Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

AÇÕES DE SEMIGRUPOS EM ESPAÇOS HOMOGÊNEOS

Ronan Antonio dos Reis

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Prof. Dr. Luiz A. B. San Martin

Orientador

Prof. Dr. Carlos José Braga Barros

Co-orientador

Este trabalho teve apoio financeiro da CAPES.

AÇÕES DE SEMIGRUPOS EM ESPAÇOS HOMOGÊNEOS

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Ronan Antonio dos Reis** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 29 de Janeiro de 2004.

Prof. Dr. Luiz A. B. San Martin
Orientador

Prof. Dr. Carlos José Braga Barros
Co-orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Luiz A. B. San Martin.

Prof. Dr. Pedro Aladar Tonelli.

Prof. Dr. Marcelo Firer.

Prof. Dr. Márcio Antônio Faria Rosa.

Prof. Dr. Osvaldo Germano do Rocio.

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Reis, Ronan Antonio dos

~~R279a~~ R277a Ações de semigrupos em espaços homogêneos / Ronan Antonio dos Reis -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2004.

Orientador : Luiz Antonio Barrera San Martin

Co-orientador: Carlos José Braga Barros

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Semigrupos. 2. Lie, Grupos de. 3. Espaços homogêneos. I. San Martin, Luiz Antonio Barrera. II. Barros, Carlos José Braga. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Tese de Doutorado defendida em 29 de janeiro de 2004 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

Prof. (a). Dr (a). PEDRO ALADAR TONELLI

Prof. (a). Dr (a). OSVALDO GERMANO DO ROCIO

Prof. (a). Dr (a). MARCIO ANTONIO DE FARIA ROSA

Prof. (a). Dr (a). MARCELO FIRER

Agradecimentos

Agradeço

ao Prof. Luiz A. B. San Martin pela orientação deste trabalho, e ao Prof. Carlos José Braga Barros pela sua co-orientação.

a minha esposa Elisa e ao meu filho Micael pela compreensão nesta trajetória de nossas vidas.

aos meus familiares e amigos pelo estímulo constante.

à CAPES e á UNESP-FCT pelo suporte financeiro

a Deus, por esse momento da minha vida.

Índice

Resumo

Nesta tese, estudamos ações de subsemigrupos de grupos de Lie em seus espaços homogêneos. Consideramos principalmente subsemigrupos de grupos de Lie semi-simples. Introduzimos o conceito de reversibilidade módulo um subgrupo de um grupo. Mostramos diversos resultados envolvendo este conceito, por exemplo, que a reversibilidade pode ser estudada em termos dos conjuntos controláveis invariantes em certos espaços homogêneos compactos de um grupo de Lie semi-simples. Introduzimos também o conceito de mid-reversibilidade módulo um subgrupo de um grupo e apresentamos alguns resultados relacionados com a mid-reversibilidade. Apresentamos também o conceito tanto de reversibilidade quanto de mid-reversibilidade para um semigrupo agindo em um espaço topológico, bem como alguns resultados envolvendo estes conceitos. Um outro problema considerado foi o de calcular o número de conjuntos controláveis. Em nosso trabalho, apresentamos condições para determinar o número de conjuntos controláveis em espaços homogêneos compactos de grupos de Lie. Consideramos também o problema de decidir quais representações de dimensão finita de um grupo de Lie semi-simples real são representadas dentro de algum subsemigrupo próprio do grupo de Lie das matrizes reais com determinante 1. Nesta direção, apresentamos aqui alguns resultados parciais. Apresentamos também uma classificação completa para certas representações da álgebra de Lie das matrizes reais 2×2 com traço zero, que deixam cones invariantes em produtos exteriores do espaço da representação.

Abstract

In this work, we study actions of subsemigroups of Lie groups in their homogeneous spaces. We consider mainly actions of subsemigroups of semi-simple Lie groups in their homogeneous spaces.

We introduce the concept of reversibility modulo a subgroup of a group. We show several results involving this concept, for instance, that the reversibility can be studied in terms of the invariant control sets in a compact homogeneous space of a semi-simple Lie group.

We also introduce the concept of mid-reversibility modulo a subgroup of a group, and we present some results about this subject. We also present as the reversibility concept as the one mid-reversibility for a semigroup acting on a topological space, as well as some results involving this concepts.

Another considered problem was about calculating the number of control sets. In our work, we present conditions to determine the number of control sets on compact homogeneous space of a Lie group.

We still consider the problem on deciding which representations of finite dimension of a semi-simple Lie group can be represented in of some proper subsemigroup of the Lie group of the real matrices with the determinant one. In this direction, we present some partial results.

We also present a complete classification for certain representations of the Lie algebra of the real matrices 2×2 with trace zero, that leave invariant cones in a exterior product.

0.1 Introdução

Um dos principais conceitos no estudo dos sistemas de controle é a controlabilidade do sistema. Muitas questões relacionadas com a controlabilidade dependem do semigrupo de transformações definidas pelo fluxo do sistema de controle. Assim, várias questões da teoria de controlabilidade dos sistemas de controle podem ser abstraídas para ações de semigrupos arbitrários e resolvidas num contexto mais geral. As regiões do espaço de fase do sistema de controle, onde ocorre a controlabilidade, são chamadas de conjuntos controláveis. Os conjuntos controláveis para sistemas de controle foram estudados principalmente por Colonius e Kliemann em [6], [7] e [8]. Estes conjuntos desempenham um papel central no estudo das propriedades dinâmicas dos sistemas de controle (Veja [7]). A generalização do conceito de conjunto controlável para ações de semigrupos foi introduzida por San Martin e Tonelli (Veja [33] e [34]).

Nesta tese, estudamos ações de subsemigrupos de grupos de Lie. Consideraremos principalmente subsemigrupos de grupos de Lie semi-simples. Particularmente, estaremos interessados nos conjuntos controláveis para estas ações.

Os conjuntos controláveis para ações de subsemigrupos de grupos de Lie semi-simples foram estudados em [31], [33] e [34]. Nesta tese, seguiremos a linha de pesquisa destes trabalhos.

Apresentamos aqui alguns resultados sobre reversibilidade de semigrupos. Este estudo teve motivação nos trabalhos [29] e [36]. Mostramos que a reversibilidade pode ser estudada em termos dos conjuntos controláveis invariantes num espaço homogêneo compacto de um grupo de Lie semi-simples. Aqui o conceito de tipo parabólico de um semigrupo desempenha um papel central. Para os semigrupos com tipo parabólico Θ, apresentamos uma caracterização da reversibilidade (módulo um subgrupo) em termos de uma órbita de um subgrupo do grupo que intercepta quaisquer dois abertos num determinado espaço homogêneo.

Apresentamos também alguns resultados sobre mid-reversibilidade de semigrupos. Analisamos a mid-reversibilidade de modo análogo à reversibilidade. Mostramos que a mid-reversibilidade também pode ser estudada em termos dos conjuntos controláveis invariantes num espaço homogêneo compacto de um grupo de Lie semi-simples. Relacionamos a mid-reversibilidade de um semigrupo com a sua reversibilidade.

Um outro problema considerado foi o de calcular o número de conjuntos controláveis. O estudo do número dos conjuntos controláveis em uma variedade flag generalizada (i.e., um espaço homogêneo compacto, o qual é quociente de um grupo de Lie semi-simples por um subgrupo parabólico) foi explorado por Braga Barros e San Martin em [3], [4], [33] e [34]. Em particular, San Martin em [33] mostrou que existe um único conjunto controlável invariante numa variedade "flag". Em nosso trabalho, apresentamos condições para determinar o número de conjuntos controláveis em espaços homogêneos compactos de um grupo de Lie.

Consideramos também o problema de decidir quais representações de dimensão finita de um grupo de Lie semi-simples real G podem ser representadas dentro de algum subsemigrupo próprio do grupo de Lie das matrizes reais com determinante 1, isto é, estudaremos as representações de dimensão finita

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$$

tais que $\rho(G) \subset S$ para algum subsemigrupo S com interior não vazio em $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$. Este foi um problema (Problema 4.12) proposto por San Martin em [31]. Nesta direção, apresentamos alguns resultados parciais. Este problema está relacionado com a análise da existência de cones num produto exterior que são invariantes por alguma representação de G, e este, por sua vez, com o problema de controlabilidade em espaços homogêneos de G (Veja em [31]). Dessa forma, a idéia foi procurar cones num produto exterior invariantes por alguma representação de G.

Apresentamos também uma classificação completa para certas representações da álgebra de Lie das matrizes reais 2×2 com traço zero, que deixam cones invariantes num produto exterior.

A seguir, descreveremos detalhadamente o conteúdo de cada capítulo.

No capítulo 1, introduzimos as definições e resultados básicos para o desenvolvimento deste trabalho.

No capítulo 2, definimos subsemigrupos reversíveis de um grupo. Definimos o conjunto reversor de um subsemigrupo de um grupo. Fixemos de agora em diante G um grupo de Lie semi-simples, real, conexo e com centro finito, S um subsemigrupo de G que possui interior não vazio em G. Neste caso, o conceito de conjunto reversor de S surge naturalmente a partir do fato de que em G não existe subsemigrupo próprio e com interior não vazio que seja reversível. Neste capítulo, descreveremos este conjunto em termos dos conjuntos controláveis invariantes para S agindo em um espaço homogêneo compacto da forma G/P_0, onde P_0 denota a componente conexa da identidade do subgrupo parabólico minimal P. Mostramos também que este conjunto é um aberto em G. Isto segue do fato de que o conjunto de transitividade é um conjunto aberto. Exibimos alguns exemplos que ilustram a reversibilidade do semigrupo.

No capítulo 3, introduzimos o conceito de semigrupos reversíveis módulo L, onde L é um subgrupo de um grupo. Analisaremos a reversibilidade de S no espaço homogêneo G/P_0. Isso será feito com o auxílio da descrição do conjunto reversor em termos dos conjuntos controláveis invariantes para S agindo em G/P_0. Assim, apresentamos uma caracterização da reversibilidade módulo L em termos dos conjuntos controláveis minimais para ação de S em G/P_0. Além disso, como consequência desse resultado, mostramos que, se existe uma órbita de L densa em G/P_0, então S é reversível módulo L.

Em seguida, mostramos também que S é reversível módulo L, se o subgrupo L for parabólico ou um compacto maximal de G. Para o caso em que o subgrupo é um compacto maximal de G, apresentamos uma demonstração alternativa, pois este é um resultado que foi demonstrado por Furstenberg em [11] (Veja Proposição 23).

Para os subsemigrupos S com tipo parabólico Θ caracterizamos a reversibilidade módulo L em termos dos conjuntos controláveis minimais para S em G/P_0 e em $G/P^0_{\Theta^*}$, onde $P^0_{\Theta^*}$ denota a componente conexa da identidade do subgrupo parabólico P_{Θ^*}. Mostramos também que S é reversível módulo L, se L tem uma órbita densa em $G/P^0_{\Theta^*}$. Apresentamos uma caracterização da reversibilidade módulo L em termos de uma órbita de L que intercepta quaisquer dois abertos em $G/P^0_{\Theta^*}$.

Mostramos que, se S é reversível módulo L, então L não está contido em S. Apresentamos um resultado sobre a reversibilidade módulo L para subsemigrupos contendo L.

Generalizamos alguns resultados sobre a reversibilidade de semigrupos. Por exemplo, descrevemos o conjunto reversor em termos dos conjuntos controláveis invariantes para S em um espaço homogêneo compacto de um grupo topológico. Em seguida, apresentamos algumas consequências desse resultado.

Apresentamos também o conceito de reversibilidade para um semigrupo agindo em um espaço topológico. Esta noção estende o conceito de reversibilidade módulo L. Mostramos que a reversibilidade em um espaço topológico compacto X é equivalente à existência de um único conjunto controlável invariante em X.

No capítulo 4, fizemos um estudo análogo ao do capítulo anterior. Definimos subsemigrupos mid-reversíveis de um grupo. Introduzimos o conjunto mid-reversor de um subsemigrupo de um grupo de Lie semi-simples. Descrevemos este conjunto em termos dos conjuntos controláveis invariantes para S em G/P_0. Determinamos também esse conjunto em termos dos conjuntos controláveis invariantes para S em um espaço homogêneo compacto de um grupo topológico.

Introduzimos o conceito de semigrupos mid-reversíveis módulo L, onde L é um subgrupo de um grupo. Em seguida, apresentamos algumas propriedades gerais envolvendo este conceito, e consequências do fato de que reversibilidade módulo L implica em mid-reversibilidade módulo L. Apresentamos também uma caracterização da mid-reversibilidade módulo L em termos dos conjuntos controláveis minimais para S em G/P_0.

Sob certas condições, mostramos que, se um subsemigrupo S de um grupo topológico G tem um único conjunto controlável invariante num espaço homogêneo compacto de G, então S é mid-reversível em G. Consequentemente, mostramos que a reversibilidade módulo P_0 implica na mid-reversibilidade do semigrupo em G.

Estenderemos a definição de mid-reversibilidade módulo um subgrupo para um semigrupo agindo num espaço topológico X. Mostramos que, se S é um semigrupo reversível em X, então S é mid-reversível em X. Desse resultado foram obtidas algumas consequências.

No capítulo 5, apresentamos alguns resultados sobre o número de conjuntos controláveis para um semigrupo utilizando uma versão mais forte de acessibilidade. Sob algumas hipóteses, mostramos que o número de conjuntos controláveis efetivos (ou conjuntos controláveis invariantes) no espaço total e na base de um fibrado é o mesmo.

Consideramos o caso em que G é um grupo de Lie conexo e simplesmente conexo. Uma decomposição de Levi de G é dada por $G = RH$, onde R é o radical de G e H é semi-simples. O principal resultado desse capítulo diz que sob certas condições, o número de conjuntos controláveis nos espaços homogêneos G/L e $H/H \cap RL$ é o mesmo. Em particular, quando $H \cap RL$ é um subgrupo parabólico do grupo de Lie semi-simples H, temos que $H/H \cap RL$ é uma variedade "flag", e o número de conjuntos controláveis nas variedades flags é finito, que foram determinados em [34].

No Capítulo 6, recordamos alguns resultados sobre representações de dimensão finita de álgebras de Lie semi-simples reais euclidianas (ou "split"), bem como a caracterização dessas representações em termos dos seus pesos máximos. Uma tal caracterização nos permite analisar as representações irredutíveis dessas álgebras que deixam cones invariantes. Apresentamos uma condição necessária e suficiente para a existência de cones invariantes pela representação de G em um espaço vetorial real em termos do seu peso máximo.

Em seguida, estudamos as representações de dimensão finita

$$\rho : G \to \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$$

tais que $\rho(G) \subset S$ para algum subsemigrupo S com interior não vazio em $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$, que é um problema (Problema 4.12) proposto por San Martin em [31]. Nesta direção, apresentamos alguns resultados parciais.

Apresentamos também condições sobre a não existência de um subsemigrupo S em $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ com interior não vazio contendo $\rho(\mathrm{G})$. Por exemplo, seja

$$\rho : G \to \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$$

uma representação irredutível. Consideremos a representação fundamental ρ_k de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ no produto exterior $\Lambda^k \mathbb{R}^n$ para $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Então, podemos compor ρ_k com ρ. Usando o Teorema de decomposição de Weyl, podemos decompor $\Lambda^k \mathbb{R}^n$ em subespaços V_i irredutíveis por $\rho_k \rho$, de modo que a restrição de $\rho_k \rho(G)$ a cada subespaço dessa decomposição é irredutível. Além disso, podemos decompor cada V_i como soma direta de subespaços de pesos. Seja V_1 o subespaço irredutível, cujo peso máximo da representação irredutível associada a V_1 corresponde ao maior autovalor da representação $\rho_k \rho$, quando ele é avaliado num elemento da câmara de Weyl positiva de uma dada subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ (Ver Seção 6.3), onde $\mathfrak{g}$ denota a álgebra de Lie de G. Com isto, mostraremos que, se para todo k, não existe cone pontual e gerador em V_1, então não existe semigrupo conexo $S \subsetneq \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ com interior não vazio contendo $\rho(\mathrm{G})$.

Apresentamos ainda uma classificação completa para certas representações de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ tais que $\rho_k \rho(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$ deixam cones invariantes em um produto exterior. Este resultado generaliza um resultado de Vinberg (Veja seção 6.4) para as representações do tipo $\rho_k \rho$. A importância deste resultado, bem como os que foram ditos anteriormente, está relacionada com a análise da existência de cones num produto exterior invariantes por $\rho_k \rho(G)$ para algum k, e estes, por sua vez, com o problema de controlabilidade em espaços homogêneos de G. (Veja [31]).

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é o de introduzir as definições e resultados básicos para o desenvolvimento de nosso trabalho.

Inicialmente, introduziremos alguns conceitos básicos sobre álgebras de Lie. Ressaltaremos a conhecida decomposição de Levi para uma álgebra de Lie de dimensão finita. Ela é uma ferramenta que usaremos para apresentar condições sobre a determinação do número de conjuntos controláveis num espaço homogêneo compacto de um grupo de Lie semi-simples, que é o resultado principal do Capítulo 5. Recordaremos também o conhecido Teorema de decomposição de Weyl para uma álgebra de Lie semi-simples de dimensão finita.

Apresentaremos ainda alguns resultados sobre álgebras de Lie semi-simples e suas representações.

Em seguida, apresentaremos alguns conceitos e resultados sobre subsemigrupos de grupos topológicos. Recordaremos os conceitos de conjuntos controláveis para ações de subsemigrupos de grupos topológicos em espaços topológicos, bem como algumas de suas propriedades. Em particular, consideraremos os conjuntos controláveis em espaços homogêneos de um grupo de Lie.

Posteriormente, definiremos o conceito de cone num espaço vetorial real. Uma propriedade importante é a de que todo cone próprio não nulo e invariante por uma representação irredutível de um grupo de Lie, é também pontual e gerador.

No Capítulo 6, estaremos interessados nas representações que deixam cones invariantes num produto exterior. Usaremos um resultado sobre a existência de um cone pontual num produto exterior que é invariante por um subsemigrupo S. Tal cone é obtido a partir de um conjunto controlável invariante para S em uma grassmanniana. Dessa forma, apresentaremos aqui algumas preliminares sobre grassmannianas.

A seguir, consideraremos também os conjuntos controláveis nas variedades "flag", i.e., nos espaços homogêneos que são quocientes de um grupo de Lie semi-simples por um subgrupo parabólico do grupo. Lembraremos também como os conjuntos controláveis são descritos e contados nas variedades "flag".

Recordaremos a definição de semigrupos de tipo parabólico Θ introduzida por San Martin e Tonelli em [34], (Veja também [35] e [37]).

Para finalizar, revisaremos os conceitos de fibrados principais e seus fibrados associados. Apresentaremos os principais resultados sobre o comportamento dos conjuntos controláveis nesses fibrados .

1.1 Álgebras de Lie.

Inicialmente, recordaremos alguns conceitos básicos de álgebra de Lie. Como referência básica, utilizamos [13], [19], [40] e [42].

Começamos lembrando que uma *álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, com um produto, denotado pelo colchete $[\cdot,\cdot]$, que é bilinear, anti-simétrico e satisfaz a identidade de Jacobi, i.e., para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, $[X,[Y,Z]]+[Z,[X,Y]]+[Y,[Z,X]]=0$.

Um subespaço vetorial $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, que é fechado pelo colchete, é chamado de *subálgebra* de $\mathfrak{g}$. Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, consideremos a *série derivada* definida por $\mathfrak{g}^{(1)}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}], \mathfrak{g}^{(2)}=[\mathfrak{g}^{(1)},\mathfrak{g}^{(1)}],\cdots,\mathfrak{g}^{(k)}=[\mathfrak{g}^{(k-1)},\mathfrak{g}^{(k-1)}]$ e *a série central descendente* de $\mathfrak{g}$ definida por $\mathfrak{g}^1=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}], \mathfrak{g}^2=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}^1],\cdots,\mathfrak{g}^k=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{k-1}]$. Um *ideal* de $\mathfrak{g}$ é um subespaço $\mathfrak{l}$ de $\mathfrak{g}$ que absorve todo elemento de $\mathfrak{g}$, ou seja, $[\mathfrak{l},\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{l}$. As subálgebras $\mathfrak{g}^{(k)}$, $\mathfrak{g}^k$ das sequências acima são ideais de $\mathfrak{g}$.

Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é *solúvel* se existe um inteiro $k_0\geqslant 1$ tal que $\mathfrak{g}^{(k_0)}=\{0\}$, e $\mathfrak{g}$ é *nilpotente* se existe um inteiro $k_0\geqslant 1$ tal que $\mathfrak{g}^{k_0}=\{0\}$. Observe que $\mathfrak{g}^{(k)}\subset\mathfrak{g}^k$. Portanto, toda álgebra de Lie nilpotente é solúvel.

Pela Proposição 1.28 em [40], existe um único ideal solúvel maximal de $\mathfrak{g}$, chamado de *radical solúvel,* ou simplesmente, *radical* de $\mathfrak{g}$ que é denotado por $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$. Dizemos que $\mathfrak{g}$ é *semi-simples,* se $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})=\{0\}$, i.e., $\mathfrak{g}$ não tem ideais próprios além do ideal nulo. Quando $\dim\mathfrak{g}\neq 1$ e os únicos ideais de $\mathfrak{g}$ são os triviais, dizemos que $\mathfrak{g}$ é *simples.* Observe que toda álgebra de Lie simples é semi-simples.

A forma de *Cartan-Killing* de $\mathfrak{g}$ é uma forma bilinear simétrica $\langle\cdot,\cdot\rangle$: $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{K}$ definida por $\langle X,Y\rangle=\mathrm{tr}((\mathrm{ad}X)(\mathrm{ad}Y))$, onde tr denota o traço, e

$$\mathrm{ad}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}\,(\mathfrak{g})$$

denota a transformação linear definida por $\mathrm{ad}(X)Y=[X,Y]$, com $X,Y\in\mathfrak{g}$. Pelo Teorema 3.9 em [40], temos que $\mathfrak{g}$ é semi-simples se, e somente se, sua forma de Cartan-Killing é não degenerada.

Agora, definiremos o que é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$.

Definição 1 *Uma subálgebra $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ é dita uma* subálgebra de Cartan *de $\mathfrak{g}$, se $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra nilpotente, e o conjunto $N_{\mathfrak{g}}\mathfrak{h}=\{X\in\mathfrak{g}:\mathrm{ad}(X)\mathfrak{h}\subset\mathfrak{h}\}$ é o próprio $\mathfrak{h}$.*

Toda álgebra de Lie de dimensão finita pode ser decomposta como soma direta do seu radical com uma subálgebra semi-simples. De fato, temos:

Proposição 1 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita. Então, existe uma subálgebra (única a menos de isomorfismo) $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g}$ é dada pela soma direta $\mathfrak{g}=\mathfrak{r}\oplus\mathfrak{s}$, que é chamada uma decomposição de Levi de $\mathfrak{g}$. Além disso, $\mathfrak{s}\approx\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ é semi-simples.*

Demonstração: Veja o Teorema 5.8 em [40]. □

Definição 2 *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e seja $\mathfrak{r}$ o radical de $\mathfrak{g}$. O* radical *de G, denotado por $R=R(G)$, é o subgrupo de Lie conexo de G cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$.*

O radical $R=R(G)$ satisfaz algumas propriedades, como vemos na seguinte proposição:

Proposição 2 *Seja G um grupo de Lie conexo com radical R. Então, R é um subgrupo de Lie normal, solúvel, fechado de G e, além disso, é maximal com estas propriedades.*

Demonstração: Veja a Proposição 10.12 em [27]. □

Para um grupo de Lie conexo, simplesmente conexo, temos uma decomposição dada no seguinte teorema:

Teorema 1 *Seja G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensão finita, e R o radical de G. Suponha que $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{s}$ é uma decomposição de Levi de $\mathfrak{g}$ e seja H o subgrupo de Lie de G gerado pela $\exp(ad(\mathfrak{s}))$. Tem-se:*

1. $G = R \cdot H$ e H é um subgrupo de Lie semi-simples de G (chamado *subgrupo de Levi)*.

2. Em particular, se G é simplesmente conexo, então H é fechado em G e simplesmente conexo. Além disso, G é difeomorfo ao produto cartesiano de R por H via aplicação $(r, h) \to rh$ e pode ser decomposto como o produto direto
$$G = RH, \text{ com } R \cap H = \{1\}$$
Esta decomposição é dita uma *decomposição de Levi de G.*

Demonstração: Veja o Teorema 3.18.13 em [42]. □

A seguir, sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $\mathfrak{gl}\,(V)$ a álgebra de Lie das transformações lineares de V. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre o mesmo corpo de escalares de V. Uma *representação de* $\mathfrak{g}$ num espaço vetorial V é um homomorfismo
$$\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}\,(V)$$
i.e., ρ uma aplicação linear que preserva o colchete.

Recordemos que duas representações
$$\rho_1 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_1) \text{ e } \rho_2 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_2)$$
de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ são ditas *equivalentes* se existe um isomorfismo de espaços vetoriais $P : V_1 \to V_2$ tal que $\rho_2(X) = P\rho_1(X)P^{-1}$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Seja agora $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, cuja existência é garantida pelo Corolário 4.4 de [40]. Consideremos a representação adjunta
$$\text{ad} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}\,(\mathfrak{g})$$
de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$.

Um *peso* da representação adjunta é um funcional linear $\alpha : \mathfrak{h} \to \mathbb{K}$ tal que o subespaço generalizado
$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : \forall H \in \mathfrak{h}, \exists \text{ inteiro } m \geq 1, (\text{ad}(H) - \alpha(H))^m X = 0\}$$

é não nulo. Note que o funcional nulo é sempre um peso da representação adjunta. Além disso, da definição de subálgebra de Cartan, temos que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$. Os pesos não nulos da representação adjunta são chamados de *raízes* de $\mathfrak{g}$ em relação a $\mathfrak{h}$ (ou do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$) e o subespaço generalizado correspondente, de *espaço de raiz.*

Como $\mathfrak{h}$ é nilpotente, pelo Teorema 2.9 de [40], podemos decompor $\mathfrak{g}$ em soma direta

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_n}$$

de subespaços de pesos.

A seguir, assumiremos que $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie semi-simples complexa de dimensão finita. Neste caso, pela Proposição 6.5 de [40], segue que

$$\mathfrak{g}_{\alpha_i} = \{X \in \mathfrak{g} : \forall H \in \mathfrak{h},\, \mathrm{ad}(H)X = \alpha(H)X\}$$

e, pelo Lema 6.8 de [40], temos que $\dim \mathfrak{g}_{\alpha_i} = 1$.

Denotemos por Δ o conjunto das raízes α_i, ou ainda, o conjunto das raízes do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Pela Proposição 6.7 de [40], Δ gera o dual $\mathfrak{h}^*$ de $\mathfrak{h}$. A seguir, notemos que $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{h}^*$ são isomorfos. De fato, consideremos a forma de Cartan-Killing $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathfrak{g}$. Como ela é bilinear, então está bem definida uma aplicação $\xi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}^*$ dada por $\xi(H) = \alpha_H(\cdot) = \langle \cdot, H \rangle$. Além disso, ξ é um isomorfismo, pois o fato de $\mathfrak{g}$ ser semi-simples implica que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é não degenerada em $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ e, portanto, em $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$. Logo, por meio deste isomorfismo, podemos passar da forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{h}$ para o seu dual $\mathfrak{h}^*$ denotada também por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e definida da seguinte forma: Dados $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$ correspondem a únicos $H_\alpha, H_\beta \in \mathfrak{h}$ tais que $\alpha(\cdot) = \langle \cdot, H_\alpha \rangle$ e $\beta(\cdot) = \langle \cdot, H_\beta \rangle$. Podemos definir $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle H_\alpha, H_\beta \rangle$.

Temos também que através do isomorfismo ξ, a cada raiz $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, corresponde um único $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ tal que $\alpha(H) = \langle H_\alpha, H \rangle$ para todo $H \in \mathfrak{h}$. Portanto, as raízes $\alpha \in \Delta$ definem um número finito de elementos H_α tal que o conjunto $\{H_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ gera $\mathfrak{h}$, já que as raízes α geram $\mathfrak{h}^*$.

A seguir, consideremos o subespaço vetorial real

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \{a_1 H_{\alpha_1} + \cdots + a_k H_{\alpha_k} : a_i \in \mathbb{R} \text{ e } \alpha_i \in \Delta\}$$

bem como o seu dual

$$\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} = \{a_1 \alpha_1 + \cdots + a_k \alpha_k : a_i \in \mathbb{R} \text{ e } \alpha_i \in \Delta\}$$

Segue da Proposição 6.13 de [40] que $\dim \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \dim \mathfrak{h}$.

Tomemos uma base ordenada $\{v_1, \ldots, v_l\}$ de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Sejam $v, w \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ com $v = a_1v_1 + \cdots + a_lv_1$ e $w = b_1v_1 + \cdots + b_lv_1$. Em $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, fixemos uma ordem $\leqslant$ definida por: $v \leqslant w$ se, e somente se, $v = w$ ou $a_{i_0} < b_{i_0}$, onde i_0 é o primeiro índice tal que $a_{i_0} \neq b_{i_0}$. Essa ordem é dita *lexicográfica*. Em relação a essa ordem fixada, seja Δ^+ o conjunto das raízes positivas. Temos que $\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-$, onde $\Delta^- = -\Delta^+$ é o conjunto das raízes negativas. Seja $\Sigma \subset \Delta$ o conjunto das raízes simples do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, i.e., Σ é uma base de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ formada pelo conjunto de raízes $\alpha > 0$ que não se decompõem como soma de duas raízes positivas e, além disso, toda raiz de Δ é escrita como uma combinação linear de Σ com coeficientes inteiros de mesmo sinal.

A seguir, recordaremos o teorema de decomposição de Weyl. Para isto, definiremos o que é uma representação irredutível de $\mathfrak{g}$ em V.

Definição 3 *Dizemos que uma representação ρ de $\mathfrak{g}$ em V é* irredutível *se os únicos subespaços invariantes por $\rho(\mathfrak{g})$ são $\{0\}$ e V.*

Assim, temos o seguinte:

Teorema 2 ***(Decomposição de Weyl)*** *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples de dimensão finita e ρ uma representação de $\mathfrak{g}$ em V. Então, ρ é uma representação completamente redutível, i.e., V se decompõe como soma direta*

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s$$

de subespaços irredutíveis, i.e., os subespaços V_i são invariantes por $\rho(\mathfrak{g})$ e a restrição

$$\rho\,|_{V_i} \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_i)$$

é irredutível para $i = 1, \ldots, s$.

Demonstração: Veja o Teorema 5.6 em [40]. □

Seja agora G um grupo de Lie real, conexo e com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Suponha que V é um espaço vetorial real de dimensão finita. Consideremos $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ uma representação (diferenciável) de G em V, e a representação correspondente ao nível de álgebras de Lie, dada pela representação (derivada)

$$(d\rho)_1 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$$

A seguir, recordaremos que as representações de grupos de Lie são irredutíveis se, e somente se, as representações (derivadas) correspondentes de álgebras de

Lie são irredutíveis. É conhecido que estas representações estão relacionadas através do diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{(d\rho)_1} & \mathfrak{gl}(V) \\ \exp\downarrow & & \downarrow\exp \\ G & \xrightarrow{\rho} & \mathrm{GL}(V) \end{array}$$

ou seja,

$$\exp((d\rho)_1(X)) = \rho(\exp X) \text{ para todo } X \in \mathfrak{g}$$

Com isto, mostra-se a seguinte proposição:

Proposição 3 *Seja G um grupo de Lie real, conexo e com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita. Seja $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ uma representação (diferenciável) de G em V e $(d\rho)_1 : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ a representação (derivada) de $\mathfrak{g}$ em V. Então, ρ é irredutível se, e somente se, $(d\rho)_1$ é irredutível.*

Demonstração: Veja o Capítulo 4 em [23]. □

Para finalizar esta seção, recordaremos algumas decomposições canônicas de uma álgebra de Lie semi-simples real. Nos referimos a [13], [19], [40] para outros detalhes. Seja G um grupo de Lie semi-simples, real com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Seja

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$$

uma decomposição de Cartan dada pela soma direta de $\mathfrak{k}$ e $\mathfrak{s}$, onde $\mathfrak{k}$ é uma subálgebra compacta imersa de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{s}$ é o seu complemento ortogonal em relação a forma de Cartan-Killing.

Seja $\mathfrak{a}$ uma subálgebra abeliana, maximal contida em $\mathfrak{s}$. Para cada α no espaço vetorial dual $\mathfrak{a}^*$ de $\mathfrak{a}$, consideremos o espaço vetorial

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : \mathrm{ad}(H)X = \alpha(H)X, \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\}$$

O funcional $\alpha \neq 0$ é chamado de *raiz* do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ se $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$ e, nesse caso, $\mathfrak{g}_\alpha$ é chamado de *espaço de raiz*.

Notemos que os auto-valores para as aplicações adjuntas $\mathrm{ad}(H)$, com $H \in \mathfrak{a}$, são todos reais. Isso se deve ao fato de que as aplicações $\mathrm{ad}(H)$ determinam uma família de operadores lineares simultaneamente diagonalizáveis, uma vez que são operadores auto-adjuntos que comutam dois a dois. Então, $\mathfrak{g}$ é uma soma direta ortogonal dos subespaços $\mathfrak{g}_\alpha$. Agora, seja Π o conjunto das raízes do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Escolhendo uma ordem lexicógrafica em $\mathfrak{a}^*$, seja Π^+ o conjunto das raízes positivas nessa ordem. Portanto, $\Pi = \Pi^+ \cup \Pi^-$, onde $\Pi^- = -\Pi^+$ é o conjunto das raízes negativas. Seja $\Sigma \subset \Pi$ o conjunto das raízes simples do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, o qual é uma base de $\mathfrak{a}^*$ e gera Π com coeficientes inteiros de mesmo sinal.

A subálgebra dada pela soma direta

$$\mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha$$

é uma subálgebra nilpotente. Ela fornece uma decomposição de Iwasawa de $\mathfrak{g}$ dada pela soma direta

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$$

e no nível de grupos de Lie, temos a decomposição global de Iwasawa de G dada pelo produto

$$G = KAN^+$$

onde $K = \exp \mathfrak{k}$, $A = \exp \mathfrak{a}$ e $N^+ = \exp \mathfrak{n}^+$. Se G é conexo e tem centro finito então temos que K é um subgrupo compacto maximal de G.

A seguir, daremos um exemplo, no qual ilustramos os elementos introduzidos acima.

Exemplo 1 *Consideremos $G = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ o grupo de Lie das matrizes reais $n \times n$ de determinante 1, e com álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}\ (n,\mathbb{R})$ que é a álgebra de Lie das matrizes reais $n \times n$ de traço zero. Uma decomposição de Cartan de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ é dada pela soma direta*

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{s}(n, \mathbb{R})$$

onde $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ é a subálgebra das matrizes anti-simétricas em $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ e, $\mathfrak{s}(n, \mathbb{R})$ é o subespaço das matrizes simétricas em $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$. As subálgebras abelianas maximais de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ são as subálgebras de Cartan, uma vez que $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ é a forma real normal da álgebra de Lie semi-simples $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ é a álgebra de Lie das matrizes reais diagonais de traço zero. As raízes são dadas por $\alpha_{i,j} = \lambda_i - \lambda_j$, $i \neq j$, onde os λ_i são funcionais lineares em $\mathfrak{h}^*$ definidos por $\lambda_i(H) = a_i$, com $H = \operatorname{diag}\{a_1, \ldots, a_n\}$, ou seja, $\Pi = \{\alpha_{i,j} : i \neq j\}$. Um sistema simples de raízes é dado por

$$\Sigma = \{\alpha_{i,i+1} : i = 1, \ldots n-1\}$$

Escreveremos $\alpha_i = \alpha_{i,i+1}$. *Logo, toda raiz* $\alpha_{i,j}$ *é escrita como combinações lineares inteiras de mesmo sinal de elementos* α_i *de* Σ. *Os subespaços de raízes são unidimensionais e gerados pelas matrizes* $E_{i,j}$ *cuja entrada* i, j *é igual a* 1, *e as outras são zeros. Em relação a esse sistema simples de raízes, um sistema de raízes positivas é dado por* $\Pi^+ = \{\alpha_{i,j} : i < j\}$. *Logo, a álgebra de Lie nilpotente* $\mathfrak{n}^+$ *é a subálgebra das matrizes triangulares superiores com zeros na diagonal. A decomposição de Iwasawa é dada por*

$$\mathfrak{sl}\,(n,\mathbb{R}) = \mathfrak{so}(n,\mathbb{R})\ \oplus \mathfrak{a}\ \oplus \mathfrak{n}^+$$

onde $\mathfrak{a} = \mathfrak{h}$ *e a decomposição global de Iwasawa ao nível de grupo de Lie é dada por*

$$\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R}) = \mathrm{SO}(n,\mathbb{R}) \oplus \mathrm{A} \oplus \mathrm{N}^+$$

onde $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ *é o subgrupo compacto das matrizes ortogonais* $n \times n$ *com determinate* 1, A *é o subgrupo de Lie das matrizes diagonais, cujo produto dos elementos das diagonais é igual a* 1, *e* N^+ *é o grupo de Lie nilpotente dado pelas matrizes triangulares superiores, cujo produto dos elementos das diagonais é igual a* 1.

