

APLICAÇÃO DA TEORIA DE SEMIGRUPOS DE OPERADORES LINEARES ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Este exemplar corresponde à redação final da
tese devidamente corrigida e defendida pelo
Sr. Sérgio Henrique Monari Soares e apro-
vada pela Comissão Julgadora.

Campinas, de março de 1991

Prof. Dr. Aloísio J.F. Neves

Prof. Dr. Aloísio J.F. Neves

Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Ma-
temática, Estatística e Ciência da Com-
putação, UNICAMP, como requisito parcial
para a obtenção do título de Mestre em Ma-
temática.

MARÇO – 1991

So11a

13598/BC

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Aloísio J.F. Neves, pela orientação amiga e atenção despendida neste tempo em que trabalhamos juntos.

Ao Departamento de Matemática do IBILCE/UNESP - São José do Rio Preto que possibilitou a conclusão deste trabalho.

Aos amigos Emília, Jéssica, Rosane, Gustavo e Cecília pela amizade e companheirismo constante em nossa convivência.

Ao amigo, Pedro Ubilla pelas sugestões neste trabalho.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, pelo apoio financeiro.

“E há poetas que são artistas
E trabalham nos seus versos
Como um Carpinteiro nas tabulas! ...

Que triste não saber florir!
Ter que por verso sobre verso, como quem constrói um muro
E ver se está bem, e tirar se não está! ...
Quando a única casa artística é a Terra toda
Que varia e está sempre bem e é sempre a mesma” ...

F.P. - Alberto Caeiro

(Pessoa, F. *Fições do Interlúdio*, 1: poemas completos
de Alberto Caeiro, Rio de Janeiro; Nova Fronteira, 1980)

Aos meus pais

À Carla

Introdução

Contrariando o título desta dissertação, daremos alguns resultados básicos da teoria de semigrupos na forma em que são usualmente empregados no estudo das diferenciais parciais do tipo de evolução. Mais especificamente, escolheremos a equação do calor pelo interesse matemático. A equação do calor é o modelo das equações parabólicas e o operador Laplaciano, Δ , é o exemplo mais natural do gerador de um semigrupo analítico.

Como veremos, a teoria de semigrupos não termina meramente com os resultados de existência e unicidade mas, também, constitui-se em uma ferramenta útil para atacar outros tipos de problemas.

A preocupação que norteou este trabalho foi, sempre que possível, de fundamentar a resolução e o estudo da equação do calor. O que justifica este caráter é, por exemplo, o uso do teorema de Friedrichs para esclarecer a escolha do domínio do operador Δ na resolução do problema linear do calor.

O primeiro capítulo ocupa-se de apresentar os resultados necessários da análise funcional, teoria de Semigrupos e equações de evolução abstratas. Daremos apenas algumas demonstrações dos resultados que não constam de uma bibliografia organizada.

O segundo capítulo é, de modo natural, uma aplicação do Capítulo 1. Neste são tratadas questões relativas às equações linear e não-linear do calor no sentido da existência local e global, unicidade e “blow-up” para tempo finito.

ÍNDICE

Capítulo I: Preliminares

1.1 Alguns Resultados Abstratos	1
1.2 Espaços de Sobolev	1
1.3 Funções Integráveis	5
1.4 Os Espaços $L^p(I, X)$	6
1.5 Os Espaços $W^{1,p}(I, X)$	6
1.6 Semigrupos de Geradores Lineares Contínuos	7
1.7 O Teorema de Hille-Yosida	10
1.8 O Teorema de Lummer-Phillips	15
1.9 Diferenciabilidade	23
1.10 Semigrupos Analíticos	24
1.11 Equação Homogênea	26
1.12 Equação Não-Homogênea	32
1.13 Equação de Evolução Semilinear Abstrata	36

Capítulo II: A Equação do Calor

2.1 Introdução	46
2.2 A Equação de Calor Linear	46
2.3 A Equação do Calor em $L^\infty(\Omega)$	63
2.4 Equação Não-Linear do Calor	78
2.4.1 Existência Local	78
2.4.2 Existência Global	85
2.4.3 Explosão para Tempo Finito (“blow-up”)	97

Bibliografia	103
---------------------------	-----

Capítulo 1

Preliminares

Nas seções que se seguem apresentaremos um resumo dos resultados necessários para o estudo e resolução da equação do calor que serão feitos no Capítulo 2.

§1.1 Alguns Resultados Abstratos

Listaremos neste parágrafo alguns resultados clássicos da análise funcional que serão fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. As demonstrações são encontradas em [Taylor]. Denotaremos por $L(X, Y)$ o espaço dos operadores lineares contínuos do espaço Banach X no espaço de Banach Y .

Teorema 1.1.1 (Teorema do ponto fixo de Banach). Seja (E, d) um espaço métrico completo e $f : E \rightarrow E$ uma aplicação tal que existe $k \in [0, 1)$ que verifica $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ para todo $(x, y) \in E \times E$. Então existe um único ponto $x_0 \in E$ tal que $f(x_0) = x_0$.

Teorema 1.1.2 (Teorema do Gráfico Fechado) Sejam X e Y dois espaços de Banach e $A : X \rightarrow Y$ uma aplicação linear. Então $A \in L(X, Y)$ se e somente se o gráfico de A é fechado em $X \times Y$.

§1.2 Espaços de Sobolev

Seja Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$. Se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, chamaremos comprimento de α ao número $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ e denotaremos, por D^α o operador diferenciação

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Designaremos por $C^m(\Omega)$ o conjunto das funções m vezes continuamente diferenciáveis em Ω , a valores reais ou complexos. Por $C^\infty(\Omega)$ indicaremos a intersecção de todos os $C^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$.

Seja a função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Definição 1.2.1 O *suporte* de f , $\text{supp} f$, é menor fechado que contém o conjunto $\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}$.

Denota-se por $C_0^\infty(\Omega)$ ou $D(\Omega)$ ao conjunto das funções pertencentes a $C^\infty(\Omega)$ cujos suportes são compactos contidos em Ω .

Definição 1.2.2 Seja ϕ_j uma sequência de elementos de $D(\Omega)$, e seja $\phi \in D(\Omega)$. Dizemos que ϕ_j *converge para* ϕ e denotamos por $\phi_j \rightarrow \phi$ se : i) existe um compacto k contido em Ω tal que para todo j , o suporte de ϕ_j está contido em k ; ii) para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, a sequência $D^\alpha \phi_j$ converge uniformemente para $D^\alpha \phi$ em Ω .

Chamamos *distribuição* sobre Ω a qualquer forma linear $T : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) que é contínua no seguinte sentido: se $\phi_j \rightarrow \phi$, então $T(\phi_j) \rightarrow T(\phi)$ em $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Representamos o número complexo $T(\varphi)$ por $\langle T, \varphi \rangle$, $\varphi \in D(\Omega)$.

É de fácil verificação que se T e S são duas distribuições sobre Ω então $T + S$ e αT , $\alpha \in \mathbb{C}$, são também distribuições sobre Ω . Portanto, a coleção das distribuições sobre Ω é um espaço vetorial denotado por $D'(\Omega)$.

Definição 1.2.3: Seja $k = (k_1, \dots, k_m)$ com $1 \leq m \leq n$ com m e $n \in \mathbb{N}$. A *derivada de ordem* k de uma distribuição T sobre Ω , é o funcional $D^k T$ definido em $D(\Omega)$ por

$$\langle D^k T, \varphi \rangle = (-1)^{|k|} \langle T, D^k \varphi \rangle, \quad \varphi \in D(\Omega) \text{ e } |k| = k_1 + \dots + k_m.$$

Vemos que toda distribuição sobre Ω possui derivadas de todas as ordens, que

também são distribuições sobre Ω , visto que, $\varphi \in D(\Omega)$.

Dada uma função $f \in L^1_{\text{LOC}}(\Omega)$ fica bem determinada a distribuição $T_f : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ sobre Ω dada por

$$T_f(\varphi) = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

A partir do lema de Du Bois Raymond, a saber: seja $f \in L^1_{\text{LOC}}(\Omega)$ então, $T_f = 0$ se, e somente se, $f = 0$, quase sempre em Ω ; que as distribuições T_f são univocamente determinadas por f . Deste modo $D'(\Omega)$ possui um subespaço o qual é identificado com o espaço $L^1_{\text{LOC}}(\Omega)$ via a aplicação injetora $u \mapsto T_u$. Deste modo, identifica-se T_u à função u que a define. Vemos assim, que as funções (classes) de $L^1_{\text{LOC}}(\Omega)$ possuem derivadas de todas as ordens no sentido de distribuições. Entretanto, há distribuições não definidas por funções localmente integráveis, como no caso da distribuição de Dirac δ .

Para funções $f \in L^p(\Omega)$; $p \in [1, \infty]$ vemos que estas possuem derivadas de todas as ordens no sentido de distribuição via a aplicação $f \mapsto T_f$. Logo $D^\alpha f = D^\alpha(T_f)$ para todo $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ $m \geq 1$. Assim, quando $f \in L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$ e $D^\alpha f$ é uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. A próxima definição baseia-se neste fato.

Definição 1.2.4. Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $p \in [1, \infty]$, definimos o espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ por:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega); D^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^m / |\alpha| \leq m\}$$

Onde por $D^\alpha f \in L^p(\Omega)$ entendemos que existe $g \in L^p(\Omega)$ tal que $D^\alpha f = D^\alpha T_f = T_g$.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ torna-se de Banach quando munido da norma

$$\left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

Denotamos por $W_0^{m,p}(\Omega)$ ao fecho de $D(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Se $\Omega = \mathbb{R}^n$ então $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$. Se $\bar{\Omega} \neq \mathbb{R}^n$ então $W_0^{m,p}(\Omega) \neq W^{m,p}(\Omega)$. Veja [Giglioli],

pág. 333. Quando $p = 2$, usualmente denotamos $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$ e $W_0^{m,2}(\Omega)$ por $H_0^m(\Omega)$.

Para $H^m(\Omega)$ utilizaremos a norma

$$\|f\|_{H^m} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

que torna $H^m(\Omega)$ um espaço de Hilbert real munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v dx$$

Quando Ω é limitado, existe uma constante $C(\Omega)$ tal que

$$\|u\|_{L^2} \leq C(\Omega) \|\nabla u\|_{L^2}, \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega)$$

A desigualdade acima é conhecida como *desigualdade de Poincaré*.

Assim, é mais comodo munirmos o espaço $H_0^1(\Omega)$ com o produto interno:

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

Proposição 1.2.5 (Regra de Cadeia) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^1 por partes com $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ então $f.u \in W^{1,p}(\Omega)$ e além disso, se L denota o conjunto onde f não é diferenciável temos que,

$$D(f.u) = \begin{cases} f'(u)Du & \text{Se } u \notin L \\ 0 & \text{Se } u \in L \end{cases}.$$

Dem. Veja [Gilbarg e Trudiger] teorema 7.8, pág 153. $\square$

Corolário 1.2.6 Seja $p \in [1, \infty]$. Então para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$ temos que $u^+, u^-, |u|$ pertencem a $W^{1,p}(\Omega)$ e além disso

$$Du^+ = \begin{cases} Du & , u > 0 \\ 0 & , u \leq 0 \end{cases}, Du^- = \begin{cases} 0 & , u \geq 0 \\ Du & , u < 0 \end{cases} \text{ e } D|u| = \begin{cases} Du & , u > 0 \\ 0 & , u = 0 \\ -Du & , u < 0 \end{cases}.$$

Observação 1.2.7: A regra da cadeia dada pela proposição 1.2.5 pode ser estendida para o espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ bastando para isso que f também satisfaça $f(0) = 0$

§1.3 Funções integráveis

Sejam X um espaço de Banach e I um intervalo de $\mathbb{R}$.

Definição 1.3.1: Uma função $f : I \rightarrow X$ é *mensurável* se existem um conjunto $E \subset I$ de medida nula e uma sequência $f_n : I \rightarrow X; f_n \in C_0(I, X)$ tais que $f_n(t) \rightarrow f(t)$ quando $n \rightarrow \infty$ e $t \in I \setminus E$

Observação 1.3.2 Se $f : I \rightarrow X$ é mensurável então $\|f\| : I \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável.

Definição 1.3.3: Seja $f : I \rightarrow X$ uma função mensurável. Dizemos que f é integrável se existe uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções de $C_0(I, X)$ tais que $\int \|f_n - f\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e a integral de f em I é o elemento $\int_I f \in X$.

Proposição 1.3.4 (Teorema de Bochner) Seja $f : I \rightarrow X$ mensurável, f é integrável se e somente se $\|f\|$ é integrável.

Além disso,

$$\left\| \int f \right\| \leq \int \|f\|$$

Teorema 1.3.5 (convergência dominada de Lebesgue) Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis de I em X que converge quase sempre para uma função $f : I \rightarrow X$. Se existe uma função integrável $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|f_n\| \leq g$ para todo n , então f é integrável e

$$\int f = \lim \int f_n.$$

§1.4 Os espaços $L^p(I, X)$

Sejam X um espaço de Banach e I intervalo de reta

Definição 1.4.1 Seja $p \in [1, \infty]$. Denotamos por $L^p(I, X)$ as classes de funções $f : I \rightarrow X$ mensuráveis tais que $t \rightarrow \|f(t)\|$ pertencem a $L^p(I)$.

Para toda $f \in L^p(I, X)$ definimos

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^p} &= \left(\int \|f(t)\|^p dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty \\ \|f\|_{L^\infty} &= \sup_{t \in I} \text{ess} \|f(t)\|\end{aligned}$$

Proposição 1.4.2: $(L^p(I, X), \|\cdot\|_{L^p})$ é um espaço de Banach.

Dem: Análogo ao caso real $\square$

Observação 1.4.3 Se I é limitado e $1 \leq q \leq p \leq \infty$ então $L^p(I, X) \subset L^q(I, X)$.

§1.5 Os espaços $W^{1,p}(I, X)$

Denotamos por $D'(I, X)$ o espaço das distribuições vetoriais, $L(D(I), X)$, sobre I a valores em X .

Seja T pertencente a $D'(I, X)$ definimos a sua derivada T' pertencente a $D'(I, X)$ por

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D(I)$$

Definição 1.5.1 Seja $1 \leq p \leq \infty$. Denotamos por $W^{1,p}(I, X)$ o conjunto das classes de funções f pertencentes a $L^p(I, X)$ tais que $f' \in L^p(I, X)$ no sentido de distribuições. Para toda $f \in W^{1,p}(I, X)$ definimos

$$\|f\|_{W^{1,p}} = \|f\|_{L^p} + \|f'\|_{L^p}$$

Proposição 1.5.2 ($W^{1,p}(I, X); \|\cdot\|_{W^{1,p}}$) é um espaço de Banach.

Dem: Análogo a caso real. Veja [Brezis]. $\square$

Proposição 1.5.3: Suponha que X é um espaço de Banach reflexivo, sejam $p \in [1, \infty]$ e $f \in W^{1,p}(I, X)$. Então $f \in W^{1,p}(I, X)$ se, e somente se, existe $\varphi \in L^p(I, \mathbb{R})$ tal que

$$\|f(\tau) - f(t)\| \leq \left| \int_t^\tau \varphi(s) ds \right| \text{ para todo } t, \tau \in I$$

e neste caso,

$$\|f'\|_{L^p(I, X)} \leq \|\varphi\|_{L^p(I, \mathbb{R})}$$

Dem: [Cazenave] $\square$

Corolário 1.5.4: Seja X um espaço de Banach reflexivo e seja $f : I \rightarrow X$ uma função Lipschitziana e limitada. Então $f \in W^{1,\infty}(I, X)$ e $\|f'\|_{L^\infty} \leq K$, onde K é a constante de Lipschitz de f .

Dem: Basta tomar $\varphi(s) = k$ no teorema anterior, onde k é a constante de Lipschitz de f $\square$

§1.6 Semigrupos de Operadores Lineares Contínuos.

Daremos neste parágrafo alguns resultados a respeito de semigrupos de classe C^0 sobre um espaço de Banach. Denotaremos por X um espaço de Banach real e $L(X)$ o espaço de todos os operadores lineares contínuos de X em X com a norma usual

$$\|T\| = \sup\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|}; x \neq 0 \text{ em } X\right\}$$

Definição 1.6.1: Uma família a um parâmetro de operadores lineares contínuos $\{T(t); t \geq 0\} \subset L(X)$ é chamada um semigrupo de operadores lineares fortemente contínuos, ou simplesmente, um C^0 -semigrupo, se satisfaz as seguintes condições:

i) $T(t)T(s) = T(t+s)$ para $t, s \geq 0$

ii) $T(0) = I$

iii) $\lim_{t \downarrow 0} T(t)x = x$, para cada $x \in X$.

Além disso, se

a) $\|T(t)\| \leq M$, para todo $t \geq 0$, dizemos que $\{T(t), t \geq 0\}$ é uniformemente limitado.

b) Se no item (a), $M = 1$, dizemos então que $\{T(t), t \geq 0\}$ é de contrações.

c) Se $\|T(t) - I\| \rightarrow 0$ quando $t \downarrow 0$, este semigrupo é chamado uniformemente contínuo, isto é, $T(t)x \rightarrow x$ quando $t \downarrow 0$ uniformemente para $\|x\| \leq 1$.

Observação 1.6.2: As propriedades (i) e (iii) implicam que a função $t \mapsto T(t)x$ é contínua em $[0, +\infty)$ para cada $x \in X$

Definição 1.6.3: Seja $T(t)$ um C^0 -semigrupo definido sobre X . O *gerador infinitesimal* A de $T(t)$ é um operador linear definido por

$$Ax = \lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h)x - x}{h} \text{ para } x \in D(A)$$

Onde $D(A) = \{x \in X; \lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h)x - x}{h} \text{ existe em } X\}$

Proposição 1.6.4 Seja $T(t)$ um C^0 -semigrupo e A seu gerador infinitesimal.

Então:

1) Existem constantes $\omega > 0$ e $M \geq 1$ tais que

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}$$

2) Para todo $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ e $\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$, isto é, se $x \in D(A)$ então $T(\cdot)x \in C^1([0, \infty); X)$ e $u(t) = T(t)x$ é solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = Au(t) & ; t \geq 0 \\ u(0) = x & ; x \in D(A) \end{cases}$$

3) $D(A)$ é denso em X e A é um operador linear fechado.

Dem: [Pazy] $\square$

Da definição 1.6.3 está claro que o semigrupo $T(t)$ possui um único gerador infinitesimal. Por outro lado, se um operador linear A gera um semigrupo então este é único. Isto é a consequência da próxima proposição.

Proposição 1.6.5: Sejam $T(t)$ e $S(t)$ C^0 -semigrupos de operadores lineares com geradores infinitesimais A e B . Se $A = B$ então $T(t) = S(t)$.

Dem: [Pazy] $\square$

Exemplo 1.6.6 $T(t) = e^{At}$ para $t \in [0, \infty)$ e $A \in L(X)$ tem gerador infinitesimal A e $D(A) = X$

Uma pergunta natural que surge é sob quais condições um semigrupo de operadores $T(t)$ é da forma e^{At} com $A \in L(X)$. A resposta a esta questão é dada pelo próximo resultado.

Proposição 1.6.7: Um operador linear A é gerador de um semigrupo uniformemente contínuo se, e somente se, A é um operador linear limitado.

Dem [Pazy] $\square$

Tendo em vista este resultado concentraremos nossa atenção para os semigrupos fortemente contínuos, ou simplesmente, C^0 -semigrupos.

§1.7 O Teorema de Hille-Yosida

Vimos no item (2) da proposição 1.6.4 que se $x \in D(A)$ então a função $u(t) = T(t)x$ resolve

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = Au(t) & t \geq 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

Portanto, um semigrupo está associado a uma equação de evolução e ele a resolve. Então, a questão que surge é saber sob que condições o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au(t) & t \geq 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

tem solução dada por $u(t) = T(t)x$. Onde $T(t)$ é um C^0 -semigrupo. Para responder a esta pergunta estudaremos quando é que um problema de valor inicial, como acima, é “bem posto”.

Definição 1.7.1: Seja X um espaço de Banach uma solução da equação

$$(1.7.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = Au \end{array} \right.$$

Onde A é um operador linear com domínio, $D(A)$, denso em X , é uma função $u(t)$ definida em um intervalo $[0, T]$. Satisfazendo as condições:

- i) $u(t) \in D(A)$ para cada $t \in [0, T]$
- ii) Para cada $t \in [0, T]$ existe a derivada $u'(t)$ de $u(t)$
- iii) A equação $u'(t) = Au(t)$ está satisfeita para todo $t \in [0, T]$.

O problema de valor inicial ou de Cauchy em $[0, T]$ significa o problema de encontrar uma solução da equação (1.7.1) sobre $[0, T]$ satisfazendo a condição inicial $u(0) = x \in D(A)$.

Definição 1.7.2 O problema de Cauchy está bem posto em algum intervalo $[0, \gamma]$ se:

- 1) Para todo $x \in D(A)$ existe uma única solução definida neste intervalo.
- 2) Esta solução depende continuamente da condição inicial, no sentido que se $u_n(0) \rightarrow 0$ então $u_n(t) \rightarrow 0$ para $t \in [0, \gamma]$

Observação 1.7.3: Se o problema está bem posto em algum intervalo $[0, \gamma]$, então ele está bem posto em todo semi-eixo $[0, +\infty)$

De fato, suponha que $u(t)$ seja uma solução do problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = Au \\ u(0) = u_0 \end{array} \right.$$

em $[0, \gamma]$, seja $v(t)$ solução da equação

$$\frac{du}{dt} = Au$$

com condição inicial $v(0) = u(\gamma) \in D(A)$.

Defina

$$w(t) = \begin{cases} u(t) & , t \in [0, \gamma] \\ v(t) & , t = \gamma + \tau, \tau \in [0, \gamma] \end{cases}$$

Logo, $w(t)$ é uma solução do problema

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} = Aw \\ w(0) = u_0 \end{cases}$$

sobre $[0, 2\gamma]$.

Se $u_n(0) \rightarrow 0$ então $u_n(\gamma) \rightarrow 0$. O que significa que $u_n(t)$ e $v_n(t)$ tendem a zero para todos t e τ pertencentes ao intervalo $[0, \gamma]$. Logo, $w_n(t) \rightarrow 0$ para todo t pertencente a $[0, 2\gamma]$. Repetindo o processo provamos sobre $[0, +\infty)$ $\square$

Considere agora um problema bem posto. Seja operador $T(t)$ que associa a cada condição inicial $x \in D(A)$ o valor da solução $u(t)$ no instante $t > 0$, $x \mapsto T(t)x$.

A família de operadores $\{T(t), t \geq 0\}$ assim definida é um semigrupo de operadores lineares contínuos.

Porém se adotamos uma definição mais forte para “bem-posto” definiremos uma outra classe de operadores lineares contínuos sobre X , a saber, operadores lineares fortemente contínuos.

Definição 1.7.5: Um problema de valor inicial bem-posto é dito ser *uniformemente bem-posto* se $u_n(0) \rightarrow 0$ então $u_n(t) \rightarrow 0$ uniformemente em t pertencente a cada intervalo $[0, T]$

Proposição 1.7.6: Se o problema é uniformemente bem-posto, para cada $x \in X$ então,

$$\lim_{t \downarrow 0} T(t)x = x$$

Dem: [Krein]. $\square$

Teorema 1.7.8: Para que o problema

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au \\ u(0) = u_0 \in D(A) \end{cases}$$

onde A é um operador fechado, seja uniformemente bem-posto, é necessário e suficiente que A seja o gerador de um C^0 -semigrupo.

