Leonardo de Amorim e Silva

Grupos Abelianos-por-(Nilpotentes de classe 2)

CAMPINAS
2014

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

LEONARDO DE AMORIM E SILVA

GRUPOS ABELIANOS-POR-(NILPOTENTES DE CLASSE 2)

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em matemática.

Orientadora: Dessislava Hristova Kochloukova

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO LEONARDO DE AMORIM E SILVA, E ORIENTADA PELA PROFA. DRA. DESSISLAVA HRISTOVA KOCHLOUKOVA.

Assinatura da Orientadora

CAMPINAS

2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

Si38g

Silva, Leonardo de Amorim e, 1980-
Grupos abelianos-por-(nilpotentes de classe 2) / Leonardo de Amorim e Silva. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Dessislava Hristova Kochloukova.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Invariantes geométricos. 2. Teoria dos grupos. 3. Tipo FPm. 4. Grupos abelianos. I. Kochloukova, Dessislava Hristova,1970-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

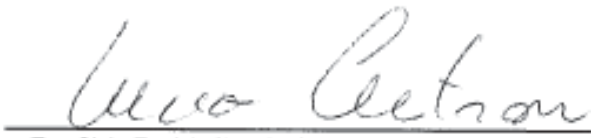
Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Abelian-by-(nilpotent of class 2) groups
Palavras-chave em inglês:
Geometric invariants
Group theory
Type FPm
Abelian groups
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Dessislava Hristova Kochloukova [Orientador]
Lucio Centrone
Said Najati Sidki
Norai Romeu Rocco
Kisnney Emiliano de Almeida
Data de defesa: 31-10-2014
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 31 de outubro de 2014 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). DESSISLAVA HRISTOVA KOCHLOUKOVA



Prof(a). Dr(a). LUCIO CENTRONE

Prof(a). Dr(a). SAID NAJATI SIDKI

Prof(a). Dr(a). NORAI ROMEU ROCCO

Prof(a). Dr(a). KISNNEY EMILIANO DE ALMEIDA

Abstract

In this thesis we consider a split extension G of an abelian group A by a nilpotent group (class 2) Q and prove two results. First, if Q acts nilpotently on A and G has type FP_2, compute the sigma invariant of G in dimension 2. Second, if G has type FP_4, we show that every quotient G has type FP_4.

Keywords: Modules and groups of type FP_m, Bieri-Strebel geometric invariant Σ, abelian-by-(nilpotent of class 2) groups.

Resumo

Nesta tese consideramos uma extensão cindida G de um grupo abeliano A por um grupo nilpotente (de classe 2) Q e provamos dois resultados. Primeiro, se Q age nilpotentemente sobre A e G tem tipo FP_2, calculamos o sigma invariante de G em dimensão 2. Segundo, se G tem tipo FP_4, mostramos que cada quociente de G tem tipo FP_4.

Palavras-chave:Módulos e grupos de tipo FP_m, invariante geométrico Σ de Bieri-Strebel, grupos abelianos-por-(nilpotente de classe 2).

Sumário

Introdução **1**

1 Preliminares **5**

1.1 Grupos livres e grupos finitamente apresentáveis 5

1.2 Grupos Nilpotentes e Policíclicos 10

1.3 Módulos, Complexos, Resoluções e Funtores Derivados 11

1.4 Sequência Espectral 19

1.5 Módulos e Grupos do Tipo FP_m 23

1.6 O invariante de Bieri-Strebel e Σ-Teoria 29

1.7 O invariante homológico $\Sigma^m(G, \mathbb{Z})$ 33

2 $\Sigma_A(Q)$ para Q finitamente gerado nilpotente de classe 2. **35**

2.1 Propriedades básicas 35

2.2 Σ-invariantes 43

3 Σ^2-Invariante para Grupos Abelianos-por-nilpotente de classe 2 de Tipo FP_2 **47**

3.1 Uma filtração de A 47

3.2 Um grupo livre com Q_φ-ação e enunciado do Teorema 3.5 50

3.3 Uma Q-ação sobre um quociente F/N de F 50

3.4 Contas em F/N 53

3.5 Alguns Lemas Geométricos 61

3.6 Contas com relações de A no grupo F/N 62

3.7 Contas com comutadores em F/N 66

3.8 Demonstração do Teorema 3.5 70

3.9 A demonstração do primeiro Teorema principal 73

4 Quocientes de Grupos Abelianos por Nilpotente de classe 2 de Tipo Homológico FP_4 75

4.1 Quocientes de grupos de tipo FP_4 75

4.2 Uma redução 77

4.3 O caso $i = 2$ 79

4.4 O caso $i = 1$ 81

4.5 O caso $i = 3$ 87

4.6 Segundo resultado principal 91

Referências Bibliográficas 92

Agradecimentos

Gostaria de começar agradecendo a uma pessoa muito especial, a minha esposa Gisliane Alves Pereira, companheira de todas as horas que durante esses anos não mediu esforços para me ajudar, motivar e encorajar nas horas de maior dificuldade, muitas vezes se sacrificando para isso.

À minha família que sempre me deu o apoio e a estabilidade necessária, em especial à minha mãe que apesar de todas as dificuldades sempre colocou a formação de seus filhos como prioridade.

Agradeço à minha orientadora, Prof. Dessislava, por sua paciência e disponibilidade em me atender e ajudar em todas minhas as dificuldades.

À banca examinadora por ter aceito o convite e por suas relevantes contribuições.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Nível Superior) pelo apoio financeiro, o qual foi de suma importância nos anos que passei em Campinas.

Aos professores e amigos do IMECC que durante alguns anos fizeram parte da minha rotina diária de estudos, aulas e convivência em geral.

Aos amigos que fiz em Uberaba e na UFTM que sempre torceram por mim e me apoiaram em tudo que era possível.

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar a propriedade homológica FP_m de grupos e módulos. Um R-módulo M é dito de tipo FP_m, $m \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, se existe uma resolução projetiva de R-módulos

$$P_m \to ... \to P_0 \to M \to 0$$

finitamente gerados em dimensões $\leq m$. E um grupo G tem tipo FP_m sobre um anel R se o RG-módulo trivial R tem tipo FP_m e diremos que G tem tipo FP_m se tem tipo homológico FP_m sobre $\mathbb{Z}$. Assim um módulo é de tipo FP_0 se, e somente se, é finitamente gerado e a propriedade FP_1 é equivalente a ser finitamente apresentável. No caso de grupos temos que cada grupo é de tipo FP_0 e será de tipo FP_1 se, e somente se, é finitamente gerado como grupo.

Existe uma conjectura homológica, chamada Conjectura-FP_m, que sugere uma relação entre a propriedade FP_m para grupos metabelianos finitamente gerados com um invariante homológico $\Sigma_A(Q)$ (a ser definido na seção 1.6) o qual foi introduzido por Bieri-Strebel [11] na década de 70, onde A é um $\mathbb{Z}Q$-módulo finitamente gerado e Q é um grupo abeliano finitamente gerado. Posteriormente, o Σ-invariante de Bieri-Strebel foi generalizado por Bieri-Renz [10] onde eles definiram invariantes homológicos para dimensões maiores, o $\Sigma^m(G; A)$, onde G é um grupo finitamente gerado e A é um $\mathbb{Z}G$-módulo qualquer. O invariante homológico $\Sigma_A(Q)$ é um subconjunto da esfera de caracteres $S(Q)$, que é definida como o conjunto das classes de equivalência dos homomorfismos não nulos de Q em $\mathbb{R}$, onde $\chi_1 \sim \chi_2$ se existe um número real $r > 0$ tal que $\chi_1 = r\chi_2$, com $\chi_1, \chi_2 \in Hom(Q, \mathbb{R})$, que por sua vez pode ser identificada com a esfera S^{n-1}, onde n é o posto livre de G/G'. A conjectura FP_m usa a noção de $\mathbb{Z}Q$-módulo manso, que pode ser encontrada na seção 1.6. A conjectura-FP_m afirma o seguinte:

Conjectura FP_m. [7] *Seja G um grupo metabeliano finitamente gerado e $0 \to A \to G \to Q \to 0$ uma sequencia exata curta de grupos, tal que A e Q são abelianos. Então G tem tipo*

FP_m se, e somente se, A é um $\mathbb{Z}Q$-módulo m-manso.

Alguns casos da conjectura já foram demonstrados, o caso $m = 2$ feito por Bieri-Strebel, o caso em que $m = 3$ e G é uma extensão cindida de grupos abelianos, feito por Bieri-Harlander [8] e o caso para m qualquer e G tem posto de Prüfer finito, isto é, existe um $d \in \mathbb{N}$ tal que cada subgrupo finitamente gerado de G pode ser gerado por d elementos [2].

A seguinte conjectura sugere a descrição dos Σ-invariantes de grupos metabelianos.

Conjectura Σ^m. *Se G é um grupo metabeliano de tipo FP_m então*

$$0 \notin conv_{\leq m}(\mathbb{R}_{>0}\Sigma^1(G)^c)$$

e

$$\Sigma^m(G)^c = \Sigma^m(G;\mathbb{Z})^c = (conv_{\leq m}(\mathbb{R}_{>0}\Sigma^1(G)^c))/\sim$$

onde o expoente c acima denota o complementar em $S(G)$.

Os casos $m = 2$ e $m = 3$ com extensão cindida foram demonstrados em [21], [16] e [17]. Em geral as duas conjecturas estão ainda em aberto.

Nesta tese vamos considerar grupos abelianos-por-nilpotente de classe 2 de tipo FP_4. Na tese de doutorado [25] foi demonstrado que um grupo G que é um extensão cindida de um grupo abeliano por um grupo nilpotente de classe 2 e se G tem tipo homológico FP_3 então cada quociente de G tem tipo FP_3. Em geral não é verdade que a propriedade FP_m para $m \geq 2$ passa para quocientes, embora isto é obviamente verdade para FP_1 pois a propriedade FP_1 é equivalente com a propriedade ser finitamente gerado. Existem exemplos de grupos (nilpotentes de classe 3)-por-abelianos de tipo FP_2 que tem quociente que não têm tipo FP_2 [1]. Os resultados de [25] foram generalizados em [15] onde foi demonstrado que se G é uma extensão cindida de um grupo abeliano por um grupo policíclico e se G tem tipo homológico FP_3 então cada quociente de G tem tipo FP_3.

A generalização em [15] foi possível pois para a classe de grupos considerados acima existe um forte resultado, também demonstrado em [15], que afirma que estes grupos são nilpotentes-por-abelianos-por-finito. Um grupo que é abeliano-por-policíclico ou nilpotente-por-abeliano não precisa ser metabeliano mas nós mostramos que as propriedades homológicas são semelhantes com as dos grupos metabelianos.

Resultados novos obtidos nesta tese:

Nesta tese foram demonstrados dois resultados principais. O primeiro foi usado na demonstração do segundo e afirma que a versão da Σ^2-Conjectura vale para uma classe de grupos maior do que a dos grupos metabelianos. A demonstração é bastante técnica e generaliza os métodos e as ideias do artigo [21]. Porem foi necessário fazer mais cálculos com comutadores do que em [21]. A demonstração do seguinte resultado pode ser encontrado no capítulo 3.

Teorema A: (Teorema 3.38) *Seja $G = A \rtimes Q$ finitamente gerado, com A abeliano e Q nilpotente de classe 2. Temos que, se G é de tipo FP_3 e Q' age nilpotentemente sobre A, então*

$$\Sigma^2(G,\mathbb{Z})^c = conv_{\leq 2}\Sigma^1(G,\mathbb{Z})^c.$$

No começo nosso objetivo principal era considerar quocientes de grupos de tipo FP_4. Mas usando os métodos desenvolvidos em [15] reduzimos o problema ao teorema citado acima. Assim obtemos o seguinte resultado:

Teorema B: (Teorema 4.15) *Seja $G = A \rtimes Q$ um grupo de tipo FP_4 com A abeliano e Q finitamente gerado nilpotente de classe 2. Então cada quociente de G também tem tipo FP_4.*

Finalmente, observamos que nós acreditamos que o segundo teorema vale no caso de grupos de tipo FP_m para m arbitrário, isto é, se G é uma extensão cindida de um grupo abeliano por um grupo nilpotente de classe 2 e tem tipo FP_m então cada quociente de G tem tipo FP_m. No caso metabeliano isto ainda esta em aberto para $m > 5$. Vale a pena observar que isto ficaria provado para grupos metabelianos, como corolário da Conjectura FP_m, sem necessariamente que G seja uma extensão cindida, mas esta conjectura ainda não foi provada para $m \geq 4$.

A seguir faremos um resumo dos capítulos que compõem esta tese.

No Capítulo 1, introduzimos conceitos e resultados que fazem parte da literatura usual da área e que foram necessários para o desenvolvimento do trabalho.

No Capítulo 2, vamos desenvolver a teoria de $\Sigma_A(Q)$ onde Q é um grupo finitamente gerado nilpotente de classe 2 e A é um $\mathbb{Z}Q$-módulo finitamente gerado tal que o ideal augmentado de $\mathbb{Z}Q'$ age nilpotentemente sobre A (aqui Q' é o comutador de Q). Isto

generaliza os resultados de Bieri-Strebel no caso Q abeliano [11].

No Capítulo 3, vamos demonstrar o primeiro teorema principal **Teorema A**. As demostrações seguem as ideias de Kochloukova [21]. A demonstração é muito técnica e envolve muitos cálculos com comutadores. O **Teorema A** segue facilmente do Teorema 3.36 e a demonstração pode ser encontrada na seção 3.9.

Finalmente no Capítulo 4, provamos o segundo teorema principal, **Teorema B**, usando o **Teorema A**. Primeiramente observamos que a estratégia será verificar que $H_i(A_1, \mathbb{Z})$ tem tipo FP_{3-i} como $\mathbb{Z}(G/A_1)$-módulo, com $1 \leq i \leq 3$, o que é feito nas seções 4.3, 4.4 e 4.5. Na seção 4.2 o **Teorema B** é reduzido ao caso de $A \rtimes Q$, Q' agindo nilpotentemente sobre A. Por fim a demonstração do **Teorema B** pode ser encontrado na seção 4.6.

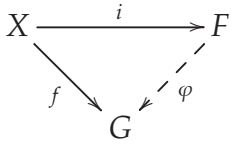
Capítulo 1

Preliminares

1.1 Grupos livres e grupos finitamente apresentáveis

Nesta seção apresentamos algumas definições e resultados de teoria combinatorial de grupos. Com tais definições poderemos entender um grupo por meio de seus geradores e relações.

Definição 1.1. Sejam X um conjunto, F um grupo e $i : X \to F$ uma função. O par (F, i) é dito livre sobre X se para todo grupo G e toda função $f : X \to G$ existe um único homomorfismo $\varphi : F \to G$ tal que $f = \varphi i$.



Proposição 1.2. *Seja (F, i) livre sobre X:*

(i) *Se existe um grupo G com uma função injetiva $f : X \to G$ então i é injetiva.*

(ii) *Existe um grupo ao qual X é levado injetivamente; a saber, o conjunto $\mathbb{Z}^X$ de todas as funções de X em $\mathbb{Z}$.*

(iii) *A função i é injetiva.*

Demonstração. Por definição existe $\varphi : F \to G$ tal que $\varphi i = f$ o que implica que i é injetora e assim provamos (i). Agora, tome o grupo $\mathbb{Z}^X$ e defina para cada $x \in X$ a função

$$\alpha_x(y) = \begin{cases} 1, & se\ y = x \\ 0, & se\ y \neq x \end{cases}, \text{para todo } y \in X \text{ com } \alpha_x \in \mathbb{Z}^x.$$

A função que leva $x \in X$ em α_x é claramente injetora. Isto prova (ii) e (iii). ∎

Teorema 1.3. *Seja X um conjunto não vazio. Então existe um grupo $F(X)$ e uma função $i : X \to F(X)$, tal que $(F(X), i)$ é livre sobre X e $F(X) = \langle Im(i) \rangle$*

Demonstração. Dado X um conjunto qualquer, seja $M(X)$ o conjunto de todas as sequências finitas $(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n})$ de elementos de X, com $n \geq 0$. Agora escolha um conjunto X^{-1} em bijeção com X, $x \mapsto x^{-1}$, e $X \cap X^{-1} = \emptyset$. Tomemos agora o conjunto das sequências finitas $M(X \cup X^{-1})$, os elementos desse conjunto são chamados palavras. Se ω é uma palavra do tipo $x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} ... x_{i_n}^{\epsilon_n}$ onde $\epsilon_i = \pm 1$, dizemos que n é o comprimento de ω. No caso em que $n = 0$, a sequência é vazia e ω é uma palavra vazia, a denotamos por 1. Duas palavras são iguais quando tem os mesmos elementos em posições correspondentes.

O produto de duas palavras $\omega = x_1^{\epsilon_1} ... x_r^{\epsilon_r}$ e $\upsilon = y_1^{\eta_1} ... x_t^{\eta_t}$ é formada pela justaposição

$$\omega\upsilon = x_1^{\epsilon_1} ... x_r^{\epsilon_r} y_1^{\eta_1} ... x_t^{\eta_t}$$

com a convenção de que $\omega 1 = 1\omega = \omega$. A inversa de ω é a palavra $\omega^{-1} = x_r^{-\epsilon_r} ... x_1^{-\epsilon_1}$ e $1^{-1} = 1$.

Definimos no conjunto $M(X \cup X^{-1})$, das palavras em X, a seguinte relação de equivalência: duas palavras ω e υ são equivalentes, $\omega \sim \upsilon$, se é possível passar de uma para a outra por uma sequência finita de operações dos seguintes tipos:

a) inserir xx^{-1} ou $x^{-1}x$, $x \in X$, em uma palavra;

b) excluir xx^{-1} ou $x^{-1}x$.

Temos também que uma palavra é dita reduzida, se é vazia ou se não contém símbolos da forma xx^{-1} ou $x^{-1}x$, $x \in X$.

Seja $F(X) = \{[\upsilon] \mid \upsilon \in M(X \cup X^{-1})\}$ o conjunto das classes de equivalência relativos a

$\sim$. Se $\omega \sim \omega'$ e $v \sim v'$ é imediato verificar que $\omega v \sim \omega' v'$, isto define bem o produto

$$[\omega][v] = [\omega v],$$

temos ainda $[\omega][1] = [\omega] = [1][\omega]$ e $[\omega][\omega^{-1}] = [\omega\omega^{-1}] = [1]$. Como $(\omega v)\mu = \omega(v\mu)$, este produto é associativo. Segue-se que F é um grupo em relação a esta operação binária.

Agora considere $i : X \to F(X)$ definida por $i(x) = [x]$. Veremos que $(F(X), i)$ é livre em X. Seja $\alpha : X \to G$ uma função de X a um grupo G. Defina $\overline{\beta} : M(X \cup X^{-1}) \to G$, $\overline{\beta}(x_1^{\epsilon_1}...x_r^{\epsilon_r}) = g_1^{\epsilon_1}...g_r^{\epsilon_r}$, onde $g_i = \alpha(x_i)$. Temos que $\omega \sim v$ implica que $\overline{\beta}(\omega) = \overline{\beta}(v)$ pois em G produtos como gg^{-1} ou $g^{-1}g$ são iguais a 1_G. Podemos portanto definir

$$\beta : F(X) \to G \texttt{ por } \beta([\omega]) = \overline{\beta}(\omega).$$

Logo, $\beta([\omega][v]) = \beta([\omega v]) = \overline{\beta}(\omega v) = \overline{\beta}(\omega)\overline{\beta}(v) = \beta([\omega])\beta([v])$, pela definição de β. Assim β é um homomorfismo. Além disso, $\beta i(x) = \beta([x]) = \overline{\beta}(x) = \alpha(x)$, $x \in X$. Finalmente, se $\gamma : F(X) \to G$ é um homomorfismo com $\gamma i = \alpha$, então $\gamma i = \beta i$ e γ e β coincidem em $Im(i)$, mas claramente $F(X) = \langle Im(i) \rangle$, assim $\gamma = \beta$. ■

Teorema 1.4. *[13, Cap. 1, Teo. 4] Cada classe de equivalência contém uma única palavra reduzida.*

Proposição 1.5. *[13, Cap. 1, Prop. 6] $F(X)$ é isomorfo a $F(Y)$ se, e somente se, $|X| = |Y|$.*

Assim, podemos definir grupo livre como:

Definição 1.6. Um grupo G é livre se é isomorfo a $F(X)$ para algum X. E se $i : F(X) \to G$ é um isomorfismo então $i(X)$ é chamada base de G. A cardinalidade de uma base é chamada de posto de G.

Teorema 1.7. *(Caracterização de Grupos Livres)[13, Cap. 1, Prop. 8] Seja X um subconjunto de um grupo G. Então, as afirmações seguintes são equivalentes:*

(i) *G é livre com base X;*

(ii) *todo elemento de G pode ser escrito de maneira única como $x_{i_1}^{\epsilon_1}...x_{i_n}^{\epsilon_n}$ para algum $n \geq 0$, $x_{i_r} \in X$, $\epsilon_r = \pm 1$, onde $\epsilon_{r+1} \neq -\epsilon_r$ se $i_{r+1} = i_r$;*

(iii) *G é gerado por X e se $\omega = 1$ em G então ω contém um par inverso, isto é, se $\omega = x_{i_1}^{\epsilon_1}...x_{i_n}^{\epsilon_n}$ com $n > 0$, então, para algum $r > 0$ temos $i_{r+1} = i_r$ com $\epsilon_i = -\epsilon_{i+1}$.*

Discutiremos agora alguns resultados com relação a descrição de um grupo como a imagem de uma grupo livre. Começamos com o seguinte resultado:

Proposição 1.8. *Qualquer grupo G é quociente de um grupo livre.*

Demonstração. Tome X_G o conjunto dos elementos de G. Seja $F(X_G)$ o grupo livre com base X_G. Defina $f : X_G \to G$ por $g \mapsto g$. Segue, pela definição de $F(X_G)$, que existe um homomorfismo $\varphi : F(X_G) \to G$ que estende f e é sobrejetora. Logo, por um dos teoremas de homomorfismo $G \cong F(X_G)/Ker\varphi$. ∎

Assim, todo grupo G pode ser descrito como o quociente de um grupo livre $G \cong F/ker(\pi)$. Se X é uma base de F, então os elementos de X são chamados de geradores de G e $R = ker(\pi)$ é o subgrupo normal de relações. Logo $\langle X \mid R \rangle$ descreve G pelo isomorfismo. Observemos que podemos refinar essa descrição; seja Y uma base de $ker(\pi)$, então G pode ser descrito por $\langle X \mid Y \rangle$. Observando que $ker(\pi) \triangleleft F$, podemos descrever $ker(\pi)$ por um conjunto de cardinalidade menor que Y, a saber o conjunto W que gera $ker(\pi)$ como subgrupo normal. Logo, $ker(\pi)$ é o subgrupo de F gerado por todos conjugados fwf^{-1} de elementos $w \in W$ por elementos $f \in F$. Diremos então que o par $\langle X \mid W \rangle$ é uma apresentação de G, onde F é o grupo livre com base X e $ker(\pi)$ é o subgrupo normal de F gerado como subgrupo normal por W. Usaremos a notação $G = \langle X \mid W \rangle$ para denotar a apresentação de G.

É mais conveniente listar os geradores de G e as relações definidas em termos destes geradores X, por exemplo a apresentação do grupo abeliano livre com base X:

$$G = \left\langle X \mid xyx^{-1}y^{-1}, \forall x, y \in X \right\rangle$$

Reciprocamente, podemos construir um grupo a partir de um conjunto de geradores e relações. Seja X qualquer conjunto não vazio e seja W um subconjunto de $F = F(X)$. Defina R como o fecho normal de W em F denotado por $\langle W^F \rangle$ e ponha $G = F/R$. Portanto a projeção canônica $\pi : F \to G$ é uma apresentação de G o qual tem o conjunto de geradores e relações definidas por $\langle X \mid W \rangle$.

Definição 1.9. Um grupo é dito finitamente apresentável se existe uma apresentação $G = \langle X \mid W \rangle$, onde X e W são conjuntos finitos, ou seja, se os conjuntos de geradores e de relações são finitos.

Proposição 1.10. *[13, Cap. 1, Prop. 17] Sejam G um grupo e $\langle X \mid W \rangle$ uma apresentação de G*

tal que X é um conjunto finito. Se G é finitamente apresentável, então existe um subconjunto finito $W_1 \subseteq W$ tal que $G = \langle X \mid W_1 \rangle$.

Teorema 1.11. *[?, Cap. 2, 2.2.4] Seja $N \triangleleft G$ e suponha que N e G/N são finitamente apresentáveis. Então G é um grupo finitamente apresentável.*

Proposição 1.12. *Todo grupo Q abeliano finitamente gerado é um grupo finitamente apresentável.*

Demonstração. Como Q é um grupo abeliano finitamente gerado, temos que $Q = F \oplus K$, onde F é um grupo abeliano livre e $K = \{q \in Q : |q| < \infty\}$ é um grupo finito. Sendo assim, segue que $F \cong Q/K$, logo Q/K é grupo abeliano livre e também finitamente gerado e, portanto, finitamente apresentável, pois $Q/K \cong \mathbb{Z}^n$, que é finitamente apresentável. Por outro lado, K é finitamente apresentável, pois é grupo finito. Assim concluímos, pelo Teorema 1.11, que Q é grupo finitamente apresentável. ∎

Proposição 1.13. *Sejam H_1 um grupo finitamente gerado, H_2 um grupo finitamente apresentável e $\rho : H_1 \twoheadrightarrow H_2$ um epimorfismo de grupos. Então, existe um subconjunto finito Y de H_1 tal que $Ker(\rho)$ é o fecho normal de Y em H_1, isto é, $Ker(\rho) = \langle Y^{H_1} \rangle$.*

Demonstração. Como H_1 é finitamente gerado, temos que existe uma apresentação $\langle X|R\rangle$ de H_1 tal que X é finito, isto é, $H_1 \cong F(X)/\langle R \rangle^{F(X)}$. Temos, então, os seguintes homomorfismos de grupos, onde ϕ é isomorfismo:

$$X \overset{i}{\hookrightarrow} F(X) \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \frac{F(X)}{\langle R \rangle^{F(X)}} \overset{\phi}{\to} H_1 \overset{\rho}{\twoheadrightarrow} H_2.$$

Definamos $\tau : F(X) \to H_2$ por $\tau := \rho\phi\pi$. Segue que τ é epimorfismo de grupos, pois ρ, ϕ e π o são. Assim $H_2 \cong F(X)/Ker(\tau)$, logo $H_2 \cong F(X)/\langle Ker(\tau) \rangle^{F(X)}$, portanto $\langle X|Ker(\tau)\rangle$ é uma apresentação de H_2, onde X é finito. Como H_2 é finitamente apresentável, pela Proposição 1.10, existe um subconjunto finito $S \subseteq Ker(\tau)$ tal que $H_2 = \langle X|S\rangle$ com $Ker(\tau) = \langle S \rangle^{F(X)}$.

Observe agora que $Ker(\rho) = \phi\pi(Ker(\tau))$. De fato, se $h \in Ker(\rho)$, como $\phi\pi : F(X) \twoheadrightarrow H_1$ é epimorfismo de grupos, existe $w \in F(X)$ tal que $h = \phi\pi(w)$. Agora, $\tau(w) = \rho\phi\pi(w) = \rho(h) = 1$. Daí que $w \in Ker(\tau)$ e, portanto, $h \in \phi\pi(Ker(\tau))$. Por outro lado, dado $h \in \phi\pi(Ker(\tau)) \subseteq H_1$, temos que $h = \phi\pi(w)$ tal que $w \in Ker(\tau)$, logo $\rho(h) = \rho\phi\pi(w) = \tau(w) = 1$, isto é, $h \in Ker(\rho)$.

Desta forma, $Ker(\rho) = \phi\pi(Ker(\tau)) = \phi\pi(\langle S\rangle^{F(X)}) = \phi\pi\left(\left\langle S^{F(X)}\right\rangle\right) = \left\langle \phi\pi(S^{F(X)})\right\rangle = \left\langle \phi\pi(S)^{\phi\pi(F(X))}\right\rangle = \left\langle \phi\pi(S)^{H_1}\right\rangle = \left\langle \phi\pi(S)\right\rangle^{H_1}$. Como $S \subseteq Ker(\tau)$, então $\tau(S) = 1$, o que implica que $\rho\phi\pi(S) = 1$, isto é, $\phi\pi(S) \subseteq Ker(\rho)$. E como S é um subconjunto finito de $Ker(\tau)$, segue que $\phi\pi(S)$ é conjunto finito de $Ker(\rho)$. Digamos que $\phi\pi(S) = \{h_1, ..., h_s\}$, onde $s \in \mathbb{Z}_+$ e $h_j \in Ker(\rho)$, com $1 \leq j \leq s$. Então, $Ker(\rho) = \left\langle \phi\pi(S)\right\rangle^{H_1} = \langle\{h_1, ..., h_s\}\rangle^{H_1} = \langle\{h_1, ..., h_s\}^{H_1}\rangle = \left\langle\{h_1^{H_1}, ..., h_s^{H_1}\}\right\rangle$, onde $h_1, ..., h_s \in Ker(\rho)$. ■

Corolário 1.14. *Seja $A \to G \xrightarrow{\pi} Q$ uma sequência exata de grupos com Q finitamente apresentável, G finitamente gerado e A grupo abeliano. Consideramos A como $\mathbb{Z}Q$-módulo (à esquerda) onde a ação de Q é induzida pela ação de G, dada por conjugação (à esquerda). Então A é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo.*

1.2 Grupos Nilpotentes e Policíclicos

No Capítulo 2 vamos trabalhar com o invariante de Bieri-Strebel para grupos nilpotentes, assim vamos definir e dar algumas propriedades de tais grupos que usaremos nos capítulos a seguir.

Definição 1.15. Uma série subnormal de um grupo G é uma coleção finita de subgrupos $\{G_1\}_{1\leq i\leq n}$ de G tais que:

$$G = G_1 \rhd G_2 \rhd \cdots \rhd G_n \rhd G_{n+1} = 1. \tag{1.1}$$

Se $G_i \lhd G$ para todo $i = 2, ..., n$ a série (1.1) é chamada série normal de G. O comprimento da menor série central de um grupo nilpotente G é chamado de classe de nilpotência de G.

Definição 1.16. Um grupo é solúvel se ele tem uma série subnormal cujos fatores G_i/G_{i+1} são abelianos.

Definição 1.17. Um grupo é dito nilpotente se ele possui uma série normal onde $G_i/G_{i+1} \leq Z(G/G_{i+1})$ e neste caso dizemos que (1.1) é uma série central.

Proposição 1.18. *[24, 5.1.4] A classe dos grupos nilpotentes é fechada a subgrupos, imagens e o produto direto de um número finito de grupos.*

Definição 1.19. Um grupo é dito policíclico se ele possui uma série subnormal tal que G_i/G_{i+1} é cíclico para todo $1 \leq i \leq n$.

Os resultados da proposição a seguir sobre grupos policíclicos podem ser encontrados em [29] e [30].

Proposição 1.20. *(i) Subgrupos e grupos quocientes de grupos policíclicos são policíclicos.*

(ii) Grupos policíclicos são finitamente gerados.

(iii) Sejam G um grupo e N subgrupo normal de G. Se N e G/Nsão policíclicos então G é policíclico.

(iv) Todo grupo abeliano finitamente gerado e policíclico.

(v) Todo grupo nilpotente finitamente gerado é policíclico.

(vi) Grupos policíclicos são solúveis.

Teorema 1.21. *[23, Theorem 2.7, Cap. 10] Sejam S um anel com 1_S, R um subanel Noetheriano à esquerda com $1_R = 1_S$ e G o grupo de unidades de S sendo policíclico. Se $R = R^G$, $R^G = \{grg^{-1} \mid g \in G, r \in R\}$ e $S = \langle R, G\rangle$ então S é um anel Noetheriano à esquerda.*

Exemplo 1.22. Seja G um grupo policíclico. Os aneis $S = \mathbb{Z}G$ e $R = \mathbb{Z}$ satisfazem as condições do Teorema 1.21, logo $\mathbb{Z}G$ é um anel Noetheriano (à esquerda). Portanto cada $\mathbb{Z}G$-módulo finitamente gerado é de tipo FP_∞. Em particular o $\mathbb{Z}G$-módulo $\mathbb{Z}$ é de tipo FP_∞.

1.3 Módulos, Complexos, Resoluções e Funtores Derivados

Definição 1.23. Uma categoria $\mathfrak{C}$ consiste de uma classe de objetos, obj$\mathfrak{C}$, e um conjunto de morfismos, $Hom_{\mathfrak{C}}(A, B)$, para todo par ordenado de objetos, e composições $Hom_{\mathfrak{C}}(A, B) \times Hom_{\mathfrak{C}}(B, C)$, denotado por $(f, g) \mapsto gf$, satisfazendo:

(i) para cada objeto A, existe um morfismo identidade $1_A \in Hom_{\mathfrak{C}}(A, A)$, tal que $f1_A = f$ para todo $f \in Hom_{\mathfrak{C}}(A, B)$ e $1_A g = g$ para todo $g \in Hom_{\mathfrak{C}}(C, A)$;

(ii) vale a associatividade da composição sempre que possível: se $f \in Hom_{\mathfrak{C}}(A, B)$, $g \in Hom_{\mathfrak{C}}(B, C)$ e $h \in Hom_{\mathfrak{C}}(C, D)$, então

$$h(gf) = (hg)f$$

Definição 1.24. Se R é um anel associativo com unidade então um R-módulo à esquerda M é um grupo abeliano aditivo para o qual existe uma função $R \times M \to M$, denotada por $(r, m) = rm$, que satisfaz:

1. $r(m + m') = rm + rm'$;
2. $(r + r')m = rm + r'm$;
3. $(rr')m = r(r'm)$;
4. $1m = m$;

onde $m, m' \in M$ e $r, r' \in R$. Uma função $f : M \to N$ entre R-módulos à esquerda é um homomorfismo de R-módulos se $f(m + m') = f(m) + f(m')$ e $f(rm) = rf(m)$, $\forall\, m, m' \in M$ e $r \in R$.

Temos que $\mathfrak{C} =_R \mathfrak{M}$, onde R é um anel associativo com 1, os objetos são R-módulos à esquerda, os morfismos são R-homomorfismos, e a composição a usual é um exemplo de categoria.

Definição 1.25. Sejam $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ categorias. Um funtor $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ é uma função satisfazendo:

(i) Se $A \in \text{obj}\mathfrak{C}$, então $FA \in \mathfrak{D}$;

(ii) Se $f : A \to B$ é um morfismo in $\mathfrak{C}$, então $Ff : FA \to FB$ é um morfismo em $\mathfrak{D}$;

(iii) Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são morfismos in $\mathfrak{C}$, então $F(gf) = FgFf$;

(iv) Para todo $A \in \text{obj}\mathfrak{C}$, temos $F(1_A) = 1_{FA}$.

Definição 1.26. Sejam M', M, M'' R-módulos à esquerda e

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

homomorfismos entre R-módulos. Dizemos que o par de homomorfismos f, g é exato se $Im\ f = Ker\ g$. A sequência de homomorfismos

$$\cdots \to M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \to \cdots$$

é exata em dimensão n se o par f_n, f_{n+1} é exato. Dizemos que a sequencia é exata se for exata em qualquer dimensão.