1.2 Ações de semigrupos

Nesta seção, apresentaremos alguns conceitos e resultados sobre subsemigrupos de grupos topológicos. Apresentaremos também os conceitos de conjuntos controláveis e conjuntos controláveis invariantes para ações de semigrupos, bem como alguns resultados, que serão usados, posteriormente, nos capítulos 2, 3, 4 e 5. Para outros detalhes nos referimos a [2], [33] e [34].

1.2.1 Subsemigrupos de grupos topológicos

Comecemos com a seguinte definição:

Definição 4 *Um conjunto não-vazio* S *com uma operação* $\cdot$ *que é associativa, é chamado de* semigrupo.

Estaremos interessados no caso em que o semigrupo S está contido em um grupo G. Neste caso, dizemos que S é um subsemigrupo de G ou, mais precisamente, temos a seguinte:

Definição 5 *Seja $(G, \cdot)$ um grupo. Um subconjunto $S \subset G$ é um* subsemigrupo *de G se $SS \subset S$.*

Recordemos também o conceito de ideal de um subsemigrupo.

Definição 6 *Seja $(G, \cdot)$ um grupo e S um subsemigrupo de G. Um* ideal *de S é um subconjunto não-vazio I de S que satizfaz $SI \subset I$ e $IS \subset I$.*

Denotaremos por $\mathrm{int}S$ o conjunto dos pontos interiores de S em G. Da Proposição V.0.15. em [15] e do fato de que todo grupo topológico conexo é gerado por uma vizinhança da identidade (Veja a Proposição 5.1.12 em [9]), temos a seguinte:

Proposição 4 *Sejam G um grupo topológico e $S \subset G$ um subsemigrupo com $\mathrm{int}S \neq \emptyset$. Tem-se:*

1. $(\mathrm{int}S)S \cup S(\mathrm{int}S) \subset \mathrm{int}S$, i.e., $\mathrm{int}S$ é um ideal de S.

2. Se G é conexo e a identidade $1 \in \mathrm{int}S$, então $S = G$.

Como consequência desta proposição, segue que não existem subsemigrupos próprios de interior não vazio em um grupo topológico compacto e conexo.

Proposição 5 *Seja G um grupo topológico compacto e $S \subset G$ um subsemigrupo com $\mathrm{int}S \neq \emptyset$. Então, $1 \in \mathrm{int}S$ e S é um subgrupo aberto e compacto de G. Além disso, se G for conexo, então $S = G$.*

Demonstração: Veja a Proposição V.0.18 em [15]. □

Recordemos o conceito de subsemigrupo maximal.

Definição 7 *Seja G um grupo. Dizemos que um subsemigrupo $S \subset G$ é* maximal *se satisfaz:*

1. Os únicos subsemigrupos contendo S são S e G,

2. S não é um grupo

Consideremos a seguinte:

Proposição 6 *Sejam G um grupo topológico conexo e S um subsemigrupo próprio de G com $\mathrm{int}S \neq \emptyset$. Então, S está contido em um subsemigrupo maximal.*

Demonstração: Veja a Proposição V.5.14 em [15]. □

1.2.2 Conjuntos controláveis

Seja G um grupo topológico agindo num espaço topológico X. Suponha que S é um subsemigrupo de G. Dado $x \in X$, usaremos a seguinte notação $Sx = \{gx : g \in S\}$ para a *órbita* de S através de x.

Definição 8 *Um* conjunto controlável *para S em X é um subconjunto $D \subset X$ que satisfaz*

1. $\mathrm{int}D \neq \emptyset$.
2. para todo $x \in D$, $D \subset \mathrm{fe}(Sx)$.
3. D é maximal satisfazendo 1 e 2.

Dizemos que S é *acessível* se $\mathrm{int}(Sx) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$. A seguir, assumiremos que S e S^{-1} são acessíveis.

Observemos que a condição 2 da definição acima, nos diz que os conjuntos controláveis são subconjuntos de X onde o semigrupo é aproximadamente transitivo. No entanto, se existe um subconjunto D_0 (ou $D_0(S)$) de D, onde o semigrupo é transitivo, i.e., para todo $x, y \in D_0$, existe $g \in S$ tal que $gx = y$, demonstra-se que este conjunto é da forma

$$D_0 = \left\{x \in D : x \in \mathrm{int}(Sx) \cap \mathrm{int}(S^{-1}x)\right\}.$$

Como o semigrupo S é transitivo neste conjunto, dizemos que D_0 é o *conjunto de transitividade* de D. Em geral, D_0 pode ser vazio. Quando $D_0 \neq \emptyset$, dizemos que D é um *conjunto controlável efetivo* para S. Em nosso trabalho, estaremos somente interessados em conjuntos controláveis efetivos.

A seguir, recordaremos algumas propriedades importantes do conjunto de transitividade.

Proposição 7 *Suponha que D é um conjunto controlável efetivo para S, i.e., $D_0 \neq \emptyset$. Então,*

1. $D \subset \mathrm{int}(S^{-1}x)$ para todo $x \in D_0$
2. $D_0 = \mathrm{int}(Sx) \cap \mathrm{int}(S^{-1}x)$ para todo $x \in D_0$
3. Para todo $x, y \in D_0$, existe $g \in S$ tal que $gx = y$

4. D_0 é denso em D, i.e., fe$D_0 = D$

5. D_0 é S-invariante em D, i.e., $gx \in D_0$ se $g \in S, x \in D_0$ e $gx \in D$.

6. Se $SD \subset D$ ou $S^{-1}D \subset D$, então $D_0 \neq \emptyset$. Além disso, $D = D_0$ se $S^{-1}D \subset D$.

Demonstração: Veja a Proposição 2.2 em [2]. □

No caso em que X é uma variedade homogênea de um grupo topológico G, e se int$S \neq \emptyset$, então segue da Proposição 2.2 em [34] que $D_0 = (\text{int}S)D \cap D$.

A seguir, recordaremos a definição de conjunto controlável invariante para S. Para outras informações sobre estes conjuntos nos referimos a [33].

Definição 9 *Um* conjunto controlável invariante *para S em X (ou um S-c.c.i.) é um conjunto controlável C para S em X tal que para todo $x \in C$, fe*$(Sx) = \text{fe}(C)$.

Consideremos a seguinte

Proposição 8 *Suponha que S é um subsemigrupo de um grupo topológico G agindo em um espaço topológico X com* int$S \neq \emptyset$. *Tem-se:*

1. *Se D é um conjunto controlável invariante para S em X, então D é fechado.*

2. *Assuma que X é um espaço compacto. Então, o número de conjuntos controláveis invariantes para S é finito em X.*

Demonstração: *Veja [1] e a Proposição 3.3.8 em [7].* □

Sobre a existência dos conjuntos controláveis invariantes, temos a seguinte proposição:

Proposição 9 *Sejam G um grupo topológico e $S \subset G$ um subsemigrupo com* int$S \neq \emptyset$. *Suponha que X é um espaço topológico. Se*

$$C = \bigcap_{x \in X} \text{fe}(Sx) \neq \emptyset$$

então C é o único conjunto controlável invariante para S em X.

Demonstração: Veja o Lema 3.1 em [1]. $\square$

Observemos que a recíproca da proposição anterior vale quando X for um espaço compacto. De fato, suponha que X é um espaço compacto e C é o único conjunto controlável invariante para S em X. Então, pelo Lema 3.1 em [1], temos que para cada $x \in X$ existe um conjunto controlável invariante, digamos C_x para S de modo que $\mathrm{fe}(Sx) \supset C_x$. Mas, por hipótese, temos que $C_x = C$. Logo, $\bigcap_{x\in X} \mathrm{fe}(Sx) \supset C$. Agora, como C é um conjunto controlável invariante para S, segue que $C = \mathrm{fe}(Sx) \supset \bigcap_{x\in X} \mathrm{fe}(Sx)$. Portanto, $C = \bigcap_{x\in X} \mathrm{fe}(Sx)$.

Existe uma ordem natural entre os conjuntos controláveis para S, a qual é definida da seguinte maneira: Dados $D_1, D_2 \subset X$ conjuntos controláveis para S, dizemos que D_1 *é menor do que* D_2 e escrevemos $D_1 < D_2$ se, e somente se, existe $x \in D_1$ tal que $fe(Sx) \cap D_2 \neq \emptyset$. A relação de ordem nos conjuntos controláveis é uma ordem parcial. De fato, claramente esta relação é reflexiva e transitiva, e a propriedade anti-simétrica segue da propriedade de maximalidade dos conjuntos controláveis.

Assim, se D é um conjunto controlável para S que é invariante por S, então D é maximal em relação a ordem definida por S. Neste caso, dizemos que D é um *conjunto controlável maximal de* S. Analogamente, se $D^* = D^*(S)$ é um conjunto controlável para S que é invariante por S^{-1}, então D^* é minimal em relação à ordem definida por S. Neste caso, dizemos que D^* é um *conjunto controlável minimal* de S. Observamos que o fato de que $SD \subset D$ $(S^{-1}D^* \subset D^*)$, segue que estes conjuntos são controláveis efetivos. (Veja o item (6) da Proposição 7). Para outros detalhes sobre esta ordem nos referimos a [34]. Além disso, temos que todo conjunto controlável minimal de S em X é um conjunto aberto, que é o conjunto de transitividade de um conjunto controlável invariante para S^{-1}, digamos $D(S^{-1})$, ou seja, $D^*(S) = D_0(S^{-1})$ (Veja [37]).

Vejamos agora alguns exemplos.

Exemplo 2 *Sejam* $G = \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ *e* $S = \mathrm{Sl}^+(n,\mathbb{R}) \subset G$ *o subsemigrupo das matrizes reais de entradas não negativas, i.e., das matrizes* $A = (a_{i,j})$, $a_{i,j} \geqslant 0$ *e com* $\det A = 1$. *Temos que* S *é um subsemigrupo de interior não vazio em* $Sl(n,\mathbb{R})$. *Consideremos a ação de* $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ *no espaço projetivo* $\mathbb{R}P^{n-1}$ *dada por* $g\,[v] = [gv]$ *com* $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, *onde* $[v]$ *denota a reta passando* *pela origem e por v. Então, o conjunto*

$$C = \{[(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \in \mathbb{R}P^{n-1} \mid x_i \geqslant 0\}$$

correspondente ao primeiro octante do espaço euclidiano n-dimensional $\mathbb{R}^n$ é um conjunto controlável invariante para S. Para isto, veja o Exemplo 2.3 em [33]. Por outro lado, o complementar de C em $\mathbb{R}P^{n-1}$ dado por

$$C^- = \mathbb{R}P^{n-1} - C = \{[(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \in \mathbb{R}P^{n-1} \mid x_i < 0\}$$

é o conjunto controlável minimal de S. Consideremos agora o semigrupo inverso S^{-1}. Então, o conjunto

$$\widetilde{C} = \mathbb{R}P^{n-1} - \mathrm{int}C = \{[(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \in \mathbb{R}P^{n-1} \mid x_i \leqslant 0\}$$

é o conjunto controlável invariante para S^{-1} em $\mathbb{R}P^{n-1}$. Agora, o complementar de $\widetilde{C}$ dado por

$$(\widetilde{C})^- = \mathbb{R}P^{n-1} - \widetilde{C} = \{[(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \in \mathbb{R}P^{n-1} \mid x_i > 0\} = \mathrm{int}C$$

é um conjunto controlável para S^{-1} e invariante por $S = \mathrm{Sl}^+(n, \mathbb{R})$, ou seja, $(\widetilde{C})^-$ é o conjunto controlável minimal de S^{-1}.

A seguir, recordaremos algumas propriedades sobre o comportamento dos conjuntos controláveis através de fibrações equivariantes.

Para isto, sejam $L_1 \subset L_2$ subgrupos fechados de um grupo de Lie G. Consideremos os espaços homogêneos G/L_1 e G/L_2 de G. Consideremos a ação natural à esquerda de G em $G/L_1, G/L_2$ respectivamente. Além disso, como $L_1 \subset L_2$ temos que existe uma fibração canônica

$$\begin{array}{rccc} \pi: & G/L_1 & \rightarrow & G/L_2 \\ & gL_1 & \mapsto & gL_2 \end{array}$$

Dizemos que a fibração π é *equivariante* se $\pi(gx) = g\pi(x)$ para todo $x \in G/L_1$ e $g \in G$.

Proposição 10 *Sejam $L_1 \subset L_2$ subgrupos fechados de um grupo de Lie G e $S \subset G$ um semigrupo com $\mathrm{int}S \neq \emptyset$. Consideremos a fibração canônica*

$$\pi: \; G/L_1 \rightarrow G/L_2$$

como acima. Então,

1. Se $D \subset G/L_1$ é um conjunto controlável invariante para S, então existe um único conjunto controlável invariante $B \subset G/L_2$ para S tal que $\pi(D) \subset B$. Além disso, se D é efetivo, então B é efetivo e $\pi_E(D_0) \subset B_0$.

2. Suponha que G/L_1 é compacto e seja C_1 um conjunto controlável invariante para S em G/L_1. Então, $\pi(C_1) = C_2$ é um conjunto controlável invariante para S em G/L_2.

3. Assuma que G/L_1 compacto. Se $B \subset G/L_2$ é um conjunto controlável efetivo para S em G/L_2, então existe $D \subset G/L_1$ conjunto controlável para S tal que $\pi(D) \subset B$.

4. Suponha que G é compacto e conexo. Seja C_2 um conjunto controlável invariante para S em G/L_2. Então, $\pi^{-1}(C_2) = C_1$ é um conjunto controlável invariante para S.

5. Suponha que G é compacto. Seja C_2 um conjunto controlável invariante para S em G/L_2. Então, $\pi^{-1}(C_2)$ contém ao menos um conjunto controlável invariante para S.

Demonstração: Veja as Proposições 2.6 e 2.7 em [34]. Veja também a Proposição 2.2 em [33]. □

1.3 Cones

Nesta seção, apresentaremos o conceito de cone pontual e gerador num espaço vetorial real. Para referência sobre este assunto, indicaremos [15].

Seja V um espaço vetorial real.

Definição 10 *Um subconjunto W de V é chamado um* cone convexo *ou simplesmente um* cone, *se ele satisfaz:*

1. $W + W \subset W$
2. $\mathbb{R}^+ W \subset W$
3. W é fechado em V

Estaremos interessados em cones pontuais, geradores que são invariantes por representações. Assim, recordemos tais conceitos:

Definição 11 *Seja $W \subset V$ um cone .*

1. Dizemos que o cone W é *pontual* se $W \cap (-W) = \{0\}$.
2. Se $W + (-W) = V$, dizemos que W é um *cone gerador* de V.

Observemos que, se a dimensão de V for finita, então W é gerador se, e só se, $\text{int}W \neq \emptyset$. Temos também que $W + (-W) = \{0\}$ se, e somente se, $W = \{0\}$.

Definição 12 *Sejam G um grupo de Lie real e $S \subset G$ um subsemigrupo. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita. Consideremos*

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$$

uma representação de G no espaço vetorial V. Seja $W \subset V$ um cone. Dizemos que W é invariante *por $\rho(G)$ se $\rho(G)W \subset W$. Quando $\rho(S)W \subset W$, dizemos que W é* invariante *por $\rho(S)$.*

Na presença da irredutibilidade da representação, todo cone próprio não nulo e invariante por $\rho(G)$ é pontual e gerador, ou seja, temos:

Proposição 11 *Seja G um grupo de Lie. Seja*

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$$

uma representação irredutível de G num espaço vetorial real V de dimensão finita. Seja $W \subset V$ um cone próprio não nulo e invariante por $\rho(G)$. Então, W é pontual e gerador.

Demonstração: Para mostrarmos que W é pontual, observemos que $\rho(G)(W\cap -W) \subset (W\cap -W)$ e $(W\cap -W)$ é um subespaço de V. Além disso, $(W\cap -W)$ é próprio, uma vez que W é próprio. Logo, segue que $W \cap -W = \{0\}$ já que ρ é uma representação irredutível. Temos também que W é gerador, pois $\rho(G)(W + (-W)) \subset W + (-W)$ e $W + (-W)$ é um subespaço não nulo de V. Portanto, $W+(-W) = V$, pois ρ é uma representação irredutível. □

1.4 Subsemigrupos e grassmannianas.

Seja $S \subset \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ um subsemigrupo próprio com $\mathrm{int}_{\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})}S \neq \emptyset$. Nesta seção, estaremos interessados na existência de cones pontuais $W \subset \Lambda^k\mathbb{R}^n$ que são invariantes pelo semigrupo S. Mais especificamente, num resultado demonstrado por San Martin em [31], que garante a existência de um cone próprio pontual num produto exterior $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ que é invariante por S. Um tal cone é gerado por um subconjunto das grassmannianas de subespaços de $\mathbb{R}^n$ de dimensão k, com $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ que será denotada por $\mathrm{Gr}_k(n)$.

Inicialmente, apresentaremos alguns resultados sobre grassmannianas. Para estes resultados, damos como referência [32]. Um modo de representar algebricamente um subespaço k-dimensional é através de uma de suas bases. Em relação a uma base β de $\mathbb{R}^n$, um conjunto de k vetores linearmente independente é dado por uma matriz $n \times k$. Deste modo, um subespaço de dimensão k é descrito por uma matriz $n \times k$ de posto k. Denotaremos por $B(n,k)$ o conjunto das matrizes $n \times k$ de posto k.

Temos que dois elementos $p, q \in B(n,k)$ definem o mesmo subespaço k-dimensional se, e somente se, as colunas de p são combinações lineares das colunas de q, ou de modo equivalente, se existe uma matriz inversível a de ordem $k \times k$ tal que $p = qa$. Isto define uma relação de equivalência em $B(n,k)$ denotada por $\sim$. O conjunto das classes de equivalência $B(n,k)/\sim$ está em correspondência bijetora com $\mathrm{Gr}_k(n)$. Uma tal correspondência nos fornece uma descrição algébrica das grassmannianas dos subespaços k-dimensionais de $\mathbb{R}^n$.

Como uma transformação linear inversível leva um subespaço de dimensão k num subespaço de mesma dimensão, existe uma ação natural de $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ em $\mathrm{Gr}_k(n)$ que é dada em termos das classes de equivalência dos subespaços k-dimensionais. A saber, ela é dada através da multiplicação de uma matriz $n \times n$ em $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ por uma matriz $n \times k$.

Temos que esta ação é transitiva em $\mathrm{Gr}_k(n)$, i.e., dados U, V subespaços k-dimensionais de $\mathbb{R}^n$, existe $g \in \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ tal que $gU = V$. Isto segue do fato de que qualquer matriz $n \times k$ de posto k, pode ser complementada a uma matriz $n \times n$ com determinante 1. Logo, com esta ação, $\mathrm{Gr}_k(n)$ é um espaço homogêneo.

Restringindo a ação de $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ ao grupo de Lie $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ das matrizes ortogonais de determinante 1, temos também uma ação transitiva em $\mathrm{Gr}_k(n)$. Seja agora b_0 o subespaço k-dimensional de $\mathbb{R}^n$ gerado pelos k primeiros vetores da base canônica $e_1, \ldots, e_n$ de $\mathbb{R}^n$. O subgrupo de isotropia H de b_0

determinado por esta ação é o subgrupo das matrizes da forma

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} : A \in O(k) \text{ e } B \in O(n-k) \right\}$$

que é isomorfo a $O(k) \times O(n-k)$. Logo, $\mathrm{Gr}_k(n)$ é uma variedade compacta de dimensão $k(n-k)$.

A seguir, consideremos a ação do semigrupo S nas grassmannianas $\mathrm{Gr}_k(n) \subset \Lambda^k \mathbb{R}^n$ como um semigrupo de difeomorfismos. Pela compacidade de $\mathrm{Gr}_k(n)$ sabemos da Proposição 3.1 em [33] que existe um único conjunto controlável invariante para S, digamos C^k. Além disso, temos que este conjunto é fechado e tem interior não vazio. (Veja a Proposição 8). Temos também pela Proposição 9 que

$$C^k = \bigcap_{u \in \mathrm{Gr}_k(n)} \mathrm{fe}(Su)$$

A proposição a seguir nos mostra uma relação entre os conjuntos controláveis invariantes C^k e os elementos euclidianos regulares $h \in \mathrm{int}S$. Na seção 1.5, definimos elemento regular. Um elemento $h \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ é regular se existe $a \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ tal que $h = a\mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} a^{-1}$, com $\lambda_1 > \cdots > \lambda_n$.

Temos a seguinte proposição:

Proposição 12 *Seja $S \subset Sl(n, \mathbb{R})$ um subsemigrupo próprio com $int_{\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})} S \neq \emptyset$. Então, existe h regular, $h \in \mathrm{int}S$ e $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ tal que C^k está contido na variedade estável de h, que é a órbita aberta e densa da decomposição de Bruhat de $\mathrm{Gr}_k(n)$.*

Demonstração: Veja o Teorema 2.2 em [31]. □

A partir deste resultado, foi definido em [31] um semigrupo S do *tipo* k. Temos que S é do *tipo* k se S e k são como na Proposição 12.

Agora, consideremos a *grassmanniana orientada* $\mathrm{Gr}_k^+(n)$, ou seja, o conjunto dos subespaços k-dimensionais em $\mathbb{R}^n$ que são orientados. Dados $g \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ e $\zeta \in \mathrm{Gr}_k^+(n)$, obtemos um subespaço orientado $g\zeta \in \mathrm{Gr}_k^+(n)$, definindo uma *base positivamente orientada* de $g\zeta$ como sendo a imagem através de g de uma base positivamente orientada de ζ. Desta maneira, temos que $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ age transitivamente em $\mathrm{Gr}_k^+(n)$, e isto o torna um espaço homogêneo. Como para os subespaços, os subespaços orientados k-dimensionais são também representados por uma matriz $n \times k$ de posto k. Em termos destas representações matriciais, temos que duas matrizes $p, q \in B(n, k)$, definem o mesmo subespaço orientado se, e somente se, $p = qa$ para alguma matriz a de ordem $k \times k$ com $\det a > 0$. Através desta representação, a ação de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ em $\mathrm{Gr}_k^+(n)$ também é dada pela multiplicação de matrizes. Como variedade, $\mathrm{Gr}_k^+(n)$ é um recobrimento duplo de $\mathrm{Gr}_k(n)$ com aplicação de recobrimento

$$\pi : \mathrm{Gr}_k^+(n) \longrightarrow \mathrm{Gr}_k(n)$$

dada pela eliminação da orientação nos subespaços. Além disso, π é equivariante em relação às ações de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$.

Por outro lado, no produto exterior $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ temos um produto interno definido por

$$\langle u_1 \wedge \ldots \wedge u_k, v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \rangle = \det(\langle u_i, v_j \rangle)_{i,j}$$

que é induzido por um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\mathbb{R}^n$.

Um elemento $\zeta \in \Lambda^k\mathbb{R}^n$ que pode ser escrito como $\zeta = u_1 \wedge \ldots \wedge u_k$ é dito um *elemento decomponível. Seja* $m = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} - 1$. O mergulho natural de $\mathrm{Gr}_k^+(n)$ na esfera unitária S^m de $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ é dada pela bijeção que associa a cada base ortonormal positivamente orientada $p = \{u_1, \ldots, u_k\}$ de cada subespaço k-dimensional $V_k \subset \Lambda^k\mathbb{R}^n$ o elemento decomponível $u_1 \wedge \ldots \wedge u_k$. Observe que $\|u_1 \wedge \ldots \wedge u_n\| = 1$ segue da ortonormalidade de p.

Do mesmo modo, a grassmanniana $\mathrm{Gr}_k(n)$ é vista como um subconjunto de um espaço projetivo de $\Lambda^k\mathbb{R}^n$. Neste caso, o mergulho natural de $\mathrm{Gr}_k^+(n)$ no espaço projetivo $\mathbb{RP}^m$ de $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ é dada pela bijeção que associa a cada base $p = \{u_1, \ldots, u_k\}$ de um k-subespaço dimensional de $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ o elemento decomponível $u_1 \wedge \ldots \wedge u_k$. Através destas realizações, a aplicação de recobrimento π torna-se a identificação usual de antípodas na esfera S^m.

Seja ρ_k a representação fundamental de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ em $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ dada por

$$\rho_k(g)(u_1 \wedge \cdots \wedge u_k) = gu_1 \wedge \cdots \wedge gu_k$$

Esta ação em $\mathrm{Gr}_k^+(n)$ induzida por ρ_k coincide com a ação $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ sobre os raios definidos por elementos decomponíveis.

Em termos da representação de $\mathrm{Gr}_k^+(n)$ em $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ temos a seguinte interpretação da órbita aberta N^-, onde $N^- = (N^+)^t$ denota o grupo nilpotente das matrizes triangulares superiores de ordem $n \times n$ com uns na diagonal.

Proposição 13 *Consideremos o grupo nilpotente* $N^- = (N^+)^t$. *Então, existe* $\eta \in \mathrm{Gr}_k^+(n)$ *tal que a órbita aberta de* N^- *em* $\mathrm{Gr}_k(n)$ *é dada por*

$$\left\{\zeta \in \Lambda^k\mathbb{R}^n : \langle \eta, \zeta \rangle > 0\right\}$$

Em $\mathrm{Gr}_k^+(n)$ *existem duas órbitas abertas de* N^- *dadas pelos semi-espaços*

$$\left\{\zeta \in \Lambda^k\mathbb{R}^n : \langle \eta, \zeta \rangle > 0\right\} \;\; e \;\; \left\{\zeta \in \Lambda^k\mathbb{R}^n : \langle \eta, \zeta \rangle < 0\right\}$$

Demonstração: Veja a Proposição 2.4 em [32]. □

Observemos que, se $S \subset \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ é um semigrupo de interior não vazio, então pela Proposição 12 existe $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ tal que S é do tipo k. Temos que em $\mathrm{Gr}_k^+(n)$ existem conjuntos controláveis invariantes para S, já que esta variedade é compacta. Pela Proposição 20, temos que $\pi^{-1}(C^k)$ contém estes conjuntos controláveis invariantes que se projetam em C^k. Como π é uma aplicação de recobrimento duplo, existem um ou dois conjuntos controláveis invariantes em $\mathrm{Gr}_k^+(n)$. Mas, pela Proposição 12, temos que C^k está contido em alguma variedade estável aberta de $\mathrm{Gr}_k(n)$. Assumiremos que os conjuntos controláveis invariantes para S são conexos. Então, C^k é conexo. Definamos $C = \pi^{-1}(C^k)$. Então, pela Proposição 13, existe $\eta \in \mathrm{Gr}_k^+(n)$ tal que $\langle \eta, \zeta \rangle \neq 0$ para todo $\zeta \in C$. Como C é compacto, ele se parte em duas componentes conexas, digamos C^+ e $C^- = -C^+$ e, além disso, C é dado por $C = C^+ \cup C^-$, onde

$$C^+ = \{\zeta \in C : \langle \eta, \zeta \rangle > 0\}$$

$$C^- = \{\zeta \in C : \langle \eta, \zeta \rangle < 0\}$$

Temos duas possibilidades: ou C^+ é um conjunto controlável invariante para S, o mesmo valendo para C^-, ou C é um conjunto controlável invariante. Como estamos supondo que os conjuntos controláveis invariantes para S em $\mathrm{Gr}_k^+(n)$ são conexos, então a segunda possibilidade não ocorre e, portanto, segue que C^+ é um conjunto controlável invariante, o mesmo valendo para C^-.

Notemos ainda que ζ não pode estar simultaneamente no mesmo conjunto controlável para S em $\mathrm{Gr}_k^+(n)$, pois os conjuntos C^+ e C^- são disjuntos.

1.5 Variedades "flag", conjuntos controláveis e tipo parabólico.

Nesta seção, estaremos interessados em ações de semigrupos em *variedades flag* (também chamadas de fronteiras de G), i.e., em espaços homogêneos G/H, onde G é um grupo de Lie semi-simples, real e não compacto, e H é um subgrupo parabólico de G. Damos como referência [43] e [46] para a teoria detalhada de subgrupos parabólicos e variedades flag. Como referência para outros detalhes sobre este assunto, indicamos [46].

Depois, consideraremos os conjuntos controláveis para ações de semigrupos em variedades flag. Isto será feito em termos do grupo de Weyl. Para outros detalhes, nos referimos a [34].

Seja G um grupo de Lie semi-simples, real e com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Tomemos uma decomposição de Cartan de $\mathfrak{g}$ dada pela soma direta

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$$

onde $\mathfrak{k}$ é uma subálgebra compacta imersa de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{s}$ é o seu complemento ortogonal em relação à forma de Cartan-Killing. Seja $\mathfrak{a}$ uma subálgebra abeliana maximal contida em $\mathfrak{s}$ e denote por Π o conjunto de raízes do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Fixemos um sistema simples de raízes $\Sigma \subset \Pi$. Denote por Π^+ o conjunto das raízes positivas e por $\mathfrak{a}^+$ câmara de Weyl dada por

$$\mathfrak{a}^+ = \{H \in \mathfrak{a} : \alpha(H) > 0 \text{ para todo } \alpha \in \Pi\}$$

Consideremos a decomposição de Iwasawa

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$$

onde

$$\mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha$$

é uma subálgebra nilpotente de $\mathfrak{g}$, com os $\mathfrak{g}_\alpha$ definidos como anteriormente.

A subálgebra parabólica minimal canônica de $\mathfrak{g}$ é definida por

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$$

onde $\mathfrak{m}$ é o centralizador de $\mathfrak{a}$ em $\mathfrak{k}$, i.e.,

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{z}_\mathfrak{k}\mathfrak{a} = \{X \in \mathfrak{k} : [X, H] = 0 \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\}$$

Dado um subconjunto $\Theta \subset \Sigma$, denotemos por $\langle\Theta\rangle^+$ o subconjunto das raízes em Π^+ gerado por Θ. Seja

$$\mathfrak{n}^-(\Theta) = \sum_{\alpha \in \langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

a subálgebra de $\mathfrak{n}^-$ gerada pelos espaços de raízes $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ com $\alpha \in \langle\Theta\rangle^+$.

A subálgebra parabólica $\mathfrak{p}_\Theta$ é definida por

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{n}^-(\Theta) \oplus \mathfrak{p}$$

O subgrupo parabólico P_Θ de G é o normalizador de $\mathfrak{p}_\Theta$ em G, i.e.,

$$P_\Theta = \{g \in G : \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{p}_\Theta\}$$

Denotemos por $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta$ a variedade flag correspondente. Em particular, $P_\emptyset = P$ e $\mathbb{F}_\emptyset = \mathbb{F} = G/P$ é chamada *variedade flag maximal* de G. Observamos que esta variedade é maximal no sentido que ela fibra sobre qualquer variedade flag. De fato, temos que $P \subset P_\Theta$, e

$$\pi_\Theta : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}_\Theta$$

é uma fibração equivariante cuja fibra é P_Θ/P.

A seguir, estaremos interessados nos conjuntos controláveis para ações de semigrupos em variedades flag. Isto será feito em termos do grupo de Weyl. Para outros detalhes, damos como referência [34].

Consideremos a decomposição global de Iwasawa de G dada pelo produto

$$G = KAN^+$$

onde $K = \exp \mathfrak{k}$, $A = \exp \mathfrak{a}$ e $N^+ = \exp \mathfrak{n}^+$. Coloquemos $A^+ = \exp \mathfrak{a}^+$.

Seja $\mathcal{W}$ o grupo de Weyl de G que é o grupo gerado pelas reflexões em relação às raízes Π do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Em [45] foi demonstrado que a menos de isomorfismo

$$\mathcal{W} = M^*/M$$

onde $M^* = N_K\mathfrak{a}$ é o normalizador de $\mathfrak{a}$ em K, i.e.,

$$\begin{aligned} M^* &= \left\{u \in K : uHu^{-1} = H \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\right\} = \\ &\quad \{u \in K : \mathrm{Ad}(u)H = H \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\} \end{aligned}$$

e $M = Z_K A$ é o centralizador de A em K, i.e.,

$$\begin{aligned} M &= \{u \in K : uhu^{-1} = h \text{ para todo } h \in A\} = \\ &\quad \{u \in K : \mathrm{Ad}(u)h = h \text{ para todo } h \in A\} \end{aligned}$$

Consideraremos a seguir, a ação dos elementos regulares em $\mathbb{F}$. No caso das outras variedades flag $\mathbb{F}_\Theta$ o procedimento é análogo. Recordemos que um elemento $X \in \mathfrak{g}$ é *regular* em $\mathfrak{g}$ se ele é da forma $X = \mathrm{Ad}(g)(H)$, para algum $g \in G$, $H \in \mathfrak{a}^+$. Analogamente, um elemento $h \in G$ é *regular em G* se ele é um exponencial $h = \exp H$, onde H é regular em $\mathfrak{g}$. Um elemento regular H em $\mathfrak{g}$ pertence a uma única câmara de Weyl em $\mathfrak{g}$ a menos de uma conjugada de $\mathfrak{a}^+$.

Denotemos por $b_0 = P$ a origem em $\mathbb{F}$. Então, a órbita $N^- b_0 = \mathrm{Ad}(N^-)b_0$ é aberta e densa em $\mathbb{F}$. Esta órbita é chamada de *componente aberta de Bruhat.* Temos também que b_0 é o único atrator para $h \in A^+$ com variedade estável dada por $N^- b_0$ no seguinte sentido: se $x \in N^- b_0$, $h^i x \to b_0$ para todo $h \in A^+$. No caso de uma variedade flag qualquer $\mathbb{F}_\Theta$, usando notações análogas, temos que a órbita $N^- b_\Theta = \mathrm{Ad}(N_\Theta^-)b_\Theta$ é aberta e densa em $\mathbb{F}_\Theta$, onde b_Θ denota a origem em $\mathbb{F}_\Theta$ e b_Θ é o único atrator para $h \in A^+$ com variedade estável $N^- b_\Theta$.

Agora, sobre os pontos fixos de um elemento regular $h_0 \in A^+$, temos que eles são dados por wb_0 com $w \in \mathcal{W}$. Estes são um número finito, pois $\mathcal{W}$ é um grupo finito. Aqui wb_0 é um elemento da órbita $\mathcal{W}b_0$ de b_0 que é dada pela ação natural à esquerda de $\mathcal{W}$ em $\mathbb{F}$. Esta última ação é induzida pela ação à esquerda M^* em $\mathbb{F}$. Da mesma forma, os pontos fixos em $\mathbb{F}$ de um elemento regular $h = gh_0g^{-1}$ com $g \in G, h_0 \in A^+$ são finitos e dados pelos pontos gwP. Dizemos que gwP é o *ponto fixo do tipo w* para h em $\mathbb{F}$ e iremos denotá-lo por $\mathrm{fix}(h, w)$. Estes pontos são importantes para descrever os conjuntos controláveis para ações de semigrupo em $\mathbb{F}$. (Veja a Proposição 14).

A seguir, seja $S \subset G$ um subsemigrupo com $\mathrm{int}S \neq \emptyset$. Denotaremos por $\mathrm{Re}(S)$ o conjunto dos elementos regulares em $\mathrm{int}S$, ou seja,

$$\mathrm{Re}(S) = \{h \in G : h \in A^+ \cap \mathrm{int}S\}$$

Temos que S age numa variedade flag de G. Em [34], os conjuntos controláveis efetivos para ação de S sobre as variedade flag foram descritos através do grupo de Weyl $\mathcal{W}$. Aqui, consideramos somente os conjuntos controláveis efetivos sobre o flag maximal, uma vez que sobre as outras variedades flag eles podem ser estudados mediante fibrações. Consideremos a involução principal w_0 em relação ao sistema simples de raízes, isto é, w_0 é o único elemento em $\mathcal{W}$ tal que $w_0(\Sigma) = -\Sigma$, onde Σ é o sistema simples de raízes associado a A^+.