Dem: [Krein] $\square$

Assim, a questão natural que surge neste ponto é saber quais operadores A geram C^0 -semigrupos. A resposta para esta pergunta é dada pelo seguinte resultado fundamental que daremos a seguir. Antes definiremos algumas noções. Se A é um operador linear, não necessariamente limitado, sobre X , o conjunto resolvente $\rho(A)$ de A é o conjunto de todos os números complexos λ para os quais o operador $\lambda I - A$ é inversível, isto é, $(\lambda I - A)^{-1}$ é um operador linear limitado definido em todo o espaço X . O resolvente, de A é a função $\lambda \in \rho(A) \mapsto (\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda : A)$

Teorema 1.7.9 (Hille-Yosida). Um operador linear A sobre X é o gerador infinitesimal de um C^0 -semigrupo $T(t)$ satisfazendo

$$\|T(t)\| \leq M e^{wt}$$

Se, e somente se,

i) A é fechado e $D(A)$ é denso em X

ii) O conjunto resolvente, $\rho(A)$, de A contém o intervalo $(w, +\infty)$ e

$$\|R(\lambda : A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n} \text{ para todo } \lambda > w \text{ e } n = 1, 2, \dots$$

Dem [Pazy]. $\square$

Observação 1.7.11: O teorema de Hille-Yosida fornece uma caracterização do gerador infinitesimal de um C^0 -semigrupo. Para obtermos tal caracterização é suficiente caracterizar o gerador infinitesimal de um C^0 -semigrupo de contrações, bastando para isso introduzirmos uma norma equivalente ao espaço de Banach X de modo que, na nova norma o C^0 -semigrupo torne um C^0 -semigrupo de contrações. Vejamos com mais detalhes. Seja $T(t)$ um C^0 -semigrupo, então pela proposição 1.6.4, existem constantes $M > 0$ e $w \geq 0$ tais que $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$. Considere o seguinte C^0 -semigrupo $S(t) = e^{-wt}T(t)$. Então,

$$\|S(t)\| \leq M.$$

Defina

$$|x| = \sup_{t \geq 0} \|S(t)x\|$$

então

$$\|x\| \leq |x| \leq M\|x\|$$

E portanto, $|\cdot|$ é uma norma em X equivalente a norma original $\|\cdot\|$ sobre X . Além disso

$$|S(t)x| = \sup_{s \geq 0} \|S(s)S(t)x\| \leq \sup_{r \geq 0} \|S(r)x\| = |x|$$

isto é, $S(t)$ é um C^0 -semigrupo de contrações sobre X munido da norma $|\cdot|$.

É fácil verificar que A é um gerador infinitesimal de $T(t)$ se, e somente se $A - wI$

é o gerador infinitesimal de $S(t)$.

Então, para finalizar mencionaremos a citada caracterização do gerador infinitesimal de um C^0 -semigrupo de contrações.

Teorema 1.7.12 (Hille-Yosida): Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um C^0 -semigrupo de contrações $T(t), t \geq 0$, se, e somente se,

i) A é fechado e $\overline{D(A)} = X$

ii) O conjunto resolvente, $\rho(A)$, de A contém R^+ e para $\lambda > 0$,

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

Dem [Pazy]. $\square$

Corolário 1.7.13: Seja A o gerador infinitesimal de um C^0 -semigrupo de contrações $T(t)$. O conjunto resolvente de A contém o semiplano a direita, isto é, $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > 0\} \subset \rho(A)$ e para tais λ

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda}$$

Dem: [Pazy]. $\square$

§1.8 O Teorema de Lumer - Phillips.

Neste parágrafo daremos uma formulação alternativa do teorema de Hille-Yosida. Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear não-limitado sobre X .

Definição 1.8.1: A é dissipativo se, e somente se, para qualquer $\lambda > 0$ e para qualquer $u \in D(A)$

$$\|u - \lambda Au\| \geq \|u\| \quad (1.8.1)$$

Definição 1.8.2 A é m -dissipativo se, e somente se,

- i) A é dissipativo;
- ii) Para quaisquer $\lambda > 0$ e $f \in X$, $\exists u \in D(A)$ tal que $u - \lambda Au = f$

Observação 1.8.3 1) A é m -dissipativo se, e somente se, $\|(I - \lambda A)^{-1}\| \leq 1, \forall \lambda > 0$.

2) Se X é um espaço de Hilbert a condição (1.8.1) é equivalente a $\langle Au, u \rangle \leq 0 \quad \forall u \in D(A)$.

As proposições que seguem dão caracterizações úteis dos operadores m -dissipativos.

Proposição 1.8.4: A é m -dissipativo se, e somente se, A é dissipativo e existe $\lambda_0 > 0$ tal que para qualquer $f \in X$ existe $u \in D(A)$ tal que $u - \lambda_0 Au = f$.

Dem: Basta somente mostrar a recíproca. Suponhamos que A é dissipativo, isto é, $\lambda > 0$ e $u \in D(A)$ temos $\|u - \lambda Au\| \geq \|u\|$, então, $\|I - \lambda A\| \geq 1$. Como $I - \lambda_0 A : D(A) \rightarrow X$ é sobrejetivo, segue que $I - \lambda_0 A$ é inversível e $\|(I - \lambda_0 A)^{-1}\| \leq 1$, mostraremos que para todo $\lambda > 0, I - \lambda A : D(A) \rightarrow X$ é sobrejetivo. A equação $u - \lambda Au = f$ pode ser escrita na forma

$$\frac{u}{\lambda} - Au = \frac{1}{\lambda} f$$

que por sua vez se escreve como

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\lambda_0} - Au\right) &= \frac{1}{\lambda} f + \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda}\right)u = \\ &= \frac{f}{\lambda} + \frac{(\lambda - \lambda_0)}{\lambda_0 \lambda} u \end{aligned}$$

Daí,

$$(I - \lambda_0 A)u = \frac{\lambda_0}{\lambda}f + \frac{(\lambda - \lambda_0)}{\lambda}u \Leftrightarrow$$

$$u = (I - \lambda_0 A)^{-1}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}f + \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda}u\right)$$

Defina, $T_\lambda : X \rightarrow X$ por

$$T_\lambda(u) = (I - \lambda_0 A)^{-1}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}f + \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda}u\right)$$

para $f \in X$ e $\lambda_0 > 0$ fixos e $\lambda > 0$.

T_λ é Lipschitziana e com constante de Lipschitz

$$k \leq \|(I - \lambda_0 A)^{-1}\| \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\lambda} \leq \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\lambda}$$

Se $\lambda \in (\frac{\lambda_0}{2}, +\infty)$ então $k < 1$. Pelo teorema 1.1.1, existe $u \in D(A)$ tal que $T_\lambda(u) = u$ para todo $\lambda \in (\frac{\lambda_0}{2}, +\infty)$ isto é, $I - \lambda A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é sobrejetivo para todo $\lambda \in (\frac{\lambda_0}{2}, +\infty)$.

Seja $\lambda_1 \in \mathbb{R}^+$ tal que $\frac{\lambda_0}{2} < \lambda_1 < \lambda_0$. Então $I - \lambda_1 A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é sobrejetivo. Repetindo o argumento utilizado para λ_0 temos que o operador $I - \lambda A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é sobrejetivo para todo $\lambda \in (\frac{\lambda_1}{2}, \infty)$. Como $\lambda_1 \in (\frac{\lambda_0}{2}, \lambda_0)$ segue que $\frac{\lambda_0}{2} \in (\frac{\lambda_1}{2}, +\infty)$, isto é, $I - \frac{\lambda_0}{2} A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é sobrejetivo e, portanto, para todo $\lambda \in (\frac{\lambda_0}{2^2}, \infty)$ o operador $I - \lambda A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é sobrejetivo. Repetindo o mesmo argumento resulta que para todo $\lambda \in (\frac{\lambda_0}{2^n}, +\infty)$ $n \in \mathbb{N}$, o operador $I - \lambda A : D(A) \rightarrow X$ é sobrejetivo: tomando limite $n \rightarrow \infty$ concluímos a proposição.

□

Proposição 1.8.5: Qualquer operador A m -dissipativo em um espaço de Banach é fechado.

Dem: Em consequência que A é m -dissipativo segue que $(I - A)^{-1} : X \rightarrow D(A)$ é um operador linear e limitado com $\|(I - A)^{-1}\| \leq 1$.

Portanto, $(I - A)^{-1} : X \rightarrow D(A)$ é contínuo. Logo, pelo teorema do gráfico fechado, A é fechado. $\square$

Lema 1.8.6: Seja A um operador m -dissipativo, densamente definido em X , para $\lambda > 0$ sejam $J_\lambda = (I - \lambda A)^{-1}$ e $A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(J_\lambda - I)$

Então:

- i) $\lim_{\lambda \rightarrow 0} J_\lambda v = v \quad \forall v \in X$
- ii) $A_\lambda v = A(J_\lambda v) \quad \forall \lambda > 0 \text{ e } \forall v \in X$
- iii) $A_\lambda v = J_\lambda(Av) \quad \forall v \in D(A), \forall \lambda > 0.$
- iv) $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A_\lambda v = Av \quad \forall v \in D(A)$

Dem:

i) Seja $v \in D(A)$

$$\|J_\lambda v - v\| = \|J_\lambda v - J_\lambda(I - \lambda A)v\| = \|J_\lambda(v - (I - \lambda A)v)\| \leq$$

$$\leq \|v - (I - \lambda A)v\| = \lambda\|Av\| \rightarrow 0 \text{ quando } \lambda \downarrow 0.$$

Se $v \notin D(A)$, existe $v_n \in D(A)$; $v_n \rightarrow v$ em X

$$\|J_\lambda v - v\| = \|J_\lambda v - J_\lambda v_n + J_\lambda v_n - v_n + v_n - v\|$$

$$\leq \|J_\lambda v - J_\lambda v_n\| + \|J_\lambda v_n - v_n\| + \|v_n - v\| \leq$$

$$\leq 2\|v - v_n\| + \|J_\lambda v_n - v_n\| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|v - v_n\| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$

$$\text{Logo, } \|J_\lambda v - v\| \leq 2\varepsilon + \|J_\lambda v_{n_0} - v_{n_0}\|$$

Em consequência,

$$\limsup_{\lambda \rightarrow 0} \|J_\lambda v - v\| \leq 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0,$$

Logo, $\|J_\lambda v - v\| \rightarrow 0$ quando $\lambda \downarrow 0$.

$$\begin{aligned}
iii) A_\lambda v &= \frac{1}{\lambda}(J_\lambda - I)v = \frac{1}{\lambda}(J_\lambda - J_\lambda(I - \lambda A))v = \\
&= \frac{1}{\lambda}J_\lambda(I - (I - \lambda A))v = \frac{1}{\lambda}J_\lambda(\lambda A)v \\
&= J_\lambda(Av) \quad \forall \lambda > 0, \forall v \in D(A) \\
iv) \lim_{\lambda \downarrow 0} A_\lambda v &\stackrel{(iii)}{=} \lim_{\lambda \downarrow 0} J_\lambda(Av) \stackrel{(i)}{=} Av \quad \forall v \in D(A) \quad \square
\end{aligned}$$

Observação 1.8.7 : 1) Os operadores $A_\lambda, \lambda > 0$, definidos no lema 1.8.6 são limitados e satisfazem

$$\|J_\lambda\| \leq 1 \quad \text{e} \quad \|A_\lambda\| \leq \frac{2}{\lambda}$$

para todo $\lambda > 0$

2) O ítem (iv) do lema acima estabelece que todo operador m -dissipativo densamente definido admite uma aproximação por operadores limitados.

Agora denotemos por X um espaço de Hilbert com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definição 1.8.8 Seja A um operador linear densamente definido sobre X , o operador adjunto A^* de A é definido pela equação

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$$

$$x \in D(A) \text{ e } y \in D(A^*)$$

ou precisamente: $y \in D(A^*)$ se, e somente se, $x \mapsto \langle Ax, y \rangle$ é um funcional linear limitado sobre $D(A)$, o qual pode ser estendido continuamente para $\overline{D(A)} = X$. Então pelo teorema de Hahn-Banach analítico, existe $w \in X$ tal que $\langle Ax, y \rangle = \langle x, w \rangle$ para todo $x \in D(A)$. Neste caso, definiremos $A^*y = w$.

Como consequência da definição acima, se $\overline{D(A)} = X$ então A^* é um operador fechado.

De fato, se $y_n \in D(A^*)$ tal que $y_n \rightarrow y$ e $A^*y_n \rightarrow z$, utilizando a continuidade do produto interno,

$$\begin{aligned}\langle Ax, y \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Ax, y_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, A^*y_n \rangle = \\ &= \langle x, z \rangle\end{aligned}$$

Assim, $\langle Ax, y \rangle = \langle x, z \rangle \quad \forall x \in D(A)$. Portanto, $y \in D(A^*)$ e $A^*y = z$.

Definição 1.8.9: Seja A um operador linear sobre X densamente definido. A é chamado auto-adjunto se $A = A^*$.

Proposição 1.8.10: Seja $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert, se A é um operador linear dissipativo com $\overline{D(A)} = H$ então A é m -dissipativo se, e somente se, $G(A)$ é fechado e A^* dissipativo.

Dem: Suponhamos que A é m -dissipativo, pela proposição 1.8.5, A é fechado e, portanto, $G(A)$ é fechado. Basta somente então mostrar que A^* é dissipativo. Para isso seja $v \in D(A^*)$

$$\begin{aligned}\langle A^*v, J_\lambda v \rangle &= \langle v, AJ_\lambda v \rangle \quad (1.8.2) \\ \langle v, A_\lambda v \rangle &= \langle v - J_\lambda v + J_\lambda v, A_\lambda v \rangle = \\ &= \langle v - J_\lambda v, A_\lambda v \rangle + \langle J_\lambda v, A_\lambda v \rangle \\ &= \lambda \left\langle \frac{1}{\lambda}(v - J_\lambda v), A_\lambda v \right\rangle + \langle J_\lambda v, A_\lambda v \rangle \\ &= -\lambda \left\langle \frac{1}{\lambda}(J_\lambda - I)v, A_\lambda v \right\rangle + \langle J_\lambda v, A_\lambda v \rangle \\ &= -\lambda \langle A_\lambda v, A_\lambda v \rangle + \langle J_\lambda v, A_\lambda v \rangle = \\ &= -\lambda \|A_\lambda v\|^2 + \langle J_\lambda v, A_\lambda v \rangle\end{aligned}$$

Pelo lema 1.8.6 (iii)

$$\langle v, A_\lambda v \rangle = -\lambda \|A_\lambda v\|^2 + \langle J_\lambda v, AJ_\lambda v \rangle$$

Como A é dissipativo $\langle J_\lambda v, AJ_\lambda v \rangle \leq 0$

Portanto, $\langle v, A_\lambda v \rangle \leq 0$

Logo, $\langle A^*v, J_\lambda v \rangle \stackrel{(1.8.2)}{=} \langle v, AJ_\lambda v \rangle = \langle v, A_\lambda v \rangle \leq 0 \quad \forall v \in D(A^*)$ e $\lambda > 0$

Novamente, pelo lema 1.8.6 (i)

$$\langle A^*v, v \rangle = \lim_{\lambda \downarrow 0} \langle A^*v, J_\lambda v \rangle \leq 0$$

Logo, A^* é dissipativo.

Reciprocamente, para todo $v \in D(A)$, $\langle Av, v \rangle \leq 0$ pois A^* é dissipativo.

Para todo $\lambda > 0$ o operador $I - \lambda A : D(A) \rightarrow H$ é sobrejetivo. De fato, pela proposição 1.8.4, basta mostrar que $R(I - A) = H$. Suponha que $R(I - A) \neq H$. Como $G(A)$ é fechado, segue que $R(I - A)$ é um subespaço fechado de H . Então pelo teorema de Hahn-Banach na forma geométrica, existe $\varphi \in H^*, \varphi \neq 0$ tal que

$$\langle \varphi, x - Ax \rangle = 0 \quad \forall x \in D(A)$$

Daí,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \varphi, x - Ax \rangle = \langle \varphi, x \rangle - \langle \varphi, Ax \rangle = \\ &= \langle \varphi, x \rangle - \langle A^*\varphi, x \rangle = \langle \varphi - A^*\varphi, x \rangle \quad \forall x \in D(A) \end{aligned}$$

De $\overline{D(A)} = H$; $\varphi - A^*\varphi = 0$

Como A^* é dissipativo, $\|\varphi\| \leq \|(I - A^*)\varphi\| = 0$.

Logo, $\varphi = 0$ contradizendo a construção de φ . $\square$

O próximo resultado será importante para o estudo da equação diferencial homogênea.

Corolário 1.8.11: Seja $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ um operador linear não-limitado satisfazendo

$$i) \overline{D(A)} = H$$

$$ii) A = A^*$$

$$iii) A \text{ é dissipativo, ou seja, } \langle Au, u \rangle \leq 0 \ \forall u \in D(A).$$

Então A é m -dissipativo

Dem: A^* é dissipativo, pois, para todo $v \in D(A^*) = D(A)$ temos,

$$\langle A^*v, v \rangle = \langle v, Av \rangle \leq 0.$$

Como A^* é um operador fechado e $A = A^*$ segue que $G(A)$ é fechado. Então, pela proposição 1.8.10, A é m -dissipativo $\square$

Daremos agora em termos de operadores m -dissipativos o teorema de Lumer-Phillips.

Teorema 1.8.12: Seja A um operador linear densamente definido sobre um espaço de Banach X . A é gerador de um C^0 -semigrupo de contrações se, e somente se, A é m -dissipativo.

Dem [Pazy] $\square$

Corolário 1.8.13 Se A é um operador linear com domínio $D(A)$ denso em um espaço de Hilbert H e existe $\lambda_0 > w \geq 0$ tal que a imagem de $\lambda_0 I - A$ é H e

$$\langle Ax, x \rangle \leq w \|x\|^2 \quad \forall x \in D(A)$$

Então A é gerador de um C^0 -semigrupo $T(t)$ tal que

$$\|T(t)\| \leq e^{wt}$$

Dem: Seja $x \in D(A)$

$$\begin{aligned}\langle (A - wI)x, x \rangle &= \langle Ax, x \rangle - w\|x\|^2 \leq \\ &\leq w\|x\|^2 - w\|x\|^2 = 0\end{aligned}$$

Logo, $A - wI$ é dissipativo.

Dado $h \in H$ existe $x \in D(A)$ tal que

$$(\lambda_0 - A)x = h$$

Logo,

$$h = \lambda_0 x - Ax = (\lambda_0 - w)x - (A - wI)x$$

Como $\lambda_0 > w \geq 0$ temos que $\lambda_0 - w > 0$. Portanto, dado $h \in H$ existe $\gamma > 0$ tal que $R(\gamma I - (A - wI)) = H$. Em consequência, $A - wI$ é m -dissipativo. Pelo teorema de Lumer-Phillips, $A - wI$ é gerador de um C^0 -semigrupo de contrações $S(t)$. Seja $T(t) = e^{wt}S(t)$. Portanto, A é gerador de um C^0 -semigrupo $T(t)$ tal que $\|T(t)\| \leq e^{wt}$ $\square$

§1.9 Diferenciabilidade

Definição 1.9.1 Seja $T(t)$ um C^0 -semigrupo sobre um espaço de Banach X o semigrupo $T(t)$ é chamado *diferenciável* para $t > t_0$ se para cada $x \in X, t \mapsto T(t)x$ é diferenciável para $t > t_0$. $T(t)$ é chamado diferenciável se é diferenciável para $t > 0$.

Proposição 1.9.2 Seja $T(t)$ um C^0 -semigrupo diferenciável para $t > t_0$ e seja A seu gerador infinitesimal. Então

a) para $t > nt_0, n \in \mathbb{N}, T(t) : X \rightarrow D(A^n)$ e $T^n(t) = A^n T(t)$ é um operador linear limitado

$$b) T^{(n)}(t) = (AT(\frac{t}{n}))^n = (T'(\frac{t}{n}))^n, n \in \mathbb{N}.$$

Dem [Pazy]. $\square$

Conclusão: Se $T(t)$ é um semigrupo diferenciável então para qualquer $x \in X, t \mapsto T(t)x$ é infinitamente diferenciável e além disso, $T(t)x \in D(A^n)$ para todo $x \in X$ e $n = 1, 2, \dots$

§1.10 Semigrupos Analíticos

Até este ponto lidamos com semigrupos cujo domínio do parâmetro t é o eixo real não-negativo. Veremos agora que é possível (em alguns casos) estender este domínio para uma região do plano complexo que inclui o eixo real não-negativo.

Definição 1.10.1: Seja $\Sigma = \{z : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2 : \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$ e para $z \in \Sigma$ seja $T(z)$ um operador linear limitado. A família $T(z), z \in \Sigma$ é um *semigrupo analítico* em Σ se:

- i) $z \mapsto T(z)$ é analítica em Σ ;
- ii) $T(0) = I$ e $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \Sigma}} T(z)x = x$ para todo $x \in X$
- iii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ para $z_1, z_2 \in \Sigma$.

Um semigrupo $T(t)$ será chamado *analítico* se ele é analítico em alguma região Σ contendo o eixo real não-negativo.

Restabeleceremos o teorema de Hille-Yosida para semigrupos analíticos.

Teorema 1.10.2: Se A é um operador linear com domínio denso em $X, \overline{D(A)} = X$, tal que:

i) O conjunto resolvente de $A, \varphi(A)$, contém o setor

$$\Sigma = \{\lambda : \lambda \neq 0; |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\}$$

para $0 < \delta < \pi/2$

$$ii) \|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|} \text{ para } \lambda \in \Sigma; \lambda \neq 0$$

Então A é o gerador infinitesimal de um C^0 -semigrupo $T(t)$ com extensão analítica para o setor $\Delta_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \delta\}$ satisfazendo

$$\|A^n T(t)\| \leq \frac{C}{t^n}, \quad t > 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

onde C depende somente de A e n

Dem.: [Friedman] $\square$

A seguir daremos um importante resultado para C^0 -semigrupos uniformemente limitados $T(t)$. O caso geral para C^0 -semigrupos segue multiplicando e^{wt} a $T(t)$; para $w > 0$.

Teorema 1.10.3: Seja $T(t)$ um C^0 -semigrupo uniformemente limitado, seja A seu gerador infinitesimal.

As seguintes afirmações são equivalentes:

a) $T(t)$ pode ser estendido a um semigrupo analítico no setor

$$\Delta_\delta = \{z : |\arg z| < \delta\}$$

e $T(t)$ é uniformemente limitado em todo subsetor fechado $\Delta_{\delta'}, \delta' < \delta$

b) Existe uma constante C tal que para todos $\sigma > 0$ e $\tau \neq 0$

$$\|R(\sigma + i\tau : A)\| \leq \frac{C}{|\tau|}$$

c) Existem $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ e $M > 0$ tais que

$$\rho(A) \supset \{\lambda : |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\} \quad e$$

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|} \quad \text{para } \lambda \in \Sigma; \lambda \neq 0$$

d) $T(t)$ é diferenciável para $t > 0$ e existe uma constante C tal que

$$\|AT(t)\| \leq \frac{C}{t} \quad \text{para } t > 0$$

Dem: [Pazy] $\square$

Em consequência do teorema 1.10.3, ítem (d), temos que $T(t)$ é diferenciável para $t > 0$. Aplicando a proposição 1.9.2, ítem (a) segue que $T(t) : X \rightarrow D(A^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

§1.11 A Equação Homogênea

Sejam X um espaço de Banach e A um operador linear de $D(A) \subset X$ em X . Dado $x \in X$ o problema abstrato de Cauchy para o operador A com condição inicial x consiste em encontrar uma solução $u(t)$ para a equação homogênea

$$(1.11.1) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = Au \\ u(0) = x \end{cases}$$

onde por solução entendemos uma função u definida para todo $t \geq 0$ com valores em X tal que $u(t)$ é contínua para $t \geq 0$, continuamente diferenciável e $u(t) \in D(A)$

para $t > 0$ e a equação (1.11.1) está satisfeita.

