Aplicações da teoria de Bass-Serre:
Endomorfismos injetivos de grupos de Baumslag-Solitar

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Eliana Vieira Norte e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 17 de março de 2006.

Prof. Dr.: Dessislava H. Kochloukova
orientadora

Banca examinadora

1. Prof. Dr. Dessislava H. Kochloukova
2. Prof. Dr. Daciberg L. Gonçalves
3. Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de MESTRE em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Norte, Eliana Vieira

N811a Aplicações da teoria de Bass-Serre: Endomorfismos injetivos de grupos de Baumslag-Solitar / Eliana Vieira Norte -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2006.

Orientador : Dessislava H. Kochloukova

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Endomorfismos (Teoria de grupos). 2. Grupos livres. 3. Grupos fundamentais (Matemática). I. Kochloukova, Dessislava Hristova. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Applications of the theory of Bass-Serre: Injectors endomorphisms of groups of Baumslag-Solitar

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Endomorphisms (Group theory). 2. Free groups. 3. Fundamental groups (Mathematics).

Área de concentração: Álgebra

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Profa. Dra. Dessislava H. Kochloukova (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Daciberg L. Gonçalves (IME-USP)
Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 24/02/2006

Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Aplicações da teoria de Bass-Serre: Endomorfismos injetivos de grupos de Baumslag-Solitar

Autor: Eliana Vieira Norte

Orientador: Profa. Dra. Dessislava H. Kochloukova

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Cientifica como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: **Álgebra**.

Dissertação de Mestrado defendida em 24 de fevereiro de 2006 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). DESSISLAVA HRISTOVA KOCHLOUKOVA

Prof. (a). Dr (a). DACIBERG LIMA GONÇALVES

Prof. (a). Dr (a). ANTONIO JOSÉ ENGLER

Resumo

Nessa dissertação estudamos a teoria de Bass-Serre que liga grupos que agem sobre árvores em grupos fundamentais de grafos de grupos. Para desenvolver essa teoria primeiramente estudamos conceitos básicos como: grupos livres, produto livre amalgamado, extensão HNN. Na parte final a teria de Bass-Serre é aplicada para endomorfismos injetivos de grupos de Baumslag-Solitar.

Abstract

In this master thesis we study Bass-Serre theory that links groups acting on trees and fundamental groups of graph of groups. To develop the theory we study first basic concepts as: free groups, free product with amalgamation, HNN extension. At the end Bass-Serre theory is used to study the injective endomorphisms of Baumslag-Solitar groups.

Sumário

Introdução

Nessa dissertação estudamos a teoria de Bass-Serre sobre grupos fundamentais de grafos de grupos. Em 1968-1969 Serre, em um curso de leitura na Universidade da França, introduziu uma nova técnica para teoria combinatorial de grupos. Um dos resultados mais gerais da teoria foi devido a Bass, esse resultado é conhecido como teoria de Bass-Serre.

Discutimos nos três primeiros capítulos os conceitos básicos como grupos livres, produtos livres amalgamados, extensões HNN. Em 1949, G. Higman, B. Neumann e H. Neumann estudaram uma construção relacionada com produtos livres amalgamados. Essa construção é chamada de extensão HNN. Mais tarde, em 1963, Britton usa essa construção na demonstração da insolubilidade do problema da palavra para grupos finitamente gerados. Em anos recentes tornou-se claro que extensões HNN (originalmente obtidas como subgrupos de certos produtos livres amalgamados) devem ser tratadas separadamente como uma das construções básicas de teoria combinatorial de grupos.

Os resultados principais da teoria de Bass-Serre são discutidos no capítulo 4. Nosso estudo foi baseado no livro [2]. A teoria de Bass-Serre liga ações de grupos sobre árvores com grafos de grupos e os grupos fundamentais desses garfos.

Como aplicação da teoria de Bass-Serre estudamos os homomorfismos injetivos do grupo de Baumslag-Solitar $G(n,m) = \langle a,t | t^{-1}a^n t = a^m \rangle$ para $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1,0,1\}$. Observamos que $G(m,n)$ é uma extensão HNN com base $\langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$, grupos associados $\langle a^n \rangle \simeq \mathbb{Z} \simeq \langle a^m \rangle$ e letra estável t. Esse estudo foi baseado no artigo [3]. Resultados sobre automorfismos de quocientes metabelianos do grupo $G(n,m)$ podem ser encontrados em [4]. A classificação do grupo de automorfismos do grupo $G(n,m)$ pode ser encontrada em [4] e [6].

O resultado principal é o seguinte: Sejam $n \neq \pm 1$, $m \neq \pm 1$ e ϕ um endomorfismo injetor de $G = G(n,m)$. Então, $\phi(a) \in \cup_{i \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, g \in G}(g^{-1}a^i g)$.

Capítulo 1

Grupos Livres

1.1 Grupos Livres

Definição 1.1.1. Sejam X um conjunto, G um grupo e $i : X \longrightarrow G$ uma aplicação. O par (G, i) é chamado um grupo livre sobre X se para qualquer grupo H e qualquer aplicação $f : X \longrightarrow H$ existe um único homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow H$ tal que $f = \varphi i$. Normalmente chamaremos G de grupo livre, omitindo a aplicação i.

Em particular, o grupo trivial é livre sobre o conjunto vazio e o grupo cíclico infinito $\mathbb{Z}$, é livre em qualquer conjunto $\{x\}$ tal que $i(x)$ é gerador de $\mathbb{Z}$.

Certamente se (G, i) é livre em X e $\phi : G \longrightarrow H$ é um isomorfismo então $(H, \phi i)$ é também livre em X. A próxima proposição é a recíproca disso.

Proposição 1.1.2. *Sejam (G_1, i_1) e (G_2, i_2) grupos livres sobre X. Então existe isomorfismo $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ tal que $\varphi i_1 = i_2$.*

Demonstração: Como (G_1, i_1) é livre sobre X, o homomorfismo φ existe. Analogamente existe um homomorfismo $\psi : G_2 \longrightarrow G_1$ tal que $\psi i_2 = i_1$. Então, $\psi\varphi i_1 = i_1 = Id_{G_1} i_1$. Então pela propriedade de grupo livre temos que $\psi\varphi = Id_{G_1}$. Do mesmo modo temos que $\varphi\psi = Id_{G_2}$ e então, φ é isomorfismo. □

Faremos agora a construção do grupo livre $F(X)$ sobre o conjunto X. Seja $M(X)$ o conjunto das seqüências finitas $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$ de elementos de X. Definimos uma multiplicação do seguinte modo:

$$(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}) = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}, x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m})$$

A multiplicação assim definida é associativa e com unidade 1, que é a sequência vazia. Também, $x \mapsto (x)$ é injetiva, e se identificamos x com (x), todo elemento de $M(X)$ pode ser unicamente escrito como produto $x_{i_1} \ldots x_{i_n}$, para algum n. Observamos que $M(X)$ não é grupo pois os elementos diferentes da unidade não possuem inversos.

Seja $- : X \longrightarrow \overline{X}$ uma aplicação biunívoca tal que $X \cap \overline{X} = \emptyset$. Então, denotamos $\bar{x} \in \overline{X}$ por x^{-1}.

Definição 1.1.3. Dizemos que os elementos de $M(X \cup \overline{X})$ são palavras sobre X.

Se ω é uma palavra $x_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$, onde $x_{i_j} \in X$ e $\varepsilon_j = \pm 1$, então n é chamado o comprimento de ω e é denotado por $|\omega|$ ou $l(\omega)$ e $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$ é o conjunto de letras de ω. Dizemos que w é uma palavra reduzida quando $i_r = i_{r+1}$ implica que $\varepsilon_r \neq -\varepsilon_{r+1}$, para $1 \leq r \leq n-1$.

Suponhamos que ω é uma palavra não reduzida, então existe r tal que $\varepsilon_r = -\varepsilon_{r+1}$ e $i_r = i_{r+1}$. Agora seja ω' a palavra $x_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots x_{i_{r-1}}^{\varepsilon_{r-1}} x_{i_{i+2}}^{\varepsilon_{r+2}} \ldots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$. Dizemos que ω' é obtida a partir de ω por uma redução elementar. Se ω'' é obtida de ω por uma sequência de reduções elementares dizemos que ω'' é redução de ω.

Exemplo 1.1.4. Seja w a palavra $zxx^{-1}zy^{-1}y$. Então, cada uma das palavras $zzyy^{-1}$ e $zxx^{-1}z$ pode ser obtida de w por redução elementar, e zz pode ser obtida de w por uma sequência de reduções elementares.

Definamos agora a seguinte relação de equivalência $\equiv$:

$\omega \equiv \omega'$ se, e somente se, ω é idêntico a ω' ou, se existe uma sequência de palavras $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ tal que $\omega_1 = \omega$ e $\omega_k = \omega'$ e para todo $j < k$ uma das palavras ω_j e ω_{j+1} vem da outra por uma redução elementar.

Definição 1.1.5. O conjunto de classes de equivalência é denotado por $F(X)$. A classe de equivalência de ω é denotado por $[\omega]$.

É fácil verificar que se u, u', ω, ω' e v são palavras então:

$\omega \equiv \omega' \Rightarrow u\omega v \equiv u\omega' v$

$u \equiv u', \omega \equiv \omega' \Rightarrow u\omega \equiv u'\omega'$

Então, com a lei de composição $[u][\omega] = [u\omega]$ temos que $F(X)$ é um grupo. O elemento inverso de $[x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{i_n}^{\varepsilon_n}]$ é $[x_{i_n}^{-\varepsilon_n} \dots x_{i_2}^{-\varepsilon_2} x_{i_1}^{-\varepsilon_1}]$. Definimos uma aplicação $i : X \longrightarrow F(X)$ por $i(x) = [x]$ e claramente $F(X)$ é gerado por $i(X)$.

Teorema 1.1.6. *O grupo $(F(X), i)$ é grupo livre sobre X.*

Demonstração: Sejam G um grupo e $f : X \longrightarrow G$ uma aplicação. Definimos uma aplicação $\psi : M(X \cup \overline{X}) \longrightarrow G$ tal que

$$\psi(x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{i_n}^{\varepsilon_n}) = f(x_{i_1})^{\varepsilon_1} f(x_{i_2})^{\varepsilon_2} \dots f(x_{i_n})^{\varepsilon_n}.$$

Se ω' é obtido de ω por uma redução elementar então, ω e ω' tem a mesma imagem. Então, a aplicação ψ define uma aplicação $\varphi : F(X) \longrightarrow G$ dada por $\varphi([\omega]) = \psi(\omega)$ e é homomorfismo e $f = \varphi i$. O homomorfismo φ com esta propriedade é único pois $F(X)$ é gerado por $i(X)$. $\square$

Teorema 1.1.7. (Forma Normal de Grupos Livres) *Existe somente uma palavra reduzida para cada classe de equivalência.*

Demonstração: Sejam S o conjunto das palavras reduzidas em $M(X \cup \overline{X})$ e G o grupo de permutações de S que age sobre S à esquerda. Definimos um homomorfismo $\varphi : F(X) \longrightarrow G$ tal que $\varphi([\omega])$ é uma permutação que envia a sequência vazia ( ) em ω quando ω é uma palavra reduzida. Isso implica que quando ω e ω' são ambas palavras reduzidas e $[\omega] = [\omega']$, a permutação $\varphi([\omega])$ envia ( ) em ω e ω', portanto ω e ω' são iguais.

No teorema anterior demonstramos que $F(X)$ é grupo livre e por isso, basta definirmos uma aplicação $f : X \longrightarrow G$. Definimos $f(x)$ como a permutação que envia ω a $x\omega$ se ω não começa com x^{-1} e envia ω a u se ω é $x^{-1}u$ como palavra. Facilmente se verifica que $f(x)$ é uma permutação de S cuja inversa envia ω a $x^{-1}\omega$ se ω não começa com x e envia ω a v se ω é xv como palavra. Lembremos que uma palavra reduzida não pode iniciar com xx^{-1} nem $x^{-1}x$.

Se ω é uma palavra reduzida $x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$ então, $\varphi([\omega])$ é definido como o produto $f(x_{i_1})^{\varepsilon_1} \cdot f(x_{i_2})^{\varepsilon_2} \cdots f(x_{i_n})^{\varepsilon_n}$ e por indução sobre n temos que $\varphi([\omega])$ envia ( ) a ω. $\square$

Corolário 1.1.8. *A aplicação $i : X \longrightarrow F(X)$ é injetiva.*

Demonstração: Se x e y são elementos distintos de X, eles são palavras reduzidas. Então, eles pertencem a classes de equivalências distintas. $\square$

Teorema 1.1.9. *$F(X)$ é isomorfo a $F(Y)$ se e somente se $|X| = |Y|$.*

Demonstração: Seja f uma aplicação biunívoca de X sobre Y. Então, f estende-se a um homomorfismo $\varphi : F(X) \longrightarrow F(Y)$. A aplicação f^{-1} de Y sobre X é estendida ao homomorfismo $\psi : F(Y) \longrightarrow F(X)$. A composição $\psi\varphi$ e a identidade de $F(X)$ estendem a identidade de X, então pela unicidade na definição de produto livre temos que $\psi\varphi$ é a identidade de $F(X)$. Analogamente $\varphi\psi$ é a identidade de $F(Y)$ e então, φ é isomorfismo.

Agora suponhamos que $F(X)$ é isomorfo a $F(Y)$. O número de isomorfismo de $F(X)$ a $\mathbb{Z}_2$ é o mesmo que o número de homomorfismo de X a $\mathbb{Z}_2$ e é igual a $2^{|X|}$. Então $2^{|X|} = 2^{|Y|}$. Se um dos conjuntos X e Y é finito, isso implica que $|X| = |Y|$.

Suponhamos que X e Y são infinitos. Neste caso, usando o axioma da escolha temos que $|M(X \cup \overline{X})| = |X \cup \overline{X}| = |X|$ e como $F(X)$ é o conjunto das classes de equivalência de $M(X \cup \overline{X})$ temos $|F(X)| \leq |X|$. Como $i : X \longrightarrow F(X)$ é injetora, $|X| \leq |F(X)|$. Então, $|X| = |F(X)| = |F(Y)| = |Y|$. □

Dizemos que um grupo G é grupo livre se é isomorfo a $F(X)$ para algum X.

Definição 1.1.10. Seja G um grupo livre e $\phi : F(X) \longrightarrow G$ um isomorfismo. A imagem de X em G é chamada uma base de G, e G é chamado de livre sobre a imagem de X. O número cardinal de uma base de G é chamado posto de G e pelo teorema 1.1.9 não depende da escolha da base.

Proposição 1.1.11. *Sejam G um grupo e X um subconjunto de G. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *G é um grupo livre com base X.*
2. *Todo elemento g de G pode ser escrito como um produto $x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$ para algum $n \geq 0$ ($n = 0$ corresponde a $g = 1_G$), onde $x_{i_r} \in X, \varepsilon_r \in \{-1, 1\}$ e se $i_r = i_{r+1}$ então, $\varepsilon_r \neq -\varepsilon_{r+1}$, e este produto é único, isto é, para g fixo, $n, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ são únicos.*
3. *G é gerado por X e $1 \neq x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$ para todo $n \geq 1$ tal que $x_{i_r} \in X, \varepsilon_r \in \{-1, 1\}$ e se $i_r = i_{r+1}$ então, $\varepsilon_r \neq -\varepsilon_{r+1}$.*

Demonstração: Por definição (2) implica (3). (1) implica (2) pois G é isomorfo a $F(X)$ e toda classe $[\omega] \in F(X)$ tem um único representante ω que é a palavra reduzida.

Suponha agora que a condição (3) é assegurada. Consideremos o homomorfismo $\varphi : F(X) \longrightarrow G$ que é a identidade sobre X. Como G é gerado por X, o homomorfismo φ é sobrejetor. Pela condição (3), $Ker(\varphi)$ é trivial. Então, φ é isomorfismo e G é livre com base $\varphi(X) = X$. □

Corolário 1.1.12. *Sejam G um grupo gerado por um subconjunto X e $\varphi : G \longrightarrow H$ um homomorfismo tal que φ é biunívoca sobre X e $\varphi(G)$ é um grupo livre com base $\varphi(X)$. Então G é livre com base X.*

Corolário 1.1.13. *Sejam G um grupo livre com base X e Y um subconjunto de X. Então o subgrupo de G gerado por Y é um grupo livre com base Y.*

Corolário 1.1.14. *Seja F livre com base $\{x, y\}$. Seja $\phi : F \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $\phi(x) = 1$ e $\phi(y) = 0$. Então, $ker(\phi)$ é livre com base $\{x^{-i}yx^i, \forall i \in \mathbb{Z}\}$.*

Demonstração: Claramente $\{x^{-i}yx^i, \forall i \in \mathbb{Z}\} \subseteq ker(\phi)$. Também não é difícil ver que qualquer elemento de F pode ser escrito como ux^n para algum n e algum u no subgrupo gerado por $\{x^{-i}yx^i, \forall i \in \mathbb{Z}\}$. Como temos para $n = 0$ um elemento de $ker(\phi)$, vimos que $ker(\phi)$ é o subgrupo gerado por $\{x^{-i}yx^i, \forall i \in \mathbb{Z}\}$.

Agora seja $x_i = x^{-i}yx^i$, e consideremos qualquer palavra reduzida $x_{i_1}^{\epsilon_1}...x_{i_n}^{\epsilon_n}$ não trivial sobre o alfabeto $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$. Esta palavra é igual a $x^{j_1}y^{\epsilon_1}x^{j_2}y^{\epsilon_2}...y^{\epsilon_n}x^{j_{n+1}}$, onde $j_r = \epsilon_{r-1}i_{r-1} - \epsilon_r i_r$, com $i_0 = 0 = i_{n+1}$. Tal produto não é 1, pois F é livre em $\{x, y\}$. $\square$

Definição 1.1.15. Se $g_1, ..., g_k$ são palavras reduzidas e a palavra $g_1...g_k$ é reduzida, dizemos que o produto é uma palavra reduzida como escrita.

Definição 1.1.16. Seja $g \equiv x_{i_1}^{\epsilon_1}...x_{i_n}^{\epsilon_n}$ uma palavra reduzida. Então g é ciclicamente reduzida se, ou $i_n \neq i_1$ ou $i_n = i_1$ mas $\epsilon_n \neq -\epsilon_1$. A palavra trivial 1 também é ciclicamente reduzida.