Definição 1.27. Um funtor F é exato a esquerda se, dada a sequência exata

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

temos a exatidão da sequência abaixo

$$0 \to FA \xrightarrow{F\alpha} FB \xrightarrow{F\beta} FC$$

um funtor F é exato a direita se dada a sequência exata abaixo,

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$$

temos a exatidão da sequência

$$FA \xrightarrow{F\alpha} FB \xrightarrow{F\beta} FC \to 0$$

Diremos que F é um funtor exato se for exato a direita e a esquerda.

Definição 1.28. Seja $\{M_j \mid j \in J\}$ uma família de R-módulos à esquerda. Definimos o produto direto $\prod M_j$ como sendo o R-módulo à esquerda formado pelo produto cartesiano dos M_j, com as operações

$$(a_j) + (b_j) = (a_j + b_j)$$
$$r(a_j) = (ra_j)$$

Definição 1.29. Dizemos que a soma $\bigoplus_j M_j$ é o submódulo de $\prod M_j$ que consiste de todos os (a_j) que possuem um número finito de coordenadas não nulas.

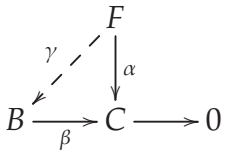
Definição 1.30. Dizemos que um R-módulo M à esquerda é livre se for soma direta de cópias de R. Se $M = \bigoplus Ra_j$ tal que $Ra_j \simeq R$ então chamamos o conjunto $\{a_j \mid j \in J\}$ de base de M.

Definição 1.31. Um R-módulo M é dito finitamente gerado se existe $n > 0$ e um homomorfismo sobrejetor $R^n \to M$.

Teorema 1.32. *[27, Cap.2, Teo. 2.35] Todo R-módulo à esquerda M é o quociente de um R-módulo à esquerda F livre. Além disso, M é finitamente gerado se, e somente se, F pode ser escolhido como sendo um módulo finitamente gerado.*

Teorema 1.33. *Sejam B e C R-módulos e F um R-módulo livre. Sejam $\alpha : F \to C$, $\beta : B \to C$ homomorfismos entre R-módulos. Então se β é sobrejetor existe um homomorfismo $\gamma : F \to B$ tal que $\beta\gamma = \alpha$.*

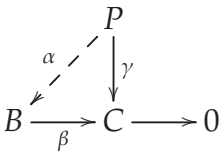
Demonstração.



Seja $X = \{x_j \mid j \in J\}$ uma base de F. Como β é sobrejetor, para cada $\alpha(x_j)$ existe b_j tal que $\alpha(x_j) = \beta(b_j)$. Seja $\phi : X \to B$ tal que $\phi(x_j) = b_j$, para todo $j \in J$. Como F é livre podemos estender ϕ para um homomorfismo $\gamma : F \to B$ com $\gamma(x_j) = \phi(x_j)$, para todo $j \in J$. Para perceber que $\alpha = \beta\gamma$, é suficiente notar isso na base X, mas $\beta\gamma(x_i) = \beta\phi(x_i) = \beta(b_i) = \alpha(x_i)$.
■

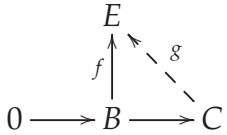
Definição 1.34. Sejam P, E, B e C R-módulos à esquerda.

1. Considere o diagrama com β epimorfismo



   onde γ é um homomorfismo qualquer. Se para cada β existe um homomorfismo α com $\gamma = \beta\alpha$, diz-se que P é um R-módulo projetivo.

2. Um R-módulo E é injetivo se para cada R-módulo C e cada R-submódulo B de C, cada homomorfismo $f : B \to E$ pode ser estendido a um homomorfismo $g : C \to E$.



   Exemplo: Todo módulo livre é projetivo, pelo Teorema 1.33.

Teorema 1.35. *Se P é projetivo e $\beta : B \to P$ é um epimorfismo, então $B = Ker(\beta) \oplus P'$, com $P' \cong P$.*

Demonstração. Considere $id_P : P \to P$. Como P é projetivo existe $\gamma : P \to B$ tal que $\beta\gamma = id_P$. Então γ é injetor e portanto $P' = Im(\gamma) \cong P$. Agora para $b \in B$,

$$b = b - \gamma\beta(b) + \gamma\beta(b).$$

Mas $b - \gamma\beta(b) \in Ker(\beta)$ e $\gamma\beta(b) \in Im(\gamma)$.

Para provar que $B = Ker(\beta) \oplus P'$ é suficiente provar que $P' \cap Ker(\beta) = 0$. Se $w \in P' \cap Ker(\beta)$ então $w = \gamma(w')$, mas $0 = \beta(w) = \beta\gamma(w') = w'$. Portanto $w = 0$. ∎

Corolário 1.36. *Seja* $0 \to K' \to Q \to P \to 0$ *uma sequência exata com P projetivo, então* $Q \cong P \oplus K'$.

As demonstrações dos resultados do lema a seguir podem ser encontradas em [27]

Lema 1.37. *Seja P um R-módulo. Temos:*

1. *P é quociente de um módulo projetivo.*
2. *P é projetivo se, e somente se, o funtor* $Hom(P, \ )$ *é exato.*
3. *P é projetivo se, e somente se, P é somando de um módulo livre.*
4. *P é projetivo se, e somente se, toda sequencia* $0 \to M' \to M'' \to P \to 0$ *cinde.*

Definição 1.38. Seja A um R-módulo.

1. Uma resolução livre (resp. projetiva) de A é uma sequência exata de R-módulos

$$\cdots \to F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon = d_0} A \to 0$$

   onde cada F_n é um R-módulo livre (resp. R-módulo projetivo).

2. Uma resolução injetiva de A é uma sequência exata de R-módulos

$$0 \to A \to E^0 \to E^1 \to \cdots \to E^n \to E^{n+1} \to \cdots$$

   onde cada E^n é um R-módulo injetivo.

Definição 1.39. Um complexo $\mathcal{A}$ ou $(\mathcal{A}, d)$ é uma sequência de R-módulos e aplicações

$$\mathcal{A} = \cdots \to A_{n+1} \overset{d_{n+1}}{\to} A_n \overset{d_n}{\to} A_{n-1} \to \cdots, \ n \in \mathbb{Z},$$

com $d_n d_{n+1} = 0$ para todo n. As aplicações d_n são chamadas derivações.

Se $(\mathcal{A}, d)$ é um complexo, seu n-ésimo módulo de homologia é dado por

$$H_n(\mathcal{A}) = ker(d_n)/im(d_{n+1}).$$

Seja $\mathcal{X}$ um complexo da forma

$$\mathcal{X} = \cdots \to X_1 \to X_0 \to M \to 0.$$

O complexo obtido suprimindo M é

$$\mathcal{X}_M = \cdots \to X_1 \to X_0 \to 0.$$

e é chamado de complexo apagado.

Analogamente definimos o complexo $\mathcal{Y}_N$ do complexo

$$\mathcal{Y} = 0 \to N \to Y^0 \to Y^1 \to \cdots$$

suprimindo N.

Definição 1.40. (i) Uma categoria $\mathfrak{C}$ é pré-aditiva quando para cada par de objetos A e B em $\mathfrak{C}$, $Hom_{\mathfrak{C}}(A, B)$ tem estrutura de grupo abeliano (aditivo) e vale a distribuição em relação à composição de $\mathfrak{C}$.

(ii) Um funtor (covariante) F da categoria $\mathfrak{C}$ para a categoria $\mathfrak{D}$ associa para cada objeto X em $\mathfrak{C}$ um objeto $F(X)$ em $\mathfrak{D}$ e associa para cada morfismo $f : X \to Y$, com $X, Y \in \mathfrak{C}$, um morfismo $F(f) : F(X) \to F(Y)$, com $F(X), F(Y) \in \mathfrak{D}$, que satisfaz as seguintes propriedades:

1− $F(id_X) = id_{F(X)}, \forall X \in \mathfrak{C}$;

2− $F(gof) = F(g)oF(f)$ para todos morfismos $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$.

(*iii*) Um funtor é dito contravariante quando inverte os morfismos, ou seja, associa para cada morfismo $f : X \to Y$, com $X, Y \in \mathfrak{C}$, um morfismo $F(f) : F(Y) \to F(X)$, com $F(X), F(Y) \in \mathfrak{D}$, que satisfaz as seguintes propriedades:

$1-$ $F(id_X) = id_{F(X)}, \forall X \in \mathfrak{C}$;

$2-$ $F(gof) = F(f)oF(g)$ para todos morfismos $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$.

(*iv*) Um funtor entre categorias pré-aditivas $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ (contravariante ou covariante) é aditivo se $F(f + g) = Ff + Fg$ para cada par de morfismos f e g em um mesmo grupo aditivo $Hom_{\mathfrak{C}}(A, B)$.

Definição 1.41.

(i) Um funtor covariante (resp. contravariante) entre categorias de módulos é exato à esquerda quando preserva monomorfismos (resp. transforma epimorfismos em monomorfismos) e é exato à direita quando preserva epimorfismos (resp. transforma monomorfismos em epimorfismos).

(ii) Um funtor covariante ou contravariante entre categorias de módulos é exato se tal funtor é simultaneamente exato à direita e à esquerda.

Definição 1.42. Dado um funtor aditivo T e um R-módulo à direita A, escolha uma resolução projetiva de A e seja P_A o correspondente complexo apagado. Para cada n definimos o n-ésimo funtor derivado a esquerda de T por

$$(L_nT)A = H_n(TP_A) = ker(Td_n)/im(Td_{n+1}).$$

Se $T = __ \otimes_R B$, onde B é um R-módulo à esquerda, definimos $L_nT = Tor_n^R(\quad, B)$. Podemos também definir Tor fixando a primeira componente, nesse caso temos $T = A \otimes_R __$ e definimos $L_nT = Tor_n^R(A, \quad)$. Em particular

$$Tor_n^R(\quad, B) = ker(d_n \otimes id_B)/im(d_{n+1} \otimes id_B).$$

Teorema 1.43. *[26, Cap. 8, Coro. 8.8] As definições de $Tor_n^R(A, B)$ independem das escolhas das resoluções projetivas de A ou B.*

Teorema 1.44. *[26, Cap. 7, Teo. 7.9] Se* $\cdots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$ *e* $\cdots \to Q_1 \to Q_0 \to B \to 0$ *são resoluções projetivas de R-módulos, onde A é um R-módulo à direita e B é um R-módulo à esquerda, então para todo* $n \geq 0$,

$$H_n(P_A \otimes B) \cong H_n(A \otimes Q_B).$$

E portanto as definições de Tor_n^R *coincidem em* (A, B).

Teorema 1.45. *[26, Cap. 8, Teo. 8.3] Se* $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$ *é uma sequência exata de R-módulos à esquerda, então existe uma sequência exata*

$$\begin{aligned}\cdots \to Tor_{n+1}^R(A, B') \to Tor_{n+1}^R(A, B) \to Tor_{n+1}^R(A, B'') \overset{\partial_{n+1}}{\to} Tor_n^R(A, B') \to \cdots \\ \to Tor_1^R(A, B'') \to A \otimes B' \to A \otimes B \to A \otimes B'' \to 0\end{aligned}$$

com homomorfismo conector ∂_{n+1} *natural.*

Podemos também definir o funtor derivado a direita da seguinte maneira.

Definição 1.46. Sejam T um funtor aditivo, $\mathcal{Y}$ um resolução injetiva de um R-módulo à esquerda A e $\mathcal{Y}_A$ o correspondente complexo apagado de A. O n-ésimo funtor derivado à direita de T é dado por

$$(R^nT)A = H_{-n}(TE_A) = ker(Td_{-n})/im(Td_{-n+1}).$$

Em particular se $T = Hom_R(C, \quad)$ para um R-módulo à esquerda C, definimos

$$Ext_R^n(C, \quad) = R^nT.$$

Teorema 1.47. [[26], *Cap.* 6, *Coro.* 6.15] *A definição de* $Ext_R^n(C, A)$ *é independente da escolha da resolução injetiva de A.*

Definição 1.48. Sejam G um grupo, A um $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda e $\mathbb{Z}$ os inteiros considerados como um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial. Definimos

$$\begin{aligned}H^n(G, A) &= Ext_{\mathbb{Z}G}^n(\mathbb{Z}, A), \\ H_n(G, A) &= Tor_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A).\end{aligned}$$

Os grupos H^n e H_n são chamados grupos de cohomologia (com coeficientes em A) e homologia de G respectivamente.

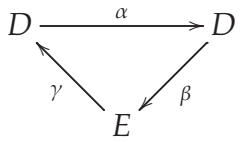
1.4 Sequência Espectral

Definição 1.49. (i) Um módulo graduado é uma sequência de módulos $M = \{M_p : p \in \mathbb{Z}\}$. Se M e N são módulos graduados e a é um inteiro fixo, então uma sequência de homomorfismos $f = \{f_p : M_p \to N_{p+a}\}$ é uma aplicação de grau a, denotamos $f : M \to N$.

(ii) Um módulo bigraduado é uma família de módulos duplamente indexados $\{M_{p,q}; (p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$. Se M e N são módulos bigraduados e $(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, então a família de homomorfismos $f = \{f_{p,q} : M_{p,q} \to N_{p+a,q+b}\}$ é um homomorfismo de bigrau (a,b).

Um complexo $C = \cdots \to C_p \xrightarrow{d_p} C_{p-1} \to \cdots$, ignorando-se as diferenciais, determina um módulo graduado $\{C_p : p \in \mathbb{Z}\}$. O homomorfismo $d = \{d_p; p \in \mathbb{Z}\}$, $d : C \to C$, tem grau -1. Dado um outro complexo C', um homomorfismo de cadeia $f : C \to C'$ é uma aplicação de grau 0.

Definição 1.50. Um par exato é um par de módulos bigraduados D e E e homomorfismos α, β e γ, cada um com seus bigraus, tal que existe exatidão em cada vértice do triângulo

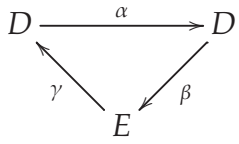


Definição 1.51. Sejam $\mathfrak{U}$ uma categoria e A um objeto em $\mathfrak{U}$. Uma filtração de A é uma família de sub-objetos de A, $\{F^pA : p \in \mathbb{Z}\}$, tal que

$$\cdots \subset F^{p-1}A \subset F^pA \subset F^{p+1}A \subset \cdots$$

Basicamente nosso interesse está no estudo de dois tipos de objetos, que são os complexos e os módulos graduados. No caso de um complexo C, sua filtração é uma família de subcomplexos $\{F^pC : p \in \mathbb{Z}\}$ com $F^{p-1}C \subset F^pC$ para todo p e no caso de um módulo graduado $H = \{H_n : n \in \mathbb{Z}\}$ sua filtração é uma família de submódulos graduados $\{F^pH : p \in \mathbb{Z}\}$ com $F^{p-1}H \subset F^pH$ para todo p.

Considere o par exato abaixo:



onde $\alpha : D \to D$ tem bigrau $(1,-1)$, $\beta : D \to E$ tem bigrau $(0,0)$ e $\gamma : E \to D$ tem bigrau $(-1,0)$.

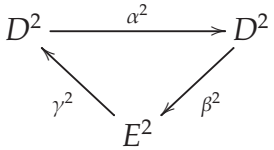
Defina $d^1 : E \to E$ por $d^1 = \beta\gamma$. Como $\gamma\beta = 0$ temos que $d^1 d^1 = 0$ e E tem grupos de homologia $H(E, d^1) = ker\ d^1/im\ d^1$. Denotemos $H(E, d^1) = E^2$ e o consideremos como módulo bigraduado. Mais detalhadamente, temos o seguinte:

$$d^1_{p,q} : E_{p,q} \xrightarrow{\gamma} D_{p-1,q} \xrightarrow{\beta} E_{p-1,q},$$

de modo que o bigrau de d^1 é (-1,0). Agora defina um segundo módulo bigraduado por $D^2 = im\ \alpha$. Uma vez que α tem bigrau $(1,-1)$ temos que

$$D^2_{p,q} = \alpha_{p-1,q+1}(D_{p-1,q+1}) = im\ \alpha_{p-1,q+1} \subset D_{p,q}.$$

Assim, definimos



onde α^2 é a restrição de α a $D^2 = im\ \alpha \subset D$, e uma vez que a inclusão $i : D^2 = im\ \alpha \hookrightarrow D$ tem bigrau $(0,0)$, a aplicação $\alpha^2 = \alpha \circ i$ tem o mesmo bigrau de α, ou seja, $(1,-1)$. Temos que $\beta^2 : D^2 \to E^2$ é dada por

$$\beta^2 y = [\beta\alpha^{-1} y],$$

onde os colchetes denotam classes de homologia e por ultimo $\gamma^2 : E^2 \to D^2$ definida por

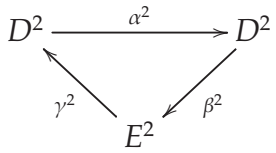
$$\gamma^2[z_{p,q}] = \gamma_{p,q} z_{p,q} \in D_{p-1,q},$$

tem bigrau $(-1,0)$. Voltando a β^2 e tomando $y = \alpha_{p-1,q+1}(x_{p-1,q+1}) \in D^2_{p,q}$, definimos

$$\beta^2_{p,q} = \beta_{p-1,q+1}\alpha^{-1}_{p-1,q+1} : y \longmapsto [\beta_{p-1,q+1}(x_{p-1,q+1})] \in E^2_{p-1,q+1}$$

e portanto, β^2 tem bigrau $(-1,1)$ e é bem definida.

Teorema 1.52. *[26, Cap. 11, Teo. 11.9] Com as definições acima,*



é um par exato onde α^2 tem bigrau $(1,-1)$, β^2 tem bigrau $(-1,1)$ e γ^2 tem bigrau $(-1,0)$.

Prosseguindo indutivamente, obtemos uma sequência de pares exatos

$$(D^r, E^r, \alpha^r, \beta^r, \gamma^r)$$

onde, por definição, o $(r+1)$-ésimo par exato é o par derivado do r-ésimo par exato com $E^1 = E$ e $D^1 = D$. O próximo resultado nos dá uma descrição mais detalhada desta sequência.

Teorema 1.53. *[26, Cap. 11, Teo. 11.10] Sejam $(D, E, \alpha, \beta, \gamma)$ um par exato com α, β e γ tendo bigraus $(1,-1)$, $(0,0)$ e $(-1,1)$ respectivamente. Se $(D^r, E^r, \alpha^r, \beta^r, \gamma^r)$ é o r-ésimo par derivado então*

(i) α^r tem bigrau $(1,-1)$, β^r tem bigrau $(1-r, r-1)$ e γ^r tem bigrau (-1,0);

(ii) $d^r = \beta^r\gamma^r$ tem bigrau $(-r, r-1)$ e é induzida por $\beta\alpha^{r-1}\gamma$;

(iii) $E^{r+1}_{p,q} = ker\ d^r_{p,q}/im\ d^r_{p+r,q-r+1}$.

Definição 1.54. Uma sequência espectral é uma sequência $\{E^r, d^r : r \geq 1\}$ de módulos bigraduados e aplicações com $d^r d^r = 0$ tal que

$$E^{r+1} = H(E^r, d^r)$$

como módulos bigraduados.

Definição 1.55. Um subquociente de um módulo M é um módulo da forma M'/M'', onde $M'' \subset M'$ são submódulos de M.

Em uma sequência espectral $\{E^r, d^r : r \geq 1\}$, cada E^r é um subquociente de $E^1 = E$, na verdade de qualquer termo anterior. Escreva $E^2 = Z^2/B^2$, isto é, $E^2_{p,q} = Z^2_{p,q}/B^2_{p,q}$. Uma vez que $E^3 = Z^3/B^3$ é um subquociente de E^2, pelo terceiro teorema do isomorfismo,

podemos assumir que

$$0 \subset B^2 \subset B^3 \subset Z^3 \subset Z^2 \subset E^1.$$

Iterando

$$0 \subset B^2 \subset \cdots \subset B^r \subset B^{r+1} \subset \cdots \subset Z^{r+1} \subset Z^r \subset \cdots \subset Z^2 \subset E^1.$$

Definição 1.56. $Z^\infty_{p,q} = \cap_r Z^r_{p,q}$, $B^\infty_{p,q} = \cup_r B^r_{p,q}$ e $E^\infty_{p,q} = Z^\infty_{p,q}/B^\infty_{p,q}$.

Definição 1.57. Uma filtração $\{F^pH\}$ de um módulo bigraduado H é limitada se para cada n, existem inteiros $s = s(n)$ e $t = t(n)$ tais que

$$F^sH_n = 0 \ \text{ e } \ F^tH_n = H_n.$$

Definição 1.58. Seja H um módulo graduado. Uma sequência espectral $\{E^r\}$ converge para H, denotamos por $E^2_{p,q} \overset{\Rightarrow}{p} H_n$, se existe alguma filtração limitada $\{\Phi^pH\}$ de H tal que

$$E^\infty_{p,q} = \Phi^pH_n/\Phi^{p-1}H_n$$

para todos p, q com $n = p + q$.

Definição 1.59. Seja $F : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ um funtor aditivo entre duas categorias $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{C}$. Um módulo $B \in \mathfrak{B}$ é F-acíclico à direita se $(R^pF)B = 0$ para $p \geq 1$ onde R^pF é o p-ésimo funtor derivado a direita de F. Um módulo $B \in \mathfrak{B}$ é F-acíclico à esquerda se $(L_pF)B = 0$, $p \geq 1$, onde L_pF é o p-ésimo funtor derivado à esquerda de F.

Teorema 1.60. *(Grothendieck)[26, Cap. 11, Tep. 11.39] Sejam $S : \mathfrak{U} \to \mathfrak{B}$ e $F : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ funtores com F exato à direita e sempre que E é projetivo em $\mathfrak{U}$, então SE é F-acíclico à esquerda. Para cada módulo $A \in \mathfrak{U}$, existe uma sequência espectral no primeiro quadrante*

$$E^2_{p,q} = L_pF(L_qS(A)) \overset{\Rightarrow}{p} L_n(FS)(A).$$

Teorema 1.61. *(Lyndon-Hochshild-Serre(LHS))[26, Teo. 11.46], Cap. 11, Teor. 11.46] Seja G um grupo com subgrupo normal N. Para cada $\mathbb{Z}G$-módulo A, existe uma sequência espectral no primeiro quadrante com*

$$E^2_{p,q} = H_p(G/N, H_q(N, A)) \overset{\Rightarrow}{p} H_n(G, A),$$

onde $n = p + q$.

1.5 Módulos e Grupos do Tipo FP_m

Consideremos R um anel com unidade e A um R-módulo.

Sabemos que todo módulo A possui resoluções projetivas, mas estas não são necessariamente finitamente geradas. Veremos a seguir condições homológicas sobre o R-módulo A que são equivalentes com a existência de resoluções livres finitamente geradas.

Lema 1.62. *(Lema de Schanuel) Sejam* $0 \to K \to P \xrightarrow{\pi} M \to 0$ *e* $0 \to K' \to P' \xrightarrow{\pi'} M \to 0$ *sequências exatas de R-módulos com P e P′ projetivos. Então* $P \oplus K' \cong P' \oplus K$.

Demonstração. Seja Q o submódulo de $P \oplus P'$ que consiste dos pares (x, x') tais que $\pi(x) = \pi'(x')$. Agora considere as sequências exatas

$$0 \to K \xrightarrow{i} Q \xrightarrow{p'} P' \to 0$$

$$0 \to K' \xrightarrow{i'} Q \xrightarrow{p} P \to 0$$

onde $i(k) = (k, 0)$, $i'(k') = (0, k')$, $p(x, x') = x$ e $p'(x, x') = x'$. Pelo corolário 1.36 temos que $P' \oplus K \cong Q \cong P \oplus K'$. ∎

Teorema 1.63. *As seguintes condições sobre um R-módulo M são equivalentes:*

(i) Existe uma sequência exata $R^m \to R^n \to M \to 0$ *com* $m, n \in \mathbb{Z}_+$.

(ii) Existe uma sequência exata $P_1 \xrightarrow{\alpha} P_0 \xrightarrow{\beta} M \to 0$ *para alguns R-módulos projetivos finitamente gerados* P_0 *e* P_1.

(iii) M é finitamente gerado e, para cada R-módulo projetivo finitamente gerado P e epimorfismo $\epsilon : P \to M$, *temos que* $Ker(\epsilon)$ *é finitamente gerado.*

Demonstração. É claro que $3 \Rightarrow 1 \Rightarrow 2$. Para provar $2 \Rightarrow 3$, note que M é finitamente gerado pois P_0 é finitamente gerado. Aplique o lema de Schanuel nas sequências $0 \to Ker(\epsilon) \to P \to M \to 0$ e $0 \to Ker(\beta) \to P_0 \to M \to 0$ e portanto $P \oplus Ker(\beta) \cong P_0 \oplus Ker(\epsilon)$. O lado esquerdo é finitamente gerado por hipótese, isso mostra que $P_0 \oplus Ker(\epsilon)$ é finitamente gerado, então $Ker(\epsilon)$ também é finitamente gerado. ∎

Definição 1.64. Dizemos que um módulo M é finitamente apresentável se ele satisfaz a condição (i) do teorema acima.

Uma generalização do conceito de ser finitamente apresentável é a seguinte:

Definição 1.65. Dizemos que um R-módulo M é do tipo FP_m se existe uma resolução projetiva de comprimento m de R-módulos

$$P_m \to ... \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

tal que P_i é finitamente gerado para $i \leq m$.

Proposição 1.66. *Seja M um R-módulo.*

(i) M é finitamente gerado se, e somente se, M é de tipo FP_0.

(ii) M é finitamente apresentável se, e somente se, M é de tipo FP_1.

Demonstração.

(i) Como M é finitamente gerado, M é quociente de um módulo livre finitamente gerado, logo existe sequência exata

$$F_0 \to M \to 0$$

onde F_0 é livre e finitamente gerado. Como todo módulo livre é projetivo temos que M tem tipo FP_0.

Se M tem tipo FP_0, existe a seguinte resolução parcial projetiva de tipo finito

$$P_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0.$$

Logo, $M \cong P_0/Ker(d_0)$ e como P_0 é finitamente gerado temos que M finitamente gerado.

(ii) Segue do teorema 1.63, por definição. ∎

Teorema 1.67. *[12, Cap. 8, Prop. 4.3] Seja M um R-módulo e $n \geq 0$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Existe uma resolução parcial $F_n \to ... \to F_0 \to M \to 0$ onde cada F_i é livre e finitamente gerado.

(ii) *M tem tipo* FP_n.

(iii) *M é finitamente gerado e, para cada resolução projetiva de comprimento finito* $P_k \to ... \to P_0 \to M \to 0$ *com* $k < n$, *o núcleo de* $P_k \to P_{k-1}$ *é finitamente gerado.*

Existem módulos que são FP_m para todo $n > 0$. O próximo teorema fala sobre condições equivalentes a essa. Ele é análogo aos teoremas anteriores.

Teorema 1.68. *[12, Cap. 8, Prop. 4.5] Seja M um R-módulo e* $n \geq 0$. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *Existe uma resolução infinita* $... \to F_n \to ... \to F_0 \to M \to 0$ *onde cada* F_i *é livre e finitamente gerado.*

(ii) *Existe uma resolução projetiva infinita* $... \to P_n \to ... \to P_0 \to M \to 0$ *onde cada* P_i *é finitamente gerado.*

(iii) *M é do tipo* FP_n *para todo* $n > 0$.

Proposição 1.69. *[4, Prop. 1.4] Seja* $A' \rightarrowtail A \twoheadrightarrow A''$ *um sequência exata curta de R-módulos. Então temos:*
(a) Se A' *é do tipo* FP_{m-1} *e A é do tipo* FP_m, *então* A'' *tem tipo* FP_m.
(b) Se A é do tipo FP_{m-1} *e* A'' *é do tipo* FP_m, *então* A' *tem tipo* FP_{m-1}.
(c) Se A' *e* A'' *são do tipo* FP_m, *então A tem tipo* FP_m.

Definiremos anel de grupo e mostraremos algumas propriedades, mais detalhes podem ser encontrados em [23].

Definição 1.70. Sejam G um grupo e R um anel comutativo. O anel de grupo com coeficientes em R, denotado por RG, é o R-módulo livre com base G. Assim

$$RG = \bigoplus_{g \in G} = \left\{ \sum_{g \in G} x_g g : x_g \in R \right\},$$

onde $x_g = 0$ exceto para um número finito de $x_g \in R$, com as operações soma e multiplicação dadas a seguir, para todos $\sum_{g \in G} x_g g$, $\sum_{g \in G} y_g g$, $\sum_{h \in G} x_h h \in RG$:

$$\left(\sum_{g \in G} x_g g \right) + \left(\sum_{g \in G} y_g g \right) = \sum_{g \in G} (x_g + y_g) g,$$

$$\left(\sum_{g\in G} x_g g\right).\left(\sum_{h\in G} x_h h\right) = \sum_{g\in G}\sum_{h\in G}(x_g x_h)gh.$$

Com as operações definidas acima, segue que RG é de fato um anel.

Lema 1.71. *Sejam G um grupo e H subgrupo de G. Então, temos a seguinte igualdade de ZH-módulos:*

$$\mathbb{Z}G = \bigoplus_{t\in T} \mathbb{Z}Ht,$$

onde T é uma transversal a direita de H em G, isto é, $G = \dot{\bigcup_{t\in T}} Ht$ e $T \subseteq G$. Ou seja, $\mathbb{Z}G$ é $\mathbb{Z}H$-módulo livre.

Demonstração. Para todo $t \in T$, temos que $\mathbb{Z}Ht \subseteq \mathbb{Z}G$, logo $\sum_{t\in T} \mathbb{Z}Ht \subseteq \mathbb{Z}G$. Para mostrarmos a outra inclusão, dado $\lambda = \sum_{g\in G} x_g g \in \mathbb{Z}G$, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\lambda = \sum_{i=1}^{n} x_{g_i} g_i = \sum_{i=1}^{n} x_{g_i}(h_i t_i) = \sum_{i=1}^{n}(x_{g_i} h_i)t_i$, onde $h_i \in H$ e $t_i \in T$. Temos que $(x_{g_i} h_i)t_i \in \mathbb{Z}Ht_i$ para $1 \leq i \leq n$, logo $\lambda \in \sum_{j=1}^{s} \mathbb{Z}Ht_{i_j}$, onde $t_{i_j} \in \{t_1, ..., t_n\}$ para $1 \leq j \leq s$, onde $s \leq n$. Se mostrarmos que $\sum_{j=1}^{s} \mathbb{Z}Ht_{i_j} = \bigoplus_{j=1}^{s} \mathbb{Z}Ht_{i_j}$, teremos que $\lambda \in \bigoplus_{j=1}^{s} \mathbb{Z}Ht_{i_j} \subseteq \bigoplus_{t\in T} \mathbb{Z}Ht$. Assim, basta mostrarmos que, para todo $k \in \{1, ..., s\}$, $\mathbb{Z}Ht_{i_k} \cap \left(\sum_{j=1, j\neq k}^{s} \mathbb{Z}Ht_{i_j}\right) = 0$. Dado $k \in \{1, ..., s\}$, seja $\alpha \in \mathbb{Z}Ht_{i_k} \cap (\sum_{j=1, j\neq k}^{s} \mathbb{Z}Ht_{i_j})$. Então, $\alpha = \left(\sum_{h\in H} x_h^k h\right) t_{i_k} = \sum_{h\in H} x_h^k (ht_{i_k})$ e $\alpha = \sum_{j=1, j\neq k}^{s} \left(\sum_{h\in H} x_h^j h\right) t_{i_j} = \sum_{j=1, j\neq k}^{s} \sum_{h\in H} x_h^j (ht_{i_j})$. Segue que

$$\sum_{j=1, j\neq k}^{s} \sum_{h\in H} x_h^j (ht_{i_j}) + \sum_{h\in H} (-x_h^k)(ht_{i_k}) = 0_{\mathbb{Z}G} \tag{1.2}$$

Como G é união disjunta das classes Ht, concluímos que $ht_{i_{j_1}} \neq h' t_{i_{j_2}}$, para todos $j_1, j_2 \in \{1, ..., s\}$ tais que $j_1 \neq j_2$ e para todo $h, h' \in H$, assim por (1.2) $x_h^l = 0$, para todo $l \in \{1, ..., s\}$ e para todo $h \in H$ e, portanto, $\alpha = 0$ ∎

Definição 1.72. Seja G um grupo. Denominamos a função de aumento $\epsilon : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$ dada por

$$\epsilon\left(\sum_{g\in G} x_g g\right) = \sum_{g\in G} x_g$$

onde $x_g \in \mathbb{Z}$ e denotamos $Ker(\epsilon)$ por $Aug(\mathbb{Z}G)$, denominamo-lo de ideal aumento.

Definição 1.73. Seja G um grupo. Um $\mathbb{Z}G$-módulo A é dito trivial se G age trivialmente sobre A.

Definição 1.74. Seja G um grupo. Dado $n > 0$, dizemos que G é um grupo de tipo FP_n se o $\mathbb{Z}G$-módulo trivial $\mathbb{Z}$ é de tipo FP_n. E dizemos que G é um grupo de tipo FP_∞ se o $\mathbb{Z}G$-módulo trivial Z é de tipo FP_∞.

Observações. (i) Todo grupo G é um grupo de tipo FP_0.

(ii) Todo grupo abeliano finitamente gerado Q é de tipo FP_∞.

Lema 1.75. *Seja G um grupo. Então $Aug(\mathbb{Z}G)$ é $\mathbb{Z}$-módulo livre com base*

$$\mathcal{B} = \{g - 1 \in \mathbb{Z}G : g \in G \text{ e } g \neq 1_G\}$$

Demonstração. Temos que $\mathcal{B}$ é $\mathbb{Z}$-linearmente independente, pois dado $\sum_{g\in G\setminus\{1\}} x_g(g - 1) = 0$, então $\sum_{g\in G\setminus\{1\}} x_g g = \sum_{g\in G\setminus\{1\}} x_g$ e $\sum_{g\in G\setminus\{1\}} x_g = (\sum_{g\in G\setminus\{1\}} x_g).1$ e como $\mathbb{Z}G$ é $\mathbb{Z}$-módulo livre com base G, $\sum_{g\in G\setminus\{1\}} x_g$ tem uma única expressão e portanto $x_g = 0\ \forall g \in G$.

E dado $\lambda = \sum_{g\in G\setminus\{1\}} x_g g \in Aug(\mathbb{Z}G)$ temos que $\sum_{g\in G\setminus\{1\}} x_g = 0$, logo

$$\lambda = \sum_{g\in G\setminus\{1\}} x_g g - \sum_{g\in G\setminus\{1\}} x_g = \sum_{g\in G\setminus\{1\}} x_g(g - 1).$$

Portanto, $\mathcal{B}$ gera $Aug(\mathbb{Z}G)$. Assim, $Aug(\mathbb{Z}G) = \bigoplus_{g\in G, g\neq 1_G} \mathbb{Z}(g - 1)$. ∎

Lema 1.76. *Seja G um grupo. Então G é finitamente gerado se, e somente se, $Aug(\mathbb{Z}G)$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda.*

Demonstração. Seja $G = \langle X\rangle$, vamos mostrar que o conjunto $\mathcal{X} = \{x - 1 \in \mathbb{Z}G : x \in X\}$ gera $Aug(\mathbb{Z}G)$ como $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda. É fácil ver que o $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda gerado por $\mathcal{X}$ está contido em $Aug(\mathbb{Z}G)$, ou seja,

$$\sum_{x\in X} \mathbb{Z}G(x - 1) \subseteq Aug(\mathbb{Z}G),$$

uma vez que $x-1 \in Aug(\mathbb{Z}G)$, $\forall x \in X$ e $Aug(\mathbb{Z}G)$ é ideal de $\mathbb{Z}G$. Agora dado $g \in G$, temos que $g = x_1^{\epsilon_1}...x_n^{\epsilon_n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $x_j \in X$ e $\epsilon_j \in \{-1, 1\}$. Vamos mostrar por indução sobre n que $g - 1 \in \sum_{x\in X} \mathbb{Z}G(x-1)$.