Vimos na proposição 1.6.4, ítem 2, que se $T(t)$ é um C^0 -semigrupo com gerador infinitesimal A e $x \in D(A)$ então a função $t \mapsto T(t)x$ é diferenciável para $t \geq 0$ e $T(t)x$ é a solução do problema de Cauchy para A com condição inicial $x \in D(A)$.

Quando $x \notin D(A)$, a função $t \mapsto T(t)x$ é chamada uma *solução mild* do problema de Cauchy para A com condição inicial $x \notin D(A)$. Pela densidade de $D(A)$ em X , existe sequência $x_n \in D(A)$ tal que $x_n \rightarrow u(0) = x$ quando $n \rightarrow \infty$ e $T(t)x_n \rightarrow u(t)$ uniformemente para t em intervalos limitados. Em alguns casos esta solução mild é a solução do problema de Cauchy como veremos no próximo resultado.

Proposição 1.11.1: Sejam H um espaço de Hilbert e A um operador linear densamente definido, auto-adjunto e dissipativo. Para qualquer $x \in H$, $u(t) = T(t)x$ satisfaz:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au; & t > 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

com $u \in C([0, \infty); H) \cap C((0, \infty); D(A)) \cap C^1((0, \infty); H)$ e satisfazendo a estimativa

$$\|Au(t)\| \leq \frac{\|x\|}{t\sqrt{2}}$$

Dem:

Pelo Teorema Espectral para operadores auto-adjuntos temos que o espectro de A , $\sigma(A)$, é real, e como A é dissipativo, $\sigma(A) \subset \mathbb{R}^-$.

Temos, então, que o setor $\{z \in \mathbb{C} : |\arg z - \pi| \leq \alpha\}$ com $0 < \alpha < \pi/2$ contém

o espectro do operador A .

Logo, o conjunto resolvente de A contém o setor

$$\Delta_\delta = \{\lambda : \lambda \neq 0; |\arg \lambda| < \delta + \frac{\pi}{2}\}$$

com $0 < \delta < \pi/2$

Seja λ no complementar do setor $\{z \in \mathbb{C}; |\arg z - \pi| \leq \alpha\}$. Seja $v \in D(A)$ com $\|v\| = 1$. Assim:

$$\langle Av, v \rangle \leq 0 \quad e$$

$$\begin{aligned} |\lambda| \sin \alpha &\leq \text{dist}(\lambda, R^-) = \inf_{r \in R^-} d(\lambda, r) \leq |\lambda - \langle Av, v \rangle| = \\ &= |\lambda \langle v, v \rangle - \langle Av, v \rangle| = |(\lambda - A)v, v| \leq \\ &\leq \|(\lambda I - A)v\| \leq \|\lambda I - A\| \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M_\alpha}{|\lambda|} \text{ onde } M_\alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

Portanto,

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M_\alpha}{|\lambda|}$$

Pelo teorema 1.10.2, A é gerador de um semigrupo analítico $T(t)$ e portanto diferenciável para todo $t > 0$ e $u(t) \in D(A)$ para todo $t > 0$. Provaremos agora a

estimativa.

Pelo corolário 1.8.11, A é m -dissipativo. Então, pelo Lema 1.8.6, ítem (iv), A admite uma aproximação por operadores limitados dados por $A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(J_\lambda - I)$. Defina $u_\lambda(t) = T_\lambda(t)x$ onde $T_\lambda(t) = e^{tA_\lambda}$. Então temos as seguintes afirmações:

- 1) $\|u_\lambda(t)\|$ e $\|\frac{du_\lambda}{dt}\|$ são não-crescentes para $t > 0$.
- 2) $\frac{d}{dt}\|u_\lambda(t)\|^2 = 2\langle A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t) \rangle$

De fato, seja $h > 0$,

$$\|u_\lambda(t+h)\| - \|u_\lambda(t)\| = \|e^{(t+h)A_\lambda}x\| - \|e^{tA_\lambda}x\| \leq (\|e^{hA_\lambda}\| - 1)\|e^{tA_\lambda}x\|$$

$$\text{mas, } \|e^{hA_\lambda}\| = \|e^{\frac{h}{\lambda}(J_\lambda - I)}\| \leq \|e^{\frac{h}{\lambda}J_\lambda}\|e^{-\frac{h}{\lambda}} = e^{\frac{h}{\lambda}\|J_\lambda\|}e^{-\frac{h}{\lambda}} \leq e^{\frac{h}{\lambda}}e^{-\frac{h}{\lambda}} = 1.$$

Logo, $\|u_\lambda(t+h)\| - \|u_\lambda(t)\| \leq 0$, o que demonstra que $\|u_\lambda(t)\|$ é não-crescente. Análogo demonstra-se para $\|\frac{du_\lambda}{dt}\|$. Para mostrar (2), basta derivar o produto interno e utilizar que $A_\lambda^* = A_\lambda$

A partir da afirmação (2) temos para todo $T > 0$ que

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\|u_\lambda(t)\|^2 dt = 2 \int_0^T \langle A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t) \rangle dt$$

Dai

$$\int_0^T \langle A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t) \rangle dt = \int_0^T \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \|u_\lambda(t)\|^2 \right\} dt =$$

$$\frac{1}{2} \{ \|u_\lambda(T)\|^2 - \|u_\lambda(0)\|^2 \} = \frac{1}{2} \{ \|u_\lambda(T)\|^2 - \|x\|^2 \} \geq$$

$$\geq -\frac{1}{2} \|x\|^2$$

Portanto,

$$(1.11.1) \quad \int_0^T \langle A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t) \rangle dt \geq -\frac{1}{2} \|x\|^2$$

Por outro lado,

$$(1.11.2) \quad \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \langle A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t) \rangle \right\} = \left\| \frac{du_\lambda}{dt} \right\|^2$$

O que é de simples verificação, bastando somente diferenciar o produto e usar que $A_\lambda^* = A_\lambda$

Em consequência de (1.11.2) temos,

$$\int_0^T t \left\| \frac{du_\lambda}{dt} \right\|^2 dt = \int_0^T t \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \langle A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t) \rangle \right) dt$$

Integrando por partes o lado direito da última igualdade segue que

$$\int_0^T t \left\| \frac{du_\lambda}{dt} \right\|^2 dt = \frac{T}{2} \langle A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda(T) \rangle - \frac{1}{2} \int_0^T \langle A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t) \rangle dt$$

Por (1.11.1) temos,

$$\int_0^T t \left\| \frac{du_\lambda}{dt} \right\|^2 dt \leq \frac{T}{2} \langle A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda(T) \rangle + \frac{1}{4} \|x\|^2$$

Uma conta fácil mostra que $\langle A_\lambda u_\lambda, u_\lambda \rangle \leq 0$

Daí,

$$(1.11.3) \quad \int_0^T t \left\| \frac{du_\lambda}{dt} \right\|^2 dt \leq \frac{1}{4} \|x\|^2$$

Pela afirmação 1, $\left\| \frac{du_\lambda}{dt}(T) \right\| \leq \left\| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right\| \quad \forall t \in [0, T]$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{T^2}{2} \left\| \frac{du_\lambda}{dt}(T) \right\|^2 &= \int_0^T t \left\| \frac{du_\lambda}{dt}(T) \right\|^2 dt \leq \int_0^T t \left\| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right\|^2 dt \stackrel{(1.11.3)}{\leq} \\ &\leq \frac{1}{4} \|x\|^2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$(1.11.4) \quad \left\| \frac{du_\lambda}{dt}(T) \right\| \leq \frac{1}{T\sqrt{2}} \|x\| \quad \forall T > 0$$

Denotemos $J(\lambda, A) = (I - \lambda A)^{-1}$. Então $J(\lambda, A) = J_\lambda$ como estávamos denotando. Pelo lema 1.8.6 temos:

$$(1.11.5) \quad A_\lambda v = J_\lambda(Av) = J(\lambda, A)Av \quad \forall v \in D(A)$$

Seja $v \in D(A)$ e $\mu \geq \lambda$

$$\begin{aligned} & J(\mu - \lambda, A_\lambda)(A_\lambda v) \stackrel{(1.11.5)}{=} J(\mu - \lambda, A_\lambda)J(\lambda, A)Av \stackrel{(1.11.5)}{=} \\ &= J(\mu - \lambda, J(\lambda, A)A)J(\lambda, A)Av = \\ &= (I - (\mu - \lambda)(I - \lambda A)^{-1}A)^{-1}((I - \lambda A)^{-1}Av) = \\ &= \{(I - \lambda A)(I - (\mu - \lambda)(I - \lambda A)^{-1}A)\}^{-1}Av = \\ &= \{(I - \lambda A) - (\mu - \lambda)A\}^{-1}Av = \\ &= (I - \mu A)^{-1}Av = J(\mu, A)Av \stackrel{(1.11.5)}{=} A_\mu v \quad \forall v \in D(A) \end{aligned}$$

Como $\overline{D(A)} = H$ e A_λ são limitados temos que

$$(1.11.6) \quad A_\mu = J(\mu - \lambda, A_\lambda)A_\lambda \quad \mu \geq \lambda$$

Como $\|J(\mu - \lambda, A_\lambda)\| \leq 1$, para $\mu \geq \lambda$, temos que

$$\|A_\mu(x)\| \leq \|A_\lambda(x)\| \quad \forall x \in H$$

Logo, para todo $T > 0$ e $\mu \geq \lambda$ temos

$$\begin{aligned} \|A_\mu u_\lambda(T)\| &\leq \|A_\lambda u_\lambda(T)\| = \left\| \frac{d}{dt} u_\lambda(T) \right\| \stackrel{(1.11.4)}{\leq} \\ &\leq \frac{\|x\|}{T\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Tomando $\lambda \rightarrow 0$ na última expressão, segue que

$$\|A_\mu u(T)\| \leq \frac{\|x\|}{T\sqrt{2}}$$

Como $u(T) \in D(A) \forall T > 0$, tomando $\mu \rightarrow 0$ na desigualdade acima temos

$$\|Au(T)\| \leq \frac{\|x\|}{T\sqrt{2}} \quad \square$$

Observação 1.11.2: Esta última proposição mostra que $T(t)$ possui uma propriedade de “suavização” ou de “um efeito regularizante” sobre o dado inicial.

§1.12 Equação Não-homogênea

Neste parágrafo estabeleceremos alguns resultados de existência e regularidade para o problema de valor inicial não-homogêneo

$$(1.12.1) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t), & 0 < t < T. \\ u(0) = x \end{cases}$$

Em um espaço de Banach X , onde A é gerador infinitesimal de um C^0 -semigrupo de contrações $T(t)$ sobre X , x é um elemento dado em X e f uma função dada definida sobre $[0, +\infty)$ com valores em X . Já vimos que se $f \equiv 0$ e $x \in D(A)$ então o problema acima tem uma única solução diferenciável $u(t)$ dada por $u(t) = T(t)x$.

Suponha que f seja uma função contínua de $[0, T)$ em X .

Definição 1.12.1 Uma solução de (1.12.1) é uma função u definida, para todo $t \geq 0$ com valores em X tal que $u(t)$ é contínua para $t \geq 0$, continuamente diferenciável e $u(t) \in D(A)$ para $t > 0$ e a equação (1.12.1) está satisfeita.

Proposição 1.12.2 Se $x \in D(A)$ e $u(t)$ é solução de (1.12.1) então para todo $t \in [0, T)$, $u(t)$ é dada por

$$(1.12.2) \quad \begin{aligned} u(t) &= T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \\ &= T(t)x + \int_0^t T(s)f(t-s)ds. \end{aligned}$$

Dem: Seja $T(t)$ o C^0 -semigrupo gerado por A . Dado $t \in (0, T)$ definamos

$$g : [0, t] \rightarrow X : s \mapsto g(s) = T(t-s)u(s)$$

Então, para $s \in (0, t)$, g é diferenciável e $\frac{dg}{ds} = T(t-s)f(s)$. De fato, sejam $s \in (0, t)$ e $h \in (0, t-s)$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(s+h) - g(s)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(t-(s+h))u(s+h) - T(t-s)u(s)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(t-s-h)u(s+h) - T(t-s-h)T(h)u(s)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(t-s-h)u(s+h) - T(t-s-h)u(s) + T(t-s-h)u(s) - T(t-s-h)T(h)u(s)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} T(t-s-h) \left\{ \frac{u(s+h)-u(s)}{h} - \frac{T(h)-I}{h}u(s) \right\} = \\ &= T(t-s)\{u'(s) - Au(s)\} = T(t-s)f(s). \end{aligned}$$

Integrando esta última igualdade de 0 a t temos

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds. \quad \square$$

Observação 1.12.3 A equação integral (1.12.2) é chamada de fórmula da variação dos parâmetros (para o caso de semigrupos). O seguinte corolário é uma consequência imediata desta fórmula

Corolário 1.12.4: Se $f \in C([0, T)X)$ e $x \in D(A)$ então o problema (1.12.1) tem no máximo uma solução e esta é dada por (1.12.2)

Definição 1.12.5 Para toda função $f \in C([0, T), X)$ ou $f \in L^1([0, T), X)$ e para $x \in X$ a fórmula

$$(1.12.3) \quad u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

define uma função contínua de $[0, T)$ em X a qual é chamada “*solução mild*” do problema não-homogêneo (1.12.1) sobre $[0, T)$.

Estabeleceremos agora condições sobre x e f tais que uma solução mild se torne uma solução. Antes, porém, daremos um critério geral para a existência de solução para o problema não-homogêneo (1.12.1).

Proposição 1.12.6: Sejam A e f dados como no início deste parágrafo. O problema (1.12.1) possui uma solução $u(t)$, para todo $x \in D(A)$, se, e somente se, a função definida para $t \in [0, T)$ e com valores em X

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

é diferenciável em $[0, T)$

Dem: [Pazy] $\square$

Corolário 1.12.7 Seja A um gerador infinitesimal de um C^0 -semigrupo $T(t)$ se f é diferenciável sobre $[0, T)$ e $f' \in L^1(0, T; X)$ então para todo $x \in D(A)$ a solução mild, dada por (1.12.3), para o problema não-homogêneo (1.12.2) é uma solução.

Proposição 1.12.8: Seja A um gerador infinitesimal de um C^0 -semigrupo $T(t)$. Seja $x \in D(A)$ e $f \in C([0, \infty), X)$ se uma das condições seguintes estão satisfeitas.

$$i) f \in L^1(0, T; D(A))$$

$$ii) f \in C^1([0, T); X)$$

Então, u dada por (1.12.3) é uma solução de (1.12.1)

Dem: Em virtude da proposição 1.12.6, basta mostrar que

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

é diferenciável para $t \geq 0$. Para isso, sejam $t \in [0, T)$, $h > 0$ e $f \in L^1([0, T), D(A))$

$$\begin{aligned} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} &= \frac{1}{h} \left\{ \int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \int_0^t T(t-s)f(s)ds \right\} \\ &= \frac{1}{h} \int_0^t T(t-s) \frac{T(h) - I}{h} f(s)ds + \frac{1}{h} \int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds. \end{aligned}$$

fazendo $h \rightarrow 0$ temos

$$i) \frac{T(h) - I}{h} f(s) \rightarrow Af(s) \in L^1([0, t], X)$$

pois $f \in L^1([0, T), D(A))$ e

$$\|f\|_{D(A)} = \|f\|_X + \|Af\|_X$$

$$ii) \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds \rightarrow f(t) \text{ pois}$$

$$f \in C([0, T), X).$$

Logo,

$$\frac{d^+v}{dt}(t) = \int_0^t T(t-s)Af(s)ds + f(t) \text{ para } t \in [0, T)$$

Para $f \in C^1([0, T), X)$ temos

$$\begin{aligned} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} &= \frac{1}{h} \left\{ \int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \int_0^t T(t-s)f(s)ds \right\} \\ &= \frac{1}{h} \left\{ \int_0^{t+h} T(s)f(t+h-s)ds - \int_0^t T(s)f(t-s)ds \right\} = \\ &= \int_0^t T(s) \frac{f(t+h-s) - f(t-s)}{h} ds + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)f(t+h-s)ds = \\ &= \int_0^t T(s) \frac{f(t+h-s) - f(t-s)}{h} ds + \frac{1}{h} \int_0^h T(h-s)f(s)ds \end{aligned}$$

Tomando $h \downarrow 0$, temos

$$\frac{d^+v(t)}{dt} = \int_0^t T(s)f'(t-s)ds + T(t)f(0).$$

pois, $f \in C^1([0, T], X)$

Em ambos os casos, $\frac{d^+v}{dt} \in C([0, T], X)$

Logo, $v \in C^1([0, T], X)$. $\square$

Observação 1.12.9 Na Proposição anterior podemos substituir a condição (ii) para $f \in W^{1,1}(0, T, X)$. A demonstração deste fato é análogo ao caso anterior.

Observação 1.12.10 Para o caso em que A é gerador de um semigrupo analítico existem resultados, mais fortes, como por exemplo, o caso em que f é Hölder contínua implica que a solução mild (1.12.3) é solução clássica de (1.12.1). Veja [Pazy].

§1.13 Equação de Evolução Semilinear Abstrata.

O objetivo deste parágrafo é estudar o problema de valor inicial

$$(1.13.1) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = Au + F(u) & t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}.$$

em um espaço de Banach X onde $F : X \rightarrow X$ é uma aplicação não-linear dada e A é o gerador infinitesimal de um C^0 -semigrupo $T(t), t > 0$, de operadores lineares contínuos sobre X e $u_0 \in X$

Definição 1.13.1: uma função $u : [0, T) \rightarrow X$ é uma solução de (1.13.1) sobre $[0, T)$ se u é uma aplicação contínua de $[0, T)$ em X , continuamente diferenciável de

$(0, T)$ em X , $u(t) \in D(A)$ para $0 < t < T$ e (1.13.1) está satisfeita sobre $[0, T)$.

Definição 1.13.2 Uma função $u \in C([0, T), X)$ satisfazendo a equação integral

$$(1.13.2) \quad u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)F(u(s))ds \quad t \in [0, T)$$

será chamada uma *solução mild* do problema de valor inicial (1.13.1).

A seguir, daremos dois resultados principais a respeito da existência local e regularidade da solução mild de (1.13.1). Para isto necessitamos do seguinte.

Lema 1.13.3 (Desigualdade de Gronwall) Seja $T > 0, C \geq 0$ e $a \in L^1([0, T])$ e $a \geq 0, \phi \in C([0, T])$ e $\phi \geq 0$. Se para todo $t \in [0, T]$

$$\phi(t) \leq C + \int_0^t a(s)\phi(s)ds$$

então

$$\phi(t) \leq C \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right) :$$

Definição 1.13.4 uma função $F : X \rightarrow X$ é chamada Lipschitziana sobre subconjuntos limitados de X se para todo $M > 0$ existe uma constante $K(M)$ tal que

$$\|F(y) - F(x)\| \leq K(M)\|y - x\| \quad \forall x, y \in B_M$$

onde B_M é uma bola de centro zero e o raio M .

Teorema 1.13.5 (Existência Local) Seja $F \in C(X, X)$, Lipschitziana sobre conjuntos limitados de X . Para qualquer $u_0 \in X$ tem-se:

(i) Existe $T(u_0) > 0$ tal que $u \in C([0, T(u_0)); X)$ é uma solução mild de (1.13.1) sobre $[0, T(u_0))$ dada por (1.13.2) onde

a) $T(u_0) = \infty$ ou

$$b) T(u_0) < \infty \text{ e } \lim_{t \uparrow T(u_0)} \|u(t)\| = \infty$$

(ii) (unicidade) Para qualquer $T' > 0, T' < T(u_0)$, (1.13.2) tem no máximo uma solução.

Dem: Para $u_0 \in X$ seja $M = 2\|u_0\|$. Para $x \in B_M$ e $y \in B_M$, isto é, $\|x\| < M$ e $\|y\| < M$ temos,

i) $\|F(x)\| \leq C(M)$, onde C é uma constante que depende de M e

ii) $\|F(x) - F(y)\| \leq K(M)\|x - y\|$, pois F é localmente Lipschitziana.

Escolha $T > 0$ tal que:

$$iii) C(M)T \leq \frac{M}{2}$$

$$iv) K(M)T < 1$$

Como M depende somente de $\|u_0\|$, T depende somente de $\|u_0\|$.

Seja $E = \{u \in C([0, T], X), \|u(t)\| \leq M, \forall t \in [0, T], u(0) = u_0\}$ e

$$\|u\|_{C([0, T], X)} = \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|$$

Logo, E é um subespaço fechado de $C([0, T], X)$. Segue que E é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_{C([0, T], X)}$.

Definamos $\phi : E \rightarrow C([0, T], X)$ por

$$\phi(u)(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)F(u(s))ds$$

para todo $t \in [0, T]$.

Agora, a partir de (i), (ii), (iii) e (iv) temos

$$\|\phi(u)(t)\| \leq \|T(t)u_0\|_X + \int_0^t \|T(t-s)F(u(s))\|_X ds \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq (\|u_0\|_X + \int_0^t \|F(u(s))\|_X ds) \leq \\
&\leq \frac{M}{2} + C(M)t \leq \frac{M}{2} + C(M)T \leq \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M
\end{aligned}$$

o que mostra que $\phi(u) \in E$ para todo $t \in E$ e, portanto, $\phi : E \rightarrow E$. Agora, mostraremos que ϕ é uma contração. Para isso, sejam $u, v \in E$ então,

$$\begin{aligned}
\|\phi(u)(t) - \phi(v)(t)\| &\leq \int_0^t \|F(u(s)) - F(v(s))\| ds \\
&\leq K(M) \int_0^t \|u(s) - v(s)\| ds \leq K(M) \int_0^t \sup \|u(s) - v(s)\| ds \\
&= K(M) \int_0^t \|u - v\|_{C([0,T],X)} ds = K(M) \|u - v\|_{C([0,T],X)} t \leq \\
&\leq K(M) \|u - v\|_{C([0,T],X)} T = K(M) T \|u - v\|_{C([0,T],X)}, \text{ para todo } t \in [0, T].
\end{aligned}$$

Portanto, $\|\phi(u)(t) - \phi(v)(t)\| \leq K(M) T \|u - v\|_{C([0,T],X)}$ para todo $[0, T]$, tomando o supremo na desigualdade acima temos,

$$\|\phi(u) - \phi(v)\|_{C([0,T],X)} \leq K(M) T \|u - v\|_{C([0,T],X)}$$

Então por (iv), ϕ é uma contração sobre E , que pelo teorema do ponto fixo de Banach implica que existe um único ponto $u \in E$ tal que $\phi(u)(t) = u(t)$, isto é,

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)F(u(s))ds.$$

Vamos agora finalizar a demonstração do item (i) deste teorema provando a seguinte afirmação:

Existe uma função $T : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ com a seguinte propriedade: Para todo $u_0 \in X$ existe uma função $u \in C([0, T(u_0)) : X)$ que para todo $T < T(u_0)$ é a única solução de (1.13.2) em $C([0, T], X)$ e além disso:

$$i) T(u_0) = \infty \text{ ou}$$

$$ii) T(u_0) < \infty \text{ e } \lim_{t \uparrow T(u_0)} \|u(t)\| = \infty$$

De fato, seja

$$T(u_0) = \sup\{T > 0; \exists u \in C([0, T], X) \text{ solução de 1.13.2} \}$$

Vimos que para $u_0 \in X$ com $\|u_0\| \leq M$, para $M > 0$ dado, existe solução $u \in C([0, T(M)], X)$ de (1.13.2). Logo, $T(u_0) \geq 0$. Se existem duas soluções u_1 e u_2 sobre $[0, t_1]$ e $[0, t_2]$ respectivamente com $t_1 < t_2$ então $u_1 \equiv u_2$ sobre $[0, t_1]$, pela unicidade do ponto fixo.