Definição 1.1.17. Uma permutação cíclica de $x_{i_1}^{\epsilon_1}...x_{i_n}^{\epsilon_n}$ é qualquer palavra

$$x_{i_r}^{\epsilon_r}...x_{i_n}^{\epsilon_n}x_{i_1}^{\epsilon_1}...x_{i_{r-1}}^{\epsilon_{r-1}}.$$

Proposição 1.1.18. *(i) Qualquer elemento de $F(X)$ é conjugado de uma palavra ciclicamente reduzida.*

(ii) Qualquer permutação cíclica de uma palavra ciclicamente reduzida é ciclicamente reduzida.

(iii) Duas palavras ciclicamente reduzidas são conjugadas se, e somente se, elas são permutações cíclicas uma da outra.

Demonstração: (i) Seja $g \equiv x_{i_1}^{\epsilon_1}...x_{i_n}^{\epsilon_n}$ uma palavra reduzida mas não ciclicamente reduzida. Então, $g \equiv x_{i_1}^{\epsilon_1}g_1x_{i_1}^{-\epsilon_1}$, onde g_1 é a palavra $x_{i_2}^{\epsilon_2}...x_{i_{n-1}}^{\epsilon_{n-1}}$. E assim, o resultado segue por indução.

(ii)A palavra $x_{i_n}^{\epsilon_n}x_{i_1}^{\epsilon_1}...x_{i_{n-1}}^{\epsilon_{n-1}}$ é ciclicamente reduzida.

(iii)Qualquer permutação cíclica da palavra ciclicamente reduzida, g, é um conjugado de g.

Reciprocamente, tomemos qualquer conjugado $u^{-1}gu$ de g. Se $u^{-1}gu$ é palavra reduzida como escrita, com $u \neq 1$, então esta não é ciclicamente reduzida, assim com a última letra de u e a primeira letra de u^{-1}. Se $u^{-1}gu$ não é reduzida como escreve então a primeira letra de u é ou $x_{i_1}^{\epsilon_1}$ ou $x_{i_n}^{-\epsilon_n}$. Então $u^{-1}gu = v^{-1}hv$ onde $|v| < |u|$ e h é uma permutação cíclica de g. O resultado segue por indução sobre o comprimento de u. □

Proposição 1.1.19. *Grupos livres são livres de torção, isto é, não existe elemento não-trivial de ordem finita.*

Demonstração: Seja $g \in F$, onde F é livre e $g \neq 1$. Tomando conjugados, se necessário, podemos assumir g ciclicamente reduzida. Como $|g^n| = n|g| \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, então $g^n \neq 1$. □

Proposição 1.1.20. *Sejam F livre, g e h em F. Se $g^k = h^k$ para algum $k \neq 0$ então, $g = h$.*

Demonstração: Podemos assumir que $k > 0$. Tomando conjugados se necessário, podemos assumir que g é ciclicamente reduzida . Então g^k é ciclicamente reduzida como escrita. Se h não é ciclicamente reduzida então h^k também não é, e então $h^k \neq g^k$. Se h é ciclicamente reduzida então h^k é ciclicamente reduzida como escrita. Assim, g^k consiste de g repetido k vezes, e similarmente para h^k, então $g^k = h^k$ requer $g = h$. □

1.2 Geradores e Relações de Grupos

Proposição 1.2.1. *Todo grupo é quociente de um grupo livre.*

Demonstração: Seja $f : G \longrightarrow G$ a identidade de G; f estende-se a um único homomorfismo $F(G) \longrightarrow G$ que é sobrejetivo. □

Definição 1.2.2. Sejam G um grupo, X um conjunto e $\varphi : F(X) \longrightarrow G$ um homomorfismo sobrejetor. Então os elementos de $\varphi(X)$ são chamados de geradores de G e os elementos de $Ker(\varphi)$ são chamados relações de G (sobre φ). $\langle X|R\rangle$ é chamado apresentação de G se existe um homomorfismo sobrejetor $\varphi : F(X) \longrightarrow G$ tal que R é um subconjunto do núcleo de φ e esse núcleo é o menor subgrupo normal de $F(X)$ que contém R. O núcleo é chamado fecho normal de R em $F(X)$ é denotado por $Ker(\varphi) = \langle R^{F(X)}\rangle = \langle\{r^f \mid r \in R, f \in F(X)\}\rangle \subseteq F(X)$; onde $r^f = f^{-1}rf$. Se ambos X e R são conjuntos finitos dizemos que a apresentação é finita. Também escrevemos $\langle R\rangle^{F(X)}$ para $\langle R^{F(X)}\rangle$.

Observamos que G é finitamente apresentável se $G \cong \dfrac{F(X)}{\langle R^{F(X)} \rangle}$, onde X é um subconjunto finito de G e R é um subconjunto finito de $F(X)$.

Exemplo 1.2.3. O grupo livre $F(X)$ tem apresentação $\langle X|\emptyset\rangle$.

Exemplo 1.2.4. $X = \{x\}, R = \emptyset$. Aqui $F(X)$ é cíclico, infinito e $\langle X, R\rangle = G \cong \dfrac{F(X)}{\langle R^{F(X)}\rangle} \cong Z$.

Exemplo 1.2.5. $X = \{x, y\}$, $R = \{x^2, y^3, xyx^{-1}y\}$, $\langle X/R\rangle^{\phi}$ é uma apresentação do grupo S_3 onde $\phi(x) = (12)$ e $\phi(y) = (123)$.

Teorema 1.2.6. (Teorema de von Dyck) *Sejam G e H grupos, $\varphi : F(X) \longrightarrow G$ um homomorfismo sobrejetor que dá apresentação $\langle X|R\rangle$ de G e $f : X \longrightarrow H$ uma função e $\theta : F(X) \longrightarrow H$ o homomorfismo que estende f. Se $\theta(r) = 1$ para todo $r \in R$ então existe um homomorfismo $\psi : G \longrightarrow H$ tal que $f(x) = \psi\varphi(x)$ para todo $x \in X$.*

Demonstração: Temos que $R \subseteq Ker(\theta)$ e, como $Ker(\varphi)$ é, por definição, o subgrupo normal gerado por R, temos que $Ker(\varphi) \subseteq Ker(\theta)$. Disso segue que o homomorfismo que queremos, ψ, pode ser definido fazendo $\psi(g) = \theta(y)$ para qualquer $y \in F(X)$ tal que $\varphi(y) = g$. □

Definição 1.2.7. Sejam $\langle X|R\rangle^{\phi}$ uma apresentação de um grupo G, $\phi : F(X) \longrightarrow G$ um epimorfismo. Então, $\langle X|R \cup S\rangle^{\phi}$ é uma apresentação de G, onde $S \subseteq \langle R\rangle^{F(X)}$. Dizemos que $\langle X|R \cup S\rangle^{\phi}$ é obtida a partir da apresentação $\langle X|R\rangle^{\phi}$ por uma transformação geral de Tietze de tipo I e que $\langle X|R\rangle^{\phi}$ é obtido da apresentação $\langle X|R \cup S\rangle^{\phi}$ por uma transformação geral de Tietze do tipo I'. Se S tem um único elemento dizemos que estas transformações são simples.

Definição 1.2.8. Sejam $\langle X|R\rangle^{\phi}$ uma apresentação do grupo G, Y um conjunto tal que $X \cap Y = \emptyset$ e u_y um elemento de $F(X)$ para todo $y \in Y$. Então temos uma apresentação $\langle X \cup Y|R \cup \{yu_y^{-1}|y \in Y\}\rangle^{\psi}$ de G, $\psi : F(X \cup Y) \longrightarrow G$ um epimorfismo, onde $\psi(x) = \phi(x)$ e $\psi(y) = \varphi(u_y)$. Seja N o subgrupo normal de $F(X \cup Y)$ gerado por $R \cup \{yu_y^{-1}\}$. Então ψ induz um epimorfismo $\pi : F(X \cup Y)/N \longrightarrow G$ assim $\psi(R \cup \{yu_y^{-1}\}) = 1$. Mas pelo teorema de von Dyck's, existe um epimorfismo $\theta : G \longrightarrow F(X \cup Y)/N$, com $\theta(\pi(x)) = xN$. Certamente, $\theta\pi$ é a identidade de $F(X \cup Y)/N$ e $\pi\theta$ a identidade de G.

Dizemos que $\langle X \cup Y|R \cup \{yu_y^{-1}|y \in Y\}\rangle$ é obtida a partir de $\langle X|R\rangle$ por uma transformação geral de Tietze do tipo II e que $\langle X|R\rangle$ é obtida de $\langle X \cup Y|R \cup \{yu_y^{-1}|y \in Y\}\rangle$ por uma transformação geral de Tietze do tipo II'. Se Y contém um só elemento dizemos que estas transformações são simples.

Teorema 1.2.9. *Duas apresentações de um grupo G podem ser obtidas uma de outra por uma sequência de transformações gerais de Tietze. No caso onde ambas as apresentações serem finitas, as transformações podem ser escolhidas simples.*

Demonstração: Sejam $\langle X|R\rangle^{\phi}$ e $\langle Y|S\rangle^{\psi}$ apresentações de G. Primeiro vamos assumir que $X \cap Y = \emptyset$. Para cada $y \in Y$ escolhemos $u_y \in F(X)$ com $\psi(y) = \phi(u_y)$, e para cada $x \in X$ escolhemos $v_x \in F(Y)$ com $\phi(x) = \psi(v_x)$.

Definindo θ por $\theta(x) = \phi(x)$ e $\theta(y) = \phi(u_y)$, obtemos uma apresentação de G

$$\langle X \cup Y | R \cup \{yu_y^{-1}, \forall y \in Y\}\rangle^{\theta},$$

obtida da apresentação $\langle X|R\rangle^{\phi}$ por uma transformação geral de Tietze do tipo II. Agora $\theta(y) = \phi(u_y)$, e este, por definição, é igual $\psi(y)$. Disto segue que $\theta(w) = \psi(w)$ para qualquer $w \in F(Y)$. Em particular, $\theta(s) = \psi(s) = 1$ e $\theta(v_x) = \psi(v_x)$, o qual, por definição, é igual a $\phi(x) = \theta(x)$.

Encontramos então a apresentação $\langle X \cup Y|R, S, \{yu_y^{-1}\}, \{xv_x^{-1}\}\rangle^{\theta}$ é obtida a apresentação anterior por meio de uma transformação geral de Tietze do tipo I. Por simetria, esta apresentação é obtida de $\langle Y|S\rangle^{\psi}$ por uma transformação geral de Tietze do tipo II seguida de uma transformação geral do tipo I. Assim, $\langle Y|S\rangle^{\psi}$ é obtida de uma transformação geral de Tietze do tipo I' seguida de uma do tipo II'.

Agora vamos supor que $X \cap Y \neq \emptyset$. Encontremos um conjunto X^* bijetivo com X e não interceptando nem X e nem Y. Certamente G é apresentado por $\langle X^*|R^*\rangle^{\phi^*}$, onde R^* é obtida de R substituindo cada x pelo seu correspondente x^*, e similarmente para ϕ^*. A discussão anterior prova que esta apresentação é obtida de cada umas das outras duas apresentações por uma sequência de transformações gerais de Tietze, como queríamos.

Finalmente, se X, Y, R e S são todos finitos, cada transformação geral de Tietze pode ser substituída por uma sequência finita de transformações de Tietze simples. □

Teorema 1.2.10. *Seja G um grupo com duas apresentações $\langle X|R\rangle^{\varphi}$ e $\langle Y|S\rangle^{\psi}$ com homomorfismos associados $\varphi : F(X) \longrightarrow G$ e $\psi : F(Y) \longrightarrow G$. Se X, Y e R são todos finitos, existe um subconjunto finito S_1 de S tal que $\langle Y|S_1\rangle$ é uma apresentação de G com homomorfismo associado ψ.*

Demonstração: Usaremos a notação do teorema 1.2.9. Então G tem a apresentação

$$\langle X \cup Y|T, \{xv_x^{-1}\}\rangle^{\theta},$$

onde $T = R \cup \{yu_y^{-1}\}$. Seja t^* obtido de t substituindo cada elemento x pelo seu correspondente v_x, e seja $T^* = \{t^*; \forall t \in T\}$. Seja $N = \langle xv_x^{-1}\rangle^{F(X \cup Y)}$, e seja $\pi : F(X \cup Y) \to F(X \cup$

$Y)/N$ a projeção canônica. Como $\pi(v_x) = \pi(x)$, vimos que $\pi(t^*) = \pi(t)$. Então t^* é uma consequência de t e as relações xv_x^{-1}. Isto segue que a transformação de Tietze do tipo I' nos dá uma apresentação $\langle X \cup Y|T, T^*, \{xv_x^{-1}\}\rangle^\theta$, e então a apresentação de Tietze do tipo I'nos dá a apresentação $\langle X \cup Y|T^*, \{xv_x^{-1}\}\rangle^\theta$. Agora v_x está em $F(Y)$ e, então $T^* \subseteq F(Y)$. Assim podemos aplicar uma transformação de Tietze do tipo II' para chegarmos à apresentação $\langle Y|T^*\rangle^\psi$.

Como X, Y e R são todos finitos, T^* é finito. Como $T^* \subseteq \langle S\rangle^{F(Y)}$, cada elemento de T^* é o produto de um número finito de conjugados de elementos de S e seus inversos, e escolhemos uma expressão para cada t^*. Consideremos S_1 consistindo de todos os elementos de S que ocorrem em alguma dessas expressões. Então S_1 é finito, e como $ker\psi$ é igual a $\langle S\rangle^{F(Y)}$ e igual a $\langle T^*\rangle^{F(Y)}$ é também igual a $\langle S_1\rangle^{F(Y)}$, como queríamos. □

Proposição 1.2.11. *Sejam G finitamente gerado e $\langle Y|S\rangle^\psi$ uma apresentação de G. Então existe um subconjunto finito de Y que gera G.*

Demonstração: Seja X um subconjunto finito de G com $\langle X\rangle = G$, ie, X gera G. Cada $x \in X$ é o produto de um número finito de elementos de $\psi(Y)$ e seus inversos. Assim, existe um subconjunto finito Y_1 de Y tal que $X \subseteq \langle\psi(Y_1)\rangle$. Segue que Y_1 gera G. □

Corolário 1.2.12. *Ser finitamente apresentável para um grupo não depende da escolha do conjunto finito de geradores.*

Demonstração: Seja G_2 um grupo finitamente apresentável, $G_2 = \langle X|R\rangle$, onde X é finito. Sejam X_1 um subconjunto finito de G_2 tal que $G_2 = \langle X_1\rangle$ e $G_1 = F(X_1)$ onde $F(X_1)$ é o grupo livre com base X_1. Então, pela propriedade universal de grupo livre, existe um único homomorfismo $\mu : G_1 \longrightarrow G_2$ cuja restrição sobre X_1 é a identidade. Agora, pelo teorema anterior temos que existe um subconjunto finito R_1 de $Ker(\mu)$ tal que $Ker(\mu) = \langle R_1^{G_1}\rangle$. E temos que $\langle X_1|R_1\rangle$ é uma apresentação finita de G_2. □

Capítulo 2

Produto Livre Amalgamado

2.1 Produto Livre

Definição 2.1.1. Sejam $\{G_\alpha\}$ uma família de grupos, G um grupo e $i_\alpha : G_\alpha \longrightarrow G$ homomorfismos. Então, $(G, \{i_\alpha\})$ é chamado de produto livre dos grupos G_α se para todo grupo H e homomorfismos $f_\alpha : G_\alpha \longrightarrow H$ existe um único homomorfismo $f : G \longrightarrow H$ tal que $f_\alpha = fi_\alpha$ para todo α.

Proposição 2.1.2. *Se $(G, \{i_\alpha\})$ e $(H, \{j_\alpha\})$ são produtos livres do grupo G_α então, existe um único isomorfismo $f : G \longrightarrow H$ tal que $fi_\alpha = j_\alpha$ para todo α.*

Demonstração: Pela definição de produto livre existe um homomorfismo $f : G \longrightarrow H$ tal que $fi_\alpha = j_\alpha$ para todo α, e também um homomorfismo $f' : H \longrightarrow G$ tal que $f'j_\alpha = i_\alpha$ para todo α. Como $f'fi_\alpha = i_\alpha$ para todo α, a unicidade do homomorfismo na definição, garante que $f'f$ é a identidade de G, e analogamente temos que ff' é a identidade em H. □

Proposição 2.1.3. *Seja (G, i_α) produto livre do grupo G_α. Então:*

1. *i_α é um monomorfismo se, e somente se, existe um grupo H e homomorfismos $f_\beta : G_\beta \longrightarrow H$ para todo β tal que f_α é um monomorfismo.*

2. *i_α é um monomorfismo para todo α.*

Demonstração: (2) segue de (1) tomando $H = G_\alpha$ e f_α sendo a identidade e todos os f_β sendo trivial. (1) é assegurado porque existe um homomorfismo f com $f_\alpha = fi_\alpha$. □

Teorema 2.1.4. *Qualquer família de grupos G_α tem produto livre.*

Demonstração: Seja G_α grupo com apresentação $\langle X_\alpha | R_\alpha\rangle^{\varphi_\alpha}$. Então $G_\alpha \equiv \dfrac{F(X_\alpha)}{\langle R_\alpha\rangle^{F(X_\alpha)}}$ e identificamos φ_α com a projeção canônica. Podemos supor que $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$ para $\alpha \neq \beta$. Seja G o grupo $\dfrac{F(\bigcup X_\alpha)}{\langle \bigcup R_\alpha\rangle^{F(\bigcup X_\alpha)}}$, então G tem apresentação $\langle \bigcup X_\alpha | \bigcup R_\alpha\rangle^{\varphi}$ com o homomorfismo natural φ associado, isto é, com a projeção canônica. Pelo Teorema de von Dyck, a inclusão de X_α em $\bigcup X_\alpha$ induz um homomorfismo i_α de G_α em G. Mostraremos que $(G, \{i_\alpha\})$ é o produto livre.

