o Cat.


UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA


# TOPOLOGIAS $\mathfrak{m}$-ÁDICAS E ANÉIS DE SÉRIES DE POTÊNCIAS


AUTORA: ROSANE TOMI MONROY USHIROBIRA

ORIENTADOR: PROF. DR. PAULO ROBERTO BRUMATTI

CO-ORIENTADOR: PROF. DR. TENKASI M. VISWANATHAN


Tese apresentada ao Departamento de Matemática como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

06 - JULHO - 1990

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pela Srta. Rosane Tomi Monroy Ushirobira e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 01 de agosto de 1990.

Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti

**Aos meus pais**

*Francisco e Márcia*

## AGRADECIMENTOS

- a *Deus*.
- ao *Paulo*, pela orientação paciente e amiga.
- ao *Visú*, pela sugestão do assunto.
- ao *Paques*, à *Otília* e ao *Raymundo*, pela amizade.
- à *Unicamp* e ao *CNPq*, pelo suporte financeiro.
- aos amigos *Concha* e *Paulo* e aos colegas da *Pós*, especialmente à *Jéssica*, ao *Sérgio*, ao *Kenedy*, à *Emília* e ao *Gustavo*, pelo importante companheirismo.
- aos meus irmãos: *Carlucci*, *André* e *Stella* e aos meus avós: *Regasten* e *Irlanda*, pela força de sempre.
- ao *Mitcho*, pelo carinho e valioso apoio em todos os momentos.

# ÍNDICE

# INTRODUÇÃO

O anel das séries de potências formais é uma ferramenta muito útil em vários ramos da Matemática, como por exemplo na Geometria Algébrica. Por isso, ele tem sido objeto de estudo de vários pesquisadores que o analisam sob diversos aspectos. Para citarmos um desses interessados no anel das séries de potências, temos R. Gilmer que de uma forma geral procurou relacionar a estrutura de um anel com a estrutura de seu respectivo anel de séries de potências.

Assim, sabendo da importância indubitável do anel das séries de potências formais, ficamos muito motivados a estudá-lo, atacando-o particularmente de duas maneiras.

Uma dessas maneiras consiste em verificar qual a relação entre o completamento de um anel com respeito a um ideal finitamente gerado e o anel das séries de potências. Tratamos desse interessante ponto no Capítulo I, baseando-nos num artigo de Arezzo [A-R]. Vemos que de fato sob certas condições, existe o isomorfismo

$$(\hat{A}, a) \cong \frac{A[[X_1, \dots, X_n]]}{(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)} \qquad (*)$$

onde $A$ é um anel $\mathfrak{a}$-ádico separado, $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ é um ideal de $A$, $(\hat{A}, \mathfrak{a})$ é o completamento de $A$ com respeito à $\mathfrak{a}$ e $X_1, \ldots, X_n$ são indeterminadas sobre $A$. Também nesse capítulo, estudamos se esse isomorfismo existe se variamos as condições, isto é, se $(*)$ continua valendo se colocamos $\mathfrak{a}$ principal ou $A$ Noetheriano.

No Capítulo II, dedicamos nossa atenção ao outro ponto que nos interessa e que deriva-se da seguinte questão: sabemos que se $D$ é um domínio e $K$ seu corpo de frações, então o corpo quociente de $D[X]$ coincide com o corpo quociente de $K[X]$. Portanto, é muito natural perguntar se o corpo quociente de $D[[X]]$ é igual ao corpo quociente de $K[[X]]$. A resposta nesse caso é negativa. Demonstramos com base no bonito artigo de Sheldom [S], que de fato, se algumas condições colocadas por Gilmer [G2] não estão satisfeitas, então na verdade, o grau de transcendência do corpo quociente de $K[[X]]$ sobre o corpo quociente de $D[[X]]$ é infinito. Expomos também nesse capítulo as relações entre os corpos quocientes de $D[[X]]$ e de $J[[X]]$, onde $J$ é um sobreanel de $D$, para obtermos novas caracterizações de domínios completa e integralmente fechados e de domínios de Prüfer de dimensão de Krull 1.

# CAPÍTULO I

## COMPLETAMENTO DE UM ANEL E SÉRIES DE POTÊNCIAS FORMAIS

### I. 1. Introdução

Neste capítulo, estudamos um isomorfismo que fornece uma relação entre o anel das séries de potências formais e o completamento de um anel com respeito a um ideal finitamente gerado.

O isomorfismo que nos interessa é:

$$(A\hat{;}\mathfrak{a}) \cong \frac{A[[X_1, \ldots, X_n]]}{(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)} \qquad (*)$$

onde $A$ é um anel $\mathfrak{a}$-ádico separado, $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ é um ideal de $A$, $(\hat{A}, \mathfrak{a})$ é o completamento de $A$ com respeito à $\mathfrak{a}$ e $X_1, \ldots, X_n$ são indeterminadas sobre $A$.

Inicialmente, no item (I.2), damos a definição do anel das séries de potências formais. Também definimos grupos e anéis topológicos, vemos o conceito de completamento e enunciamos algumas proposições que são necessárias no decorrer do capítulo.

Alguns resultados sobre a topologia gerada por um ideal, como propriedades do anel que se obtém completando um anel sucessivamente por dois de seus ideais, estão expostos em (I.3).

Certos completamentos separados de um anel de polinômios, como o anel das séries de potências, são considerados no item (I.4).

No item (I.5) é que começamos a estudar o isomorfismo (*), primeiro de uma forma mais geral e depois para anéis Noetherianos.

Em (I.6), vemos que não é possível estender o resultado que temos para anéis Noetherianos no item anterior, mediante a construção de um contra-exemplo.

Estudamos o isomorfismo (*) para ideais principais no item (I.7).

Por final, em (I.8), verificamos sob certas hipóteses, a existência do isomorfismo (*) para anéis não Noetherianos e ideais não principais.

Neste capítulo, todos os anéis são considerados comutativos e com unidade.

O sinal (*) é usado sempre para nos aludir àquele isomorfismo do início da introdução.

## I. 2. Completamentos

### I. 2. 1. O anel das séries de potências formais

Introduzimos aqui o conceito de anel das séries de potências formais e algumas de suas propriedades.

Definição 2.1. Seja $A$ um anel.

Sejam $X_1, \dots, X_n$ indeterminadas sobre $A$.

Seja $F_r$ o $A$-módulo das formas homogêneas de grau $r$ em $X_i$ com coeficientes em $A$, $\forall\, r = 0, 1, 2, \dots$ .

O anel das séries de potências formais (ou anel das séries de potências) é o conjunto das somas infinitas $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ com $f_i \in F_i$.

As operações do anel estão definidas por:

$$\left( \sum_{i=0}^{\infty} f_i \right) + \left( \sum_{i=0}^{\infty} g_i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} (f_i + g_i)$$

$$\left( \sum_{i=0}^{\infty} f_i \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} g_i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \sum_{j+k=i} f_j\, g_k \right)$$

Denotamos o anel das séries de potências por $A[[X_1, \dots, X_n]]$.

Definição 2.2. Seja $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \in A[[X_1, \dots, X_n]]$.

Definimos:

(i) a <u>ordem</u> de $f$ é $m \in \mathbb{N}$ se $f_i = 0$, $\forall\ i < m$ e $f_m \neq 0$. Escrevemos a ordem de $f$ como $\phi(f)$.

(ii) se $\phi(f) = m$, a <u>forma inicial</u> de $f$ é $f_m$.

(iii) o <u>termo constante</u> de $f$ é $f_0$.

<u>Observação 2.3.</u>: O anel de polinômios $A[X_1, \ldots, X_n]$ é um subanel de $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ mediante a identificação de $\sum_{i=0}^{r} f_i \in A[X_1, \ldots, X_n]$ com $\sum_{i=0}^{\infty} f_i \in A[[X_1, \ldots, X_n]]$ tal que $f_i = 0$ para $i > r$.

A seguinte proposição não é difícil de ser demonstrada, por isso apenas a enunciamos.

Recordamos que o radical de Jacobson de um anel $A$ é a interseção de todos os ideais maximais de $A$. Denotamos por $\mathcal{U}(A)$ e $\mathcal{J}(A)$ *resp.* o conjunto das unidades e o radical de Jacobson de um anel $A$ qualquer.

<u>Proposição 2.4.</u> Seja $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \in A[[X_1, \ldots, X_n]]$.
<u>Então</u> temos:

(i) $f \in \mathcal{U}(A[[X_1, \ldots, X_n]])$ se, e só se, $f_0 \in \mathcal{U}(A)$.

(ii) $f \in \mathcal{J}(A[[X_1, \ldots, X_n]])$ se, e só se, $f_0 \in \mathcal{J}(A)$.

Existe para o anel das séries de potências um resultado equivalente ao Teorema da Base de Hilbert para o anel de polinômios. Assim temos o Teorema 2.6.

Definição 2.5. Um anel $A$ é Noetheriano se satisfaz a uma das seguintes condições equivalentes:

( $a$ ) Todo conjunto não vazio de ideais de $A$ possui um elemento maximal (com respeito à inclusão).

( $b$ ) Toda cadeia crescente de ideais em $A$ é estacionária, i.é., se $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \subseteq I_n \subseteq \ldots$, $\exists\, n$ tal que $I_n = I_{n+1} = \ldots$ .

( $c$ ) Todo ideal de $A$ é finitamente gerado.

Teorema 2.6.

Se $A$ é Noetheriano, então $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ é Noetheriano.

Demonstração: Ver ([N], Teorema 15.3, pág. 50). ∎

Para mais informações sobre o anel das séries de potências, indicamos consultar [B] e [BR].

### I. 2. 2. Anéis $\mathfrak{m}$-ádicos

Definimos grupos, anéis e módulos topológicos nesta parte. Estudamos a topologia $\mathfrak{m}$-ádica e introduzimos os conceitos de filtrações e anéis graduados. Vemos ainda o Lema de Artin-Rees e como uma aplicação deste, o Teorema de Interseção de Krull. É definido ainda um anel de Zariski.

Definição 2.7. Seja $(G,+)$ um grupo abeliano aditivo com uma

Dizemos que $G$ é um <u>grupo topológico</u> se as aplicações

$$\begin{array}{llcl} \alpha : G \times G \longrightarrow G & \text{e} & \beta : G \longrightarrow G & \text{são contínuas.} \\ (x, y) \mapsto x + y & & x \mapsto -x & \end{array}$$

$$\left[\text{Equivalentemente, se } \gamma : \begin{array}{l} G \times G \longrightarrow G \\ (x, y) \mapsto x - y \end{array} \text{ é contínua}\right].$$

<u>Observações 2.8.</u>

*(a)* A topologia de um grupo topológico $G$ é determinada pelas vizinhanças do zero em $G$, pois:

Seja $a \in G$ e seja $t_a : G \longrightarrow G$ a translação definida por $t_a(x) = x + a$, $\forall\, x \in G$. Temos que $t_a$ é claramente contínua e sua inversa $t_{-a}$ também é contínua. Como $t_a$ é bijetora, então temos um homeomorfismo $t_a$ de $G$ em $G$. Logo, se $U$ é uma vizinhança do zero em $G$, então $a + U$ é uma vizinhança de $a$ em $G$. Também, qualquer vizinhança de $a$ pode ser escrita nessa forma. Assim, temos a correspondência

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Vizinhanças do zero}\} & \longleftrightarrow & \{\text{Vizinhanças de } a\} \\ U & \longleftrightarrow & a + U \end{array}$$

*(b)* $U$ é vizinhança do zero se, e só se, $-U$ também o é.

Seguem as conseqüências da definição de grupo topológico:

<u>Lema 2.9.</u> Seja $G$ um grupo topológico.
Se $\{0\}$ é fechado, <u>então</u> $G$ é Hausdorff.

Demonstração:

Basta observar que se $\{0\}$ é fechado, então $\gamma^{-1}(\{0\})$ é fechado. Mas $\gamma^{-1}(\{0\}) = \Delta_G$, onde $\Delta_G = \{(x, y) \in G \times G : x = y\}$ é a diagonal de $G$. Daí, como a diagonal é fechada em $G \times G$, segue que $G$ é Hausdorff. ∎

Lema 2.10. Seja $G$ um grupo topológico.
Seja $H < G$, i.é., $H$ um subgrupo de $G$.
Se $H$ é aberto, então $H$ é fechado.

Demonstração:

Como $H$ é aberto, então $x + H$ é aberto, $\forall\ x \in G$. Logo, $G \setminus H = \bigcup_{x \notin H} x + H$ é aberto. ∎

Lema 2.11. Seja $G$ um grupo topológico.
Seja $H = \bigcap_{V \in \Sigma} V$, onde $\Sigma = \{$*Vizinhanças do zero*$\}$.
Então:

(i) $H = \overline{\{0\}}$, onde $\overline{\{0\}}$ é o fecho de $\{0\}$ em $G$.

(ii) $H < G$.

(iii) $G/H$ (com a topologia induzida pela projeção) é Hausdorff.

(iv) $G$ é Hausdorff $\leftrightarrow H = \{0\}$.

Demonstração:

(i) $x \in H \leftrightarrow 0 = x - x \in x - V,\ \forall\ V \in \Sigma \leftrightarrow x \in \overline{\{0\}}$.

(ii) Segue trivialmente das operações de grupo, $\alpha$ e $\beta$.

(iii) De (i), segue que $H$ é fechado, assim $x + H$ é fechado, $\forall\, x \in G$. Logo $\{\bar{0}\}$ é fechado, onde $\bar{0}$ é o zero de $G/H$. Do lema 2.9, obtemos $G/H$ Hausdorff.

(iv) ( $\Rightarrow$ ) Se $G$ é Hausdorff, todos os pontos são fechados, o que implica $H = \{0\}$.

( $\Leftarrow$ ) Se $H = \{0\}$, então $G \cong G/H$ é Hausdorff. ∎

Estendemos a definição de grupos topológicos para anéis:

<u>Definição 2.12</u>. Dizemos que um anel $A$ é um <u>anel topológico</u>, se $A$ é um grupo topológico com respeito à adição e se a multiplicação

$$\begin{array}{rcl} \delta : A \times A & \longrightarrow & A \\ (x, y) & \mapsto & xy \end{array} \qquad \text{é contínua.}$$

Vamos agora conhecer a definição de uma topologia $\mathfrak{m}$-ádica.

<u>Definição 2.13</u>. Sejam $A$ um anel e $\mathfrak{m}$ um ideal de $A$.

Consideremos em $A$, a topologia definida pela base de vizinhanças do zero, constituída por todas as potências $\mathfrak{m}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Temos que $A$ é um anel topológico.

Chamamos essa topologia de <u>topologia $\mathfrak{m}$-ádica</u> ou <u>$\mathfrak{m}$-topologia</u>. Dizemos que $A$ é um <u>anel $\mathfrak{m}$-ádico</u> ou um <u>$\mathfrak{m}$-anel</u>.

Denotamos $(A,\mathfrak{m})$ quando queremos enfatizar que $A$ está munido da $\mathfrak{m}$-topologia.

<u>Nota:</u> Na topologia $\mathfrak{m}$-ádica, ocorre que $A$ é Hausdorff ou

Usamos as expressões $\mathfrak{m}$-separado, $\mathfrak{m}$-fechado, etc., ao invés de separado com respeito à $\mathfrak{m}$-topologia, fechado com respeito à $\mathfrak{m}$-topologia, etc.

Lembramos que se $A$ é um anel e $\mathfrak{m}$ é um ideal de $A$, o radical de $\mathfrak{m}$ é igual a $\sqrt{\mathfrak{m}} = \{x \in A : x^n \in \mathfrak{m}$ para algum $n \in \mathbb{N}\}$. Equivalentemente, $\sqrt{\mathfrak{m}} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \\ \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{p}}} \mathfrak{p}$, onde Spec$(A)$=⟨*ideais primos de A*⟩.

<u>Observação 2.14</u>. Dados $A$ um anel, $\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{m}'$ dois ideais de $A$. As topologias $\mathfrak{m}$-ádica e $\mathfrak{m}'$-ádica de $A$ podem coincidir, mesmo que $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}'$.

Por exemplo, tomemos $A$ um anel Noetheriano e $\mathfrak{m}$ um ideal de $A$ tal que $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}' = \sqrt{\mathfrak{m}}$. Então as topologias $\mathfrak{m}$-ádica e $\mathfrak{m}'$-ádica coincidem, pois como $A$ é Noetheriano, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{m}'^n \subseteq \mathfrak{m}$ ([A-M], Proposição 7.14, pág. 83). Assim, dado $\mathfrak{m}^m$, temos $\mathfrak{m}'^{mn} \subseteq \mathfrak{m}^m$. Reciprocamente, dado $\mathfrak{m}'^p$, é claro que $\mathfrak{m}^p \subseteq \mathfrak{m}'^p$.

Prova-se facilmente também, que se $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ são ideais de $A$ tais que as topologias $\mathfrak{a}$-ádica e $\mathfrak{b}$-ádica coincidem, então $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b}}$. Se $A$ é Noetheriano, vale a volta.

<u>Definição 2.15</u>. Sejam $A$ um anel topológico e $E$ um grupo topológico tal que $E$ é um $A$-módulo.

Dizemos que $E$ é um <u>módulo topológico</u> se a aplicação

$$\begin{aligned} \lambda : A \times E &\longrightarrow E \\ (a, x) &\mapsto ax \end{aligned} \qquad \text{é contínua.}$$

$\mathfrak{m}^n E$ ($\forall\, n \in \mathbb{N}$) de $E$ como base de vizinhanças do zero.

A seguir, um teorema que é muito usado durante o capítulo. Sua prova está em ([N], Teorema 16.3, pág.51).

Teorema 2.16.

Sejam $E$ um $A$-módulo topológico e $F$ um submódulo de $E$.

O fecho $F^*$ de $F$ em $E$ com respeito a $\mathfrak{m}$-topologia coincide com $\bigcap_{n=0}^{\infty} (F + \mathfrak{m}^n E)$.

Definição 2.17. Seja $E$ um $A$-módulo.

Uma cadeia $E = E_0 \geq E_1 \geq \ldots \geq E_n \geq \ldots$ onde os $E_n$ são submódulos de $E$ é chamada uma filtração de $E$. Vamos nos referir a $E$ como um $A$-módulo filtrado, com $(E_n)$ sua filtração. Se $E$ for igual a $A$, então chamamos $A$ de anel filtrado.

Dada uma filtração de $E$, podemos definir uma topologia natural em $E$, tomando $(E_n)$ como base de vizinhanças do zero.

Definição 2.18. Sejam $E$ um $A$-módulo filtrado, $(E_n)$ sua filtração e $\mathfrak{m}$ um ideal de $A$. Dizemos que $(E_n)$ é uma $\mathfrak{m}$-filtração se $\mathfrak{m}E_n \subset E_{n+1}$, $\forall\, n \geq 0$ ou equivalentemente, $\mathfrak{m}^i E_n \subset E_{n+i}$, $\forall\, n,\ i \geq 0$.

Logo, a $\mathfrak{m}$-topologia de $E$ é mais fina do que a topologia definida por qualquer $\mathfrak{m}$-filtração de $E$.

Definição 2.19. Dizemos que uma $\mathfrak{m}$-filtração $(E_n)$ é estável se satisfeita:

(i) $E_{n+1} = \mathfrak{m}E_n$ , $\forall\ n > k$;

(ii) $E_n = \mathfrak{m}^{n-k}\ E_k$ , $\forall\ n > k$;

(iii) $E_{n+q} = \mathfrak{m}^q E_n$ , $\forall\ n > k$, $q \geq 0$.

Observação 2.20. É fácil ver que a filtração $(\mathfrak{m}^n E)$ que define a $\mathfrak{m}$-topologia em $E$ é uma $\mathfrak{m}$-filtração estável. Reciprocamente, em ([A-M], Lema 10.6, pág. 106) mostra-se que qualquer $\mathfrak{m}$-filtração estável de $E$ determina a $\mathfrak{m}$-topologia.

Vamos introduzir o conceito de anel graduado.

Definição 2.21. Sejam $A$ um anel e $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma família de subgrupos do grupo aditivo de $A$.

Dizemos que $A$ é um anel graduado se:

(i) $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$ e

(ii) $A_m A_n \subseteq A_{m+n}$ , $\forall\ m,\ n \geq 0$.

Os elementos de $A_n$ são chamados elementos homogêneos de grau $n$.

Um elemento $a \in A$ pode ser escrito de forma única como:

$$a = a_0 + a_1 + \dots + a_n + \dots$$

com $a_n \in A_n$ e somente um número finito de $a_n$'s não nulos. Cada $a_n$ é chamado de componente homogênea de $A$.

<u>Exemplo canônico:</u> Se $A = \mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]]$, temos $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ com $A_n = \{0\} \cup \{\textit{polinômios homogêneos de grau } n\}$.

<u>Definição 2.22.</u> Sejam $A$ um anel graduado e $\mathfrak{a}$ um ideal de $A$.