Portanto, existe uma única função $u \in C([0, T(u_0)), X)$ que é solução de (1.13.2) para todo $T < T(u_0)$

Suponha $T(u_0) < \infty$ e que existe uma sequência $t_n \uparrow T(u_0)$ tal que $\|u(t_n)\| \leq C < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então como nos itens (iii) e (iv) é possível escolher $T > 0$ tal que

$$iii') C(M)T \leq \frac{M}{2}$$

$$iv') K(M)T < 1$$

onde $M = 2C$

como M depende somente de C , T depende somente de C .

Logo, pelo teorema do ponto fixo existe uma única função $u \in C([0, T], X)$ dada por

$$u(t) = T(t)u(t_n) + \int_0^t T(t-s)F(u(s))ds \quad t \in [0, T]$$

e qualquer que seja n .

Seja $0 < \delta < T$. Como $t_n \uparrow T(u_0)$, existe $n_0 > 0$ tal que $0 < T(u_0) - t_{n_0} < \delta$ defina

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [0, t_{n_0}] \\ v(t - t_{n_0}); & t \in [t_{n_0}, t_{n_0} + \delta] \end{cases}$$

onde v é solução de

$$v(t) = T(t)u(t_{n_0}) + \int_0^t T(t-s)F(v(s))ds$$

Então $\tilde{u} \in C([0, t_{n_0} + \delta], X)$ e

$$\tilde{u}(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)F(\tilde{u}(s))ds \text{ para } 0 < t \leq t_{n_0} + \delta$$

de fato, se $t \leq t_{n_0}$ então $\tilde{u}(t) = u(t) =$

$$= T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)F(u(s))ds = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)F(\tilde{u}(s))ds.$$

Se $t_{n_0} \leq t \leq t_{n_0} + \delta$ então:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) &= v(t - t_{n_0}) = T(t - t_{n_0})u(t_{n_0}) + \int_0^{t-t_{n_0}} T(t - t_{n_0} - s)F(v(s))ds = \\ &= T(t - t_{n_0})[T(t_{n_0})u_0 + \int_0^{t_{n_0}} T(t_{n_0} - s)F(u(s))ds] + \\ &+ \int_0^{t-t_{n_0}} T(t - t_{n_0} - s)F(u(s))ds = \\ &= T(t)u_0 + \int_0^{t_{n_0}} T(t - s)F(u(s))ds + \int_0^{t-t_{n_0}} (t - t_{n_0} - s)F(u(s))ds. \end{aligned}$$

Fazendo $\sigma = t_{n_0} + s$ temos

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) &= T(t)u_0 + \int_0^{t_{n_0}} T(t - s)F(u(s))ds + \int_{t_{n_0}}^t T(t - \sigma)F(v(\sigma - t_{n_0}))d\sigma \\ &= T(t)u_0 + \int_0^{t_{n_0}} T(t - s)F(u(s))ds + \int_{t_{n_0}}^t T(t - \sigma)F(\tilde{u}(\sigma))d\sigma = \\ &= T(t)u_0 + \int_0^{t_{n_0}} T(t - s)F(\tilde{u}(s))d\sigma + \int_{t_{n_0}}^t T(t - \sigma)F(\tilde{u}(\sigma))d\sigma = \\ &= T(t)u_0 + \int_0^t T(t - s)F(\tilde{u}(s))ds \quad \forall t \in [0, t_{n_0} + \delta] \end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{u} \in C([0, t_{n_0} + \delta], X)$ é solução de (1.13.2) o que contradiz a definição de $T(u_0)$.

Logo, $\|u(t)\| \longrightarrow \infty$ quando $t \uparrow T(u_0)$

Para demonstrar (ii) sejam $T' > 0, u_0 \in X$ e u e v pertencentes a $C([0, T'], X)$ duas soluções de (1.13.2).

Seja $M = \sup_{t \in [0, T']} \max\{\|u(t)\|, \|v(t)\|\}$

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\| &= \left\| \int_0^t T(t-s)(F(u(s)) - F(v(s)))ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|F(u(s)) - F(v(s))\| ds \leq K(M) \int_0^t \|u(s) - v(s)\| ds \end{aligned}$$

Pelo Lema 1.13.3, $\|u(t) - v(t)\| \leq 0 \exp(K(M) \int_0^t ds) = 0$

para todo $t \in [0, T']$. Logo $u \equiv v$ □

Observação 1.13.6 O teorema 1.13.5 assegura a existência local da solução mild de (1.13.1). Porém, se assumimos que a função $F : X \rightarrow X$ é *lipschitziana sobre* X então temos a versão global do teorema 1.13.5. Isto é a essência do próximo resultado.

Teorema 1.13.7 (Teorema de existência global) Sejam $u_0 \in X$ e $F : X \rightarrow X$ lipschitziana sobre X , isto é, existe uma constante K tal que $\|F(x) - F(y)\| \leq K\|x - y\|$ para todos $x, y \in X$, então (1.13.2) é a única solução mild de (1.13.1) sobre R^+ .

Dem [Goldstein] □

Observação 1.13.8: Se na condição (i) do teorema 1.13.5 ocorre $T(u_0) = \infty$, dizemos que a solução mild de (1.13.1) dada por (1.13.2) é global. Caso contrário, $T(u_0) < \infty$, dizemos que a solução $u(t)$ explode para tempo finito (blow-up).

Teorema 1.13.9 (Regularidade) Seja A um gerador infinitesimal de um C^0 -semigrupo $T(t)$ sobre X . Se $F : X \rightarrow X$ é continuamente diferenciável então a solução mild de (1.13.1) dada por (1.13.2) com $u_0 \in D(A)$ é uma solução do problema de valor inicial (1.13.1).

Dem: Como $F \in C^1(X)$, F é lipschitziana sobre conjuntos limitados de X . Então pelo teorema 1.13.5, o problema (1.13.1) possui uma solução mild u sobre $[0, T(u_0))$. Mostraremos que esta solução mild é continuamente diferenciável. Para isto, seja $t \in [0, T(u_0))$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}[u(t+h) - u(t)] &= \frac{1}{h}[T(t+h)u_0 + \int_0^{t+h} T(t+h-s)F(u(s))ds - \\ &\quad - T(t)u_0 - \int_0^t T(t-s)F(u(s))ds] \\ &= \frac{T(h)T(t)u_0 - T(t)u_0}{h} + \int_0^t \frac{T(s)[F(u(t+h-s)) - F(u(t-s))]}{h} ds + \\ &\quad + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)F(u(s))ds \rightarrow AT(t)u_0 + \int_0^t T(s) \frac{\partial F}{\partial s}(u(t-s))ds + T(t)F(u_0) \end{aligned}$$

a qual pertence a $C([0, T(u_0)]; X)$

como $u \in C^1([0, T(u_0)]; X)$ e $F \in C^1(X)$ segue que $s \mapsto f(s) = F(u(s))$ é continuamente diferenciável sobre $[0, T(u_0))$ então, pelo corolário 1.12.7,

$$v(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

é uma solução (clássica) do problema de valor inicial não-homogêneo

$$(1.13.4) \quad \begin{cases} \frac{dv(t)}{dt} = Av(t) + f(t) \\ v(0) = u_0 \end{cases}$$

Mas, pela definição, u é uma solução mild de (1.13.4) então, pela unicidade, $u \equiv v$ sobre $[0, T(u_0))$. Assim, u é uma solução do problema (1.13.1) $\square$

Como vimos, para $F : X \rightarrow X$ suficientemente regular foi possível estabelecer que a solução mild de (1.13.1) dada por (1.13.2) seja uma solução de (1.13.1). Porém, se X é um espaço de Banach reflexivo, a condição de Lipschitz sobre F é suficiente para garantir que a solução mild com condição inicial $u_0 \in D(A)$ seja uma solução. É o que garante o próximo resultado.

Teorema 1.13.10: Suponhamos que X seja um espaço de Banach reflexivo e $F \in C(X, X)$ lipschitziana sobre conjuntos limitados de X . Sejam $T > 0$ e $u_0 \in C([0, T], X)$ uma solução da equação integral (1.13.2). Se $u_0 \in D(A)$ então $u \in C([0, T], D(A)) \cap C^1([0, T], X)$ e satisfaz (1.13.1), ou seja, u é solução de (1.13.1)

Dem: Seja $h > 0$ e $t \in [0, T - h]$

$$\begin{aligned}(u(t+h) - u(t)) &= T(t)[T(h)u_0 - u_0] + \int_0^t T(s)[F(u(t+h-s)) - F(u(t-s))]ds \\ &\quad + \int_t^{t+h} T(s)F(u(t+h-s))ds.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|u(t+h) - u(t)\| &\leq \|T(h)u_0 - u_0\| + \int_0^t \|F(u(t+h-s)) - F(u(t-s))\|ds \\ &\quad + \int_t^{t+h} \|F(u(t+h-s))\|ds.\end{aligned}$$

Como $T(h)u_0 - u_0 = \int_0^h \frac{d}{ds}T(s)u_0ds = \int_0^h T(s)Au_0ds$ temos que $\|T(h)u_0 - u_0\| \leq h\|Au_0\|$

Como $u \in C([0, T]; X)$ e $F \in C(X)$ segue que $F(u) \in C([0, T], X)$. Daí, existe M tal que $\|F(u(s))\| \leq M$ para todo $s \in [0, T]$.

Assim,

$$\begin{aligned}\|u(t+h) - u(t)\| &\leq h\|Au_0\| + K \int_0^t \|u(t+h-s) - u(t-s)\|ds + \\ &\quad + hM\end{aligned}$$

Pelo Lema 1.13.3,

$$\begin{aligned}\|u(t+h) - u(t)\| &\leq h(\|Au_0\| + M) \exp(K \int_0^t ds) \leq \\ &\leq h(\|Au_0\| + M) \exp(KT)\end{aligned}$$

denotando, $L = (\|Au_0\| + M) \exp(KT)$ temos,

$$\|u(t+h) - u(t)\| \leq Lh$$

Portanto, $u : [0, T] \rightarrow X$ é lipschitziana e portanto $F(u) : [0, T] \rightarrow X$ é Lipschitziana. Visto que X é reflexivo, pelo corolário 1.5.4, $F(u) \in W^{1,\infty}([0, T], X)$. Então, pela observação 1.12.9, concluímos a demonstração. $\square$

Observação 1.13.11: Os resultados deste parágrafo podem ser generalizados para aplicações não-lineares como $F(t, u)$, contínua em t e lipschitziana em u . Tal fato pode ser encontrado em [Pazy].

Capítulo 2

A Equação do Calor

§2.1 Introdução

Dentre as muitas aplicações da teoria de semigrupos de operadores lineares à análise matemática destacaremos, em particular, a sua utilização à resolução e ao estudo de solução de problemas de valor inicial para equações diferenciais, mais especificamente, ao problema do calor linear e não-linear.

Veremos que o capítulo anterior surge como uma aplicação neste estudo. Iniciaremos no parágrafo 2.2 com o estudo da equação linear do calor utilizando o teorema de extensão de Friedrichs e daremos algumas propriedades básicas da solução desta equação. Os parágrafos seguintes estão voltados ao estudo da equação não-linear do calor estabelecendo alguns resultados de existência local e global, unicidade e “blow-up” para tempo finito.

Em todo este capítulo assumiremos que Ω é um conjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com bordo, $\partial\Omega$, suave (de classe C^2).

§2.2: A Equação do Calor Linear

Considere o seguinte problema: Encontrar uma função $u : [0, +\infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto u(t, x)$ tal que:

$$(2.2.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u & \text{em } (0, +\infty) \times \Omega & (1) \\ u = 0 & \text{em } (0, +\infty) \times \partial\Omega & (2) \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{para } x \in \Omega & (3) \end{cases}$$

onde $\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ designa o operador Laplaciano. A equação (1) é chamada de

equação do calor, a equação (2) é a condição de Dirichlet e (3) é a condição inicial.

Resolveremos (2.2.1) considerando $u(t, x)$ como uma função definida sobre $[0, +\infty)$ a valores em um espaço X , onde X é um espaço de funções em Ω . Assim, a notação $u(t)$ designa um elemento de X , a saber, a função $x \mapsto u(t, x)$ para cada t fixo.

No capítulo anterior vimos que a teoria de C^0 -semi-grupos constitui-se de modo útil à resolução de problemas de valor inicial, nos quais, o problema (2.2.1) se enquadra.

Neste sentido, procuraremos caracterizar em um espaço X o conjunto $D(A)$ contido em X , onde $D(A)$ é o domínio do operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$, $Au = \Delta u$ para todo $u \in D(A)$, de modo que (2.2.1) passa a ser considerada como a equação diferencial

$$(2.2.2) \quad \begin{cases} \dot{u} &= Au \\ u(0) &= u_0 \end{cases}$$

Utilizaremos na caracterização do domínio $D(A)$ do operador A , o teorema de extensão de Friedrichs, cuja idéia é a seguinte: Para operadores limitados A , em espaços de Hilbert H , sabemos que a relação

$$(2.2.3) \quad t(u, v) = \langle Au, v \rangle; u, v \in H$$

define uma correspondência biunívoca entre estes operadores e as formas sesquilineares limitadas t . Para formas não limitadas, temos que sob determinadas condições sobre t , conseguimos determinar o operador A e seu domínio $D(A)$, tal que (2.2.3) esteja satisfeita para $u \in D(A)$ e $v \in D(t)$, onde $D(t)$ denota o domínio da forma t . Com este objetivo definimos.

Definição 2.2.1: Seja $t : D \times D \rightarrow \mathbb{C}$ uma forma sesquilinear definida em $D = D(t)$ subespaço vetorial de H .

1) t é densamente definida se D é denso em H

2) $t(u) = t(u, u)$ é a forma quadrática associada a t

3) t é simétrica se $t(u, v) = \overline{t(v, u)}$, $u, v \in D$

4) Uma forma simétrica t é não-negativa se $t(u) \geq 0$, $u \in D$:

5) O conjunto $\{t(u); |u| = 1\}$ é chamado de “numerical range” de t .

6) t é chamada setorial se $\{t(u); |u| = 1\}$ está contida no setor da forma

$$\{z : |\arg z| \leq \theta ; 0 \leq \theta < \pi/2\}$$

7) Dizemos que $u_n \in D$ é t -convergente para $u \in H$, $u_n \xrightarrow{t} u$, se $u_n \rightarrow u$ na norma de H e $t(u_n - u_m) \rightarrow 0$ para $n, m \rightarrow \infty$.

8) Dizemos que t é fechada se $u_n \xrightarrow{t} u$ então $u \in D$ e $t(u_n - u) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Se t é simétrica e não-negativa podemos definir

$$\langle u, v \rangle_t = \langle u, v \rangle + t(u, v) \quad u, v \in D$$

Temos que $\langle \cdot \rangle_t$ é um produto em D .

Seja H_t o subespaço D com o produto interno $\langle \cdot \rangle_t$ definido acima.

Temos que

$$(2.2.4) \quad |u|_t^2 = \langle u, u \rangle_t = |u|^2 + t(u) \geq |u|^2$$

Proposição 2.2.2: Seja t simétrica e não-negativa. Então t é fechada se e somente se H_t é completo.

Dem: Seja $(u_n) \in H_t$ uma sequência de Cauchy, isto é,

$$|u_n - u_m|_t^2 = |u_n - u_m|^2 + t(u_n - u_m) \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$ e $m \rightarrow \infty$.

Como t é não-negativa, temos que $|u_n - u_m| \rightarrow 0$ e $t(u_n - u_m) \rightarrow 0$ quando $n, m \rightarrow \infty$.

Logo, (u_n) é uma sequência de Cauchy em H , portanto, existe $u \in H$ tal que $u_n \rightarrow u$ em H .

Visto que $u_n \rightarrow u$ em H e $t(u_n - u_m) \rightarrow 0$ para $n, m \rightarrow \infty$ temos que $u_n \xrightarrow{t} u$.

Como t é fechada segue que $u \in D$ e $t(u_n - u) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Portanto, $u \in H_t$, isto é, (u_n) converge em H_t , reciprocamente, seja $u_n \in D$ tal que $u_n \xrightarrow{t} u$. Então, $|u_n - u_m| \rightarrow 0$ e $t(u_n - u_m) \rightarrow 0$.

Portanto, $|u_n - u_m|_t \rightarrow 0$. Como H_t é completo existe $u_0 \in H_t$ tal que $|u_n - u_0|_t \rightarrow 0$.

Então, por (2.2.4) implica que $|u_n - u_0| \rightarrow 0$ e $t(u_n - u_0) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Então, $u_0 = u$ e $t(u_n - u) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, isto é, t é fechada. $\square$

Proposição 2.2.3 Seja t simétrica e não-negativa. Então

$$\text{i) } |t(u, v)|^2 \leq t(u)t(v) \text{ (Desigualdade de Schwartz)}$$

$$\text{ii) } t(u + v)^{1/2} \leq t(u)^{1/2} + t(v)^{1/2} \text{ (Desigualdade triangular)}$$

Dem: (i) decorre da identidade

$$t(t(v)u - t(u, v)v) = (t(u)t(v) - |t(u, v)|^2)t(v) \text{ e (ii) decorre de (i). } \square$$

Proposição 2.2.4 Seja t simétrica e não-negativa. Se $u_n \xrightarrow{t} u$ e $v_n \xrightarrow{t} v$ então $\lim t(u_n, v_n)$ existe e além disso, se t é fechada então este limite é igual a $t(u, v)$

Dem

$$\begin{aligned}
|t(u_n, v_n) - t(u_m, v_m)| &= |t(u_n, v_n) - t(u_m, v_n) + \\
&+ t(u_m, v_n) - t(u_m, v_m)| = |t(u_n - u_m, v_n) + \\
&+ t(u_m, v_n - v_m)| \leq |t(u_n - u_m, v_n)| + |t(u_m, v_n - v_m)| \\
(i) \\
&\leq t(u_n, u_m)^{1/2} t(v_n)^{1/2} + t(u_m)^{1/2} t(v_n, v_m)^{1/2}
\end{aligned}$$

Como $t(u_n)$ e $t(v_n)$ são limitados, pois,

$$t(u_n)^{1/2} = t(u_n - u_m + u_m)^{1/2} \stackrel{(ii)}{\leq} t(u_n - u_m)^{1/2} + t(u_m)^{1/2} \text{ e } t(u_n - u_m) \rightarrow 0, \quad t(v_n - v_m) \rightarrow 0 \text{ temos que } |t(u_n, v_n) - t(u_m, v_m)| \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty \text{ e } m \rightarrow \infty.$$

Logo, $t(u_n, v_n)$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{C}$, portanto, o limite existe.

Para mostrar que o limite é igual a $t(u, v)$, quando t é fechado, basta repetir o argumento para $|t(u_n, v_n) - t(u, v)| \quad \square$

Definição 2.2.5 Dizemos que uma forma t é fechável se t admite uma extensão $\tilde{t}$ fechada.

Proposição 2.2.6 Seja t simétrica e não-negativa, t é fechável se e somente se $u_n \xrightarrow{\tilde{t}} 0$ implica $t(u_n) \rightarrow 0$

Dem:

Seja $\tilde{t}$ uma extensão fechada de t então $u_n \xrightarrow{\tilde{t}} 0$, o que implica $u_n \xrightarrow{\tilde{t}} 0$.

Logo, $t(u_n) = \tilde{t}(u_n) = \tilde{t}(u_n - 0) \rightarrow 0$, porque, $\tilde{t}$ é fechada.

Reciprocamente, seja

$$D(\tilde{t}) = \{u \in H; \exists u_n \in D(t)/u_n \xrightarrow{\tilde{t}} u\}$$

defina $\tilde{t}(u, v) = \lim t(u_n, v_n)$ para todo $u, v \in D(\tilde{t})$.

A existência deste limite é garantida pela proposição 2.2.4.

Mostraremos que a definição de $\tilde{t}$ independe das sequências (u_n) e (v_n) .

De fato, sejam u'_n, v'_n sequências tais que $u'_n \xrightarrow{t} u$ e $v'_n \xrightarrow{t} v$. Então, $u_n - u'_n \xrightarrow{t} 0$ e $v_n - v'_n \xrightarrow{t} 0$. Pela hipótese, $t(u'_n - u_n) \rightarrow 0$ e $t(v'_n - v_n) \rightarrow 0$. Portanto,

$$|t(u_n, v_n) - t(u'_n, v'_n)| \leq t(u_n - u'_n)^{1/2} t(v_n)^{1/2} + t(u'_n)^{1/2} t(v_n - v'_n)^{1/2} \rightarrow 0$$

Portanto, $\tilde{t}$ está bem definida; $\tilde{t}$ é uma extensão de t e satisfaz

$$\tilde{t}(u_n - u) \rightarrow 0 \text{ se } u_n \xrightarrow{t} u$$

pois,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{t}(u_n - u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{t}(u_n - u_m) = 0, \text{ pois,}$$

$$u_n - u_m \xrightarrow{t} 0 \text{ se } u_n \xrightarrow{t} u.$$

Portanto, H_t é denso em $H_{\tilde{t}}$ e toda Sequência de Cauchy em H_t tem limite em $H_{\tilde{t}}$, isto é, $H_{\tilde{t}}$ é o fecho de H_t .

Logo, $H_{\tilde{t}}$ é completo e $\tilde{t}$ é fechada pela proposição 2.2.2 $\square$

Teorema 2.2.7 (Teorema de extensão de Friedrichs) Se t é simétrica, não-negativa, densamente definida e fechada, então existe um operador A auto-adjunto tal que

- i) $D(A) \subset D(t)$
- ii) $t(u, v) = \langle Au, v \rangle; u \in D(A)$ e $v \in D(t)$.
- iii) Se $u \in D(t), w \in H$ e $t(u, v) = \langle w, v \rangle$ para v num subconjunto denso de $D(t)$ então $u \in D(A)$ e $Au = w$.

Dem: Visto que t é uma forma fechada segue que $H_t = (D(t), \langle \cdot, \cdot \rangle_t)$ é completo. Logo, para cada $u \in H$ podemos definir o funcional linear

$$l_u : H_t \longrightarrow \mathbb{C} : v \longmapsto \langle u, v \rangle$$

e

$$|l_u(v)| \leq |u| |v| \leq |u| \cdot |v|_t$$

o que implica

$$\|l_u\| \leq |u|$$

Portanto, l_u é um funcional linear limitado sobre um espaço de Hilbert H_t , o que pelo teorema de representação de Riesz, implica que existe um único elemento $u' \in H_t$ tal que

$$l(u, v) = \langle u, v \rangle = \langle u', v \rangle_t; \quad \forall v \in H_t$$

observemos,

$$|u'|_t^2 = \langle u', u' \rangle_t = l_u(u') \leq |u| |u'|_t$$

Daí,

$$|u'|_t \leq |u|$$

Definamos,

$$B : H \rightarrow H_t : u \mapsto Bu = u'$$

Olhando $B : H \rightarrow H$ temos que $|Bu| = |u'|_t \leq |u|$, isto é, B é limitado com $\|B\| \leq 1$.

Ainda mais, para $u \in H$ e $v \in H_t$ temos

$$\begin{aligned} (2.2.5) \quad \langle u, v \rangle &= l_u(v) = \langle u', v \rangle_t = \langle Bu, v \rangle = \\ &= \langle Bu, v \rangle + t(Bu, v) \end{aligned}$$

Logo,

$$(2.2.6) \quad t(Bu, v) = \langle u, v \rangle - \langle Bu, v \rangle = \langle u - Bu, v \rangle$$

Assim, se $Bu = 0$ então por (2.2.5), $\langle u, v \rangle = 0$ para todo $v \in H_t$, o qual é denso em H , o que implica, $\langle u, v \rangle = 0$ para todo $v \in H$, então, $u = 0$.

Portanto, B é injetora. Logo, podemos definir

$$B^{-1} : R(B) \subset H_t \rightarrow H$$

Se $w = Bu$, isto é, $U = B^{-1}w$ então a expressão (2.2.6) fica:

$$t(w, v) = \langle B^{-1}w - w, v \rangle = \langle (B^{-1} - I)w, v \rangle \quad \forall v \in H_t \text{ e } u \in H$$

Definamos $A = (B^{-1} - I)$ e $D(A) = R(B) \subset H_t$. Logo, $D(A) \subset D(t)$ e $t(w, v) = \langle Aw, v \rangle$ para todo $w \in D(A)$ e $v \in D(t)$, o que conclui (i) e (ii).