Assim, sobre $\mathbb{F}$, recordamos uma tal descrição dada na seguinte proposição:

Proposição 14 *Com as notações acima. Tem-se:*

1. Para todo $w \in \mathcal{W}$, existe um conjunto controlável efetivo $D_w = D_w(S)$ em $\mathbb{F}$ tal que o seu conjunto de transitividade é dado por

$$(D_w)_0 = \{\text{fix}(h, w) \in \mathbb{F} \ : h \in R(S)\}$$

2. Temos que $\text{fix}(h, 1)$ é o atrator para os elementos $h \in R(S)$, e D_1 é o único conjunto controlável invariante para S em $\mathbb{F}$.

3. Seja w_0 a involução de Cartan. Então, $\text{fix}(h, w_0)$ é o repulsor para os elementos $h \in R(S)$, e D_{w_0} é o único conjunto controlável minimal em $\mathbb{F}$ onde w_0 denota a involução de Cartan. Além disso, temos que D_{w_0} é o conjunto de transitividade do conjunto controlável invariante $D(S^{-1})$ para S^{-1}, i.e., $D_{w_0} = D_0(S^{-1})$.

4. Reciprocamente, se D é um conjunto controlável efetivo para S em $\mathbb{F}$, então $D = D_w$ para algum $w \in \mathcal{W}$.

Demonstração: Veja os Teoremas 3.2 e 3.5 em [34]. □

Com esta descrição dos conjuntos controláveis efetivos, temos uma aplicação

$$w \longrightarrow D_w$$

que associa, a cada $w \in \mathcal{W}$, um conjunto controlável efetivo D_w na variedade flag maximal $\mathbb{F}$.

Esta aplicação é sobrejetora, e em geral não é injetora. Consideremos o subconjunto de $\mathcal{W}$ definido por

$$\mathcal{W}(S) = \{w \in \mathcal{W} : D_w = D_1\}$$

Observe que $\mathcal{W}(S)$ é o subconjunto de elementos w tal que D_w é um conjunto controlável invariante para S. Em [34], foi demonstrado que $\mathcal{W}(S)$ é um subgrupo de $\mathcal{W}$.

Uma outra descrição dos conjuntos controláveis em termos do grupo de Weyl é dada pela seguinte proposição:

Proposição 15 *Com as notações acima, temos:*

1. Para $w_1, w_2 \in \mathcal{W}$, $D_{w_1} = D_{w_2}$ em $\mathbb{F}$ se, e somente, se $w_1 w_2^{-1} \in \mathcal{W}(S)$

Demonstração: Veja a Proposição 4.2 em [34]. □

A proposição anterior nos diz que para contar o número de conjuntos controláveis efetivos sobre $\mathbb{F}$, basta contar o número de classes laterais de $\mathcal{W}(S)$ em $\mathcal{W}$.

Sabemos também a partir de [34] que o subgrupo $\mathcal{W}(S)$ de $\mathcal{W}$ é gerado pelo subgrupo $\mathcal{W}_\Theta$ das reflexões em relação às raízes num subconjunto $\Theta \subset \Sigma$, onde Σ é o sistema simples de raízes associado à câmara de weyl $\mathfrak{a}^+$. Mais precisamente temos:

Proposição 16 *Escolhamos uma câmara de Weyl A^+ de modo que*

$$A^+ \cap \mathrm{int} S \neq \emptyset$$

Então, existe um subconjunto $\Theta \subset \Sigma$ tal que $\mathcal{W}(S) = \mathcal{W}_\Theta$. Além disso, o conjunto controlável invariante para S em $\mathbb{F}$ é $D_1 = \pi^{-1}(C_\Theta)$, onde $\pi : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}_\Theta$ é a fibração canônica e C_Θ é o único conjunto controlável invariante para S em $\mathbb{F}_\Theta$. Neste caso, $C_\Theta = \pi(D_1)$. Além disso, C_Θ está contido na componente aberta de Bruhat $N^- b_\Theta$.

Demonstração: Veja o Teorema 4.3 e a Proposição 4.8 em [34]. □

Como uma consequência da Proposição 15, podemos também contar o número de conjuntos controláveis efetivos nas outras variedades flag $\mathbb{F}_\Theta$.

Proposição 17 *O número de conjuntos controláveis efetivos no flag $\mathbb{F}_\Theta$ é igual a ordem $|\mathcal{W}(S) \backslash \mathcal{W} / \mathcal{W}_\Theta|$ do conjunto das classes duplas*

$$\mathcal{W}(S) \backslash \mathcal{W} / \mathcal{W}_\Theta$$

onde $\mathcal{W}_\Theta$ é o subgrupo de $\mathcal{W}$ gerado pelas reflexões com respeito as raízes simples em Θ. Consequentemente, os conjuntos controláveis efetivos sobre o flag maximal $\mathbb{F}$ estão em correspondência 1-1 com as classes em $\mathcal{W}(S)\backslash\mathcal{W}$ e existe um número finito de conjuntos controláveis efetivos $\mathbb{F}$.

Demonstração: Veja o Corolário 5.2 em [34]. □

Observe que da Proposição 17 segue que o número de conjuntos controláveis efetivos em qualquer variedade flag $\mathbb{F}_\Theta$ é finito. De fato, temos que a ordem $|\mathcal{W}(S)\backslash\mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta| < |\mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta|$, e que $|\mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta|$ é finito, uma vez que $\mathcal{W}$ é um grupo finito. Agora, vejamos um exemplo.

Exemplo 3 *Como no Exemplo 1, consideremos $G = \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ com a álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}\,(n,\mathbb{R})$. Uma subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}(n,\mathbb{R})$ é a álgebra das matrizes diagonais com traço zero. Um sistema simples de raízes é*

$$\Sigma = \{\alpha_{i,i+1} : i = 1, \ldots n-1\}$$

e um sistema de raízes positivas é $\Pi^+ = \{\alpha_{i,j} : i < j\}$. Aqui $\alpha_{i,j} = \lambda_i - \lambda_j$, $i \neq j$, onde $\lambda_i(H) = a_i$ com $H = \mathrm{diag}\{a_1, \ldots, a_n\}$. O subgrupo parabólico minimal é dado por $P = MAN^+$, onde A é componente regular, (i.e., qualquer $h \in A$, é regular) e N^+ é a componente nilpotente da decomposição de Iwasawa de G. Explicitamente, A é uma matriz diagonal $n \times n$ cujo produto dos elementos diagonais são todos iguais a $1, N^+$ é uma matriz triangular superior $n \times n$ cujo produto dos elementos diagonais é igual a 1. Agora, temos que o centralizador de $\mathfrak{a}$ em $\mathfrak{k}$ é zero, pois $\mathfrak{a}$ é uma subálgebra de Cartan. Isto implica que o subgrupo M é um grupo discreto. Explicitamente, M é o grupo de matrizes diagonais em $Sl(n,\mathbb{R})$ cujos elementos nas diagonais são ± 1. O grupo de Weyl age em $\mathfrak{a}$ como o grupo de permutações $\mathrm{diag}\{a_1, \ldots, a_n\} \to \mathrm{diag}\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}\}$, *ou seja, ele age permutando as entradas dos elementos diagonais das matrizes em $\mathfrak{a}$. Um intervalo em Σ é um subconjunto do tipo*

$$\Sigma(i,j) = \{\alpha_{r,r+1} : i \leqslant r \leqslant j\}$$

Qualquer subconjunto $\Theta \subset \Sigma$ pode ser escrito com a união disjunta

$$\Theta = \Sigma(i_1, j_1) \cup \ldots \cup \Sigma(i_k, j_k)$$

com $j_l + 1 < i_{l+1}$ *para* $l = 1, \ldots, k-1$. *Dado* Θ *desta forma, então* $\mathcal{W}_\Theta$ *será o produto direto dos grupos de permutações dos subconjuntos* $\{i_l, \ldots, j_l + 1\}$ *para* $l = 1, \ldots, k$. *Temos também que* $\mathbb{F}_\Theta$ *é a variedade dos flags*

$$b = (V_1 \subset \cdots \subset V_{i_1 - 1} \subset V_{j_1+1} \subset \cdots \subset V_{i_1-1} \subset V_{j_1+1} \subset \cdots \subset V_n)$$

onde $V_r \subset \mathbb{R}^n$ *é um subespaço de dimensão* r. *Sabemos que a ordem de* $\mathcal{W}_\Theta$ *é* $\mid \mathcal{W}_\Theta \mid = (j_1 - i_1 + 2)! \cdots (j_k - i_k + 2)!$. *Pela Proposição 17, temos que o número de conjuntos controláveis efetivos em* $\mathbb{F}_\Theta$ *é no máximo*

$$\mid \mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta \mid = n!/(j_1 - i_1 + 2)! \cdots (j_k - i_k + 2)!$$

Para $\Theta = \Pi(2, n-1)$, *temos que* $\mathfrak{n}_\Theta^-$ *é a álgebra das matrizes da forma* $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$ *com* r *um número real e* T *uma matriz triangular inferior de ordem* $n-1$ *tal que* $r + \mathrm{tr}T = 0$. *Assim a subálgebra parabólica* $\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{n}_\Theta^- \oplus \mathfrak{p}$ *é dada pela álgebra das matrizes da forma* $\begin{pmatrix} a & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$ *com* a *real e* B *uma matriz de ordem* $n-1$ *tal que* $a + \mathrm{tr}B = 0$. *Temos que o subgrupo parbólico* P_Θ *é dado pelas matrizes da forma* $\begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & \Gamma \end{pmatrix}$ *com* α *real e* Γ *uma matriz de ordem* $n-1$ *tal que* $\alpha \det \Gamma = 1$. *Assim, a variedade flag correspondente é* $\mathbb{F}_\Theta = \mathbb{RP}^{n-1}$ *e, portanto, existem no máximo* $n = n!/(n-1)!$ *conjuntos controláveis em* $\mathbb{RP}^{n-1}$ *para a ação de qualquer semigrupo* S *de* $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ *com interior não vazio. Agora, no caso em que*

$$\Theta_k = \Pi(1, k-1) \cup \Pi(k+1, n-1)$$

é maximal, temos que $\mathfrak{n}_{\Theta_k}^-$ *é dada pela álgebra das matrizes da forma*

$$\begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & r_{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & T \end{pmatrix}$$

com $r_{k+1} = 0$, R *uma matriz triangular inferior de ordem* k *e* T *uma matriz triangular inferior de ordem* $n - (k+1)$ *tal que* $trR + \mathrm{tr}T = 0$. *Assim, a subálgebra parabólica* $\mathfrak{p}_{\Theta_k} = \mathfrak{n}_{\Theta_k}^- \oplus \mathfrak{p}$ *é dada pela álgebra das matrizes da forma* $\begin{pmatrix} A & * & * \\ 0 & r^{k+1} & * \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}$ *com* r^{k+1} *real,* A *uma matriz de ordem* k *e* B *uma matriz* *de ordem $n-(k+1)$ tal que $trA + r^{k+1} + \mathrm{tr}B = 0$. Temos que o subgrupo parbólico P_Θ é dado pelas matrizes da forma* $\begin{pmatrix} X & * & * \\ 0 & r^{k+1} & * \\ 0 & 0 & Y \end{pmatrix}$ *com r^{k+1} real, X uma matriz de ordem k e Y uma matriz de ordem $n-(k+1)$ tal que tal que $r^{k+1}\det X \det Y = 1$. Assim, a variedade flag correspondente é $\mathbb{F}_\Theta = Gr_k(n)$ a grassmanniana dos subespaços de dimensão k em $\mathbb{R}^n$ que são os* flag minimais *de* $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$. *Logo, existem no máximo $n!/k!(n-k)! = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ conjuntos controláveis nos flags minimais $Gr_k(n)$ para a ação de qualquer semigrupo $S \subset \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ com interior não vazio.*

A seguir, definiremos o tipo parabólico de um semigrupo. Para isto, consideremos a seguinte proposição:

Proposição 18 *Existe um único $\Theta \subset \Sigma$ maximal (em relação à inclusão) tal que $\pi_\Theta^{-1}(C_\Theta(S))$ é o conjunto controlável invariante para S na variedade flag maximal $\mathbb{F}$, onde $\pi_\Theta : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_\Theta$.*

Demonstração: Veja [34]. (Veja também [35] e [37]). □

Definição 13 *Em vista da proposição anterior, entre os subconjuntos $\Theta \subset \Sigma$ satisfazendo a propriedade de que $\pi_\Theta^{-1}(C_\Theta(S))$ é o conjunto controlável invariante em $\mathbb{F}$, denotaremos por $\Theta(S)$ o subconjunto maximal com esta propriedade e dizemos que $\Theta(S)$ é o* tipo parabólico de S.

A seguir, coloquemos $\mathbb{F}_{\Theta(S)} = G/P_{\Theta(S)}$ para a variedade flag cuja existência e unicidade são assseguradas pela proposição anterior. Para outras discussões sobre o tipo parabólico de um semigrupo veja também [30], [34] [37]. Assim, temos que todo semigrupo S de interior não vazio é do tipo $\Theta(S)$.

Agora, seja Θ um subconjunto qualquer do sistema simples de raízes Σ. Apresentaremos a seguir o conceito de dual da variedade $\mathbb{F}_\Theta$. Esta noção foi introduzida em [37].

Para isto, consideremos a involução principal w_0 em relação ao sistema simples de raízes Σ, i.e., w_0 é o único elemento em $\mathcal{W}$ tal que $w_0(\Sigma) = -\Sigma$. Denotaremos por $\iota = -w_0$ que é um automorfismo interno do diagrama de Dynkin. Outros detalhes podem ser encontrados em [40].

Por simplicidade, escreveremos $\Theta^* = \iota(\Theta)$. A variedade flag $\mathbb{F}_{\Theta^*}$ é chamada de *variedade flag dual* de $\mathbb{F}_\Theta$.

Seja agora S um semigrupo com tipo parabólico $\Theta(S)$. Então, para esse semigrupo San Martin mostrou em [37] que a variedade flag dual $\mathbb{F}_{\Theta^*(S)}$ pode ser determinada explicitamente a partir de $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$.

Mais precisamente, temos a seguinte:

Proposição 19 $\mathbb{F}_{\Theta^*(S)} = \mathbb{F}_{\Theta(S^{-1})}$

Demonstração: Veja a Proposição 6.2 em [37]. □

1.6 Fibrados principais e seus fibrados associados.

Inicialmente, recordaremos os conceitos de fibrado principal e fibrado associado. Para mais detalhes nos referimos a [17] e [20] para esta teoria. Em seguida, consideraremos ações de semigrupo em fibrados.

Seja G um grupo de Lie agindo à direita e livremente em uma variedade diferenciável Q. Denote por

$$\begin{array}{ccc} Q \times G & \longrightarrow & Q \\ (q,g) & \longmapsto & q.g \end{array}$$

a ação livre e à direita de G em Q.

Consideremos a seguinte:

Definição 14 *Um* fibrado principal *sobre uma variedade M é uma quádrupla (Q, π_Q, M, G) satisfazendo:*

1. M é o espaço quociente de Q pela relação de equivalência induzida pela ação de G, isto é, $M = Q/G$, e a projeção canônica $\pi_Q : Q \longrightarrow M$ é diferenciável.

2. Q é localmente trivial, i.e., todo ponto de M tem uma vizinhança U tal que $\pi_Q^{-1}(U)$ é isomorfo a $U \times G$ no seguinte sentido: existe um difeomorfismo $\psi : \pi_Q^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$ tal que $\psi(q) = (\pi_Q(q), \varphi(q))$. Aqui φ é uma aplicação de $\pi_Q^{-1}(U)$ em G satisfazendo $\varphi(q.g) = \varphi(q).g$.

O espaço M é chamado *espaço base*, o espaço Q é dito *espaço total* e G é chamado *grupo estrutural*.

Seja (Q, π_Q, M, G) um fibrado principal e tome $x \in M$. Como Q é localmente trivial, segue que a fibra $\pi_Q^{-1}(x)$ é difeomorfa ao grupo estrutural G, através do difeomorfismo definido pela bijeção $u : G \longrightarrow \pi_Q^{-1}(x)$ dada por $u(g) = qg$. Portanto, $\pi_Q^{-1}(x) = qG = \{qg : g \in G\}$ com $q \in \pi_Q^{-1}(x)$, e o grupo G age transitivamente na fibra.

A seguir, consideraremos alguns semigrupos de difeomorfismos que agem nos espaços Q e M. Seja S_Q um semigrupo de difeomorfismos de Q que comutam com a ação à direita, i.e., $Q\phi \in S_Q$ se, e só se, $Q\phi(q.a) = Q\phi(q).a$ para todo $a \in G$. Então, S_Q induz um semigrupo S_M de difeomorfismos de M definido através da relação $M\phi(y) = M\phi(\pi_Q(q)) = \pi_Q(Q\phi(q))$ se $q \in \pi_Q^{-1}(y)$ e $Q\phi \in S_Q$.

Introduziremos o conceito de fibrado associado ao fibrado principal. Seja (Q, π_Q, M, G) um fibrado principal e suponha que o grupo de Lie G age à esquerda e transitivamente em uma variedade F. Então, G age à direita sobre $Q \times F$ do seguinte modo: para $(q, v) \in Q \times F$ e $g \in G$, definimos a ação dada por $(q, v)g = (qg, g^{-1}v)$. Consideremos uma relação de equivalência sobre a variedade produto $Q \times F$ definida por

$$(q_1, v_1) \sim (q_2, v_2) \text{ se, e somente se, existe } g \in G \text{ tal que } q_2 = q_1 g \text{ e } v_2 = g^{-1} v_1$$

Seja E o espaço quociente de $Q \times F$ pela relação $\sim$. Assim os elementos de E são classes de equivalência segundo a relação $\sim$, as quais serão denotadas por $q.v$.

Definimos também a projeção de E sobre a base M, $\pi_E : E \longrightarrow M$ dada por $\pi_E(q.v) = \pi_Q(q)$, onde $\pi_Q : Q \longrightarrow M$ é a projeção no fibrado principal.

Definição 15 *O fibrado com espaço total E, espaço base M e projeção*

$$\pi_E : E \longrightarrow M$$

é denotado por (E, π_E, M, F, G) e é chamado de fibrado associado *ao fibrado principal (Q, π_Q, M, G). Dizemos também que G é o* grupo estrutural *do fibrado associado. A variedade F é chamada de* fibra típica *do fibrado associado.*

Tome $q_0 \in Q$ tal que $\pi_Q(q_0) = x$ e seja $f : F \longrightarrow \pi_E^{-1}(x)$ a bijeção definida por $f(v) = q_0 v$. Esta bijeção é um difeomorfismo. Portanto, a fibra do fibrado associado é difeomorfa a F.

Seja S_Q o semigrupo de difeomorfismos de Q como acima. Então, S_Q induz um semigrupo S_E de difeomorfismos de E definido por $E\phi(qv) = Q\phi(q)v$ se $Q\phi \in S_Q$.

Dado $q \in Q$, definimos o subconjunto

$$S_q = S_Q(q) \cap \pi_Q^{-1}(x), \ x = \pi_Q(q)$$

Através da identificação da fibra sobre x com G pela aplicação

$$a \in G \to q.a \in \pi_Q^{-1}(x)$$

S_q pode ser visto como um subconjunto de G :

$$S_q = \{a \in G : \text{existe } \ Q\phi \in S_Q, \ Q\phi(q) = q.a \ \}$$

Se $S_q \neq \emptyset$, então S_q é um subsemigrupo de G que age à direita sobre a fibra típica da seguinte maneira: $qv.a = v.qa$, se $a \in S_q$.

A seguir, veremos exemplos dos conceitos introduzidos acima, onde o espaço base e total dos fibrados são espaços homogêneos de um grupo de Lie G. Antes disso, sejam G/L_1 e G/L_2 espaços homogêneos de G. Note que, se $L_1 \subset L_2$, então existe uma fibração canônica

$$\begin{array}{rccc} \pi: & G/L_1 & \to & G/L_2 \\ & gL_1 & \mapsto & gL_2 \end{array}$$

Recordemos que a fibração π é *equivariante* se $\pi(xg) = \pi(x)g$ para todo $x \in G/L_1$ e $g \in G$.

Consideremos os exemplos abaixo:

Exemplo 4 *Sejam G um grupo de Lie e $L_1 \subset L_2$ subgrupos fechados com L_1 normal em L_2. Então, a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \pi: & G/L_1 & \to & G/L_2 \\ & gL_1 & \mapsto & gL_2 \end{array}$$

define um fibrado principal $(G/L_1, \pi, G/L_2, L_2/L_1)$ com grupo estrutural L_2/L_1. A ação à direita de L_2/L_1 em G/L_1 é definida por

$$(gL_1)(hL_1) = ghL_1, \ \textit{com } g \in G, \ h \in L_2$$

e comuta com a ação à direita de G em G/L_1, i.e., $(gL_1)(hL_1) = (ghL_1)$. Notemos que

$$\pi(hL_1g) = \pi(hL_1)g$$

e, portanto, a projeção π é equivariante. Se S é um subsemigrupo de G com $intS \neq \emptyset$, então S induz um semigrupo S_Q de difeomorfismos de G/L_1 dado por

$$S_Q = \{Q\phi_s : s \in S\} \text{ onde } Q\phi_s(gL_1) = gsL_1$$

Neste caso, o semigrupo S_M é o semigrupo de difeomofismos de G/L_2 induzido por S através da ação de G em G/L_2. Temos também que $S_q = (gS \cap L_2)/L_1$, se $q = gL_1 \in G/L_1$. Em particular, $S_q = (S \cap L_2)/L_1$, se q é a classe L_1.

Exemplo 5 *Sejam G um grupo de Lie e $L_1 \subset L_2$ subgrupos fechados. Defina a aplicação*

$$\pi : G \to G/L_2$$
$$g \to gL_2$$

Então, $(G, \pi, G/L_2, L_2)$ define um fibrado principal com grupo estrutural L_2 . A ação à direita de L_2 em G é definida por

$$gh, \text{ com } g \in G, h \in L_2$$

Definimos também

$$\pi_E : G/L_1 \to G/L_2$$
$$gL_1 \to gL_2$$

Temos que $(G/L_1, \pi_E, G/L_2, L_2/L_1, L_2)$ é um fibrado associado ao fibrado principal $(G, \pi, G/L_2, L_2)$. Se S é um subsemigrupo de G com $intS \neq \emptyset$, então S induz um semigrupo S_Q de difeomorfismos de G dado por

$$S_Q = \{Q\phi_s : s \in S\} \text{ onde } Q\phi_s(g) = gs$$

Neste caso, o semigrupo S_M é o semigrupo de difeomorfismos de G/L_2 induzido por S através da ação de G em G/L_2. Temos também que S induz um semigrupo de difeomorfismos S_E de G/L_1 definido por

$$S_E = \{E\phi_s : s \in S\} \text{ onde } E\phi_s(gL_1) = gsL_1$$

Temos também que $S_q = gS \cap L_2$ se $q = g \in G$. Em particular, $S_q = S \cap L_2$ se $q = 1 \in G$.

A seguir, apresentamos um resultado sobre o comportamento dos conjuntos controláveis invariantes em fibrados.

Proposição 20 *Sejam* (E, π_E, M, F, G) *um fibrado associado ao fibrado principal* (Q, π_Q, M, G) *com projeção* $\pi_E : E \longrightarrow M$, *e* S_E, S_Q *e* S_M, *como antes. Se* $D \subset E$ *é um conjunto controlável invariante para* S_E, *então existe um único conjunto controlável invariante* $B \subset M$ *para* S_M *tal que* $\pi_E(D) \subset B$ *e, além disso, se* D *é efetivo, então* B *é efetivo e* $\pi_E(D_0) \subset B_0$

Demonstração: Veja a Proposição 3.3 em [2]. □

Capítulo 2

Reversibilidade de Semigrupos

Sejam G um grupo e $S \subset G$ um subsemigrupo. Neste capítulo, para o estudo de reversibilidade do semigrupo, introduziremos o conjunto reversor de S em G, que será o conjunto

$$\mathfrak{R}(S) = \{g \in G : gS \cap S \neq \emptyset\}$$

No caso em que G é um grupo de Lie semi-simples, real, não compacto, com centro finito, e S possui interior não vazio, descreveremos $\mathfrak{R}(S)$ em termos dos conjuntos controláveis invariantes para S em G/P_0, onde P_0 denota a componente conexa da identidade do subgrupo parabólico minimal P. Esta descrição de $\mathfrak{R}(S)$ nos diz que a informação sobre a reversibilidade de S em G é obtida a partir dos conjuntos controláveis invariantes em G/P_0. Algumas consequências dessa descrição foram obtidas.

Apresentaremos alguns exemplos para $\mathfrak{R}(S)$. Um desses exemplos nos mostra a importância de considerarmos o espaço homogêneo G/P_0.

2.1 Reversibilidade

Comecemos recordando o conceito de reversibilidade para um subsemigrupo de um grupo (Veja [26]).

Definição 16 *Seja G um grupo e S um subsemigrupo de G. Dizemos que S é* reversível *à esquerda (respectivamente,* à direita*) se, e somente se, para todo $g, h \in G$, $gS \cap hS \neq \emptyset$ (respectivamente, $Sg \cap Sh \neq \emptyset$). Dizemos que S é* reversível, *se S é reversível à esquerda e à direita.*

Note que S é reversível à esquerda (à direita) se, e somente se, para todo $g \in G, gS \cap S \neq \emptyset$ (respectivamente $Sg \cap S \neq \emptyset$). Temos ainda que S é reversível à esquerda (à direita) se, e só se, S^{-1} é reversível à direita (à esquerda). Logo, S é *reversível* à esquerda *(à direita)* se, e somente se, $G = SS^{-1}$ (respectivamente $G = S^{-1}S$).

A seguir, definimos

$$\mathfrak{R}(G, S) = \{g \in G : gS \cap S \neq \emptyset\}$$

o qual chamaremos de *reversor (à esquerda)* de S em G. Este conjunto também será denotado simplesmente por $\mathfrak{R}(S)$. É claro que, neste caso, $S \subset \mathfrak{R}(S) = SS^{-1}$.

Consideremos também o seguinte subconjunto

$$\mathfrak{R}^d(S) = \{g \in G : Sg \cap S \neq \emptyset\}$$

que é chamado de *reversor à direita* de S em G. Observemos que $\mathfrak{R}^d(S) = \mathfrak{R}(S^{-1})$. De fato, temos que $g \in \mathfrak{R}^d(S)$ se, e somente se, $Sg \cap S \neq \emptyset$. Isto equivale a $g^{-1}S^{-1} \cap S^{-1} \neq \emptyset$, ou seja, $S^{-1} \cap gS^{-1} \neq \emptyset$. Logo, para estudar $\mathfrak{R}^d(S^{-1})$, basta estudar $\mathfrak{R}(S)$.

Observação: O conceito de conjunto reversor surge naturalmente no caso em que G é um grupo de Lie semi-simples, real, conexo, não compacto com centro finito e S é um subsemigrupo próprio de G com int$S \neq \emptyset$. De fato, pelo Teorema 6.7 em [34] segue que S não é reversível à esquerda e nem à direita, ou seja, existe $g \in G$ tal que $gS \cap S = \emptyset$ e existe $h \in G$ tal que $Sh \cap S = \emptyset$. Logo, podemos considerar o subconjunto próprio de G dado por $\mathfrak{R}(S)$.

Introduziremos agora uma definição mais geral para $\mathfrak{R}(S)$. Seja G um grupo topológico. Suponha que G age num espaço topológico X com ação dada por

$$\varphi : G \times X \to X$$

onde $gx = \varphi(g, x)$, para $g \in G$ e $x \in X$.

Para qualquer subconjunto não vazio A de X, definimos

$$\mathfrak{R}(A) = \{g \in G : gA \cap A \neq \emptyset\}$$

Notemos que $\mathfrak{R}(A) \neq \emptyset$, pois $1A \cap A \neq \emptyset$. Em particular, quando $A = S$ e $X = G$, re-obtemos a definição anterior.

Temos a seguinte propriedade:

Proposição 21 *Sejam G um grupo topológico, X um espaço topológico e A um subconjunto não vazio de X. Tem-se:*

1. $\mathfrak{R}(A)$ é aberto em G, se A é aberto em X.

2. Suponha que X é compacto. Então, $\mathfrak{R}(A)$ é fechado em G, se A é fechado em X.

Demonstração: Suponha que A é aberto em X e tomemos $g \in \mathfrak{R}(A)$. Então, $gA \cap A \neq \emptyset$, e isto implica que existe $x \in A$ tal que $gx \in A$. Agora, como A é aberto em X e contém gx, pela continuidade da ação φ temos que existe $V_g \subset G$ aberto contendo g tal que $gx \in V_g x = \varphi_x(V_g) \subset A$. Logo, para todo $h \in V_g$, $hx \cap A \neq \emptyset$. Então, para todo $h \in V_g$, $hA \cap A \neq \emptyset$, pois $x \in A$. Daí, segue que existe $V_g \subset G$ aberto contendo g tal que $V_g \subset \mathfrak{R}(A)$. Portanto, $\mathfrak{R}(A)$ é aberto em G.

Para o item (2), suponha que A é fechado em X. Mostremos que o complementar $\mathfrak{R}(A)^c$ é aberto. Seja $g \in \mathfrak{R}(A)^c$, isto é, $gA \cap A = \emptyset$. Como gA é fechado, tome $U \subset gA$ um aberto tal que $U \cap A = \emptyset$. Mostremos que existe um aberto W_g contendo g tal que $W_g A \subset U$. De fato: Pela continuidade da ação, para cada $x \in A$, existe aberto $V_x \subset G$ contendo g tal que $gx \in V_x x \subset U$. Agora, note que $g^{-1}V_x$ é um aberto em G que contém a identidade. Então, existe um aberto $V_x^{'}$ da identidade tal que $V_x^{'}V_x^{'} \subset g^{-1}V_x$. Coloquemos $V_x^* = gV_x^{'}$. Então, $V_x^* = gV_x^{'} = g1V_x^{'} \subset gV_x^{'}V_x^{'}$. Logo, para cada $x \in A$, existe um aberto V_x^* em G, $V_x^* \subset g(g^{-1}V_x) = V_x$ tal que $V_x^* g^{-1} V_x^* \subset V_x$. Observe que $\{V_x^* x\}_{x \in A}$ é uma cobertura aberta para gA. Como X é compacto e A é fechado, temos que A é compacto e, portanto, podemos extrair uma subcobertura finita $\{V_{x_i}^* x_i\}_{i=i,\ldots,n}$ de abertos para gA. Então, segue que $\{g^{-1}V_{x_i}^* x_i\}_{i=i,\ldots,n}$ é uma cobertura aberta para A. Assim, tomemos $W_g = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}^*$. Então, $W_g \subset G$ é um aberto contendo g. Agora, basta mostrarmos que $W_g \subset \mathfrak{R}(A)^c$. De fato: Sejam $h \in W_g$ e $x \in A$. Como $\{g^{-1}V_{x_i}^* x_i\}_{i=i,\ldots,n}$ cobre A, existe x_i tal que $x \in g^{-1}V_{x_i}^* x_i$. Então, segue que $hx \in hg^{-1}V_{x_i}^* x_i$. Mas, em particular $h \in V_{x_i}^*$ pois $h \in W_g$. Isto implica que $hx \in V_{x_i}^* g^{-1} V_{x_i}^* x_i \subset V_x x_i \subset U$. Logo, para todo $h \in W_g$, $hx \in U \subset gA$, ou seja, $W_g x \subset gA$. Daí segue que $W_g A \subset gA$, pois x é um elemento qualquer de A. Mas temos que $gA \cap A = \emptyset$. Logo, segue que $W_g A \cap A = \emptyset$. Portanto, $W_g \subset \mathfrak{R}(A)^c$ e $\mathfrak{R}(A)^c$ é aberto em G. □

Como consequência deste resultado temos:

Corolário 1 *Sejam G um grupo topológico e $S \subset G$ um subsemigrupo com* $\text{int}S \neq \emptyset$. *Suponha que X é um espaço compacto. Seja D um conjunto controlável invariante para S em X. Então,*

1. $\mathfrak{R}(D_0)$ é aberto em G.

2. $\mathfrak{R}(D)$ é fechado em G.

Demonstração: Segue da Proposição 21, uma vez que D_0 é aberto (respectivamente, D é fechado) em X. □

Consideremos agora o seguinte resultado:

Lema 1 *Suponha que G é um grupo topológico. Assuma que $S \subset G$ é um subsemigrupo agindo em X, onde X é um espaço topológico. Seja $A \subset X$ qualquer conjunto invariante para S. Então, $\mathfrak{R}(S) \subset \mathfrak{R}(A)$.*

Demonstração: Suponha que $g \notin \mathfrak{R}(A)$. Então, $gA \cap A = \emptyset$. Tomemos $x \in A$. Então, pela invariância de A por S, temos que $Sx \subset A$. Daí segue que $g(Sx) \subset gA$. Logo, temos que $g(Sx) \cap Sx \subset gA \cap A$ e, portanto, $g(Sx) \cap Sx = \emptyset$. Isto implica que $gS \cap S = \emptyset$, ou seja, $g \notin \mathfrak{R}(S)$. □

A recíproca do fato de que $\mathfrak{R}(S) \subset \mathfrak{R}(A)$ pode (em princípio) não valer para qualquer conjunto invariante A para S (Veja o exemplo 7). Mas, mostramos em G/P_0 que sob certas condições sobre G e S, temos $\mathfrak{R}(S) = \mathfrak{R}(D_0)$. (Veja o Teorema 3).

2.2 O conjunto reversor e o conjunto controlável invariante em G/P_0

Seja G um grupo de Lie semi-simples, real, conexo, não compacto e com centro finito. Suponha que $S \subset G$ é um subsemigrupo com interior não vazio. Seja P_0 a componente conexa da identidade do subgrupo parabólico minimal P.

Nesta seção, descreveremos o conjunto $\mathfrak{R}(S)$ em termos dos conjuntos controláveis invariantes para S em G/P_0. Inicialmente, consideremos a fibração $\pi : G/P_0 \to G/P$ entre os espaços homogêneos G/P_0 e G/P que é equivariante em relação às ações de G em G/P_0 e em G/P. Temos que a projeção π é simultaneamente uma aplicação de recobrimento e um fibrado principal com fibra típica $P/P_0 = M/M_0$ (Veja [25]).

Seja agora D um conjunto invariante para S em G/P_0, e D_0 o seu conjunto de transitividade. Já vimos que $\mathfrak{R}(S) \subset \mathfrak{R}(D_0)$. A seguir, mostraremos a inclusão $\mathfrak{R}(D_0) \subset \mathfrak{R}(S)$, que é o principal resultado deste capítulo.

Para isto, necessitaremos da seguinte propriedade de reversibilidade dentro da componente conexa da identidade de subgrupos parabólicos minimais, ou mais precisamente:

Lema 2 *$S \cap P_0$ é reversível à esquerda em P_0, i.e., $z(S \cap P_0) \cap (S \cap P_0) \neq \emptyset$ para todo $z \in P_0$.*

Demonstração: Seja $D \subset G/P_0$ um conjunto controlável invariante para S. Tome $x \in D_0$ e seja $y = \pi(x)$. Então, temos que $y \in C_0$, onde C é o conjunto controlável invariante para S em G/P. Sem perda de generalidade, podemos supor que P é o grupo de isotropia em y. Pelo Lema 3.4 de [25], segue que $S \cap P_0$ é reversível à esquerda em P_0. □

Descreveremos agora o conjunto $\mathfrak{R}(S)$ em termos dos conjuntos controláveis invariantes para S em G/P_0.