Sejam $f_\alpha : G_\alpha \longrightarrow H$ homomorfismos. f_α induz um homomorfismo ψ_α de $F(X_\alpha)$ em H tal que $\psi_\alpha(R_\alpha) = 1$, isto é, $\psi_\alpha(x) = f_\alpha(\varphi_\alpha(x)), \forall x \in X_\alpha$. Então existe um homomorfismo ψ de $F(\bigcup X_\alpha)$ em H tal que ψ restrito a X_α é ψ_α. Desde que $\psi(\bigcup R_\alpha) = 1$, ψ induz um homomorfismo $f : G \longrightarrow H$ com $f\varphi = \psi$. Também, para todo $x_\alpha \in X_\alpha$, $fi_\alpha(\varphi_\alpha(x_\alpha)) = f\varphi(x_\alpha) = \psi(x_\alpha)$ por definição de f e i_α, e $\psi(x_\alpha) = \psi_\alpha(x_\alpha) = f_\alpha\varphi_\alpha(x_\alpha)$ por definição de ψ e ψ_α. Desde que $\varphi_\alpha(X_\alpha)$ gera G_α, vemos que $f_\alpha = fi_\alpha$. Temos ainda que f é único pois G é gerado por $\bigcup i_\alpha(\varphi_\alpha(X_\alpha))$. $\square$

O produto livre da família de grupos G_α é denotada por $*G_\alpha$. O produto de n grupos $\{G_i\}_{i=1}^n$ é denotado por $G_1 * ... * G_n$.

Teorema 2.1.5. (Forma Normal) *Seja $(G, \{i_\alpha\})$ o produto livre dos grupos G_α. Então:*

1. *cada i_α é um monomorfismo.*
2. *pensando i_α como a inclusão, qualquer elemento g de G pode ser escrito de modo único como $g_1g_2 \dots g_n$, onde $n \geq 0$, $g_i \in G_{\alpha_i}$ para algum α_i, $g_i \neq 1$ e $\alpha_r \neq \alpha_{r+1}$ para $r < n$ ($n = 0$ corresponde a $g = 1$).*

Demonstração: Denotemos $i_\alpha(g_\alpha)$ por $\bar{g}_\alpha$ para $g_\alpha \in G_\alpha$.

(1) já foi provado em 2.1.3, e provaremos (2) mostrando que qualquer $u \in G$ pode ser escrito de modo único como $\bar{g}_1\bar{g}_2 \dots \bar{g}_n$, com $n \geq 0$, $g_i \in G_{\alpha_i}$, $g_i \neq 1$ e $\alpha_r \neq \alpha_{r+1}$.

Como a demonstração do teorema 2.1.4 mostra que $\bigcup i_\alpha(G_\alpha)$ gera G, qualquer u pode ser escrito como $\bar{g}_1\bar{g}_2 \dots \bar{g}_n$, com $n \geq 0$, $g_i \in G_{\alpha_i}$, $g_i \neq 1$ e $\alpha_r = \alpha_{r+1}$ é permitido. Se $\alpha_r = \alpha_{r+1}$ e $g_r \neq g_{r+1}^{-1}$ então podemos escrever u como $\bar{g}_1\bar{g}_2 \dots \bar{g}_{r-1}\bar{h}\bar{g}_{r+2} \dots \bar{g}_n$, onde $1 \neq h = g_rg_{r+1} \in G_{\alpha_i}$, enquanto que se $\alpha_r = \alpha_{r+1}$ e $g_r = g_{r+1}^{-1}$ podemos escrever u como $\bar{g}_1\bar{g}_2 \dots \bar{g}_{r-1}\bar{g}_{r+2} \dots \bar{g}_n$. Por indução em n, existe pelo menos uma forma de escrever u da forma desejada.

Para provar a unicidade, seguiremos o método utilizado na demonstração do Teorema 1.1.7. Seja S o conjunto de todas as sequências $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ com $n \geq 0$, $g_i \in G_{\alpha_i}$, $g_i \neq 1$ e $\alpha_r \neq \alpha_{r+1}$, em particular, a sequência vazia ( ) está em S. Tomemos $g_\alpha \in G_\alpha \setminus \{1\}$. Uma aplicação de S em S é definida enviando:

$(g_1, \ldots, g_n)$ a $(g_\alpha, g_1, \ldots, g_n)$ se $\alpha \neq \alpha_1$

$(g_1, \ldots, g_n)$ a $(g_\alpha g_1, g_2, \ldots, g_n)$ se $\alpha = \alpha_1$ e $g_\alpha g_1 \neq 1$

$(g_1, \ldots, g_n)$ a $(g_2, \ldots, g_n)$ se $\alpha = \alpha_1$ e $g_\alpha g_1 = 1$

Isto define uma função φ_α de G_α para o conjunto das aplicações de S nele mesmo (definindo $\varphi_\alpha(1)$ como sendo a identidade), onde a operação do conjunto de aplicações de S em S é composição. φ_α preserva a multiplicação. Isto implica que φ_α aplica em $Sym(S)$, o grupo das permutações de S, desde que $\varphi_\alpha(g_\alpha)$ tem inverso $\varphi_\alpha(g_\alpha^{-1})$ e $\varphi_\alpha(ab) = \varphi_\alpha(a)\varphi_\alpha(b)$ para $a, b \in G_\alpha$, observamos que aqui $Sym(S)$ age à esquerda sobre S.

Seja $\varphi : G \longrightarrow Sym(S)$ o homomorfismo tal que $\varphi_\alpha = \varphi i_\alpha$ para todo α. Seja $u \in G$ e o escrevemos como $h_1 h_2 \ldots h_m$, com $h_i \neq 1$, $h_i \in G_{\alpha_i}$, e $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$. Pela definição de φ temos que $\varphi(u)$ aplicado na sequência vazia nos dá a sequência $(h_1, h_2, \ldots, h_m)$, e então $h_1, h_2, \ldots, h_m$ são unicamente determinados por u. □

Teorema 2.1.6. *Sejam G_α subgrupos de um grupo G. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) G é produto livre dos subgrupos G_α;

(ii) Qualquer elemento de G pode ser escrito unicamente como $g_1 \ldots g_n$ com $n \geq 0$, $g_i \in G_{\alpha_i}$, $g_i \neq 1$, e $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$;

(iii) G é gerado pelos subgrupos G_α e 1 não pode ser escrito como produto $g_1 \ldots g_n$ com $n > 0$, $g_i \neq 1$, e $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$.

Demonstração: (ii) e (iii) são equivalentes, como na proposição 1.1.11. Se (i) vale então vale (ii) pelo teorema da forma normal. Suponhamos que (iii) vale. Sabemos que existe um homomorfismo de $*G_\alpha$ em G que é a inclusão em cada G_α, e (iii) nos dá que este homomorfismo é sobrejetor e tem núcleo trivial, então é um isomorfismo. □

2.2 'Push-out' e Produto Livre Amalgamado

Definição 2.2.1. Sejam G_0, G_1 e G_2 grupos, $i_1 : G_0 \longrightarrow G_1$ e $i_2 : G_0 \longrightarrow G_2$ homomorfismos. Suponha que exista um grupo G munido com homomorfismos $j_k : G_k \longrightarrow G$ tais que $j_1 i_1 = j_2 i_2$ e para todo grupo H munido com homomorfismos $\varphi_k : G_k \longrightarrow H$ tais que $\varphi_1 i_1 = \varphi_2 i_2$ existe um único homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow H$ tal que $\varphi j_k = \varphi_k$, $k = 1, 2$. Dizemos que G é 'push-out' de G_0, G_1, G_2, i_1 e i_2.

Teorema 2.2.2. *Para quaisquer G_0, G_1, G_2, i_1 e i_2, existe o 'push-out'.*

Demonstração: Para $r = 1, 2$, seja G_r grupo com apresentação $\langle X_r | R_r \rangle^{\theta_r}$, e $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Identificamos G_r com $\dfrac{F(X_r)}{\langle R_r \rangle^{F(X_r)}}$ e θ_r com a projeção canônica. Seja Y um conjunto de geradores de G_0, e para todo $y \in Y$, existe $w_{yr} \in F(X_r)$ tal que $i_r(y) = \theta_r(w_{yr})$. Seja G o grupo com apresentação $\langle X_1 \cup X_2 | R_1, R_2, \{w_{y1}^{-1} w_{y2}\}_{y \in Y} \rangle$ com homomorfismo associado π. Então, temos a aplicação natural j_r de G_r em G, induzida pela inclusão de X_r em $X_1 \cup X_2$, e G é gerado por $j_1(G_1) \cup j_2(G_2)$. Portanto, existe no máximo um homomorfismo de $\varphi : G \longrightarrow H$ que satisfaz a definição 2.2.1.

Suponha que tenhamos os homomorfismos φ_r de G_r ao grupo H tais que $\varphi_1 i_1 = \varphi_2 i_2$. Então φ_r definem homomorfismos ψ_r de $F(X_r)$ a H que é trivial em R_r. Seja $\mu : F(X_1 \cup X_2) \longrightarrow H$ o homomorfismo definido por $\mu|_{X_r} = \psi_r|_{X_r}$. Pelo Teorema 1.2.6 existe um homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow H$ tal que $\varphi\pi = \mu$, que por construção satisfaz $\varphi j_r = \varphi_r$. □

Definição 2.2.3. Quando i_1 e i_2 são injetivas, o 'push-out' G é chamado de produto livre amalgamado de G_1 e G_2 com amálgama G_0.

Neste caso, geralmente pensamos G_0 como um subgrupo de G_1 e G_2, e i_1 e i_2 como as inclusões. Denotamos o produto livre amalgamado G por $G_1 *_{G_0} G_2$.

Definição 2.2.4. Dizemos que um conjunto S é transversal a esquerda de um subgrupo C em A se S contém exatamente um membro de cada classe lateral aC, isto é, $A = \overset{\circ}{\bigcup\limits_{a \in S}} aC$.

Teorema 2.2.5. (Forma Normal) *Sejam G o produto livre amalgamado de A, B com amálgama C, $i_A : C \longrightarrow A$ e $i_B : C \longrightarrow B$ são inclusões, e S e T transversais a esquerda de C em A e B respectivamente, com $1 \in S \cap T$. Considerando $j_A : A \longrightarrow G$ e $j_B : B \longrightarrow G$ homomorfismos da definição do 'push-out' ($G_1 = A, G_2 = B, j_1 = j_A, j_2 = j_B, i_1 = i_A$ e $i_2 = i_B$), temos:*

1. *j_A e j_B são monomorfismos.*

2. *$j_A(A) \cap j_B(B) = j_A(C) = j_B(C)$.*

3. *Considerando j_A e j_B inclusões, qualquer elemento de G pode ser unicamente escrito como $u_1 u_2 \ldots u_n c$, onde $n \geq 0, c \in C$ e $u_1, u_2, \ldots, u_n$ vem alternadamente de $S \setminus \{1\}$ e $T \setminus \{1\}$.*

Demonstração: Pela definição 2.2.1, sabemos que a restrição de j_A sobre C é igual à restrição de j_B sobre C. Também pensando j_A e j_B como inclusões, uma vez que a parte (1) é demonstrada, (2) pode ser escrito como $A \cap B = C$. Então (2) é corolário da unicidade em (3).

Denotemos $j_A(a)$ por $\bar{a}$ e $j_B(b)$ por $\bar{b}$. Como no Teorema 2.1.5, para provar (1) e (3) é suficiente mostrar que para qualquer $g \in A *_C B$ existem únicos $u_1, u_2, \ldots, u_n$ e c com $n \geq 0$, $c \in C$ e $u_1, u_2, \ldots, u_n$ vindos alternadamente de $S \setminus \{1\}$ e $T \setminus \{1\}$ tal que $g = \bar{u}_1\bar{u}_2 \ldots \bar{u}_n\bar{c}$. Qualquer g pode ser escrito como $\bar{g}_1\bar{g}_2 \ldots \bar{g}_k$, onde $g_i \in A \cup B$ para algum k. Se g_i e g_{i+1} pertencem ambos a A ou ambos a B, podemos escrever g como $\bar{g}_1\bar{g}_2 \ldots \bar{g}_{i-1}\bar{h}\bar{g}_{i+2} \ldots \bar{g}_k$, onde $h = g_i g_{i+1}$. Continuando assim por diante,vem que g pode ser escrita ou como $\bar{c}$ ou como $\bar{g}_1\bar{g}_2 \ldots \bar{g}_n$, onde $g_1, g_2, \ldots, g_n$ são alternadamente de $A \setminus C$ e $B \setminus C$.

Usando indução por n, escrevamos $\bar{g}_1\bar{g}_2 \ldots \bar{g}_{n-1}$ como $\bar{u}_1\bar{u}_2 \ldots \bar{u}_{n-1}\bar{c}$, onde $u_i \in (S \cup T) \setminus \{1\}$, $u_1 \in g_1C$ e $u_i \in Cg_iC$ para cada $i > 1$, e que u_i vem alternadamente de $S \setminus \{1\}$ e $T \setminus \{1\}$. Então, $g = \bar{u}_1 \ldots \bar{u}_{n-1}\bar{c}\bar{g}_n = \bar{u}_1 \ldots \bar{u}_{n-1}\bar{h}$, onde $h = cg_n$, e ainda $g = \bar{u}_1 \ldots \bar{u}_{n-1}\bar{u}_n\bar{d}$, onde $h = u_n d$ com $u_n \in S \cup T$, $d \in C$. Desde que $u_n d = cg_n$, temos que $u_n \in Cg_nC$, que é o desejado. Também temos que $u_n \neq 1$ pois $g_n \notin C$. Logo temos provado que cada elemento de G pode ser escrito na forma desejada.

Agora provemos a unicidade pelo método utilizado no Teorema da Forma Normal para grupos livres. Seja X o conjunto de todas as sequências $(u_1, u_2, \ldots, u_n, c)$ com $n \geq 0, c \in C$ e $u_1, u_2, \ldots, u_n$ alternadamente em $S \setminus \{1\}$ e $T \setminus \{1\}$. Definimos um homomorfismo φ de G em $Sym(X)$ tal que, quando g é escrito como $\bar{u}_1\bar{u}_2 \ldots \bar{u}_n\bar{c}$ da forma desejada, a ação de $\varphi(g)$ na seguência (1) é a sequência $(u_1, u_2, \ldots, u_n, c)$. Isto mostrará a unicidade da representação de g. Observamos que o grupo de permutações $Sym(X)$ atua sobre X à direita (isso é necessário pois as ações no livro de Cohen são todas à direita, até homomorfismos agem à direita).

Pela definição de produto livre amalgamado, para construir φ é suficiente definir $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$ para todos $a \in A$ e $b \in B$ com as propriedades que

$\varphi(a_1a_2) = \varphi(a_1)\varphi(a_2), \ \forall a_1, a_2 \in A$

$\varphi(b_1b_2) = \varphi(b_1)\varphi(b_2), \ \forall b_1, b_2 \in B$

e que as definições de φ em A e em B concordam-se em C (então é automaticamente aplicação de A em $Sym(X)$, desde que $\varphi(a^{-1})$ é o inverso de $\varphi(a)$). Definimos φ em A, onde $\varphi(a)$ envia $(u_1, u_2, \ldots, u_n, c)$ para:

$(u_1, u_2, \ldots, u_n, v, d)$ se $u_n \notin A, ca = vd$ com $v \in S \setminus \{1\}$ e $d \in C$,

$(u_1, u_2, \ldots, u_n, d)$ se $u_n \notin A$ e $ca = d$ com $d \in C$ (isto é, se $a \in C$),

$(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, v, d)$ se $u_n \in A$ e $u_nca = vd$ com $v \in S \setminus \{1\}$ e $d \in C$,

$(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, d)$ se $u_n \in A$ e $u_nca = d$ com $d \in C$.

Não é difícil provar que $\varphi(a'a) = \varphi(a')\varphi(a)$. Definimos φ em B de forma semelhante, trocando A por B. É fácil verificar que as definições de φ em A e em B concordam-se em C. $\square$

Teorema 2.2.6. **(Forma Reduzida)** *Seja G o produto livre amalgamado de A e B com amálgama C, $i_A : C \longrightarrow A$ e $i_B : C \longrightarrow B$. Considerando $j_A : A \longrightarrow G$ e $j_B : B \longrightarrow G$ inclusões, temos:*

1. *qualquer $w \in G \setminus C$ pode ser escrita como $g_1 g_2 \ldots g_n$, onde $n \geq 1$ e g_i vem alternadamente de $A \setminus C$ e $B \setminus C$.*
2. *se também podemos escrever w como $h_1 h_2 \ldots h_m$ com h_j alternadamente de $A \setminus C$ e $B \setminus C$ então, $m = n$ e $h_1 \in g_1 C$ e $h_i \in C g_i C$ para todos os outros i.*
3. *se $n > 1$ então, $w \notin A \cup B$.*
4. *qualquer produto $g_1 g_2 \ldots g_n$, onde $n \geq 1$ e g_i vem alternadamente de $A \setminus C$ e $B \setminus C$ não pode estar em C.*

Demonstração: O item (1) já foi provado no Teorema da Forma Normal de produto livre amalgamado. Mostramos que se w é escrito como em (1) então, sua forma normal é $u_1 u_2 \ldots u_n c$ onde $u_1 \in g_1 C$ e $u_i \in C g_i C$ para todos os outros i. Então (2) segue da unicidade da forma normal para produto livre amalgamado. O Teorema da Forma Normal ainda nos diz que tal produto não pode estar em C e pode pertencer somente a $A \cup B$ se $n = 1$. $\square$

Proposição 2.2.7. *Sejam A e B subgrupos de um grupo G e $C = A \cap B$. Então, $G = A *_C B$ se, e somente se, todo elemento de $G \setminus C$ pode ser escrito como um produto $g_1 g_2 \ldots g_n$ com g_i alternadamente de $A \setminus C$ e $B \setminus C$ e nenhum deste produto é igual a 1.*

Demonstração: $\Rightarrow$) é corolário da forma normal de produto livre amalgamado.

$\Leftarrow$) Agora seja G com esta propriedade. As inclusões de A e B em G nos dá um homomorfismo de $A *_C B$ em G que é injetora e sobrejetora pelas condições dadas. Logo $G \cong A *_C B$. $\square$

Capítulo 3

Extensões HNN

Em 1949, G. Higman, B. Neumann e H. Neumann estudaram uma construção ligada a produtos livres amalgamados. Esta construção é agora chamada uma extensão HNN.

