle \Gamma\zeta, \zeta\rangle .$$

No terceiro passo tomamos $G = 0$, $B = \mathrm{Id}$ e escolhemos A de forma que

$${}^t(A^{-1})\Gamma(\overline{A})^{-1} = Q_+ - Q_-$$

onde

$$Q_+ = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \bigcirc \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ \bigcirc & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$Q_- = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \bigcirc \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ \bigcirc & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, ficamos com a seguinte forma quadrática

$$|P_+\tau|^2 - |P_-\tau|^2 + |Q_+\zeta|^2 - |Q_-\zeta|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left\langle \tau^\#, T\zeta \right\rangle \tag{1.3.11}$$

onde T é uma matriz $n' \times \nu$.

1.3.12 Proposição. Suponha que a restrição da forma de Levi no ponto característico $\omega \in T^o_{\mathrm{p}}$ ao τ-espaço $(\mathcal{V} \cap \overline{\mathcal{V}})_{\mathrm{p}}$ é não-degenerada. Então existe uma mudança de variáveis da forma (1.3.10) que transforma esta forma de Levi numa soma de quadrados positivos e negativos.

Demonstração: De fato, sob esta hipótese $\tau^\# = 0$. ∎

Agora vamos relacionar a expressão (1.3.11) da forma de Levi em ω com a expansão de ϕ em série de Taylor. Temos, de (1.3.11)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}(0) = 0 \qquad 1 \le i, j \le \nu \quad i \ne j$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z_j \partial \overline{z}_j}(0) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 1 \le j \le p \\ -1 & \text{se} \quad p < j \le p+q \\ 0 & \text{se} \quad p+q < j \le \nu \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t_k \partial t_\ell}(0) = 0 \qquad 1 \le k, \ell \le n' \quad k \ne \ell$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t_\ell^2}(0) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 1 \le \ell \le p' \\ -1 & \text{se} \quad p' < \ell \le p'+q' \\ 0 & \text{se} \quad p'+q' < \ell \le n' \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z_i \partial t_\ell}(0) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t_k \partial \overline{z}_i}(0) = 0 \qquad 1 \le i \le \nu, \quad 1 \le k, \ell \le p'+q'$$

Assim,

$$
(1.3.13)\qquad
\begin{aligned}
\phi|_{s=0} = {} & \sum_{j=1}^{p} |z_j|^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} |z_j|^2 + \frac{1}{2}\left\{\sum_{\ell=1}^{p'} t_\ell^2 - \sum_{\ell=p'+1}^{p'+q'} t_\ell^2\right\} \\
& + 2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{\ell=p'+q'+1}^{n'} a_{j\ell} z_j t_\ell + \mathrm{Re}\sum_{i,j=1}^{\nu}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z_i \partial z_j}\right)(0) z_i z_j \\
& + O(|z|^3 + |t|^3).
\end{aligned}
$$

Mas podemos substituir as funções w_k pelas funções

$$
(1.3.14)\qquad \tilde{w}_k = w_k - i\sum_{i,j=1}^{\nu}\left(\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial z_i \partial z_j}\right)(0) z_i z_j \quad k = 1, \ldots, d.
$$

Então, se definirmos $\tilde{\phi} = \sum_{k=1}^{d} \sigma_k(\mathrm{Im}\,\tilde{w}_k)$ de (1.3.13) e (1.3.14) segue que

$$
\begin{aligned}
\tilde{\phi}\Big|_{s=0} = {} & \sum_{j=1}^{p} |z_j|^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} |z_j|^2 + \frac{1}{2}\left\{\sum_{\ell=1}^{p'} t_\ell^2 - \sum_{\ell=p'+1}^{p'+q'} t_\ell^2\right\} \\
& + 2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{\ell=p'+q'+1}^{n'} a_{j\ell} z_j t_\ell + O(|z|^3 + |t|^3).
\end{aligned}
$$

Por outro lado

$$
\tilde{\phi} = \tilde{\phi}\Big|_{s=0} + 0(|s|\,(|z| + |s| + |t|)
$$

de modo que

$$
\begin{aligned}
\tilde{\phi} = {} & \sum_{j=1}^{p} |z_j|^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} |z_j|^2 + \frac{1}{2}\left\{\sum_{\ell=1}^{p'} t_\ell^2 - \sum_{\ell=p'+1}^{p'+q'} t_\ell^2\right\} \\
& + 2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{\ell=p'+q'+1}^{n'} a_{j\ell} z_j t_\ell + O(|z|^3 + |t|^3 + |s|\,(|z| + |s| + |t|)).
\end{aligned}
$$

Entretanto, $\tilde{w}_k$ não é da forma $s_k + i\,\mathrm{Im}\,\tilde{w}_k$ como gostaríamos; façamos então a seguinte mudança de coordenadas

$$
s' = s + \mathrm{Im}\sum_{i,j=1}^{\nu}\left(\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial z_i \partial z_j}\right)(0) z_i z_j.
$$

Note que $ds'|_{\mathrm{p}} = ds|_{\mathrm{p}}$. Então, passando a denotar s' por s, $\tilde{w}_k$ por w_k, $\tilde{\phi}$ por ϕ e $\operatorname{Im}\tilde{w}_k$ por φ_k chegamos ao ponto desejado: T' é gerado pelos diferenciais das funções básicas

$$z_j = x_j + iy_j \ (1 \leq j \leq \nu), \quad w_k = s_k + i\varphi_k(z,s,t) \ (1 \leq k \leq d)$$

com $\varphi_k|_{\mathrm{p}} = 0$ e $d\varphi_k|_{\mathrm{p}} = 0$ $k = 1, \dots, d$, $\omega = \sigma.ds|_{\mathrm{p}}$ e $\phi = \sum_{k=1}^{d} \sigma_k \varphi_k$ satisfaz

$$\phi = \sum_{j=1}^{p} |z_j|^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} |z_j|^2 + \frac{1}{2}\left\{\sum_{\ell=1}^{p'} t_\ell^2 - \sum_{\ell=p'+1}^{p'+q'} t_\ell^2\right\}$$

$$2\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{\ell=p'+q'+1}^{n'} a_{j\ell} z_j t_\ell + O(|z|^3 + |t|^3 + |s|(|z| + |s| + |t|))$$

Para uso futuro faremos ainda aqui uma definição e algumas observações finais.

1.3.15 Definição. Diremos que a forma de Levi Q_ω é ***fortemente não degenerada*** se Q_ω é não degenerada e a sua restrição ao τ-espaço $(\mathcal{V} \cap \overline{\mathcal{V}})_{\mathrm{p}}$ também é não degenerada.

De (1.3.8) vemos que o τ-espaço $(\mathcal{V} \cap \overline{\mathcal{V}})_{\mathrm{p}}$ é o subespaço de $\mathcal{V}_{\mathrm{p}}$ gerado pelos vetores reais $\frac{\partial}{\partial t_1}\Big|_{\mathrm{p}}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_{n'}}\Big|_{\mathrm{p}}$. Se Q_ω é fortemente não degenerada, nas coordenadas especiais que diagonalizam Q_ω, (veja acima), o subespaço de $\mathcal{V}_{\mathrm{p}}$ gerado pelos vetores $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\Big|_{\mathrm{p}} \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\nu}\Big|_{\mathrm{p}}$ é precisamente o ortogonal de $(\mathcal{V} \cap \overline{\mathcal{V}})_{\mathrm{p}}$ em $\mathcal{V}_{\mathrm{p}}$ com respeito ao produto hermitiano B_ω; indicaremos este espaço por $(\mathcal{V} \cap \overline{\mathcal{V}})_{\mathrm{p}}^{\perp_\omega}$.

Finalmente, de (1.3.11) segue que se a forma de Levi Q_ω é não degenerada no τ-espaço $(\mathcal{V} \cap \overline{\mathcal{V}})_{\mathrm{p}}$ então a sua restrição ao τ-espaço real $\mathcal{V}_{\mathrm{p}}^{\circ} = (\mathcal{V} \cap T\mathcal{M})_{\mathrm{p}}$ também é não degenerada.

1.4 - Os complexos diferenciais associados

Denotemos por $\Lambda^k CT^*\mathcal{M}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) a k-ésima potência exterior de $CT^*\mathcal{M}$. Para cada par de inteiros não-negativos p, q, definimos o fibrado vetorial complexo

$$T'^{p,q}$$

como o subfibrado de $\Lambda^{p+q}CT^*\mathcal{M}$ localmente gerado por produtos exteriores de $(p+q)$-formas onde p das quais, pelo menos, são seções de T'. Claramente

$$T'^{p+1,q-1} \subset T'^{p,q}$$

e como T' é fechado a derivada exterior define uma aplicação linear contínua do espaço das seções C^∞ de $T'^{p,q}$ no espaço das seções C^∞ de $T'^{p,q+1}$. Fazendo-se

$$\Lambda^{p,q} = T'^{p,q} \Big/ T'^{p+1,q-1}$$

e passando-se ao quociente obtemos para cada $p = 0, 1, \ldots, m$ e cada subconjunto aberto Ω de $\mathcal{M}$ uma seqüência de operadores diferenciais

(1.4.1) $$d' = d'^{p,q} \colon C^\infty(\Omega, \Lambda^{p,q}) \to C^\infty(\Omega, \Lambda^{p,q+1}) \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

tais que $d'^{p,q+1} \circ d'^{p,q} = 0$.

Vamos nos referir à seqüência de operadores diferenciais (1.4.1) como o *complexo diferencial C^∞ de grau p sobre Ω.*

Em (1.4.1) podemos evidentemente substituir C^∞ por C_c^∞ e também, se $\Omega \cap \partial\mathcal{M} = \phi$, por $\mathcal{D}'$ e ε'. Todavia, se Ω intercepta $\partial\mathcal{M}$, a construção dos complexos distribucionais, aqueles que estendem (1.4.1) para espaços de seções distribuições, é mais delicada e é o objetivo desta seção.

Nas aplicações estaremos interessados em vizinhanças abertas Ω muito pequenas de um ponto $\mathrm{p} \in \mathcal{M}$; assim, podemos assumir que a variedade com bordo Ω seja orientável e desde já fixamos uma orientação para Ω. Nestas condições é fácil ver que os fibrados vetoriais $\Lambda^{m-p,n-q}$ e $(\Lambda^{p,q})^* \otimes \Omega_\Omega$ são canonicamente isomorfos; aqui $(\Lambda^{p,q})^*$ denota o fibrado dual de $\Lambda^{p,q}$ e Ω_Ω o fibrado densidade de Ω.

Então, é razoável definir $\dot{\mathcal{D}}'(\Omega, \Lambda^{p,q})$, o espaço das seções distribuições de $\Lambda^{p,q}$, como o espaço dual de $C_c^\infty(\Omega, \Lambda^{m-p,n-q})$, o último equipado com a topologia localmente convexa usual. Aqui a inclusão

$$C^\infty(\Omega, \Lambda^{p,q}) \hookrightarrow \dot{\mathcal{D}}'(\Omega, \Lambda^{p,q})$$

identifica $f \in C^\infty(\Omega, \Lambda^{p,q})$ com o funcional

$$\varphi \mapsto \int_\Omega f \wedge \varphi.$$

Analogamente definimos $\dot{\mathcal{E}}'(\Omega, \Lambda^{p,q})$; se K é um subconjunto compacto de Ω denotaremos por $\dot{\mathcal{E}}'(K, \Lambda^{p,q})$ o subespaço de $\dot{\mathcal{E}}'(\Omega, \Lambda^{p,q})$ consistindo das seções distribuições com suporte contido em K.

Se substituirmos a estrutura localmente integrável de $\mathcal{M}$ pela estrutura localmente integrável trivial $T' = 0$, $\mathcal{V} = \mathbf{C}T\mathcal{M}$ vemos que $\dot{\mathcal{D}}'(\Omega, \Lambda^{0,0}) = C_c^\infty(\Omega, \Lambda^N)'$ é o espaço das distribuições escalares sobre Ω; denotaremos este espaço por $\dot{\mathcal{D}}'(\Omega)$, como é usual.

Voltando à situação mais geral, suponha que existem funções $z_1, \ldots, z_m$, $t_1, \ldots, t_n$ de classe C^∞ em Ω tais que $dz_1, \ldots, dz_m$ são seções C^∞ de T' e $dz_1, \ldots, dz_m, dt_1, \ldots, dt_n$, formam uma base C^∞ de $\mathbf{C}T^*\mathcal{M}$ em Ω. Então toda $u \in \dot{\mathcal{D}}'(\Omega, \Lambda^{p,q})$ tem uma única representação da forma

$$u = \sum_{|J|=p} \sum_{|K|=q} u_{JK} dz_J \wedge dt_K \tag{1.4.2}$$

onde cada u_{JK} é uma distribuição escalar. Aqui J e K são multi-índices: $J = (j_1, \ldots, j_p)$, $1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq m$, $K = (k_1, \ldots, k_q)$, $1 \leq k_1 < \cdots < k_q \leq n$; $dz_J = dz_{j_1} \wedge \ldots \wedge dz_{j_p}$ e $dt_K = dt_{k_1} \wedge \ldots \wedge dt_{k_q}$.

Vamos considerar também os espaços de Sobolev $\dot{H}^s_{\text{loc}}(\Omega, \Lambda^{p,q})$. Eles podem ser definidos considerando-se uma realização $\Omega \hookrightarrow \tilde{\Omega}$ de Ω como uma subvariedade com bordo de uma variedade aberta $\tilde{\Omega}$

$$\dot{H}^s_{\text{loc}}(\Omega, \Lambda^{p,q}) = \{u \in H^s_{\text{loc}}(\tilde{\Omega}, \Lambda^{p,q}) : \operatorname{Supp} u \subset \Omega\}$$

admitindo-se que T' tenha sido estendido a uma estrutura localmente integrável em $\tilde{\Omega}$. Os espaços $\dot{H}^s_{\text{loc}}(\Omega, \Lambda^{p,q})$ são espaços de Fréchet e para cada conjunto compacto $K \subset \Omega$ os espaços

$$\dot{H}^s(K, \Lambda^{p,q}) = \{u \in \dot{H}^s_{\text{loc}}(\Omega, \Lambda^{p,q}) : \operatorname{Supp} u \subset K\}$$

têm topologias Hilbertáveis.

Observe que existe $s_o \in \mathbf{R}$, dependendo apenas de N, tal que $C_c^\infty(K, \Lambda^{p,q}) \subset \dot{H}^s(K, \Lambda^{p,q})$ se $s \leq s_o$ e $K \subset \Omega$ é compacto.

Seja

$$\mathcal{L} \subset C^\infty(\Omega, \mathbf{C}T\mathcal{M})$$

o espaço dos campos vetoriais totalmente característicos em Ω:

$$L \in \mathcal{L} \Leftrightarrow L_{\mathrm{p}} \in (\mathbf{C}T\partial\mathcal{M})_{\mathrm{p}} \qquad \forall\, \mathrm{p} \in \partial\Omega.$$

O espaço $\mathrm{Diff}^k(\Omega)$ dos operadores diferenciais de ordem $\leq k$ em Ω é localmente finitamente gerado como um $C^\infty(\Omega)$-módulo por produtos de até j fatores, $0 \leq j \leq k$, de campos vetoriais agindo por derivação de Lie. Isto nos permite definir

$$\mathrm{Diff}_b^k(\Omega) \subset \mathrm{Diff}^k(\Omega)$$

o submódulo dos operadores totalmente característicos de ordem $\leq k$, como sendo aquele localmente gerado por

$$\mathcal{L}^j = \mathcal{L} \circ \cdots \circ \mathcal{L} \qquad j \text{ fatores}$$

para $0 \leq j \leq k$; note que multiplicação por uma função C^∞ é um operador totalmente característico de ordem zero.

Denotemos por $\mathrm{Diff}^k(\Omega, \Lambda^{p,q})$ o espaço dos operadores diferenciais de ordem $\leq k$ entre seções C^∞ de $\Lambda^{p,q}$. Definimos então da maneira óbvia o espaço $\mathrm{Diff}_b^k(\Omega, \Lambda^{p,q})$ dos operadores totalmente característicos de ordem $\leq k$ entre seções de $\Lambda^{p,q}$.

Agora, para cada subconjunto compacto K de Ω, façamos

$$\dot{\mathcal{A}}^{(s)}(K, \Lambda^{p,q}) = \{u \in \dot{\mathcal{E}}'(K, \Lambda^{p,q}) : Pu \in \dot{H}^s(K, \Lambda^{p,q}) \ \forall P \in \mathrm{Diff}_b^\infty(\Omega, \Lambda^{p,q})\}.$$

Em $\dot{\mathcal{A}}^{(s)}(K, \Lambda^{p,q})$ tomamos a topologia limite projetivo dos espaços

$$\{u \in \dot{\mathcal{E}}'(K, \Lambda^{p,q}) : Pu \in \dot{H}^s(K, \Lambda^{p,q}) \forall P \in \mathrm{Diff}_b^k(\Omega, \Lambda^{p,q})\}$$

que são claramente Hilbertáveis para cada k, $k = 0, 1, \ldots$. Assim, $\dot{\mathcal{A}}^{(s)}(K, \Lambda^{p,q})$ é um espaço de Fréchet. Note que os elementos de $\dot{\mathcal{A}}^{(s)}(K, \Lambda^{p,q})$ são C^∞ em $\mathring{\Omega}$.

1.4.3 Definição. Denotaremos por $\mathcal{A}'(\Omega, \Lambda^{p,q})$ o espaço de todas as seções distribuições u em $\dot{\mathcal{D}}'(\Omega, \Lambda^{p,q})$ tais que dados $s < s_o$ e $K \subset \Omega$ compacto, o funcional linear

$$\begin{aligned} C_c^\infty(K, \Lambda^{m-p,n-q}) &\to \mathbf{C} \\ \varphi &\mapsto u(\varphi) \end{aligned}$$

se estende continuamente a $\dot{\mathcal{A}}^{(s)}(K, \Lambda^{m-p,n-q})$.

Para esclarecer melhor estes conceitos é conveniente especializarmos para a variedade padrão com bordo

$$\mathcal{Z} = \mathbf{R}^{N-1} \times \overline{\mathbf{R}}_+ = \{(x,t) : x \in \mathbf{R}^{N-1}, \ t \geq 0\}$$

com interior

$$\overset{\circ}{\mathcal{Z}} = \{(x,t) \in \mathcal{Z} : t > 0\}.$$

Assumiremos também que o fibrado cotangente da estrutura, T', é trivial sobre $\mathcal{Z}$, como é, localmente, sempre o caso.

Dado um conjunto compacto $K \subset \mathcal{Z}$ então $g \in \dot{\mathcal{A}}^{(s)}(K, \Lambda^{p,q})$ se, e somente se

$$(t\partial_t)^j(\partial_x)^\alpha g \in \dot{H}^s(K, \Lambda^{p,q})$$

para todos $j \in \mathbf{Z}_+$ e $\alpha \in \mathbf{Z}_+^{N-1}$ e as seminormas

$$u \mapsto \left\|(t\partial_t)^j(\partial_x)^\alpha u\right\|_{(s)}$$

definem a topologia de $\dot{\mathcal{A}}^{(s)}(K, \Lambda^{p,q})$.

Como conseqüência

A seção distribuição $u \in \dot{\mathcal{D}}'(\mathcal{Z}, \Lambda^{p,q})$ pertence a $\mathcal{A}'(\mathcal{Z}, \Lambda^{p,q})$ se, e somente se, para todo subconjunto compacto K de $\mathcal{Z}$ e $s < s_o$ existem uma constante $C > 0$ e um inteiro positivo N_o tais que

$$|u(\varphi)| \leq C \sum_{j+|\alpha|\leq N_o} \left\|(t\partial_t)^j(\partial_x)^\alpha \varphi\right\|_{(s)} \; \forall \varphi \in C_c^\infty(K, \Lambda^{m-p,n-q}).$$

Definimos agora

$$\dot{H}_c^s(\mathcal{Z}) = \{u \in H_c^s(\mathbf{R}^N) : \operatorname{Supp} u \subset \mathcal{Z}\}.$$

Necessitaremos ainda do teorema enunciado a seguir, cuja prova incluimos num apêndice, Apêndice B, para não quebrar a seqüência das idéias apresentadas aqui.

1.4.4 Teorema. Seja $\chi \in C_c^\infty(\overset{\circ}{\mathcal{Z}})$ tal que $\int \chi = 1$. Para $\varepsilon > 0$ defina

$$Q_\varepsilon : \bigcup_{s\in\mathbf{R}} \dot{H}_c^s(\mathcal{Z}) \to C_c^\infty(\overset{\circ}{\mathcal{Z}}), \quad Q_\varepsilon(u) = \chi_\varepsilon * u$$

onde $\chi_\varepsilon(x,t) = \varepsilon^{-N}\chi(x/\varepsilon, t/\varepsilon)$, $(x,t) \in \mathbf{R}^N$. Dados K e K', subconjuntos compactos de $\mathcal{Z}$ com K contido no interior de K', $s \in \mathbf{R}$ e $u \in \dot{\mathcal{A}}^{(s)}(K, \Lambda^{p,q})$, então $Q_\varepsilon(u) \to u$ em $\dot{\mathcal{A}}^{(s)}(K', \Lambda^{p,q})$ quando $\varepsilon \to 0$.

