



LIDIANE DOS SANTOS MONTEIRO LIMA

**SOBRE UMA FAMÍLIA DE EDP'S DO TIPO ESCALAR ATIVO EM
ESPAÇOS CRÍTICOS DE LEBESGUE E FOURIER-BESOV-MORREY**

CAMPINAS

2014



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

LIDIANE DOS SANTOS MONTEIRO LIMA

**SOBRE UMA FAMÍLIA DE EDP'S DO TIPO ESCALAR ATIVO EM
ESPAÇOS CRÍTICOS DE LEBESGUE E FOURIER-BESOV-MORREY**

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutora em matemática.

Orientador: Lucas Catão de Freitas Ferreira

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA PELA ALUNA LIDIANE DOS SANTOS
MONTEIRO LIMA, E ORIENTADA PELO PROF. DR. LUCAS
CATÃO DE FREITAS FERREIRA.

Assinatura do Orientador

CAMPINAS

2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

L628s Lima, Lidiane dos Santos Monteiro, 1984-
Sobre uma família de EDP's do tipo escalar ativo em espaços críticos de Lebesgue e Fourier-Besov-Morrey / Lidiane dos Santos Monteiro Lima. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Lucas Catão de Freitas Ferreira.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações do tipo escalar ativo. 2. Boa colocação global. 3. Decaimento de soluções. 4. Simetria. 5. Autossimilaridade. 6. Comportamento assintótico de soluções. I. Ferreira, Lucas Catão de Freitas, 1977-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: On a family of active scalar PDEs in Lebesgue and Fourier-Besov-Morrey critical spaces

Palavras-chave em inglês:

Active scalar equations

Global well-posedness

Decay of solutions

Symmetry

Self-similarity

Asymptotic behavior of solutions

Área de concentração: Matemática

Titulação: Doutora em Matemática

Banca examinadora:

Lucas Catão de Freitas Ferreira [Orientador]

Marcelo Martins dos Santos

Mahendra Prasad Panthee

Marcelo Fernandes de Almeida

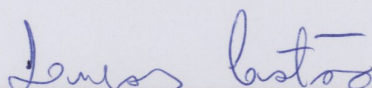
Juliana Conceição Precioso Pereira

Data de defesa: 27-02-2014

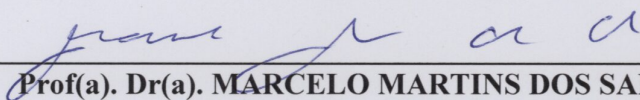
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 27 de fevereiro de 2014 e aprovada

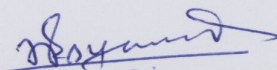
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



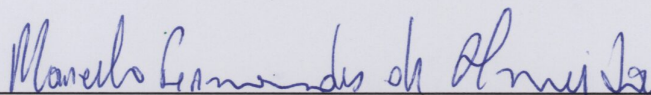
Prof(a). Dr(a). LUCAS CATÃO DE FREITAS FERREIRA



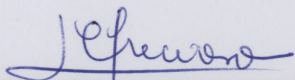
Prof(a). Dr(a). MARCELO MARTINS DOS SANTOS



Prof(a). Dr(a). MAHENDRA PRASAD PANTHEE



Prof(a). Dr(a). MARCELO FERNANDES DE ALMEIDA



Prof(a). Dr(a). JULIANA CONCEIÇÃO PRECIOSO PEREIRA

Abstract

In this thesis we consider a family of dissipative active scalar equations whose velocity fields are coupled by means of multiplier operators that can be of high-order. In the first part, we prove global well-posedness, decay of L^p 's norms and some symmetry properties of solutions for initial data in the critical Lebesgue space and without smallness condition. In the second part, we introduce the Fourier-Besov-Morrey spaces, which seems to be new in the analysis of PDEs in order to find self-similar solutions and to consider a larger class of couplings and initial data. Smallness conditions on the norm of the space are assumed for these results. Furthermore, we show an asymptotic stability result and obtain a class of asymptotically self-similar solutions.

Keywords: Active scalar equations, global well-posedness, decay of solutions, symmetry, self-similarity, asymptotic behavior of solutions.

Resumo

Nesta tese consideramos uma família de EDPs dissipativas do tipo escalar ativo cujos campos velocidades são acoplados aos escalares através de operadores multiplicadores de Fourier que podem ser de alta ordem. Na primeira parte, provamos boa-colocação global, decaimento de normas L^p , e algumas propriedades de simetria, para dados iniciais no espaço de Lebesgue crítico e sem assumir condição de pequenez. Na segunda parte, introduzimos os espaços de Fourier-Besov-Morrey, o qual parece ser novo na análise de EDPs, com o objetivo de encontrar soluções auto-similares e considerar uma classe maior de acoplamentos e dados iniciais. Condições de pequenez na norma do espaço são assumidas para estes resultados. Além disso, mostramos um resultado de estabilidade assintótica e obtemos uma classe de soluções assintoticamente auto-similares.

Palavras-chave: Equações do tipo escalar ativo, boa colocação global, decaimento de soluções, simetria, auto-similaridade, comportamento assintótico de soluções.

Sumário

Dedicatória	xi
Agradecimentos	xv
Introdução	1
0.1 Existência Global no Espaço Crítico $L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$	5
0.2 Auto-similaridade no Espaço de Fourier-Besov-Morrey	7
0.3 Organização da tese	8
1 Preliminares	9
1.1 Decomposição de Littlewood-Paley e Paraproduto de Bony	9
1.2 Espaços Homogêneos	12
1.2.1 Espaços de Besov Homogêneos	12
1.2.2 Espaços de Sobolev Homogêneos	14
1.2.3 Espaços de Morrey Homogêneos	19
1.3 Transformadas de Hilbert e de Riesz	23
1.3.1 Transformada de Hilbert	23
1.3.2 Transformada de Riesz	25
1.4 Um Lema de Ponto Fixo e a Função Beta	26
2 Soluções Globais e Decaimento em $L^p(\mathbb{R}^n)$	29
2.1 Soluções Brandas	30
2.2 Resultados	31
2.3 Estimativas	33
2.3.1 Estimativas Lineares	33
2.3.2 Estimativas Bilineares	36

2.4	Demonstração dos Resultados	39
2.4.1	Boa Colocação Local no Tempo	39
2.4.2	Suavidade Local e Princípio do Máximo	48
2.4.3	Demonstração do Teorema 2.2.1	52
2.4.4	Demonstração do Teorema 2.2.5	57
2.4.5	Demonstração do Teorema 2.2.7	58
3	Comportamento Assintótico para o Caso $0 \leq \beta \leq 1$	61
3.1	Comportamento Assintótico da Parte Linear	62
3.2	Decaimento das Soluções e suas Derivadas	63
3.3	Demonstração do Teorema 3.0.1	68
4	Soluções Auto-Similares	71
4.1	Espaços de Fourier-Besov-Morrey e Soluções Auto-similares	72
4.1.1	Espaços de Fourier-Besov-Morrey	72
4.1.2	Soluções Auto-Similares	76
4.1.3	Formulação Funcional	78
4.2	Resultados	78
4.3	Estimativas	80
4.4	Demonstração dos Resultados	84
4.4.1	Demonstração do Teorema 4.2.1	84
4.4.2	Demonstração do Teorema 4.2.4	89
	Referências	93
	Índice Remissivo	99

Em memória de Natalino Monteiro

“Suba o primeiro degrau com fé.
Não é necessário que você veja toda a escada.
Apenas dê o primeiro passo.”

Martin Luther King

Agradecimentos

Obrigada meu Senhor e meu Deus pela vossa presença em minha vida. Por me fazer enxergar que sem ti nada sou. Mesmo sendo uma pobre pecadora sempre tem sido grande o vosso amor e vossas bênçãos para comigo. Não teria chegado até aqui se não fosse vosso carinho e vossa bênção. Obrigada pelas pessoas boas que tem colocado em meu caminho.

Agradeço a minha família; meus irmãos, irmãs, primos, primas, tios e tias pelo apoio e pela torcida para que tudo desse certo. Tenho sempre vocês guardados em meu coração. Em especial agradeço minha mãe, Neuraci dos Santos e meus avós Natalino Monteiro e Maria José dos Santos pelo amor incondicional que sempre tiveram por mim e por sempre acreditarem na minha capacidade.

É com muita alegria que agradeço meu noivo Luciano Pereira de Sousa pelo amor, carinho, compreensão e por todo apoio durante estes sete anos de namoro. Sei que passamos por momentos difíceis, mas o nosso amor e a nossa união nos fizeram superar todas as dificuldades.

Agradeço a todos os professores e funcionários do Imecc. Em especial, agradeço ao Professor Doutor Lucas Catão de Freitas Ferreira pela orientação, pelos conselhos, pelo compartilhamento matemático e por suas incontáveis contribuições na construção desta tese, da minha formação pessoal e profissional.

Gostaria de expressar minha profunda gratidão a minha amiga Adriana Araujo Cintra pela amizade, pelo ombro amigo, pelo apoio nos momentos bons e ruins. Saiba que é para mim uma irmã que Deus me permitiu escolher.

Agradeço a todos os meus amigos e colegas do Imecc, em especial ao grupo de EDP; Cláudia Mesquita, Débora Albanex, Thiago de Andrade, Maicon José Benvenuto, Alysson T. R. da Cunha, Rafael de Abreu e aos amigos Ana Paula, Manuela e Ailton Ribeiro pelos momentos de alegria e pela amizade.

Sou grata também a todos os meus amigos de Goiânia; Núbia e família, meus vizinhos do Residencial Center Ville, as funcionárias do salão da Thiana, a minha madrinha Doraci Maria e

suas irmãs e a todos aqueles que contribuíram de forma direta e indireta para a realização dessa etapa de minha vida.

Por fim, agradeço o apoio financeiro do CNPq e da Capes.

Lista de Símbolos

PM^a pg. 8

$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ Espaço de Schwartz em \mathbb{R}^n , pg. 9.

$\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ Espaço das distribuições temperadas em \mathbb{R}^n , pg. 9.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ Par de dualidade entre \mathcal{S}' e \mathcal{S} , pg. 9.

Δ_j j -ésimo bloco diádico, pg. 10.

S_j j -ésimo operador soma parcial, pg. 10.

\mathcal{P} Conjunto de todos os polinômios de n variáveis reais com coeficientes complexos, pg. 11.

T_f Operador paraproduto, pg. 11.

$R(f, g)$ Operador resto de f e g , pg. 11.

$\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ Espaço de Besov homogêneo em \mathbb{R}^n , pg. 12.

δ_λ Operador dilatação por λ , pg. 13.

$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ Operador Laplaciano fracionário, pg. 14.

I_s Potencial de Riesz, pg. 15.

$\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$ Espaço de Sobolev homogêneo em \mathbb{R}^n , pg. 15.

$B_R(x_0)$ Bola de centro em x_0 e raio $R > 0$ em \mathbb{R}^n , pg. 19.

$M_{p,\mu}(\mathbb{R}^n)$ Espaço de Morrey homogêneo em \mathbb{R}^n , pg. 19.

\mathbb{S}^{n-1} Esfera unitária em \mathbb{R}^n , pg. 21.

- ω_n Área da superfície da esfera unitária \mathbb{S}^{n-1} em \mathbb{R}^n , pg. 21.
- \mathcal{H} Transformada de Hilbert, pg. 23.
- sgn*** Função sinal, pg. 23.
- \mathcal{T} Operador integral singular, pg. 24.
- \mathcal{K} Núcleo singular de Calderon-Zygmund, pg. 24.
- $\Gamma(\cdot)$ Função gama, pg. 25.
- \mathcal{R}_j j -ésima transformada de Riesz, pg. 25.
- \mathcal{B} Função Beta, pg. 27.
- $BC(I; X)$ Espaço das funções contínuas e limitadas do intervalo I no espaço de Banach X , pg. 31.
- δ_0 Delta de Dirac centrado em 0, pg. 62.
- $\mathcal{FN}_{p,\mu,q}^s(\mathbb{R}^n)$ Espaço de Fourier-Besov-Morrey homogêneo em \mathbb{R}^n , pg. 72.

Introdução

Nesta tese consideramos o problema de valor inicial para uma família de equações dissipativas do tipo escalar ativo com campos velocidades acoplados aos escalares através de operadores multiplicadores de Fourier. Os tipos de acoplamentos incluem casos de EDPs com estrutura de fluxo hamiltoniano ou gradientes.

Esta família foi primeiro estudada em [14] (veja também [16]) e é dada por

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \kappa (-\Delta)^\gamma \theta + \nabla_x \cdot (u\theta) = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (0.0.1)$$

onde, $n \geq 1$, $\gamma > 1/2$, $\kappa \geq 0$ e $(-\Delta)^\gamma$ denota o operador laplaciano fracionário (veja Definição 1.2.4). O campo velocidade u é acoplado ao escalar θ através do vetor de operadores multiplicadores de Fourier

$$u = P[\theta] = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (0.0.2)$$

onde

$$u_k = \sum_{j=1}^n a_{jk} \mathcal{R}_j \Lambda^{-1} P_j[\theta], \quad \text{para } 1 \leq k \leq n, \quad (0.0.3)$$

$\Lambda = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}$, $\mathcal{R}_j = -\partial_j (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$ é a j -ésima transformada de Riesz, a_{jk} 's são constantes e

$$\widehat{P_j[\theta]}(\xi) = P_j(\xi) \widehat{\theta}(\xi). \quad (0.0.4)$$

No caso $n = 1$, os operadores \mathcal{R}_j 's devem ser entendidos como a transformada de Hilbert $\mathcal{H}(u)$ (veja a Seção 1.3 para mais detalhes sobre as transformadas de Riesz e Hilbert). Estes operadores são do tipo multiplicador de Fourier de ordem zero.

Por (0.0.3) e (0.0.4), podemos escrever

$$\widehat{u}(\xi) = P(\xi) \widehat{\theta}(\xi) \quad (0.0.5)$$

onde $P(\xi) = (\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n)$ com

$$\tilde{P}_k(\xi) = \sum_{j=1}^n a_{jk} \frac{i\xi_j}{|\xi|^2} P_j(\xi), \quad 1 \leq k \leq n.$$

Assumindo que os símbolos P_j 's são homogêneos de grau β , (0.0.1) tem a seguinte relação de escala (veja Seção 4.1.2)

$$\theta \rightarrow \theta_\lambda = \lambda^{2\gamma-\beta} \theta(\lambda x, \lambda^{2\gamma} t), \quad \text{para todo } \lambda > 0, \quad (0.0.6)$$

a qual induz a relação de escala para a condição inicial

$$\theta_0 \rightarrow \lambda^{2\gamma-\beta} \theta_0(\lambda x). \quad (0.0.7)$$

Mesmo quando os P_j 's não são homogêneos, a aplicação (0.0.6) funciona bem como uma relação de escala intrínseca para (0.0.1)-(0.0.2), no sentido em que ela é útil para identificar espaços funcionais adequados para a existência global e fornece uma noção de criticalidade. De fato, temos três casos básicos: subcrítico ($\beta < 2\gamma$), crítico ($\beta = 2\gamma$), e supercrítico ($\beta > 2\gamma$), os quais correspondem ao sinal e a nulidade do expoente em (0.0.7).

Assuma que P_j 's são funções mensuráveis tais que (0.0.4) faz sentido de um subconjunto de \mathcal{S}' para \mathcal{S}' e

$$|P_j(\xi)| \leq C|\xi|^\beta, \quad \text{q.t.p em } \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (0.0.8)$$

para todo $1 \leq j \leq n$, onde $\beta \in [0, n+1)$ com $\beta < 2\gamma$. Por (0.0.5) vemos que

$$|\hat{u}(\xi)| \leq C|\xi|^{\beta-1} |\hat{\theta}(\xi)|. \quad (0.0.9)$$

Nas seções 0.1 e 0.2, damos condições sobre os símbolos P_j 's para que (0.0.4) faça sentido de um subconjunto de \mathcal{S}' para \mathcal{S}' .

Em vista de (0.0.9), os acoplamentos com $\beta > 1$ serão chamados aqui de acoplamentos de ordem positiva. Eles se comportam moralmente como uma derivada positiva de ordem $(\beta - 1)$, e produzem novas dificuldades técnicas em comparação com a equação quase-geostrófica (SQG) ($\beta = 1$) e com o caso $\beta < 1$; por exemplo, no contexto de H^s e L^p -teoria.

Equações do tipo escalar ativo aparecem em um número grande de modelos matemáticos e físicos. Por exemplo, no caso $n = 1$ temos a equação de Burgers ($\beta = 1$ e $u = \theta$) e a equação de transporte

$$\theta_t + (\mathcal{H}(\theta)\theta)_x + \kappa(-\Delta)^\gamma \theta = 0 \quad (0.0.10)$$

onde $\beta = 1$ e $u = \mathcal{H}(\theta)$ é a transformada de Hilbert. Para a equação de Burgers referimos o leitor aos trabalhos [24] e [43] para resultados de *blow-up*, existência global e regularidade de soluções em espaços de Lebesgue ou em alguns espaços de funções suaves. Resultados de existência global, auto-similaridade (veja Definição 4.1.4), regularidade local e comportamento assintótico para (0.0.10) tem sido obtidos por diversos autores, veja por exemplo [10],[11],[12],[13],[52] e suas referências. Substituindo $\mathcal{H}(\theta)\theta$ por $\theta\Lambda^\alpha\mathcal{H}(\theta)$ em (0.0.10), obtemos a equação

$$\theta_t + (\theta\Lambda^\alpha\mathcal{H}(\theta))_x + \kappa(-\Delta)^\gamma\theta = 0 \quad (0.0.11)$$

que tem a forma (0.0.1)-(0.0.2) com $\beta = \alpha + 1$ e $u = \Lambda^\alpha\mathcal{H}(\theta)$. As equações (0.0.10) e (0.0.11) estão relacionadas a modelos de dinâmica de deslocamento em cristais com θ positivo representando a densidade do número de fraturas por unidade de comprimento (veja, por exemplo, [23, 38]). Comportamento assintótico auto-similar para soluções de (0.0.11) com $u_0 \in BUC(\mathbb{R})$ e $\kappa = 0$ foi provado em [4] mostrando a importância das soluções auto-similares na descrição dos assintóticos deste e de modelos relacionados (veja também [38]).

No caso bidimensional, temos a equação da vorticidade $u = \nabla^\perp(-\Delta)^{-1}\theta$ e a equação SQG $u = \nabla^\perp((\Delta)^{-\frac{1}{2}}\theta)$. O primeiro é um modelo de dinâmica dos fluidos muito famoso, enquanto o segundo tem sido objeto de muitos trabalhos sobre existência, unicidade, regularidade e comportamento assintótico de soluções; seja no caso não-viscoso ($\kappa = 0$) ou nos casos subcrítico ($1/2 < \gamma < 1$), crítico ($\gamma = 1/2$) e supercrítico ($\gamma \in (0, 1/2)$), veja por exemplo [6],[9],[17],[18],[19],[21],[25],[39],[42],[43],[44],[53],[56], e suas referências.

No caso tridimensional, um exemplo de equação dissipativa do tipo escalar ativo aparece em modelos magneto-geostróficos na situação de um fluido eletricamente carregado e com alta velocidade de rotação. Tal equação é dada por

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + u\nabla_x\theta + (-\Delta)^\gamma\theta = 0, \text{ com } \operatorname{div}(u) = 0 \text{ e } u_j = \sum_{k=1}^3 \partial_k T_{kj}\theta, \quad (0.0.12)$$

onde $(T_{kj})_{3 \times 3}$ é uma matriz de operadores do tipo Calderón-Zygmund (veja [35],[51] para mais detalhes). Note que (0.0.1)-(0.0.2) cobre (0.0.12) com $n = 3$ e $\beta = 2$. De fato, (0.0.12) é uma generalização do caso físico $\gamma = 1$ (que é crítico) para incluir uma dissipação fracionária. Uma característica importante deste modelo é que a presença do campo magnético subjacente a dinâmica, gera uma estrutura não-isotrópica para o símbolo de T_{kj} , e portanto, os símbolos P_j 's em (0.0.3) associados com (0.0.12) não são radialmente simétricos (veja [32] para uma expressão explícita de T_{kj}). Existência global de soluções suaves com $\gamma = 1$ e dado inicial em L^2 podem ser encontrados em [32], onde os autores usaram técnicas de Giorgi para mostrar que soluções fracas são

Hölder contínuas. Veja também [33],[34] e suas referências para mais resultados de boa-colocação, regularidade e estabilidade em um L^2 -framework ou em alguns espaços de funções suaves.

A dinâmica das soluções naturalmente depende do acoplamento entre o campo velocidade e o escalar ativo. Assim, a EDP (0.0.1) permite analisar vários tipos de dinâmicas variando o símbolo P_j . Os resultados de [14] consideram $P[\cdot]$ em (0.0.2) tais que $P_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, P_j é radialmente simétrico, não decrescente em $|\xi|$, e satisfazendo um certo tipo de condição de Hörmander-Mikhlin. Nesta referência, os autores mostraram existência de soluções globais em $L^\infty((0, \infty); Y)$, onde $Y = L^1 \cap L^\infty \cap B_{q, \infty}^{s, M}$ com $s > 1$ e $2 \leq q \leq \infty$, por meio de estimativas a priori em espaços de Besov e um esquema de aproximações sucessivas. O espaço $B_{q, \infty}^{s, M}$ é uma extensão do espaço de Besov clássico $B_{q, \infty}^s$ cuja norma cresce dependendo do crescimento de M . Os resultados de [14] podem ser aplicados de maneira unificada para várias equações de escalares ativos. Por exemplo, para a equação quase-geostrófica generalizada (GSQG) com acoplamento em (0.0.1) dado por

$$u = \nabla^\perp(\Lambda^{\beta-2}\theta) = \Lambda^{\beta-1}(-\mathcal{R}_2\theta, \mathcal{R}_1\theta), \quad (0.0.13)$$

onde $0 \leq \beta < 2\gamma < 1$ e $n = 2$. Variando o parâmetro β de 0 a 1, esta equação interpola a equação da vorticidade em dimensão dois e a equação SQG, e é chamada de quase-geostrófica modificada no caso crítico $\beta = 2\gamma$ (caso crítico). A equação (0.0.1) com (0.0.13) tem sido estudada por exemplo em [16],[20],[43],[48],[49],[50] onde o leitor pode encontrar resultados de existência e regularidade com condição inicial no espaço de Sobolev H^m para $m \geq 0$. As condições $\kappa > 0$, $\beta \in [0, 1]$ e $\beta = 2\gamma$ foram assumidas em [20],[43],[48],[50], e as condições $\kappa > 0$ e $1 \leq \beta < 2\gamma < 2$ em [49]. Também, boa-colocação local de soluções em H^m para (0.0.1)-(0.0.13) foi provada no caso $\kappa = 0$, para $\beta \in [1, 2]$ e $m \geq 4$.

Outra aplicação dos resultados de [14] é para operadores do tipo logaritmo, tais como

$$P_j(\xi) = |\xi|^\alpha (\log(1 + |\xi|^2))^\chi, \quad \chi > 0, \quad (0.0.14)$$

$$P_j(\xi) = |\xi|^\alpha (\log(1 + \log(1 + |\xi|^2)))^\chi, \quad \chi > 0. \quad (0.0.15)$$

Em [54], o autor apresentou evidências numéricas que, mesmo para $\kappa = 0$, a EDP (0.0.1) com campos de velocidades

$$u = \nabla^\perp(\log(I - \Delta))^{\chi}\theta, \quad \chi > 0, \quad (0.0.16)$$

pode ser globalmente bem-colocada. Como um primeiro passo para a prova desta conjectura, [16] provou boa-colocação local de soluções em H^4 para (0.0.1)-(0.0.16) com $\gamma > 0$. No caso $\alpha = 0$ e $n = 2$, (0.0.14) e (0.0.15) correspondem a *log* e *log-log* Navier-Stokes, respectivamente; os quais são modelos intermediários entre a equação da vorticidade bidimensional e a equação SQG.

Considerando o caso $\kappa = 0$, ou seja, as equações *log* e *log-log* Euler, os autores de [15] provaram resultados de existência global para $0 \leq \chi \leq 1$ e condição inicial $\theta_0 \in L^1 \cap L^\infty \cap B_{q,\infty}^s$, onde $s > 1$, $q > 2$ e $B_{q,\infty}^s$ é o espaço de Besov não homogêneo.

Alguns símbolos com crescimento logaritmo também fornecem exemplos de equações do tipo escalar ativo que são ligeiramente supercríticos e ainda assim comportam-se bem do ponto de vista de existência global de soluções suaves. Baseado no método de [44], que emprega módulo de continuidade, o trabalho [22] mostrou existência e unicidade de soluções globais suaves para (0.0.1) com $n = 2$, $\gamma = 1/2$, e o acoplamento

$$u = \nabla^\perp \Lambda^{-1} m(\Lambda) \theta, \quad (0.0.17)$$

onde m é uma função suave, radial, não-decrescente, tal que $m(\xi) \geq 1$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^2$. Os autores de [22] também assumiram um tipo de condição de Hörmander-Mikhlin e uma hipótese de crescimento

$$\frac{m(\xi)}{\log \log |\xi|} \rightarrow 0 \text{ quando } |\xi| \rightarrow \infty. \quad (0.0.18)$$

Em um certo sentido, o acoplamento (0.0.17) é crítico na origem e supercrítico no infinito, ao menos por um fator log-log.