Teorema 3 *Seja D um conjunto controlável invariante para S em G/P_0. Então, $\mathfrak{R}(S) = \mathfrak{R}(D_0)$. Consequentemente, $\mathfrak{R}(S)$ é um conjunto aberto de G.*

Demonstração: Segue do Lema 1 que $\mathfrak{R}(S) \subset \mathfrak{R}(D_0)$. Para a outra inclusão, tomemos $g \in \mathfrak{R}(D_0)$. Então, $gD_0 \cap D_0 \neq \emptyset$. Logo, existem $x, y \in D_0$ com $x = gy$. Agora, existe $h \in \text{int}S$ tal que $y = hx$, i.e., $x = ghx$. Portanto, gh está no subgrupo de isotropia em x. Sem perda de generalidade, podemos assumir que P_0 é o grupo de isotropia em x. Portanto, temos que $gh \in P_0$. Como $h \in S$, para mostrar que $gS \cap S \neq \emptyset$, basta mostrar que $ghS \cap S \neq \emptyset$, uma vez que $ghS \cap S \subset gS \cap S$. Para isto, mostramos que

$$gh\,(S \cap P_0) \cap (S \cap P_0) \neq \emptyset$$

Uma aplicação imediata do Lema 2 mostra que esta intersecção é não vazia. Logo, $\mathfrak{R}(D_0) \subset \mathfrak{R}(S)$. Agora, do Corolário 1, é imeditato que $\mathfrak{R}(S)$ é um conjunto aberto. □

Assim, temos os seguintes:

Corolário 2 *Seja $D(S^{-1})$ um conjunto controlável invariante para S^{-1} em G/P_0. Então, $\mathfrak{R}(S^{-1}) = \mathfrak{R}(D^*)$, onde $D^* = D_0(S^{-1})$ é um conjunto controlável minimal de S.*

Demonstração: De fato, pelo Teorema 3, temos que $\mathfrak{R}(S^{-1}) = \mathfrak{R}(D_0(S^{-1}))$, ou seja, $\mathfrak{R}(S^{-1}) = \mathfrak{R}(D^*)$, onde $D^* = D_0(S^{-1})$ é o conjunto de transitividade do conjunto controlável invariante $D(S^{-1})$ para S^{-1}. □

Corolário 3 *Seja D um conjunto controlável invariante para S em G/P_0. Dados $g, h \in G$, temos que $gS \cap hS \neq \emptyset$ se, e somente se, $gD_0 \cap hD_0 \neq \emptyset$.*

Demonstração: Observemos que dados $g, h \in G$, $gS \cap hS \neq \emptyset$ se, e somente se, $h^{-1}g \in \mathfrak{R}(S)$. Mas isto equivale a $h^{-1}gD_0 \cap D_0 \neq \emptyset$, pois pelo Teorema 3, temos que $\mathfrak{R}(S) = \mathfrak{R}(D_0))$. Assim, concluímos nossa demonstração. □

Corolário 4 *Seja $D(S^{-1})$ um conjunto controlável invariante para S^{-1} em G/P_0. Dados $g, h \in G$, temos que $Sg \cap Sh = \emptyset$ se, e somente se, $g^{-1}D^* \cap h^{-1}D^* = \emptyset$, onde $D^* = D_0(S^{-1})$.*

Demonstração: De fato, temos que $Sg \cap Sh \neq \emptyset$ se, e só se, $g^{-1}S^{-1} \cap h^{-1}S^{-1} \neq \emptyset$, ou seja, $hg^{-1}S^{-1} \cap S^{-1} \neq \emptyset$. Mas, pelo Corolário 2 temos que $\mathfrak{R}(S^{-1}) = \mathfrak{R}(D^*)$. Logo, segue o nosso resultado. □

2.3 Exemplos

Sejam G, S como na seção anterior. Considere D um conjunto controlável invariante para S no espaço homogêneo da forma G/P_0 e D_0 o seu conjunto de transitividade. Nesta seção, apresentaremos alguns exemplos, onde relacionamos os conjuntos $\mathfrak{R}(S), \mathfrak{R}(D_0)$ e $\mathfrak{R}(D)$.

Como já vimos, $\mathfrak{R}(S) \subset \mathfrak{R}(D_0) \subset \mathfrak{R}(D)$. No exemplo 6, temos $\mathfrak{R}(S) = \mathfrak{R}(D_0) \subsetneq \mathfrak{R}(D)$. O exemplo 7 nos mostra a importância de considerarmos o espaço homogêneo G/P_0, pois nesse exemplo, mostramos que em geral pode ocorrer a inclusão própria $\mathfrak{R}(S) \subsetneq \mathfrak{R}(D_0)$ num espaço homogêneo qualquer.

Vejamos agora os seguintes exemplos:

Exemplo 6 *Seja $G = \mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$ e tome $S = \mathrm{Sl}^+(2, \mathbb{R}) \subset G$ o subsemigrupo das matrizes reais de entradas não-negativas. Então, S é um subsemigrupo com interior não vazio em $Sl(2, \mathbb{R})$ (Veja [33]). Tomemos $P = SO(2, \mathbb{R})AN^+$ o subgrupo parabólico minimal de G e $P_0 = id_2 AN^+$. Consideremos a ação de $Sl(2, \mathbb{R})$ sobre o espaço homogêneo $G/P_0 = SO(2, \mathbb{R})$ (que é difeomorfo a S^1), dada pelo produto usual gx, com $x \in S^1$. Consideremos os conjuntos*

$$\begin{aligned} D_1 &= S^1 \cap \mathbb{R}^2_+ \text{ , onde } \mathbb{R}^2_+ = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\right\} \text{ e} \\ D_2 &= S^1 \cap \mathbb{R}^2_- \text{ , onde } \mathbb{R}^2_- = -\mathbb{R}^2_+ \end{aligned}$$

os quais correspondem ao primeiro e terceiro quadrantes em $G/P_0 = S^1$. Consideremos também os conjuntos

$$\begin{aligned} (D_1)_0 &= S^1 \cap \mathbb{R}^2_{+*}, \text{ onde } \mathbb{R}^2_{+*} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\right\} \text{ e} \\ (D_2)_0 &= S^1 \cap \mathbb{R}^2_{-*} \text{ , onde } \mathbb{R}^2_{-*} = -\mathbb{R}^2_{+*} \end{aligned}$$

*Então, D_1 e D_2 são conjuntos controláveis invariantes para S em G/P_0, e $(D_1)_0, (D_2)_0$ os seus respectivos conjuntos de transitividade. Agora, observemos que $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ é tal que $g(D_1)_0 \cap (D_1)_0 = \emptyset$ se, e somente se, para todo $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (D_1)_0, g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \notin (D_1)_0$, o que é equivalente à $\begin{pmatrix} \langle (a, b), (x, y) \rangle \\ \langle (c, d), (x, y) \rangle \end{pmatrix} \notin (D_1)_0$ **(1)**, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno usual de $\mathbb{R}^2$. Logo, para todo $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (D_1)_0$, temos que **(1)** é equivalente às seguintes inequações*

$$\begin{aligned} I &: \quad \langle (a, b), (x, y) \rangle \geqslant 0 \text{ e } \langle (c, d), (x, y) \rangle < 0, \text{ ou} \\ II &: \quad \langle (a, b), (x, y) \rangle < 0 \text{ e } \langle (c, d), (x, y) \rangle \geqslant 0, \text{ ou} \\ III &: \quad \langle (a, b), (x, y) \rangle \leqslant 0 \text{ e } \langle (c, d), (x, y) \rangle \leqslant 0 \\ \text{com } x &> 0, y > 0 \end{aligned}$$

Agora, analisaremos os ângulos determinados entre (a, b) e todos $(x, y) \in (D_1)_0$ satisfazendo cada uma destas inequações. Observemos que não pode ocorrer $a = b = 0$, $c = d = 0$, $a = c = 0$ e $d = b = 0$, pois $ad - bc = 1$. Começamos com a inequação I. Assim, temos que não pode ocorrer $\langle (a, b), (x, y) \rangle = 0$, pois isto equivale a que $a = b = 0$. Da mesma forma, *se verifica que não pode ocorrer $b = 0$ ou $c = 0$. Daí segue que I é equivalente as seguintes condições*

$$I' : \ a \geqslant 0, b > 0, c < 0, d \leqslant 0$$

De modo análogo, temos que II é equivalente a

$$II' : \ a \leqslant 0, b < 0, c > 0, d \geqslant 0$$

e temos também que III é equivalente a

$$III' : a < 0, b \leqslant 0, c \leqslant 0, d < 0$$

Logo, temos as inequações I ou II ou III se, e somente se, temos as seguintes condições I' ou II' ou III' ou, ainda, podem ser re-escritas como no seguinte quadro

a	b	c	d
$\geqslant 0$	> 0	< 0	$\leqslant 0$
$\leqslant 0$	< 0	> 0	$\geqslant 0$
< 0	$\leqslant 0$	$\leqslant 0$	< 0

De modo equivalente, temos que $gS \cap S = \emptyset$. Logo, $\mathfrak{R}((D_1)_0) = \mathfrak{R}(S)$. Além disso, observemos que existe $h = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in G$ tal que $h \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$ e, portanto, $h(D_1) \cap (D_1) \neq \emptyset$. No entanto, para todo $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (D_1)_0$, temos que $h \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$. Isto implica que $h(D_1)_0 \cap (D_1)_0 = \emptyset$. Logo, $h \notin \mathfrak{R}((D_1)_0)$ e $h \in \mathfrak{R}(D_1)$, e portanto, $\mathfrak{R}((D_1)_0) \subsetneq \mathfrak{R}(D_1)$. Logo, concluímos que $\mathfrak{R}(S) = \mathfrak{R}((D_1)_0) \subsetneq \mathfrak{R}(D_1)$.

O próximo exemplo nos mostra a importância de considerarmos o espaço homogêneo G/P_0. Veremos que no flag maximal G/P, temos as inclusões próprias $\mathfrak{R}(S) \subsetneq \mathfrak{R}(C_0) \subsetneq \mathfrak{R}(C)$.

Exemplo 7 *Seja $G = \mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$. O subgrupo parabólico minimal de G é dado por*

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : ac = 1 \right\}$$

Ele é o subgrupo de isotropia de um flag

$$b_0 = (V_1 \subset \mathbb{R}^2 : \ \dim V_1 = 1)$$

no flag maximal G/P. *Tome o subsemigrupo* $S = \mathrm{Sl}^+(2,\mathbb{R})$ *de* G. *Observemos que existe*

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sl}(2,\mathbb{R})$$

satisfazendo $gS \cap S = \emptyset$. *Por outro lado, sabemos que* P *não é conexo e pode ser decomposto como*

$$P = P_0 \cup (-1)P_0$$

onde P_0 *denota a componente conexa de* P *que contém a identidade e, neste caso,*

$$P_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : ac = 1 \ \text{com} \ a, c > 0 \right\}$$

Consideremos os conjuntos

$$\begin{array}{rcl} D_1 & = & S^1 \cap \mathbb{R}^2_+ \ \text{onde} \ \mathbb{R}^2_+ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\right\} \\ D_2 & = & S^1 \cap \mathbb{R}^2_- \ \text{onde} \ \mathbb{R}^2_- = -\mathbb{R}^2_+ \end{array}$$

que correspondem aos primeiro e terceiro quadrantes em $G/P_0 = S^1$. *Então,* D_1 *e* D_2 *são conjuntos controláveis invariantes para* S *em* G/P_0 *e satisfazem* $gD_1 = D_2$ *e, além disso,* $g(D_1)_0 = (D_2)_0$. *Temos também que* $G/P = \mathbb{R}P^1$. *Consideremos a fibração*

$$\pi_1 : G/P_0 \to G/P$$

Seja $C \subset G/P = \mathbb{R}P^1$ *o conjunto controlável invariante para* S *em* G/P. *Pela equivariância de* π_1, *temos que* $g\pi_1((D_1)_0) = \pi_1((D_2)_0)$. *Então,* $gC_0 \cap C_0 \neq \emptyset$, *pois* $g\pi_1((D_1)_0) \subset gC_0, \pi_1((D_2)_0) \subset C_0$. *Daí segue que* $gC_0 \cap C_0 \neq \emptyset$. *Com isto, concluímos que existe* $g \in \mathrm{Sl}(2,\mathbb{R})$ *tal que* $gS \cap S = \emptyset$ *e* $gC_0 \cap C_0 \neq \emptyset$ *no flag maximal* G/P. *Ou seja, existe* $g \in \mathrm{Sl}(2,\mathbb{R})$ *tal que* $g \in \mathfrak{R}(C_0)$ *e* $g \notin \mathfrak{R}(S)$. *Portanto, pelo Corolário 1, temos que* $\mathfrak{R}(S) \subsetneq \mathfrak{R}(C_0)$. *Além disso, temos também que* $\mathfrak{R}(C_0) \subsetneq \mathfrak{R}(C)$, *pois existe* $h = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in G$, *tal que* $h \left[\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}\right]$. *Então, temos que* $hC \cap C \neq \emptyset$, *ou seja,* $h \in \mathfrak{R}(C)$. *No entanto, para todo* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in C_0$, *temos que* $h \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \notin C_0$. *Logo,* $hC_0 \cap C_0 = \emptyset$, *ou seja,* $h \notin \mathfrak{R}(C_0)$.

Capítulo 3

Reversibilidade Módulo um Subgrupo

Neste capítulo, introduziremos o conceito de semigrupos reversíveis módulo um subgrupo de um grupo. Aqui, analisaremos a reversibilidade módulo um subgrupo L de G para S, onde G é um grupo de Lie semi-simples, real, conexo, não compacto, com centro finito, e S é um subsemigrupo de G com interior não vazio. Essa análise será feita com o auxílio da descrição do conjunto reversor em termos dos conjuntos controláveis invariantes para S em G/P_0, onde P_0 denota a componente conexa da identidade do subgrupo parabólico minimal P.

Apresentaremos uma caracterização da reversibilidade módulo L em termos dos conjuntos controláveis minimais para ação de S em G/P_0. Além disso, como consequência desta caracterização, mostraremos que, se existe uma órbita densa de L em G/P_0, então S é reversível módulo L.

Como uma aplicação deste último resultado, mostraremos também que se $L = K$ é um subgrupo compacto maximal de G ou $L = P_\Theta$ é um subgrupo parabólico de G, então S é reversível módulo L. Para o caso em que o subgrupo é um compacto maximal de G, apresentaremos uma demonstração alternativa, pois este é um resultado que foi demonstrado por Furstenberg em [11] (Veja Proposição 23).

Para um subsemigrupo S com tipo parabólico Θ, relacionaremos os conjuntos controláveis invariantes para S em G/P_0 e em G/P_Θ^0, onde P_Θ^0 denota a componente conexa da identidade do subgrupo parabólico P_Θ. Veremos que uma tal relação nos permite caracterizar a reversibilidade módulo L em termos dos conjuntos controláveis minimais para S em G/P_0 e em $G/P_{\Theta^*}^0$. Isto será feito em termos de uma órbita de L que tem a propriedade de interceptar translações de um mesmo conjunto controlável invariante tanto em G/P_0 quanto em $G/P^0_{\Theta^*}$. Mostraremos também que S é reversível módulo L, se L tem uma órbita densa em $G/P^0_{\Theta^*}$. Apresentaremos ainda uma caracterização da reversibilidade módulo L em termos de uma órbita de L que intercepta quaisquer dois abertos em $G/P^0_{\Theta^*}$.

Para um subsemigrupo S de G, mostraremos que, se S é reversível módulo L, então L não está contido em S. No caso em que S contém L, sob certas condições, mostraremos que a reversibilidade módulo L é equivalente ao subsemigrupo S/L ser reversível em um grupo de Lie. Esse resultado nos permitirá exibir um exemplo em que temos reversibilidade módulo L e com S contendo L.

Mais geralmente, descrevemos o conjunto reversor em termos dos conjuntos controláveis invariantes para S em um espaço homogêneo compacto de um grupo topológico. Apresentamos algumas consequências desse resultado.

Introduzimos o conceito de reversibilidade para um subsemigrupo S de um grupo agindo em um espaço topológico X. Esta noção estende o conceito de reversibilidade módulo um subgrupo. Mostraremos que a reversibilidade em um espaço topológico compacto X é equivalente à existência de um único conjunto controlável invariante para S em X. Para um subsemigrupo S de um grupo de Lie conexo, mostraremos também que, se S é reversível módulo L, então L não está contido em S.

3.1 Reversibilidade em G/L

Nesta seção, introduziremos o conceito de semigrupos reversíveis módulo L, onde L é um subgrupo de um grupo. Seja G um grupo de Lie semi-simples, real, não compacto e com centro finito. Mostraremos que qualquer subsemigrupo S de G que possui interior não vazio é reversível módulo um subgrupo parabólico de G.

Apresentaremos uma caracterização da reversibilidade módulo L em termos dos conjuntos controláveis minimais para ação de S em G/P_0. Com isto, mostraremos que qualquer subsemigrupo de G que possui interior não vazio, é reversível módulo L, se L possui uma órbita densa em G/P_0. Apresentaremos um exemplo que ilustra o fato de que L ter uma órbita densa em G/P não implica que L tem uma órbita densa em G/P_0.

Generalizaremos um resultado que foi demonstrado por Furstenberg em

[11] (Veja a Proposição 23). Em particular, obtemos uma demonstração alternativa para o seu resultado, ou seja, do fato de que qualquer subsemigrupo S de G que possui interior não vazio, é reversível módulo um subgrupo compacto maximal de G.

Para isto, sejam G um grupo, S um subsemigrupo de G e L um subgrupo de G. Suponha que G age em G/L com ação

$$\begin{array}{lcl} G \times G/L & \to & G/L \\ (g, hL) & \mapsto & g(hL) = (gh)L \end{array}$$

É de fácil verificação que esta aplicação está bem definida, ou seja, independe do representante da classe que tomamos, isto é, se $h_1 L = h_2 L$, então $g(h_1 L) = g(h_2 L)$, com $g \in G$.

Definição 17 *Dizemos que S é* reversível em G/L *ou* reversível módulo L *se para todo $x, y \in G/L$, $Sx \cap Sy \neq \emptyset$.*

Consideremos a seguinte:

Proposição 22 *Sejam G um grupo e S um subsemigrupo de G. Tem-se:*

1. S é reversível módulo L se, e somente se, $S^{-1}Sx = G/L$ para todo $x \in G/L$.

2. Além disso, $S^{-1}Sx_0 = G/L$ se, e somente se, $G = S^{-1}SL$, onde $x_0 = L$.

Demonstração: De fato, S é reversível módulo L se, e só se, para todo $x, y \in G/L$, $Sx \cap Sy \neq \emptyset$. Ou seja, para todo $g, h \in G$, existem $s_1, s_2 \in S$ tais que $s_1(gL) = s_2(hL)$, ou ainda, pela definição da ação de S em G/L, temos que $(s_1 g)L = (s_2 h)L$. O que equivale, pela definição de classes laterais em G/L a $(s_2 h)^{-1}(s_1 g) \in L$, ou seja, $h^{-1}(s_2^{-1} s_1 g) \in L$. De modo equivalente, temos que $(s_2^{-1} s_1 g)L = hL$. Usando a ação de G em G/L, isto equivale a $(s_2^{-1} s_1)(gL) = hL$. Ou seja, existem $s_1, s_2 \in S$ tais que $(s_2^{-1} s_1)x = y$, isto é, para todo $x \in G/L$, $S^{-1}Sx = G/L$.

Para o item (2), suponha que $(S^{-1}S)x_0 = G/L$, onde $x_0 = L$. De modo equivalente, para todo $g \in G$, existem $s_1, s_2 \in S$ tais que $(s_1^{-1} s_2)L = gL$, ou seja, $s_2^{-1} s_1 g \in L$. O que equivale a $g \in S^{-1}SL$. □

Observe que tomando $L = \{1\}$, temos que os conceitos de reversibilidade módulo L e reversibilidade coincidem.

Recordemos agora que um subsemigrupo $S \subset G$ é *transitivo* em G/L, se para todo $x \in G/L$, $Sx = G/L$. É claro que, se S é transitivo em G/L, então S é reversível módulo L. De fato, para todo par $x, y \in G/L$, temos que $Sx \cap Sy = G/L$.

As proposições seguintes nos fornecem exemplos de subsemigrupos reversíveis em espaços homogêneos de grupos de Lie semi-simples. A primeira delas é um resultado demonstrado por Furstenberg.

Proposição 23 *Sejam G um grupo de Lie semi-simples, real, não compacto e com centro finito. Então, para qualquer subsemigrupo $S \subset G$ com $\text{int}S \neq \emptyset$, temos que S é reversível módulo K, onde K é um subgrupo compacto maximal de G.*

Demonstração: Veja o Corolário 1 do Lema 3.2 em [11]. □

A seguir, mostraremos que qualquer subsemigrupo $S \subset G$ com $\text{int}S \neq \emptyset$ é reversível numa variedade flag qualquer, ou seja, temos a seguinte

Proposição 24 *Sejam G um grupo de Lie semi-simples, real, não compacto e com centro finito. Então, para qualquer subsemigrupo $S \subset G$ com $\text{int}S \neq \emptyset$, temos que S é reversível módulo P_Θ, onde P_Θ é um subgrupo parabólico de G.*

Demonstração: Como $S \subset G$ é um subsemigrupo com $\text{int}S \neq \emptyset$, segue do Teorema 3.1 de [33], que S tem um único conjunto controlável invariante C em G/P_Θ. Além disso, pela Proposição 9, temos que

$$C_\Theta = \bigcap_{x \in G/P_\Theta} \text{fe}(Sx)$$

Sejam $x, y \in G/P_\Theta$. Segue que $C_\Theta \subset \text{fe}(Sx)$ e $C_\Theta \subset \text{fe}(Sy)$. Como $(C_\Theta)_0 \subset C_\Theta$, temos que $(C_\Theta)_0 \cap Sx \neq \emptyset$ e $(C_\Theta)_0 \cap Sy \neq \emptyset$. Isto implica que existem $s_1, s_2 \in S$ tais que $s_1x, s_2y \in (C_\Theta)_0$. Logo, existe $h \in \text{int}S$ tal que $hs_1x = s_2y$. Portanto, $Sx \cap Sy \neq \emptyset$. Logo, qualquer subsemigrupo S com $\text{int}S \neq \emptyset$ é reversível módulo P_Θ. □

Posteriormente, nesta seção, apresentaremos uma demonstração alternativa para a Proposição 24.

Observação: A propriedade de reversibilidade módulo L é mais fraca que a de transitividade. É claro que, se S é transitivo em G/L, então S é reversível módulo L. Por outro lado, existem vários exemplos de subsemigrupos reversíveis módulo L que não são transitivos em G/L. Para verificarmos isto, tomemos um flag G/P_{Θ}. Seja $S \subset G$ um subsemigrupo próprio de interior não vazio em G. Então, pela Proposição 24, temos que S é reversível módulo P_{Θ}. Suponha agora que G é um grupo de Lie simples e conexo. Então, S não é transitivo em G/P_{Θ}. Caso contrário, pelo Teorema 6.2 em [34], temos que $S = G$, o que é uma contradição, já que por hipótese S é um subsemigrupo próprio de G.

Em seguida, apresentamos uma propriedade geral de reversibilidade módulo L.

Proposição 25 *Sejam G um grupo, S um subsemigrupo de G e L um subgrupo de G. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

1. S é reversível módulo L.
2. Para todo $g, h \in G$, $S(gL) \cap S(hL) \neq \emptyset$.
3. Para todo $g, h \in G$, existem $l_1, l_2 \in L$ tal que $Sgl_1 \cap Shl_2 \neq \emptyset$.
4. Para todo $g, h \in G$, existe $l \in L$ tal que $Sgl \cap Sh \neq \emptyset$.

Demonstração: Segue da definição de reversibilidade módulo L. De fato, S é reversível módulo L se, e só se, para todo $g, h \in G$, $S(gL) = S(hL)$. Portanto, (1) equivale a (2). Claramente, (2) e (3) são equivalentes. Agora, para a última equivalência, observemos que para todo $g, h \in G$, existem $l_1, l_2 \in L$ tais que $Sgl_1 \cap Shl_2 \neq \emptyset$ se, e só se, existem $s_1, s_2 \in S$ tais que $s_1 g l_1 l_2^{-1} = s_2 h$. Logo, isto equivale a que para todo $g, h \in G$, existe $l \in L$ tal que $Sgl \cap Sh \neq \emptyset$. Portanto, (3) e (4) são equivalentes. □

A seguir, consideraremos G um grupo de Lie semi-simples, real, conexo, não compacto, com centro finito, e S um subsemigrupo de G com $\text{int}S \neq \emptyset$. Assim, da Proposição 25 e do Corolário 4, obtemos uma caracterização de reversibilidade módulo L em termos dos conjuntos controláveis minimais para S em G/P_0. Mais precisamente, temos:

Proposição 26 *Seja $D(S^{-1})$ um conjunto controlável invariante para S^{-1} em G/P_0. Dado um subgrupo L de G, são equivalentes:*

1. S é reversível módulo L.

2. Para todo $g, h \in G$, existe $l \in L$ tal que $lg^{-1}D^* \cap h^{-1}D^* \neq \emptyset$, onde $D^* = D_0(S^{-1})$.

Demonstração: De fato, pela Proposição 25, temos que S é reversível módulo L se, e somente se, para todo $g, h \in G$, existe $l_1 \in L$, $Sgl_1 \cap Sh \neq \emptyset$. Pelo Corolário 4, isto é equivalente a $l_1^{-1}g^{-1}D^* \cap h^{-1}D^* \neq \emptyset$, onde $D^* = D_0(S^{-1})$. Daí, o resultado segue se tomamos $l = l_1^{-1}$. □

Observemos que, se S é reversível módulo L, então pela condição (2) da Proposição 26 segue que existe uma órbita de L em G/P_0 que intercepta tanto $g^{-1}D^*$ quanto $h^{-1}D^*$ para todo $g, h \in G$. Logo, a Proposição 26 pode ser re-escrita na seguinte forma:

Proposição 27 *Seja $D(S^{-1})$ um conjunto controlável invariante para S^{-1} em G/P_0. Dado um subgrupo L de G, as seguintes condições são equivalentes:*

1. S é reversível módulo L.

2. Para todo $g, h \in G$, existe uma L-órbita em G/P_0 que intercepta tanto $g^{-1}D^*$ quanto $h^{-1}D^*$, onde D^* é um conjunto controlável minimal para S em G/P_0.

Demonstração: Segue imediatamente da proposição anterior. □

Consequentemente, temos:

Corolário 5 *Seja $D(S^{-1})$ um conjunto controlável invariante para S^{-1} em G/P_0. Suponha que L tem uma órbita densa em G/P_0. Então, S é reversível módulo L.*

Demonstração: Por hipótese, L tem uma órbita densa em G/P_0, ou seja, Lx é denso em G/P_0 para algum $x \in G/P_0$. Como $D^* = D_0(S^{-1})$ é um conjunto aberto em G/P_0, temos que as intersecções $Lx \cap g^{-1}D^*$ e $Lx \cap h^{-1}D^*$ não são vazias para todo $g, h \in G$. Então, pela Proposição 27, segue que S é reversível módulo L. □

É claro que, se L tem uma órbita densa em G/P_0, então L tem uma órbita densa em G/P. Mas a recíproca desse fato não é verdadeira, ou seja, se L tem uma órbita densa em G/P não implica que L tem uma órbita densa em G/P_0, como nos mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 8 *Sejam $G = Sl(n,\mathbb{R})$ o grupo de Lie das matrizes reais $n \times n$ de determinante 1, e S o subsemigrupo das matrizes reais positivas, i.e., $S = \mathrm{Sl}^+(n,\mathbb{R})$. Tome L como o subgrupo (nilpotente) de G das matrizes da forma*

$$L = N^+ = \{\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1_{n-1} \end{pmatrix}\}$$

onde 1_{n-1} denota a matriz identidade de $n-1 \times n-1$. Temos que $P_0 = id_n AN^+$, ou seja,

$$P_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & * & \cdots & * \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} : a_1 a_2 \dots a_n = 1, a_i > 0 \right\}$$

Então, segue que $G/P_0 = S^n = Gr_1^+(n)$. Temos que L tem uma órbita densa no flag maximal G/P dada por Lb_0, onde $b_0 = P$. (Veja [33]). Agora, L não tem órbita densa em G/P_0. De fato, pela Proposição 13, segue que L tem duas órbitas em $Gr_1^+(n)$, ou seja, existe um $\eta \in Gr_1^+(n)$ tal que as órbitas de L em $Gr_1^+(n)$ são dadas pelos semi-espaços $\langle \eta, \zeta \rangle > 0$ e $\langle \eta, \zeta \rangle < 0$. Então, para todo $\zeta \in S^n$ existe um aberto U que é um destes semi-espaços que não contém ζ. Então, temos que $L\zeta \cap U = \emptyset$, pois as órbitas de L são disjuntas. Isto implica que L não tem órbita densa em G/P_0.

A seguir, mostraremos que o Corolário 5 nos fornece uma generalização do resultado de Furstenberg (Veja a Proposição 23).

Como na Seção 2.2, consideremos o fibrado principal

$$\pi : G/P_0 \to G/P$$

entre espaços homogêneos com fibra $P/P_0 = M/M_0$.

Temos que o grupo estrutural M/M_0 age à direita sobre G/P_0 com ação dada por $(gP_0)mM_0 = (gm)P_0$. Temos também que G age em G/P_0 com a ação natural à esquerda dada por $g(g_1P_0) = (gg_1)P_0$. Além disso, temos que π é equivariante em relação a estas ações.

Com isto, podemos generalizar o resultado de Furstenberg através da seguinte:

Proposição 28 *Suponha que L é um subgrupo de G que age transitivamente em G/P. Assuma que $M \subset L$. Então, S é reversível módulo L.*

Demonstração: Consideremos o fibrado principal $\pi : G/P_0 \to G/P$ com fibra $P/P_0 \approx M/M_0$. Tomemos $b^0 = P_0$ e $x \in G/P_0$. Então, $\pi(b^0), \pi(x) \in G/P$. Pela transitividade de L no flag maximal G/P, temos que existe $l \in L$ tal que $l\pi(b^0) = \pi(x)$. Pela equivariância de π, segue que $\pi(lb^0) = \pi(x)$. Então, $lb^0 \in \pi^{-1}\pi(x)$. Como o grupo estrutural M/M_0 age transitivamente nas fibras, então existe $mM_0 \in M/M_0$ tal que $lb^0(mM_0) = x$, ou seja, $(lm)b^0 = x$ com $lm \in L$, uma vez que $m \in M = Z_K A \subset L$. Logo, segue que $Lb^0 = G/P_0$ e, portanto, L tem uma órbita densa em G/P_0. Pelo Corolário 5 segue que S é reversível módulo L. □

Como consequência, temos uma demonstração alternativa para o resultado de Furstenberg dado pelo seguinte.

Corolário 6 *S é reversível módulo K, onde K é o subgrupo compacto maximal de G.*

Demonstração: Pelo Teorema 1.4 de [11] temos que K é transitivo no flag maximal G/P. Temos também que $M = Z_K A \subset K$. Então, pela Proposição 28 segue que S é reversível módulo K. □

A seguir, mostraremos também que o Corolário 5 nos fornece uma demonstração alternativa para a Proposição 24, ou seja, de que qualquer subsemigrupo S de um grupo de Lie semi-simples com $\mathrm{int} S \neq \emptyset$ é reversível numa variedade flag. Faremos isso com ajuda do Corolário 5 e do seguinte:

Lema 3 *Sejam G, S como anteriormente. Então,*

1. Para qualquer aberto U em G/P_0, temos que $Pb_0 \cap U \neq \emptyset$, ou seja, P tem uma órbita densa em G/P_0
2. P_Θ tem uma órbita densa em G/P_0.

Demonstração: Seja U aberto em G/P_0. Consideremos o fibrado principal $\pi : G/P_0 \to G/P$ com fibra $P/P_0 \approx M/M_0$. Observemos que o subgrupo parabólico minimal P tem uma órbita densa em G/P, já que uma de suas órbitas contém a componente de Bruhat, aberta e densa, N^+b_0, ou seja, $N^+b_0 \subset Pb_0$, onde $b_0 = P_0$ denota a origem de G/P. Logo, temos que existe $b_0 = P \in G/P$ tal que $\mathrm{fe}(Pb_0) = G/P$ e $\pi(b^0) = b_0$. Temos também que $\pi(U)$ é um aberto em G/P, pois π é uma aplicação aberta.

Então, segue que $P\pi(b^0) \cap \pi(U) \neq \emptyset$. Logo, existem $a \in P, u \in U$ tal que $a\pi(b^0) = \pi(u)$, ou ainda, pela equivariância de π, temos que $\pi(ab^0) = \pi(u)$. Então, $ab^0 \in \pi^{-1}(\pi(u))$. Como M/M_0 age transitivamente nas fibras de π, temos que existe $mM_0 \in M/M_0$ tal que $ab^0(mM_0) = u$. Então, $(am)b^0 = u$ com $am \in PM \subset PP \subset P$. Logo, segue que $Pb^0 \cap U \neq \emptyset$ para qualquer aberto U em G/P_0. Portanto, P tem uma órbita densa em G/P_0. Para o item 2, observemos que $P \subset P_\Theta$ implica que $Pb^0 \subset P_\Theta b^0 \subset G/P_0$. Logo, P_Θ tem uma órbita densa em G/P_0, pois $\mathrm{fe}(Pb^0) = G/P_0$. □

Assim, obtemos a seguinte:

Proposição 29 *S é reversível módulo P_Θ, onde P_Θ é um subgrupo parabólico de G*

Demonstração: Consideremos o fibrado principal $\pi : G/P_0 \to G/P$ com fibra $P/P_0 \approx M/M_0$. Pelo Lema 3, temos que P_Θ tem uma órbita densa em G/P_0. Então, pelo Corolário 5 segue que S é reversível módulo P_Θ. □

3.2 Reversibilidade módulo um subgrupo e tipo parabólico

Seja G um grupo de Lie semi-simples, real, conexo, não compacto e com centro finito. Suponha que $S \subset G$ é um subsemigrupo que possui interior não vazio, e com tipo parabólico $\Theta(S)$. Dado um subgrupo $L \subset G$, o objetivo desta seção é o de caracterizar a reversibilidade em G/L em termos de uma órbita de L que intercepta quaisquer dois abertos em $G/P^0_{\Theta^*}$, onde $P^0_{\Theta^*}$ denota a componente conexa da identidade de P_{Θ^*} e $\Theta^* = \Theta(S^{-1})$ o tipo parabólico do subsemigrupo S^{-1}.

Inicialmente, relacionaremos os conjuntos controláveis invariantes para S em G/P_0 com os conjuntos controláveis invariantes em $G/P^0_{\Theta(S)}$. Isto nos permite caracterizar a reversibilidade em G/L em termos dos conjuntos controláveis minimais de S em $G/P^0_{\Theta^*}$.

Mostraremos também que, se L tem uma órbita densa em $G/P^0_{\Theta^*}$, então S é reversível módulo L.

Recordaremos agora algumas fibrações de espaços homogêneos que foram estudadas em [25]. Para isto, fixemos uma decomposição de Iwasawa $G =$

KAN^+ e uma decomposição de Langlands $P = MAN^+$. Consideremos P_0 e P_Θ^0 as componentes conexas da identidade de P e P_Θ respectivamente. Temos então que $P_0 \subset P_\Theta^0$ são subgrupos fechados de G.

Podemos considerar a fibração de espaços homogêneos

$$\begin{array}{rccc} p_\Theta : & G/P_0 & \to & G/P_\Theta^0 \\ & gP_0 & \mapsto & gP_\Theta^0 \end{array}$$

que é um fibrado associado ao fibrado principal

$$\begin{array}{ccc} G & \to & G/P_\Theta^0 \\ g & \mapsto & gP_\Theta^0 \end{array}$$

com fibra típica dada por P_Θ^0/P_0.

Para relacionar a reversibilidade módulo um subgrupo com a topologia de G/P_Θ^0, relacionaremos os conjuntos controláveis invariantes para S em G/P_0 e G/P_Θ^0 através da fibração

$$\begin{array}{rccc} p_\Theta : & G/P_0 & \to & G/P_\Theta^0 \\ & gP_0 & \mapsto & gP_\Theta^0 \end{array}$$

Consideremos também a fibração

$$\begin{array}{rccc} \pi : & G/P_0 & \to & G/P_\Theta \\ & gP_0 & \mapsto & gP_\Theta \end{array}$$

que é dada pela composta das fibrações

$$G/P_0 \xrightarrow{\pi_1} G/P \xrightarrow{\pi_\Theta} G/P_\Theta$$

onde

$$\begin{array}{rccc} \pi_1 : & G/P_0 & \to & G/P \\ & gP_0 & \mapsto & gP \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \pi_\Theta : & G/P & \to & G/P_\Theta \\ & gP & \mapsto & gP_\Theta \end{array}$$

Além disso, temos que π pode ser vista também como a composta das fibrações

$$G/P_0 \xrightarrow{p_\Theta} G/P_\Theta^0 \xrightarrow{p_1} G/P_\Theta$$

onde

$$\begin{array}{rccc} p_1 : & G/P_\Theta^0 & \to & G/P_\Theta \\ & gP_\Theta^0 & \mapsto & gP_\Theta \end{array}$$

Ou seja, de modo que o diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc} G/P_0 & \stackrel{p_\Theta}{\rightarrow} & G/P_\Theta^0 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow p_1 \\ G/P & \stackrel{\pi_\Theta}{\rightarrow} & G/P_\Theta \end{array}$$

seja comutativo, i.e., $\pi_\Theta \pi_1 = p_1 p_\Theta$. De fato, temos que $\pi_\Theta \pi_1(gP_0) = \pi_\Theta(gP) = gP_\Theta$. Por outro lado, temos que $p_1 p_\Theta(gP_0) = p_1(gP_\Theta^0) = gP_\Theta$.