Voltemos agora ao caso geral. Tome uma seqüência $\{K_j\}_{j\in\mathbf{Z}_+}$ de subconjuntos compactos de Ω com K_j contido no interior de K_{j+1} e $K_j \nearrow \Omega$. Considere os limites indutivos

$$\dot{\mathcal{A}}(K_j,\Lambda^{p,q}) = \bigcup_{s<s_o} \dot{\mathcal{A}}^{(s)}(K_j,\Lambda^{p,q})$$

$$\dot{\mathcal{A}}_c(\Omega,\Lambda^{p,q}) = \bigcup_{j\in\mathbf{Z}_+} \dot{\mathcal{A}}(K_j,\Lambda^{p,q}).$$

Evidentemente, o espaço vetorial topológico $\dot{\mathcal{A}}_c(\Omega,\Lambda^{p,q})$ independe da particular seqüência $\{K_j\}_{j\in\mathbf{Z}_+}$ escolhida. Do Teorema 1.4.4 segue que a inclusão contínua

$$C_c^\infty(\Omega,\Lambda^{m-p,n-q}) \hookrightarrow \dot{\mathcal{A}}_c(\Omega,\Lambda^{m-p,n-q})$$

tem imagem densa e podemos considerar o dual de $\dot{\mathcal{A}}_c(\Omega,\Lambda^{m-p,n-q})$ como um subespaço de $\dot{\mathcal{D}}'(\Omega,\Lambda^{p,q})$. Este subespaço é, precisamente, $\mathcal{A}'(\Omega,\Lambda^{p,q})$. Em $\mathcal{A}'(\Omega,\Lambda^{p,q})$ tomaremos sempre a topologia fraca.
Note que $C^\infty(\Omega,\Lambda^{p,q})$ é um subespaço de $\mathcal{A}'(\Omega,\Lambda^{p,q})$; a inclusão

$$C^\infty(\Omega,\Lambda^{p,q}) \hookrightarrow \mathcal{A}'(\Omega,\Lambda^{p,q})$$

identifica $f \in C^\infty(\Omega,\Lambda^{p,q})$ com o funcional em $\dot{\mathcal{A}}_c(\Omega,\Lambda^{m-p,n-q})$

$$\varphi \mapsto (-1)^{(p+q)(N-p-q)}\,\varphi(f).$$

Considere agora a inclusão

$$i_b\colon \partial\Omega \hookrightarrow \Omega.$$

Vamos mostrar que a aplicação "pull-back" natural

$$i_b^*\colon C^\infty(\Omega,\Lambda^{p,q}) \to C^\infty(\partial\Omega,\Lambda_b^{p,q}) \tag{1.4.5}$$

onde $\Lambda_b^{p,q} = T'^{p,q}_{\partial\Omega}/T'^{p+1,q-1}_{\partial\Omega}$ se estende a $\mathcal{A}'(\Omega,\Lambda^{p,q})$.

1.4.6 Teorema. Existe uma única aplicação fracamente contínua

$$\mathcal{A}'(\Omega,\Lambda^{p,q}) \to \mathcal{D}'(\partial\Omega,\Lambda_b^{p,q}) \tag{1.4.7}$$

que estende a aplicação "pull-back" (1.4.5).

Demonstração: Para $\psi \in C_c^\infty(\partial\Omega, \Lambda^{m-p,n-q-1})$, considere a seção distribuição $T_\psi \in \dot{\mathcal{E}}'(\Omega, \Lambda^{m-p,n-q})$ definida por

$$T_\psi(\varphi) = \int_{\partial\Omega} i_b^*(\varphi) \wedge \psi, \qquad \varphi \in C^\infty(\Omega, \Lambda^{p,q}).$$

É fácil ver que $T_\psi \in \dot{\mathcal{A}}_c(\Omega, \Lambda^{m-p,n-q})$. Então definimos, para $u \in \mathcal{A}'(\Omega, \Lambda^{p,q})$,

$$i_b^*(u)(\psi) = (-1)^{(p+q)(N-p-q)}\, u(T_\psi), \qquad \psi \in C_c^\infty(\partial\Omega, \Lambda_b^{m-p,n-q-1}).$$

A aplicação $u \mapsto i_b^*(u)$ é então uma aplicação linear e fracamente contínua

$$\mathcal{A}'(\Omega, \Lambda^{p,q}) \to \mathcal{D}'(\partial\Omega, \Lambda_b^{p,q})$$

que estende (1.4.7). A unicidade decorre da densidade de $C_c^\infty(\Omega, \Lambda^{p,q})$ em $\mathcal{A}'(\Omega, \Lambda^{p,q})$; esta por sua vez decorre do Teorema de Hahn-Banach pois, para $u \in \dot{\mathcal{A}}_c(\Omega, \Lambda^{m-p,n-q})$, $0 = \varphi(u) = (-1)^{(p+q)(N-p-q)}\, u(\varphi)$ para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \Lambda^{p,q})$ implica $u = 0$. ∎

Novamente substituimos a estrutura localmente integrável de $\mathcal{M}$ pela estrutura trivial $T' = 0$, $\mathcal{V} = \mathbb{C}T\mathcal{M}$. Observe que a inclusão contínua e de imagem densa

$$C_c^\infty(\Omega, \Lambda^{m+n}) \hookrightarrow \dot{\mathcal{A}}_c(\Omega, \Lambda^{m,n})$$

identifica, por transposição, $\mathcal{A}'(\Omega, \Lambda^{0,0})$ com um subespaço de $\dot{\mathcal{D}}'(\Omega)$; denotaremos este subespaço por $\mathcal{A}'(\Omega)$.
Note ainda que a aplicação (1.4.7) com $p = q = 0$ estende a aplicação traço natural $C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\partial\Omega)$ a uma aplicação fracamente contínua $\mathcal{A}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\partial\Omega)$.

Voltando novamente à situação mais geral, se $u \in \dot{\mathcal{D}}'(\Omega, \Lambda^{p,q})$ tem a representação (1.4.2), é imediato que $u \in \mathcal{A}'(\Omega, \Lambda^{p,q})$ se, e somente se, $u_{JK} \in \mathcal{A}'(\Omega)$ para cada par de multi-índices J e K comparecendo nos somatórios.

Consideremos agora $u \in C^\infty(\Omega, \Lambda^{p,q})$ e $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \Lambda^{m-p,n-q-1})$. Do Teorema de Stokes,

$$\int_\Omega d'u \wedge \varphi = (-1)^{p+q+1} \int_\Omega u \wedge d'\varphi + \int_{\partial\Omega} i_b^*(u) \wedge i_b^*(\varphi).$$

Esta identidade nos permite estender a aplicação

$$d' \colon C^\infty(\Omega, \Lambda^{p,q}) \to C^\infty(\Omega, \Lambda^{p,q+1})$$

a $\mathcal{A}'(\Omega,\Lambda^{p,q})$ via a fórmula

$$d'u(\varphi)=(-1)^{p+q+1}\,u(d'\varphi)+i_b^*(u)(i_b^*(\varphi))$$

se $u\in\mathcal{A}'(\Omega,\Lambda^{p,q})$ e $\varphi\in C_c^\infty(\Omega,\Lambda^{m-p,n-q-1})$.

1.4.8 Teorema

$$d'(\mathcal{A}'(\Omega,\Lambda^{p,q}))\subset\mathcal{A}'(\Omega,\Lambda^{p,q+1})$$

e

$$\ldots\mathcal{A}'(\Omega,\Lambda^{p,q})\xrightarrow{d'^{p,q}}\mathcal{A}'(\Omega,\Lambda^{p,q+1})\ldots \tag{1.4.9}$$

define um complexo diferencial que estende (1.4.1).

Demonstração: Para demonstrarmos a primeira afirmação devemos mostrar que dados $u\in\mathcal{A}'(\Omega,\Lambda^{p,q})$, $s<s_o$ e um subconjunto compacto K de Ω, o funcional em $C_c^\infty(K,\Lambda^{m-p,n-q-1})$

$$\varphi\mapsto u(d'\varphi+(-1)^{(p+q)(N-p-q+1)+1}\,T_{i_b^*(\varphi)}) \tag{1.4.10}$$

é contínuo na topologia herdada de $\dot{A}^{(s)}(K,\Lambda^{m-p,n-q-1})$. Considere como antes uma realização $\Omega\hookrightarrow\tilde{\Omega}$ e assuma que T' foi estendido a $\tilde{\Omega}$. Dada $\varphi\in C_c^\infty(\Omega,\Lambda^{m-p,n-q-1})$ defina

$$\varphi_o=\begin{cases}\varphi & \text{em } \Omega\\ 0 & \text{em } \tilde{\Omega}\setminus\Omega\end{cases}$$

Então $\varphi_o\in\varepsilon'(\tilde{\Omega},\Lambda^{m-p,n-q-1})$ e um cálculo simples fornece

$$d'\varphi_o=(d'\varphi)_o+(-1)^{(p+q)(N-p-q-1)+1}\,T_{i_b^*(\varphi)}.$$

Logo, a aplicação (1.4.10) é o funcional

$$C_c^\infty(\Omega,\Lambda^{m-p,n-q-1})\to\mathbf{C}$$
$$\varphi\mapsto u(d'\varphi_o)$$

Como a aplicação

$$d'\colon\dot{A}^{(s)}(K,\Lambda^{m-p,n-q-1})\to\dot{A}^{(s-1)}(K,\Lambda^{m-p,n-q})$$

é contínua, o resultado segue. Do exposto acima, a segunda afirmação agora é imediata. ∎

Vamos nos referir à seqüência de operadores diferenciais (1.4.9) como o *complexo diferencial distribucional de grau p sobre Ω*. Note que quando Ω não intercepta $\partial\mathcal{M}$ (1.4.9) coincide com

$$\mathcal{D}'(\Omega, \Lambda^{p,q}) \xrightarrow{d'^{p,q}} \mathcal{D}'(\Omega, \Lambda^{p,q+1}).$$

Os espaços de cohomologia destes complexos são definidos da maneira usual.

A esta altura torna-se importante mostrar que os espaços $\mathcal{A}'(\Omega, \Lambda^{p,q})$ contêm outros elementos que não as seções C^∞ de $\Lambda^{p,q}$. No Apêndice C introduzimos o espaço $\mathcal{R}(\Omega) \subset \dot{\mathcal{D}}'(\Omega)$ das distribuições C^∞ transversalmente ao bordo (esta definição pode ser facilmente estendida a seções distribuições de $\Lambda^{p,q}$) e mostramos que $\mathcal{R}(\Omega)$ é um subespaço de $\mathcal{A}'(\Omega)$; $\mathcal{R}(\Omega)$, sem dúvida, é um espaço muito maior que $C^\infty(\Omega)$. Para os elementos de $\mathcal{R}(\Omega)$ existe uma noção natural de traço; $\mathcal{R}(\Omega)$, considerado como subespaço de $\mathcal{A}'(\Omega)$ é invariante por derivação e portanto seus elementos têm todos os traços. Mostramos também que o traço natural de um elemento de $\mathcal{R}(\Omega)$ coincide com o seu traço quando considerado como elemento de $\mathcal{A}'(\Omega)$.

CAPÍTULO II

CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA RESOLUBILIDADE LOCAL BASEADAS NA FORMA DE LEVI

Em todo este capítulo $\mathcal{M}$ denotará uma variedade com bordo, de classe C^∞, munida de uma estrutura localmente integrável com fibrados estruturais $\mathcal{V}$ e T'. Assumiremos que $\partial\mathcal{M}$ é não-característico. Denotaremos por m a dimensão das fibras de T' e por n as de $\mathcal{V}$.

2.1 - Condições necessárias preliminares

Os lemas que apresentaremos a seguir são adaptações rotineiras para estruturas com bordo de resultados bem conhecidos.

Sejam $W \subset V$ subconjuntos abertos de $\mathcal{M}$ com $W \cap \partial\mathcal{M}$ não vazio e considere a seguinte propriedade:

$$(2.1.0)_{p,q} \qquad \begin{array}{c} \text{Dado um cociclo } f \in C^\infty(V, \Lambda^{p,q}) \text{ existe uma seção} \\ u \in \mathcal{A}'(W, \Lambda^{p,q-1}) \text{ tal que } d'u = f \text{ em } W. \end{array}$$

2.1.1 Lema. Se $(2.1.0)_{p,q}$ vale, então, para cada subconjunto compacto K' de W, existe um subconjunto compacto K de V e números $C > 0$, $\ell \in \mathbf{Z}_+$, tais que, para todo cociclo $f \in C^\infty(V, \Lambda^{p,q})$ e toda cocadeia $v \in C_c^\infty(W, \Lambda^{m-p,n-q})$ com $\operatorname{Supp} v \subset K'$ vale a estimativa

$$(2.1.2) \qquad \left| \int f \wedge v \right| \leq C \, \|f\|_{K,\ell} \left(\|d'v\|_\ell + \|i_b^* v\|_\ell \right)$$

onde $\|\cdot\|_\ell$ denota a norma da convergência uniforme de todas as derivadas de ordem $\leq \ell$.

Demonstração: Denotemos por $\mathbf{E}$ o núcleo do operador diferencial d' em $C^\infty(V, \Lambda^{p,q})$ munido da topologia herdada de $C^\infty(V, \Lambda^{p,q})$; $\mathbf{E}$ é um espaço de Fréchet. Denotemos por $\mathbf{F}$ o subespaço de $C^\infty(W, \Lambda^{m-p,n-q})$ consistindo das seções com suporte contido no compacto K' munido da topologia definida pelas semi-normas

$$v \mapsto \|d'v\|_\ell + \|i_b^* v\|_\ell \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots$$

Note que $\mathbf{F}$ não é, em geral, um espaço de Hausdorff. O fecho de $\{0\}$ em $\mathbf{F}$ é o subespaço $\mathcal{Z}$ formado pelos cociclos pertencentes a $\mathbf{F}$ cujos "pull-backs" para $\partial\mathcal{M}$ se anulam identicamente; o espaço de Hausdorff associado é o espaço quociente $\mathbf{F}_o = \mathbf{F}/\mathcal{Z}$ munido da topologia quociente; $\mathbf{F}_o$ é um espaço metrizável.

No espaço produto $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$ considere o funcional bilinear

$$(f, v) \mapsto \int f \wedge v. \tag{2.1.3}$$

Fixado $v \in \mathbf{F}$, a continuidade do funcional linear $f \mapsto \int f \wedge v$ em $\mathbf{E}$ é óbvia. Agora fixemos $f \in \mathbf{E}$ e assuma que $(2.1.0)_{p,q}$ vale. Escolha $u \in \mathcal{A}'(W, \Lambda^{p,q-1})$ tal que $d'u = f$ em W. Como $v \in C_c^\infty(W, \Lambda^{m-p,n-q})$, do Teorema de Stokes obtemos

$$\int_{\mathcal{M}} f \wedge v = (-1)^{p+q-1} \int_{\mathcal{M}} u \wedge d'v + \int_{\partial\mathcal{M}} i_b^* u \wedge i_b^* v$$

o que mostra a continuidade do funcional linear $v \mapsto \int f \wedge v$. Segue-se que este funcional induz um funcional linear contínuo em $\mathbf{F}_o$. Assim, (2.1.3) induz um funcional bilinear separadamente contínuo em $\mathbf{E} \times \mathbf{F}_o$. Por outro lado, é uma conseqüência do Teorema de Banach-Steinhaus que qualquer funcional bilinear separadamente contínuo no produto de um F-espaço com um espaço metrizável é contínuo; daí a continuidade do levantamento para $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$, que é o que (2.1.2) expressa. ∎

Vamos nos referir a qualquer função ou distribuição h tal que $d'h = 0$ como uma *solução*; em outras palavras, uma solução é um zero-cociclo.

2.1.4 Lema. Sejam p, q inteiros com $0 \leq p \leq m$, $1 \leq q \leq n$. Suponha que vale a seguinte propriedade:

$$(2.1.5)_{p,q} \qquad \begin{array}{c} \text{Existem uma solução } C^\infty \ h \text{ em } V, \text{ um cociclo } f \in C^\infty(V, \Lambda^{p,q}) \\ \text{e uma cocadeia } v \in C_c^\infty(\mathring{W}, \Lambda^{m-p,n-q}) \text{ tais que} \\ \operatorname{Re} h \leq 0 \text{ em } \operatorname{Supp} f, \ \operatorname{Re} h > 0 \text{ em } \operatorname{Supp} d'v, \ \int f \wedge v \neq 0. \end{array}$$

Então a propriedade $(2.1.0)_{p,q}$ não vale.

Demonstração: Suponha que $(2.1.5)_{p,q}$ vale e seja c um número real positivo tal que $\operatorname{Re} h \geq c$ em $\operatorname{Supp} d'v$. Conseqüentemente, para cada inteiro $\ell > 0$ existe uma constantte $C_\ell > 0$ tal que para todo $\rho > 0$

$$\left\| d'(e^{-\rho h} v) \right\|_\ell \leq C_\ell \rho^\ell e^{-c\rho}. \tag{2.1.6}$$

Por outro lado, qualquer que seja o subconjunto compacto K de V existe $C_{K,\ell} > 0$ tal que

$$(2.1.7) \qquad \left\| e^{\rho h} f \right\|_{K,\ell} \leq C_{K,\ell}\rho^{\ell}.$$

Substitua, em (2.1.2), f por $e^{\rho h} f$ e v por $e^{-\rho h} v$ e considere (2.1.6) e (2.1.7). Se $(2.1.0)_{p,q}$ valesse, nós obteríamos, para algum subconjunto compacto K de V apropriadamente escolhido,

$$\left| \int f \wedge v \right| \leq \text{const.}\, \rho^{2\ell} e^{-c\rho}.$$

Fazendo-se $\rho \to \infty$ concluiríamos que $\int f \wedge v = 0$, o que contradiz $(2.1.5)_{p,q}$. ∎

Suponha agora que $W \subset V$ são subconjuntos abertos e não vazios de $\mathcal{M}$ com $W \cap \partial\mathcal{M} = \phi$ e considere a seguinte propriedade:

$(2.1.0)'_{p,q}$ Dado um cociclo $f \in C^{\infty}(V, \Lambda^{p,q})$ existe uma seção $u \in \mathcal{D}'(W, \Lambda^{p,q-1})$ tal que $d'u = f$ em W.

2.1.1' Lema. Se $(2.1.0)'_{p,q}$ vale, então, para cada subconjunto compacto K' de W, existe um subconjunto compacto K de V e números $C > 0, \ell \in \mathbf{Z}_{+}$, tais que, para todo cociclo $f \in C^{\infty}(V, \Lambda^{p,q})$ e toda cocadeia $v \in C_c^{\infty}(W, \Lambda^{m-p,n-q})$ com $\operatorname{Supp} v \subset K'$ vale a estimativa

$$\left| \int f \wedge v \right| \leq C \, \|f\|_{K,\ell} \, \|d'v\|_{\ell}$$

onde $\| \cdot \|_{\ell}$ denota a norma da convergência uniforme de todas as derivadas de ordem $\leq \ell$.

Demonstração: Óbvia, da prova do Lema 2.1.1. ∎

2.2 - Condições necessárias: $\mathbf{p} \in \mathring{\mathcal{M}}$

Temos o seguinte resultado geral para pontos interiores de $\mathcal{M}$.

2.2.1 Teorema. Sejam $\mathbf{p} \in \mathring{\mathcal{M}}$ e $p, q \in \mathbf{Z}_{+}$ com $0 \leq p \leq m$, $1 \leq q \leq n$. Suponha que existe um covetor característico $\omega \in T^{o}_{\mathbf{p}} \setminus 0$ tal que Q_{ω}, a forma de Levi em ω, é *fortemente não-degenerada* e o número de autovalores positivos de Q_{ω} é igual a q ou $n - q$. Então, dadas duas vizinhanças suficientemente pequenas $W \subset V$ de $\mathbf{p}$, $(2.1.0)'_{p,q}$ não vale.

Observação: É claro que se $q \leq n-1$ as hipóteses do teorema implicam que $(2.1.0)'_{p,n-q}$ também não vale.

Demonstração: Se o número de autovalores positivos de Q_ω é $n-q$ então o número de autovalores positivos de $Q_{-\omega}$ é q. Assim, podemos supor que Q_ω tem precisamente q autovalores positivos. Claramente, podemos nos limitar ao caso $p=0$. Da Proposição 1.2.10 segue que, localmente, podemos identificar $\mathcal{M}$ com um subconjunto aberto U de $\mathbf{C}^\nu \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{n'}$ contendo a origem, que identificamos com o ponto $\mathbf{p}$, T' com o fibrado gerado pelos diferenciais das funções básicas

$$z_j = x_j + iy_j \ (1 \leq j \leq \nu) \qquad w_k = s_k + i\varphi_k(z,s,t) \ (1 \leq k \leq d)$$

onde cada φ_k é uma função real de classe C^∞ em U, com φ_k e $d\varphi_k$ se anulando na origem, $\mathcal{V}$ com o fibrado gerado pelos campos vetoriais

$$(2.2.2) \qquad \begin{aligned} L_j &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} + \sum_{k=1}^{d} \lambda_{jk}(z,s,t)\frac{\partial}{\partial s_k} \quad (1 \leq j \leq \nu) \\ L_{\nu+\ell} &= \frac{\partial}{\partial t_\ell} + \sum_{k=1}^{d} \mu_{\ell k}(z,s,t)\frac{\partial}{\partial s_k} \quad (1 \leq \ell \leq n') \end{aligned}$$

que são determinados pelas relações de ortogonalidade

$$(2.2.3) \qquad \begin{aligned} &L_j z_i = L_j w_k = 0 && 1 \leq j \leq n, \quad 1 \leq i \leq \nu, \quad 1 \leq k \leq d \\ &L_j \bar{z}_i = \delta_{ij} && 1 \leq i,j \leq \nu \\ &L_{\nu+\ell} t_r = \delta_{\ell r} && 1 \leq \ell, r \leq n' \\ &L_j t_\ell = L_{\nu+\ell}\bar{z}_j = 0 && 1 \leq j \leq \nu, \quad 1 \leq \ell \leq n' \end{aligned}$$

e ω com $\tau . ds|_0$ para algum $\tau \in \mathbf{R}^d$.
Desnecessário dizer, as funções λ_{jk} e $\mu_{\ell k}$ são todas de classe C^∞ em U e se anulam na origem; se F é uma função de classe C^∞ em U,

$$d'F = \sum_{j=1}^{\nu}(L_jF)d\bar{z}_j + \sum_{\ell=1}^{n'}(L_{\nu+\ell}F)dt_\ell.$$

Iniciamos efetuando uma mudança linear nas variáveis s_k (e uma mudança concomitante nas funções w_k) de modo a transformar τ no vetor $(0,\ldots,0,1)$. Como Q_ω é fortemente não-degenerada, pelos resultados da Seção 1.3 podemos supor que

$$(2.2.4) \qquad \varphi_d = Q_d + O(|z|^3 + |t|^3 + |s|(|z| + |s| + |t|))$$

onde Q_d é a forma quadrática

$$Q_d(z,t) = |z'|^2 - |z''|^2 + |t'|^2 - |t''|^2 . \tag{2.2.5}$$

Aqui estamos escrevendo

$$\begin{aligned} z' &= (z_1, \ldots, z_\alpha) & z'' &= (z_{\alpha+1}, \ldots, z_\nu) \\ t' &= (t_1, \ldots, t_\beta) & t'' &= (t_{\beta+1}, \ldots, t_{n'}) \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

onde $0 \leq \alpha \leq \nu$, $0 \leq \beta \leq n'$ são tais que $\alpha + \beta = q$.