0.1 Existência Global no Espaço Crítico $L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$

Um dos nossos objetivos nesta tese é provar boa-colocação global no tempo para o problema (0.0.1)-(0.0.2) no espaço crítico $L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ para $n \geq 2$ e no caso subcrítico $0 \leq \beta < 2\gamma$. Nossos resultados são provados sem assumir condição de pequenez na condição inicial. O caso $1 \leq \beta < 2\gamma$ é tratado no Teorema 2.2.1, enquanto o caso $0 \leq \beta < 1 < 2\gamma$ é tratado na Observação 2.2.6.

O espaço $L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ é crítico no sentido que sua norma é invariante pelo *scaling* (0.0.7), isto é, $\|\theta_\lambda\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} = \|\theta\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}}$, onde $\theta = \theta(x, t)$ é uma solução para o problema (0.0.1)-(0.0.2), e θ_λ é definida como em (0.0.6). Assumimos que o campo velocidade é divergente livre, ou seja,

$$\nabla \cdot u = 0$$

e também que os símbolos $P_j(\xi)$ em (0.0.4) pertencem a $C^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ e

$$\left| \frac{\partial^\alpha P_j}{\partial \xi^\alpha}(\xi) \right| \leq C |\xi|^{\beta-|\alpha|}, \quad (0.1.1)$$

para todo $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$, $|\alpha| \leq [\frac{n}{2}] + 1$ e $\xi \neq 0$. A condição (0.1.1) também é uma do tipo Hörmander-Mikhlin. Mesmo para um dado singular $\theta_0 \in L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ (e.g. $\theta_0 \notin C(\mathbb{R}^n)$), a solução

global $\theta \in BC([0, \infty); L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n))$ é instantaneamente suavizada (pertence a C^∞ para $t > 0$) e verifica (0.0.1)-(0.0.2) no sentido clássico. Além disso, mostramos algumas propriedades de decaimentos das L^p -normas das soluções (veja Teorema 2.2.1). Mais precisamente, para $\frac{n}{2\gamma-\beta} \leq q \leq \infty$ e $\theta_0 \in L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$, obtemos o decaimento polinomial

$$\|\theta(\cdot, t)\|_{L^q} \leq Ct^{-(\frac{2\gamma-\beta}{2\gamma} - \frac{n}{2\gamma q})}, \text{ para todo } t > 0. \quad (0.1.2)$$

Assumindo ainda que $\theta_0 \in L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, provamos que a correspondente solução θ pertence a $BC([0, \infty); L^1(\mathbb{R}^n))$ e melhoramos o decaimento da estimativa (0.1.2) para

$$\|\theta(\cdot, t)\|_{L^q} \leq Ct^{-(\frac{2\gamma-\beta}{2\gamma} - \frac{n}{2\gamma q}) - (\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1)}, \text{ para todo } t > 0, \quad (0.1.3)$$

onde $1 \leq q \leq \infty$.

Para o caso $0 \leq \beta \leq 1$, analisamos o comportamento da solução no infinito e mostramos que a solução da parte linear do problema (0.0.1)-(0.0.2) determina o comportamento assintótico da solução θ quando $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ (veja Teorema 3.0.1). Também, obtemos estimativas de decaimento e analisamos o comportamento assintótico para as derivadas da solução de (0.0.1)-(0.0.2).

Tecnicamente falando, para mostrar existência de soluções, seguimos algumas ideias contidas em [9] usando normas do tipo Kato, argumentos de *scaling*, princípio do máximo em L^q , e argumentos do tipo parabólico de Giorgi-Nash-Moser. Contudo, para o caso de operadores de alta ordem, ou seja, $\beta > 1$, a EDP (0.0.1)-(0.0.2) é mais difícil de ser manuseada que SQG a qual foi considerada em [9]. Por exemplo, como $P[\cdot]$ não é contínuo em L^p para $\beta > 1$, precisamos usar uma norma auxiliar do tipo Kato baseada nos espaços de Sobolev homogêneo \dot{H}_p^s (veja Definição 1.2.8) com $p > \frac{n}{2\gamma-\beta}$ para controlar o termo não-linear em (0.0.1)-(0.0.2). Assim, diferentemente para SQG, normas de Sobolev desempenham um papel crucial para a existência local e para a extensão de soluções de (0.0.1)-(0.0.2) com $\beta > 1$ e dado inicial nos espaços de Lebesgue. O caso $0 \leq \beta < 2\gamma$ com $\beta \leq 1$ não requer o uso de normas tipo Kato baseadas em espaços de Sobolev homogêneos (veja Observação 2.2.6).

Devido a estrutura de transporte de (0.0.1), é natural se perguntar sobre simetrias das soluções, quando temos alguma simetria para os símbolos $P_j(\xi)$ e o dado inicial θ_0 . No Teorema 2.2.7, provamos que a solução dada no Teorema 2.2.1 é radialmente simétrica, para todo $t > 0$, desde que θ_0 e $div_\xi(P(\xi))$ apresentem esta mesma propriedade. Além disso, mostramos que a solução é ímpar (resp. par) desde que $P_i(\xi)$'s e θ_0 sejam ímpares (resp. pares). Provamos também, resultados de não simetria e de não paridade para soluções do problema (0.0.1)-(0.0.2).

Graças a inclusão $L^1 \cap L^\infty \subset L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}$, nossa classe de dados iniciais é maior que a de [14], e podemos considerar dados fora do espaço funcional L^2 . Em comparação com [14], alguns novos símbolos $P_j(\xi)$ são considerados aqui; por exemplo, símbolos não-radialmente simétricos. Finalmente, observamos que nossos resultados cobrem os acoplamentos (0.0.13), (0.0.14) (0.0.15) e (0.0.16). Por exemplo, (0.1.1) é claramente satisfeita por (0.0.13), e se $\beta \in [1, 2]$ e $2\beta - 1 < 2\gamma < \min\{2 + \frac{2\beta}{3}, 3\}$ então as condições do Teorema 2.2.1 são verificadas. Além disso, (0.0.16) satisfaz (0.1.1) com $\beta = 1 + \varepsilon$, para qualquer $\varepsilon > 0$, e temos as condições do Teorema 2.2.1 quando $\frac{1}{2} < \gamma < \frac{4}{3}$ e $0 < \varepsilon < \gamma - \frac{1}{2}$. Analogamente, para (0.0.14) e (0.0.15) com $\chi > 0$.

Os principais resultados desta seção são o conteúdo do artigo preprint [30].

0.2 Auto-similaridade no Espaço de Fourier-Besov-Morrey

Espaços funcionais baseados na transformada de Fourier permitem uma forma elegante de manusear EDPs e podem revelar aspectos matemáticos e físicos relacionados a frequências altas e baixas.

Nesta tese, consideramos um espaço funcional baseado na transformada de Fourier no qual a teoria de existência funciona de uma forma unificada, tanto para acoplamentos de baixa ordem ($\beta < 1$) quanto para de ordem positiva.

Seja \mathcal{A} o conjunto de todas as distribuições $f \in \mathcal{S}'$ tal que $\hat{f}|_{U \in \mathcal{D}'}$ é uma medida de Radon complexa para todo aberto limitado U , e a variação total $|\hat{f}|$ (estendida para \mathbb{R}^n) é uma medida temperada, ou seja, $\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^{-N}) d|\hat{f}| < \infty$, para todo $N \geq 0$. Assumimos que os símbolos $P_j(\xi)$ são funções mensuráveis satisfazendo (0.0.8) (note que neste caso, $P_j[\cdot]$ faz sentido de \mathcal{A} para \mathcal{S}') e provamos resultados de boa colocação global e estabilidade assintótica para (0.0.1)-(0.0.2) com um dado inicial pequeno na norma do espaço de Fourier-Besov-Morrey $\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s$ (veja (4.1.1) para a definição), onde $s = n - \frac{n-\mu}{p} - (2\gamma - \beta)$, $\frac{n-\mu}{n+\beta+1-4\gamma} < p \leq \infty$, $0 \leq \mu < n$, $\gamma \neq 1/2$ e $0 \leq \beta < 2\gamma < \frac{n+\beta+1}{2}$ (veja Teorema 4.2.1). Nossos resultados permitem considerar alguns dados iniciais grandes em H^s e L^p (veja Observação 4.2.3), e funções homogêneas de grau $-(2\gamma - \beta)$. De fato, na escala dos espaços $\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s$, a última propriedade ocorre somente quando $s = n - \frac{n-\mu}{p} - (2\gamma - \beta)$. Assim, obtemos que a solução é auto-similar, quando os símbolos P_j 's são homogêneos de grau β e θ_0 é homogênea de grau $-(2\gamma - \beta)$. Além disso, analisamos a estabilidade assintótica das soluções e obtemos uma classe de soluções assintoticamente auto-similares quando $t \rightarrow \infty$ (veja Teorema 4.2.4 e a Observação 4.2.5).

Um espaço naturalmente relacionado a $\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s$ é o espaço de Fourier-Besov $\mathcal{FB}_{p,\infty}^s$ que foi

introduzido por Konieczny-Yoneda [45] com o intuito de estudar o sistema de Corioles-Navier-Stokes em \mathbb{R}^3 com $s = 1 - \frac{3}{p}$ e $p > 3$. Inspirado por [45], nos introduzimos o espaço $\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s$, que é maior que $\mathcal{FB}_{p,\infty}^s$ (quando os dois tem a mesma relação de escala), e parece ser novo na análise de EDPs. Em particular, o espaço $\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s$ pode ser usado para obter um novo e maior espaço onde o sistema de Corioles-Navier-Stokes é solúvel uniformemente com respeito a velocidade angular. Veja também [7] para uma análise do sistema de Navier-Stokes nos espaços PM^{n-1} , o qual também é um subespaço de $\mathcal{FB}_{p,\infty}^s$ baseado na transformada de Fourier.

Em comparação com a literatura atual, obtemos soluções auto-similares e resultados de comportamento assintótico em um novo espaço funcional (que contém funções fora de L^2) por meio de uma abordagem baseada na transformada de Fourier. Estes resultados podem ser aplicados de uma forma unificada para os acoplamentos mencionados acima no intervalo subcrítico $\beta < 2\gamma$, exceto (0.0.17), pois $m(0) \neq 0$. Nossas condições cobrem símbolos $P_j \notin C(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, e não-radialmente simétricos como são os símbolos da equação magneto-geostrófica (0.0.12).

Os principais resultados desta seção são o conteúdo do artigo preprint [29].

0.3 Organização da tese

Esta tese está organizada em quatro capítulos. No Capítulo 1 relembramos alguns resultados e definições que serão usados neste trabalho. No Capítulo 2 estão enunciados e demonstrados nossos resultados de boa-colocação, decaimento e simetria de soluções para o problema (0.0.1)-(0.0.2) com dado inicial em $L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ e no caso $\beta \geq 1$. Para uma melhor organização, preferimos apresentar os resultados de comportamento assintótico para o caso $0 \leq \beta \leq 1$ e $\theta_0 \in L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ no capítulo subsequente (isto é, Capítulo 3).

Os resultados nos espaços de Fourier-Besov-Morrey, bem como sua definição, estão enunciados e demonstrados no Capítulo 4.

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é relembrar algumas definições e resultados preliminares utilizados nesta tese. Aqui, relembramos as definições e principais propriedades das versões homogêneas dos espaços de Besov, Sobolev e dos espaços de Morrey. Também relembramos a decomposição de Littlewood-Paley e fatos sobre as transformadas de Riesz e de Hilbert.

Nesta tese $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ denotam o espaço de Schwartz e o espaço das distribuições temperadas, respectivamente. O par de dualidade entre \mathcal{S}' e \mathcal{S} será denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Como usual, se $f \in \mathcal{S}'$ então a transformada de Fourier de f é definida por

$$\langle \hat{f}, \phi \rangle = \langle f, \hat{\phi} \rangle, \text{ para toda } \phi \in \mathcal{S}.$$

Em particular, se $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'$ então \hat{f} coincide com $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(\xi) d\xi$.

1.1 Decomposição de Littlewood-Paley e Paraproduto de Bony

Nesta seção, relembramos a decomposição de Littlewood-Paley e o paraproduto de Bony, os quais serão ferramentas úteis para o estudo do problema (0.0.1)-(0.0.2) nos espaços de Fourier-Besov-Morrey (veja Capítulo 4).

Seja $\varphi \in \mathcal{S}$ uma função radialmente simétrica tal que

$$\text{supp } \varphi \subset \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n; \frac{3}{4} \leq |\xi| \leq \frac{8}{3} \right\} \quad (1.1.1)$$

e satisfazendo

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi(2^{-j}\xi) = 1 \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad (1.1.2)$$

Considere a família $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ definida por $\varphi_j(\xi) = \varphi(2^{-j}\xi)$. Dado $j \in \mathbb{Z}$, o j -ésimo bloco diádico Δ_j e o operador soma parcial S_j são definidos, respectivamente, por

$$\Delta_j f(x) = \left(\varphi_j(\xi) \hat{f}(\xi) \right)^\vee(x) \quad (1.1.3)$$

e

$$S_j f(x) = \sum_{k \leq j-1} \Delta_k f(x). \quad (1.1.4)$$

Em [2, pg. 59], o autor mostra a existência de funções $\varphi \in \mathcal{S}$ satisfazendo as condições (1.1.1) e (1.1.2).

Observação 1.1.1. Os operadores (1.1.3) e (1.1.4) satisfazem as seguintes identidades

$$\Delta_j \Delta_k f = 0, \text{ se } |j - k| \geq 2, \quad (1.1.5)$$

$$\Delta_j (S_{k-1} f \Delta_k g) = 0, \text{ se } |j - k| \geq 5, \quad (1.1.6)$$

para toda $f, g \in \mathcal{S}$.

Para provar (1.1.5), basta mostrar que se $|j - k| \geq 2$ então $\text{supp } \varphi_j \cap \text{supp } \varphi_k = \emptyset$. De fato, como

$$\text{supp } \varphi_l \subseteq \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n; \frac{3}{2} 2^{l-1} \leq |\xi| \leq \frac{4}{3} 2^{l+1} \right\}$$

temos que se $\text{supp } \varphi_j \cap \text{supp } \varphi_k \neq \emptyset$ e $k \geq j$ então $\frac{3}{4} 2^k \leq |\xi| \leq \frac{4}{3} 2^{j+1}$, e portanto $k - j \leq 1$, o que contradiz a hipótese de $|j - k| \geq 2$.

Observe agora que

$$\text{supp } \widehat{S_{k-1} f \Delta_k g} \subset A_k = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n; |\xi| \leq \frac{2^{k+1}}{3} \right\} + \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n; \frac{3}{2} 2^{k-1} \leq |\xi| \leq \frac{4}{3} 2^{k+1} \right\}.$$

Assim, se $A_k \cap \{ \xi \in \mathbb{R}^n; \frac{3}{2} 2^{j-1} \leq |\xi| \leq \frac{4}{3} 2^{j+1} \} \neq \emptyset$ então

$$2^j \leq \frac{4}{3} |\xi| \leq \frac{2}{9} 2^{k+2} \text{ ou } \frac{3}{2} 2^k \leq 2 |\xi| \leq \frac{1}{3} 2^{j+5},$$

o que implica que $j \leq k+2$ ou $k-j \leq 5$. Portanto, se $|j-k| \geq 5$ então $A_k \cap \{ \xi \in \mathbb{R}^n; 2^{-j} \leq |\xi| \leq 2^j \} = \emptyset$, o que prova (1.1.6).

A seguir definiremos a decomposição de Littlewood-Paley de uma distribuição temperada.

Definição 1.1.2. (Decomposição de Littlewood-Paley) A decomposição de Littlewood-Paley de $f \in \mathcal{S}'$ é dada por

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f. \quad (1.1.7)$$

A seguinte proposição, que enunciaremos sem demonstração, garante a convergência da série (1.1.7) em \mathcal{S}'/\mathcal{P} , onde \mathcal{P} denota o conjunto de todos os polinômios de n variáveis reais com coeficientes complexos.

Proposição 1.1.3. ([47, pg. 24]) Dada $f \in \mathcal{S}'$, existe um inteiro N e uma sequência de polinômios P_j , $j \in \mathbb{Z}$, com grau de P_j menor ou igual a N tal que a série $\sum_{j \in \mathbb{Z}} (\Delta_j f + P_j)$ converge para f em \mathcal{S}' .

Uma ferramenta muito útil quando se trabalha com a decomposição de Littlewood-Paley é o paraproduto de Bony.

Definição 1.1.4. (Paraproduto de Bony) Para uma fixada $f \in \mathcal{S}'$, definimos o operador paraproduto T_f por

$$T_f g = \sum_{k \in \mathbb{Z}} S_{k-1} f \Delta_k g, \text{ para toda } g \in \mathcal{S}'. \quad (1.1.8)$$

O operador resto de f e g é definido por

$$R(f, g) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Delta_k f \tilde{\Delta}_k g, \text{ com } \tilde{\Delta}_k = \sum_{|k'-k| \leq 1} \Delta_{k'} g.$$

Formalmente, podemos escrever o produto de duas distribuições temperadas f e g da seguinte maneira

$$fg = T_f g + T_g f + R(f, g). \quad (1.1.9)$$

Além disso, graças as identidades (1.1.5) e (1.1.6) temos que

$$\Delta_j(fg) = \sum_{|k-j| \leq 4} \Delta_j(S_{k-1} f \Delta_k g) + \sum_{|k-j| \leq 4} \Delta_j(S_{k-1} g \Delta_k f) + \sum_{k \geq j-2} \Delta_j(\Delta_k f \tilde{\Delta}_k g), \quad (1.1.10)$$

para todo $j \in \mathbb{Z}$.

Para mais detalhes sobre a decomposição de Littlewood-Paley e o paraproduto de Bony, sugerimos [2], [5], [47] e suas referências.

Finalizamos esta seção, enunciando um lema do tipo Bernstein que será útil em algumas demonstrações contidas na seção subsequente.

Lema 1.1.5. (Veja [2, pg. 52]) Sejam $1 \leq p \leq q \leq \infty$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(i) Se $\text{supp } \hat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n; |\xi| \leq A_0 2^j\}$, então existe uma constante $C > 0$ independente de f e $j \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\|\partial^\alpha f\|_q \leq C 2^{j|\alpha| + jn(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|f\|_p.$$

(ii) Se $\text{supp } \hat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n; A_1 2^j \leq |\xi| \leq A_2 2^j\}$ então existem constantes positivas C_1, C_2 independentes de f e $j \in \mathbb{Z}$ tais que

$$C_1 2^{j|\alpha|} \|f\|_p \leq \|\partial^\alpha f\|_p \leq C_2 2^{j|\alpha|} \|f\|_p.$$

1.2 Espaços Homogêneos

Nesta seção, relembramos as definições e as principais propriedades das versões homogêneas dos espaços de Sobolev, Besov e de Morrey. O termo "homogêneo" é justificado por uma propriedade de homogeneidade da norma destes espaços. Tal propriedade é útil para o estudo de equações diferenciais parciais via técnicas de *scaling*. Provaremos tal propriedade para cada espaço nas próximas subseções.

1.2.1 Espaços de Besov Homogêneos

A seguir definimos os espaços de Besov homogêneos em \mathbb{R}^n .

Definição 1.2.1. Sejam $s \in \mathbb{R}$ e $1 \leq p, q \leq \infty$. O espaço de Besov homogêneo em \mathbb{R}^n , denotado por $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, é o conjunto de todas as $f \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}$ tais que

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} = \begin{cases} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ksq} \|\Delta_k f\|_p^q \right)^{1/q}, & q < \infty, \\ \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ks} \|\Delta_k f\|_p, & q = \infty. \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Observe que $\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} = 0$ se e somente se $\Delta_j f = 0$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. Pela definição do operador Δ_j , isto é equivalente a $\varphi_j(\xi) \hat{f}(\xi) = 0$ para todo $j \in \mathbb{Z}$, o que é equivalente a $\text{supp } \hat{f} = \{0\}$, e portanto $f \in \mathcal{P}$. Este fato, juntamente com o fato de $\|\cdot\|_p$ ser uma norma em $L^p(\mathbb{R}^n)$ e $(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^q)^{\frac{1}{q}}$ norma no $l^q(\mathbb{Z})$, mostra que (1.2.1) é uma norma no espaço $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$. De fato, $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach, veja [57].

Observação 1.2.2. A definição do espaço de Besov homogêneo não depende da particular φ usada para definir os blocos diádicos Δ_j . Ao mudar φ , em (1.1.1)-(1.1.2) obtém-se uma norma equivalente a (1.2.1).

A seguir, listamos algumas propriedades dos espaços de Besov homogêneos.

Proposição 1.2.3.

(i) (**Homogeneidade da norma**) Sejam $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq \infty$ e $\lambda > 0$. Então

$$\|\delta_\lambda f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} = C\lambda^{s-\frac{n}{p}}\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s}, \quad (1.2.2)$$

onde δ_λ denota a dilatação por λ , ou seja, $\delta_\lambda f(x) = f(\lambda x)$, e C é uma constante positiva.

(ii) (**Inclusão contínua**) Sejam $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ e $1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty$. Para quaisquer números reais s_1, s_2 tais que $s_1 - \frac{n}{p_1} = s_2 - \frac{n}{p_2}$ temos

$$\dot{B}_{p_1,q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n) \subset \dot{B}_{p_2,q_2}^{s_2}(\mathbb{R}^n). \quad (1.2.3)$$

(iii) (**Interpolação**) Sejam $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, com $s_1 < s_2$ e $\alpha \in (0, 1)$. Para quaisquer $1 \leq p, q \leq \infty$ e $f \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}$, temos que

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^{\alpha s_1 + (1-\alpha)s_2}} \leq \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^{s_1}}^\alpha \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^{s_2}}^{1-\alpha}. \quad (1.2.4)$$

(iv) (**Imersões em $L^q(\mathbb{R}^n)$**) Para $1 \leq p \leq q \leq \infty$ temos que

$$\dot{B}_{p,1}^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n), \quad (1.2.5)$$

e

$$L^q(\mathbb{R}^n) \subset \dot{B}_{q,\infty}^0(\mathbb{R}^n). \quad (1.2.6)$$

Demonstração: A demonstração do item (i) pode ser encontrada em [57], enquanto as demonstrações dos itens (ii), (iii), (iv) podem ser encontradas em [2], [3] e [47]. Daremos uma breve ideia das demonstrações dos itens (ii), (iii), e (iv).

Demonstração de (ii): Pelo item (i) do Lema 1.1.5, temos que

$$2^{-jn}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)\|\Delta_j f\|_{p_2} \leq C\|\Delta_j f\|_{p_1}.$$

Multiplicando a desigualdade acima por 2^{js_1} , e usando o fato que $l^{q_1}(\mathbb{Z}) \subset l^{q_2}(\mathbb{Z})$, concluímos que

$$\|f\|_{\dot{B}_{p_2,q_2}^{s_1-n\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)}} \leq C\|f\|_{\dot{B}_{p_1,q_1}^{s_1}},$$

o que prova (1.2.3).

Demonstração de (iii): Para provar a desigualdade (1.2.4), basta aplicar a desigualdade de Hölder na igualdade

$$2^{j(\alpha s_1 + (1-\alpha)s_2)} \|\Delta_j f\|_p = (2^{js_1} \|\Delta_j f\|_p)^\alpha (2^{js_2} \|\Delta_j f\|_p)^{1-\alpha}.$$

Demonstração de (iv): Seja $f \in \dot{B}_{p,1}^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(\mathbb{R}^n)$. Pelo item (i) do Lema 1.1.5, temos que

$$\|\Delta_j f\|_q \leq C 2^{jn(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\Delta_j f\|_p.$$

Tomando a soma em $j \in \mathbb{Z}$, vemos que a série $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Mas, $\dot{B}_{p,1}^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'/\mathcal{P}$ e portanto $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|f\|_q = \left\| \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f \right\|_q \leq \|f\|_{\dot{B}_{p,1}^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}},$$

o que é equivalente a (1.2.5).

Agora iremos provar (1.2.6). Pela definição do j -ésimo bloco diádico, temos que

$$\Delta_j f(x) = (\varphi_j(\xi) \hat{f}(\xi))^\vee(x) = 2^{jn} \check{\varphi}(2^j \cdot) * f, \text{ para toda } f \in L^q(\mathbb{R}^n).$$

Usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\|\Delta_j f\|_q \leq \|2^{jn} \check{\varphi}(2^j \cdot)\|_1 \|f\|_q \leq C \|f\|_q, \quad (1.2.7)$$

onde usamos que $\|\check{\varphi}(2^j \cdot)\|_1 = 2^{-jn} \|\check{\varphi}(\cdot)\|_1$. Tomando o supremo em $j \in \mathbb{Z}$ na desigualdade (1.2.7), concluímos que

$$\|f\|_{\dot{B}_{q,\infty}^0} \leq \|f\|_q.$$

■

1.2.2 Espaços de Sobolev Homogêneos

Nesta seção, vamos relembrar a definição e algumas propriedades dos espaços de Sobolev homogêneos. Começamos definindo o operador laplaciano fracionário $(-\Delta)^{\frac{z}{2}}$.

Definição 1.2.4. (Operador laplaciano fracionário) Seja $z \in \mathbb{C}$. O operador laplaciano fracionário é definido por

$$(-\Delta)^{\frac{z}{2}} f(x) = \left(|\xi|^z \hat{f}(\xi) \right)^\vee(x), \quad (1.2.8)$$

para toda $f \in \mathcal{S}$.