Para $n = 1$, temos que $x_1 - 1 \in \mathbb{Z}G(x_1 - 1) \subseteq \sum_{x\in X} \mathbb{Z}G(x-1)$ e $x_1^{-1} - 1 = (-x_1^{-1})(x_1 - 1) \in \mathbb{Z}G(x_1 - 1) \subseteq \sum_{x\in X} \mathbb{Z}G(x-1)$.

Para $n > 1$, segue, por indução, que

$$g - 1 = (x_1^{\epsilon_1} - 1)x_2^{\epsilon_2}x_3^{\epsilon_3}...x_n^{\epsilon_n} + (x_2^{\epsilon_2}x_3^{\epsilon_3}...x_n^{\epsilon_n} - 1) \in \mathbb{Z}G(x_1 - 1) + \sum_{x\in X} \mathbb{Z}G(x-1) \subseteq \sum_{x\in X} \mathbb{Z}G(x-1).$$

Concluímos assim que $Aug(\mathbb{Z}G) \subseteq \sum_{x\in X} \mathbb{Z}G(x-1)$.

Assim, $Aug(\mathbb{Z}G) = \sum_{x\in X} \mathbb{Z}G(x-1)$. Se o grupo G é finitamente gerado, temos que existe um subconjunto finito X de G tal que $G = \langle X \rangle$, logo $\mathcal{X} = \{x - 1 | x \in X\}$ também é finito e, portanto, $Aug(\mathbb{Z}G)$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda.

Reciprocamente, se $S \subset G$ é tal que $Aug(\mathbb{Z}G) = \sum_{s\in S} \mathbb{Z}G(s-1)$, seja $\langle S \rangle = H \subseteq G$ e considere $\mathbb{Z}(G/H)$. Assim, dado $x \in \mathbb{Z}(G/H)$, temos que $x = \sum z_i(g_iH)$, seja $x_0 = H$. Temos que $(s-1)H = sH - H = H - H = 0$, $\forall s \in S$, e portanto $Aug(\mathbb{Z}G)x_0 = 0$. Temos também que $(g-1) \in \mathbb{Z}G$, $\forall g \in G$, assim $(g-1)x_0 = 0$ o que implica que $gx_0 = x_0$, $\forall g \in G$ e portanto $Gx_0 = x_0$. Assim, $GH = H \Rightarrow G \subseteq H$ e portanto $G = H = \langle S \rangle$.

Assim, se $Aug(\mathbb{Z}G) = \langle a_1, ..., a_n \rangle$ como $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda, sabemos que $Aug(\mathbb{Z}G) = \langle g - 1 : g \in G \rangle$ como $\mathbb{Z}$-módulo e portanto cada a_i pode ser escrito como uma soma finita $a_i = \sum_j x_j(g_j - 1)$. Uma vez que cada a_i é gerado por uma quantidade finita de elementos $(g-1)$ e existe uma quantidade finita de a_i, $Aug(\mathbb{Z}G)$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda por elementos $(s-1)$ onde $s \in G$. Pelo parágrafo acima $G = \langle s_1, ..., s_k \rangle$. ∎

Proposição 1.77. *Seja G um grupo. Então G é um grupo de tipo FP_1 se, e somente se, G é um grupo finitamente gerado.*

Demonstração. Se G é um grupo finitamente gerado, então $Aug(\mathbb{Z}G)$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}G$-módulo. Como a aplicação de aumento $\epsilon : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$ é epimorfismo de $\mathbb{Z}G$-módulos, temos que $\mathbb{Z}G/Aug(\mathbb{Z}G) \cong \mathbb{Z}$. Como $\mathbb{Z}G$ é $\mathbb{Z}G$-módulo livre finitamente gerado, e como $Aug(\mathbb{Z}G)$ é $\mathbb{Z}G$-módulo finitamente gerado, concluímos que $\mathbb{Z}$ é finitamente apresentável como $\mathbb{Z}G$-módulo. E portanto de tipo FP_1.

Suponha que $\mathbb{Z}$ seja finitamente apresentável como $\mathbb{Z}G$-módulo trivial. Então existe uma sequencia exata de $\mathbb{Z}G$-módulos $\mathbb{Z}G^m \to \mathbb{Z}G^n \to \mathbb{Z} \to 0$ para alguns $m, n \in \mathbb{Z}_+$ e como $\epsilon : \mathbb{Z}G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ é epimorfismo de $\mathbb{Z}G$-módulos e $\mathbb{Z}G$ é $\mathbb{Z}G$-módulo livre finitamente gerado, portanto projetivo finitamente gerado temos, por 1.63, que $Ker(\epsilon) = Aug(\mathbb{Z}G)$ é $\mathbb{Z}G$-módulo finitamente gerado, e portanto, G é um grupo finitamente gerado. ■

Lema 1.78. *Seja M um $\mathbb{Z}G$-módulo de tipo FP_1 e $C \lhd G$, tal que C age trivialmente sobre M. Então M é do tipo FP_1 sobre $\mathbb{Z}(G/C)$.*

Demonstração. Sendo M um módulo de tipo FP_1, podemos considerar a seguinte sequência

$$\mathbb{Z}G^{\alpha_2} \to \mathbb{Z}G^{\alpha_1} \twoheadrightarrow M, \alpha_i \in \mathbb{N}.$$

Como $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}C} __$ é um funtor exato à direita, temos e seguinte sequência

$$\mathbb{Z}(G/C)^{\alpha_2} \to \mathbb{Z}(G/C)^{\alpha_1} \twoheadrightarrow M$$

de $\mathbb{Z}(G/C)$-módulos. Logo M é do tipo FP_1 sobre $\mathbb{Z}(G/C)$.

Proposição 1.79. *[4, Prop. 2.7] Seja $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ uma sequência exata de grupos e suponha que N é do tipo FP_∞. Então G é do tipo FP_m se, e somente se, Q é do tipo FP_m.*

1.6 O invariante de Bieri-Strebel e Σ-Teoria

Nesta seção vamos introduzir conceitos básicos de Σ-teoria, definida originalmente por Bieri e Strebel. Ainda nesta seção vamos sempre considerar Q como um grupo abeliano finitamente gerado e $\mathbb{R}$ como grupo abeliano aditivo.

Definição 1.80. Por um caracter entendemos um homomorfismo $\varphi : Q \to \mathbb{R}$. A cada caracter podemos associar o monóide

$$Q_\varphi = \{q \in Q \mid \varphi(q) \geq 0\}.$$

Definição 1.81. Seja A um $\mathbb{Z}Q$-módulo à esquerda. O centralizador de A é o conjunto

$$C(A) = \{\lambda \in \mathbb{Z}Q \mid \lambda a = a, \ \forall a \ \in A\}.$$

Definição 1.82. Seja A um anel comutativo, associativo com 1. Uma valorização $v : A \longrightarrow \mathbb{R}_\infty$ é uma aplicação que satisfaz as seguintes condições:

(i) $v(xy) = v(x) + v(y), \forall x, y \in A$,

(ii) $v(x + y) \geq inf(v(x), v(y)), \forall x, y \in A$,

(iii) $v(1) = 0$ e $v(0) = +\infty$,

onde $\mathbb{R}_\infty$ é o grupo aditivo $\mathbb{R}$ junto com o elemento $\{+\infty\}$, tal que $r < +\infty, \forall r \in \mathbb{R}$, $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ e $r + (+\infty) = +\infty$

Definição 1.83. Podemos estender o caracter $\varphi : Q \to \mathbb{R}$ para uma aplicação $\varphi : \mathbb{Z}Q \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ via $\varphi(\sum \lambda_q q) = min\, \varphi(q)$, $\lambda_q \neq 0$, que é uma valorização no sentido da definição acima.

Se A é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo, A pode ou não ser finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q_\varphi$-módulo. O próximo resultado estabelece um critério sobre essa questão:

Proposição 1.84. *[11, Prop. 2.1] Seja $A \neq 0$ um $\mathbb{Z}Q$-módulo finitamente gerado e $\varphi : Q \to \mathbb{R}$ um caracter não trivial. Então A é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q_\varphi$-módulo se, e somente se, existe $\lambda \in C(A)$ com $\varphi(\lambda) > 0$, onde φ foi definido em 1.83. Além disso, se A é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q_\varphi$-módulo, qualquer conjunto gerando A como $\mathbb{Z}Q$-módulo gera A como $\mathbb{Z}Q_\varphi$-módulo.*

Proposição 1.85. *Seja Q um grupo abeliano finitamente gerado. Então*

$$Hom(Q, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$$

como grupos abelianos, onde $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ é o posto de Q.

Demonstração. Como Q é abeliano finitamente gerado, $Q \cong \mathbb{Z}^n \oplus K$, onde $K = \{q \in Q : |q| < \infty\}$. Assim, $Hom(Q, \mathbb{R}) \cong Hom(\mathbb{Z}^n \oplus K, \mathbb{R})$.

Agora, dado $\varphi \in Hom(\mathbb{Z}^n \oplus K, \mathbb{R})$, temos que $\varphi(K) = 0$, pois dado $q \in K$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $q^n = 1$. Daí que $0 = \varphi(1) = \varphi(q^n) = n\varphi(q)$. Como $\mathbb{R}$ não possui divisores de zero, segue que $\varphi(q) = 0$.

Definamos $\Psi : Hom(\mathbb{Z}^n \oplus K, \mathbb{R}) \to Hom(\mathbb{Z}^n, \mathbb{R})$ por $\Psi(\varphi) = \varphi|_{\mathbb{Z}^n}$. Observe que Ψ esta bem definida, pelo parágrafo anterior é injetora e claramente é sobrejetora. Assim,

$Hom(Q, \mathbb{R}) \cong Hom(\mathbb{Z}^n, \mathbb{R})$. Temos também que $\mathbb{R}^n \cong Hom(\mathbb{Z}^n, \mathbb{R})$, onde o isomorfismo é dado por $\phi(x) \mapsto \phi_x$, onde $\phi_x : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ é dado por $\phi_x(z) \mapsto < z, x >$ e $< ., . >$ é o produto interno usual. Assim $Hom(Q, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$. ■

Definição 1.86. Sejam Q um grupo abeliano finitamente gerado e $v_1, v_2 \in Hom(Q, \mathbb{R})$. Diremos que v_1 é equivalente a v_2, e denotamos por $v_1 \sim v_2$ se existir $r \in mathbbR_+$ tal que $v_1 = rv_2$.

Observe que caracteres equivalentes definem o mesmo monóide, isto é, $Q_v = Q_\varphi$. Escrevemos $[\varphi]$ para a classe de equivalência do caracter φ.

Definimos assim $S(Q) = \dfrac{Hom(Q, \mathbb{R})\backslash\{0\}}{\sim}$ (esfera de caracteres) como sendo o conjunto das classes de equivalência dos caracteres não-nulos de Q como respeito à relação de equivalência $\sim$ da definição acima. Uma vez que cada homomorfismo de grupos de Q em $\mathbb{R}$ é visto como um ponto em $\mathbb{R}^n$ e cada classe de equivalência é vista como um raio partindo de 0 em $\mathbb{R}^n$, mas não o incluindo. Tomamos, então, para representante de tal classe a interseção de tal raio com a esfera $(n-1)$-dimensional.

Definição 1.87. Seja A um $\mathbb{Z}Q$-módulo finitamente gerado. O invariante de Bieri-Strebel (associado ao módulo A) é o subconjunto $\Sigma_A(Q)$ da esfera de caracteres $S(Q)$,

$$\Sigma_A(Q) = \{[\varphi] \in S(Q) \mid \text{A é finitamente gerado como } \mathbb{Z}Q_\varphi\text{-módulo}\}.$$

Pela descrição dada na Proposição 1.84, é possível descrever $\Sigma_A(Q)$ em termos do centralizador $C(A)$ de A, ou seja,

$$\Sigma_A(Q) = \cup_{\lambda \in C(A)} \{[\varphi] \in S(Q) \mid \varphi(\lambda) > 0\} \tag{1.3}$$

donde seguem as seguintes propriedades:

Proposição 1.88. *[11, Prop. 2.2] Seja A um $\mathbb{Z}Q$-módulo finitamente gerado. Então*

(i) $\Sigma_A(Q)$ *é aberto em* $S(Q)$,

(ii) $\Sigma_A(Q) = \Sigma_{\mathbb{Z}\mathbb{Q}/I}(Q)$, *onde I é o ideal anulador de A em* $\mathbb{Z}Q$, *i.é.,*
$I = ann(A) = \{\lambda \in \mathbb{Z}Q | \lambda A = 0\}$,

(iii) Se $A' \rightarrowtail A \twoheadrightarrow A''$ *é uma sequência exata curta de* $\mathbb{Z}Q$*-módulos então,*

$$\Sigma_A(Q) = \Sigma_{A'}(Q) \cap \Sigma_{A''}(Q).$$

Definição 1.89. Suponha que Q é um grupo abeliano finitamente gerado e que M é um $\mathbb{Z}Q$-módulo finitamente gerado. Seja $A = \mathbb{Z}Q/Ann_{\mathbb{Z}Q}(M)$ a álgebra dos endomorfismos de M induzidos por $\mathbb{Z}Q$. Seja $k : \mathbb{Z}Q \longrightarrow A$ a projeção natural e seja $v : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}_\infty$ uma valorização real de $\mathbb{Z}$. Definimos $\Delta^v_M(Q)$ como o subconjunto de $Hom(Q, \mathbb{R})$ consistindo de todos χ para os quais existe uma valorização $w : A \longrightarrow \mathbb{R}_\infty$ satisfazendo

$$(w \circ k)|_{\mathbb{Z}} = v; \qquad (w \circ k)|_Q = \chi.$$

Em outras palavras, $w \circ k$ restrito a $\mathbb{Z}$ é v e $w \circ k$ restrito a Q é χ.

Definição 1.90. Um $\mathbb{Z}Q$-módulo A é dito ***manso*** se $S(Q) = \Sigma_A(Q) \cup -\Sigma_A(Q)$, onde $-\Sigma_A(Q)$ são os pontos antipodais de $\Sigma_A(Q)$, isto é, $-\Sigma_A(Q) = \{[-\chi] = -[\chi] \mid [\chi] \in \Sigma_A(Q)\}$.

Definição 1.91. Um $\mathbb{Z}Q$-módulo A é dito *m-manso* se dados quaisquer $[\chi_1], [\chi_2], ..., [\chi_m] \in \Sigma^c_A(Q)$ temos que

$$\chi_1 + \chi_2 + ... + \chi_m \neq 0.$$

Ou seja, quaisquer m elementos de $\Sigma_A(Q)$ (não necessariamente diferentes) estão em um mesmo hemisfério aberto de $S(Q)$.

Lema 1.92. *Sejam Q um grupo abeliano finitamente gerado, M_1 e M_2 $\mathbb{Z}Q$-módulos finitamente gerados tais que $\Sigma^c_{M_1}(Q) \cap -\Sigma^c_{M_2}(Q) = \emptyset$. Então $M_1 \otimes M_2$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo, via ação diagonal, e $\Sigma^c_{M_1 \otimes M_2}(Q) \subseteq \Sigma^c_{M_1}(Q) + \Sigma^c_{M_2}(Q)$.*

Demonstração. Sejam $\delta : Q \longrightarrow Q \times Q$ a aplicação diagonal e $\delta^* : Hom(Q \times Q, \mathbb{R}) \longrightarrow Hom(Q, \mathbb{R})$ a aplicação dual de δ. Então pelo 3° parágrafo da demostração de [14, Lema 10] temos que

$$\delta^*(\Delta^v_{M_1 \otimes M_2}(Q \times Q)) = \Delta^v_{M_1 \otimes M_2}(Q) \tag{1.4}$$

Sejam $\pi_1 : Q \times Q \longrightarrow Q$, com $\pi_1(q_1, q_2) = q_1$, $\pi_2 : Q \times Q \longrightarrow Q$, com $\pi_2(q_1, q_2) = q_2$, $\pi^*_i : Hom(Q, \mathbb{R}) \longrightarrow Hom(Q \times Q, \mathbb{R})$, temos por [6, Teorema 4.2]

$$\delta^*(\Delta^v_{M_1 \otimes M_2}(Q \times Q)) = \delta^*(\pi^*_1(\Delta^v_{M_1}(Q)) + \pi^*_2(\Delta^v_{M_2}(Q))) = \delta^*(\pi^*_1(\Delta^v_{M_1}(Q))) + \delta^*(\pi^*_2(\Delta^v_{M_2}(Q))) =$$

$$\Delta^v_{M_1}(Q) + \Delta^v_{M_2}(Q). \tag{1.5}$$

Assim de (1.4) e (1.5), temos que

$$\Delta^{v}_{M_1\otimes M_2}(Q) = \Delta^{v}_{M_1}(Q) + \Delta^{v}_{M_2}(Q)$$

e por [5, Teorema 8.1]

$$\Sigma^{c}_{M_1\otimes M_2}(Q) = \bigcup_{v}[\Delta^{v}_{M_1\otimes M_2}(Q)] = \bigcup_{v}[\Delta^{v}_{M_1}(Q) + \Delta^{v}_{M_2}(Q)] \subseteq \Sigma^{c}_{M_1}(Q) + \Sigma^{c}_{M_2}(Q).$$

onde a união acima esta sobre todas possíveis valorizações v de $\mathbb{Z}$. ■

Teorema 1.93. *[11, Theo. 2.4] Seja A um $\mathbb{Z}Q$-módulo finitamente gerado. Então $\Sigma_A(Q) = S(Q)$ se, e somente se, A é um grupo abeliano finitamente gerado, isto é, A é finitamente gerado como $\mathbb{Z}$-módulo.*

1.7 O invariante homológico $\Sigma^m(G, \mathbb{Z})$

Nesta secção vamos apresentar uma definição de um invariante geométrico introduzido por Bieri e Renz no artigo [10]. A definição desse invariante é para um $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda A qualquer, mas consideraremos o caso mais simples onde tomaremos apenas o $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda $\mathbb{Z}$.

Definição 1.94. Dado G um grupo finitamente gerado, existe uma série de invariantes homológicos $\Sigma^m(G;\mathbb{Z})$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, associada à todo $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda $\mathbb{Z}$. Esses invariantes são subconjuntos de $S(G)$, onde $S(G)$ é definida de maneira análoga a $S(Q)$ da seção anterior. Definimos $\Sigma^m(G;\mathbb{Z})$ como:

$$\Sigma^m(G;\mathbb{Z}) = \{[\chi] \in S(G) | \text{ o } \mathbb{Z}G_\chi\text{-módulo trivial } \mathbb{Z} \text{ tem tipo } FP_m\}$$

onde $G_\chi = \left\{g \in G \,\middle|\, \chi(g) \geq 0\right\}$ é um submonóide de G e assim $\mathbb{Z}G_\chi$ é um subanel de $\mathbb{Z}G$.

Observamos que $S(G) = S(G/G') \cong \mathbb{R}^n$, onde n é o posto de G/G'.

Os próximos dois teoremas são os principais resultados de [10].

Teorema 1.95. *[10, Theo. A] Para todo $m \geq 1$ $\Sigma^m(G;\mathbb{Z})$ é um subconjunto aberto de $S(G)$.*

Teorema 1.96. *[10, Theo. B] Sejam $G' \leq N \leq G$, onde G é um grupo do tipo FP_m. Então N tem tipo FP_m se, e somente se $S(G,N) \subseteq \Sigma^m(G;\mathbb{Z})$ onde $S(G,N) = \{[\chi] \in S(G) \,|\, \chi(N) = 0\}$.*

Considere $G = G_1 \times G_2$ o produto direto de dois grupos e seja $\pi_i : G_1 \times G_2 \to G_i$ a projeção canônica. O homomorfismo π_i induz

$$\pi_i^* : S(G_i) \to S(G_1 \times G_2),$$

isto é, $\pi_i^*([\chi]) = [\mu]$, onde $\mu\,|_{G_i} = \chi$ e $\mu\,|_{G_j} = 0$ para $i \neq j$. Definimos

$$\pi_1^*(S(G_1)) + \pi_2^*(S(G_2)) = \{[\varphi] \in S(G_1 \times G_2) \mid \varphi = (\varphi_1, \varphi_2),\ [\varphi_1] \in \pi_1^*(S(G_1)),\ [\varphi_2] \in \pi_2^*(S(G_2))\}.$$

Nestas condições, existia uma conjectura que afirmava o seguinte:

Conjectura 1.97. *Sejam G_1 e G_2 grupos de tipo FP_m. Então*

$$\Sigma^m(G_1 \times G_2; \mathbb{Z})^c = \bigcup_{p+q=m} (\pi_1^*(\Sigma^p(G_1; \mathbb{Z})^c) + \pi_2^*(\Sigma^q(G_2; \mathbb{Z})^c)),$$

onde $\Sigma^m(G; \mathbb{Z})^c$ denota o complementar de $\Sigma^m(G; \mathbb{Z})$ em $S(G)$.

O próximo resultado, devido a Schütz, mostra que a conjectura do produto direto é verdadeira para $m = 3$.

Teorema 1.98. *[28, Theo. 1.1] Sejam G_1, G_2 grupos do tipo FP_3. Então*

$$\Sigma^3(G_1 \times G_2; \mathbb{Z})^c = \bigcup_{i+j=3} (\pi_1^*(\Sigma^i(G_1; \mathbb{Z})^c) + \pi_2^*(\Sigma^j(G_2; \mathbb{Z})^c))$$

Além de ter mostrado que o resultado é verdadeiro para $m = 3$, Schütz em seu artigo [28], deu contra-exemplos para $m \geq 4$.

Capítulo 2

$\Sigma_A(Q)$ para Q finitamente gerado nilpotente de classe 2.

2.1 Propriedades básicas

Todos os módulos daqui para frente são módulos à esquerda se o contrário não for mencionado.

Definição 2.1. Seja Q um grupo finitamente gerado nilpotente de classe 2 e A um $\mathbb{Z}Q$-módulo finitamente gerado. Considere a esfera de caracteres

$$S(Q) = (Hom(Q, \mathbb{R}) \setminus \{0\})/\sim$$

onde $\sim$ é a relação de equivalência dada pela multiplicação por um número real positivo, isto é, $\chi_1 \sim \chi_2$ se existe um número real $r > 0$ tal que $\chi_1 = r\chi_2$. Seja $\chi \in Hom(Q, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ um caracter. Então $[\chi]$ é a classe de χ em $S(Q)$.

A definição seguinte de Σ-invariante, considerada em [18], é uma variação da definição do Σ-invariante dada primeiramente por Bieri-Strebel em [11].

Definição 2.2. Seja Q um grupo finitamente gerado nilpotente de classe 2 e A um $\mathbb{Z}Q$-módulo finitamente gerado. Definimos o Σ-invariante como

$$\Sigma_A(Q) = \{[\chi] \in S(Q) \mid A \text{ é finitamente gerado sobre } \mathbb{Z}Q_\chi\}$$

e

$$\Sigma_A^c(Q) = S(Q) \setminus \Sigma_A(Q),$$

onde Q_χ é o monoide $\{q \in Q \mid \chi(q) \geq 0\}$.

Denotamos $\otimes_{\mathbb{Z}}$ com $\otimes$ por simplicidade de notação.

Lema 2.3. *Seja A um $\mathbb{Z}Q$-módulo finitamente gerado, Q finitamente gerado nilpotente de classe 2 e Q' agindo nilpotentemente sobre A. Assim, temos para cada i tal que $\Omega^i A \neq \Omega^{i+1}A$,*

$$\Sigma_A(Q) = \Sigma_{A/\Omega A}(Q) \subseteq \Sigma_{\Omega^i A/\Omega^{i+1}A}(Q),$$

onde $\Omega = Aug\mathbb{Z}Q'$.

Demonstração. Como Q' age nilpotentemente sobre A, A tem uma filtração de $\mathbb{Z}Q$-módulos a esquerda dada por

$$A \supset \Omega A \supset \Omega^2 A \supset ... \supset \Omega^m A = 0.$$

De fato, observe que $\mathbb{Z}Q.\Omega^i = \Omega^i.\mathbb{Z}Q$, pois dados $q \in Q$ e $(\omega - 1) \in \Omega$, temos

$$q(\omega - 1) = ({}^q\omega - 1)q$$

assim, dados $q \in Q$ e $(\omega_1 - 1)...(\omega_i - 1) \in \Omega^i$, temos

$$q(\omega_1 - 1)...(\omega_i - 1) = ({}^q\omega_1 - 1)...({}^q\omega_i - 1)q$$

e portanto $\mathbb{Z}Q.\Omega^i = \Omega^i.\mathbb{Z}Q$. Logo $\mathbb{Z}Q.\Omega^i A = \Omega^i \mathbb{Z}QA = \Omega^i A$, e portanto $\Omega^i A$ é $\mathbb{Z}Q$-submódulo a esquerda de A.

Como $\mathbb{Z}Q$ é um anel Noetheriano temos que $\Omega^i\mathbb{Z}Q$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo. Assim seja $\{\beta_1, \ldots, \beta_s\} \subset \Omega^i$ um conjunto finito de geradores de $\mathbb{Z}Q\Omega^i$ como $\mathbb{Z}Q$-módulo. Temos que

$$\mathbb{Z}Q.\Omega^i = \Omega^i.\mathbb{Z}Q = \beta_1\mathbb{Z}Q + ... + \beta_s\mathbb{Z}Q$$

assim,

$$\Omega^i A = \Omega^i.\mathbb{Z}QA = (\beta_1\mathbb{Z}Q + ... + \beta_s\mathbb{Z}Q)A = \beta_1 A + ... + \beta_s A$$

Então podemos definir um homomorfismo de $\mathbb{Z}Q$-módulos a esquerda

$$\rho : A^s \to \Omega^i A$$

dado por $\rho(a_1, ...a_s) = \beta_1 a_1 + ... + \beta_s a_s$. De fato temos um homomorfismo, pois dado $\lambda \in \mathbb{Z}Q$, $\rho(\lambda(a_1, ..., a_s)) = \rho(\lambda a_1, ..., \lambda a_s) = \beta_1 \lambda a_1 + ... + \beta_s \lambda a_s = \lambda\beta_1 a_1 + ... + \lambda\beta_s a_s = \lambda(\beta_1 a_1 + ... + \beta_s a_s) = \lambda\rho(a_1, ...a_s)$, onde usamos o fato de $Q' \subseteq Z(Q)$, pois Q é nilpotente de classe 2, e portanto $\beta_i \in Z(\mathbb{Z}Q)$ o que implica que $\beta_i\lambda = \lambda\beta_i$.

Observemos que a ação de Q sobre A induz uma ação de Q/Q' sobre $A/\Omega A$.

Então temos um epimorfismo de $\mathbb{Z}Q$-módulos a esquerda

$$\oplus \frac{A}{\Omega A} = \left(\frac{A}{\Omega A}\right)^s \twoheadrightarrow \frac{\Omega^i A}{\Omega^{i+1} A} \tag{2.1}$$

que envia $(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_s)$ para $(\sum_{1\leq i\leq s} \beta_i a_i) + \Omega^{i+1}A$, onde $a_1, \ldots, a_s \in A$, $\overline{a}_i = a_i + \Omega A$. Logo pela definição do Σ-invariante temos

$$\Sigma^c_{\frac{\Omega^i A}{\Omega^{i+1} A}}(Q) \subseteq \Sigma^c_{\oplus \frac{A}{\Omega A}}(Q) = \Sigma^c_{\frac{A}{\Omega A}}(Q).$$

Observe também que

$$\Sigma^c_A(Q) \subseteq \cup_{0\leq i\leq m-1} \Sigma^c_{\frac{\Omega^i A}{\Omega^{i+1} A}}(Q) \subseteq \Sigma^c_{\frac{A}{\Omega A}}(Q) \subseteq \Sigma^c_A(Q) \Rightarrow \Sigma^c_A(Q) = \Sigma^c_{\frac{A}{\Omega A}}(Q) \supseteq \Sigma^c_{\frac{\Omega^i A}{\Omega^{i+1} A}}(Q),$$

o que conclui a demonstração. ∎

Definição 2.4. Seja Q um grupo e $\lambda \in \mathbb{Z}Q \setminus \{0\}$. Então $\lambda = \sum z_q q$ com $q \in Q$, $z_q \in \mathbb{Z}$ e o suporte de λ é $supp(\lambda) = \{q \in Q \mid z_q \neq 0\}$.

Lema 2.5. *Seja A um $\mathbb{Z}Q$-módulo finitamente gerado onde Q é finitamente gerado nilpotente de classe 2 e Q' age nilpotentemente sobre A. Então $[\chi] \in \Sigma_A(Q)$ se, e somente se, existe $\lambda \in C(A) = \{\lambda \in \mathbb{Z}Q \mid a = \lambda a, \forall\ a \in A\}$ tal que $min_{q\,\in\, supp(\lambda)}\chi(q) > 0$.*

Demonstração. Suponha que exista $\lambda \in C(A)$ onde $\forall\ q \in supp(\lambda)$, $\chi(q) > 0$. Dado o homomorfismo canônico $\mathbb{Z}Q \to \mathbb{Z}(Q/Q')$, seja $\widetilde{\lambda}$ a imagem de λ. Como $\lambda \in C(A)$, temos que $(1-\lambda)a = 0, \forall a \in A$, logo $(1-\lambda)\overline{a} = 0, \forall\ \overline{a} \in A/\Omega A$ e portanto $(1-\widetilde{\lambda})\overline{a} = 0, \forall\ \overline{a} \in A/\Omega A$. Assim, temos que $\widetilde{\lambda} \in C_{\mathbb{Z}(Q/Q')}(A/\Omega A)$, tal que $\forall\ \widetilde{q} \in supp(\widetilde{\lambda})$, $\chi(\widetilde{q}) > 0$, o que implica, pela Proposição 1.84 e pelo Lema 2.3, que $[\chi] \in \Sigma_{A/\Omega A}(Q/Q') = \Sigma_{A/\Omega A}(Q) = \Sigma_A(Q)$.

Por outro lado, tome $[\chi] \in \Sigma_A(Q) = \Sigma_{A/\Omega A}(Q) = \Sigma_{A/\Omega A}(Q/Q')$, logo, pelo caso abeliano ou seja Proposição 1.84, existe $\widetilde{\lambda} \in C_{\mathbb{Z}(Q/Q')}(A/\Omega A)$, com $min_{q \in supp(\widetilde{\lambda})}\chi(q) > 0$. Assim, $(1-\widetilde{\lambda})\overline{a} = 0, \forall\ \overline{a} \in A/\Omega A$ e por (2.1) temos que $(1-\lambda)(\Omega^i A/\Omega^{i+1}A) = 0$ onde $\lambda \in \mathbb{Z}Q$ é escolhido tal que a imagem de λ em $\mathbb{Z}(Q/Q')$ é igual a $\widetilde{\lambda}$. Isto implica que

$$(1-\lambda)\Omega^i A \subseteq \Omega^{i+1}A.$$

Como $\Omega^m A = 0$, temos $(1-\lambda)^m A = 0$ o que implica que $(1-\lambda_1)A = 0$, onde $1-\lambda_1 = (1-\lambda)^m$. Portanto $\forall\ q \in supp(\lambda_1)$ temos que $\chi(q) > 0$ e $\lambda_1 \in C(A)$. ■

Lema 2.6. *Sejam Q um grupo finitamente gerado nilpotente de classe 2, A um $\mathbb{Z}Q$-módulo finitamente gerado tal que Q' age nilpotentemente sobre A e A_1 um $\mathbb{Z}Q$-submódulo de A. Então,*

$$\Sigma^c_A(Q) = \Sigma^c_{A_1}(Q) \cup \Sigma^c_{A/A_1}(Q).$$

Isto é equivalente a $\Sigma_A(Q) = \Sigma_{A_1}(Q) \cap \Sigma_{A/A_1}(Q)$.

Demonstração. Seja $[\chi] \in \Sigma_{A_1}(Q) \cap \Sigma_{A/A_1}(Q)$. Pelo Lema 2.5 temos que existe $\lambda_1 \in C(A_1)$ tal que $\forall q_1 \in supp(\lambda_1)$ temos $\chi(q_1) > 0$, da mesma forma existe $\lambda_2 \in C(A/A_1)$ tal que $\forall q_2 \in supp(\lambda_2)$ temos $\chi(q_2) > 0$. Logo,

$$\begin{array}{l} (1-\lambda_1)A_1 = 0 \\ (1-\lambda_2)A/A_1 = 0 \end{array} \Rightarrow \ (1-\lambda_2)A \subseteq A_1$$

e portanto $(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)A \subseteq (1-\lambda_1)A_1 = 0$. Assim, fazendo $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1\lambda_2$ temos que $1-\lambda = (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)$ e $\forall q \in supp(\lambda)$, $\chi(q) > 0$, o que implica que $(1-\lambda)A = 0$ e novamente pelo Lema 2.5 temos que $[\chi] \in \Sigma_A(Q)$. Logo $\Sigma_{A_1}(Q) \cap \Sigma_{A/A_1}(Q) \subseteq \Sigma_A(Q)$.

Por outro lado, tome $[\chi] \in \Sigma_A(Q)$, como A é um $\mathbb{Z}Q_\chi$-módulo finitamente gerado, A/A_1 também é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q_\chi$-módulo. Logo $[\chi] \in \Sigma_{A/A_1}(Q)$. Para finalizar a demonstração, basta observar que pelo Lema 2.5, existe $\lambda \in C(A)$ tal que $\forall q \in supp(\lambda)$, $\chi(q) > 0$, e como $C(A) \subseteq C(A_1)$, temos que $\lambda \in C(A_1)$ tal que $\forall q \in supp(\lambda)$, $\chi(q) > 0$ e novamente pelo Lema 2.5 $[\chi] \in \Sigma_{A_1}(Q)$. Portanto $\Sigma_A(Q) \subseteq \Sigma_{A_1}(Q) \cap \Sigma_{A/A_1}(Q)$.

■

Definição 2.7. Sejam V_1, V_2 subconjuntos de $S(Q)$. Definimos

$$V_1 + V_2 = \{[\chi_1 + \chi_2] \mid [\chi_i] \in V_i, \chi_1 + \chi_2 \neq 0\}.$$

Observação. Por definição $0 \notin V_1 + V_2$ se não existem $[\chi_i] \in V_i$, $i = 1, 2$ tais que $\chi_1 + \chi_2 = 0$.

Lema 2.8. *Sejam Q um grupo finitamente gerado nilpotente de classe 2, B e C $\mathbb{Z}Q$-módulos finitamente gerados tais que Q' age nilpotentemente sobre B e C. Suponha que $0 \notin \Sigma^c_B(Q) + \Sigma^c_C(Q)$. Então, $B \otimes C$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo e*

$$\Sigma^c_{B\otimes C}(Q) \subseteq \Sigma^c_B(Q) + \Sigma^c_C(Q).$$

Demonstração. Seja $\Omega = Aug\mathbb{Z}Q'$. Assim, existem $s, k \in \mathbb{Z}$ minimais tais que $\Omega^s B = 0$ e $\Omega^k C = 0$.