3.1 Extensões HNN com uma letra estável

Definição 3.1.1. Sejam G e A grupos e sejam i_0 e i_1 monomorfismos de A em G. Seja P um grupo cíclico infinito com gerador p. Seja N o fecho normal de $\{p^{-1}i_0(a)p(i_1(a))^{-1}\}$, $a \in A$, em $G * P$. Seja $H = (G * P)/N$. Então H é chamada extensão HNN do grupo base G com letra estável p e subgrupos associados $i_0(A)$ e $i_1(A)$. Usualmente tomamos A como subgrupo de G com i_0 sendo a inclusão e escrevemos $H = \langle G, p | p^{-1}Ap = B\rangle$, onde $B = Im(i_1)$.

Seja G com a apresentação $\langle X|R\rangle^{\phi}$ e p não está em X, e sejam Y um subconjunto de $F(X)$ e θ uma aplicação injetora de Y em $F(X)$. Sejam $\phi(Y)$ que gera um subgrupo A e $\phi\theta(Y)$ que gera um subgrupo B de G. Se θ induz um isomorfismo de A em B então existe extensão HNN com apresentação $H = \langle X, p | R, p^{-1}yp = \theta(y), y \in Y\rangle$. Reciprocamente, uma apresentação desta forma é uma extensão HNN sob a condição que θ induz um isomorfismo, $\overline{\theta}$, de $\langle\phi(Y)\rangle = A$ em $\langle\phi\theta(Y)\rangle = B$, ie, $\overline{\theta}(\phi(y)) = \phi(\theta(y))$.

Sejam g_0 e g_1 em G e definamos homomorfismos j_0 e j_1 de A em G por $j_r(a) = (i_r(a))^{g_r} = g_r^{-1}i_r(a)g_r$, para $r = 0, 1$. Então, as extensões HNN $\langle G, p | p^{-1}i_0(a)p = i_1(a), a \in A\rangle$ e $\langle G, q | q^{-1}j_0(a)q = j_1(a), a \in A\rangle$ são isomorfas com isomorfismo levando $g \in G$ em g e p em $g_0 q g_1^{-1}$.

Exemplo 3.1.2. O grupo com a apresentação $\langle a, b | a^{-1}ba = b^2\rangle$ é uma extensão HNN do grupo cíclico infinito $\langle b\rangle$ com letra estável a e grupos associados $\langle b\rangle$ e $\langle b^2\rangle$.

A inclusão de G em $G * P$ induz um homomorfismo $j : G \longrightarrow H$. A propriedade universal de extensões HNN é dada na proposição seguinte.

Proposição 3.1.3. *Seja $\phi : G \longrightarrow K$ um homomorfismo. Seja $k \in K$ tal que $k^{-1}\phi(i_0(a))k = \phi(i_1(a))$, para $a \in A$. Seja H a extensão HNN de G com letra estável p e subgrupos associados $i_0(A)$ e $i_1(A)$. Então, existe um único homomorfismo $\psi : H \longrightarrow K$ tal que $\psi j = \phi$ e $\psi(p) = k$.*

Demonstração: Como H é gerado por $j(G)$ e $\{p\}$ existe no máximo um homomorfismo em questão. Existe, certamente, um homomorfismo de $G * P$ em K cuja restrição sobre G é ϕ e que aplica p em k, e este aplicará o elemento $p^{-1}(i_0(a))p(i_1(a))^{-1}$ em 1.

Como o subgrupo normal de $G * P$ gerado por $p^{-1}(i_0(a))p(i_1(a))^{-1}$ é o núcleo da projeção de $G * P$ em H, esse homomorfismo irá induzir o homomorfismo, ψ, o qual desejamos. □

Seja H a extensão HNN $\langle G, p | p^{-1}Ap = B\rangle$ com um isomorfismo i_1 de A em B. Sejam S e S_{-1} transversais à esquerda de A e B em G, todos contendo 1. Temos os seguintes teoremas da Forma Normal e Forma Normal Reduzida.

Teorema 3.1.4. (Teorema da Forma Normal) *(i) O homomorfismo j é um monomorfismo.*

(ii) Considerando G como um subgrupo de H, qualquer $h \in H$ pode ser escrito de forma única como

$$h = g_0 p^{\epsilon_0} g_1 ... g_{n-1} p^{\epsilon_{n-1}} g_n,$$

onde $n \geq 0$,$\epsilon_i = \pm 1$ (para $n = 0$ a expressão é justamente g_0) e

1) $g_n \in G$,

2) $g_i \in S$ se $\epsilon_i = 1$ e $g_i \in S_{-1}$ se $\epsilon_i = -1$, para $0 \leq i \leq n-1$,

3) se $\epsilon_{i-1} = -\epsilon_i$, então $g_i \neq 1$, para $1 \leq i \leq n-1$.

Definição 3.1.5. Dizemos que um elemento $g_0 p^{\epsilon_0} g_1 ... g_{n-1} p^{\epsilon_{n-1}} g_n$ de $G * P$, onde $n \geq 0$, $\epsilon_i = \pm 1$, $g_i \in G$ tem um 'pinch' se existe algum r tal que ou, $\epsilon_r = -\epsilon_{r-1} = 1$ e $g_r \in A$ ou $\epsilon_r = -\epsilon_{r-1} = -1$ e $g_r \in B$.

Teorema 3.1.6. (Teorema da Forma Reduzida) *(i) Considerando G como um subgrupo de H, qualquer $h \in H$ pode ser escrito como*

$$h = g_0 p^{\epsilon_0} g_1 ... g_{n-1} p^{\epsilon_{n-1}} g_n,$$

onde $n \geq 0$, $\epsilon_i = \pm 1$, $g_i \in G$ e o elemento correspondente de $G * P$ não tem pinch.

(ii) Se h também pode ser escrito como

$$v_0 p^{\eta_0} v_1 \ldots v_{m-1} p^{\eta_{m-1}} v_m,$$

com condições similares ao ítem anterior, então $m = n$, para todo i temos $\epsilon_i = \eta_i$.

(iii) Se h tem uma expressão como acima e sem "pinch"e $n > 0$, então $h \notin G$.

(iv) Se o produto $g_0 p^{\epsilon_0} g_1 \ldots g_{n-1} p^{\epsilon_{n-1}} g_n$, com $g_i \in G$, $\epsilon_i = \pm 1$, $n > 0$, é igual a 1, então elemento correspondente em $G * P$ tem um "pinch".

(v) Se um produto $g_0 p^{\epsilon_0} g_1 \ldots g_{n-1} p^{\epsilon_{n-1}} g_n$, com $g_i \in G$, $\epsilon_i = \pm 1$, $n > 0$, está em G então o elemento correspondente de $G * P$ tem um "pinch".

Observemos que em ambos teoremas, o caso $n = 0$ nos dá o elemento g_0; o produto $g_0 p^{\epsilon_0}$ corresponde a $n = 1$ com $g_1 = 1$.

Demonstrações: As partes (iii) e (iv) do teorema da forma reduzida são imediatas de (ii). A parte (v) segue da parte (iv) pois $g_0 \ldots g_n = g$ pode ser escrito como $g_0 \ldots (g_n g^{-1}) = 1$. Consideremos o conjunto W de todas as sequencias $(g_0, \epsilon_0, g_1, \ldots, g_{n-1}, \epsilon_{n-1}, g_n)$ satisfazendo as condições da parte (ii) do teorema da forma normal.

Seja $Sym(W)$ =todas a permutações de W. Nesse caso específico $Sym(W)$ age sobre W à direita. Definimos um homomorfismo $\phi : G \longrightarrow Sym(W)$ por:

$$(g_0, \ldots, \epsilon_{n-1}, g_n) * \phi(g) = (g_0, \ldots, \epsilon_{n-1}, g_n g).$$

Agora vamos definir um elemento $\pi \in Sym(W)$

1) se $\epsilon_{n-1} = -1$, então

$(g_0, \ldots, \epsilon_{n-1}, g_n) * \pi = (g_0, \ldots, \epsilon_{n-1}, s, 1, b)$, onde $g_n = sa$, $1 \neq s \in S$, $p^{-1}ap = b \in B$ e g_i, ϵ_j satisfazem as condições do teorema.

2) se $\epsilon_{n-1} = -1$ e $s = 1$, então

$(g_0, \ldots, \epsilon_{n-1}, g_n) * \pi = (g_0, \ldots \epsilon_{n-2}, (g_{n-1} b))$.

3) se $\epsilon_{n-1} = 1$, então

$(g_0, \ldots, \epsilon_{n-1}, g_n) * \pi = (g_0, \ldots, 1 = \epsilon_{n-1}, s, 1, b)$, onde * denota a ação de $Sym(W)$ em W.

Temos que $\phi : G \longrightarrow Sym(W)$ é um homomorfismo de grupos e $\pi \in Sym(W)$, então pela proposição 3.1.3 existe um homomorfismo $\psi : H \longrightarrow Sym(W)$ tal que $\psi|_G = \phi$ e $\psi(p) = \pi$, ie, $p^{-1}ap = b \Longleftrightarrow \pi^{-1}\phi(a)\pi = \phi(b)$.

O homomorfismo ϕ é injetivo pois se $g \in Ker(\phi)$ então $(g_0, ..., \epsilon_{n-1}, g_n)\phi(g) = (g_0, ..., \epsilon_{n-1}, g_n) \Longrightarrow (g_0, ..., \epsilon_{n-1}, g_n g) = (g_0, ..., \epsilon_{n-1}, g_n) \Longrightarrow g_n g = g_n \Longrightarrow g = 1$. Logo, $\psi j = \phi$ é injetivo o que implica que j também é injetivo.

Unicidade da forma normal.

Seja $h \in H$, $h = g_0 p^{\epsilon_0} g_1 ... g_{n-1} p^{\epsilon_{n-1}} g_n$ na forma normal, então por indução sobre n temos:

$$(1)\psi(h) = (g_0, \epsilon_0, g_1 ... g_{n-1}, \epsilon_{n-1}, g_n).$$

Disso segue que a expressão é única para h e é determinada pela ação de ψ em (1).

Existência da forma normal.

Seja $h = \widetilde{g_0} p^{\epsilon_0} \widetilde{g_1} ... \widetilde{g}_{n-1} p^{\epsilon_{n-1}} \widetilde{g_n}$, onde $\epsilon_i = \pm 1$, $\widetilde{g_j} \in G$, se $\epsilon_i = -\epsilon_{i+1}$, então $\widetilde{g_i} \neq 1$.

Usamos indução sobre n para mostrarmos que h pode ser escrito na forma normal. Assim,

$$\widetilde{g_0} p^{\epsilon_0} \widetilde{g_1} ... p^{\epsilon_{n-2}} \widetilde{g_{n-1}} = g_0 p^{\epsilon_0} g_1 ... p^{\epsilon_{n-2}} g_{n-1},$$

o lado direito já está na forma normal. Então, se $h = g_0 p^{\epsilon_0} g_1 ... p^{\epsilon_{n-2}} g_{n-1} p^{\epsilon_{n-1}} \widetilde{g_n}$ for forma normal a demonstração da existência da forma normal acaba aqui, mas se h não for forma normal temos duas possibilidades:

1) $\epsilon_{n-1} = 1$, $g_{n-1} \notin S$,

2) $\epsilon_{n-1} = -1$, $g_{n-1} \notin S_{-1}$.

1) $g_{n-1} = sa$, $s \in S_1$, $a \in A$, $a \neq 1$,

$g_{n-1} p \widetilde{g_n} = sap\widetilde{g_n} = sp(p^{-1}ap)\widetilde{g_n} = sp(b\widetilde{g_n})$, onde $b = p^{-1}ap \in B \setminus \{1\}$.

Assim, $h = g_0 p^{\epsilon_0} ... g_{n-2} p^{\epsilon_{n-2}} sp(b\widetilde{g_n})$.

2) $g_{n-1} = sb$, $s \in S_{-1}$, $b \in B$, $b \neq 1$.

$g_{n-1} p^{-1} \widetilde{g_n} = sbp^{-1}\widetilde{g_n} = sp^{-1}pbp^{-1}\widetilde{g_n} = sp^{-1}(a\widetilde{g_n})$, onde $a = pbp^{-1} \in A \setminus \{1\}$. Logo, $h = g_0 p^{\epsilon_0} ... g_{n-2} p^{\epsilon_{n-2}} sp^{-1}(a\widetilde{g_n})$.

□

Proposição 3.1.7. *Seja $H = \langle G, p | p^{-1}Ap = \phi(A) \rangle$ uma extensão HNN, onde ϕ é um monomorfismo de A em G. Seja B um subgrupo de G tal que $\phi(B \cap A) = B \cap \phi(A)$. Então o subgrupo $\langle B, p \rangle$ é uma extensão HNN de B com letra estável p e os subgrupos associados $B \cap A$ e $B \cap \phi(A)$. Também, $\langle B, p \rangle \cap G = B$.*

Demonstração: Seja K a extensão HNN de B com letra estável q e subgrupos associados $B \cap A$ e $B \cap \phi(A)$. Então a inclusão de B em G e a função que leva q em p induzem um homomorfismo ϕ de K em H. Este homomorfismo ϕ tem imagem $\langle B, p \rangle$. Essa condição garante que, na função correspondente de $B * Q$ em $G * P$, onde Q é livre em $\{q\}$, um elemento que não tem "pinch"vai para um elemento que não tem "pinch". Pelo teorema da forma reduzida,temos que o homomorfismo ϕ tem núcleo trivial e portanto ϕ induz isomorfismo entre K e $\langle B, p \rangle$ e elemento de K que não está em B é levado para um elemento de H que não está em G. □

3.2 Extensões HNN com mais de uma letra estável

Até agora vimos resultados de extensões HNN com apenas uma letra estável. Colocaremos a seguir resultados análogos ao da seção anterior mas para extensões HNN com mais de uma letra estável. Não colocaremos demonstrações pois essas são análogas ao caso com uma letra estável.

Definição 3.2.1. Tomemos uma família de grupos A_α e monomorfismos $i_{0\alpha}$ e $i_{1\alpha}$ de A_α em G. Seja P o grupo livre com base $\{p_\alpha\}$, e seja N o subgrupo normal de $G * P$ gerado por

$$\{p_\alpha^{-1} i_{0\alpha}(a_\alpha) p_\alpha (i_{1\alpha}(a_\alpha))^{-1}; \forall \alpha, a_\alpha \in A_\alpha\}.$$

Então $H = (G * P)/N$ é chamada a extensão HNN do grupo base G, letras estáveis p_α e pares de subgrupos associados $i_{0\alpha}(A_\alpha)$ e $i_{1\alpha}(A_\alpha)$.

As notações e observações da seção anterior podem ser estendidas para esse caso mais geral. É útil considerar a mesma construção quando as funções $i_{0\alpha}$ e $i_{1\alpha}$ não são monomorfismos; neste caso nos referimos a uma extensão pseudo-HNN.

Exemplo 3.2.2. O grupo livre com base $\{p_\alpha\}$ é a extensão HNN do grupo trivial com letras estáveis $\{p_\alpha\}$

A inclusão de G em $G * P$ induz um homomorfismo $j : G \longrightarrow H$. A propriedade universal de extensões HNN é dada na proposição seguinte.

Proposição 3.2.3. *Seja $\phi : G \longrightarrow K$ um homomorfismo de grupos. Suponhamos que $k_\alpha \in K$ tais que $k_\alpha^{-1}\phi(i_{0\alpha}(a_\alpha))k_\alpha = \phi(i_{1\alpha}(a_\alpha))$, para todo α e $a_\alpha \in A_\alpha$. Seja H a extensão HNN de G com letras estáveis p_α e subgrupos associados $i_{0\alpha}(A_\alpha)$ e $i_{1\alpha}(A_\alpha)$. Então, existe um único homomorfismo $\psi : H \longrightarrow K$ tal que $\psi j = \phi$ e $\psi(p_\alpha) = k_\alpha$, para todo α.*

Em particular, existe um homomorfismo de H em P levando cada p_α nele mesmo e aplicando G trivialmente. Disso segue que o subgrupo de H gerado pela imagens de $\{p_\alpha\}$ é livre com base todos seus elementos. Por isso, consideramos P como um subgrupo de H.

Seja $H = \langle G, p_\alpha | p_\alpha^{-1} A_\alpha p_\alpha = A_{-\alpha} \rangle$, com um isomorfimo $i_{1\alpha}$ de A_α em $A_{-\alpha}$ onde A_α e $A_{-\alpha}$ são pares de subgrupos isomorfos de G. Sejam S_α e $S_{-\alpha}$ as transversais à esquerda de A_α e $A_{-\alpha}$ em G, todas contendo 1.

Teorema 3.2.4. (Teorema da Forma Normal) *(i) O homomorfismo j é um monomorfismo.*

(ii) Considerando G como um subgrupo de H, qualquer $h \in H$ pode ser escrito de forma única como

$$h = g_0 p_{\alpha_0}^{\epsilon_0} g_1 \dots g_{n-1} p_{\alpha_{n-1}}^{\epsilon_{n-1}} g_n,$$

onde $n \geq 0$,$\epsilon_i = \pm 1$ (para $n = 0$ a expressão é justamente g_0) e

1) $g_n \in G$,

2)$g_i \in S_{\alpha_i}$ se $\epsilon_i = 1$ e $g_i \in S_{-\alpha_i}$ se $\epsilon_i = -1$,

3) se $\alpha_{i-1} = \alpha_i$ e $\epsilon_{i-1} = -\epsilon_i$, então $g_i \neq 1$.

Definição 3.2.5. Dizemos que um elemento $g_0 p_{\alpha_0}^{\epsilon_0} g_1 \dots g_{n-1} p_{\alpha_{n-1}}^{\epsilon_{n-1}} g_n$ de $G * P$, onde $n \geq 0$, $\epsilon_i = \pm 1$, $g_i \in G$ tem um 'pinch' se existe algum r tal que $\alpha_r = \alpha_{r-1}$ e ou $\epsilon_r = -\epsilon_{r-1} = 1$ e $g_r \in A_r$ ou $\epsilon_r = -\epsilon_{r-1} = -1$ e $g_r \in A_{-r}$.

Teorema 3.2.6. (Teorema da Forma Reduzida) *(i) Considerando G como um subgrupo de H, qualquer $h \in H$ pode ser escrito como*

$$h = g_0 p_{\alpha_0}^{\epsilon_0} g_1 \dots g_{n-1} p_{\alpha_{n-1}}^{\epsilon_{n-1}} g_n,$$

onde $n \geq 0$, $\epsilon_i = \pm 1$, $g_i \in G$ e o elemento correspondente de $G * P$ não tem pinch.