Observe que se $\operatorname{Re} z < -n$ então a função $|\xi|^z$ não é localmente integrável em \mathbb{R}^n e portanto (1.2.8) não está bem definida. Neste caso, é necessário que \hat{f} se anule suficientemente rápido na origem. Assim, para que a expressão em (1.2.8) faça sentido, é preciso supor que ou $\operatorname{Re} z > -n$, ou que \hat{f} se anula suficientemente rápido na origem quando $\operatorname{Re} z \leq -n$.

A família de operadores $(-\Delta)^z$ satisfaz a seguinte propriedade de semigrupo

$$(-\Delta)^{z_1}(-\Delta)^{z_2} = (-\Delta)^{z_1+z_2}. \quad (1.2.9)$$

Definição 1.2.5. (Potencial de Riesz) Seja s um número complexo com parte real positiva. O potencial de Riesz de ordem s é o operador

$$I_s = (-\Delta)^{-\frac{s}{2}}. \quad (1.2.10)$$

Observação 1.2.6. Para certos s, p e q , o potencial de Riesz I_s é contínuo de $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $L^q(\mathbb{R}^n)$. Com efeito (veja [37, pg. 3]), se $s > 0$ e $1 < p < q < \infty$ são tais que $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{s}{n}$, então existe uma constante $C(n, s, p)$ tal que, para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, tem-se

$$\|I_s f\|_q \leq C \|f\|_p. \quad (1.2.11)$$

Observação 1.2.7. Quando $f \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}$ o valor de \hat{f} na origem é irrelevante, pois podemos adicionar a \hat{f} uma distribuição com suporte na origem e obter outro elemento na classe de equivalência de f . Assim, podemos definir $(|\xi|^s \hat{f})^\vee$ sem supor que \hat{f} se anula suficientemente rápido na origem quando $s \leq -n$. Precisamente, para $s \in \mathbb{R}$ e $f \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}$, podemos definir $(|\xi|^s \hat{f})^\vee$ da seguinte maneira:

$$\langle |\xi|^s \hat{f}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\langle \hat{f}, \eta \left(\frac{\xi}{\varepsilon} \right) |\xi|^s \varphi(\xi) \right\rangle, \quad \text{para toda } \varphi \in \mathcal{S}, \quad (1.2.12)$$

desde que este limite exista, onde $\eta(\xi) \in \mathbb{R}^n$ é fixada tal que é igual a 1 quando $|\xi| \geq 2$ e se anula quando $|\xi| \leq 1$. Note que (1.2.12) define $|\xi|^s \hat{f}$ como um novo elemento de \mathcal{S}'/\mathcal{P} e esta definição não depende da escolha de η (veja [37, pg. 16] para maiores detalhes).

A seguir definiremos os espaços de Sobolev homogêneos em \mathbb{R}^n .

Definição 1.2.8. (Espaço de Sobolev homogêneo). Sejam $s \in \mathbb{R}$ e $1 < p < \infty$. Definimos o espaço de Sobolev homogêneo $\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$ como o espaço de todas as funções f em \mathcal{S}'/\mathcal{P} para os quais a expressão

$$(|\xi|^s \hat{f})^\vee$$

existe e pertence a $L^p(\mathbb{R}^n)$. Para $f \in \dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$ definimos

$$\|f\|_{\dot{H}_p^s} = \left\| (|\cdot|^s \hat{f})^\vee \right\|_p. \quad (1.2.13)$$

Assim como no caso dos espaços de Besov, temos que $\|f\|_{\dot{H}_p^s} = 0$ se e somente se $f \in \mathcal{P}$. Ou seja, $\|f\|_{\dot{H}_p^s} = 0$ se e somente se $f \equiv 0$ em \mathcal{S}'/\mathcal{P} . Usando este fato, juntamente com o fato de $\|\cdot\|_p$ ser uma norma em $L^p(\mathbb{R}^n)$, mostra-se facilmente que (1.2.13) é uma norma em $\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$. Além disso, o espaço $\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$ é um espaço normado completo com esta norma, ou seja, é um espaço de Banach, como mostraremos a seguir.

Proposição 1.2.9. (Veja [3] e [37]) Seja s um número real e $1 < p < \infty$. O espaço $\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach.

Demonstração:

Seja $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$. Pela definição da norma em $\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$ vemos que $\{(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f_k\}_{k=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Pela completude de $L^p(\mathbb{R}^n)$ temos que existe $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\left\| (-\Delta)^{\frac{s}{2}} f_k - g \right\|_p \rightarrow 0, \text{ quando } k \rightarrow \infty. \quad (1.2.14)$$

Seja $f = (-\Delta)^{-\frac{s}{2}} g$. Vamos mostrar que $f \in \dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$ e que $\|f_k - f\|_{\dot{H}_p^s} \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$. De fato, escrevendo

$$(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f = (-\Delta)^{\frac{s}{2}} \left((-\Delta)^{-\frac{s}{2}} g \right) = g - (-\Delta)^{\frac{s}{2}} f_k + (-\Delta)^{\frac{s}{2}} f_k,$$

e usando que $\{(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f_k\}_{k=1}^\infty$ é limitada em $L^p(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\|f\|_{\dot{H}_p^s} = \left\| (-\Delta)^{\frac{s}{2}} f \right\|_p \leq \left\| g - (-\Delta)^{\frac{s}{2}} f_k \right\|_p + \left\| (-\Delta)^{\frac{s}{2}} f_k \right\|_p \leq C,$$

onde usamos também a convergência (1.2.14).

Seja agora $\epsilon > 0$. Desde que $\{(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f_k\}_{k=1}^\infty$ é de Cauchy em $L^p(\mathbb{R}^n)$ e temos (1.2.14), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \left\| (-\Delta)^{\frac{s}{2}} f_k - (-\Delta)^{\frac{s}{2}} f_l \right\|_p &\leq \frac{\epsilon}{2}, \text{ para todo } k, l \geq n_0, \\ \left\| (-\Delta)^{\frac{s}{2}} f_k - g \right\|_p &\leq \frac{\epsilon}{2}, \text{ para todo } k \geq n_0. \end{aligned}$$

Portanto, se $l > n_0$ é fixo, temos

$$\begin{aligned} \|f_k - f\|_{\dot{H}_p^s} &= \left\| (-\Delta)^{\frac{s}{2}} f_k - (-\Delta)^{\frac{s}{2}} f \right\|_p \\ &\leq \left\| (-\Delta)^{\frac{s}{2}} f_k - (-\Delta)^{\frac{s}{2}} f_l \right\|_p + \left\| (-\Delta)^{\frac{s}{2}} f_l - g \right\|_p \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

para todo $k > n_0$, o que prova que $f_k \rightarrow f$ em $\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$ e portanto $\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$ é completo.

■

Vamos agora relembrar algumas propriedades dos espaços de Sobolev homogêneos que serão úteis nesta tese. A primeira é a propriedade de homogeneidade da norma que comentamos no início da seção. A segunda propriedade, que usaremos com frequência no Capítulo 2, é um tipo de imersão de Sobolev.

Lema 1.2.10. ([3, cap. 6])

(i) **(Homogeneidade da norma)** Para $s \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ e $1 < p < \infty$, temos

$$\|\delta_\lambda f\|_{\dot{H}_p^s} = \lambda^{s-\frac{n}{p}} \|f\|_{\dot{H}_p^s}. \quad (1.2.15)$$

(ii) **(Imersão de Sobolev)** Sejam $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ e $1 < p_2 \leq p_1 < \infty$ tais que $s_2 - n/p_2 = s_1 - n/p_1$.

Então

$$\dot{H}_{p_2}^{s_2}(\mathbb{R}^n) \subseteq \dot{H}_{p_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n) \quad (1.2.16)$$

Demonstração de (i):

Recordemos que a transformada de Fourier de uma distribuição $f \in \mathcal{S}'$ satisfaz a seguinte propriedade

$$(\delta_\lambda f)^\wedge(\xi) = \lambda^{-n} \delta_{\lambda^{-1}}(\hat{f})(\xi). \quad (1.2.17)$$

Pela definição do operador $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$ e a propriedade (1.2.17), temos que

$$\begin{aligned} \left((-\Delta)^{\frac{s}{2}} (\delta_\lambda(f)) \right)^\wedge(\xi) &= |\xi|^s (\delta_\lambda(f))^\wedge(\xi) = \lambda^s |\xi/\lambda|^s \lambda^{-n} \delta_{\lambda^{-1}}(\hat{f})(\xi) \\ &= \lambda^s \lambda^{-n} \delta_{\lambda^{-1}}(|\cdot|^s \hat{f})(\xi) = \lambda^s \lambda^{-n} \delta_{\lambda^{-1}}\left(\left((-\Delta)^{\frac{s}{2}} f \right)^\wedge\right)(\xi). \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

Assim, aplicando a transformada de Fourier inversa em (1.2.18) e usando a propriedade (1.2.17) para a transformada inversa, obtemos que $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}(\delta_\lambda(f)) = \lambda^s \delta_\lambda((-\Delta)^{\frac{s}{2}} f)$. Segue que

$$\begin{aligned} \|\delta_\lambda(f)\|_{\dot{H}_p^s} &= \left\| (-\Delta)^{\frac{s}{2}} \delta_\lambda(f) \right\|_p = \lambda^s \left\| \delta_\lambda \left((-\Delta)^{\frac{s}{2}} f \right) \right\|_p \\ &= \lambda^{s-\frac{n}{p}} \left\| (-\Delta)^{\frac{s}{2}} f \right\|_p = \lambda^{s-\frac{n}{p}} \|f\|_{\dot{H}_p^s}, \end{aligned}$$

como desejávamos.

Demonstração de (ii):

Graças a propriedade de grupo (1.2.9), podemos escrever $(-\Delta)^{s_1}$ da seguinte maneira

$$(-\Delta)^{s_1} f = (-\Delta)^{s_1-s_2} (-\Delta)^{s_2} f.$$

Como $p_2 < p_1$ e $\frac{s_1-s_2}{n} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}$, segue de (1.2.11) com $s = s_2 - s_1 > 0$ que

$$\|f\|_{\dot{H}_{p_1}^{s_1}} = \|(-\Delta)^{s_1} f\|_{p_1} = \|(-\Delta)^{s_1-s_2} (-\Delta)^{s_2} f\|_{p_1} \leq \|(-\Delta)^{s_2} f\|_{p_2} = \|f\|_{\dot{H}_{p_2}^{s_2}}.$$

■

Antes de enunciarmos o próximo lema vamos relembrar a definição de operadores multiplicadores de Fourier

Definição 1.2.11. (Operadores multiplicadores de Fourier) Seja m uma função mensurável e seja $X \subset \mathcal{S}'$. Assuma que $m\hat{f} \in \mathcal{S}'$, para toda $f \in X$. O operador multiplicador de Fourier associado a m é o operador $F_m : X \rightarrow \mathcal{S}'$ definido por

$$(F_m f)(x) = (m(\xi)\hat{f}(\xi))^\vee(x).$$

A função $m(\xi) = m(\xi_1, \dots, \xi_n)$ é denominada o símbolo do multiplicador de Fourier F_m .

Exemplo 1.2.12. Podemos enxergar o operador $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$ para todo $s \in \mathbb{R}$ como um operador multiplicador de Fourier com símbolo dado por $m(\xi) = |\xi|^s$. A derivada usual, $D = \frac{\partial}{\partial x_j}$ também pode ser vista como um operador multiplicador de Fourier com símbolo dado por $m(\xi) = i\xi_j$. Na Seção 1.3, discutimos mais dois exemplos de operadores que podem ser vistos como operadores multiplicadores de Fourier, as transformadas de Hilbert e de Riesz.

O próximo lema fornece estimativas para certos operadores multiplicadores de Fourier nos espaços $\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$ (veja, por exemplo, [46])

Lema 1.2.13. Sejam $l, s \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$ e $m(\xi) \in C^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Suponha que exista $L > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial^\alpha m}{\partial \xi^\alpha}(\xi) \right| \leq L|\xi|^{l-|\alpha|}, \quad (1.2.19)$$

para todo $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$, $|\alpha| \leq [\frac{n}{2}] + 1$, e $\xi \neq 0$. Então o operador multiplicador de Fourier F_m associado a $m(\xi)$ em \mathcal{S}'/\mathcal{P} é limitado de $\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$ para $\dot{H}_p^{s-l}(\mathbb{R}^n)$. Além disso,

$$\|F_m f\|_{\dot{H}_p^{s-l}} \leq C \|f\|_{\dot{H}_p^s}, \quad (1.2.20)$$

onde $C > 0$ é independente de f .

Em [3], o leitor encontrará uma definição dos espaços de Sobolev homogêneos usando a decomposição de Littlewood-Paley. De fato, temos que para $1 < p < \infty$ e $s \in \mathbb{R}$ existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que (veja também [37])

$$C_1 \left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} (2^{js} |\Delta_j f|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq \|f\|_{\dot{H}_p^s} \leq C_2 \left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} (2^{js} |\Delta_j f|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p.$$

1.2.3 Espaços de Morrey Homogêneos

Esta seção é devotada aos espaços de Morrey e algumas propriedades em \mathbb{R}^n . Estes são importantes na definição dos espaços de Fourier-Besov-Morrey. Nesta tese denotamos por $B_R(x_0)$ a bola de centro em x_0 e raio $R > 0$ em \mathbb{R}^n .

Definição 1.2.14. (Espaço de Morrey homogêneo) Seja $1 \leq p \leq \infty$ e $0 \leq \mu < n$. O espaço de Morrey homogêneo $M_{p,\mu}(\mathbb{R}^n)$ é definido da seguinte forma:

$$M_{p,\mu}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n); \|f\|_{p,\mu} < \infty\},$$

onde

$$\|f\|_{M_{p,\mu}} = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, 0 < R < \infty} \left\{ R^{-\frac{\mu}{p}} \|f\|_{L^p(B_R(x_0))} \right\}. \quad (1.2.21)$$

É conhecido que a quantidade $\|\cdot\|_{M_{p,\mu}}$ é uma norma em $M_{p,\mu}(\mathbb{R}^n)$ (veja [40]). Além disso, $M_{p,\mu}(\mathbb{R}^n)$ é completo com esta norma. Com efeito, se $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $M_{p,\mu}(\mathbb{R}^n)$ então pela definição da norma $\|\cdot\|_{M_{p,\mu}}$ vemos que $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em $L^p(B_R(x_0))$ e portanto existe $f \in L^p(B_R(x_0))$ tal que

$$\|f_k - f\|_{L^p(B_R(x_0))} \rightarrow 0, \text{ quando } k \rightarrow \infty. \quad (1.2.22)$$

Note que variando x_0 e R podemos obter uma função $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$ que satisfaz (1.2.22) para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $R > 0$ fixados.

Como $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada em $M_{p,\mu}(\mathbb{R}^n)$ (pois é de Cauchy neste espaço) segue, para quaisquer $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $R > 0$ fixados, que

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^\mu} \int_{B_R(x_0)} |f(x)|^p dx &= \frac{1}{R^\mu} \int_{B_R(x_0)} |f(x) + f_k(x) - f_k(x)|^p dx \\ &\leq 2^p \left(\frac{1}{R^\mu} \|f_k - f\|_{L^p(B_R(x_0))}^p + \frac{1}{R^\mu} \int_{B_R(x_0)} |f_k(x)|^p dx \right) \\ &\leq 2^p \left(\frac{1}{R^\mu} \|f_k - f\|_{L^p(B_R(x_0))}^p + \|f_k\|_{M_{p,\mu}}^p \right) \\ &\leq 2^p \frac{1}{R^\mu} \|f_k - f\|_{L^p(B_R(x_0))}^p + C^p, \end{aligned} \quad (1.2.23)$$

onde C é uma constante positiva independente de k . Tomando o limite quando $k \rightarrow \infty$ e em seguida elevando (1.2.23) a $\frac{1}{p}$ e tomando os supremos em $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e em $R > 0$ concluímos que

$$\|f\|_{M_{p,\mu}} \leq C,$$

o que prova que $f \in M_{p,\mu}(\mathbb{R}^n)$.

Resta mostrar que

$$\|f_k - f\|_{M_{p,\mu}} \rightarrow 0, \text{ quando } k \rightarrow \infty. \quad (1.2.24)$$

De fato, desde que $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em $M_{p,\mu}(\mathbb{R}^n)$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_k - f_l\|_{M_{p,\mu}} < \epsilon, \text{ para todo } k, l > k_0, \text{ e } \epsilon > 0.$$

Assim se $k, l > k_0$ segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^\mu} \int_{B_R(x_0)} |f_k(x) - f(x)|^p dx &\leq 2^p \left(\frac{1}{R^\mu} \int_{B_R(x_0)} |f_k(x) - f_l(x)|^p dx + \frac{1}{R^\mu} \int_{B_R(x_0)} |f_l(x) - f(x)|^p dx \right) \\ &\leq 2^p \left(\|f_k - f_l\|_{M_{p,\mu}}^p + \frac{1}{R^\mu} \int_{B_R(x_0)} |f_l(x) - f(x)|^p dx \right) \\ &\leq 2^p \left(\epsilon^p + \frac{1}{R^\mu} \int_{B_R(x_0)} |f_l(x) - f(x)|^p dx \right) \rightarrow 2^p \epsilon, \text{ quando } l \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.2.25)$$

Uma vez que ϵ é arbitrário, tomando $\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R > 0}$ em (1.2.25) obtemos (1.2.24).

Assim, acabamos de provar o seguinte lema:

Lema 1.2.15. Para $1 \leq p \leq \infty$ e $0 \leq \mu < n$, o espaço $M_{p,\mu}(\mathbb{R}^n)$ munido com a norma $\|\cdot\|_{M_{p,\mu}}$ é um espaço de Banach.

Semelhantemente aos espaços de Besov e Sobolev homogêneos, a norma do espaço de Morrey homogêneo satisfaz a seguinte propriedade de escala

$$\|\delta_\lambda f\|_{M_{p,\mu}} = \lambda^{-\frac{n-\mu}{p}} \|f\|_{M_{p,\mu}}. \quad (1.2.26)$$

Basta observar que

$$\begin{aligned} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, 0 < R < \infty} R^{-\mu} \int_{B_R(x_0)} |f(\lambda x)|^p dx &= \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, 0 < R < \infty} \lambda^{-n} R^{-\mu} \int_{B_{\lambda R}(\lambda x_0)} |f(x)|^p dx \\ &= \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, 0 < R < \infty} \lambda^{-(n-\mu)} (\lambda R)^{-\mu} \int_{B_{\lambda R}(\lambda x_0)} |f(x)|^p dx \\ &= \lambda^{-(n-\mu)} \|f\|_{M_{p,\mu}}^p. \end{aligned}$$

Abaixo listamos mais algumas propriedades dos espaços de Morrey homogêneos.

Lema 1.2.16.

(i) (**Inclusão contínua**) Seja $1 \leq p \leq q \leq \infty$ e $0 < \mu, \nu < n$. Se $\frac{n-\nu}{q} = \frac{n-\mu}{p}$ então

$$M_{q,\nu}(\mathbb{R}^n) \subset M_{p,\mu}(\mathbb{R}^n). \quad (1.2.27)$$

(ii) (**Desigualdade de Hölder**) Seja $1 \leq r, p, q < \infty$ e $0 < \lambda, \mu, \nu < n$. Se $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ e $\frac{\mu}{r} = \frac{\lambda}{p} + \frac{\nu}{q}$ então

$$\|fg\|_{M_{r,\mu}} \leq \|f\|_{M_{p,\lambda}} \|g\|_{M_{q,\nu}}. \quad (1.2.28)$$

(iii) (**Desigualdade de Young**) Para $1 \leq p \leq \infty$ e $0 \leq \mu < n$, temos que

$$\|\varphi * f\|_{M_{p,\mu}} \leq \|\varphi\|_1 \|f\|_{M_{p,\mu}}, \quad (1.2.29)$$

para $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $f \in M_{p,\mu}$.

(iv) (**Desigualdade tipo Bernstein**) Seja $1 \leq q \leq p \leq \infty$, $\frac{n-\mu_2}{q} \leq \frac{n-\mu_1}{p}$ e α um multiíndice. Se $\text{supp } \hat{f} \subset \{|\xi| \leq A2^j\}$ então existe uma constante $C > 0$ independente de f e j , tal que

$$\|(i\xi)^\alpha \hat{f}\|_{M_{q,\mu_2}} \leq C 2^{j|\alpha| + j(\frac{n-\mu_2}{q} - \frac{n-\mu_1}{p})} \|\hat{f}\|_{M_{p,\mu_1}}. \quad (1.2.30)$$

Demonstração: As demonstrações dos itens (i), (ii) e (iii) podem ser encontradas em [41]. Daremos aqui apenas uma breve ideia das demonstrações. Provamos também (iv).

Demonstração de (i): Escrevendo $\mu = n(1 - \frac{p}{q}) + \nu \frac{p}{q}$ e observando que $p \leq q$, podemos usar a desigualdade de Hölder em $L^p(B_R(x_0))$ e obter

$$\begin{aligned} \int_{B_R(x_0)} |f|^p dx &\leq |B_R(x_0)|^{1-\frac{p}{q}} \left(\int_{B_R(x_0)} |f|^q dx \right)^{\frac{p}{q}} \\ &= \omega_n^{1-\frac{p}{q}} R^{n(1-\frac{p}{q}) + \nu \frac{p}{q}} \left(R^{-\nu} \int_{B_R(x_0)} |f|^q dx \right)^{\frac{p}{q}} \\ &= \omega_n^{1-\frac{p}{q}} R^\mu \left(R^{-\nu} \int_{B_R(x_0)} |f|^q dx \right)^{\frac{p}{q}}, \end{aligned} \quad (1.2.31)$$

com ω_n denotando a área da superfície da esfera unitária \mathbb{S}^{n-1} em \mathbb{R}^n . Por (1.2.31), obtemos

$$\left(R^{-\mu} \int_{B_R(x_0)} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \omega_n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \left(R^{-\nu} \int_{B_R(x_0)} |f|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (1.2.32)$$

Tomando o $\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, 0 < R < \infty}$ em (1.2.32) segue que

$$\|f\|_{M_{p,\mu}} \leq C \|f\|_{M_{q,\nu}},$$

o que prova (1.2.27).

Demonstração de (ii):

Da desigualdade de Hölder em $L^p(B_R(x_0))$ obtemos

$$\|fg\|_{L^r(B_R(x_0))} \leq \|f\|_{L^p(B_R(x_0))} \|g\|_{L^q(B_R(x_0))}.$$

Agora, usando a hipótese $\frac{\mu}{r} = \frac{\lambda}{p} + \frac{\nu}{q}$ vemos que

$$R^{-\frac{\mu}{r}} \|fg\|_{L^r(B_R(x_0))} \leq R^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L^p(B_R(x_0))} R^{-\frac{\nu}{q}} \|g\|_{L^q(B_R(x_0))}. \quad (1.2.33)$$

Portanto, a desigualdade (1.2.28) é obtida tomando o $\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, 0 < R < \infty}$ em (1.2.33).

Demonstração de (iii): Observe que

$$|\varphi * f| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| |\varphi(y)| dy = \|\varphi\|_1 \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \frac{|\varphi(y)|}{\|\varphi\|_1} dy.$$

Logo, pela desigualdade de Jensen [31, pg. 109]) temos

$$|\varphi * f|^p \leq \|\varphi\|_1^p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p \frac{|\varphi(y)|}{\|\varphi\|_1} dy = \|\varphi\|_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |\varphi(y)| dy. \quad (1.2.34)$$

Integrando (1.2.34) sobre a bola $B_R(x_0)$ (para $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $R > 0$ fixados) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B_R(x_0)} |\varphi * f|^p dx &\leq \|\varphi\|_1^{p-1} \int_{B_R(x_0)} |\varphi * |f|^p dx \\ &= \|\varphi\|_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B_R(x_0)} |f(x-y)|^p dx \right) |\varphi(y)| dy \\ &\leq \|\varphi\|_1^{p-1} R^\mu \|f\|_{M_{p,\mu}}^p \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(y)| dy \\ &\leq \|\varphi\|_1^p R^\mu \|f\|_{M_{p,\mu}}^p. \end{aligned} \quad (1.2.35)$$

Portanto multiplicando (1.2.35) por $R^{-\mu}$, elevando a $\frac{1}{p}$ e em seguida tomando os supremos em $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e em $R > 0$ concluímos que

$$\|\varphi * f\|_{M_{p,\mu}} \leq \|\varphi\|_1 \|f\|_{M_{p,\mu}}.$$

Demonstração de (iv): Da hipótese $\text{supp } \hat{f} \subset \{|\xi| \leq A2^j\}$ e da desigualdade de Hölder temos que

$$\|(i\xi^\alpha)\hat{f}\|_{M_{q,\mu_2}} \leq C2^{j|\alpha|} \|1 \cdot \hat{f}\|_{M_{q,\mu_2}} \leq C2^{j|\alpha|} 2^{j(\frac{n-\mu_2}{q} - \frac{n-\mu_1}{p})} \|\hat{f}\|_{M_{p,\mu_1}}.$$

■

Outras propriedades dos espaços de Morrey homogêneos podem ser encontradas em [40] (veja também [1]).