Vamos usar indução sobre $s + k$. Se $s = 1 = k$, temos que Q age como Q/Q', e o caso abeliano se aplica, Lema 1.92. Logo, suponha $s \neq 1$ e seja $\Omega^{s-1}B = B_1 \neq 0$. Consideremos a sequência exata a direita

$$B_1 \otimes C \to B \otimes C \twoheadrightarrow (B/B_1) \otimes C.$$

Pelo Lema 2.6

$$\Sigma^c_{B_1}(Q) \cup \Sigma^c_{B/B_1}(Q) = \Sigma^c_B(Q),$$

logo, como $0 \notin \Sigma^c_B(Q) + \Sigma^c_C(Q)$ temos que

$$0 \notin \Sigma^c_{B/B_1}(Q) + \Sigma^c_C(Q)$$

e

$$0 \notin \Sigma^c_{B_1}(Q) + \Sigma^c_C(Q).$$

Por indução, $B_1 \otimes C$ e $(B/B_1) \otimes C$ são finitamente gerados como $\mathbb{Z}Q$-módulos logo, pela Proposição 1.69 temos que $B \otimes C$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo.

Agora temos pela definição do Σ-invariante que $\Sigma_{B_1\otimes C}(Q) \cap \Sigma_{(B/B_1)\otimes C}(Q) \subseteq \Sigma_{B\otimes C}(Q)$ o que implica que $\Sigma^c_{B\otimes C}(Q) \subseteq \Sigma^c_{B_1\otimes C}(Q) \cup \Sigma^c_{(B/B_1)\otimes C}(Q)$. Novamente por indução, temos

$$\Sigma^c_{B_1\otimes C}(Q) \subseteq \Sigma^c_{B_1}(Q) + \Sigma^c_C(Q)$$
$$\Sigma^c_{(B/B_1)\otimes C}(Q) \subseteq \Sigma^c_{B/B_1}(Q) + \Sigma^c_C(Q)$$

e portanto

$$\Sigma^c_{B\otimes C}(Q) \subseteq (\Sigma^c_{B_1}(Q) \cup \Sigma^c_{B/B_1}(Q)) + \Sigma^c_C(Q). \tag{2.2}$$

Pelo Lema 2.6 temos que $\Sigma^c_{B_1}(Q) \cup \Sigma^c_{B/B_1}(Q) = \Sigma^c_B(Q)$ e portanto por (2.2)

$$\Sigma^c_{B\otimes C}(Q) \subseteq \Sigma^c_B(Q) + \Sigma^c_C(Q)$$

. ■

Proposição 2.9. *Suponha que Q é um grupo finitamente gerado nilpotente de classe 2, que M, B e C são $\mathbb{Z}Q$-módulos à esquerda finitamente gerados e que M, B e C têm filtrações de $\mathbb{Z}Q$-submódulos*

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_s = 0,$$

$$B = B_0 \supsetneq B_1 \supsetneq \cdots \supsetneq B_z = 0$$

e

$$C = C_0 \supsetneq C_1 \supsetneq \cdots \supsetneq C_t = 0$$

tal que a ação do comutador Q' sobre cada quociente M_i/M_{i+1}, B_j/B_{j+1} e C_k/C_{k+1} é trivial para $i \leq s-1$, $j \leq z-1$ e $k \leq t-1$. Além disso suponha que para todo $i \leq s-1$, $j \leq z-1$ e $k \leq t-1$

$$0 \notin \Sigma^c_{M_i/M_{i+1}}(Q) + \Sigma^c_{B_j/B_{j+1}}(Q) + \Sigma^c_{C_k/C_{k+1}}(Q)$$

e

$$0 \notin \Sigma^c_{B_j/B_{j+1}}(Q) + \Sigma^c_{C_k/C_{k+1}}(Q)$$

Então $Aug(\mathbb{Z}M) \otimes B \otimes C$ é um $\mathbb{Z}(M \rtimes Q)$-módulo finitamente gerado. Aqui $Aug(\mathbb{Z}M)$ denota o ideal aumento de $\mathbb{Z}M$, M age sobre $Aug(\mathbb{Z}M)$ via multiplicação no anel $\mathbb{Z}M$ e Q age diagonalmente.

Demonstração. Faremos a demonstração usando indução sobre $s + z + t \geq 3$.

Suponha $s = z = t = 1$. Então

$$M = \frac{M_0}{M_1}; \quad B = \frac{B_0}{B_1} \quad e \quad C = \frac{C_0}{C_1}.$$

Assim, Q' age trivialmente sobre M, B e C, o que implica que Q' age trivialmente sobre $Aug(\mathbb{Z}M) \otimes B \otimes C$. Logo, $Aug(\mathbb{Z}M) \otimes B \otimes C$ é um $\mathbb{Z}(M \rtimes (Q/Q'))$-módulo. Podemos supor que Q é abeliano, pois Q/Q' é abeliano. Por hipótese

$$0 \notin \Sigma^c_{M_0/M_1}(Q) + \Sigma^c_{B_0/B_1}(Q) + \Sigma^c_{C_0/C_1}(Q) = \Sigma^c_M(Q) + \Sigma^c_B(Q) + \Sigma^c_C(Q),$$

e pelo Lema 2.8,

$$\Sigma^c_{B\otimes C}(Q) \subseteq \Sigma^c_B(Q) + \Sigma^c_C(Q)$$

o que implica que

$$\Sigma^c_M(Q) + \Sigma^c_{B\otimes C}(Q) \subseteq \Sigma^c_M(Q) + \Sigma^c_B(Q) + \Sigma^c_C(Q) \not\ni 0.$$

Portanto

$$0 \notin \Sigma^c_M(Q) + \Sigma^c_{B\otimes C}(Q)$$

Então por [15, Corolário 8], temos que $Aug(\mathbb{Z}M) \otimes B \otimes C$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}(M \rtimes Q)$-módulo.

Suponhamos agora que $s > 1$ ou $z > 1$ ou $t > 1$ (observe que aqui z e t têm o mesmo papel, assim podemos considerar apenas o caso $t > 1$ no lugar de $z > 1$).

Caso $t > 1$:

Considere a filtração de C:

$$C = C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset ... \supset C_t = 0.$$

Recordamos que $\otimes$ denota $\otimes_{\mathbb{Z}}$. Assim temos a sequência exata $0 \to C_1 \to C \to C/C_1 \to 0$, e como $Aug(\mathbb{Z}M) \otimes B \otimes __$ é um funtor exato à direita temos a sequência exata

$$Aug(\mathbb{Z}M) \otimes B \otimes C_1 \to Aug(\mathbb{Z}M) \otimes B \otimes C \to Aug(\mathbb{Z}M) \otimes B \otimes (C/C_1) \to 0$$

e por indução $Aug(\mathbb{Z}M) \otimes B \otimes C_1$ e $Aug(\mathbb{Z}M) \otimes B \otimes (C/C_1)$ são finitamente gerados como $\mathbb{Z}(M \rtimes Q)$-módulos, o que implica que $Aug(\mathbb{Z}M) \otimes B \otimes C$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}(M \rtimes Q)$-módulo.

Caso $s > 1$:

Considere a sequência exata curta de $\mathbb{Z}(M \rtimes Q)$-módulos

$$\mathbb{Z}M \otimes_{\mathbb{Z}M_1} (Aug(\mathbb{Z}M_1)) \to Aug(\mathbb{Z}M) \xrightarrow{\alpha} Aug(\mathbb{Z}(M/M_1)), \tag{2.3}$$

onde α é a projeção canônica. Obtemos esta sequência aplicando à sequência exata curta de $\mathbb{Z}M_1$-módulos $0 \to Aug(\mathbb{Z}M_1) \to \mathbb{Z}M_1 \to \mathbb{Z} \to 0$ o funtor exato $\mathbb{Z}M \otimes_{\mathbb{Z}M_1}$ e então restringindo aos ideais de aumento nos dois últimos termos.

A sequência exata longa em *Tor* aplicada para (2.3) nos dá

$$\to Tor_1^{\mathbb{Z}}(Aug\mathbb{Z}(M/M_1), B \otimes C) \to (\mathbb{Z}M \otimes_{\mathbb{Z}M_1} Aug\mathbb{Z}M_1) \otimes B \otimes C \to Aug\mathbb{Z}M \otimes B \otimes C \to Aug\mathbb{Z}(M/M_1) \otimes B \otimes C \to 0$$

onde $Tor_1^{\mathbb{Z}}(Aug\mathbb{Z}(M/M_1), B \otimes C) = 0$, pois $Aug(\mathbb{Z}(M/M_1))$ é $\mathbb{Z}$-módulo livre.

Por indução, temos que $Aug(\mathbb{Z}(M/M_1)) \otimes B \otimes C$ é finitamente gerado como $\frac{M}{M_1} \rtimes Q$-módulo, logo também é finitamente gerado como $M \rtimes Q$-módulo. Temos também por indução que $Aug(\mathbb{Z}M_1) \otimes B \otimes C$ é finitamente gerado como $M_1 \rtimes Q$-módulo, logo $\mathbb{Z}M \otimes_{\mathbb{Z}M_1} (Aug(\mathbb{Z}M_1) \otimes B \otimes C)$ é finitamente gerado como $M \rtimes Q$-módulo pois $\mathbb{Z}M \otimes_{\mathbb{Z}M_1} \mathbb{Z}(M_1 \rtimes Q) \simeq \mathbb{Z}(M \rtimes Q)$. Assim concluímos que $Aug(\mathbb{Z}M) \otimes B \otimes C$ é finitamente gerado como $M \rtimes Q$-módulo. ∎

Corolário 2.10. *Com as mesmas hipóteses da Proposição 2.9 temos que $M \otimes B \otimes C$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo onde Q age diagonalmente.*

Demonstração.

Seja $\Omega = Aug(\mathbb{Z}M)$, assim temos que existe a sequencia exata curta de $\mathbb{Z}M$-módulos

$$0 \to \Omega^2 \to \Omega \to \frac{\Omega}{\Omega^2} \to 0$$

como $\frac{\Omega}{\Omega^2} \simeq M$, por [26, Lema 9.51 e Teorema 9.52], e tensorizando por $B \otimes C$ temos

$$\Omega^2 \otimes (B \otimes C) \to \Omega \otimes (B \otimes C) \to M \otimes (B \otimes C) \to 0$$

logo, $\frac{\Omega \otimes B \otimes C}{Im(\Omega^2 \otimes B \otimes C)} \simeq M \otimes B \otimes C$. Pela proposição anterior $\Omega \otimes B \otimes C$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}(M \rtimes Q)$-módulo, logo $\frac{\Omega \otimes B \otimes C}{Im(\Omega^2 \otimes B \otimes C)}$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}(M \rtimes Q)$-módulo. ∎

Lema 2.11. *Seja $G = A \rtimes Q$ um grupo do tipo FP_3 com A um grupo abeliano e Q um grupo finitamente gerado nilpotente de classe 2. Suponha ainda que Q' age nilpotentemente sobre A. Então:*

$$0 \notin \Sigma^c_A(Q) + \Sigma^c_A(Q) + \Sigma^c_A(Q).$$

Demonstração.

Como $G = A \rtimes Q$ tem tipo homológico FP_3, pelo Teorema B de [15], cada quociente de G tem tipo FP_3. Assim $\frac{A}{\Omega A} \rtimes \frac{Q}{Q'} = \frac{A \rtimes Q}{\Omega A \rtimes Q'}$ tem tipo FP_3. Temos por [19], Teorema B, que se $M \rtimes H$ tem tipo FP_m, onde M e H são abelianos, então M é *m-tame* como $\mathbb{Z}H$-módulo, isto é, $0 \notin conv_{\leq m}\Sigma^c_M(H)$. Tomando $m = 3$ e considerando $M = A/\Omega A$ e $H = Q/Q'$ temos que

$$0 \notin \Sigma^c_{\frac{A}{\Omega A}}(Q/Q') + \Sigma^c_{\frac{A}{\Omega A}}(Q/Q') + \Sigma^c_{\frac{A}{\Omega A}}(Q/Q')$$

e observando que $\Sigma^c_{A/\Omega A}(Q) = \Sigma^c_{A/\Omega A}(Q/Q')$ e pelo Lema 2.3 $\Sigma^c_{A/\Omega A}(Q) = \Sigma^c_A(Q)$ segue o resultado. ∎

2.2 Σ-invariantes

Lema 2.12. *Seja $G = A \rtimes Q$ um grupo finitamente gerado, onde A é abeliano, Q um grupo finitamente gerado nilpotente de classe 2 e Q' age nilpotentamente sobre A. Sejam $\overline{\chi} : Q \to \mathbb{R}$ um homomorfismo, isto é, caracter não nulo e $\chi : G \to \mathbb{R}$ a extensão de $\overline{\chi}$ a um homomorfismo tal que $\chi(A) = 0$.*

Então $[\chi] \in \Sigma^1(G; \mathbb{Z})$ se, e somente se, $[\overline{\chi}] \in \Sigma_A(Q)$.

Demonstração. Suponha primeiramente que $[\overline{\chi}] \in \Sigma_A(Q)$. Assim, queremos mostrar que $[\chi] \in \Sigma^1(G; \mathbb{Z})$. Por definição, temos que $[\chi] \in \Sigma^1(G; \mathbb{Z})$ se, e somente se, $\mathbb{Z}$ é de tipo FP_1 sobre $\mathbb{Z}G_\chi$. Considere a seguinte sequência exata curta

$$Aug\mathbb{Z}G_\chi \rightarrowtail \mathbb{Z}G_\chi \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$$

e observe que $\mathbb{Z}G_\chi$ tem tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}G_\chi$. Assim, pelo argumento de diminuição de dimensão, ou seja, Proposição 1.69, temos que $\mathbb{Z}$ é de tipo FP_1 se, e somente se, $Aug(\mathbb{Z}G_\chi)$ é de tipo FP_0 (finitamente gerado) sobre $\mathbb{Z}G_\chi$.

Tomando a sequência exata curta de $\mathbb{Z}Q_{\overline{\chi}}$-módulos seguinte

$$Aug\mathbb{Z}Q_{\overline{\chi}} \rightarrowtail \mathbb{Z}Q_{\overline{\chi}} \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \tag{2.4}$$

e observando que $\mathbb{Z}Q_{\overline{\chi}}$ tem tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}Q_{\overline{\chi}}$, temos, novamente pelo argumento de diminuição de dimensão que $Aug(\mathbb{Z}Q_{\overline{\chi}})$ tem tipo FP_∞ se, e somente se, $\mathbb{Z}$ tem tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}Q_{\overline{\chi}}$. Mas $\mathbb{Z}$ tem tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}Q_{\overline{\chi}}$ se, e somente se, $[\overline{\chi}] \in \Sigma^\infty(Q, \mathbb{Z})$. Observamos que um corolário imediato do Teorema 4.1 de Bieri-Renz [10] é que se H for um grupo de tipo FP_m e $h \in Z(H) \setminus 1$ tal que $\chi(h) \neq 0$ (portanto podemos supor $\chi(h) > 0$) então $[\chi] \in \Sigma^m(H; \mathbb{Z})$. Aplicando isto para $H = Q$ temos que

$$\Sigma^\infty(Q; \mathbb{Z}) = S(Q).$$

Portanto $Aug(\mathbb{Z}Q_{\overline{\chi}})$ tem tipo FP_∞ como $\mathbb{Z}Q_{\overline{\chi}}$-módulo. Como $\mathbb{Z}G_\chi \otimes_{\mathbb{Z}Q_{\overline{\chi}}}$ é funtor exato temos que $\mathbb{Z}G_\chi \otimes_{\mathbb{Z}Q_{\overline{\chi}}} Aug\mathbb{Z}Q_{\overline{\chi}}$ tem tipo FP_∞ como $\mathbb{Z}G_\chi$-módulo. Em particular tem tipo FP_0 como $\mathbb{Z}G_\chi$-módulo (i.e., é finitamente gerado).

Tomemos agora a sequência exata curta de $\mathbb{Z}G_\chi$-módulos

$$\mathbb{Z}G_\chi \otimes_{\mathbb{Z}Q_{\overline{\chi}}} Aug(\mathbb{Z}Q_{\overline{\chi}}) \simeq \mathbb{Z}G_\chi.Aug(\mathbb{Z}Q_{\overline{\chi}}) \rightarrowtail Aug(\mathbb{Z}G_\chi) \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} Aug(\mathbb{Z}A), \tag{2.5}$$

onde α é a restrição da projeção canônica $\mathbb{Z}G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}A$. Observamos que (2.5) é obtida de (2.4) aplicando o funtor $\mathbb{Z}G_\chi \otimes_{\mathbb{Z}Q_{\overline{\chi}}} __$. Então pela Proposição 1.69 temos que $Aug(ZG_\chi)$ tem tipo FP_0 se, e somente se, $Aug(\mathbb{Z}A)$ tem tipo FP_0 sobre $\mathbb{Z}G_\chi$.

Observamos que pelo lema 1.76, se X é um conjunto de geradores de A como grupo, então $Aug(\mathbb{Z}A)$ é gerado como $\mathbb{Z}A$-módulo pelo conjunto $\mathcal{X} = X - 1 = \{x - 1 \in \mathbb{Z}G : x \in X\}$. Por hipótese, $[\overline{\chi}] \in \Sigma_A(Q)$, ou seja, A é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q_{\overline{\chi}}$-módulo, portanto existe um conjunto X de geradores de A tal que X é a união finita de $Q_{\overline{\chi}}$-orbitas. Então $Aug\mathbb{Z}A$ é gerado como $\mathbb{Z}A$-módulo por $X - 1$. Se $a_1, \ldots, a_s$ são geradores das $Q_{\overline{\chi}}$-orbitas em X então $\{a_1 - 1, \ldots, a_s - 1\}$ é um conjunto de geradores de $Aug(\mathbb{Z}A)$ como $\mathbb{Z}G_\chi$-módulo. Então $Aug(\mathbb{Z}A)$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}G_\chi$-módulo, isto é, tem tipo FP_0.

Reciprocamente suponha $[\chi] \in \Sigma^1(G; \mathbb{Z})$, portanto o $\mathbb{Z}G_\chi$-módulo trivial $\mathbb{Z}$ tem tipo FP_1. Consideraremos dois casos, o caso em que χ é discreto e o caso em que χ não é discreto. Logo, supondo χ discreto (í. e. $Im(\chi) \simeq \mathbb{Z}$) temos por hipótese que existe uma

resolução livre de $\mathbb{Z}G_\chi$-módulos

$$\mathfrak{F} = \cdots \to \mathbb{Z}G_\chi^{\alpha_2} \xrightarrow{\rho_2} \mathbb{Z}G_\chi^{\alpha_1} \xrightarrow{\rho_1} \mathbb{Z}G_\chi^{\alpha_0} \xrightarrow{\rho_0} \mathbb{Z} \to 0$$

com $\alpha_0, \alpha_1 < \infty$. Considere agora

$$\mathfrak{R} = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}A} \mathfrak{F} = \cdots \to \mathbb{Z}Q_{\overline{\chi}}^{\alpha_2} \xrightarrow{\rho_2} \mathbb{Z}Q_{\overline{\chi}}^{\alpha_1} \xrightarrow{\rho_1} \mathbb{Z}Q_{\overline{\chi}}^{\alpha_0} \xrightarrow{\rho_0} \mathbb{Z} \to 0,$$

logo

$$ker\rho_1/Im\rho_2 = H_1(\mathfrak{R}) = H_1(A;\mathbb{Z}) \cong A^{ab} = A.$$

Como $\mathbb{Z}Q_{\overline{\chi}}$ é anel Noetheriano, qualquer módulo finitamente gerado sobre $\mathbb{Z}Q_{\overline{\chi}}$ é um módulo Noetheriano, o que implica que $ker\rho_1$ é finitamente gerado sobre $\mathbb{Z}Q_{\overline{\chi}}$ e portanto $H_1(\mathfrak{R}) = A$ é finitamente gerado sobre $\mathbb{Z}Q_{\overline{\chi}}$.

Agora considere $[\chi] \in \Sigma^1(G;\mathbb{Z})$ não discreto. Como $\Sigma^1(G;\mathbb{Z})$ é subconjunto aberto da esfera de caracteres $S(G)$, pelo Teo. 1.95, existe uma vizinhança $U \subseteq \Sigma^1(G;\mathbb{Z}) \subseteq S(G)$ de $[\chi]$, isto é, U contem todos $[\mu]$ tais que o ângulo entre χ e μ é menor do que um número suficiente pequeno positivo ϵ. Suponha por absurdo que $[\overline{\chi}] \notin \Sigma_A(Q) = \Sigma_{A/\Omega A}(Q/Q')$. Por [5, Teorema E] $\Sigma^c_{A/\Omega A}(Q/Q')$ é um poliedro esférico racionalmente definido. Assim o conjunto dos pontos racionais, denotado por $\Sigma^c_{A/\Omega A}(Q/Q')_{disc}$, que consiste de todos $[v] \in \Sigma^c_{A/\Omega A}(Q/Q')$ tal que $\rho v \in \mathbb{Z}^n$ para algum número real $\rho > 0$, é denso em $\Sigma^c_{A/\Omega A}(Q/Q')$. Logo para qualquer vizinhança $V \subseteq S(Q)$ contendo $[\overline{\chi}]$, existe $[\overline{\chi}_v] \in V \cap \Sigma^c_{A/\Omega A}(Q/Q')$ tal que $[\overline{\chi}_v]$ pode ser escolhido de tal forma que $\overline{\chi}_v$ seja discreto. Assim escolhemos uma sequencia $\{[\overline{\chi}_v]\}_v$ com limite $[\overline{\chi}]$ e definimos $\chi_v : G \longrightarrow \mathbb{R}$ com $\chi_v(A) = 0$ e $\chi_v|_Q = \overline{\chi}_v$. Portanto a sequência $\{[\chi_v]\}_v$ em $S(G)$ tem limite $[\chi]$, logo quase todos $\{[\chi_v]\}_v$ estão em U. Assim $[\chi_v] \in \Sigma^1(G;\mathbb{Z})$. Pela escolha de $[\overline{\chi}_v]$ como ponto discreto, $[\chi_v]$ é ponto discreto. Assim $[\chi_v] \in \Sigma^1(G;\mathbb{Z})_{disc}$ e pelo caso discreto $[\overline{\chi}_v] \in \Sigma_{A/\Omega A}(Q/Q')$, o que é uma contradição. Logo $[\overline{\chi}] \in \Sigma_A(Q) = \Sigma_{A/\Omega A}(Q/Q')$. ■

Capítulo 3

Σ^2-Invariante para Grupos Abelianos-por-nilpotente de classe 2 de Tipo FP_2

O objetivo deste capítulo é demonstrar o primeiro teorema principal desta tese, Teorema 3.38. A demonstração é bastante longa e técnica, portanto será dividida em várias seções.

3.1 Uma filtração de A

Seja $G = A \rtimes Q$ finitamente gerado onde A é abeliano, Q nilpotente de classe 2. Aqui vemos A como um $\mathbb{Z}Q$-módulo à esquerda via conjugação. Como G é finitamente gerado e $Q = G/A$ é finitamente apresentável como grupo, A é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo.

Vamos assumir que A é 2-*tame* como um $\mathbb{Z}Q$-módulo, isto é,

$$\Sigma^c_A(Q) \cap -\Sigma^c_A(Q) = \emptyset \Leftrightarrow 0 \notin \Sigma^c_A(Q) + \Sigma^c_A(Q)$$

e fixamos um carater

$$\varphi \in Hom_{\mathbb{Z}}(Q, \mathbb{R}) \setminus \{0\} \text{ tal que } [\varphi] \notin \Sigma^c_A(Q) + \Sigma^c_A(Q).$$

Como $[\varphi] \notin \Sigma^c_A(Q)$ temos que $[\varphi] \in \Sigma_A(Q)$, portanto existe um subconjunto finito $\{a_1, \ldots, a_s\}$ de A tal que $A = \mathbb{Z}Q_\varphi a_1 + ... + \mathbb{Z}Q_\varphi a_s$.

Vamos denotar $\Omega = Aug(\mathbb{Z}Q')$ e ainda mais vamos supor que Q' age nilpotentemente sobre A, o que induz uma filtração de $\mathbb{Z}Q$-módulos de A dada por

$$0 = \Omega^m A \subseteq \Omega^{m-1}A \subseteq ... \subseteq \Omega^2 A \subseteq \Omega A \subseteq A, \tag{3.1}$$

Recordamos que pelo Lema 2.3 $[\varphi] \notin \Sigma^c_A(Q) = \Sigma^c_{\frac{A}{\Omega A}}(Q) \supseteq \Sigma^c_{\frac{\Omega^i A}{\Omega^{i+1}A}}(Q)$. Portanto

$$[\varphi] \in \Sigma_{\frac{A}{\Omega A}}(Q) \subseteq \Sigma_{\frac{\Omega^i A}{\Omega^{i+1}A}}(Q) = \Sigma_{\frac{\Omega^i A}{\Omega^{i+1}A}}(Q/Q'). \tag{3.2}$$

Na ultima igualdade nos usamos os fatos que $S(Q) = S(Q/Q')$ e que Q' age trivialmente sobre $\Omega^i A/\Omega^{i+1}A$.

Agora, considere

$$V = \oplus_{i=0}^{m-1} \frac{\Omega^i A}{\Omega^{i+1}A}$$

que por (3.2) é um $\mathbb{Z}Q_\varphi$-módulo finitamente gerado. Observe que Q' age trivialmente sobre V. Então temos que

$$[\varphi] \in \Sigma_{\frac{A}{\Omega A}}(Q) \subseteq \cup_i \Sigma_{\frac{\Omega^i A}{\Omega^{i+1}A}}(Q) = \Sigma_V(Q) = \Sigma_V(Q/Q').$$

Logo, pelo Lema 2.5 existe $\widetilde{\lambda}_0 \in C_{\mathbb{Z}(Q/Q')}(V)$ tal que $\forall\ \widetilde{q} \in supp(\widetilde{\lambda}_0)$, $\varphi(\widetilde{q}) > 0$, onde aqui identificamos φ com o caracter $Q/Q' \to \mathbb{R}$ induzido por φ. Agora tome $\lambda_0 \in \mathbb{Z}Q$ tal que a projeção canônica

$$\mathbb{Z}Q \to \mathbb{Z}(Q/Q')$$

envia λ_0 a $\widetilde{\lambda}_0$, assim $\forall q \in supp(\lambda_0)$, $\varphi(q) > 0$. Então, $(1 - \lambda_0)(\Omega^i A/\Omega^{i+1}A) = 0$, i.e.

$$(1 - \lambda_0)\Omega^i A \subseteq \Omega^{i+1}A. \tag{3.3}$$

Lema 3.1. *Existe um subconjunto finito $B \subseteq A$, $B = \cup_{0 \le i \le m-1} B_i$, onde $B_i \subseteq \Omega^i A$ tal que:*
1) a imagem de B_i em $\frac{\Omega^i A}{\Omega^{i+1}A}$ gera $\frac{\Omega^i A}{\Omega^{i+1}A}$ como $\mathbb{Z}Q_\varphi$-módulo.
2) $(1 - \lambda_0)b \in B_{i+1} \cup \{0\}$ para cada $b \in B_i$, $0 \le i \le m - 1$.

Demonstração. Por (3.2) $\frac{\Omega^i A}{\Omega^{i+1}A}$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q_\varphi$-módulo, logo podemos

tomar X_i, um subconjunto finito de $\Omega^i A$, tal que sua imagem em $\frac{\Omega^i A}{\Omega^{i+1} A}$ gera $\frac{\Omega^i A}{\Omega^{i+1} A}$ como $\mathbb{Z}Q_\varphi$-módulo.

Tome agora

$$B = \cup_{0\leq i\leq m-1}(X_i \cup \left\{(1-\lambda_0)^j X_i\right\}_{j\geq 1}),$$

e recordamos que $X_i \subseteq \Omega^i A$. Segue facilmente usando indução por j e (3.3) que $(1-\lambda_0)^j X_i \subseteq \Omega^{j+i} A$. Observando que $\Omega^{j+i} A = 0$ para $j+i \geq m$ deduzimos que B é finito.

Finalmente definimos

$$B_i = \cup_{z\geq 0, k\geq 0, z+k=i}(1-\lambda_0)^z X_k$$

■

Pela definição de B_i, B_{i+1},.. no lema anterior temos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}Q_\varphi B_i + \Omega^{i+1} A &= \Omega^i A \\
\mathbb{Z}Q_\varphi B_{i+1} + \Omega^{i+2} A &= \Omega^{i+1} A, \\
\mathbb{Z}Q_\varphi B_{i+2} + \Omega^{i+3} A &= \Omega^{i+2} A, \\
&\vdots \\
\mathbb{Z}Q_\varphi B_{m-1} + \underbrace{\Omega^m A}_{0} &= \Omega^{m-1} A,
\end{aligned}$$

e portanto

$$\mathbb{Z}Q_\varphi B_{i+1} + \mathbb{Z}Q_\varphi B_{i+2} + \cdots + \mathbb{Z}Q_\varphi B_{m-1} = \Omega^{i+1} A. \tag{3.4}$$

Agora, como Q é finitamente gerado nilpotente de classe 2, Q é policíclico, assim cada subgrupo de Q é policíclico, em particular o comutador Q' é policíclico, e portanto, finitamente gerado. Assim

$$Q' = \left\langle q^{(1)}, q^{(2)}, ..., q^{(r)} \right\rangle. \tag{3.5}$$

Como Q' age trivialmente sobre o quociente $\frac{\Omega^i A}{\Omega^{i+1} A}$, aumentando B se necessário (mas deixando B finito ainda), podemos supor que para cada $b \in B_i$ e $q^{(j)}$ gerador de Q', existe $b_1 \in B_{i+1} \cup \{0\}$ (dependendo de j e b) tal que:

$$(q^{(j)} - 1)b = b_1. \tag{3.6}$$

Observação 3.2. Por razões técnicas, mais adiante vamos precisar que o conjunto $\{q^{(1)}, ..., q^{(r)}\}$ seja fechado por inversos, isto é, $(q^{(i)})^{-1} \in \{q^{(1)}, ..., q^{(r)}\}$, $\forall 1 \leq i \leq r$.

Corolário 3.3. *Existe um subconjunto finito B de A que satisfaz o Lema 3.1 e a relação (3.6).*

3.2 Um grupo livre com Q_φ-ação e enunciado do Teorema 3.5

Fixamos um conjunto finito B que satisfaz Corolário 3.3.

Definição 3.4. Seja $F = F(Y)$ um grupo livre com base $Y = \{{}^q b \,|\, b \in B, q \in Q_\varphi\}$. Vemos Y com uma Q_φ-ação à esquerda definida por ${}^{q_1}({}^{q_2}b) = {}^{(q_1 q_2)}\, b$, onde a ação de Q_φ é livre (i.é., ${}^q b = b$ para um $q \in Q_\varphi$ implica $q = 1$) e defina também

$$\pi : F \longrightarrow A$$

homomorfismo tal que $\pi({}^q b) = {}^q b = qbq^{-1}$, onde $b \in B = \bigcup_{0 \le i \le m-1} B_i$, $q \in Q_\varphi$.

Um dos resultados principais do Capítulo 3 será o seguinte resultado:

Teorema 3.5. *Suponha que* $[\varphi] \notin conv_{\le 2}\Sigma^c_A(Q)$. *Então existe um subconjunto finito* $X_{A,B}$ *de* $F(Y)$ *tal que* $X_{A,B} \subseteq ker(\pi)$ *e* $\left\langle {}^{Q_\varphi} X_{A,B} \right\rangle^{F(Y)} = ker(\pi)$.

A demonstração do Teorema 3.5 será feita por indução sobre o comprimento da cadeia (3.1) e vai depender dos resultados das próximas seções. A demonstração vai ser feita na seção 3.8.

3.3 Uma Q-ação sobre um quociente F/N de F

Recordamos que $(1 - \lambda_0)^m A = 0$, onde λ_0 foi definido em (3.3). Então

$$(1 - \lambda_0)^m = 1 - \textstyle\sum_{i=1}^{t} z_i \widetilde{q_i}, \text{ onde } z_i \in \mathbb{Z} \text{ e } \forall i,\ \varphi(\widetilde{q_i}) > 0.$$

Definição 3.6. Seja q_0 um elemento de $Q_\varphi \setminus ker(\varphi)$ tal que $q_0^{-1} q \in Q_\varphi$ para todo $q \in \bigcup_i supp(\lambda_0^i)$ e observe que $Q = \bigcup_{z<0}\ q_0^z Q_\varphi$.

Definição 3.7. Seja N o subgrupo normal de F gerado como subgrupo normal pelo conjunto

$$\left\{{}^{Q_\varphi}(b[({}^{z_1\widetilde{q}_1}b)({}^{z_2\widetilde{q}_2}b)...({}^{z_t\widetilde{q}_t}b)]^{-1})\right\}_{b\in B}$$

Definição 3.8. Seja

$$\mu : F \longrightarrow F/N$$

o homomorfismo de grupos dado por

$$\mu(b) = \prod_{i=1}^{t} {}^{z_i q_0^{-1}\widetilde{q}_i}c, \quad \mu({}^{q}b) = {}^{q_0^{-1}qq_0}\ \mu(b)$$

onde c é a imagem de b em F/N para $b \in B$ e $q \in Q_\varphi$. Observemos que tal homomorfismo μ existe e é único pois F é um grupo livre com base Y. Definimos C como a imagem de B em F/N.

Lema 3.9. *Temos que $N \subseteq ker(\mu)$ e portanto μ induz um homomorfismo*

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu} : F/N &\longrightarrow F/N \\ c &\longmapsto \prod_{i=1}^{t} {}^{z_i q_0^{-1}\widetilde{q}_i}c \end{aligned} \tag{3.7}$$

tal que para $q \in Q_\varphi$ temos

$$\widetilde{\mu}({}^{q}c) = ({}^{z_1 q_0^{-1}q\widetilde{q}_1}c)({}^{z_2 q_0^{-1}q\widetilde{q}_2}c)...({}^{z_t q_0^{-1}q\widetilde{q}_t}c).$$

Demonstração. Para mostrar que $N \subseteq ker(\mu)$, basta mostrar que para $q \in Q_\varphi$, temos

$$\mu({}^{q}(b[({}^{z_1\widetilde{q}_1}b)({}^{z_2\widetilde{q}_2}b)...({}^{z_t\widetilde{q}_t}b)]^{-1})) = 1,$$

que é equivalente a

$$\mu({}^{q}b) = \mu({}^{z_1 q\widetilde{q}_1}b)\mu({}^{z_2 q\widetilde{q}_2}b)...\mu({}^{z_t q\widetilde{q}_t}b).$$

Mas, por definição,

$$\mu({}^{q}b) = ({}^{z_1 q_0^{-1}q\widetilde{q}_1}c)({}^{z_2 q_0^{-1}q\widetilde{q}_2}c)...({}^{z_t q_0^{-1}q\widetilde{q}_t}c)$$

e assim, basta verificar que

$$\mu({}^{q\widetilde{q_i}}b) = {}^{q_0^{-1}q\widetilde{q_i}}\ c. \tag{3.8}$$

Observamos que

$$\mu({}^{q\widetilde{q_i}}b) = ({}^{z_1q_0^{-1}(q\widetilde{q_i})\widetilde{q_1}}c)({}^{z_2q_0^{-1}(q\widetilde{q_i})\widetilde{q_2}}c)...({}^{z_tq_0^{-1}(q\widetilde{q_i})\widetilde{q_t}}c).$$

Ainda mais, $q_0^{-1}q\widetilde{q_i} \in Q_\varphi$ pois $q \in Q_\varphi$ e $q_0^{-1}\widetilde{q_i} \in Q_\varphi$ e $c = (({}^{z_1\widetilde{q_1}}c)({}^{z_2\widetilde{q_2}}c)...({}^{z_t\widetilde{q_t}}c))$ em F/N implicam

$${}^{q_0^{-1}q\widetilde{q_i}}c = {}^{q_0^{-1}q\widetilde{q_i}}\ (({}^{z_1\widetilde{q_1}}c)({}^{z_2\widetilde{q_2}}c)...({}^{z_t\widetilde{q_t}}c)).$$

Isto prova (3.8) e portanto $N \subseteq ker(\mu)$. ■

Lema 3.10. *Existe uma única ação de Q sobre F/N que estende a ação de Q_φ e*

$${}^{q_0^{-1}}c = \widetilde{\mu}(c) \text{ para cada } c \in C,$$

portanto ${}^{q_0^{-k}}c = \widetilde{\mu}^k(c)$.