Com $\varepsilon > 0$ a ser escolhido efetuamos a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} \tilde{z}_j &= \varepsilon^{-1} z_j & 1 \leq j \leq \nu \\ \tilde{s}_k &= \varepsilon^{-2} s_k & 1 \leq k \leq d \\ \tilde{t}_\ell &= \varepsilon^{-1} t_\ell & 1 \leq \ell \leq n' \end{aligned}$$

e também escrevemos

$$\tilde{w}_k = \varepsilon^{-2} w_k \qquad 1 \leq k \leq d.$$

Temos

$$\tilde{w}_k = \tilde{s}_k + i\{Q_k(\tilde{z},\tilde{t}) + \varepsilon \; R_k(\tilde{z},\tilde{s},\tilde{t};\varepsilon)\}$$

onde Q_k é uma forma quadrática e

$$\left|R_k(\tilde{z},\tilde{s},\tilde{t};\varepsilon)\right| \leq \text{const.}(|\tilde{z}|^3 + \left|\tilde{t}\right|^3 + |\tilde{s}|\,(|\tilde{z}| + |\tilde{s}| + \left|\tilde{t}\right|))$$

$1 \leq k \leq d$; a constante é independente de ε.

Tomando outro número $\varepsilon' > 0$, também a ser escolhido, definimos

$$h = \tilde{w}_d + i\,\varepsilon' \sum_{k=1}^{d} \tilde{w}_k^2.$$

Um cálculo simples fornece

$$\left|\operatorname{Im} h - Q_d - \varepsilon' \,|s|^2\right| \leq$$

$$C.\{\varepsilon(|\tilde{z}|^2 + |\tilde{s}|^2 + \left|\tilde{t}\right|^2) + \varepsilon'(|\tilde{z}|^4 + |\tilde{s}|^4 + \left|\tilde{t}\right|^4)\}$$

onde C é uma constante independente de ε e ε'.

Escolhemos então ε e ε' de modo que

$$0 < \varepsilon < \varepsilon' < 1, \qquad C\varepsilon < \frac{1}{4}\varepsilon', \qquad C(\varepsilon + \varepsilon') < \frac{1}{2}, \qquad C''\varepsilon' < \frac{1}{4} \tag{2.2.7}$$

onde C'' é uma constante que antecipamos aqui e, como veremos, independe de ε e de ε'.

Neste instante estão fixadas as coordenadas $\tilde{z}$, $\tilde{s}$, $\tilde{t}$ bem como as funções $\tilde{w}_k$, que passaremos a denotar novamente por z, s, t e w_k. Tomamos a vizinhança aberta $V \subset U$ de tal modo que em V

$$|z|^2 + |s|^2 + |t|^2 < 1, \qquad C\,|s|^2 < \frac{1}{4}.$$

Com estas escolhas segue que em V

$$\frac{1}{2}(|z'|^2 + \varepsilon'\,|s|^2 + |t'|^2) - \frac{3}{2}(|z''|^2 + |t''|^2) \le \operatorname{Im} h \le$$
$$\frac{3}{2}(|z'|^2 + \varepsilon'\,|s|^2 + |t'|^2) - \frac{1}{2}(|z''|^2 + |t''|^2).$$

Introduzimos agora as funções:

$$h_1 = ih - 2(|z'|^2 + |t'|^2) - 2\varepsilon' \sum_{k=1}^{d} w_k^2$$

$$h_2 = ih - 2(|z''|^2 + |t'|^2).$$

De (2.2.2) segue que

$$\begin{aligned} L_j h_1 &= 0 \quad \text{se} \quad \alpha + 1 \le j \le \nu \text{ ou } \nu + \beta + 1 \le j \le n \\ L_j h_2 &= 0 \quad \text{se} \quad 1 \le j \le \alpha \text{ ou } \nu + 1 \le j \le \nu + \beta. \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Cálculos simples mostram que em V

$$\operatorname{Re} h_2 \le -\frac{1}{4}(|z|^2 + \varepsilon'\,|s|^2 + |t|^2) \tag{2.2.9}$$

$$\operatorname{Re} h_1 \le -\frac{1}{2}(|z|^2 + \varepsilon'\,|s|^2 + |t|^2) + 4\varepsilon' \sum_{k=1}^{d}(Q_k + \varepsilon R_k)^2. \tag{2.2.10}$$

Por outro lado, também em V,

$$\begin{aligned} Q_k^2 &\leq \text{const.}(|z|^2 + |t|^2) \\ \varepsilon\,|Q_k|\,|R_k| &\leq \varepsilon\,\text{const.}(|z|^2 + |s|^2 + |t|^2) \\ &\leq \text{const.}(|z|^2 + \varepsilon'\,|s|^2 + |t|^2) \\ \varepsilon^2 R_k^2 &\leq \text{const.}(|z|^2 + \varepsilon'\,|s|^2 + |t|^2) \end{aligned}$$

onde as constantes acima independem de ε e ε'; assim,

$$4\varepsilon' \sum_{k=1}^{d} (Q_k + \varepsilon R_k)^2 \leq C'\varepsilon'(|z|^2 + \varepsilon'\,|s|^2 + |t|^2) \tag{2.2.11}$$

onde C' é a constante que antecipamos em (2.2.7); assim, de (2.2.7), (2.2.10) e (2.2.11) segue que em V

$$\operatorname{Re} h_1 \leq -\frac{1}{4}(|z|^2 + \varepsilon'\,|s|^2 + |t|^2). \tag{2.2.12}$$

Vamos agora nos utilizar do Lema 2.1.1' para concluir a demonstração:

Seja $W \subset V$ outra vizinhança aberta da origem e tomemos $\psi \in C_c^\infty(W)$ com $\psi \equiv 1$ numa terceira vizinhança da origem: existe portanto um número real $b > 0$ tal que

$$\operatorname{Supp} d\psi \subset\subset \{(z, s, t) : |z|^2 + \varepsilon'\,|s|^2 + |t|^2 > 4b\}. \tag{2.2.13}$$

Para cada $\rho > 0$ definimos

$$\begin{aligned} f_\rho &= e^{\rho h_1} d\bar{z}_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_\alpha \wedge dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_\beta \\ v_\rho &= \rho^{\frac{N}{2}} \psi e^{\rho h_2} d\bar{z}_{\alpha+1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_\nu \wedge dt_{\beta+1} \wedge \ldots \wedge dt_{n'} \wedge \\ &\qquad dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_\nu \wedge dw_1 \wedge \ldots \wedge dw_d \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

De (2.2.8), (2.2.9) e (2.2.13) concluimos que

$$\begin{aligned} &f_\rho \in C^\infty(V, \Lambda^{0,q}), && d' f_\rho \equiv 0 \\ &v_\rho \in C_c^\infty(W, \Lambda^{m,n-q}), && \operatorname{Re} h_2 \leq -b \text{ em } \operatorname{Supp} d' v_\rho. \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

Então, dados um conjunto compacto arbitrário $K \subset V$ e $\ell \in \mathbb{Z}_+$, e fazendo-se $K' = \operatorname{Supp}\psi \subset\subset W$ temos de (2.2.12) e (2.2.15)

$$\|f_\rho\|_{K,\ell}\, \|d' v_\rho\|_\ell \leq \text{const.}\, \rho^{\frac{N}{2}+2\ell} . e^{-b\rho}, \quad \rho > 0.$$

Assim, para completar a demonstração, é suficiente mostrarmos que (cf. Lema 2.1.1')

$$\left|\int f_\rho \wedge v_\rho\right| \underset{\rho\to\infty}{\longrightarrow} \gamma, \qquad \gamma > 0.$$

Temos

$$\left|\int f_\rho \wedge v_\rho\right| = 2^\nu \rho^{N/2} \left|\int e^{\rho(h_1+h_2)} \psi D dx\, dy\, ds\, dt\right|$$

onde $D = \det(I + i\varphi_s)$; φ_s denota a matriz $\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial s_k}\right)_{1\le j,k\le d}$.
Na integral efetuamos a mudança de variáveis

$$x' = \sqrt{\rho}x, \quad y' = \sqrt{\rho}y, \quad s' = \sqrt{\rho}s, \quad t' = \sqrt{\rho}t.$$

Ficamos então com

$$\begin{aligned}(2.2.16) \qquad &\left|\int f_\rho \wedge v_\rho\right| = \\ &2^\nu \left|\int e^{H(\rho,x',y',s',t')} (\psi D)\left(\frac{x'}{\rho^{1/2}}, \frac{y'}{\rho^{1/2}}, \frac{s'}{\rho^{1/2}}, \frac{t'}{\rho^{1/2}}\right) dx' dy' ds' dt'\right|\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} H &= \rho(h_1 + h_2)\left(\frac{x'}{\rho^{1/2}}, \frac{y'}{\rho^{1/2}}, \frac{s'}{\rho^{1/2}}, \frac{t'}{\rho^{1/2}}\right) \\ &= -2(|z'|^2 + \varepsilon' |s'|^2 + |t'|^2) + 2\varepsilon' \rho |\varphi|^2 \left(\frac{x'}{\rho^{1/2}}, \frac{y'}{\rho^{1/2}}, \frac{s'}{\rho^{1/2}}, \frac{t'}{\rho^{1/2}}\right) \\ &\quad - 4i\varepsilon' \rho^{1/2} s' . \varphi\left(\frac{x'}{\rho^{1/2}}, \frac{y'}{\rho^{1/2}}, \frac{s'}{\rho^{1/2}}, \frac{t'}{\rho^{1/2}}\right). \end{aligned}$$

Mas para pontos $(x', y', s', t') \in \rho^{1/2}\,\mathrm{Supp}\,\psi$ temos, para cada $k = 1, \dots, d$

$$\begin{aligned}\left|\varphi_k\left(\frac{x'}{\rho^{1/2}}, \frac{y'}{\rho^{1/2}}, \frac{s'}{\rho^{1/2}}, \frac{t'}{\rho^{1/2}}\right)\right| &\le \left|Q_k\left(\frac{z'}{\rho^{1/2}}, \frac{t'}{\rho^{1/2}}\right)\right| + \varepsilon\left|R_k\left(\frac{z'}{\rho^{1/2}}, \frac{s'}{\rho^{1/2}}, \frac{t'}{\rho^{1/2}}; \varepsilon\right)\right| \\ &\le \frac{1}{\rho}\,\mathrm{const.}(|z'|^2 + \varepsilon' |s'|^2 + |t'|^2).\end{aligned}$$

Assim, o integrando no segundo membro de (2.2.16) converge pontualmente a

$$e^{-2(|z|^2+\varepsilon'|s|^2+|t|^2)} \quad \text{quando} \quad \rho \to \infty,$$

uma vez que $\psi(0) = D(0) = 1$; por outro lado, para ρ suficientemente grande, o integrando é limitado por

$$\text{const.}\, e^{-(|z|^2+\epsilon'|s|^2+|t|^2)}.$$

Segue então do teorema da convergência limitada de Lebesgue que

$$\left|\int f_\rho \wedge v_\rho\right| \overset{\rho\to\infty}{\longrightarrow} \gamma = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-2(|z|^2+\epsilon'|s|^2+|t|^2)}\, dx\, dy\, ds\, dt$$

o que completa nossa prova. ∎

No importante caso de estruturas CR, (uma estrutura involutiva é dita de *Cauchy-Riemann* (abreviadamente, CR) se $T' + \overline{T'} = \mathbf{C}T^*\mathcal{M}$ ou, equivalentemente, $\mathcal{V} \cap \overline{\mathcal{V}} = 0$), obtemos o seguinte corolário:

2.2.17 Corolário Suponha que a estrutura localmente integrável de $\mathcal{M}$ é CR. Dados $\mathbf{p} \in \overset{\circ}{\mathcal{M}}$, p e q inteiros, $0 \leq p \leq m$, $1 \leq q \leq n$, suponha que existe um covetor característico $\omega \in T^o_{\mathbf{p}} \setminus 0$ tal que Q_ω, a forma de Levi em ω, é não-degenerada e o número de autovalores positivos de Q_ω é igual a q ou $n-q$. Então, dadas duas vizinhanças suficientemente pequenas $W \subset V$ de $\mathbf{p}$, $(2.1.0)'_{p,q}$ não vale.

Demonstração: De fato, neste caso $\mathcal{V} \cap \overline{\mathcal{V}} = 0$. ∎

Uma estrutura involutiva é dita *real* se $T' = \overline{T'}$ ou, equivalentemente, se $\mathcal{V} = \overline{\mathcal{V}}$. Neste caso, numa vizinhança de cada ponto, $\mathcal{V}$ é gerado por campos vetoriais reais e T' por 1-formas reais. Embora não seja de uso corrente, diremos que a estrutura involutiva de $\mathcal{M}$ é *real no ponto* $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ se $T'_{\mathbf{p}} = \overline{T'_{\mathbf{p}}}$. Isto, claro, é bem mais geral. Com esta definição podemos enunciar o seguinte corolário:

2.2.18 Corolário. Suponha que a estrutura localmente integrável de $\mathcal{M}$ é real no ponto $\mathbf{p} \in \overset{\circ}{\mathcal{M}}$. Dados inteiros p, q com $0 \leq p \leq m$, $1 \leq q \leq n$, suponha que existe um covetor característico $\omega \in T^o_{\mathbf{p}} \setminus 0$ tal que Q_ω, a forma de Levi em ω, é não-degenerada e o número de autovalores positivos de Q_ω é igual a q ou $n-q$. Então, dadas duas vizinhanças suficientemente pequenas $W \subset V$ de $\mathbf{p}$, $(2.1.10)'_{p,q}$ não vale.

Demonstração: De fato, neste caso $\mathcal{V}_{\mathbf{p}} = (\mathcal{V} \cap \overline{\mathcal{V}})_{\mathbf{p}}$. ∎

2.2.19 Exemplo. Chame de x, y, ξ as coordenadas de $\mathbf{R}^3$. A estrutura de Lewy é a estrutura CR definida pelas funções $z = x + iy$, $w = \xi + i\,|z|^2$, i.e., o fibrado cotangente da estrutura é gerado aqui por dz e dw. O fibrado tangente é gerado pelo campo vetorial de Lewy

$$(2.2.20) \qquad L = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - iz\frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Façamos

$$\overline{L} = \frac{\partial}{\partial z} + i\bar{z}\frac{\partial}{\partial \xi}$$

e observe que

$$(2.2.21) \qquad [L, \overline{L}] = 2i\frac{\partial}{\partial \xi}.$$

O conjunto característico, que aqui é um fibrado de linhas, é gerado pela forma real

$$\omega = d\xi + i(zd\bar{z} - \bar{z}\,dz).$$

Assim, de (2.2.21) e da definição da forma de Levi, Q_ω é positiva definida em todos os pontos. Segue então do Corolário 2.2.17 que a estrutura de Lewy não é localmente resolúvel em ponto algum de $\mathbf{R}^3$, nem mesmo no sentido de distribuições.

No caso particular em que $m = 1$ (i.e., T' é gerado, localmente, pelo diferencial de uma única função Z de classe C^∞) e a estrutura tem formas de Levi não-degeneradas, podemos formular condições necessárias para resolubilidade local em termos da homologia singular das fibras da estrutura, conjuntos nos quais todas as soluções clássicas das equações homogêneas são constantes, cuja existência é assegurada pelo Teorema 3.1.0. Neste caso, num sistema de coordenadas conveniente (Veja Seção 1.3), Z tem a forma

$$Z = s + i\{\frac{1}{2}(t_1^2 + \cdots + t_k^2 - t_{k+1}^2 - \cdots - t_n^2) + O(|t|^3 + |s|(|s| + |t|))\}$$

para algum inteiro k, $0 \leq k \leq n$. Do Lema de Morse com parâmetros (veja [H3]) segue que, após uma mudança de coordenadas apropriada, Z terá a forma

$$Z = s + i\{\frac{1}{2}(t_1^2 + \cdots + t_k^2 - t_{k+1}^2 - \cdots - t_n^2) + \psi(s)\}$$

onde ψ é uma função real. As fibras de Z em vizinhanças apropriadas da origem em $\mathbf{R}^{n+1}$ terão portanto a homologia da esfera S^{k-1} ou da esfera S^{n-k-1} ou a de um ponto, conforme os valores dos quais elas são pré-imagens tenham parte imaginária positiva, negativa, ou nula respectivamente. Assim, se para alguma fibra F de Z o seu $(q-1)$-ésimo espaço de homologia reduzida $\tilde{H}^{q-1}(F)$ for não trivial, $\tilde{H}^{q-1}(F) \neq 0$, então $k = q$ ou $k = n - q$ e as hipóteses do Corolário 2.2.18 estão satisfeitas.

2.3 - Condições necessárias: $\mathbf{p} \in \partial\mathcal{M}$

Aqui trataremos separadamente os casos $(\mathbf{C}N^*\partial\mathcal{M})_{\mathbf{p}} \not\subset T'_{\mathbf{p}} + \overline{T'_{\mathbf{p}}}$ e $(\mathbf{C}N^*\partial\mathcal{M})_{\mathbf{p}} \subset T'_{\mathbf{p}} + \overline{T'_{\mathbf{p}}}$. Para a notação referimos o leitor à Seção 1.3.

2.3.1 Teorema. Seja $\mathbf{p} \in \partial\mathcal{M}$ tal que $(\mathbf{C}N^*\partial\mathcal{M})_{\mathbf{p}} \not\subset T'_{\mathbf{p}} + \overline{T'_{\mathbf{p}}}$. Dados inteiros p, q com $0 \leq p \leq m$, $1 \leq q \leq n-1$, suponha que existe um covetor característico $w \in T^0_{\mathbf{p}} \setminus 0$ tal que

(i) Q_ω e Q_{ω_θ} são ambas fortemente não degeneradas.

(ii) O número de autovalores positivos de Q_{ω_θ} é igual ao número de autovalores positivos de Q_ω e ambos são iguais a q

ou

O número de autovalores positivos de Q_{ω_θ} é igual a $n-q-1$ e o número de autovalores positivos de Q_ω é igual a $n-q$.

(iii) $(\mathcal{V} \cap \overline{\mathcal{V}})^{\perp_\omega}_{\mathbf{p}} \subset (\mathbf{C}T\partial\mathcal{M})_{\mathbf{p}}$.

Então, dadas duas vizinhanças suficientemente pequenas $W \subset V$ de $\mathbf{p}$, $(2.1.0)_{p,q}$ não vale.

Demonstração: Claro, podemos nos limitar ao caso $p = 0$ e supor que as formas de Levi Q_ω e Q_{ω_θ} têm, cada uma delas, precisamente q autovalores positivos; Q_{ω_θ} terá então $n-q-1$ e, Q_ω, $n-q$ autovalores negativos. Tomemos um sistema de coordenadas U em torno de $\mathbf{p}$ exatamente como na Proposição 1.2.7. Nestas coordenadas o fibrado $\mathcal{V}$ é gerado em U pelos campos vetoriais (2.2.2) determinados pelas relações de ortogonalidade (2.2..3). Podemos assumir que $\omega = ds_d|_0$. Como Q_ω é não degenerada, pelos resultados da Seção 1.3, podemos assumir também que (2.2.4), (2.2.5) e (2.2.6) valem. Todavia, U não é mais, em geral, uma vizinhança da origem em $\mathbf{C}^\nu \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{n'-1} \times \overline{\mathbf{R}}_+$; agora U é uma vizinhança aberta da origem num semi-espaço fechado de $\mathbf{C}^\nu \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{n'}$ e o bordo de $\mathcal{M}$ em U é (parte de) um hiperplano da forma $\sum_{\ell=1}^{n'} b_\ell t_\ell + \sum_{j=1}^{\nu} \bar{a}_j z_j + a_j \bar{z}_j = 0$ com $b_\ell \in \mathbf{R}$ e $a_j \in \mathbf{C}$. Como por hipótese $(\mathcal{V} \cap \overline{\mathcal{V}})^{\perp_\omega}_{\mathbf{p}} \subset (\mathbf{C}T\partial\mathcal{M})_{\mathbf{p}}$, segue que $a_j = 0$, $1 \leq j \leq \nu$;

assim, o bordo de $\mathcal{M}$ em U é na verdade um hiperplano da forma $\sum_{\ell=1}^{n'} b_\ell t_\ell = 0$.

Observe agora que $(\mathcal{V}_{\partial\mathcal{M}} \cap \overline{\mathcal{V}}_{\partial\mathcal{M}})_{\mathrm{p}} = (\mathcal{V} \cap \overline{\mathcal{V}})_{\mathrm{p}} \cap (\mathbf{C}T\partial\mathcal{M})_{\mathrm{p}}$; dado que $\partial\mathcal{M}$ é não característico, do Corolário 1.1.22 concluimos que $\dim_{\mathbf{C}}(\mathcal{V}_{\partial\mathcal{M}} \cap \overline{\mathcal{V}}_{\partial\mathcal{M}})_{\mathrm{p}} = \dim_{\mathbf{C}}(\mathcal{V} \cap \overline{\mathcal{V}})_{\mathrm{p}} - 1 = n' - 1$. Como por hipótese Q_ω é não degenerada em $(\mathcal{V} \cap \overline{\mathcal{V}})_{\mathrm{p}}$ e em $(\mathcal{V}_{\partial\mathcal{M}} \cap \overline{\mathcal{V}}_{\partial\mathcal{M}})_{\mathrm{p}})$, segue da observação feita no último parágrafo da Seção 1.3 que Q_ω é não degenerada em $\mathcal{V}_{\mathrm{p}}^{o}$ e em $(\mathcal{V}_{\partial\mathcal{M}})_{\mathrm{p}}^{o}$; assim, é possível efetuarmos uma mudança linear nas variáveis $t_1, \ldots, t_{n'}$ de modo que, nas novas variáveis, que ainda denotamos por $t_1, \ldots, t_{n'}$, $L_{\nu+\ell}|_{\mathrm{p}} \in (\mathcal{V}_{\partial\mathcal{M}})_{\mathrm{p}}^{o}$, $1 \leq \ell \leq n' - 1$, $L_n|_{\mathrm{p}} \in \mathcal{V}_{\mathrm{p}}^{o}$ e $\{L_{\nu+\ell}|_{\mathrm{p}}\}_{1 \leq \ell < n'}$ forma uma base ortonormal de $(\mathcal{V} \cap \overline{\mathcal{V}})_{\mathrm{p}}$ com respeito ao produto hermitiano B_ω associado a Q_ω. Como Q_{ω_n} e Q_ω têm igual número de autovalores positivos, possivelmente após uma reordenação das $n' - 1$ primeiras variáveis t_ℓ, teremos ainda (2.2.4), (2.2.5) e (2.2.6) com $\alpha + \beta = q$. O bordo de $\mathcal{M}$ em U será, agora, dado pela relação $t_{n'} = 0$; U é portanto uma vizinhança aberta da origem em $\mathbf{C}^\nu \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{n'-1} \times \overline{\mathbf{R}}_+$. Em U, o fibrado $\mathcal{V}$ é gerado pelos campos vetoriais (2.2.2) determinados pelas relações (2.2.3).