1.3 Transformadas de Hilbert e de Riesz

O objetivo desta seção é definir as transformadas de Hilbert e de Riesz. Existem maneiras equivalentes de definir estas transformadas. Por exemplo, elas podem ser vistas como operadores integrais singulares (veja Definição 1.3.2) bem como operadores do tipo multiplicadores de Fourier, como veremos a seguir.

1.3.1 Transformada de Hilbert

Para definirmos a transformada de Hilbert, definamos $W_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ por

$$\langle W_0, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq 1} \frac{\varphi(x)}{x} dx. \quad (1.3.1)$$

O limite W_0 em (1.3.1) existe e pertence a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (veja [36] para mais detalhes.)

A seguir vamos definir a transformada de Hilbert.

Definição 1.3.1. (Transformada de Hilbert) A transformada de Hilbert de $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ é definida por

$$\mathcal{H}(f)(x) = (W_0 * f)(x) = v.p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-y)}{y} dy, \quad (1.3.2)$$

onde

$$v.p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-y)}{y} dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{f(x-y)}{y} dy.$$

Como dissemos anteriormente, a transformada de Hilbert pode ser vista como um operador multiplicador de Fourier. Especificamente falando, ela pode ser vista como um operador multiplicador de Fourier com símbolo dado por $m(\xi) = -i \operatorname{sgn}(\xi)$, onde $\operatorname{sgn}(\xi)$ é a função sinal definida por

$$\operatorname{sgn}(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{se } \xi > 0; \\ 0, & \text{se } \xi = 0; \\ -1, & \text{se } \xi < 0. \end{cases}$$

Para ver que tal fato é verdadeiro, considere $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ fixada. Então

$$\begin{aligned}
\langle \hat{W}_0, \varphi \rangle &= \langle W_0, \hat{\varphi} \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\xi| \geq \varepsilon} \hat{\varphi}(\xi) \frac{d\xi}{\xi} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\frac{1}{\varepsilon} \geq |\xi| \geq \varepsilon} \left[\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-ix \cdot \xi} dx \right] \frac{d\xi}{\xi} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \left[\int_{\frac{1}{\varepsilon} \geq |\xi| \geq \varepsilon} e^{-ix \cdot \xi} \frac{d\xi}{\xi} \right] dx \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \left[-i \int_{\frac{1}{\varepsilon} \geq |\xi| \geq \varepsilon} \sin(x \cdot \xi) \frac{d\xi}{\xi} \right] dx. \tag{1.3.3}
\end{aligned}$$

Agora, a integral dentro do colchete em (1.3.3) é limitada e converge para a função $\text{sgn } x$ (veja [36]). Assim, podemos usar o Teorema da convergência dominada para concluir que

$$\langle \hat{W}_0, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) (-i \text{sgn}(x)) dx, \tag{1.3.4}$$

ou seja, $\hat{W}_0(\xi) = -i \text{sgn}(\xi)$, como queríamos.

Recordamos agora a definição de operadores integrais singulares.

Definição 1.3.2. (Operador integral singular) Seja $n \geq 2$ e \mathcal{O} uma função tal que

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathcal{O}(x) dx = 0. \tag{1.3.5}$$

Para $0 < \varepsilon < N$ e $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, defina

$$T^{(\varepsilon, N)} f(x) = \int_{\varepsilon \leq |y| \leq N} f(x-y) \frac{\mathcal{O}(y/|y|)}{|y|^n} dy,$$

e

$$\mathcal{T}f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} T^{(\varepsilon, N)} f(x). \tag{1.3.6}$$

Assuma que $\mathcal{T}f(x)$ exista q.t.p para $x \in \mathbb{R}^n$. O operador $\mathcal{T} : L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{M}$, onde \mathbb{M} denota o espaço das funções mensuráveis de \mathbb{R}^n para \mathbb{C} , é denominado *operador integral singular*.

A função $\mathcal{K} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\mathcal{K}(y) = \frac{\mathcal{O}(y/|y|)}{|y|^n}$ é denominada núcleo singular de Calderon-Zygmund.

Observe que $\mathcal{K} \notin L^1(\mathbb{R}^n)$, mas coincide, em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, com a distribuição $W_{\mathcal{O}} \in \mathcal{S}'$ definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\langle W_{\mathcal{O}}, \varphi \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} K(x) \varphi(x) dx \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq \varepsilon^{-1}} K(x) \varphi(x) dx.
\end{aligned}$$

Veja [36] para mais detalhes. Além disso, se $f \in \mathcal{S}$ então o operador \mathcal{T} pode ser escrito como

$$\mathcal{T}(f)(x) = (f * W_{\mathcal{O}})(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y| \geq \varepsilon} f(x-y) \frac{\mathcal{O}(y/|y|)}{|y|^n} dy. \quad (1.3.7)$$

Exemplo 1.3.3. A transformada de Hilbert definida por (1.3.2) é um operador integral singular com $\mathcal{O}(x) = x$.

Outro exemplo de operador integral singular é a transformada de Riesz, como veremos a seguir.

1.3.2 Transformada de Riesz

Para cada $1 \leq j \leq n$, seja $W_j \in \mathcal{S}'$ definida por

$$\langle W_j, \varphi \rangle = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} \varphi(y) dy, \quad (1.3.8)$$

onde $\Gamma(\cdot)$ é a função gama definida por

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \text{ para } z \in \mathbb{C}.$$

Definição 1.3.4. (Transformada de Riesz) Para $1 \leq j \leq n$, a j -ésima transformada de Riesz é dada por

$$\mathcal{R}_j(f)(x) = (f * W_j)(x) = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) v.p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x - y|^{n+1}} f(y) dy \quad (1.3.9)$$

para toda $f \in \mathcal{S}$.

Observação 1.3.5. A j -ésima transformada de Riesz é um operador integral singular com

$$\mathcal{O}_j(x) = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) x_j, \text{ e } K_j(x) = \frac{\mathcal{O}_j\left(\frac{x_j}{|x|}\right)}{|x|^n}.$$

Também podemos ver a transformada de Riesz como um operador multiplicador de Fourier com símbolo $m(\xi) = i \frac{\xi_j}{|\xi|}$ e formalmente podemos escrever

$$\mathcal{R}_j := \frac{\partial_j}{|\nabla|}, \text{ para todo } j = 1, \dots, n, \quad (1.3.10)$$

onde $|\nabla|$ é o operador multiplicador de Fourier com símbolo $m(\xi) = |\xi|$.

Observação 1.3.6. As transformadas de Riesz e de Hilbert podem ser estendidas para outros espaços. Por exemplo, pode-se mostrar que as transformada de Riesz e de Hilbert são bem definidas de $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 < p < \infty$ (veja [36]). Por interpolação, essas transformadas são

também bem definidas nos espaços L^p -fracos (veja [31] para a definição). Em [40], o autor mostra a continuidade das transformadas de Riesz e de Hilbert nos espaços de Morrey homogêneos. Além disso, graças a (1.3.10) e (1.3.4) pode-se mostrar que elas são bem definidas em espaços baseados na transformada de Fourier, como os espaços PM^a e Fourier-Besov, veja por exemplo [7] e [45].

1.4 Um Lema de Ponto Fixo e a Função Beta

Terminaremos este capítulo lembrando um teorema de ponto fixo, que será utilizado para mostrar existência de solução branda (veja Definição 2.1.1) para o problema (0.0.1)-(0.0.2). Também lembramos uma propriedade da função Beta que será utilizada com frequência nos capítulos 2 e 4.

Lema 1.4.1. ([47, pg.227]) Seja X um espaço de Banach com norma dada por $\|\cdot\|_X$, e seja $B : X \times X \rightarrow X$ uma aplicação bilinear contínua, ou seja, existe $K > 0$ tal que

$$\|B(x_1, x_2)\|_X \leq K \|x_1\|_X \|x_2\|_X,$$

para todo $x_1, x_2 \in X$. Dados $0 < \varepsilon < \frac{1}{4K}$ e $y \in X$ tais que $\|y\|_X \leq \varepsilon$, existe uma solução $x \in X$ para a equação $x = y + B(x, x)$ tal que $\|x\|_X \leq 2\varepsilon$. A solução x é única na bola fechada $\{x \in X : \|x\|_X \leq 2\varepsilon\}$. Além disso, a solução depende continuamente de y no seguinte sentido: Se $\|\tilde{y}\|_X \leq \varepsilon$, $\tilde{x} = \tilde{y} + B(\tilde{x}, \tilde{x})$, e $\|\tilde{x}\|_X \leq 2\varepsilon$, então

$$\|x - \tilde{x}\|_X \leq \frac{1}{1 - 4K\varepsilon} \|y - \tilde{y}\|_X.$$

Observação 1.4.2. A demonstração do Lema 1.4.1 é baseada no fato de que se $\|y\|_X \leq \varepsilon < \frac{1}{4K}$ então a aplicação $x \mapsto y + B(x, x)$ é uma contração na bola fechada $\overline{B}(0, \varepsilon)$. Assim, a solução da equação $x = y + B(x, x)$ pode ser obtida como o limite em X da sequência de Picard $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ definida recursivamente por

$$\begin{aligned} x_1 &= y, \\ x_{k+1} &= y + B(x_k, x_k), \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Além disso, $\|x_k\|_X \leq 2\varepsilon$.

Na sequência lembramos a função Beta.

Definição 1.4.3. Sejam $w, z \in \mathbb{C}$ com partes reais positivas. A função Beta $\mathcal{B}(w, z)$ é definida pela seguinte integral

$$\mathcal{B}(w, z) = \int_0^1 (1-s)^{w-1} s^{z-1} ds = \int_0^1 (1-s)^{z-1} s^{w-1} ds.$$

Existe uma relação entre as funções Beta e Gama. De fato, usando uma mudança de variáveis é possível mostrar que (veja [36])

$$\mathcal{B}(w, z) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

Observação 1.4.4. Considere a integral

$$\int_0^t (t-s)^{m-1} s^{n-1} ds. \tag{1.4.1}$$

Fazendo $s = tz$, temos que

$$\int_0^t (t-s)^{m-1} s^{n-1} ds = t \int_0^1 (t-tz)^{m-1} (tz)^{n-1} dz = t^{m+n-1} \mathcal{B}(m, n).$$

Capítulo 2

Soluções Globais e Decaimento em $L^p(\mathbb{R}^n)$

Neste capítulo estudamos o problema (0.0.1)-(0.0.2) em espaços de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$. Dividimos ele em quatro seções. Na primeira seção daremos a definição de solução branda para o problema (0.0.1)-(0.0.2). Na Seção 2.2, vamos apresentar nossos resultados de boa-colocação global, comportamento assintótico e simetria de soluções para o problema (0.0.1)-(0.0.2). Tais resultados estão divididos em dois teoremas (veja também a Observação 2.2.6). O Teorema 2.2.1 trata da boa-colocação global e decaimentos da solução para o problema (0.0.1)-(0.0.2) com dado inicial $\theta_0 \in L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ e também $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$. O Teorema 2.2.7 mostra que sob certas condições de simetria para os símbolos $P_i(\xi)$ e para o dado inicial θ_0 a solução global obtida no Teorema 2.2.1 é radialmente simétrica. Também mostramos que a solução é ímpar (resp. par) desde que $P_i(\xi)$'s e θ_0 são ímpares (resp. pares). A terceira seção (Seção 2.3) é devotada as estimativas básicas para as demonstrações dos resultados apresentados na Seção 2.2. Por fim, na última seção (Seção 2.4) faremos as demonstrações dos resultados.

Durante todo este capítulo vamos assumir que $n \geq 2$, $\nabla_x \cdot u = 0$ e que cada símbolo $P_j(\xi)$ em (0.0.4) pertence a $C^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ e satisfaz

$$\left| \frac{\partial^\alpha P_j(\xi)}{\partial \xi^\alpha} \right| \leq C |\xi|^{\beta-|\alpha|}, \quad (2.0.1)$$

para todo $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ com $|\alpha| \leq [\frac{n}{2}]$, $\xi \neq 0$ e $\beta \geq 0$.

Observação 2.0.1. Recordemos que podemos escrever a transformada de Fourier do operador $P[\cdot]$ da seguinte maneira (veja (0.0.5) na página 1):

$$\widehat{P[\theta]}(\xi) = P(\xi)\hat{\theta}(\xi), \quad (2.0.2)$$

onde $P(\xi) = (\tilde{P}_1(\xi), \dots, \tilde{P}_n(\xi))$ com

$$\tilde{P}_k(\xi) = \sum_{j=1}^n a_{jk} \frac{i\xi_j}{|\xi|^2} P_j(\xi).$$

Assim, se $P_j(\xi) \in C^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ e satisfaz (2.0.1) para todo $j = 1, \dots, n$, temos que $P(\xi)$ satisfaz (1.2.19) com $l = \beta - 1$ no Lema 1.2.13 (veja página 18). Segue que $P[\cdot]$ é limitado de $\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$ para $(\dot{H}_p^{s-(\beta-1)}(\mathbb{R}^n))^n$, isto é,

$$\|P[\theta]\|_{\dot{H}_p^{s-(\beta-1)}} \leq C \|\theta\|_{\dot{H}_p^s}. \quad (2.0.3)$$

Em (2.0.3) e algumas outras partes desta tese, denotamos abusivamente espaços de funções escalares e vetoriais da mesma forma.

2.1 Soluções Brandas

Neste capítulo e no Capítulo 3, usaremos uma formulação integral para o problema (0.0.1)-(0.0.2) o qual é obtida pelo princípio de Duhamel. Começamos observando que a solução da equação linear

$$\begin{cases} \phi_t + (-\Delta)^\gamma \phi = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ \phi(x, 0) = \phi_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.1.1)$$

é dada por

$$\phi(x, t) = G_\gamma(t)\phi_0, \quad (2.1.2)$$

onde

$$G_\gamma(t)f = g_\gamma(\cdot, t) * f \quad (2.1.3)$$

e $g_\gamma(x, t)$ é definida via a transformada de Fourier como $\hat{g}_\gamma(\xi, t) = e^{-|\xi|^{2\gamma}t}$.

Pelo princípio de Duhamel, temos que se θ é solução de (0.0.1)-(0.0.2) no sentido clássico então θ satisfaz a seguinte equação integral

$$\theta(t) = G_\gamma(t)\theta_0 + B(\theta, \theta)(t), \quad (2.1.4)$$

onde

$$B(\theta, \phi)(t) = - \int_0^t G_\gamma(t-s)(\nabla_x \cdot (P[\theta]\phi))(s)ds. \quad (2.1.5)$$

Definição 2.1.1. (Solução branda) Uma função $\theta(x, t)$ que satisfaz a equação integral (2.1.4) é denominada uma solução branda para o problema (0.0.1)-(0.0.2).

Observe que se θ é solução no sentido clássico de (0.0.1)-(0.0.2) então θ é claramente uma solução branda.

2.2 Resultados

Nesta seção apresentamos os resultados para o problema (0.0.1)-(0.0.2) com dado inicial $\theta_0 \in L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$. Começamos apresentando os resultados de boa-colocação e decaimento de soluções para o caso $1 \leq \beta$. O caso $0 \leq \beta < 1$ será tratado na Observação 2.2.6.

Denotamos por $BC(I; X)$ o espaço das funções contínuas e limitadas do intervalo I no espaço de Banach X .

Teorema 2.2.1. Assuma que

$$1 \leq 2\beta - 1 < 2\gamma < \min \left\{ \frac{2}{3}(n + \beta + 1), (n + 1) \right\}. \quad (2.2.1)$$

(i) **(Existência e unicidade)** Seja

$$\max \left\{ \frac{\beta - 1}{n}, \frac{\gamma - 1}{n} \right\} < \frac{1}{q} < \min \left\{ \frac{2\gamma - \beta}{n}, \frac{n + \beta - 1}{2n} \right\} \quad (2.2.2)$$

e $\eta_q = \frac{2\gamma-1}{2\gamma} - \frac{n}{2\gamma q}$. Se $\theta_0 \in L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ então o problema (0.0.1)-(0.0.2) possui uma única solução global $\theta \in BC([0, \infty); L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n))$ satisfazendo

$$t^{\eta_q} \theta \in C((0, \infty); \dot{H}_q^{\beta-1}(\mathbb{R}^n)) \quad (2.2.3)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\eta_q} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} = 0. \quad (2.2.4)$$

As propriedades (2.2.3) e (2.2.4) são válidas com $q = r$ para todo $\frac{n}{2\gamma-\beta} < r < \infty$. Além disso, $\theta(t) \rightarrow \theta_0$ em $L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ quando $t \rightarrow 0^+$. Se $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ então $\theta \in BC([0, \infty); L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n))$.

(ii) **(Decaimento)** Seja $\tilde{\eta}_q = \frac{2\gamma-\beta}{2\gamma} - \frac{n}{2\gamma q}$. Se $\theta_0 \in L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ então a solução obtida no item (i) satisfaz

$$t^{\tilde{\eta}_q} \theta \in BC((0, \infty), L^q(\mathbb{R}^n)), \text{ para todo } \frac{n}{2\gamma-\beta} < q \leq \infty, \quad (2.2.5)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\tilde{\eta}_q} \|\theta(t)\|_q = 0. \quad (2.2.6)$$

Além disso, se $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ e $1 < q \leq \infty$, então

$$t^{\tilde{\eta}_q + \frac{n+\beta}{2\gamma} - 1} \theta \in BC((0, \infty); L^q(\mathbb{R}^n)). \quad (2.2.7)$$

Observação 2.2.2. (Unicidade) A necessidade de supor que q satisfaz (2.2.2) no item (i) do Teorema 2.2.1 é apenas para provar a unicidade de soluções. De fato, dado $\frac{n}{2\gamma-\beta} < q < \infty$ pode-se provar a existência de soluções globais no tempo na classe

$$BC([0, \infty); L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)) \cap \left\{ \theta; t^{\eta q} \theta \in C((0, \infty); \dot{H}_q^{\beta-1}(\mathbb{R}^n)) \text{ e } \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\eta q} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} = 0 \right\},$$

veja o passo 1 da demonstração do Teorema 2.2.1 na página 52.

Observação 2.2.3. (Dependência contínua no dado inicial) A demonstração do Teorema 2.2.1, mostra que a solução θ depende continuamente do dado inicial θ_0 em um intervalo de tempo finito arbitrário $[0, T]$. Precisamente, para qualquer $0 < T < \infty$, se $\theta_{0,k} \rightarrow \theta_0$ em $L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$, então $\theta_k \rightarrow \theta$ em $BC([0, T]; L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n))$, onde θ_k é a solução com dado inicial $\theta_{0,k}$. Uma questão é saber se esta propriedade vale para $T = \infty$, contudo não sabemos a resposta.

Observação 2.2.4. Em vista da condição $2\gamma < \frac{2}{3}(n + \beta + 1) < n + \beta$, observe que o decaimento em (2.2.7) é mais rápido que o dado em (2.2.5).

Teorema 2.2.5. Seja θ a solução dada no Teorema 2.2.1 com dado inicial $\theta_0 \in L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$. Então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\theta(t)\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} = 0. \quad (2.2.8)$$

Observação 2.2.6. Com uma simples modificação na demonstração do Teorema 2.2.1 podemos considerar o caso $0 \leq \beta < 1$. De fato, este caso é menos complicado de ser tratado e não é necessário o uso de normas baseadas em espaços de Sobolev homogêneos para provar a existência de soluções. Basta observar que

$$P[\theta] = I_{1-\beta}(-\Delta)^{\frac{1-\beta}{2}} P[\theta],$$

onde $I_{1-\beta}$ é o potencial de Riesz de ordem $1 - \beta$ (veja Definição 1.2.5 na página 15). Assim, segue da continuidade do potencial de Riesz nos espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$ (Observação 1.2.6) e do Lema 1.2.13 com $s = l = 0$ (veja Observação 2.0.1) que

$$\begin{aligned} \|P[\theta]\|_q &= \|I_{1-\beta}(-\Delta)^{\frac{1-\beta}{2}} P[\theta]\|_q \\ &\leq C \|(-\Delta)^{\frac{1-\beta}{2}} P[\theta]\|_p \leq C \|\theta\|_p, \text{ com } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1-\beta}{n}. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Assim, pode-se provar que se $0 \leq \beta < 1 < 2\gamma < \frac{n+\beta+1}{2}$ e $\theta_0 \in L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ então o problema (0.0.1)-(0.0.2) possui uma única solução global $\theta \in BC([0, \infty); L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n))$ e se $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ então $\theta \in BC([0, \infty); L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n))$. Além disso, usando os mesmos argumentos da demonstração de (2.2.5) e (2.2.7), pode-se mostrar que a solução θ satisfaz (2.2.5) e (2.2.7) quando $\theta_0 \in L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ e $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$, respectivamente.

A seguir, apresentamos nosso resultado de simetria e não-simetria para soluções do problema (0.0.1)-(0.0.2). Recordemos que uma função f é ímpar se $f(-x) = -f(x)$, e é uma função par se $f(x) = f(-x)$.

Teorema 2.2.7. (Simetria e não-simetria) Considere as hipóteses do Teorema 2.2.1.

- (i) A solução $\theta(x, t)$ é ímpar (resp. par) para todo $t > 0$, desde que θ_0 e P_j 's sejam ímpares (resp. pares).
- (ii) Seja $P(\xi)$ como em (2.0.2). Se θ_0 e $\operatorname{div}_\xi(P(\xi))$ são radialmente simétricos então $\theta(x, t)$ é radialmente simétrica para todo $t > 0$.
- (iii) Se θ_0 é ímpar (resp. par) e os P_j 's são pares (resp. ímpares), então $\theta(x, t)$ não é ímpar (resp. não é par).
- (iv) Se θ_0 não é radial e $\operatorname{div}_\xi(P(\xi))$ é radial, então $\theta(x, t)$ não é radialmente simétrica.

2.3 Estimativas

Esta seção é devotada as estimativas dos operadores linear e bilinear da formulação integral (2.1.4).

2.3.1 Estimativas Lineares

Começamos estimando o semigrupo linear $\{G_\gamma(t)\}_{t>0}$ nos espaços $\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$ e em $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Lema 2.3.1. (i) Sejam $0 < \gamma < \infty$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$ e $k \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$. Existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\|\nabla_x^k G_\gamma(t)f\|_q \leq C t^{-\frac{|k|}{2\gamma} - \frac{n}{2\gamma}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|f\|_p, \quad (2.3.1)$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Sejam $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $s_1 \leq s_2$ e $1 < p_1 \leq p_2 < \infty$. Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|G_\gamma(t)f\|_{\dot{H}_{p_2}^{s_2}} \leq C t^{-\frac{(s_2-s_1)}{2\gamma} - \frac{n}{2\gamma}(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2})} \|f\|_{\dot{H}_{p_1}^{s_1}}, \quad (2.3.2)$$

para toda $f \in \dot{H}_{p_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, dado $\theta_0 \in L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq \beta < 2\gamma < n + \beta$ e $\frac{n}{2\gamma-\beta} < q < \infty$, então

$$\sup_{0 < t < T} t^{\eta q} \|G_\gamma(t)\theta_0\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \leq C \|\theta_0\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\eta q} \|G_\gamma(t)\theta_0\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} = 0, \quad (2.3.3)$$

onde $\eta_q = \frac{2\gamma-1}{2\gamma} - \frac{n}{2\gamma q}$, C é uma constante positiva independente de θ_0 e $0 < T \leq \infty$.

Demonstração: A demonstração da desigualdade (2.3.1) pode ser encontrada em [28] enquanto a demonstração de (2.3.2) pode ser encontrada em [27]. Incluímos as demonstrações destas desigualdades para a conveniência do leitor.

Demonstração de (i):

Observe que

$$\begin{aligned} g_\gamma(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} e^{-|\xi|^{2\gamma} t} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} e^{-|\xi t^{\frac{1}{2\gamma}}|^{2\gamma}} d\xi \\ &= t^{-\frac{n}{2\gamma}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i \frac{x}{t^{\frac{1}{2\gamma}}} \cdot z} e^{-|z|^{2\gamma}} dz = t^{-\frac{n}{2\gamma}} g_\gamma(t^{-\frac{1}{2\gamma}} x, 1). \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Usando a homogeneidade da norma $\|\cdot\|_p$ e a desigualdade de Young com $\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = \frac{1}{q} + 1$, temos que

$$\begin{aligned} \|G_\gamma(t)f\|_q &\leq C \|g_\gamma\|_r \|f\|_p \\ &= C t^{-\frac{n}{2\gamma} + \frac{n}{2\gamma r}} \|g_\gamma(\cdot, 1)\|_r \|f\|_p \\ &= C t^{-\frac{n}{2\gamma} (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|f\|_p, \end{aligned}$$

o que nos dá (2.3.1) com $k = 0$. Derivando (2.3.4), obtemos $\nabla_x^k g_\gamma(x, t) = t^{-\frac{|k|}{2\gamma} - \frac{n}{2\gamma}} \nabla_x^k g_\gamma(t^{-\frac{1}{2\gamma}} x, 1)$. Analogamente (2.3.1) para $|k| > 0$ segue usando este fato e a desigualdade de Young.