Um resultado preliminar é o seguinte:

Lema 4 *Consideremos a fibração $p_\Theta : G/P_0 \rightarrow G/P_\Theta^0$ definida acima. Temos que $D \subset G/P_0$ é um conjunto controlável invariante para S se, e somente se, $D = p_\Theta^{-1}\left(D^\Theta\right)$, onde $D^\Theta \subset G/P_\Theta^0$ é um conjunto controlável invariante para S. Além disso, tem-se que $D_0 = p_\Theta^{-1}(D_0^\Theta)$.*

Demonstração: Suponha que $D \subset G/P_0$ é um conjunto controlável invariante para S, e mostremos que $D = p_\Theta^{-1}\left(D^\Theta\right)$, onde $D^\Theta \subset G/P_\Theta^0$ é um conjunto controlável invariante para S. De fato, pela Proposição 10, temos que $p_\Theta\left(D\right)$ é um conjunto controlável invariante para S em G/P_Θ^0. Como S é do tipo parabólico Θ, segue da Proposição 4.3 de [25] que $D = \pi^{-1}(C_{\Theta(S)})$, onde $\pi = \pi_\Theta \pi_1$. Como $\pi = p_1 p_\Theta$, temos que $D = \pi^{-1}(C_\Theta) = p_\Theta^{-1} p_1^{-1}(C_\Theta)$. Usando a sobrejetividade de p_Θ, temos que $p_\Theta\left(D\right) = p_1^{-1}(C_\Theta)$ é um conjunto controlável invariante para S em G/P_Θ^0. Logo, podemos escrever

$$D = p_\Theta^{-1}(p_1^{-1}(C_\Theta)) = p_\Theta^{-1}(p_\Theta\left(D\right))$$

Então, $D^\Theta = p_\Theta\left(D\right)$ satisfaz o que queríamos. Para a recíproca, observemos que G/P_0 é compacto. Pela Proposição 10, segue que $p_\Theta^{-1}\left(D^\Theta\right)$ contém algum conjunto controlável invariante, digamos D em G/P_0. Daí segue que $D^\Theta \supset p_\Theta\left(D\right)$. Isto implica que $D^\Theta = p_\Theta\left(D\right)$, uma vez que D^Θ e $p_\Theta\left(D\right)$ são conjuntos controláveis invariantes para S em G/P_Θ^0. Por outro lado, usando novamente a Proposição 4.3 de [25], temos que $D = \pi^{-1}(C_\Theta)$. Então, $D = p_\Theta^{-1} p_1^{-1}(C_\Theta)$, pois $\pi = p_1 p_\Theta$. Isto implica que $D^\Theta = p_\Theta\left(D\right) = p_1^{-1}(C_\Theta)$, já que p_Θ é sobrejetora. Logo,

$$p_\Theta^{-1}(D^\Theta) = p_\Theta^{-1} p_1^{-1}(C_\Theta) = \pi^{-1}(C_\Theta) = D$$

que é um conjunto controlável invariante para S. Agora, para mostrarmos que $D_0 = p_\Theta^{-1}(D_0^\Theta)$, seja $y \in p_\Theta^{-1}(D_0^\Theta)$. Então, $p_\Theta(y) \in D_0^\Theta$. Pela Proposição

7 segue que existe $h \in \text{int}S$ tal que $hp_\Theta(y) = p_\Theta(y)$. Então, temos que $p_\Theta^{-1}\{p_\Theta(y)\} = hp_\Theta^{-1}\{p_\Theta(y)\}$, com $p_\Theta^{-1}\{p_\Theta(y)\} \subset p_\Theta^{-1}(D_0^\Theta) \subset p_\Theta^{-1}(D^\Theta) = D$. Logo, segue que $y \in p_\Theta^{-1}\{p_\Theta(y)\} \subset \text{int}SD \cap D$. Mas, pela Proposição 2.2 de [34], temos que $\text{int}SD \cap D = D_0$. Então, $y \in D_0$. Portanto, $p_\Theta^{-1}(D_0^\Theta) \subset D_0$. Para a outra inclusão, seja $y \in D_0$. Então existe $h \in \text{int}S$ tal que $hy = y$. Isto implica que $hp_\Theta(y) = p_\Theta(y)$ com $p_\Theta(y) \in p_\Theta(D_0) \subset D^\Theta$. Daí segue que $p_\Theta(y) \in D_0^\Theta$. Portanto, $y \in p_\Theta^{-1}(D_0^\Theta)$. □

Observação: Seja $\Theta^* = \Theta(S^{-1})$ o tipo parabólico de S^{-1}. Seja $D(S^{-1})$ um conjunto controlável invariante para S^{-1} em G/P_0 e $D^*(S) = D_0(S^{-1})$. Pelo lema anterior, temos que $D(S^{-1}) = p_{\Theta^*}^{-1}(D^{\Theta^*}(S^{-1}))$, onde $D^{\Theta^*}(S^{-1}) \subset G/P_{\Theta^*}^0$ é um conjunto controlável invariante para S^{-1}. Além disso, temos também que $D^*(S) = p_{\Theta^*}^{-1}((D^{\Theta^*})^*)$, onde $(D^{\Theta^*})^* = D_0^{\Theta^*}(S^{-1})$.

Para os subsemigrupos com tipo parabólico $\Theta(S)$, temos ainda a seguinte propriedade: a translação de um conjunto controlável invariante D em G/P_0 interceptar D é equivalente à translação do conjunto controlável invariante correspondente D^Θ em G/P_Θ^0 interceptar D^Θ ou, mais precisamente, temos a seguinte:

Proposição 30 *Seja $D \subset G/P_0$ um conjunto controlável invariante para S em G/P_0. Então, $\mathfrak{R}(D) = \mathfrak{R}(D^\Theta)$, onde $D^\Theta \subset G/P_\Theta^0$ é um conjunto controlável invariante para S com $D = p_\Theta^{-1}\left(D^\Theta\right)$. Além disso, temos que $\mathfrak{R}(D_0) = \mathfrak{R}(D_0^\Theta)$.*

Demonstração: Pelo Lema 4, temos que $D = p_\Theta^{-1}\left(D^\Theta\right)$, onde $D^\Theta \subset G/P_\Theta^0$ é um conjunto controlável invariante para S. Primeiro, mostremos que $\mathfrak{R}(D^\Theta) \subset \mathfrak{R}(D)$. Para isto, seja $g \in \mathfrak{R}(D^\Theta)$, ou seja, $gD^\Theta \cap D^\Theta \neq \emptyset$. Logo, existem $x, y \in D^\Theta$ tal que $gx = y$. Daí, $p_\Theta^{-1}\{y\} = gp_\Theta^{-1}\{x\}$, com $p_\Theta^{-1}\{y\}, p_\Theta^{-1}\{x\} \subset p_\Theta^{-1}\left(D^\Theta\right) = D$. Portanto, $gD \cap D \neq \emptyset$, isto é, $g \in \mathfrak{R}(D)$. Para a outra inclusão, seja $g \in \mathfrak{R}(D^\Theta)$. Então, $gD \cap D \neq \emptyset$, ou seja, existem $x, y \in D$ tal que $gx = y$. Pela equivariância de p_Θ, segue que

$$gp_\Theta(x) = p_\Theta(gx) = p_\Theta(y)$$

com $p_\Theta(x), p_\Theta(y) \in p_\Theta(D) = D^\Theta$. Logo, $gD^\Theta \cap D^\Theta \neq \emptyset$, ou seja, $g \in \mathfrak{R}(D^\Theta)$. Agora, mostremos que $\mathfrak{R}(D_0) = \mathfrak{R}(D_0^\Theta)$. De fato, observemos que pelo Lema 4, temos que $D_0 = p_\Theta^{-1}(D_0^\Theta)$. Seja $g \in \mathfrak{R}(D_0^\Theta)$. Então, $gD_0^\Theta \cap D_0^\Theta \neq \emptyset$, ou seja, existem $x, y \in D_0^\Theta$ tal que $gx = y$. Daí segue que $p_\Theta^{-1}\{y\} = gp_\Theta^{-1}\{x\}$, com $p_\Theta^{-1}\{y\}, p_\Theta^{-1}\{x\} \subset p_\Theta^{-1}\left(D_0^\Theta\right) = D_0$. Logo, segue que $gD_0 \cap D_0 \neq \emptyset$, ou seja, $g \in \mathfrak{R}(D_0)$. Portanto, $\mathfrak{R}(D_0^\Theta) \subset \mathfrak{R}(D_0)$. Para a outra inclusão, seja $g \in \mathfrak{R}(D_0)$. Então, $gD_0 \cap D_0 \neq \emptyset$. Disto segue que $gD_0^\Theta \cap D_0^\Theta \neq \emptyset$, pois $D_0 = p_\Theta^{-1}(D_0^\Theta)$ e p_Θ é sobrejetora. Portanto, $g \in \mathfrak{R}(D_0^\Theta)$. □

A seguir, assumiremos que S^{-1} é um subsemigrupo com tipo parabólico $\Theta(S^{-1})$. Escreveremos $\Theta^* = \Theta^*(S) = \Theta(S^{-1})$ e consideremos a fibração

$$p_{\Theta^*} : G/P_0 \longrightarrow G/P_{\Theta^*}^0$$

de espaços homogêneos, definida como anteriormente. Dado um subgrupo L de G, estaremos interessados em caracterizar a reversibilidade módulo L em termos de uma L-órbita com a propriedade de interceptar quaisquer dois abertos tanto em G/P_0 quanto em $G/P_{\Theta^*}^0$.

Inicialmente, com o auxílio das Proposições 27 e 30, apresentaremos uma caracterização da reversibilidade em G/L em termos de uma L-órbita com a propriedade de interceptar translações de um mesmo conjunto controlável invariante tanto em G/P_0 quanto em $G/P_{\Theta^*}^0$. Mais precisamente, temos a seguinte:

Proposição 31 *Sejam $D^{\Theta^*}(S^{-1})$ um conjunto controlável invariante para S^{-1} em $G/P_{\Theta^*}^0$ e $(D^{\Theta^*})^*$ o seu conjunto de transitividade. Então, são equivalentes:*

1. *S é reversível módulo L.*

2. *Para todo $g, h \in G$, existe uma órbita de L no espaço homogêneo $G/P_{\Theta^*}^0$ que intercepta tanto $g^{-1}(D^{\Theta^*})^*$ quanto $h^{-1}(D^{\Theta^*})^*$.*

Demonstração: Pela Proposição 27, temos que S é reversível módulo L se, e só se, para todo $g, h \in G$, existe $l \in L$ tal que $lg^{-1}D^* \cap h^{-1}D^* \neq \emptyset$, onde $D^* = D_0(S^{-1})$. Ou seja, existe $g_1 = hlg^{-1} \in G$ tal que $g_1 D^* \cap D^* \neq \emptyset$, onde D^* é um conjunto controlável minimal de S em G/P_0. Agora, como S^{-1} é um subsemigrupo com tipo parabólico $\Theta^* = \Theta(S^{-1})$, temos que a última intersecção é não-vazia se, e só se, para todo $g, h \in G$, existe $l \in L$ tal que $(lg^{-1})(D^{\Theta^*})^* \cap h^{-1}(D^{\Theta^*})^* \neq \emptyset$, onde $D^* = p_{\Theta^*}^{-1}\left((D^{\Theta^*})^*\right)$ e $(D^{\Theta^*})^* = (D^{\Theta^*})_0(S^{-1})$, pois pela Proposição 30, temos que $\mathfrak{R}(D^*) = \mathfrak{R}((D^{\Theta^*})^*)$. O que conclui a demonstração. □

A seguir, suponha que L tenha uma órbita densa em $G/P_{\Theta^*}^0$, i.e., para algum $x \in G/P_{\Theta^*}^0$, $\mathrm{fe}_{G/P_{\Theta^*}^0}(Lx) = G/P_{\Theta^*}^0$. Como $(D^{\Theta^*})^* = (D^{\Theta^*})_0(S^{-1})$ é um conjunto aberto não-vazio em $G/P^0_{\Theta^*}$, temos que as translações $g^{-1}(D^{\Theta^*})^*$ e $h^{-1}(D^{\Theta^*})^*$ são conjuntos abertos não-vazios em $G/P^0_{\Theta^*}$. Logo, as intersecções $Lx \cap g^{-1}(D^{\Theta^*})^*$ e $Lx \cap h^{-1}(D^{\Theta^*})^*$ são não-vazias.

A proposição anterior, tem como consequência, o seguinte corolário:

Corolário 7 *Suponha que L tem uma órbita densa em $G/P^0_{\Theta^*}$. Então, S é reversível módulo L.*

Demonstração: Seja $(D^{\Theta^*})^* = (D^{\Theta^*})_0(S^{-1})$. Como L tem uma órbita densa em $G/P^0_{\Theta^*}$, segue que para todo $g, h \in G$, existe uma órbita de L em $G/P^0_{\Theta^*}$ que intercepta tanto $g^{-1}(D^{\Theta^*})^*$ quanto $h^{-1}(D^{\Theta^*})^*$. Então, pela Proposição 31, segue que S é reversível módulo L. □

A seguir, suponha que S^{-1} é conexo. Assim, temos que os conjuntos controláveis minimais $(D^{\Theta^*})^*$ para S podem ser contraídos dentro de qualquer aberto de $G/P^0_{\Theta^*}$, isto é, dado qualquer aberto $U \subset G/P^0_{\Theta^*}$ existe $g \in G$ tal que $g(D^{\Theta^*})^* \subset U$, de modo que os conjuntos controláveis minimais D^* para S formam uma base para a topologia de $G/P^0_{\Theta^*}$, onde $(D^{\Theta^*})^* = (D^{\Theta^*})_0(S^{-1})$ (Veja a Proposição 3.13 em [37]).

Assim, para a reversibilidade em G/L, temos o seguinte teorema:

Teorema 4 *Sejam G, S, L como anteriormente. Suponha que S é conexo. Seja $D^{\Theta^*}(S^{-1})$ um conjunto controlável invariante para S^{-1} em $G/P^0_{\Theta^*}$. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

1. S é reversível módulo L.

2. Para quaisquer $U, V \subset G/P^0_{\Theta^*}$ abertos, temos $LU \cap V \neq \emptyset$.

Demonstração: Sejam U, V abertos em $G/P^0_{\Theta^*}$. Como os conjuntos controláveis minimais para S formam uma base para a topologia dos conjuntos abertos do espaço homogêneo $G/P^0_{\Theta^*}$, temos que existem $g, h \in G$ tal que $g^{-1}((D^{\Theta^*})^*) \subset U$ e $h^{-1}((D^{\Theta^*})^*) \subset V$, onde $(D^{\Theta^*})^* = (D^{\Theta^*})_0(S^{-1})$ é um conjunto controlável minimal para S em $G/P^0_{\Theta^*}$. Como S é reversível módulo L, pela Proposição 31, temos que existe uma órbita de L no espaço homogêneo $G/P^0_{\Theta^*}$ que intercepta tanto $g^{-1}(D^{\Theta^*})^*$ quanto $h^{-1}(D^{\Theta^*})^*$. Logo, $LU \cap V \neq \emptyset$. Para a recíproca, observemos que para todo $g, h \in G$, tanto $g^{-1}(D^{\Theta^*})^*$ quanto $h^{-1}(D^{\Theta^*})^*$ são abertos, pois são translações à esquerda do aberto $(D^{\Theta^*})^*$ em $G/P^0_{\Theta^*}$. Então, nossa hipótese implica que

$L(g^{-1}(D^{\Theta^*})^*) \cap h^{-1}(D^{\Theta^*})^* \neq \emptyset$, para todo $g, h \in G$. Logo, pela Proposição 31, segue que S é reversível módulo L. □

Apresentaremos, a seguir, um exemplo de subsemigrupo que não é reversível módulo um subgrupo L. Este mesmo exemplo nos mostra que o fato de L ter órbita densa no espaço base de um fibrado não implica que L tem órbita densa no espaço total do fibrado, embora sabemos que a recíproca é verdadeira.

Exemplo 9 *Consideremos $G = Sl(n, \mathbb{R})$. Seja $S = (Sl^+(n, \mathbb{R}))^{-1}$. Tomemos L como o subgrupo (nilpotente) de G das matrizes da forma*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1_{n-1} \end{pmatrix}\}$$

onde v é uma matriz $(n-1) \times 1$ e 1_{n-1} denota a matriz identidade $(n-1) \times (n-1)$. Seja P o subgrupo parabólico minimal de G. Ele é o subgrupo de isotropia de um flag

$$b_0 = (V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset \mathbb{R}^n : \ \dim V_r = r)$$

em $\mathbb{F} = G/P$. Consideremos $P_0 = id_n AN^+ = AN^+$, ou seja,

$$P_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & * & \cdots & * \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} : a_1 a_2 \ldots a_n = 1, a_i > 0 \right\}$$

Temos que o tipo parabólico de $S^{-1} = \mathrm{Sl}^+(n, \mathbb{R})$ é o espaço projetivo $G/P_{\Theta(S^{-1})} = \mathbb{RP}^{n-1}$ que é um flag minimal de G (Veja em [30]). Seja $\Theta^*(S) = \Theta(S^{-1})$. Consideremos a fibração natural $\pi : G/P_0 \longrightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$. Então, S não é reversível módulo L, e consequentemente, L não tem órbita densa em G/P_0. Temos também que L tem uma órbita densa no espaço projetivo $\mathbb{RP}^{n-1}$. De fato:

1. *S não é reversível em G/L. De fato, pela Proposição 13 temos N^- tem somente duas órbitas em $Gr_1^+(n) = S^n$, ou seja, existe um $\eta \in Gr_1^+(n)$ tal que as órbitas de N^- em $Gr_1^+(n)$ são dadas pelos semi-espaços*

$\langle \eta, \zeta \rangle > 0$ e $\langle \eta, \zeta \rangle < 0$ com $\zeta \in \mathbb{R}^n = \Lambda\mathbb{R}^n$. Denotemos estes semi-espaços por U, V. Como $L \subset N^-$, segue que $LU \cap V \subset N^- U \cap V = \emptyset$. Logo, $LU \cap V = \emptyset$. Então, pelo Teorema 4, temos que S não é reversível em G/L.

2. *L não tem órbita densa em $G/P_0 = S^n$. De fato, segue imediatamente do Corolário 5, uma vez que S não é reversível em G/L.*

3. *L tem uma órbita densa no espaço projetivo $\mathbb{RP}^{n-1}$. Para isto, tomemos $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^t \in \mathbb{R}^n$ e*

$$l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{2,1} & 1 & 0\cdots & 0 \\ & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ x_{n,1} & 0\cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in L$$

Então,

$$Le_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ x_{2,1} \\ \vdots \\ x_{n,1} \end{pmatrix} : x_{2,1}, \ldots, x_{n,1} \text{ reais} \right\}$$

é a menos de difeomorfismo o espaço $\mathbb{R}^{n-1}$. Daí segue que $L[e_1] = \mathbb{RP}^{n-1}$. Portanto, $L[e_1]$ é uma órbita densa em $\mathbb{RP}^{n-1}$.

3.3 Propriedades de semigrupos reversíveis

Sejam G um grupo de Lie semi-simples, real, conexo, não compacto, com centro finito, $S \subset G$ um subsemigrupo com $\text{int}S \neq \emptyset$ e $L \subset G$ um subgrupo. Nesta seção, sob algumas hipóteses, mostraremos que, se S é reversível módulo L, então L não está contido em S. Logo, se L está contido em algum subsemigrupo S de G, segue que S não é reversível módulo L e, portanto, S não é transitivo em G/L, ou seja, não ocorre controlabilidade para S em G/L (Veja em [31]).

Para um subsemigrupo S contendo L, sob algumas hipóteses, mostramos que a reversibilidade módulo L é equivalente ao subsemigrupo S/L ser reversível em um grupo de Lie. Com esse resultado temos um exemplo em que ocorre reversibilidade módulo L com um semigrupo S contendo L.

Comecemos mostrando que para um grupo G, a reversibilidade à direita de um semigrupo em G/L implica na reversibilidade à direita do subsemigrupo, ou seja:

Lema 5 *Sejam G um grupo e S um subsemigrupo de G. Seja L um subgrupo de G. Suponha que S é reversível módulo L e que $L \subset S$. Então, S reversível à direita.*

Demonstração: Pela Proposição 22 segue que $G = S^{-1}SL$, pois S é reversível módulo L. Como $L \subset S$, temos que $G = S^{-1}SL \subset S^{-1}SS \subset S^{-1}S$. Logo, $G = S^{-1}S$, ou seja, S é reversível à direita. $\square$

Observemos que num grupo topológico, se S e S^{-1} são reversíveis módulo L e $L \subset S$, então, do Lema 5, segue que S é reversível à direita e à esquerda, ou seja, S é reversível em G.

Como uma consequência do Lema 5 e do Teorema 6.7 em [34], mostraremos a seguir, que num grupo de Lie semi-simples, real, conexo, não compacto e com centro finito, não existe subsemigrupo reversível módulo L contendo o subgrupo L.

Proposição 32 *Seja G um grupo de Lie semi-simples, real, conexo, não compacto e centro finito. Sejam $S \subset G$ um subsemigrupo próprio com $intS \neq \emptyset$ e L um subgrupo de G. Se S é reversível módulo L, então L não está contido em S.*

Demonstração: Suponha que $L \subset S$. Pelo Lema 5, temos que S é reversível à direita. Porém, como G é um grupo de Lie semi-simples, real, conexo e com centro finito, pelo Teorema 6.7 em [34], segue que $S = G$, o que contradiz a hipótese de S ser próprio. $\square$

Temos as seguintes:

Observação: Num grupo de Lie semi-simples, real, conexo, não compacto e com centro finito G não existe subsemigrupo próprio com interior não vazio em G que seja transitivo em G/L contendo L. De fato, é imediato da Proposição 32, pois basta observar que qualquer semigrupo transitivo em G/L é reversível módulo L.

A seguir, estaremos interessados em mostrar que em geral não vale a Proposição 32, ou seja, apresentaremos um resultado, o qual nos mostra que podemos ter um subsemigrupo S reversível módulo um subgrupo L com S contendo L. Neste caso, G não é semi-simples e, portanto, existe S reversível em G/L e com $L \subset S$.

Para isto, consideremos G um grupo de Lie e S subsemigrupo próprio de G com $\text{int}S \neq \emptyset$. Seja L um subgrupo normal de G. Suponha que $L \subset S$. Consideremos a fibração canônica

$$\pi : G \to G/L$$

Tem-se que $S/L = \pi(S)$ é um subsemigrupo do grupo de Lie G/L. Temos também que $\text{int}_{G/L}(S/L) \neq \emptyset$, pois $\text{int}S \neq \emptyset$ e π é uma aplicação aberta. Suponha que G/L é um grupo de Lie nilpotente. Então, segue que S/L é um subsemigrupo reversível no grupo G/L (Veja a Proposição 34), e isto por sua vez é equivalente à S ser reversível módulo L, ou mais precisamente, temos:

Proposição 33 *Sejam G um grupo de Lie e S subsemigrupo próprio de G. Seja L um subgrupo normal de G tal que G/L é um grupo nilpotente. Suponha que $L \subset S$. Então, S/L é reversível em G/L se, e só se, S é reversível módulo L.*

Demonstração: Suponha que o subsemigrupo S/L é reversível no grupo G/L. Então, S/L é reversível à direita em G/L, ou seja, para todo $g, h \in G$, $S/L(gL) \cap S/L(hL) \neq \emptyset$. Isto equivale a existir $s_1, s_2 \in S$ com $(s_1L)(gL) = (s_2L)(hL)$, ou seja, $(s_1g)^{-1}(s_2h) = l \in L$. Logo, para todo $g, h \in G$, existe $l \in L$ tal que $Sgl \cap Sh \neq \emptyset$. Pela Proposição 25, segue que S é reversível módulo L. Para a recíproca, sejam $g, h \in G$ tais que $S(gL) \cap S(hL) \neq \emptyset$. Então, existem $s_1, s_2 \in S$ tais que $(s_1g)L = (s_2h)L$. Agora, pela normalidade de L em G, temos que $L(s_1g) = L(s_2h)$, para algum $s_1, s_2 \in S$. Novamente, usando que L é normal em G, segue que existem $s_1, s_2 \in S$ tais que $(s_1L)g = (s_2L)h$. Portanto, para todo $g, h \in G$, $S/L(gL) \cap S/L(hL) \neq \emptyset$, ou seja, S/L é reversível à direita em G/L. De modo análogo, utilizando a normalidade de L, segue que S/L é reversível à esquerda em G/L. Portanto, S/L é reversível em G/L. □

Como consequência deste resultado, temos:

Corolário 8 *Sejam G um grupo de Lie e S subsemigrupo próprio de G. Seja L um subgrupo normal de G tal que o grupo de Lie G/L é abeliano. Suponha que $L \subset S$. Então, S/L é reversível em G/L se, e só se, S é reversível módulo L.*

Demonstração: É imediato da Proposição 33. De fato, temos que G/L é nilpotente, pois ele é abeliano. Logo, pela Proposição 33, segue o resultado. □

A seguir, com a ajuda do corolário anterior, obtemos inúmeros exemplos de subsemigrupos próprios S de um grupo de Lie G (não semi-simples) com $\text{int}S \neq \emptyset$ tal que $S \supset L$ e S é reversível módulo L.

Para isto, lembraremos o seguinte resultado demonstrado por Ruppert em [26].

Proposição 34 *Sejam H um grupo de Lie nilpotente e S um subsemigrupo de H. Então, S é reversível.*

Demonstração: Demonstrado em [26], Proposição 1.5. □

Dito de outra forma, temos que existem inúmeros subsemigrupos, onde em geral, não vale a Proposição 32, como nos mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 10 *Suponha G um grupo de Lie solúvel simplesmente conexo. Tomemos $L = [G, G]$ como o subgrupo dado pelo comutador de G. Pela Proposição 3.18.12 de [42], página 243, segue que L é fechado em G. Logo, o grupo $G/[G, G]$ tem uma estrutura de grupo de Lie (grupo quociente) o qual é abeliano e, portanto, também é nilpotente. Podemos considerar S como um subsemigrupo maximal, uma vez que todo subsemigrupo de interior não vazio está contido num subsemigrupo maximal com interior não vazio (Veja a Proposição 6). Pelo Teorema 6.18 em [14], temos que $L = [G, G] \subset S$. Agora, pela Proposição 34, segue que $S/[G, G]$ é um subsemigrupo reversível em G/L. Portanto, pelo Corolário 8, segue que S é reversível módulo L, o que conclui o nosso exemplo.*

3.4 Generalizações

Nesta seção, assumiremos que G é um grupo topológico e S é um subsemigrupo de G com $\text{int}S \neq \emptyset$. Determinaremos $\mathfrak{R}(S)$ em termos dos conjuntos controláveis invariantes para S em um espaço homogêneo compacto da forma G/H. Em seguida, apresentaremos algumas consequências desse resultado.

Para isto, seja H um subgrupo de G. Denotemos por H_0 a componente da identidade de H. Suponha que o espaço homogêneo G/H_0 seja compacto. Assim, o Teorema 3 é generalizado através da seguinte proposição:

Teorema 5 *Sejam D um conjunto controlável invariante para S em G/H_0. Suponha que $S \cap H_0$ é reversível à esquerda em H_0. Então, $\mathfrak{R}(S) = \mathfrak{R}(D_0)$. Consequentemente, $\mathfrak{R}(S)$ é um conjunto aberto de G.*

Demonstração: Segue do Lema 1 que $\mathfrak{R}(S) \subset \mathfrak{R}(D_0)$. Para a outra inclusão, a demonstração é análoga à do Teorema 3. De fato, seja $g \in \mathfrak{R}(D_0)$. Então, $gD_0 \cap D_0 \neq \emptyset$. Logo, existem $x, y \in D_0$ com $x = gy$. Temos que existe $h \in \text{int}S$ tal que $y = hx$, i.e., $x = ghx$. Portanto, gh está no subgrupo de isotropia em x. Sem perda de generalidade, podemos assumir que H_0 é o grupo de isotropia em x. Portanto, temos que $gh \in H_0$. Mas, por hipótese, temos que $S \cap H_0$ é reversível à esquerda em H_0. Isto implica que

$$gh(S \cap H_0) \cap (S \cap H_0) \neq \emptyset$$

e daí, segue que $ghS \cap S \neq \emptyset$. Como $h \in S$, segue que $ghS \cap S \subset gS \cap S$ e, portanto, $gS \cap S \neq \emptyset$. □

A partir do resultado anterior temos os seguintes corolários:

Corolário 9 *Sejam $D(S^{-1})$ um conjunto controlável invariante para S^{-1} em G/H_0. Suponha que $S^{-1} \cap H_0$ é reversível à esquerda em H_0. Então, $\mathfrak{R}(S^{-1}) = \mathfrak{R}(D^*)$, onde $D^* = D_0(S^{-1})$.*

Demonstração: Segue do Teorema 5. □

Corolário 10 *Suponha que $S \cap H_0$ é reversível à esquerda em H_0. Seja D um conjunto controlável invariante para S em G/H_0. Dados $g, h \in G$, $gS \cap hS \neq \emptyset$ se, e somente se, $gD_0 \cap hD_0 \neq \emptyset$.*

Demonstração: Utilizando o Teorema 5, a demonstração segue de modo análoga à do Corolário 3. □

Corolário 11 *Sejam $D(S^{-1})$ um conjunto controlável invariante para S^{-1} em G/H_0. Suponha que $S^{-1} \cap H_0$ é reversível à esquerda em H_0. Dados $g, h \in G$, $Sg \cap Sh \neq \emptyset$ se, e somente se, $g^{-1}D^* \cap h^{-1}D^* \neq \emptyset$, onde $D^* = D_0(S^{-1})$.*

Demonstração: A demonstração é análoga à do Corolário 4. □

A seguir, seja L um subgrupo de G. Então, da Proposição 25 e do Corolário 11, obtemos uma caracterização de reversibilidade módulo L em termos do conjuntos controláveis minimais para S em G/H_0 ou, mais precisamente, temos:

Proposição 35 *Sejam $D(S^{-1})$ um conjunto controlável invariante para S^{-1} em G/H_0. Suponha que $S^{-1} \cap H_0$ é reversível à esquerda em H_0. São equivalentes:*

1. S é reversível módulo L.
2. Para todo $g, h \in G$, existe $l \in L$ tal que $lg^{-1}D^* \cap h^{-1}D^* \neq \emptyset$, onde $D^* = D_0(S^{-1})$.

Demonstração: De fato, pela Proposição 25, temos que S é reversível módulo L se, e somente se, para todo $g, h \in G$, existe $l_1 \in L$, $Sgl_1 \cap Sh \neq \emptyset$. Pelo Corolário 11, isto é equivalente a $l_1^{-1}g^{-1}D^* \cap h^{-1}D^* \neq \emptyset$, onde $D^* = D_0(S^{-1})$. Daí, o resultado segue se tomamos $l = l_1^{-1}$. □

A Proposição 26 pode ser re-escrita na seguinte forma:

Proposição 36 *Seja $D(S^{-1})$ um conjunto controlável invariante para S^{-1} em G/H_0. Suponha que $S^{-1} \cap H_0$ é reversível à esquerda em H_0. As seguintes condições são equivalentes:*

1. S é reversível módulo L.
2. Para todo $g, h \in G$, existe uma L-órbita em G/H_0 que intercepta tanto $g^{-1}D^*$ quanto $h^{-1}D^*$, onde D^* é um conjunto controlável minimal para S em G/H_0.

Demonstração: Segue imediatamente da proposição anterior. □

Consequentemente, temos:

Corolário 12 *Seja $D(S^{-1})$ um conjunto controlável invariante para S^{-1} em G/H_0. Suponha que $S^{-1} \cap H_0$ é reversível à esquerda em H_0. Suponha que L tem uma órbita densa em G/H_0. Então, S é reversível módulo L.*

Demonstração: Por hipótese, L tem uma órbita densa em G/H_0, ou seja, Lx é denso em G/H_0 para algum $x \in G/H_0$. Como $D^* = D_0(S^{-1})$ é um conjunto aberto em G/H_0, segue que para todo $g, h \in G$, as intersecções $Lx \cap g^{-1}D^*$ e $Lx \cap h^{-1}D^*$ não são vazias. Então, pela Proposição 36, segue que S é reversível módulo L. □

3.5 Reversibilidade em espaços topológicos

Nesta seção, introduziremos o conceito de reversibilidade para um subsemigrupo S de um grupo agindo em espaços topológicos, o qual estende o conceito de reversibilidade módulo um subgrupo de um grupo.

Mostraremos que a reversibilidade de S em um espaço topológico compacto X é equivalente à existência de um único conjunto controlável invariante em X.

Para um subsemigrupo S de um grupo de Lie conexo, mostraremos também que a reversibilidade módulo um subgrupo implica que o subgrupo não está contido em S.

A seguir, sejam G um grupo, S um subsemigrupo de G e X um espaço topológico. Suponha que G age em X com ação

$$\begin{array}{rcl} G \times X & \to & X \\ (g, x) & \mapsto & gx \end{array}$$

Comecemos introduzindo a seguinte

Definição 18 *Dizemos que S é* reversível em X *se para todo $x, y \in X$, $Sx \cap Sy \neq \emptyset$.*

Temos a seguinte

Proposição 37 *Seja G um grupo e S um subsemigrupo de G. Então, S é reversível em X se, e somente se, $S^{-1}Sx = X$ para todo $x \in X$.*

Demonstração: De fato, S é reversível em X se, e só se, para todo $x, y \in X$, $Sx \cap Sy \neq \emptyset$. Ou seja, existem $s_1, s_2 \in S$ tais que $s_1x = s_2y$, ou ainda, existem $s_1, s_2 \in S$ tais que $(s_2^{-1}s_1)x = y$, isto é, para todo $x \in X$, $S^{-1}Sx = X$. □

Recordemos que um subsemigrupo $S \subset G$ é *transitivo* em um conjunto X, se para todo $x \in X$, $Sx = X$. É claro que, se S é transitivo em X, então S é reversível em X. De fato, para todo par $x, y \in X$, temos que $Sx \cap Sy = X$.

A seguir, a reversibilidade em um espaço topológico compacto X é equivalente à existência de um único conjunto controlável invariante em X.

Teorema 6 *Sejam G um grupo topológico, S um subsemigrupo de G com* $\text{int}S \neq \emptyset$. *Seja X um espaço topológico compacto. São equivalentes:*

1. S tem um único conjunto controlável invariante em X.

2. S é reversível em X.

Demonstração: Suponha que S tem um único conjunto controlável invariante em X. Pela compacidade de X, segue da Proposição 9, que

$$C = \bigcap_{x \in X} \text{fe}(Sx)$$

Agora, sejam $x, y \in X$. Então, segue que $C \subset \text{fe}(Sx)$ e $C \subset \text{fe}(Sy)$. Como $C_0 \subset C$, temos que $C_0 \cap Sx \neq \emptyset$ e $C_0 \cap Sy \neq \emptyset$. Isto implica que existem $s_1, s_2 \in S$ tais que $s_1x, s_2y \in C_0$. Logo, existe $h \in \text{int}S$ tal que $hs_1x = s_2y$. Portanto, $Sx \cap Sy \neq \emptyset$. Logo, por definição, segue que S é reversível em X. Para a recíproca, suponha que S é reversível em X e que S tem mais de um conjunto controlável invariante em X. Sejam D_1 e D_2 conjuntos controláveis invariantes para S em X. Tomemos $x, y \in X$ tais que $x \in D_1$ e $y \in D_2$. Então, $Sx \subset D_1$ e $Sy \subset D_2$. Portanto, $Sx \cap Sy = \emptyset$, uma vez que os conjuntos controláveis tem intersecção vazia. Mas isto é uma contradição, pois por hipótese S é reversível em X. Daí, segue o resultado. □

Em particular, do teorema anterior, segue que em um espaço homogêneo compacto G/L de um grupo topológico G, um subsemigrupo S de G de interior não vazio é reversível módulo L se, e somente se, S tem um único conjunto controlável invariante em G/L.

De modo análogo ao teorema anterior, mais geralmente num espaço topológico, temos que S tem no máximo um conjunto controlável invariante em X se, e somente se, S é reversível em X.