Para provar (iii)

$$\begin{aligned} \langle w + u, v \rangle &= \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle = \langle u, v \rangle + t\langle u, v \rangle = \\ &= \langle u, v \rangle_t \quad \forall v \in H_t \end{aligned}$$

H_t é denso e pela continuidade do produto interno,

$$\langle w + u, v \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall v \in H.$$

Logo, $B(w + u) = u$, isto é, $u \in D(A)$ e $w = (B^{-1} - I)u = Au$, isto é, $Au = w$ $\square$

Observação 2.2.8: Este teorema é válido de modo mais geral, podemos substituir t simétrica e não-negativa por t setorial. Neste caso o operador A obtido será m -setorial. Veja [Kato], página 322.

Estudaremos primeiramente o problema (2.2.1) no espaço de Hilbert $H = L^2(\Omega)$. Caracterizamos o domínio $D(A) \subset H^2(\Omega)$ do operador A utilizando o teorema 2.2.7 de Friedrichs com a forma sesquilinear definida por

$$\begin{aligned} t : C_0^\infty(\Omega) \times C_0^\infty(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\varphi, \psi) &\longmapsto \int_{\Omega} \nabla \varphi \overline{\nabla \psi} \end{aligned}$$

A motivação para a definição desta forma t segue da condição de Dirichlet e da 1ª identidade de Green que é:

$$\langle -\Delta \varphi, \psi \rangle = \int_{\Omega} \nabla \varphi \overline{\nabla \psi}$$

Seja H_t o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ munido com o produto interno definido por

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \psi \rangle_t &= \langle \varphi, \psi \rangle + t \langle \varphi, \psi \rangle = \\ &= \int_{\Omega} \varphi \overline{\psi} + \int_{\Omega} \nabla \varphi \overline{\nabla \psi}; \varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega) \end{aligned}$$

Notemos que $\|\cdot\|_t = \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$

Proposição 2.2.9: A forma sesquilinear $t : C_0^\infty(\Omega) \times C_0^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $t(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \nabla \varphi \overline{\nabla \psi}$ é fechável.

Dem: Pela proposição 2.2.6, basta verificar que se $u_n \xrightarrow{t} 0$ então $t(u_n) \rightarrow 0$

De $u_n \xrightarrow{t} 0$, por definição, $u_n \rightarrow 0$ em $L^2(\Omega)$ quando $n \rightarrow \infty$ e $t(u_n - u_m) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e $m \rightarrow \infty$. Logo, $|u_n - u_m|_t \rightarrow 0$, isto é, (u_n) é de Cauchy. Visto que $u_n \rightarrow 0$ em $L^2(\Omega)$, temos que $|u_n|_t \rightarrow 0$. Como $|u_n|_t^2 = |u_n|_{L^2}^2 + t(u_n)$, segue que $t(u_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. $\square$

Em consequência da proposição 2.2.9, existe uma extensão fechada $\tilde{t}$ de t e além disso H_t é denso em $H_{\tilde{t}}$. Como $\|\cdot\|_t = \|\cdot\|_{H^1}$, temos que $H_{\tilde{t}} = H_0^1(\Omega)$.

Portanto, aplicando o teorema de extensão de Friedrichs para

$$\tilde{t} : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$$

temos:

i) Existe um operador B autoadjunto tal que $D(B) \subset D(\tilde{t}) = H_0^1(\Omega)$;

ii) $\tilde{t}(\varphi, \psi) = \langle B\varphi, \psi \rangle; \forall \varphi \in D(\Omega)$ e $\varphi \in D(\tilde{t})$ e

iii) Como $\tilde{t}(u, v) = \int_{\Omega} -\Delta u \bar{v}$ para $u \in D(\tilde{t}), v \in C_0^\infty(\Omega)$ e $C_0^\infty(\Omega)$ é um subespaço denso de $H_0^1(\Omega)$ temos que $u \in D(B)$.

Portanto, pelos itens (i), (ii) e (iii) temos que $B = -\Delta$ e $D(-\Delta) \subset H_0^1(\Omega)$ além disso como $A : D(A) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega), u \mapsto Au = \Delta u$ e $D(A) \subset H^2(\Omega)$, segue que $D(A) \subset H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Reciprocamente, para $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ temos pelo item (iii) que $u \in D(A)$.

Portanto, $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Como $C_0^\infty(\Omega) \subset H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ e C_0^∞ é denso em $L^2(\Omega)$, temos que $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$.

Resumindo o problema (2.2.1) escreve-se na equação

$$\begin{cases} u_t &= Au \\ u(0) &= u_0 \end{cases}$$

Onde $A : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ é definido por $Au = \Delta u$ para todo $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Veremos agora que o operador acima satisfaz as condições do teorema de Lumer-Phillips, fornecendo assim que A é o gerador infinitesimal de um C^0 -semigrupo $T(t)$ de contrações em $L^2(\Omega)$.

Pela 1ª identidade de Green, a qual é válida para $u, v \in D(A)$, temos

$$\int_{\Omega} u \Delta v = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v$$

que pode se escrever como

$$\langle -\Delta v, u \rangle = \langle \nabla u, \nabla v \rangle ; u, v \in D(A)$$

temos para $u = v$ que

$$\langle -\Delta u, u \rangle = \langle \nabla u, \nabla u \rangle \quad \forall u \in D(A)$$

ou seja

$$\langle -\Delta u, u \rangle = - \int_{\Omega} \Delta u \cdot u = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \|\nabla u\|_{L^2}^2$$

Como

$$\|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2$$

e pela desigualdade de Poincaré

$$\|u\|_{L^2} \leq K \|\nabla u\|_{L^2}$$

Temos,

$$\|u\|_{H^1}^2 \leq K^2 \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 = (1 + K^2) \|\nabla u\|_{L^2}^2$$

ou seja,

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq \frac{\|u\|_{H^1}^2}{(1 + K^2)}$$

Daí,

$$\langle -\Delta u, u \rangle = \|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq \frac{\|u\|_{H^1}^2}{(1 + K^2)} \geq 0$$

ou seja

$$\langle \Delta u, u \rangle \leq 0 \quad \forall u \in D(A)$$

Logo, $\Delta : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ é dissipativo.

Pela aplicação do teorema de Friedrichs, o operador $A = \Delta : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ é um operador auto-adjunto densamente definido. Portanto, pelo

corolário 1.8.11 A é m -dissipativo e, portanto, o espectro de Δ , $\sigma(\Delta)$, é um subconjunto de $\mathbb{R}^-$. Segue então que $\{z \in \mathbb{C}; |\arg z - \pi| \leq \alpha\}$, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ contém o espectro do operador Δ . Logo, o conjunto resolvente de Δ , $\rho(\Delta)$, contém o conjunto

$$\Delta_\delta = \{\lambda; \lambda \neq 0, |\arg \lambda| < \delta + \frac{\pi}{2}\}$$

com $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$.

Portanto, pelo mesmo argumento usado na proposição 1.11.1, $T(t)$ é um semigrupo analítico. Como consequência, $T(t)$ é diferenciável para $t > 0$ e $T(t)x \in D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ para todo $u \in L^2(\Omega)$ e $t > 0$, isto é,

$$T(t) : L^2(\Omega) \rightarrow H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

para todo $t > 0$.

A próxima proposição fornece algumas propriedades importantes da solução da equação linear do calor.

Proposição 2.2.10 Seja $\varphi \in L^2(\Omega)$ e $u(t) = T(t)\varphi$, $t \geq 0$. Então $u \in l(R^+, L^2(\Omega))$ e satisfaz

$$i) u \in C^1((0, \infty), L^2(\Omega)); \Delta u \in C((0, \infty), L^2(\Omega))$$

com

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \Delta u; & t > 0 \\ u(0) = \varphi \end{cases}$$

$$ii) \|\Delta u(t)\|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2t}} \|\varphi\|_{L^2}$$

$$\text{iii) } \|u(t)\|_{H_0^1} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \|\varphi\|_{L^2} \quad t > 0$$

$$\text{iv) Se } \varphi \in H_0^1(\Omega) \text{ então } \|\Delta u(t)\|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \|\varphi\|_{H_0^1}$$

$$\text{v) } u \in C((0, \infty); H_0^1(\Omega)).$$

Dem: Pela proposição 1.11.1 e pelo estudo do problema linear do calor que acabamos de fazer, os itens (i) e (ii) estão satisfeitos. Vamos demonstrar (iii).

Por (i) $u \in C^1((0, \infty), L^2(\Omega)) \cap C([0, \infty), L^2(\Omega))$ e satisfaz

$$(2.2.7) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = \Delta u(t) & t > 0 \\ u(0) = \varphi \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

multiplicando (1) de (2.2.7) por Δu e integrando em Ω temos

$$(2.2.8) \quad \int_{\Omega} \Delta u \frac{du}{dt} = \int_{\Omega} |\Delta u|^2 \geq 0$$

Pela 1ª identidade de Green aplicada ao lado esquerdo de (2.2.8) temos

$$\int_{\Omega} \Delta u \frac{du}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^2$$

Logo,

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega} |\Delta u|^2$$

Então

$$(2.2.9) \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq 0$$

multiplicando (1) de (2.2.7) por u e integrando em Ω temos

$$(2.2.10) \quad \int_{\Omega} u \frac{du}{dt} dx = \int_{\Omega} u \Delta u$$

Novamente pela 1ª identidade de Green, (2.2.10) escreve-se como

$$\int_{\Omega} u \frac{du}{dt} dx = - \int_{\Omega} |\nabla u|^2$$

mas

$$\int_{\Omega} u \frac{du}{dt} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d}{dt} |u(t)|^2 dx$$

Então

$$\frac{1}{2} \int \frac{d}{dt} |u(t)|^2 dx = - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

o que implica

$$\frac{1}{2} \int \frac{d}{dt} |u(t)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = 0$$

ou seja,

$$(2.2.11) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 = 0$$

Integrando (2.2.11) entre 0 e t temos

$$0 = \frac{1}{2} (\|u(t)\|_{L^2}^2 - \|\varphi\|_{L^2}^2) + \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 ds$$

Assim

$$(2.2.12) \quad \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 ds = \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L^2}^2$$

Por (2.2.9) $\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2$ é não-crescente em t , logo, $\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \leq \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 \quad \forall s \in [0, t]$.

Daí,

$$\begin{aligned} t \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 &= \int_0^t \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 ds \leq \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 ds \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 ds \stackrel{(2.2.12)}{=} \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Portanto, $\|\nabla u(t)\|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{t}} \|\varphi\|_{L^2}$

Vamos agora mostrar (iv).

Seja $\varphi \in D(A)$. De (2.2.11) temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = 0$$

integrando esta última em $[0, t]$ temos

$$\int_0^t \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (\|\nabla u\|_{L^2}^2) ds + \int_0^t \|\Delta u\|_{L^2}^2 ds = 0$$

Logo,

$$\frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} \|\nabla \varphi\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\Delta u(s)\|_{L^2}^2 ds = 0$$

$$(2.2.13) \quad \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\Delta u(s)\|_{L^2}^2 ds = \frac{1}{2} \|\nabla \varphi\|_{L^2}^2$$

Como $\varphi \in D(A)$ temos $\frac{du(s)}{ds} = Au(s) = T(s)A\varphi$

Assim,

$$\begin{aligned} \Delta u(t) &= \frac{du}{dt} = T(t)\Delta\varphi = T(t-s)T(s)\Delta\varphi = \\ &= T(t-s)\Delta u(s) \end{aligned}$$

Logo,

$$(2.2.14) \quad \|\Delta u(t)\|_{L^2} \leq \|\Delta u(s)\|_{L^2}$$

De (2.2.13) e (2.2.14) temos

$$\frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + t \|\Delta u(t)\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2} \|\nabla \varphi\|_{L^2}^2$$

Logo,

$$(2.2.15) \quad \|\Delta u(t)\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{t}} \|\nabla \varphi\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{t}} \|\varphi\|_{H_0^1}$$

para todo $\varphi \in D(A)$.

Mostraremos que (2.2.15) também vale para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Para isso, dada $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ existe $\varphi_n \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ em $H^1(\Omega)$. Definimos, $u_n(t) = T(t)\varphi_n$. Por (2.2.15) temos,

$$(2.2.16) \quad \|\Delta u_n(t)\|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{t}} \|\varphi_n\|_{H_0^1}$$

Pelo item (ii),

$$\|\Delta u(t)\|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{t}} \|\varphi\|_{L^2}$$

Então

$$\|\Delta u_n - \Delta u\|_{L^2} = \|\Delta(u_n - u)\|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{t}} \|\varphi_n - \varphi\|_{L^2}$$

Como $\|\varphi_n - \varphi\|_{L^2} \leq \|\varphi_n - \varphi\|_{H_0^1}$ segue que $\Delta u_n \rightarrow \Delta u$ em $L^2(\Omega)$ quando $n \rightarrow \infty$, o que implica, $\|\Delta_n u\|_{L^2} \rightarrow \|\Delta u\|_{L^2}$

Então, por (2.2.16) concluímos que

$$\|\Delta u(t)\|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{t}} \|\varphi\|_{H_0^1}$$

(v) $u \in C((0, \infty); H_0^1(\Omega))$

De fato, seja $v_h(t) = T(t+h)\varphi - T(t)\varphi$, v_h satisfaz

$$\begin{cases} \frac{dv_h}{dt} = \Delta v_h & (2.2.17) \\ v_h(0) = T(h)\varphi - \varphi & (2.2.18) \end{cases}$$

multiplicando (2.2.17) por $v_h(t)$ e integrando em Ω temos,

$$\int_{\Omega} \frac{d}{dt} |v_h(t)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v_h(t)|^2 dx = 0$$

integrando esta última em $[0, t]$ temos,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |v_n(t)|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |T(h)\varphi - \varphi|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla v_n(t)|^2 dx = 0$$

Logo,

$$(2.2.19) \quad -\frac{1}{2} \int_{\Omega} |T(h)\varphi - \varphi|^2 dx + \int_0^t \|\nabla v_h(t)\|_{L^2}^2 \leq 0$$

multiplicando (2.2.17) por $\Delta v_h(t)$ e integrando em Ω temos

$$0 \leq \int_{\Omega} |\Delta v_h(t)|^2 dx = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla v_h(t)\|_{L^2}^2$$

Então,

$$(2.2.20) \quad \frac{d}{dt} \|\nabla v_h(t)\|_{L^2}^2 \leq 0$$

De (2.2.19) e (2.2.20) temos que :

$$\begin{aligned} t \|\nabla v_h(t)\|_{L^2}^2 &= \int_0^t \|\nabla v_h(t)\|_{L^2}^2 ds \leq \int_0^t \|\nabla v_h(s)\|_{L^2}^2 ds \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |T(h)\varphi - \varphi|^2 dx \end{aligned}$$

Daí,

$$\|\nabla v_h(t)\|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{t}} \|T(h)\varphi - \varphi\|_{L^2}$$

Portanto,

$$\|v_h(t)\|_{H_0^1} \leq \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{t}} \|T(h)\varphi - \varphi\|_{L^2}$$

Assim, quando $h \rightarrow 0$, $\|v_h(t)\|_{H_0^1} \rightarrow 0$ pois $T(t)$ é um C^0 -semigrupo. $\square$

Em um espaço de Banach X , o problema não linear

$$(2.2.21) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u + g(u); \quad \Omega \times [0, T) \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{cases}$$

onde $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $T > 0$, na linguagem de semigrupos, passa a ser considerada como a equação diferenciável

$$\begin{cases} \dot{u} &= Au + F(u) \\ u(0) &= u_0 \end{cases}$$

onde $F(u)(x) = g(u(x))$ para todo $x \in X$.

Para o caso em que $X = L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, a aplicação $F : L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ está definida se, e somente se, a função g satisfaz

$$(2.2.22) \quad |g(s)| \leq C|s|$$

onde, C é uma constante positiva.

Portanto, para tratar o problema (2.2.21) de modo que o termo não-linear não esteja restrito à condição (2.2.22) estudaremos o problema (2.2.21) em $L^\infty(\Omega)$.

§2.3 A Equação do Calor em $L^\infty(\Omega)$

Defina o operador $A_1 : D(A_1) \subset L^\infty(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega)$ com domínio $D(A_1) = \{u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega); \Delta u \in L^\infty(\Omega)\}$ com $A_1 u = \Delta u$ para todo $u \in D(A_1)$.

Proposição 2.3.1: A_1 é um operador m -dissipativo em $L^\infty(\Omega)$.

Dem: Sejam $\lambda > 0$ e $f \in L^\infty(\Omega)$. Precisamos mostrar que existe $u \in D(A_1)$ tal que $u - \lambda \Delta u = f$.

Como $f \in L^2(\Omega)$ e $\Delta = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ é m -dissipativo, existe $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tal que $u - \lambda \Delta u = f$, $\forall \lambda > 0$ e $f \in L^\infty(\Omega)$. Necessitamos somente mostrar que $u \in L^\infty(\Omega)$. Para isso, seja $M = \|f\|_{L^\infty}$. Em particular,

$$(2.3.1) \quad (u - M) - \lambda \Delta(u - M) = (f - M)$$

está resolvido em $L^2(\Omega)$.

Seja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(s) = s - M$. Assim $u - M = h.u$. Como h^+ é diferenciável exceto para $s = M$, $h^+(0) = 0$ e h^+ é lipschitziana, temos pela proposição 1.2.5, $v = (u - M)^+ = h^+.u \in H_0^1(\Omega)$ e $\nabla v = \chi_{\{|u|>M\}} \nabla u$.

Multiplicando (2.3.1) por $v = (u - M)^+$ e integrando em Ω temos

$$\int_{\Omega} (u - M)(u - M)^+ - \lambda \int_{\Omega} \Delta(u - M)(u - M)^+ = \int_{\Omega} (f - M)(u - M)^+$$

Como $M = \|f\|_{L^\infty}$, $(f - M) \leq 0$ e $(u - M)^+ \in H_0^1(\Omega)$ temos

$$\int_{\Omega} [(u - M)^+]^2 + \lambda \int_{\Omega} \nabla(u - M)^+ \nabla(u - M)^+ \leq 0$$

Assim

$$\int_{\Omega} v^2 + \lambda \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \leq 0$$

Logo,

$$\int_{\Omega} v^2 \leq 0$$

O que implica, $v = 0$, isto é,

$$(u - M)^+ = 0, \text{ ou seja } u \leq M \text{ em } \Omega$$

Pela mesma razão, $u \geq -M$ em Ω . Daí, $\|u\|_{L^\infty} \leq M = \|f\|_{L^\infty}$. Logo, $u \in L^\infty(\Omega)$, Assim, $I - \lambda A_1 : D(A_1) \subset L^\infty \rightarrow L^\infty$ é sobrejetor para todo $\lambda > 0$ e além disso,

$$\|u - \lambda \Delta u\|_{L^\infty} = \|f\|_{L^\infty} = M \geq \|u\|_{L^\infty}$$

Portanto, A_1 é m -dissipativo. $\square$

Lemma 2.3.2:

$$D(A_1) = \{u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega); \Delta u \in L^\infty(\Omega)\}$$

é um subespaço denso de

$$C_0(\overline{\Omega}) = \{u \in C(\overline{\Omega}); u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

Dem: Para demonstrar a inclusão veja [Gilbarg, Trudinger], teorema 8.36 página 206. Para demonstrar a densidade, tome $u \in C_0(\overline{\Omega})$ e defina:

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & ; x \in \overline{\Omega} \\ 0 & ; x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \end{cases}$$

Logo, $\tilde{u} \in C(\mathbb{R}^n)$. Seja $\rho_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } \rho_n \subset B(0, \frac{1}{n})$, $\int \rho_n = 1$ e $\rho_n \geq 0$ sobre $\mathbb{R}^N$.

Então, $\rho_n * \tilde{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\rho_n * \tilde{u} \rightarrow \tilde{u}$ uniformemente sobre qualquer compacto de $\mathbb{R}^N$ e $\text{supp } (\rho_n * \tilde{u}) \subset \text{supp } (\tilde{u}) + \overline{B}(0, \frac{1}{n})$.

Logo, dado $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$(2.3.2) \quad \|v - \tilde{u}\|_{L^\infty} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Como $u|_{\partial\Omega} = 0$ e $u \in C(\overline{\Omega})$, dado $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$(2.3.3) \quad \|u(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Se $x \in \bar{\Omega} \setminus \Omega_1$ onde $\Omega_1 \subset \bar{\Omega}$ e $d(\Omega_1, \bar{\Omega}^c) > \delta$

Defina $\Omega_2 = \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) > \frac{\varepsilon}{2}\}$ e $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

- 1) $\alpha(x) = 1$ para $x \in \Omega_1$
- 2) $0 \leq \alpha(x) \leq 1$ para $x \in \bar{\Omega} \setminus \Omega_1$
- 3) $\alpha(x) = 0$ para $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}_2$

Daí,

$$\begin{aligned}
 \|u - \alpha v\|_{L^\infty} &= \|\tilde{u} - \alpha v\| = \|\alpha \tilde{u} + (1 - \alpha)\tilde{u} - \alpha v\| = \\
 &= \|\alpha(\tilde{u} - v) + (1 - \alpha)\tilde{u}\| \leq \\
 &\leq \|\alpha\| \cdot \|\tilde{u} - v\| + \|1 - \alpha\| \|\tilde{u}\| \leq \\
 &\leq \|\tilde{u} - v\| + \|\tilde{u}\|_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_1} = \\
 &= \|\tilde{u} - v\| + \|u\|_{\bar{\Omega} \setminus \Omega_1} \stackrel{(2.3.2)e(2.3.3)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
 \end{aligned}$$

Observe que $\text{supp}(\alpha v) = \text{supp} \alpha \cap \text{supp} v \subset \Omega$. Logo, $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $C_0(\bar{\Omega})$. Visto que $C_0^\infty(\Omega) \subset D(A_1) \subset C_0(\bar{\Omega})$ temos que $D(A_1)$ é denso em $C_0(\bar{\Omega})$. $\square$

Em consequência do lema 2.3.2, $D(A_1)$ não é denso em $L^\infty(\Omega)$. Definamos o operador $A : D(A) \subset C_0(\bar{\Omega}) \rightarrow C_0(\bar{\Omega})$ dado por $Au = \Delta u$ para todo $u \in D(A)$ onde

$$D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega) \cap C_0(\bar{\Omega}); \Delta u \in C_0(\bar{\Omega})\}$$

Novamente, pelo lema 2.3.2, $D(A)$ é denso em $C_0(\bar{\Omega})$.

Agora mostraremos que $A = D(A) \subset C_0(\bar{\Omega}) \rightarrow C_0(\bar{\Omega})$ é m -dissipativo.

Sejam $f \in C_0(\bar{\Omega})$ e $\lambda > 0$. De $C_0(\bar{\Omega}) \subset L^\infty(\Omega)$ e A_1 é m -dissipativo, existe $u \in D(A_1)$ tal que $(I - \lambda A_1)u = f$. Como $D(A_1) \subset C_0(\bar{\Omega})$ implica que $u \in C_0(\bar{\Omega})$. De $A_1 u = \frac{1}{\lambda}(u - f)$ e u, f pertencentes a $C_0(\bar{\Omega})$ temos que $A_1 u = \Delta u$ pertence a $C_0(\bar{\Omega})$.

Logo, $u \in D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega}); \Delta u \in C_0(\overline{\Omega})\}$. Assim, para todo $\lambda > 0$, o operador $I - \lambda A : D(A) \subset C_0(\overline{\Omega}) \rightarrow C_0(\overline{\Omega})$ é sobrejetor.