O restante da prova segue paralelamente à prova do Teorema 2.2.1; definimos h, h_1, h_2 e ψ exatamente como foi feito lá. Definimos f_ρ e v_ρ por (2.2.14); o "pull-back" para o bordo de v_ρ, $i_b^*(v_\rho)$, se anula identicamente e completamos nossa prova fazendo uso do Lema 2.1.1. ∎

2.3.2 Corolário. Suponha que a estrutura localmente integrável de $\mathcal{M}$ é real no ponto $\mathrm{p} \in \partial\mathcal{M}$. Dados inteiros p, q com $0 \leq p \leq m$, $1 \leq q \leq n - 1$, suponha que existe um covetor característico $\omega \in T_{\mathrm{p}}^{o} \setminus 0$ tal que

(i) Q_ω e Q_{ω_n} são ambas não degeneradas.

(ii) O número de autovalores positivos de Q_{ω_n} é igual ao número de autovalores positivos de Q_ω e ambos são iguais a q

ou

O número de autovalores positivos de Q_{ω_n} é igual a $n - q - 1$ e o número de autovalores positivos de Q_ω é igual a $n - q$.

Então, dadas duas vizinhanças suficientemente pequenas $W \subset V$ de p, $(2.1.0)_{p,q}$ não vale.

Demonstração: De fato, neste caso $(CN^*\partial\mathcal{M})_{\mathrm{p}} \not\subset T'_{\mathrm{p}} + \overline{T}'_{\mathrm{p}}$, pois $\partial\mathcal{M}$ é não característico, e $\mathcal{V}_{\mathrm{p}} = (\mathcal{V} \cap \overline{\mathcal{V}})_{\mathrm{p}}$. ∎

Para podermos enunciar o teorema a seguir necessitaremos das seguintes definições:

2.3.3 Definição. Dados um ponto $\mathbf{p} \in \partial\mathcal{M}$ e um covetor real $\theta \in (N^*\partial\mathcal{M})_{\mathbf{p}} \setminus 0$ diremos que θ *aponta para fora de* $\mathcal{M}$ se $\langle\theta, v\rangle > 0$ para todo vetor $v \in (T\mathcal{M})_{\mathbf{p}}$ apontando para fora de $\mathcal{M}$.

2.3.4 Definição. Seja $\mathbf{p} \in \partial\mathcal{M}$. Dado um covetor característico $\omega \in (T_{\partial\mathcal{M}})^o_{\mathbf{p}}$ diremos que ω *aponta para fora de* $\mathcal{M}$ se $\mathrm{Im}(\Theta^{-1}(\omega)) \in (N^*\partial\mathcal{M})_{\mathbf{p}}$ (veja Seção 1.1) aponta para fora de $\mathcal{M}$. Diremos que ω é *tangente a* $\mathcal{M}$ se $\Theta^{-1}(\omega)$ for um covetor real.

Se $(\mathbf{C}N^*\partial\mathcal{M})_{\mathbf{p}} \not\subset T'_{\mathbf{p}} + \overline{T}'_{\mathbf{p}}$ todos os covetores característicos em $(T_{\partial\mathcal{M}})^o_{\mathbf{p}}$ são tangentes a $\mathcal{M}$; é precisamente para pontos $\mathbf{p} \in \partial\mathcal{M}$ com $(\mathbf{C}N^*\partial\mathcal{M})_{\mathbf{p}} \subset T'_{\mathbf{p}} + \overline{T}'_{\mathbf{p}}$ que esta definição tem interesse, como mostra o teorema a seguir.

2.3.5 Teorema. Seja $\mathbf{p} \in \partial\mathcal{M}$ tal que $(\mathbf{C}N^*\partial\mathcal{M})_{\mathbf{p}} \subset T'_{\mathbf{p}} + \overline{T}'_{\mathbf{p}}$. Dados inteiros p, q com $0 \le p \le m$, $1 \le q \le n-1$, suponha que existe um covetor característico $\omega \in (T_{\partial\mathcal{M}})^o_{\mathbf{p}} \setminus 0$ tal que

(i) ω é tangente a $\mathcal{M}$ ou aponta para fora de $\mathcal{M}$.

(ii) Q_ω é fortemente não degenerada.

(iii) Q_ω tem q autovalores positivos e $n - q - 1$ autovalores negativos.

Então, dadas duas vizinhanças suficientemente pequenas $W \subset V$ de $\mathbf{p}$, $(2.1.0)_{p,q}$ não vale.

Demonstração: Podemos supor $p = 0$. Suponhamos que existe $\omega \in (T_{\partial\mathcal{M}})^o_{\mathbf{p}} \setminus 0$ satisfazendo as condições (i)-(iii) e tomemos um sistema de coordenadas U em torno de $\mathbf{p}$ exatamente como na Proposição 1.2.9. Nestas coordenadas, um cálculo simples mostra que as relações de ortogonalidade

$$
\begin{aligned}
&L_j z_i = L_j w_k = 0 && 1 \le j \le n,\ 1 \le i \le \nu - 1,\ 0 \le k \le d \\
&L_j \bar{z}_i = \delta_{ij} && 1 \le i, j \le \nu - 1 \\
&L_{\nu+\ell} t_r = \delta_{\ell r} && 0 \le \ell, r \le n' \\
&L_j t_\ell = L_{\nu+\ell} \bar{z}_j = 0 && 1 \le j \le \nu - 1,\ 0 \le \ell \le n'
\end{aligned}
$$

definem os campos vetoriais

$$
\begin{aligned}
L_j &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} + \sum_{k=0}^{d} \lambda_{jk}(z, s, t_o, t)\, \frac{\partial}{\partial s_k} \qquad 1 \le j \le \nu - 1 \\
L_{\nu+\ell} &= \frac{\partial}{\partial t_\ell} + \sum_{k=0}^{d} \mu_{\ell k}(z, s, t_o, t)\, \frac{\partial}{\partial s_k} \qquad 0 \le \ell \le n'
\end{aligned}
\tag{2.3.6}
$$

que formam uma base C^∞ de $\mathcal{V}$ em U.

O conjunto característico $(T_{\partial\mathcal{M}})^o_{\mathrm{p}}$ é gerado por $ds_o|_0, ds_1|_0, \ldots, ds_d|_0$; qualquer covetor característico na origem terá a expressão $\tau.ds|_0$ com $\tau = (\tau_o, \tau_1, \ldots, \tau_d) \in \mathbf{R}^{d+1}$. Como, por hipótese, ω é tangente a $\mathcal{M}$ ou aponta para fora de $\mathcal{M}$, escrevendo-se $\omega = \tau.ds|_0$ teremos necessariamente $\tau_o \geq 0$. Assim, basicamente, temos dois casos a discutir: $\tau_o = 1$, $\tau_o = 0$. Através de uma mudança linear nas variáveis s_k, $0 \leq k \leq d$, podemos assumir que $\tau = e_o = (1, 0, \ldots, 0)$ ou $\tau = e_d = (0, \ldots, 0, 1)$.

Suponha que a afirmação é verdadeira para $\tau = e_o$ (i.e., verdadeira para qualquer covetor característico apontando para fora de $\mathcal{M}$); é uma conseqüência fácil do Teorema de Rouché da teoria de funções de uma variável complexa que uma pequena perturbação de e_d da forma $\tau' = e_d + \delta e_o$, $\delta > 0$, produz um covetor característico $\omega' = \tau'.ds|_0 \in (T_{\partial\mathcal{M}})^o_{\mathrm{p}}$ apontando para fora de $\mathcal{M}$ tal que a forma de Levi em ω' também tem q autovalores positivos e $n-q-1$ autovalores negativos e portanto a afirmação também será verdadeira para covetores característicos tangentes a $\mathcal{M}$. Assim, é suficiente provarmos a afirmação para $\omega = e_o.ds|_0 = ds_o|_0$.

Como Q_ω é fortemente não-degenerada, pelos resultados da Seção 1.3 podemos supor que

$$\varphi_o = Q_o + O(|z|^3 + |t|^3 + (|s| + |t_o|)(|z| + |s| + |t_o| + |t|))$$

onde Q_o é a forma quadrática

$$Q_o(z, t) = |z'|^2 - |z''|^2 + |t'|^2 - |t''|^2$$

com z', z'', t', t'' como em (2.2.6) e $0 \leq \alpha \leq \nu - 1$, $0 \leq \beta \leq n'$, $\alpha + \beta = q$.

Efetuamos a mudança de variáveis

$$\begin{aligned}
\tilde{z}_j &= \varepsilon^{-1} z_j & 1 \leq j \leq \nu - 1 \\
\tilde{s}_k &= \varepsilon^{-2} s_k & 0 \leq k \leq d \\
\tilde{t}_o &= \varepsilon^{-2} t_o & \\
\tilde{t}_\ell &= \varepsilon^{-1} t_\ell & 1 \leq \ell \leq n'
\end{aligned}$$

e também escrevemos

$$\tilde{w}_k = \varepsilon^{-2} w_k \qquad 0 \leq k \leq d.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_o &= \tilde{s}_o + i\{\tilde{t}_o + Q_o(\tilde{z}, \tilde{t}) + \varepsilon R_o(\tilde{z}, \tilde{s}, \tilde{t}_o, \tilde{t}; \varepsilon)\} \\
\tilde{w}_k &= \tilde{s}_k + i\{Q_k(\tilde{z}, \tilde{t}) + \varepsilon R_k(\tilde{z}, \tilde{s}, \tilde{t}_o, \tilde{t}; \varepsilon)\} \quad 1 \leq k \leq d
\end{aligned}$$

onde cada Q_k é uma forma quadrática e

$$\left|R_k(\tilde{z},\tilde{s},\tilde{t}_o,\tilde{t};\varepsilon)\right| \leq \text{const.}\left(|\tilde{z}|^3 + |\tilde{t}|^3 + (|\tilde{s}| + |\tilde{t}_o|)(|\tilde{z}| + |\tilde{s}| + |\tilde{t}_o| + |\tilde{t}|)\right)$$

$0 \leq k \leq d$; a constante é independente de $\varepsilon > 0$.

Agora definimos

$$h = \tilde{w}_o + i\varepsilon' \sum_{k=0}^{d} \tilde{w}_k^2.$$

Obtemos então

$$\left|\operatorname{Im} h - (1 - 2\varepsilon'\tilde{t}_o)Q_o - \varepsilon' |\tilde{s}|^2 - \tilde{t}_o + \varepsilon'\tilde{t}_o^2\right|$$
$$\leq C\{\varepsilon(|\tilde{z}|^2 + |\tilde{s}|^2 + |\tilde{t}_o|^2 + |\tilde{t}|^2) + \varepsilon'(|\tilde{z}|^4 + |\tilde{s}|^4 + |\tilde{t}_o|^4 + |\tilde{t}|^4)\}$$

e escolhemos ε e ε' de modo que

$$(2.3.7) \qquad 0 < \varepsilon < \varepsilon' < 1,\ C\varepsilon < \frac{1}{4}\varepsilon',\ C(\varepsilon + \varepsilon') < \frac{1}{4},\ C'\varepsilon' < \frac{1}{4}$$

onde C' é uma constante independente de ε e ε' que antecipamos aqui.

Neste instante fixamos as coordenadas $\tilde{z}$, $\tilde{s}$, $\tilde{t}_o$, $\tilde{t}$ bem como as funções $\tilde{w}_k$, que passamos a denotar por z, s, t_o, t e w_k. Tomamos a vizinhança aberta $V \subset U$ de tal modo que em V

$$(2.3.8) \qquad |z|^2 + |s|^2 + |t|^2 < 1,\ C|s|^2 < \frac{1}{4},\ Ct_o^2 < \frac{1}{4},\ 2\varepsilon'|t_o| < \frac{1}{4},\ |t_o| < \frac{1}{2}.$$

Com estas escolhas segue que em V

$$\frac{1}{2}(|z'|^2 + \varepsilon'|s|^2 + |t_o|^2 + |t'|^2) - \frac{3}{2}(|z''|^2 + |t''|^2) + t_o - t_o^2 \leq \operatorname{Im} h \leq$$
$$\frac{3}{2}(|z'|^2 + \varepsilon'|s|^2 + |t_o^2| + |t'|^2) - \frac{1}{2}(|z''|^2 + |t''|^2) + t_o - t_o^2.$$

Introduzimos agora as funções:

$$h_o = -ih - 2(|z'|^2 + |t'|^2) - 2\varepsilon' \sum_{k=0}^{d} w_k^2$$
$$h_\rho = ih - 2(|z''|^2 + |t''|^2) - 2(1 + \varepsilon')t_o^2 - 2\rho t_o^4, \quad \rho > o.$$

De (2.3.6) segue que

$$
(2.3.9) \qquad \begin{aligned} &L_j h_o = 0 \quad \text{se} \quad \alpha + 1 \leq j \leq \nu \text{ ou } \nu + \beta + 1 \leq j \leq n \\ &L_j h_\rho = 0 \quad \text{se} \quad 1 \leq j \leq \alpha \text{ ou } \nu + 1 \leq j \leq \nu + \beta. \end{aligned}
$$

Cálculos simples fornecem

$$
(2.3.10) \qquad \begin{aligned} \operatorname{Re} h_o \leq & -\frac{1}{2}(|z|^2 + \varepsilon' |s|^2 + |t_o|^2 + |t|^2) + t_o + 2t_o^2 \\ & + \varepsilon'(4t_o\varphi_o + 2\sum_{k=0}^{d} \varphi_k^2) \end{aligned}
$$

$$
(2.3.11) \qquad \operatorname{Re} h_\rho \leq -\frac{1}{2}(|z|^2 + \varepsilon' |s|^2 + |t_o|^2 + |t|^2) + \chi(\rho, t_o)
$$

onde

$$
\chi(\rho, t_o) = -t_o - t_o^2 - 2\rho t_o^4.
$$

Lembrando que em U $t_o \leq 0$, de (2.3.8) segue que

$$
(2.3.12) \qquad t_o + 2t_o^2 \leq 0 \quad \text{em} \quad V.
$$

Evidentemente, existe uma constante $C' > 0$, independente de ε e ε', tal que

$$
(2.3.13) \qquad 4t_o\varphi_o + 2\sum_{k=0}^{d} \varphi_k^2 \leq C'(|z|^2 + |t_o|^2 + |t|^2) \quad \text{em} \quad V.
$$

Segue então de (2.3.10), (2.3.12), (2.3.13) e (2.3.7) que em V

$$
(2.3.14) \qquad \operatorname{Re} h_o \leq -\frac{1}{4}(|z|^2 + \varepsilon' |s|^2 + |t_o|^2 + |t|^2).
$$

Iremos agora nos utilizar do Lema 2.1.1 para concluir a demonstração:

Seja $W \subset V$ outra vizinhança aberta da origem e tomemos $\psi \in C_c^\infty(W)$ com $\psi \equiv 1$ numa terceira vizinhança da origem; existe portanto um número real $b > 0$ tal que

$$
(2.3.15) \qquad \operatorname{Supp} d\psi \subset\subset \{(z, s, t_o, t) : |z|^2 + \varepsilon' |s|^2 + |t_o|^2 + |t|^2 > 4b\}.
$$

Note agora que se

$$
M(\rho) = \sup\{\chi(\rho, t_o) : t_o \in \mathbf{R}\}, \quad \rho > 0
$$

então $M(\rho) \to 0$ quando $\rho \to \infty$. Assim, se ρ é suficientemente grande, digamos $\rho \geq \rho_o$, teremos

$$\chi(\rho, t_o) \leq b \qquad \rho \geq \rho_o, \quad t_o \in \mathbf{R}. \tag{2.3.16}$$

Para cada $\rho \geq \rho_o$ definimos:

$$\begin{aligned} f_\rho &= e^{\rho h_o} d\bar{z}_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_\alpha \wedge dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_\beta \\ v_\rho &= \rho^{\frac{N}{2}} \psi\, e^{\rho h_\rho} d\bar{z}_{\alpha+1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{\nu-1} \wedge dt_{\beta+1} \wedge \ldots \wedge dt_{n'} \wedge \\ &\qquad dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_{\nu-1} \wedge dw_o \wedge dw_1 \wedge \ldots \wedge dw_d \wedge dt_o. \end{aligned}$$

De (2.3.9), (2.3.11), (2.3.15) e (2.3.16) concluimos que

$$\begin{aligned} & f_\rho \in C^\infty(V, \Lambda^{o,q}), \qquad d' f_\rho = 0 \\ & v_\rho \in C_c^\infty(W, \Lambda^{m,n-q}), \quad \operatorname{Re} h_\rho \leq -b \text{ em } \operatorname{Supp} d' v_\rho. \end{aligned} \tag{2.3.17}$$

Então, dados um conjunto compacto arbitrário $K \subset V$ e $\ell \in \mathbf{Z}_+$ façamos $K' = \operatorname{Supp} \psi \subset\subset W$. De (2.3.9), (2.3.14) e (2.3.15),

$$\|f_\rho\|_{K,\ell} (\|d' v_\rho\|_\ell + \|i_h^* v\|_\ell) \leqslant \text{const.}\, \rho^{\frac{N}{2}+2\ell} e^{-b\rho}, \quad \rho \geqslant \rho_o.$$

Assim, para completar a demonstração (cf. Lema 2.1.1) é suficiente mostrarmos que

$$\left| \int f_\rho \wedge v_\rho \right| \stackrel{\rho \to \infty}{\longrightarrow} \gamma, \qquad \gamma \neq 0.$$

Temos

$$\left| \int f_\rho \wedge v_\rho \right| = 2^{\nu-1} \rho^{N/2} \left| \int e^{\rho(h_o + h_\rho)} \psi D \, dx dy ds dt_o dt \right|$$

onde $D = \det(I + i\varphi_s)$.

Na integral efetuamos a mudança de variáveis

$$x' = \sqrt{\rho} x, \; y' = \sqrt{\rho} y, \; s' = \sqrt{\rho} s, \; t'_o = \sqrt{\rho} t_o, \; t' = \sqrt{\rho} t.$$

Ficamos então com

$$\left| \int f_\rho \wedge v_\rho \right| = \tag{2.3.18}$$

$$2^{\nu-1}\left|\int_{\mathbf{R}^{2\nu+d-1}\times\overline{\mathbf{R}}_-\times\mathbf{R}^{n'}} e^{H(\rho,x',y',s',t'_o,t')}(\psi D)\left(\frac{x'}{\rho^{1/2}},\frac{y'}{\rho^{1/2}},\frac{s'}{\rho^{1/2}},\frac{t'_o}{\rho^{1/2}},\frac{t'}{\rho^{1/2}}\right)dx'dy'ds'dt'_odt'\right|$$

onde

$$\begin{aligned}
H &= \rho(h_o+h_\rho)\left(\frac{x'}{\rho^{1/2}},\frac{y'}{\rho^{1/2}}\frac{s'}{\rho^{1/2}},\frac{t'_o}{\rho^{1/2}},\frac{t'}{\rho^{1/2}}\right)\\
&= -2(|z'|^2+\varepsilon'|s'|^2+|t'_o|^2+|t'|^2+|t'_o|^4)-4i\varepsilon' s'_o t'_o\\
&\quad -4i\varepsilon'\rho^{1/2}s'.\varphi\left(\frac{x'}{\rho^{1/2}},\dots\right)+2\varepsilon'\rho|\varphi|^2\left(\frac{x'}{\rho^{1/2}},\dots\right)\\
&\quad +4\varepsilon'\rho^{1/2}t'_o\varphi_o\left(\frac{x'}{\rho^{1/2}},\dots\right).
\end{aligned}$$

Assim, o integrando no segundo membro de (2.3.18) converge pontualmente a

$$e^{-2(|z|^2+\varepsilon'|s|^2+|t_o|^2+|t|^2+|t_o|^4)-4i\varepsilon' s_o t_o}\quad \text{quando}\quad \rho\to\infty.$$

Por outro lado, para ρ suficientemente grande o integrando é limitado por

$$\text{const. } e^{-(|z|^2+\varepsilon'|s|^2+|t_o|^2+|t|^2)}.$$

Segue então do teorema da convergência dominada de Lebesgue que

$$\left|\int f_\rho\wedge v_\rho\right|\underset{\rho\to\infty}{\longrightarrow}|\gamma|$$

onde

$$\gamma=\int_{\mathbf{R}^{2\nu+d-1}\times\overline{\mathbf{R}}_-\times\mathbf{R}^{n'}} e^{-2(|z|^2+\varepsilon'|s|^2+|t_o|^2+|t|^2+|t_o|^4)-4i\varepsilon' s_o t_o}dxdydsdt_odt.$$

Queremos agora mostrar que $\gamma\neq 0$; para isto recorremos à identidade

(2.3.19) $$\int_{\mathbf{R}} e^{-icx-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{c^2}{4a}};\ c\in\mathbf{C},\ a>0.$$

Escrevendo-se $s=(s_o,s')$, com $s'=(s_1,\dots,s_d)$, do Teorema de Fubini e de (2.3.19) obtemos

$$\begin{aligned}
\gamma &= \int_{\mathbf{R}^{2\nu+d-2}\times\overline{\mathbf{R}}_-\times\mathbf{R}^{n'}} dxdyds'dt_odt\ e^{-2(|z|^2+\varepsilon'|s'|^2+|t_o|^2+|t|^2+|t_o|^4)}\int_{\mathbf{R}} e^{-i4\varepsilon' t_o s_o-2\varepsilon' s_o^2}ds_o\\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2\varepsilon'}}\int_{\mathbf{R}^{2\nu+d-2}\times\overline{\mathbf{R}}_-\times\mathbf{R}^{n'}} e^{-2(|z|^2+\varepsilon'|s'|^2+(1+\varepsilon')|t_o|^2+|t|^2+|t_o|^4)}dxdyds'dt_odt
\end{aligned}$$

o que completa nossa prova. ∎

Para estruturas de Cauchy-Riemann temos o seguinte interessante corolário:

2.3.20 Corolário. Suponha que a estrutura localmente integrável de $\mathcal{M}$ é CR. Dados $\mathbf{p} \in \partial\mathcal{M}$, p e q inteiros com $0 \leq p \leq m$, $1 \leq q \leq n-1$, suponha que existe um covetor característico $\omega \in (T_{\partial\mathcal{M}})^o_{\mathbf{p}} \setminus 0$ tal que

(i) ω é tangente a $\mathcal{M}$ ou aponta para fora de $\mathcal{M}$.

(ii) Q_ω tem q autovalores positivos e $n-q-1$ autovalores negativos.

Então, dadas duas vizinhanças suficientemente pequenas $W \subset V$ de $\mathbf{p}$, $(2.1.0)_{p,q}$ não vale.