Demonstração de (ii):

O caso $s_1 = s_2 = s$ em (2.3.2) segue diretamente da desigualdade (2.3.1) e do fato de $G_\gamma(t)$ comutar com $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$. De fato,

$$\begin{aligned} \|G_\gamma(t)f\|_{\dot{H}_{p_2}^s} &= \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} G_\gamma(t)f\|_{p_2} \\ &= \|G_\gamma(t)(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{p_2} \\ &\leq C t^{-\frac{n}{2\gamma} (\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2})} \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{p_1} \leq C t^{-\frac{n}{2\gamma} (\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2})} \|f\|_{\dot{H}_{p_1}^s}. \end{aligned}$$

O caso $s_1 < s_2$ segue usando o caso $s_1 = s_2$ e o Lema 1.2.13 de maneiras adequadas. Com efeito, seja $\delta = s_2 - s_1$ e F o operador multiplicador de Fourier com símbolo dado por $m(\xi) = |\xi|^\delta e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2\gamma}}$. Observe que

$$\left([(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} G_\gamma(t/2)] f \right)^\wedge(\xi) = |\xi|^\delta e^{-\frac{t}{2}|\xi|^{2\gamma}} \hat{f}(\xi) = t^{-\frac{\delta}{2\gamma}} m(t^{\frac{1}{2\gamma}} \xi) \hat{f}(\xi),$$

ou seja,

$$\left((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} G_\gamma(t/2)f \right)(x) = t^{-\frac{\delta}{2\gamma}} \left(Ff(t^{\frac{1}{2\gamma}} \cdot) \right)(t^{-\frac{1}{2\gamma}} x). \quad (2.3.5)$$

Além disso, o símbolo $m(\xi)$ satisfaz as hipóteses do Lema 1.2.13 com $l = 0$ e portanto

$$\begin{aligned} \|(Ff(t^{\frac{1}{2\gamma}} \cdot))(t^{-\frac{1}{2\gamma}} \cdot)\|_{\dot{H}_p^s} &= t^{-\frac{1}{2\gamma}(s-\frac{n}{p})} \|Ff(t^{\frac{1}{2\gamma}} \cdot)\|_{\dot{H}_p^s} \\ &\leq Ct^{-\frac{1}{2\gamma}(s-\frac{n}{p})} \|f(t^{\frac{1}{2\gamma}} \cdot)\|_{\dot{H}_p^s} \\ &= Ct^{-\frac{1}{2\gamma}(s-\frac{n}{p})} t^{\frac{1}{2\gamma}(s-\frac{n}{p})} \|f\|_{\dot{H}_p^s} = C\|f\|_{\dot{H}_p^s}, \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

onde usamos a homogeneidade da norma em $\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$ (página 17), na primeira e na segunda igualdade.

Agora, aplicando o caso $s_1 = s_2$ e usando (2.3.5) e (2.3.6), obtemos

$$\begin{aligned} \|G_\gamma(t)f\|_{\dot{H}_{p_2}^{s_2}} &= \|G_\gamma(t/2)G(t/2)f\|_{\dot{H}_{p_2}^{s_2}} \leq Ct^{-\frac{n}{2\gamma}(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2})} \|G_\gamma(t/2)f\|_{\dot{H}_{p_1}^{s_2}} \\ &= Ct^{-\frac{n}{2\gamma}(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2})} \|(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} G_\gamma(t/2)f\|_{\dot{H}_{p_1}^{s_1}} \\ &= Ct^{-\frac{\delta}{2\gamma}-\frac{n}{2\gamma}(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2})} \|(Ff(t^{\frac{1}{2\gamma}} \cdot))(t^{-\frac{1}{2\gamma}} \cdot)\|_{\dot{H}_{p_1}^{s_1}} \\ &\leq Ct^{-\frac{\delta}{2\gamma}-\frac{n}{2\gamma}(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2})} \|f\|_{\dot{H}_{p_1}^{s_1}}, \end{aligned}$$

o que prova (2.3.2).

A desigualdade em (2.3.3) segue diretamente da desigualdade (2.3.2) tomando $p_1 = \frac{n}{2\gamma-\beta}$, $p_2 = q$, $s_1 = 0$ e $s_2 = \beta - 1$.

Resta provar que o limite em (2.3.3) é zero. Para tal, observe que

$$\overline{\dot{H}_q^{\beta-1}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}}} = L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n).$$

Assim, existe uma sequência $\theta_{0,k} \in \dot{H}_q^{\beta-1}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\theta_{0,k} \rightarrow \theta_0$ em $L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$. Seja $k \in \mathbb{N}$ fixado. Usando (2.3.2) com $p_1 = p_2 = q$ e $s_1 = s_2 = \beta - 1$, obtemos

$$\|G_\gamma(t)\theta_{0,k}\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \leq C\|\theta_{0,k}\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}}$$

e portanto

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\eta q} \|G_\gamma(t)\theta_{0,k}\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} = 0. \quad (2.3.7)$$

Escrevendo,

$$G_\gamma(t)\theta_0 = G_\gamma(t)\theta_0 + G_\gamma(t)\theta_{0,k} - G_\gamma(t)\theta_{0,k} = G_\gamma(t)\theta_{0,k} - G_\gamma(t)(\theta_{0,k} - \theta_0)$$

e usando a desigualdade em (2.3.3), temos que

$$\begin{aligned} t^{\eta q} \|G_\gamma(t)\theta_0\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} &\leq t^{\eta q} \|G_\gamma(t)\theta_{0,k}\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} + t^{\eta q} \|G_\gamma(t)(\theta_{0,k} - \theta_0)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \\ &\leq t^{\eta q} \|G_\gamma(t)\theta_{0,k}\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} + C\|\theta_{0,k} - \theta_0\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}}. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Tomando o $\limsup_{t \rightarrow 0^+}$ em (2.3.8), usando (2.3.7) e em seguida fazendo $k \rightarrow \infty$, obtemos a igualdade em (2.3.3). ■

2.3.2 Estimativas Bilineares

Nesta subseção, estimamos o termo bilinear da formulação integral (2.1.4) nos espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$.

Lema 2.3.2. Sejam $0 < T \leq \infty$, $n \geq 2$, $1 \leq \beta < 2\gamma < \infty$, e $1 < q < \infty$ tal que $\frac{\beta-1}{n} < \frac{1}{q} < \frac{2\gamma-\beta}{n}$. Denote $\eta_q = \frac{2\gamma-1}{2\gamma} - \frac{n}{2\gamma q}$ e $\tilde{\eta}_q = \frac{2\gamma-\beta}{2\gamma} - \frac{n}{2\gamma q}$.

(i) Se $\frac{2\gamma-(\beta+1)}{n} - \frac{1}{q} < \frac{1}{r} \leq \frac{1}{q'}$ e $q' \leq p \leq \infty$ então existem constantes positivas K_1, K_2, K_3 , independentes de θ, ϕ e T , tais que

$$\sup_{0 < t < T} t^{\tilde{\eta}_r} \|B(\theta, \phi)\|_r \leq K_1 \sup_{0 < t < T} t^{\eta_q} \|\theta\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \sup_{0 < t < T} t^{\tilde{\eta}_r} \|\phi\|_r, \quad (2.3.9)$$

$$\sup_{0 < t < T} \|B(\theta, \phi)\|_p \leq K_2 \sup_{0 < t < T} t^{\eta_q} \|\theta\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \sup_{0 < t < T} \|\phi\|_p, \quad (2.3.10)$$

$$\sup_{0 < t < T} \|B(\theta, \phi)\|_1 \leq K_3 T^{\frac{2\gamma-1}{2\gamma} - \eta_q} \sup_{0 < t < T} t^{\eta_q} \|\theta\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \sup_{0 < t < T} \|\phi\|_{q'}. \quad (2.3.11)$$

(ii) Se $\frac{2\gamma-2}{n} - \frac{1}{q} < \frac{1}{r} < \frac{n+\beta-1}{n} - \frac{1}{q}$ então

$$\sup_{0 < t < T} t^{\eta_r} \|B(\theta, \phi)\|_{\dot{H}_r^{\beta-1}} \leq K_4 \sup_{0 < t < T} t^{\eta_r} \|\theta\|_{\dot{H}_r^{\beta-1}} \sup_{0 < t < T} t^{\eta_q} \|\phi\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}}, \quad (2.3.12)$$

$$\sup_{0 < t < T} \|B(\theta, \phi)\|_{\dot{H}_r^{\beta-1}} \leq K_5 \sup_{0 < t < T} \|\theta\|_{\dot{H}_r^{\beta-1}} \sup_{0 < t < T} t^{\eta_q} \|\phi\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}}, \quad (2.3.13)$$

onde K_4, K_5 são constantes positivas independentes de θ, ϕ e T .

Demonstração: Recordemos que devido as condições sob os símbolos P_j 's (veja (2.0.1)) o operador $P[\cdot]$ satisfaz as hipóteses do Lema 1.2.13 com $l = \beta - 1$, veja a Observação 2.0.1 para mais detalhes.

Demonstração de (i): Sejam $p_1 = p$ e $p_2 = r$. Pela desigualdade de Hölder e pelo Lema

2.3.1, temos que

$$\begin{aligned}
\|B(\theta, \phi)\|_{p_i} &\leq \int_0^t \|\nabla_x G_\gamma(t-s)(P[\theta]\phi)(s)\|_{p_i} ds \\
&\leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2\gamma}-\frac{n}{2\gamma q}} \|(P[\theta]\phi)(s)\|_{\frac{p_i q}{p_i+q}} ds \\
&\leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2\gamma}-\frac{n}{2\gamma q}} \|P[\theta(s)]\|_q \|\phi(s)\|_{p_i} ds \\
&\leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2\gamma}-\frac{n}{2\gamma q}} \|\theta(s)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \|\phi(s)\|_{p_i} ds,
\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

onde $i = 1, 2$, e na terceira linha usamos (2.0.3) com $s = \beta - 1$ para estimar

$$\|P[\theta]\|_q \leq C \|\theta\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}}.$$

Portanto,

$$\|B(\theta, \phi)\|_p \leq C I_1(t) \sup_{0 < t < T} \|\phi(t)\|_p \sup_{0 < t < T} t^{\eta_q} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}}, \tag{2.3.15}$$

$$\|B(\theta, \phi)\|_r \leq C I_2(t) \sup_{0 < t < T} t^{\tilde{\eta}_r} \|\phi(t)\|_r \sup_{0 < t < T} t^{\eta_q} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}}. \tag{2.3.16}$$

Graças as condições sobre γ, β, p, q e r tem-se que $0 < \eta_q + \tilde{\eta}_r < 1$ e $0 < \eta_q < 1$. Assim, as integrais $I_1(t)$ e $I_2(t)$ são dadas por

$$I_1(t) = \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2\gamma}-\frac{n}{2\gamma q}} s^{-\eta_q} ds = \int_0^1 (1-s)^{\eta_q-1} s^{-\eta_q} ds = C < \infty, \tag{2.3.17}$$

$$I_2(t) = \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2\gamma}-\frac{n}{2\gamma q}} s^{-\eta_q-\tilde{\eta}_r} ds = t^{\eta_q-1-\eta_q-\tilde{\eta}_r+1} \int_0^1 (1-s)^{\eta_q-1} s^{-\eta_q-\tilde{\eta}_r} ds = C t^{-\tilde{\eta}_r}. \tag{2.3.18}$$

Substituindo (2.3.18) em (2.3.16) e (2.3.17) em (2.3.15), obtemos as estimativas (2.3.9) e (2.3.10), respectivamente.

Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
\|B(\theta, \phi)(t)\|_1 &\leq \int_0^t \|\nabla_x G_\gamma(t-s)(P[\theta]\phi)(s)\|_1 ds \\
&\leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2\gamma}} \|(P[\theta]\phi)(s)\|_1 ds \\
&\leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2\gamma}} \|P[\theta]\|_q \|\phi\|_{q'} ds \\
&\leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2\gamma}} \|\theta\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \|\phi\|_{q'} ds \\
&\leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2\gamma}} s^{-\eta_q} ds \sup_{0 < t < T} t^{\eta_q} \|\theta\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \sup_{0 < t < T} \|\phi\|_{q'} \\
&\leq C T^{1-\frac{1}{2\gamma}-\eta_q} \sup_{0 < t < T} t^{\eta_q} \|\theta\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \sup_{0 < t < T} \|\phi\|_{q'},
\end{aligned}$$

o que dá (2.3.11).

Demonstração de (ii): Considere

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{r} + \frac{1}{q} - \frac{\beta - 1}{n} \text{ e } \delta = \frac{n}{h} - \frac{n}{r}. \quad (2.3.19)$$

Note que $\frac{\beta+\delta}{2\gamma} < 1$ porque $\frac{1}{q} < \frac{2\gamma-1}{n}$. Empregamos a inclusão contínua $\dot{H}_h^{\beta-1+\delta}(\mathbb{R}^n) \subset \dot{H}_r^{\beta-1}(\mathbb{R}^n)$ (veja item (ii) do Lema 1.2.10, página 17), (2.3.2) e depois a desigualdade (1.2.20) com $s = 0$ e $l = 1$ para obter

$$\begin{aligned} \|B(\theta, \phi)\|_{\dot{H}_r^{\beta-1}} &\leq \int_0^t \|G_\gamma(t-s)[\nabla_x \cdot (P[\theta]\phi)(s)]\|_{\dot{H}_r^{\beta-1}} ds \\ &\leq \int_0^t \|G_\gamma(t-s)[\nabla_x \cdot (P[\theta]\phi)(s)]\|_{\dot{H}_h^{\beta-1+\delta}} ds \\ &\leq \int_0^t (t-s)^{-\frac{\beta+\delta}{2\gamma}} \|\nabla_x \cdot (P[\theta]\phi)(s)\|_{\dot{H}_h^{-1}} ds \\ &\leq \int_0^t (t-s)^{-\frac{\beta+\delta}{2\gamma}} \|P[\theta]\phi(s)\|_h ds. \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

Pelas definições de h e δ em (2.3.19), podemos escolher $1 < l < \infty$ de tal maneira que $l > q$, $\frac{1}{h} = \frac{1}{r} + \frac{1}{l}$ e $\frac{1}{l} = \frac{1}{q} - \frac{\beta-1}{n}$. Então, a desigualdade de Hölder, (2.0.3) com $s = \beta - 1$, e a imersão de Sobolev (1.2.16) implicam que

$$\begin{aligned} \|P[\theta]\phi\|_h &\leq \|P[\theta]\|_r \|\phi\|_l \\ &\leq \|\theta\|_{\dot{H}_r^{\beta-1}} \|\phi\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}}. \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Inserindo (2.3.21) em (2.3.20) e observando que $\eta_q + \eta_r < 1$ e $-\frac{\beta+\delta}{2\gamma} - \eta_q + 1 = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \|B(\theta, \phi)\|_{\dot{H}_r^{\beta-1}} &\leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\beta+\delta}{2\gamma}} \|\theta\|_{\dot{H}_r^{\beta-1}} \|\phi\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\beta+\delta}{2\gamma}} s^{-\eta_r - \eta_q} ds \sup_{0 < t < T} t^{\eta_r} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_r^{\beta-1}} \sup_{0 < t < T} t^{\eta_q} \|\phi(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \\ &\leq t^{-\frac{\beta+\delta}{2\gamma} - \eta_r - \eta_q + 1} \int_0^1 (1-s)^{-\frac{\beta+\delta}{2\gamma}} s^{-\eta_r - \eta_q} ds \sup_{0 < t < T} t^{\eta_r} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_r^{\beta-1}} \sup_{0 < t < T} t^{\eta_q} \|\phi(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \\ &\leq C t^{-\eta_r} \sup_{0 < t < T} t^{\eta_r} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_r^{\beta-1}} \sup_{0 < t < T} t^{\eta_q} \|\phi(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}}, \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

a qual é equivalente a (2.3.12).

Finalmente, por (2.3.22) e procedendo similarmente a estimativa acima, temos que

$$\begin{aligned}
\|B(\theta, \phi)\|_{\dot{H}_r^{\beta-1}} &\leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\beta+\delta}{2\gamma}} \|\theta\|_{\dot{H}_r^{\beta-1}} \|\phi\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} ds \\
&\leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\beta+\delta}{2\gamma}} s^{-\eta_q} ds \sup_{0<t<T} t^{\eta_q} \|\phi(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \sup_{0<t<T} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_r^{\beta-1}} \\
&\leq t^{-\frac{\beta+\delta}{2\gamma}-\eta_q+1} \int_0^1 (1-s)^{-\frac{\beta+\delta}{2\gamma}} s^{-\eta_q} ds \sup_{0<t<T} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_r^{\beta-1}} \sup_{0<t<T} t^{\eta_q} \|\phi(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \\
&\leq C \sup_{0<t<T} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_r^{\beta-1}} \sup_{0<t<T} t^{\eta_q} \|\phi(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}},
\end{aligned}$$

o que demonstra (2.3.13). ■

2.4 Demonstração dos Resultados

Nesta seção demonstraremos os resultados apresentados na Seção 2.2. Na próxima subseção mostramos que o problema (0.0.1)-(0.0.2) é localmente bem colocado em $L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$. Na subseção seguinte (Subseção 2.4.2) provamos que a solução local obtida na Seção 2.4.1 é suave para $t > 0$ e que satisfaz um princípio do máximo em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Finalmente, estas subseções serão usadas para provar os resultados enunciados na Seção 2.2.

2.4.1 Boa Colocação Local no Tempo

Na próxima proposição mostramos que o problema (0.0.1)-(0.0.2) é localmente bem colocado no espaço $L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 2.4.1. (Boa colocação local) Assuma a condição (2.2.1) e seja q tal que

$$\max \left\{ \frac{\beta-1}{n}, \frac{\gamma-1}{n} \right\} < \frac{1}{q} < \min \left\{ \frac{2\gamma-\beta}{n}, \frac{n+\beta-2\gamma}{n}, \frac{n+\beta-1}{2n} \right\}. \quad (2.4.1)$$

Se $\theta_0 \in L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ então existe $T > 0$ tal que (0.0.1)-(0.0.2) possui uma única solução branda θ na classe

$$t^{\eta_q} \theta \in BC((0, T); \dot{H}_q^{\beta-1}(\mathbb{R}^n)) \text{ e } \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\eta_q} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} = 0. \quad (2.4.2)$$

Além disso, $\theta \in BC([0, T]; L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n))$ e $\theta(t) \rightarrow \theta_0$ em $L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$, quando $t \rightarrow 0^+$.

Demonstração:

Passo 1: Provaremos apenas a existência de uma única solução branda θ tal que

$$t^{\eta q} \theta \in BC((0, T); \dot{H}_q^{\beta-1}(\mathbb{R}^n)).$$

A demonstração do limite em (2.4.2) será feita no *passo 3* da demonstração da Proposição 2.4.3.

Para $T > 0$, definimos o seguinte espaço de Banach

$$\mathcal{E}_T = \left\{ \theta \text{ mensurável ; } t^{\eta q} \theta \in BC((0, T); \dot{H}_q^{\beta-1}(\mathbb{R}^n)) \right\} \quad (2.4.3)$$

com norma dada por

$$\|\theta\|_{\mathcal{E}_T} = \sup_{0 < t < T} t^{\eta q} \|\theta(\cdot, t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}}. \quad (2.4.4)$$

Devido a igualdade em (2.3.3) e ao fato de $\theta_0 \in L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$, temos que para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $T > 0$ tal que

$$\sup_{0 < t < T} t^{\eta q} \|G_\gamma(t)\theta_0\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \leq \varepsilon. \quad (2.4.5)$$

Seja $0 < \varepsilon < \frac{1}{4K_4}$ onde K_4 é como em (2.3.12) com $r = q$. Por (2.3.12) temos que a forma bilinear $B(\cdot, \cdot)$ em (2.1.4) é contínua no espaço \mathcal{E}_T . Em vista de (2.4.5) podemos aplicar o Lema 1.4.1 em \mathcal{E}_T para obter uma única solução $\theta(x, t)$ para (2.1.4) tal que

$$\sup_{0 < t < T} t^{\eta q} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \leq 2\varepsilon. \quad (2.4.6)$$

Passo 2: Vamos mostrar agora que $\theta \in BC([0, T]; L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n))$. Para tal, observe que a sequência recursiva

$$\theta_1(x, t) = G_\gamma(t)\theta_0(x), \quad (2.4.7)$$

$$\theta_{k+1}(x, t) = \theta_1(x, t) + B(\theta_k, \theta_k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2.4.8)$$

satisfaz (veja a Observação 1.4.2 na página 26)

$$\sup_{0 < t < T} t^{\eta q} \|\theta_k(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \leq 2\varepsilon, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}. \quad (2.4.9)$$

Logo, usando o Lema 2.3.1, a desigualdade (2.3.10) com $p = \frac{n}{2\gamma-\beta}$, e (2.4.9), obtemos

$$\sup_{0 < t < T} \|\theta_1(t)\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} \leq C \|\theta_0\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}},$$

e

$$\begin{aligned} \sup_{0 < t < T} \|\theta_{k+1}(t)\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} &\leq C \|\theta_0\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} + K_2 \sup_{0 < t < T} t^{\eta q} \|\theta_k(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \sup_{0 < t < T} \|\theta_k(t)\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} \\ &\leq C \|\theta_0\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} + 2\varepsilon K_2 \sup_{0 < t < T} \|\theta_k(t)\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}}, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Reduzindo, se necessário, $T > 0$ em (2.4.5), podemos considerar $0 < \varepsilon < \min\{\frac{1}{4K_4}, \frac{1}{2K_2}\}$. Como $2K_2\varepsilon < 1$, um argumento de indução em (2.4.10) mostra que $\{\theta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $L^\infty((0, T); L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n))$ e então existe uma subsequência de $\{\theta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ (denotada da mesma maneira) que converge fracamente para $\tilde{\theta}$ em tal espaço e conseqüentemente em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times [0, T])$. Como $\theta_k \rightarrow \theta$ em \mathcal{E}_T , o que também implica a convergência em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times [0, T])$, temos que $\theta = \tilde{\theta} \in L^\infty((0, T); L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n))$, por unicidade do limite no sentido de distribuição.

Falta mostrar a continuidade no tempo da solução θ no espaço $L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$. Para isso, é suficiente mostrar que cada elemento da seqüência recursiva $\theta_k(t)$ é contínua em $L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$, pois $\theta_k \rightarrow \theta$ em $L^\infty((0, T); L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n))$.

Para mostrar que $\theta_k(t)$ é contínua em $L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$, seja $t \in (0, T)$ fixado e $0 < t_0 < \delta < t$. Suponhamos por indução que $\theta_k(t)$ é contínua em $L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ para todo $t \in (0, T)$. Podemos escrever $\theta_{k+1}(t+t_0) - \theta_{k+1}(t)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \theta_{k+1}(t+t_0) - \theta_{k+1}(t) &= [G_\gamma(t+t_0) - G_\gamma(t)]\theta_0 \\ &\quad - \int_{t+t_0-\delta}^{t+t_0} \nabla_x G_\gamma(s) [(P[\theta_k]\theta_k)(t+t_0-s)] ds \\ &\quad - \int_0^{t+t_0-\delta} \nabla_x G_\gamma(s) [(P[\theta_k]\theta_k)(t+t_0-s) - (P[\theta_k]\theta_k)(t-s)] ds \\ &\quad + \int_{t+t_0-\delta}^t \nabla_x G_\gamma(s) [(P[\theta_k]\theta_k)(t-s)] ds := I_0 - I_1 - I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

Observe que $g_\gamma(x, t) = t^{-\frac{n}{2\gamma}} g_\gamma(t^{-\frac{1}{2\gamma}}x, 1)$ e $\|g_\gamma(t)\|_1 = 1$ (isto garante que $g_\gamma(\cdot, t) * \theta_0$ é uma aproximação da identidade em $L^p(\mathbb{R}^n)$, veja [31]). Portanto,

$$\lim_{t_0 \rightarrow 0^+} \|I_0\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} = 0.$$

Além disso, usando que $\theta_k \in L^\infty((0, T); L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n))$, $t^{\eta_q}\theta_k \in L^\infty((0, T); \dot{H}_q^{\beta-1}(\mathbb{R}^n))$ e que $G_\gamma(s)$ é não singular no intervalo (t, T) , pode-se provar que a norma $\|\cdot\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}}$ do segundo e do quarto termo em (2.4.11) vão a zero quando $\delta \rightarrow 0^+$. De fato, procedendo de maneira similar a demonstração do Lema 2.3.2, podemos estimar o quarto termo de (2.4.11) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \|I_3\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} &\leq C \int_{t+t_0-\delta}^t s^{\eta_q-1} (t-s)^{-\eta_q} ds \\ &\quad \cdot \left(\sup_{0 < t-s < T} (t-s)^{\eta_q} \|\theta_k(t-s)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \right) \left(\sup_{0 < t-s < T} \|\theta_k(t-s)\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} \right) \\ &\leq C (t+t_0-\delta)^{\eta_q-1} \int_{t+t_0-\delta}^t (t-s)^{-\eta_q} ds \\ &= C (\delta-t_0)^{1-\eta_q} (t+t_0-\delta)^{\eta_q-1}. \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

Observe que (2.4.12) vai a zero quando $\delta \rightarrow 0^+$, pois $\eta_q < 1$. Analogamente, mostramos que

$$\|I_1\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} \leq C\delta^{1-\eta_q}(t+t_0-\delta)^{\eta_q-1} \rightarrow 0,$$

quando $\delta \rightarrow 0^+$.