Dizemos que $\mathfrak{a}$ é um <u>ideal homogêneo</u> se, sempre que $a \in \mathfrak{a}$, todas as suas componentes homogêneas pertencem a $\mathfrak{a}$ também. Equivalentemente, $\mathfrak{a}$ é homogêneo se pode ser gerado por elementos homogêneos.

A prova do teorema seguinte está em ([B], Teorema 1, pág.196). Ele é usado na prova do Lema de Artin-Rees.

<u>Teorema 2.23.</u>

Sejam $A$ um anel, $\mathfrak{m}$ um ideal de $A$, $E$ um $A$-módulo, $(E_n)$ uma $\mathfrak{m}$-filtração de $E$ tal que $E_n$ é um submódulo finitamente gerado de $E$.

Consideremos $A' = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}^n$ e $E' = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} E_n$.

<u>Então</u> são equivalentes:

(*a*) A filtração $(E_n)$ é $\mathfrak{m}$-estável.

(*b*) $E'$ é um $A'$-módulo finitamente gerado.

O Lema de Artin-Rees tem uma importância considerável para a seqüência deste capítulo, onde demonstraremos vários resultados utilizando-o.

<u>Teorema 2.24.</u> (<u>*Lema de Artin-Rees*</u>)

Sejam $A$ um anel Noetheriano, $\mathfrak{m}$ um ideal de $A$, $E$ um $A$-módulo submódulo de $E$. Então:

(i) $(E_n \cap F)$ é uma $\mathfrak{m}$-filtração estável de $F$.

(ii) $\exists\ k \in \mathbb{N}$ tal que $(\mathfrak{m}^n E) \cap F = \mathfrak{m}^{n-k}((\mathfrak{m}^k E) \cap F)$, $\forall\ n \geq k$.

(iii) as filtrações $(\mathfrak{m}^n F)$ e $((\mathfrak{m}^n E) \cap F)$ possuem diferenças limitadas, i.é., $\exists\ k$ tal que $((\mathfrak{m}^{n+k} E) \cap F) \subseteq \mathfrak{m}^n F$ e $\mathfrak{m}^{n+k} F \subseteq ((\mathfrak{m}^n E) \cap F)$, $\forall\ n \geq 0$. Em particular, a $\mathfrak{m}$-topologia de $F$ coincide com a topologia induzida pela $\mathfrak{m}$-topologia de $E$.

Demonstração:

(i) Temos que $(E_n \cap F)$ é uma $\mathfrak{m}$-filtração de $F$, pois:

$$\mathfrak{m}(E_n \cap F) \subseteq (\mathfrak{m}E_n) \cap (\mathfrak{m}\ F) \subseteq E_{n+1} \cap \mathfrak{m}F \subseteq E_{n+1} \cap F$$

Ainda, temos definido um $A'$- submódulo graduado $F' = \bigoplus_{n\geq 0} E_n \cap F$ de $E' = \bigoplus_{n\geq 0} E_n$.

Por $A$ ser Noetheriano, temos que $F$ e $E_n \cap F$ são $A$-módulos finitamente gerados. Também como $A'$ é Noetheriano, segue que $F'$ é um $A'$-módulo finitamente gerado.

Portanto pelo teorema 2.23, a filtração $(E_n \cap F)$ é $\mathfrak{m}$-estável.

(ii) Trivial pela definição 2.19.

(iii) Use (ii) e a observação 2.20. ∎

O item (ii) é que é geralmente conhecido como o Lema de Artin-Rees. O item (iii) é uma versão topológica mais fraca do resultado, mas é a versão que realmente usaremos.

Lembramos que um anel $A$ é um anel local (*resp.* anel semi-local) se possui somente um ideal maximal (*resp.* um número finito de ideais maximais).

Teorema 2.25. (*Teorema da Interseção de Krull*)

Sejam $A$ um anel Noetheriano, $\mathfrak{m}$ um ideal de $A$, $E$ um $A$-módulo finitamente gerado e $F = \bigcap_n \mathfrak{m}^n E$. Então

$$x \in F \Leftrightarrow \exists\, m \in \mathfrak{m} \text{ t.q. } (1-m)x = 0$$

Demonstração: Ver ([G-S], Teorema 1.5, pág.5). ∎

Corolário 2.26. Sejam $A$ um anel Noetheriano e $\mathfrak{m}$ um ideal próprio de $A$. Se uma das condições é satisfeita:

( $a$ ) $A$ é domínio;

( $b$ ) $A$ é local;

( $c$ ) $\mathfrak{m} \subset \mathcal{J}(A)$;

então $\bigcap_n \mathfrak{m}^n = (0)$.

Por fim, a definição de anel de Zariski, que é mencionada durante o capítulo.

Definição 2.27. Seja $A$ um anel topológico Noetheriano e $\mathfrak{m}$ um ideal de $A$.

Dizemos que $A$ é um anel de Zariski se é um $\mathfrak{m}$-anel satisfazendo a alguma das condições equivalentes:

($i$) $\mathfrak{m} \subset \mathcal{J}(A)$.

$(ii)$ Todo $A$-módulo finitamente gerado é $\mathfrak{m}$-Hausdorff.

$(iii)$ Todo ideal maximal de $A$ é $\mathfrak{m}$-fechado.

$(iv)$ Todo submódulo de um $A$-módulo finitamente gerado $E$ é $\mathfrak{m}$-fechado na topologia de $E$.

Exemplo 2.28. Se $A$ é Noetheriano e $\mathfrak{m}$-completo, então $(A,\mathfrak{m})$ é um anel de Zariski (ver [G-S], Corolário 2.18., pág. 14).

## I. 2. 3. Completamentos

Neste item, definimos um anel completo e associamos a um anel filtrado qualquer, um anel completo e separado que é chamado completamento. Fazemos isso através do conceito de seqüências de Cauchy como também pela definição de limite inverso. Para finalizar, são mostrados dois exemplos de completamentos muito interessantes.

Todos os resultados que vamos ver são para anéis, pois são com esses que trabalhamos. Geralmente, como em ([A-M], Cap. 10) e ([G-S], Cap. 2), é feito tudo antes para grupos e depois estendido para anéis.

Primeiramente, vemos a definição de uma pseudométrica num anel filtrado.

Definição 2.29. Seja $A$ um anel filtrado com $(A_n)$ sua filtração.

Consideremos a aplicação

$$d : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto d(x, y) = e^{-\mu(x-y)}$$

onde $\mu : A \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ é definida por $\mu(x) = \sup\{n \in \mathbb{N} : x \in A_n\}$.

Então $d$ define uma pseudométrica em $A$.

Propriedades:

( $a$ ) $\mu(x) = \infty \iff x \in \bigcap_n A_n \overset{\text{Lema 2.11}}{\iff} x \in \overline{\{0\}}$.

( $b$ ) $d$ é métrica $\iff \bigcap_n A_n = \{0\} \overset{\text{Lema 2.11}}{\iff} A$ é Hausdorff.

Logo a pseudométrica $d$ induz uma métrica em $A/\bigcap_n A_n$.

( $c$ ) A pseudométrica $d$ define em $A$ a mesma topologia que é induzida pela filtração $(A_n)$.

Vamos ver a seguir a definição de seqüências de Cauchy que mais adiante é utilizada para definir um completamento.

Definição 2.30. Seja $A$ um anel filtrado com $(A_n)$ sua filtração.

Definimos:

(i) Uma seqüência $(x_n)$ em $A$ é convergente se existe $x \in A$ tal que $\lim d(x, x_n) = 0$.

Equivalentemente, se dado $p \in \mathbb{N}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n - x \in A_p$, $\forall\, n \geq n_0$.

(ii) Uma seqüência $(x_n)$ em $A$ é uma seqüência de Cauchy se $\lim d(x_n, x_m) = 0$.

Equivalentemente, se dado $p \in \mathbb{N}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$_n \quad _m \in A_p$, $\forall\ n, m \geq n_0$.

Observação: É claro que uma seqüência convergente é uma seqüência de Cauchy. A recíproca nem sempre vale. Isso nos leva à definição abaixo.

Definição 2.31. Seja $A$ um anel filtrado.

Dizemos que $A$ é completo se toda seqüência de Cauchy é convergente.

Na proposição seguinte, associamos a um anel filtrado um anel completo e separado.

Definição 2.32. Sejam $A$ e $A'$ anéis topológicos.

Um homomorfismo de anéis contínuo $f : A \longrightarrow A'$ é estrito se a topologia quociente de $f(A)$ coincide com a topologia induzida por $A'$.

Proposição 2.33. Sejam $A$ um anel filtrado, $(A_n)$ sua filtração, $A'$ um anel filtrado completo e separado e $f : A \longrightarrow A'$ um homomorfismo contínuo.

Então são equivalentes:

(i) $\ker f = \bigcap A_n$, $f$ é estrito e $\overline{f(A)} = A'$ (i.é., $f(A)$ é denso em $A'$).

(ii) Para qualquer anel filtrado completo e separado $B$ e qualquer homomorfismo contínuo $g : A \longrightarrow B$, existe um único homomorfismo contínuo $g' : A' \longrightarrow B$ tal que $g' \circ f = g$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \\ A' \arrow[ur, dashed, "g'"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Demonstração</u>: Ver ([G-S], Proposição 2.3, pág. 8). ∎

Assim temos a

<u>Definição 2.34</u>. Seja $A$ um anel filtrado.

Um <u>completamento</u> de $A$ é um par $(A', f)$ onde $A'$ é um anel filtrado completo e separado e $f : A \longrightarrow A'$ é um homomorfismo contínuo satisfazendo uma das condições equivalentes da proposição 2.33.

A unicidade do completamento a menos de isomorfismo está expressa no corolário 2.35.

<u>Corolário 2.35</u>. Sejam $A$ um anel filtrado, $(A', f')$ e $(A'', f'')$ dois completamentos de $A$.

<u>Então,</u> existe um único isomorfismo $\nu : A' \longrightarrow A''$ tal que $\nu \circ f' = f''$.

Para mostrar sua existência, construímos o completamento de um anel filtrado de duas formas, que exibimos a seguir:

Sejam $A$ um anel filtrado e $(A_n)$ sua filtração.

$(I)$ A construção clássica do completamento de um anel filtrado está baseada nas seqüências de Cauchy.

Sejam $\mathscr{A} = \{(x_n) : x_n \in A,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ e $(x_n)$ seqüência de Cauchy$\}$ e $\mathscr{N} = \{(x_n) : x_n \in A,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ e $x_n \longrightarrow 0\}$. Mostra-se facilmente que $\mathscr{A}$ é um anel e que $\mathscr{N}$ é um ideal de $\mathscr{A}$.

Consideremos $\hat{A} = \mathscr{A}/\mathscr{N}$. Colocamos em $\hat{A}$ a métrica $d'$ definida como $d'(\overline{(x_n)}, \overline{(y_n)}) = \inf d(x_n, y_n)$, onde $\overline{(x_n)}$ e $\overline{(y_n)}$ são as classes de $(x_n)$ e $(y_n)$ e $d$ é a pseudométrica definida em 2.29.

Logo $\hat{A}$ é um anel topológico com a topologia induzida por $d'$.

Temos que $\hat{A}_n = \mathscr{A}_n/\mathscr{N}_n$, $\forall\, n$. Como $\mathscr{N}_n = \mathscr{N} \cap \mathscr{A}_n$, segue que

$\hat{A}_n \cong \dfrac{\mathscr{N} + \mathscr{A}_n}{\mathscr{N}}$. Assim, $\hat{A}_n$ é identificado com um ideal de $\hat{A}$.

Seja $f : A \longrightarrow \hat{A}$ definida por $f(x) = \overline{(x, x, \dots)}$.

A filtração $(\hat{A}_n)$ fornece a topologia de $\hat{A}$, pois $(\hat{A}_n)$ é base de vizinhanças do zero em $\hat{A}$. Então resulta que $f$ é estrito.

Com contas simples, vemos que $\ker f = \bigcap A_n$ e $f(A) \cong A / \bigcap A_n$ é denso em $\hat{A}$. Portanto, aplicando a condição $(i)$ da proposição 2.33, temos que $\hat{A}$ é um completamento de $A$.

$(II)$ Existe também a construção de um completamento baseada no conceito de limite inverso.

Consideremos uma seqüência de anéis $(R_n)$ e homomorfismos $f_n : R_{n+1} \longrightarrow R_n$.

Temos que $(R_n, f_n)$ é denominado um **sistema inverso** e seu **limite inverso** é o anel

$$B = \{(a_n) : a_n \in R_n \quad \text{e} \quad f_n(a_{n+1}) = a_n,\ \forall\, n\}$$

Denotamos $\varprojlim R_n = B$.

Consideremos os sistemas inversos $(A/A_n, f_n)$ e também para um $i$ fixo: $(A_n/A_{n+i}, f_{n+i})$, onde $f_n$ e $f_{n+i}$ são os homomorfismos canônicos.

Sejam $\tilde{A} = \varprojlim A/A_n$ e $\tilde{A}_n = \varprojlim A_n/A_{n+i}$.

Logo, $(A_n)$ é uma filtração de $A$.

Se $g : A \longrightarrow \tilde{A}$ é definido por $g(x) = (x_0, x_1, \ldots)$ onde $x_i = x + A_i$, $\forall\ i = 0, 1, \ldots$, então afirmamos que o anel filtrado $\tilde{A}$ junto com o homomorfismo $g$, é um completamento de $A$.

De fato, vamos mostrar que existe um isomorfismo canônico $u : \hat{A} \longrightarrow \tilde{A}$ tal que $u \circ f = g$ e $u(\hat{A}_n) = \tilde{A}_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Seja $(x_n)$ seqüência de Cauchy em $A$. Logo dado $r$, existe $n$ tal que $x_n \equiv x_{n+1} \equiv x_{n+2} \equiv \ldots \pmod{A_r}$. Seja $\xi_r$ essa classe. Temos então uma seqüência $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ que pertence a $\tilde{A}$. Portanto temos definido um homomorfismo de anéis $\eta : \mathcal{A} \longrightarrow \tilde{A}$ tal que $\eta((x_n)) = \xi$.

É fácil mostrar que $\ker \eta = \mathcal{N}$.

Também se $\xi = (\xi_n) \in \tilde{A}$ com $\xi_n = x_n + A_n$, $x_n \in A_n$, então $(x_n) \in \mathcal{A}$ e $\eta((x_n)) = \xi$. Logo $\eta$ é sobre.

Então $\hat{A} \cong \tilde{A}$.

De maneira análoga a que provamos que $\eta$ é sobre, mostra-se que $u(\hat{A}_n) = \tilde{A}_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Assim, conhecemos duas maneiras de construir o completamento de um anel filtrado.

Em Zariski [Z-S], temos também boas informações sobre completamentos.

Observação: No caso de supormos em $A$ uma topologia gerada por um de seus ideais, digamos $\mathfrak{a}$, escrevemos o seu completamento com relação à tal topologia como $(A\hat{\ }\mathfrak{a})$.

Uma proposição interessante e que nos será útil mais tarde está demonstrada em ([N], Teorema 17.4, pág. 55) e é enunciada abaixo.

gerado de $A$. Se $A$ é um $\mathfrak{a}$-anel, então a topologia do completamento $\hat{A}$ de $A$ é a topologia $\mathfrak{a}$-ádica.

Exemplos 2.37. Como exemplos de completamento de um anel temos:

($\mathcal{A}$) Tomemos $A = \mathbb{Z}$ e $A_n = \mathfrak{p}^n$ com $\mathfrak{p} = (p)$, $p$ primo de $\mathbb{Z}$.

O completamento $(\hat{\mathbb{Z}}_\mathfrak{p})$ é chamado o anel dos inteiros p-ádicos e um elemento seu escreve-se como $\sum_{i=0}^{\infty} p^i a_i$, com $0 \leq a_i \leq p - 1$.

($\mathcal{B}$) Esse exemplo é o que mais nos interessa pois é usado nos próximos itens.

Consideremos o anel de polinômios $A[X_1, \ldots, X_n]$ em $n$ indeterminadas sobre o anel $A$.

Afirmação: o anel das séries de potências $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ é o completamento de $A[X_1, \ldots, X_n]$ com respeito à $(X_1, \ldots, X_n)$-topologia.

Temos que:

(1) Se $f : A[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow A[[X_1, \ldots, X_n]]$ é a aplicação natural (Obs. 2.3):

(i) $\ker f = (0) = \bigcap_{i=0}^{\infty} (X_1, \ldots, X_n)^n$ ;

(ii) Toda série pode trivialmente ser aproximada por polinômios. Logo, $f(A[X_1, \ldots, X_n])$ é denso em $A[[X_1, \ldots, X_n]]$.

(iii) A $(X_1, \ldots, X_n)$-topologia de $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ induz

$A[[X_1, \ldots, X_n]]$. Logo, $f$ é estrito.

(2) $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ é completo com respeito à $(X_1, \ldots, X_n)$-topologia, pois se $(l_m)$ é uma seqüência de Cauchy de elementos de $A[[X_1, \ldots, X_n]]$, existe uma seqüência $(s_m)$ em $A[X_1, \ldots, X_n]$ tal que $s_m - l_m \longrightarrow 0$. De fato, como $(l_m)$ é uma seqüência de Cauchy, se $\alpha = (X_1, \ldots, X_n)$, então dado $p$, $\exists\ k_p \in \mathbb{N}$ tal que $l_{k_p} - l_m \in \alpha^p$, $\forall\ m \geq k_p$. Se $l_{k_p} = l_{k_p,0} + l_{k_p,1} + \ldots$, com $l_{k_p,i}$ homogêneo de grau $i$, basta tomar $s_m = \sum_{i=0}^{m} l_{k_{m+1},i}$, $\forall\ m$. É fácil ver que $(s_m)$ é uma seqüência de Cauchy em $A[X_1, \ldots, X_n]$. Temos que $s = s_0 + (s_1 - s_0) + (s_2 - s_1) + \ldots \in A[[X_1, \ldots, X_n]]$ é o seu limite. Portanto é também o limite de $(l_m)$.

Logo, da proposição 2.33 (i), segue a afirmação.

## I. 3. Sobre $\mathfrak{m}$-âneis separados e completos

Dedicamos esse item a expor alguns resultados sobre a $\mathfrak{m}$-topologia num anel. Dessa forma, estabelecemos aqui condições para que um anel, sendo separado e completo com respeito à dois de seus ideais, o seja com respeito à soma desses ideais. Se o anel é Noetheriano, tais condições são desnecessárias.

Observamos também algumas conseqüências do fato de se completar sucessivamente um anel por dois de seus ideais.

Em 3.1, temos uma nova caracterização de um anel $\mathfrak{m}$-completo:

Lema 3.1. Sejam $A$ um anel e $\mathfrak{m}$ um ideal de $A$.

Então $A$ é $\mathfrak{m}$-completo se, e só se, $\forall$ $(x_n)$ seqüência em $A$, $x_n \longrightarrow 0$, segue que $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ converge.

Demonstração:

$(\Rightarrow)$ Dada $(x_n)$ seqüência em $A$, $x_n \longrightarrow 0$.

Logo, dado $p$, $\exists$ $n_0$ *t.q.* $x_n \in \mathfrak{m}^p$, $\forall$ $n \geq n_0$.

Consideremos $a_n = \sum_{i=0}^{n} x_i \in A$.

Se $n \geq m \geq n_0$, temos: $a_n - a_m = x_{m+1} + \ldots + x_n \in \mathfrak{m}^p$ $\Rightarrow$ $(a_n)$ é uma seqüência de Cauchy.

Como $A$ é $\mathfrak{m}$-completo, segue que $(a_n)$ converge, i.é., que $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ converge.

$(\Leftarrow)$ Dada $(y_n)$ uma seqüência de Cauchy na $\mathfrak{m}$-topologia de $A$.

Tomemos $x_n = y_{n+1} - y_n$. Então $(x_n)$ é uma seqüência em $A$.

Temos que dado $p$, $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$ *t.q.* $y_n - y_m \in \mathfrak{m}^p$, $\forall$ $n \geq m \geq n_0$. Logo $x_n \in \mathfrak{m}^p$, $\forall$ $n \geq n_0$. Isso implica que $x_n \longrightarrow 0$.

Assim por hipótese, $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ converge em $A$. Suponhamos que $\sum_{i=0}^{\infty} x_i = x \in A$. Mas, $\sum_{i=0}^{n} x_i = y_{n+1} - y_0$. Então, $y_{n+1} - y_0 \longrightarrow x$. Daí, $y_n \longrightarrow x + y_0$.

Portanto, $A$ é $\mathfrak{m}$-completo. ∎

Nota: Observemos que a implicação $(\Leftarrow)$ não depende da topologia envolvida, enquanto que $(\Rightarrow)$ acontece justamente por $A$ possuir uma $\mathfrak{m}$-topologia que o está tornando $\mathfrak{m}$-completo. Como exemplo, temos $\mathbb{R}$ como um anel com a topologia usual da reta, onde a seqüência $(1/n)$ é tal que $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$, mas $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ não converge.