Demonstração: Claro, neste caso $T' + \overline{T}' = \mathbf{C}T^*\mathcal{M}$ e $\mathcal{V} \cap \overline{\mathcal{V}} = 0$. ∎

2.3.21 Exemplo. Chame de $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$ as coordenadas em $\mathbf{C}^2$ e considere aí a estrutura complexa definida por dz e $d\zeta$. O fibrado tangente da estrutura, $\mathcal{V}$, é gerado pelas derivações anti-holomorfas $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}$. Seja Σ a hipersuperfície real

$$\Sigma = \{(z,\zeta) \in \mathbf{C}^2 : \sigma(x,y,\xi,\eta) = 0\}$$

onde

$$\sigma(x,y,\xi,\eta) = \eta - (x^2 + y^2).$$

Note que Σ tem a forma de $\mathbf{R} \times \{\text{parabolóide}\}$. Considere também $\Sigma^+ = \{\sigma \geq o\}$ e $\Sigma^- = \{\sigma \leq 0\}$; obviamente $\partial\Sigma^+ = \partial\Sigma^- = \Sigma$. A estrutura tangente induzida em Σ é gerada pelo campo vetorial tangencial de Cauchy-Riemann

$$L = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - 2iz\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}.$$

(Em coordenadas x, y, ξ, L é o campo vetorial de Lewy (2.2.20)).
Fazendo-se $\overline{L} = \frac{\partial}{\partial z} + 2i\bar{z}\frac{\partial}{\partial \zeta}$ verificamos que

$$[L, \overline{L}] = 2i\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}\right). \tag{2.3.22}$$

O conjunto característico $(T_\Sigma)^o$, que aqui é um fibrado real de linhas, é gerado em Σ pela forma real

$$\omega = \frac{1}{2}(d\zeta + d\bar{\zeta}) + i(z\,d\bar{z} - \bar{z}\,dz).$$

É fácil ver que se $\theta = d\zeta - 2i\bar{z}dz$ então

$$\theta \in T' \qquad \omega = \operatorname{Re}\theta \qquad d\sigma = \operatorname{Im}\theta.$$

É imediato então que ω aponta para fora de Σ^-. Por outro lado, de (2.3.22) e da definição de forma de Levi, Q_ω é positiva-definida em todos os pontos de Σ. Segue então do Corolário 2.3.20 que a restrição a Σ^- da estrutura complexa de $\mathbf{C}^2$ não é localmente resolúvel em ponto algum de $\partial\Sigma^-$, nem mesmo no sentido de distribuições. A restrição a Σ^+ da estrutura acima é localmente resolúvel em todos os pontos de Σ^+, conforme [A-H].

CAPÍTULO III

CONDIÇÕES NECESSÁRIAS E SUFICIENTES PARA RESOLUBILIDADE LOCAL DE ESTRUTURAS ANALÍTICAS DE COPOSTO UM EM VARIEDADES COM BORDO

Neste capítulo $\mathcal{M}$ denotará uma variedade com bordo, analítica, munida de uma estrutura localmente integrável, também analítica, com fibrado tangente $\mathcal{V}$ e fibrado cotangente T'. Assumimos que o bordo $\partial\mathcal{M}$ é não-característico e que a dimensão das fibras de T' é igual a um; T' é então um fibrado de linhas. Denotamos por $n+1$ a dimensão de $\mathcal{M}$ e assumimos $n \geq 1$.

3.1 - A Propriedade (P) e algumas considerações geométricas

Localmente, T' é gerado pelo diferencial de uma única função analítica. Seja então U uma vizinhança aberta de um ponto $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ onde T' é gerado pelo diferencial dZ de uma função analítica Z e considere a seguinte propriedade:

(P) *Existe uma base de vizinhanças de* $\mathbf{p}$ *em* $\mathcal{M}$ *em cada uma das quais as fibras de* Z *são conexas.*

Por fibras de Z em uma vizinhança V de $\mathbf{p}$ em $\mathcal{M}$ entendemos as pré-imagens de pontos sob a aplicação $Z|_V : V \to \mathbb{C}$.
Neste contexto, dispomos do seguinte resultado básico, cuja demonstração pode ser encontrada em [T3] ou [T4]:

3.1.0 Teorema. Existe uma vizinhança aberta $V \subset U$ de $\mathbf{p}$ em $\mathcal{M}$ tal que toda solução $h \in C^1(U)$ é o limite uniforme, em V, de uma seqüência de polinômios, a coeficientes complexos, em Z.

(Uma solução $h \in C^1(U)$ é uma função de classe C^1 em U tal que dh é uma seção de T' em U; h é, portanto, solução das equações homogênes associadas a $\mathcal{V}$).

Segue imediatamente do Teorema 3.1.0 que se (P) é satisfeita por Z, então, para qualquer outra função Z', de classe C^ω em uma vizinhança aberta U' de $\mathbf{p}$ em $\mathcal{M}$, com dZ' gerando T' em U', (P) será satisfeita com Z' substituindo Z. Assim, podemos fazer a seguinte definição:

3.1.1 Definição. Diremos que $\mathcal{V}$ satisfaz a Propriedade (P) no ponto $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ se (P) é satisfeita para alguma função analítica Z definida em uma vizinhança aberta U de $\mathbf{p}$ em $\mathcal{M}$ com dZ gerando T' em U. Diremos também que $\mathcal{V}$ satisfaz a Propriedade (P) em um subconjunto aberto V de $\mathcal{M}$ se $\mathcal{V}$ satisfaz a Propriedade (P) em todos os pontos de V.

Esta propriedade, intrínseca da estrutura, é conhecida como a *Propriedade* (P) *de Nirenberg-Treves.*

A Propriedade (P) é equivalente a

(3.1.2) *Toda vizinhança aberta $V_{\mathbf{p}} \subset U$ de* p *contém outra vizinhança aberta $W_{\mathbf{p}}$ de* p *que intercepta, no máximo, uma componente conexa de cada fibra de Z em $V_{\mathbf{p}}$.*

De fato, suponha que $V_{\mathbf{p}}$ contém uma vizinhança $W'_{\mathbf{p}}$ de $\mathbf{p}$ sobre a qual toda fibra de Z é conexa. Então podemos tomar $W_{\mathbf{p}}$ em (3.1.2) como o interior de $W'_{\mathbf{p}}$. Reciprocamente, se vale (3.1.2) tome $W'_{\mathbf{p}}$ como a reunião de todas as componentes conexas de fibras de Z em $V_{\mathbf{p}}$ que interceptam $W_{\mathbf{p}}$.

Da Proposição 1.2.1 (Proposição 1.2.10 resp.) segue que, dado um ponto $\mathbf{p} \in \partial\mathcal{M}$ ($\mathbf{p} \in \overset{\circ}{\mathcal{M}}$ respec.), podemos raciocinar, localmente, como se $\mathcal{M}$ fosse um subconjunto aberto U de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1} \times \overline{\mathbf{R}}_+$ ($\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ respec.), $\mathbf{p}$ a origem de $\mathbf{R}^{n+1}$ (onde escrevemos as coordenadas como $(x, t_1, \ldots, t_n)$), e o fibrado T' gerado, em U, pelo diferencial da função

$$Z = x + i\phi(x,t) \tag{3.1.3}$$

$t = (t_1, \ldots, t_n)$, ϕ função analítica real em U com ϕ e $d_x\phi$ se anulando em $\mathbf{p}$. Em qualquer dos casos, o fibrado $\mathcal{V}$ será então gerado em U pelos campos vetoriais

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + \lambda_j(x,t)\frac{\partial}{\partial x} \qquad j = 1, \ldots, n \tag{3.1.4}$$

definidos pelas relações de ortogonalidade

$$\begin{aligned} L_j Z &= 0 & j &= 1, \ldots, n \\ L_j t_k &= \delta_{jk} & j, k &= 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Claro,

$$\lambda_j = -\frac{Z_{t_j}}{Z_x} = -i\phi_{t_j}/1 + i\phi_x. \tag{3.1.5}$$

Será conveniente introduzirmos também o campo vetorial

$$L_o = Z_x^{-1}\frac{\partial}{\partial x}. \tag{3.1.6}$$

Claramente,

$$L_o t_k = 0, \quad k = 1, \ldots, n; \qquad L_o Z = 1.$$

Assim, $L_o, L_1, \ldots, L_n$ é a base em $\mathbf{C}T\mathcal{M}$ dual de $dZ, dt_1, \ldots, dt_n$ em cada ponto de U. Temos ainda

$$[L_j, L_k] = 0 \qquad j, k = 0, 1, \ldots, n. \tag{3.1.7}$$

De fato, $L_j L_k - L_k L_j$ anula Z e todos os t_ℓ's.

Tomaremos U da forma

$$U = J \times B \tag{3.1.8}$$

onde J é um intervalo aberto da reta centrado em 0 e B é uma bola aberta centrada na origem em $\mathbf{R}^{n-1} \times \overline{\mathbf{R}}_+$ ($\mathbf{R}^n$ respec.). Devido à forma especial da função Z (veja (3.1.3)) as fibras $Z^{-1}(z_o)$ em U são da forma

$$(x, t) \in V : x = x_o \quad \phi(x_o, t) = y_o \qquad (z_o = x_o + iy_o)$$

e podem ser identificadas a subconjuntos da bola B.

No restante desta seção vamos nos interessar apenas pelo caso em que $\mathfrak{p}$ é um ponto do bordo de $\mathcal{M}$: $\mathfrak{p} \in \partial\mathcal{M}$. Denotemos por B', B'' duas bolas abertas centradas na origem em $\mathbf{R}_{n-1} \times \overline{\mathbf{R}}_+$ e por B uma bola aberta centrada na origem em $\mathbf{R}^n$ tais que

$$B'' \subset B' \subset\subset B$$

e considere uma função analítica real φ definida em B. Se A é qualquer subconjunto de B e c é um número real qualquer escreveremos

$$A^+(c) = \{t \in A : \varphi(t) > c\} \qquad A^-(c) = \{t \in A : \varphi(t) < c\}$$
$$A^o(c) = \{t \in A : \varphi(t) = c\}.$$

3.1.9 Lema. Suponha que

para todo número real c, $B''^{\circ}(c)$ está contido em uma única componente conexa de $B'^{\circ}(c)$.

Então vale a seguinte propriedade:

(3.1.10) *para todo número real c, $B''^{+}(c)$ está contido em uma única componente conexa de $B'^{+}(c)$ e $B''^{-}(c)$ está contido em uma única componente conexa de $B'^{-}(c)$.*

Demonstração: Imediata. ∎

O Lema 3.1.11 a seguir é uma recíproca parcial do Lema 3.1.9. Na sua prova usamos o seguinte fato: todo subconjunto semi-analítico compacto de $\mathbf{R}^n$ pode ser finitamente estratificado, i.e., escrito como uma reunião disjunta finita de subvariedades conexas de $\mathbf{R}^n$.

3.1.11 Lema. Suponha que vale a propriedade (3.1.10). Então

(3.1.12) *para todo número real c, $B''^{\circ}(c)$ está contido em uma única componente conexa de $\overline{B}'^{\circ}(c)$.*

($\overline{B}'$ denota o fecho de B').

Demonstração: Considere os conjuntos singulares de φ e $\varphi|_{t_n=0}$ na bola B:

$$\{t \in B : d\varphi(t) = 0\}, \qquad \{t \in B : t = (t', 0),\ d_{t'}\varphi(t) = 0\}.$$

Apenas um número finito de suas componentes conexas interceptam $\overline{B}'$. Em cada uma dessas componentes φ é constante e, portanto, a soma do número de valores críticos de φ com o número de valores críticos de $\varphi|_{t_n=0}$ em $\overline{B}'$ é finita.

Suponhamos primeiro que c não é um desses valores críticos e sejam t_j ($j = 0, 1$) dois pontos na fibra $B''^{\circ}(c)$; esta última é a intersecção de B'' com uma hipersuperfície analítica em uma vizinhança de $\overline{B}'$ em $\mathbf{R}^n$ que, caso intercepte o hiperplano $t_n = 0$, o faz transversalmente. Necesssariamente $\varphi - c$ tem sinais diferentes em cada lado desta hipersuperfície. Assim, para cada $j = 0, 1$ podemos encontrar pontos t_j^+, t_j^- em B'', arbitrariamente próximos de t_j tais que $\varphi(t_j^-) < c < \varphi(t_j^+)$. Em virtude de (3.1.10) podemos encontrar uma poligonal $\tilde{\gamma}^+$, inteiramente contida em $B'^+(c)$, ligando t_o^+ a t_1^+; analogamente obtemos uma poligonal $\tilde{\gamma}^-$ ligando t_o^- a t_1^- em $B'^-(c)$. Escolhendo-se $t_j^\pm$ suficientemente próximos de t_j podemos ligar t_j^+ a t_j^- por uma poligonal constituida de no máximo dois segmentos de reta interceptando $B''^o(c)$ somente em t_j ($j = 0, 1$). Desta maneira obtemos uma curva poligonal fechada $\gamma \subset B'$, passando por t_o e t_1, tal que as duas componentes de $\gamma \setminus (\{t_o\} \cup \{t_1\})$, que chamaremos γ^+ e γ^- estão inteiramente contidas em $B'^+(c)$ e $B'^-(c)$ respectivamente. Após uma suavização podemos supor que γ é difeomorfa ao círculo unitário. Podemos também supor que o difeomorfismo aplica γ^+ sobre o semi-círculo superior, γ^- sobre o semi-círculo inferior, o ponto t_o sobre (-1,0) e o ponto t_1 sobre (1,0). Usando-se coordenadas (ξ, η) no plano e o parâmetro ξ sobre γ^+ e γ^- (via "pull-back" dos semi-círculos), chamemos de ℓ_ξ o segmento de reta (no t-espaço) ligando t_ξ^- a t_ξ^+, os pontos sobre γ^+ e γ^- respectivamente, correspondendo ao valor ξ $(-1 < \xi < 1)$ do parâmetro. A seguir nós aplicamos linearmente, e de maneira a preservar orientação, sobre ℓ_ξ o segmento vertical ligando o ponto $(\xi, -\sqrt{1+\xi^2})$ ao ponto $(\xi, \sqrt{1+\xi^2})$ no plano. Isto define uma aplicação contínua π do interior do disco unitário sobre o subconjunto

$$\mathcal{G} = \bigcup_{0<\xi<1} \ell_\xi$$

do t-espaço; a aplicação π se estende continuamente como uma aplicação do círculo unitário sobre a circunferência γ, a fronteira de $\mathcal{G}$. Podemos portanto considerar o "pull-back" da função φ de $\mathcal{G} \cup \gamma$ para o disco unitário fechado $\overline{D}$. Será suficiente mostrarmos que (-1,0) e (1,0) pertencem à mesma componente conexa da curva de nível de $\varphi_o\pi$ que contém estes dois pontos. Note que a curva de nível em questão ($\varphi_o\pi = c$) intercepta a fronteira de $\overline{D}$ apenas em (-1,0) e (1,0) e, em virtude de nossa construção, é o gráfico de uma função contínua de ξ numa vizinhança desses dois pontos. Se (-1,0) e (1,0) pertencessem a duas componentes conexas distintas A_{-1} e A_1 da curva de nível $\varphi_o\pi = c$ em $\overline{D}$, seria então possível traçar no plano uma curva contínua, fechada e sem auto-intersecção envolvendo A_{-1} e não interceptando o conjunto

$$\{(\xi, \eta) \in \overline{D} : \varphi(\pi(\xi, \eta)) = c\}.$$

Tal curva necessariamente interceptaria as semi circunferências superior e inferior e portanto a parte desta curva em $\overline{D}$ seria um arco contínuo ligando um ponto no qual $\varphi_o\pi > c$ a um ponto no qual $\varphi_o\pi < c$ sem nunca se igualar a c, o que é um absurdo.

Agora seja c um número real qualquer e suponha que t_o e t_1 são pontos em B'' pertencentes a componentes conexas disjuntas do conjunto de nível $\varphi = c$ em $\overline{B}'$, C_o e C_1. Como C_o e $(\overline{B}')^o(c) \setminus C_o$ são compactos, existem dois subconjuntos abertos e disjuntos de B, W_o e W_1, contendo cada um desses conjuntos respectivamente. Note que $K = \overline{B}' \setminus (W_o \cup W_1)$ é um conjunto compacto e $\varphi(t) \neq c$ para todo t em K. Podemos encontrar dois pontos t'_j $(j = 0, 1)$ no segmento de reta ligando t_o a t_1 tais que $t'_o \in W_o$ e $t'_1 \in W_1$, $\varphi(t'_o) = \varphi(t'_1) = c'$ um valor não-crítico de φ ou $\varphi|_{t_n=0}$ em $\overline{B}'$ e $c' \notin \varphi(K)$. Da primeira parte da prova sabemos que existe uma hipersuperfície (possivelmente com bordo) analítica conexa $\mathcal{M}' \subset B'^{\circ}(c')$ contendo t'_o e t'_1. Como W_o e W_1 são disjuntos, $\mathcal{M}'$ certamente intercepta K e portanto $c' \in \varphi(K)$, uma contradição. ∎

Agora trazemos de volta a variável x. Se A é um subconjunto qualquer de $U = J \times B$ (veja (3.1.8)) e x, y números reais quaisquer, escrevemos

$$\begin{aligned} A^+(x, y) &= \{\mathbf{p} \in A : x(\mathbf{p}) = x,\ \phi(\mathbf{p}) > y\} \\ A^-(x, y) &= \{\mathbf{p} \in A : x(\mathbf{p}) = x,\ \phi(\mathbf{p}) < y\}. \end{aligned}$$

3.1.13 Proposição. A Propriedade (P) é equivalente a

(3.1.14) *Toda vizinhança aberta $V_{\mathbf{p}} \subset U$ de $\mathbf{p}$ contém outra vizinhança aberta $W_{\mathbf{p}}$ de $\mathbf{p}$ tal que dados números reais x, y quaisquer $W_{\mathbf{p}}$ intercepta no máximo uma componente conexa de $V^+_{\mathbf{p}}(x, y)$ e no máximo uma componente conexa de $V^-_{\mathbf{p}}(x, y)$.*

Demonstração: Decorre imediatamente de (3.1.2) e do Lema 3.1.11. ∎

Tomemos agora uma outra vizinhança da origem $V \subset\subset U = J \times B$ da mesma forma que U, $V = J' \times B'$. Denotemos por $\overline{V}$ o fecho de V; podemos aplicar o seguinte resultado de [Hi]:

A imagem $Z(\overline{V})$ é uma reunião disjunta finita de subvariedades analíticas conexas de $\mathbf{R}^2$, M_i $(1 \leq i \leq \nu)$, com a seguinte propriedade: para cada i, $Z^{-1}(M_i)$ é uma reunião disjunta finita de subvariedades analíticas conexas de $\overline{V}$, N_{ij} $(j = 1, \ldots, \mu_i)$, tais que a restrição de Z a N_{ij} é uma aplicação analítica de posto constante sobre M_i. Além disso, cada N_{ij} é um subconjunto subanalítico de $\overline{V}$.

A fronteira de $Z(\overline{V})$ consiste então de dois segmentos verticais e de duas curvas definidas por equações analíticas por partes

$$y = F^{\pm}(x), \qquad x \in J'$$

onde

$$F^{+}(x) = \sup_{t\in B'} \phi(x,t) \qquad\qquad F^{-}(x) = \inf_{t\in B'} \phi(x,t).$$

Contraimos J' em torno de zero de maneira que F^{+} e F^{-} sejam ambas analíticas em $\overline{J}' \setminus 0$. Desconsiderando-se os segmentos verticais da fronteira de $Z(\overline{V})$ e também os pontos da fronteira correspondentes a $x = 0$ (existem um ou dois apenas) sobram então quatro curvas analíticas. Se $J' =]x_1, x_2[$ as curvas à esquerda são

$$\tilde{C}_e^{\pm} : x_1 < x < 0, \qquad y = F^{\pm}(x)$$

e as curvas à direita

$$\tilde{C}_d^{\pm} : 0 < x < x_2, \qquad y = F^{\pm}(x).$$

Pelo resultado de [Hi] citado acima, podemos selecionar quatro subvariedades analíticas de $\overline{V}$ que também são subanalíticas em $\overline{V}$, $C_e^{\pm}$, $C_d^{\pm}$ tais que Z aplica cada uma delas sobre a correspondente $\tilde{C}$. Podemos também selecionar quatro pontos $t_e^{\pm}$, $t_d^{\pm}$ em $\overline{B}'$ tais que $(0, t_e^{\pm})$ pertence ao fecho de $C_e^{\pm}$ (respec.) e $(0, t_d^{\pm})$ pertence ao fecho de $C_d^{\pm}$ (respec.). Aplicamos agora a Proposição 3.9 de [Hi]:
Existe uma aplicação analítica

$$]-1,1[\ni s \mapsto (x(s), t(s)) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

tal que

$$t(0) = t_d^{+}, \quad x(0) = 0, \quad (x(s), t(s)) \in C_d^{+} \quad \text{para} \quad s \neq 0.$$

Necessariamente, $x(s) = s^{2k}[C_o + 0(s)]$ para algum inteiro $k \geq 1$ e algum $C_o > 0$. Então, para algum $\eta > 0$ temos uma inversa da aplicação $s \mapsto x(s)$,

$$[0,\eta] \ni x \mapsto s = \chi(x^{1/2k}) \in [0,1[$$

onde χ é analítica numa vizinhança aberta do intervalo fechado $[0, \eta^{1/2k}]$. Podemos então definir

$$t^{+}(x) = t(\chi(x^{1/2k}); \qquad x \in [0,\eta].$$

Argumentos semelhantes nos levam às definições de $t^+(x)$ em $[-\eta, 0]$ e de $t^-(x)$ em $[0,\eta]$ e em $[-\eta, 0]$. Note que como os pontos $t_d^\pm$ e $t_e^\pm$ podem ser diferentes, os limites de $t^+(x)$ quando x tende a zero pela esquerda e pela direita não são necessàriamente iguais; mesma observação para $t^-(x)$. De qualquer forma podemos afirmar:

(3.1.15) *Existem duas aplicações analíticas de $J' \setminus 0$ em $\overline{B}'$, $x \mapsto t^\pm(x)$, tais que para todo (x,t) em V*

$$\phi(x, t^-(x)) \leq \phi(x,t) \leq \phi(x, t^+(x)).$$

Além disso, existem pontos $t_e^\pm$, $t_d^\pm$ em $\overline{B}'$ tais que

$$t_e^\pm = \lim_{x \to -0} t^\pm(x) \qquad t_d^\pm = \lim_{x \to +0} t^\pm(x)$$

e existe um inteiro $q \geq 1$ tal que

(3.1.16)
$$\left| \frac{d}{dx} t^\pm(x) \right| \leq \text{const.}\, |x|^{-1+1/q} \qquad 0 \neq x \in J'.$$

Suponha agora que existe uma vizinhança da origem $\tilde{V} \subset\subset V$ da mesma forma que V e U, $\tilde{V} = \tilde{J}' \times \tilde{B}'$, com a seguinte propriedade:

$\tilde{V}$ intercepta no máximo uma componente conexa de cada fibra de Z em V

Tal vizinhança sempre existe se a Propriedade (P) é verificada em $\mathbf{p}$. Neste caso podemos afirmar:

(3.1.17) *Existe uma constante $L > 0$ tal que dados $x_o \in \tilde{J}'$, $t_j \in \tilde{B}'$ $(j = 0, 1)$ existe uma curva analítica por partes (contínua) $\gamma = \gamma(x_o, t_o, t_1)$ ligando os pontos (x_o, t_o) e (x_o, t_1), inteiramente contida em $\overline{V}$ e de comprimento menor que L, sobre a qual x é constante e a aplicação $\varphi(t) = \phi(x_o, t)$ é monótona.*

O leitor interessado encontrará a demonstração deste fato em [T3]; os argumentos lá utilizados para vizinhanças em $\mathbf{R}^n$ se aplicam igualmente para vizinhanças relativas a $\mathbf{R}^{n-1} \times \overline{\mathbf{R}}_+$.