Assim, utilizando o teorema anterior, temos o seguinte resultado:

Proposição 38 *Sejam G um grupo de Lie conexo, S um subsemigrupo de G com* $\text{int}S \neq \emptyset$ *e* $L \subset G$ *um subgrupo de G. Assuma que G/L é um espaço homogêneo compacto de G. Suponha que S é reversível módulo L. Então, L não está contido em S*

Demonstração: Suponha que $L \subset S$. Como S é reversível em G/L, pelo Teorema 6 segue que S tem um único conjunto controlável invariante em G/L . Seja C o único conjunto controlável invariante para S em G/L e tome $x \in C_0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $L = L_x$ é o subgrupo de isotropia em x. Então, $L \cap \text{int}S \neq \emptyset$, pois existe $h \in \text{int}S$ tal que $hx = x$. Logo, existe $s_0 \in \text{int}S$ tal que $s_0 \in L$. Agora, usando o fato de que $s_0^{-1} \in L \subset S$ e $\text{int}S$ é um ideal de S (Veja a Proposição 4), temos que

$$1 = s_0 s_0^{-1} \in \text{int}SL \subset \text{int}SS \subset \text{int}S$$

Consequentemente, ainda pela Proposição 4, segue que $S = G$, uma vez que G é um grupo de Lie conexo e $1 \in \text{int}S$. Isto é, leva a uma contradição. □

Logo, da proposição anterior segue que, se L está contido em um subsemigrupo S de um grupo de Lie conexo G, então S não é reversível módulo L.

Capítulo 4

Mid-reversibilidade de Semigrupos

Sejam G um grupo e $S \subset G$ um subsemigrupo. Neste capítulo, para o estudo de mid-reversibilidade de semigrupos, introduziremos o conjunto mid-reversor de S em G, que será dado pelo conjunto

$$\mathcal{M}(S) = \{g \in G : SgS \cap S \neq \emptyset\}$$

Analisaremos a mid-reversibilidade de semigrupos de modo análogo à reversibilidade. No caso em que G é um grupo de Lie semi-simples, real, não compacto, com centro finito e S possui interior não vazio, descreveremos $\mathcal{M}(S)$ em termos dos conjuntos dos conjuntos controláveis invariantes em G/P_0. Com esta descrição para $\mathcal{M}(S)$, temos que a informação sobre a mid-reversibilidade do subsemigrupo S em G é obtida a partir dos conjuntos controláveis invariantes em G/P_0. Algumas consequências dessa descrição foram obtidas.

Mais geralmente, apresentaremos uma descrição para $\mathcal{M}(S)$ em termos dos conjuntos controláveis invariantes para S em um espaço homogêneo compacto de um grupo topológico.

Introduziremos também o conceito de mid-reversibilidade módulo L, onde L é um subgrupo de um grupo. Em seguida, apresentaremos algumas propriedades gerais para semigrupos mid-reversíveis módulo L. Apresentaremos também uma caracterização da mid-reversibilidade módulo L em termos dos conjuntos controláveis minimais para S em G/P_0.

Mostraremos também, sob certas condições que, se S tem um único conjunto controlável invariante em um espaço homogêneo compacto de um grupo topológico, então S é mid-reversível neste grupo. Em particular, a reversibilidade módulo P_0 para um subsemigrupo de interior não vazio em G implica na mid-reversibilidade do subsemigrupo.

Introduziremos ainda o conceito de mid-reversibilidade para um subsemigrupo S de um grupo agindo em um espaço topológico X. Esta noção estende o conceito de mid-reversibilidade módulo L. Mostraremos que, se S é reversível em X, então S é mid-reversível em X.

4.1 O conjunto mid-reversor

Sejam G um grupo e $S \subset G$ um subsemigrupo. Comecemos recordando a seguinte definição (Definição 1.7) introduzida em [26] :

Definição 19 *Dizemos que S é* mid-reversível *se para todo $g \in G$, $SgS \cap S \neq \emptyset$ ou, equivalentemente, $G = SS^{-1}S$ ou $G = S^{-1}SS^{-1}$.*

É claro que S é mid-reversível se, e só se, S^{-1} é mid-reversível.

Considerar o seguinte subconjunto de G

$$\mathcal{M}(G, S) = \{g \in G : SgS \cap S \neq \emptyset\}$$

o qual chamaremos de *mid-reversor* de S em G. Este conjunto será denotado simplesmente por $\mathcal{M}(S)$.

Observe que $\mathcal{M}(S)$ contém $\mathfrak{R}(S)$. É imediato também que S é mid-reversível se, e somente se, $\mathcal{M}(S) = G$.

O objetivo desta seção é o de determinar $\mathcal{M}(S)$. Para isto, suponha que G age num espaço topológico X. Dado qualquer subconjunto não vazio A de X, definimos

$$\mathcal{M}(A) = \{g \in G : SgA \cap A \neq \emptyset\}$$

Observe que $\mathcal{R}(S) \subset \mathcal{M}(S)$.

Temos o seguinte resultado:

Lema 6 *Seja G um grupo topológico. Suponha que $S \subset G$ é um subsemigrupo agindo em um espaço homogêneo X de G. Seja $A \subset X$ qualquer conjunto invariante para S. Então, $\mathcal{M}(S) \subset \mathcal{M}(A)$.*

Demonstração: Suponha que $g \notin \mathcal{M}(A)$. Então, $SgA \cap A = \emptyset$. Tome $x \in A$. Como A é um conjunto invariante para S, segue que $Sx \subset A$ e, portanto, $SgSx \subset SgA$. Logo, temos que $SgSx \cap Sx \subset SgA \cap A$. Daí segue que $SgSx \cap Sx = \emptyset$. Isto implica que $SgS \cap S = \emptyset$, ou seja, $g \notin \mathcal{M}(S)$. □

A seguir, fixemos G um grupo de Lie semi-simples, $S \subset G$ um subsemigrupo com $\text{int}S \neq \emptyset$. Seja P_0 a componente conexa da identidade do subgrupo parabólico minimal P.

Em termos dos conjuntos controláveis invariantes para S em G/P_0 temos a seguinte caracterização para a mid-reversibilidade de subsemigrupos em G/P_0.

Teorema 7 *Seja D um conjunto controlável invariante para S em G/P_0. Então, $\mathcal{M}(S) = \mathcal{M}(D_0)$.*

Demonstração: A inclusão $\mathcal{M}(S) \subset \mathcal{M}(D_0)$ segue do Lema 6. Para a outra inclusão, tomemos $g \in \mathcal{M}(D_0)$. Então, $SgD_0 \cap D_0 \neq \emptyset$. Isto implica que existem $x, y \in D_0$ e $s \in S$ tal que $x = sgy$. Como x, $y \in D_0$, temos que existe $h \in \text{int}S$ tal que $y = hx$, i.e., $x = sghx$. Portanto, sgh está no subgrupo de isotropia em x. Sem perda de generalidade, podemos supor que P_0 é o grupo de isotropia em x. Por outro lado, como $h \in S$, para mostrar que $SgS \cap S \neq \emptyset$, basta mostrar que $SghS \cap S \neq \emptyset$. O que por sua vez, é consequência do fato de que

$$Sgh\,(S \cap P_0) \cap (S \cap P_0) \neq \emptyset$$

O fato de que esta intersecção não é vazia é consequência imediata do lema 2, uma vez que $sgh \in P_0$. □

Temos o seguinte:

Corolário 13 *Sejam $D(S^{-1})$ um conjunto controlável invariante para S^{-1} em G/P_0 e D^* o seu conjunto de transitividade. Então, $\mathcal{M}(S^{-1}) = \mathcal{M}(D^*)$.*

Demonstração: Pelo Teorema 7, segue que $\mathcal{M}(S^{-1}) = \mathcal{M}(D^*)$. □

Temos também o seguinte:

Corolário 14 *Seja D um conjunto controlável invariante para S em G/P_0. Dados $g, h \in G$, temos que*

$$S^{-1}Sg \cap S^{-1}h \neq \emptyset \text{ se, e somente se, } Sgh^{-1}D_0 \cap D_0 \neq \emptyset$$

Demonstração: Sejam $g, h \in G$. Temos que $S^{-1}Sg \cap S^{-1}h \neq \emptyset$ se, e somente se, $Sgh^{-1}S \cap S \neq \emptyset$. Isto equivale a $gh^{-1} \in \mathcal{M}(S)$. Mas, pelo Teorema 7, temos que $\mathcal{M}(S) = \mathcal{M}(D_0)$, e daí segue o resultado. □

Para uma aplicação do Teorema 7, vejamos a seguir um exemplo de subsemigrupo que não é mid-reversível.

Exemplo 11 *Seja $G = \mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$. O subgrupo parabólico minimal de G é dado por*

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : ac = 1 \right\}$$

Tomemos o subsemigrupo $S = \mathrm{Sl}^{+}(2, \mathbb{R}) \subset G$. Observemos que existe

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$$

satisfazendo $SgS \cap S = \emptyset$ e, portanto, S não é mid-reversível. De modo alternativo, veremos isto aplicando o Teorema 7. Temos que P não é conexo. A componente conexa de P que contém a identidade é dada por

$$P_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : ac = 1 \text{ com } a, c > 0 \right\}$$

Como $G = SO(2, \mathbb{R})AN^{+}$ e $P_0 = AN^{+}$, segue que

$$G/P_0 = SO(2, \mathbb{R}) = S^1$$

que é compacto. Consideremos agora os conjuntos controláveis minimais de S dados por

$$\begin{aligned} D_1^* &= S^1 \cap U \text{ e } D_2^* = S^1 \cap U_- \\ \text{onde } U &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y > 0 \right\} \text{ e } U_- = -U \end{aligned}$$

Temos que D_1^* e D_2^* correspondem aos segundo e quarto quadrantes abertos respectivamente em $G/P_0 = S^1$. Estes conjuntos satisfazem $gD_1^* = D_2^*$.

Observemos que $S^{-1}D_1^* \cap D_2^* = \emptyset$, *pois* $S^{-1}D_1^* \subset D_1^*$ *e* $D_1^* \cap D_2^* = \emptyset$. *Daí segue que* $SD_2^* \cap D_1^* = \emptyset$. *Então, temos que* $SgD_1^* \cap D_1^* = SD_2^* \cap D_1^* = \emptyset$. *Logo,* $g \notin \mathcal{M}((D_1)_0(S^{-1}))$, *e portanto, pelo Corolário 13, segue que* $g \notin \mathcal{M}(S^{-1})$. *Isto implica que* S *não é mid-reversível em* G.

A seguir, sejam G um grupo topológico e $S \subset G$ um subsemigrupo de interior não vazio. Consideremos H um subgrupo topológico de G, e denotemos por H_0 a sua componente da identidade. Suponha que G/H_0 é um espaço homogêneo compacto de G. Descreveremos a seguir o conjunto $\mathcal{M}(S)$ em termos dos conjuntos controláveis invariantes para S em G/H_0, ou seja, o Teorema 7 é generalizado através do seguinte teorema:

Teorema 8 *Seja* D *um conjunto controlável invariante para* S *em* G/H_0. *Suponha que* $S \cap H_0$ *é reversível à esquerda em* H_0. *Então,* $\mathcal{M}(S) = \mathcal{M}(D_0)$.

Demonstração: Como $S \cap H_0$ é reversível à esquerda em H_0, a demonstração segue de modo análoga à do Teorema 7. □

Assim, temos o seguinte:

Corolário 15 *Assuma que* $S^{-1} \cap H_0$ *é reversível à esquerda em* H_0. *Seja* $D(S^{-1})$ *um conjunto controlável invariante para* S^{-1} *em* G/H_0 *e* $D^* = D_0(S^{-1})$ *o seu conjunto de transitividade. Então,* $\mathcal{M}(S^{-1}) = \mathcal{M}(D^*)$.

Demonstração: De fato, pelo Teorema 8, temos que $\mathcal{M}(S^{-1}) = \mathcal{M}(D^*)$, onde $D^* = D_0(S^{-1})$. □

Corolário 16 *Seja* D *um conjunto controlável invariante para* S *em* G/H_0. *Suponha que* $S \cap H_0$ *é reversível à esquerda em* H_0. *Dados* $g, h \in G$, *temos que* $S^{-1}Sg \cap S^{-1}h \neq \emptyset$ *se, e somente se,* $Sgh^{-1}D_0 \cap D_0 \neq \emptyset$.

Demonstração: Utilizando o Teorema 8, a demonstração segue de modo análoga à do Corolário 14. □

4.2 Mid-reversibilidade módulo L

Sejam G um grupo, S um subsemigrupo de G e L um subgrupo de G. Analogamente ao estudo da reversibilidade módulo L, suponha que G age em G/L com ação dada por

$$\begin{array}{lll} G \times G/L & \rightarrow & G/L \\ (g, hL) & \mapsto & g(hL) = (gh)L \end{array}$$

Comecemos introduzindo a seguinte definição:

Definição 20 *Dizemos que S é* mid-reversível *em G/L ou* mid-reversível módulo *L se, e só se, para todo $x, y \in G/L$, $S^{-1}Sx \cap S^{-1}y \neq \emptyset$ ou, equivalentemente, para todo $x, y \in G/L$, $SS^{-1}x \cap Sy \neq \emptyset$.*

É claro que S é mid-reversível módulo L se, e só se, S^{-1} é mid-reversível módulo L. Temos que o conceito de mid-reversibilidade módulo L generaliza o conceito de mid-reversibilidade em G, pois estes conceitos coincidem quando $L = \{1\}$.

Consideremos a seguinte

Proposição 39 *Sejam G, S e L como anteriormente. São equivalentes:*

1. S é mid-reversível módulo L.

2. Para todo $x \in G/L$, $SS^{-1}Sx = G/L$.

3. Para todo $x \in G/L$, $S^{-1}SS^{-1}x = G/L$.

Demonstração: É imediata da definição. De fato, observemos que S é mid-reversível módulo L se, e só se, para todo $x, y \in G/L, S^{-1}Sx \cap S^{-1}y \neq \emptyset$, ou seja, existem $s_1, s_2, s_3 \in S$ tais que $s_1^{-1}s_2x = s_3^{-1}y$. Isto equivale a que $SS^{-1}Sx = G/L$, para todo $x \in G/L$. A outra equivalência é de fácil verificação. □

Consideremos a seguinte:

Observação: Temos também que $S^{-1}SS^{-1}x_0 = G/L$ se, e somente se, $G = S^{-1}SS^{-1}L$, onde $x_0 = L$. De fato: $S^{-1}SS^{-1}x_0 = G/L$ se, e somente se, para todo $g \in G$, existem $s_1, s_2, s_3 \in S$ tais que $(s_1^{-1}s_2s_3^{-1})L = gL$. De modo equivalente, pela definição de classes laterais em G/L, temos que

$s_3 s_2^{-1} s_1 g \in L$, ou seja, $g \in S^{-1}SS^{-1}L$. Analogamente, se demonstra que $SS^{-1}Sx_0 = G/L$ se, e somente se, $G = SS^{-1}SL$, onde $x_0 = L$.

Nesta seção, estaremos interessados em analisar a mid-reversibilidade módulo L para subsemigrupos de um grupo. Apresentaremos algumas propriedades gerais para a mid-reversibilidade módulo L. Apresentaremos também uma caracterização da mid-reversibilidade módulo L em termos dos conjuntos controláveis minimais para S em G/P_0, onde G é um grupo de Lie semi-simples, real, conexo, não compacto e com centro finito.

Inicialmente, consideremos a seguinte:

Proposição 40 *Sejam G um grupo, L um subgrupo de G e $S \subset G$ um subsemigrupo com $L \cap S \neq \emptyset$. Temos:*

1. Se S é mid-reversível em G, então S é mid-reversível módulo L.
2. Se $L \cap S$ é mid-reversível em G, então S é mid-reversível módulo L.
3. Se S é reversível módulo L, então S é mid-reversível módulo L.
4. Se $S \cap L$ é reversível módulo L, então S mid-reversível módulo L.

Demonstração: Para o primeiro item, suponha que S é mid-reversível em G. Então, para todo $g, h \in G$, temos que $Sgh^{-1}S \cap S \neq \emptyset$ se, e só se, $S^{-1}Sg \cap S^{-1}h \neq \emptyset$. Logo, para todo $g, h \in G$, segue que $S^{-1}S(gL) \cap S^{-1}(hL) \neq \emptyset$, pois $1 \in L$. Então, S é mid-reversível módulo L. Para o item (2), basta observar que o fato de $S \cap L$ ser mid-reversível implica em S ser mid-reversível. Para a demonstração do item (3), suponha que para todo $gL, hL \in G/L$, $S(gL) \cap S(hL) \neq \emptyset$. Observemos que $S \subset SS^{-1}$, pois dado $s \in S$, podemos escrever $s = s^{-1}s^2 \in SS^{-1}$. Logo, para todo $g, h \in G$, tem-se que $SS^{-1}(gL) \cap S(hL) \neq \emptyset$, ou seja, S é mid-reversível módulo L. Para o item (4), se $S \cap L$ é reversível módulo L, então segue que S é reversível módulo L. Logo, pelo que acabamos de mostrar, S é mid-reversível módulo L. □

Observação: Da proposição anterior, segue que todo subsemigrupo reversível módulo L é mid-reversível módulo L. No entanto, a recíproca não é verdadeira, como segue a partir de [25], [26], quando $L = \{1\}$.

Como consequência da proposição anterior, temos:

Corolário 17 *Sejam G um grupo de Lie semi-simples, real, conexo com centro finito e $S \subset G$ um subsemigrupo com* $\text{int}S \neq \emptyset$. *Então, S é mid-reversível módulo L, onde $L = K$ é um subgrupo compacto maximal de G ou $L = P_\Theta$ é um subgrupo parabólico de G.*

Demonstração: De fato, pelo Corolário 6, temos que qualquer subsemigrupo S com interior não vazio em G é reversível módulo K. Consequentemente, pela Proposição 40, segue que S é mid-reversível módulo K. Novamente, utilizando a Proposição 40, segue que S é mid-reversível módulo P_Θ, pois pela Proposição 29 temos que S é reversível módulo P_Θ. □

Como consequência do Corolário 12, temos a seguinte:

Proposição 41 *Sejam G um grupo topológico e $S \subset G$ um subsemigrupo com $intS \neq \emptyset$. Dado um subgrupo H de G, seja G/H_0 um espaço homogêneo compacto de G. Assuma que $S \cap H_0$ é reversível à esquerda em H_0. Suponha que L tenha uma órbita densa em G/H_0. Então, S é mid-reversível módulo L.*

Demonstração: Pelo Corolário 12, segue que S é reversível módulo L. Então, pela Proposição 40, temos que S é mid-reversível módulo L. □

Uma outra propriedade geral para a mid-reversibilidade é dada pela seguinte

Proposição 42 *Sejam G um grupo e S um subsemigrupo de G. Dado um subgrupo L, são equivalentes:*

1. *S é mid-reversível módulo L.*
2. *Para todo $g, h \in G$, $S^{-1}S(gL) \cap S^{-1}(hL) \neq \emptyset$.*
3. *Para todo $g, h \in G$, existem $l_1, l_2 \in L$ tal que $S^{-1}Sgl_1 \cap S^{-1}hl_2 \neq \emptyset$.*
4. *Para todo $g, h \in G$, existe $l \in L$ tal que $S^{-1}Sgl \cap S^{-1}h \neq \emptyset$.*
5. *Para todo $g, h \in G$, existe $l \in L$ tal que $SS^{-1}gl \cap Sh \neq \emptyset$.*

Demonstração: É imediata da definição de mid-reversibilidade. De fato, pela Proposição 39, temos que S é mid-reversível módulo L se, e só se, para todo $x, y \in G/L$, $S^{-1}Sx \cap S^{-1}y \neq \emptyset$ se, e só se, para todo $g, h \in G$,

$S^{-1}S(gL) \cap S^{-1}(hL) \neq \emptyset$. Portanto, (1) equivale a (2). A equivalência de (2) e (3) é de fácil verificação. Observemos agora que para todo $g, h \in G$, existem $l_1, l_2 \in L$ tal que $S^{-1}Sgl_1 \cap S^{-1}hl_2 \neq \emptyset$ se, e só se, existem $s_1, s_2, s_3 \in S$ tais que $s_1^{-1}s_2gl_1 = s_3^{-1}hl_2$, ou seja, existe $l = l_1l_2^{-1} \in L$ tal que $s_1^{-1}s_2gl = s_3^{-1}h$. De modo equivalente, temos que existe $l \in L$ tal que $SS^{-1}gl \cap Sh \neq \emptyset$. Portanto, (3) e (4) são equivalentes. Analogamente, se verifica a última equivalência. □

Consideraremos a seguir G um grupo de Lie semi-simples, real, conexo, não compacto, com centro finito e $S \subset G$ um subsemigrupo com int$S \neq \emptyset$. Assim a proposição anterior, juntamente com o Teorema 7, nos permite dar uma caracterização de mid-reversibildiade módulo L em termos dos conjuntos controláveis minimais para S em G/P_0.

Proposição 43 *Sejam $D(S^{-1})$ um conjunto controlável invariante para S^{-1} em G/P_0 e $D^* = D_0(S^{-1})$ o seu conjunto de transitividade. Dado um subgrupo L, são equivalentes:*

1. S é mid-reversível módulo L.

2. Para todo $g, h \in G$, existe $l \in L$ tal que $S^{-1}(hl^{-1}g^{-1})D^* \cap D^* \neq \emptyset$.

3. Para todo $g^{-1}, h^{-1} \in G$, existe $l \in L$ tal que $S^{-1}(h^{-1}lg)D^* \cap D^* \neq \emptyset$.

Demonstração: Observemos que pela Proposição 42, S é mid-reversível módulo L se, e só se, para todo $g, h \in G$, existe $l \in L$ tal que $S^{-1}Sgl \cap S^{-1}h \neq \emptyset$ ou seja, $(l^{-1}g^{-1})S^{-1}S \cap h^{-1}S \neq \emptyset$. Mas, isto equivale a que para todo $g, h \in G$, existe $l \in L$ tal que $S(glh^{-1})S \cap S \neq \emptyset$, ou seja, $S^{-1}(hl^{-1}g^{-1})S^{-1} \cap S^{-1} \neq \emptyset$. Então, pelo Teorema 7, isso é o mesmo que para todo $g, h \in G$, existe $l \in L$ tal que $S^{-1}(hl^{-1}g^{-1})D_0(S^{-1}) \cap D_0(S^{-1}) \neq \emptyset$. Portanto, (1) e (2) são equivalentes. A equivalência entre (2) e (3) é de fácil verificação. □

Observemos que da condição (3) da Proposição 43, segue que para todo $g^{-1}, h^{-1} \in G$, existem $l \in L$, $s \in S$, $x \in gD^*$, $y \in hsD^*$ tal que $lx = y \in Lx$. Logo, as duas últimas condições da Proposição 43 significam que existe uma órbita de L em G/P_0 que passa, ao mesmo tempo, pelos abertos gD^* e hsD^*. Por isso, a Proposição 43 pode ser re-escrita na seguinte forma:

Proposição 44 *Sejam $D(S^{-1})$ um conjunto controlável invariante para S^{-1} em G/P_0 e $D^* = D_0(S^{-1})$ o seu conjunto de transitividade. Dado um subgrupo L, são equivalentes:*

1. *S é mid-reversível módulo L.*

2. *Para todo $g^{-1}, h^{-1} \in G$, existe uma órbita de L em G/P_0 que intercepta tanto gD^* quanto hSD^*, ou seja, $LgD^* \cap hSD^* \neq \emptyset$.*

Demonstração: Segue da Proposição 43. $\square$

4.3 Mid-reversibilidade e reversibilidade módulo L

Sejam G um grupo toplógico, S um subsemigrupo de G e L um subgrupo de G. Nesta seção, sob certas condições, mostraremos que, se G/L tem um único conjunto controlável invariante para S, então S é mid-reversível em G. Consequentemente, se G é um grupo de Lie semi-simples, real, conexo, não compacto e com centro finito, mostraremos que, se S é reversível módulo P_0, então S é mid-reversível em G.

Inicialmente, consideremos o seguinte:

Lema 7 *Sejam G um grupo e S um subsemigrupo de G. Seja $L \subset G$ um subgrupo tal que $L \subset SS^{-1}$. Se S é reversível módulo L, então S é mid-reversível em G.*

Demonstração: Suponha que S é reversível módulo L. Então, pela Proposição 22, temos que $G = S^{-1}SL$. Mas, por hipótese, $L \subset SS^{-1}$ e S é um subsemigrupo de G. Daí segue que $G = S^{-1}SL \subset S^{-1}SS^{-1}$. Portanto, $G = S^{-1}SS^{-1}$, ou seja, S é mid-reversível em G. $\square$

Assim, obtemos a seguinte:

Proposição 45 *Sejam G um grupo topológico e $S \subset G$ um subsemigrupo com $\mathrm{int}S \neq \emptyset$. Assuma que G/L é um espaço homogêneo compacto de G. Suponha que S tem um único conjunto controlável invariante em G/L. Seja $L \cap S$ um subsemigrupo reversível à esquerda em L. Então, S é mid-reversível em G.*

Demonstração: Observe que $L \subset SS^{-1}$, pois por hipótese, $L \cap S$ é um subsemigrupo reversível à esquerda em L. Pelo Teorema 6 segue que S é reversível módulo L, uma vez que S tem um único conjunto controlável invariante em G/L. Logo, pelo Lema 7, segue que o resultado. □

Corolário 18 *Sejam G grupo de Lie semi-simples, real, conexo com centro finito e $S \subset G$ um subsemigrupo com* $\text{int}S \neq \emptyset$. *Se S tem um único conjunto controlável invariante em G/P_0, então S é mid-reversível em G.*

Demonstração: É imediato da Proposição 45. De fato, pelo Lema 2, temos que $S \cap P_0$ é reversível à esquerda em P_0. Logo, pela proposição anterior, segue o resultado. □

A seguir, sob certas condições, mostraremos que, se S tem um único conjunto controlável invariante em G/L, então S é mid-reversível em G, ou seja, temos a seguinte:

Proposição 46 *Sejam G um grupo topológico e $S \subset G$ um subsemigrupo com $intS \neq \emptyset$. Suponha que G/L é um espaço homogêneo compacto. Seja L_0 a componente conexa da identidade de L. Suponha que $S \cap L$ intercepta toda componente conexa de L, isto é,*

$$(S \cap L) \cap \{uL_0 : u \in L\} \neq \emptyset$$

Assuma que $S \cap L_0$ é reversível à esquerda em L_0, e além disso, que S tem um único conjunto controlável invariante em G/L. Então, S é mid-reversível em G.

Demonstração: Primeiro, mostremos que $L \subset SS^{-1}$. Para isto, seja $g \in L$. Por hipótese, $(S \cap L) \cap gL_0 \neq \emptyset$. Então, existe $a \in S \cap L$ tal que $a \in gL_0$, ou seja, $g^{-1}a \in L_0$. Logo, $(a^{-1}g)S \cap L_0 \cap S \cap L_0 \neq \emptyset$, pois $S \cap L_0$ é reversível à esquerda em L_0. Portanto, $a^{-1}gS \cap S \neq \emptyset$. Isto implica que existem $s_1, s_2 \in S$ tal que $a^{-1}gs_1 = s_2 \in S$, ou seja, $g = as_2s_1^{-1} \in SS^{-1}$. Pelo Teorema 6 temos que S é reversível módulo L, pois S tem um único conjunto controlável invariante em G/L. Então, pelo Lema 7 segue que S é mid-reversível em G. □

4.4 Mid-reversibilidade em espaços topológicos

Nesta seção, introduziremos o conceito de mid-reversibilidade para um subsemigrupo S de um grupo agindo em espaços topológicos. Esta noção estende o conceito de mid-reversibilidade módulo um subgrupo que apresentamos na Seção 4.2. Mostramos que a reversibilidade módulo um subgrupo L implica na mid-reversibilidade módulo L. Nesta seção, estenderemos este resultado para um espaço topológico X, isto é, se S é reversível em X, então S é mid-reversível em X. Consequentemente, se S tem um único conjunto controlável invariante em um espaço topológico compacto X, então S é mid-reversível em X.

A seguir, sejam G um grupo, S um subsemigrupo de G e X um espaço topológico. Suponha que G age em X com ação

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \to & X \\ (g, x) & \mapsto & gx \end{array}$$

Definição 21 *Dizemos que S é* mid-reversível em X *se, e só se, para todo $x, y \in X$, $S^{-1}Sx \cap S^{-1}y \neq \emptyset$ ou equivalentemente, para todo $x, y \in X$, $SS^{-1}x \cap Sy \neq \emptyset$.*

É claro que S é mid-reversível em X se, e só se, S^{-1} é mid-reversível em X.

Consideremos a seguinte

Proposição 47 *Sejam G um grupo e S um subsemigrupo de G. Seja X um espaço topológico. São equivalentes:*

1. S é mid-reversível em X.

2. Para todo $x \in X$, $SS^{-1}Sx = X$.

3. Para todo $x \in X$, $S^{-1}SS^{-1}x = X$.

Demonstração: Segue da definição. De fato, observemos que S é mid-reversível em X se, e só se, para todo $x, y \in X$, $S^{-1}Sx \cap S^{-1}y \neq \emptyset$, ou seja, existem $s_1, s_2, s_3 \in S$ tais que $s_1^{-1}s_2x = s_3^{-1}y$. Isto equivale a que

$(SS^{-1}S)x = X$, para todo $x \in X$. A outra equivalência é de fácil de verificação. $\square$

A seguir, generalizaremos a Proposição 40 através da seguinte

Proposição 48 *Sejam G um grupo, X um espaço topológico e S um subsemigrupo de G. Se S é reversível em X, então S é mid-reversível em X.*

Demonstração: É imediato da definição. De fato, suponha que para todo $x, y \in X$, $Sx \cap Sy \neq \emptyset$. Logo, segue que S é mid-reversível em X, pois $S \subset SS^{-1}$. $\square$

Corolário 19 *Sejam G um grupo topólogico, X um espaço topológico compacto e S um subsemigrupo de G com $\mathrm{int}S \neq \emptyset$. Se S tem um único conjunto controlavel invariante em X, então S é mid-reversível em X.*

Demonstração: Pelo Teorema 6, segue que S é reversível em X. Logo, pela proposição 48, segue o resultado. $\square$

Em particular, como consequência do Corolário 12 e da Proposição 48, temos a seguinte:

Corolário 20 *Sejam G um grupo topológico e $S \subset G$ um subsemigrupo com $intS \neq \emptyset$. Seja H um subgrupo fechado de G. Seja G/H_0 um espaço homogêneo compacto de G. Suponha que $S \cap H_0$ é reversível à esquerda em H_0. Suponha que L tenha uma órbita densa em G/H_0. Então, S é mid-reversível módulo L.*

Demonstração: Pelo Corolário 12, segue que S é reversível em G/L. Pela Proposição 48, concluímos o resultado. $\square$

Capítulo 5

Sobre o Número de Conjuntos Controláveis

Sejam G um grupo de Lie, L um subgrupo fechado de G e S um subsemigrupo de G com int$S \neq \emptyset$. Assuma que o espaço homogêneo G/L seja compacto. Suponha que S age em G/L como um semigrupo de difeomorfismos de G. Neste capítulo, determinaremos o número de conjuntos controláveis para a ação de S em G/L.

Inicialmente, apresentaremos resultados sobre o número de conjuntos controláveis para S utilizando uma versão mais forte de acessibilidade. Sob algumas hipóteses, mostraremos que o número de conjuntos controláveis efetivos (ou conjuntos controláveis invariantes) no espaço total e na base de um fibrado é o mesmo (Veja as Proposições 51 e 52).

Consideraremos o caso em que G é conexo e simplesmente conexo. Uma decomposição de Levi de G é dada por $G = RH$ onde R é o radical de G e H é semi-simples. O principal resultado deste capítulo diz que sob certas condições, o número de conjuntos controláveis nos espaços homogêneos G/L e $H/H \cap RL$ é o mesmo. Em particular, quando $H \cap RL$ é um subgrupo parabólico do grupo de Lie semi-simples H, temos que $H/H \cap RL$ é uma variedade flag e o número de conjuntos controláveis nas variedades flags é finito, e foram determinados em [34]. A seguir, apresentamos a idéia da prova desse resultado. Primeiro, construímos um fibrado associado com projeção $G/L \to H/H \cap RL$ e fibra típica $R/R \cap L$. Como R é solúvel, temos que qualquer semigrupo S com interior não vazio e gerando G, e ainda com $\mathrm{int}_R(R \cap S) \neq \emptyset$, age transitivamente sobre o espaço homogêneo $R/R \cap L$. Para concluir a demonstração, usamos um resultado de [2] o qual diz que a transitividade do semigrupo na fibra sobre um conjunto controlável no espaço base, implica que o número de conjuntos controláveis no espaço base e no espaço total é o mesmo.

5.1 Conjuntos controláveis em fibrados

Nesta seção, mostraremos que, sob certas condições, o número de conjuntos controláveis efetivos (conjuntos controláveis invariantes) no espaço total e base de um fibrado é o mesmo. Apresentaremos uma aplicação desse resultado no caso em que o espaço total e a base são espaços homogêneos.

Na discussão sobre o número de conjuntos controláveis, necessitaremos de uma versão mais forte de acessibilidade que é o conceito de acessibilidade do semigrupo sobre um conjunto controlável que foi introduzido em [2], na Definição 3.1. A seguir, recordaremos este conceito.

Para isto, como na seção 1.6, seja (Q, π_Q, M, G) um fibrado principal com espaço total Q, espaço base M e grupo estrutural G. Consideremos os semigrupos S_Q e S_M de difeomorfismos que agem em Q e M respectivamente como anteriormente. Seja também (E, π_E, M, F, G) um fibrado associado ao fibrado principal (Q, π_Q, M, G) com projeção $\pi_E : E \to M$, e o semigrupo S_E como na seção 1.6.

Definição 22 *Seja D um conjunto controlável efetivo para S_M. O semigrupo S_Q é dito* acessível *sobre D se para algum e, consequentemente, para todo $q \in \pi_Q^{-1}(D_0)$, $\mathrm{int}(S_Q q) \cap \pi_Q^{-1}(D_0) \neq \emptyset$. Analogamente, S_E é dito* acessível *sobre D se $int(S_E u) \cap \pi_E^{-1}(D_0) \neq \emptyset$ para todo $u \in \pi_E^{-1}(D_0)$.*

Com relação à definicão anterior, observemos que, se para algum $q \in \pi_Q^{-1}(D_0)$, $\mathrm{int}(S_Q q) \cap \pi_Q^{-1}(D_0) \neq \emptyset$, então o mesmo vale para todo $q \in \pi_Q^{-1}(D_0)$. De fato: Seja $q_1 \in \pi_Q^{-1}(D_0)$ com $q \neq q_1$. Então, $\pi_Q(q_1) \in D_0$ e portanto, $D_0 = \mathrm{int}(S_M \pi_Q(q_1)) \cap \mathrm{int}(S_M^{-1} \pi_Q(q_1)) = \mathrm{int}(\pi_Q S_Q(q_1)) \cap \mathrm{int}(\pi_Q S_Q^{-1}(q_1))$. Logo, $D_0 = \pi_Q \mathrm{int}(S_Q(q_1)\ ) \cap \pi_Q \mathrm{int}(S_Q^{-1}(q_1)\ )$ pois π_Q é uma aplicação aberta. Então, existe $Q\phi(q_1) \in \mathrm{int}(S_Q q_1)$ tal que $\pi_Q Q\phi(q_1) = \pi_Q(q)$ pois $\pi_Q(q), \pi_Q(q_1) \in D_0$. Logo, $Q\phi(q_1) \in \pi_Q^{-1}(D_0)$ com $Q\phi(q_1) \in \mathrm{int}(S_Q q_1)$. Portanto, $\mathrm{int}(S_Q q_1) \cap \pi_Q^{-1}(D_0) \neq \emptyset$. Analogamente, tem-se que $\mathrm{int}(S_E u) \cap \pi_E^{-1}(D_0) \neq \emptyset$ para todo $u \in \pi_E^{-1}(D_0)$.

A seguir, mostraremos que para fibrações equivariantes, a propriedade de acessibilidade definida anteriormente, vale sobre qualquer conjunto controlável efetivo.