Para mostrar que o $\|I_2\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}}$ vai a zero quando $t_0 \rightarrow 0$, somamos e subtraímos

$$P[\theta_k](t+t_0-s)\theta_k(t-s)$$

para obter

$$\begin{aligned} \|I_2\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} &\leq \int_0^{t+t_0-\delta} \|\nabla_x G_\gamma(s) [P[\theta_k](t+t_0-s)(\theta_k(t+t_0-s) - \theta_k(t-s))]\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} ds \\ &\quad + \int_0^{t+t_0-\delta} \|\nabla_x G_\gamma(s) [P[\theta](t+t_0-s) - P[\theta_k](t-s)] \theta_k(t-s)\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} ds \\ &\leq C \int_0^{t+t_0-\delta} s^{\eta_q-1} \left(\|\theta_k(t+t_0-s)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \|\theta_k(t+t_0-s) - \theta_k(t-s)\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} \right. \\ &\quad \left. + \|\theta_k(t+t_0-s) - \theta_k(t-s)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \|\theta_k(t-s)\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} \right) ds. \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

Agora, desde que θ_k é uniformemente continua no intervalo $[\delta - t_0, t + t_0]$, dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, podemos escolher $\delta < \epsilon$ tal que

$$\|\theta_k(t+t_0-s) - \theta_k(t-s)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} < \epsilon, \text{ quando } s \in (0, t+t_0-\delta) \quad (2.4.14)$$

e

$$\|\theta_k(t+t_0-s) - \theta_k(t-s)\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} < \epsilon, \text{ quando } s \in (0, t+t_0-\delta). \quad (2.4.15)$$

Substituindo (2.4.14) e (2.4.15) em (2.4.13), obtemos

$$\begin{aligned} \|I_2\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} &\leq C\epsilon \left(\int_0^{t+t_0-\delta} s^{\eta_q-1} \|\theta_k(t+t_0-s)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} ds + \int_0^{t+t_0-\delta} s^{\eta_q-1} \|\theta_k(t-s)\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} ds \right) \\ &\leq C\epsilon \int_0^{t+t_0-\delta} s^{\eta_q-1} [(t+t_0-s)^{-\eta_q} + 1] ds \\ &\leq C\epsilon(t+t_0-\delta)^{\eta_q}(1+(t+t_0)^{-\eta_q}) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $\epsilon \rightarrow 0^+$.

Pelas convergências acima, vemos que $\|\theta_{k+1}(t+t_0) - \theta_{k+1}(t)\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} \rightarrow 0$ quando $t_0 \rightarrow 0^+$ (lembre-se que $0 < t_0 < \delta < \epsilon$), e portanto θ_k é contínua em t , como queríamos.

Passo 3: Na sequência provamos que $\theta(t) \rightarrow \theta_0$ em $L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$, quando $t \rightarrow 0^+$.

Graças a continuidade do semigrupo $G_\gamma(t)$ em $L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ é necessário provar apenas que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|B(\theta, \theta)\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} = 0. \quad (2.4.16)$$

Fixemos $q > 1$ satisfazendo as condições (2.4.1) na página 39, e seja $\theta_{0,l} \in L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}_q^{\beta-1}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\theta_{0,l} \rightarrow \theta_0$ em $L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$. Seja ainda θ_l a solução branda para o problema (0.0.1)-(0.0.2) com dado inicial $\theta_{0,l}$, $l \in \mathbb{N}$. Pelo *passo 2*, $\theta_l \in BC((0, T); L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n))$ para todo $l \in \mathbb{N}$. Além disso, procedendo de maneira similar ao *passo 2* (usando (2.3.13) ao invés de (2.3.10)) pode-se provar que $\theta_l \in L^\infty((0, T); L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}_q^{\beta-1}(\mathbb{R}^n))$. Usando estes fatos, o item (i) do Lema 2.3.1 (página 33), e a desigualdade de Hölder, podemos estimar

$$\begin{aligned}
\|B(\theta_l, \theta_l)\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} &\leq \int_0^t \|\nabla_x G_\gamma(t-s)(P[\theta_l]\theta_l)(s)\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} ds \\
&\leq C \int_0^t (t-s)^{\eta_q-1} \|P[\theta_l(s)]\|_q \|\theta_l(s)\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} ds \\
&\leq C \int_0^t (t-s)^{\eta_q-1} ds \left(\sup_{0<t<T} \|\theta_l(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \right) \left(\sup_{0<t<T} \|\theta_l(t)\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} \right) \\
&\leq Ct^{\eta_q}.
\end{aligned} \tag{2.4.17}$$

Tomando $\lim_{t \rightarrow 0^+}$ em (2.4.17) e observando que $\eta_q > 0$, concluímos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|B(\theta_l, \theta_l)\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} = 0.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$ existe $T_\epsilon > 0$ tal que

$$\|B(\theta_l, \theta_l)(t)\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} \leq \frac{\epsilon}{2}, \text{ para todo } t < T_\epsilon < T. \tag{2.4.18}$$

Por outro lado, pela dependência contínua da solução local em relação ao dado inicial (Lema 1.4.1, página 26), e pela continuidade da forma bilinear $B(\cdot, \cdot)$ no espaço $L^\infty((0, T); L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{E}_T$ (\mathcal{E}_T definido como (2.4.3) na página 40) temos, respectivamente, que $\theta_l \rightarrow \theta$ e $B(\theta_l, \theta_l) \rightarrow B(\theta, \theta)$ em $L^\infty((0, T); L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n))$. Portanto, existe $l_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|B(\theta_l, \theta_l)(t) - B(\theta, \theta)(t)\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} \leq \frac{\epsilon}{2}, \text{ para } l > l_0 \text{ e } t \in (0, T_\epsilon). \tag{2.4.19}$$

Seja $l > l_0$ fixado. Então, (2.4.18) e (2.4.19) implicam que

$$\|B(\theta, \theta)(t)\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} \leq \|B(\theta_l, \theta_l)(t) - B(\theta, \theta)(t)\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} + \|B(\theta_l, \theta_l)(t)\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

para todo $t \in (0, T_\epsilon)$, o que prova (2.4.16). ■

A seguir vamos mostrar a persistência em $L^1(\mathbb{R}^n)$ das soluções obtidas na Proposição 2.4.1.

Proposição 2.4.2. Assuma as hipóteses da Proposição 2.4.1. Existe $T > 0$ tal que a solução θ pertence a $BC([0, T]; L^1(\mathbb{R}^n))$ desde que $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração:

Seja q tal que $1 < q' < \frac{n}{2\gamma-\beta}$. Como $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$, por interpolação, temos que $\theta_0 \in L^{q'}(\mathbb{R}^n)$. Usando a desigualdade (2.4.9), a estimativa (2.3.10) com $p = q'$ e (2.3.1), obtemos

$$\sup_{0 < t < T} \|\theta_1(t)\|_{q'} \leq C \|\theta_0\|_{q'},$$

e

$$\begin{aligned} \sup_{0 < t < T} \|\theta_{k+1}(t)\|_{q'} &\leq C \|\theta_0\|_{q'} + K_2 \sup_{0 < t < T} t^{\eta q} \|\theta_k(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \sup_{0 < t < T} \|\theta_k(t)\|_{q'} \\ &\leq C \|\theta_0\|_{q'} + 2K_2 \varepsilon \sup_{0 < t < T} \|\theta_k(t)\|_{q'}, \text{ for all } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Reduzindo $T > 0$ se necessário, podemos considerar $2K_2 \varepsilon < 1$. Por indução, segue que a sequência $\{\theta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $L^\infty((0, T), L^{q'}(\mathbb{R}^n))$. Agora, podemos proceder similarmente ao *passo 2* da Proposição 2.4.1 para obter que

$$\theta \in BC([0, T]; L^{q'}(\mathbb{R}^n)). \quad (2.4.20)$$

Usando (2.3.1), (2.3.11), (2.4.2) e (2.4.20), estimamos

$$\begin{aligned} \sup_{0 < t < T} \|\theta(t)\|_1 &\leq C \|\theta_0\|_1 + \sup_{0 < t < T} \|B(\theta, \theta)\|_1 \\ &\leq C \|\theta_0\|_1 + K_3 T^{1-\frac{1}{2\gamma}-\eta q} \sup_{0 < t < T} t^{\eta q} \|\theta\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \sup_{0 < t < T} \|\theta\|_{q'} < \infty, \end{aligned}$$

como desejado. ■

O tempo de existência T na Proposição 2.4.1 e 2.4.2 pode depender de q . No próximo resultado, mostraremos que de fato podemos tomar o mesmo tempo $T > 0$ para todo q .

Proposição 2.4.3. Assuma as hipóteses da Proposição 2.4.1 e seja θ a solução local dada pela Proposição 2.4.1 com dado inicial $\theta_0 \in L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$. Então existe $T > 0$ tal que

$$t^{nr} \theta \in BC((0, T); \dot{H}_r^{\beta-1}(\mathbb{R}^n)), \text{ para todo } \frac{n}{2\gamma-\beta} < r < \infty, \quad (2.4.21)$$

$$t^{\tilde{n}r} \theta \in BC((0, T); L^r(\mathbb{R}^n)), \text{ para todo } \frac{n}{2\gamma-\beta} < r < \infty. \quad (2.4.22)$$

Além disso,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\eta_r} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_r^{\beta-1}} = 0, \quad (2.4.23)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\tilde{\eta}_r} \|\theta(t)\|_r = 0, \quad (2.4.24)$$

para todo $\frac{n}{2\gamma-\beta} < r < \infty$.

Demonstração:

Passo 1: Primeiramente vamos provar (2.4.21). Para isso, seja q satisfazendo (2.4.1) fixado. Dado $\frac{n}{2\gamma-\beta} < r < \infty$ tal que $\frac{2\gamma-2}{n} - \frac{1}{q} < \frac{1}{r} < \frac{n+\beta-1}{n} - \frac{1}{q}$, podemos usar (2.3.12) e proceder de maneira análoga ao *passo 2* da demonstração da Proposição 2.4.1 e obter que (reduzindo $T > 0$ se necessário)

$$t^{\eta_r} \theta \in BC((0, T); \dot{H}_r^{\beta-1}(\mathbb{R}^n)). \quad (2.4.25)$$

Agora, seja $\frac{2\gamma-2}{n} - \frac{1}{q} < \frac{1}{r} < \frac{2\gamma-1}{n} - \frac{1}{q}$, e considere $r < \tilde{r} < \infty$. Se definirmos $\frac{1}{h} = \frac{1}{q} + \frac{1}{z} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{\beta-1}{n}$ e $\delta = \frac{n}{h} - \frac{n}{\tilde{r}}$, temos que $\delta > 0$, $\frac{\beta+\delta}{2\gamma} < 1$, e $\eta_q + \eta_r < 1$. Assim, podemos estimar

$$\begin{aligned} \|\theta\|_{\dot{H}_{\tilde{r}}^{\beta-1}} &\leq Ct^{-\eta_{\tilde{r}}} \|\theta_0\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} + \int_0^t \|G_\gamma(t-s) \nabla_x \cdot (P[\theta]\theta)(s)\|_{\dot{H}_{\tilde{r}}^{\beta-1}} ds \\ &\leq Ct^{-\eta_{\tilde{r}}} \|\theta_0\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} + C \int_0^t \|G_\gamma(t-s) \nabla_x \cdot (P[\theta]\theta)(s)\|_{\dot{H}_h^{\beta-1+\delta}} ds \\ &\leq Ct^{-\eta_{\tilde{r}}} \|\theta_0\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} + C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\beta+\delta}{2\gamma}} \|\nabla_x \cdot (P[\theta]\theta)(s)\|_{\dot{H}_h^{-1}} ds, \end{aligned} \quad (2.4.26)$$

onde usamos a imersão de Sobolev (1.2.16) e (2.3.2). Usando ainda a desigualdade de Hölder e (1.2.20), obtemos de (2.4.26) que

$$\begin{aligned} \|\theta\|_{\dot{H}_{\tilde{r}}^{\beta-1}} &\leq Ct^{-\eta_{\tilde{r}}} \|\theta_0\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} + C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\beta+\delta}{2\gamma}} \|P[\theta]\theta(s)\|_h ds \\ &\leq Ct^{-\eta_{\tilde{r}}} \|\theta_0\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} + C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\beta+\delta}{2\gamma}} \|P[\theta]\|_q \|\theta(s)\|_z ds \\ &\leq Ct^{-\eta_{\tilde{r}}} \|\theta_0\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} + C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\beta+\delta}{2\gamma}} \|\theta\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \|\theta\|_{\dot{H}_r^{\beta-1}} ds \\ &\leq Ct^{-\eta_{\tilde{r}}} \|\theta_0\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} + C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\beta+\delta}{2\gamma}} s^{-\eta_q - \eta_r} ds \\ &\quad \cdot \left(\sup_{0 < t < T} t^{\eta_q} \|\theta\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \right) \left(\sup_{0 < t < T} t^{\eta_r} \|\theta\|_{\dot{H}_r^{\beta-1}} \right) \\ &\leq Ct^{-\eta_{\tilde{r}}} \|\theta_0\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} + Ct^{-\eta_{\tilde{r}}} \int_0^1 (1-s)^{-\frac{\beta+\delta}{2\gamma}} s^{-\eta_q - \eta_r} ds \\ &\leq Ct^{-\eta_{\tilde{r}}}, \end{aligned} \quad (2.4.27)$$

e portanto, provamos (2.4.25) com \tilde{r} no lugar de r , e o mesmo tempo de existência $T > 0$. Agora, visto que $\frac{\beta-1}{n} < \frac{1}{q}$, podemos usar interpolação e obter (2.4.25) para $r = l$ tal que $\frac{n}{2\gamma-\beta} < l < \tilde{r}$. Como $\tilde{r} > r$ é arbitrário, obtemos (2.4.25) com $r = l$, e o mesmo tempo de existência $T > 0$, para todo $\frac{n}{2\gamma-\beta} < l < \infty$, o que prova (2.4.21).

Passo 2: A demonstração de (2.4.22) segue de maneira análoga a demonstração de (2.4.21), porém, vamos demonstrá-la para a conveniência do leitor. Seja q fixado e satisfazendo (2.4.1). Primeiramente, usando (2.3.9) podemos proceder de maneira análoga ao *passo 2* da demonstração da Proposição 2.4.2 e demonstrar (2.4.22) para todo $\frac{2\gamma-(\beta+1)}{n} - \frac{1}{q} < \frac{1}{r} < \frac{1}{q'}$.

Vamos agora estender o resultado para todo $\frac{n}{2\gamma-\beta} < \tilde{r} < \infty$. Para isso, sejam $\frac{2\gamma-(\beta+1)}{n} - \frac{1}{q} < \frac{1}{r} < \frac{2\gamma-1}{n} - \frac{1}{q}$ e $\tilde{r} > r$. Seja ainda $\frac{1}{h} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Observe que devido as condições sobre r e q , temos que $h \geq 1$, $\frac{1}{2\gamma} + \frac{n}{2\gamma}(\frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{\tilde{r}}) < 1$ e $\eta_q + \tilde{\eta}_r < 1$. Portanto, usando (2.3.1), Lema 1.2.20 e a desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned}
\|\theta\|_{\tilde{r}} &\leq Ct^{-\tilde{\eta}_r} \|\theta_0\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} + \int_0^t |\nabla_x G_\gamma(t-s)P[\theta]\theta|_{\tilde{r}} ds \\
&\leq Ct^{-\tilde{\eta}_r} \|\theta_0\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} + \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2\gamma} - \frac{n}{2\gamma}(\frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{\tilde{r}})} \|P[\theta]\theta\|_h ds \\
&\leq Ct^{-\tilde{\eta}_r} \|\theta_0\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} + \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2\gamma} - \frac{n}{2\gamma}(\frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{\tilde{r}})} \|P[\theta]\|_q \|\theta\|_r ds \\
&\leq Ct^{-\tilde{\eta}_r} \|\theta_0\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} + \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2\gamma} - \frac{n}{2\gamma}(\frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{\tilde{r}})} \|\theta\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \|\theta\|_r ds \\
&\leq Ct^{-\tilde{\eta}_r} \|\theta_0\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} + C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2\gamma} - \frac{n}{2\gamma}(\frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{\tilde{r}})} s^{-\eta_q - \tilde{\eta}_r} ds \left(\sup_{0 < t < T} t^{\eta_q} \|\theta\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \right) \left(\sup_{0 < t < T} t^{\tilde{\eta}_r} \|\theta\|_{\dot{H}_r^{\beta-1}} \right) \\
&\leq Ct^{-\tilde{\eta}_r} \|\theta_0\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} + Ct^{-\tilde{\eta}_r} \int_0^1 (1-s)^{-\frac{1}{2\gamma} - \frac{n}{2\gamma}(\frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{\tilde{r}})} s^{-\eta_q - \tilde{\eta}_r} ds \\
&\leq Ct^{\tilde{\eta}_r},
\end{aligned}$$

o que demonstra (2.4.22) para todo $\tilde{r} > r$ e com o mesmo tempo de existência $T > 0$. Novamente, por interpolação, obtemos (2.4.22) para todo $l = r$ tal que $\frac{n}{2\gamma-\beta} < l < \tilde{r}$, o que finaliza a demonstração de (2.4.22).

Passo 3: Para provar (2.4.23), precisamos da seguinte observação: se $\theta_0 \in L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}_p^{\beta-1}(\mathbb{R}^n)$, com $\frac{n}{2\gamma-\beta} < p < \infty$, então a solução dada na Proposição 2.4.1 é tal que

$$\theta \in BC((0, T); L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}_p^{\beta-1}(\mathbb{R}^n)).$$

Basta proceder analogamente ao *passo 1* ou ao *passo 2* acima, utilizando (2.3.13) no lugar de (2.3.12) ou (2.3.9).

Seja $p > 1$ tal que

$$\max \left\{ \frac{\beta - 1}{n}, \frac{1}{r} \right\} < \frac{1}{p} < \min \left\{ \frac{1}{r'}, \frac{2\gamma - \beta}{n} \right\}. \quad (2.4.28)$$

Seja ainda $\{\theta_{0,l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em $L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}_p^{\beta-1}(\mathbb{R}^n)$ convergindo para θ_0 em $\dot{H}_p^{\beta-1}(\mathbb{R}^n)$ e θ_l a solução branda para (0.0.1)-(0.0.2) com dado inicial $\theta_{0,l}$, para $l \in \mathbb{N}$. Pelo *passo 1* temos que $t^{\eta_r} \theta_l \in BC((0, T); \dot{H}_r^{\beta-1}(\mathbb{R}^n))$, para todo $l \in \mathbb{N}$.

Defina h e δ por

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - \frac{\beta - 1}{n} \text{ e } \delta = \frac{n}{h} - \frac{n}{r}.$$

Pelas condições (2.4.28), temos que $h > 1$ e $\delta > 0$. Usando o item (ii) do Lema 2.3.1 com $p_1 = p$, $p_2 = q$ e $s_1 = s_2 = \beta - 1$, e procedendo de maneira semelhante a demonstração do item (ii) do Lema 2.3.2, obtemos que

$$\begin{aligned} t^{\eta_r} \|\theta_l(t)\|_{\dot{H}_r^{\beta-1}} &\leq C t^{\eta_p} \|\theta_{0,l}\|_{\dot{H}_p^{\beta-1}} + t^{\eta_r} \int_0^t (t-s)^{-\frac{\beta+\delta}{2\gamma}} \|(P[\theta_l]\theta_l)(s)\|_h ds \\ &\leq C t^{\eta_p} \|\theta_{0,l}\|_{\dot{H}_p^{\beta-1}} + C t^{\eta_r} \int_0^t (t-s)^{\eta_p-1} s^{-\eta_r} ds \\ &\quad \cdot \left(\sup_{0 < t < T} t^{\eta_r} \|\theta_l(t)\|_{\dot{H}_r^{\beta-1}} \right) \left(\sup_{0 < t < T} \|\theta_l(t)\|_{\dot{H}_p^{\beta-1}} \right) \\ &\leq C t^{\eta_p} \|\theta_{0,l}\|_{\dot{H}_p^{\beta-1}} + C t^{\eta_r} \int_0^t (t-s)^{\eta_p-1} s^{-\eta_r} ds \\ &\leq C t^{\eta_p}. \end{aligned}$$

Como $\eta_p > 0$ (devido a condição $\beta \geq 1$) segue que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\eta_r} \|\theta_l(t)\|_{\dot{H}_r^{\beta-1}} = 0.$$

Além disso, pela dependência contínua da solução em relação ao dado inicial, $t^{\eta_r} \theta_l(\cdot, t) \rightarrow t^{\eta_r} \theta(\cdot, t)$ em $L^\infty((0, T), \dot{H}_r^{\beta-1}(\mathbb{R}^n))$, quando $l \rightarrow \infty$. Logo dado $\epsilon > 0$ existem $T_\epsilon > 0$ e $l_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\sup_{0 < t < T_\epsilon} t^{\eta_r} \|\theta_l(t)\|_{\dot{H}_r^{\beta-1}} < \frac{\epsilon}{2}, \text{ e} \quad (2.4.29)$$

$$\sup_{0 < t < T_\epsilon} t^{\eta_r} \|\theta_l(t) - \theta(t)\|_{\dot{H}_r^{\beta-1}} < \frac{\epsilon}{2}, \text{ para todo } l > l_0. \quad (2.4.30)$$

Seja $l > l_0$. Por (2.4.29) e (2.4.30) temos que

$$\sup_{0 < t < T_\epsilon} t^{\eta_r} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_r^{\beta-1}} \leq \sup_{0 < t < T_\epsilon} t^{\eta_r} \|\theta_l(\cdot, t) - \theta(\cdot, t)\|_{\dot{H}_r^{\beta-1}} + \sup_{0 < t < T_\epsilon} t^{\eta_r} \|\theta_l(\cdot, t)\|_{\dot{H}_r^{\beta-1}} < \epsilon,$$

o que prova (2.4.23).

Passo 4: Observe que se $\theta_0 \in L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$, para algum $\frac{n}{2\gamma-\beta} < p < \infty$, então, usando (2.3.10), pode-se mostrar que $\theta \in BC((0, T); L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n))$.

Passemos a demonstração de (2.4.24). Seja $p > 1$ tal que $\frac{1}{r} < \frac{1}{p} < \min\{\frac{1}{r'}, \frac{2\gamma-\beta}{n}\}$, e $\{\theta_{0,l}\}_{l \in \mathbb{N}} \subset L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ convergindo para θ_0 em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Seja ainda θ_l a solução branda para (0.0.1)-(0.0.2) com dado inicial $\theta_{0,l}$. Pelo *passo 1* temos que

$$t^{\tilde{\eta}r} \theta_l \in BC((0, t); \dot{H}_r^{\beta-1}(\mathbb{R}^n)).$$

Agora, usando o item (i) do Lema 2.3.1 e a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} t^{\tilde{\eta}r} \|\theta_l(t)\|_r &\leq t^{\tilde{\eta}p} \|\theta_{0,l}\|_p + t^{\tilde{\eta}r} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2\gamma} - \frac{n}{2\gamma p}} \|(P[\theta_l]\theta_l)(s)\|_{\frac{pr}{p+r}} ds \\ &\leq t^{\tilde{\eta}p} \|\theta_{0,l}\|_p + t^{\tilde{\eta}r} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2\gamma} - \frac{n}{2\gamma p}} \|P[\theta_l](s)\|_r \|\theta_l(s)\|_p ds \\ &\leq t^{\tilde{\eta}p} \|\theta_{0,l}\|_p + t^{\tilde{\eta}r} \int_0^t (t-s)^{\eta_p-1} s^{-\eta_r} ds \\ &\quad \cdot \left(\sup_{0 < t < T} t^{\eta_r} \|\theta_l(t)\|_{\dot{H}_r^{\beta-1}} \right) \left(\sup_{0 < t < T} \|\theta_l(s)\|_p \right) \\ &\leq C t^{\tilde{\eta}p} \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow 0^+. \end{aligned} \tag{2.4.31}$$

Novamente pela dependência contínua da solução em relação ao dado inicial temos que

$$t^{\tilde{\eta}r} \theta_l \rightarrow t^{\tilde{\eta}r} \theta \text{ em } L^\infty((0, T); L^r(\mathbb{R}^n)), \text{ quando } l \rightarrow \infty. \tag{2.4.32}$$

Usando (2.4.31) e (2.4.32) e procedendo de forma similar ao final da demonstração do *passo 3* concluímos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\tilde{\eta}r} \|\theta(\cdot, t)\|_r = 0.$$

■

2.4.2 Suavidade Local e Princípio do Máximo

Nesta seção vamos mostrar que as soluções θ obtidas na Proposição 2.4.2 são suaves para qualquer $t \in (0, T)$. Este tipo de regularização é válida para várias equações parabólicas em vários espaços funcionais, como por exemplo L^p , L^p fraco, Morrey, Besov-Morrey, quando soluções brandas são obtidas através de normas do tipo Kato, veja por exemplo [40] e [8]. Mostramos também que a solução de (0.0.1)-(0.0.2) satisfaz um princípio do máximo em $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 2.4.4. Seja $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $k \in (\{0\} \cup \mathbb{N})^n$ e θ a solução obtida na Proposição 2.4.1. Então

$$\partial_t^m \nabla_x^k \theta(x, t) \in C\left((0, T); L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)\right), \quad (2.4.33)$$

para todo $\frac{n}{2\gamma-\beta} < q < \infty$. Em particular, temos que $\theta(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, T))$ e $\theta(t) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ com

$$\|\theta(t)\|_\infty \leq C \|\theta(t)\|_{\frac{n^2}{2\gamma-\beta}}^\alpha \|\nabla_x \theta(t)\|_{\frac{n^2}{2\gamma-\beta}}^{1-\alpha}, \quad (2.4.34)$$

para todo $0 < t < T$, onde $\alpha = \frac{n+\beta-2\gamma}{n}$. Além disso, se $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ então q em (2.4.33) pode ser tomado satisfazendo $1 < q < \infty$.