Nas seções seguintes estaremos interessados nas equações não-homogêneas

$$L_j u = f_j \qquad j = 1, \ldots, n \tag{3.1.18}$$

onde $f_1, \ldots, f_n$ são funções de classe C^∞ satisfazendo as condições de compatibilidade

$$L_j f_k = L_k f_j \qquad j, k = 1, \ldots, n \tag{3.1.19}$$

numa vizinhança $V^* = J^* \times B^* \subset\subset U$ de $\overline{V}$. Será útil introduzirmos as seguintes formas diferenciais na bola aberta $B^* \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \overline{\mathbb{R}}_+$ dependendo suavemente de $x \in J^*$:

$$f(x,t) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x,t) dt_j$$

e

$$F(x,t) = \sum_{j<k} (\lambda_k f_j - \lambda_j f_k) dt_j \wedge dt_k.$$

Derivando-se $L_j Z = 0$ com respeito a x e usando-se as equações de compatibilidade (3.1.19) verificamos imediatamente que, qualquer que seja o número complexo ζ,

$$d_t(e^{-i\zeta Z} Z_x f) = \frac{\partial}{\partial x}(e^{-i\zeta Z} Z_x F) \tag{3.1.20}$$

o que nos permitirá permutar diferenciação com respeito a t por diferenciação com respeito a x.

3.2 - A suficiência da Propriedade (P)

Estendemos agora a variedades com bordo o Teorema 2.2 de [T3]:

3.2.1 Teorema. Suponha que o sistema $\mathbf{L} = (L_1, \ldots, L_n)$ satisfaz a Propriedade (P) no ponto $\mathbf{p}$. Então toda vizinhança aberta $V \subset U$ de $\mathbf{p}$ contém outra vizinhança aberta de $\mathbf{p}$, W, com a seguinte propriedade:

> Dadas n funções de classe C^∞ $f_1, \ldots, f_n$ em V satisfazendo as condições de compatibilidade (3.1.19) existe uma função u de classe C^∞ em W satisfazendo (3.1.18) em W.

Se $\mathbf{p}$ é um ponto interior de $\mathcal{M}$ a afirmação acima é o conteúdo do Teorema 2.2 de [T3]. Supomos então que $\mathbf{p} \in \partial\mathcal{M}$. Como em [T3], dividimos a demonstração em dois passos. No primeiro passo, idêntico ao de [T3], damos apenas uma *idéia da prova*.

1°passo - Construção de "pré-soluções": Vamos considerar integrais do tipo

$$I^\varepsilon(x,t) = \frac{1}{2\pi}\iiint e^{i\xi[Z(x,t)-Z(y,s)]-\varepsilon\xi^2} g(y) Z_y(y,s) f(y,s)\, dy\, d\xi \tag{3.2.2}$$

onde $g \in C_c^\infty(J')$ é uma função corte ($g(y) = 1$ para todo y em um intervalo aberto apropriado $J_1' \subset\subset J'$ contendo zero) e ε é um número real positivo que faremos tender a zero. A integração com respeito a y é feita sobre $\mathbf{R}$ e aquela com respeito a ξ é feita sobre $\mathbf{R}_+ : \xi > 0$ ou $\mathbf{R}_- : \xi < 0$. O integrando em I^ε é uma 1-forma no s-espaço que integramos sobre uma poligonal ℓ ligando um certo ponto t_o ao ponto variável t.

Integração por partes com respeito a y em (3.2.2) fornece

(3.2.3)

$$I^\varepsilon(x,t) = \frac{1}{2\pi}\iiint (1+i\xi)^{-N} e^{i\xi[Z(x,t)-Z(y,s)]-\varepsilon\xi^2} Z_y(y,s)\left(1 + Z_y^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right)^N [g(y)f(y,s)]\,dy d\xi.$$

Após uma deformação do domínio de integração de $\xi \in \mathbf{R}_\pm$ para a 1-cadeia em $\mathbf{C}$

$$\zeta = \xi\left(1 \pm \frac{i}{2}\frac{x-y}{|x-y|}\right) \qquad \xi \in \mathbf{R}_\pm$$

temos

$$\begin{gathered} \operatorname{Re}\{i\zeta[Z(x,t) - Z(y,s)] - \varepsilon\zeta^2\} = \\ -\xi\{[\phi(x,t) - \phi(x,s)] \pm \frac{1}{2}|x-y| + (x-y)\phi_1(s,x,y)\} - \frac{3}{4}\varepsilon\xi^2. \end{gathered} \tag{3.2.4}$$

Se $\mathcal{I}^\varepsilon(x,t)$ denota a mesma integral que $I^\varepsilon(x,t)$ exceto que o caminho de integração em s é substituido pelo segmento de reta ligando 0 a t e a integração em ξ é feita sobre *toda* a reta, não é difícil mostrar que $\mathcal{I}^\varepsilon(x,t)$ é C^∞ em V e que quando $\varepsilon \to +0$

$$L_j[\mathcal{I}^\varepsilon(x,t)] \quad \text{converge para } f_j \text{ em} \quad C^\infty(J_1' \times B').$$

Entretanto, não podemos assegurar a convergência de $\mathcal{I}^\varepsilon(x,t)$ em algum espaço conveniente de distribuições que garantisse que o seu limite aí fosse uma solução das equações (3.1.18). A dificuldade está em não termos informações sobre o sinal de (3.2.4) que depende do sinal da diferença $-\xi[\phi(x,t) - \phi(y,s)]$; aí é que nos valemos da Propriedade (P). De (3.1.2) podemos assumir que $V = J' \times B' \subset\subset V_1$ é tão pequena que

$\overline{V}$ *intercepta no máximo uma componente conexa de cada fibra de Z em V_1.*

$$(V_1 = J^* \times B_1,\ B_1 \subset\subset B^* \text{ bola aberta centrada na origem em } \mathbf{R}^{n-1} \times \overline{\mathbf{R}}_+)$$

e escolhemos o ponto t_o : $t_o = t^-(x)$ quando a integração em ξ é feita sobre $\mathbf{R}_+$ e $t_o = t^+(x)$ quando a integração é feita sobre $\mathbf{R}_-$. Em ambos os casos, em virtude de (3.1.15)

$$\xi\,\phi(x,t_o) \leq \xi\,\phi(x,t), \qquad (x,t) \in V.$$

De (3.1.17), para cada (x,t) em V podemos selecionar uma curva analítica por partes $\gamma = \gamma(x,t)$ ligando os pontos t_o e t com as seguintes propriedades:

γ *está inteiramente contida em* $\overline{B}_1$

$\xi\,\phi(x,t') \leq \xi\,\phi(x,t) \quad \forall t' \in \gamma.$

O comprimento de γ *é limitado independentemente de* $(x,t) \in V$

e chamemos de $\gamma_o = \gamma(x,t)$ o segmento de reta ligando t_o a t; a poligonal ℓ consistirá do segmento de reta ligando t_o à origem do t-espaço seguido do segmento de reta ligando 0 a t. Denotemos por I^ϵ_γ (respec. $I^\epsilon_{\gamma_o}$) a mesma integral (3.2.2) exceto que a integração em s é feita sobre a curva γ (respec. sobre o segmento de reta γ_o).

Uma aplicação do Teorema de Stokes seguida de uma aplicação de (3.1.20) e integração por partes com respeito a y produz

$$I^\epsilon_{\gamma_o} = I^\epsilon_\gamma + \frac{1}{2\pi}\iiint_C e^{i\xi[Z(x,t)-Z(y,s)]-\epsilon\xi^2} g'(y) Z_y(y,s) F(y,s)\,dy\,d\xi \tag{3.2.5}$$

onde $C = C(x,t)$ é uma certa 2-cadeia inteiramente contida em $\overline{B}_1$, cujo bordo é $\gamma - \gamma_o$ e cuja área é limitada independentemente de (x,t); uma fórmula análoga pode ser obtida com $I^\epsilon_{\gamma_o}$ e I^ϵ no lugar de I^ϵ_γ. Tomando-se N suficientemente grande em (3.2.3) e no análogo (3.2.3) de (3.2.5), é possível então mostrar que I^ϵ_γ, $I^\epsilon_{\gamma_o} - I^\epsilon_\gamma$ e $I^\epsilon - I^\epsilon_{\gamma_o}$ convergem uniformemente em $J'_1 \times B'$ e que I^ϵ_γ, $I^\epsilon_{\gamma_o} - I^\epsilon_\gamma$ e $I^\epsilon - I^\epsilon_{\gamma_o}$ assim como todas as suas derivadas parciais convergem uniformemente em subconjuntos compactos de $(J'_1 \setminus 0) \times B'$. Assim, indicando-se por $I^{\epsilon^\pm}(x,t)$ as integrais (3.2.2) quando a integração em ξ é feita sobre $\mathbf{R}_\pm$ e definindo-se

$$I(x,t) = \lim_{\epsilon \to +0}[I^{\epsilon^+}(x,t) + I^{\epsilon^-}(x,t)]$$

temos que $I(x,t)$ é uma função C^∞ em $W_1 = J'_1 \times B'$ para $x \neq 0$ com um salto C^∞ $v(t)$ em $x = 0$. O salto v resulta da forma

$$v = v(t) = \tilde{v}(Z(0,t))$$

onde $\tilde{v}$ é uma função C^∞ no plano.

Calculando-se, obtemos, no interior de W_1, $\mathring{W}_1 = \{(x,t) \in W_1 : t_n > 0\}$,

$$L_j I = f_j - \lambda_j Q^o - \lambda_j\, v(t) \otimes \delta(x) \tag{3.2.6}$$

onde $\delta(x)$ é a distribuição de Dirac e

$$Q^o = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial (t^-)^k}{\partial x} Q_k^+ + \frac{\partial (t^+)^k}{\partial x} Q_k^- \tag{3.2.7}$$

sendo $Q_k^\pm$ funções C^∞ em $\mathring{W}_1$, para $x \neq 0$, com um salto C^∞ em $x = 0$. As funções $Q_k^\pm$ dependem apenas de x e de $Z(x,t)$ e portanto Q^o é constante nas fibras de Z em $(J_1' \setminus \{0\}) \times \mathring{B}'$.

A idéia agora é "absorver" os termos $\lambda_j Q^o$ e $v(t) \otimes \delta(x)$. Para isto definimos

$$\chi(x,t) = \tilde{v}(Z(x,t))\sigma(x)$$

onde $\sigma(x) = \frac{1}{2}\frac{x}{|x|}$ para $x \neq 0$. Temos:

$$L_j \chi = L_j(\tilde{v} \circ Z)\sigma(x) + \lambda_j \tilde{v}(Z(0,t)) \otimes \delta(x)$$

e

$$L_j(\tilde{v} \circ Z) = (\tilde{v}_{\overline{z}} \circ Z)(L_j \overline{Z}) = 2\,\lambda_j(\tilde{v}_{\overline{z}} \circ Z).$$

Então, de (3.2.6) vemos que, em $\mathring{W}_1$,

$$L_j(I + \chi) = f_j - \lambda_j Q$$

onde

$$Q = Q^o - 2(\tilde{v}_{\overline{z}} \circ Z)\sigma(x)$$

é constante nas fibras de Z em W_1. O "push-forward" via Z de Q é uma função $\tilde{Q}$ em $Z(W_1)$ tal que $Q = \tilde{Q} \circ Z$ em W_1. Além disso, de (3.1.16) e (3.2.7),

$$\left|\tilde{Q}(z)\right| \leq \text{const.}\, |x|^{-1+\frac{1}{q}} \qquad (z = x + iy).$$

Estendemos $\tilde{Q}$ como zero em $\mathbf{C} \setminus Z(\mathring{W}_1)$; assim, $\tilde{Q} \in L^1$ e definimos

$$\tilde{w} = \tilde{Q} * \left(\frac{1}{2\pi z} e^{z^2}\right) \qquad w = \tilde{w} \circ Z$$

onde $*$ indica a convolução de distribuições no plano. Temos então que, em $\overset{\circ}{W}_1$,

$$L_j w = \lambda_j Q \qquad j = 1, \dots, n.$$

Definindo-se então

$$v = I + \chi + w$$

$$L_j v = f_j \qquad j = 1, \dots, n \qquad \text{em} \quad \overset{\circ}{W}_1$$

e das propriedades de I, χ e w pode-se mostrar que $v \in L^2(W_1)$.

2º passo - Construção de soluções C^∞:

De (3.1.7), L_o (veja (3.1.6)) comuta com L_j para todo j ($j = 1, \dots, n$) e portanto as funções $L_o f_1, \dots, L_o f_n$ também satisfazem as condições de compatibilidade (3.1.19). Então, dado um inteiro positivo N podemos resolver, em $\overset{\circ}{W}_1$, o problema

$$L_j v_N = L_o^N f_j \qquad j = 1, \dots, n \qquad v_N \in L_2(W_1).$$

Tomando-se um intervalo aberto $J_2' \subset\subset J_1'$ centrado em zero e $\psi \in C_c^\infty(J_1')$, $\psi \equiv 1$ em J_2', teremos, em $\overset{\circ}{W}_1$,

$$(3.2.8) \qquad L_j[\psi(x) v_N(x,t)] = \psi(x) L_o^N f_j(x,t) + \lambda_j(x,t)\psi'(x) v_N(x,t) \;\; j = 1, \dots, n.$$

Para cada $a \in J_1'$ definimos E_a como sendo o espaço das distribuições u em $\overset{\circ}{W}_1$ com suporte em $(J_1' \cap [a, \infty[) \times B_1'$. Note que a restrição de L_o a E_a (que também indicaremos por L_o) é um isomorfismo de E_a sobre E_a. Conseqüentemente, quando restrito a E_a,

$$(3.2.9) \qquad [L_j, L_o^{-1}] = 0 \qquad j = 1, \dots, n$$

uma vez que $[L_j, L_o] = 0$. Note ainda que para $f \in E_a \cap L^2(\overset{\circ}{W}_1)$

$$(L_o^{-1} f)(x,t) = \int_{-\infty}^{x} Z_y(y,t) f(y,t)\, dy$$

que também pertence a $L^2(\overset{\circ}{W}_1)$.

Podemos reescrever (3.2.8) na forma

$$L_j(\psi v_N) = L_o^N(\psi f_j) + S_j$$

onde $S_j \in L^2(\overset{\circ}{W}_1)$, $S_j = 0$ se $x \in J_2'$. Aplicando-se L_o^{-N} em ambos os lados e usando-se (3.2.9) resulta:

$$L_j L_o^{-N}(\psi v_N) = \psi f_j + L_o^{-N} S_j. \tag{3.2.10}$$

Mas se $W_2 = J_2' \times B'$ então

$$L_o^N(L_o^{-N} S_j) = 0 \quad \text{em} \quad \overset{\circ}{W}_2$$

o que implica

$$L_o^{-N} S_j(x,t) = \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_{j,k}(t) Z(x,t)^k \quad \text{em} \quad \overset{\circ}{W}_2 \tag{3.2.11}$$

com $\sigma_{j,k}(t) \in L^2(B')$.

Por outro lado, de (3.2.10), vemos que em $\overset{\circ}{W}_2$

$$L_o^{-N} S_j = L_j L_o^{-N}(\psi v_N) - f_j$$

e portanto

$$L_{j'}(L_o^{-N} S_j) = L_j(L_o^{-N} S_{j'}) \qquad j, j' = 1, \ldots, n$$

que, aplicada a (3.2.11), mostra que as distribuições $\sigma_{j,k}$ em $\overset{\circ}{B'}$ satisfazem

$$\frac{\partial}{\partial t_j} \sigma_{j',k} = \frac{\partial}{\partial t_{j'}} \sigma_{j,k} \qquad j, k = 1, \ldots, n.$$

Segue então que existem distribuições σ_k em $H^1_{\text{loc}}(\overset{\circ}{B'})$ tais que

$$\sigma_{j,k} = \frac{\partial}{\partial t_j} \sigma_k \qquad j, k = 1, \ldots, n.$$

Façamos então

$$T_N = \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_k(t) Z(x,t)^k.$$

Temos

$$L_j T_N = L_o^{-N} S_j \qquad j = 1, \ldots, n$$

e portanto, em $\overset{\circ}{W}_2$,

$$L_j u_N = f_j \qquad j = 1, \dots, n \tag{3.2.12}$$

onde

$$u_N = L_o^{-N}(\psi v_N) - T_N.$$

Observe que a ação de L_o^{-1} aumenta a regularidade com respeito a x e não prejudica a regularidade com respeito a t. Assim, u_N tem todas as derivadas com respeito a x até ordem N em $L^2(\overset{\circ}{W}_2)$. Por outro lado, usando-se as equações (3.2.12) podemos permutar diferenciabilidade com respeito a x por diferenciabilidade com respeito a t. De fato, de (3.1.4), (3.1.5) e (3.1.6) obtemos

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} - i\phi_{t_j} L_o$$

e portanto

$$\frac{\partial}{\partial t_j} u_N = f_j + i\,\phi_{t_j}\, L_o u_N \qquad j = 1, \dots, n.$$

Segue então que u_N tem todas as derivadas parciais até ordem N em $L^2(\overset{\circ}{W}_2)$, i.e., $u_N \in H^N_{\text{loc}}(\overset{\circ}{W}_2)$. Pelo Lema de Sobolev, $u_N \in C^\nu(\overset{\circ}{W}_2)$ se $N > \nu + \frac{n+1}{2}$. Mas se $N > \nu + n + 1$ então $u_N \in C^\nu(W_2)$, i.e., u_N é de classe C^ν até o bordo $\{t_n = 0\}$; isto é uma conseqüência do seguinte resultado elementar:

Se u é uma função de classe C^{n+k} em $\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}_+$ tal que $\partial^\alpha u$ é integrável para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq n$ então u é de classe C^k em $\mathbf{R}^{n-1} \times \overline{\mathbf{R}}_+$.

Demonstração: É suficiente provar a afirmação para $k = 0$. Por indução é fácil mostrar que dado um ponto $x_o = (x_o^1, \dots, x_o^n)$ em $\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}_+$ então, para todo $x = (x^1, \dots, x^n)$

em $\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}_+$ vale a fórmula
(3.2.13)

$$u(x^1,\dots,x^n) = u(x^1,\dots,x^{n-1},x_o^n) + \int_{x_o^1}^{x^1}\cdots\int_{x_o^n}^{x^n} \frac{\partial^n u}{\partial x^1\dots\partial x^n}(\xi^1,\dots,\xi^n)d\xi^1\dots d\xi^n$$

$$+\sum_{j_1=1}^{n-1}\int_{x_o^1}^{x^1}\cdots\int_{x_o^{j_1}}^{\widehat{x^{j_1}}}\cdots\int_{x_o^n}^{x^n}\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^1\dots\widehat{\partial x^{j_1}}\dots\partial x^n}(\xi^1,\dots,x_o^{j_1},\dots,\xi^n)d\xi^1\dots\widehat{d\xi^{j_1}}\dots d\xi^n$$

$$+\sum_{\substack{j_1,j_2=1\\ j_1<j_2}}^{n-1}\int_{x_o^1}^{x^1}\cdots\int_{x_o^{j_1}}^{\widehat{x^{j_1}}}\cdots\int_{x_o^{j_2}}^{\widehat{x^{j_2}}}\cdots\int_{x_o^n}^{x^n}\frac{\partial^{n-2}u}{\partial x^1\dots\widehat{\partial x^{j_1}}\dots\widehat{\partial x^{j_2}}\dots\partial x^n}$$

$$\cdot(\xi^1,\dots,x_o^{j_1},\dots,x_o^{j_2},\dots,\xi^n)d\xi^1\dots\widehat{d\xi^{j_1}}\dots\widehat{d\xi^{j_2}}\dots d\xi^n$$

$$+\dots$$

$$+\int_{x_o^n}^{x^n}\frac{\partial u}{\partial x^n}(x_o^1,\dots,x_o^{n-1},\xi^n)d\xi^n$$

onde o sinal $\widehat{}$ sobre um símbolo indica que este símbolo deve ser omitido.

Assim, se escolhermos o ponto $x_o \in \mathbf{R}^{n-1}\times\mathbf{R}_+$ de forma que todas as funções

$$\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^1\dots\widehat{\partial x^{j_1}}\dots\partial x^n}(x^1,\dots,x_o^{j_1},\dots,x^n)$$

$$\frac{\partial^{n-2}u}{\partial x^1\dots\widehat{\partial x^{j_1}}\dots\widehat{\partial x^{j_2}}\dots\partial x^n}(x^1,\dots,x_o^{j_1},\dots,x_o^{j_2},\dots,x^n)$$

$$\dots$$

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x_o^1,\dots,x_o^{n-1},x^n)$$

sejam integráveis é imediato que (3.2.13) define uma extensão contínua de f para $\mathbf{R}^{n-1}\times\overline{\mathbf{R}}_+$. ∎

A seguir nós supomos que os índices foram selecionados de modo que a solução u_N de (3.2.12) pertence a $C^{N+1}(W_2)$. Finalmente chegamos a

$$W = J'' \times B''$$

simplesmente exigindo que $B'' \subset\subset B'$ e $J'' \subset\subset J_2'$ sejam suficientemente pequenos para que possamos nos utilizar do seguinte resultado, a versão C^N do Teorema 3.1.0:

Toda solução $h \in C^{N+1}(W_2)$ do sistema homogêneo $L_j h = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ é o limite em $C^N(\overline{W})$ de uma seqüência de polinômios, a coeficientes complexos, em Z.