(ii) Se h também pode ser escrito como

$$v_0 p_{\beta_0}^{\eta_0} v_1 \dots v_{m-1} p_{\beta_0}^{\eta_{m-1}} v_m,$$

com condições similares ao ítem anterior, então $m = n$, para todo i, $\alpha_i = \beta_i$ e $\epsilon_i = \eta_i$.

(iii) Se h tem uma expressão como acima e sem "pinch"e $n > 0$, então $h \notin G$.

(iv) Se o produto $g_0 p_{\alpha_0}^{\epsilon_0} g_1 \dots g_{n-1} p_{\alpha_{n-1}}^{\epsilon_{n-1}} g_n$, com $g_i \in G$, $\epsilon_i = \pm 1$, $n > 0$, é igual a 1, então elemento correspondente em $G * P$ tem um "pinch".

(v) Se um produto $g_0 p_{\alpha_0}^{\epsilon_0} g_1 ... g_{n-1} p_{\alpha_{n-1}}^{\epsilon_{n-1}} g_n$, com $g_i \in G$, $\epsilon_i = \pm 1$, $n > 0$, está em G então o elemento correspondente de $G * P$ tem um "pinch".

Observemos que em ambos teoremas, o caso $n = 0$ nos dá o elemento g_0; o produto $g_0 p^{\epsilon_0}$ corresponde a $n = 1$ com $g_1 = 1$.

Proposição 3.2.7. *Seja $H = \langle G, p_\lambda | p_\lambda^{-1} A_\lambda p_\lambda = \phi_\lambda(A_\lambda) \rangle$ uma extensão HNN, onde ϕ_λ é um monomorfismo de A_λ em G, λ está em num conjunto de índices Λ. Seja M um subconjunto de Λ e seja B um subgrupo de G tal que $\phi_\mu(B \cap A_\mu) = B \cap (\phi_\mu(A_\mu))$, para todo $\mu \in M$. Então o subgrupo $\langle B, p_\mu \rangle$, $\mu \in M$, é uma extensão HNN de B com letras estáveis p_μ e subgrupos associados $B \cap A_\mu$ e $B \cap \phi_\mu(A_\mu)$. Também, $\langle B, p_\mu \rangle \cap G = B$, $\mu \in M$.*

Capítulo 4

Grafos de Grupos

4.1 Grafos

Definição 4.1.1. Um grafo X é um conjunto de pontos que são chamados de vértices, conectados por linhas, chamadas de arestas. Um grafo X é dado por: um conjunto $V(X)$ de vértices, um conjunto $E(X)$ de arestas, funções $\sigma, \tau : E(X) \longrightarrow V(X)$, onde $\sigma(e)$ é o começo e $\tau(e)$ é o fim da aresta com direção e e uma função $- : E(X) \longrightarrow E(X)$, onde $e \longmapsto \overline{e}$, $\sigma(\overline{e}) = \tau(e)$, $\tau(\overline{e}) = \sigma(e)$, $e \neq \overline{e}$ e $\overline{\overline{e}} = e$.

Definição 4.1.2. Um caminho em um grafo X é $e_1 ... e_i e_{i+1} ... e_k$, onde $e_i \in E(X)$ e $\forall i$, $\tau(e_i) = \sigma(e_{i+1})$. O começo de $e_1 ... e_k$ é $\sigma(e_1)$ e o fim é $\tau(e_k)$.

Definição 4.1.3. Dizemos que um grafo X é conexo se cada dois vértices podem ser ligados por um caminho.

Definição 4.1.4. Um grafo de grupos Δ é uma coleção de:

a) um grafo conexo X;

b) para todo $e \in E(X)$, existe um grupo G_e tal que $G_e = G_{\overline{e}}$. Para todo $v \in V(X)$ existe um grupo G_v;

c) para todo $e \in E(X)$, existe um monomorfismo de G_e em $G_{\tau(e)}$ denotado por τ. Definimos $\sigma : G_e \longrightarrow G_{\sigma(e)}$ e $\tau : G_{\overline{e}} \longrightarrow G_{\tau(\overline{e})} = G_{\sigma(e)}$. Se temos a) e b) e substituirmos c) por

c') para cada aresta e existe um homomorfismo de G_e em $G_{\tau(e)}$ nos referimos a um grafo de grupos generalizado. Os grupos $\{G_v\}_{v \in V(X)}$ e $\{G_e\}_{e \in E(X)}$ são chamados de grupos de vértices e grupos de arestas de Δ, respectivamente.

Definição 4.1.5. Seja Δ um grafo de grupos generalizado. Seja E o grupo livre com base $E(X)$, o conjunto de arestas de X.

Seja

$$F(\Delta) = (E * (*_{v \in V(X)} G_v))/N,$$

onde N é o fecho normal do subconjunto

$$\{e^{-1}(\sigma(a))e(\tau(a))^{-1}; e \in E(X), a \in G_e\} \bigcup \{e\overline{e}; e \in E(X)\}.$$

Definição 4.1.6. Uma orientação de um grafo X é um subconjunto $A \subseteq E(X)$ tal que $A \cup \overline{A} = E(X)$, $A \cap \overline{A} = \emptyset$, isto é, A contém exatamente um elemento de cada par $\{e, \overline{e}\}$.

Lema 4.1.7. *Se Δ é um grafo de grupos, $F(\Delta)$ é uma extensão HNN de $*G_v$ com uma letra estável para cada par de arestas $\{e, \overline{e}\}$ e pares de subgrupos associados $(\sigma(G_e), \tau(G_e))$ para cada e correspondente a uma letra estável.*

Demonstração: Em $F(\Delta), \overline{e} = e^{-1}$.

$$F(\Delta) = \frac{(\text{grupo livre com base A}) * (G_v)}{\text{fecho normal de}\{e^{-1}\sigma(a)e\tau(a)^{-1}; e \in E(A), a \in G_e\}}.$$

Em $F(\Delta)$, temos: $e^{-1}\sigma(a)e = \tau(a)$. Seja $G = *_{v \in V(X)} G_v$. Vamos associar a cada aresta e uma letra estável p_e. Assim, $p_e^{-1}\sigma(a)p_e = \tau(a)$. Logo, $F(\Delta)$ é extensão HNN com letras estáveis p_e, para todo $e \in A$, com base G e pares de grupos associados $(\sigma(G_e), \tau(G_e))$. □

Observemos que cada caminho em X pode ser escrito como elemento de E, o grupo livre com base $E(X)$.

Definição 4.1.8. Seja X um grafo. Dizemos que Y é um subgrafo de X se: $V(Y) \subseteq V(X)$, $E(Y) \subseteq E(X)$ e as funções σ, τ, - de Y são induzidas pelas funções correspondentes de X.

Definição 4.1.9. Um caminho $e_1...e_k$ é reduzido se não existe subcaminho do tipo $e\overline{e}$.

Definição 4.1.10. Dizemos que um grafo conexo é uma árvore se não existe um caminho reduzido $e_1...e_k$ fechado (ie, começo igual ao fim).

Lema 4.1.11. *1) Se X é árvore e v_1 e v_2 estão em $V(X)$ então existe um único caminho reduzido $e_1...e_k$ com começo v_1 e fim v_2. A inversa do caminho $e_1...e_k$ é $\overline{e_k}...\overline{e_1}$.*

2) A recíproca também vale. Seja X um grafo. Se para cada dois vértices v_1 e v_2 de $V(X)$ existe um único caminho reduzido $e_1...e_k$ e $\sigma(e_1) = v_1$ e $\tau(e_k) = v_2$, então X é uma árvore.

A demonstração do lema 4.1.11 pode ser encontrada em $[2, lema\ \ 4, p.115]$

Definição 4.1.12. Um subgrafo Y de um grafo X é dito uma subárvore maximal se:

1) Y é uma árvore;

2) não existe Y_1 subgrafo de X que é árvore tal que $Y \subsetneq Y_1$.

Lema 4.1.13. *Sempre existe uma árvore maximal Y de X.*

Observemos que se X não for árvore, uma árvore maximal Y de X não precisa ser única.

Demonstração: Se X é finito, o número de subgrafos de X é finito e sempre tem um subgrafo que é árvore (por exemplo, um ponto). Então, Y é o elemento maximal de conjunto de subgrafos que são árvores, esse conjunto é finito.

Em geral, seja Σ o conjunto de todos subgrafos de X que são árvores. Sejam Y_1 e Y_2 em Σ. Consideremos a seguinte relação:

$$Y_1 \leq Y_2 \Longleftrightarrow Y_1 \subseteq Y_2.$$

Y é subárvore maximal em X se Y for elemento maximal de Σ com respeito a "$\leq$".

Pelo lema de Zorn é suficiente mostrarmos que para cada conjunto $\{Y_i\}_{i\in I} \subseteq \Sigma$ tal que para todos $i, j \in I$, $Y_i \leq Y_j$ ou $Y_j \leq Y_i$ sempre existe $Z \in \Sigma$ tal que $Z \geq Y_i$ para todo $i \in I$.

Consideremos $Z = \cup_{i\in I} Y_i$. Temos que $Z \supseteq Y_i$, para todo $i \in I$, o que implica que $Z \geq Y_i$, para todo $i \in I$. Mostremos que Z é árvore.

Suponhamos que exista um caminho $e_1...e_k$ fechado reduzido em Z. Temos que $e_i \in E(Y_{j_i})$. Então, existe $j_0 \in \{j_1, ..., j_k\}$ tal que $Y_{j_0} \supseteq Y_{j_i}$, $i = 1, ..., k$. Assim, $e_1...e_k$ é caminho fechado reduzido em Y_{j_0}, o que é uma contradição, pois, $Y_{j_0} \in \Sigma$. Logo, Z é árvore. E pelo lema de Zorn Σ tem elemento maximal. $\square$

Definição 4.1.14. Sejam Δ um grafo de grupos com grafo X e T uma subárvore maximal de X. Seja

$$\pi(\Delta, X, T) = \frac{F(\Delta)}{\langle\{e | e \in E(T)\}\rangle^{F(\Delta)}}.$$

Recordamos que para um subconjunto T de G denotamos o fecho normal de T em G por $\langle T\rangle^G$.

Chamamos $\pi(\Delta, X, T)$ o grupo fundamental de grafo de grupos Δ com respeito à subárvore T.

Definição 4.1.15. Seja $v_0 \in V(X)$.

$$\pi(\Delta, X, v_0) = \{g_0 e_1 g_1 e_2 ... e_n g_n | g_i \in G_{\tau(e_i)}, g_0 \in G_{v_0}\} \subseteq F(\Delta),$$

onde $n \geq 0, e_1, ..., e_n \in E(X)$, $e_1 ... e_n$ é um caminho fechado (podendo ser não reduzido) que começa com v_0.

Não é difícil mostrar que $\pi(\Delta, X, v_0)$ é subgrupo de $F(\Delta)$.

Proposição 4.1.16. *Sejam Δ grafo de grupos, $v_0 \in V(X)$ e T subárvore maximal de X. Então, a projeção canônica de $F(\Delta)$ em $\pi(\Delta, X, T)$ induz um isomorfismo de $\pi(\Delta, X, v_0)$ em $\pi(\Delta, X, T)$.*

Demonstração: Para cada $v \in V(X)$ seja p_v o caminho irredutível em T de v_0 em v. Em particular, p_{v_0} é o caminho trivial , e assim, quando este é considerado como um elemento do grupo livre E com base $E(X)$, é a identidade. Podemos definir um homomorfismo de $E * (*G_v)$ em si mesmo que leva $g \in G_v$ em $p_v g p_v^{-1}$ e que leva e em $p_{\sigma(e)} e p_{\tau(e)}^{-1}$. Pelo teorema de von Dyck's, isso induz um homomorfismo de $F(\Delta)$ em si mesmo, que, de fato, vai em $\pi(\Delta, X, v_0)$. Se $e \in T$, então ou $p_{\tau(e)} = p_{\sigma(e)} e$ ou $p_{\sigma(e)} = p_{\tau(e)} \overline{e}$ (como caminhos ou como elementos de E). Disso segue que nosso homomorfismo leva qualquer $e \in T$ em 1, e então esse induz um homomorfismo θ de $\pi(\Delta, X, T)$ em $\pi(\Delta, X, v_0)$. Não é difícil mostrar que θ é a inversa da restrição de projeção canônica $F(\Delta) \longrightarrow \pi(\Delta, X, T)$ sobre $\pi(\Delta, X, v_0)$. $\square$

Corolário 4.1.17. *$\pi(\Delta, X, T)$ a menos de isomorfismo não depende de T e $\pi(\Delta, X, v_0)$ a menos de isomorfismo não depende de v_0.*

Se estamos apenas interessados nos grupos a menos de isomorfismo denotamos $\pi(\Delta, X, T)$ por $\pi(\Delta)$.

Exemplo 4.1.18. Consideremos Δ um grafo de grupos com apenas dois vértices v e w. Seja e a aresta que tem vértices v e w. Então $\pi(\Delta)$ é o produto livre amalgamado de G_v e G_w com subgrupos amalgamados $\sigma(G_e) \simeq \tau(G_e)$.

Se a aresta e tem os dois vértices iguais, ambos v, então $\pi(\Delta)$ é a extensão HNN de G_v com subgrupos associados $\sigma(G_e)$ e $\tau(G_e)$.

Exemplo 4.1.19. Se todos $G_v = 1$, então $\pi(\Delta) \simeq \pi_1(X)$, onde $\pi_1(X)$ é o grupo fundamental de X como espaço topológico.

Definição 4.1.20. Sejam Y um subgrafo conexo de X e Δ um grafo de grupos com grafo X. $\Delta|_Y$ é o grafo de grupos com grafo Y e os mesmo grupos de Δ.

Sejam Δ grafo de grupos com grafo X e Y um subgrafo conexo de X. Sejam $v_0 \in V(Y)$, S uma árvore maximal em Y e T uma árvore maximal de X que contém S. Não é difícil ver que existem homomorfismos canônicos de $\pi(\Delta|_Y, Y, v_0)$ em $\pi(\Delta, Y, v_0)$ e de $\pi(\Delta|_Y, Y, S)$ em $\pi(\Delta, X, T)$.

Teorema 4.1.21. *Sejam Δ um grafo de grupos sobre o grafo X e Y um subgrafo conexo de X. Com as notações anterior, o homomorfismo de $\pi(\Delta|_Y)$ em $\pi(\Delta)$ é um monomorfismo. Em particular, para qualquer vértice $v \in X$, o homomorfismo natural de G_v em $\pi(\Delta)$ é um monomorfismo.*

Demonstração: Suponha que temos mostrado que o teorema vale para quaisquer grafo de grupos $\overline{\Delta}$ sobre uma árvore T e qualquer subárvore S de T a função de $\pi(\overline{\Delta}|_S, S, S)$ em $\pi(\overline{\Delta}, T, T)$ é um monomorfismo. Em particular, isso seguirá que a aplicação de G_v em $\pi(\overline{\Delta}, T, T)$ é um monomorfismo.

Agora $\pi(\Delta, X, T)$ é definida sendo uma pseuda-extensão HNN de $\pi(\Delta|_T, T, T)$, e será uma extensão HNN se cada G_v mergulha em $\pi(\Delta|_T, T, T)$. Pela mesma razão, $\pi(\Delta|_Y, Y, S)$ será uma pseudo-extensão HNN de $\pi(\Delta|_S, S, S)$. Se tivermos que $\pi(\Delta|_S, S, S)$ mergulha em $\pi(\Delta|_T, T, T)$ seguirá da proposição 3.2.7 que $\pi(\Delta|_Y, Y, S)$ mergulha em $\pi(\Delta, X, T)$, como desejamos.

Vamos começar com um grafo de grupos $\overline{\Delta}$ sobre uma árvore T e uma subárvore S de T e denotamos os grupos de grafos com H_v e H_e. Primeiro consideraremos o caso quando T é finito e usamos indução sobre o número de vértices de T.

Se $S = T$ não temos nada a provar. Então vamos assumir que $S \neq T$. Existe pelo menos uma aresta e com $\sigma(e) \in S$ e $\tau(e) \notin S$. Temos que $T \backslash \{e, \overline{e}\}$ é a união disjunta de duas árvores S_1 e S_2 onde uma delas, digamos S_1, contém S. A definição de grupo fundamental de grafos de grupos nos diz que $\pi(\overline{\Delta}, T, T)$ é o 'push-out' de $H_e \longrightarrow H_{\sigma(e)} \longrightarrow \pi(\overline{\Delta}|_{S_1}, S_1, S_1)$ e $H_e \longrightarrow H_{\tau(e)} \longrightarrow \pi(\overline{\Delta}|_{S_2}, S_2, S_2)$. Indutivamente, $H_{\sigma(e)}$ e $H_{\tau(e)}$ mergulham em $\pi(\overline{\Delta}|_{S_1}, S_1, S_1)$ e $\pi(\overline{\Delta}|_{S_2}, S_2, S_2)$, respectivamente, e também $\pi(\overline{\Delta}|_S, S, S)$ mergulha em $\pi(\overline{\Delta}|_{S_1}, S_1, S_1)$. Assim o 'push-out' é o produto livre amalgamado , e então os fatores $\pi(\overline{\Delta}|_{S_1}, S_1, S_1)$ e $\pi(\overline{\Delta}|_{S_2}, S_2, S_2)$ mergulham em $\pi(\overline{\Delta}, T, T)$ e $\pi(\overline{\Delta}|_S, S, S)$ também mergulha em $\pi(\overline{\Delta}, T, T)$, como queremos.

O caso geral usa limites diretos de grafos e grupos que não abordamos nesse estudo. $\square$

4.2 Teoremas Estruturais

4.2.1 Primeira construção da Teoria de Bass-Serre

Definição 4.2.1. Sejam C, B grafos e $\phi : C \longrightarrow B$ uma aplicação. Dizemos que ϕ é uma homomorfismo de grafos se $\phi(V(C)) \subseteq V(B)$, $\phi(E(C)) \subseteq E(B)$, $\sigma\phi(e) = \phi(\sigma(e))$ e $\tau\phi(e) = \phi(\tau(e))$.