Sabendo que $D(A) \subset D(A_1)$ temos para todo $u \in D(A)$ e $\lambda > 0$ que

$$\|u - \lambda Au\| = \|u - \lambda A_1 u\| \geq \|u\|$$

pois A_1 é m -dissipativo.

Portanto, $A : D(A) \subset C_0(\overline{\Omega}) \rightarrow C_0(\overline{\Omega})$ é m -dissipativo.

Finalmente, pelo fato que $A : D(A) \subset C_0(\overline{\Omega}) \rightarrow C_0(\overline{\Omega})$ é m -dissipativo e densamente definido em $C_0(\overline{\Omega})$ segue pelo teorema de Lumer-Phillips que A é o gerador infinitesimal de um C^0 -semigrupo $S(t)$ sobre $C_0(\overline{\Omega})$.

Além disso, como $C_0(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$ e $\Delta : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ temos que $G(A) \subset G(\Delta)$ onde $G(A) = \{(u, Au); u \in D(A)\}$. Em consequência, $S(t) = T(t)|_{C_0(\overline{\Omega})}$, onde $T(t)$ denota o C^0 -semigrupo sobre $L^2(\Omega)$ gerado por $\Delta : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$; ou seja, $S(t)\varphi = T(t)\varphi$ para todo $\varphi \in C_0(\overline{\Omega})$.

Em consequência, para toda $\varphi \in C_0(\overline{\Omega})$, $u(t) = S(t)\varphi$ satisfaz as condições (i), (ii), (iii), (iv) e (v) da proposição 2.2.10.

Lema 2.3.3 Para $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$ defina

$$k(t)x = (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$

Para $\psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$, $v(t) = k(t) * \psi$ tem-se:

i) $v \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ e $v \in C([0, \infty); L^p(\mathbb{R}^n)) \cap C^\infty((0, \infty), L^p(\mathbb{R}^n))$ para $p \in [1, \infty]$

ii) $\begin{cases} v_t &= \Delta v \text{ em } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \\ v(0) &= \psi \end{cases}$

$$\text{iii) } \|v(t)\|_{L^p} \leq (4\pi t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \|\psi\|_{L^q} \quad \forall 1 \leq q \leq p \leq \infty \text{ e } \forall t > 0.$$

Dem

Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $v(t)(x) = k(t) * \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(t)(x-y)\psi(y)dy$

Defina $L : (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por $L(t, x, y) = k(t)(x-y)\psi(y)$. Afirmamos que L satisfaz:

- a) $L \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$
- b) $L(t, x, y) > 0$ para $(t, x, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$
- c) $\int_{\mathbb{R}^n} L(t, x, y)dy = 1$ para $(t, x, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$
- d) $\frac{\partial}{\partial t} L(t, x, y) = \Delta_x L(t, x, y)$.

De fato, (a) e (b) são imediatas. Para verificar (c) basta utilizar o teorema de Fubini da seguinte maneira:

$$\int_{\mathbb{R}^n} L(t, x, y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} k(t)(x-y)dy = \int \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right)dy$$

Fazendo a seguinte substituição $y = x + (4t)^{1/2}\eta$ na última integral temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} L(t, x, y)dy = \frac{1}{(\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-|\eta|^2)d\eta$$

Pelo teorema de Fubini ,

$$\frac{1}{(\pi)^{n/2}} \exp(-|\eta|^2)d\eta = \frac{1}{(\pi)^{n/2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-|\eta|^2)d\eta \right)^n =$$

$$\frac{1}{\pi^{n/2}} (\sqrt{\pi})^n = 1.$$

A afirmação (d) é de imediata verificação bastando somente derivar ambos os lados nas respectivas variáveis indicadas.

Destas propriedades sobre L segue que $v \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ e satisfaz $v_t = \Delta_x v$ para todo $t > 0$

Além disso, v tem valor inicial ψ , no sentido que quando estendemos v por $v(0, x) = \psi(x)$ para $t = 0$, então v é contínua para $x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$.

Para provar que a extensão de V é contínua em $t = 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$ temos que provar que $v(x, t) \rightarrow \psi(x_0)$ quando $x \rightarrow x_0$ e $t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} |v(t, x) - \psi(x_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} L(t, x, y) \psi(y) dy - \psi(x_0) \right| = \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} L(t, x, y) \psi(y) dy - \psi(x_0) \int_{\mathbb{R}^n} L(t, x, y) dy \right| = \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} L(t, x, y) (\psi(y) - \psi(x_0)) dy \right| \leq \\ &< \int_{\mathbb{R}^n} L(t, x, y) |\psi(y) - \psi(x_0)| dy \end{aligned}$$

Como $\psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $|y - x_0| < 2\delta$ então $|\psi(y) - \psi(x_0)| < \varepsilon$. Então para $|x - x_0| < \delta$ temos,

$$\begin{aligned} |v(t, x) - \psi(x_0)| &\leq \int_{|y-x|<\delta} L(t, x, y) |\psi(y) - \psi(x_0)| dy + \int_{|y-x|\geq\delta} L(t, x, y) |\psi(y) - \psi(x_0)| dy \\ &\leq \int_{|y-x|<\delta} L(t, x, y) |\psi(y) - \psi(x_0)| dy + \int_{|y-x|\geq\delta} L(t, x, y) |\psi(y)| dy + \int_{|y-x|\geq\delta} L(t, x, y) |\psi(x_0)| dy \\ &\leq \int_{|y-x|<\delta} L(t, x, y) |\psi(y) - \psi(x_0)| dy + 2 \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |\psi(y)| \int_{|y-x|\geq\delta} L(t, x, y) dy \\ &\stackrel{|x-x_0|<\delta}{\leq} \int_{|y-x|<2\delta} L(t, x, y) |\psi(y) - \psi(x_0)| dy + 2 \sup |\psi(y)| \int_{|y-x|\geq\delta} L(t, x, y) dy \\ &\leq \varepsilon \int_{|y-x|<2\delta} L(t, x, y) dy + 2 \sup |\psi(y)| \int_{|y-x|\geq\delta} L(t, x, y) dy \\ \text{Como } \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \int_{|y-x_0|\geq\delta} L(t, x, y) dy &= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} (\pi)^{-n/2} \int_{|\eta|\geq \frac{\delta}{\sqrt{4t}}} e^{-|\eta|^2} d\eta = 0 \end{aligned}$$

temos que

$$|v(t, x) - \psi(x_0)| < 2\varepsilon \text{ para } t \text{ suficientemente pequeno e } |x - x_0| < \delta.$$

Mostraremos agora que $v \in C([0, \infty), L^p(\mathbb{R}^n)) \cap C^\infty(0, \infty), L^p(\mathbb{R}^n))$ para $p \in$

$[1, \infty]$

Antes observemos que $v(t) = k(t) * \psi$ pertence a $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $t \geq 0$.

De fato, pela desigualdade de Young, a saber, se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ então $\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}$ para $p \in [1, \infty]$, temos que $k(t) * \psi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para $t > 0$ pois

$$\begin{aligned} 1) \quad & \int_{\mathbb{R}^n} k(t)(x) dx = \int (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(\frac{-|x|^2}{4t}\right) dx = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(\frac{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)}{4t}\right) dx_1 \dots dx_n = \\ & = (4\pi t)^{-n/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}} dx \right)^n = (4\pi t)^{-n/2} (4\pi t)^{n/2} = 1. \end{aligned}$$

Logo, $k(t) \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

2) $\psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$, logo, $\psi \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Provemos a continuidade: Dados $t > 0$ e $h > 0$

$$\begin{aligned} |v(t+h) - v(t)| &= |k(t+h) * \psi - k(t) * \psi| \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |(L(t+h, x, y) - L(t, x, y))\psi(y)| dy = \\ &\leq \int_{\text{supp}\psi} |L(t+h, x, y) - L(t, x, y)| |\psi(y)| dy \leq \\ &\leq \sup |\psi| \int_{\text{supp}\psi} |L(t+h, x, y) - L(t, x, y)| dy \end{aligned}$$

Como $L \in C^\infty((0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $|h| < \delta$ então

$$|L(t+h, x, y) - L(t, x, y)| < \varepsilon$$

logo,

$$(2.3.4) \quad |v(t+h) - v(t)| < \sup |\psi| |\text{supp}\psi| \varepsilon$$

onde $|\text{supp}\psi|$ denota a medida de Lebesgue do conjunto $\text{supp}\psi$.

Portanto,

$$\|v(t+h) - v(t)\|_{L^p} \leq \sup |\psi| |\text{supp}\psi|^2 \varepsilon$$

Para $t = 0$ já mostramos a continuidade de v . Assim, $v \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, L^p(\mathbb{R}^n))$ para todo $1 \leq p < \infty$. Para $p = \infty$, usamos a estimativa (2.3.4).

Agora mostraremos que $v \in C^\infty((0, \infty), L^p(\mathbb{R}^n))$, para isto, sejam $t > 0$ e $h > 0$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{v(t+h)(x) - v(t)(x)}{h} - \frac{\partial k(t)}{\partial t} * \psi(x) \right| = \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{k(t+h)(x-y) - k(t)(x-y)}{h} - \frac{\partial k}{\partial t}(t)(x-y)) \psi(y) dy \right| \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{k(t+h)(x-y) - k(t)(x-y)}{h} - \frac{\partial k}{\partial t}(t)(x-y) \right| |\psi(y)| dy = \\ &= \int_{\text{supp}\psi} \left| \frac{k(t+h)(x-y) - k(t)(x-y)}{h} - \frac{\partial k}{\partial t}(t)(x-y) \right| |\psi(y)| dy \leq \\ &\leq \sup |\psi| \int \left| \frac{k(t+h)(x-y) - k(t)(x-y)}{h} - \frac{\partial k}{\partial t}(t)(x-y) \right| dy = \end{aligned}$$

visto que $L(t, x, y) = k(t)(x-y)$ pertence a $C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ temos que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $|h| \leq \delta$ implica que

$$\left| \frac{k(t+h)(x-y) - k(t)(x-y)}{h} - \frac{\partial k}{\partial t}(t)(x-y) \right| \leq \varepsilon$$

Daí,

$$\left| \frac{v(t+h)(x) - v(t)(x)}{h} - \frac{\partial k}{\partial t}(t) \right| \leq \sup |\psi| |\text{supp}\psi| \varepsilon,$$

então

$$\left\| \frac{v(t+h)(x) - v(t)(x)}{h} - \frac{\partial k}{\partial t}(t) * \psi(x) \right\|_{L^p} \leq \sup |\psi| |\text{supp}\psi|^2 \varepsilon$$

para $|h| < \delta$

Logo, $\frac{\partial v}{\partial t}(t)(x) = \frac{\partial k}{\partial t}(t) * \psi(x)$ para todo $t > 0$ e pela regularidade de k temos que $\frac{\partial v}{\partial t} \in C(0, \infty), L^p(\mathbb{R}^n)$. Analogamente, $\frac{\partial^n v}{\partial t^n}(t)(x) = \frac{\partial^n k(t)}{\partial t^n} * \psi(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Assim, $v \in C^\infty((0, \infty), L^p(\mathbb{R}^n))$.

Para finalizar, mostraremos o ítem (iii). Para isto, necessitaremos de desigualdade generalizada de Young, a saber, dados $1 \leq p, q, r \leq \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$ se $f \in L^q, g \in L^p$ então $f * g \in L^r$ e $\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^q} \|g\|_{L^p}$

Logo, para $v(t) = k(t) * \psi$ temos

$$\|v(t)\|_{L^p} = \|k(t) * \psi\|_{L^p} \leq \|k(t)\|_{L^\alpha} \|\psi\|_{L^q} \text{ se}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{q} - 1$$

Observe que é possível existir α nas condições $1 \leq p, q, \alpha \leq \infty$ com $\frac{1}{p} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{q} - 1$ pois, $1 \leq q$ então $\frac{1}{q} \leq 1$. Logo, $1 - \frac{1}{q} \geq 0$, o que implica, $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p} + (1 - \frac{1}{q}) \geq 0$. Como $1 \leq q \leq p$ implica que $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq 0$. Logo, $\frac{1}{\alpha} \leq 1$, isto é, $\alpha \geq 1$

Agora,

$$\begin{aligned} \|k(t)\|_{L^p}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) \right|^p dx = \\ &= (4\pi t)^{-np/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{p|x|^2}{4t}\right) dx = \\ &= (4\pi t)^{-np/2} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{p(x_1^2 + \dots + x_n^2)}{4t}\right) dx_1 \dots dx_n \\ &\stackrel{\text{Fabini}}{=} (4\pi t)^{-np/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{px^2}{4t}\right) dx \right)^n = (4\pi t)^{-np/2} \frac{(4\pi t)^{n/2}}{p^{n/2}} = \\ &= p^{-n/2} (4\pi t)^{n/2} (1-p) \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } \|k(t)\|_{L^p} = (4\pi t)^{\frac{n}{2p}} (1-p) \left(\frac{1}{p^{1/p}}\right)^{n/2}$$

Como $p \geq 1$ segue que $p^{1/p} \geq 1$. Daí, $\frac{1}{p^p} \leq 1$

Portanto,

$$\|k(t)\|_{L^p} \leq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})}}, \quad p \geq 1$$

Assim

$$\|v(t)\|_{L^p} \leq \|k(t)\|_{L^\alpha} \|\psi\|_{L^q} \leq (4\pi t)^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{\alpha})} \|\psi\|_{L^q}$$

Como $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + 1$ temos

$$\|v(t)\|_{L^p} \leq (4\pi t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\psi\|_{L^q} \quad \forall 1 \leq q \leq p \leq \infty \quad \square$$

Lema 2.3.4 Dada $\varphi \in C_0(\overline{\Omega})$ com $\varphi \geq 0$ então $S(t)\varphi \geq 0$ para $t \geq 0$

Dem: Multiplicando a equação

$$\frac{du}{dt} = \Delta u$$

por $u^- = \min\{u, 0\} = \begin{cases} 0 & \text{se } u \geq 0 \\ u & \text{se } u < 0. \end{cases}$ e integrando em Ω temos

$$\int_{\Omega} u^- \frac{du}{dt} = \int_{\Omega} u^- \Delta u = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla u^- = - \int_{\Omega} |\nabla u^-|^2 \leq 0$$

Por outro lado

$$\int_{\Omega} u^- \frac{du}{dt} = \int_{\Omega} u^- \frac{du^-}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u^-)^2$$

Logo,

$$(2.3.5) \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u^-)^2 dx \leq 0$$

isto é, $\int_{\Omega} (u^-)^2$ é não-crescente em t . Como $u(0) = \varphi \geq 0$, logo $u^-(0) = 0$, logo por (2.3.5), $u^- = 0$.

Em consequência, $u(t) = S(t)\varphi \geq 0$, $\forall t > 0$ e $x \in \Omega$. $\square$

Proposição 2.3.5 Seja $\psi \in C_0(\overline{\Omega})$ e $1 \leq q \leq p \leq \infty$. Então para todo $t > 0$ temos

$$\|S(t)\psi\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}} \|\psi\|_{L^q}$$

Dem: Seja $\psi \in D(A)$.

Aplicando o lema 2.3.4 para as condições iniciais $|\psi| - \psi$ e $|\psi| + \psi$ obtemos

$$(2.3.6) \quad S(t)(|\psi| - \psi) \geq 0 \text{ em } \Omega$$

$$(2.3.7) \quad S(t)(|\psi| + \psi) \geq 0 \text{ em } \Omega$$

De (1) e (2) temos

$$-S(t)|\psi| \leq S(t)\psi \leq S(t)|\psi| \text{ em } \Omega$$

Daí,

$$|S(t)\psi| \leq S(t)|\psi|$$

Em consequência

$$(2.3.8) \quad \|S(t)\psi\|_{L^p} \leq \|S(t)|\psi|\|_{L^p}$$

Definamos $v_0 = \begin{cases} |\psi| & \text{em } \Omega \\ 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$

Tomemos, $v(t) = k(t) * v_0$ e $w(t) = v(t)|_{\Omega} - S(t)|\psi|$, ou seja, $w(t) = k(t) * |\psi| - S(t)|\psi|$
 w tem as propriedades.

$$1) \frac{dw}{dt} = \Delta w, \text{ pois, } \frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt} k(t) * |\psi| - \frac{d}{dt} S(t)|\psi| \stackrel{\psi \in D(A)}{=}$$

$$= \Delta_x k(t)_* |\psi| - \Delta_x S(t) |\psi| = \Delta_x w.$$

$$\text{ii) } w(0) = v(0)|_\Omega - S(0)|\psi| = |\psi| - |\psi| = 0.$$

Então, $w(t) = v(t)|_\Omega - S(t)|\psi|$ satisfaz

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} = \Delta w & (2.3.9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} w|_{\partial\Omega} = v(t)|_{\partial\Omega} \geq 0 & (2.3.10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} w(0) = 0 & (2.3.11) \end{cases}$$

multiplicando (2.3.9) por w^- e integrando em Ω temos,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w^- \frac{dw}{dt} &= \int_{\Omega} w^- \Delta w = - \int_{\Omega} \nabla w^- \nabla w + \int_{\partial\Omega} w^- D_N w ds \\ &= - \int_{\Omega} \nabla w^- \nabla w = - \int_{\Omega} |\nabla w^-|^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Por outro lado, $\int_{\Omega} w^- \frac{dw}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (w^-)^2$ em consequência, $\int_{\Omega} (w^-)^2$ é não-crescente em t .

Como $w(0) = 0$ segue que $w^-(0) = 0$ e portanto, $w^- = 0$.

Logo, $w(t) \geq 0$ em Ω e para todo $t \geq 0$. Isto é, $w(t) = v(t)|_\Omega - S(t)|\psi| \geq 0$ ou seja, $v(t)|_\Omega \geq S(t)|\psi| \geq 0$

Segue então que

$$(2.3.12) \quad \|S(t)|\psi|\|_{L^p} \leq \|v(t)|_\Omega\|_{L^p} \leq \|v(t)\|_{L^p} \leq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}} \|\psi\|_{L^q}$$

De (2.3.8) e (2.3.12) temos

$$\|S(t)\psi\|_{L^p} \leq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}} \|\psi\|_{L^q} \quad \forall \psi \in D(A)$$

Para finalizar, seja $\psi \in C_0(\overline{\Omega})$ qualquer. Como $D(A)$ é denso em $C_0(\overline{\Omega})$ existe $\psi_n \in D(A)$ com $\psi_n \rightarrow \psi$ em $C_0(\overline{\Omega})$.

Para todo n temos

$$\begin{aligned}
& \|S(t)\psi_n - S(t)\psi\|_{L^p} \leq \|S(t)(\psi_n - \psi)\|_{L^p} \leq \\
& \leq \|\psi_n - \psi\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |\psi_n(x) - \psi(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq \\
& \leq \sup_{\Omega} |\psi_n - \psi| \left(\int_{\Omega} dx\right)^{1/p} = \|\psi_n - \psi\|_{L^\infty} |\bar{\Omega}|^{1/p}.
\end{aligned}$$

Assim, $\|S(t)\psi_n - S(t)\psi\|_{L^p} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ o que implica, $\|S(t)\psi_n\|_{L^p} \rightarrow \|S(t)\psi\|_{L^p}$.

Por outro lado, $\|\psi_n - \psi\|_{L^q} \leq \sup_{\Omega} |\psi_n - \psi| |\Omega|^{1/q} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Logo; $\|\psi_n\|_{L^q}$ quando $n \rightarrow \infty$.

Para cada n é valido.

$$\|S(t)\psi_n\|_{L^p} \leq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}} \|\psi_n\|_{L^q}$$

fazendo $n \rightarrow \infty$ na desigualdade acima temos

$$\|S(t)\psi\|_{L^p} \leq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}} \|\psi\|_{L^q} \quad \forall \psi \in C_0(\bar{\Omega}) \quad \square$$

Lema 2.3.6 Se λ_1 é o primeiro autovalor de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$, então para todo $\varphi \in L^2(\Omega)$.

$$\|S(t)\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\lambda_1 t} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}$$

Dem: Seja $f(t) = e^{2\lambda_1 t} \|u(t)\|_{L^2}^2$ onde $u(t) = S(t)\varphi$

$$\begin{aligned}
f'(t) &= 2\lambda_1 e^{2\lambda_1 t} \|u(t)\|_{L^2}^2 + e^{2\lambda_1 t} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} |u(t)x|^2 dx \right) \\
&= 2\lambda_1 e^{2\lambda_1 t} \|u(t)\|_{L^2}^2 + e^{2\lambda_1 t} \int_{\Omega} u \frac{du}{dt} dx = \\
&= 2\lambda_1 e^{2\lambda_1 t} \|u(t)\|_{L^2}^2 + e^{2\lambda_1 t} \int_{\Omega} u \Delta u dx = \\
&= 2e^{2\lambda_1 t} \left(\lambda_1 \int_{\Omega} |u|^2 - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)
\end{aligned}$$

Como $\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in H_0^1 \\ u \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2}{\int_{\Omega} |u|^2} \leq \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2}{\int_{\Omega} |u|^2}$ implica que $\lambda_1 \int_{\Omega} |u|^2 - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \leq 0$

Logo, $f'(t) \leq 0$, ou seja, $f(t)$ é não-crescente em t . Daí,

$$f(t) \leq f(0) = \|u(0)\|_{L^2}^2 = \|\varphi\|_{L^2}^2$$

ou seja,

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 \leq e^{-2\lambda_1 t} \|\varphi\|_{L^2}^2 \quad \square$$

Corolário 2.3.7 Se λ_1 é como no lema anterior e $\varphi \in C_0(\overline{\Omega})$ então

$$\|S(t)\varphi\|_{L^\infty} \leq M e^{-\lambda_1 t} \|\varphi\|_{L^\infty}.$$

Onde $M = \exp(\frac{\lambda_1 |\Omega|^{2/n}}{4\pi})$, onde $|\Omega|$ denota a medida de Lebesgue de Ω .

Dem: Seja $T = \frac{|\Omega|^{2/n}}{4\pi}$

Para $0 \leq t \leq T$

$$\|S(t)\varphi\|_{L^\infty} \leq \|\varphi\|_{L^\infty} e^{\lambda_1(T-t)} \|\varphi\|_{L^\infty} = e^{\lambda_1 T - \lambda_1 t} \|\varphi\|_{L^\infty}$$

Logo,

$$\|S(t)\varphi\|_{L^\infty} \leq e^{\frac{\lambda_1 |\Omega|^{2/n}}{4\pi}} e^{-\lambda_1 t} \|\varphi\|_{L^\infty} = M e^{-\lambda_1 t} \|\varphi\|_{L^\infty} \quad 0 \leq t \leq T$$

Para $t > T$,

$$S(t)\varphi = S(t)S(t-T)\varphi$$

Aplicando a proposição 2.3.5 para $p = \infty$ e $q = 2$ temos

$$\|S(t)\varphi\|_{L^\infty} = \|S(T)S(t-T)\varphi\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{(4\pi T)^{n/q}} \|S(t-T)\varphi\|_{L^2}$$

Pelo lema 2.3.6, $\|S(t - T)\varphi\|_{L^2} \leq e^{-\lambda_1(T-t)}\|\varphi\|_{L^2}$

logo,

$$\begin{aligned}
\|S(t)\varphi\|_{\infty} &\leq \frac{1}{(4\pi T)^{n/4}} e^{-\lambda_1(t-T)} \|\varphi\|_{L^2} \leq \\
&\leq \frac{e^{\lambda_1 t}}{(4\pi T)^{n/4}} e^{-\lambda_1 t} |\Omega|^{1/2} \|\varphi\|_{L^\infty} = \frac{1}{(4\pi \frac{|\Omega|^{2/n}}{4\pi})^{n/4}} e^{\lambda_1 \frac{|\Omega|^{2/n}}{4\pi}} e^{-\lambda_1 t} |\Omega| \|\varphi\|_{L^\infty} \\
&= e^{\frac{\lambda_1 |\Omega|^{2/n}}{4\pi T}} e^{-\lambda_1 t} \|\varphi\|_{L^\infty} = M e^{-\lambda_1 t} \|\varphi\|_{L^\infty}.
\end{aligned}$$

Logo, $\|S(t)\varphi\|_{L^\infty} \leq M e^{-\lambda_1 t} \|\varphi\|_{L^\infty} \quad \square$

§2.4 Equação Não-Linear do Calor

Este parágrafo está destinado ao estudo do problema não-linear do calor (2.4.1) abaixo, sob o ponto de vista da existência local e global de solução e um tipo de resultado de blow-up para tempo finito.