Demonstração: Por indução em N. Se $N = 0$ a afirmação é o próprio Teorema 3.1.0; suponhamos que a afirmação é verdadeira para $N = m$ e seja $h \in C^{m+2}(W_2)$ uma solução do sistema homogêneo. De (3.1.7), $L_o h \in C^{m+1}(W_2)$ também é solução do sistema homogêneo; assim, pela hipótese de indução, $L_o h$ é o limite em $C^m(\overline{W})$ de uma seqüência $\{p_\nu\}_{\nu \in \mathbf{Z}_+}$ de polinômios em Z.
Se

$$p_\nu = \Sigma a_k^\nu Z^k$$

façamos

$$q_\nu = h(0) + \Sigma \frac{a_k^\nu}{k+1} Z^{k+1}.$$

Então

$$L_o q_\nu = p_\nu \to L_o h \qquad L_j q_\nu = 0 \to 0 = L_j h \quad (j = 1, \ldots, n)$$

uniformemente em $\overline{W}$ quando $\nu \to \infty$. Como $q_\nu(0) = h(0)$ para todo ν segue que a afirmação é verdadeira para $N = m + 1$. ∎

Aplicamos o resultado elementar. Denotemos por $|\cdot|_N$ a norma natural de $C^N(\overline{W})$. Para cada $N = 0, 1, 2, \ldots$ selecionamos um polinômio $p_N \in \mathbf{C}[Z]$ tal que

$$|u_{N+1} - u_N - p_N(Z)|_N \leq 2^{-N} \tag{3.2.14}$$

e fazemos

$$u_{(0)} = u_o \qquad u_{(N)} = u_N - p_o(Z) - \cdots - p_{N-1}(Z) \quad \text{para} \quad N \geq 1.$$

Segue então, de (3.2.14),

$$\left|u_{(N+1)} - u_{(N)}\right|_N \leq 2^{-N}.$$

Isto mostra que a seqüência $(u_{(N)})_{N \geq \nu}$ converge para um elemento $u \in C^\nu(\overline{W})$, independente de ν, e portanto $u \in C^\infty(W)$. Como todos os $u_{(N)}$ satisfazem (3.1.18) em W o seu limite u também satisfaz. A prova do Teorema 3.2.1 está completa. ∎

3.3 - A necessidade da Propriedade (P)

Provamos o seguinte resultado:

3.3.1 Teorema. Suponha que o sistema $\mathbf{L} = (L_1, \ldots, L_n)$ *não* satisfaz a Propriedade (P) no ponto $\mathbf{p}$. Então existe uma vizinhança aberta $V \subset U$ de $\mathbf{p}$ tal que para toda vizinhança aberta $W \subset V$ de $\mathbf{p}$ existirão funções $f_1, \ldots, f_n$, de classe C^∞ em V, satisfazendo as condições de compatibilidade (3.1.19) para as quais não existirá $u \in \mathcal{A}'(W)$ satisfazendo (3.1.18) em W.

Para a demonstração do Teorema 3.3.1 necessitaremos de alguns fatos elementares que passamos a descrever:

Considere o semi-espaço fechado $\mathcal{Z}$ de $\mathbf{R}^n$

$$\mathcal{Z} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n : x_n \geq 0\}$$

com interior

$$\overset{\circ}{\mathcal{Z}} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n : x_n > 0\}$$

e bordo

$$\partial\mathcal{Z} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n : x_n = 0\}.$$

Se A é um subconjunto aberto qualquer de $\mathcal{Z}$ denotaremos por $\overset{\circ}{A}$ o conjunto

$$\overset{\circ}{A} = A \cap \overset{\circ}{\mathcal{Z}}.$$

Observe que se V é um subconjunto aberto de $\mathcal{Z}$ e $C_1, C_2, \ldots$ são as suas componentes conexas então $\overset{\circ}{C}_1, \overset{\circ}{C}_2, \ldots$ são as componentes conexas de $\overset{\circ}{V}$.

Se A é um subconjunto qualquer de $\mathbf{R}^n$ e φ uma função real definida em algum sobreconjunto de A, para cada $a \in \mathbf{R}$, denotaremos por $A_a = A_a(\varphi)$ o conjunto

$$A_a = \{x \in A : \varphi(x) > a\}.$$

3.3.2 Lema. Sejam V um subconjunto aberto de $\mathcal{Z}$ e B uma bola aberta qualquer em $\mathcal{Z}$ com $V \subset B$. Então, V é não-conexo se, e somente se, existem f, função localmente constante em V e $\alpha \in C_c^\infty(\overset{\circ}{B}, \Lambda^{n-1})$ tais que $\operatorname{Supp} d\alpha \subset\subset \overset{\circ}{V}$ e $\int f d\alpha \neq 0$.

($C_c^\infty(\overset{\circ}{B}, \Lambda^{n-1})$ denota o espaço das $n-1$-formas de classe C^∞ com suporte compacto em $\overset{\circ}{B}$).

Demonstração: Suponha que existam f e α como acima. Pelo Teorema de Stokes $\int d\alpha = 0$ e portanto f não é constante. Logo, V não é conexo. Reciprocamente, se V

não é conexo podemos escolher pontos x^o, x^1 em $\overset{\circ}{V}$ pertencentes a componentes conexas disjuntas de $\overset{\circ}{V}$ e um número real $\varepsilon > o$ tal que as bolas fechadas B^j de raio ε centradas em x^j $(j = 0,1)$ estejam ambas contidas em $\overset{\circ}{V}$. Agora escolhemos $\rho \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ com $\int \rho \neq 0$, $\rho(x) = 0$ para $|x| \geq 1$, e definimos

$$\omega(x) = [\rho(x - x^o/\varepsilon) - \rho(x - x^1/\varepsilon)]dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Observe que $\int \omega = 0$ e que o fecho convexo de $\operatorname{Supp}\omega$ é um subconjunto compacto de $\overset{\circ}{B}$. Assim, podemos obter $\alpha \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n, \Lambda^{n-1})$ satisfazendo $d\alpha = \omega$ e $\operatorname{Supp}\alpha \subset \overset{\circ}{B}$. Definimos então

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ e } x^o \text{ pertencem à mesma componente conexa de } V \\ 0 & \text{se } x \text{ e } x^o \text{ pertencem a componentes conexas disjuntas de } V \end{cases}$$

A prova do lema está completa. ∎

3.3.3 Lema. Sejam $B' \subset B$ bolas abertas em $\mathcal{Z}$ e φ uma função real de classe C^∞ definida em B. Suponha que para algum $a \in \mathbf{R}$ B'_a intercepta componentes conexas disjuntas de B_a. Então existem $a' \in \mathbf{R}$, $f_o \in C^\infty(B)$ e $\alpha_o \in C_c^\infty(\overset{\circ}{B'}, \Lambda^{n-1})$ tais que

$$\varphi \leq a' \text{ em } \operatorname{Supp} df_o, \quad \varphi > a' \text{ em } \operatorname{Supp} d\alpha_o, \quad \int f_o d\alpha_o \neq 0.$$

Demonstração: Da prova do Lema 3.3.2 é imediato que existem f localmente constante em B_a e $\alpha \in C_c^\infty(\overset{\circ}{B'}, \Lambda^{n-1})$ tais que $\operatorname{Supp} d\alpha \subset\subset \overset{\circ}{B'_a}$ e $\int f d\alpha \neq 0$. Seja então $a'' > a$ tal que $\varphi \geq a''$ em $\operatorname{Supp} d\alpha$; obviamente, φ assume todos os valores no intervalo $[a, a'']$. Do Teorema de Sard segue que existe a', $a < a' < a''$ que não é valor crítico de φ e nem é valor crítico de $\varphi|_{x_n=0}$ (caso B intercepte $\partial\mathcal{Z}$). Geometricamente isto significa que o conjunto de nível $\varphi^{-1}(a')$ é a intersecção com B de uma hipersuperfície em $\mathbf{R}^n$ que, caso intercepte $\partial\mathcal{Z}$, nunca o faz tangencialmente. Os fechos em B das componentes conexas de $B_{a'}$, $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots$ coincidem com as componentes conexas do conjunto $\{x \in B : \varphi(x) \geq a'\}$; estas components conexas são tais que a reunião de um número qualquer delas (finito ou infinito) é um subconjunto fechado de B. Após uma reordenação de índices podemos assumir que $\overline{C}_1, \ldots, \overline{C}_N$ são precisamente as componentes que interceptam $\operatorname{Supp} d\alpha$. Do Lema de Urysohn diferenciável obtemos funções $f_j \in C^\infty(B)$ $(j = 1, \ldots, N)$ tais que

$$f_j(x) = 1 \text{ para } x \in \overline{C}_j, \quad f_j(x) = 0 \text{ para } x \in F_j = \bigcup_{k \neq j} \overline{C}_k.$$

Infelizmente poderia ocorrer que a seqüência $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots$ fosse a seqüência finita com um único termo $\overline{C}_1$. Neste caso, tomamos F_1 como sendo o conjunto constituido de um único ponto x_o tal que $\varphi(x_o) < 0$.

Finalmente tomamos $\alpha_o = \alpha$ e $f_o = \sum_{j=1}^{N} C_j f_j$ onde C_j é o valor (constante) que f assume em C_j ($j = 1, \ldots, N$). ∎

Demonstração do Teorema 3.3.1: Como a Propriedade (P) não é verificada no ponto $\mathbf{p}$, segue da Proposição 3.1.13 que existe uma vizinhança aberta $V \subset U$ de $\mathbf{p}$ tal que para toda vizinhança aberta $W \subset V$ de $\mathbf{p}$ existirão números reais x_o e a para os quais $W^+(x_o, a)$ (veja Seção 3.1) interceptará componentes conexas disjuntas de $V^+(x_o, a)$ ou $W^-(x_o, a)$ interceptará componentes conexas disjuntas de $V^-(x_o, a)$. Podemos tomar V e W da forma $V = J \times B$, $W = J' \times B'$ onde B e B' são bolas abertas centradas na origem do t-espaço em $\mathbf{R}^{n-1} \times \overline{\mathbf{R}}_+$ (caso $\mathbf{p} \in \partial\mathcal{M}$) ou $\mathbf{R}^n$ (caso $\mathbf{p} \in \overset{\circ}{\mathcal{M}}$) e J, J' intervalos abertos da reta centrados em 0; podemos assumir também que V é relativamente compacto em U. Possivelmente após substituição da função Z por $-Z$ e da variável x por $-x$ podemos assumir ainda que $W^+(x_o, a)$ intercepta componentes conexas disjuntas de $V^+(x_o, a)$. Do Lema 3.3.3 obtemos $a \in \mathbf{R}$ (passamos a denotar a' por a), $f_o \in C^\infty(B)$ e $\alpha_o \in C_c^\infty(\overset{\circ}{B'}, \Lambda^{n-1})$ tais que

$$\phi(x_o, t) \leq a \ \forall t \in \operatorname{Supp} df_o, \quad \phi(x_o, t) > a \ \forall t \in \operatorname{Supp} d\alpha_o, \quad \int f_o d\alpha_o \neq 0.$$

Escolha um número real $r > 0$ tal que $\phi(x_o, t) \geq a + 3r$ para todo t em $\operatorname{Supp} d\alpha_o$. Existe então um número real $\eta > 0$ tal que o intervalo $[x_o - \eta, x_o + \eta] \subset J'$ e

$$\text{(3.3.4)} \qquad \phi(x, t) \geq a + 2r \quad \forall (x, t) \in [x_o - \eta, x_o + \eta] \times \operatorname{Supp} d\alpha_o.$$

Reduzindo-se η, se necessário, teremos também

$$\text{(3.3.5)} \qquad \phi(x, t) < a + r \qquad \forall (x, t) \in [x_o - \eta, x_o + \eta] \times \operatorname{Supp} df_o.$$

Tome então um número real R, $0 < R < \eta$ e uma função $\chi \in C_c^\infty(J')$ tal que $\chi(x) = 1$ para $|x - x_o| < R/2$ e $\chi(x) = 0$ para $|x - x_o| \geq R$. Agora considere uma função real $F \in C_c^\infty(\mathbf{R}^2)$ com suporte no retângulo

$$\mathcal{R} = \{x + iy \in \mathbf{C} : |x - x_o| \leq \delta, a + r \leq y \leq a + r + \varepsilon\}$$

e $F > 0$ no interior de $\mathcal{R}$; aqui ε e δ são números reais a serem escolhidos oportunamente. Por enquanto só exigimos que

$$0 < \delta < R/2, \qquad 0 < \varepsilon < r.$$

Definimos agora as cocadeias

$$f = F \circ Z f_o d\overline{Z} \in C^\infty(V, \Lambda^{o,1})$$

e

$$v = \chi dZ \wedge \alpha_o \in C_c^\infty(\mathring{W}, \Lambda^{1,n-1}).$$

De (3.3.5) segue que f é um cociclo. Queremos mostrar que $\int f \wedge v \neq 0$. Para isto introduzimos a função $G \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$

$$G(x,y) = \int_{-\infty}^{y} F(x,\tau)d\tau.$$

Note que

(3.3.6) $$y \leq a + r \Rightarrow G(x,y) = 0$$

(3.3.7) $$y \geq a + 2r \Rightarrow G(x,y) = \psi(x), \qquad \psi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$$

(3.3.8) $$d(G(x,\phi)dx) = -F \circ Z\, dx \wedge d\phi.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\int f \wedge v &= \int F \circ Z\, f_o d\overline{Z} \wedge dZ \wedge \alpha_o \\
&= 2i \int F \circ Z\, dx \wedge d\phi \wedge (f_o \alpha_o) \\
&= -2i \int d(G(x,\phi)dx) \wedge (f_o\alpha_o) \qquad \text{(de (3.3.8))} \\
&= -2i \int G(x,\phi)dx \wedge d(f_o\alpha_o) \qquad \text{(Teorema de Stokes)} \\
&= -2i \int G(x,\phi) f_o\, dx \wedge d\alpha_o \qquad \text{(de (3.3.5) e (3.3.6))} \\
&= -2i \int_{\mathbf{R}} \psi(x)dx \int f_o\, d\alpha_o \neq 0 \qquad \text{(de (3.3.4) e (3.3.7))}.
\end{aligned}$$

Agora, a imagem de $\operatorname{Supp} f$ pela aplicação Z está contida no retângulo $\mathcal{R}$ e a imagem de $\operatorname{Supp} d'v$ pela aplicação Z está contida na reunião $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ dos seguintes conjuntos:

$$\mathcal{A} = \{x + iy \in \mathbf{C} : |x - x_o| \le R, a + 2r \le y \le M\}$$

$$\mathcal{B} = \{x + iy \in \mathbf{C} : \frac{R}{2} \le |x - x_o| \le R, M_- \le y \le M_+\}$$

onde

$$M = \sup\{\phi(x,t) : |x - x_o| \le R, t \in \operatorname{Supp} d\alpha_o\}$$

$$M_+ = \sup\{\phi(x,t) : R/2 \le |x - x_o| \le R, t \in \operatorname{Supp} \alpha_o\}$$

$$M_- = \inf\{\phi(x,t) : R/2 \le |x - x_o| \le R, t \in \operatorname{Supp} \alpha_o\}$$

O que nós queremos mostrar agora é que se ε e δ forem escolhidos suficientemnte pequenos existirá um polinômio $p = p(z) \in \mathbf{C}[z]$, $z = x + iy$, tal que

(3.3.9) $$\operatorname{Re} p < 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{R}, \qquad \operatorname{Re} p > 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{A} \cup \mathcal{B}.$$

Feito isto, a função $h = p(Z)$ será uma solução das equações homogêneas $\mathbf{L}u = 0$ satisfazendo

$$\operatorname{Re} h < 0 \quad \text{em} \quad \operatorname{Supp} f, \qquad \operatorname{Re} h > 0 \quad \text{em} \quad \operatorname{Supp} d'v$$

o que completará nossa prova, conforme Lema 2.1.4.

Observe que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ onde $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ são retângulos; assim, a imagem de $\operatorname{Supp} d'v$ pela aplicação Z está contida na reunião $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ de três retângulos e a imagem de $\operatorname{Supp} f$ pela aplicação Z está contida no retângulo $\mathcal{R}$. Todos estes retângulos têm lados paralelos aos eixos cartesianos e $\mathcal{R}$ não intercepta $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$; logo existe um subconjunto aberto $\mathcal{O}$ do plano, limitado e simplesmente conexo, com bordo suave, contendo os retângulos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, o conjunto $\mathcal{R} \setminus \{x_o + i(a + r)\}$ e não contendo o ponto $x_o + i(a + r)$ que deverá pertencer a $\partial\mathcal{O}$. Pelo Teorema de Riemann existe um biholomorfismo H de $\mathcal{O}$ sobre o disco

$$\Delta = \{x + iy \in \mathbf{C} : |x + iy - 1| < 1\}.$$

Este biholomorfismo se estende continuamente ao fecho de $\mathcal{O}$, aplicando o bordo de $\mathcal{O}$ sobre o bordo de Δ. Podemos então assumir que H aplica o ponto $x_o + i(a + r)$ sobre a origem. Existe então um número real $c > 0$ tal que

$$\operatorname{Re} H > \frac{3}{2}c \quad \text{em} \quad \mathcal{A} \cup \mathcal{B}.$$

Por outro lado, possivelmente após uma redução de ε e δ, teremos também

$$\operatorname{Re} H < \frac{1}{2}c \quad \text{em} \quad \mathcal{R}.$$

Do Teorema de Mergelyan obtemos um polinômio $p_o \in \mathbf{C}[z]$ satisfazendo

$$\operatorname{Re} p_o > c \quad \text{em} \quad \mathcal{A} \cup B, \qquad \operatorname{Re} p_o < c \quad \text{em} \quad \mathcal{R}.$$

Fazendo-se $p = p_p - c$, p satisfaz (3.3.9) e nossa prova está completa. ∎

APÊNDICE A

Exemplo de estrutura involutiva com bordo não localmente integrável

Em $\mathbf{R}^3$, onde escrevemos as variáveis como x, t_1, t_2, consideremos a variedade com bordo

$$\mathcal{Z} = \{(x, t_1, t_2) : t_2 \geq 0\}$$

e seja $\mathcal{V}$ a estrutura localmente integrável sobre $\mathcal{Z}$ definida pelos campos vetoriais

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial t_1} - i\, t_1 \frac{\partial}{\partial x}$$

$$L_2 = \frac{\partial}{\partial t_2} + i\, t_2 \frac{\partial}{\partial x}.$$

O fibrado T' é gerado por dZ onde $Z = x + iQ(t)$ e

$$Q(t) = \frac{1}{2}\,(t_1^2 - t_2^2).$$

Construção da nova estrutura:

Em $\mathbf{C}$, com coordenada $z = x + iy$, consideremos uma seqüência de discos fechados disjuntos $\{D_j\}$ contidos no semi-espaço $\{y > o\}$ tais que $D_j \to \{0\}$.

Seja $F \in C_c^\infty(\mathbf{C})$ a valores reais tal que

$$\operatorname{Supp} F \subset \overline{\bigcup_{j \geq 0} D_j}, \qquad F > 0 \quad \text{em} \quad \overset{\circ}{D}_j (\forall j).$$

Como F se anula de ordem infinito quando $y \leq 0$ segue que a função $F \circ Z$ se anula de ordem infinito quando $t_1 = 0$. Se H denota a função de Heaviside sobre $\mathbf{R}$ então a função

$$f(x, t) = H(t_1) F(Z(x, t))$$

é de classe C^∞ sobre $\mathcal{Z}$.

A.0 Lema. Sejam

$$M_1 = L_1 + i\, t_1 f \frac{\partial}{\partial x},$$

$$M_2 = L_2 - i\, t_2 f \frac{\partial}{\partial x}.$$

Então

$$[M_1, M_2] = 0.$$

Demonstração: Um cálculo simples fornece

$$[M_1, M_2] = -i(t_2 L_1 f + t_1 L_2 f)\frac{\partial}{\partial x}$$

que se anula trivialmente quando $t_1 < 0$. Por outro lado

$$L_j(F \circ Z) = \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \circ Z\right) L_j \overline{Z}$$

$$L_j \overline{Z} = (-1)^j \, 2i \, t_j$$

e portanto o comutador acima também se anula para $t_1 > 0$. ∎

Assim os campos M_j definem uma estrutura formalmente integrável sobre $\mathcal{Z}$. Vamos agora mostrar que esta estrutura não é localmente integrável em nenhuma vizinhança da origem em $\mathcal{Z}$.

Para tal suponhamos que u seja uma função de classe C^1 em uma vizinhança $\mathcal{O}$ da origem em $\mathcal{Z}$ e satisfazendo, em $\mathcal{O}$, as equações $M_j u = 0$. Vamos mostrar que necessariamente o diferencial de u deve se anular na origem.

A aplicação $\Psi: \mathring{\mathcal{Z}} \to \mathbf{R}^3$,

$$\Psi(x, t_1, t_2) = (x, t_1, Q(t))$$

define um difeomorfismo de $\mathring{\mathcal{Z}}$ sobre um aberto de $\mathbf{R}^3$ que contém un subconjunto da forma

$$\mathcal{U} = \{(x, t_1, y) \in \mathbf{R}^3 : |x| < b, \, |t_1| < b, \, -b < y < t_1^2/2\}$$

$(b > 0)$.

Consideremos a função $u^* = u \circ \Psi^{-1}$ definida sobre $\mathcal{U}$. Das relações $M_j u = 0$ segue que u^* satisfaz as seguintes equações sobre $\mathcal{U}$:

$$\text{(A.1)} \qquad \frac{\partial u^*}{\partial y} - i\,\frac{\partial u^*}{\partial x} = -i(f \circ \Psi^{-1})\,\frac{\partial u^*}{\partial x}$$

$$\text{(A.2)} \qquad \frac{\partial u^*}{\partial t_1} = 0.$$

Obtemos de (A.2) a seguinte conclusão:
Se

$$\mathcal{U}^+ = \{(x, t_1, y) \in \mathcal{U} : t_1 > 0\},$$
$$\mathcal{U}^- = \{(x, t_1, y) \in \mathcal{U} : t_1 < 0\},$$
$$\mathcal{R} = \{z \in \mathbf{C} : |x| < b,\ -b < y < b^2/2\}$$

existem funções h^+, h^- definidas sobre $\mathcal{R}$ tais que

$$u^*(x, t_1, y) = h^+(x + iy) \quad \text{em} \quad \mathcal{U}^+,$$
$$u^*(x, t_1, y) = h^-(x + iy) \quad \text{em} \quad \mathcal{U}^-.$$

Em particular $h^+ = h^-$ quando $y < 0$.