<u>Lema 3.2.</u> Sejam $A$ um anel, $\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{n}$ ideais de $A$.

Se $A$ é $\mathfrak{m}$-completo e $\mathfrak{n}$-completo, <u>então</u> $A$ é $(\mathfrak{m} + \mathfrak{n})$-completo.

<u>Demonstração:</u>

Utilizando o lema 3.1, basta mostrar que se $(x_n)$ é uma seqüência em $A$, com $x_n \longrightarrow 0$ na $(\mathfrak{m} + \mathfrak{n})$-topologia, então $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ converge na $(\mathfrak{m} + \mathfrak{n})$-topologia.

Notemos que as filtrações $\{(\mathfrak{m} + \mathfrak{n})^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\mathfrak{m}^n + \mathfrak{n}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ geram a mesma topologia, pois $(\mathfrak{m} + \mathfrak{n})^{2n} \subset \mathfrak{m}^n + \mathfrak{n}^n \subset (\mathfrak{m} + \mathfrak{n})^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Como $x_n \longrightarrow 0$ na $(\mathfrak{m} + \mathfrak{n})$-topologia:

$p = 1$, $\exists\, p_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $x_n \in \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, $\forall\, n \geq p_0$

$p = 2$, $\exists\, p_1 \in \mathbb{N}$ t.q. $x_n \in (\mathfrak{m} + \mathfrak{n})^2 \subset \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, $\forall\, n \geq p_1 \geq p_0$

$p = 4$, $\exists\, p_2 \in \mathbb{N}$ t.q. $x_n \in (\mathfrak{m} + \mathfrak{n})^4 \subset \mathfrak{m}^2 + \mathfrak{n}^2$, $\forall\, n \geq p_2 \geq p_1 \geq p_0$

$p = 6$, $\exists\, p_3 \in \mathbb{N}$ t.q. $x_n \in (\mathfrak{m} + \mathfrak{n})^6 \subset \mathfrak{m}^3 + \mathfrak{n}^3$, $\forall\, n \geq p_3 \geq p_2 \geq p_1 \geq p_0$

$\vdots$

$p = 2i$, $\exists\, p_i \in \mathbb{N}$ t.q. $x_n \in (\mathfrak{m} + \mathfrak{n})^{2i} \subset \mathfrak{m}^i + \mathfrak{n}^i$, $\forall\, n \geq p_i \geq \ldots \geq p_0$

$\vdots$

Assim, $x_n = y_n + z_n$, com $y_n \in \mathfrak{m}^i$, $z_n \in \mathfrak{n}^i$, $\forall\, n \geq p_i$, $\forall\, i \geq 1$.

Logo $y_n \longrightarrow 0$ na $\mathfrak{m}$-topologia e $z_n \longrightarrow 0$ na $\mathfrak{n}$-topologia. Por 3.1, $\exists\, y, z \in A$ t.q. $\sum_{n=0}^{\infty} y_n = y$ e $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z$.

Coloquemos $\mathscr{y}_n = \sum_{i=0}^{n} y_i$ e $\mathscr{z}_n = \sum_{i=0}^{n} z_i$. Daí, dado $q$, $\exists\, n_q \in \mathbb{N}$ t.q. $\mathscr{y}_n - y \in \mathfrak{m}^q$ e $\mathscr{z}_n - z \in \mathfrak{n}^q$, $\forall\, n \geq n_q$.

Então se $\mathscr{x}_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$, temos $\mathscr{x}_n = \mathscr{y}_n + \mathscr{z}_n$, $\forall\, n \geq p_0$, o que implica $\mathscr{x}_n - (y + z) = (\mathscr{y}_n - y) + (\mathscr{z}_n - z) \in \mathfrak{m}^q + \mathfrak{n}^q \subset (\mathfrak{m} + \mathfrak{n})^q$, $\forall\, n \geq n_q$. Logo $\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)_n$ converge na $(\mathfrak{m} + \mathfrak{n})$-topologia.

Portanto, $A$ é $(\mathfrak{m} + \mathfrak{n})$-completo. ∎

Abaixo, um lema necessário para a prova da recíproca (sob certas hipóteses) do lema 3.2.

Lema 3.3. Sejam $A$ um anel, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ e $\mathfrak{p}$ ideais de $A$

Se existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{m}^m \subset \mathfrak{p}$, então o $\mathfrak{n}$-fecho e o $(\mathfrak{m} + \mathfrak{n})$-fecho de $\mathfrak{p}$ coincidem.

Em particular, $\forall\, m \in \mathbb{N}$: $\mathfrak{m}^m$ é $\mathfrak{n}$-fechado se, e só se, é $(\mathfrak{m} + \mathfrak{n})$-fechado.

Demonstração:

O resultado segue do teorema 2.16, desde que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\mathfrak{p} + \mathfrak{n}^n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\mathfrak{p} + (\mathfrak{m} + \mathfrak{n})^n)$, pois $(\mathfrak{m} + \mathfrak{n})^{2n} \subset \mathfrak{m}^n + \mathfrak{n}^n \subset (\mathfrak{m} + \mathfrak{n})^n$ e pela hipótese. ∎

Proposição 3.4. Sejam $A$ um anel, $\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{n}$ ideais de $A$ tais que $\mathfrak{m}^n$ é $\mathfrak{n}$-fechado, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Se $A$ é $(\mathfrak{m} + \mathfrak{n})$-completo, então $A$ é $\mathfrak{m}$-completo.

Demonstração:

Do lema 3.3, temos que $\mathfrak{m}^n$ é $(\mathfrak{m} + \mathfrak{n})$-fechado, $\forall\, n$. Logo $\mathfrak{m}^n = \bigcap_k (\mathfrak{m}^n + (\mathfrak{m} + \mathfrak{n})^k)$ (Teo. 2.16).

Dada $(x_m)$ seqüência $\mathfrak{m}$-Cauchy, logo dado $n$, $\exists\, n_0$ t.q. $x_m - x_p \in \mathfrak{m}^n \subseteq (\mathfrak{m} + \mathfrak{n})^n$, $\forall\, m, p \geq n_0$.

Assim, se $(x_m)$ é $\mathfrak{m}$-Cauchy, então é $(\mathfrak{m} + \mathfrak{n})$-Cauchy. Logo $(x_m)$ é $(\mathfrak{m} + \mathfrak{n})$-convergente, digamos $\lim x_n = x \in A$. Assim, dado $k$, $\exists\, r_k \in \mathbb{N}$ t.q. $x_p - x \in (\mathfrak{m} + \mathfrak{n})^k$, $\forall\, p \geq r_k$.

Então, se $m \geq n_o$, temos $x_m - x = x_m - x_p + x_p - x \in \mathfrak{m}^n + (\mathfrak{m} + \mathfrak{n})^k$, onde $p \geq r_k$ ,$\forall$ $k$ $\Rightarrow$ $x_m - x \in \mathfrak{m}^n$. Portanto $(x_m)$ é $\mathfrak{m}$-convergente, donde $A$ é $\mathfrak{m}$-completo. ∎

Agora, numa versão para anéis $\mathfrak{m}$-separados, o que vimos para anéis $\mathfrak{m}$-completos.

<u>Proposição 3.5.</u> Sejam $A$ um anel, $\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{n}$ ideais de $A$ tais que $\mathfrak{m}^n$ é $\mathfrak{n}$-fechado, $\forall$ $n \in \mathbb{N}$.

Se $A$ é $\mathfrak{m}$-separado, <u>então</u> $A$ é $(\mathfrak{m} + \mathfrak{n})$-separado.

<u>Demonstração:</u>

Temos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\mathfrak{m} + \mathfrak{n})^n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\mathfrak{m}^n + \mathfrak{n}^n)$.

Dado $x \in \mathfrak{m}^n + \mathfrak{n}^n$, $\forall$ $n$. Podemos escrever $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2 = \dots = y_n + z_n = \dots$, com $y_i \in \mathfrak{m}^i$ e $z_i \in \mathfrak{n}^i$, $\forall$ $i$.

Daí, para cada $i \in \mathbb{N}$, $z_i = (y_{i+1} - y_i) + z_{i+1} = (y_{i+2} - y_{i+1}) - z_{i+2} = \dots \in \mathfrak{m}^i + \mathfrak{n}^m$, $\forall$ $m > i$ $\Rightarrow$ $z_i \in \bigcap_m (\mathfrak{m}^i + \mathfrak{n}^m) \overset{\text{hip.}}{=} \mathfrak{m}^i$.

Assim $x \in \mathfrak{m}^i$, $\forall$ $i$ $\Rightarrow$ $x \in \bigcap_i \mathfrak{m}^i \overset{\text{hip.}}{=} (0)$ $\Rightarrow$ $x = 0$.

Então $\bigcap_n (\mathfrak{m} + \mathfrak{n})^n = (0)$. Portanto, $A$ é $(\mathfrak{m} + \mathfrak{n})$-separado. ∎

Juntando o que obtivemos até agora nesse item:

<u>Teorema 3.6.</u>

Sejam $A$ um anel, $\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{n}$ ideais de $A$ tais que $\mathfrak{m}^n$ é $\mathfrak{n}$-fechado e $\mathfrak{n}^n$ é $\mathfrak{m}$-fechado, $\forall$ $n \in \mathbb{N}$.

<u>Então</u> são equivalentes:

(a) $A$ é $(\mathfrak{m}+\mathfrak{n})$-separado e completo.

(b) $A$ é $\mathfrak{m}$-separado e completo e $\mathfrak{n}$-separado e completo.

Demonstração:

(a) $\Rightarrow$ (b) Segue de $\bigcap_n \mathfrak{m}^n$, $\bigcap_n \mathfrak{n}^n \subseteq \bigcap_n (\mathfrak{m}+\mathfrak{n})^n = (0)$ e da proposição 3.4.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sai direto da proposição 3.5 e do lema 3.2. ∎

Se o anel é Noetheriano, as hipóteses reduzem-se a:

Corolário 3.7. Sejam $A$ um anel Noetheriano, $\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{n}$ ideais de $A$.

Então são equivalentes:

(a) $A$ é $(\mathfrak{m}+\mathfrak{n})$-separado e completo.

(b) $A$ é $\mathfrak{m}$-separado e completo e $\mathfrak{n}$-separado e completo.

Demonstração:

Sai do seguinte fato: se $A$ é um anel Noetheriano e $\mathfrak{a}$ um ideal de $A$ *t.q.* $A$ é $\mathfrak{a}$-completo, então qualquer ideal de $A$ é $\mathfrak{a}$-fechado. De fato, seja $\mathfrak{b}$ um ideal de $A$. Logo $\mathfrak{b}$ é finitamente gerado.

Dada $(b_n)$ seqüência em $\mathfrak{b}$ com $b_n \longrightarrow b$. Logo $(b_n)$ Cauchy em $\mathfrak{b}$, então dado $p$, $\exists\, n_o$ *t.q.* $b_n - b_m \in \mathfrak{a}^p\mathfrak{b}$, $\forall\, n, m \geq n_o$.

Se $\mathfrak{b} = (\beta_1, \ldots, \beta_k)$, suponhamos $b_n = a_{1,n}\beta_1 + \ldots + a_{k,n}\beta_k$ e $b_m = a_{1,m}\beta_1 + \ldots + a_{k,m}\beta_k$. Logo $(a_{1,n} - a_{1,m})\beta_1 + \ldots + (a_{k,n} - a_{k,m})\beta_k \in \mathfrak{a}^p\mathfrak{b}$, $\forall\, n, m \geq n_o$, daí $(a_{j,n})$ é Cauchy em $A$, donde $a_{j,n} \longrightarrow \lambda_j$ para algum $\lambda_j \in A$. Então $b = \lambda_1\beta_1 + \ldots + \lambda_k\beta_k \in \mathfrak{b}$. ∎

Na proposição 3.9, vamos completar um anel primeiro por um de seus ideais e depois por outro e verificar algumas propriedades que decorrem desse fato.

Primeiramente, demonstramos um lema que é preciso para a prova da proposição.

Lema 3.8. Sejam $A$ um anel, $\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{n}$ ideais de $A$, $\hat{A} = (A\hat{;}\mathfrak{m})$ e $f : A \longrightarrow \hat{A}$ o homomorfismo canônico.

Se $\mathfrak{n}$ é $\mathfrak{m}$-fechado, então $f^{-1}(f(\mathfrak{n})\hat{A}) = \mathfrak{n}$.

Demonstração:

Sem perda de generalidade, podemos supor que $A$ é $\mathfrak{m}$-separado pois, visto que $\mathfrak{n}$ é $\mathfrak{m}$-fechado, $\mathfrak{n} = \bigcap_n (\mathfrak{n} + \mathfrak{m}^n) \supseteq \bigcap_n \mathfrak{m}^n$.

Temos que $\hat{\mathfrak{n}}$ coincide com $\overline{f(\mathfrak{n})}^{\hat{A}}$, onde $\hat{\mathfrak{n}}$ é completamento de $\mathfrak{n}$ com respeito à topologia induzida pela $\mathfrak{m}$-topologia de $A$ e $\overline{f(\mathfrak{n})}^{\hat{A}}$ é o fecho de $f(\mathfrak{n})$ em $\hat{A}$.

Além disso, $\overline{f(\mathfrak{n})}^{\hat{A}} = \bigcap_n (f(\mathfrak{n}) + \mathfrak{m}^n\hat{A}) = \bigcap_n (f(\mathfrak{n})\hat{A} + \mathfrak{m}^n\hat{A}) = \overline{f(\mathfrak{n})\hat{A}}^{\hat{A}}$.

Portanto,

$$\mathfrak{n} = f^{-1}(\hat{\mathfrak{n}}) = f^{-1}(\overline{f(\mathfrak{n})}^{\hat{A}}) = f^{-1}(\overline{f(\mathfrak{n})\hat{A}}^{\hat{A}}) \supset f^{-1}(f(\mathfrak{n})\hat{A}) \supset \mathfrak{n}.$$

Donde $f^{-1}(f(\mathfrak{n})\hat{A}) = \mathfrak{n}$. ∎

No item (I.5), demonstraremos que se $A$ é um anel Noetheriano, $\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{n}$ dois de seus ideais e se $A$ é $(\mathfrak{m} + \mathfrak{n})$-separado, então vale: $\hat{A} = (A\hat{;}\mathfrak{m})$ é $\mathfrak{n}\hat{A}$-separado e $(A\hat{;}\mathfrak{m}+\mathfrak{n}) \cong (\hat{A}\hat{;}\mathfrak{n}\hat{A})$. Para um anel qualquer, temos a proposição a seguir que é uma das mais interessantes desse item.

Proposição 3.9. Sejam $A$ um anel, $\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{n}$ ideais de $A$, $\hat{A} = (A\hat{;}\mathfrak{m})$ e $B = (\hat{A}\hat{;}\mathfrak{n}\hat{A})$.

Se $A$ é $\mathfrak{m}$-separado e $\hat{A}$ é $\mathfrak{n}\hat{A}$-separado, então:

(i) $(\mathfrak{m}^n + \mathfrak{n}^n)B \cap A = (\mathfrak{m}^n + \mathfrak{n}^n)A$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

(ii) Em $A$, a $(\mathfrak{m} + \mathfrak{n})$-topologia e a topologia induzida pela $(\mathfrak{m} + \mathfrak{n})$-topologia de $B$ coincidem.

(iii) $A$ é $(\mathfrak{m} + \mathfrak{n})B$-denso em $B$.

Demonstração:

(i) Consideremos os homomorfismos canônicos $f : A \longrightarrow \hat{A}$ e $g : \hat{A} \longrightarrow B$.

Mediante uma simples verificação, temos que $(\mathfrak{m}^n + \mathfrak{n}^n)A$ é $\mathfrak{m}$-fechado e $(\mathfrak{m}^n + \mathfrak{n}^n)\hat{A}$ é $\mathfrak{n}\hat{A}$-fechado.

Logo, podemos usar o lema 3.8 para obter:

$$(\mathfrak{m}^n + \mathfrak{n}^n)B \cap A = (g \circ f)^{-1}\Big[(g \circ f)(\mathfrak{m}^n + \mathfrak{n}^n)B\Big] =$$

$$= f^{-1}\Big[g^{-1}\Big[g((\mathfrak{m}^n + \mathfrak{n}^n)\hat{A})\Big]B\Big] \overset{(3.8)}{=} f^{-1}((\mathfrak{m}^n + \mathfrak{n}^n)\hat{A}) =$$

$$= f^{-1}(f(\mathfrak{m}^n + \mathfrak{n}^n)\hat{A}) \overset{(3.8)}{=} (\mathfrak{m}^n + \mathfrak{n}^n)A$$

(ii) Na demonstração do lema 3.2, vimos que as filtrações $\{(\mathfrak{m} + \mathfrak{n})^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\mathfrak{m}^n + \mathfrak{n}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ geram a mesma topologia. Assim, consideremos em $A$, como base de vizinhanças do zero:

- $(\mathfrak{m}^n + \mathfrak{n}^n)A$ para a $(\mathfrak{m} + \mathfrak{n})$-topologia de $A$.

- $(\mathfrak{m}^n + \mathfrak{n}^n)B \cap A$ para a topologia induzida pela $(\mathfrak{m} + \mathfrak{n})$-topologia de $B$.

Portanto por (i), as topologias coincidem.

(iii) Dada uma vizinhança $U = x + (\mathfrak{m}^n + \mathfrak{n}^n)B$ em $B$, com $x \in B$, vamos mostrar que $U \cap A \neq \emptyset$ .

Como $\hat{A}$ é $\mathfrak{n}B$-denso em $B$, existe uma seqüência $(x_m)$ em $\hat{A}$ tal que $x_m \longrightarrow x$ na $\mathfrak{n}B$-topologia. Logo $\exists\ p \in \mathbb{N}$ *t.q.* $x_p - x \in \mathfrak{n}^n B$.

Como $A$ é $\mathfrak{m}\hat{A}$-denso em $\hat{A}$, existe uma seqüência $(y_{p,i})$ em $A$ tal que $y_{p,i} \longrightarrow x_p$ na $\mathfrak{m}\hat{A}$-topologia. Logo, $\exists\ q \in \mathbb{N}$ *t.q.* $y_{p,q} - x_p \in \mathfrak{m}^n \hat{A}$.

Assim $y_{p,q} - x \in (\mathfrak{m}^n + \mathfrak{n}^n)B \Rightarrow y_{p,q} \in x + (\mathfrak{m}^n + \mathfrak{n}^n)B = U.$ ∎

## I. 4. Completamentos separados de um anel de polinômios

Dois resultados sobre um anel de polinômios e alguns de seus completamentos separados são mostrados aqui.

Já vimos em (2.37)(*b*) que o anel das séries de potências $A[[X]]$ é o completamento do anel de polinômios $A[X]$ com respeito ao ideal $(X)$.

No lema 4.1, estudamos o anel $\hat{A}[[X]]$, onde $\mathfrak{m}$ é um ideal de $A$ e $\hat{A} = (A\hat{;}\mathfrak{m})$.

Lema 4.1. Sejam $A$ um anel, $\mathfrak{m}$ um ideal de $A$, $X$ uma indeterminada sobre $A$ e $\hat{A} = (A\hat{;}\mathfrak{m})$.

Então:

(*a*) $\hat{A}[[X]] \cong (A[[X]]\hat{;}\mathfrak{m}A[[X]])$.

(*b*) $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[(\mathfrak{m}, X)^n A[[X]]\right] = (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}^n) A[[X]]$.

Demonstração:

(a) Usando a definição de limite inverso, temos:

$$\hat{A}[[X]] = \left[\varprojlim \frac{A}{\mathfrak{m}^n}\right][[X]] \cong \varprojlim \left[\left(\frac{A}{\mathfrak{m}^n}\right)[[X]]\right] \cong$$

$$\cong \varprojlim \frac{A[[X]]}{\mathfrak{m}^n A[[X]]} = (A[[X]]\hat{;}\mathfrak{m}A[[X]])$$

(b) É óbvio que $(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}^n)A[[X]] \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\mathfrak{m}^n, X^n)A[[X]] =$

$= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\mathfrak{m}, X)^n A[[X]]$.

Seja $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\mathfrak{m}^n, X^n)A[[X]]$.

Como $f \in (\mathfrak{m}^n, X^n)A[[X]]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, temos: $a_i X^i \in \mathfrak{m}^j A[X]$, $j > i \Rightarrow a_i X^i \in \mathfrak{m}^n A[X]$, $\forall\, n \Rightarrow a_i \in \mathfrak{m}^n$, $\forall\, n \Rightarrow f \in (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}^n)A[[X]]$.

∎

Completamos agora o anel $A[X]$ pelo ideal $(\mathfrak{m}, X)$ e obtemos a

<u>Proposição 4.2</u>. Sejam $A$ um anel, $\mathfrak{m}$ um ideal de $A$, $X$ uma indeterminada sobre $A$ e $\hat{A} = (A\hat{;}\mathfrak{m})$.

<u>Então</u> $(A[X]\hat{;}(\mathfrak{m},X)) \cong \hat{A}[[X]]$.