Demonstração. Como $Q = \cup_{z<0} q_0^z Q_\varphi$, precisamos mostrar que $\widetilde{\mu}$ é um automorfismo de F/N com inversa dada pela ação à esquerda de q_0, isto é,

$${}^{q_0}(\widetilde{\mu}({}^{q}c)) = {}^{q}c; \ \ \widetilde{\mu}({}^{q_0q}c) = {}^{q}c, \ \ \forall q \in Q_\varphi, c \in C.$$

Como $\widetilde{\mu}$ é induzido por μ, temos que $\widetilde{\mu}$ é homomorfismo. Sejam ${}^{q}c \in F/N$, com $q \in Q_\varphi$ e $c \in C$. Então

$${}^{q_0}(\widetilde{\mu}({}^{q}c)) = {}^{q_0}\ [({}^{z_1q_0^{-1}q\widetilde{q_1}}c)({}^{z_2q_0^{-1}q\widetilde{q_2}}c)...({}^{z_tq_0^{-1}q\widetilde{q_t}}c)] =$$

$$({}^{z_1q\widetilde{q_1}}c)({}^{z_2q\widetilde{q_2}}c)...({}^{z_tq\widetilde{q_t}}c) = {}^{q}[({}^{z_1\widetilde{q_1}}c)({}^{z_2\widetilde{q_2}}c)...({}^{z_t\widetilde{q_t}}c)] = {}^{q}c,$$

pois $c = ({}^{z_1\widetilde{q_1}}c)({}^{z_2\widetilde{q_2}}c)...({}^{z_t\widetilde{q_t}}c)$ em F/N. Por outro lado, como $q_0q \in Q_\varphi$, temos

$$\widetilde{\mu}({}^{q_0q}c) = ({}^{z_1q_0^{-1}(q_0q)\widetilde{q_1}}c)({}^{z_2q_0^{-1}(q_0q)\widetilde{q_2}}c)...({}^{z_tq_0^{-1}(q_0q)\widetilde{q_t}}c) =$$

$$({}^{z_1q\widetilde{q_1}}c)({}^{z_2q\widetilde{q_2}}c)...({}^{z_tq\widetilde{q_t}}c) = {}^{q}[({}^{z_1\widetilde{q_1}}c)({}^{z_2\widetilde{q_2}}c)...({}^{z_t\widetilde{q_t}}c)] = {}^{q}c.$$

■

3.4 Contas em F/N

Nesta seção vamos fazer bastante contas no grupo F/N. Vamos usar muitas vezes sem citar as seguintes propriedades básicas de comutadores em qualquer grupo, onde $[g,h] =: g^{-1}h^{-1}gh$, ${}^{g}h = ghg^{-1}$, $h^{g} = g^{-1}hg$:

1. $[g, h_1h_2] = [g, h_2]([g, h_1]^{h_2}) = [g, h_2][g, h_1][g, h_1, h_2]$
2. $[g_1g_2, h] = ([g_1, h]^{g_2})[g_2, h] = [g_1, h][g_1, h, g_2][g_2, h]$
3. ${}^{h}[g_1, g_2] = [{}^{h}g_1, {}^{h}g_2]$.
4. $gh = hg[g, h]$.

Antes de fazer as contas prometidas precisamos de algumas definições.

Definição 3.11. Seja $\alpha \neq 1$ um elemento de F/N. Fixando uma decomposição de α como produto de ${}^{z_{q,c}q}c$, $z_{q,c} \in \mathbb{Z} \setminus 0$, $q \in Q_\varphi$ e $c \in C$. Dizemos que $supp(\alpha)$ contém todos os $q's$ e $c's$ do produto $\prod {}^{z_{q,c}q}c$, onde ${}^{z_{q,c}q}c = ({}^{q}c)^{z_{q,c}}$, $z_{q,c} \neq 0$.

Definição 3.12. Diremos que $c < \widetilde{c}$ quando $c \in C_i \setminus C_{i+1}$, $\widetilde{c} \in C_j \setminus C_{j+1}$ e $i > j$, onde C_i é a imagem de B_i em F/N. Dizemos que $c \leq \widetilde{c}$ quando $c \in C_i \setminus C_{i+1}$, $\widetilde{c} \in C_j \setminus C_{j+1}$ e $i \geq j$. Observamos que $c \leq \widetilde{c}$ **não** significa $c < \widetilde{c}$ ou $c = \widetilde{c}$. Definimos do mesmo jeito $b < \widetilde{b}$ para elementos $b, \widetilde{b}$ de B.

Definição 3.13. Defina M como sendo o subgrupo normal de F/N gerado como subgrupo normal pelas Q_φ-órbitas de

$$g_{(c,j)} = \{({}^{q^{(j)}}c)^{-1}cc_1\} \subseteq ker(\pi), \tag{3.9}$$

onde c_1, c são as imagens de b_1 e b da equação (3.6) em C e b percorre todos os elementos de B. Recordamos que C é a imagem de B em F/N e observamos que na equação acima $c_1 < c$.

Definição 3.14. Seja $d \in C$ fixo, defina $\widetilde{M_d}$ como sendo o subgrupo normal de F/N gerado como subgrupo normal pelas Q'-órbitas de

$$\{({}^{q^{(j)}}c)^{-1}cc_1\} \subseteq ker(\pi), \tag{3.10}$$

onde c percorre todos os elementos de C tais que $c \leq d$ e c_1, c são as imagens de b_1 e b de (3.6) em C. Observamos que na equação acima $c_1 < c$.

Lema 3.15. *Sejam $\omega \in Q'$ e $c \in C_i$. Então em F/N temos*

$$^{\omega}c \equiv c \prod_{\{\widetilde{c}\in C, \widetilde{c}<c\}\cup\{\widetilde{c}=1\}} \widetilde{c}^{\pm 1} \quad mod\ \widetilde{M}_c,$$

onde no produto pode ter repetição de $\tilde{c}$ e não precisa aparecer cada $\tilde{c}$ tal que $\tilde{c} < c$, isto é, $c^{-1}(^{\omega}c)$ pertence ao subgrupo de F/N gerado por $\{\tilde{c}\}_{\tilde{c}<c}$ e $\widetilde{M}_c$.

Demonstração. Faremos a demonstração por indução sobre o comprimento, $\ell(\omega)$ ou simplesmente ℓ, de ω como palavra, ou seja, $\omega = q^{(j_1)^{\epsilon_1}}...q^{(j_\ell)^{\epsilon_\ell}}$, onde $\epsilon_i = \pm 1$ e $q^{(j_i)} \in \left\{q^{(1)}, ..., q^{(s)}\right\}$. Assim, para $\ell = 1$ tome $\omega \in \left\{q^{(1)}, ..., q^{(s)}, {q^{(1)}}^{-1}, ..., {q^{(s)}}^{-1}\right\}$, pela definição 3.14 e observação 3.2 página 47 temos em F/N

$$^{\omega}c = cc_1^{\pm 1} \quad mod\ \widetilde{M}_c.$$

Para $\ell > 1$ temos que

$$\omega = \underbrace{q^{(j_1)^{\epsilon_1}}...q^{(j_{\ell-1})^{\epsilon_{\ell-1}}}}_{\eta_1}\underbrace{q^{(j_\ell)^{\epsilon_\ell}}}_{\eta_2}.$$

Logo, usando que $\eta_1,\ \eta_2 \in Q' \subseteq Q_\varphi$ e pela indução temos

$$^{\omega}c = {}^{\eta_1\eta_2}\ c = {}^{\eta_1}\ (^{\eta_2}c) \equiv {}^{\eta_1}\left(c \prod_{\{\widetilde{c}\ \in\ C, \widetilde{c}\ <\ c\}\ \cup\ \{\widetilde{c}\ =\ 1\}} \widetilde{c}^{\pm 1}\right) =$$

$$= (^{\eta_1}c)\left(^{\eta_1}\left(\prod_{\{\widetilde{c}\ \in\ C, \widetilde{c}\ <\ c\}\ \cup\ \{\widetilde{c}\ =\ 1\}} \widetilde{c}^{\pm 1}\right)\right) = \left(c \prod_{\{\alpha\ \in\ C, \alpha\ <\ c\}\ \cup\ \{\alpha\ =\ 1\}} \alpha^{\pm 1}\right)\left(\prod_{\{\beta\ \in\ C, \beta\ <\ c\}\ \cup\ \{\beta\ =\ 1\}} \beta^{\pm 1}\right) =$$

$$= c \prod_{\{\gamma\ \in\ C, \gamma\ <\ c\}\ \cup\ \{\gamma\ =\ 1\}} \gamma^{\pm 1} \quad mod\ \widetilde{M}_c.$$

■

Lema 3.16. *Seja H_d o subgrupo de F/N gerado por $\{^{Q_\varphi}c\}$, onde $c \in C$, $c \leq d$, para $d \in C$ fixado. Então $^{q_0^{-1}}H_d \subseteq H_d$.*

Demonstração. Segue da definição da ação de q_0^{-1} sobre F/N dada pelo Lema 3.10. ■

Corolário 3.17. *O subgrupo de F/N gerado pelos H_d-conjugados de $\left\{^{Q_\varphi}c\right\}$, onde $c \in C$ com $c \leq d$, d fixo, é q_0^{-1}-invariante.*

Lema 3.18. *Sejam*

$$\prod_{q\in Q_\varphi,\, r_{q,j}\in\mathbb{Z},\, c_j\in C} {}^{r_{q,j}q}c_j = \alpha$$

um elemento de F/N e $d \in supp(\alpha)\cap C$ tal que para cada $c \in supp(\alpha)\cap C$ temos $c \leq d$. Então

$${}^{q_0^{-1}}\alpha = \left(\prod_{i=1}^{t} {}^{z_i q_0^{-1}\widetilde{q_i}}\alpha\right).f_1.f_2.f_3, \tag{3.11}$$

onde

1. *f_1 é um produto de H_d-conjugados de elementos $[{}^{q_0^{-1}\widetilde{q_i}q_1}c_{j_1}, {}^{q_0^{-1}\widetilde{q_j}q_2}c_{j_2}]$, com $q_1, q_2 \in supp(\alpha)\cap Q$, c_{j_1}, c_{j_2} percorrem os elementos de C tais que c_{j_1}, $c_{j_2} \leq d$;*

2. *f_2 é um produto de elementos de $\{{}^{q_0^{-1}\widetilde{q_i}q_1}\widetilde{c}\}$, onde $\widetilde{c}$ percorre os elementos de C tais que $\widetilde{c} < d$ ou $\widetilde{c} = 1$ e $q_1 \in supp(\alpha)\cap Q$;*

3. *$f_3 \in \left\langle \bigcup_{i,q} {}^{q_0^{-1}\widetilde{q_i}q}\widetilde{M}_d \right\rangle$ onde $q \in supp(\alpha)\cap Q$, $1 \leq i \leq t$.*

Observamos que em geral o elemento d não precisa ser único, mas H_d não depende da escolha de d, chamamos d um elemento maximal de $supp(\alpha)\cap C$. Recordamos que os elementos $\{\widetilde{q_i}\}_{1\leq i\leq t}$ foram definidos no paragrafo antes da Definição 3.6.

Demonstração. Usando a definição de ação de q_0^{-1} sobre F/N, dada por $\widetilde{\mu}$, e o fato que $q_0^{-1}\widetilde{q_i} \in Q_\varphi$, $q \in Q_\varphi$, portanto $q_0^{-1}\widetilde{q_i}q \in Q_\varphi$ temos:

$$\begin{aligned} {}^{q_0^{-1}}\alpha = {}^{q_0^{-1}}\left(\prod_{q\in Q_\varphi,\, r_{q,j}\in\mathbb{Z},\, c_j\in C} {}^{r_{q,j}q}c_j\right) = \left(\prod_{q\in Q_\varphi,\, r_{q,j}\in\mathbb{Z},\, c_j\in C} {}^{r_{q,j}q_0^{-1}q}c_j\right) = \\ = \prod_{q\in Q_\varphi,\, r_{q,j}\in\mathbb{Z},\, c_j\in C}\ \prod_i {}^{z_i r_{q,j} q_0^{-1}qq_0q_0^{-1}\widetilde{q_i}}c_j = \prod_{q\in Q_\varphi,\, r_{q,j}\in\mathbb{Z},\, c_j\in C}\ \prod_i {}^{z_i r_{q,j} q_0^{-1}q\widetilde{q_i}}c_j. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Observamos que

$${}^{z_i q_0^{-1}\widetilde{q_i}}\alpha = \prod_{q\in Q_\varphi,\, r_{q,j}\in\mathbb{Z},\, c_j\in C} {}^{z_i r_{q,j} q_0^{-1}\widetilde{q_i}q}c_j$$

e assim

$$\prod_{i=1}^{t} {}^{z_i q_0^{-1}\widetilde{q_i}}\alpha = \prod_{i=1}^{t}\ \prod_{q\in Q_\varphi,\, r_{q,j}\in\mathbb{Z},\, c_j\in C} {}^{z_i r_{q,j} q_0^{-1}\widetilde{q_i}q}c_j. \tag{3.13}$$

Definimos $\omega_{i,q} \in Q'$ por

$$q\widetilde{q_i} = \widetilde{q_i} q \omega_{i,q}. \tag{3.14}$$

Então pelo Lema 3.15, temos em F/N

$${}^{\omega_{i,q}}c_j \equiv c_j \prod_{\{\widetilde{c}\in C, \widetilde{c}<c_j\}\cup\{\widetilde{c}=1\}} \widetilde{c}^{\pm 1} \ \ mod\ \widetilde{M}_{c_j}$$

com $\widetilde{M}_{c_j} \subseteq \widetilde{M}_d$ pois $c_j \leq d$, portanto

$${}^{\omega_{i,q}}c_j \equiv c_j \prod_{\{\widetilde{c}\in C, \widetilde{c}<d\}\cup\{\widetilde{c}=1\}} \widetilde{c}^{\pm 1} \ \ mod\ \widetilde{M}_d \tag{3.15}$$

Observamos que $q \in Q_\varphi$, $q_0^{-1}\widetilde{q_i} \in Q_\varphi$, logo $q_0^{-1}\widetilde{q_i}q \in Q_\varphi$. Usando a definição de $\widetilde{M}_d$ e (3.15) obtemos

$${}^{q_0^{-1}\widetilde{q_i}q\omega_{i,q}}c_j \equiv {}^{q_0^{-1}\widetilde{q_i}q}\, c_j \prod_{\{\widetilde{c}\in C, \widetilde{c}<d\}\cup\{\widetilde{c}=1\}} {}^{q_0^{-1}\widetilde{q_i}q}\widetilde{c}^{\pm 1} \ \ mod\ {}^{q_0^{-1}\widetilde{q_i}q}\widetilde{M}_d.$$

Mas pela equação (3.14),

$${}^{q_0^{-1}q\widetilde{q_i}}c_j = {}^{q_0^{-1}\widetilde{q_i}q\omega_{i,q}}\, c_j,$$

assim

$${}^{q_0^{-1}q\widetilde{q_i}}c_j \equiv {}^{q_0^{-1}\widetilde{q_i}q}\, c_j \prod_{\{\widetilde{c}\in C, \widetilde{c}<d\}\cup\{\widetilde{c}=1\}} {}^{q_0^{-1}\widetilde{q_i}q}\widetilde{c}^{\pm 1} \ \ mod\ {}^{q_0^{-1}\widetilde{q_i}q}\widetilde{M}_d. \tag{3.16}$$

Portanto, por (3.12), (3.13) e (3.16), temos em F/N

$${}^{q_0^{-1}}\alpha \equiv \left(\prod_{i=1}^{t} {}^{z_i q_0^{-1}\widetilde{q_i}}\alpha\right).f_1.f_2 \quad mod\ \langle \cup_{1\leq i\leq t}^{q_0^{-1}\widetilde{q_i}q}\widetilde{M}_d\rangle,$$

onde f_1 é um produto de H_d-conjugados de elementos $[{}^{q_0^{-1}\widetilde{q_i}q_1}c_{j_1}, {}^{q_0^{-1}\widetilde{q_j}q_2}c_{j_2}]$, com $q_1, q_2 \in supp(\alpha) \cap Q$, c_{j_1}, c_{j_2} percorrem os elementos de C tais que c_{j_1}, $c_{j_2} \leq d$ e f_2 é um produto de elementos de $\{{}^{q_0^{-1}\widetilde{q_i}q_1}\widetilde{c}\}$, onde $q_1 \in supp(\alpha) \cap Q$, $\widetilde{c} \in C$ com $\widetilde{c} < d$ ou $\widetilde{c} = 1$. ■

O seguinte corolário será usado na demonstração do Teorema 3.36.

Corolário 3.19. *Seja $f \in F/N$ uma relação de A. Temos que ${}^{q_0^{-1}}f = \zeta_1(f)\zeta_2(f)$, onde $\zeta_1(f)$ pertence ao subgrupo normal de F/N gerado por:*

1) $\{{}^{Q_\varphi}f\}$;

2) $\{{}^{Q_\varphi}[{}^{q'}c, {}^{q''}c']\}$*, onde* $c, c' \in C$*,* $q', q'' \in Q$*;*

3) elementos de M.

Ainda mais $\zeta_2(f)$ *é uma relação de A que é produto de elementos de* $\{{}^{Q_\varphi}\widetilde{c}\}$ *para* $\widetilde{c}$ *< um elemento maximal de* $C \cap supp(f)$*; isto implica que* $\zeta_2(f)$ *é uma relação em* ΩA*.*

Lema 3.20. *Seja*

$$\prod_{q \in Q_\varphi,\, r_{q,j} \in \mathbb{Z},\, c_j \in C} {}^{r_{q,j}q}c_j = \alpha$$

um elemento de F/N, m_0 *um inteiro positivo e d um elemento maximal de* $supp(\alpha) \cap C$*. Então* ${}^{q_0^{-m_0}}\alpha$ *pertence ao subgrupo de F/N gerado por:*

1. $\left\{ {}^{q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_1} q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_2} \cdots q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_{m_0}}}\alpha \right\}$ *onde* $1 \leq i_1, i_2, ..., i_{m_0} \leq t$*;*

2. $\left\{ {}^{(q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_1})\ldots(q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_{m_0}})q\widehat{q}_1\ldots\widehat{q}_{m_0-1}}\widetilde{c} \right\}$ *onde* $1 \leq i_1, i_2, ..., i_{m_0} \leq t$*,* $q \in supp(\alpha) \cap Q$*,* $\widehat{q}_i \in Q'$ *e* $\widetilde{c} \in C$ *tal que* $\widetilde{c} < d$*;*

3. H_d*-conjugados de* $\left\{ [{}^{q_1}c_1, {}^{q_2}c_2] \right\}$ *para todos elementos* $c_1, c_2 \in C$ *tais que* $c_1, c_2 \leq d$*,* $q_i = (q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_1})\ldots(q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_{m_0}})q\widehat{q}_1\ldots\widehat{q}_{m_0-1}$*, onde* $1 \leq i_1, i_2, ..., i_{m_0} \leq t$*,* $q \in supp(\alpha) \cap Q$ *e* $\widehat{q}_i \in Q'$*;*

4. ${}^{q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_1}\ldots q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_{m_0}}q\widehat{q}_1\ldots\widehat{q}_{m_0-1}}\widetilde{M}_d$ *onde* $1 \leq i_1, i_2, ..., i_{m_0} \leq t$*,*$q \in supp(\alpha) \cap Q$ *e* $\widehat{q}_i \in Q'$*.*

Observe que como Q' *é subgrupo, o produto* $\widehat{q}_1\ldots\widehat{q}_{m_0-1}$ *pode ser trocado com um elemento de* Q'*.*

Demonstração. Faremos a demonstração por indução sobre m_0.

O primeiro passo da indução é o Lema 3.18, onde $m_0 = 1$. Suponha que o resultado é verdadeiro para m_0 e vamos mostrar que também é verdade o caso $m_0 + 1$. Assim temos que

$${}^{q_0^{-m_0-1}}\alpha = {}^{q_0^{-m_0}}({}^{q_0^{-1}}\alpha) = {}^{q_0^{-m_0}}\left(\left(\prod_i {}^{z_i q_0^{-1}\widetilde{q}_i}\alpha\right) f_1.f_2.f_3\right) =$$

$$= \left({}^{q_0^{-m_0}}\left(\prod_i {}^{z_i q_0^{-1}\widetilde{q}_i}\alpha\right)\right).({}^{q_0^{-m_0}}f_1).({}^{q_0^{-m_0}}f_2).({}^{q_0^{-m_0}}f_3)$$

onde f_1, f_2 e f_3 são como no Lema 3.18.

Logo, temos 4 casos:

1) Por indução, ${}^{q_0^{-m_0}}\underbrace{\left(\prod_i {}^{z_i q_0^{-1}\widetilde{q}_i}\alpha\right)}_{\beta}$ é o produto de elementos do tipo 1,2,3 e 4 do Lema 3.20 com β no lugar de α. Vamos mostrar que esses elementos são do tipo 1,2,3 e 4 para α e m_0+1.

1.1) Consideremos ${}^{q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_1}\cdots q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_{m_0}}}\beta$. Substituindo β por $\prod_i {}^{z_i q_0^{-1}\widetilde{q}_i}\alpha$ temos

$$ {}^{q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_1}\cdots q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_{m_0}}}\left(\prod_i {}^{z_i q_0^{-1}\widetilde{q}_i}\alpha\right) = \prod_i {}^{z_i q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_1}\cdots q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_{m_0}} q_0^{-1}\widetilde{q}_i}\alpha $$

que é um produto de elementos do tipo 1 do enunciado do Lema para α e m_0+1.

1.2) Consideremos elementos de tipo $\left\{{}^{(q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_1})\ldots(q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_{m_0}})q\widehat{q}_1\ldots\widehat{q}_{m_0-1}\widetilde{c}}\right\}$ para $1\leq i_1,i_2,\ldots,i_{m_0}\leq t$, $q\in supp(\beta)\cap Q$, $\widehat{q_i}\in Q'$ e $\widetilde{c}\in C$ tal que $\widetilde{c}<$ um elemento maximal de $C\cap supp(\beta)$. Como $C\cap supp(\beta)=C\cap supp(\alpha)$ temos $\widetilde{c}<d$. Como $q\in supp(\beta)\cap Q$ temos que $q=q_0^{-1}\widetilde{q}_i\overline{q}$ onde $\overline{q}\in supp(\alpha)\cap Q$. Assim temos elementos de tipo 2 do enunciado do Lema para α e m_0+1.

1.3) Consideremos H_d-conjugados de elementos $[{}^{q_1}c_1,{}^{q_2}c_2]$ com $q_i=(q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_1})\ldots(q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_{m_0}})q\widehat{q}_1\ldots\widehat{q}_{m_0-1}$, $q\in supp(\beta)\cap Q$ e $\widehat{q_i}\in Q'$. Mas como $q\in supp(\beta)\cap Q$, temos que $q=q_0^{-1}\widetilde{q}_i\overline{q}$ com $\overline{q}\in supp(\alpha)\cap Q$. Portanto temos elementos do tipo 3 do enunciado do Lema para α e m_0+1.

1.4) Consideremos elementos de ${}^{q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_1}\cdots q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_{m_0}}q\widehat{q}_1\cdots\widehat{q}_{m-1}}\widetilde{M}_c$ com $q\in supp(\beta)\cap Q$ e c um elemento maximal de $C\cap supp(\beta)=C\cap supp(\alpha)$, portanto podemos supor que $c=d$. Mas como $q\in supp(\beta)\cap Q$ temos que $q=q_0^{-1}\widetilde{q}_i\overline{q}$ com $\overline{q}\in supp(\alpha)\cap Q$. Logo esses elementos são do tipo 4 do enunciado do Lema para α e m_0+1.

2) Consideremos o elemento ${}^{q_0^{-m_0}}f_1$.

Podemos supor que $f_1={}^h[{}^{q_0^{-1}\widetilde{q}_iq_1}c_1,{}^{q_0^{-1}\widetilde{q}_jq_2}c_2]$ com $q_1,q_2\in supp(\alpha)\cap Q$ e $h\in H_d$. Assim

$$ {}^{q_0^{-m_0}}f_1={}^{{}^{q_0^{-m_0}}h}([q_0^{-m_0}[{}^{q_0^{-1}\widetilde{q}_iq_1}c_1,{}^{q_0^{-1}\widetilde{q}_jq_2}c_2]). $$

Observando que pelo Lema 3.16 ${}^{q_0^{-1}}h\in H_d$.

Seja $\beta=[{}^{q_0^{-1}\widetilde{q}_iq_1}c_1,{}^{q_0^{-1}\widetilde{q}_iq_2}c_2]$, por indução ${}^{q_0^{-m_0}}\beta$ é o produto de elementos do tipo 1,2,3 e 4 com α substituído por β. Novamente queremos mostrar que esses elementos são do

tipo 3 e 4 para α e m_0+1. Aqui não queremos elementos de tipo 1 ou 2 pois no tipo 1 ou 2 não permitimos conjugação com elemento de H_d e na conta acima ${}^{q_0^{-1}}h \in H_d$. Isto implicaria que o elemento ${}^{q_0^{-m_0}}f_1$ é um produto de elementos do tipo 3 ou 4 para α e m_0+1. Infelizmente aplicando direto a indução para o elemento β daria problemas pois apareceriam elementos de tipo 2. Assim vamos aplicar indução para outros elementos.

Seja

$$\beta_{i,k} = {}^{q_0^{-1}\widetilde{q}_i q_k}c_k.$$

Então por indução ${}^{q_0^{-m_0}}\beta_{i,k}$ é produto de elementos dos seguintes tipos :

2.1. $\left\{ {}^{q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_1} q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_2}\ldots q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_{m_0}}}\beta_{i,k} \right\} = \left\{ {}^{q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_1} q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_2}\ldots q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_{m_0}} q_0^{-1}\widetilde{q}_i q_k}c_k \right\}$ para todos possíveis $i_1, i_2, \ldots, i_{m_0}$;

2.2. $\left\{ {}^{(q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_1})\ldots(q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_{m_0}})q\widehat{q}_1\ldots\widehat{q}_{m_0-1}}\widetilde{c} \right\}$ para todos possíveis $i_1, i_2, \ldots, i_{m_0}, q = q_0^{-1}\widetilde{q}_i q_k$ pois $supp(\beta_{i,k}) \cap Q = \{q_0^{-1}\widetilde{q}_i q_k\}$, $\widehat{q}_i \in Q'$ e $\widetilde{c} \in C$ tal que $\widetilde{c} < c_k$ pois $supp(\beta_{i,k}) \cap C = \{c_k\}$.

2.3. H_d-conjugados de $\left\{[{}^{\bar{q}_1}\bar{c}_1, {}^{\bar{q}_2}\bar{c}_2]\right\}$ para todos elementos $\bar{c}_1, \bar{c}_2 \in C$ tais que $\bar{c}_1, \bar{c}_2 \leq c_k$, $\bar{q}_i = (q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_1})\ldots(q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_{m_0}})q\widehat{q}_1\ldots\widehat{q}_{m_0-1}$ para todos possíveis $i_1, i_2, \ldots, i_{m_0}$, $q \in supp(\beta_{i,k}) \cap Q = \{q_0^{-1}\widetilde{q}_i q_k\}$ e $\widehat{q}_i \in Q'$;

2.4. ${}^{q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_1}\ldots q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_{m_0}}q\widehat{q}_1\ldots\widehat{q}_{m_0-1}}\widetilde{M_{c_k}}$ para todos possíveis $i_1, i_2, \ldots, i_{m_0}, q \in supp(\beta_{i,k}) \cap Q = \{q_0^{-1}\widetilde{q}_i q_k\}$ e $\widehat{q}_i \in Q'$.

Observamos que como $c_k \in supp(\alpha) \cap C$ temos que $c_k \leq d$, assim $\widetilde{M_{c_k}} \subseteq \widetilde{M_d}$. Recordamos que por construção $q_k \in supp(\alpha) \cap Q$. Assim

$${}^{q_0^{-m_0}}\beta = [{}^{q_0^{-m_0}}\beta_{i,1}, {}^{q_0^{-m_0}}\beta_{j,2}]$$

com ${}^{q_0^{-m_0}}\beta_{i,1}$ e ${}^{q_0^{-m_0}}\beta_{j,2}$ como produto de elementos descritos em 2.1-2.4, logo temos que ${}^{q_0^{-m_0}}\beta$ é produto de elementos dos seguintes tipos :

a) H_d-conjugados de $\left\{[{}^{g_1}\bar{c}_1, {}^{g_2}\bar{c}_2]\right\}$ para todos elementos $\bar{c}_1, \bar{c}_2 \in C$ tais que $\bar{c}_1, \bar{c}_2 \leq d$, $g_i = (q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_1})\ldots(q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_{m_0+1}})g\widehat{q}_1\ldots\widehat{q}_{m_0-1}$ para todos possíveis $i_1, i_2, \ldots, i_{m_0+1}$, $g \in supp(\alpha) \cap Q$ e $\widehat{q}_i \in Q'$. Estes são elementos de tipo 3 para α e m_0+1 pois podemos colocar $\widehat{q}_{m_0} = 1$.

b) ${}^{q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_1}\ldots q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_{m_0+1}}q\widehat{q}_1\ldots\widehat{q}_{m_0-1}}\widetilde{M_{c_k}}$ para todos possíveis $i_1, i_2, \ldots, i_{m_0+1}, q \in supp(\alpha) \cap Q$ e $\widehat{q}_i \in Q'$. Estes são elementos de tipo 4 para α e m_0+1 pois podemos colocar $\widehat{q}_{m_0} = 1$.

3) Vamos agora analisar ${}^{q_0^{-m_0}}f_2$. Recordamos que f_2 é um produto de elementos de

$\{^{q_0^{-1}\widetilde{q}_i q_1}\widetilde{c}\}$, onde $q_1 \in supp(\alpha) \cap Q$, $\widetilde{c} \in C$, $\widetilde{c} < d$ ou $\widetilde{c} = 1$. Então é suficiente considerar o caso

$$f_2 = {}^{q_0^{-1}\widetilde{q}_i q_1}\ \widetilde{c}.$$

Por indução ${}^{q_0^{-m_0}} f_2$ é produto de elementos dos seguintes tipos :

3.1. $\left\{ {}^{q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_1} q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_2} \cdots q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_{m_0}}} f_2 = {}^{q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_1} q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_2} \cdots q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_{m_0}} q_0^{-1}\widetilde{q}_i q_1}\ \widetilde{c} \right\}$ para todos possíveis $i_1, i_2, ..., i_{m_0}$. Esses são elementos de tipo 2 para α e $m_0 + 1$ pois podemos colocar $\widehat{q_1} = \ldots = \widehat{q}_{m_0} = 1$.

3.2. $\left\{ {}^{(q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_1})\ldots(q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_{m_0}})\widehat{q}\widehat{q}_1 \ldots \widehat{q}_{m_0-1}}\widehat{c} \right\}$ para todos possíveis $i_1, i_2, ..., i_{m_0}$, $\overline{q} \in supp(f_2) \cap Q$, $\widehat{q_i} \in Q'$ e $\widehat{c} \in C$ tal que $\widehat{c} <$ um elemento maximal de $supp(f_2) \cap C$. Como $supp(f_2) \cap C = \widetilde{c}$ e $\widetilde{c} < d$ temos $\widehat{c} < d$. Como $\overline{q} \in supp(f_2) \cap Q$ temos $\overline{q} = q_0^{-1}\widetilde{q}_i q_1$ onde $q_1 \in supp(\alpha) \cap Q$. Esses são elementos de tipo 2 para α e $m_0 + 1$ pois podemos colocar $\widehat{q}_{m_0} = 1$.

3.3. H_d-conjugados de $\left\{[^{\bar{q}_1}\bar{c}_1, {}^{\bar{q}_2}\bar{c}_2]\right\}$ para todos elementos $\bar{c}_1, \bar{c}_2 \in C$ tais que $\bar{c}_1, \bar{c}_2 \leq$ um elemento maximal de $supp(f_2) \cap C$, $\bar{q}_i = (q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_1})\ldots(q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_{m_0}})\widehat{q}\widehat{q}_1 \ldots \widehat{q}_{m_0-1}$ para todos possíveis $i_1, i_2, ..., i_{m_0}$, $\overline{q} \in supp(f_2) \cap Q = \{q_0^{-1}\widetilde{q}_i q_1\}$ e $\widehat{q_i} \in Q'$. Observamos que $\{\widetilde{c}\} = supp(f_2) \cap C$, $\widetilde{c} < d$, portanto $\bar{c}_1, \bar{c}_2 < d$. Assim temos elementos de tipo 3 para α e $m_0 + 1$ pois podemos colocar $\widehat{q}_{m_0} = 1$.

3.4. ${}^{q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_1} \ldots q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_{m_0}} \widehat{q}\widehat{q}_1 \ldots \widehat{q}_{m_0-1}}\widetilde{M_c}$ para todos possíveis $i_1, i_2, ..., i_{m_0}, \overline{q} \in supp(f_2) \cap Q = \{q_0^{-1}\widetilde{q}_i q_1\}$, c um elemento maximal de $supp(f_2) \cap C$ e $\widehat{q_i} \in Q'$. Como $c = \widetilde{c} < d$ temos $\widetilde{M_c} \subseteq \widetilde{M_d}$. Assim temos elementos de tipo 4 para α e $m_0 + 1$ pois podemos colocar $\widehat{q}_{m_0} = 1$.

4) Por último consideremos ${}^{q_0^{-m_0}} f_3$. Observemos que

$$f_3 \in {}^{q_0^{-1}\widetilde{q}_i q}\ \widetilde{M}_d, \text{ onde } \ q \in supp(\alpha) \cap Q. \tag{3.17}$$

Novamente por hipótese, ${}^{q_0^{-m_0}} f_3$ é o produto de elementos do tipo 1,2,3 e 4 com α substituído com f_3. Consideremos abaixo estes elementos.

4.1) Por (3.17) ${}^{q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_1} q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_2} \ldots q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_{m_0}}} f_3 \in {}^{q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_1} \ldots q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_{m_0}} q_0^{-1}\widetilde{q}_i q}\widetilde{M}_d$. Portanto ${}^{q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_1} q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_2} \ldots q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_{m_0}}} f_3$ é um elemento do tipo 4 para α e $m_0 + 1$.