Seja G um grupo que age à esquerda sobre um grafo conexo X, ie, $(g_1g_2)x = g_1(g_2x)$, para todo $g_1, g_2 \in G$, $x \in X$, $1_G x = x$. Vamos supor que para cada $g \in G$, $e \in E(X)$, $g(x) \neq \overline{x}$, ie, nenhum elemento de G inverte aresta de X. Estaremos interessado no caso em que X é uma árvore, mas a construção se aplica geralmente.

Sejam Y o espaço quociente $G \setminus X$, p a projeção $X \longrightarrow Y$, T uma árvore maximal de Y e A uma orientação de Y. Seja $j : T \longrightarrow X$ um homomorfismo de grafos tal que pj é a identidade em T, chamamos T uma árvore representativa para a ação.

Estendemos j para uma aplicação de Y em X, essa aplicação a qual denotaremos por j, em geral não será um homomorfismo de grafos, e $j(Y)$ não será um subgrafo de X. Observemos que se Y é conexo, então $V(Y) = V(T)$. Seja $e \in A \setminus T$. Como p é localmente sobrejetiva existe pelo menos uma aresta $x \in X$ tal que $p(x) = e$ e $\sigma(x) = j(\sigma(e))$. Definimos $j(e) = x$, e $j(\overline{e}) = \overline{j(e)}$.

Observações: 1) $j : Y \longrightarrow X$ é injetiva. De fato, $pj = id_Y$, então se $j(e_1) = j(e_2)$, $e_1 = p(j(e_1)) = p(j(e_2)) = e_2$.

2) p é homomorfismo de grafos.

Seja $e \in A \subseteq E(Y)$. Temos que $p(\tau(j(e))) = \tau(p(j(e))) = \tau(e) = p(j(\tau(e)))$, a primeira igualdade segue do fato que p é homomorfismo de grafos. Disso segue que existe algum $\gamma_e \in G$ tal que $\tau(j(e)) = \gamma_e(j(\tau(e)))$.

Recordemos que $j|_T$ é homomorfismo de grafos e assim se $e \in A \cap T$, $\tau(j(e)) = j(\tau(e))$, e, nesse caso, escolhemos $\gamma_e = 1$. Também definimos $\gamma_{\overline{e}} = \gamma_e^{-1}$.

Definição 4.2.2. O estabilizador, $stab(x)$, de um vértice ou aresta $x \in X$, é o subgrupo $\{g \in G | gx = x\}$ de G.

A construção de um grafo de grupos Δ com grafo Y.

Para qualquer vértice ou aresta $y \in Y$, definimos $G_y = stab(j(y))$. Precisamos definir monomofismos de G_e em $G_{\sigma(e)}$ e de G_e em $G_{\tau(e)}$ para cada aresta $e \in A$.

Para qualquer $e \in A$ temos $\sigma(j(e)) = j(\sigma(e))$, assim, $stab(j(e)) \subseteq stab(j(\sigma(e))$, isto é, $G_e \subseteq G_{\sigma(e)}$, e o monomorfismo desejado é a inclusão.

Lema 4.2.3. $stab(j(e)) \subseteq stab(\tau(j(e))) = \gamma_e(stab(j(\tau(e))))\gamma_e^{-1}$.

Demonstração: $stab(j(e)) = stab(\sigma(j(e)) \cap stab(\tau(j(e)))$. Portanto,

$$stab(j(e)) \subset stab(\tau(j(e))).$$

Agora mostraremos que:

$$stab(\gamma_e v) = \gamma_e(stab(v))\gamma_e^{-1}$$

Temos que $\gamma_e g \gamma_e^{-1}(\gamma_e v) = (\gamma_e g \gamma_e^{-1}\gamma_e)v = \gamma_e(gv) = \gamma_e v$, para $g \in stab(v)$. Logo, $stab(\gamma_e v) \supseteq \gamma_e(stab(v))\gamma_e^{-1}$. Então, $stab(\gamma_e^{-1}(\gamma_e v)) \supseteq \gamma_e^{-1}(stab(\gamma_e v))\gamma_e$. Mas, $stab(\gamma_e^{-1}(\gamma_e v)) = stab(v)$. Logo, $\gamma_e^{-1}(stab(\gamma_e v))\gamma_e \subseteq stab(v)$. Assim , $stab(\gamma_e v) = \gamma_e stab(v)\gamma_e^{-1}$. Portanto, $stab(\tau(j(e))) = \gamma_e(stab(j(\tau(e)))\gamma_e^{-1}$, pois $stab(\tau(j(e))) = stab(\gamma_e(j(\tau(e))))$. □

Definimos o monomorfismo de G_e em $G_{\tau(e)}$ da seguinte forma: $g \longmapsto \gamma_e^{-1} g \gamma_e$.

4.2.2 Segunda construção da Teoria de Bass-Serre

Começamos com um grafo de grupos Δ com grafo Y. Escolhemos uma subárvore maximal T de Y, A uma orientação de Y. Seja $G = \pi(\Delta, Y, T)$ o grupo fundamental de Δ. Vamos definir um grafo $\widetilde{Y}$ junto com a ação à esquerda de G sobre $\widetilde{Y}$.

Consideremos $G \times V(Y)$ e definamos a seguinte relação de equivalência: $(h, w) \sim (g, v) \Longleftrightarrow w = v$, $h \in gG_v$, $v, w \in V(Y)$.

Lema 4.2.4. *'$\sim$' é uma relação de equivalência.*

Demonstração: 1) é claro que $(h, w) \sim (h, w)$;

2) Se $(h, w) \sim (g, v)$, então $w = v$. Logo, $v = w$. E, $h \in gG_v \Longleftrightarrow gG_v = hG_v \Longleftrightarrow g \in hG_v$. Portanto, $(g, v) \sim (h, w)$.

3) Se $(h, w) \sim (g, v) \sim (l, m)$, então, $w = v$, $v = m$, $hG_v = gG_v = lG_v$, o que implica que $hG_v = lG_v$ e $w = m$. Logo, $(h, w) \sim (l, m)$. □

Seja $V(\widetilde{Y}) = (G \times V(Y))/\sim$, escrevemos $[g, v]$ para a classe de equivalência de (g, v) com respeito a $\sim$.

Definimos, agora, a seguinte relação de equivalência em $G \times E(Y)$:

$$(h, z) \approx (g, y) \Longleftrightarrow z = y, h\sigma(G_y) = g\sigma(G_y),$$

onde $z, y \in A \cap E(Y)$, onde A é a orientação de Y. E, $(h, \overline{z}) \approx (g, \overline{y}) \Longleftrightarrow (h, z) \approx (g, y)$.

Escrevemos $[g, y]$ para a classe de equivalência de (g, y) com respeito a $' \approx'$, $y \in E(Y)$.

Seja $E(\widetilde{Y}) = \{[g, y] | g \in G; y \in E(Y)\}$. Se $y \in A$, então $\overline{[g, y]} = [g, \overline{y}]$.

Sejam $p : \widetilde{Y} \longrightarrow Y$ e $j : Y \longrightarrow \widetilde{Y}$ tais que: $p([g, y]) = y$ e $j(y) = [1, y]$ para $y \in V(Y) \cup E(Y)$.

Vamos definir uma ação de G em $\widetilde{Y}$ da seguinte forma:

$$h[g, y] = [hg, y],$$

para qualquer vértice ou aresta de $y \in Y$. □

Definição 4.2.5. Definimos inversa "-" em $E(\widetilde{Y})$ via $\overline{[g, y]} = [g, \overline{y}]$. Para $y \in A \subseteq E(Y)$, seja $\sigma([g, y]) = [g, \sigma(y)]$ e $\tau([g, y]) = [gy, \tau(y)]$.

Lema 4.2.6. *As definições acima dependem apenas de $[g, y]$ e não da escolha particular de g, ou seja, começo e fim estão bem definidos.*

Demonstração: 1) $[g, y] = [g_1, y_1] \Longleftrightarrow y = y_1, g(\sigma(G_y)) = g_1\sigma(G_y) \Longleftrightarrow g^{-1}g_1 \in \sigma(G_y)$.

Precisamos mostrar que: $[g, \sigma(y)] = [g_1, \sigma(y_1)]$.

Como $y = y_1$, então $\sigma(y) = \sigma(y_1)$. A função $\sigma : G_y \longrightarrow G_{\sigma(y)}$ é monomorfismo, então, $g^{-1}g_1 \in \sigma(G_y) \subseteq G_{\sigma(y)}$, o que implica que $g^{-1}g_1 \in G_{\sigma(y)}$. Logo, o começo está bem definido.

2) $[g, y] = [g_1, y_1] \Longrightarrow y = y_1$, $g^{-1}g_1 \in \sigma(G_y)$. Assim, $\tau(y) = \tau(y_1)$, e da definição de grupo fundamental de grafo de grupos temos $G_{\tau(y)} = y^{-1}\sigma(G_y)y \ni y^{-1}g^{-1}g_1y$. Mas, $y^{-1}g^{-1}g_1y = (gy)^{-1}g_1y_1$. Logo, $(gy)^{-1}g_1y_1 \in G_{\tau(y)}$. O que nos dá que:

$$gyG_{\tau(y)} = g_1y_1G_{\tau(y)}.$$

Portanto, o fim está bem definido. □

Observemos que fim e começo de $[g, y]$ foram definidos apenas para $y \in A$. Agora vamos definir para $y \in E(Y)$:

$\overline{[g, \overline{y}]} = [g, y]$, $y \in A, \overline{y} \in \overline{A}$;

$\sigma([g, \overline{y}]) = \sigma(\overline{[g, y]}) = \tau([g, y])$;

$\tau([g, \overline{y}]) = \sigma([g, y])$.

Lema 4.2.7. $\sigma([g,y]) = h[1,\sigma(y)]$, $\tau([g,y]) = hy[1,\tau(y)]$ *onde* $h = g$ *se* $y \in A$; $h = gy^{-1}$ *se* $y \notin A$.

Demonstração: 1) $y \in A$. Temos, por definição que:

$$\sigma([g,y]) = [g,\sigma(y)]) = g[1,\sigma(y)]$$

$$\tau([g,y]) = [gy,\tau(y)] = gy[1,\tau(y)].$$

2) Se $y \notin A$, então $y \in \overline{A}$, o que implica que $\overline{y} \in A$. Assim, $\sigma([g,y]) = \tau([g,\overline{y}]) = [g\overline{y},\tau(\overline{y})] = g\overline{y}[1,\sigma(y)]$.

Temos que $\overline{y}y$ é uma relação em G, então $y^{-1} = \overline{y}$. Logo, $\tau([g,y]) = \sigma([g,\overline{y}]) = [g,\sigma(\overline{y})] = [g,\tau(y)] = g[1,\tau(y)] = hy[1,\tau(y)]$, para $h = gy^{-1}$. □

Na segunda construção da teoria de Bass-Serre começamos com um grafo de grupos Δ e terminamos com um grafo $\widetilde{Y}$ onde $G = \pi(\Delta, Y, T)$ age à esquerda sobre $\widetilde{Y}$.

4.3 Propriedades Básicas

As demonstrações dos seguintes resultados podem ser encontrados em [2, cap.8,seção 8.4].

Teorema 4.3.1. **(Primeiro teorema estrutural da teoria de Bass-Serre)** *Sejam Δ um grafo de grupos com grafo Y e $G = \pi(\Delta)$ o grupo fundamental de Δ. Então, o grafo $\widetilde{Y}$ construído na seção 4.2.2 é uma árvore.*

Teorema 4.3.2. **(Segundo teorema estrutural da teoria de Bass-Serre)** *Sejam G um grupo que age sobre uma árvore X e Y o grafo quociente $G \setminus X$. Então o grafo de grupos, Δ, construído na seção 4.2.1 tem a propriedade que $G \cong \pi(\Delta)$ e $\widetilde{Y}$ dada pelo teorema 4.3.1 é a árvore isomorfa a árvore X com isomorfismo que comuta com ação de G, ie, no caso em que X é uma árvore a primeira e a segunda construções são inversas.*

4.4 Aplicações dos Teoremas Estruturais

Se um grupo age em uma árvore então qualquer subgrupo também age em uma árvore. Então pelos teoremas estruturais *qualquer subgrupo do grupo fundamental de um grafo de grupos é também o grupo fundamental de algum grafo de grupos*. Entretanto, nesta generalidade o resultado é vazio, pois cada grupo é o grupo fundamental de um grafo de grupos : precisamos apenas tomarmos o grafo que consiste de um vértice e nenhuma aresta, com o grupo de vértice sendo o grupo dado.

Teorema 4.4.1. *Sejam (Δ, X) um grafo de grupos e H um subgrupo de $\pi(\Delta) = G$. Então, $H = \pi(\overline{\Delta})$, onde os grupos de vértices de $\overline{\Delta}$ são $H \cap gG_vg^{-1}$ para todos os vértices v de X, e g está em um conjunto S de representantes das classes $H \setminus G/G_v$ e os grupos de arestas são $H \cap gG_eg^{-1}$ para todas as arestas $e \in X$, onde g está em um conjunto T de representantes das classes $H \setminus G/G_e$.*

Observemos que as classes de $H \setminus G/G_e$ são do tipo HgG_v.

Demonstração: Pelo primeiro teorema estrutural sabemos que $\pi(\Delta)$ age sobre a árvore $\widetilde{X}$, e que $V(\widetilde{X}) = \{[g,v] | g \in G, v \in V(X); [g,v] = [h,w] \Longleftrightarrow v = w, gG_v = hG_v\}$. O H-estabilizador de $[g,v]$ é $H \cap gG_vg^{-1}$, e $[g,v]$ e $[g_1,v]$ estão na mesma H-órbita se, e somente se, g e g_1 estão na mesma classe de $H \setminus G/G_v$, ie, $HgG_v = Hg_1G_v$. Sabemos que $H = \pi(\overline{\Delta})$, onde o grafo base de $\overline{\Delta}$ é o grafo quociente $H \setminus \widetilde{X}$, e que o grupo de vértices de um vértice de $H \setminus \widetilde{X}$ é o estabilizador de um vértice correspondente de $\widetilde{X}$. Um resultado similar vale para as arestas. $\square$

Corolário 4.4.2. *Seja H um subgrupo do grupo fundamental de um grafo de grupos tal que H intercepta qualquer conjugado de um grupo de vértices no grupo trivial. Então, H é livre.*

Corolário 4.4.3. *Seja Δ um grafo de grupos. Suponhamos que existam um grupo H e um homomorfismo $\phi : \pi(\Delta) \longrightarrow H$ tais que ϕ é injetiva em cada grupo de vértices. Então, $ker(\phi)$ é livre.*

Capítulo 5

Homomorfismos Injetivos do Grupo de Baumslag-Solitar

Nesse capítulo estudamos homomorfismos injetores ϕ do grupo Baumslag-Solitar

$$G(n,m) = \langle a, t | t^{-1}a^n t = a^m \rangle,$$

para $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tais que $n \neq \pm 1$, $m \neq \pm 1$ e provamos que $\phi(a) \in \cup_{i \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}; g \in G}(g^{-1}a^i g)$. As demonstrações são baseadas na teoria de Bass-Serre de grafos de grupos.

Teorema Principal: *Sejam $n \neq \pm 1$, $m \neq \pm 1$ e ϕ um homomorfismo injetor de $G = G(n,m)$. Então, $\phi(a) \in \cup_{i \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, g \in G}(g^{-1}a^i g)$.*

5.1 Algumas Propriedades de Produtos Livres Amalgamados e Extensões HNN

Definição 5.1.1. Seja $G = G(n,m) = \langle a, t | t^{-1}a^n t = a^m \rangle$ a extensão HNN com subgrupos associados $\langle a^n \rangle$ e $\langle a^m \rangle$ e a base $\langle a \rangle$. Defina as transversais $S_1 = \{1 = a^0, a^1, ..., a^{|n|-1}\}$ e $S_{-1} = \{1 = a^0, a^1, ..., a^{|m|-1}\}$ de $\langle a^n \rangle$ em $\langle a \rangle$ e de $\langle a^m \rangle$ em $\langle a \rangle$. Quando nos referimos a forma normal (reduzida) com respeito a a, t queremos dizer a forma normal (reduzida) com respeito às transversais (com respeito aos subgrupos $\langle a^n \rangle$ e $\langle a^m \rangle$) definidas acima.

Lema 5.1.2. *Sejam $G = A * B$ e h um elemento de G tal que para algum inteiro z temos $h^z \in A \setminus \{1\}$. Então $h \in A$.*

Demonstração: Seja $h = u_1 ... u_k$ a forma normal, ie, $u_1, ..., u_k$ vem alternadamente de $A \setminus \{1\}$ e $B \setminus \{1\}$. Sem perda de generalidade podemos assumir que $z > 1$ e $k \neq 1$. Então, $h^z =$

$(u_1...u_k)...(u_1...u_k)$. Se u_k e u_1 não estão ambos em A ou em B esta é a forma normal, então h^z não pode representar um elemento de B ou A. Se u_k, u_1 ambos estão em A ou ambos em B mas $u_k u_1 \neq 1$ então h^z tem uma forma normal $u_1...u_{k-1}(u_k u_1)u_2...u_{k-1}(u_k u_1)u_2...u_k$ de comprimento $kz - k + 1 > k(z-1) \geq k > 1$, assim h^z não pode representar um elemento de A ou B.

Então, $h = u_1...u_k$ e para algum $j < n/2$ temos que $u_1 = u_k^{-1}$, $u_2 = u_{k-1}^{-1}$,..., $u_j = u_{k+1-j}^{-1}$ e se $k \neq 2j+1$, $u_{j+1} \neq u_{k-j}^{-1}$. Consideremos dois casos. Primeiro se $j+1 = k-j$ temos $h = u_1...u_j u_{j+1} u_j^{-1}...u_1^{-1}$, assim $1 \neq h^z = u_1...u_j(u_{j+1}^z)u_j^{-1}...u_1^{-1}$ é uma forma normal de comprimento $2j+1 \geq 3 > 1$, uma contradição. Vamos assumir agora que $j+1 < k-j$. Então, $1 \neq h^z = u_1...u_j(u_{j+1}...u_{k-j})^z u_j^{-1}...u_1^{-1}$. Como $u_j = u_{k-j+1}^{-1}$ estão ambos em A ou ambos em B, u_{j+1}, u_{k-j} estão ambos em A ou ambos em B e $u_{j+1}u_{k-j} \neq 1$, assim $(u_{j+1}...u_{k-j})^z$ tem uma forma normal $w = u_{j+1}...u_{k-j-1}(u_{k-j}u_{j+1})u_{j+2}...u_{k-j-1}(u_{k-j}u_{j+1})u_{j+2}...$ de comprimento $z(k-2j) - (z-1) = z(k-2j-1) + 1 \geq z+1 \geq 3$. Substituindo w em h^z obtemos que a forma normal de h^z tem comprimento maior ou igual a $2j+3 > 1$, assim h^z não pode representar um elemento de A ou B.□

Lema 5.1.3. *a) Seja G um grupo com geradores a, b e uma relação $a^n = b^m$ onde $n \neq \pm 1$, $m \neq \pm 1$. Então o centro de G é o subgrupo cíclico gerado por a^n.*

b)Seja $G \simeq A *_C B$, onde A, B são grupos cíclicos finitos e $[A : C] > 1$, $[B : C] > 1$. Então $Z(G) = C$.