Antes de demonstrarmos a Proposição 2.4.4 precisamos da seguinte observação:

Observação 2.4.5. Considere as hipóteses do Teorema 2.4.1. Se $\theta_0 \in L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}_p^{\beta-1}(\mathbb{R}^n)$, para algum $\frac{n}{2\gamma-\beta} < p < \infty$, então a solução θ obtida na Proposição 2.4.1 pertence a $BC((0, T); \dot{H}_p^{\beta-1}(\mathbb{R}^n))$, para todo $\frac{n}{2\gamma-\beta} < p < \infty$.

Demonstração da Proposição 2.4.4:

Observe que basta demonstrar que

$$\partial_t^m \nabla_x^k \theta(x, t) \in C\left((0, T); L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}_q^{\beta-1}(\mathbb{R}^n)\right), \quad (2.4.35)$$

para todo $\frac{n}{2\gamma-\beta} < q < \infty$, e arbitrários $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ e $k \in (\{0\} \cup \mathbb{N})^n$. De fato, (2.4.35) e a imersão de Sobolev implicam que $\partial_t^m \nabla_x^k \theta \in C\left((0, T); L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)\right)$, para $\frac{n}{2\gamma-\beta} < q < \infty$.

Na sequência vamos utilizar um argumento de indução em k para mostrar (2.4.35) com $m = 0$. O caso $m \in \mathbb{N}$ segue analogamente usando (2.4.35) com $m = 0$ e uma indução em m . Suponhamos então que (2.4.35) seja válida para todo $0 \leq |k| \leq N - 1$ e $m = 0$, e seja $a = \theta(\sigma)$, para algum $\sigma > 0$. Considere a seguinte formulação integral

$$\theta(t) = G_\gamma(t - \sigma)a + B_\sigma(\theta, \theta), \quad (2.4.36)$$

onde

$$B_\sigma(\theta, \phi) = - \int_\sigma^t G_\gamma(t - s) \nabla_x \cdot (P[\theta]\phi)(s) ds. \quad (2.4.37)$$

Observe que se $T - \sigma$ é suficientemente pequeno então a formulação integral (2.4.36) possui uma única solução no espaço $BC\left((\sigma, T); L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}_q^{\beta-1}(\mathbb{R}^n)\right)$ (veja Observação (2.4.5)). Seja agora $\mathcal{E}_{N,T}$ o espaço de todas as funções mensuráveis $\tilde{\theta}$ tais que

$$\partial_x^i \tilde{\theta} \in BC\left((\sigma, T), L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}_q^{\beta-1}(\mathbb{R}^n)\right), \text{ para todo } i = 0, \dots, N - 1, \quad (2.4.38)$$

$$(t - \sigma)^{\frac{1}{2\gamma}} \partial_x^N \tilde{\theta} \in BC\left((\sigma, T); L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}_q^{\beta-1}(\mathbb{R}^n)\right), \quad (2.4.39)$$

com norma dada por

$$\|h\|_{\mathcal{E}_{N,T}} = \sup_{\sigma < t < T} \left((t - \sigma)^{\frac{1}{2\gamma}} (\|\partial_x^N h\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} + \|\partial_x^N h\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}}) \right) + \sum_{i=0}^{N-1} \sup_{\sigma < t < T} \left(\|\partial_x^i h\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} + \|\partial_x^i h\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \right),$$

onde ∂_x^N representa todas as derivadas de ordem N em relação a x .

Observe que $\partial_x^i G_\gamma(t - \sigma)a \in L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}_q^{\beta-1}(\mathbb{R}^n)$ pois $\partial_x^i G_\gamma(t - \sigma)a = G_\gamma(t - \sigma)\partial_x^i a$, e por hipótese de indução $\partial_x^i a \in L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}_q^{\beta-1}(\mathbb{R}^n)$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|\partial_x^N G_\gamma(t - \sigma)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} &= \|\partial_x g_\gamma(t - \sigma) * \partial_x^{N-1} a\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \\ &\leq C \|\partial_x g_\gamma(t - \sigma)\|_1 \|\partial_x^{N-1} a\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \\ &\leq C(t - \sigma)^{-\frac{1}{2\gamma}} \|\partial_x^{N-1} a\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|\partial_x^N G_\gamma(t - \sigma)\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} &= \|\partial_x g_\gamma(t - \sigma) * \partial_x^{N-1} a\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} \\ &\leq C \|\partial_x g_\gamma(t - \sigma)\|_1 \|\partial_x^{N-1} a\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} \\ &\leq C(t - \sigma)^{-\frac{1}{2\gamma}} \|\partial_x^{N-1} a\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}}, \end{aligned}$$

o que prova que $G_\gamma(t - \sigma)a \in \mathcal{E}_{N,T}$.

Provaremos agora que $B_\sigma(\cdot, \cdot)$ é contínua no espaço $\mathcal{E}_{N,T}$. Para isto observe que devido ao fato de $P[\cdot]$ comutar com derivadas, temos que

$$\partial_x^i B_\sigma(\theta, \phi) = \sum_{j+l=i} B_\sigma(\partial_x^j \theta, \partial_x^l \phi).$$

Assim, se h e δ são como em (2.3.19) com $q = r$, podemos usar a inclusão contínua $\dot{H}_h^{\beta-1+\delta} \subset \dot{H}_q^{\beta-1}$, (2.3.2) e (1.2.20) para obter

$$\begin{aligned} \|\partial_x^i B_\sigma(\theta, \phi)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} &\leq \sum_{j+l=i} \int_\sigma^t \|G_\gamma(t-s) (\nabla_x \cdot (P[\partial_x^j \theta] \partial_x^l \phi)(s))\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} ds \\ &\leq \sum_{j+l=i} \int_\sigma^t \|G_\gamma(t-s) (\nabla_x \cdot (P[\partial_x^j \theta] \partial_x^l \phi)(s))\|_{\dot{H}_h^{\beta-1+\delta}} ds \\ &\leq C \sum_{j+l=i} \int_\sigma^t (t-s)^{-\frac{\beta+\delta}{2\gamma}} \|\nabla_x \cdot (P[\partial_x^j \theta] \partial_x^l \phi)(s)\|_{\dot{H}_h^{-1}} ds \\ &\leq C \sum_{j+l=i} \int_\sigma^t (t-s)^{-\frac{\beta+\delta}{2\gamma}} \|\partial_x^j \theta(s)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \|\partial_x^l \phi(s)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} ds \\ &\leq C \sum_{j+l=i} \int_\sigma^t (t-s)^{-\frac{\beta+\delta}{2\gamma}} ds \left(\sup_{\sigma < t < T} \|\partial_x^j \theta(s)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \right) \left(\sup_{\sigma < t < T} \|\partial_x^l \phi(s)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \right) \\ &\leq C(t - \sigma)^{\eta_q} \|\theta\|_{\mathcal{E}_{N,T}} \|\phi\|_{\mathcal{E}_{N,T}}. \end{aligned} \tag{2.4.40}$$

Além disto,

$$\begin{aligned}
\left\| \partial_x^i B_\sigma(\theta, \phi) \right\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} &\leq \sum_{j+l=i} \int_\sigma^t \left\| \nabla_x G_\gamma(t-s) \left((P[\partial_x^j \theta] \partial_x^l \phi)(s) \right) \right\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} ds \\
&\leq C \sum_{j+l=i} \int_\sigma^t (t-s)^{\eta_q-1} \left\| \partial_x^j \theta \right\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \left\| \partial_x^l \phi(s) \right\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} ds \\
&\leq C \sum_{j+l=i} \int_\sigma^t (t-s)^{\eta_q-1} ds \left(\sup_{\sigma < t < T} \left\| \partial_x^j \theta \right\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \right) \left(\sup_{\sigma < t < T} \left\| \partial_x^l \phi(s) \right\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} \right) \\
&\leq C(t-\sigma)^{\eta_q} \|\theta\|_{\mathcal{E}_{N,T}} \|\phi\|_{\mathcal{E}_{N,T}}.
\end{aligned} \tag{2.4.41}$$

Escrevendo

$$\partial_x^N B_\sigma(\theta, \phi) = \sum_{i+j=N-1} \int_\sigma^t \partial_x G_\gamma(t-\sigma) \left(\nabla_x \cdot (P[\partial_x^i \theta] \partial_x^j \phi)(s) \right) ds$$

e procedendo similarmente a (2.4.40) e (2.4.41), obtemos que

$$\begin{aligned}
\left\| \partial_x^N B_\sigma(\theta, \phi) \right\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} &\leq C(t-\sigma)^{\eta_q-\frac{1}{2\gamma}} \sum_{i+j=N-1} \sup_{\sigma < t < T} \left\| \partial_x^j \theta(t) \right\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \sup_{\sigma < t < T} \left\| \partial_x^i \phi(t) \right\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \\
&\leq C(t-\sigma)^{\eta_q-\frac{1}{2\gamma}} \|\theta\|_{\mathcal{E}_{N,T}} \|\phi\|_{\mathcal{E}_{N,T}},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\left\| \partial_x^N B_\sigma(\theta, \phi) \right\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} &\leq C(t-\sigma)^{\eta_q-\frac{1}{2\gamma}} \sum_{i+j=N-1} \sup_{\sigma < t < T} \left\| \partial_x^j \theta(t) \right\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \sup_{\sigma < t < T} \left\| \partial_x^i \phi(t) \right\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} \\
&\leq C(t-\sigma)^{\eta_q-\frac{1}{2\gamma}} \|\theta\|_{\mathcal{E}_{N,T}} \|\phi\|_{\mathcal{E}_{N,T}}.
\end{aligned}$$

Segue que

$$\|B_\sigma(\theta, \phi)\|_{\mathcal{E}_{N,T}} \leq C(T-\sigma)^{\eta_q} \|\theta\|_{\mathcal{E}_{N,T}} \|\phi\|_{\mathcal{E}_{N,T}}.$$

Portanto, se $T - \sigma$ é suficientemente pequeno, podemos aplicar o Lema 1.4.1 e obter uma única solução $\tilde{\theta}(x, t)$ em $\mathcal{E}_{N,T}$ da formulação integral (2.4.36). Por unicidade de solução no espaço $BC((\sigma, T), L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}_q^{\beta-1}(\mathbb{R}^n))$, temos que $\theta(x, t) = \tilde{\theta}(x, t)$ para $\sigma < t < T$. Observe que se $\tilde{T} < T$ é arbitrário, podemos repetir todo o processo acima com $\tilde{T} - \sigma$ suficientemente pequeno. Portanto,

$$\partial_x^i \theta(x, t) \in C\left((0, T), L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}_q^{\beta-1}(\mathbb{R}^n)\right),$$

para todo $i = 0, \dots, N$, o que prova (2.4.35) com $m = 0$.

A imersão de Sobolev implica também que $\theta(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, T))$. E por fim, a desigualdade (2.4.34) é consequência da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg. ■

Princípio do Máximo

Devido a (2.4.33), temos que a solução θ obtida na Proposição 2.4.1 verifica (0.0.1)-(0.0.2) no sentido clássico e $\partial_t^m \nabla_x^k \theta(x, t) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow \infty$, para todo $0 < t < T$. Além disso, como $\nabla_x \cdot P[\theta] = 0$, podemos usar integração por partes para obter

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \|\theta(t)\|_p^p &= p \int_{\mathbb{R}^n} \theta(t)^{p-1} \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) dx \\ &= p \int_{\mathbb{R}^n} \theta(t)^{p-1} (-(-\Delta)^\gamma \theta - \nabla_x \cdot (P[\theta]\theta)) dx \\ &= -p \int_{\mathbb{R}^n} \theta(t)^{p-1} (-\Delta)^\gamma \theta dx \leq - \int_{\mathbb{R}^n} \left| (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} (\theta^{\frac{p}{2}}) \right|^2 dx, \end{aligned} \quad (2.4.42)$$

para todo $t \in (0, T)$. A última desigualdade pode ser encontrada em [19, 21] (veja também [39]). Assim, a norma L^p de $\theta(t)$ é não-crescente em $(0, T)$. Se $\theta_0 \in L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ e $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$, obtemos respectivamente que

$$\|\theta(t)\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} \leq \|\theta(t_0)\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} \text{ e } \|\theta(t)\|_1 \leq \|\theta(t_0)\|_1, \quad (2.4.43)$$

para $0 < t_0 \leq t < T$.

Fazendo $t_0 \rightarrow 0^+$ em (2.4.43), segue que a solução $\theta(x, t)$ satisfaz

$$\|\theta(t)\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} \leq \|\theta_0\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} \text{ e } \|\theta(t)\|_1 \leq \|\theta_0\|_1, \quad (2.4.44)$$

para todo $t \in (0, T)$, quando $\theta_0 \in L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ e $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$, respectivamente.

2.4.3 Demonstração do Teorema 2.2.1

Passo 1: Existência Global

Provaremos apenas que a solução é global em $L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$. O caso em que $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ segue de maneira semelhante, usando a segunda desigualdade em (2.4.44).

Começamos fazendo a seguinte observação: se $\frac{n}{2\gamma-\beta} < q < \infty$ e $\theta_0 \in L^q(\mathbb{R}^n)$ então

$$t^{\eta q} \|G_\gamma(t)\theta_0\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \leq C t^{\tilde{\eta} q} \|\theta_0\|_q \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow 0^+. \quad (2.4.45)$$

Portanto, para $\theta_0 \in L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$, o tempo de existência $T > 0$ obtido na Proposição 2.4.1 pode ser controlado pela norma $\|\theta_0\|_q$. De fato, ele pode ser tomado como

$$T = \left(\frac{\varepsilon}{C \|\theta_0\|_q} \right)^{\frac{1}{\tilde{\eta} q}}, \quad (2.4.46)$$

onde $0 < \varepsilon < \frac{1}{4K_4}$ e $C > 0$ é como em (2.4.45).

Seja $\theta_0 \in L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$. Da Proposição 2.4.1, existe $M_0 > 0$, $T_0 > 0$ e uma única solução branda para (0.0.1)-(0.0.2) em $(0, T_0)$ tal que

$$\sup_{0 < t < T_0} t^{\eta_q} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \leq M_0 \text{ e } \sup_{0 < t < T_0} \|\theta(t)\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} \leq \|\theta_0\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}}, \quad (2.4.47)$$

onde (2.4.44) foi usada para obter a segunda desigualdade em (2.4.47).

Denotemos

$$T = \sup \left\{ \tilde{T} > 0; \theta \in C((0, \tilde{T}); \dot{H}_q^{\beta-1}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)), \sup_{0 < t < \tilde{T}} t^{\eta_q} \|\theta\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} < \infty \text{ e } \sup_{0 < t < \tilde{T}} \|\theta\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} \leq \|\theta_0\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} \right\}. \quad (2.4.48)$$

Vamos provar que de fato $T = \infty$. Para isto, suponhamos por contradição que $T < \infty$, e seja $a = \theta(T - \epsilon)$ onde $0 < \epsilon < T$ será escolhido depois. Pela Proposição 2.4.3, temos que $a \in L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$, para todo $\frac{n}{2\gamma-\beta} < q < \infty$. Além disso, se $\epsilon < \frac{T}{2}$ obtemos por (2.4.43) que $\|\theta(T - \epsilon)\|_q \leq \|\theta(\frac{T}{2})\|_q$. Portanto, tomando $\epsilon < T/2$ e a como dado inicial, temos que dado $0 < M_1 < \frac{1}{4K_4}$ (K_4 é como em (2.3.10)) existe $T_1 > 0$ e uma única solução branda $\tilde{\theta}$ para (0.0.1)-(0.0.2) tal que

$$\tilde{\theta} \in C((T - \epsilon, T_1 + T - \epsilon); L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}_q^{\beta-1}(\mathbb{R}^n))$$

e

$$\sup_{T - \epsilon < t < T_1 + T - \epsilon} (t - (T - \epsilon))^{\eta_q} \|\tilde{\theta}(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \leq 2M_1$$

$$\sup_{T - \epsilon < t < T_1 + T - \epsilon} \|\tilde{\theta}(t)\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} \leq \|\theta(T - \epsilon)\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}}.$$

Por unicidade (veja Proposição 2.4.1) segue que $\theta = \tilde{\theta}$ em $(T - \epsilon, T)$. De (2.4.46), podemos escolher $T_1 = \min \left\{ \left(\frac{M_1}{C \|\theta(\frac{T}{2})\|_q} \right)^{\frac{1}{\eta_q}}, T \right\}$. Tomando $0 < \epsilon < \min\{\frac{T}{2}, T_1\}$ e $T_2 = T_1 + T - \epsilon$, temos que $T < T_2$ e obtemos uma solução

$$\theta \in C((0, T_2); L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}_q^{\beta-1}(\mathbb{R}^n))$$

tal que

$$\sup_{0 < t < \tilde{T}} t^{\eta_q} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} < \infty \text{ e } \sup_{0 < t < \tilde{T}} \|\theta(t)\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} \leq \|\theta_0\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}},$$

para todo $0 < \tilde{T} < T_2$, o que contradiz a maximalidade de T em (2.4.48). Portanto, $T = \infty$ como desejávamos.

Passo 2: Unicidade

Sejam θ_1 e θ_2 duas soluções para o problema (0.0.1)-(0.0.2) (com o mesmo dado inicial $\theta_0 \in L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$) na classe

$$BC([0, \infty); L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)) \cap \left\{ t^{\eta_q} \theta \in C((0, \infty); \dot{H}_q^{\beta-1}(\mathbb{R}^n)) \text{ e } \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\eta_q} \|\theta\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} = 0 \right\}. \quad (2.4.49)$$

Começamos mostrando que existe $\tilde{T} > 0$ tal que $\theta_1(\cdot, t) = \theta_2(\cdot, t)$ para todo $t \in [0, \tilde{T}]$. Observe que para todo $T > 0$ temos que

$$\sup_{0 < t < T} t^{\eta_q} \|\theta_i(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} < \infty \text{ para } i = 1, 2. \quad (2.4.50)$$

Subtraindo as equações integrais satisfeitas por θ_1 e θ_2 , calculando a norma $\|\cdot\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}}$, e usando (2.3.12) na página 36, obtemos

$$\begin{aligned} t^{\eta_q} \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} &\leq t^{\eta_q} \|B(\theta_1 - \theta_2, \theta_1)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} + t^{\eta_q} \|B(\theta_2, \theta_1 - \theta_2)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \\ &\leq K_4 \left(\sup_{0 < t < T} t^{\eta_q} \|\theta_1(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} + \sup_{0 < t < T} t^{\eta_q} \|\theta_2(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \right) \\ &\quad \cdot \left(\sup_{0 < t < T} t^{\eta_q} \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \right). \end{aligned} \quad (2.4.51)$$

Desde que $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\eta_q} \|\theta_i\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} = 0$ para $i = 1, 2$, existe $\tilde{T} > 0$ tal que

$$K_4 \left(\sup_{0 < t < \tilde{T}} t^{\eta_q} \|\theta_1(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} + \sup_{0 < t < \tilde{T}} t^{\eta_q} \|\theta_2(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \right) \leq K, \quad (2.4.52)$$

com K suficientemente pequeno. Substituindo (2.4.52) em (2.4.51), obtemos que

$$\sup_{0 < t < \tilde{T}} t^{\eta_q} \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \leq K \sup_{0 < t < \tilde{T}} t^{\eta_q} \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}},$$

e portanto $\theta_1(\cdot, t) = \theta_2(\cdot, t)$ q.t.p em x , para todo t em $[0, \tilde{T}]$.

Seja agora $\bar{T} = \max \{T > 0; \theta_1(\cdot, t) = \theta_2(\cdot, t), \text{ q.t.p em } x, \text{ para todo } t \in [0, T]\}$. Se $0 < \delta < \frac{\bar{T}}{2}$ então θ_i é uniformemente limitada do intervalo $[\bar{T} - \delta, \bar{T} + \delta]$ para $\dot{H}_q^{\beta-1}(\mathbb{R}^n)$; ou seja, existem constantes $M_i > 0$ tais que

$$\|\theta_i(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \leq M_i, \text{ para todo } \bar{T} - \delta \leq t \leq \bar{T} + \delta.$$

Além disto,

$$\theta_i(t) = G_\gamma(t) \theta_i(\bar{T} - \delta) - \int_{\bar{T} - \delta}^t G_\gamma(t - s) (\nabla_x \cdot (P[\theta_i] \theta_i))(s) ds,$$

para todo $t \in (\bar{T} - \delta, \bar{T} + \delta)$. Como $\theta_1(\cdot, \bar{T} - \delta) = \theta_2(\cdot, \bar{T} - \delta)$, segue que

$$\begin{aligned}
\|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} &\leq \int_{\bar{T}-\delta}^t \|G_\gamma(t-s) (\nabla_x \cdot (P[\theta_1 - \theta_2]\theta_1 + P[\theta_2](\theta_1 - \theta_2))) (s)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} ds \\
&\leq C \int_{\bar{T}-\delta}^t (t-s)^{n_q-1} \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \left(\|\theta_1(s)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} + \|\theta_2(s)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \right) ds \\
&\leq C \int_{\bar{T}-\delta}^t (t-s)^{n_q-1} ds \left(\sup_{\bar{T}-\delta < t < \bar{T}+\delta} \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \right) \\
&\quad \cdot \left(\sup_{\bar{T}-\delta < t < \bar{T}+\delta} \|\theta_1(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} + \sup_{\bar{T}-\delta < t < \bar{T}+\delta} \|\theta_2(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \right) \\
&\leq 2C\delta^{n_q} M \sup_{\bar{T}-\delta < t < \bar{T}+\delta} \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}}, \tag{2.4.53}
\end{aligned}$$

onde $M = \max\{M_1, M_2\}$. Assim, se $\delta \leq \min\left\{\left(\frac{1}{2CM}\right)^{\frac{1}{n_q}}, \frac{\bar{T}}{2}\right\}$ com C como em (2.4.53), obtemos que

$$\sup_{\bar{T}-\delta < t < \bar{T}+\delta} \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \leq A \sup_{\bar{T}-\delta < t < \bar{T}+\delta} \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}},$$

onde A é uma constante positiva menor que 1. Assim $\theta_1(\cdot, t) = \theta_2(\cdot, t)$ q.t.p. em x , para todo $t \in (\bar{T}-\delta, \bar{T}+\delta)$. Desde que $\theta_1(\cdot, t) = \theta_2(\cdot, t)$ para todo $t \in (0, \bar{T}-\delta)$ concluímos que $\theta_1(\cdot, t) = \theta_2(\cdot, t)$ q.t.p. em x para todo $t \in (0, \bar{T} + \delta)$, o que contradiz a definição de \bar{T} . Portanto, $\bar{T} = \infty$ e $\theta_1(\cdot, t) = \theta_2(\cdot, t)$ para todo $t \in [0, \infty)$, como queríamos.

Passo 3: Decaimento global da solução em $L^q(\mathbb{R}^n)$

A seguir provaremos o decaimento (2.2.5). Para isso vamos seguir ideias de [9] e [41].

Pelo *Passo 1* temos que

$$t^{n_q}\theta \in C((0, \infty); \dot{H}_q^{\beta-1}(\mathbb{R}^n)) \text{ e } \theta \in BC([0, \infty); L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n))$$

Assim, em particular, (2.4.33) e (2.4.34) são verdadeiras para $T = \infty$ e

$$\|\theta(\cdot, t)\|_\infty < \infty, \text{ para todo } t > 0. \tag{2.4.54}$$

Pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, obtemos

$$\|\phi\|_2 \leq C \|\phi\|_1^\alpha \left\| (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} \phi \right\|_2^{1-\alpha} \text{ com } \alpha = \frac{2\gamma}{n+2\gamma}. \tag{2.4.55}$$

Fazendo $\phi = \theta^{\frac{q}{2}}$ em (2.4.55), segue que

$$\|\theta\|_q^{q\left(\frac{n+2\gamma}{n}\right)} \leq C \|\theta\|_{\frac{q}{2}}^{\frac{2q\gamma}{n}} \left\| (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} (\theta^{\frac{q}{2}}) \right\|_2^2. \tag{2.4.56}$$

Seja $\psi_q(t) = \|\theta(t)\|_q^q$. De (2.4.42) e (2.4.56), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi_q \leq -C(\psi_q^{\frac{1}{2}})^{-\frac{4\gamma}{n}} \psi_q^{\frac{n+2\gamma}{n}}. \quad (2.4.57)$$

Seja ainda $q_k = \frac{n}{2\gamma-\beta} 2^k$ para $k \geq 0$. Usando a primeira desigualdade em (2.4.44) e um argumento de indução, podemos resolver a desigualdade diferencial (2.4.57) para obter

$$\psi_{q_k}(t) \leq M_{q_k} t^{-\frac{n}{2} \left(\frac{2^k-1}{\gamma} \right)}, \quad (2.4.58)$$

onde

$$M_{q_0} = \|\theta_0\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}}^{\frac{n}{2\gamma-\beta}} \text{ e } M_{q_k} = \left(\frac{n(2^k-1)}{2C\gamma} \right)^{\frac{n}{2\gamma}} M_{\frac{q_k}{2}}^2, \text{ para } k \in \mathbb{N}. \quad (2.4.59)$$

De fato, o caso $k = 0$ é exatamente a primeira desigualdade de (2.4.44). Suponha agora que (2.4.58) seja válida para $k = 0, \dots, l-1$. Usando a hipótese de indução (observe que $\frac{q_l}{2} = q_{l-1}$) em (2.4.57) com q_l no lugar de q , obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi_{q_l} \leq -CM_{\frac{q_l}{2}}^{-\frac{4\gamma}{n}} t^{(2^l-2)} \psi_{q_l}^{\frac{n+2\gamma}{n}}. \quad (2.4.60)$$

Resolvendo (2.4.60), encontramos

$$-\frac{n}{2\gamma} \psi_{q_l}^{-\frac{2\gamma}{n}} \leq -CM_{\frac{q_l}{2}}^{-\frac{4\gamma}{n}} (2^l-1)^{-1} t^{(2^l-1)},$$

ou seja,

$$\psi_{q_l} \leq \left(\frac{n(2^l-1)}{2\gamma C} \right)^{\frac{n}{2\gamma}} M_{\frac{q_l}{2}}^2 t^{-\frac{n}{2\gamma}(2^l-1)} = M_{q_l} t^{-\frac{n}{2} \left(\frac{2^l-1}{\gamma} \right)},$$

o que prova (2.4.58) para $k = l$.