4.2) Consideremos os elementos de $\left\{ {}^{(q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_1})\ldots(q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_{m_0}})\widehat{q}\widehat{q}_1 \ldots \widehat{q}_{m_0-1}}\widetilde{c} \right\}$ para todos possíveis $i_1, i_2, ..., i_{m_0}$, $\overline{q} \in supp(f_3) \cap Q$, $\widehat{q_i} \in Q'$ e $\widetilde{c} \in C$ tal que $\widetilde{c} <$ um elemento maximal de $supp(f_3) \cap C$. Pela definição de $\widetilde{M_d}$, veja Definição 3.14, e por (3.17) qualquer elemento maximal de $supp(f_3) \cap C$ é $\leq d$, assim $\widetilde{c} < d$. Como $\overline{q} \in supp(f_3) \cap Q$ e por (3.17) temos $\overline{q} = q_0^{-1}\widetilde{q}_i q \widehat{q}$

com $\widehat{q} \in \cup_{j,c}(supp(g_{c,j}) \cap Q)Q' \subseteq Q'$, $q \in supp(\alpha) \cap Q$. Portanto temos elementos do tipo 2 para α e $m_0 + 1$.

4.3) Consideremos H_{d_0}-conjugados de elementos $[{}^{q_1}c_1, {}^{q_2}c_2]$, $q_i = q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_1}...q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_{m_0}}\widehat{\overline{q}q}_1...\widehat{q}_{m_0-1}$, $\overline{q} \in supp(f_3) \cap Q$, $\widehat{q_i} \in Q'$, $c_1, c_2 \leq$ um elemento maximal d_0 de $supp(f_3) \cap C$, portanto $d_0 \leq d$, $c_1, c_2 \leq d$ e $H_{d_0} \leq H_d$. Logo, como $\overline{q} \in supp(f_3) \cap Q$ temos $\overline{q} = q_0^{-1}\widetilde{q}_i q\widehat{\overline{q}q}$ com $\widehat{\overline{q}q} \in \cup_{j,c}(supp(g_{c,j}) \cap Q)Q' \subseteq Q'$, $q \in supp(\alpha) \cap Q$. Portanto temos elementos do tipo 3 para α e $m_0 + 1$.

4.4) Consideremos elementos de ${}^{q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_1}...q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_{m_0}}\widehat{\overline{q}q}_1...\widehat{q}_{m-1}}\widetilde{M}_{d_0}$ com $\overline{q} \in supp(f_3) \cap Q$, d_0 um elemento maximal de $supp(f_3) \cap Q$. Mas como $q \in supp(f_3) \cap Q$ temos que $\overline{q} = q_0^{-1}\widetilde{q}_i q\widehat{\overline{q}q}$ onde $\widehat{\overline{q}q} \in \cup_{j,c}(supp(g_{c,j})Q' \cap Q) \subseteq Q'$ e $q \in supp(\alpha) \cap Q$. Logo esses elementos são do tipo 4 para α e $m_0 + 1$.

Isto completa a demonstração do Lema. ■

3.5 Alguns Lemas Geométricos

Nesta seção vamos citar alguns lemas do artigo [21] que tratam propriedades geométricas do invariante Σ para módulos sobre anéis comutativos. Estes resultados vão ser importantes para completar a demonstração do Teorema 3.5 deste capítulo.

Seja T o subgrupo de torção do grupo abeliano Q/Q', então, pelo teorema de classificação de grupos abelianos finitamente gerados, $T \oplus \mathbb{Z}^n \cong Q/Q'$ onde n é a dimensão de $(Q/Q') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ sobre $\mathbb{Q}$. Assim T é grupo abeliano finito. Seja

$$\gamma : Q \to \overline{Q} = (Q/Q')/T \simeq \mathbb{Z}^n$$

a composição das projeções canônicas $Q \to Q/Q'$ e $Q/Q' \to (Q/Q')/T$.

Vamos considerar $\overline{Q}$ como um subgrupo de índice finito em Q/Q'. Assim $A/\Omega A$ é um $\mathbb{Z}(Q/Q')$-módulo finitamente gerado, portanto $A/\Omega A$ é um $\mathbb{Z}\overline{Q}$-módulo finitamente gerado.

Proposição 3.21. *[21, Prop. 1.5] Existe um subconjunto finito $\widetilde{\Lambda} = \left\{\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, ..., \widetilde{\lambda}_{m_1}\right\}$ do centralizador $C_{\mathbb{Z}\overline{Q}}(A/\Omega A)$ de $A/\Omega A$ em $\mathbb{Z}\overline{Q}$ e um número real positivo v_0 tal que para todo $[\chi] \in \Sigma_{A/\Omega A}(\overline{Q})$ existe $\widetilde{\lambda}_i \in \widetilde{\Lambda}$ com a propriedade que $\chi(q) > v_0$ para todo $q \in supp(\widetilde{\lambda}_i)$.*

Proposição 3.22. *[21, Prop. 1.6] Existe um número real positivo ρ_0 tal que se $x \in \mathbb{R}^n$ com $\|x\| > \rho_0$, $\frac{x}{\|x\|} \in -\Sigma_{A/\Omega A}(\overline{Q})$ então existe um elemento $\widetilde{\lambda} \in \widetilde{\Lambda}$ tal que para todo $q \in supp(\widetilde{\lambda})$, $\left\|x+q\right\| < \|x\|$.*

Recordamos que $\varphi : Q \to \mathbb{R}$ é um homomorfismo não trivial. Assim $Q' \subseteq Ker(\varphi)$. Como T é finito a pré-imagem de T em Q também está em $ker(\varphi)$. Assim φ induz homomorfismo não trivial $(Q/Q')/T \simeq \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ que vai ser denotado por $\overline{\varphi}$. Observamos que

$$\overline{Q}_{\overline{\varphi}} = Q_{\varphi}/ker(\gamma).$$

Agora consideremos $\overline{\varphi}$ como um caracter sobre $\mathbb{R}^n$ dado pelas extensões $\mathbb{R}$-lineares do caracter original $\overline{\varphi}$ de $\mathbb{Z}^n$.

Definição 3.23. Denotemos por $O_r(y)$ a bola fechada com centro y e raio r em $\mathbb{R}^n$ e r_1, r_2 números reais positivos tal que $2r_1 < r_2$. Então definimos D_{r_1,r_2} como a união de todas bolas $O_{r_1}(y)$, onde $y \in O_{r_2-r_1}(0)$ e $\overline{\varphi}(y) \geq 0$. Fixamos $X(m) = D_{\sqrt{m},m}$ para $m \geq 5$, $m \in \mathbb{N}$. Portanto $X(m) \subseteq \mathbb{R}^n \approx \mathbb{Z}^n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

Definição 3.24. Se $\{v_i\}_{1\leq i\leq 4}$ são elementos de $\mathbb{R}^n$, escrevemos $\{v_1, v_2\} \prec \{v_3, v_4\}$ se, e somente se $max\{\|v_1\|, \|v_2\|\} \leq max\{\|v_3\|, \|v_4\|\}$ e, caso ocorra a igualdade, $min\{\|v_1\|, \|v_2\|\} < min\{\|v_3\|, \|v_4\|\}$.

Lema 3.25. *[21, Lema 3.1] Suponha δ um número real positivo. Então existe um número real positivo $\mu_1(\delta)$, dependendo de δ, tal que se $m \geq \mu_1(\delta)$, $q', q'' \in Q$, $y', y'' \in \mathbb{R}^n$, $\gamma(q') \in O_{\sqrt{m}}(y') \subset X(m)$, $\gamma(q'') \in O_{\sqrt{m}}(y'') \subset X(m)$ e $\left\|\gamma(q') - y'\right\| \leq \delta$, $\gamma(q'') \notin X(m-1)$, $(\gamma(q'') - y'')/\left\|\gamma(q'') - y''\right\| \in -\Sigma^c_{A/\Omega A}(\overline{Q})$ então existe $v \in -\overline{Q}_{\overline{\varphi}} = \{q \in \overline{Q} \mid \overline{\varphi}(q) \leq 0\}$ tal que $\{v + \gamma(q') - y', v + \gamma(q'') - y''\} \prec \{\gamma(q') - y', \gamma(q'') - y''\}$.*

Lema 3.26. *[21, Lemma 3.2] Existe um inteiro positivo ν suficientemente grande, tal que se $q', q'' \in Q$, $y', y'' \in \mathbb{R}^n$, $\left\|\gamma(q') - y'\right\| \geq \nu$, $\left\|\gamma(q'') - y''\right\| \geq \nu$ e $\frac{(\gamma(q') - y')}{\left\|\gamma(q') - y'\right\|}, \frac{(\gamma(q'') - y'')}{\left\|\gamma(q'') - y''\right\|} \in -\Sigma^c_{A/\Omega A}(\overline{Q})$ então existe $v \in -\overline{Q}_{\overline{\varphi}} = \{q \in \overline{Q} \mid \overline{\varphi}(q) \leq 0\}$ com $\left\|\gamma(q') - y' + v\right\| < \left\|\gamma(q') - y'\right\|$, $\left\|\gamma(q'') - y'' + v\right\| < \left\|\gamma(q'') - y''\right\|$.*

3.6 Contas com relações de A no grupo F/N

Definição 3.27. Seja $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{m_1}\}$ um subconjunto finito de $\mathbb{Z}Q \setminus \{0\}$ tal que para cada i temos $\gamma(\lambda_i) = \widetilde{\lambda}_i \in \widetilde{\Lambda}$, onde $\widetilde{\Lambda}$ foi definido na Proposição 3.21. Seja $\left\{q_{j,1}, q_{j,2}, ..., q_{j,t_j}\right\}$

o suporte de λ_j, logo $\lambda_j = \sum_k z_{j,k} q_{j,k}$ para alguns $z_{j,k} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Aumentando B se for necessário (mas ainda deixando B finito), vamos ter em A (usando notação multiplicativa) para cada $b_i \in B$

$$1 = \widetilde{b}_{i,j} b_i^{-1} ({}^{z_{j,1} q_{j,1}} b_i) ... ({}^{z_{j,t_j} q_{j,t_j}} b_i)$$

com $\widetilde{b}_{i,j} \in B \cup \{1\}$ e $\widetilde{b}_{i,j} < b_i$. Definimos alguns elementos especias $c_{i,j} \in F/N$ dados por

$$c_{i,j} = \widetilde{c}_{i,j} c_i^{-1} ({}^{z_{j,1} q_{j,1}} c_i) ... ({}^{z_{j,t_j} q_{j,t_j}} c_i)$$

com $\widetilde{c}_{i,j}$ a imagem de $\widetilde{b}_{i,j}$ em F/N, c_i a imagem de b_i em F/N e portanto $\widetilde{c}_{i,j} < c_i$. Observamos que c_i é o único elemento maximal do $supp(c_{i,j}) \cap C$, onde C é a imagem de B em F/N, e que $c_{i,j}$ não precisa ser elemento de C.

Lema 3.28. *Existe um inteiro positivo ρ tal que para todo $m \geq \rho$, $q \in Q$ e $\gamma(q) \in X(m)$ os elementos ${}^{q}c_{i,j}$ pertencem ao subgrupo de F/N gerado por*

i) $\left\{ {}^{Q_\varphi} c_{i,j} \right\}$;

ii) H_{c_i}*-conjugados de* $\left\{ {}^{Q_\varphi}[{}^{q'}c, {}^{q''}c'] \right\}$, *com* $c, c' \in C$, $q', q'' \in Q$, $\gamma(q'), \gamma(q'') \in X(m-1) \cap \overline{Q}_{\overline{\varphi}}$;

iii) elementos de M;

iv) $\{ {}^{Q_\varphi}\widetilde{c} \}$ *com* $\widetilde{c} < c_i$.

Recordamos que M foi definido em Definição 3.13.

Demonstração. Observe que existe um número inteiro δ tal que para todo m suficientemente grande temos $(X(m) \cap Q) \setminus Q_\varphi \subseteq Q_\varphi q_0^{-\delta[\sqrt{m}]}$, onde $[\sqrt{m}]$ é a parte inteira de $\sqrt{m}$. Logo $q = \widetilde{q} q_0^{-\delta[\sqrt{m}]}$, $\widetilde{q} \in Q_\varphi$. Assim, aplicando o Lema 3.20 a ${}^{q_0^{-\overline{m}}} c_{i,j}$, onde $\overline{m} = \delta[\sqrt{m}]$, temos que

$${}^{q_0^{-\overline{m}}} c_{i,j}$$

é um produto de elementos dos seguintes 4 tipos:

1) $\{ {}^{q_0^{-1}\widetilde{q}_{i,1} ... q_0^{-1}\widetilde{q}_{i,\overline{m}}} c_{i,j} \} \subseteq \{ {}^{Q_\varphi} c_{i,j} \}$, pois $q_0^{-1}\widetilde{q}_{i,j} \in Q_\varphi$. Assim temos elementos do tipo (i).

2) $\left\{ {}^{(q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_1}) ... (q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_{\overline{m}}}) \widehat{q}\widehat{q}_1 ... \widehat{q}_{\overline{m}-1}} \widetilde{c} \right\}$ para todos possíveis $i_1, i_2, ..., i_{\overline{m}}, \overline{q} \in supp(c_{i,j}) \cap Q \subseteq Q_\varphi$, $\widehat{q}_i \in Q'$ e $\widetilde{c} \in C$ tal que $\widetilde{c} <$ um elemento maximal de $supp(c_{i,j}) \cap C$. Observamos que $q_0^{-1}\widetilde{q}_i \in Q_\varphi$, $\overline{q} \in Q_\varphi$, $\widehat{q}_i \in Q_\varphi$, portanto $(q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_1}) ... (q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_{\overline{m}}}) \widehat{q}\widehat{q}_1 ... \widehat{q}_{\overline{m}-1} \in Q_\varphi$.Observamos que c_i é o único elemento maximal de $supp(c_{i,j}) \cap C$, portanto $\widetilde{c} < c_i$. Assim temos elementos de $\left\{ {}^{Q_\varphi}\widetilde{c} \right\}$, $\widetilde{c} < c_i$. Assim temos elementos do tipo (iv).

3) H_d-conjugados de $[{}^{q_1}c_1, {}^{q_2}c_2]$, onde $q_i = (q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_1})...(q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_{\overline{m}}})\overline{q}(\widehat{q}_1...\widehat{q}_{\overline{m}-1})$, $\widehat{q}_i \in Q'$, c_1, $c_2 \in C$, onde d = elemento maximal de $supp(c_{i,j}) \cap C$. Portanto $\left\|\gamma(q_i)\right\| \leq \overline{m} max_{j=1,...,\overline{m}} \left\|\gamma(q_0^{-1}\widetilde{q}_{i,j})\right\| + max_{q\in sup(c_{i,j})} \left\|\gamma(\overline{q})\right\| + (\overline{m}-1) max_{i=1,...,m-1} \left\|\gamma(\widehat{q}_i)\right\| \leq \overline{m} max_{j=1,...,\overline{m}} \left\|\gamma(q_0^{-1}\widetilde{q}_{i,j})\right\| + max_{q\in sup(c_{i,j})} \left\|\gamma(\overline{q})\right\| + 0 \leq \overline{m}.constante + constante = \delta[\sqrt{m}].constante + constante \leq m-1$ para m suficientemente grande, onde $\left\|\gamma(\widehat{q}_i)\right\| = 0$. Assim temos elementos do tipo (ii).

4) ${}^{q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_1}...q_0^{-1}\widetilde{q}_{i_{\overline{m}}}\overline{q}\widehat{q}_1...\widehat{q}_{\overline{m}-1}}\widetilde{M}_{c_i} \subseteq {}^{Q_\varphi}\widetilde{M}_{c_i} \subseteq M$, onde $\widehat{q}_i \in Q'$ e $\overline{q} \in supp(c_{i,j}) \cap Q \subseteq Q_\varphi$. Assim temos elementos do tipo (iii). ■

Corolário 3.29. *Existe um inteiro positivo ρ tal que para todo $m \geq \rho$, $q \in Q$ tal que $\gamma(q) \in X(m)$ temos que ${}^{q}c_{i,j} = \zeta_1.\zeta_2$, onde ζ_1 pertence ao subgrupo de F/N gerado por:*

i) H_{c_i}-conjugados de $\left\{{}^{Q_\varphi}c_{i,j}\right\}_{1\leq j\leq m_1}$;

ii) H_{c_i}-conjugados de $\left\{{}^{Q_\varphi}[{}^{q'}c, {}^{q''}c']\right\}$, onde $c, c' \in C$, $q', q'' \in Q$ tais que $\gamma(q'), \gamma(q'') \in X(m-1)) \cap \overline{Q}_{\overline{\varphi}}$;

iii) Elementos de M;

Além disso ζ_2 é uma relação de A (i. é. a imagem de ζ_2 em A via projeção canônica $F/N \to A$ é trivial) tal que ζ_2 pertence ao subgrupo de F/N gerado por $\left\{{}^{Q_\varphi}\widetilde{c}\right\}_{\widetilde{c}<c_i,\widetilde{c}\in C}$.

Demonstração. Segue do Lema 3.28 e do fato de que os elementos de tipo i), ii) e iii) do Corolário 3.29 são invariantes via conjugação com elementos de $\{{}^{Q_\varphi}\widetilde{c}\}_{\widetilde{c}<c_i,\widetilde{c}\in C}$. Como $c_{i,j}$ é uma relação em A e todos elementos do tipo i), ii), iii) do Corolário 3.29 são relações em A temos que $\zeta_2 = (\zeta_1^{-1})^q(c_{i,j})$ é uma relação de A. ■

Corolário 3.30. *Nas condições do Corolário 3.29, ${}^{q}c_{i,j} = \zeta_1.\zeta_2$, com ζ_1 como no Corolário 3.29 e ζ_2 pertence ao subgrupo gerado por H_{c_i}-conjugados de $\{{}^{Q_\varphi}X_{i,j}\}$, onde $X_{i,j}$ é um subconjunto finito de F/N que contém somente relações de A e $X_{i,j}$ depende somente de i, j mas não da escolha do elemento q.*

Demonstração. Lembremos que na Definição 3.4, definimos o homomorfismo $\pi : F \longrightarrow A$, e vimos que N, o subgrupo normal de F gerado como subgrupo normal pelo conjunto

$$\left\{{}^{Q_\varphi}(b[({}^{z_1\widetilde{q}_1}b)({}^{z_2\widetilde{q}_2}b)...({}^{z_t\widetilde{q}_t}b)]^{-1})\right\}$$

$\forall b \in B$, está contido no núcleo de π. Assim temos um homomorfismo $\overline{\pi} : F/N \longrightarrow A$ (induzido por π). Primeiramente definimos o conjunto $X_{i,j} \subseteq ker(\overline{\pi})$ da seguinte

maneira: se não existe $\widetilde{c} \in C$ tal que $\widetilde{c} < c_i$ tome $X_{i,j} = \{1\}$. Se existe $\widetilde{c} < c_i$ o comprimento da cadeia (3.1) da seção 3.1. é maior que 1 e por indução definimos a aplicação

$$\pi_0 : F_0 = F(\cup_{i\geq j_0}^{Q_\varphi} B_i) \twoheadrightarrow \Omega^{j_0} A$$

como restrição do homomorfismo π onde j_0 é definido pela propriedade $b_i \in B_{j_0} \setminus B_{j_0-1}$. Usando indução sobre comprimento da cadeia (3.1) de A, podemos supor que o Teorema 3.5 da seção 3.2 vale para $\Omega^{j_0} A$ no lugar de A e B substituído por $\cup_{i\geq j_0} B_i$. Portanto existe um subconjunto finito $\widetilde{X}$ de F_0 tal que $ker(\pi_0) = \left\langle {}^{Q_\varphi}\widetilde{X} \right\rangle^{F_0}$. Recordemos que $\widetilde{c}$ é a imagem de $\widetilde{b} \in B$ em F/N, $\widetilde{b} < b_i$ (onde $\pi(b_i) = c_i$). Assim ζ_2 definido no enunciado do Corolário 3.30 é um elemento de F/N tal que $\zeta_2 \in ker(\overline{\pi})$. Portanto ζ_2 pertence a imagem de $ker(\pi_0)$ em F/N. Defina $X_{i,j}$ como a imagem de $\widetilde{X}$ em F/N. ■

Fixemos ρ e ρ_0 inteiros positivos satisfazendo as conclusões do Lema 3.28 e Proposição 3.22, respectivamente.

Lema 3.31. *Suponha $m \geq \rho$, $q' \in Q$ tal que $\gamma(q') \in O_{\sqrt{m}}(y') \subset X(m)$, $y' \in \mathbb{R}^n$ e $\left\|\gamma(q') - y'\right\| > \rho_0$, $\dfrac{(\gamma(q') - y')}{\left\|\gamma(q') - y'\right\|} \in -\Sigma_{A/\Omega A}(\overline{Q})$. Então ${}^{q'}c_i$ pertence ao subgrupo de F/N gerado por:*

1) $\{{}^{q}c_i | q \in Q, \left\|\gamma(q) - y'\right\| < \left\|\gamma(q') - y'\right\|\}$;

2) (i) H_{c_i}-conjugados de $\{{}^{Q_\varphi}c_{i,j}\}$, onde $1 \leq j \leq m_1$;

(ii) H_{c_i}-conjugados de ${}^{Q_\varphi}[{}^{q'}c, {}^{q''}c']$, onde $c, c' \in C$, $q', q'' \in Q$, $\gamma(q'), \gamma(q'') \in X(m-1)$;

(iii) elementos de M;

(iv) H_{c_i}-conjugados de $\left\langle \cup_{1\leq j\leq m_1}^{Q_\varphi} X_{i,j} \right\rangle$;

3) $\{{}^{q'}\widetilde{c}\}_{\widetilde{c}<c_i, \widetilde{c}\in C}$.

Demonstração. Pela Proposição 3.22 existe um elemento $\lambda_j \in \Lambda$ tal que para todo $q_{j,k} \in supp(\lambda_j)$ temos

$$\left\|\gamma(q' q_{j,k}) - y'\right\| = \left\|\gamma(q') - y' + \gamma(q_{j,k})\right\| \leq \left\|\gamma(q') - y'\right\|.$$

Agora consideremos o elemento $c_{i,j}$

$$c_{i,j} = \widetilde{c}_{i,j} c_i^{-1} ({}^{z_{j,1}q_{j,1}}c_i) \ldots ({}^{z_{j,t_j}q_{j,t_j}}c_i),$$

temos

$$^{q'}c_{i,j} = (^{q'}\widetilde{c}_{i,j})(^{q'}c_i^{-1})(^{z_{j,1}q'q_{j,1}}c_i)...(^{z_{j,t_j}q'q_{j,t_j}}c_i).$$

Logo

$$^{q'}c_i = \left[(^{z_{j,1}\overline{q}_1}c_i)...(^{z_{j,t_j}\overline{q}_j}c_i)\right](^{q'}c_{i,j})^{-1}(^{q'}\widetilde{c}_{i,j})$$

onde $\overline{q}_s = q'q_{j,s}$, para $s = 1, ..., j, \widetilde{c}_{i,j} < c_i, \left\|\gamma(\overline{q}_s) - y'\right\| \leq \left\|\gamma(q') - y'\right\|$. Então $\left[(^{z_{j,1}\overline{q}_1}c_i)...(^{z_{j,t_j}\overline{q}_j}c_i)\right]$ é produto de elementos de tipo 1 e $^{q'}\widetilde{c}_{i,j}$ é elemento de tipo 3 do enunciado deste lema.

Agora para finalizarmos a demonstração basta aplicarmos o Corolário 3.30 ao elemento $^{q'}c_{i,j}$. ■

3.7 Contas com comutadores em F/N

Recordamos que ρ é um número positivo fixo dado pelo Lema 3.28.

Teorema 3.32. *Existe um número real positivo $\rho^* > \rho$ tal que se $m \geq \rho^*$, $q', q'' \in Q$, $y', y'' \in \mathbb{R}^n$ tais que $\gamma(q') \in O_{\sqrt{m}}(y') \subset X(m)$, $\gamma(q'') \in O_{\sqrt{m}}(y'') \subset X(m)$ então o comutador $[^{q'}c_i, ^{q''}c_j]$ pertence ao subgrupo normal de F/N gerado por:*

1) $\{^{Q_\varphi}[^{h'}c_i, ^{h''}c_j] | h', h'' \in Q, \{\gamma(h') - y', \gamma(h'') - y''\} < \{\gamma(q') - y', \gamma(q'') - y''\}\}$;

2) $\{^{Q_\varphi}c_{\alpha,\beta} | 1 \leq \alpha \leq s,\ 1 \leq \beta \leq m_1\}$, *onde* $C = \{c_1, ..., c_s\}$;

3) $\{^{Q_\varphi}[^{h'}c_\alpha, ^{h''}c_\beta] | 1 \leq \alpha, \beta \leq s; h', h'' \in Q, \gamma(h'), \gamma(h'') \in X(m-1)\}$;

4) elementos de M;

5) $\left\langle ^{Q_\varphi}X \right\rangle$, *onde X é o conjunto finito dado por* $X = \cup_{1\leq\alpha\leq s, 1\leq\beta\leq m_1} X_{\alpha,\beta}$;

6) $[^{q'}\widetilde{c}_i, ^{q''}c_j]$ *onde* $\widetilde{c}_i < c_i, \widetilde{c}_i \in C$;

7) $[^{q'}c_i, ^{q''}\widetilde{c}_j]$ *onde* $\widetilde{c}_j < c_j, \widetilde{c}_j \in C$.

Dizemos que os comutadores do tipo 1), 6) e 7) da lista acima são descendentes do comutador $[^{q'}c_i, ^{q''}c_j]$.

Demonstração. Tomando $m \geq \rho$, temos os seguintes casos a considerar.

Se $\dfrac{(\gamma(q') - y')}{\left\|\gamma(q') - y'\right\|} \in -\Sigma_{A/\Omega A}(\overline{Q})$ e $\left\|\gamma(q') - y'\right\| > \rho_0$ deduzimos do Lema 3.31 que $^{q'}c_i$

pertence ao subgrupo de F/N gerado por:

- $\{^{q}c_i | q \in Q, \left\|\gamma(q) - y'\right\| < \left\|\gamma(q') - y'\right\|\}$;

- H_{c_i}-conjugados de $\{^{Q_\varphi}c_{i,j}\}$, onde $1 \leq j \leq m_1$;

- H_{c_i}-conjugados de $^{Q_\varphi}[^{q'}c, ^{q''}c']$, onde $c, c' \in C, q', q'' \in Q, \gamma(q'), \gamma(q'') \in X(m-1)$);

- elementos de M;

- H_{c_i}-conjugados de $\left\langle \cup_j^{Q_\varphi} X_{i,j} \right\rangle$;

- $\{^{q'}\widetilde{c_i}\}_{\widetilde{c_i} < c_i, \widetilde{c_i} \in C}$.

Portanto, $[^{q'}c_i, ^{q''}c_j]$ pertence ao subgrupo normal de F/N gerado por:

- $\{[^{q}c_i, ^{q''}c_j] | q \in Q, \left\|\gamma(q) - y'\right\| < \left\|\gamma(q') - y'\right\|\}$;

- $\{^{Q_\varphi}c_{i,\beta}\}$, onde $1 \leq \beta \leq m_1$;

- $^{Q_\varphi}[^{q'}c, ^{q''}c']$, onde $c, c' \in C, q', q'' \in Q, \gamma(q'), \gamma(q'') \in X(m-1)$;

- elementos de M;

- $\left\langle \cup_j^{Q_\varphi} X_{i,j} \right\rangle$;

- $[^{q'}\widetilde{c_i}, ^{q''}c_j]$ onde $\widetilde{c_i} < c_i, \widetilde{c_i} \in C$.

O qual é um subgrupo de F/N descrito no enunciado do nosso teorema.

O caso onde $\dfrac{(\gamma(q'') - y'')}{\left\|\gamma(q'') - y''\right\|} \in -\Sigma_{A/\Omega A}(\overline{Q})$ e $\left\|\gamma(q'') - y''\right\| > \rho_0$ é análogo ao descrito acima.

Restam assim quatro possibilidades a considerar:

1- $\left\|\gamma(q') - y'\right\| \leq \rho_0, \left\|\gamma(q'') - y''\right\| \leq \rho_0$;

2- $\left\|\gamma(q') - y'\right\| \leq \rho_0, \dfrac{(\gamma(q'') - y'')}{\left\|\gamma(q'') - y''\right\|} \in -\Sigma^c_{A/\Omega A}(\overline{Q})$;

3- $\left\|\gamma(q'') - y''\right\| \leq \rho_0, \dfrac{(\gamma(q') - y')}{\left\|\gamma(q') - y'\right\|} \in -\Sigma^c_{A/\Omega A}(\overline{Q})$;

4- $\dfrac{(\gamma(q')-y')}{\left\|\gamma(q')-y'\right\|}, \dfrac{(\gamma(q'')-y'')}{\left\|\gamma(q'')-y''\right\|} \in -\Sigma^c_{A/\Omega A}(\overline{Q})$.

Se o primeiro caso for verdade provaremos que $\gamma(q'), \gamma(q'') \in X(m-1)$ para m suficientemente grande. De fato neste caso temos

$$\begin{aligned}\left\|\gamma(q') - \frac{m-1-\sqrt{m-1}}{m-\sqrt{m}}y'\right\| &\leq \left\|\gamma(q')-y'\right\| + \left\|y' - \frac{m-1-\sqrt{m-1}}{m-\sqrt{m}}y'\right\| \\ &\leq \rho_0 + \left(\frac{1-\sqrt{m}+\sqrt{m-1}}{m-\sqrt{m}}\right)\left\|y'\right\| \\ &\leq \rho_0 + 1 - \sqrt{m} + \sqrt{m-1} \leq \sqrt{m-1}\end{aligned}$$

para m suficientemente grande. Observe que acima nos usamos

$$\left\|\frac{m-1-\sqrt{m-1}}{m-\sqrt{m}}y'\right\| \leq m-1-\sqrt{m-1},$$

que vale pois $O_{\sqrt{m}}(y') \subset X(m)$ implica que $\left\|y'\right\| \leq m-\sqrt{m}$.

Se a segunda possibilidade é verdadeira e m é suficientemente grande temos que $\gamma(q') \in X(m-1)$. Se $\gamma(q'') \in X(m-1)$ não há nada a fazer pois $[{}^{q'}c_i, {}^{q''}c_j]$ seria elemento do tipo 3. Logo assumimos $\gamma(q'') \notin X(m-1)$. Seja $v \in -\overline{Q}_{\overline{\varphi}}$ dado pelo Lema 3.25 para $\delta = \rho_0$ e $m \geq \mu_1(\delta)$; isto é, $\{v+\gamma(q')-y', v+\gamma(q'')-y''\} \prec \{\gamma(q')-y', \gamma(q'')-y''\}$. Então para um elemento $w^{-1} \in Q_\varphi$ tal que $\gamma(w) = v$ temos que

$$[{}^{q'}c_i, {}^{q''}c_j] = {}^{w^{-1}}[{}^{wq'}c_i, {}^{wq''}c_j]$$

pertence ao subgrupo normal de F/N gerado por $\{{}^{Q_\varphi}[{}^{h'}c_i, {}^{h''}c_j] | h', h'' \in Q, \{\gamma(h')-y', \gamma(h'')-y''\} \prec \{\gamma(q')-y', \gamma(q'')-y''\}\}$. O que prova o segundo caso. O terceiro caso é análogo ao segundo.

Por último consideremos a quarta possibilidade. Assumimos que $\left\|\gamma(q')-y'\right\| \geq \nu$, $\left\|\gamma(q'')-y''\right\| \geq \nu$, onde ν é o inteiro positivo dado pelo Lema 3.26, e seja $v \in -\overline{Q}_{\overline{\varphi}}$ o elemento dado também pelo Lema 3.26. Então para um elemento $w^{-1} \in Q_\varphi$ tal que $\gamma(w) = v$ temos que

$$[{}^{q'}c_i, {}^{q''}c_j] = {}^{w^{-1}}[{}^{wq'}c_i, {}^{vq''}c_j]$$

pertence ao subgrupo normal de F/N gerado por $\{{}^{Q_\varphi}[{}^{h'}c_i, {}^{h''}c_j] | h', h'' \in Q, \{\gamma(h')-y', \gamma(h'')-y''\} \prec \{\gamma(q')-y', \gamma(q'')-y''\}\}$. Para finalizar, consideremos o caso onde $\dfrac{(\gamma(q')-y')}{\left\|\gamma(q')-y'\right\|}$,

$\frac{(\gamma(q'')-y'')}{\left\|\gamma(q'')-y''\right\|} \in -\Sigma^c_{A/\Omega A}(\overline{Q})$ e $\left\|\gamma(q')-y'\right\| < \nu$ ou $\left\|\gamma(q'')-y''\right\| < \nu$. Neste caso repetimos o argumento do segundo e terceiro casos com ν no lugar de ρ_0. ∎

Corolário 3.33. *Seja ρ^* o número dado pelo Teorema 3.32. Para $m \geq \rho^*$, $q', q'' \in Q$ tais que $\gamma(q'), \gamma(q'') \in X(m)$ o comutador $[{}^{q'}c_i, {}^{q''}c_j]$ pertence ao subgrupo normal de F/N gerado por:*

1) $\{{}^{Q_\varphi}c_{\alpha,\beta} \,|1 \leq \alpha \leq s,\ 1 \leq \beta \leq m_1\}$;

2) $\{{}^{Q_\varphi}[{}^{h'}c_\alpha, {}^{h''}c_\beta] | 1 \leq \alpha, \beta \leq s; h', h'' \in Q, \gamma(h'), \gamma(h'') \in X(m-1)\}$;

3) elementos de M;

4) $\left\langle {}^{Q_\varphi}X \right\rangle$, onde X é um conjunto finito dado por $X = \cup_{\alpha,\beta} X_{1\leq\alpha\leq s, 1\leq\beta\leq m_1}$.

Demonstração. Notemos que cada um dos comutadores em 1), 6) e 7) do Teorema 3.32 é descendente de $[{}^{q'}c_i, {}^{q''}c_j]$ e observemos que não existe um conjunto infinito de comutadores $\{[{}^{q'_i}d_i, {}^{q''_i}\widetilde{d_i}]\}_{i\geq 1}$, $q'_i, q''_i \in Q$, $d_i, \widetilde{d_i} \in C$, tais que $[{}^{q'_{i+1}}d_{i+1}, {}^{q''_{i+1}}\widetilde{d_{i+1}}]$ é descendente do anterior $[{}^{q'_i}d_i, {}^{q''_i}\widetilde{d_i}]$. Portanto aplicando o Teorema 3.32 um número finito de vezes podemos descrever o comutador $[{}^{q'}c_i, {}^{q''}c_j]$ como o produto de elementos como no Teorema 3.32 sem os elementos de tipo 1), 6) e 7). ∎

Definição 3.34. Seja $Y_{m-1} \subset Q$ um conjunto finito tal que para todos $q \in Q$ tais que $\gamma(q) \in X(m-1)$ existe um único $y \in Y_{m-1}$ com a propriedade que $q \in yQ'$. Tal conjunto existe pois $X(m-1) \cap \overline{Q}$ é conjunto finito e $\overline{Q}$ tem índice finito em Q/Q'.

Corolário 3.35. *Para $m \geq \rho^*$, $q', q'' \in Q$ tais que $\gamma(q'), \gamma(q'') \in X(m)$ o comutador $[{}^{q'}c_i, {}^{q''}c_j]$ pertence ao subgrupo normal de F/N gerado por:*

1) $\{{}^{Q_\varphi}c_{\alpha,\beta} \,|1 \leq \alpha \leq s,\ 1 \leq \beta \leq m_1\}$;

2) $\{{}^{Q_\varphi}[{}^{y'}c_\alpha, {}^{y''}c_\beta] | 1 \leq \alpha, \beta \leq s; y', y'' \in Y_{m-1} \subseteq \gamma^{-1}(X(m-1))\}$;

3) elementos de M;

4) $\left\langle {}^{Q_\varphi}X \right\rangle$, onde X é um conjunto finito de relações em A dado por $X = \cup_{\alpha,\beta} X_{\alpha,\beta}$.