<u>Demonstração:</u>

Pelo lema 4.1 (a), temos que $\hat{A}[[X]] \cong (A[[X]]\hat{;}\mathfrak{m}A[[X]])$, logo $\hat{A}[[X]]$ é $\mathfrak{m}$-completo. Como $\hat{A}[[X]]$ é $(X)$-completo, então por (3.2), $\hat{A}[[X]]$ é $(\mathfrak{m}, X)$-completo.

Podemos supor que $A$ é $\mathfrak{m}$-separado, logo pelo lema 4.1(b), $\hat{A}[[X]]$ é $(\mathfrak{m}, X)$-separado.

Da proposição 3.9 (*ii*) e (*iii*), segue que em $A[X]$, a $(\mathfrak{m}, X)$-topologia e a topologia induzida pela $(\mathfrak{m}, X)$-topologia de $\hat{A}[[X]]$ coincidem e ainda que $A[X]$ é $(\mathfrak{m}, X)$-denso em $\hat{A}[[X]]$. Portanto $(A[X]\hat{\ }(\mathfrak{m},X)) = \hat{A}[[X]]$. ∎

## I. 5. Completamento de um anel e séries de potências

O isomorfismo $(A\hat{\ }\mathfrak{a}) \cong \dfrac{A[[X_1, \ldots, X_n]]}{(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)}$ $(*)$ que mencionamos na Introdução (I.1) é estudado aqui e também nos itens seguintes.

Nesse item, observamos primeiro um resultado sobre um isomorfismo que difere de $(*)$ por tratar do fecho de $(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$ numa certa topologia. Para tal resultado, as hipóteses são mínimas, mas não é ainda o isomorfismo que queremos. Como corolário, obtemos $(*)$, só que sob condições bem mais fortes.

Demonstramos no teorema 5.5, a existência do isomorfismo $(*)$ para anéis Noetherianos, fazendo antes observações de caráter $\mathfrak{a}$-topológico. Como corolários do teorema, vemos algumas conseqüências de se completar um anel Noetheriano sucessivamente por dois de seus ideais e também pela soma desses ideais, algo semelhante ao que fizemos em (I.3).

Começamos com o

Teorema 5.1.

Sejam $A$ um anel, $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ um ideal de $A$ tal que $A$ é $\mathfrak{a}$-Hausdorff, $\hat{A} = (A\hat{\ }\mathfrak{a})$ e $X_1, \ldots, X_n$ indeterminadas sobre $A$.

Se $\mathfrak{m}^*$ é o $(\mathfrak{a}A[[X_1, \ldots, X_n]] + (X_1, \ldots, X_n))$-fecho do ideal

$\mathfrak{m} = (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$, então

$$\hat{A} \cong \frac{A[[X_1, \ldots, X_n]]}{\mathfrak{m}^*}$$

Demonstração: Ver ([N], Teorema 17.5, pág. 55). ∎

Corolário 5.2. Sejam $A$ um anel semi-local Noetheriano com $\mathcal{J}(A) = \mathfrak{n}$, $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ um ideal de $A$ tal que $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{n}$ e $\hat{A} = (A\hat{;}\mathfrak{n})$.

Se $\mathfrak{m} = (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$ ideal de $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ onde $X_1, \ldots, X_n$ são indeterminadas sobre $A$, então $\hat{A}$ é um anel semi-local Noetheriano e

$$\hat{A} \cong \frac{A[[X_1, \ldots, X_n]]}{\mathfrak{m}}$$

Demonstração: Ver ([N], Corolário 17.6, pág. 55). ∎

Lema 5.3. Sejam $A$ um anel, $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ ideais de $A$.

Então o $\mathfrak{b}$-fecho e o $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$-fecho de $\mathfrak{a}$ coincidem.

Demonstração:

De fato, $\bigcap_n (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}^n) = \bigcap_n (\mathfrak{a} + (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})^n)$. ∎

Corolário 5.4. Sejam $A$ um anel, $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ um ideal de $A$ e $X_1, \ldots, X_n$ indeterminadas sobre $A$.

Se $\mathfrak{m} = (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$ ideal de

$A[[X_1, \ldots, X_n]]$, então o $(X_1, \ldots, X_n)$-fecho e o $(\mathfrak{a}A[[X_1, \ldots, X_n]] + (X_1, \ldots, X_n))$-fecho de $\mathfrak{m}$ coincidem.

Demonstração:

De fato, $(\mathfrak{a}A[[X_1, \ldots, X_n]] + (X_1, \ldots, X_n)) = \mathfrak{m} + (X_1, \ldots, X_n)$. Daí, use (5.3). ∎

Uma proposição que é usada no decorrer do trabalho é a que enunciamos abaixo.

Proposição 5.5. Sejam $A$ um anel, $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ ideais de $A$.
Se:

( $a$ ) $\mathfrak{b}$ é finitamente gerado;

( $b$ ) $A$ é $\mathfrak{a}$-completo;

( $c$ ) A $\mathfrak{a}$-topologia de $\mathfrak{b}$ e a topologia induzida pela $\mathfrak{a}$-topologia de $A$ coincidem.

então $\mathfrak{b}$ é $\mathfrak{a}$-fechado.

Demonstração:

Usando o raciocínio com que demonstramos o corolário 3.7, sai facilmente que se $\mathfrak{b}$ é finitamente gerado, então $\mathfrak{b}$ é $\mathfrak{a}$-completo.

Logo por hipótese, $\mathfrak{b}$ é fechado com relação à topologia induzida pela $\mathfrak{a}$-topologia de $A$.

Assim, por conhecido resultado topológico, $\mathfrak{b}$ é $\mathfrak{a}$-fechado. ∎

O seguinte teorema é uma forma mais fraca do corolário 5.2, onde exigimos um anel semi-local Noetheriano. Aqui, basta um anel Noetheriano. É um teorema muito bonito e um dos mais importantes do capítulo.

Teorema 5.6.

Sejam $A$ um anel Noetheriano, $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ um ideal de $A$ tal que $A$ é $\mathfrak{a}$-Hausdorff, $\hat{A} = (A\hat{;}\mathfrak{a})$ e $X_1, \ldots, X_n$ indeterminadas sobre $A$.

Se $\mathfrak{m} = (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$ ideal de $A[[X_1, \ldots, X_n]]$, então

$$\hat{A} \cong \frac{A[[X_1, \ldots, X_n]]}{\mathfrak{m}}$$

Demonstração:

Basta mostrarmos que $\mathfrak{m}$ é $(X_1, \ldots, X_n)$-fechado , pois pelo corolário 5.4, $\mathfrak{m}$ será $(\mathfrak{a}A[[X_1, \ldots, X_n]] + (X_1, \ldots, X_n))$-fechado e daí usamos o teorema 5.1.

De (2.37)(8), sabemos que $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ é $(X_1, \ldots, X_n)$--completo.

Do Lema de Artin-Rees (2.24) sai que, em $\mathfrak{m}$, a $(X_1, \ldots, X_n)$-topologia e a topologia induzida pela $(X_1, \ldots, X_n)$-topologia de $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ coincidem.

Como $\mathfrak{m}$ é finitamente gerado, pela proposição 5.5, $\mathfrak{m}$ é $(X_1, \ldots, X_n)$-fechado. ∎

Nota: Como $A$ é Noetheriano, pelo exemplo (2.27) temos que $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ é um anel de Zariski pela $(X_1, \ldots, X_n)$-topologia. Daí, concluímos também que $\mathfrak{m}$ é $(X_1, \ldots, X_n)$-fechado.

Corolário 5.7. Sejam $A$ um anel Noetheriano, $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ ideais de $A$ tais que $A$ é $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$-Hausdorff e $\hat{A} = (A\hat{;}\mathfrak{a})$.

Então $\hat{A}$ é $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$-Hausdorff.

Demonstração:

Consideremos $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\mathfrak{b} = (b_1, \ldots, b_m)$, $\tilde{A} = (A\hat{;}\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$, $\mathfrak{n} = (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n, Y_1 - b_1, \ldots, Y_m - b_m)$ ideal de $A[[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m]]$ onde $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ são indeterminadas sobre $A$.

Temos pelo teorema 5.6 e do fato de $\hat{A}$ ser Noetheriano ([A-M], Teorema 10.26, pág. 113):

$$\tilde{A} \cong \frac{A[[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m]]}{\mathfrak{n}} \cong \frac{\hat{A}[[Y_1, \ldots, Y_m]]}{(Y_1 - b_1, \ldots, Y_m - b_m)}$$

Assim existe $\varphi : \hat{A} \longrightarrow \tilde{A}$ um $A$-homomorfismo canônico, tal que $\varphi$ é 1-1.

Observando que $\tilde{A}$ é $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})\tilde{A}$-Hausdorff, concluímos que

$$\varphi\Big(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} [(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})\hat{A}]^k\Big) \subset \bigcap_{k\in\mathbb{N}} [\varphi(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})\hat{A}]^k \subset \bigcap_{k\in\mathbb{N}} [(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})\tilde{A}]^k = (0) \Rightarrow$$

$$\overset{\varphi \text{ é } 1-1}{\Rightarrow} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} [(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})\hat{A}]^k = (0). \qquad \blacksquare$$

Corolário 5.8. Sejam $A$ um anel Noetheriano, $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ ideais de $A$ tais que $A$ é $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$-Hausdorff.

Se $\hat{A} = (A\hat{;}\mathfrak{a})$ e $\tilde{A} = (A\hat{;}\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$, então $\tilde{A} \cong (\hat{A}\hat{;}\mathfrak{b}\hat{A})$.

Demonstração:

Por (5.7), $\hat{A}$ é $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})\hat{A}$-Hausdorff, logo é $\mathfrak{b}\hat{A}$-Hausdorff.

Usando que $\hat{A}$ é Noetheriano e o isomorfismo da demonstração anterior:

$$\hat{A} \cong \frac{\hat{A}[[Y_1, \ldots, Y_m]]}{(Y_1 - b_1, \ldots, Y_m - b_m)} \xrightarrow{\text{Teo. } 5.6} \hat{A} \cong (\hat{A}\hat{,}b\hat{A})$$

∎

## I. 6. Um contra-exemplo

Gostaríamos de estender o resultado que temos para anéis Noetherianos (Teo. 5.6). Mas isso não é possível, pois existem casos em que o ideal $(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$ não é $(X_1, \ldots, X_n)$--fechado em $A[[X_1, \ldots, X_n]]$. Dedicamos esse item a expor um desses casos.

Falamos um pouco sobre os $\mathfrak{a}$-anéis graduados antes de construir o contra-exemplo.

Na proposição 6.1, indicamos $A_+$ o ideal homogêneo $\bigoplus_{n>0} A_n$ (2.22) de um anel graduado $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ (2.21).

<u>Proposição 6.1</u>. Sejam $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ um anel graduado e $\mathfrak{a}$ um ideal de $A$ tal que $\mathfrak{a} \subseteq A_+$.

Se $\mathfrak{b}$ é um ideal homogêneo de $A$, <u>então</u> $\mathfrak{b}$ é $\mathfrak{a}$-fechado.

<u>Demonstração:</u>

Seja $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\mathfrak{b} + \mathfrak{a}^n)$. Como $A$ é graduado, existe $m$ t.q. $a = a_0 + a_1 + \ldots + a_m$, com $a_i \in A_i$, $i = 0, \ldots, m$.

Desde que $a \in \mathfrak{b} + \mathfrak{a}^{m+1}$ e $\mathfrak{a}^{m+1} \subset \bigoplus_{n\geq m+1} A_n$, então $a = b + \sum_{j=1}^{k} a_{m+j}$ com $b \in \mathfrak{b}$ e $a_{m+j} \in A_{m+j}$, $j = 1, \ldots, k$. Isso implica $a_0 + a_1 + \ldots + a_{m+k} = b \in \mathfrak{b}$. Mas $\mathfrak{b}$ é homogêneo, donde $a_i \in \mathfrak{b}$, $\forall\ i = 0, \ldots, m + k \Rightarrow a = a_0 + \ldots + a_m \in \mathfrak{b}$.

Usando (2.16), $\mathfrak{b}$ é $\mathfrak{a}$-fechado. ∎

Temos que $A[X_1, \ldots, X_n]$ é um exemplo de anel graduado. Assim segue o

<u>Corolário 6.2</u>. Sejam $A$ um anel e $X_1, \ldots, X_n$ indeterminadas sobre $A$.

Se $\mathfrak{m}$ é um ideal homogêneo de $A[X_1, \ldots, X_n]$, <u>então</u> $\mathfrak{m}$ é $(X_1, \ldots, X_n)$-fechado.

A prova do lema abaixo é imediata e por isso a omitimos.

<u>Lema 6.3</u>. Sejam $A$ um anel, $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ ideais de $A$ e $\pi : A \longrightarrow \dfrac{A}{\mathfrak{b}}$ o homomorfismo canônico.

Se $\pi(\mathfrak{a}) = \bar{\mathfrak{a}}$, $\dfrac{A}{\mathfrak{b}}$ é $\bar{\mathfrak{a}}$-Hausdorff se, e só se, $\mathfrak{b}$ é $\mathfrak{a}$-fechado.

Vamos agora construir o contra-exemplo, utilizando os resultados anteriores.

Para isso, consideremos até o fim desse item:

- $k$ um corpo
- $Y, X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ indeterminadas sobre $k$
- $A = \Big(k[X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots]\Big)[Y]$
- $\mathfrak{a}$ um ideal de $A$ gerado por $X_i Y^{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots$
- $R = A/\mathfrak{a}$

- $\pi : A \longrightarrow R$ o homomorfismo canônico
- $\pi(Y) = y$ e $\pi(X_i) = x_i$, $i = 0, 1, \ldots$
- $X$ uma indeterminada sobre $R$

Observemos que $\mathfrak{a}$ é homogêneo, logo por (6.2) é $(Y)$-fechado. Assim por (6.3), $R$ é $(y)$-Hausdorff. Portanto, pelo teorema 5.1, temos que se $\hat{R} = (R\hat{,}(y))$ então $\hat{R} \cong \dfrac{R[[X]]}{(X - y)^*}$ onde $(X - y)^*$ é o $(X)$-fecho de $(X - y)$ em $R[[X]]$.

Idéia: mostrar que o ideal $(X - y)$ de $R[[X]]$ não é $(X)$-fechado.

Vamos precisar antes do

Lema 6.4. $X_k Y^n \notin \mathfrak{a}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e $\forall\, k \geq n$.

Demonstração:

Se existe $n \in \mathbb{N}$ e $k \geq n$, $X_k Y^n \in \mathfrak{a}$, então $X_k Y^n = a_0 X_0 Y + \ldots + a_r X_r Y^{r+1}$ com $a_i \in A$, $i = 0, \ldots, r$.

Como $a_i \in A$, podemos escrevê-lo como um polinômio em $Y$. Donde substituindo na expressão de $X_k Y^n$ e igualando os coeficientes de $Y^n$ em ambos os lados, obtemos uma nova relação do tipo $X_k = b_0 X_0 + \ldots + b_{n-1} X_{n-1} \Rightarrow X_k \in (X_0, \ldots, X_{n-1})$ com $k \geq n$. (*Absurdo* !). ∎

Proposição 6.5. O ideal $(X - y)$ não é $(X)$-fechado em $R[[X]]$.

Demonstração:

Consideremos a seqüência $\left\{ \sum_{i=0}^{n} x_i X^{i+1} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de

$(X - y)$. Temos que cada elemento $\sum_{i=0}^{n} x_i X^{i+1}$ da seqüência pertence a $(X - y)$, pois $\forall\ i \in \mathbb{N}$, desde que $x_i y^{i+1} = 0$,

$$x_i X^{i+1} = (x_i y^i + x_i y^{i-1} X + \dots + x_i X^i)(X - y).$$

A seqüência $\sum_{i=0}^{n} x_i X^{i+1} \longrightarrow s = \sum_{i=0}^{\infty} x_i X^{i+1}$ na $(X)$-topologia de $R[[X]]$.

Afirmação: $s \notin (X - y)$.

Se $s \in (X - y)$, então $\exists\ t = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in R[[X]]$ tal que $s = t(X-y)$. Logo, substituindo $s$ e $t$ nessa expressão e igualando os coeficientes:

$$ya_0 = 0 \quad \text{e} \quad a_i - a_{i+1} y = x_i, \ \forall\ x \in \mathbb{N} \qquad (1)$$

Como $\mathfrak{a}$ é um ideal homogêneo de $A$, temos que $A$ induz uma graduação em $R = A/\mathfrak{a}$, e assim cada $a_i$ pode ser escrito de forma única como:

$$a_i = \theta_{i,0} + \theta_{i,1} y + \dots + \theta_{i,n_i} y^{n_i} \qquad (2)$$

De (1), segue imediatamente que $a_i = x_i + x_{i+1} y + \dots + x_{i+n_i} y^{n_i} + a_{i+n_i+1} y^{n_i+1}$.

Daí, mediante (2), $a_i = x_i + x_{i+1} y + \dots + x_{i+n_i} y^{n_i}$.

Assim, usando (1):

$$a_i - a_{i+1} y - x_i = x_i + x_{i+1} y + \dots + x_{i+n_i} y^{n_i} - x_{i+1} y - \dots - x_{i+1+n_{i+1}} y^{1+n_{i+1}} - x_i = 0.$$

Como $x_{i+k} y^k \neq 0$, pois $X_{i+k} Y^k \notin \mathfrak{a}$ $(\forall\ k \in \mathbb{N})$ por (6.4), então

$n_i = n_{i+1} + 1$. Portanto, temos uma seqüência $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ estritamente decrescente de números naturais, o que é absurdo. ∎

## I. 7. Completamento de um $(a)$-anel $A$ e sua relação com $A[[X]]$

Estudamos agora o isomorfismo $(*)$ do teorema 5.1 para o ideal $\mathfrak{a} = (a)$, ou seja para quando o ideal $\mathfrak{a}$ é principal.

Fazemos antes também, como em (I.6), observações de caráter $(a)$-topológico. Dessas observações, saem condições para que o ideal $(X - a)$ seja $(X)$-fechado e portanto para que tenhamos

$$(A\hat{;}\mathfrak{a}) \cong \frac{A[[X]]}{(X - a)}$$

Iniciamos com:

<u>Lema 7.1</u>. Sejam $A$ um anel, $a \in A$ tal que $A$ é $(a)$-Hausdorff e $X$ uma indeterminada sobre $A$.

<u>Então</u>, $X - a$ é regular em $A[[X]]$.

<u>Demonstração:</u>

De fato: $(X - a)\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i = 0 \Rightarrow a_i = a_{i+1}a, \ \forall\, i \in \mathbb{N} \Rightarrow$ $a_i = a_{i+1}a = a_{i+2}a^2 = \ldots$ . Logo, $a_i \in \bigcap_n (a^n) = (0)$. Assim, $a_i = 0, \ \forall\, i \in \mathbb{N}$. ∎

Recordamos que o anulador de um ideal $a$ de $A$ é o conjunto $\mathcal{Ann}(a) = \{x \in A : xa = 0\}$.

Lema 7.2. Sejam $A$ um anel e $a \in A$.
Então são equivalentes:

(a) $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.q. $\mathcal{Ann}(a^n) = \mathcal{Ann}(a^{n+1})$.

(b) $\{\mathcal{Ann}(a^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é estacionária.

Demonstração:

(a) $\Rightarrow$ (b) Dado $k \in \mathbb{N}$, seja $x \in \mathcal{Ann}(a^{n+k+1})$. Logo: $xa^{n+k+1} = 0 \Rightarrow (xa^k)a^{n+1} = 0 \Rightarrow xa^k \in \mathcal{Ann}(a^{n+1}) = \mathcal{Ann}(a^n) \Rightarrow xa^{k+n} = 0 \Rightarrow x \in \mathcal{Ann}(a^{n+k})$.

Desde que é claro que $\mathcal{Ann}(a^{n+k}) \subseteq \mathcal{Ann}(a^{n+k+1})$, temos $\mathcal{Ann}(a^{n+k}) = \mathcal{Ann}(a^{n+k+1})$, $\forall\, k$.

Portanto, $\{\mathcal{Ann}(a^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é estacionária.

(b) $\Rightarrow$ (a) Óbvia por definição. ∎

A seguir, temos um teorema que nos dá uma condição equivalente ao fato da $(X)$-topologia de $(X - a)$ e a topologia induzida pela $(X)$-topologia de $A[[X]]$ coincidirem. Ambas implicam que $(X - a)$ é $(X)$-fechado pela proposição 5.5.

Teorema 7.3.

Sejam $A$ um anel, $a \in A$ tal que $A$ é $(a)$-Hausdorff e $X$ uma indeterminada sobre $A$.
Então são equivalentes:

(i) $\{\mathcal{Ann}(a^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é estacionária.

$(ii)$ Em $(X - a)$, a $(X)$-topologia e a topologia induzida pela $(X)$-topologia de $A[[X]]$ coincidem.