Como antes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com bordo $\partial\Omega$ suave. Consideremos uma função $g \in C(R, R)$, localmente lipschitziana tal que $g(0) = 0$.

Consideremos o seguinte problema

$$(2.4.1) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = \Delta u + F(u) & \Omega \times [0, t) \\ u = u_0 & \\ u|_{\partial\Omega} = 0 & \end{cases}$$

onde $F : C_0(\overline{\Omega}) \rightarrow C_0(\overline{\Omega})$ é dada por $F(u)(x) = g(u(x))$.

2.4.1: Existência Local

Proposição 2.4.1.1 Sejam $\varphi \in C_0(\overline{\Omega})$, $T > 0$ e $u \in C([0, T], C_0(\overline{\Omega}))$. Se u é solução da equação

$$u(t) = S(t)\varphi + \int_0^t S(t-s)g(u(s))ds, \quad t \in [0, T]$$

então u é solução do problema.

$$(2.4.2) \quad \begin{cases} u \in C([0, T], C_0(\overline{\Omega})) \cap C((0, T], H_0^1(\Omega)) \cap C^1((0, T], L^2(\Omega)) \text{ e} \\ \Delta u \in C((0, T], L^2(\Omega)) \\ u_t = \Delta u + g(u), \quad t \in (0, T] \\ u(0) = \varphi \end{cases}$$

Dem: A aplicação $t \mapsto g(u(t))$ de $[0, T]$ em $C_0(\overline{\Omega})$ pertence ao espaço $C([0, T], L^2(\Omega))$

(2.4.3)

De fato,

$$\begin{aligned}
& \|g(u(t+h)) - g(u(t))\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} |g(u(t+h, x)) - g(u(t, x))|^2 dx \\
& \leq \int_{\Omega} K^2 |u(t+h, x) - u(t, x)|^2 \leq K^2 \int_{\Omega} \sup |u(t+h, x) - u(t, x)|^2 dx \\
& = K^2 |\Omega| \|u(t+h) - u(t)\|_{L^\infty}^2
\end{aligned}$$

Como $u \in C([0, T], C_0(\overline{\Omega}))$, dado $\frac{\varepsilon}{k|\Omega|^{1/2}} > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $|h| < \delta$ então $\|u(t+h) - u(t)\|_{L^\infty} < \varepsilon$. Portanto, $\|g(u(t+h)) - g(u(t))\|_{L^2} < \varepsilon$ se $|h| < \delta$. Para $0 < t \leq T$ a aplicação $v(s) = S(t-s)g(u(s))$ para $s \in [0, t]$ pertence ao espaço $H_0^1(\Omega)$. (2.4.4)

De fato, $g(u(s)) \in C_0(\overline{\Omega})$, logo, $g(u(s)) \in L^2(\Omega)$. Assim, $S(t-s)g(u(s)) = T(t-s)g(u(s))$.

Como $T(t) : L^2(\Omega) \rightarrow H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ para $t > 0$, segue que $v(s) \in H_0^1(\Omega)$ para $s \in [0, t]$.

Pelo ítem (iii) da proposição 2.2.10 e por (2.4.4) temos que

$$\|S(t-s)g(u(s))\|_{H_0^1} \leq \frac{\|g(u(s))\|_{L^2}}{\sqrt{2}\sqrt{t-s}}$$

Tendo em vista (2.4.3), existe constante $C_1 > 0$ tal que

$$(2.4.5) \quad \|S(t-s)g(u(s))\|_{H_0^1} \leq \frac{C_1}{\sqrt{2}\sqrt{t-s}}$$

pelo teorema de Bochner que $T(t-s)g(u(s))$ pertence ao espaço $L^1(0, t, H_0^1(\Omega))$.

Como consequência,

$$(2.4.6) \quad \int_0^t S(t-s)g(u(s))ds \in H_0^1(\Omega)$$

Novamente, para $\varphi \in C_0(\overline{\Omega})$ e $t > 0$ temos que $S(t)\varphi = T(t)\varphi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Daí, $S(t)\varphi \in H_0^1(\Omega)$ para $\varphi \in C_0(\overline{\Omega})$. Então, como $u(t) = S(t)\varphi + \int_0^t S(t-s)g(u(s))ds$ temos que $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ para $t \in [0, T]$ (2.4.7)

Além disso,

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{H_0^1} &\leq \|T(t)\varphi\|_{H_0^1} + \int \|T(t-s)g(u(s))\|_{H_0^1} ds \\
&\stackrel{(2.4.5)}{\leq} \frac{\|\varphi\|_{L^2}}{\sqrt{2}\sqrt{t}} + \int_0^t \frac{C_1}{\sqrt{2}\sqrt{t-s}} \varphi \in C_0(\bar{\Omega}) \leq \\
&\leq \frac{C_2}{\sqrt{2}\sqrt{t}} + C_1\sqrt{t} \leq \\
&\leq \max(C_1, C_2) \left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \sqrt{t} \right) = C_3 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \sqrt{t} \right) = \\
&= C_3 \left(\frac{1+t}{\sqrt{t}} \right) \leq C_3 \left(\frac{1+T}{\sqrt{t}} \right) = \\
&= \frac{C_4}{\sqrt{t}} \tag{2.4.8}
\end{aligned}$$

Mostraremos agora que $u \in C((0, T], H_0^1(\Omega))$. Para isto, sejam $t \in (0, T]$ e $h > 0$, então

$$\begin{aligned}
u(t+h) - u(t) &= (S(t+h)\varphi - S(t)\varphi) + \int_0^t (S(t+h-s)g(u(s)) - S(t-s)g(u(s)))ds \\
&\quad + \int_t^{t+h} S(t+h-s)g(u(s))ds
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
&\|u(t+h) - u(t)\|_{H_0^1} \leq \|S(t+h)\varphi - S(t)\varphi\|_{H_0^1} \\
&+ \int_0^t \|S(t+h-s)g(u(s)) - S(t-s)g(u(s))\|_{H_0^1} ds + \\
&+ \int_0^{t+h} \|S(t+h-s)g(u(s))\|_{H_0^1} ds \leq \\
&\stackrel{(2.4.5)}{\leq} \|S(t+h)\varphi - S(t)\varphi\|_{H_0^1} + \int_0^t \|S(t+h-s)g(u(s)) - S(t-s)g(u(s))\|_{H_0^1} ds + \\
&+ \int_t^{t+h} \frac{C_1}{\sqrt{t+h-s}} = \|S(t+h)\varphi - S(t)\varphi\|_{H_0^1} + \\
&+ \int_0^t \|S(t+h-s)g(u(s)) - S(t-s)g(u(s))\|_{H_0^1} ds + 2C_1\sqrt{h}
\end{aligned}$$

Como φ e $g(u(s))$ pertencem a $L^2(\Omega)$ para todo $s \in [0, T]$, pela proposição 2.2.10, ítem (v) temos que $\|u(t+h) - u(t)\|_{H_0^1} \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$.

Como g é lipschitziana sobre conjuntos limitados de $\mathbb{R}$ e a imagem de $u(t)$ é limitada em $\mathbb{R}$ para cada $t \in [0, T]$, segue que g é lipschitziana sobre a imagem de u em $\mathbb{R}$. Como consequência g é diferenciável quase sempre sobre a imagem de $u(t)$, $t \in [0, T]$. Daí, como $g(0) = 0$ e $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ par $t \in (0, T]$ segue pela proposição 1.2.5 (regra da cadeia) que $g(u(t)) \in H_0^1(\Omega)$ e $\nabla g(u(t)) = \begin{cases} g'(u(t))\nabla u(t) & , u(t) \notin N \\ 0 & , u(t) \in N \end{cases}$ onde N é o conjunto de medida nula onde g não é diferenciável.

Além disso,

$$(2.4.9) \quad \|g(u(t))\|_{H_0^1} \leq \frac{C}{\sqrt{t}}$$

De fato,

$$\begin{aligned} \|g(u(t))\|_{H_0^1}^2 &= \|\nabla g(u(t))\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} |\nabla g(u(t))|^2 dx \\ &= \int_{\Omega \setminus N} |g'(u(t))\nabla u(t)|^2 dx = \int_{\Omega \setminus N} |g'(u(t))|^2 |\nabla u(t)|^2 dx = \\ &= \int_{\Omega \setminus N} |g'(u(t, x))|^2 |\nabla u(t, x)|^2 dx \end{aligned}$$

Como g é lipschitziana sobre a imagem de u existe constante K tal que $|g'(u(t, x))| \leq K$ para $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$ tal que $u(t, x) \notin N$.

Daí,

$$\begin{aligned} \|g(u(t))\|_{H_0^1} &\leq K \left(\int_{\Omega \setminus N} |\nabla u(t, x)|^2 dx \right)^{1/2} = \\ &= K \|u(t)\|_{H_0^1} \stackrel{(2.4.8)}{\leq} \frac{kC_4}{\sqrt{t}} = \frac{C}{\sqrt{t}} \end{aligned}$$

Aplicando novamente a proposição 2.2.10 temos que $\Delta T(t)\varphi \in L^2(\Omega)$ e além disso, $\|\Delta S(t-s)g(u(s))\|_{L^2} \leq \frac{C}{\sqrt{t-s}\sqrt{s}}$

De fato, aplicando o ítem (iv) da proposição 2.2.10 para a condição inicial $g(u(s)) \in H_0^1(\Omega)$ temos $\|\Delta S(t-s)g(u(s))\|_{L^2} \leq \frac{\|g(u(s))\|_{H_0^1}}{\sqrt{t-s}} \leq \frac{C}{\sqrt{t-s}\sqrt{s}}$ (2.4.10)

Então como,

$$\Delta u(t) = \Delta S(t)\varphi + \int_0^t \Delta S(t-s)g(u(s))ds$$

Segue que $\Delta u(t) \in L^2(\Omega)$.

Portanto, $u(t) \in \{u \in H_0^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\} = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ para todo $t \in [0, T]$.

Dáí, $u \in C([0, T], H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$. De fato, utilizando o fato que zero não pertence ao resolvente de $\Delta : H^2(\Omega) \cap H_0^1 \rightarrow L^2(\Omega)$, isto é, existe $\Delta^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $\Delta^{-1} \in B(L^2(\Omega))$ temos

$$\begin{aligned} \|u(t+h) - u(t)\|_{H^2} &= \|\Delta^{-1}(\Delta(u(t+h) - u(t)))\|_{H^2} \leq \\ &\leq \|\Delta^{-1}\| \cdot \|\Delta u(t+h) - \Delta u(t)\|_{L^2} \end{aligned}$$

basta então mostrar $\Delta u \in C([0, T], L^2(\Omega))$. Para isso,

$$\begin{aligned} \|\Delta u(t+h) - \Delta u(t)\|_{L^2} &= \|(S(h) - I)\Delta S(t)\varphi\|_{L^2} + \\ &+ \int_0^t \|\Delta S(t+h-s)g(u(s)) - \Delta S(t-s)g(u(s))\|ds + \\ &+ \int_t^{t+h} \|\Delta S(t+h-s)g(u(s))\|ds \end{aligned}$$

Temos os seguintes fatos:

i) $\Delta S(t+h-s)g(u(s)) - \Delta S(t-s)g(u(s)) = S(h)\Delta S(t-s)g(u(s)) - \Delta S(t-s)g(u(s)) = (S(h) - I)\Delta S(t-s)g(u(s)) \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$ em L^2

ii) $\|\Delta S(t+h-s)g(u(s)) - \Delta S(t-s)g(u(s))\|_{L^2} \leq$

$$\begin{aligned} &\leq \|\Delta S(t+h-s)g(u(s))\|_{L^2} + \|\Delta S(t-s)g(u(s))\|_{L^2} \leq \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{t+h-s}} + \frac{C}{\sqrt{t-s}\sqrt{s}} \in L^1(0, t). \end{aligned}$$

Então pelo teorema da convergência dominada

$$\int_0^t \|\Delta S(t+h-s)g(u(s)) - \Delta S(t-s)g(u(s))\|_{L^2} ds \rightarrow 0 \text{ quando } h \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad & \int_t^{t+h} \|\Delta S(t+h-s)g(u(s))\|_{L^2} ds \stackrel{(2.4.10)}{\leq} \int_t^{t+h} \frac{C}{\sqrt{t+h-s}\sqrt{s}} ds \\ &= C \int_t^r \frac{ds}{\sqrt{s}\sqrt{r-s}} \underset{y=\sqrt{s}}{=} 2C \int_{\sqrt{t}}^{\sqrt{r}} \frac{dy}{\sqrt{r-y^2}} \underset{y=\sqrt{r}\sin\theta}{=} 2C \int_{\arcsen\sqrt{\frac{t}{r}}}^{\pi/2} -d\theta = \\ &= 2C(\arcsen\sqrt{\frac{t}{r}} - \frac{\pi}{2}) = 2C(\arcsen\sqrt{\frac{t}{t+h}} - \pi/2) \end{aligned}$$

$$\text{assim } \lim_{h \rightarrow 0} \int_t^{t+h} \|\Delta S(t+h-s)g(u(s))\|_{L^2} ds \leq \lim_{h \rightarrow 0} 2C(\arcsen\sqrt{\frac{t}{t+h}} - \pi/2) = 0$$

De (i), (ii) e (iii) temos que

$\|\Delta u(t+h) - \Delta u(t)\|_{L^2} \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$, logo, $\Delta u \in C((0, T], L^2(\Omega))$ o que implica $u \in C((0, T], H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$.

Para finalizar, provaremos que $u \in C^1((0, T), L^2(\Omega))$.

Para isto, sejam $t \in (0, T)$ e $h > 0$

$$\begin{aligned} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} &= \frac{(S(h) - I)}{h} S(t)\varphi + \int_0^t \frac{S(h) - I}{h} S(t-s)g(u(s))ds \\ &\quad + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(t+h-s)g(u(s))ds \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

observamos que:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \left\| \frac{S(h) - I}{h} S(t-s)g(u(s)) \right\|_{L^2} = \frac{1}{h} \left\| \int_{t-s}^{t+h-s} \frac{d}{d\varepsilon} S(\varepsilon)g(u(s))d\varepsilon \right\| \\ &= \frac{1}{h} \left\| \int_{t-s}^{t+h-s} \Delta S(\varepsilon)g(u(s))d\varepsilon \right\| = \\ &= \frac{1}{h} \int_{t-s}^{t+h-s} \|S(\varepsilon - (t-s))\Delta S(t-s)g(u(s))\|_{L^2} d\varepsilon \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{k}{h} \int_{t-s}^{t+h-s} \|\Delta S(t-s)g(u(s))\|_{L^2} d\varepsilon = k \|\Delta S(t-s)g(u(s))\|_{L^2} \leq \\
&\leq \frac{kC}{\sqrt{t-s}\sqrt{s}} \in L^1(0, t).
\end{aligned}$$

$$ii) \frac{1}{h}(S(h) - I)S(t-s)g(u(s)) \rightarrow \Delta S(t-s)g(u(s))$$

em L^2 pois $S(t-s)g(u(s)) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) = D(\Delta)$.

De (i) e (ii) segue pelo teorema da convergência dominada
 $\int_0^t \frac{S(h) - I}{h} S(t-s)g(u(s))ds \rightarrow \int_0^t \Delta S(t-s)g(u(s))ds$
em $L^2(\Omega)$ quando $h \rightarrow 0$.

Fazendo $h \rightarrow 0$ em (2.4.11) temos,

$$\begin{aligned}
u'(t) &= \Delta S(t)\varphi + \int_0^t \Delta S(t-s)g(u(s))ds + g(u(t)) = \\
&= u(t) + g(u(t)).
\end{aligned}$$

logo, u é solução de

$$\begin{cases} u'(t) = \Delta u(t) + g(u(t)) \\ u(0) = \varphi \end{cases} \quad \square$$

Observação 2.4.1.2: Não é possível utilizar o teorema 1.13.10, porque, $C_0(\overline{\Omega})$ não é reflexivo

O próximo resultado estabelece a existência local do problema não-linear.

Teorema 2.4.1.3: Para toda $\varphi \in C_0(\overline{\Omega})$ existe uma única função u definida sobre um intervalo maximal $[0, T(\varphi))$ solução de

$$(2.4.10) \quad \begin{cases} u \in C([0, T], C_0(\overline{\Omega})) \cap C((0, T], H_0^1) \cap C^1((0, T], L^2); \\ \Delta u \in C((0, T], L^2(\Omega)) \\ u_t = \Delta u + g(u), \quad t \in (0, T] \\ u(0) = \varphi \end{cases}$$

Para todo $T \in (0, T(\varphi))$ e além disso, se $T(\varphi) < \infty$ então $\|u(t)\| \rightarrow \infty$ quando $t \uparrow T(\varphi)$.

Dem: Dada $\varphi \in C_0(\overline{\Omega})$, pelo teorema 1.13.5 existem $T(\varphi) > 0$ e uma única função $u \in C([0, T(\varphi)), C_0(\overline{\Omega}))$ solução de

$$u(t) = S(t)\varphi + \int_0^t S(t-s)g(u(s))ds$$

sobre $[0, T(\varphi))$ onde:

- i) $T(\varphi) = \infty$ ou
- ii) $T(\varphi) < \infty$ e $\lim_{t \uparrow T(\varphi)} \|u(t)\| = \infty$

Portanto, pela proposição anterior, u é solução do problema (2.4.12) $\square$

2.4.2 Existência Global

Existem várias condições para a existência global da equação não-linear (2.4.12). Daremos dois tipos. O primeiro tipo de resultado mostra que se g satisfaz certas condições para, $|t|$ grande então a solução de (2.4.12) é global. O segundo resultado, de natureza distinta, estabelece que se g satisfaz certas condições para $|t|$ pequeno, a solução de (2.4.12) com condição inicial “pequena” é global. Necessitaremos do seguinte resultado.

Proposição 2.4.2.1 Sejam $T > 0$ e $\varphi \in C_0(\overline{\Omega})$, $u \in C([0, T], C_0(\overline{\Omega})) \cap C((0, T), H_0^1) \cap C^1((0, T), L^2)$ com $\Delta u \in C((0, T), L^2)$ e $h \in C([0, T], C_0(\overline{\Omega}))$ tais que

$$\begin{cases} u_t &= \Delta u + h \quad \forall t \in (0, T) \\ u(0) &= \varphi \end{cases}$$

Suponha que existe uma constante C tal que

$$|h(t, x)| \leq C|u(t, x)| \text{ sobre } [0, T] \times \Omega$$

então, se $\varphi \geq 0$ temos que $u(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, T]$.

Dem: A idéia é mostrar que a parte negativa de $u(t, x)$ é nula para $(t, x) \in (0, T] \times \Omega$.

Para isto, defina $f : (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(t) = \int_{\Omega} (u^-(t, x))^2 dx$$

multiplicando $u_t = \Delta u + h$ por $-u^-$ e integrando em Ω temos,

$$\int_{\Omega} -u^-(u_t - \Delta u) = \int_{\Omega} -u^- h$$

ou seja

$$-\int_{\Omega} -u^- u_t + \int_{\Omega} u^- \Delta u = -\int_{\Omega} u^- h$$

$$\text{Como } -\int_{\Omega} u^- u_t dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u^-)^2 dx = \frac{1}{2} f'(t)$$

temos

$$\frac{1}{2} f'(t) = -\int_{\Omega} u^- \Delta u dx - \int_{\Omega} u^- h$$

Como $u(t) \in H_0^1(\Omega)$, pela regra da cadeia, $u^-(t) \in H_0^1(\Omega)$.

Aplicando a 1ª identidade de Green a última igualdade, temos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} f'(t) &= \int_{\Omega} \nabla u^- \nabla u dx - \int_{\Omega} u^- h dx = \\ &= -\int_{\Omega} |\nabla u^-|^2 - \int_{\Omega} u^- h \leq -\int_{\Omega} u^- h dx \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{2}f'(t) \leq - \int_{\Omega} u^-(t)h(t)dx$$

Assim

$$\frac{1}{2}f'(t) \leq \frac{1}{2}|f'(t)| \leq \int_{\Omega} |u^-(t)| |h(t)|dx$$

Por hipótese $|h(t, x)| \leq C|u(t, x)|$ então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f'(t) &\leq \int_{\Omega} C|u^-(t)| |u(t)|dx = \int_{\Omega} C(u^-(t))^2dx = \\ &= Cf(t) \end{aligned}$$

Logo,

$$f'(t) \leq Cf(t) \quad \forall t \in (0, T]$$

Daí, $f(t) \leq f(s) \exp(2C(t-s))$ para todo $s \in (0, t]$ mas $f(s) = \int_{\Omega} (u^-(s))^2 dx$ logo,

$$f(t) \leq \left(\int_{\Omega} (u^-(s))^2 dx \right) \exp(2C(t-s)).$$

Fazendo $s \rightarrow 0$ na última desigualdade, temos:

$$f(t) \leq \left(\int_{\Omega} (\varphi^-)^2 dx \right) \exp(2Ct)$$

Como $\varphi \geq 0$ temos $\bar{\varphi} = 0$, o que implica,

$$f(t) \leq 0 \quad \forall t \in (0, T], \text{ isto é, } \int_{\Omega} (u^-(t))^2 \leq 0$$

Portanto, $u^-(t) = 0 \quad \forall t \in (0, T] \quad \square$

Proposição 2.4.2.2 (1º resultado de existência global)

Suponha que existem constantes k e C tais que

$$sg(s) \leq Cs^2 \quad \text{para } |s| \geq k$$

então para todo $\varphi \in C_0(\overline{\Omega})$, a solução de (2.4.12) dada pelo teorema 2.4.1.3 é global.

Dem: Faremos a demonstração em duas etapas.

1ª etapa: Suponha que $\varphi \geq 0$

Seja $T < T(\varphi)$ e defina $h(t) = g(u(t))$ para $t \in [0, T]$

$$|h(t, x)| = |g(u(t, x))| = |g(u(t, x)) - g(0)| \leq k|u(t, x)|$$

para $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$.

$$\text{Então, pela proposição 2.4.2.1, } u(t) \geq 0 \text{ para } t \in [0, T] \quad (2.4.13)$$

Por hipótese, para $s > k$, $g(s) \leq cs$.

Adicionando a este fato a propriedade que $g \in C(R, R)$, e portanto, limitada sobre $[0, k]$, concluímos que existe constante C tal que

$$(2.4.11) \quad g(s) \leq C + Cs, \quad \forall s \geq 0$$

De (2.4.13) e (2.4.14) temos

$$(2.4.12) \quad g(u(t, x)) \leq C + Cu(t, x)$$

Daí,

$$(2.4.13) \quad \|g(u(t))\| \leq \|C + Cu(t, x)\| \leq C(1 + \|u(t)\|) \quad \forall t \in [0, T(\varphi))$$

Pelo teorema da existência local

$$u(t) = S(t)\varphi + \int_0^t S(t-s)g(u(s))ds \quad \forall t \in [0, T]$$

Logo,

$$\|u(t)\| \leq \|\varphi\| + \int_0^t \|g(u(s))\|ds \stackrel{(2.4.16)}{\leq} \|\varphi\| + C \int_0^t (1 + \|u(s, x)\|)ds$$

Daí,

$$(\|u(t)\| + 1) - 1 = \|\varphi\| + C \int_0^t (1 + \|u(s, x)\|)ds$$

Seja $v(t, x) = \|u(t, x)\| + 1$

Assim

$$v(t, x) \leq (\|\varphi\| + 1) + C \int_0^t v(s, x)ds.$$

Pela desigualdade de Gronwall

$$|v(t, x)| \leq (\|\varphi\| + 1) \exp(ct) \quad \forall \in [0, T(\varphi))$$

ou seja

$$\|u(t, x)\| \leq \|u(t, x)\| + 1 = v(t, x) \leq (\|\varphi\| + 1) \exp(ct) \quad \forall t \in [0, T(\varphi))$$

Logo, $T(\varphi) = \infty$.