Observando que $(f \circ \Psi^{-1})(x, t_1, y) = H(t_1)F(z)$ de (A.1) segue que h^- é holomorfa em $\mathcal{R}$ e que

$$\frac{\partial h^+}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} F(z) \frac{\partial h^+}{\partial x}.$$

Em particular h^+ é holomorfa em

$$\mathcal{S} = \mathcal{R} \setminus \bigcup_{j \geq 0} D_j$$

e portanto $h^+ = h^-$ em $\mathcal{S}$ uma vez que este é conexo.

Seja j_o tal que $D_j \subset \mathcal{R}$ se $j \geq j_o$. Então, pelo Teorema de Cauchy, temos

$$\oint_{\partial D_j} h^+(z) dz = 0 \quad \text{para} \quad j \geq j_o$$

e portanto, pelo Teorema de Stokes,

$$\frac{1}{2i} \iint_{D_j} \frac{\partial h^+}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz = \iint_{D_j} F(z) \frac{\partial h^+}{\partial x}(z) dx dy = 0$$

se $j \geq j_o$.

Como conseqüência, existirão pontos $z_j, w_j \in D_j$ $(j \geq j_o)$, tais que

$$\operatorname{Re} \frac{\partial h^+}{\partial x}(z_j) = \operatorname{Im} \frac{\partial h^+}{\partial x}(w_j) = 0 \quad (j \geq j_o).$$

Por meio do difeomorfismo Ψ obteremos então seqüências $\{p_j\}$, $\{p'_j\}$ em $\mathcal{O}$ convergindo para a origem tais que

$$\mathrm{Re}\ \frac{\partial u}{\partial x}(p_j) = \mathrm{Im}\ \frac{\partial u}{\partial x}(p'_j) = 0.$$

Assim

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0,0) = 0.$$

Finalmente, das relações $M_j u = 0$ concluimos também que

$$\frac{\partial u}{\partial t_j}(0,0,0) = 0 \quad (j = 1,2)$$

e nossa afirmação fica, portanto, demonstrada. ∎

APÊNDICE B

Demonstração do Teorema 1.4.4

Para $u \in \dot{A}^{(s)}(K)$ a convergência de $\chi_\varepsilon * u$ em $\dot{A}^{(s)}(K')$ é uma conseqüência imediata das identidades

$$(\partial_x)^\alpha(\chi_\varepsilon * u) = \chi_\varepsilon * (\partial_x)^\alpha u$$

$$(t\partial_t)^j(\chi_\varepsilon * u) = \chi_\varepsilon * (t\partial_t)^j u + \sum_{k=1}^{j} \binom{j}{k} \underbrace{[t\partial_t, [\dots, [t\partial_t, \chi_\varepsilon * .]] \dots]}_{k \text{ colchetes}} (t\partial_t)^{j-k} u$$

e do seguinte fato:

B.0 Proposição. Seja $P(x, D)$ um operador diferencial parcial linear de primeira ordem com coeficientes de classe C^∞ em $\mathbf{R}^n$. Então, dados $s \in \mathbf{R}$ e $u \in H^s_c(\mathbf{R}^n)$ tem-se

$$\mathcal{F}_\varepsilon u = [P(x, D), [\dots, [P(x, D), \chi_\varepsilon * .]] \dots] u \to 0$$

em $H^s_c(\mathbf{R}^n)$ quando $\varepsilon \to 0$.

Para a demonstração da Proposição B.0 necessitaremos dos dois lemas a seguir, onde fazemos uso do Cálculo Básico da teoria dos operadores pseudo-diferenciais. A notação que usamos é a de [H3]. Recordemos alguns fatos:

Dados $a_j \in S^{m_j} = S^{m_j}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$, $j = 1, 2$, então

$$a_1(x, D) \circ a_2(x, D) = b(x, D)$$

onde $b \in S^{m_1+m_2}$ e a aplicação bilinear $(a_1, a_2) \mapsto b$ é contínua. Por outro lado, do desenvolvimento assintótico de b, vê-se facilmente que

$$[a_1(x, D), a_2(x, D)] = c(x, D)$$

onde agora $c \in S^{m_1+m_2-1}$. Uma simples aplicação do teorema do gráfico fechado fornece a continuidade da aplicação bilinear

$$S^{m_1} \times S^{m_2} \to S^{m_1+m_2-1}$$
$$(a_1, a_2) \mapsto c$$

B.1 Lema. Seja $\{c_\varepsilon\}$ uma família limitada em S^o. Então, para todo $s \in \mathbf{R}$, $\{c_\varepsilon(x, D)\}$ forma um conjunto limitado em $B(H^s(\mathbf{R}^n))$.

Demonstração: Basta notar que, escrevendo

$$\tilde{c}_\varepsilon(x, D) = (1 + |D|^2)^{s/2} \ c_\varepsilon(x, D)(1 + |D|^2)^{-s/2}$$

a família $\{\tilde{c}_\varepsilon\}$ também é limitada em S^o, de onde segue que $\{\tilde{c}_\varepsilon(x, D)\}$ forma um conjunto limitado em $B(L^2(\mathbf{R}^n))$ (cf. [H3], comentário que segue a demonstração do Teorema 18.1.11). ∎

B.2 Lema. Seja $b \in S^1$. Então, dados $s \in \mathbf{R}$ e $u \in H^s(\mathbf{R}^n)$ tem-se

$$\mathcal{I}_\varepsilon u = [b(x, D), [\dots, [b(x, D), \chi_\varepsilon * .]] \dots]u \to 0$$

em $H^s(\mathbf{R}^n)$ quando $\varepsilon \to 0$.

Demonstração: Seja $a_\varepsilon(x, \xi) = \hat{\chi}_\varepsilon(\xi) = \hat{\chi}(\varepsilon\xi)$ onde $\chi_\varepsilon(\xi) = \varepsilon^{-n}\chi_\varepsilon(\xi/\varepsilon)$ e $\hat{}$ denota a transformada de Fourier. Então $\{a_\varepsilon\}$ forma uma família limitada em S^o e, para $u \in \mathcal{S}$, onde $\mathcal{S}$ denota o espaço das funções de decrescimento rápido, temos

$$a_\varepsilon(x, D)u = \chi_\varepsilon * u \to u \tag{B.3}$$

em $\mathcal{S}$ quando $\varepsilon \to 0$. Assim, $\mathcal{I}_\varepsilon = c_\varepsilon(x, D)$ onde $\{c_\varepsilon\}$ forma uma família limitada em S^o; do Lema B.1 o conjunto $\{c_\varepsilon(x, D)\}$ é limitado em $B(H^s(\mathbf{R}^n))$. Além disso, (B.3) implica que, para $u \in \mathcal{S}$

$$c_\varepsilon(x, D)u \to 0$$

em $\mathcal{S}$ quando $\varepsilon \to 0$.

Dada $u \in H^s(\mathbf{R}^n)$ e dado $\sigma > 0$ tomemos $v \in \mathcal{S}$ tal que $\|u - v\|_{(s)} \leq \sigma$. Então, para alguma constante $C > 0$

$$\begin{aligned}\|c_\varepsilon(x, D)u\|_{(s)} &\leq \|c_\varepsilon(x, D).(u - v)\|_{(s)} + \|c_\varepsilon(x, D)v\|_{(s)} \\ &\leq C\sigma + \|c_\varepsilon(x, D)v\|_{(s)}\end{aligned}$$

de onde segue o resultado. ∎

Demonstração da Proposição B.0: Seja K um subconjunto compacto do $\mathbf{R}^n$ tal que

$$\mathrm{Supp}(\chi_\varepsilon * u) \subset K \qquad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Tomemos $\psi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ tal que $\psi \equiv 1$ numa vizinhança de K. Então $\mathrm{Supp}\,\mathcal{F}_\varepsilon u \subset K$ e

$$\mathcal{F}_\varepsilon u = [\psi(x)P(x, D), [\dots, [\psi(x)\, P(x, D), \chi_\varepsilon * .]] \dots]u$$

para todo $\varepsilon \in]0, 1[$. Como $\psi(x)P(x, \xi) \in S^1$ o resultado segue do Lema B.2. ∎

APÊNDICE C

O espaço $\mathcal{R}(\Omega)$ e a coincidência dos traços

Seja $U \in C^\infty(\overline{\mathbf{R}}_+, \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n))$. Podemos associar injetivamente a U a distribuição $u \in \dot{\mathcal{D}}'(\mathcal{Z})$ colocando-se

$$\langle u, \varphi\rangle = \int_0^\infty \langle U(t), \varphi(\cdot, t)\rangle\, dt, \qquad \varphi \in C_c^\infty(\mathcal{Z}).$$

Para ver que $u \in \dot{\mathcal{D}}'(\mathcal{Z})$ basta lembrar que todo subconjunto compacto de $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ é equicontínuo (Veja [T], pág. 349).
Tal distribuição é dita *regular em t a valores distribuições em* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e definimos seu traço sobre $\{t = 0\}$, $Tr\, u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, por $Tr\, u = U(0)$. É imediato que $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ é a distribuição associada à aplicação $t \mapsto \frac{\partial (U(t))}{\partial x_j}$, $1 \le j \le n$; denotaremos por $u^{(j)}$ a distribuição associada a $\frac{d^j U}{dt^j} \in C^\infty(\overline{\mathbf{R}}_+, \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n))$. No que segue não faremos distinção entre U e a distribuição a associada a U. Definições análogas identificam $U \in C^\infty([0, \varepsilon[, V)$, V subconjunto aberto do $\mathbf{R}^n$ e $\varepsilon > 0$, com $u \in \dot{\mathcal{D}}'(V \times [0, \varepsilon[)$.

Introduzimos agora o espaço $\mathcal{R}(\Omega)$, onde Ω é uma variedade com bordo, das *distribuições C^∞ transversalmente ao bordo*:

$u \in \mathcal{R}(\Omega)$ se, e somente se, $u \in \dot{\mathcal{D}}'(\Omega)$ e para todo ponto $\mathbf{p} \in \partial\Omega$ ***e toda carta local*** *$\mathcal{X}: U \to \tilde{U}$ em torno de* $\mathbf{p}$, *existe uma vizinhança aberta W de* $\mathbf{p}$, *$W \subset U$, com $\tilde{W} = \mathcal{X}(W)$ da forma $\tilde{W} = V \times [0, \varepsilon[$, $\varepsilon > 0$, V subconjunto aberto de* $\mathbf{R}^n$, ***tal que,*** *em W, $u \in C^\infty([0, \varepsilon[, \mathcal{D}'(V))$.*

Especializemos agora para a variedade padrão com bordo

$$\mathcal{Z} = \mathbf{R}^n \times \overline{\mathbf{R}}_+$$

onde escrevemos as coordenadas como (x, t).

C.1 Lema. Seja $v \in C_c^\infty(\overline{\mathbf{R}}_+, \varepsilon'(\mathbf{R}^n))$. Então, dado $p \in \mathbf{Z}_+$ existem $\ell \in \mathbf{Z}_+$ e $v_p \in C^p(\mathcal{Z})$ tais que

$$v = (1 - \Delta_x)^\ell\, v_p.$$

Demonstração: Para cada inteiro positivo j, os conjuntos $H_j = \{v^{(j)}(t)\}_{t \ge 0}$ são subconjuntos compactos de $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ e portanto equicontínuos. Segue então que para todo inteiro $j \geq 0$ existem um subconjunto compacto K_j de $\mathbf{R}^n$, $C_j > 0$ e $N_j \in \mathbf{Z}_+$ tais que

$$\left|\left\langle v^{(j)}(t), \psi\right\rangle\right| \leq C_j \sum_{|\alpha| \leq N_j} \sup_{K_j} |D^\alpha \psi| \qquad \forall \psi \in C^\infty(\mathbf{R}^n) \quad \forall t \geq 0.$$

Introduzimos agora a transformada parcial de Fourier de v com respeito a $x \in \mathbf{R}^n$, que é o seguinte elemento de $C^\infty(\mathcal{Z})$:

$$\hat{v}(\xi, t) = \left\langle v(t), e^{-ix.\xi}\right\rangle$$

(a ação da distribuição é na variável x). Da desigualdade acima seguem as estimativas:

$$\left|\partial_t^j \hat{v}(\xi, t)\right| \leq C_j'(1 + |\xi|)^{N_j} \qquad j \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Então, dado $p \in \mathbf{Z}_+$ se $\ell \in \mathbf{Z}_+$ é suficientemente grande

$$v_p(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix.\xi} \frac{\hat{v}(\xi, t)}{(1 + |\xi|^2)^\ell} d\xi$$

pertence a $C^p(\mathcal{Z})$. É óbvio que $v = (1 - \Delta_x)^\ell v_p$. ∎

Consideremos agora $u \in C^\infty(\overline{\mathbf{R}}_+, \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)) \in \dot{\mathcal{D}}'(\mathcal{Z})$ e seja $K \subset \mathcal{Z}$ um conjunto compacto. Tome $\chi \in C_c^\infty(\mathcal{Z})$, $\chi \equiv 1$ numa vizinhança de K e faça $v = \chi u \in C_c^\infty(\overline{\mathbf{R}}_+, \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n))$. Do Lema C.1 temos que, para todo $p \in \mathbf{Z}_+$ existem $v_p \in C^p(\mathcal{Z})$ e $P \in \mathrm{Diff}_b^\infty(\mathcal{Z})$ com coeficientes constantes tais que

$$\langle u, \varphi\rangle = \langle v, \varphi\rangle = \int v_p P\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(K).$$

Recordemos agora dois fatos:

1. Dado $s \in \mathbf{R}$ existe $p \in \mathbf{Z}_+$ tal que $C^p(\mathbf{R}^{n+1}) \subset H_{\mathrm{loc}}^{-s}(\mathbf{R}^{n+1})$.

2. $C_c^\infty(\mathring{K}) \subset \dot{H}^s(K)$ para todo $s \in \mathbf{R}$ e todo subconjunto compacto K de $\mathcal{Z}$; existe $s_o = s_o(n)$ tal que $C_c^\infty(K) \subset \dot{H}^s(K)$ para todo $s < s_o$ e todo subconjunto compacto K de $\mathcal{Z}$.

C.2 Corolário. Seja $u \in C^\infty(\overline{\mathbf{R}}_+, \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n))$. Dados $s \in \mathbf{R}$ e um subconjunto compacto K de $\mathcal{Z}$ existem $P \in \mathrm{Diff}_b^\infty(\mathcal{Z})$ com coeficientes constantes e $C > 0$ tais que

$$|\langle u, \varphi\rangle| \leq C \|P\varphi\|_{(s)} \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathring{K}). \tag{C.3}$$

Se $s < s_o$ a mesma estimativa vale para $\varphi \in C_c^\infty(K)$.

Demonstração: Segue das considerações acima. ▮

Usaremos a seguir os operadores de regularização

$$Q_\epsilon: \bigcup_{s\in\mathbf{R}} \dot{H}_c^s(\mathcal{Z}) \to C_c^\infty(\overset{\circ}{\mathcal{Z}})$$

introduzidos na Seção 1.4 (veja Teorema 1.4.4); note que Q_ϵ comuta com operadores com coeficientes constantes.

Seja $g \in \dot{\mathcal{A}}_c(\mathcal{Z})$. Existem $s \in \mathbf{R}$ e K subconjunto compacto de $\mathcal{Z}$ tais que $g \in \dot{\mathcal{A}}^{(s)}(K)$. Então se K' é outro subconjunto compacto de $\mathcal{Z}$ cujo interior contém K, podemos aplicar (C.3) com K' substituindo K. Obtemos, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$|\langle u, Q_\epsilon[g]\rangle| \le C\,\|PQ_\epsilon[g]\|_{(s)} = C\,\|Q_\epsilon[Pg]\|_{(s)} \le C'\,\|Pg\|_{(s)}\,.$$

Isto mostra que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \langle u, Q_\varepsilon[g]\rangle$$

existe e que o funcional

$$g \mapsto \lim_{\varepsilon\to 0^+} \langle u, Q_\varepsilon[g]\rangle$$

é contínuo em $\dot{\mathcal{A}}_c(\mathcal{Z})$. Em resumo, demonstramos a

C.4 Proposição. Todo elemento de $C^\infty(\overline{\mathbf{R}}_+, \dot{\mathcal{D}}'(\mathbf{R}^n)) \subset \dot{\mathcal{D}}'(\mathcal{Z})$ se estende continuamente a $\dot{\mathcal{A}}_c(\mathcal{Z})$.

C.5 Proposição. Seja $u \in C^\infty(\overline{\mathbf{R}}_+, \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n))$ e seja $\tilde{u}$ a extensão de u a $\dot{\mathcal{A}}_c(\mathcal{Z})$. Então

$$\langle \tilde{u}, \varphi \otimes \delta(t)\rangle = \langle u(0), \varphi\rangle \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n).$$

Em outras palavras, interpretando u como um elemento de $\mathcal{A}'(\mathcal{Z})$ seu traço em $\partial\mathcal{Z}$ coincide com $u(0) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$.

Demonstração: Seja $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ e tomemos $\chi \in C_c^\infty(\mathcal{Z})$, $\chi \equiv 1$ numa vizinhança aberta de $\operatorname{Supp}\varphi \times \{0\}$. Então, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno teremos

$$\langle u, Q_\epsilon[\varphi \otimes \delta(t)]\rangle = \langle \chi u, Q_\varepsilon[\varphi \otimes \delta(t)]\rangle\,.$$

Agora, existe $\sigma \in \mathbf{R}$ tal que

$$Q_\epsilon[(1-\Delta_x)^p\varphi \otimes \delta(t)] \overset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} (1-\Delta_x)^p\varphi \otimes \delta(x)$$

em $\dot{H}_c^\sigma(\mathcal{Z})$ qualquer que seja $p \in \mathbf{Z}_+$.

Para cada $m \in \mathbf{Z}_+$ denotemos por $\dot{\varepsilon}'_{(m)}(\mathcal{Z})$ o subespaço de $\dot{\varepsilon}'(\mathcal{Z})$ consistindo das distribuições de ordem $\leq m$ (os elementos de $\dot{\varepsilon}'_{(m)}(\mathcal{Z})$ são precisamente aqueles que se estendem continuamente a $C^m(\mathcal{Z})$).

Em correspondência a σ existe $m_o \in \mathbf{Z}_+$ tal que

$$\dot{H}_c^\sigma(\mathcal{Z}) \hookrightarrow \dot{\varepsilon}'_{(m_o)}(\mathcal{Z}) \qquad \text{continuamente.}$$

A seguir tomamos $p \in \mathbf{Z}_+$ tal que

$$\chi u = (1-\Delta_x)^p v$$

para alguma função $v \in C^{m_o}(\mathcal{Z})$. Logo

$$\begin{aligned}\langle u, Q_\epsilon[\varphi \otimes \delta(t)]\rangle &= \langle (1-\Delta_x)^p v, Q_\epsilon[\varphi \otimes \delta(t)]\rangle \\ &= \int_Z v(x,t)Q_\epsilon[(1-\Delta_x)^p\varphi \otimes \delta(x)](x,t)\,dx\,dt\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos o fato que Q_ϵ e $(1-\Delta_x)^p$ comutam. Portanto,

$$\begin{aligned}\langle \tilde{u}, \varphi \otimes \delta(t)\rangle &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \langle u, Q_\epsilon[\varphi \otimes \delta(t)]\rangle \\ &= \langle (1-\Delta_x)^p\varphi \otimes \delta(t), v\rangle \\ &= \int v(x,0).(1-\Delta_x)^p\varphi(x)\,dx \\ &= \langle (1-\Delta_x)^p v(\,\cdot\,,0), \varphi\rangle \\ &= \langle u(0), \varphi\rangle\,. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Segue imediatamente das Proposições C.4 e C.5 os resultados enunciados no final da Seção 1.4.

REFERÊNCIAS

[A-H] Andreotti, A. & C.D. Hill: E.E. Levi convexity and the Hans Lewy problem. Partes I e II, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **26**, 1972, 325–363 e 747–806.

[A-F-N] Andreotti, A., G. Fredricks & M. Nacinovich: On the absence of Poincaré Lemma in tangential Cauchy-Riemann complexes. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Classe di Scienze, Serie IV, vol. VIII, nº 3, 1981, 365–404.

[B-T1] Baouendi, M.S. & F. Treves: A local constancy principle for the solutions of certain over determined systems of first-order linear partial differential equations. Math. Analysis and Applications, Part A. Advances in Mathematics Supplementary Studies, Vol. 7A. Academic Press, Inc., 1981, 245–262.

[B-T2] Baouendi, M.S. & F. Treves: A property of the functions and distributions annihilated by a locally integrable system of complex vector fields. Ann. Math. **113**, 1981, 387–421.

[C-T] Cordaro, P. & F. Treves: Homology and cohomology in hypo-analytic structures of the hypersurface type. A aparecer.

[Hi] Hironaka, H.: Subanalytic sets. Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, in honor of Y. Akizuki, Kinokuniya Tokio (1973), 453–493.

[H] Hörmander, L.: Linear partial differential operators. Springer-Verlag, 1976.

[H1-4] Hörmander, L.: The analysis of linear partial differential operators. Vols. 1-4, Springer-Verlag, 1983.

[M] Melrose, R.B.: Transformation of boundary problems. Acta Math. **147**, 1982, 149–236.

[M-T] Mendoza, G. & F. Treves: On the local solvability in locally integrable structures of corank one. A aparecer.

[N] Nirenberg, L.: Lectures on linear partial differential equations. Regional Conference Series in Mathematics. American Mathematical Society, 1973.

[S] Schwartz, L.: Théorie des distributions. Hermann, Paris, 1966.

[T] Treves, F.: Topological vector spaces, distributions and kernels. Academic Press, 1967.

[T1] Treves, F.: Approximation and representation of functions and distributions annihilated by a system of complex vector fields. Publications de l'École Polytechnique, Centre de Mathématiques, 1981.

[T2] Treves, F.: A remark on the Poincaré Lemma in analytic complexes with nondegenerate Levi form. Comm. in Partial Diff. Equations, 7 (12), 1982, 1467–1482.

[T3] Treves, F.: On the local solvability and local integrability of systems of vector fields. Acta Math. 151, 1983, 1–48.

[T4] Treves, F.: Approximation and representation of solutions in locally integrable structures with boundary. Aspects of Mathematics and its Applications, North Holland Math. Library, Vol. in honor of L. Nachbin, 1986, 781–816.

[T5] Treves, F.: Hypo-analytic structures. A aparecer.