Demonstração:

$(i) \Rightarrow (ii)$ Vemos claramente que $(X - a)(X^k) \subset (X - a) \cap (X^k)$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

Dado $r \in \mathbb{N}$. Usando a hipótese, por (7.2)(a), $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.q. $\mathcal{A}nn(a^n) = \mathcal{A}nn(a^{n+1})$.

Mostra-se sem problemas, por indução sobre $k$, que $(X - a) \cap (X^{n+k}) \subset (X - a)(X^k)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Se a seqüência $\{\mathcal{A}nn(a^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ não fosse estacionária, por (7.2), $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}nn(a^n) \neq \mathcal{A}nn(a^{n+1})$.

Consideremos para qualquer $n \in \mathbb{N}$, o polinômio $g_n(X) = (a^{n-1} + a^{n-2}X + \ldots + aX^{n-1})a_n$ com $a_n \in \mathcal{A}nn(a^n) \setminus \mathcal{A}nn(a^{n-1})$.

Seja $f_n(X) = (X - a)g_n(X) = a_n aX^n - a^n a_n$. Logo como $a^n a_n = 0$, temos que $f_n(X) \in (X - a) \cap (X^n)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Mas $f_n(X) \notin (X - a)(X)$, pois se $f_n(X) = X(X - a)h_n(X)$, desde que por (7.1), $(X - a)$ é regular em $A[[X]]$, segue que $g_n(X) = X.h_n(X)$, o que implica $a^{n-1}a_n = 0$ (*Absurdo, pois* $a_n \notin \mathcal{A}nn(a^{n-1})$). ∎

Nota: Com o teorema anterior, ficam caracterizados os $(a)$-anéis para os quais não vale a tese do lema de Artin-Rees. O anel $R$ da seção I.6 é um exemplo, basta usar (6.4).

Temos agora uma nova condição para verificar a validade do isomorfismo $(*)$.

Teorema 7.4.

Sejam $A$ um anel, $a \in A$ tal que $A$ é $(a)$-Hausdorff, $\hat{A} = (A\hat{,}a)$ e X uma indeterminada sobre $A$.

Se a seqüência $\{\mathcal{A}nn(a^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é estacionária, então

$$\hat{A} \cong \frac{A[[X]]}{(X - a)}$$

Demonstração:

Pelo teorema 7.3, temos que a hipótese implica que em $(X - a)$, a $(X)$-topologia e a topologia induzida pela $(X)$-topologia de $A[[X]]$ coincidem. Então por (5.5), $(X - a)$ é $(X)$-fechado e daí segue o teorema por (5.1) e (5.4). ∎

Derivam do teorema os seguintes corolários:

Corolário 7.5. Sejam $A$ um anel, $a \in A$ tal que $A$ é $(a)$-Hausdorff e completo e X uma indeterminada sobre $A$.

Se a seqüência $\{\mathcal{A}nn(a^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é estacionária, então $A \cong \dfrac{A[[X]]}{(X - a)}$.

Recordamos que um anel $A$ é reduzido se $\sqrt{0} = (0)$.

Corolário 7.6. Sejam $A$ um anel, $a \in A$ tal que $A$ é $(a)$-Hausdorff, $\hat{A} = (A\hat{,}a)$ e X uma indeterminada sobre $A$.

Se uma das condições abaixo é satisfeita:

$(i)$ $A$ é Noetheriano;

$(ii)$ $a$ é regular;

$(iii)$ $ab = 0$ e $b^2 = 0 \Rightarrow b = 0$;

$(iv)$ $A$ é reduzido;

então, $\hat{A} \cong \dfrac{A[[X]]}{(X - a)}$ .

Demonstração:

Basta mostrar que $\{\mathcal{A}nn(a^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é estacionária e o resultado segue de (7.4).

$(i)$ Óbvio pela definição de anel Noetheriano (2.5).

$(ii)$ Como $a$ é regular, então $\mathcal{A}nn(a^n) = (0)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

$(iii)$ Seja $x \in \mathcal{A}nn(a^2) \Rightarrow a^2x = 0$. Se $b = ax$, então $ab = 0$ e $b^2 = 0$. Logo $b = 0$ e assim $x \in \mathcal{A}nn(a)$. Portanto $\mathcal{A}nn(a) = \mathcal{A}nn(a^2)$. Daí use (7.2).

$(iv)$ Se $b^2 = 0$, então $b \in \sqrt{0} = (0)$. Logo verifica-se $(iii)$.■

Um exemplo para ilustrar o corolário acima é:

Exemplo: Sejam $A$ um anel, $X$ e $Y$ são indeterminadas sobre $A$.
Desde que X é regular em $A[X]$, segue por (7.6):

$$A[[X]] \cong \frac{(A[X])[[Y]]}{(Y - X)}$$

Corolário 7.7. Sejam $A$ um anel, $a \in A$ tal que $A$ é $(a)$-Hausdorff e tal que a seqüência $\{\mathcal{A}nn(a^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é estacionária, $\hat{A} = (A\hat{,}a)$ e X uma indeterminada sobre $A$.

Se $f \in A[[X]]$ tal que $f(a) = 0$ em $\hat{A}$, então $f \in (X - a)$.

## I. 8. Extensão do isomorfismo (*)

Aqui verificamos a existência do isomorfismo (*) para ideais não principais e para anéis não Noetherianos, mediante algumas condições sobre certos completamentos de $A$ (Teorema 8.1) e também sob hipóteses sobre o próprio anel $A$ (Teorema 8.4). Temos assim uma extensão dos teoremas 5.6 e 7.4.

Começamos com o

Teorema 8.1.

Sejam $A$ um anel, $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ um ideal de $A$ tal que $A$ é $\mathfrak{a}$-Hausdorff, $\hat{A} = (A\hat{,}\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a}_i = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$, $A_i = (A\hat{,}\mathfrak{a}_i)$ e $X_1, \ldots, X_n$ são indeterminadas sobre $A$.

Se:

(i) $\exists\ j,\ 1 \le j \le n$ *t.q.* $a_j^m A_j$ é $\mathfrak{a}_j A_j$-fechado, $\forall\ m \in \mathbb{N}$;

(ii) $A_i$ é $a_i A_i$-separado, $\forall\ i = 1, \ldots, n$;

(iii) $\{\mathcal{A}nn_{A_i}(a_i^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é estacionária, $\forall\ i = 1, \ldots, n$;

então $\hat{A} \cong \dfrac{A[[X_1, \ldots, X_n]]}{(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)}$ .

Demonstração:

Por indução sobre $n$ = número de geradores de $\mathfrak{a}$.

$n = 1$: $\mathcal{O.K.}$, pelo teorema (7.4).

Se vale para $n - 1$, verifiquemos para $n$.
Consideremos $\forall\ i = 1, \ldots, n$:

- $R = \dfrac{A[[X_1, \ldots, X_n]]}{(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)}$

- $R_i = A[[X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n]]$

- $\mathfrak{n}_i = (X_1 - a_1, \ldots, X_{i-1} - a_{i-1}, X_{i+1} - a_{i+1}, \ldots, X_n - a_n)$

- $\bar{R}_i = R_i / \mathfrak{n}_i$

Pela hipótese de indução:

$$R \cong \frac{\bar{R}_i[[X_i]]}{(X_i - a_i)} \overset{\text{Teo. 7.4}}{\cong} (A_i \hat{\ }(a_i)) \ , \ \forall\ i = 1, \ldots, n.$$

Daí, $\forall\ i = 1, \ldots, n$, $R$ é $a_iR$-completo e por (3.2), $R$ é $\mathfrak{a}$-completo.

Segue também da hipótese $(ii)$ e do isomorfismo acima que $R$ é $a_jR$-separado, $\forall\ j \in \{1, \ldots, n\}$. Da hipótese $(i)$ e do lema 6.3, temos que $a_j^m R$ é $\mathfrak{a}_j R$-fechado, $\forall\ m \in \mathbb{N}$, $\forall\ j \in \{1, \ldots, n\}$. Logo, por (3.5) segue que $R$ é $\mathfrak{a}R$-separado.

Portanto de (3.9), em $A$ a $\mathfrak{a}$-topologia e a topologia induzida pela $\mathfrak{a}$-topologia de $R$ coincidem e $A$ é $\mathfrak{a}R$-denso em $R$. Daí $R \cong (A\hat{\ }\mathfrak{a})$. ∎

Vamos colocar algumas hipóteses sobre o próprio anel $A$. Para isso precisamos de dois lemas, que apenas enunciamos pois suas demonstrações são simples. Qualquer dúvida, investigar ([A-R], pág. 152 e 153).

<u>Lema 8.2.</u> Sejam $A$ um anel, $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ ideais de $A$ tais que $A$ é $\mathfrak{a}$-Hausdorff e $\mathfrak{b}$-Hausdorff, $\hat{A} = (A;\hat{\mathfrak{a}})$ e $\bar{A} = (A;\hat{\mathfrak{b}})$.

Se $\mathfrak{a}^n$ é $\mathfrak{b}$-fechado, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, <u>então</u>:

(i) $\bar{A}$ é $\mathfrak{b}\bar{A}$-Hausdorff.

(ii) Se $\mathfrak{a}$ é finitamente gerado, então $\mathfrak{a}^n\bar{A}$ é $\mathfrak{b}\bar{A}$-fechado, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Lembramos que se $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ são ideais de $A$, então o ideal quociente é definido como $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}) = \{x \in A : x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}\}$.

<u>Lema 8.3.</u> Sejam $A$ um anel, $\mathfrak{a}$ um ideal de $A$ tal que $A$ é $\mathfrak{a}$-Hausdorff, $a \in A$ e $\hat{A} = (A;\hat{\mathfrak{a}})$.

Se existe $k \in \mathbb{N}$ t.q. $(\mathfrak{a}^n : a^{k+1}) = (\mathfrak{a}^n : a^k)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, <u>então</u> $\mathcal{A}nn_{\hat{A}}(a^{k+1}) = \mathcal{A}nn_{\hat{A}}(a^k)$.

<u>Teorema 8.4.</u>

Sejam $A$ um anel, $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ um ideal de $A$ tal que $A$ é $\mathfrak{a}$-Hausdorff, $\hat{A} = (A;\hat{\mathfrak{a}})$, $\mathfrak{a}_i = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ e $X_1, \ldots, X_n$ são indeterminadas sobre $A$.

Se:

(i) $\mathfrak{a}_i^m$ é $(a_i)$-fechado, $\forall\, m \in \mathbb{N}$, $\forall\, i = 1, \ldots, n$;

(*ii*) $\exists\ k \in \mathbb{N}$ *t.q.* $(\mathfrak{a}_i^m : a_i^{k+1}) = (\mathfrak{a}_i^m : a_i^k)$, $\forall\ m \in \mathbb{N}$, $\forall\ i = 1, \ldots, n$;

(*iii*) $\exists\ j$, $1 \le j \le n$ *t.q.* $(a_j)^m$ é $\mathfrak{a}_j$-fechado, $\forall\ m \in \mathbb{N}$;

<u>então</u> $\hat{A} \cong \dfrac{A[[X_1, \ldots, X_n]]}{(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)}$ .

<u>Demonstração:</u>

As hipóteses (*i*) e (*iii*) implicam *resp.* por (8.2), nas hipóteses (*ii*) e (*i*) de (8.1).

A hipótese (*ii*) implica por (8.3) na hipótese (*iii*) de (8.1).∎

# CAPÍTULO II

## O CORPO QUOCIENTE DE $D[[X]]$

### II. 1. Introdução

Dedicamos este capítulo ao estudo de alguns resultados sobre o corpo quociente de $D[[X]]$, onde $D$ é um domínio.

Assim sendo, em (II.2) mostramos que, se um elemento $a \in D$ satisfaz uma certa condição, então mudando de $D[[X]]$ para $D[[X/a]]$, obtemos um grau de transcendência infinito entre seus corpos quocientes. São apresentadas algumas conseqüências desse resultado.

Para analisarmos a relação entre os corpos quocientes de $D[[X]]$ e de $J[[X]]$, onde $J$ é um sobreanel de $D$ e também entre os corpos quocientes de $J[[X]]$ e de $L[[X]]$, com $L$ outro sobreanel de $D$, apresentamos no item (II.3) vários conceitos como o fecho inteiro completo, domínios de Krull, domínios Arquimedianos, domínios fechados por radicais e domínios de Prüfer.

Verificamos quando o fecho inteiro completo de um anel de valorização $V$ determina o corpo quociente de $V[[X]]$ em (II.4). O conceito de grupo de divisibilidade é introduzido para observarmos que muitas propriedades de um domínio são também propriedades de seu respectivo grupo de divisibilidade. Dessa forma, utilizando esse conceito e o teorema de Jaffard, construímos dois contra-exemplos que nos mostram que não é possível estender o resultado mencionado no início do parágrafo para um domínio $D$ qualquer.

**Durante esse capítulo, $D$ representa sempre um domínio, $J$ e $L$ sobreanéis de $D$ e $K$ o corpo quociente de $D$ (também denotado por $Q(D)$).**

## II. 2. Os corpos quocientes de $D[[X]]$ e $K[[X]]$

Para iniciar nosso estudo sobre o corpo quociente de $D[[X]]$, onde $D$ é um domínio, vemos neste item primeiramente um resultado sobre o corpo quociente de $K[[X]]$.

Logo a seguir, introduzimos alguns pré-requisitos para a demonstração do teorema principal (Teo. 2.7) desta seção, que trata do seguinte ponto: se mudamos de $D[[X]]$ para $D[[X/a]]$, o que acontece com seus corpos quocientes?

Por fim, são mostradas conseqüências deste teorema, sendo que para provar uma delas, exibimos os conceitos de um sobreanel e de um sobreanel quociente de um anel. Definimos também a QR-propriedade de um domínio.

Iniciamos com o

Teorema 2.1.

Seja $K$ um corpo.

Então $Q(K[[X]]) = (K[[X]])[1/X]$.

Demonstração:

É claro que $(K[[X]])[1/X] \subseteq Q(K[[X]])$.

Agora se $g(X) \in K[[X]]$, então $g(X) = X^n(a_n + a_{n+1}X + \dots)$ com $a_n \neq 0$, para algum $n$. Portanto $g(X) = X^n h(X)$ com $h(X)$ claramente invertível em $K[[X]]$ e assim segue que $Q(K[[X]]) \subseteq (K[[X]])[1/X]$. ∎

Um fato bastante conhecido é que se $D$ é um domínio e $K$ o seu corpo quociente, então os corpos quocientes de $D[X]$ e $K[X]$ coincidem. Assim, cabe a pergunta: isso também ocorre com os corpos quocientes de $D[[X]]$ e $K[[X]]$?

Gilmer ([G2], Teorema 1, pág. 1138) provou que $Q(D[[X]]) = Q(K[[X]])$ é equivalente a duas outras condições, uma delas é $\bigcap_{i=1}^{\infty} a_i D \neq 0$ para qualquer seqüência de ideais não nulos $a_i D$, $i = 1, 2, \dots$ . Se essa condição não é satisfeita, temos então que os corpos quocientes diferem. Estudamos quão "maior" é portanto $Q(K[[X]])$ do que $Q(D[[X]])$. Mais especificamente verificamos que se $a \in D$ é um elemento não nulo de $D$, satisfazendo $\bigcap_{i=1}^{\infty} a^i D = 0$, então o grau de transcendência de $Q(D[[X/a]])$ sobre $Q(D[[X]])$ é infinito.

No final desse capítulo, um exemplo de um domínio $D$ é dado para ilustrar o caso em que $Q(D[[X]]) = Q(K[[X]])$.

Antes temos alguns pré-requisitos:

Definição 2.2. Seja $K/k$ uma extensão de corpos.
Definimos:

(i) Um subconjunto $S$ de $K$ é algebricamente independente sobre $k$, se dado um subconjunto finito $\{s_1, s_2, \dots, s_j\}$ de $S$, se existe $f(X_1, \dots, X_j)$ em $k[X_1, \dots, X_j]$ tal que $f(s_1, \dots, s_j) = 0$, então $f \equiv 0$.

(ii) O grau de transcendência de $K$ sobre $k$ é a cardinalidade de um subconjunto $S$ de $K$ tal que $S$ é algebricamente independente sobre $k$ e a cardinalidade de $S$ é a maior entre os subconjuntos de $K$ que satisfazem tal propriedade. Denotamos $\mathcal{T}r.d.(K|k)$.

(iii) A base de transcendência de $K$ sobre $k$ é um subconjunto $S$ de $K$ que é algebricamente independente sobre $k$ e que é maximal (com respeito à inclusão) aos subconjuntos de $K$ que satisfazem tal propriedade, ou equivalentemente, que $S$ é algebricamente independente sobre $K$ e $K|k(S)$ é algébrica.

Definição 2.3. Seja $f \in K[[X]]$, $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$.
Definimos o suporte de $f$ como $supp(f) = \{i \in \mathbb{N} : a_i \neq 0\}$.

Definição 2.4. ("*Special Large Gap Property*" - *SLGP*)

Sejam $D$ um domínio e $a \in D^* = D \setminus \{0\}$.

Um conjunto finito $\{f_i\}_{i=0}^{n}$ de elementos de $D[[X/a]]$ satisfaz a *SLGP* se dado $r > 0$, $\exists\ R \in \mathbb{N}$, $R \geq r$, tal que cada potência de $X^{R-r}$ até $X^{R+r}$ possui coeficiente nulo em cada $f_i$, exceto a potência $X^R$ em $f_0$ que tem coeficiente $a^{-R}$.

Para visualizar melhor tal definição, considere a matriz $(n + 1) \times \infty$, onde a $(p, q)$-ésima coordenada é o coeficiente de $X^q$

em $f_{p-1}$, isso significa que dado $r > 0$, existe uma submatriz $(n + 1) \times (2r + 1)$ da seguinte forma:

$$
\begin{array}{c}
\\
f_0 \\
f_1 \\
\vdots \\
f_n
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc}
X^{R-r} & & X^{R-1} & X^{R} & X^{R+1} & & X^{R+r}
\end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & \dots & 0 & a^{-R} & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Lema 2.5. Sejam $D$ um domínio e $a \in D^*$.

Seja $\{f_i\}_{i=0}^{n}$ um subconjunto de $D[[X/a]]$ que satisfaz a SLGP .

Se existe $\{d_i\}_{i=0}^{n}$ subconjunto de $D[[X]]$ tal que $d_0 f_0 + \dots + d_n f_n = 0$ com $d_0 \neq 0$, então $\bigcap_{i=1}^{\infty} a^i D \neq 0$.

Demonstração:

Consideremos $d_0 = \sum_{i=m}^{\infty} c_i X^i$ com $c_m \neq 0$.

Dado $r > m$, como $\{f_i\}$ satisfaz SLGP, $\exists$ $R \in \mathbb{N}$ como em (2.4).

Se definimos para $i = 0, \dots, n$:

$f_i'$ = soma dos termos de $f_i$ com grau $< R - r$.

$f_i''$ = soma dos termos de $f_i$ com grau $> R + r$.

temos $f_0 = f_0' + a^{-R}X^R + f_0''$ e $f_i = f_i' + f_i''$, $\forall$ $i = 1, \dots, n$.

Consideremos $c' = d_0 f_0' + \dots + d_n f_n'$ e $c'' = d_0 f_0'' + \dots + d_n f_n''$.

Pela hipótese, segue que $c' + c'' + d_0 a^{-R} X^R = 0$. Multiplicando essa expressão por $a^{R-r}$ e igualando a zero o coeficiente de $X^{R+m}$, obtemos $c_m \in a^r D$. Agora fazendo $r$ variar teremos $c_m \in a^r D$, $\forall$ $r$, isto é, $\bigcap a^r D \neq 0$. ∎

O lema seguinte é uma simples conseqüência da definição da multiplicação em séries de potências.

Lema 2.6. Sejam $p_1, \ldots, p_Q \in K[[X]]$.
Se $S \in \mathbb{N}$, consideremos para $q = 1, \ldots, Q$:

$$s'(q) = \max\{j \in supp(p_q) : j < S\}$$
$$s''(q) = \max\{j \in supp(p_q) : j < s'(q)\}.$$

Se $S' = \sum_{q=1}^{Q} s'(q)$ e $S'' = \sum_{q=1}^{Q} s''(q)$, então:

(i) se $S' < S$, então $S' = \max\left\{j \in supp\left(\prod_{q=1}^{Q} p_q\right) : j < S\right\}$ e o coeficiente de $X^{S'}$ em $\prod p_q$ é $\prod_{q=1}^{Q} p_{q,s'(q)}$, onde $p_{q,s'(q)}$ é o coeficiente de $X^{s'(q)}$ em $p_q$.

(ii) se, em adição às condições acima, temos para algum $n$, $s'(q) - s''(q) > n$, $\forall\, q$, então $S'' < S' - n$.

Vamos finalmente ao resultado principal. Nosso objetivo é construir uma base de transcendência infinita de $Q(D[[X/a]])$ sobre $Q(D[[X]])$.

Teorema 2.7.