Demonstração: a) É óbvio que $a^n = b^m$ é um elemento do centro de G. Consideremos o quociente $\overline{G}$ de G através do subgrupo gerado por $a^n = b^m$. Então $\overline{G} = A * B$, onde $A = \langle \overline{a} \rangle \simeq \mathbb{Z}_n$ e $B = \langle \overline{b} \rangle \simeq \mathbb{Z}_m$. Provemos que $\overline{G}$ tem centro vazio. Suponhamos que exista um elemento central $g \in Z(\overline{G}) \setminus \{1\}$, $g = u_1...u_k$ está na forma normal, ie, $u_1, ..., u_k$ vem alternadamente de $A \setminus \{1\}$ e $B \setminus \{1\}$. Sem perda de generalidade $u_1 \in A \setminus \{1\}$. Então, $g = \overline{a}g\overline{a}^{-1} = \overline{a}u_1...u_k\overline{a}^{-1}$ tem uma froma normal $u_1...u_k$. Se $k \geq 2$, $\overline{a}g\overline{a}^{-1}$ tem forma normal $(\overline{a}u_1)u_2...u_{k-1}u_k\overline{a}^{-1}$, então $\overline{a}u_1 = u_1$, $\overline{a} = 1$, uma contradição, assim $k = 1$. Então, $u_1 = \overline{b}u_1\overline{b}^{-1}$ tem duas diferentes formas normais: u_1 e $\overline{b}u_1\overline{b}^{-1}$, uma contradição. □

Lema 5.1.4. *Seja G um grupo com apresentação finita*

$$\langle h_1, h_2, h_3 \mid h_1^{\alpha_1} = h_2^{\alpha_2}, h_2^{\alpha_3} = h_3^{\alpha_4} \rangle,$$

onde todo $\alpha_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\alpha_1 \neq \pm 1$ $\alpha_4 \neq \pm 1$. Então G tem centro não trivial que é grupo cíclico infinito gerado por h_2^{α}, onde α é o mínimo múltiplo comum de α_2 e α_3. Em particular, G não é um grupo livre pois possui centro $Z(G)$ não trivial. Se as imagens de h_1 e h_2 em $G/Z(G)$ comutam, então $\alpha_2 = \pm 1$.

Demonstração: Primeiro observemos que o elemento h_2^α está no centro de G. Sejam A, B e C subgrupos de G gerados por $\{h_1, h_2\}$, $\{h_2, h_3\}$ e h_2, respectivamente. Então G é o produto livre amalgamado $A *_C B$. Sejam g um elemento central de G, T e S transversais à esquerda de C em A e de C em B, respectivamente, ambas contendo 1. Escrevamos g na sua forma normal $u_1...u_kc$ ou c, onde $u_1,...u_k$ vem alternadamente de $S\setminus\{1\}$ e $T\setminus\{1\}$, $c\in C$. Observemos que como $\alpha_1\neq\pm1\neq\alpha_4$ temos que $S\neq\{1\}$ e $T\neq\{1\}$.

Assumamos primeiro que $k\geq 1$. Sem perda de generalidade $u_1\in T\setminus\{1\}$. Seja u_0 um elemento de $S\setminus\{1\}$. Então $u_0g = u_0u_1...u_kc$ é forma normal. Por outro lado, $gu_0 = u_1...u_kcu_0$. Se $u_k\in T\setminus\{1\}$ temos que $gu_0 = u_1...u_k\widetilde{u_0}\widetilde{c}$, onde $cu_0 = \widetilde{u_0}\widetilde{c}$, $\widetilde{c}\in C$, $\widetilde{u_0}\in S$ e a forma normal de gu_0 é $u_1...u_k\widetilde{u_0}\widetilde{c}$ se $\widetilde{u_0}\neq 1$ ou $u_1...u_k\widetilde{c}$ se $\widetilde{u_0}=1$. Isso prova que $gu_0\neq u_0g$ pois as formas normais de gu_0 e u_0g começa com elementos de transversais distintas. Se $u_k\in S\setminus\{1\}$ então $gu_0 = u_1...u_{k-1}\widetilde{u_0}\widetilde{c}$, onde $u_kcu_0 = \widetilde{u_0}\widetilde{c}$, $\widetilde{c}\in C$, $\widetilde{u_0}\in S$ e a forma normal de gu_0 é $u_1...u_{k-1}\widetilde{u_0}\widetilde{c}$ se $\widetilde{u_0}\neq 1$ ou $u_1...u_{k-1}\widetilde{c}$ se $\widetilde{u_0}=1$. Então se $k\geq 2$ a forma normal de gu_0 começa com u_1 e a forma normal de u_0g começa com u_0, uma contradição. Se $k=1$ temos $u_k=u_1\in T\setminus\{1\}$, uma contradição com $u_k\in S\setminus\{1\}$.

Então $k=0$, $g\in C$. Em particular, $Z(G)=Z(A)\cap Z(B)\cap C$. Pelo lema 5.1.3 se $\alpha_2\neq\pm1$ o centro $Z(A)$ de A é $\langle h_2^{\alpha_2}\rangle$ e se $\alpha_3\neq\pm1$ o centro $Z(B)$ de B é $\langle h_2^{\alpha_3}\rangle$. Se $\alpha_2=\pm1$, $Z(A)=A$ e se $\alpha_3=\pm1$, $Z(B)=B$. Assim $Z(G)=\langle h_2^\alpha\rangle$, como queremos.

Finalmente notemos que $\overline{G}=G/Z(G)$ tem uma apresentação $\langle \overline{h}_1,\overline{h}_2,\overline{h}_3 | \overline{h}_1^{\alpha_1}=\overline{h}_2^{\alpha_2}, \overline{h}_2^{\alpha_3}=\overline{h}_3^{\alpha_4}, \overline{h}_2^{\alpha}\rangle$. Então pelo lema 4.1.21 o subgrupo H de $\overline{G}$ gerado por $\overline{h}_1$ e $\overline{h}_2$ tem uma apresentação $\langle \overline{h}_1,\overline{h}_2 | \overline{h}_1^{\alpha_1}=\overline{h}_2^{\alpha_2}, \overline{h}_2^{\alpha}=1\rangle$. Se $\alpha_2\neq\pm1$ pelo lema 5.1.3 b) o centro de H é o grupo cíclico gerado por $\overline{h}_1^{\alpha_1}=\overline{h}_2^{\alpha_2}$, assim H não é abeliano e $\overline{h}_1$ e $\overline{h}_2$ não comutam em H. □

Lema 5.1.5. *Sejam G uma extensão HNN com geradores s,t e uma relação $t^{-1}s^kt=s^r$. Então:*

1) se $k\neq r$, G tem centro trivial;

2) se $k=r\neq\pm1$, o centro de G é o grupo cíclico gerado por s^k;

3) se $r=k=\pm1$, G é abeliano.

Demonstração: Seja g um elemento do centro de $G\setminus\{1\}$ (notemos que se $k\neq r$ temos $g\notin\langle t\rangle$). Assumamos que $g\notin\langle t\rangle$. Escrevemos g na sua forma normal com respeito a s,t, ie, $g = t^m s^{z_1}t^{\epsilon_1}s^{z_2}t^{\epsilon_2}...s^{z_{j-1}}t^{\epsilon_{j-1}}s^{z_j}$, onde $m\in\mathbb{Z}$, $z_1\neq 0$, $\epsilon_i=\pm1$, se $\epsilon_i=1$, então $z_i\in\{0,1,...|k|-1\}$, se $\epsilon_i=-1$, então $z_i\in\{0,1,...,|r|-1\}$, se $\epsilon_i=-\epsilon_{i-1}$, então $z_i\neq 0$.

Primeiro vamos assumir que $j\geq 2$. Então $tg = t^{m+1}s^{z_1}t^{\epsilon_1}s^{z_2}t^{\epsilon_2}...s^{z_{j-1}}t^{\epsilon_{j-1}}s^{z_j}$ é uma forma normal. Por outro lado $gt = t^m s^{z_1}t^{\epsilon_1}s^{z_2}t^{\epsilon_2}...s^{z_{j-1}}t^{\epsilon_{j-1}}s^{z_j}t$.

Seja $z_j \equiv \alpha \,(\mathrm{mod\,k})$, $\alpha \in \{0, 1, ...|k|-1\}$ e $\beta = r(z_j - \alpha)/k$. Então $gt = t^m s^{z_1} t^{\epsilon_1} s^{z_2} t^{\epsilon_2} ... s^{z_{j-1}} t^{\epsilon_{j-1}} s^{\alpha} t s^{\beta}$. Se $\alpha \neq 0$ ou $\alpha = 0$ e $\epsilon_{j-1} \neq -1$, essa é a forma normal. Assim gt tem duas formas normais começando com $t^m s^{z_1}$ e $t^{m+1} s^{z_1}$, uma contradição. Então $\alpha = 0$, $\epsilon_{j-1} = -1$ e $gt = t^m s^{z_1} t^{\epsilon_1} s^{z_2} t^{\epsilon_2} ... s^{z_{j-1}+\beta}$ é uma forma normal começando com $t^m s^{z_1}$ ou $t^m s^{z_{j-1}+\beta}$ se $j = 2$, uma contradição.

Então, $j = 1$, ie, $g = t^m s^{z_1}$ e $t^{m+1} s^{z_1} = tg = gt = t^m s^{z_1} t = t^m s^{\alpha} t s^{\beta}$, onde $z_1 \equiv \alpha$ (mod k), $\alpha \in \{0, 1, ...|k| - 1\}$ e $\beta = r(z_1 - \alpha)/k$. Como $t^{m+1} s^{z_1} = t^m s^{\alpha} t s^{\beta}$ não pode ter as duas formas normais com respeito a s, t, temos que $\alpha = 0$, $z_1 = \beta = r z_1/k$, assim $r = k$. Desde que $z_1 \equiv \alpha = 0$ (mod k), $g = t^m s^{rz}$ para algum inteiro z. Usemos o fato que g comuta com s, ie, $s t^m s^{rz} = sg = gs = t^m s^{rz+1}$, assim $s t^m = t^m s$. Se $m \neq 0$ isso é possível apenas se $r = k = \pm 1$, neste caso G é abeliano. Se $r = k \neq \pm 1$, então $m = 0$, assim o centro de G é o grupo cíclico gerado por s^r. □

Lema 5.1.6. *Sejam G_1 uma extensão HNN com geradores s, t e uma relação $t^{-1} s^k t = s^r$ e G_2 o produto livre amalgamado com geradores a, b e uma relação $a^n = b^m$, onde $n \neq \pm 1$ e $m \neq \pm 1$. Então, G_1 e G_2 não são isomorfos.*

Demonstração: Vamos assumir que G_1 e G_2 são isomorfos. Pelo lema 5.1.3 a), G_2 tem centro não trivial $Z(G_2)$, um grupo cíclico infinito gerado por a^n, com $\overline{G}_2 = G_2/Z(G_2) \simeq \mathbb{Z}_n * \mathbb{Z}_m$. Pelo lema 5.1.5 para G_1 ter centro não trivial $Z(G_1)$, um grupo cíclico infinito, precisamos $r = k \neq \pm 1$ e neste caso $Z(G_1) = \langle s^k \rangle$ e $\overline{G}_1 = G_1/Z(G_1) \simeq \mathbb{Z}_k * \mathbb{Z}$. Assim, $G_1 \simeq G_2$ implica $\overline{G}_1 \simeq \overline{G}_2$, mas $\overline{G}_1/[\overline{G}_1, \overline{G}_1]$ é infinito e $\overline{G}_2/[\overline{G}_2, \overline{G}_2]$ é finito, uma contradição. □

5.2 Prova do Teorema Principal

Seja G o grupo com geradores t e a e uma relação $t^{-1} a^n t = a^m$. Então G é uma extensão HNN com letra estável t, grupo de base o grupo cíclico infinito gerado por a e subgrupos associados os grupos cíclicos gerados por a^n e a^m. Então G é o grupo fundamental do grafo de grupos Δ, com grafo X com um grupo de vértices $\langle a \rangle$ e um grupo de arestas $\langle a^n \rangle$. Vamos assumir que $n \neq \pm 1$, $m \neq \pm 1$, então ambos monomorfismos do grupo de arestas $\langle a^n \rangle$ no grupo de vértices $\langle a \rangle$ não são epimorfismos (o primeiro monomorfismo é a inclusão e o segundo $\langle a^n \rangle \longrightarrow \langle a^m \rangle$, envia a^n em a^m). Seja $\pi : G \longrightarrow \mathbb{Z}$ o homomorfismo de grupos que leva t em 1 e a em 0 e seja N o núcleo de π.

Lema 5.2.1. *O grupo N, definido acima, é gerado por $\{g_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ e definido pelas relações $\{g_j^m (g_{j+1}^n)^{-1}\}_{j \in \mathbb{Z}}$, onde $g_i = t^{-i} a t^i$.*

Demonstração: Sejam F o grupo livre com dois geradores x, y e $\phi : F \longrightarrow \mathbb{Z}$ o homomorfismo de grupos que leva x em 0 e y em 1. Então o núcleo H de ϕ é o fecho normal de x em F e pelo corolário 1.1.14 H é um grupo livre com base $\{y^{-j}xy^{j}\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Seja $\mu : F \longrightarrow G$ o homomorfismo de grupos que leva x em a e y em t. Então, μ é sobrejetiva, $\mu^{-1}(N) = H$ e o núcleo P de μ é o fecho normal de $y^{-1}x^{n}yx^{-m}$ em F. Notemos que $P \subseteq H$ e P é o fecho normal em H de um conjunto $\{g^{-1}(y^{-1}x^{n}yx^{-m})g\}$ onde g está numa transversal à esquerda de H em F. Uma transversal é $\{y^{j}\}_{j\in\mathbb{Z}}$, então P é o fecho normal em H do conjunto $\{y^{-j}(y^{-1}x^{n}yx^{-m})y^{j}\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Então, $\mu(y^{-j}(y^{-1}x^{n}yx^{-m})y^{j}) = t^{-j-1}a^{n}ta^{-m}t^{j} = t^{-j-1}a^{n}t^{j+1}t^{-j}a^{-m}t^{j} = g_{j+1}^{n}g_{j}^{-m}$. □

Lema 5.2.2. *O subgrupo L de N gerado por g_0 e g_1 tem uma apresentação finita $\langle g_0, g_1 | g_0^{m} = g_1^{n}\rangle$.*

Demonstração: A descrição acima de N mostra que podemos ver N como grupo fundamental de grafos de grupos, onde o grafo é a reta real com vértices $\{v_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, o grupo associado ao grupo de vértices v_i é o grupo cíclico infinito com gerador g_i e o grupo de arestas começando em i e fim $i+1$ é o grupo cíclico infinito com gerador g_e com monomorfismo $\langle g_e\rangle \longrightarrow \langle g_{i+1}\rangle$ que leva g_e em g_{i+1}^{n} e outro monomorfismo $\langle g_e\rangle \longrightarrow \langle g_i\rangle$ que leva g_e em g_i^{m} . Pelo lema 5.2.1 e teorema 4.1.21, L é o produto livre amalgamado de dois grupos cíclicos infinitos gerados por g_0 e g_1, respectivamente, amalgamado sobre o subgrupo gerado por $g_0^{m} = g_1^{n}$. □

Definição 5.2.3. Seja ϕ um homomorfismo injetor de $G = G(n, m)$. Definamos $L_1 = \phi(L)$. Pelo teorema 4.4.1, como L_1 é um subgrupo do grupo fundamental G do grafo de grupos Δ, L_1 também é um grupo fundamental de um grafo de grupos Δ_1 com grupos de vértices $\widetilde{G}_v$ (e grupos de arestas $\widetilde{G}_e$) que são intersecções de L_1 com alguns conjugados em G do grupo de vértices original $\langle a\rangle \simeq \mathbb{Z}$ (e com alguns conjugados do grupo de arestas $\langle a^{n}\rangle \simeq \mathbb{Z}$). Escrevemos X_1 para o grafo de Δ_1.

Lema 5.2.4. *a) O grafo X_1 é conexo.*

b) O grupo fundamental do grafo de grupo X_1 como um espaço topológico é ou trivial (ie, X_1 é uma árvore) ou é isomorfo a $\mathbb{Z}$.

c) Uma das seguintes afirmações vale:

c') Todos os grupos de arestas e vértices em Δ_1 são grupos cíclicos infinitos. Assim os monomorfismos $\sigma_e : \widetilde{G}_e \longrightarrow \widetilde{G}_v$ e $\tau_e : \widetilde{G}_e \longrightarrow \widetilde{G}_w$ do grafo de grupo Δ_1 tem conúcleos finitos.

c") X_1 é uma árvore e tem subárvore X_2 que tem todos os vértices de X_1 com grupos de vértices não triviais tal que o grafo de grupos $\Delta_2 = \Delta_1|_{X_2}$ todas as propriedades de c') valem, ie, os grupos de vértices e de arestas são cíclicos infinitos.