Demonstração. Basta observar que no Corolário 3.33, tomando os elementos do tipo 2) desse Corolário, ou seja, $\{{}^{Q_\varphi}[{}^{h'}c_\alpha, {}^{h''}c_\beta] | 1 \leq \alpha, \beta \leq s; h', h'' \in Q, \gamma(h'), \gamma(h'') \in X(m-1)\}$ existem únicos $y', y'' \in Y_{m-1}$, $\overline{q}, \overline{\overline{q}} \in Q'$ tais que

$$h' = y'\overline{q}, h' = y''\overline{\overline{q}}$$

Assim, pelo Lema 3.15 temos:

$$ {}^{h'}c_\alpha = {}^{y'\overline{q}}c_\alpha \equiv {}^{y'}(c_\alpha \prod_{\substack{\widetilde{c}<c_\alpha \\ \widetilde{c}\in C\cup\{1\}}} \widetilde{c}^{\pm 1}) = {}^{y'}c_\alpha \prod_{\substack{\widetilde{c}<c_\alpha \\ \widetilde{c}\in C\cup\{1\}}} {}^{y'\widetilde{c}^{\pm 1}} \quad mod\ \widetilde{M}_c; $$

$$ {}^{h''}c_\beta = {}^{y''\overline{\overline{q}}}c_\beta \equiv {}^{y''}\left(c_\beta \prod_{\substack{\widetilde{c}<c_\beta \\ \widetilde{c}\in C\cup\{1\}}} \widetilde{c}^{\pm 1}\right) = {}^{y''}c_\beta \prod_{\substack{\widetilde{c}<c_\beta \\ \widetilde{c}\in C\cup\{1\}}} {}^{y''\widetilde{c}^{\pm 1}} \quad mod\ \widetilde{M}_c; $$

Observamos que $\widetilde{M}_c \subseteq M$, logo $[{}^{h'}c_\alpha, {}^{h''}c_\beta]$ é produto de conjugados de tipo $[a,b]$ onde $a \in \{{}^{y''}c_\alpha, {}^{y'\widetilde{c}^{\pm 1}}\}$ para $\widetilde{c} < c_\alpha$, $\widetilde{c} \in C \cup \{1\}$ e $b \in \{{}^{y''}c_\beta, {}^{y'\widetilde{c}^{\pm 1}}\}$ para $\widetilde{c} < c_\beta$, $\widetilde{c} \in C \cup \{1\}$. ■

3.8 Demonstração do Teorema 3.5

Nesta seção vamos demonstrar o Teorema 3.5.

Teorema 3.36. *Suponha que* $[\varphi] \notin conv_{\leq 2}\Sigma^c_A(Q)$. *Então existe um subconjunto finito* $X_{A,B}$ *de* $F(Y)$ *tal que* $X_{A,B} \subseteq ker(\pi)$ *e* $\left\langle {}^{Q_\varphi}X_{A,B}\right\rangle^{F(Y)} = ker(\pi)$.

Demonstração. Por indução e pelo fato que o Teorema 3.36 vale para grupos abelianos Q o Teorema 3.36 vale para grupos abelianos A com cadeias de comprimento menor do que em (3.1), isto é,

$$ \pi_1 : F_1 = F(\cup_{i\geq 1}\ {}^{Q_\varphi}B_i) \to \Omega A $$

tem núcleo $ker(\pi_1) = \left\langle {}^{Q_\varphi}X\right\rangle^{F_1}$, para um subconjunto finito X de F_1. Recordamos que $F(\cup_{i\geq 1}{}^{Q_\varphi}B_i)$ denota o grupo livre com base $\cup_{i\geq 1}{}^{Q_\varphi}B_i$ e que $F = F(\cup_{i\geq 0}{}^{Q_\varphi}B_i)$ é o grupo livre com base $\cup_{i\geq 0}{}^{Q_\varphi}B_i$.

Seja T o subgrupo normal de F gerado por N, $Ker(\pi_1)$ e os elementos 1), 2), 3) e 4) do Corolário 3.35 para $m = \rho^*$ (aqui pegamos uma pré-imagem em F para cada elemento de F/N dos tipos 1), 2), 3) e 4)), recordemos que o subgrupo normal N de F foi definido na seção 3.3. Como N é o fecho normal de um número finito de Q_φ-órbitas e 1), 2), 3) e 4) contém número finito de Q_φ-órbitas, temos que T é o fecho normal de um número finito de Q_φ-órbitas. Assim, quocientando F por T, teremos pelo Corolário 3.35 um grupo abeliano $D = F/T$ o qual tem uma Q_φ-ação.

Observamos que por construção T contém somente relações de A. Logo, temos que a projeção canônica $\pi : F \twoheadrightarrow A$ induz um epimorfismo de grupos

$$\theta : D = F/T \to A,$$

onde o núcleo da aplicação $F \to D$ está contida no $ker(\pi)$. Precisamos mostrar que $ker(\theta)$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q_\varphi$-módulo. Observamos que se φ for caracter discreto $\mathbb{Z}Q_\varphi$ seria anel Noetheriano e como D é um $\mathbb{Z}Q_\varphi$-módulo finitamente gerado segue direto que $Ker(\theta)$ é $\mathbb{Z}Q_\varphi$-módulo finitamente gerado. Mas este argumento funciona somente no caso φ discreto.

Em geral vamos mostrar que T/N é invariante via ação de Q, portanto D é um Q-módulo. Pela definição da ação de Q sobre F/N deduzimos que q_0^{-1} age sobre D como o elemento $\Sigma_{1\leq i\leq t} z_i q_0^{-1}\tilde{q}_i$ de $\mathbb{Z}Q_\varphi$, veja (3.7). O mesmo vale para A, isto é, q_0^{-1} age sobre A como o elemento $\Sigma_{1\leq i\leq t} z_i q_0^{-1}\widetilde{q_i}$. Portanto θ é homomorfismo de Q-módulos e para cada $d \in D$ temos

$$\mathbb{Z}Qd = \mathbb{Z}Q_\varphi d. \tag{3.18}$$

Usando que $\mathbb{Z}Q$ é um anel Noetheriano vamos ter que $Ker(\theta)$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo e pelo (3.18) temos que $Ker(\theta)$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q_\varphi$-módulo.

Finalmente, vamos mostrar que T é invariante via ação de Q. Observamos que na seção 3.3 já munimos F/N com Q-ação. Seja $f \in T/N$, então pelo Corolário 3.19 ${}^{q_0^{-1}}f$ é produto de F/N-conjugados de quatro tipos de elementos. Como T/N é invariante sobre Q_φ-ação o elemento do primeiro tipo pertence a T/N, o elemento de tipo 3 pertence a M portanto pertence a T/N; o elemento do segundo tipo é um comutador e pelo Corolário 3.35 ele pertence a T/N e finalmente o elemento de tipo 4 pertence a $ker(\pi_1)N/N$, portanto pertence a T/N. Portanto ${}^{q_0^{-1}}f$ pertence a T/N e assim T/N é Q-invariante. ∎

Corolário 3.37. *Seja $G = A \rtimes Q$ um grupo de tipo FP_2, tais que A é abeliano, Q nilpotente de classe 2 e Q' age nilpotentemente sobre A. Seja $\chi : G \to \mathbb{R}$ um caracter não trivial tal que $\chi(A) = 0$ e para a restrição φ de χ a Q temos que $[\varphi] \notin conv_{\leq 2}\Sigma_A^c(Q)$. Então, o $\mathbb{Z}G_\chi$-módulo trivial $\mathbb{Z}$ tem tipo FP_2, isto é, $[\chi] \in \Sigma^2(G, \mathbb{Z})$.*

Demonstração. Considere a seguinte sequência exata curta de $\mathbb{Z}G_\varphi$-módulos

$$Aug\mathbb{Z}G_\varphi \rightarrowtail \mathbb{Z}G_\varphi \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$$

pelo argumento de diminuição da dimensão, Proposição 1.46, temos que $\mathbb{Z}$ tem tipo

FP_2 sobre $\mathbb{Z}G_\varphi$, se e somente se, $Aug\mathbb{Z}G_\varphi$ tem tipo FP_1 sobre $\mathbb{Z}G_\varphi$.

Tomando agora a sequencia de $\mathbb{Z}Q_\varphi$-módulos

$$Aug\mathbb{Z}Q_\varphi \rightarrowtail \mathbb{Z}Q_\varphi \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \tag{3.19}$$

aplicamos o funtor $\mathbb{Z}G_\varphi \otimes_{\mathbb{Z}Q_\varphi} __$ e nos restringindo aos ideais de aumento nos dois últimos termos, obtendo assim a sequencia exata de $\mathbb{Z}G_\varphi$-módulos a esquerda

$$\mathbb{Z}G_\varphi \otimes_{\mathbb{Z}Q_\varphi} Aug\mathbb{Z}Q_\varphi \rightarrowtail Aug\mathbb{Z}G_\varphi \twoheadrightarrow Aug\mathbb{Z}A$$

Como Q é nilpotente de classe 2, temos que $S(Q) = \Sigma^\infty(Q, \mathbb{Z})$, assim usando o argumento de diminuição de dimensão para (3.19) $Aug\mathbb{Z}Q_\varphi$ tem tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}Q_\varphi$, logo $\mathbb{Z}G_\varphi \otimes_{\mathbb{Z}Q_\varphi} Aug\mathbb{Z}Q_\varphi$ tem tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}G_\varphi$

Novamente pelo argumento de diminuição de dimensão, $Aug\mathbb{Z}G_\varphi$ tem tipo FP_1 sobre $\mathbb{Z}G_\varphi$ se, e somente se, $Aug\mathbb{Z}A$ tem tipo FP_1 sobre $\mathbb{Z}G_\varphi$.

Definimos na seção 3.2 $\pi : F(Y) \to A$, onde $Y = {}^{Q_\varphi}B$. Assim, $A \simeq F(Y)/R$, onde $R = ker\,(\pi)$. Denotamos $R_{ab} = R/[R, R]$ a abelianização de R.

Por [12, Proposição 5.4] existe a sequencia exata de $\mathbb{Z}A$-módulos abaixo

$$0 \to R_{ab} \xrightarrow{\theta} \oplus_{y\in Y}\mathbb{Z}Ay \xrightarrow{\rho} \mathbb{Z}A \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

onde θ é descrito em [12, Teorema 5.3], $\rho(y) = \pi(y) - 1$ e ϵ é a aplicação de aumento. Obtemos assim a sequencia exata

$$0 \to R_{ab} \to \oplus_{y\in Y}\mathbb{Z}Ay \to Aug\mathbb{Z}A \to 0,$$

dado $y \in Y$ temos que $y = {}^qb$, $b \in B$ e $q \in Q_\varphi$ assim ${}^qb \leftrightarrow (q, b)$ e $(aq)b := a(q, b)$ e $aq \in A \rtimes Q_\varphi = G_\varphi$, logo temos

$$0 \to R_{ab} \to \oplus_{b\in B}\mathbb{Z}(A \rtimes Q_\varphi)b \to Aug\mathbb{Z}A \to 0$$

observe que $\oplus_{b\in B}\mathbb{Z}(A \rtimes Q_\varphi)b$ é livre e finitamente gerado sobre $\mathbb{Z}G_\varphi$, logo tem tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}G_\varphi$. Assim precisamos mostrar que R_{ab} tem tipo FP_0 sobre $\mathbb{Z}G_\varphi$ e usamos o

argumento de diminuição da dimensão para termos que $Aug\mathbb{Z}A$ tem tipo FP_1 sobre $\mathbb{Z}G_\varphi$.

Pelo Teorema acima $R = \left\langle {}^{Q_\varphi}X_{A,B} \right\rangle^{F(Y)}$ e $R_{ab} = \dfrac{R}{[R,R]}$ é $\dfrac{F(Y)}{R} = A$-módulo gerado pela imagem de ${}^{Q_\varphi}X_{A,B}$ então é $A \rtimes Q_\varphi = G_\varphi$-módulo gerado pela imagem de $X_{A,B}$ que é finito. ■

3.9 A demonstração do primeiro Teorema principal

Teorema 3.38. *Seja $G = A \rtimes Q$ finitamente gerado, com A abeliano e Q nilpotente de classe 2. Temos que, se G é de tipo FP_2 e Q' age nilpotentemente sobre A, então*

$$\Sigma^2(G,\mathbb{Z})^c = conv_{\leq 2}\Sigma^1(G,\mathbb{Z})^c.$$

Demonstração. Seja $\chi : G \to \mathbb{R}$ um caracter não trivial de G. Se $\chi(A) \neq 0$ então pelo [22, Theo. C] temos que $[\chi] \in \Sigma^2(G,\mathbb{Z})$. Portanto vamos considerar somente caracteres χ tais que $\chi(A) = 0$.

1) Suponha primeiramente que $[\chi] \notin conv_{\leq 2}\Sigma^1(G,\mathbb{Z})^c$. Logo pelo Lema 2.12 temos que $[\varphi] \notin conv_{\leq 2}\Sigma^c_A(Q)$ onde φ é a restrição de χ sobre Q. Logo, pelo Corolário 3.37 temos que o $\mathbb{Z}G_\chi$-módulo trivial $\mathbb{Z}$ tem tipo FP_2, portanto $[\chi] \in \Sigma^2(G,\mathbb{Z})$, o que implica que $[\chi] \notin \Sigma^2(G,\mathbb{Z})^c$. Portanto temos a inclusão

$$\Sigma^2(G,\mathbb{Z})^c \subseteq conv_{\leq 2}\Sigma^1(G,\mathbb{Z})^c.$$

2) Temos que Q' age nilpotentemente sobre A, o que implica que o grupo $A \rtimes Q'$ é nilpotente. E portanto $G = A \rtimes Q$ é nilpotente-por-abeliano. E em [20] foi mostrado que a inclusão recíproca

$$conv_{\leq 2}\Sigma^1(G,\mathbb{Z})^c \subseteq \Sigma^2(G,\mathbb{Z})^c$$

é verdadeira para classe geral de grupos nilpotentes-por-abelianos.

Capítulo 4

Quocientes de Grupos Abelianos por Nilpotente de classe 2 de Tipo Homológico FP_4

4.1 Quocientes de grupos de tipo FP_4

O nosso objetivo nesse capítulo é demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 4.1. *Seja $G = A \rtimes Q$ um grupo do tipo FP_4 onde A é abeliano e Q nilpotente de classe 2. Então todo quociente de G tem tipo FP_4.*

Seja $G = A \rtimes Q$ um grupo do tipo FP_4 com A abeliano e Q nilpotente de classe 2, N um subgrupo normal de G e $A_0 = N \cap A$. O grupo abeliano A pode ser visto como um $\mathbb{Z}Q$-módulo à esquerda via conjugação. Por [15, Teo. A], $G = A \rtimes Q$ é virtualmente nilpotente-por-abeliano. Assim, podemos assumir que $A \rtimes Q$ é nilpotente-por-abeliano.

Lema 4.2. *O grupo G/N tem tipo FP_m se, e somente se o grupo G/A_0 tem tipo FP_m.*

Demonstração. Sejam $\beta : G/A_0 \to G/N$ e $\gamma : G/A_0 \to G/A$ as projeções canônicas. Assim $ker(\beta) \cap ker(\gamma)$ é trivial e $ker(\beta) \simeq \gamma(ker(\beta)) \leq G/A \simeq Q$. Em particular $ker(\beta)$ tem tipo homológico FP_∞. Assim, pelo argumento de diminuição de dimensão para grupos , isto é, Proposição 1.79, aplicado para a sequência exata de grupos $ker(\beta) \to G/A_0 \to G/N$ induzido por β, G/N tem tipo FP_m se, e somente se, G/A_0 tem tipo FP_m. ∎

Assim, para provarmos que G/A_0 tem tipo FP_4, é suficiente existir um subgrupo não-trivial A_1 de A_0 com $A_1 \lhd G$ tal que G/A_1 tem tipo FP_4. De fato, como $G = A \rtimes Q$, onde A é abeliano e Q é nilpotente de classe 2, temos que A é um $\mathbb{Z}Q$-módulo finitamente gerado, onde a ação de Q sobre A e dada por conjugação e como $\mathbb{Z}Q$ é anel Noetheriano temos que cada $\mathbb{Z}Q$-submódulo de A é finitamente gerado, e portanto $\mathbb{Z}G$-módulos finitamente gerados, o que implica que A tem $max - n$ e como $G/A \simeq Q$ é nilpotente de classe 2, portanto policíclico, tem max o que implica que G tem $max - n$.

Suponha que G/A_0 não tem tipo FP_4. Uma vez que G tem $max - n$, podemos encontrar um subgrupo A_2 de A_0 que é normal em G tal que G/A_2 tem tipo FP_4 mas para todo A_3 subgrupo normal de G, com $A_2 < A_3 \leq A_0$ o quociente G/A_3 não tem tipo FP_4. Para evitar complicação de notação quando tratarmos de G/A_2, assumiremos que A_2 é trivial. Para encontrar a contradição desejada, precisamos mostrar que existe um subgrupo A_1 de A_0 normal em G tal que G/A_1 tem tipo FP_4.

Nossa estratégia será a de mostrar que $H_i(A_1, \mathbb{Z})$ tem tipo FP_{3-i} como $\mathbb{Z}(G/A_1)$-módulo, com $1 \leq i \leq 3$ e disto mostrar que G/A_1 tem tipo FP_4.

Logo o primeiro passo será mostrar que se conseguirmos que $H_i(A_1, \mathbb{Z})$ seja de tipo FP_{3-i} como $\mathbb{Z}(G/A_1)$-módulo para cada $1 \leq i \leq 3$ então teremos resolvido o problema.

Seja A_1 um $\mathbb{Z}Q$-submódulo de A. Recordamos que G tem tipo FP_4, assim seja

$$\mathcal{F} : \cdots \to F_4 \to F_3 \to F_2 \to F_1 \to F_0 \to \mathbb{Z} \to 0 \tag{4.1}$$

uma $\mathbb{Z}G$-resolução livre do $\mathbb{Z}G$-módulo trivial $\mathbb{Z}$ com F_0, F_1, F_2,F_3 e F_4 finitamente gerados.

Considere o complexo de $\mathbb{Z}\,(G/A_1)$-módulos livres

$$\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}A_1}\mathcal{F} : \cdots \to \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}A_1}F_4 \xrightarrow{\delta_4} \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}A_1}F_3 \xrightarrow{\delta_3} \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}A_1}F_2 \xrightarrow{\delta_2} \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}A_1}F_1 \xrightarrow{\delta_1} \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}A_1}F_0 \xrightarrow{\delta_0} \mathbb{Z} \to 0$$

e defina $L_j = \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}A_1}F_j$. Por [[12], Capítulo 5, Teorema 6.4] e [[7], Proposição 5.1] existem isomorfismos naturais de $\mathbb{Z}(G/A_1)$-módulos à esquerda

$$A_1 \wedge A_1 \simeq H_2(A_1;\mathbb{Z}) = H_2(\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}A_1}\mathcal{F}) \text{ e } A_1 \simeq H_1(A_1;\mathbb{Z}) = H_1(\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}A_1}\mathcal{F}),$$

onde a ação de G/A_1 sobre A_1 é dada por conjugação e sobre $A_1 \wedge A_1$ é a ação diagonal.

Lema 4.3. *Suponha que G tem tipo FP_4 e $\mathcal{F}$ definida em (4.1). Seja $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}(G/A_1)$-módulo trivial e todos os módulos considerados são $\mathbb{Z}(G/A_1)$-módulos. Então temos:*

1. *$\mathbb{Z}$ tem tipo FP_4 se, e somente se $ker(\delta_0)$ tem tipo FP_3;*
2. *$ker(\delta_0) = im(\delta_1)$ tem tipo FP_3 se, e somente se $ker(\delta_1)$ tem tipo FP_2;*
3. *Se $im(\delta_2)$ tem tipo FP_2 e $H_1(A_1, \mathbb{Z})$ tem tipo FP_2 então $ker(\delta_1)$ tem tipo FP_2;*
4. *$im(\delta_2)$ tem tipo FP_2 se, e somente se $ker(\delta_2)$ tem tipo FP_1;*
5. *Se $im(\delta_3)$ tem tipo FP_1 e $H_2(A_1, \mathbb{Z})$ tem tipo FP_1 então $ker(\delta_2)$ tem tipo FP_1;*
6. *$im(\delta_3)$ tem tipo FP_1 se, e somente se $ker(\delta_3)$ tem tipo FP_0;*
7. *$ker(\delta_3)$ tem tipo FP_0 se, e somente se $H_3(A_1, \mathbb{Z})$ tem tipo FP_0.*

Demonstração. Aplicamos o argumento de diminuição de dimensão para $\mathbb{Z}(G/A_1)$-módulos, isto é Proposição 1.69, para as seguintes sequências exatas (uma para cada item): $ker(\delta_0) \to L_0 \to \mathbb{Z}$, $ker(\delta_1) \to L_1 \to im(\delta_1)$, $im(\delta_2) \to ker(\delta_1) \to A_1 \simeq H_1(A_1, \mathbb{Z})$, $ker(\delta_2) \to L_2 \to im(\delta_2)$, $im(\delta_3) \to ker(\delta_2) \to H_2(A_1, \mathbb{Z}) \simeq \wedge^2 A_1$, $ker(\delta_3) \to L_3 \to im(\delta_3)$ e $im(\delta_4) \to ker(\delta_3) \to H_3(A_1, \mathbb{Z})$. Observe que os L_i são $\mathbb{Z}(G/A_1)$ livres e portanto têm tipo FP_∞ para $i \leq 4$ e $im(\delta_3)$ é finitamente gerado i.e. tem tipo FP_0. ∎

O Lema acima junto com o Lema 4.2 implicam o seguinte corolário.

Corolário 4.4. *Suponha que G tem tipo FP_4 e $H_i(A_1, \mathbb{Z})$ tem tipo FP_{3-i} como $\mathbb{Z}(G/A_1)$-módulo com $1 \leq i \leq 3$. Então G/A_1 tem tipo FP_4 e consequentemente G/N tem tipo FP_4.*

Nas próximas seções vamos mostrar que $H_i(A_1, \mathbb{Z})$ tem tipo FP_{3-i} para $1 \leq i \leq 3$. Cada seção vai tratar um caso particular de i.

4.2 Uma redução

Seja $G = A \rtimes Q$, A é abeliano e Q nilpotente de classe 2. Vimos no início desta seção que podemos considerar $G = A \rtimes Q$ nilpotente-por-abeliano e seja $\widetilde{A} = A.Aug\mathbb{Z}Q = [A, Q]$. Assim temos que Q' age nilpotentemente sobre $G' \cap A \supseteq \widetilde{A}$.

Suponha que o teorema vale para $G_0 = \widetilde{A} \rtimes Q$, ou seja, se G_0 tem tipo FP_4 todo quociente de G_0 tem tipo FP_4. Como visto na seção 4.1 precisamos mostrar que para algum $0 \neq N \subset A_0 \subset G$ com $N \lhd G$ então G/N tem tipo FP_4.

Seja $N_0 = G_0 \cap N = (\widetilde{A} \rtimes Q) \cap A \cap N = \widetilde{A} \cap N$, dada a inclusão

$$\frac{G_0}{N_0} \hookrightarrow \frac{G}{N}$$

temos que

$$\frac{\widetilde{A}}{\widetilde{A} \cap N} \rtimes Q = \frac{\widetilde{A} \rtimes Q}{\widetilde{A} \cap N} = \frac{G_0}{N_0} \hookrightarrow \frac{G}{N} = \frac{A}{N} \rtimes Q.$$

Sejam $M_1 = \dfrac{A}{N}$ e $M_2 = \dfrac{\widetilde{A}}{\widetilde{A} \cap N}$, logo

$$H_2 = M_2 \rtimes Q \hookrightarrow M_1 \rtimes Q = H_1$$

assim temos $\dfrac{A}{\widetilde{A}} \twoheadrightarrow \dfrac{M_1}{M_2}$ e como $\dfrac{A}{\widetilde{A}}$ é finitamente gerado como grupo abeliano temos que $\dfrac{M_1}{M_2}$ é grupo abeliano finitamente gerado.

Seja $\rho : G \to G/N$ projeção canônica, observe que $\rho(G_0) = H_2$ e $\rho(G) = H_1$. Verifiquemos que $G_0 \lhd G$ o que implica que $\rho(G_0) \lhd \rho(G)$.

Temos que $\widetilde{A}^G = \widetilde{A} \subseteq G_0$ e que $Q^Q = Q \subseteq G_0$, resta apenas ver que $Q^A \subseteq G_0$, mas temos que $Q^A = \{a^{-1}qa \,|\, q \in Q, a \in A\}$, assim $a^{-1}qa = a^{-1}qaq^{-1}q$ e como $a^{-1}qaq^{-1} \in [A, Q] = A_0$ temos que $a^{-1}qaq^{-1}q \in \widetilde{A} \rtimes Q = G_0$ o que implica que $G_0 \lhd G$.

Como o teorema vale para $G_0 = \widetilde{A} \rtimes Q$, temos que H_2 tem tipo FP_4.

Tomando a sequência exata, pois $H_2 \lhd H_1$

$$H_2 \hookrightarrow H_1 \twoheadrightarrow H_1/H_2$$

e como H_2/H_1 é abeliano finitamente gerado e portanto de tipo FP_∞ temos, pela Proposição 1.79, que H_1 tem tipo FP_4.

Assim, daqui para frente podemos considerar o caso em que $G = A \rtimes Q$, onde A é

abeliano, Q nilpotente de classe 2 e Q' age nilpotentemente sobre A.

4.3 O caso $i = 2$

Proposição 4.5. *Seja $G = A \rtimes Q$ de tipo FP_4 e Q' agindo nilpotentemente sobre A. Então $H_2(A_1, \mathbb{Z}) \simeq A_1 \wedge A_1$ tem tipo FP_1 como $\mathbb{Z}(G/A_1)$-módulo.*

Demonstração. Vamos agora mostrar que podemos aplicar a Proposição 2.9 considerando $M = \frac{A}{A_1}$, $B = C = A_1$. Temos que para o ideal de aumento Ω de $\mathbb{Z}Q'$ existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $\Omega^m A = 0$. Assim A tem uma filtração de $\mathbb{Z}Q$-submódulos dada por

$$A \supset \Omega A \supset \Omega^2 A \supset ... \supset \Omega^m A = 0$$

a qual induz filtrações de $\mathbb{Z}Q$-módulos no $\mathbb{Z}Q$-quociente $\frac{A}{A_1}$ de A e no $\mathbb{Z}Q$-submódulo A_1 de A dadas respectivamente por:

$$M_0 = \frac{A}{A_1} \supset M_1 = \frac{\Omega A + A_1}{A_1} \supset M_2 = \frac{\Omega^2 A + A_1}{A_1} \supset ... \supset M_m = \frac{\Omega^m A + A_1}{A_1} = 0$$

e

$$B_0 = C_0 = A_1 \supset B_1 = C_1 = \Omega A \cap A_1 \supset B_2 = C_2 = \Omega^2 A \cap A_1 \supset ... \supset B_m = C_m = \Omega^m A \cap A_1 = 0.$$

Agora, temos que

$$\frac{M_i}{M_{i+1}} = \frac{\frac{\Omega^i A + A_1}{A_1}}{\frac{\Omega^{i+1} A + A_1}{A_1}} \simeq \frac{\Omega^i A + A_1}{\Omega^{i+1} A + A_1}$$

e podemos observar também que temos o diagrama comutativo de $\mathbb{Z}Q$-módulos:

$$\begin{array}{ccccc} \Omega^i A & \twoheadrightarrow & \frac{\Omega^i A + A_1}{A_1} & = & \frac{\Omega^i A}{A_1 \cap \Omega^i A} \\ & \searrow^{\varphi} & & & \downarrow \\ & & & & \frac{\Omega^i A + A_1}{\Omega^{i+1} A + A_1} \end{array}$$

Logo, $\Omega^{i+1} A \subseteq ker\varphi$ o que implica que

$$\frac{\Omega^i A}{\Omega^{i+1} A} \twoheadrightarrow \frac{\Omega^i A + A_1}{\Omega^{i+1} A + A_1} = \frac{M_i}{M_{i+1}},$$

assim

$$\Sigma^c_{\frac{M_i}{M_{i+1}}}(Q) \subseteq \Sigma^c_{\frac{\Omega^i A}{\Omega^{i+1} A}}(Q) = \Sigma^c_{\Omega^i A}(Q).$$

Observemos também que pelo lema 2.3

$$\Sigma^c_{\frac{M_i}{M_{i+1}}}(Q) \subseteq \Sigma^c_{\frac{\Omega^i A}{\Omega^{i+1} A}}(Q) = \Sigma^c_{\Omega^i A}(Q) \subseteq \Sigma^c_A(Q).$$

Temos também que

$$\frac{B_j}{B_{j+1}} = \frac{\Omega^j A \cap A_1}{\Omega^{j+1} A \cap A_1} \subseteq \frac{\Omega^j A}{\Omega^{j+1} A}$$

Como $\frac{B_j}{B_{j+1}}$ é um $\mathbb{Z}Q$-submódulo de $\frac{\Omega^j A}{\Omega^{j+1} A}$ e $\frac{M_j}{M_{j+1}}$ é um $\mathbb{Z}Q$-quociente de $\frac{\Omega^j A}{\Omega^{j+1} A}$ e sobre esses módulos Q' age trivialmente, temos pela aditividade de Σ^c para módulos sobre anéis de grupos abelianos [11, Prop. 2.2] que

$$\Sigma^c_{\frac{M_j}{M_{j+1}}}(Q) \cup \Sigma^c_{\frac{B_j}{B_{j+1}}}(Q) \subseteq \Sigma^c_{\frac{\Omega^j A}{\Omega^{j+1} A}}(Q) = \Sigma^c_{\Omega^j A}(Q) \subseteq \Sigma^c_A(Q).$$

Logo, pelo Lema 2.11 temos que

$$0 \notin \Sigma^c_A(Q) + \Sigma^c_A(Q) + \Sigma^c_A(Q),$$

portanto para quaisquer i, j, α

$$0 \notin \Sigma^c_{\frac{M_i}{M_{i+1}}}(Q) + \Sigma^c_{\frac{B_j}{B_{j+1}}}(Q) + \Sigma^c_{\frac{C_\alpha}{C_{\alpha+1}}}(Q).$$

Portanto pela Proposição 2.9 $Aug(\mathbb{Z}(A/A_1)) \otimes A_1 \otimes A_1$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}(G/A_1)$-módulo, onde A/A_1 age sobre $Aug(\mathbb{Z}(A/A_1))$ via multiplicação no anel e Q age diagonalmente. Observamos que $(Aug(\mathbb{Z}(A/A_1))) \otimes (A_1 \wedge A_1)$ é um quociente de $(Aug(\mathbb{Z}(A/A_1))) \otimes A_1 \otimes A_1$, pois $A_1 \wedge A_1$ é um quociente de $A_1 \otimes A_1$. Então, $Aug(\mathbb{Z}(A/A_1)) \otimes$

$(A_1 \wedge A_1)$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}(G/A_1)$-módulo. Portanto, por [15, Corolário 9] $A_1 \wedge A_1$ tem tipo FP_1 como $\mathbb{Z}(G/A_1)$-módulo se, e somente se, $Aug(\mathbb{Z}(A/A_1)) \otimes (A_1 \wedge A_1)$ tem tipo FP_0 como $\mathbb{Z}(G/A_1)$-módulo. De fato, vamos generalizar [15, Cor. 9] na Prop. 4.6 na seção seguinte. ■

4.4 O caso $i = 1$

Proposição 4.6. *Sejam H um grupo finitamente gerado com $\mathbb{Z}H$ anel Noetheriano à esquerda, M_1 e M_2 $\mathbb{Z}H$-módulos finitamente gerados. Consideramos M_2 como um $\widetilde{G} = M_1 \rtimes H$-módulo via projeção canônica $\widetilde{G} \to H$. Então M_2 é do tipo FP_s como $\mathbb{Z}\widetilde{G}$-módulo à esquerda se, e somente se $(Aug\mathbb{Z}M_1) \otimes_{\mathbb{Z}} M_2$ é do tipo FP_{s-1} como $\mathbb{Z}\widetilde{G}$-módulo à esquerda, onde M_1 age via multiplicação sobre $Aug(\mathbb{Z}M_1)$ e H age diagonalmente.*

Demonstração. Seja

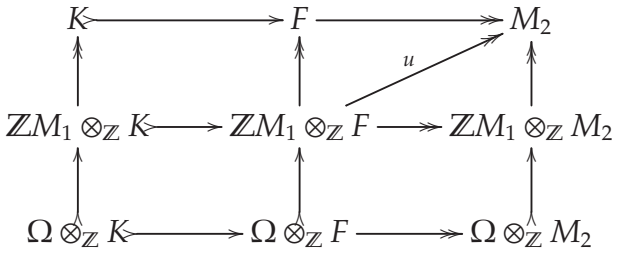
$$K \rightarrowtail F \twoheadrightarrow M_2$$

a sequência exata curta de $\mathbb{Z}H$-módulos com F livre e finitamente gerado. Uma vez que $\mathbb{Z}H$ é Noetheriano, K também será finitamente gerado e portanto tem tipo FP_∞. Consideremos também a sequência exata curta natural

$$\Omega \rightarrowtail \mathbb{Z}M_1 \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$$

com Ω o ideal de aumento $Aug\mathbb{Z}M_1$ de $\mathbb{Z}M_1$.

Fazendo o produto tensorial sobre $\mathbb{Z}$ dessas duas sequências, obtemos o seguinte diagrama comutativo:



No diagrama, todas as linhas e colunas são exatas, pois $\mathbb{Z}M_1$ e Ω são $\mathbb{Z}$-módulos livres e portanto planos. Observe também que o isomorfismo

$$\mathbb{Z}M_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}H \simeq \mathbb{Z}\widetilde{G}$$

implica que as duas últimas linhas no diagrama são sequências de $\mathbb{Z}\widetilde{G}$-módulos. A aplicação u, obtida como a composição dos dois lados do quadrado superior à direta, é também um $\mathbb{Z}\widetilde{G}$-homomorfismo e seu domínio $\mathbb{Z}M_1 \otimes_{\mathbb{Z}} F$ é claramente um $\mathbb{Z}\widetilde{G}$-módulo livre finitamente gerado.