Sejam $D$ um domínio e $a \in D^*$.
Se $\bigcap_{i=1}^{\infty} a^i D = 0$, então o grau de transcendência de $Q(D[[X/a]])$ sobre $Q(D[[X]]))$ é infinito.

Demonstração:

Consideremos $\lambda : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que:

(*i*) $\lambda(n) > n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

(*ii*) $\lambda(n + 1) > \lambda(n) + 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

(*iii*) dado $N > 0$, $\exists\, n_o \in \mathbb{N}$ *t.q.* $\lambda(n + 1) > N.\lambda(n)$, $\forall\, n \ge n_o$.

$\left(\text{A função } \lambda(n) = 2^{2^n} \text{ satisfaz as condições acima}\right)$.

Definimos em $D[[X/a]]$: $a_i = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{X}{a}\right)^{\lambda^i(n)}$, $\forall\, i \in \mathbb{N}$, onde $\lambda^i = \lambda \circ \ldots \circ \lambda$, ou seja, $\lambda$ composta $i$ vezes.

De $supp(a_i) = \mathcal{I}m(\lambda^i)$, onde $\mathcal{I}m(\lambda^i)$ é a imagem de $\lambda^i$, segue o fato : $supp(a_{i+1}) \subset supp(a_i)$.

Suponhamos por absurdo que $\{a_i\}$ é algebricamente dependente sobre $Q(D[[X]])$. Assim, existe $I \in \mathbb{N}$ e um polinômio $p'(X_1, \ldots, X_I)$ em $(Q(D[[X]]))[X_1, \ldots, X_I]$ tal que $p'(a_1, \ldots, a_I) = 0$. Sem problemas, podemos reduzir os coeficientes de p' em um denominador comum e obter um novo polinômio p em $(D[[X]])[X_1, \ldots, X_I]$ ainda se anulando em $(a_1, \ldots, a_I)$.

Consideremos $\mathcal{X} = \{a_1^{e(1)} \ldots a_I^{e(I)}$ correspondentes aos termos $X_1^{e(1)} \ldots X_I^{e(I)}$ de p com coeficientes não nulos$\}$.

Nossa idéia é mostrar que $\mathcal{X}$ satisfaz a *SLGP*.

Dados $r$, $N \in \mathbb{N}$, podemos escolher $S \in supp(a_i)$, $\forall\, i = 1, \ldots, I$, tal que tomando $s'(i)$ e $s''(i)$, $\forall\, i = 1, \ldots, I$ conforme lema 2.6, teremos as afirmações abaixo:

(I) $s'(I) < s'(I - 1) < \ldots < s'(1)$.

(II) $s'(i) > r$, $\forall\, i = 1, \ldots, I$.

(III) $N.s'(i) < s'(i - 1)$, $\forall\, i = 2, \ldots, I$.

(IV) $N.s'(1) < S$.

(V) $s'(i) - s''(i) > r$, $\forall\, i = 1, \ldots, I$.

Usamos para demonstrá-las a seguinte observação (*): se dois elementos são adjacentes no $supp(a_i)$, então não podem ambos estar em $supp(a_{i+1})$. Pois, se $\alpha$ e $\beta$ são adjacentes em $supp(a_i)$, então $\exists\ m \in \mathbb{N}$ *t.q.* $\alpha = \lambda^i(m)$ e $\beta = \lambda^i(m + 1)$. Como $supp(a_{i+1}) \subset supp(a_i)$, se $\alpha$ e $\beta$ estão em $supp(a_{i+1})$ então eles também são adjacentes aí. Logo, $\exists\ n \in \mathbb{N}$ *t.q.* $\alpha = \lambda^{i+1}(n)$ e $\beta = \lambda^{i+1}(n + 1)$. É fácil ver que $\lambda^i$ é 1-1, assim temos que $\lambda(n) = m$ e $\lambda(n + 1) = m + 1$, contrariando $(ii)$ da definição de $\lambda$.

Agora, dados $r$ e $N$, vamos escolher $S$ que satisfaça as condições de (I) até (V):

(1º) Ache em $supp(a_1)$ um elemento $> r$. Esse elemento existe pois $\lambda(r) \in supp(a_1)$ e $\lambda(r) > r$.

(2º) Dado $N > 0$, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ *t.q.* $\lambda(m + 1) > N.\lambda(m)$, $\forall\ m \geq n_0$. Tome $n_1 > max\{n_0, r\}$. Logo $\lambda(n_1) > \lambda(n_0)$ e $\lambda(n_1) > \lambda(r)$. Supondo $N \geq 2$, temos então $\forall\ m > n_1$:

$$\lambda(m + 1) - \lambda(m) > (N - 1).\lambda(m) \geq \lambda(m) > \lambda(n_1) > r \qquad (**)$$

Agora consideremos $s''(I) = min\{j \in supp(a_I) : j > \lambda(n_1)\}$,
$s'(I) = min\{j \in supp(a_I) : j > s''(I)\}$ e
$S = min\{j \in supp(a_I) : j > s'(I)\}$.

Portanto valem:

(I) Como $S$ e $s'(i)$ são adjacentes em $supp(a_i)$ e $S$ tem que estar em $supp(a_{i+1})$, então $s'(i) \notin supp(a_{i+1})$ por $(*)$. Logo $s'(i + 1) < s'(i)$.

(II) Da definição $s'(i) > s'(I) > \lambda(n_1) > r$.

(III) Como $s'(i) \in supp(a_1)$, $\exists\ m_i$ *t.q.* $\lambda(m_i) = s'(i)$. De (II), $\lambda(m_i) = s'(i) > \lambda(n_1)$. Portanto $\lambda(m_i + 1) > N.\lambda(m_i) > N.s'(i)$. Mas $s'(i) < s'(i - 1)$, o que implica $\lambda(m_i) < \lambda(m_{i-1})$. Então $s'(i - 1) = \lambda(m_{i-1}) \geq \lambda(m_i + 1) > N.s'(i)$.

(IV) Por raciocínio análogo a (III) sai $S > N.s'(1)$.

(V) Usando a notação de (III), desde que $s'(i)$ e $s''(i)$ são adjacentes, então $s''(i) = \lambda(m_i - 1)$. Como $m_i > n_1$, de (**) segue que $s'(i) - s''(i) = \lambda(m_i) - \lambda(m_i - 1) > r$.

Consideremos $T$ o grau total de p, $N = T + 1$ e $r$ qualquer.

Ordenando $\mathcal{K}$ lexicograficamente pelos expoentes dos $a_i$'s, denotamos $\theta' = a_1^{e'(1)} \dots a_I^{e'(I)}$ o maior elemento de $\mathcal{K}$ (esse elemento será o $f_0$ da *SLGP*) e $\theta'' = a_1^{e''(1)} \dots a_I^{e''(I)}$ qualquer outro elemento de $\mathcal{K}$. Logo, $T = e'(1) + \dots + e'(I)$.

Temos que, usando o lema 2.6 para $a_1^{e'(1)}, \dots, a_I^{e'(I)}$:

$S' = e'(1)s'(1) + \dots + e'(I)s'(I) \overset{(I)}{<} e'(1)s'(1) + \dots + e'(I)s'(1) = T.s'(1) = (N - 1).s'(1) < S \Rightarrow S'$ é o maior elemento em $supp(\theta')$ que é menor do que $S$.

Chamemos $S'$ de $R$ (antecipando seu papel na *SLGP*). Daí $R < (N - 1)s'(1) < S - s'(1) \Rightarrow R + s'(1) < S \overset{(II)}{\Rightarrow} R + r < S$.

Como $S'$ é o maior elemento em $supp(\theta')$ que é menor do que $S$, então todos os coeficientes dos termos de grau $R + 1$ até $R + r$ são nulos.

De (V), temos que $s'(i) - s''(i) > r$, $\forall\ i = 1, \dots, I$, logo por (2.6), $S'' < R - r$. Mas $S''$ é o segundo maior elemento de $supp(\theta')$ que é menor do que $S$, então todos os coeficientes dos termos de grau $R - r$ até $R - 1$ são nulos.

Por (2.6), o coeficiente de $X^R$ em $\theta'$ é $(a^{-s'(1)})^{e'(1)} \dots (a^{-s'(I)})^{e'(I)} = a^{-R}$. Portanto $\theta'$ serve para o papel de $f_0$ da *SLGP*.

Agora usando (2.6) para $a_1^{-s''(1)}, \dots, a_I^{-s''(I)}$, temos que o maior elemento em $supp(\theta'')$ que é menor do que $S$ é $e''(1)s'(1) + \dots + e''(I)s'(I)$.

Começando com $i = 1$, seja $i_0$ o menor inteiro tal que

$e''(i_o) < e'(i_o)$. Logo, $e''(i_o) + 1 \leq e'(i_o) \Rightarrow e'(i_o) - e''(i_o) \geq 1$.

De (III), temos que

$$s'(i_o) > N.s'(i_o + 1) = T.s'(i_o + 1) + s'(i_o + 1) \overset{(II)}{>}$$
$$> T.s'(i_o + 1) + r = (e'(1) + \ldots + e'(I))s'(i_o + 1) + r \geq$$
$$\geq (e''(i_o + 1) + \ldots + e''(I))s'(i_o + 1) + r \overset{(I)}{>} e''(i_o + 1).$$
$$.s'(i_o + 1) + \ldots + e''(I)s'(I) + r \geq [e''(i_o + 1) - e'(i_o + 1)].$$
$$.s'(i_o + 1) + \ldots + [e''(I) - e'(I)]s'(I) + r$$

Logo de $e'(i_o) - e''(i_o) \geq 1$:

$$[e'(i_o) - e''(i_o)]s'(i_o) > [e''(i_o + 1) - e'(i_o + 1)].$$
$$.s'(i_o + 1) + \ldots + [e''(I) - e'(I)]s'(I) + r \Rightarrow [e'(1) - e''(1)].$$
$$.s'(1) + \ldots + [e'(I) - e''(I)]s'(I) > r \Rightarrow e''(1)s'(1) + \ldots +$$
$$+ e''(I)s'(I) < R - r$$

Assim, como $e''(1)s'(1) + \ldots + e''(I)s'(I)$ é o maior elemento de $supp(\theta'')$ que é menor do que $S$, todos os coeficientes de termos de grau $R - r$ até $R + r$ em $\theta''$ são nulos.

Portanto $\mathcal{X}$ satisfaz a *SLGP*.

Então p é de fato uma equação de dependência linear entre os elementos de $\mathcal{X}$ (por construção com coeficientes não nulos).

Logo, por (2.5), $\bigcap a_i D \neq 0$ (*Contradição* !).

Assim, como a afirmação de que $\{a_i\}$ é algebricamente dependente sobre $Q(D[[X]])$ nos levou a uma contradição, segue que $\{a_i\}$ é algebricamente independente sobre $Q(D[[X]])$.

Portanto $\mathcal{T}r.d.(Q(D[[X/a]]|Q(D[[X]])) = \infty$ . ∎

Um corolário de demonstração quase imediata é o:

Corolário 2.8. Sejam $D$ um domínio Noetheriano e $a \in D^* \setminus \mathcal{U}(D)$.

Então o grau de transcendência de $Q(D[[X/a]]$ sobre $Q(D[[X]])$ é infinito.

Demonstração:

Use o corolário 2.26 do capítulo I e o teorema 2.7 deste capítulo. ∎

Já o corolário a seguir é um pouco mais elaborado e traz um interessante resultado.

Precisamos antes das definições abaixo:

Definição 2.9. Sejam $D$ um domínio e $K = Q(D)$.

Um sobreanel de $D$ é um subanel de $K$ contendo $D$.

Definição 2.10. Seja $A$ um anel comutativo com unidade 1.

Um sistema multiplicativo S de $A$ é um subconjunto de $A$ tal que $1 \in S$ e se $x, y \in S \Rightarrow xy \in S$.

Definição 2.11. Sejam $A$ um anel comutativo com unidade e $S$ sistema multiplicativo de $A$.

Definimos em $A \times S$ a relação de equivalência $*$ da seguinte forma $\forall\, a, a' \in A, \forall\, s, s' \in S$:

$$(a, s) * (a', s') \Leftrightarrow \exists\, t \in S \text{ t.q. } t(as' - a's) = 0.$$

Denotamos a classe $\overline{(a, s)}$ por $\dfrac{a}{s}$.

O conjunto $A_S = \left\{\dfrac{a}{s} : a \in A \text{ e } s \in S\right\}$ é chamado de sobreanel quociente de $A$.

Se $S = A \setminus \mathfrak{p}$ para $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ (Cap. I, pág. 9), então $A_S$ é um anel local. Chamamos $A_S$ de <u>localização</u> de $A$ em $\mathfrak{p}$ e denotamos $A_{\mathfrak{p}}$.

<u>Definição 2.12.</u> Seja $D$ um domínio.

Dizemos que $D$ satisfaz a <u>$QR$-propriedade</u> se todo sobreanel de $D$ é um sobreanel quociente de $D$ com respeito a algum sistema multiplicativo de $D^*$.

Usando essas definições podemos provar o

<u>Corolário 2.13.</u> Sejam $D_1$ e $D_2$ sobreanéis distintos de $\mathbb{Z}$ (anel dos inteiros).

Se $D_1 \subsetneq D_2$, <u>então</u> o grau de transcendência de $Q(D_2[[X]])$ sobre $Q(D_1[[X]])$ é infinito.

<u>Demonstração:</u>

Por ([G-O], Teorema 2.7, pág. 101), como $\mathbb{Z}$ é um *d.i.p.* (domínio de ideais principais), então $\mathbb{Z}$ satisfaz a $QR$-propriedade. Logo, qualquer sobreanel de $\mathbb{Z}$ é *d.i.p.* e portanto, satisfaz também a $QR$-propriedade.

Então como $D_2$ é um sobreanel de $D_1$, existe um sistema multiplicativo S de $D_1$ tal que $D_2 = (D_1)_S$. Assim, tomando $a \in S$, $a$ não unidade de $D_1$ temos que $a^{-1} \in D_2$.

Do fato de $a$ ser não unidade no *d.f.u.* $D_1$, então $\bigcap a^i D_1 = 0$.

Assim do teorema 2.7, temos que

$$\mathcal{T}r.d.(Q(D_1[[X/a]])|Q(D_1[[X]])) = \infty .$$

Como $D_1 \subsetneq D_2$ e $a \in \mathcal{U}(D_2)$, então $Q(D_1[[X/a]]) \subset Q(D_2[[X]])$.

Portanto $\mathcal{T}r.d.(Q(D_2[[X]])|Q(D_1[[X]])) = \infty$. ∎

Corolário 2.14. Sejam $D_1 \subsetneq D_2$ dois domínios distintos. Se $\mathfrak{p}_1 D_2 = D_2$ para algum primo $\mathfrak{p}_1$ minimal de $D_1$ (com respeito à inclusão), então $\mathcal{T}r.d.(Q(D_2[[X]])|Q(D_1[[X]])) = \infty$.

Demonstração:

Desde que $\mathfrak{p}_1 D_2 = D_2$, podemos tomar $a \in \mathfrak{p}_1$ tal que $a^{-1} \in D_2$, agora por ([O], Corolário 1.4, pág. 323) segue que $\bigcap a^i D_1 = 0$.

Assim de (2.7), $\mathcal{T}r.d.(Q(D_1[[X/a]])|Q(D_1[[X]])) = \infty$. Desde que $a^{-1} \in D_2$, obtemos que $\mathcal{T}r.d.(Q(D_2[[X]])|Q(D_1[[X]])) = \infty$. ∎

## II. 3. Relações entre $Q(D[[X]])$ e $Q(J[[X]])$

### II. 3. 1. Os corpos $Q(D[[X]])$ e $Q(J[[X]])$

Estudamos aqui alguns resultados que relacionam os corpos quocientes $Q(D[[X]])$ com $Q(J[[X]])$, onde $J$ é um sobreanel de $D$.

Dessa forma, enunciamos quatro lemas necessários para a prova de um dos principais teoremas dessa seção, que fornece uma nova caracterização de um domínio completa e integralmente fechado, um conceito que daremos primeiramente.

O outro teorema importante é aquele que fornece condições equivalentes para a igualdade de $Q(D_S[[X]])$ e $Q(D[[X]])$.

Para finalizar, vemos que se $D$ é um domínio fechado por radicais, na verdade podem ocorrer apenas dois casos no tocante ao corpos quocientes de $Q(D[[X]])$ e $Q(J[[X]])$.

Primeiramente, damos alguns conceitos que nos servirão para entender os resultados posteriores.

Definição 3.1. *(a)* Um elemento $k \in K$ é quase inteiro sobre $D$ se $\exists\ d \in D^*$ tal que $dk^n \in D$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

*(b)* Um elemento $k \in K$ é inteiro sobre $D$ se existem $d_1, \ldots, d_n$ em $D$ tais que $k^n + d_1 k^{n-1} + \ldots + d_n = 0$.

Observação: Todo elemento inteiro é quase inteiro.

Definição 3.2. *(a)* O fecho inteiro completo de $D$ é definido por $FIC(D) = \{k \in K : k$ é quase inteiro sobre $D\}$.

*(b)* O fecho inteiro de $D$ é definido por $FI(D) = \{k \in K : k$ é inteiro sobre $D\}$.

Definição 3.3. *(a)* Dizemos que $D$ é completa e integralmente fechado *(c.i.f.)* se $D = FIC(D)$.

*(b)* Dizemos que $D$ é integralmente fechado *(i.f.)* se $D = FI(D)$.

Definição 3.4. Dizemos que $D$ é fechado por radicais se $\forall\ k \in K$ tal que $k^n \in D$ para algum $n$, vale que $k \in D$.

Lema 3.5. $K[[X]] \cap Q(D[[X]]) \subset \bigcup_{a \in D^*} a^{-1}D[[X/a]]$ .

Demonstração:

Seja $p = \dfrac{c}{b} \in K[[X]] \cap Q(D[[X]])$, com $c = c_0 + c_1X + \ldots$ e

$b = b_0 + b_1X + \ldots$, $c_i$, $b_j \in D$.

Podemos considerar $b_0 \neq 0$, pois se $b_0 = 0$, como $p \in K[[X]]$, então $c_0 = 0$ e poderíamos eliminar todas as potências de X de $c$ e $b$ até encontrar um $b_i \neq 0$.

Temos que $b_0^{-1}b \in D[[X/b_0]]$ tem termo constante igual a 1. Logo $b_0^{-1}b$ possui inverso em $D[[X/b_0]]$ (Cap. I, Prop. 2.4(D)). Segue que $c(b_0b^{-1}) \in D[[X/b_0]]$. Mas $p = b_0^{-1}[c(b_0b^{-1})]$, logo $p \in b_0^{-1}D[[X/b_0]]$.∎

Esse resultado é usado na prova do lema:

<u>Lema 3.6.</u> Seja $k \in K^*$.

Consideremos as seguintes condições sobre $k$:

( $a$ ) $k$ é quase inteiro sobre $D$.

( $b$ ) $(D[k])[[X]] \subseteq Q(D[[X]])$.

( $c$ ) $(E[k])[[X]] \subseteq Q(D[[X]])$, onde $E$ é o subanel de $D$ gerado por 1.

<u>Então</u> ( $a$ ) $\rightarrow$ ( $b$ ) $\rightarrow$ ( $c$ ) e se $D$ é fechado por radicais vale também ( $c$ ) $\rightarrow$ ( $a$ ).

<u>Demonstração:</u>

( $a$ ) $\Rightarrow$ ( $b$ ) Suponhamos $k$ quase inteiro sobre $D$. Logo $\exists\, d \in D^*$ tal que $dk^n \in D$, $\forall\, n$, e assim $d(D[k]) \subseteq D$.

Tomemos $p \in (D[k])[[X]]$, logo $dp \in D[[X]]$ e $p = dp/p \in Q(D[[X]])$.

( $b$ ) $\rightarrow$ ( $c$ ) Como $E \subseteq D$, $E[k] \subseteq D[k]$ e portanto $(E[k])[[X]] \subseteq (D[k])[[X]] \subseteq Q(D[[X]])$.

($D$ fechado por radicais + ( $c$ )) $\rightarrow$ ( $a$ ) Tomemos $p = k^4X + k^9X^2 + \ldots + k^{(n+1)^2}X^n + \ldots \in (E[k])[[X]] \subseteq Q(D[[X]])$.

Desde que $p \in K[[X]]$, então $p \in K[[X]] \cap Q(D[[X]])$. Assim, pelo lema 3.5, $\exists\ a \in D^*$ tal que $p \in a^{-1}D[[X/a]]$. Logo $p = a^{-1}\left(d_0 + d_1 \dfrac{X}{a} + \ldots\right)$ e assim $k^{(n+1)^2} = d_n a^{-(n+1)}$, $\forall\ n$. Então, $(ak^{n+1})^{n+1} \in D$, $\forall\ n$ e como $D$ é fechado por radicais, $ak^{n+1} \in D$, $\forall\ n$, i.é., $k$ é quase inteiro sobre $D$. ∎

Usando uma definição nova, vemos uma outra implicação do lema acima.