2ª etapa: $\varphi \in C_0(\overline{\Omega})$

Seja $\psi = |\varphi|$, denote por v a solução de (2.4.12) com condição inicial $v(0) = \psi$ como $\psi \geq 0$, pela 1ª etapa, $T(\psi) = \infty$. Seja $T < \min\{T(\psi), T(\varphi)\} = T(\varphi)$. Consideremos $w(t) = v(t) - u(t), t \in [0, T]$. Logo,

$$\begin{aligned}
\text{i)} \quad & w(0) = v(0) - u(0) = |\varphi| - \varphi \geq 0 \\
\text{ii)} \quad & \frac{dw}{dt} = \frac{dv}{dt} - \frac{du}{dt} = (\Delta v + g(v)) - (\Delta u + g(u)) = \\
& = \Delta(v - u) + g(v) - g(u)
\end{aligned}$$

Denote $h = g(v) - g(u)$ e observemos

$$\begin{aligned}
|h(t, x)| &= |g(v(t, x)) - g(u(t, x))| \leq k|u(t, x) - v(t, x)| = \\
&= k|w(t, x)|
\end{aligned}$$

Então $\frac{dw}{dt} = \Delta w + h$ com $|h(t, x)| \leq k|w(t, x)|$

Então pela proposição anterior $w(t) \geq 0, t \in [0, T]$ isto é, $u(t) \leq v(t)$ para todo $t \in [0, T]$ (2.4.17)

Agora, para $z = \bar{v} + u$ onde $\bar{v}$ é a solução maximal da equação

$$\bar{v}(t) = S(t)\psi + \int_0^t S(t-s)(-g(-\bar{v}(s)))ds$$

Logo, $\bar{v}$ é a solução de $\begin{cases} \frac{d\bar{v}}{dt} = \Delta \bar{v} - g(-\bar{v}) \\ \bar{v}(0) = \psi. \end{cases}$

Seja $f(s) = -g(-s)$ e observemos que $sf(s) = -sg(-s) \leq C|-s|^2 = C|s|^2$ para $|-s| = |s| \geq k$, ou seja, $-g(-s)$ satisfaz as mesmas hipóteses de $g(s)$, o que implica que $\bar{v}$ é uma solução global (etapa 1).

Como

$$\begin{aligned}
\text{i)} \quad & \frac{dz}{dt} = \frac{d\bar{v}}{dt} + \frac{du}{dt} = (\Delta \bar{v} - g(-\bar{v})) + \Delta u + g(u) = \\
& = \Delta(\bar{v} + u) + g(u) - g(-\bar{v}) \text{ e}
\end{aligned}$$

ii) para $h(t, x) = g(u(t, x)) - g(-\bar{v}(t, x))$ vale
 $|k(t, x)| \leq k|u(t, x) + \bar{v}(t, x)| = k|z(t, x)|$

temos pela Proposição anterior que $z(t) \geq 0, t \in [0, T]$ isto é,

$$(2.4.18) \quad u(t) \geq -\bar{v}(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

De (2.4.17) e (2.4.18) segue que

$$(2.4.19) \quad \|u(t)\| \leq \max\{\|u(t)\|, \|\bar{v}(t)\|\}, \quad t \in [0, T]$$

Em consequência $T(\varphi) \geq T(\psi) = \infty$.

De fato, suponha que $T(\varphi) < T(\psi) = \infty$ visto que, $\lim_{t \uparrow T(\varphi)} \|u(t)\| = \infty$, existe $T_0 < T(\varphi)$ tal que

$$\|u(T_0)\| \geq \max\{\|v(T_0)\|, \|\bar{v}(T_0)\|\}$$

o que contradiz (2.4.19) $\square$

Observação 2.4.2.3: Pela proposição anterior, a solução é global mas não necessariamente limitada para $t > 0$. Para obtermos soluções limitadas devemos exigir mais da função g como, por exemplo, na proposição abaixo.

Proposição 2.4.2.4: Seja $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ com $g(0) = 0$, localmente lipschitziana e para $|s| \geq k$ ($k \geq 0$)

$$sg(s) \leq 0$$

então para todo $\varphi \in C_0(\bar{\Omega})$ a solução de (2.4.12) é global e para $t \geq 0$

$$\|u(t)\| \leq \max\{k, \|\varphi\|\}$$

Dem: Seja $\varphi \in C_0(\overline{\Omega})$ e $u : [0, T(\varphi)) \rightarrow C_0(\overline{\Omega})$ solução de (2.4.12). Seja $M = \max\{k, \|\varphi\|\}$. Definimos

$$(2.4.20) \quad v(t) = (u(t) - M)^+ = \begin{cases} u(t) - M & \text{se } u(t) \geq M, t \in [0, T(\varphi)) \\ 0 & \text{se } u(t) \leq M \end{cases}$$

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \leq M, \\ s - M & \text{se } s \geq M \end{cases}$

Portanto, $v(t) = f.u(t)$. Como $u(t) \in H_0^1(\Omega)$, $f(0) = 0$ e f é diferenciável exceto em $s = M$, segue pela proposição 1.2.5 que $\nabla v(t) = f'(u(t))\nabla u(t)$ para $u(t) \neq M$ e $\varphi(t) = f.u(t) \in H_0^1(\Omega)$.

Multiplicando

$$u_t = \Delta u + g(u)$$

por $v = (u - M)^+$ temos

$$(u - M)^+ u_t = (u - M)^+ \Delta u + (u - M)^+ g(u)$$

Daí,

$$(u - M)^+ \frac{d}{dt}(u - M) = (u - M)^+ \Delta(u - M) + (u - M)^+ g(u)$$

Logo,

$$(u - M)^+ \frac{d}{dt}(u - M)^+ = (u - M)^+ \Delta(u - M)^+ + (u - M)^+ g(u)$$

Integrando esta última parte igualdade em Ω temos,

$$(2.4.21) \quad \int_{\Omega} (u - M)^+ \frac{d}{dt}(u - M)^+ = \int_{\Omega} (u - M)^+ \Delta(u - M)^+ + \int_{\Omega} (u - M)^+ g(u)$$

como $v = (u - M)^+ \in H_0^1(\Omega)$, pela 1ª identidade de Green temos,

$$(2.4.22) \quad \int_{\Omega} (u - M)^+ \Delta(u - M)^+ = - \int_{\Omega} (\nabla(u - M)^+)^2$$

De (2.4.21) e do fato que $\int_{\Omega} (u - M)^+ \frac{d}{dt}(u - M)^+ = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} [(u - M)^+]^2$ segue que (2.4.20) escreve-se como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} [(u(t) - M)^+]^2 &= \int_{\Omega} (\nabla(u(t) - M)^+)^2 + \int_{\Omega} (u(t) - M)^+ g(u(t)) = \\ &- \int_{\Omega} (\nabla(u(t) - M)^+)^2 + \int_{\{x \in \Omega / u(t) \geq M\}} (u(t) - M)^+ g(u) \leq \int_{\{x \in \Omega / u(t) \geq M\}} (u(t) + M)^+ g(u) \end{aligned}$$

Para $u(t) \geq M = \max\{k, \|\varphi\|\}$ implica $u(t) \geq k$, o que por hipótese implica $g(u(t))u(t) \leq 0$. Logo, $g(u(t)) \leq 0$.

Daí,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} [(u(t) - M)^+]^2 \leq \int_{\{x \in \Omega / u(t) \geq M\}} (u(t) - M)^+ g(u(t)) \leq 0$$

Portanto, a função $h(t) = \int_{\Omega} ((u(t) - M)^+)^2, t \in [0, T(\varphi))$ é não-crescente em t . Logo, $h(t) \leq h(0) = 0$ então,

$$\int_{\Omega} [(u(t) - M)^+]^2 = 0$$

Ou seja,

$$(2.4.23) \quad u(t) \leq M$$

Análogamente, tomando $v(t) = (u(t) - M)^-$ temos que

$$(2.4.24) \quad u(t) \geq -M$$

Portanto, de (2.4.22) e (2.4.23) temos que $\|u(t)\| \leq M = \max\{k, \|\varphi\|\}$ para todo $t \in [0, T(\varphi))$, isto é, $T(\varphi) = \infty$ $\square$

A proposição a seguir é o segundo tipo de resultado que garante a existência global da solução de (2.4.12)

Proposição 2.4.2.: Seja $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), g(0) = 0$, localmente lipschitziana e para $|s| \leq \rho$ e $\varepsilon > 0$

$$|g(s)| \leq k|s|^{1+\varepsilon}$$

Existem $\delta > 0, \mu > 0$ tais que para qualquer $\varphi \in C_0(\overline{\Omega})$ com $\|\varphi\| \leq \delta$ a solução de (2.4.12) é global e

$$\|u(t)\| \leq \mu e^{\lambda_1 t}, \forall t \geq 0$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor de $-\Delta$

Dem: Seja $M = \exp\left(\frac{\lambda_1 |\Omega|^{2/N}}{4\pi}\right)$.

Defina

$$\theta(s) = \frac{Mk}{\varepsilon\lambda_1} s^{1+\varepsilon} - s \text{ para } s \geq 0$$

seja $\alpha = \min \theta(s) = \theta(s_0)$ para $s \geq 0$. Escolha $0 < \delta < \min(-\frac{\alpha}{M}, s_0)$ e seja $\phi(s) = M\delta + \theta(s)$ para $s \geq 0$.

Notemos:

i) $\phi(0) = M\delta > 0$

ii) $\phi(s_0) = M\delta + \theta(s_0) = M\delta + \alpha < M(-\frac{\alpha}{M}) + \alpha = 0$

Logo, pela continuidade de ϕ , existe $\mu \in (0, s_0)$ tal que $\phi(\mu) = 0$.

Como:

$$\text{iii) } \phi(\delta) = M\delta + \theta(\delta) = M\delta \frac{Mk}{\varepsilon\lambda_1} \delta^{1+\varepsilon} - \delta \geq M\delta - \delta = (M-1)\delta > 0 \text{ pois, } M > 1$$

e

$$\text{iv) } \delta < s_0$$

temos que $\delta < \mu$.

Visto que $\phi(s) = M\delta + \theta(s)$ implica que o primeiro zero de ϕ tende ao primeiro zero de θ quando $\delta \rightarrow 0$, isto é, $\mu \rightarrow 0$ quando $\delta \rightarrow 0$. Logo, é possível tomar δ suficientemente pequeno de modo que $\mu \leq \rho$. Pelo teorema 2.4.1.3, existe u solução de (2.4.12) definida no intervalo maximal $[0, T(\varphi))$.

Defina

$$T' = \sup\{t \in [0, T(\varphi)); e^{\lambda_1 s} \|u(s)\| \leq \mu, s \in [0, t)\}$$

Como $\|u(0)\| = \|\varphi\| \leq \delta < \mu$ e $u \in C([0, T(\varphi)); C_0(\bar{\Omega}))$ segue que $T' > 0$.

Seja $t < T'$, pela proposição 2.4.1.1

$$u(t) = S(t)\varphi + \int_0^t S(t-s)g(u(s))ds$$

é solução de (2.4.12).

Daí,

$$\|(u)\| \leq \|S(t)\varphi\| + \int_0^t \|S(t-s)g(u(s))\|ds$$

Pelo corolário 2.3.7 temos que

$$\begin{aligned}
\|u(t)\| &\leq \|Me^{-\lambda_1 t}\|\varphi\| + \int_0^t Me^{-\lambda_1(t-s)}\|g(u(s))\|ds = \\
&= e^{-\lambda_1 t}(M\|\varphi\| + \int_0^t Me^{\lambda_1 s}\|g(u(s))\|ds)
\end{aligned}$$

Logo,

$$e^{\lambda_1 t}\|u(t)\| \leq M\|\varphi\| + \int_0^t Me^{\lambda_1 s}\|g(u(s))\|ds$$

Observamos que para todo $s \in [0, t)$

$$\|u(s)\| \leq e^{\lambda_1 s}\|u(s)\| \leq \mu < \varphi$$

Logo, pela hipótese, $\|g(u(s))\| \leq k\|u(s)\|^{1+\varepsilon}$

Assim,

$$\begin{aligned}
e^{\lambda_1 t}\|u(t)\| &\leq M\|\varphi\| + Mk \int_0^t e^{\lambda_1 s}\|u(s)\|^{1+\varepsilon} ds = \\
&= M\|\varphi\| + Mk \int_0^t e^{-\lambda_1 \varepsilon s} (e^{\lambda_1 s}\|u(s)\|)^{1+\varepsilon} ds \leq \\
&\leq M\|\varphi\| + Mk \int_0^t e^{-\lambda_1 \varepsilon s} \mu^{1+\varepsilon} ds = \\
&= M\|\varphi\| + Mk\mu^{1+\varepsilon} \int_0^t e^{-\lambda_1 \varepsilon s} ds = M\|\varphi\| + \frac{Mk\mu^{1+\varepsilon}}{\lambda_1 \varepsilon} (1 - e^{-\lambda_1 \varepsilon t}) \leq \\
&\leq M\delta + \frac{Mk}{\lambda_1 \varepsilon} \mu^{1+\varepsilon} - \frac{Mk}{\lambda_1 \varepsilon} \mu^{1+\varepsilon} e^{-\lambda_1 \varepsilon t} = \\
&= M\delta + \frac{Mk}{\lambda_1 \varepsilon} \mu^{1+\varepsilon} - \mu + \mu - \frac{Mk}{\lambda_1 \varepsilon} \mu^{1+\varepsilon} e^{-\lambda_1 \varepsilon t} = \\
&= \phi(\mu) + \mu - \frac{Mk}{\lambda_1 \varepsilon} \mu^{1+\varepsilon} e^{-\lambda_1 \varepsilon t} = \mu - \frac{Mk}{\lambda_1 \varepsilon} \mu^{1+\varepsilon} e^{-\lambda_1 \varepsilon t} < \mu
\end{aligned}$$

Logo,

$$e^{\lambda_1 t}\|u(t)\| < \mu \text{ para todo } t \in [0, T')$$

Se $T' < T(\varphi)$ temos por continuidade que existe $\eta > 0$ tal que

$$e^{\lambda_1 t} \|u(t)\| < \mu \text{ para todo } t \in [0, T' + \eta)$$

O que contradiz a definição de T' , logo, $T' = T(\varphi) = +\infty$ e

$$\|u(t)\| \leq e^{-\lambda_1 t} \mu \text{ para todo } t \in [0, +\infty) \quad \square$$

2.4.3: Explosão para tempo finito (“blow-up”)

Existem vários tipos de resultados de blow-up para a equação do calor como, por exemplo, descritos em [Fujita], [Levine], [Sattinger].

Aqui apresentaremos um simples resultado fornecendo uma condição suficiente para o “blow-up” das soluções.

Proposição 2.4.3.1: Seja $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $g(0) = 0$ e localmente lipschitziana. Suponha que existem $\alpha, \beta, \varepsilon > 0$ tais que

$$g(s) \geq \alpha s^{1+\varepsilon} - \beta s \text{ para } s \geq 0$$

Seja λ_1 o primeiro autovalor de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$ e seja ϕ_1 a correspondente autofunção tal que $\phi_1 > 0$ em Ω e $\int_{\Omega} \phi_1 = 1$

Se $\varphi \in C_0(\overline{\Omega})$ satisfaz

- a) $\varphi \geq 0$ em Ω e
- b) $\int_{\Omega} \varphi \phi_1 \geq \left(\frac{\lambda_1 + \beta}{\alpha}\right)^{1/\varepsilon}.$

então a solução de

$$(2.4.24) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = \Delta u + g(u) & (1) \\ u(0) = \varphi & (2) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 & (3) \end{cases}$$

“explode” para tempo finito, isto é, $T(\varphi) < +\infty$ e $\lim_{t \uparrow T(\varphi)} \|u(t)\| = +\infty$.

Dem:

Para todo $t \in [0, T(\varphi))$, $u(t) \geq 0$ em Ω (2.4.25)

De fato, multiplicando (1) de (2.4.24) por u^- e integrando em Ω temos,

$$\int_{\Omega} u^- u_t = \int_{\Omega} u^- \Delta u + \int_{\Omega} u^- g(u)$$

Assim,

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u^-)^2 = - \int_{\Omega} |\Delta u^-|^2 + \int_{\Omega} u^- g(u^-)$$

Como g é lipschitziana e $g(0)$ temos $g(u^-(t)) \leq K u^-(t)$

Portanto,

$$(2.4.26) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u^-(t))^2 \leq K \int_{\Omega} (u^-(t))^2$$

Logo, integrando (2.4.26) em $[0, t]$ temos,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (u^-(t))^2 dx \leq \int_0^t (K \int_{\Omega} (u^-(s))^2 dx) ds = K \int_0^t (\int_{\Omega} (u^-(s))^2 dx) ds$$

pois $u(0) = \varphi \geq 0$.

Pela desigualdade de Gronwall

$$\int_{\Omega} (u^-(t))^2 dx = 0$$

Logo, $u^-(t) = 0$ para todo $t \in [0, T(\varphi))$

Defina,

$$f(t) = \int_{\Omega} u(t) \phi_1 dx \quad \text{para } t \in [0, T(\varphi))$$

Por (2.4.25) e pela hipótese que $\phi_1 > 0$ em Ω temos que $f(t) > 0$ para todo $t \in [0, T(\varphi))$. Por um cálculo fácil,

$$f'(t) = -\lambda_1 f(t) + \int_{\Omega} g(u(t)) \phi_1 dx \geq -(\lambda_1 + \beta) f(t) + \alpha \int_{\Omega} u(t)^{1+\epsilon} \phi_1$$

Pela desigualdade de Hölder

$$(2.4.27) \quad f'(t) \geq f(t)[-(\lambda_1 + \beta) + \alpha f^\epsilon(t)], \quad \forall t \in [0, T(\varphi))$$

seja $T = \sup\{t \in [0, T(\varphi)); f'(s) > 0 \text{ para } s \in [0, t)\}$

$$\begin{aligned} \text{Como } f'(0) &\stackrel{(2.4.27)}{\leq} f(0)[-(\lambda_1 + \beta) + \alpha f^\epsilon(0)] = \\ &= \left(\int_{\Omega} \varphi \phi_1\right)[-(\lambda_1 + \beta) + \alpha \left(\int_{\Omega} \varphi \phi_1\right)^\epsilon] > \\ &> \left(\frac{\lambda_1 + \beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\epsilon}} [-(\lambda_1 + \beta) + \alpha \left(\frac{\lambda_1 + \beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\epsilon}}]^\epsilon = 0 \end{aligned}$$

implica que $T > 0$.

Se $T < T(\varphi)$ temos que $f(0) < f(T)$ visto que $f'(t) > 0$ para todo $t \in [0, T(\varphi))$.

Assim,

$$f(t) > f(0) = \int_{\Omega} \varphi \phi_1 > \left(\frac{\lambda_1 + \beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\epsilon}}$$

Logo,

$$f^\epsilon(T) > \frac{\lambda_1 + \beta}{\alpha}$$

O que implica

$$-(\lambda_1 + \beta) + \alpha f^\epsilon(T) > 0$$

Então por (2.4.27), $f'(T) > 0$. Pela continuidade de f' existe $\eta > 0$ tal que $f'(t) > 0$ para todo $t \in [0, T + \eta)$, o que contradiz a definição de T , logo, $T = T(\varphi)$ e, portanto, $f'(t) > 0$ para todo $t \in [0, T(\varphi))$.

Seja $\delta > 0$ tal que $(\alpha - \delta)f(0)^\epsilon = \lambda_1 + \beta$. Isto é possível pois $f(0) > (\frac{\lambda_1 + \beta}{\alpha})^{\frac{1}{\epsilon}}$ por hipótese.

Por (2.4.27) temos

$$\begin{aligned} f'(t) &\geq f(t)[-(\lambda_1 + \beta) + \alpha f^\epsilon(t)] = f(t)[-(\lambda_1 + \beta) + (\alpha - \delta)f^\epsilon(t) + \\ &\quad + \delta f^\epsilon(t)] \end{aligned}$$

Daí,

$$(2.4.28) \quad f'(t) \geq \delta f^{1+\epsilon}(t) + f(t)[-(\lambda_1 + \beta) + (\alpha - \delta)f^\epsilon(t)]$$

Como $f'(t) > 0$ para todo $t \in [0, T(\varphi))$ temos que f é crescente e, portanto $f(0) < f(t)$ para todo $t \in [0, T(\varphi))$. Logo por (2.4.28) e $f(t) > 0$ para $t \in [0, T(\varphi))$ temos:

$$\begin{aligned} f'(t) &> \delta f^{1+\epsilon}(t) + f(t)[-(\lambda_1 + \beta) + (\alpha - \delta)f^\epsilon(0)] = \\ &= \delta f^{1+\epsilon}(t) \end{aligned}$$

Assim

$$\frac{f'(t)}{f^{1+\epsilon}(t)} > \delta$$

Logo,

$$(2.4.29) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{-1}{\epsilon} f(t)^{-\epsilon} \right) > \frac{d}{dt} (\delta t)$$

integrando (2.4.29) em $[0, t]$, $t \in [0, T(\varphi))$ temos

$$-\frac{1}{\epsilon} f^{-\epsilon}(t) + \frac{1}{\epsilon} f^{-\epsilon}(0) > \delta t$$

Logo,

$$\frac{1}{\epsilon} f^{-\epsilon}(t) < \frac{1}{\epsilon} f^{-\epsilon}(0) - \delta t$$

Daí,

$$\frac{1}{\varepsilon}f^{-\varepsilon} + \delta t < \frac{1}{\varepsilon}f^{-\varepsilon}(0) , \forall t \in [0, T(\varphi))$$

Então,

$$\delta t < \frac{1}{\varepsilon}f^{-\varepsilon}(0) , \forall t \in [0, T(\varphi))$$

Assim, $T(\varphi) < +\infty$. $\square$

Bibliografia

- [Brezis] BREZIS, H. *Analyse Functionnelle. Théorie et applications*. Masson, Paris, 1983.
- [Cazenave] CAZENAVE, T. *Nonlinear evolution equation*. Notes, 1987.
- [Friedman] FRIEDMAN, A. *Partial differential equations*. Holt. Reinhart and Winston, 1969.
- [Fujita] FUJITA, H. *On the blowing-up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{\alpha+1}$* . J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 13: 109-124, 1966.
- [Giglioli] GIGLIOLI, A. *Equações diferenciais parciais elípticas*. 10^o Colóquio Bras. de Matemática, Poços de Caldas, Impa, 1975.
- [Gilbarg e Trudinger] GILBARG, D. & TRUDINGER, N.S. *Elliptic partial differential equations of the second order*. Springer Verlag, Berlim, 1983.
- [Goldstein] GOLDSTEIN, J.A. *Semigroups of linear operator and applications*. Oxford mathematical monographs, New York, 1985.
- [Kato] KATO, T. *Perturbation theory for linear operators*. Springer Verlag, New

- [Pazi] PAZI, A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [Royden] ROYDEN, H.L. Real analysis (second edition). The Macmillan Company, Loindon, 1963.
- [Sattinger] PAINE L, SATTINGER, D. *Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations*. Israel J. Math., 22 (1975), 273-303.
- [Taylor] TAYLOR, A.E. & LAY, D.C. Introduction to functional analysis. John Wiley & Sons, New York, 1980.