Uma caça-ao-diagrama nos mostra que a sequência de $\mathbb{Z}\widetilde{G}$-módulos

$$\mathbb{Z}M_1 \otimes_{\mathbb{Z}} K \to ker(u) \to \Omega \otimes_{\mathbb{Z}} M_2$$

é exata e, de fato, uma sequência de $\mathbb{Z}\widetilde{G}$-módulos. Como K tem tipo FP_∞ como $\mathbb{Z}H$-módulo $\mathbb{Z}M_1 \otimes_{\mathbb{Z}} K$ tem tipo FP_∞ como $\mathbb{Z}\widetilde{G}$-módulo. Portanto, $ker(u)$ é do tipo FP_m se, e somente se $\Omega \otimes_{\mathbb{Z}} M_2$ é do tipo FP_m. Uma vez que u tem domínio um $\mathbb{Z}\widetilde{G}$-módulo do tipo FP_∞, seu núcleo é do tipo FP_{s-1} se, e somente se, sua imagem M_2 é do tipo FP_s. ■

Corolário 4.7. *Temos que A_1 tem tipo FP_2 como $\mathbb{Z}(G/A_1)$-módulo se, e somente se, $(Aug\mathbb{Z}(A/A_1))\otimes_{\mathbb{Z}} A_1$ tem tipo FP_1 como G/A_1-módulo.*

Lema 4.8. *Se $G = N \rtimes H$ é finitamente gerado e H tem tipo FP_s. Então temos que G tem tipo FP_s se, e somente se $Aug\mathbb{Z}N$ é do tipo FP_{s-1} como $\mathbb{Z}G$-módulo, onde $\mathbb{Z}N$ age via multiplicação e H age via conjugação sobre $Aug\mathbb{Z}N$.*

Demonstração. Considere a sequência exata curta de $\mathbb{Z}G$-módulos

$$Aug\mathbb{Z}G \rightarrowtail \mathbb{Z}G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}.$$

Assim pela Proposição 1.69 G é do tipo FP_s, isto é, $\mathbb{Z}$ é do tipo FP_s como $\mathbb{Z}G$-módulo se, e somente se $Aug\mathbb{Z}G$ é do tipo FP_{s-1} como $\mathbb{Z}G$-módulo.

Analogamente H é do tipo FP_s se, e somente se $Aug(\mathbb{Z}H)$ é do tipo FP_{s-1} como $\mathbb{Z}H$-módulo. Por hipótese H tem tipo FP_s portanto $Aug(\mathbb{Z}H)$ é do tipo FP_{s-1} como $\mathbb{Z}H$-módulo.

Agora, como $\mathbb{Z}G\otimes_{\mathbb{Z}H}$ é funtor exato temos que $\mathbb{Z}G\otimes_{\mathbb{Z}H} Aug(\mathbb{Z}H)$ é do tipo FP_{s-1} como $\mathbb{Z}G$-módulo. Assim, pelo argumento de diminuição de dimensão, isto é, Proposição

1.69 aplicado para a sequência exata curta de $\mathbb{Z}G$-módulos

$$\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} Aug(\mathbb{Z}H) \to Aug(\mathbb{Z}G) \to Aug(\mathbb{Z}N),$$

temos que $Aug(\mathbb{Z}G)$ é do tipo FP_{s-1} como $\mathbb{Z}G$-módulo se, e somente se $Aug\mathbb{Z}N$ é do tipo FP_{s-1} como $\mathbb{Z}G$-módulo. ■

Proposição 4.9. *Sejam A e B $\mathbb{Z}Q$-módulos finitamente gerados onde Q é finitamente gerado nilpotente de classe 2, Q' age trivialmente sobre B e Q' age nilpotentemente sobre A, $A \rtimes Q$ é do tipo FP_3 e $\Sigma^c_B(Q) \subseteq \Sigma^c_A(Q)$. Então $B \rtimes Q$ tem tipo FP_3.*

Demonstração. Temos que Q' age trivialmente sobre B. Portanto $Q' \lhd (B \rtimes Q)$ e como Q' é finitamente gerado nilpotente de classe 2, portanto policíclico, temos que Q' é do tipo FP_∞. Considere a sequência exata de grupos

$$Q' \rightarrowtail B \rtimes Q \twoheadrightarrow B \rtimes \frac{Q}{Q'}.$$

Assim pela Proposição 1.79 temos que $B \rtimes Q$ é do tipo FP_3 se, e somente se $B \rtimes \frac{Q}{Q'}$ é FP_3. Pelo Lema 2.11 temos que

$$0 \notin \Sigma^c_A(Q) + \Sigma^c_A(Q) + \Sigma^c_A(Q)$$

e como

$$\Sigma^c_B(Q) + \Sigma^c_B(Q) + \Sigma^c_B(Q) \subseteq \Sigma^c_A(Q) + \Sigma^c_A(Q) + \Sigma^c_A(Q)$$

obtemos que

$$0 \notin \Sigma^c_B(Q) + \Sigma^c_B(Q) + \Sigma^c_B(Q).$$

Finalmente como Q' age trivialmente sobre B e cada caracter de Q contém Q' no seu núcleo temos que $\Sigma^c_B(\frac{Q}{Q'}) = \Sigma^c_B(Q)$. Logo

$$0 \notin \Sigma^c_B(Q/Q') + \Sigma^c_B(Q/Q') + \Sigma^c_B(Q/Q').$$

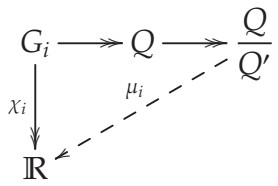
Observe que $B \rtimes (Q/Q')$ é um grupo metabeliano e pelo resultado principal de [9] para grupos metabelianos que são extensões cindidas de grupos abelianos vale a

Conjectura FP_3. Portanto como B é 3-tame como $\mathbb{Z}(Q/Q')$-módulo temos que $B \rtimes (Q/Q')$ tem tipo FP_3. Então $B \rtimes Q$ é do tipo FP_3. ■

Teorema 4.10. *Sejam A e B $\mathbb{Z}Q$-módulos finitamente gerados onde Q é finitamente gerado nilpotente de classe 2, Q' age trivialmente sobre B e Q' age nilpotentemente sobre A, $A \rtimes Q$ do tipo FP_3 e $\Sigma^c_B(Q) \subseteq \Sigma^c_A(Q)$. Então $(A \oplus B) \rtimes Q$ tem tipo FP_3.*

Demonstração. Para provar o teorema, vamos primeiramente mostrar que $N = (A \oplus B) \rtimes (Q' \times Q')diag(Q)$ é do tipo FP_3 onde $diag(Q) = \{(q, q) \mid q \in Q\} \subset Q \times Q$. Temos que $G_1 = A \rtimes Q$ e $G_2 = B \rtimes Q$ são do tipo FP_3, logo $G = G_1 \times G_2$ é do tipo FP_3 e temos também que $G' \subseteq N \subseteq G$.

Suponhamos que N não é do tipo FP_3. Pelo Teorema 1.96 temos que $S(G;N) \nsubseteq \Sigma^3(G;\mathbb{Z})$. Assim, existe $\chi : G \to \mathbb{R}$, $\chi(N) = 0$ tal que $[\chi] \in \Sigma^3(G;\mathbb{Z})^c$. Seja $\chi_i = \chi|_{G_i}$, assim temos um diagrama comutativo



onde as aplicações horizontais são os homomorfismos canônicos. Assim, dado $\overline{q} = qQ' \in Q/Q'$, temos $\mu_1(\overline{q}) + \mu_2(\overline{q}) = \chi((q, q)) = 0$ (pois $diag(Q) \subseteq N$), onde $\mu_i = \chi_i|_Q$.

Pelo Teorema 1.98 temos duas situações possíveis:

$$I \begin{cases} [\chi_1] \in \Sigma^1(G_1;\mathbb{Z})^c \\ [\chi_2] \in \Sigma^2(G_2;\mathbb{Z})^c \end{cases} \qquad ou \qquad II \begin{cases} [\chi_1] \in \Sigma^2(G_1;\mathbb{Z})^c \\ [\chi_2] \in \Sigma^1(G_2;\mathbb{Z})^c \end{cases}$$

Consideremos primeiro o caso I. Pelo Teorema 3.38 temos que

$$\Sigma^2(G_i;\mathbb{Z})^c = conv_{\leq 2}\Sigma^1(G_i;\mathbb{Z})^c \text{ para } i = 1, 2.$$

Assim, temos que $[\chi_2] \in \Sigma^2(G_2;\mathbb{Z})^c = conv_{\leq 2}\Sigma^1(G_2;\mathbb{Z})^c$.

Recordamos que pelo Lema 2.12 temos que se $\mu : G_1 \to \mathbb{R}$ com $\mu(A) = 0$ então $[\mu] \in \Sigma^1(G_1;\mathbb{Z})^c$ se, e somente se $[\mu|_Q] \in \Sigma^c_A(Q)$. No caso I

$[\chi_1] \in \Sigma^1(G_1;\mathbb{Z})^c$ portanto $[\mu_1] \in \Sigma^c_A(Q)$,
$[\chi_2] \in \Sigma^2(G_2;\mathbb{Z})^c = conv_{\leq 2}\Sigma^2(G_2;\mathbb{Z})^c$ portanto $[\mu_2] \in conv_{\leq 2}\Sigma^c_B(Q)$.

Então

$$0 = \mu_1 + \mu_2 \in \Sigma^c_A(Q) + \Sigma^c_B(Q) + \Sigma^c_B(Q) \subseteq conv_{\leq 3}\Sigma^c_A(Q).$$

O que é uma contradição, pois pelo Lema 2.11 $0 \notin conv_{\leq 3}\Sigma^c_A(Q)$. O caso II é análogo.

Assim, temos que $N = (A \oplus B) \rtimes (Q' \times Q')diag(Q)$ é do tipo FP_3. Observemos agora que $1 \times Q' \lhd Q \times Q$, como Q' age trivialmente sobre B temos que $1 \times Q' \lhd N$. Portanto temos uma sequência exata curta de grupos

$$1 \times Q' \rightarrowtail N \twoheadrightarrow \frac{N}{1 \times Q'}.$$

Como $1 \times Q' \simeq Q'$ é um grupo policíclico, $1 \times Q'$ tem tipo FP_∞ e recordemos que N tem tipo FP_3. Logo, pela Proposição 1.79, temos que $\dfrac{N}{1 \times Q'}$ tem tipo FP_3.

Para finalizarmos a demonstração, vamos mostrar que $\dfrac{N}{1 \times Q'} \simeq (A \oplus B) \rtimes Q$. Observe que $(A \oplus B) \rtimes Q = (A \oplus B)diag(Q)$ e também temos que $\dfrac{(Q' \times Q')diag(Q)}{1 \times Q'} = \dfrac{(1 \times Q')diag(Q)}{1 \times Q'} \simeq diag(Q)$. Mas $\dfrac{N}{1 \times Q'} = (A \oplus B) \rtimes \dfrac{(Q' \times Q')diag(Q)}{1 \times Q'}$, assim como $(A \oplus B)diag(Q) \simeq \dfrac{N}{1 \times Q'}$, temos o resultado. ∎

Lema 4.11. *Nas condições do Teorema 4.10 temos que $Aug\mathbb{Z}(A \oplus B)$ é do tipo FP_2 como $\mathbb{Z}((A \oplus B) \rtimes Q)$-módulo.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.10 $(A \oplus B) \rtimes Q$ tem tipo FP_3. Então podemos aplicar o Lema 4.8 para $N = (A \oplus B)$ e $H = Q$. ∎

Lembrando que, pelo Corolário 4.7, queremos mostrar que $(Aug\mathbb{Z}(A/A_1)) \otimes_{\mathbb{Z}} A_1$ é do tipo FP_1 como $\mathbb{Z}(G/A_1)$-módulo. Observamos também que A_1 podia ser escolhido como qualquer $\mathbb{Z}Q$-submódulo não trivial do $\mathbb{Z}Q$-módulo A_0. Como Q' age nilpotentemente sobre A o mesmo vale para A_0 portanto podemos escolher A_1 de tal maneira que Q' age trivialmente sobre A_1 (isto é, existe cadeia de $\mathbb{Z}Q$-submódulos de A_0 tal que Q' age

nilpotentemente sobre cada quociente

$$A_0 \supset \Omega A_0 \supset \Omega^2 A_0 \supset ... \supset \Omega^{m-1} A_0 \supset \Omega^m A_0 = 0,$$

onde definimos $A_1 = \Omega^{m-1} A_0$ como o menor módulo (via inclusão) não trivial esta cadeia).

Proposição 4.12. *Se Q' age trivialmente sobre A_1 temos que $(Aug\mathbb{Z}(A/A_1)) \otimes_{\mathbb{Z}} A_1$ é do tipo FP_1 como $\mathbb{Z}(G/A_1)$-módulo.*

Demonstração. Como Ω age nilpotentemente sobre A, temos que A tem uma filtração de $\mathbb{Z}Q$-submódulos dada por

$$A = M_0 \supset \Omega A = M_1 \supset \Omega^2 A = M_2 \supset ... \supset \Omega^m A = 0,$$

onde Q' age trivialmente sobre os quocientes $\dfrac{M_i}{M_{i+1}}$. Essa filtração induz uma filtração de A_1 dada por

$$A_1 = N_0 \supset A_1 \cap M_1 = N_1 \supset ... \supset A_1 \cap M_j = N_j \supset ... \supset N_s = 0,$$

onde Q' age trivialmente sobre os quocientes $\dfrac{N_j}{N_{j+1}}$.

Sabemos pelo Lema 4.11 que $Aug(\mathbb{Z}(A \oplus A_1))$ tem tipo FP_2 como $\mathbb{Z}((A \oplus A_1) \rtimes Q)$-módulo. Considere a sequência exata curta de $\mathbb{Z}((A \oplus A_1) \rtimes Q)$-módulos

$$Aug(\mathbb{Z}A) \otimes Aug(\mathbb{Z}A_1) \to (Aug(\mathbb{Z}A) \otimes \mathbb{Z}A_1) \oplus (\mathbb{Z}A \otimes Aug(\mathbb{Z}A_1)) \to Aug(\mathbb{Z}(A \oplus A_1)).$$

Como $A \rtimes Q$ tem tipo FP_3, pelo Lema 4.8 temos que $Aug(\mathbb{Z}A)$ tem tipo FP_2 como $\mathbb{Z}(A \rtimes Q)$-módulo, o que implica que $\mathbb{Z}A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} (Aug(\mathbb{Z}A)) \simeq (Aug(\mathbb{Z}A)) \otimes \mathbb{Z}A_1$ tem tipo FP_2 como $\mathbb{Z}((A \oplus A_1) \rtimes Q)$-módulo. Analogamente temos que $\mathbb{Z}A \otimes (Aug\mathbb{Z}A_1)$ é FP_2 como $\mathbb{Z}((A \oplus A_1) \rtimes Q)$-módulo. Então pela Proposição 1.69 temos que $(Aug\mathbb{Z}A) \otimes_{\mathbb{Z}} (Aug\mathbb{Z}A_1)$ tem tipo FP_1 como $\mathbb{Z}((A \oplus A_1) \rtimes Q)$-módulo. Agora, matando a ação de A_1 e usando o fato que o produto tensorial é functor exato à direita, temos que $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}A_1} (Aug(\mathbb{Z}A)) \otimes_{\mathbb{Z}} (Aug(\mathbb{Z}A_1)) \simeq (Aug\mathbb{Z}A) \otimes \dfrac{Aug\mathbb{Z}A_1}{(Aug\mathbb{Z}A_1)^2}$ tem tipo FP_1 como $\mathbb{Z}(A \rtimes Q)$-módulo. Mas $\dfrac{Aug\mathbb{Z}A_1}{(Aug\mathbb{Z}A_1)^2} \simeq A_1$ via o morfismo que envia $a - 1 + (Aug\mathbb{Z}A_1)^2$ para a, onde $a \in A_1$. Logo $(Aug\mathbb{Z}A) \otimes A_1$ tem tipo FP_1 como $\mathbb{Z}(A \rtimes Q)$-módulo.

Agora, considere a sequência exata curta de $\mathbb{Z}(A \rtimes Q)$-módulos

$$(\mathbb{Z}A(Aug(\mathbb{Z}A_1))) \otimes A_1 \rightarrowtail (Aug\mathbb{Z}A) \otimes A_1 \twoheadrightarrow (Aug\mathbb{Z}(A/A_1)) \otimes A_1.$$

Sabemos que $(Aug\mathbb{Z}A) \otimes A_1$ é do tipo FP_1 como $\mathbb{Z}(A \rtimes Q)$-módulo, assim para mostrar que $(Aug\mathbb{Z}(\frac{A}{A_1})) \otimes A_1$ é do tipo FP_1 como $\mathbb{Z}(A \rtimes Q)$-módulo, precisamos mostrar que $(\mathbb{Z}A(Aug(\mathbb{Z}A_1))) \otimes A_1$ é do tipo FP_0 como $\mathbb{Z}(A \rtimes Q)$-módulo. Mas temos que

$$(\mathbb{Z}A(Aug(\mathbb{Z}A_1))) \otimes A_1 \simeq \mathbb{Z}A \otimes_{\mathbb{Z}A_1} (Aug(\mathbb{Z}A_1)) \otimes A_1 \simeq \mathbb{Z}(A \rtimes Q) \otimes_{\mathbb{Z}(A_1 \rtimes Q)} (Aug(\mathbb{Z}A_1) \otimes A_1)$$

o qual é FP_0 como $\mathbb{Z}(A \rtimes Q)$-módulo pois, usando a filtração de A_1 dada anteriormente temos que Q' age trivialmente sobre $\dfrac{N_j}{N_{j+1}} = \dfrac{A_1 \cap \Omega^j A}{A_1 \cap \Omega^{j+1} A} \subseteq \dfrac{\Omega^j A}{\Omega^{j+1} A}$ e como $\Sigma^c_{\frac{\Omega^j A}{\Omega^{j+1}}}(Q) = \Sigma^c_{\Omega^j A}(Q) = \Sigma^c_A(Q)$ e por [15, Teo. 1] temos que $\Sigma^c_A(Q) \cap -\Sigma^c_A(Q) = \emptyset$ temos por [15, Prop. 10] temos que $(Aug(\mathbb{Z}A_1)) \otimes_{\mathbb{Z}} A_1$ é FP_0 como $\mathbb{Z}(A_1 \rtimes Q)$-módulo. Assim, concluímos que $(Aug(\mathbb{Z}(A/A_1))) \otimes A_1$ é do tipo FP_1 sobre $\mathbb{Z}(A \rtimes Q)$, onde A_1 age trivialmente. Logo, pelo Lema 1.78, $(Aug(\mathbb{Z}(A/A_1))) \otimes A_1$ é do tipo FP_1 sobre $\mathbb{Z}((A/A_1) \rtimes Q)$. ∎

Corolário 4.13. *Se Q' age trivialmente sobre A_1 então A_1 tem tipo FP_2 como $\mathbb{Z}(G/A_1)$-módulo.*

Demonstração. Segue da última proposição e Corolário 4.7. ∎

4.5 O caso $i = 3$

Temos que mostrar que $H_3(A_1; \mathbb{Z})$ é do tipo FP_0 como $\mathbb{Z}(G/A_1)$-módulo. Observamos que $G/A_1 \simeq (A/A_1) \rtimes Q$ e a ação de G/A_1 sobre $H_3(A_1; \mathbb{Z})$ é induzida pela ação de G sobre A_1 via conjugação. Como A é um grupo abeliano isto implica que A/A_1 age trivialmente sobre $H_3(A_1; \mathbb{Z})$ e ação de G/A_1 induz uma ação de $Q \simeq (G/A_1)/(A/A_1)$ sobre $H_3(A_1; \mathbb{Z})$.

Proposição 4.14. *$H_3(A_1; \mathbb{Z})$ tem tipo FP_0 como $\mathbb{Z}Q$-módulo. Portanto $H_3(A_1; \mathbb{Z})$ tem tipo FP_0 como $\mathbb{Z}(G/A_1)$-módulo.*

Demonstração. Primeiramente, observemos que A_1 possui uma filtração dada por

$$0 = B_0 \subseteq B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots \subseteq B_{k-1} \subseteq B_k = A_1$$

onde $B_{k-1} = Tor(B_k)$ é o subgrupo de $B_k = A_1$ gerado pelos elementos de ordem finita. Portanto B_k/B_{k-1} é livre de torção e os outros termos da filtração são dados da seguinte maneira:

Para cada $b \in B_{k-1}$, existe $m(b) \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ tal que $m(b)b = 0$. Como B_{k-1} é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo, pois B_{k-1} é um $\mathbb{Z}Q$-submódulo de B_k, onde $\mathbb{Z}Q$ é Noetheriano, temos que

$$B_{k-1} = \mathbb{Z}Qb_1 + \mathbb{Z}Qb_2 + \cdots + \mathbb{Z}Qb_s.$$

Assim para cada b_i, $i \in \{1, 2, ..., s\}$ existe $m_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que $m_i b_i = 0$ e portanto tomando $m = MMC(m_1, m_2, ..., m_s) > 0$ temos que $mB_{k-1} = 0$. Decompondo m como $m = p_1^{z_1}.p_2^{z_2}...p_r^{z_r}$, onde os p_i's são primos e $z_i \in \mathbb{Z}$ com $z_i \geq 1$ temos que B_{k-1} tem uma filtração dada por

$$0 = mB_{k-1} \subseteq p_1^{z_1}.p_2^{z_2}...p_r^{z_r-1}B_{k-1} \subseteq ... \subseteq p_1^{z_1}.p_2^{z_2}...p_{r-1}^{z_{r-1}}B_{k-1}$$
$$\subseteq p_1^{z_1}.p_2^{z_2}...p_{r-1}^{z_{r-1}-1}B_{k-1} \subseteq ... \subseteq p_1^{z_1}B_{k-1} \subseteq p_1^{z_1-1}B_{k-1} \subseteq ... \subseteq p_1B_{k-1} \subseteq B_{k-1}$$

e portanto temos a filtração de A_1 dada anteriormente onde $B_{k-2} = p_1B_{k-1}, B_{k-3} = p_1^2B_{k-1}, ..., B_1 = p_1^{z_1}.p_2^{z_2}...p_r^{z_r-1}B_{k-1}$ e $B_0 = mB = 0$ e B_j/B_{j-1} tem expoente um número primo ou $B_j/B_{j-1} = 0$. Descartando quocientes que são triviais e reenumerando os índices podemos supor que B_j/B_{j-1} tem expoente primo.

Agora, seja $B \lhd G$, onde $B \subseteq A_1$, isto é, B é um $\mathbb{Z}Q$-submódulo de A_1. Logo, existe uma sequência espectral, veja Teorema 1.61, tal que

$$E^2_{i,j} = H_i(A_1/B, H_j(B, \mathbb{Z})) \overset{\Rightarrow}{p} H_{i+j}(A_1, \mathbb{Z}),$$

onde A_1/B age sobre B via conjugação (a ação é trivial pois A_1 é um grupo abeliano) e portanto A_1/B age trivialmente sobre $H_j(B, \mathbb{Z})$ o que implica que temos isomorfismo de $\mathbb{Z}Q$-módulos

$$H_i(A_1/B, H_j(B, \mathbb{Z})) \simeq H_i(A_1/B, \mathbb{Z}) \otimes H_j(B, \mathbb{Z}),$$

com Q agindo sobre A_1 e A_1/B via conjugação e a ação de Q sobre o lado direito do isomorfismo em cima é diagonal.

Pela convergência da sequência espectral existe uma filtração de $H_3(A_1, \mathbb{Z})$ com quocientes $E^\infty_{i,j}$ onde $i+j = 3$. Temos que $E^\infty_{i,j}$ é um subquociente de $E^2_{i,j}$ (de $\mathbb{Z}Q$-submódulos), isto é, existe $R^{(2)}_{i,j} \subseteq R^{(1)}_{i,j} \subseteq E^2_{i,j}$, com $R^{(1)}_{i,j}/R^{(2)}_{i,j} = E^\infty_{i,j}$. Como $\mathbb{Z}Q$ é Noetheriano, se $E^2_{i,j}$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo, teremos que $E^\infty_{i,j}$ também será finitamente gerado

como $\mathbb{Z}Q$-módulo, o que implica que $H_3(A_1, \mathbb{Z})$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo. Portanto é suficiente mostrar que $E^2_{i,j}$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo via ação diagonal.

Observamos que mostramos o seguinte : se $H_i(A_1/B, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H_j(B, \mathbb{Z})$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo via ação diagonal para cada $i + j = 3$ então $H_3(A_1, \mathbb{Z})$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo. Repetindo este argumento temos que se $H_{i_1}(B_1/B_0, \mathbb{Z}) \otimes H_{i_2}(B_2/B_1, \mathbb{Z}) \otimes \cdots \otimes H_{i_k}(B_k/B_{k-1}, \mathbb{Z})$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo para quaisquer $i_1 + i_2 + \cdots + i_k = 3$ então $H_3(A_1, \mathbb{Z})$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo.

Assim, podemos considerar vários casos dependendo de $max\{i_1, i_2, ..., i_k\}$:

Caso 1. $max\{i_1, i_2, ..., i_k\} = 1$

Supomos, sem perda de generalidade, que $i_\alpha = i_\beta = i_\gamma = 1$, $\alpha < \beta < \gamma$, e o resto é 0. Assim,

$$H_{i_\alpha}(B_\alpha/B_{\alpha-1}, \mathbb{Z}) \otimes H_{i_\beta}(B_\beta/B_{\beta-1}, \mathbb{Z}) \otimes H_{i_\gamma}(B_\gamma/B_{\gamma-1}, \mathbb{Z}) =$$
$$H_1(B_\alpha/B_{\alpha-1}, \mathbb{Z}) \otimes H_1(B_\beta/B_{\beta-1}, \mathbb{Z}) \otimes H_1(B_\gamma/B_{\gamma-1}, \mathbb{Z}) =$$
$$(B_\alpha/B_{\alpha-1}) \otimes (B_\beta/B_{\beta-1}) \otimes (B_\gamma/B_{\gamma-1}).$$

Para simplificar a notação, vamos escrever $B_\alpha/B_{\alpha-1} = V_1$, $B_\beta/B_{\beta-1} = V_2$ e $B_\gamma/B_{\gamma-1} = V_3$.

Pelo Lema 2.6 temos que $\Sigma^c_{V_i}(Q) \subseteq \Sigma^c_A(Q)$ e pelo Lema 2.11 temos que $0 \notin \Sigma^c_A(Q) + \Sigma^c_A(Q) + \Sigma^c_A(Q)$, o que implica que

$$0 \notin \Sigma^c_{V_1}(Q) + \Sigma^c_{V_2}(Q) + \Sigma^c_{V_3}(Q).$$

Agora aplicando o Corolário 2.10 temos que $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo. E assim terminamos o primeiro caso.

Caso 2. Suponha $max\{i_1, i_2, ..., i_k\} = 2$. Portanto, $i_\alpha = 1$ e $i_\beta = 2$ e os outros são 0.

Assim, temos

$$H_1(B_{i_\alpha}/B_{i_\alpha-1}, \mathbb{Z}) \otimes H_2(B_{i_\beta}/B_{i_\beta-1}, \mathbb{Z}),$$

e denotando $B_{i_\alpha}/B_{i_\alpha-1} = V_1$ e $B_{i_\beta}/B_{i_\beta-1} = V_2$ temos $H_2(V_2, \mathbb{Z}) = V_2 \wedge V_2$

$$H_1(B_{i_\alpha}/B_{i_\alpha-1}, \mathbb{Z}) \otimes H_2(B_{i_\beta}/B_{i_\beta-1}, \mathbb{Z}) = V_1 \otimes (V_2 \wedge V_2).$$

Como $V_2 \otimes V_2 \twoheadrightarrow V_2 \wedge V_2$ temos $V_1 \otimes V_2 \otimes V_2 \twoheadrightarrow V_1 \otimes (V_2 \wedge V_2)$. Assim, basta aplicarmos

o caso 1 para $V_2 = V_3$, isto é, $V_1 \otimes V_2 \otimes V_2$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo e portanto $V_1 \otimes (V_2 \wedge V_2)$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo.

Caso 3. Suponha $max\{i_1, i_2, ..., i_k\} = 3$. Portanto, $i_\alpha = 3$ e o resto iguais a 0.

Vamos dividir esse caso em outros dois casos, que são os seguintes:

I. $\alpha = k$.

Nesse caso, temos que $B_\alpha/B_{\alpha-1} = B_k/B_{k-1}$, que é livre de torção. Chamando $B_k/B_{k-1} = V$, temos que existe um isomorfismo natural $H_3(V, \mathbb{Z}) \simeq V \wedge V \wedge V$ [[12], Capítulo 5, Teorema 6.4]. E como $V \otimes V \otimes V \twoheadrightarrow V \wedge V \wedge V$, temos como no caso 1 que $V \otimes V \otimes V$ é finitamente gerado, portanto $V \wedge V \wedge V$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo. E, portanto, $H_3(B_\alpha/B_{\alpha-1}, \mathbb{Z})$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo.

II. $\alpha < k$.

Sabemos que $B_\alpha/B_{\alpha-1} = V$ tem expoente p um primo p. Tomando a sequência exata curta de $\mathbb{Z}$-módulos dada por

$$p\mathbb{Z} \rightarrowtail \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$$

temos uma sequência exata de homologia

$$H_3(V, p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\theta} H_3(V, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} H_3(V, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rightarrow H_2(V, p\mathbb{Z}) \rightarrow \cdots .$$

Por outro lado, como $pV = 0$, temos que $Im(\theta) = pH_3(V, \mathbb{Z}) = 0$, o que implica que ∂ é injetivo. Logo

$$H_3(V, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H_3(V, \mathbb{F}_p).$$

Assim, se $H_3(V, \mathbb{F}_p)$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo teremos que $H_3(V, \mathbb{Z})$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo.

Portanto, o próximo passo será estudar $H_3(V, \mathbb{F}_p)$. Por [12, Teorema 6.6], para qualquer grupo abeliano D, $H_3(D, \mathbb{F}_p)$ existe uma filtração natural

$$\wedge^3 D_p \rightarrow H_3(D, \mathbb{F}_p) \rightarrow (D_p) \otimes ({}_pD)$$

onde $D_p = D/pD$ e ${}_pD = \{d \in D \mid pd = 0\}$. Portanto, para $D = V$ temos $V_p = V = {}_pV$,

logo temos uma sequência exata curta de $\mathbb{Z}Q$-módulos

$$\wedge^3 V \to H_3(V, \mathbb{F}_p) \to V \otimes V.$$

Como $\wedge^3 V$ e $V \otimes V$ são finitamente gerados como $\mathbb{Z}Q$-módulos temos que $H_3(V, \mathbb{F}_p)$ também é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo. ■

4.6 Segundo resultado principal

Teorema 4.15. *Seja $G = A \rtimes Q$ um grupo de tipo FP_4 com A abeliano e Q nilpotente de classe 2. Então cada quociente de G tem tipo FP_4 também.*

Demonstração. Por [15] G é nilpotente-por-abeliano-por-finito, assim podemos supor que é nilpotente-por-abeliano. Usando a redução da seção 4.2 podemos supor que Q' age nilpotentemente sobre A.

Dado $N \lhd G$, pelo Lema 4.2, vimos que para mostrar que G/N tem tipo FP_4 é suficiente mostrar que G/A_0 tem tipo FP_4. Pela discussão seguinte ao Lema 4.2 é suficiente mostrar que existe $\mathbb{Z}Q$-submódulo não trivial A_1 de A_0 tal que G/A_1 tem tipo FP_4. Mostramos nas seções 4.3, 4.4 e 4.5 que $H_i(A_1, \mathbb{Z})$ tem tipo FP_{3-i} como $\mathbb{Z}(G/A_1)$-módulo, com $1 \leq i \leq 3$.

Finalmente pelo Corolário 4.4 cada quociente de G tem tipo FP_4 também. ■

Referências Bibliográficas

[1] H. Abels, *An example of a finitely presented solvable group*, Homological group theory (Proc. Sympos., Durham, 1977), pp. 205–211, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 36, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York, 1979.

[2] H. Åberg, *Bieri-Strebel valuations (of finite rank)*, Proc. London Math. Soc. (3) 52 (1986), no. 2, 269–304

[3] M. Bestvina, N. Brady, *Morse theory and finiteness properties of groups*, Invent. Math. 129, 3 (1997), 445-470.

[4] R. Bieri, *Homological Dimension of Discrete Groups*, QMW Math. Notes, 1981.

[5] R. Bieri, J.R.J Groves, *The geometry of the set of characters induced by valuations*, J. Reine Angew.Math 347(1984) 168-195.

[6] R. Bieri, J.R.J. Groves, *Tensor powers of module over finitely generated abelian groups*, J. Algebra 97(1985) 68-78.

[7] R. Bieri, J. R. J. Groves, *Metabelian groups of type* $(\mathrm{FP})_\infty$ *are virtually of type* (FP), Proc. London Math. Soc. (3) 45 (1982), no. 2, 365–384

[8] R. Bieri, J. Harlander, *A remark on the Polyhedrality Theorem for* $\sum$*-invariants of modules over abelian groups*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 131 (2201) 39-43.

[9] R. Bieri, J. Harlander, *On the* FP_3*-conjecture for metabelian groups*, J. London Math. Soc. (2) 64 (2001), no. 3, 595–610

[10] R. Bieri, B. Renz, *Valuations on free resolutions and higher geometric invariants of groups*, Comment. Math. Helv. 63(1988), 464-497.

[11] R. Bieri, R. Strebel, *Valuations and finitely presented metabelian groups*, Proc. London Math. Soc.(3) 41 (1980), 439-464.

[12] K.S. Brown, *Cohomology of Groups*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[13] D. E. Cohen, *Combinatorial group theory: a topological approach*, London Mathematical Society Student Texts, 14. Cambridge University Press, Cambridge, 1989

[14] J. R. J. Groves, D. H. Kochloukova, *Embedding properties of metabelian Lie algebras and metabelian discrete groups*, J. London Math. Soc. (2) 73 (2006), no. 2, 475–492

[15] J.R.J Groves, D.H Kochloukova, C.F. Rodrigues, *Abelian-by-polycyclic groups of homological type FP_3*, J. Group Theory 11 (2008) 609-621.

[16] J. Harlander, D. H. Kochloukova, *The Σ^2-conjecture for metabelian groups: the general case*, J. Algebra 273 (2004), no. 2, 435–454.

[17] J. Harlander, D. H. Kochloukova, *The Σ^3-conjecture for metabelian groups*, J. London Math. Soc. (2) 67 (2003), no. 3, 609–625

[18] D.H. Kochloukova, *A new characterisation of m-tame groups over finitely generated abelian groups.*, J. London Math. Soc. (2) 60 (1999), 802–816.

[19] D.H. Kochloukova, *The FP m-conjecture for a class of metabelian groups*, J. Algebra 184 (1996), no. 3, 1175-1204.

[20] D. H. Kochloukova, *Subgroups of constructible nilpotent-by-abelian groups and a generalization of a result of Bieri, Neumann and Strebel*, J. Group Theory 5 (2002), no. 2, 219–231

[21] D. H. Kochloukova, *The Σ^2-conjecture for metabelian groups and some new conjectures: the split extension case*, J. Algebra 222 (1999), no. 2, 357–375

[22] D. H. Kochloukova, *More about the geometric invariants $\Sigma^m(G)$ and $\Sigma^m(G, \mathbf{Z})$ for groups with normal locally polycyclic-by-finite subgroups*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 130 (2001), no. 2, 295–306

[23] D. S. Passman, *The Algebraic Structure of Group Rings*, Robert E. Krieger Publishing Company, 1985.

[24] D.J.S. Robinson, *A course in the theory of groups*, Springer-Verlag, 1980.

[25] C. F. Rodrigues, *Grupos abelianos-por-nilpotentes do tipo homológico FP_3*, tese de doutorado, Instituto de Matemática, Estatística e Computação, Campinas 2006.

[26] J. J. Rotman, *An introduction to Homological Algebra*. Academic Press New York San Franciso London, 1979.

[27] J. J. Rotman, *An introduction to Homological Algebra*. Universitext. Springer New York, second edition, 2009.

[28] D. Schütz, *On the direct product conjecture for sigma invariants*, Bull. London Math. Soc. 40 (2008), 675-684.

[29] D. Segal, *Polycyclic Groups*, Cambridge University Press, Cambridge 1990.

[30] C.C. Sims, *Computation with finitely presented groups*, Cambridge University Press, Cambridge 1994.