Definição 3.7. Um elemento $a \in D$ é dito limitado se $\bigcap a^i D \neq 0$.

Observação: $a$ é limitado sobre $D \leftrightarrow \exists\ d \in a^i D,\ \forall\ i \leftrightarrow$ $\leftrightarrow da^{-i} \in D,\ \forall\ i \leftrightarrow a^{-1}$ é quase inteiro sobre $D$.

Lema 3.8. Se no lema 3.6, $k$ é da forma $a^{-1}$ para algum $a \in D^*$, então ( c ) $\Rightarrow$ ( a ) sem qualquer condição sobre $D$.

Demonstração:

Temos que $E[[X/a]] \subseteq (E[a^{-1}])[[X]] \subseteq Q(D[[X]])$. Logo qualquer série $\sum_{i\in I}\left(\dfrac{X}{a}\right)^i \in Q(D[[X]])$, $\forall\ I$ subconjunto de $\mathbb{N}$.

Pela demonstração do teorema 2.7, se $a$ fosse não limitado, então um conjunto dessas séries seria algebricamente independente sobre $Q(D[[X]])$. Portanto, $a$ é limitado e pela observação, $a^{-1}$ é quase inteiro sobre $D$. ∎

Lema 3.9. Sejá $D$ um domínio.

Se $D$ é $c.i.f.$, então valem:

(i) $D$ é fechado por radicais.

(*ii*) $D$ é *i.f.*

Demonstração:

(*i*) Seja $k = a/b \in K$ ($a$, $b \in D$) tal que $\exists\ n \in \mathbb{N}$ com $k^n \in D$.

Consideremos $\alpha = b^n \in D^*$. Logo, $\alpha k^i = b^{n-i}a^i \in D$, $\forall\ i \leq n$. Se $i > n$, então $\exists\ p$, $q \in \mathbb{N}$, $q < n$, tal que $i = pn + q$. Logo $\alpha k^i = k^{pn}\ \alpha k^q \in D$, pois $k^n \in D$ e $q < n$. Assim, $k$ é quase inteiro sobre $D$, o que implica pela hipótese que $k \in D$. Portanto, $D$ é fechado por radicais.

(*ii*) Seja $k = a/b \in FI(D)$ com $a$, $b \in D$. Logo existem $d_1$, ..., $d_n \in D$ tal que $k^n + d_1k^{n-1} + + \ldots + d_n = 0$. Tomemos $d = b^n$. É fácil ver que $dk^i \in D$, $\forall\ i$. Então $k$ é quase inteiro sobre $D$, o que implica $k \in D$. Portanto $D$ é *i.f.* ∎

Vamos agora relacionar a noção de completa e integralmente fechado e os corpos quocientes de anéis de séries de potências.

Teorema 3.10.

Seja $D$ um domínio.
Então são equivalentes:

(*i*) $Q(D[[X]]) \neq Q(J[[X]])$ para qualquer $J$ sobreanel próprio de $D$.

(*ii*) $\mathcal{T}r.d.(Q(J[[X]])|Q(D[[X]])) = \infty$, para qualquer $J$ sobreanel próprio de $D$.

(*iii*) $D$ é *c.i.f.*

(*iv*) $D[X]$ é c.i.f.

(*v*) $D[[X]]$ é c.i.f.

Demonstração:

(*ii*) $\leftrightarrow$ (*iii*) Ver ([AR], Corolário 1.9, pág. 184).

(*iii*) $\leftrightarrow$ (*iv*) $\leftrightarrow$ (*v*) Ver ([G1], Teorema 13.9, pág. 141).

(*i*) $\rightarrow$ (*iii*) Se $D$ não fosse c.i.f., $\exists\ k \in K\setminus D$ tal que $k$ é quase inteiro sobre $D$. Logo por (3.6), $(D[k])[[X]] \subseteq Q(D[[X]])$, donde $Q((D[k])[[X]]) \subseteq Q(D[[X]])$. Daí, como a inclusão contrária é óbvia, temos uma contradição.

(*iii*) $\rightarrow$ (*i*) Tomemos um sobreanel $J$ próprio de $D$.

Suponhamos que $Q(J[[X]]) = Q(D[[X]])$.

Consideremos $k \in J\setminus D$ e então temos: $k \in J\setminus D \rightarrow$ $\rightarrow D \subset D[k] \subseteq J \rightarrow Q(D[[X]]) \subseteq Q((D[k])[[X]]) \subseteq Q(J[[X]]) \rightarrow$ $\rightarrow Q((D[k])[[X]]) = Q(D[[X]]) \rightarrow (D[k])[[X]] \subseteq Q(D[[X]])$.

Da hipótese e de (3.9), segue que $D$ é fechado por radicais. Daí pelo lema 3.6., $k$ é quase inteiro sobre $D$, o que implica que $k \in D$. (*Contradição* !)

Portanto $Q(D[[X]]) \neq Q(J[[X]])$. ∎

Abaixo damos uma relação entre $Q(D[[X]])$ e $Q(D_S[[X]])$ (onde S é um sistema multiplicativo de $D$) que é semelhante àquela feita por Gilmer [G2].

Teorema 3.11.

Seja S um sistema multiplicativo de $D^*$.
Então são equivalentes:

(*i*) $Q(D[[X]]) = Q(D_S[[X]])$.

(ii) $D_S[[X]] \subseteq (D[[X]])_{D^*}$.

(iii) Para qualquer seqüência $s_1, s_2, s_3, \dots$ de $S$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} s_i D \neq 0$.

Demonstração:

(i) $\rightarrow$ (iii) Dada uma seqüência $s_1, s_2, s_3, \dots$ em $S$, consideremos $a_k = (s_1 \dots s_{k+1})^{-1} \in D_S$, $\forall\, k = 0, 1, \dots$ . Logo, temos que $a = a_0 + a_1 X + \dots \in D_S[[X]]$.

Mas $D_S[[X]] \subseteq Q(D_S[[X]]) = Q(D[[X]])$, o que implica que $\exists\, b = b_0 + b_1 X + \dots \in D[[X]]$ tal que $ba \in D[[X]]$.

Sem perda de generalidade, podemos supor $b_0 \neq 0$.

Existe em $D[[X]]$, $c = c_0 + c_1 X + \dots = ba$, daí:

$$\forall\, k = 0, 1, \dots, \qquad c_k = \frac{b_0 + (b_1 + \dots + b_k s_2 \dots s_k) s_{k+1}}{s_1 s_2 \dots s_{k+1}} \rightarrow$$

$$\rightarrow b_0 \in s_{k+1} D, \ \forall\, k \rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} s_i D \neq 0.$$

(iii) $\rightarrow$ (ii) Dado $p = p_0 + p_1 X + \dots$ em $D_S[[X]]$. Logo cada $p_k = \dfrac{d_k}{s_k}$ com $d_k \in D$ e $s_k \in S$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

Seja $s \in \bigcap s_i D$. Logo $sp \in D[[X]]$, donde $p \in (D[[X]])_{D^*}$.

(ii) $\rightarrow$ (i) Temos que $D_S[[X]] \subseteq (D[[X]])_{D^*}$, assim $Q(D_S[[X]]) \subseteq Q(D[[X]]_{D^*}) \subseteq Q(D[[X]])$. A inclusão contrária é óbvia. ∎

Enunciamos abaixo a forma com que Arnold [AR] generaliza esse último resultado. A prova pode ser encontrada em ([AR], Teorema 1.6, pág. 183).

Teorema 3.12.

Seja $D$ um domínio fechado por radicais e $J$ um sobreanel próprio de $D$. Então $J[[X]] \subset (D[[X]])_{D^*}$ ou $\mathcal{Tr.d.}(Q(J[[X]])|Q(D[[X]])) = \infty$.

## II. 3. 2. Os corpos $Q(J[[X]])$ e $Q(L[[X]])$

Dedicamos esse subitem a verificar as relações entre $Q(J[[X]])$ e $Q(L[[X]])$, onde $J$ e $L$ são sobreanéis de $D$.

Assim sendo, damos o conceito de domínio Arquimediano e vemos uma eqüivalência da afirmação de que $Q(D_T[[X]]) \neq Q(D_S[[X]])$, onde S e T são sistemas multiplicativos de $D$.

Temos também mais uma proposição que liga o conceito de completa e integralmente fechado e os corpos quocientes de anéis de séries de potências. Usando esse resultado, exibimos uma nova caracterização de domínios de Prüfer com dimensão de Krull 1.

E definindo um condutor, estudamos sob que condição podemos ter $Q(D_1[[X]]) = Q(D_2[[X]])$, onde $D_1$ e $D_2$ são domínios quaisquer.

Definição 3.13. Dizemos que um domínio $D$ é Arquimediano ($\mathcal{Arch}$) se toda não unidade é não limitada, i.é., se $\forall\ x \in D^* \setminus \mathcal{U}(D)$, $\bigcap x^i D = 0$.

Proposição 3.14. Seja $D$ um domínio.

Então vale que $Q(D_S[[X]]) \neq Q(D[[X]])$, para qualquer sobreanel quociente $D_S$ de $D$ se, e só se, $D$ é $\mathcal{Arch}$.

Demonstração:

$(\Rightarrow)$ Suponhamos que $\exists\ x \in D^* \setminus \mathcal{U}(D)$ tal que $\bigcap x^i D \neq 0$.

Consideremos o sistema multiplicativo $S = \langle x, x^2, \ \ldots \rangle$

de $D^*$. Logo por (3.11)(*iii*) segue que $Q(D[[X]]) = Q(D_S[[X]])$. (*Absurdo* !)

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos que exista sistema multiplicativo de $D^*$ tal que $Q(D_S[[X]]) = Q(D[[X]])$ e $S \not\subset \mathcal{U}(D)$. Logo, dado $x \in S \setminus \mathcal{U}(D)$, de (3.11), segue que $\bigcap x^i D \neq 0$. Então $D$ não é *Arch*. ∎

<u>Proposição 3.15</u>. Seja $D$ um domínio.

<u>Então</u> vale que $Q(D_S[[X]]) \neq Q(D_T[[X]])$, para quaisquer sobreanéis quocientes $D_S \neq D_T$ de $D$ se, e só se, $D$ e todos os seus sobreanéis quocientes são *Arch*.

<u>Demonstração:</u>

( $\Rightarrow$ ) Como $D = D_{\langle 1 \rangle}$, então basta usar nesse caso a proposição 3.14 e teremos que $D$ é *Arch*.

Agora, tomemos $D_S$ sobreanel quociente de $D$ e $(D_S)_T$ sobreanel quociente de $D_S$. Por ([G-O], Proposição 1.3, pág. 98), então $(D_S)_T$ é um sobreanel quociente de $D$. Logo pela hipótese e de (3.14), segue que $D_S$ é *Arch*.

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos que existam $D_S \neq D_T$ tal que $Q(D_S[[X]]) = Q(D_T[[X]])$.

Sem perda de generalidade, vamos supor que $D_S \not\subset D_T$. Desde que $D \subseteq D_T$, $\exists\ s \in S$ *t.q.* $1/s \notin D_T$, logo $s \notin \mathcal{U}(D_T)$.

De $E[1/s] \subseteq D[1/s] \subseteq D_S \Rightarrow (E[1/s])[[X]] \subseteq Q(D_S[[X]]) = Q(D_T[[X]])$. Logo por (3.8), $1/s$ é quase inteiro sobre $D_T$ e assim $s$ é limitado sobre $D_T$. Portanto $D_T$ não é *Arch*. ∎

<u>Definição 3.16</u>. Definimos:

(*i*) Uma <u>cadeia finita</u> de ideais primos de $D$ é uma seqüência finita estritamente crescente $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n$. O <u>comprimento</u> dessa cadeia é número de inclusões, no caso $n$.

(*ii*) Dimensão de Krull (ou dimensão) de $D$ é o supremo dos comprimentos de todas as cadeias de ideais primos de $D$. Denotamos $dim\ D$.

Definição 3.17. Sejam $D$ um domínio e $K$ seu corpo quociente.

Dizemos que $D$ é um anel de valorização de $K$ se $\forall\ x \in K^*$, então $x \in D$ ou $x^{-1} \in D$.

O rank de um anel de valorização $D$ é o número de ideais primos próprios de $D$.

Quando $D$ é um anel de valorização, o grupo $\Gamma = K^*/\mathcal{U}(D)$ é chamado de grupo de valores de $D$.

Definição 3.18. Seja $K$ um corpo e $G$ um grupo totalmente ordenado.

(*a*) Uma valorização de $K$ com valores em $G$ é uma aplicação $v : K^* \longrightarrow G$ tal que:

(*i*) $v(xy) = v(x) + v(y) \qquad \forall\ x, y \in K^*$

(*ii*) $v(x + y) \geq min\{v(x), v(y)\}$.

O conjunto $V = \{x \in K^* : v(x) \geq 0\}$ é um anel de valorização e é chamado de anel de valorização de $v$.

O conjunto $v(K^*)$ é chamado de grupo de valores de $v$.

(*b*) Uma valorização é discreta se $G = \mathbb{Z}$.

Neste caso, o anel de valorização de $v$ é chamado domínio de valorização discreta (*d.v.d.*).

Definição 3.19. Um domínio $D$ é um domínio de Krull se satisfaz as seguintes condições para $\Sigma = \{ideais\ primos\ minimais\ de\ D\}$:

(*i*) $D_p$ é *d.v.d.*, $\forall\ p \in \Sigma$.

(*ii*) $D = \bigcap_{p \in \Sigma} D_p$ .

(*iii*) $\forall\ x \in D^*$, $x$ está somente num número finito de elementos de $\Sigma$.

As definições acima são usadas para demonstrar o corolário que se segue.

Corolário 3.20. Se uma das seguintes alternativas ocorre:

(*a*) $D$ é um domínio de dimensão 1;

(*b*) $D$ é um domínio de Krull;

então $Q(D_S[[X]]) \neq Q(D_T[[X]])$, $\forall\ D_S \neq D_T$ sobreanéis quocientes de $D$.

Demonstração:

Em ambos os casos, por (3.15) basta mostrar que $D$ e todos os seus sobreanéis quocientes são *Arch*.

(*a*) Como $\dim D = 1$, então $\dim D_S = 1$, $\forall\ D_S$ sobreanel quociente de $D$.

Logo, os ideais primos não nulos de $D$ e também de $D_S$ são minimais e ao mesmo tempo maximais.

Para qualquer não unidade $a \in D^*$, temos que $a \in \mathfrak{m}$ para algum $\mathfrak{m}$ maximal de $D$, que é também minimal de $D$. Logo, por ([O], Corolário 1.4, pág.323), obtemos $\bigcap a^i D = 0$. O mesmo ocorre com $D_S$.

Portanto $D$ e $D_S$ são *Arch*.

(*b*) Por ([B], pág. 480), $D$ é *c.i.f.*, pois $D$ é Krull.

Logo, por (3.10) e (3.14), temos $D$ Arquimediano.

Ainda de ([B], Proposição 6, pág. 483) resulta que $D_S$ é Krull, donde pelo o que observamos para $D$, $D_S$ é *Arch* também. ∎

A proposição 3.21 nos fornece mais uma ligação entre os domínios *c.i.f.* e os corpos quocientes de anéis de séries de potências. Apenas que agora lidamos com domínios fechados por radicais.

Proposição 3.21. Sejam $J$ e $L$ domínios fechados por radicais tais que $Q(J) = Q(L)$.

Se $Q(J[[X]]) = Q(L[[X]])$, então $FIC(J) = FIC(L)$.

Demonstração:

Tomemos $k \in FIC(J)$. Por (3.6), $(E[k])[[X]] \subseteq Q(J[[X]]) = Q(L[[X]])$. Desde que $L$ é fechado por radicais, segue novamente por (3.6), que $k$ é quase inteiro sobre $L$, o que implica $k \in FIC(L)$. Logo $FIC(J) \subseteq FIC(L)$. Por raciocínio análogo, temos $FIC(L) \subseteq FIC(J)$. ∎

Na próxima seção (II.4) damos exemplos que mostram que a recíproca da proposição anterior é falsa, ou seja, existem domínios fechados por radicais que possuem o mesmo fecho inteiro completo, mas cujos corpos quocientes de seus respectivos anéis de séries de potências não coincidem.

Definição 3.22. Sejam $D$ um domínio e $K$ seu corpo quociente.

Dizemos que $D$ é um domínio de Prüfer se $D_{\mathfrak{p}}$ é um anel de valorização, $\forall\, \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(D)$.

Observamos a seguir, numa das mais interessantes proposições desse capítulo, como os domínios de Prüfer unidimensionais podem ser caracterizados, utilizando o tema principal dessa seção.

Teorema 3.23.

Seja $D$ um domínio.

Então são equivalentes:

$(i)$ $D$ é Prüfer com dimensão de Krull 1.

$(ii)$ $D$ e todos os seus sobreanéis são $c.i.f.$

$(iii)$ $Q(J[[X]]) \neq Q(L[[X]])$, para quaisquer $J \neq L$ sobreanéis de $D$.

Demonstração:

$(i) \Rightarrow (ii)$ Seja $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(D)$. Logo, pela definição de domínios de Prüfer, o sobreanel $D_{\mathfrak{p}}$ é um anel de valorização.

Como $\dim D = 1$, então $\dim D_{\mathfrak{p}} = 1$. Assim por ([G], Teorema 17.5, pág. 193), temos que $D_{\mathfrak{p}}$ é $c.i.f.$

Também por ([G1], Teorema 26.1, pág. 322), segue que qualquer sobreanel de $D$ (inclusive $D$) é de fato interseção de localizações de $D$.

Portanto, qualquer sobreanel de $D$ é $c.i.f.$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Se existissem sobreanéis $J \neq L$ de $D$ tais que $Q(J[[X]]) = Q(L[[X]])$, por (3.9)$(i)$ e (3.21), temos que $FIC(J) = FIC(L)$. O que implica pela hipótese, $J = FIC(J) = FIC(L) = L$. (*Absurdo* !)

$(iii) \Rightarrow (i)$ Pelo teorema (3.10) e lembrando que se $J$ é um sobreanel de $D$ e $L$ um sobreanel de $J$, então $L$ é um sobreanel de $D$ ([G-O], Proposição 1.3., pág. 98), obtemos que $D$ e todos os seus sobreanéis são $c.i.f.$ Assim por (3.9)$(ii)$, $D$ e todos os seus sobreanéis são $i.f.$ Então de ([G1], Teorema 26.2, pág. 324), temos que $D$ é Prüfer.

É fácil verificar que $D = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \Sigma} D_{\mathfrak{m}}$, onde

$\Sigma = \mathrm{SpecMax}(D)$. Cada $D_m$ é um anel de valorização (pois $D$ é Prüfer) também é *c.i.f.*, o que implica por ([G1], Teorema 17.5, pág. 194), que $D_m$ tem rank 1. Portanto $D$ tem dimensão 1. ∎

Finalizando essa seção, definimos um condutor para impormos algumas condições que resultem em $Q(D_1[[X]]) = Q(D_2[[X]])$, onde $D_1$ e $D_2$ são domínios quaisquer. Isso nos será útil na próxima seção.

<u>Definição 3.24.</u> Sejam $D_1$ e $D_2$ domínios com $D_1 \subset D_2$.

O <u>condutor</u> de $D_1$ em $D_2$ é o conjunto $\mathscr{C}(D_1|D_2) = \{x \in D_1 : xD_2 \subseteq D_1\}$.

(Equivalentemente, $\mathscr{C}(D_1|D_2)$ é o maior ideal de $D_1$ que também é ideal de $D_2$).

<u>Proposição 3.25.</u> Sejam $D_1$ e $D_2$ domínios com $D_1 \subset D_2$.

Se $\mathscr{C}(D_1|D_2) \neq 0$, <u>então</u> $Q(D_1[[X]]) = Q(D_2[[X]])$.

<u>Demonstração:</u>

Tomemos $0 \neq x \in \mathscr{C}(D_1|D_2)$. Logo $xD_2 \subseteq D_1$, o que implica que se $f \in D_2[[X]]$, então $xf \in D_1[[X]]$ e assim $f \in Q(D_1[[X]])$.

Portanto, $D_2[[X]] \subseteq Q(D_1[[X]])$. Logo, $Q(D_2[[X]]) \subseteq Q(D_1[[X]])$.

A inclusão contrária é óbvia, pois $D_1 \subseteq D_2$. ∎

Para verificar que a volta dessa proposição não vale, basta olhar ([G2], pág. 1139) que nos fornece um bonito exemplo de um domínio $D$ estritamente contido em $K = Q(D)$ tal que $Q(D[[X]]) = Q(K[[X]])$. É claro que $\mathscr{C}(D|K) = 0$.

## II. 4. Grupos de divisibilidade e contra-exemplos

Iniciamos esse item com um resultado que relaciona mais fortemente o fecho inteiro completo de um domínio $D$ com o corpo quociente de $D[[X]]$, no seguinte sentido: saber se é possível conhecendo o fecho inteiro completo de $D$, determinar $Q(D[[X]])$. Vamos demonstrar que de fato, se $D$ é um anel de valorização e se $FIC(D) \neq K$, a nossa pergunta tem uma resposta afirmativa.