Proposição 49 *Sejam G um grupo de Lie conexo e S um subsemigrupo de G com interior não vazio. Assuma que G/L_1 e G/L_2 são espaços homogêneos de G e seja $\pi : G/L_1 \to G/L_2$ uma fibração equivariante. Considere S_E e S_M os semigrupos como anteriormente. Então, S_E é acessível sobre qualquer conjunto controlável efetivo para S_M.*

Demonstração: Seja $D \subset G/L_2$ um conjunto controlável efetivo para S_M. Tome $gL_2 \in D_0$. Por definição de D_0, temos que existe $s \in \text{int}S$ tal que $M\phi_s(gL_2) = (gL_2)s = gL_2$. Defina $\phi(hL_1) = hsL_1$, com $h \in G$. Então, temos que $\phi \in S_E$. Como π_E é equivariante, segue que $\pi_E(\phi(gL_1)) = \pi_E(gsL_1) = gs\pi_E(L_1)$, ou seja, $\pi_E(\phi(gL_1)) = gsL_2 = (gL_2)s = gL_2$. Portanto, $\phi(gL_1) \in \pi_E^{-1}(D_0)$. Logo, basta mostrarmos que $\phi(gL_1) \in \text{int}(S_E(gL_1))$. Para este fato, observemos que $\phi(gL_1) = gsL_1 = (gL_1)s \in (gL_1)\text{int}S \subset (gL_1)S = S_E(gL_1)$ e $(gL_1)\text{int}S$ é aberto em G/L_1. Portanto, $\phi(gL_1) \in \text{int}(S_E(gL_1))$. □

A seguir, apresentaremos os resultados sobre o número de conjuntos controláveis (conjuntos controláveis invariantes) que serão usados posteriormente. Estes resultados foram mostrados em [2]. Começamos com a seguinte proposição:

Proposição 50 *Seja (E, π_E, M, F, G) um fibrado associado ao fibrado principal (Q, π_Q, M, G). Suponhamos que S_E e S_M são como anteriormente. Assuma que S_M é acessível, e seja $B \subset M$ um conjunto controlável efetivo para S_M. Suponha que existem $x \in B_0$ e $q \in \pi_Q^{-1}(x)$ tal que S_q age transitivamente sobre F. Então, S_E é acessível sobre B, e $D = \pi_E^{-1}(B)$ é um conjunto controlável efetivo para S_E em E.*

Demonstração: Veja a Proposição 3.7 em [2] □

Como consequência desta proposição, temos o seguinte:

Corolário 21 *Seja (Q, π_Q, M, G) um fibrado principal com projeção $\pi_Q : Q \to M$, e suponha que o seu grupo estrutural G é compacto e conexo. Considere S_Q e S_M como anteriormente. Seja B um conjunto controlável efetivo para S_M em M e suponha que S_Q é acessível sobre B em Q. Então, $\pi_Q^{-1}(B)$ é um conjunto controlável efetivo para S_Q em Q.*

Demonstração: Veja o Corolário 3.8 em[2]. □

A seguir, apresentamos um resultado, o qual nos diz que o número de conjuntos controláveis efetivos no espaço total é o mesmo que no espaço base.

Proposição 51 *Sejam* (E,π_E, M, F, G) *um fibrado associado ao fibrado principal* (Q, π_Q, M, G) *com projeção* $\pi_E : E \longrightarrow M$*. Considere* S_E, S_Q *e* S_M *os semigrupos como anteriormente. Assuma que* S_M *é acessível. Suponha que para todo conjunto controlável efetivo* $B \subset M$ *para* S_M*, existe* $x \in B_0$ *tal que para algum* $q \in \pi_Q^{-1}(x)$*,* S_q *age transitivamente em* F*. Tem-se:*

1. Se $B \subset M$ é um conjunto controlável efetivo para S_M, então $\pi_E^{-1}(B)$ é um conjunto controlável efetivo para S_E em E. Portanto, o número de conjuntos controláveis efetivos para S_E em E e para S_M em M é o mesmo.

2. Se $C \subset M$ é um conjunto controlável invariante para S_M, então $\pi_E^{-1}(C)$ é um conjunto controlável invariante para S_E em E. Portanto, o número de conjuntos controláveis invariantes para S_E em E e para S_M em M é o mesmo.

Demonstração: Seja $B \subset M$ um conjunto controlável efetivo para S_M. Então, pela Proposição 50, segue que $\pi_E^{-1}(B)$ é um conjunto controlável efetivo para S_E em E. Pela Proposição 20, temos que o número de conjuntos controláveis efetivos em E é o mesmo que em M. Analogamente, se mostra o outro item. □

Analogamente, para fibrados principais, temos:

Proposição 52 *Sejam* (Q, π_Q, M, G) *um fibrado principal com projeção* $\pi_Q : Q \longrightarrow M$ *e com grupo estrutural* G *compacto e conexo. Considere* S_Q *e* S_M *os semigrupos como anteriormente. Suponha que* S_Q *é acessível sobre qualquer conjunto controlável efetivo para* S_M *em* M*. Tem-se:*

1. Se $B \subset M$ é um conjunto controlável efetivo para S_M, então $\pi_Q^{-1}(B)$ é um conjunto controlável efetivo para S_Q em Q. Portanto, o número de conjuntos controláveis efetivos em Q e em M é o mesmo.

2. Se $C \subset M$ é um conjunto controlável invariante para S_M, então $\pi_Q^{-1}(C)$ é um conjunto controlável invariante para S_Q em Q. Portanto, o número de conjuntos controláveis invariantes em Q e M é o mesmo.

Demonstração: Pelo Corolário 21, temos que todo conjunto controlável efetivo $B \subset M$ do semigrupo S_M, $\pi_Q^{-1}(B)$ é um conjunto controlável efetivo para S_Q em Q. Temos também que os conjuntos controláveis invariantes são projetados em conjuntos controláveis invariantes. Então, de modo análogo ao que foi mostrado na Proposição 51, segue que o número de conjuntos controláveis efetivos em Q e em M é o mesmo. Analogamente, se mostra o outro item. □

Na última proposição, podemos assumir que $\pi_Q^{-1}(B_0)$ é conexo ao invés de assumirmos que G é conexo.

Como aplicação do último resultado, temos:

Proposição 53 *Sejam $L_1 \subset L_2$ subgrupos fechados de um grupo de Lie conexo G, com L_1 normal em L_2. Suponha que G/L_1 é compacto e L_2/L_1 é conexo. Suponha que o número de conjuntos controláveis efetivos em G/L_2 é finito. Então, o número de conjuntos controláveis efetivos em G/L_1 é o mesmo que em G/L_2. Em particular, o número de conjuntos controláveis invariantes em G/L_1 e em G/L_2 é o mesmo.*

Demonstração: Como L_1 é normal em L_2, podemos considerar o fibrado principal $\pi : G/L_1 \to G/L_2$ com grupo estrutural L_2/L_1. O grupo estrutural L_2/L_1 é compacto, pois é difeomorfo a fibra sobre um ponto de G/L_1 que é compacta. Por outro lado, pela Proposição 49, S_{G/L_1} é acessível sobre qualquer conjunto controlável efetivo $B \subset G/L_1$. Mas L_2/L_1 é conexo, e portanto, o resultado segue da Proposição 52. □

Sobre o número de conjuntos controláveis invariantes, temos o seguinte resultado:

Proposição 54 *Seja $C \subset M$ um conjunto controlável invariante para S_M. Suponha que S_Q é acessível sobre C e que a fibra típica F é compacta. Então, o número de conjuntos controláveis invariantes para S_q em F com $q \in \pi_E^{-1}(C_0)$ é o mesmo que o número de conjuntos controláveis invariantes para S_E sobre E.*

Demonstração: Veja o Teorema 4.4 em [2]. □

5.2 O Número de conjuntos controláveis

Sejam G um grupo de Lie e L um subgrupo fechado de G. Assuma que o espaço homogêneo G/L seja compacto. Suponha também que S é um subsemigrupo de G com $\text{int}S \neq \emptyset$. Suponha também que S age em G/L como um semigrupo de difeomorfismos de G. Nesta seção, estaremos interessados em determinar o número de conjuntos controláveis para a ação de S em G/L.

Para isto recordemos que um subsemigrupo de G com $\text{int}S \neq \emptyset$ *gera* G no sentido que todo elemento de G é um produto de elementos do conjunto $S \cup S^{-1}$, e usaremos a notação $G =< S \cup S^{-1} >$.

Inicialmente, mostramos que um subsemigrupo de um grupo de Lie solúvel G com interior não vazio e gerando G é transitivo em um espaço homogêneo compacto de G.

Assim, temos a seguinte

Proposição 55 *Seja G um grupo de Lie solúvel e G/L um espaço homogêneo compacto. Suponha que S é um subsemigrupo de G, e com $\text{int}S \neq \emptyset$ tal que gera G. Então, S é transitivo em G/L.*

Demonstração: Sejam x, $y \in G/L$. É conhecido a partir do teorema 1.2 de [11] que existe uma medida de probabilidade sobre G/L a qual é invariante pela ação de G. Temos que a ação de G em G/L é transitiva, uma vez que G/L é um espaço homogêneo de G. Então, pela Proposição 6.3 de [29], temos que S é transitivo sobre G/L. □

A seguir, assumiremos que G é um grupo de Lie conexo. Vamos supor também que G é simplesmente conexo. Apresentaremos condições para determinar o número de conjuntos controláveis efetivos no espaço homogêneo G/L.

Consideremos uma decomposição de Levi de G dada pelo produto semidireto $G = R \times_s H$, onde R é o radical de G e H é semi-simples. Observemos que sendo R normal em G, então RL é um subgrupo de G. Suponha que RL é um subgrupo fechado de G. Temos que $H \cap RL$ é um subgrupo fechado de H, já que RL é um subgrupo fechado de G.

O principal resultado deste capítulo diz que, sob certas condições, o número de conjuntos controláveis nos espaços homogêneos G/L e $H/(H \cap RL)$ é o mesmo. Em particular, quando $H \cap RL$ é um subgrupo parabólico do grupo de Lie semi-simples H, temos que $H/(H \cap RL)$ é uma variedade flag e o número de conjuntos controláveis em variedades flag foram determinados em [34]. Em particular, temos que numa variedade flag existe um único conjunto controlável invariante.

Agora, pelo teorema de Cartan, temos que RL é subgrupo de Lie fechado que contém L. Dessa forma, podemos considerar o fibrado associado

$$\pi : G/L \to G/RL$$

com fibra típica RL/L. Como G/L é compacto, temos que G/RL é compacto, pois π é uma sobrejeção contínua e G/L é compacto. Além disso, a fibra típica RL/L é compacta, pois é um fechado no compacto G/L. Temos também que L é um fechado de RL, pois $L = RL \cap L$, e L é um fechado em G. Portanto, G/RL e RL/L são espaços homogêneos compactos.

A seguir, mostraremos que o espaço homogêneo G/RL é a menos de difeomorfismo, um espaço homogêneo de um grupo de Lie semi-simples.

Lema 8 *Sejam G um grupo de Lie conexo e simplesmente conexo e $L \subset G$ um subgrupo fechado. Tem-se:*

1. Suponha que RL é um subgrupo fechado de G. Então, o espaço homogêneo G/RL é difeomorfo ao espaço homogêneo $H/H \cap RL$ do grupo de Lie semi-simples H.

2. Além disso, RL/L é difeomorfo a $R/R \cap L$.

Demonstração: Como G é um grupo de Lie simplesmente conexo, segue do item (2) do Teorema 1, que podemos decompor G como o produto direto $G = RH$ com $R \cap H = \{1\}$. Observemos que pela normalidade de R em G, um elemento de RH/RL é escrito como $rhRL = hRL$, com $r \in R$ e $h \in H$. Logo, podemos considerar a aplicação Ψ entre G/RL e $H/H \cap RL$ definida por

$$\Psi(rhRL) = h(H \cap RL\ )$$

que é um difeomorfismo com inversa dada por $\Psi^{-1}(h(H \cap RL) = hRL$. Analogamente, para o item (2), observemos que $RL/L = \{rL/r \in R\}$. Então, o difeomorfismo entre RL/L e $R/R \cap L$ é dado pela bijeção diferenciável Φ com $\Phi(rL) = r(R \cap L)$, e com inversa diferenciável $\Phi^{-1}(r(R \cap L)) = rL$. $\square$

Assim, temos o principal resultado deste capítulo:

Teorema 9 *Seja G um grupo de Lie conexo e simplesmente conexo. Suponha que S é um subsemigrupo de G com $\text{int}S \neq \emptyset$. Seja $G = RH$ uma decomposição de Levi de G, onde R é o radical de G e H é um subgrupo de Lie semi-simples. Assuma que $\text{int}_R(R \cap S) \neq \emptyset$. Suponha que RL é fechado e que $H \cap RL$ é um subgrupo parabólico de H. Então, o número de conjuntos controláveis efetivos para S em G/L é finito e igual ao número de conjuntos controláveis efetivos para S na variedade flag $H/H \cap RL$. Em particular, com estas hipóteses, existe um único conjunto controlável invariante para S em G/L.*

Demonstração: Temos que RL é um subgrupo de Lie fechado de G que contém L, pois R é normal em G. Consideremos o fibrado associado

$$\pi : G/L \to G/\ RL$$

ao fibrado principal $G \to G/RL$ com fibra típica RL/L. Como G/L é compacto, temos que G/RL e RL/L são espaços homogêneos compactos. Além disso, a fibra típica RL/L é um espaço homogêneo do grupo solúvel R pois, pelo Lema 8, RL/L é difeomorfa a $R/R \cap L$. Portanto, temos que $R/R \cap L$ é um espaço homogêneo compacto. Por outro lado, temos por hipótese, que R é um grupo solúvel. Como S gera G, temos que $R \cap S$ é um subsemigrupo de R que gera R, i.e., $R = \langle R \cap S \cup (R \cap S)^{-1} \rangle$. Além disso, por hipótese, temos que $\text{int}_R R \cap S \neq \emptyset$. Então, pelo Lema 55, temos que $R \cap S$ é transitivo sobre a fibra típica $R/R \cap L$. Logo, S é transitivo em $R/R \cap L$. Portanto, pela Proposicão 51, segue que o número do conjuntos controláveis efetivos em G/L e em G/RL é o mesmo. Agora, observemos que o Lema 8 implica que G/RL é difeomorfo a $H/H \cap RL$. Logo, o número do conjuntos controláveis efetivos para S em G/L e em $H/H \cap RL$ é o mesmo. Temos também da Proposição 51 que o número dos conjuntos controláveis invariantes para S em G/L e em $H/H \cap RL$ é o mesmo, onde $H/H \cap RL$ é uma variedade flag de H. Como existe um único conjunto controlável invariante sobre uma variedade flag de um grupo de Lie semi-simples, então existe um único conjunto controlável invariante sobre G/L. Dessa forma, concluímos a demonstração. □

Capítulo 6

Representações que deixam Cones Invariantes

Seja G um grupo de Lie semi-simples real com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Inicialmente, neste capítulo, estaremos interessados nas representações de dimensão finita de álgebras de Lie semi-simples reais euclidianas (ou split). Estas representações podem ser caracterizadas em termos do seu peso máximo. Uma tal caracterização nos permite analisar as representações irredutíveis dessas álgebras que deixam cones invariantes.

Apresentaremos uma condição necessária e suficiente sobre a existência de cones invariantes pela representação de G em V em termos do seu peso máximo (Ver Proposição 62). Isto será feito com o auxílio de dois resultados. O primeiro deles é o teorema de Vinberg que se encontra em [44] (Ver Proposição 60), e que relaciona a existência de cones invariantes em V com as chamadas representações de classe 1 (Ver definição 24). O outro é o teorema de Cartan-Helgason que se encontra em [46] (Ver Proposição 61), que relaciona as representações irredutíveis de classe 1 com o seu peso máximo.

A seguir, estaremos interessados em estudar as representações de dimensão finita

$$\rho : G \to \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$$

tais que $\rho(G) \subset S$ para algum subsemigrupo S de interior não vazio em $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$. Este é um problema (Problema 4.12) proposto por San Martin em [31]. Nesta direção, obtivemos alguns resultados parciais. A idéia inicial foi partir da existência de cones invariantes em $\mathbb{R}^n$ por uma representação irredutível (cuja existência é garantida por Vinberg em [44]) e relacionar com um resultado demonstrado por San Martin em [31], o qual garante a existência de cones invariantes por um semigrupo do tipo k em um produto exterior $\Lambda^k\mathbb{R}^n$.

Apresentaremos também condições sobre a não existência de um subsemigrupo S de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ com interior não vazio contendo $\rho(\mathrm{G})$. Por exemplo, seja

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$$

uma representação irredutível. Consideremos a representação fundamental ρ_k de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ no produto exterior $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ para $k \in \{1,\ldots,n-1\}$ (Veja o Exemplo 12). Então, podemos compor ρ_k com ρ e considerar a composição $\rho_k\rho$. Usando o Teorema 2 podemos decompor $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ em subespaços V_i irredutíveis por $\rho_k\rho$, de modo a restrição de $\rho_k\rho(\mathfrak{g})$ a cada subespaço dessa decomposição é irredutível. Além disso, podemos decompor cada V_i como soma direta de subespaços de pesos. Seja V_1 o subespaço irredutível cujo peso máximo da representação irredutível associada a V_1 corresponde ao maior autovalor da representação $\rho_k\rho$ quando avaliado num elemento da câmara de Weyl positiva de uma dada subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ (Ver seção 6.3). Com isto, mostraremos que, se para todo k, não existe cone pontual e gerador em V_1, então não existe semigrupo conexo $S \subsetneq \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ com interior não vazio tal que $\rho(\mathrm{G}) \subset S$.

Apresentaremos também uma classificação completa para certas representações do tipo $\rho_k\rho$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ tais que $\rho_k\rho(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$ deixam cones invariantes em um produto exterior. Este resultado generaliza um resultado de Vinberg (Veja seção 6.4) para as representações de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ do tipo $\rho_k\rho$. A importância deste resultado, bem como os que foram ditos anteriormente, está relacionada com a análise da existência de cones num produto exterior invariantes por $\rho_k\rho(G)$, para algum k, e estes, por sua vez com o problema de controlabilidade em espaços homogêneos de G. (Veja seção 4 em [31]).

6.1 Representações de álgebras de Lie semi-simples

Nesta seção, recordaremos algumas propriedades sobre as representações irredutíveis de uma álgebra de Lie semi-simples de dimensão finita. É conhecido que estas representações são caracterizadas em termos do seu peso máximo.

Consideraremos aqui as álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ sobre um corpo $\mathbb{K}$ de característica zero algebricamente fechado. Queremos ressaltar que a hipótese do corpo ser algebricamente fechado é usada em geral na teoria de álgebras de Lie, somente para garantir a existência de uma decomposição de $\mathfrak{g}$ como soma direta de seus espaços de raízes na forma $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_l}$. No caso geral, a hipótese do corpo ser algebricamente fechado, pode ser substituída por um corpo de característica zero, e considerar as álgebras de Lie *euclidiana (*ou *split)*, ou seja, álgebras de Lie cujas raízes características de $\mathrm{ad}(H)$ com $H \in \mathfrak{h}$ estão todas em $\mathbb{K}$. Para outros detalhes, nos referimos a [19], [40] e [42].

Usando a caracterização das representações irredutíveis de uma álgebra de Lie real split em termos do seu peso máximo, neste capítulo 6, analisaremos as representações que deixam cones invariantes.

6.1.1 Representações irredutíveis e peso máximo

Para fixar as notações desta seção, consideremos $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semisimples sobre $\mathbb{C}$ e E um espaço vetorial complexo de dimensão finita. Seja $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Fixemos uma ordem lexicográfica no dual $\mathfrak{h}^*$ de $\mathfrak{h}$. Denotemos por Δ o conjunto das raízes do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Então $\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-$ onde Δ^+ denota o conjunto das raízes positivas em relação à ordem fixada, e $\Delta^- = -\Delta^+$ denota o conjunto das raízes negativas. Em Δ escolha $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ um sistema simples de raízes. Para cada raiz $\alpha \in \Sigma$, coloquemos $H'_\alpha = \frac{2}{\langle\alpha,\alpha\rangle} H_\alpha$, onde H_α é o dual de α em relação a forma de Cartan-Killing. Consideremos a subálgebra nilpotente

$$\mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$$

Seja agora

$$\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(E)$$

uma representação de $\mathfrak{g}$ em E.

Definição 23 *Um peso de ρ é definido como um peso da representação restrição de $\mathfrak{h}$ em E, i.e., um funcional linear $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tal que o subespaço de peso*

$$E_\lambda = \{v \in E : \rho(H)v = \lambda(H)v \text{ para todo } H \in \mathfrak{h}\} \text{ é não nulo}$$

Um peso λ é chamado um peso máximo *de ρ se $\rho(\mathfrak{n}^+)E_\lambda = \{0\}$. Um vetor $v \in E_\lambda$, $v \neq 0$ associado ao peso máximo λ, é chamado* elemento primitivo *ou* vetor de peso máximo λ.

A seguir, citaremos algumas propriedades importantes sobre as representações irredutíveis de $\mathfrak{g}$ e seus pesos máximos.

Proposição 56 *Seja ρ uma representação irredutível de $\mathfrak{g}$ em E com peso máximo $\lambda_{\max}$. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. $\lambda_{\max}$ é único e $\dim E_{\lambda_{\max}} = 1$.

2. Os pesos para a representação ρ são todos da forma

$$\mu = \lambda_{\max} - \sum_{i=1}^{l} m_i \alpha_i$$

   com m_i inteiros não-negativos e $\alpha_i \in \Sigma$.

3. E se decompõe como soma direta de espaços de pesos,

$$E = E_{\mu_1} \oplus \ldots \oplus E_{\mu_s}$$

   onde $\mu_i \in \mathfrak{h}^*$, $i = 1, \ldots, s$.

4. Duas representações $\rho_1 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}\,(E_1)$ e $\rho_2 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}\,(E_1)$ com pesos máximos λ_1 e λ_2, respectivamente, são equivalentes se, e somente se, $\lambda_1 = \lambda_2$

Demonstração: Veja o Teorema 11.2 em [40]. □

Proposição 57 *Para qualquer $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ existe uma representação irredutível ρ_λ de $\mathfrak{g}$ cujo peso máximo é λ.*

Demonstração: Veja o Teorema 11.3. em [40]. □

Desta proposição, e a partir do item (4) da Proposição 56, podemos dizer que as representações (de dimensão finita ou não) e que admitem peso máximo são parametrizadas pelo dual $\mathfrak{h}^*$ de $\mathfrak{h}$, no seguinte sentido: dado $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, existe a menos de equivalência, uma única representação irredutível ρ_λ cujo peso máximo é λ.

Para representações de dimensão finita temos a seguinte proposição:

Proposição 58 *Se ρ é uma representação irredutível de $\mathfrak{g}$ em E de dimensão finita, então ρ admite peso máximo, digamos λ. Além disso, $\lambda(H'_\alpha)$ é um inteiro não negativo para toda raiz simples $\alpha \in \Sigma$.*

Demonstração: Veja os Teoremas 11.4 e 11.5 em [40]. □

A partir das proposições anteriores temos:

Proposição 59 *Com as notações acima, tem-se:*

1. Um funcional $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ é o peso máximo de alguma representação irredutível de dimensão finita de $\mathfrak{g}$ se, e somente se, $\lambda(H'_{\alpha_i})$ é um inteiro não negativo para toda raiz simples $\alpha_i \in \Sigma$.

2. $\lambda(H'_\alpha)$ é um inteiro não negativo para toda raiz positiva $\alpha \in \Delta^+$ se, e somente se, $\lambda(H'_{\alpha_i})$ é um inteiro não negativo para toda raiz simples $\alpha_i \in \Sigma$.

3. Se $\lambda(H'_{\alpha_i})$ é um inteiro não negativo par, para toda raiz simples $\alpha_i \in \Sigma$, então $\lambda(H'_\alpha)$ é um inteiro não negativo par, para toda raiz positiva $\alpha \in \Delta^+$.

Demonstração: Veja o Capítulo 11 em [40]. □

A seguir, seja $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_l\}$ um *sistema fundamental* de pesos de $\mathfrak{g}$, i.e., Φ é uma base de $\mathfrak{h}^*$ que é a dual da base $\left\{H'_{\alpha_j}\right\}_{j=1,\ldots,l}$ de $\mathfrak{h}$. Agora, observemos que dado $\varphi_i \in \Phi$, através do isomorfismo entre $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{h}^*$, temos que existe um único $H_{\varphi_i} \in \mathfrak{h}$ tal que $\varphi_i(H) = \langle H \ , H_{\varphi_i}\rangle$. Logo, $\varphi_i(H'_{\alpha_j}) = \langle H'_{\alpha_j} \ , H_{\varphi_i}\rangle = \langle \frac{2}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle} H_{\alpha_j} \ , H_{\varphi_i}\rangle = \frac{2}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle} \langle H_{\alpha_j} \ , H_{\varphi_i}\rangle$. Pela definição da forma de Cartan-Killing em $\mathfrak{h}^*$ temos que $\langle H_{\alpha_j} \ , H_{\varphi_i}\rangle = \langle \ \alpha_j, \varphi_i\rangle$, e daí segue que

$$\varphi_i(H'_{\alpha_j}) = \frac{2}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle}\langle\alpha_j,\varphi_i\rangle = \langle\varphi_i, \frac{2}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle}\alpha_j\rangle$$

Por isso, com abuso de notação, também escreveremos $\varphi_i(H'_{\alpha_j}) = \langle\varphi_i, H'_{\alpha_j}\rangle = \langle\varphi_i, \frac{2}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle}\alpha_j\rangle$, uma vez que H'_{α_j} é identificado com $\frac{2}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle}\alpha_j$. Logo, os elementos de Φ são os funcionais lineares em $\mathfrak{h}^*$ tais que $\varphi_i(H'_{\alpha_j}) = \langle\varphi_i, H'_{\alpha_j}\rangle = \delta_{i,j}$, onde $\delta_{i,j} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{i,j} = 0$ se $i \neq j$.

Seja agora $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Então, $\lambda = n_1\varphi_1 + \cdots + n_l\varphi_l$ com escalares $n_j = \lambda(H'_{\alpha_j}) = \langle \lambda, H'_{\alpha_j} \rangle = \frac{2}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}\langle \lambda, \alpha_j \rangle$. Pela Proposição 59, temos que λ é o peso máximo de alguma representação irredutível de dimensão finita de $\mathfrak{g}$ se, e somente se, $n_j = \lambda(H'_{\alpha_j})$ é um inteiro não negativo, para toda raiz simples $\alpha_j \in \Sigma$ ou, equivalentemente, $\lambda = n_1\varphi_1 + \cdots + n_l\varphi_l$, com n_j inteiros não negativos. Esses são, portanto, os pesos máximos das representações irredutíveis de dimensão finita. Em particular, os elementos de Φ são elementos desse tipo e definem também representações de dimensão finita que são chamadas de *representações fundamentais*. Os elementos de Φ são chamados de pesos *fundamentais* (ou *básicos*).

Para concluir esta seção, seja

$$\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(E)$$

uma representação de $\mathfrak{g}$ num espaço vetorial complexo E com peso máximo $\lambda_{\max}$. Escolhido o sistema simples de raízes $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\} \subset \Delta$, associado a Σ, temos que existe o sistema fundamental de pesos

$$\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_l\}$$

de $\mathfrak{g}$. Coloquemos $H_j = H'_{\alpha_j} = \frac{2}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} H_{\alpha_j}$. Dito de outra forma, os elementos de Φ são os funcionais lineares em $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ tais que $\langle \varphi_i, H_j \rangle = \delta_{i,j}$. Além disso, o peso máximo desta representação $\lambda_{\max}$ pode ser escrito como combinação linear dos pesos fundamentais φ_i, a menos de multiciplicidade, com coeficientes inteiros não negativos, i.e.

$$\begin{aligned} \lambda_{\max} &= n_1\varphi_1 + \cdots + n_l\varphi_l, \text{ com } n_j \text{ inteiro não negativo} \\ \text{com } j &= 1, \ldots, l, \text{ onde } n_j = \frac{2}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}\langle \lambda_{\max}, \alpha_j \rangle \end{aligned}$$

Consideremos agora o seguinte

Exemplo 12 *Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$ ou A_d. Tome $\mathfrak{h}$ a subálgebra de Cartan dada pelas matrizes diagonais de traço zero. As raízes são dadas por*

$$\Delta = \{\alpha_{i,j} = \lambda_i - \lambda_j : i \neq j\}$$

onde $\lambda_i \in \mathfrak{h}^*$ tal que $\lambda_i(H) = a_i$ com $H = \operatorname{diag}\{a_1, \ldots, a_d\}$. Um sistema simples de raízes é

$$\Sigma = \{\alpha_{i,i+1} : i = 1, \ldots, d-1\}$$

Escrevamos $\alpha_i = \alpha_{i,i+1}$, e denotamos por $E_{i,j}$ a matriz $d \times d$ cuja (i,j)-ésima entrada é igual a 1, e as outras entradas são iguais a zero. Como o dual de cada raiz $\alpha_{i,j}$ é dado por $H_{\alpha_{i,j}} = \frac{1}{2d}(E_{ii} - E_{jj})$, então uma base de $\mathfrak{h}$ é formada pelos duais normalizados $H_i = \frac{2}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} H_{\alpha_i}$ das raízes simples α_i, os quais são

$$E_{11} - E_{22}, \ldots, E_{d-1,d-1} - E_{d,d}$$

O sistema fundamental de pesos é a base dual desta base que é dado por

$$\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{d-1}\}$$

onde $\varphi_k = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$. Além disso, associadas a estes pesos, temos as representações fundamentais

$$\rho_k : \mathfrak{sl}(d, \mathbb{R}) \to \mathfrak{gl}(\Lambda^k \mathbb{R}^{d-1})$$

de $\mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$ em $\Lambda^k \mathbb{R}^{d-1}$ definidas por

$$\rho_k(X)(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}) = Xe_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} + \cdots + e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge Xe_{i_k}$$

Aqui $X \in \mathfrak{g}$ e os elementos da forma $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$, com $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots i_k \leq (d-1)$ formam uma base para o espaço vetorial $\Lambda^k \mathbb{R}^{d+1}$, onde $\{e_1, e_2, \ldots, e_{d-1}\}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^{d-1}$. Além disso, $\varphi_k = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$ é o peso máximo para a representação ρ_k associada ao elemento primitivo $e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_{d-1}$.(Veja [40], páginas 300-301). (Veja [19] e [10]).

6.2 Cones invariantes e peso máximo

Nesta seção, estaremos interessados em relacionar a existência de cones num espaço vetorial real que são invariantes por uma representação irredutível com o peso máximo desta representação. Para uma classe especial de representações de dimensão finita, mais precisamente, as chamadas representações de classe 1 que definiremos logo abaixo, apresentaremos um resultado sobre a existência de cones invariantes em termos do seu peso máximo.

A seguir, consideraremos G um grupo de Lie semi-simples, real, conexo com uma álgebra $\mathfrak{g}$, e V um espaço vetorial real de dimensão finita. Fixemos uma decomposição de Iwasawa de G dada por $G = KAN^+$. Recordaremos um resultado devido a Vinberg, que nos diz quando existem cones invariantes por uma representação irredutível de G.

Para isto, consideremos a seguinte definição:

Definição 24 *Dizemos que $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ é de* classe 1 *para o par (G, K), se existe um vetor não nulo $u \in V$ tal que $\rho(\zeta)u = u$ para todo $\zeta \in K$ ou, equivalentemente, se*

$$V^K = \{u \in E : \rho(\zeta)u = u \text{ para todo } \zeta \in K\} \neq \{0\}$$

Com isto, temos a seguinte:

Proposição 60 ***(Vinberg)*** *Suponha que $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ é uma representação real irredutível de G em V. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

1. Existe um cone $W \subset V$ invariante por $\rho(G)$.

2. ρ é uma representação de classe 1 do par (G, K).

Demonstração: Veja o Teorema 1 em [44]. □

A seguir, recordaremos um resultado, o qual diz que as representações irredutíveis de classe 1 podem ser caracterizadas em termos de seu peso máximo. Para isto, tomemos uma decomposição de Cartan da álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$ dada por $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$, onde $\mathfrak{k}$ é uma subálgebra compacta imersa de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{s}$ é o seu complemento ortogonal em relação a forma de Cartan-Killing. Seja $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ uma subálgebra abeliana e maximal em $\mathfrak{s}$. Pela Proposição 12.25 em [40], existe uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ que contém $\mathfrak{a}$ tal que

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathfrak{k}} \oplus \mathfrak{a}, \text{ onde } \mathfrak{h}_{\mathfrak{k}} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k} \text{ e } \mathfrak{a} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s} = \mathfrak{h}_s$$

Seja Π o conjunto das raízes do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Escolhendo uma ordem lexicógrafica em $\mathfrak{a}^*$, seja Π^+ o conjunto das raízes positivas nessa ordem.

Temos a seguinte proposição:

Proposição 61 ***(Cartan-Helgason)*** *Suponha que $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ é uma representação irredutível com o peso máximo $\lambda_{\max}$. Então, ρ é de classe 1 do par (G, K) se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

1. A restrição $\lambda_{\max}|_{\mathfrak{h}_{\mathfrak{k}}}$ é identicamente nula.

2. O número real $\frac{\langle \lambda_{\max}, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ é um inteiro não-negativo, para toda raiz positiva α do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$.

Demonstração: Veja o Teorema 3.3.1.1 em [46]. □

Em particular, o resultado anterior pode ser aplicado para representações irredutíveis de álgebras de Lie semi-simples reais, uma vez que a irredutibilidade de uma representação ao nível de grupos de Lie é equivalente à irredutibilidade de uma representação de álgebras de Lie. (Veja a Proposição 3). Além disso, essas representações têm o mesmo peso máximo. Como consequência da Proposição 60 (Vinberg) e da Proposição 61 (Cartan-Helgason), temos uma caracterização da existência de cones invariantes em termos do peso máximo de uma representação irredutível.

Proposição 62 *Suponha que $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{GL}(V)$ é uma representação irredutível. Seja $\lambda_{\max}$ o peso máximo de ρ. Então, existe um cone W em V invariante por $\rho(\mathfrak{g})$ se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

1. $\lambda_{\max}|_{\mathfrak{h}_{\mathfrak{k}}}$ é identicamente nulo, e
2. o número real $2\frac{\langle\lambda_{\max},\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$ é um inteiro não-negativo par para toda raiz $\alpha \in \Pi^{+}$.

Demonstração: Fixemos uma raiz $\alpha \in \Pi^{+}$. Observemos que $2\frac{\langle\lambda_{\max},\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$ é um inteiro não-negativo par se, e somente se, $\frac{\langle\lambda_{\max},\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$ é um inteiro não-negativo. Logo, pela Proposição 61, temos que as condições (1) e (2) são equivalentes a ρ ser uma representação de classe 1 do par (G, K). Pela Proposição 60, esta última afirmação é equivalente a existir um cone W em V invariante por $\rho(G)$. Finalmente, usando o fato de que a invariância de cones por uma representação ao nível de grupos de Lie equivale a mesma propriedade ao nível de álgebras de Lie (Veja a Proposição 3), concluímos o resultado. □

Suponha que

$$\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{GL}(V)$$

é uma representação real irredutível com peso máximo $\lambda_{\max}$. Então, podemos escrever $\lambda_{\max}$ como combinação linear dos pesos fundamentais de φ_k de $\mathfrak{g}$, onde $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{d-1}\}$ é o sistema fundamental de pesos de $\mathfrak{g}$. Ou seja, $\lambda_{\max} = n_1\varphi_1 + \cdots + n_{d-1}\varphi_{d-1}$ com n_i inteiros não-negativos, onde $n_i = \frac{2}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}\langle\lambda_{\max}, \alpha_i\rangle = \lambda_{\max}(H'_{\alpha_i})$. (Para outros detalhes, veja seção 6.1.1 deste Capítulo).

Com isto, temos o seguinte:

Corolário 22 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples real split. Suponha que $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ é uma representação real e irredutível com peso máximo $\lambda_{\max}$. Assuma que $\lambda_{\max} = n_1\varphi_1 + \cdots + n_{d-1}\varphi_{d-1}$, onde os $n_i^{'}s$ são inteiros não-negativos e $\Phi = \{\varphi_1 , \ldots, \varphi_{d-1}\}$ é o sistema fundamental de pesos de $\mathfrak{g}$. Suponha que $\lambda_{\max|\mathfrak{h}_\mathfrak{k}} = 0$. Então, são equivalentes:*

1. n_i é par, para todo i.

2. existe um cone $W \subset V$ que é invariante por $\rho(\mathfrak{g})$.

Demonstração: Fixemos $i \in \{1, \ldots, d-1\}$. Seja α_i uma raiz simples de $\mathfrak{g}$. Temos que os coeficientes $n_i^{'}s$ do peso fundamental são dados por $n_i = \frac{2}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}\langle \lambda_{\max}, \alpha_i \rangle = \lambda_{\max}(H'_{\alpha_i})$. Segue que n_i é par se, e somente se, $\frac{2}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}\langle \lambda_{\max}, \alpha_i \rangle$ é um inteiro par não negativo. Por hipótese, temos que $\lambda_{\max|\mathfrak{h}_\mathfrak{k}} = 0$. Pela Proposição 62, segue que (1) e (2) são equivalentes. □

É claro que, se alguma das condições da proposição anterior se cumpre, então existe um cone $W \subset V$ invariante por $\rho(G)$, i.e., tal que $\rho(G) \subset S_W$ para algum semigrupo S_W. A saber, tome o semigrupo $S_W = \{u \in G : \rho(u)(W) \subset W\}$ que é o *semigrupo de compressão* de W.