Demonstração: Seja $\widetilde{X}$ o grafo universal do grafo de grupos Δ construído na seção 4.2. Pelo teorema 4.3.1 $\widetilde{X}$ é árvore, X_1 é o quociente $\widetilde{X}/L_1$ do espaço conexo $\widetilde{X}$, assim é conexo também.

b) Consideremos o homomorfismo de grupos $L_1 = \pi(\Delta_1) \longrightarrow \widetilde{F}$, onde $\widetilde{F}$ é o grupo livre com base os pares de arestas de X_1 fora de uma subárvore maximal fixa T_1 em X_1, que leva os grupos de vértices e de arestas de Δ_1 para 1 e é a identidade nos pares de arestas de X_1 fora de T_1. Então o posto de abelianização de L_1 é ao menos o posto de $\widetilde{F}$ = o posto do grupo fundamental $\pi(X_1)$ como um grupo livre (a última igualdade usa o exemplo 4.1.19). Em outras palavras $L_1/[L_1, L_1] \simeq L/[L, L]$ tem uma apresentação $\langle g_0, g_1 | g_0 g_1 = g_1 g_0, g_0^m = g_1^n \rangle$, assim tem posto livre abeliano 1.

c) Pelo teorema 4.4.1 um grupo de arestas $\widetilde{G}_e$ de Δ_1 é do tipo $L_1 \cap g^{-1}\langle a^n \rangle g \subseteq g^{-1}\langle a^n \rangle g \simeq \langle a^n \rangle \simeq \mathbb{Z}$ para algum $g \in G$. Assim, qualquer grupo de arestas é ou trivial ou cíclico infinito.

Suponhamos que c') não vale. Então existe um grupo de arestas $\widetilde{G}_e$ que é trivial. Se $T_1 = X_1 \setminus \{e, \overline{e}\}$ é conexo, então X_1 não é uma árvore e pela parte b) T_1 é uma subárvore maximal de X_1. Então, $L_1 \simeq \pi(\Delta_1)$ é uma extensão HNN com base $\pi(\Delta_1|_{T_1})$ e grupos associados triviais,então é produto livre de $\pi(\Delta_1|_{T_1})$ com grupo cíclico infinito. Contando outra vez o número mínimo de geradores de L_1 por [1, cap. 8.2, Lema 7], o número mínimo de geradores num produto livre $A * B$ é a soma do número mínimo de geradores de A e o número mínimo de geradores de B. Como L_1 tem o número mínimo de geradores 2 e $L_1 \simeq \pi(\Delta_1|_{T_1}) * \mathbb{Z}$, temos que $\pi(\Delta_1|_{T_1})$ tem número mínimo de geradores 1, ie, é cíclico. Como L_1 é livre de torção , $\pi(\Delta_1|_{T_1})$ é cíclico infinito e L_1 é um grupo livre ou posto 2, uma contradição.

Se $X_1 \setminus \{e, \overline{e}\}$ não é conexo, então X_1 é uma árvore e $L_1 \simeq \pi(\Delta_1)$ é o produto livre de $\pi(\Delta^{(1)})$ e $\pi(\Delta^{(2)})$, onde $\Delta^{(1)}$ e $\Delta^{(2)}$ são subgrafos de grupos de Δ_1 com grafos as duas componentes conexas de $X_1 \setminus \{e, \overline{e}\}$. Como o número mínimo de geradores de L_1 é 2, por [1, cap. 8.5, Cor. 2] ou ambos $\pi(\Delta^{(1)})$ e $\pi(\Delta^{(2)})$ são cíclicos ou um deles é trivial. Se ambos, $\pi(\Delta^{(1)})$ e $\pi(\Delta^{(2)})$, são cíclicos, como L_1 é livre de torção ambos são cíclicos infinitos, assim seu produto livre é grupo livre de posto 2, uma contradição pois L_1 não é livre. Então podemos supor que $\pi(\Delta^{(2)}) = 1$, assim todos os grupos de vértices e arestas $\pi(\Delta^{(2)})$ são triviais. O mesmo argumento prova que se dois grupos de vértices em Δ_1 não são triviais então para qualquer aresta que está na geodésica ligando os dois vértices em X_1 o grupo de arestas correspondente é não trivial. Então c") vale. □

Lema 5.2.5. *Suponhamos que L_1 tem um subgrupo M com uma apresentação finita*

$$\langle h_1, h_2, h_3 | h_1^{\alpha_1} = h_2^{\alpha_2}, h_2^{\alpha_3} = h_3^{\alpha_4} \rangle,$$

onde todo $\alpha_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Então ou $\alpha_2 = \pm\alpha_3$ ou um dos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ é ± 1.

Demonstração: Vamos assumir que $\alpha_1 \neq \pm 1$ e $\alpha_4 \neq \pm 1$. Pelo lema 5.1.4 M tem centro não trivial, um grupo cíclico gerado por h_2^α onde α é mínimo múltiplo comum de α_2 e α_3. Seja $Z(L_1)$ o centro de L_1.

Se $M \cap Z(L_1) = 1$, então M mergulha em $L_1/Z(L_1) \simeq L/Z(L)$ e pelo lema 5.1.3 $L/Z(L) \simeq \mathbb{Z}_n * \mathbb{Z}_m$. Notemos que M é livre de torção, assim M intercepta trivialmente qualquer subgrupo finito de $\mathbb{Z}_n * \mathbb{Z}_m$, em particular qualquer conjugado de $\mathbb{Z}_n$ e de $\mathbb{Z}_m$ em $\mathbb{Z}_n * \mathbb{Z}_m$. Pelo corolário 4.4.2 M é grupo livre, uma contradição com lema 5.1.4.

Se $M_0 = M \cap Z(L_1) \neq 1$, então M/M_0 mergulha em $L_1/Z(L_1) \simeq \mathbb{Z}_n * \mathbb{Z}_m$. Notemos $M_0 \subseteq Z(M) = \langle h_2^\alpha \rangle$, assim M/M_0 tem apresentação finita

$$\langle h_1, h_2, h_3 | h_1^{\alpha_1} = h_2^{\alpha_2}, h_2^{\alpha_3} = h_3^{\alpha_4}, h_2^{\alpha k} = 1 \rangle,$$

onde k é algum inteiro positivo, ie, k é o índice de H_0 em $Z(M)$. Observemos que pelo corolário 4.4.2 qualquer elemento de ordem finita em $\mathbb{Z}_n * \mathbb{Z}_m$ é conjugado de um elemento de $\mathbb{Z}_n$ ou de $\mathbb{Z}_m$. Então conjugando se necessário podemos assumir para a imagem $\overline{h}_2$ de h_2 em M/M_0 que $\overline{h}_2 \in \mathbb{Z}_n$ ou $\overline{h}_2 \in \mathbb{Z}_m$. Vamos assumir que $\overline{h}_2 \in \mathbb{Z}_n$, no outro caso é similar. Se $\overline{h}_2^{\alpha_2} = \overline{h}_1^{\alpha_1} \in \mathbb{Z}_n$ não é trivial e assim o lema 5.1.2, $\overline{h}_1 \in \mathbb{Z}_n$, onde $\overline{h}_1$ é a imagem de h_1 em M/M_0. Em particular, h_1 e h_2 comutam e pelo lema 5.1.4 α_2 é ± 1. Se $\overline{h}_2^{\alpha_2} = 1$, então αk divide α_2. Como α_2 é um divisor de α, obtemos que $\alpha = \pm \alpha_2$ então α_3 divide α_2.

Consideremos agora $\overline{h}_2^{\alpha_3}$. Se $\overline{h}_2^{\alpha_3}$ for não trivial o mesmo argumento dado acima mostra que $\overline{h}_2$ e $\overline{h}_3$ comutam, em particular pela versão simétrica do lema 5.1.4, $\alpha_3 = \pm 1$. Se $\overline{h}_2^{\alpha_3} = 1$ como acima deduzimos que α_2 divide α_3, assim $\alpha_2 = \pm \alpha_3$, como queríamos. □

Observação: Se no lema 5.2.4 a condição c') não vale substituímos Δ_1 com $\Delta_1|_{X_2}$ e X_1 com X_2. E abusando da notação podemos assumir que c') vale.

Proposição 5.2.6. *O grupo L_1 é produto livre amalgamado de dois grupos $M_1 = (h_1^{-1}\langle a \rangle h_1) \cap L_1$ e $M_2 = (h_2^{-1}\langle a \rangle h_2) \cap L_1$ para alguns elementos h_1 e h_2 em G. A amalgamação é sobre um grupo $M_3 = (h_3^{-1}\langle a^n \rangle h_3) \cap L_1$ para algum $h_3 \in G$. Todos os grupos M_1, M_2 e M_3 são cíclicos infinitos.*

Demonstração: Seja T uma árvore maximal em X_1. Suponhamos que para uma aresta $e \in T$ uma das aplicações $\sigma_e : \widetilde{G}_e \longrightarrow \widetilde{G}_{\sigma(e)}$, $\tau_e : \widetilde{G}_e \longrightarrow \widetilde{G}_{\tau(e)}$ é sobrejetiva. Consideremos exatamente uma aresta do par $\{e, \overline{e}\}$. Então façamos a seguinte operação: deletamos a aresta e do garfo X_1 e colocamos os vértices de e para obtermos um novo vértice, então obtemos um novo grafo com uma árvore maximal obtida de T encolhendo a aresta e para um ponto. Os grupos de vértices que não são pontos finais de e são preservados, o grupo de vértice do novo vértice que substituiu a aresta e é ou $\widetilde{G}_{\sigma(e)}$ ou $\widetilde{G}_{\tau(e)}$. Se

σ_e é sobrejetiva, então definimos o novo grupo de vértices sendo $\widetilde{G}_{\tau(e)}$ e os monomorfismos de dos grupos de arestas e vértices do novo grafo de grupos são ou os velhos se os grupos de vértices não são mudados ou a composição dos velhos com $\tau_e \circ \sigma_e^{-1}$. Se σ_e não é sobrejetiva o grupo de vértice correspondente ao novo vértice é $\widetilde{G}_{\sigma(e)}$ e os monomorfismos dos grupos de arestas e vértices do novo grupo de grafos são ou os velhos, se os grupos de vértices não são mudados ou a composição dos velhos com $\sigma_e \circ \tau_e^{-1}$. É importante observarmos que o procedimento que definimos não muda (a menos de isomorfismos) o grupo fundamental do grafo de grupos Δ_1. Se X_1 é uma árvore, aplicando o procedimento acima (infinitas vezes se necessário) terminamos com um grafo de grupos Δ_2 com grafo uma árvore X_2, onde todos os homomorfismos dos grupos de arestas para os grupos de vértices não são sobrejetivos. Então pelo lema 5.2.5 para qualquer grupo de vértices $\widehat{G}_e$ em $\widehat{G}_v$ de Δ_2 a imagem de um grupo de arestas $\widetilde{G}_v$ tem sempre o mesmo índice. Seja $n(v)$ esse índice (que depende apenas do vértice v). Se não existe nenhuma aresta que termina em v como o grafo é conexo implica que o grafo é um ponto e $\pi(\Delta_2)$ é isomorfo ao único grupo de vértice $\mathbb{Z}$, uma contradição pos L_1 não é isomorfa a $\mathbb{Z}$. Então L_1 tem uma apresentação por esta nova decomposição como grupo fundamental $\pi(\Delta_2)$ com geradores $\{c_v\}_{v \in V(X_2)}$ e relações $c_v^{\pm n(v)} = c_w^{\pm n(w)}$ se v e w são vértices ligados diretamente por uma aresta em X_2. Como no caso quando X_2 é uma árvore podemos sempre escolher um gerador de um grupo de vértices de Δ_2 ou seu inverso se necessário e assumir que $c_v^{n(v)} = c_w^{n(w)}$. Então por uma generalização óbvia do lema 5.1.4, L_1 tem centro não trivial $Z(L_1)$, um grupo cíclico infinito gerado por $c_v^{n(v)}$. Então $L_1/Z(L_1)$ é produto livre do grupos cíclicos não triviais $\mathbb{Z}_{n(v)}$ sobre todos os vértices v do grafo X_2. Por [1, cap. 8.5, Cor. 1] o número mínimo de geradores de $L_1/Z(L_1)$ é o número de vértices em X_2. Por outro lado a decomposição de $L_1/Z(L_1) \simeq L/Z(L) \simeq \mathbb{Z}_n * \mathbb{Z}_m$ prova que o número mínimo de geradores de $L_1/Z(L_1)$ é exatamente 2. Então o grafo X_2 tem exatamente dois vértices e um par de arestas orientadas. A vantagem dessa nova decomposição de L_1 como $\pi(\Delta_2)$ é que os grupos de vértices em Δ_2 são alguns $\widetilde{G}_v$, do tipo $h_i\langle a\rangle h_i^{-1} \cap L_1$ para algum $h_i \in G$ e os grupos de arestas em Δ_2 são alguns $\widetilde{G}_e$, do tipo $h_j\langle a^n\rangle h_j^{-1} \cap L_1$ para algum $h_j \in G$, exatamente com queríamos.

O resto da demonstração é voltado para o fato quando X_1 não é uma árvore. Vamos assumir que X_1 não é uma árvore. Então pelo lema 5.2.4b) o grupo fundamental do grafo X_1 como espaço topológico é $\mathbb{Z}$. Seja Δ_3 o grafo de grupos obtido de Δ_1 tirando o único par de arestas fora da subárvore maximal T de X_1. Então L_1 é uma extensão HNN com letra estável t, grupo base $S = \pi(\Delta_3)$, subgrupos cíclicos infinitos associados gerados pelos elementos b_1, b_2 em S, ie, L_1 é o quociente de $S * \langle t\rangle$ pelo subgrupo normal gerado por $t^{-1}b_1tb_2^{-1}$.

Se $S \cap Z(L_1) = 1$ então S mergulha em $L_1/Z(L_1) \simeq \mathbb{Z}_n * \mathbb{Z}_m$. Observe que podemos aplicar para o grafo de grupos Δ_3 o procedimento do último parágrafo, assim S tem uma apresentação com geradores $\{s_v\}_v$ e relações $s_v^{n(v)} = s_w^{n(w)}$, quando v e w são vértices conectados diretamente por uma aresta do grafo T^* obtido de T depois aplicando (possivelmente infinitas vezes) o procedimento que encolhe uma aresta para um ponto . Se T^* tem mais que um vértice S tem centro não trivial, mas não é abeliano, é livre de torção mas não é livre. Como S é livre de torção, S é um subgrupo de $\mathbb{Z}_n * \mathbb{Z}_m$ que intercepta trivialmente qualquer conjugado de $\mathbb{Z}_n$ ou $\mathbb{Z}_m$ em $\mathbb{Z}_n * \mathbb{Z}_m$. Pelo corolário 4.4.2, S é livre, uma contradição. Então a única possibilidade é que T^* tem exatamente um vértice e S é cíclico infinito. Então L_1 é uma extensão HNN com grupo base $S \simeq \mathbb{Z}$ e letra estável t. Por outro lado, $L_1 \simeq L$ não é abeliano, o produto livre amalgamado de grupos cíclicos infinitos. Pelo lema 5.1.6 isso é impossível.

Se $S_0 = S \cap Z(L_1) \neq 1$ então trabalhamos no grupo quociente $\overline{L_1} = L_1/S_0$. Notemos que $S_0 \subset Z(S)$ e como acima o centro $Z(S)$ de S é grupo cíclico infinito. Observemos que $\overline{L_1}$ é o quociente do produto livre da imagem $\overline{S}$ de S em $\overline{L_1}$ e o grupo cíclico infinito com gerador $\overline{t}$ pelo subgrupo normal gerado por apenas uma relação $\overline{t}^{-1}\overline{b}_1\overline{t}\overline{b}_2^{-1}$. Assim $\overline{L_1}$ tem como quociente o grupo cíclico infinito $\langle\overline{t}\rangle$ com núcleo o subgrupo normal gerado por $\overline{S}$. Por outro lado usando a decomposição de L_1 como produto livre amalgamado temos outra apresentação de $\overline{L_1}$ como $\mathbb{Z}_{nj} *_{\mathbb{Z}_j} \mathbb{Z}_{mj}$, onde j é o índice de S_0 no centro $Z(L_1) \simeq \mathbb{Z}$ de L_1. A abelianização de $\mathbb{Z}_{nj} *_{\mathbb{Z}_j} \mathbb{Z}_{mj}$ é grupo abeliano finito, assim não temos $\mathbb{Z}$ como imagem, uma contradição. □

Agora provaremos o teorema principal.

Teorema 5.2.7. *Sejam $n \neq \pm 1$, $m \neq \pm 1$ e ϕ um endomorfismo injetor de $G = G(n,m)$. Então, $\phi(a) \in \cup_{i \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, g \in G}(g^{-1}a^i g)$.*

Demonstração: Pelo lema 5.2.2, L tem uma apresentação finita $\langle g_0, g_1 | g_0^m = g_1^n \rangle$. Então pelo lema 5.1.3, $a = g_0 \in L \setminus Z(L)$ e $a^m \in Z(L)$. Por definição $\phi(L) = L_1$, então $\phi(a)^m \in Z(L_1)$ e $\phi(a) \in L_1 \setminus Z(L_1)$. Usando a descrição de L_1 da proposição 5.2.6 como produto livre amalgamado de grupos cíclicos infinitos M_1 e M_2 com amálgama o grupo cíclico infinito M_3 que é de fato o centro de L_1 deduzimos que em $L_1/M_3 \simeq (M_1/M_3) * (M_2/M_3)$ a imagem de $\phi(a)$ tem ordem finita, assim pelo corolário 4.4.2 é conjugado de um elemento de M_1/M_3 ou M_2/M_3. Como M_3 é subgrupo central de M_1 e de M_2, $\phi(a)$ é conjugado em L_1 de um elemento de M_1 ou de um elemento de M_2. Pelas definições de M_1 e de M_2 na proposição 5.2.6, $\phi(a) \in g^{-1}\langle a \rangle g$ para algum $g \in G$. □

Referências Bibliográficas

[1] A. Fel'shtyn, D.L Gonçalves, *Twisted conjugacy classes of automorphisms of Baumslag-Solitar groups, prepunt, Max Plant Institute, 2004.*

[2] D. E. Cohen, *Combinatorial group theory: a topological approach.* London Mathematical Society Student Texts, 14. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[3] D. H. Kochloukova, *Injective endomorphisms of the Baumslag-Solitar*, submetido.

[4] D. Collins, F. Levin, *Automorphisms and Hopficity of certain Baumslag-Solitar groups* . Arch. Math. (Basel) 40, (1983), no. 5, 385-400.

[5] J. P, Serre, *Trees, Springer Monographs in Mathematics*, Springer, 2003.

[6] N. D. Gilbert, J. Howie, V. Metaftsis, E. Raptis, *Tree actions of automorphisms groups*, J. Group Theory 3 (2000) 213-223.