Entretanto, nos dois contra-exemplos que exibimos a seguir, vemos que omitindo a hipótese de $FIC(D) \neq K$ (no primeiro contra-exemplo) ou mantendo-a mas lidando com domínios de Bézout (no segundo contra-exemplo), o resultado obtido primeiramente já não se verifica.

Para construir os contra-exemplos, definimos antes os grupos de divisibilidade e as semivalorizações, que são *resp.* generalizações dos já vistos grupos de valores e valorizações. O objetivo dessas definições é construir os domínios dos contra-exemplos a partir da construção dos seus grupos de divisibilidade equivalentes, considerando-se que muitas propriedades dos domínios estão presentes nesses grupos.

Assim, começamos com a

Proposição 4.1. Sejam $U$ e $V$ anéis de valorização com $Q(U) = Q(V) = K$.

Se $FIC(U) = FIC(V) = W \neq K$, então $Q(U[[X]]) = Q(V[[X]]) = Q(W[[X]])$.

Em particular, $Q(U[[X]]) = Q((FIC(U))[[X]])$, ou seja, $FIC(U)$ determina $Q(U[[X]])$.

Demonstração:

Por (3.25) basta mostrar que $\mathscr{E}(V|W) \neq 0$ (por simetria sai também que $\mathscr{C}(U|W) \neq 0)$.

Como $W$ é um sobreanel de $V$, usando ([G1], Teorema 17.6 (*a*), pág. 195), segue que existe $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(V)$ tal que $W = V_{\mathfrak{p}}$. Mais ainda pelo item (*b*) do mesmo teorema, temos que $\mathfrak{p}$ é um ideal de $W$, pois $\mathfrak{p}W = \mathfrak{p}V_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$.

Portanto pela definição de condutor $\mathfrak{p} \subset \mathscr{C}(V|W)$. O que implica $\mathscr{C}(V|W) \neq 0$. ∎

<u>Definições 4.2</u>. Sejam $D$ um domínio e $K = Q(D)$.

(*a*) Um <u>ideal fracionário</u> $\mathfrak{a}$ de $D$ é um $D$-submódulo de $K$ tal que existe $x \in D^*$, $x\mathfrak{a} \subseteq D$.

(*b*) Considere $gd(D) = \{kD : k \in K\}$ que é o conjunto dos ideais fracionários principais de $D$. Sobre $gd(D)$ podemos definir a operação $k_1D + k_2D = k_1k_2D$. Com essa operação, $gd(D)$ é um grupo abeliano. Também podemos definir a seguinte relação de ordem $k_1D \geq k_2D$ se, e só se, $k_1D \subseteq k_2D$, e assim $gd(D)$ torna-se um grupo abeliano parcialmente ordenado. Tal grupo é chamado <u>grupo de divisibilidade</u> de $D$.

O grupo de divisibilidade $gd(D)$ tem a propriedade de ser <u>filtrante</u>, i.é., qualquer conjunto de dois elementos $\{k_1D, k_2D\}$ de $gd(D)$ possui um limitante superior (a saber $k_1k_2D$).

<u>Definição 4.3</u>. Seja $K$ um corpo e $(G, +)$ um grupo abeliano parcialmente ordenado.

Uma <u>semivalorização</u> de $K$ é um aplicação $w : K^* \longrightarrow G$ tal que:

(*i*) $w(ab) = w(a) + w(b)$.

(*ii*) $w(-1) = 0$.

(iii) $\forall\ a,\ b \in K^{*}$ com $a \neq -b$ e $\forall\ g \in G$, se $w(a) \geq g$ e $w(b) \geq g$, então $w(a + b) \geq g$.

O conjunto $W = \{x \in K^{*} : w(x) \geq 0\}$ é chamado o <u>anel de semivalorização</u> de $w$.

O conjunto $w(K^{*})$ é chamado <u>grupo de semivalores</u> de $w$.

<u>Observações 4.4.</u>

(1) A aplicação canônica $w : K^{*} \longrightarrow gd(D)$ definida por $w(k) = kD$ é uma semivalorização de $K$. Denominamos $w$ de <u>semivalorização associada</u>.

Vale que $ker\ w = \mathcal{U}(D)$, o que implica que $gd(D) \cong K^{*}/\mathcal{U}(D)$.

(2) Sejam $D$ um domínio e $w : K^{*} \longrightarrow G$ uma semivalorização tal que $K = Q(D)$ e $D \subseteq W$.

Vemos claramente que se $\{d_i\} \subseteq D^{*}$, então $d \in \bigcap d_i D$ se, e só se, $w(d)$ é limitante superior para $\{w(d_1),\ w(d_2),\ \ldots\}$. Portanto, se $d \in D^{*}$ e $w(d) = g$, então $d$ é limitado se, e só se, $\{ng : n \in \mathbb{N}\}$ possui um limitante superior em $gd(D)$.

Nesse caso, chamamos $g$ um elemento <u>limitado</u> de $gd(D)$.

Temos assim que certas propriedades como $D$ ser fechado por radicais, Arquimediano e outras, podem reduzir-se ao fato de $gd(D)$ também possuí-las.

(3) Num anel de valorização, o grupo de divisibilidade e o grupo de valores coincidem.

<u>Definição 4.5.</u> Seja $D$ um domínio.

O <u>fecho Arquimediano</u> $FA(D)$ de $D$ é definido como $FA(D) = D_B$ onde $B = \{x \in D : x \text{ é limitado}\}$ que é um sistema multiplicativo de $D$.

Para uma grande família de domínios, temos que os conceitos de fecho inteiro completo e fecho Arquimediano coincidem. É o que mostra a

Proposição 4.6. Seja $D$ um domínio.

Se $D$ satisfaz a $QR$-propriedade, então $FIC(D) = FA(D)$.

Isto implica que se $D$ satisfaz a $QR$-propriedade, então $D$ é $c.i.f.$ se, e só se, $D$ é $\mathcal{Arch}$.

Demonstração:

Desde que $D$ possui a $QR$-propriedade, como $FIC(D)$ é um sobreanel de $D$, então ele deve ser um sobreanel quociente de $D$. Podemos considerar que $FIC(D) = D_S$ com $S = D \cap \mathcal{U}(FIC(D))$. É fácil ver que $S = \{x \in D^* : x^{-1}$ é quase inteiro sobre $D\}$. Mas já vimos que: $x^{-1}$ é quase inteiro sobre $D \Leftrightarrow x$ é limitado sobre $D$. Logo $S = B$, o que implica que $FIC(D) = D_B = FA(D)$. ∎

Daquilo que já observamos, resta-nos esperar que de acordo com a definição de $FA(D)$, podemos encontrar muitas de suas propriedades relacionadas com o grupo de divisibilidade $gd(D)$. Vemos abaixo um resultado nesse sentido. Sua prova é puramente técnica e será omitida, podendo ser encontrada em ([S], Proposição 4.5, pág. 239).

Proposição 4.7. Sejam $D$ um domínio, $G = gd(D)$ e $w$ a semivalorização associada.

Se $G_+$ denota o conjunto dos elementos positivos de $G$, então:

(a) $Q(D[[X]]) = Q((FA(D))[[X]]) \Leftrightarrow \forall\ (d_n)$ seqüência em $G_+$ tal que $d_n$ é limitado, $\forall\ n$, possui um limitante superior.

(b) $FA(D)$ não é $\mathcal{Arch} \Leftrightarrow$ existem $g \in G$ não limitado, $h \in G$ e

$(h_n)$ seqüência em $G$ tal que $h_n$ é limitado, $\forall\ n$, que satisfazem $h + h_n \geq ng$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

O teorema de Jaffard, cuja demonstração pode ser encontrada em ([J], Teorema 1, pág. 64), nos fornece a existência de domínios com grupos reticulados como seus grupos de divisibilidade. Como conseqüência dele, temos um teorema de mergulho.

<u>Definição 4.8.</u> Seja $D$ um domínio.

Dizemos que $D$ é um <u>domínio de Bézout</u> se todo ideal finitamente gerado de $D$ for principal.

<u>Teorema 4.9.</u> (<u>*Jaffard*</u>)

Seja $G$ um grupo reticulado (i.é., um grupo onde o supremo de um conjunto com dois elementos sempre existe).

<u>Então</u>, existe um domínio de Bézout $D$ tal que $gd(D) = G$.

<u>Teorema 4.10.</u>

Seja $\{G_i : i \in I\}$ uma coleção de grupos reticulados.

<u>Então</u> existe um corpo $K$ tal que $K = Q(D_i)$, $\forall\ i \in I$, onde $gd(D_i) = G_i$.

<u>Demonstração:</u>

Seja $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$ com a ordem do produto, i.é., coordenada a coordenada, onde $\oplus$ indica a soma direta fraca. Temos que $G$ é um grupo reticulado. Logo, pelo teorema de Jaffard, existe um domínio de Bézout $D$ com $gd(D) = G$. Tomemos $K = Q(D)$.

É fácil ver que $\pi_i \circ w : K^* \longrightarrow G_i$ é uma semivalorização, onde $w$ é a semivalorização associada a $D$ e $\pi_i : G \longrightarrow G_i$ é a aplicação canônica projeção.

Consideremos $D_i$ o anel de valorização de $\pi_i \circ w$. Então $Q(D_i) = K$ e $gd(D_i) = G_i$. ∎

Finalmente os exemplos. Ambos mostram que se modificarmos alguma hipótese em (4.1), então temos que $FIC(D)$ já não determina $Q(D[[X]])$.

<u>Exemplo 4.11.</u>

Este primeiro exemplo é dedicado a construir dois anéis de valorização $U$ e $V$ tal que $FIC(U) = FIC(V) = K$ (contrariando a hipótese de (4.1)) e tal que $Q(U[[X]]) \neq Q(V[[X]])$. Isso é feito definindo-se antes um grupo de divisibilidade conveniente.

Dividimos a construção em vários passos:

(*I*) Vamos definir o grupo $G$ como $G = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} G_n$ onde $G_n \cong \mathbb{Z}$, $\forall\, n$ e $G$ com a ordem lexicográfica inversa, i.é., $g \in G$ é positivo se sua última entrada não nula é positiva.

Consideremos $U$ um anel de valorização com $G$ como seu grupo de valores.

Gilmer [G2] em um exemplo, constrói um grupo de valores $H$ da seguinte maneira: seja $I$ um conjunto bem ordenado cujo tipo ordinal é o do conjunto de ordinais precedendo $\Omega$, o primeiro ordinal não contável, i.é., $I = \{i : i < \Omega\}$. Consideremos a coleção $\{H_i\}_{i\in I}$ de grupos, $H_i \cong \mathbb{Z}$, $\forall\, i \in I$. Tomemos $H = \bigoplus_{i\in I} H_i$ com a ordem lexicográfica inversa. Seja $V$ um anel de valorização com $H$ como seu grupo de valores. Do exemplo de Gilmer, segue que se $K = Q(V)$, então $Q(V[[X]]) = Q(K[[X]])$.

Por (4.10), segue que $U$ e $V$ podem ser mergulhados num mesmo corpo quociente $K$.

(II) (i) $FIC(U) = K$.

Seja $g \in G_+$. Vamos supor sem perda de generalidade que suas entradas não nulas estão nas $n$ primeiras coordenadas. Afirmamos que $h = (1, \ldots, 1, 1, 0, \ldots) \in G_+$, onde essa última entrada igual a 1 está na $(n + 1)$-ésima posição, é um limitante superior de $\{ng : n \in \mathbb{N}\}$. De fato, pela ordem de $G$, $h \geq ng$, $\forall\, n$. Então $g$ é limitado.

Temos portanto:

$\forall\, g \in G$ é limitado $\Leftrightarrow$ $\forall\, a \in U^*$ é limitado $\Leftrightarrow$ $\forall\, a^{-1} \in K$ é quase inteiro sobre $U$ $\Leftrightarrow$ $FIC(U) = K$.

(ii) $FIC(V) = K$, pois $\forall\, h \in H_+$ é limitado também, apenas que por motivos mais generalizados de que $\forall\, g \in G_+$ é limitado.

Portanto $FIC(U) = FIC(V) = K$.

(III) (i) Por construção $Q(V[[X]]) = Q(K[[X]])$.

(ii) Consideremos a seqüência $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $g_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, $\forall\, i$, onde apenas a $i$-ésima coordenada é igual a 1, sendo as demais nulas. Então é claro pela ordem de $G$, que $(g_i)$ não possui um limitante superior. Mas isso é equivalente a dizer que se $w(d_i) = g_i$, então $\bigcap d_i U = 0$. Portanto por ([G2], Teorema 1, pág. 1138), temos que $Q(U[[X]]) \neq Q(K[[X]])$.

Portanto $Q(U[[X]]) \neq Q(V[[X]]) = Q(K[[X]])$.

Exemplo 4.12.

Aqui, mostramos que a proposição 4.1. não pode ser estendida para domínios de Bézout.

Vamos construir um domínio de Bézout $D$ tal que $FIC(D_B) = FIC(D) \neq K$, mas $Q(D_B[[X]]) \neq Q(D[[X]])$. Novamente, isso é feito definindo-se antes um grupo de divisibilidade conveniente.

Fazemos a construção nos seguintes passos:

$(I)$ Vamos definir $T = G_1 \oplus G_2$, onde $G_1 \cong \mathbb{Z}$ e $G_2 \cong \mathbb{Z}$ e $T$ possui a ordem lexicográfica.

Seja $G = \{f : \mathbb{N} \longrightarrow T : f$ tem suporte finito$\}$, i.é., $G$ é o conjunto das funções $f : \mathbb{N} \longrightarrow T$ que se anulam quase sempre. Munimos $G$ da ordem pontual, ou seja: $f \leq g \leftrightarrow f(n) \leq g(n)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. É claro que G com essa ordem é reticulado.

Portanto pelo teorema de Jaffard, existe um domínio de Bézout $D$ tal $gd(D) = G$.

$(II)$ $(i)$ $FIC(D) \neq K$.

Se $f \in G$ é limitado, i.é., se $\{f, 2f, \ldots\}$ possui um limitante superior em $G$, então $f$ é da forma $f(n) = (0, \alpha_n)$, $\forall\, n$. Pois se $f(n) = (\beta_n, \gamma_n)$, com $\beta_n \neq 0$ para algum $n$, não teríamos em $T$ um limitante superior para $\{(\beta_n, \gamma_n), (2\beta_n, 2\gamma_n), \ldots\}$.

Logo, é claro que $G$ possui elementos não limitados (por exemplo, $g(1) = (1, 0)$ e $g(n) = (0, 0)$, $\forall\, n \neq 1$), o que pelas observações que fizemos no exemplo anterior, resulta que $FIC(D) \neq K$.

$(ii)$ $FIC(D_B) = FIC(D)$.

Suponhamos que existam $g$, $h$ e uma seqüência $(h_n)$ como em $(4.7)(b)$.

Como $g$ é não limitado, deve existir $r \in \mathbb{N}$ tal que $g(r) = (a_r, b_r)$ com $a_r \neq 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor $r = 1$ e $g(1) = (1, 0)$.

Qualquer $h_n$ é limitado, logo $h_n(1) = (0, z_n)$, $\forall\, n$, para algum $z_n$.

Daí, de $h + h_n \geq ng$, $\forall\, n$, temos $h(1) + h_n(1) \geq ng(1)$, $\forall\, n$.

Então $h(1) + (0, z_n) \geq (n, 0)$, $\forall\ n$, o que implica que $h(1) \geq (n, -z_n)$, $\forall\ n$.

Mas se $h(1) = (a, b)$, temos que $a \geq n$, $\forall\ n$ (*Absurdo* !).

Portanto por (4.7), $D_B$ é *Arch.* Donde lembrando que $D_B$ é um domínio de Bézout e que um domínio de Bézout satisfaz a $QR$-propriedade (use que Bézout implica Prüfer e ([G1], Teorema 27.5, pág. 337)), segue de (4.6) que $D_B$ é *c.i.f.* Novamente, usando que $D$ é Bézout, por (4.6), temos que $FIC(D) = D_B$ e então $FIC(D) = FIC(D_B)$.

Portanto $FIC(D) = FIC(D_B) \neq K$.

(*III*) $Q(D_B[[X]]) \neq Q(D[[X]])$.

Consideremos a seqüência $(f_i)$ em $G_+$ definida por $f_i(i) = (0, 1)$ e $f_i(n) = (0, 0)$, $\forall\ n \neq i$.

É claro que qualquer $f_i$ é limitado pelo o que já foi observado.

No entanto, suponha ser $h \in G_+$ um limitante superior de $(f_i)$. Logo $h(n) \geq (0, 1)$, $\forall\ n$, o que implica que $h$ assume sempre valores não nulos, donde não tem suporte finito. (*Contradição* !)

Portanto, $(f_i)$ não possui um limitante superior, portanto por (4.7)(*a*), $Q(D[[X]]) \neq Q(D_B[[X]])$.

A seguir, para finalizar, temos um exemplo de um domínio $V$ com $K = Q(V)$ satisfazendo $Q(V[[X]]) = Q(K[[X]])$. Esse exemplo é feito por Gilmer em ([G2], pág. 1139).

<u>Exemplo:</u>

Vamos construir um anel de valorização $V \subsetneq K = Q(V)$ tal que $Q(V[[X]]) = Q(K[[X]])$.

Seja $A = \{\alpha : \alpha < \Omega\}$, onde $\Omega$ é o primeiro ordinal não contável.

Seja $G = \bigoplus_{\alpha\in A} G_\alpha$ onde $G_\alpha \cong \mathbb{Z}$, $\forall\ \alpha \in A$ e $\oplus$ é a soma direta fraca. Temos que $G$ com a ordem lexicográfica inversa torna-se um grupo abeliano totalmente ordenado.

O grupo $G$ é o grupo de valores de uma valorização $v$.

Seja $V$ o anel de valorização de $v$ e $K$ o corpo quociente de $V$. Logo $V \neq K$.

Consideremos $\{(\alpha_i)\}_{i=1}^{\infty}$ uma seqüência de ideais principais não nulos de $V$. Como $V$ é um anel de valorização, então podemos considerar a seqüência $\{(\alpha_i)\}_{i=1}^{\infty}$ decrescente. Logo $v(\alpha_i) \leq v(\alpha_{i+1})$, $\forall\ i$.

Suponhamos que a última entrada de $v(\alpha_i)$ esteja em $G_{k_i}$, $\forall\ i$. Pela ordem de $G$, segue que $k_i \leq k_{i+1}$.

Temos que se $k$ é o supremo de $\{k_i\}$, então $k = \bigcup k_i$. É fácil ver que $k \in A$. Como $G$ é o grupo de valores de $v$, então existe $\beta \in V$ tal que $v(\beta) \geq v(\alpha_i)$, $\forall\ i$. Logo $\beta \in \bigcap \alpha_i$, o que implica $\bigcap \alpha_i \neq 0$.

Então por Gilmer ([G2], Teorema 1, pág. 1138) segue que $Q(V[[X]]) = Q(K[[X]])$.

# BIBLIOGRAFIA

[A-R] Arezzo, D. & Robbiano, L., *Sul completato di un anello rispetto ad un ideale di tipo finito*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova volume XLIV (1970), 133-154.

[A-B] Arnold, J.T. & Boyd, D.W., *Transcendence degree in power series rings*, Journal of Algebra 57 (1979), 180-195.

[A-M] Atiyah, M. F. & Macdonald, I. G., *Introdution to commutative algebra*, Addison-Wesley (1969).

[B] Bourbaki, N., *Elements of Mathematics: Commutative Algebra*, Hermann (1972).

[BR] Brewer, J. W., *Power series over commutative rings*, Marcel Dekker, Inc., New York (1981).

[G1] Gilmer, R., *Multiplicative ideal theory*, Marcel Dekker, Inc., New York (1972).

[G2] Gilmer, R., *A note on the quotient field of the domain D[[X]]*, Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), 1138-1140.

[G-O] Gilmer, R. & Ohm, J., *Integral domains with quotient overrings*, Math. Anallen 153 (1964), 97-103.

[G-S] Greco, S. & Salmon, P., *Topics in $\mathfrak{m}$-adics topologies*, Springer-Verlag, Berlin (1971).

[J] Jaffard, P., *Contribution à la théorie des groupes ordonnés*, J. Math. Pures Appl. 32 (1953), 203-280.

[K] Kaplanski, I., *Commutative Rings*, The University of Chicago Press (1974).

[N] Nagata, M., *Local rings*, Interscience, New York (1962).

[O] Ohm, J., *Some conterexamples related to integral closure in D[[x]]*, Trans. Amer. Math. Soc. 122 (1966), 321-333.

[S] Sheldom, P., *How changing D[[x]] changes its quotient field*, Trans. Amer. Math. Soc. 159 (1971), 223-244.

[Z-S] Zariski, O. & Samuel, P., *Commutative Algebra, volumes I e II*, Springer-Verlag, New York (1960).