6.3 Existência de semigrupos

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples real. Consideremos

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{sl}(\mathbb{R}^n) = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$$

uma representação de $\mathfrak{g}$ em $\mathbb{R}^n$. Observe que uma tal representação sempre é possível pelo Corolário 3.13 de [40].

Denotaremos também por ρ a representação correspondente do grupo de Lie semi-simples, real G em $\mathbb{R}^n$ tal que $\rho(G) \subset \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.

Em particular, no caso em que ρ é uma representação irredutível, Vinberg mostrou que existe um cone $W \subset \mathbb{R}^n$ que é invariante por $\rho(G)$ (Veja a Proposição 60), ou seja, $\rho(G) \subset S_W$ para algum semigrupo de compressão $S_W = \{g \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}) : gW \subset W\}$. É conhecido que S_W é um subsemigrupo de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ com interior não vazio e conexo. (Veja [24], [31] e [36]).

A seguir, o objetivo desta seção é tentar generalizar este caso para uma certa representação de dimensão finita de G. Nesse sentido, consideraremos as representações de dimensão finita

$$\rho : G \to \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$$

tais que $\rho(G) \subset S$ para algum subsemigrupo S com interior não vazio em $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$.

Observação: O problema de decidir quais representações ρ com a propriedade de representar G dentro de algum subsemigrupo S com interior não vazio em $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ é um problema proposto por San Martin em [31] (Veja o Problema 4.12 em [31]).

Usaremos o seguinte resultado, que mostra a existência de cones pontuais em $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ invariantes por semigrupos conexos do tipo k, ou seja, invariantes por semigrupos próprios, conexos e de interior não vazio.

Proposição 63 *Seja $S \subset Sl(n, \mathbb{R})$ um semigrupo próprio conexo com interior não vazio. Então, para algum $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, existe um cone pontual $W \subset \Lambda^k\mathbb{R}^n$ tal que S deixa W invariante.*

Demonstração: Veja a Proposição 4.11 em [31]. □

Observação: O cone W da proposição anterior é obtido tomando o conjunto gerado pelo conjunto controlável invariante C^+ para S em $\mathrm{Gr}_k(n)$, ou seja, $W = \mathrm{ger}C^+ = \{\sum a_i v_i : a_i \geqslant 0, v_i \in C^+\}$. Observemos que de modo análogo ao que foi feito na proposição anterior, podemos encontrar um outro cone pontual em $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ invariante por S que é dado por $W^- = \mathrm{ger}C^- = -W$, onde $C^- = -C^+$.

Consideremos agora o produto exterior $\Lambda^k\mathbb{R}^n$, onde $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ e tomemos a representação fundamental ρ_k de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ em $\Lambda^k\mathbb{R}^n$. Então, compondo ρ_k com ρ podemos considerar a representação

$$\rho_k\rho : G \xrightarrow{\rho} \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}) \xrightarrow{\rho_k} \mathrm{GL}(\Lambda^k\mathbb{R}^n)$$

Observemos que em particular, se ρ é uma representação irredutível e $k = 1$, isto é, quando G é representado no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n = \Lambda^1\,\mathbb{R}^n$ por uma representação irredutível, então estamos nas condições da Proposição 60, e portanto, existe um cone $W \subset \mathbb{R}^n$ que é invariante por $\rho_1\rho(G) = \rho(G)$, ou seja, $\rho(G) \subset S_W$ para algum semigrupo de compressão S_W.

Assim, com base na Proposição 63, o resultado a seguir nos mostra que o estudo das representações de dimensão finita

$$\rho : G \to \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$$

tal que $\rho(G) \subset S$ para algum subsemigrupo S com interior não vazio em $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$, esta relacionado com à análise da existência de cones no produto exterior $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ invariantes por $\rho_k\rho(G)$, para algum k.

Proposição 64 *Suponha que existe um subsemigrupo conexo e próprio*

$$S \subset \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$$

com interior não vazio tal que $\rho(\mathrm{G}) \subset S$. Então, para algum $k = 1, \ldots, n-1$, existe um cone pontual em $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ invariante por $\rho_k\rho(\mathrm{G})$.

Demonstração: Pela Proposição 63, temos que para algum $k = 1, \ldots n-1$, existe um cone pontual $W = \mathrm{ger}C^+ \subset \mathrm{Gr}_k^+(n)$ em $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ que é invariante por S. Observemos que $\rho_k(S)W \subset W$. De fato, tomemos $s \in S$ e $w \in W$. Então, podemos escrever $w = \sum_{i=1}^{r} a_i w_i$ com $a_i \geqslant 0$ e $w_i = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$ com $1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_k \leqslant n$ onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Usando a linearidade de $\rho_k(s)$, temos que $\rho_k(s)w = \sum_{i=1}^{r} a_i\rho_k(s)w_i$. Daí, segue que $\rho_k(s)w = \sum_{i=1}^{r} a_i s^k w_i$, pois $\rho_k(s)(w_i) = se_{i_1} \wedge \ldots \wedge se_{i_k} = s^k e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} = s^k w_i$. Como $s^k w_i \in SW \subset W$, segue que $\rho_k(S)W \subset W$. Logo, temos que

$$\rho_k\rho(G)W \subset \rho_k(S)W \subset W$$

Portanto, existe um cone pontual W em $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ que é invariante por $\rho_k\rho(G)$, para algum k. □

De outra forma, a proposição anterior nos diz que, se para todo $k = 1, \ldots n-1$, não existe cone pontual em $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ invariante por $\rho_k\rho(G)$, então não existe subsemigrupo conexo S contido propriamente em $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ que possui interior não vazio e com $\rho(\mathrm{G}) \subset S$.

Observemos agora que pelo Teorema 2, podemos decompor

$$\Lambda^k\mathbb{R}^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$$

onde os subespaços V_i são irredutíveis por $\rho_k\rho$, i.e., os subespaços V_i são invariantes por $\rho_k\rho$ e a restrição

$$\rho_k\rho\,|_{V_i} \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_i)$$

de $\rho_k\rho$ a V_i é irredutível para $i = 1, \ldots, s$.

Como toda representação de dimensão finita admite peso máximo, temos que as representações irredutíveis $\rho_k\rho\mid_{V_i}$ têm peso máximo, digamos μ_i, para $i = 1, \ldots, s$. Além disso, para cada i, temos que $V_i = V_{\mu_i} \oplus U_i$, onde $U_i = \sum_{j=1}^{r_i} V_{\mu_i^j}$ é a soma direta dos subespaços de pesos da representação irredutível $\rho_k\rho\mid_{V_i}$. Daí, segue que existe uma base β_i de V_i tal que fixado A em $\mathfrak{h}^+$, temos que $V_i = V_{\mu_i(A)} \oplus U_i$, onde $V_{\mu_i(A)}$,

$$U_i = \sum_{j=2}^{r_i} V_{\mu_i^j(A)}$$

são os auto-espaços da transformação lineares $\rho_k\rho_{V_i}(A)$ associado aos auto-valores $\mu_i(A), \mu_i^j(A)$, com $j = 2, \ldots, r_i$. Logo, em relação a base β_i de V_i, podemos escrever $\rho_k\rho_{V_i}(A)$ como uma matriz diagonal, cuja diagonal é dada pelos auto-valores $\mu_i(A), \mu_i^j(A)$. Logo, tomando a união dessas bases, temos que $\rho_k\rho(A)$ é dado por uma matriz diagonal, cujos elementos diagonais são os auto-valores de $\rho_k\rho_{V_i}(A)$.

Claramente pela ortogonalidade dos subespaços de pesos, temos que $\mu_i(A) > \mu_i^j(A)$ ou $\mu_i(A) < \mu_i^j(A)$ para cada $i = 1, \ldots, s, j = 2, \ldots, r_i$. Desta forma, podemos ordenar estes auto-valores. Então, podemos supor que $\rho_k\rho\mid_{V_1}$ é a representação irredutível cujo peso máximo μ_1 é maior que todos os outros pesos máximos, no seguinte sentido, fixado $A \in \mathfrak{h}^+$, podemos reordenar se necessário o conjunto dos autovalores $\{\mu_i(A), \mu_i^j(A)\}$ de $\rho_k\rho_{V_i}(A)$ de modo que temos

$$\mu_1(A) > \mu_2(A) > \cdots > \mu_s(A)$$

Definição 25 *A representação irredutível $\rho_k\rho\mid_{V_1}$ cujo peso máximo μ_1 é maior que todos os outros pesos máximos no sentido acima, é chamada de* representação principal *de $\mathfrak{g}$ em V_1, que denotaremos por $\rho_k\rho\mid_{V_1}$.*

A seguir, apresentaremos condições para a não existência de um subsemigrupo S em $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ com interior não vazio contendo $\rho(\mathrm{G})$. Inicialmente, supondo que existe um cone pontual W em $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ invariante por $\rho_k\rho$, mostraremos que V_1 intercepta W. Como na Proposição 10, veremos que uma tal intersecção será um cone invariante por $\rho_k\rho$. Daremos agora a idéia para esta demonstração.

Para isto, utilizaremos dois lemas preliminares. Consideraremos a ação natural de $GL(V)$ no espaço projetivo $\mathbb{P}(V)$ dada por $T[x] = [Tx]$, onde $[x]$ denota a semi-reta gerada por x. O resultado a seguir, segue do Lema 5.3 de [33], que vale mais geralmente numa grassmanniana.

Lema 9 *Seja $T \in \mathfrak{gl}(V)$ diagonalizável com auto-valores reais. Suponha que $b_{\max}$ é o maior auto-valor de T. Então, para todo $[x] \in \mathbb{P}(V)$,*

$$T^m[x] \to [y], \textit{quando } m \to +\infty,$$

para algum $y \in V_{b_{\max}(T)}$, e $y \neq 0$.

Demonstração: Veja o Lema 5.3 em [33] □

Temos também o

Lema 10 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples real euclidiana. Seja*

$$\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}(\mathbb{R}^n)$$

uma representação irredutível de dimensão finita tal que $\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$. Seja $\lambda_{\max}$ o peso máximo de ρ. Então, $\lambda_{\max}(A)$ é o maior auto-valor de $\rho(A)$ para todo $A \in \mathfrak{h}^+$.

Demonstração: Pela Proposição 56, segue que os outros pesos de ρ são obtidos do peso máximo $\lambda_{\max}$ da seguinte forma $\mu = \lambda_{\max} - \sum_{i=1}^{d-1} m_i\alpha_i$ com m_i inteiro não-negativo e α_i raiz simples de $\mathfrak{g}$. Como por definição $\alpha_i(A) > 0$ para todo $A \in \mathfrak{h}^+$, segue que $\lambda_{\max}(A) > \mu(A)$ para todo $A \in \mathfrak{h}^+$. Logo, $\lambda_{\max}(A)$ é o maior auto-valor para todo $A \in \mathfrak{h}^+$. □

Assim, temos:

Observação: Se $\rho_k\rho\,|_{V_1}$é a representação principal de V_1, então para cada $A \in \mathfrak{h}^+$, $\mu_1(A)$ é o maior auto-valor da transformação linear $\rho_k\rho(A)$. De fato, temos que o peso máximo μ_1 é maior que todos os outros pesos máximos, isto é, fixado $A \in \mathfrak{h}$, podemos reordenar se necessário o conjunto $\{\mu_i(A), \mu_i^j(A)\}$ de autovalores de $\rho_k\rho_{V_i}(A)$ de modo que temos

$$\mu_1(A) > \mu_2(A) > \cdots > \mu_s(A)$$

Mas, pelo Lema 10 segue que $\mu_1(A)$ é o maior auto-valor de $\rho_k\rho_{V_1}(A)$. Logo, $\mu_1(A)$ é o maior auto-valor de $\rho_k\rho(A)$.

A seguir, sob algumas hipóteses, mostraremos a existência de um cone não nulo próprio e invariante por $\rho_k\rho(\mathrm{G})$ em V_1. Usando o fato de que a ação de G é irredutível em V_1, temos também que este cone é pontual e gerador de V_1. Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Teorema 10 *Seja G um grupo de Lie semi-simples real conexo com álgebra de Lie euclidiana $\mathfrak{g}$. Consideremos a representação*

$$\rho_k\rho : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R}) \xrightarrow{\rho_k} \mathrm{Gl}(\Lambda^k\mathbb{R}^n)$$

Sejam $\mathfrak{h}$ a subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}^+$ uma câmara de Weyl positiva de $\mathfrak{h}$. Considere a ação de $\rho_k\rho(\mathrm{G})$ no espaço projetivo $\mathbb{P}(\Lambda^k\mathbb{R}^n)$. Seja μ_1 o peso máximo da representação principal $\rho_k\rho_{V_1}$. Suponha que para algum $k = 1,\ldots,n-1$, existe um cone não nulo pontual $W \subset \Lambda^k\mathbb{R}^n$ invariante por $\rho_k\rho(\mathrm{G})$. Então, a intersecção $V_1 \cap W$ é um cone não nulo próprio e invariante por $\rho_k\rho(\mathrm{G})$ em V_1 e, portanto, pontual e gerador de V_1.

Demonstração: Como anteriormente, pelo Teorema de decomposição de Weyl, podemos considerar a decomposição de $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ em soma direta

$$\Lambda^k\mathbb{R}^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$$

em subespaços irredutíveis V_i por $\rho_k\rho(\mathrm{G})$. Seja x um elemento no cone $W \subset \Lambda^k\mathbb{R}^n$e $H \in \mathfrak{h}^+$. Em particular, temos que $\rho_k\rho(e^{mH})x \in W$ para todo i natural, pois W é invariante por $\rho_k\rho(\mathrm{G})$. Por hipótese, temos que μ_1 é o peso máximo da representação principal $\rho_k\rho_{V_1}$. Pela observação anterior, para $H \in \mathfrak{h}^+$, temos que $\mu_1(H)$ é o maior auto-valor da transformação linear $\rho_k\rho(H)$. Como $\rho_k\rho_{V_1}(e^H)$ é uma matriz diagonal com auto-valores reais, segue pelo Lema 9, que

$$(\rho_k\rho(e^H))^m[x] \longrightarrow [y], \text{ quando } m \longrightarrow +\infty, \text{ para algum } y \in V_{\mu_1(H)}, \text{ e } y \neq 0$$

uma vez que $V_{\mu_1(H)}$ é o subespaço associado ao maior auto-valor de $\rho_k\rho(e^H)$. Temos também que $y \in W$, e portanto, $V_{\mu_1(H)} \cap W \neq (0)$. De fato, temos que existe uma sequência $\{\rho_k\rho_{V_1}(e^{mH})[x]\} \subset W$ tal que $\rho_k\rho_{V_1}(e^{mH})[x] \longrightarrow [y]$. Daí segue que $[y] \in W$, pois W é fechado em $\Lambda^k\mathbb{R}^n$. Por definição da classe $[y]$, isto implica que para todo t real, $ty \in W$. Donde segue que $y \in W$. Logo,

$V_{\mu_1(H)} \cap W \neq (0)$. Como $V_{\mu_1(H)} \subset V_1$ temos que $V_1 \cap W \neq (0)$. Logo, temos que $V_1 \cap W$ é um cone não nulo em V_1. Mostremos agora que $V_1 \cap W$ é pontual e gerador. Inicialmente, observemos que o cone não nulo $V_1 \cap W$ em V_1 é invariante pela representação irredutível $\rho_k\rho_{V_1}$. De fato, temos que

$$\rho_k\rho_{V_1}(\mathrm{G})(V_1 \cap W) = \rho_k\rho(\mathrm{G})(V_1 \cap W) \subset \rho_k\rho(\mathrm{G})(W) \subset W$$

pois W é invariante por $\rho_k\rho(\mathrm{G})$ e temos também que

$\rho_k\rho_{V_1}(\mathrm{G})(V_1 \cap W) \subset \rho_k\rho_{V_1}(\mathrm{G})(V_1) \subset V_1$ pois V_1 é invariante por $\rho_k\rho_{V_1}(\mathrm{G})$

Logo, segue que

$$\rho_k\rho_{V_1}(\mathrm{G})(V_1 \cap W) \subset V_1 \cap W$$

ou seja, $V_1 \cap W$ é invariante por $\rho_k\rho_{V_1}(\mathrm{G})$. Como a representação principal $\rho_k\rho_{V_1}$ é irredutível, da Proposição 11, basta mostramos que $V_1 \cap W$ é próprio em V_1. De fato, suponha que $V_1 \cap W$ não é próprio. Então, $V_1 = V_1 \cap W$ e, portanto, $V_1 \subset W$. Assim, para todo $v \in V_1$, tem-se que $\pm v \in W$. Logo, temos que $v = 0$, pois W é pontual. Portanto, $V_1 = (0)$, o que é uma contradição. Então, concluímos que $V_1 \cap W$ é um cone em V_1 invariante por $\rho_k\rho_{V_1}$ tal que $(0) \subsetneq V_1 \cap W \subsetneq V_1$. Como $\rho_k\rho_{V_1}$ é uma representação irredutível, pela Proposição 11, segue que $V_1 \cap W$ é um cone pontual e gerador de V_1 □

Corolário 23 *Seja G um grupo de Lie semi-simples, real, conexo e com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Suponha que existe semigrupo conexo $S \subsetneq \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ com interior não vazio tal que $\rho(G) \subset S$. Então, para algum $k = 1, \ldots, n-1$, existe um cone pontual $W \subset \Lambda^k\mathbb{R}^n$ invariante por $\rho_k\rho(G)$. Portanto, existe um cone pontual e gerador não nulo $W_1 \subsetneq V_1$ invariante $\rho_k\rho_{V_1}(G)$, onde $\rho_k\rho_{V_1}$ é a representação principal de V_1. Além disso, $\rho(G) \subset S_{W_1}$ para algum semigrupo S_{W_1}.*

Demonstração: Pela Proposição 64, segue que para algum $k = 1, \ldots, n-1$, existe um cone pontual $W \subset \Lambda^k\mathbb{R}^n$ invariante por $\rho_k\rho(\mathrm{G})$. Então, pelo Teorema 10, a intersecção $V_1 \cap W$ é um cone pontual e gerador de V_1 invariante por $\rho_k\rho_{V_1}(\mathrm{G})$. Portanto, existe um cone pontual e gerador não nulo $W_1 = V_1 \cap W \subsetneq V_1$ invariante por $\rho_k\rho_{V_1}(\mathrm{G})$, onde $\rho_k\rho_{V_1}$ é a representação principal de V_1. Agora, para a outra afirmação, tomemos o semigrupo S_{W_1} onde $S_{W_1} = \{u \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}) : \rho_k(u)(W_1) \subset W_1\}$. Como $V_1 \cap W \subset V_1$, segue que

$\rho_k\rho(\mathrm{G})(V_1 \cap W) = \rho_k\rho_{V_1}(\mathrm{G})(V_1 \cap W) \subset W_1$. Então, $\rho(\mathrm{G}) \subset S_{W_1}$. □

Dito de outra forma, o corolário anterior nos diz que, se para todo k, não existe cone pontual e gerador em V_1 invariante por $\rho_k\rho_{V_1}(\mathrm{G})$, então, para todo k, não existe cone pontual em $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ invariante por $\rho_k\rho(\mathrm{G})$. Portanto, não existe semigrupo conexo $S \subsetneq \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ com interior não vazio tal que $\rho(\mathrm{G}) \subset S$.

Com isto, sobre a existência de semigrupos contendo $\rho(G)$, temos a seguinte

Proposição 65 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples real euclidiana e $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ uma representação irredutível com peso máximo λ tal que $\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$. Suponha que a representação principal $\rho_k\rho_{V_1} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_1)$ tenha peso máximo*

$$\mu_1 = n^k_{i_1}\varphi_{i_1} + \cdots + n^k_{i_{d-1}}\varphi_{d-1}$$

onde $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{d-1}\}$ é o sistema fundamental de pesos de $\mathfrak{g}$. Suponha que $\lambda_{|\mathfrak{h}_\mathfrak{k}} = 0$. Tem-se:

1. Se existe $S \subset \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ semigrupo próprio conexo com $\mathrm{int}_{\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})}S \neq \emptyset$ tal que $\rho(G) \subset S$, então $n^k_{i_j}$ é par, para todo j e para algum k.

2. Se $n^k_{i_j}$ é par, para todo j e para algum k, então existe $S \subset \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ semigrupo próprio tal que $\rho(G) \subset S$.

Demonstração: Suponha que existe $S \subset \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ semigrupo próprio tal que $\rho(G) \subset S$. Por contradição, assuma que para todo k, existe j tal que $n^k_{i_j}$ seja ímpar. Então, pelo Corolário 22, segue que para todo k, não existe cone em $W_1 \subset V_1$ que é invariante por $\rho_k\rho_{V_1}(\mathfrak{g})$. Então, pelo Corolário 23, temos que para todo k não existe cone pontual e gerador em $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ invariante por $\rho_k\rho(\mathrm{G})$. Logo, pela Proposição 64, não existe semigrupo conexo $S \subsetneq \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ com interior não vazio tal que $\rho(\mathrm{G}) \subset S$, o que é um absurdo pela nossa hipótese. Para o outro item, fixemos $k \in \{1,\ldots,n-1\}$. Suponha que para algum k e para todo j, $n^k_{i_j}$ é par. Assim, pelo Corolário 22, existe um cone $W \subset \Lambda^k\mathbb{R}^n$ que é invariante por $\rho_k\rho(\mathfrak{g})$. Portanto, $\rho(\mathrm{G}) \subset S_W$ para algum semigrupo de compressão $S_W = \{u \in \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R}) : \rho_k(u)(W) \subset W\}$. Notemos que S_W é um semigrupo próprio. De fato, se S_W não é próprio, então por definição, temos que $\rho_k(\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R}))(W) \subset W$. Como ρ_k é uma representação irredutível, isto implica que W é um cone trivial, o que é um absurdo, pois W é pontual. Logo, basta tomar S como sendo o semigrupo de compressão de W, ou seja, $S = S_W$. □

6.4 Representações de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ e cones invariantes

Nesta seção, apresentaremos uma classificação para certas representações de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ que deixam cones invariantes em um produto exterior.

Inicialmente, lembramos um resultado que foi demosntrado por Vinberg em [44] dado pelo seguinte:

Proposição 66 *Seja $\rho : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^{n+1})$ uma representação irredutível com peso máximo λ^ρ, com $n \geqslant 1$. Então, são equivalentes:*

1. n é par.

2. Existe um cone $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$ que é invariante por $\rho(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$.

Nesta seção, generalizaremos o teorema anterior, onde apresentaremos uma classificação para as representações de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ do tipo $\rho_k\rho$ que deixam cones invariantes em um produto exterior.

Começamos com o seguinte exemplo.

Exemplo 13 *Consideremos a representação irredutível*

$$\rho : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^{n+1}) \text{ tal que } \rho(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})) \subset \mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{R})$$

Então, existe uma base de $\mathbb{R}^{n+1}$ em relação à qual podemos escrever

$$\rho(H) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$$

como a matriz

$$\rho(H) = \mathrm{diag}(n, n-2, n-4, \cdots, 2-n, -n)$$

Tomemos a câmara de Weyl positiva $\mathfrak{h}^+ = \{\mathrm{diag}(a_1, a_2) \in \mathfrak{h} : a_1 > a_2 \text{ com } a_1 > 0\}$ de $\mathfrak{h}$. Para $A = a_1 H \in \mathfrak{h}^+$ com $a_1 > 0$, usando a linearidade de ρ, temos que

$$\rho(A) = \mathrm{diag}(na_1, (n-2)a_1, (n-4)a_1, \cdots, (2-n)a_1, (-n)a_1)$$

Podemos ainda escrever $\lambda_{\max} = n\varphi_1$ *em termos do peso fundamental* $\varphi_1 = \lambda_1$ *de* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. *Consideremos a representação*

$$\rho_k\ \rho : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \xrightarrow{\rho} \mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(n+1,\mathbb{R}) \xrightarrow{\rho_k} \mathfrak{gl}(\Lambda^k\mathbb{R}^{n+1})$$

com $\rho(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})) \subset \mathfrak{sl}\ (n+1,\mathbb{R})$. *Usando o Teorema 2, podemos decompor* $\Lambda^k\mathbb{R}^{n+1} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$ *em subespaços irredutíveis, e considerar as representações irredutíveis*

$$\rho_k\rho_{V_i} : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \quad \to \mathfrak{gl}(V_i)$$

com peso máximo μ_i, *de modo que* $\rho_k\rho_{V_1}$ *é a representação principal com peso máximo* μ_1. *(Veja a Definição 25). Então, fixado* $A \in \mathfrak{h}^+$, *podemos se necessário, reordenar o conjunto* $\{\mu_i(A)\}$ *de modo a obtermos* $\mu_1(A) > \mu_2(A) > \cdots > \mu_s(A)$. *Uma base de* $\Lambda^k\mathbb{R}^{n+1}$ *é dada pelos vetores* $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \ldots \wedge e_{i_{n+1}}$ *com* $i_1 < i_2 < \cdots < i_{n+1}$. *Então, na mesma ordem desta base, podemos extrair bases ordenadas adequadas para cada* V_i *de modo que a matriz de* $\rho_k\rho(A)$ *seja*

$$\rho_k\ \rho(A) = \begin{pmatrix} \rho_k\rho_{V_1}(A) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_k\rho_{V_s}(A) \end{pmatrix}$$

onde

$$\rho_k\rho_{V_1}(A) = \mathrm{diag}(\ b_{11}, \ldots, b_{1n_1})$$

e com o maior autovalor dado por

$$b_{11} = \rho_k\rho_{V_1}(A)(e_1 \wedge e_2 \ldots \wedge e_k) = \rho(A)(e_1) \wedge e_2 \ldots \wedge e_k + \cdots + e_1 \wedge e_2 \ldots \wedge \rho(A)(e_k)$$

Após alguns cálculos, em cada caso para n, k *como na seguinte tabela:*

n	k
par	$1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}+1$
par	$\frac{n}{2}+1 < k \leqslant n$
ímpar	$1 \leqslant k \leqslant \frac{n+1}{2}$
ímpar	$\frac{n+1}{2} < k \leqslant n+1$

se obtém a mesma expressão para b_{11} *dada por*

$$b_{11} = na + (n-2)a + \cdots + (n-2(k-1))a = kn - (k-1)k =$$
$$(kn-(k-1)k)\varphi_1(A), \ \text{que é o maior auto-valor } \rho_k\rho(A)$$

com $A = aH \in \mathfrak{h}^+$. Por outro lado, pelo Lema 10, temos que $\mu_1(A)$ é o maior auto-valor de $\rho_k\rho_{V_1}(A)$. Além disso, por definição $\mu_1(A)$ é o maior dos auto-valores de $\rho_k\rho(A)$, pois estamos considerando $\mu_1(A) > \cdots > \mu_s(A) > 0$ para A fixo em $\mathfrak{h}^+$. Logo, segue que $\mu_1(A) = b_{11} = (kn - (k-1)k)\varphi_1(A)$.

Assim, podemos verificar as hipóteses da Proposição 62 para a representação $\rho_k\rho_{V_1}$ que é irredutível de peso máximo μ_1. Então, obtemos o seguinte resultado de classificação das representações irredutíveis de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^{n+1}$ que deixam cones invariantes:

Teorema 11 *Como anteriormente, consideremos a representação*

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \xrightarrow{\rho} \mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(n+1,\mathbb{R}) \xrightarrow{\rho_k} \mathfrak{gl}(\Lambda^k\mathbb{R}^{n+1})$$

onde n é o maior autovalor de $\rho(H)$. Temos que

1. Se n é par ou k é par, então existe um cone $W \subset \Lambda^k\mathbb{R}^{n+1}$ que é invariante por $\rho_k\rho(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$.

2. Se k e n são ímpares, então não existe cone em $\Lambda^k\mathbb{R}^{n+1}$invariante por $\rho_k\rho(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$.

   Logo, para a representação $\rho_k\rho$ a seguinte tabela mostra a existência de cones invariantes no produto exterior $\Lambda^k\mathbb{R}^{n+1}$ conforme os casos k e n:

$\backslash$ n k	**par**	**ímpar**
par	existe	existe
ímpar	existe	não existe

Demonstração: Como anteriormente, seja μ_1 o peso máximo da representação principal $\rho_k\rho_{V_1}$. Como no exemplo anterior, temos que $\mu_1 = (kn - (k-1)k)\varphi_1$. Temos que a parte compacta $\mathfrak{h}_k$ é a subálgebra das matrizes anti-simétricas em $\mathfrak{sl}\ (2,\mathbb{R})$ e, portanto, $\mathfrak{h}_k = 0$. Então, $\mu_{1|\mathfrak{h}_k} = 0$. Um sistema simples de raízes positivo de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ tem uma única raiz dada por $\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2$. Logo,

$$2\frac{\langle\mu_1,\alpha_1\rangle}{\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle} = 2\frac{\langle(kn-(k-1)k)\varphi_1\ \ ,\alpha_1\rangle}{\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle} =$$

$$= (kn - (k-1)k)2\frac{\langle \varphi_1 \ , \alpha_1\rangle}{\langle \alpha_1, \alpha_1\rangle} = (kn - (k-1)k) = k(n+1-k)$$

Agora, observemos que, se n é par ou k é par, então k ou $(n-k+1)$ são pares e, portanto, $k(n+1-k)$ é um inteiro par positivo. Logo, em qualquer um desses casos, pela Proposição 62 temos que existe cone $W \subset V_1$ que é invariante por $\rho_k\rho(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$ e, portanto, existe cone $W \subset \Lambda^k\mathbb{R}^{n+1}$ que é invariante por $\rho_k\rho(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$. Por outro lado, se k e n são ímpares, então $k(n+1-k)$ é ímpar. Portanto, nenhum cone W em $\Lambda^k\mathbb{R}^{n+1}$ é invariante por $\rho_k\rho(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$.
□

Observemos que em particular, se ρ é uma representação irredutível e $k = 1$, então temos que $\rho_1\rho = \rho$. Como ρ é irredutível, segue que vale o resultado de Vinberg. Logo, o teorema anterior generaliza o resultado de Vinberg para as representações do tipo $\rho_k\rho$.

Bibliografia

[1] Arnold, L., Kliemann W. e Oeljeklaus E.: *Lyapunov exponents of linear stochastic systems*, in Lyapunov Exponents: Proceedings of a Workshop in Bremen (L. Arnold and V. Wihstutz, eds.), Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, vol 1186, 85-125, 1986.

[2] Braga Barros, C.J. e San Martin L.A.B.: *On the action of semigroups in fiber bundles.* Matemática Contemporânea, vol 13, 1-19, 1997.

[3] Braga Barros, C.J. e San Martin,L.A.B.: *On the number of control sets on projective spaces.* Systems & Control Letters, Elsevier, vol 29, 21-26, 1996.

[4] Braga Barros, C.J.: *On the number of control sets on the real simple Lie groups.* Journal of Lie Theory, Heldermann Verlag, vol 8, $n^{\underline{0}}$2, 393-397, 1998.

[5] Braga Barros, C.J. e Reis, R.A.: *On the number of control sets on compact homogeneous spaces.* Portugaliae Mathematica, vol 60, $n^{\underline{0}}$3, 259-371, 2003.

[6] Colonius, F. e Kliemann,W.: *Linear control semigroups acting on projective spaces.* Journal of Dynamics e Differential Equations, vol 5, 3, 495-528, 1993.

[7] Colonius, F. e Kliemann, W.: "The Dynamics of control". Birkhäuser, Boston, 2000.

[8] Colonius, F. e Kliemann, W.: *The Lyapunov spectrum of families of time-varying matrices.* Transactions of the American Mathematical Society, vol 348, $n^{\underline{0}}$ 11, 4389-4408, 1996.

[9] Conlon, L.: "Differentiable Manifolds A First Course". Birkhauser, 1993.

[10] Fulton, W. e Harris, J.: "Representation theory. A first course". Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1991.

[11] Furstenberg, H.: *A Poisson formula for semi-simples Lie groups.* Annals of Mathematics, vol 77, n$\underline{0}$ 2, 335-386, 1963.

[12] Hausner, M. e Schwartz, T.: "Lie groups; Lie algebras". Notes on mathematics and its applications.

[13] Helgason, S.: *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces.* Academic Press, New York, 1978.

[14] Hilgert, J. e Neeb K. H.: "Lie semigroups and their applications". LNM-Springer, vol 1552, 1993.

[15] Hilgert, J., Hofmann, K.H. e Lawson, J.D.: "Lie groups, convex cones, and semigroups". Clarendon Press, Oxford, 1989.

[16] Humphres, J.D.: "Reflection groups and Coxeter groups". Cambridge studies in Advanced Mathematics vol 29, 1990.

[17] Husemoller, D.: "Fibre bundles". Graduate texts in mathematics; Springer Verlag, New York Heidelberg Berlin, vol 20, 1975.

[18] Iwahori, N.: *On real irreducible representations of Lie algebras*, Nagoya Math. J., vol 14, 59-83, 1959.

[19] Jacobson, N.: "Lie algebras". Interscience. 1962.

[20] Kobayashi, S e Nomizu, K.: "Foundations of differential geometry". John Wiley & Sons, New York, 1963.

[21] Mimura, M. e Toda, H.: "Topology of Lie groups, I and II". Translations of mathematical monographs, vol 91, 1991.

[22] Mostow, G.D.: *Some new decomposition theorems for semi-simple groups.* Mem. Amer. Math. Soc., n$\underline{0}$ 14, 31-54, 1955.

[23] Onishchik, A.L. e Vinberg, E.B. : "Lie groups and algebraic groups". Springer-Verlag, 1990.

[24] Ribeiro, G., J. e San Martin, L.A.B.: *The compression semigroup of a cone is connected.* Preprint.

[25] Rocio, O.G. e San Martin, L.A.B.: *Connected components of open semigroups in semi-simple Lie groups Relatório de Pesquisa*, UNICAMP, 2002.

[26] Ruppert, W.A.F.: *On open subsemigroups of connected groups.* Semigroup Forum, vol 39, 347-362, 1989.

[27] Sagle, A. e Walde, R.: "Introduction to Lie groups and Lie algebras". Academic Press, New York, 1973.

[28] San Martin, L.A.B.: *Nonreversibility of subsemigrups of semi-simple Lie groups.* Semigroup Forum, vol 44, 376-387, 1992.

[29] San Martin, L. A. B.: *Homogeneous spaces admitting transitive semigroups.* J. of Lie Theory, vol 8, 111-128, 1998.

[30] San Martin, L. A. B e Santana, A.J.: *The homotopy type of Lie semigroups in semisimple.* Monatsh. Math., vol 136, 151-173, 2002.

[31] San Martin, L.A.B.: *Control sets and semigroups in semi-simple Lie groups.* In Semigroups in algebra, geometry and analysis. Gruyter Verlag, 1994.

[32] San Martin, L.A.B.: *On global controllability of discrete-time control systems.* Math. of Control Signals Systems vol 8, 279-297, 1995.

[33] San Martin, L.A.B.: *Invariant control sets on flag manifolds.* Mathematics of Control, Signals and Systems, vol 6, 41-61, 1993.

[34] San Martin, L.A.B. e P.A. Tonelli.: *Semigroup actions on homogeneous spaces.* Semigroup Forum vol 50, 59-88, 1995.

[35] San Martin, L.A.B.: *Order and domains of attraction of control sets in flag manifolds.* J. of Lie Theory, vol 8, 335-350, 1998.

[36] San Martin, L.A.B. e Tonelli, P. A.: *Transitive actions of semigroups in semi-simple Lie groups.* Semigroup Forum, vol 58, 142-151, 1999.

[37] San Martin, L.A.B.: *Maximal semigroups in semi-simple Lie groups.* Trans. Amer. Math. Soc., vol. 353, 5165-5184, 2001.

[38] San Martin, L.A.B.: *Nonexistence of invariant semigroups in affine symmetric spaces.* Math. Ann., vol 321, 587-600, 2001.

[39] San Martin, L.A.B.: "Tese de Doutorado". 41-61, 1993.

[40] San Martin, L.A.B.: "Álgebras de Lie". *Editora da Unicamp*, Campinas, 1999.

[41] Tonelli, P.A.: "Control sets on homogeneous spaces". Thesis. Bremen University, 1991.

[42] Varadarajan, V.S.: "Lie groups, Lie algebras and their representations". Prentice-Hall, 1974.

[43] Varadarajan,V.S. : "Harmonic analysis on real reductive groups". LNM-Springer, 576, 1977.

[44] Vinberg, E.B.: *Invariant convex cones and orderings in Lie groups*, Funct. Anal. and Appl. 14, 1-13, 1980.

[45] Wan, Chê-hsien.: *Lie algebras.* International series of monographs in pure and applied mathematics, vol 104.

[46] Warner, G.: "Harmonic analysis on semi-simple Lie groups". Springer-Verlag, 1972.