De (2.4.59), temos que

$$\begin{aligned} M_{q_k}^{\frac{1}{q_k}} &= \left(\frac{n(2^k-1)}{2C\gamma} \right)^{\frac{n}{2\gamma q_k}} M_{q_{k-1}}^{\frac{1}{q_{k-1}}} = \left(\frac{n(2^k-1)}{2C\gamma} \right)^{\frac{n}{2\gamma 2^k q_0}} \left(\frac{n(2^{k-1}-1)}{2C\gamma} \right)^{\frac{n}{2\gamma 2^{k-1} q_0}} M_{q_{k-2}}^{\frac{1}{q_{k-2}}} = \dots \\ &= \left[\prod_{i=1}^k \left(\frac{n(2^i-1)}{2C\gamma} \right)^{\frac{n}{2^i 2\gamma q_0}} \right] (M_{q_0})^{\frac{1}{q_0}}, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

e então

$$\begin{aligned} \|\theta(t)\|_{2^k q_0} &\leq M_{q_k}^{\frac{1}{q_k}} t^{-\frac{n}{2} \left(\frac{2^k-1}{\gamma q_k} \right)} \\ &= \left(\prod_{i=1}^k \left(\frac{n 2^i - 1}{2 C \gamma} \right)^{\frac{n}{2^i 2\gamma q_0}} \right) (M_{q_0})^{\frac{1}{q_0}} t^{-\frac{n}{2\gamma q_0} \left(\frac{2^k-1}{2^k} \right)}, \end{aligned} \quad (2.4.61)$$

onde $q_0 = \frac{n}{2\gamma-\beta}$. Fazendo $k \rightarrow \infty$ em (2.4.61) e usando (2.4.54), obtemos

$$\|\theta(t)\|_\infty \leq C \|\theta_0\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} t^{-\frac{2\gamma-\beta}{2\gamma}}. \quad (2.4.62)$$

Agora, interpolando a primeira desigualdade em (2.4.44) com (2.4.62), obtemos

$$\|\theta(t)\|_q \leq C t^{-\tilde{\eta}_q}, \text{ para todo } \frac{n}{2\gamma-\beta} \leq q \leq \infty,$$

como queríamos.

A demonstração da estimativa (2.2.7) para $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ segue de maneira similar. Basta usar $\|\theta(t)\|_1 \leq \|\theta_0\|_1$ e a sequência $q_k = 2^k$ ao invés de $\|\theta(t)\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} \leq \|\theta_0\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}}$ e $q_k = \frac{n}{2\gamma-\beta} 2^k$. ■

2.4.4 Demonstração do Teorema 2.2.5

Para demonstrar (2.2.8), seja $\theta_0 \in L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ e $\epsilon > 0$ arbitrário. Seja ainda $\theta_{0,1} = \theta_0 1_{|x| \leq A}$ e $\theta_{0,2} = \theta_0 1_{|x| \geq A}$, onde A é escolhido tal que

$$\theta_{0,1} \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$$

e

$$\theta_{0,2} \in L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n), \text{ com } \|\theta_{0,2}\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} \leq \epsilon.$$

Considere o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} + (-\Delta)^\gamma \theta_1 + ((u_1 + u_2) \nabla_x) \theta_1 &= 0, \quad u_1 = P[\theta_1] \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial t} + (-\Delta)^\gamma \theta_2 + ((u_1 + u_2) \nabla_x) \theta_2 &= 0, \quad u_2 = P[\theta_2]. \end{aligned}$$

Procedendo de maneira similar a demonstração do Teorema 2.2.1, pode-se provar que o sistema acima possui soluções $\theta_1(x, t)$ e $\theta_2(x, t)$ com $\theta_1(x, 0) = \theta_{0,1}$ e $\theta_2(x, 0) = \theta_{0,2}$. Por unicidade de soluções temos que $\theta(x, t) = \theta_1(x, t) + \theta_2(x, t)$. Além disso, como $\nabla \cdot u_1 = \nabla \cdot u_2 = 0$ pode-se provar que

$$\begin{aligned} \|\theta_1\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} &\leq C t^{n_p} \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty, \text{ e} \\ \|\theta_2\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} &\leq \|\theta_{0,2}\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} \leq \epsilon, \text{ para todo } t > 0, \end{aligned}$$

para algum $\frac{n}{2\gamma-\beta} < p < \infty$. Portanto,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\theta\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \|\theta_1\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} + \limsup_{t \rightarrow \infty} \|\theta_{0,2}\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} \leq \epsilon. \quad (2.4.63)$$

o que prova (2.2.8). ■

2.4.5 Demonstração do Teorema 2.2.7

Para fazer a demonstração, precisaremos da seguinte observação:

Observação 2.4.6. Seja θ a solução dada na Proposição 2.4.1 com tempo de existência $T > 0$. Pelo *passo 1* da demonstração do Teorema 2.2.1, θ pode ser estendida usando a Proposição 2.4.1 e resolvendo (0.0.1)-(0.0.2) consecutivamente com dados iniciais $\theta(\frac{T}{2})$, $\theta(\frac{T}{2} + T_1)$, $\theta(\frac{T}{2} + 2T_1)$ e assim por diante, onde $T_1 = \min\left\{\left(\frac{\varepsilon}{C\|\theta(\frac{T}{2})\|_q}\right)^{\frac{1}{\eta q}}, T\right\}$, $\varepsilon = \frac{1}{8K_4}$, e C é como em (2.4.45). Assim, é suficiente provar o Teorema 2.2.7 para todo $t \in (0, T)$, isto é, para a solução local $\theta(x, t)$ dada na Proposição 2.4.1. De fato, o caso $t \in (0, \infty)$, segue aplicando o resultado para $t \in (0, T)$ repetidamente.

Demonstração de (i): Seja $\psi(x, t) = G_\gamma(t)\theta_0$. Temos que $\theta_0(-x) = -\theta_0(x)$ é equivalente a

$$-\widehat{\theta}_0(\xi) = [\theta_0(-x)]^\wedge(\xi) = \widehat{\theta}_0(-\xi) \text{ em } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \quad (2.4.64)$$

Segue de (2.4.64) que

$$\begin{aligned} [\psi(-x, t)]^\wedge(\xi) &= e^{-t|\xi|^{2\gamma}} \widehat{\theta}_0(-\xi) \\ &= -e^{-t|\xi|^{2\gamma}} \widehat{\theta}_0(\xi) = -\widehat{\psi(x, t)}(\xi), \end{aligned}$$

o que mostra que $G_\gamma(t)\theta_0$ é ímpar, para cada $t > 0$ fixado. Também temos que se θ é ímpar então $\nabla_x \theta$ é par. De fato,

$$\nabla_x(\theta(x, t)) = \nabla_x(-\theta(-x, t)) = (\nabla_x \theta)(-x, t).$$

Seja agora $A = (a_{jk})$, onde a_{kj} é como em (0.0.3). Recordemos que

$$\widehat{u}(\xi) = P(\xi)\widehat{\theta}(\xi, t),$$

onde

$$P(\xi) = (\tilde{P}_1(\xi), \dots, \tilde{P}_n(\xi)) \text{ com } \tilde{P}_k(\xi) = \sum_{j=1}^n a_{jk} \frac{\xi_j^i}{|\xi|^2} P_j(\xi).$$

Segue que

$$\widehat{u}(-\xi, t) = (\widehat{u}_1(-\xi, t), \dots, \widehat{u}_n(-\xi, t))\widehat{\theta}(-\xi, t) = P(-\xi)\widehat{\theta}(-\xi, t)$$

com

$$\begin{aligned} P(-\xi) &= \frac{i}{|\xi|^2} [-\xi_1 P_1(-\xi), \dots, -\xi_n P_n(-\xi)] A \\ &= \frac{i}{|\xi|^2} [\xi_1 P_1(\xi), \dots, \xi_n P_n(\xi)] A = P(\xi), \end{aligned}$$

pois P_j 's são ímpares por hipótese. Portanto, $u = P[\theta]$ é ímpar quando θ é ímpar, e então $(u \cdot \nabla_x \theta) = (P[\theta] \cdot \nabla_x \theta)$ é ímpar também. Também, não é difícil mostrar que se θ é ímpar, então $B(\theta, \theta)$ também o é.

Agora, usando argumentos de indução, pode-se provar que cada elemento θ_k da sequência de Picard (2.4.7)-(2.4.8) (veja página 40), é ímpar. Como $\theta_k \rightarrow \theta$ na norma (2.4.4), definida na página 40, temos que $\theta_k \rightarrow \theta$ para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$, e todo $t \in (0, T)$. Segue então que $\theta(x, t)$ é ímpar para cada $t \in (0, T)$ fixado, já que convergência pontual preserva a propriedade de ser ímpar.

Demonstração de (ii): Como θ_0 e $\hat{g}_\gamma(\xi, t) = e^{-|\xi|^{2\gamma}t}$ são radiais para todo $t > 0$, então $G_\gamma(t)\theta_0$ é radial. Além disso, para θ radialmente simétrica, temos que

$$\begin{aligned} (u \cdot \nabla_x \theta) &= \sum_{j=1}^n u_j \partial_{x_j} \theta = \frac{\theta'(r)}{r} \sum_{j=1}^n u_j x_j \\ &= i \frac{\theta'(r)}{r} \sum_{j=1}^n (\partial_{\xi_j} \widehat{u}_j)^\vee = i \frac{\theta'(r)}{r} \sum_{j=1}^n (\partial_{\xi_j} \tilde{P}_j(\xi) \widehat{\theta})^\vee \\ &= i \frac{\theta'(r)}{r} (\widehat{\theta}(\xi, t) (\operatorname{div}_\xi (P(\xi)))^\vee). \end{aligned} \quad (2.4.65)$$

Assim, se θ e $(\operatorname{div}_\xi (P(\xi)))$ são radiais então $(u \cdot \nabla \theta)$ também o é. Usando que $G_\gamma(t)$ preserva radialidade, obtemos que o termo bilinear $B(\theta, \theta)$ de (2.1.4) é radialmente simétrico para cada $t \in (0, T)$, desde que θ também seja. Por indução, obtemos que cada função θ_k definida em (2.4.7)-(2.4.8) é também radialmente simétrica. Como θ_k converge para θ em quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$, para cada $t \in (0, T)$, obtemos que θ é radialmente simétrica, como desejávamos.

Demonstração de (iii): Começamos lembrando que uma função é ímpar se e somente se, sua transformada de Fourier é ímpar.

Para provar o item (iii) suponhamos, por absurdo que $\theta(x, t)$ é ímpar. Se θ_0 é ímpar então $G_\gamma(t)\theta_0$ é ímpar, para cada $t > 0$. Além disso, se cada $P_j(\xi)$ é par então

$$\begin{aligned} P(-\xi) &= \frac{i}{|\xi|^2} [-\xi_1 P_1(-\xi), \dots, -\xi_n P_n(-\xi)] A \\ &= \frac{i}{|\xi|^2} [-\xi_1 P_1(\xi), \dots, -\xi_n P_n(\xi)] A = -P(\xi), \end{aligned}$$

ou seja, $P(\xi)$ é ímpar. Segue então que $u = P[\theta]$ e $(u \cdot \nabla_x \theta)$ são pares, o que implica que $B(\theta, \theta)$ é par. Portanto $\theta = G_\gamma(t)\theta_0 + B(\theta, \theta)$ é a soma de uma função ímpar com uma função par, o que é absurdo.

Analogamente, se θ_0 é par e $P_j(\xi)$ são ímpares, então θ não é par.

Demonstração de (iv): Suponhamos que θ_0 é não-radial e que $\operatorname{div}_\xi(P(\xi))$ é radial. Suponhamos, por absurdo, que θ é radial. Procedendo similarmente a demonstração do item (ii) temos que $G_\gamma(t)\theta_0$ não é radial e $B(\theta, \theta)$ é radial. Portanto θ não pode ser radial.

Analogamente, se θ_0 e θ são radiais e $\operatorname{div}_\xi(P(\xi))$ não é radial, então $G_\gamma\theta_0$ é radial, mas $B(\theta, \theta)$ não é radial. Segue então que θ não é radial, pois é a soma de uma função radial com uma não-radial.

■

Capítulo 3

Comportamento Assintótico para o Caso

$$0 \leq \beta \leq 1$$

O objetivo deste capítulo é analisar o comportamento assintótico de soluções do problema (0.0.1)-(0.0.2) para o caso $0 \leq \beta \leq 1$. Assim como no Capítulo 2, vamos assumir que $n \geq 2$ e que cada símbolo $P_j(\xi)$ em (0.0.4) pertence a $C^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ e satisfaz a condição (2.0.1). Pela Observação 2.2.6 na página 32, temos que existe solução global para o problema (0.0.1)-(0.0.2) em $L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ para $0 \leq \beta < 1 < 2\gamma < \frac{n+\beta+1}{2}$ (veja o Teorema 2.2.1 para o caso $\beta = 1$). Além disso, valem os decaimentos (2.2.5) e (2.2.7). Mostramos que a solução fundamental $G_\gamma(x, t)$ da parte linear de (0.0.1) para o caso $0 \leq \beta \leq 1$ determina o comportamento assintótico da solução θ , quando $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$. Precisamente falando, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.0.1. (Comportamento Assintótico) Sejam $k \in (\{0\} \cup \mathbb{N})^n$, $0 \leq \beta \leq 1 < 2\gamma < \frac{(n+\beta+1)}{2}$, e θ a única solução global com dado inicial $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$. Seja ainda $M = \int_{\mathbb{R}^n} \theta_0(x) dx$. Dados quaisquer $0 \leq \mu < \frac{\beta}{n+\beta-2\gamma}$ e $1 \leq q \leq \infty$, então

$$\|\nabla_x^k \theta(x, t) - \nabla_x^k G_\gamma(t)\theta_0\|_q \leq Ct^{-\left(\frac{|k|}{2\gamma} + \tilde{\eta}_q + \left(\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1\right) - \mu\left(\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1\right)\right)}, \quad (3.0.1)$$

onde $\tilde{\eta}_q = \frac{2\gamma-\beta}{2\gamma} - \frac{n}{2\gamma q}$. Além disso,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{|k|}{2\gamma} + \tilde{\eta}_q + \left(\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1\right)} \|\nabla_x^k \theta(x, t) - M \nabla_x^k g_\gamma(x, t)\|_q = 0. \quad (3.0.2)$$

Em particular, tomando $q = 1$ e $k = 0$ em (3.0.1) e (3.0.2), obtemos respectivamente que

$$\|\theta(x, t) - G_\gamma(t)\theta_0\|_1 \leq Ct^{-\mu\left(\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1\right)} \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} \|\theta(x, t) - M g_\gamma(x, t)\|_1 = 0. \quad (3.0.3)$$

Observação 3.0.2. Um ponto crucial para a demonstração do Teorema 3.0.1 é a demonstração de estimativas globais para as derivadas da solução θ em $L^p(\mathbb{R}^n)$ (veja Seção 3.2). Para provarmos estimativas globais para as derivadas da solução no caso $\beta > 1$, precisaríamos primeiro obter estimativas globais da solução nos espaços $\dot{H}_p^{\beta-1}(\mathbb{R}^n)$. Porém, devido a falta de um princípio do máximo para as normas destes espaços, não conseguimos provar tais estimativas, e conseqüentemente, não provamos (3.0.1) e (3.0.3) quando $\beta > 1$.

3.1 Comportamento Assintótico da Parte Linear

Com o objetivo de provar o Teorema 3.0.1, precisamos de um resultado de decaimento de $G_\gamma(t)\theta_0$ (e suas derivadas) nos espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$. Este pode ser encontrado em [9] e incluímos a prova para a conveniência do leitor.

Lema 3.1.1. Sejam $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $k \in (\{0\} \cup \mathbb{N})^n$, $0 < \gamma < \infty$, e $1 \leq p \leq \infty$. Se θ_0 é tal que $|x|^{m+1}\theta_0 \in L^r(\mathbb{R}^n)$ e $(1 + |x|^m)\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, onde $1 \leq r < n/(n-1)$ e $r \leq p$, então

$$\|\nabla_x^k G_\gamma(t)\theta_0 - S_\gamma^k(t)\|_p \leq C t^{-\frac{m+|k|+1}{2\gamma} - \frac{n}{2\gamma}(\frac{1}{r} - \frac{1}{p})} \| |x|^{m+1}\theta_0 \|_r, \quad (3.1.1)$$

onde

$$S_\gamma^k(x, t) := \sum_{|d| \leq m} \frac{(-1)^{|d|}}{d!} \left(\int_{\mathbb{R}^n} x^d \theta_0(x) dx \right) (\nabla_x^{d+k} g_\gamma)(x, t).$$

Sejam $1 \leq q \leq \infty$. Assumindo somente que $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\tilde{\eta}_q + \frac{|k|}{2\gamma} + \frac{n+\beta}{2\gamma} - 1} \|\nabla_x^k G_\gamma(t)\theta_0 - M \nabla_x^k (g_\gamma(x, t))\|_q = 0, \quad (3.1.2)$$

onde $M := \int_{\mathbb{R}^n} \theta_0(x) dx$ e $\tilde{\eta}_q = \frac{2\gamma-\beta}{2\gamma} - \frac{n}{2\gamma q}$. Em particular, para $q = 1$, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{|k|}{2\gamma}} \|\nabla_x^k G_\gamma(t)\theta_0 - M \nabla_x^k (g_\gamma(x, t))\|_1 = 0.$$

Demonstração:

Devido as hipóteses $|x|^{m+1}\theta_0 \in L^r(\mathbb{R}^n)$ e $(1 + |x|^m)\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, podemos escrever θ_0 da seguinte forma (veja [26] para mais detalhes):

$$\theta_0 = \sum_{|d| \leq m} \frac{(-1)^{|d|}}{d!} \left(\int_{\mathbb{R}^n} x^d \theta_0(x) dx \right) \nabla_x^d \delta_0 + \sum_{|d|=m+1} \nabla_x^d F_d \quad (3.1.3)$$

onde δ_0 é o Delta de Dirac centrado em 0, $\{F_d\} \in L^r(\mathbb{R}^n)$ e satisfaz

$$\|F_d\|_r \leq C \| |x|^{m+1}\theta_0 \|_r. \quad (3.1.4)$$

Defina l por $\frac{1}{p} = \frac{1}{l} + \frac{1}{r} - 1$. Como $p \geq r$, temos que $l \geq 1$. Assim, usando a desigualdade de Young com $\frac{1}{p} = \frac{1}{l} + \frac{1}{r} - 1$, temos por (3.1.3) que

$$\begin{aligned}
\left\| \nabla_x^k G_\gamma(t)\theta_0 - S_\gamma^k(x, t) \right\|_p &= \left\| \sum_{|d|=m+1} (\nabla_x^k g_\gamma(x, t) * \nabla_x^d F_d) \right\|_p \\
&\leq \left\| \sum_{|d|=m+1} (\nabla_x^{k+d} g_\gamma(x, t) * F_d) \right\|_p \\
&\leq \sum_{|d|=m+1} \|\nabla_x^{k+d} g_\gamma(x, t)\|_l \|F_d\|_r \\
&\leq C t^{-\frac{m+|k|+1}{2\gamma} - \frac{n}{2\gamma}(\frac{1}{r} - \frac{1}{p})} \| |x|^{m+1} \theta_0 \|_r,
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

onde usamos (3.1.4) em (3.1.5).

Para provar a igualdade (3.1.2), observe que se $\theta_0 \in C_c^\infty$ então $|x|\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Aplicando (3.1.1) com $p = q$, $r = 1$ e $m = 0$, obtemos

$$t^{\tilde{\eta}_q + \frac{|k|}{2\gamma} + \frac{n+\beta}{2\gamma} - 1} \|\nabla_x^k G_\gamma(t)\theta_0 - M\nabla_x^k(g_\gamma(x, t))\|_q \leq C t^{-\frac{1}{2\gamma}} \| |x| \theta_0 \|_1 \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

Dado $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, existe uma seqüência $\{\theta_{0,m}\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\theta_{0,m} \rightarrow \theta_0$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$. Então podemos estimar

$$\begin{aligned}
\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\tilde{\eta}_q + \frac{|k|}{2\gamma} + \frac{n+\beta}{2\gamma} - 1} \|\nabla_x^k G_\gamma(t)\theta_0 - M\nabla_x^k(g_\gamma(x, t))\|_q \\
\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\tilde{\eta}_q + \frac{|k|}{2\gamma} + \frac{n+\beta}{2\gamma} - 1} \|\nabla_x^k G_\gamma(t)(\theta_0 - \theta_{0,m}) + \nabla_x^k G_\gamma(t)\theta_{0,m} - M\nabla_x^k(g_\gamma(x, t))\|_q \\
\leq C \|\theta_0 - \theta_{0,m}\|_1 \\
+ \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\tilde{\eta}_q + \frac{|k|}{2\gamma} + \frac{n+\beta}{2\gamma} - 1} \|\nabla_x^k G_\gamma(t)\theta_{0,m} - M\nabla_x^k(g_\gamma(x, t))\|_q \\
= C \|\theta_0 - \theta_{0,m}\|_1 < \varepsilon
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

para m suficientemente grande. Em (3.1.6), usamos o fato de $\theta_{0,m} \rightarrow \theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, quando $m \rightarrow \infty$, e portanto, pela estimativa ((2.3.1), pg. 33), temos que

$$\sup_{t>0} t^{\tilde{\eta}_q + \frac{|k|}{2\gamma} + \frac{n+\beta}{2\gamma} - 1} \|\nabla_x^k G_\gamma(t)(\theta_{0,m} - \theta_0)\|_q \leq C \|\theta_{0,m} - \theta_0\|_1.$$

Finalmente, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ em (3.1.7) obtemos (3.1.2). ■

3.2 Decaimento das Soluções e suas Derivadas

Na Observação 2.2.6, comentamos sobre o decaimento da solução θ nos espaços L^p para o dado inicial em $L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ e também para dado inicial em $L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$. Nesta seção, vamos

mostrar os decaimentos das derivadas de θ em L^p para dados iniciais neste mesmos espaços.

Proposição 3.2.1. Seja $\tilde{\eta}_q = \frac{2\gamma-\beta}{2\gamma} - \frac{n}{2\gamma q}$, $0 \leq \beta \leq 1 < 2\gamma < \frac{n+\beta+1}{2}$ e θ a solução do problema (0.0.1)-(0.0.2) com dado inicial θ_0 em $L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$. Se $k \in (\{0\} \cup \mathbb{N})^n$ e $\frac{n}{2\gamma-\beta} \leq q \leq \infty$, então

$$t^{\tilde{\eta}_q + \frac{|k|}{2\gamma}} \nabla_x^k \theta \in BC((0, \infty); L^q(\mathbb{R}^n)). \quad (3.2.1)$$

Além disso, se $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ e $1 \leq q \leq \infty$, então θ satisfaz

$$t^{\tilde{\eta}_q + \frac{|k|}{2\gamma} + \frac{n+\beta}{2\gamma} - 1} \nabla_x^k \theta \in BC((0, \infty); L^q(\mathbb{R}^n)). \quad (3.2.2)$$

Demonstração:

Faremos a demonstração em cinco passos. Observe que o caso $|k|=0$ segue de (2.2.5) e (2.2.7). Vamos usar indução sobre $|k|$ para provar (3.2.1) e (3.2.2) com $\frac{n}{2\gamma-\beta} \leq q < \infty$ e $1 < q < \infty$, respectivamente. Mais precisamente, assumindo que (3.2.1) (com $\frac{n}{2\gamma-\beta} \leq q < \infty$) e (3.2.2) (com $1 < q < \infty$) são verdadeiras para $|k| = m \in \mathbb{N}$, vamos mostrar que

$$t^{\tilde{\eta}_q + \frac{|k|+h}{2\gamma}} (\partial_x^h \circ \nabla_x^k) \theta \in BC((0, \infty); L^q(\mathbb{R}^n)), \text{ para todo } \frac{n}{2\gamma-\beta} \leq q < \infty,$$

e

$$t^{\tilde{\eta}_q + \frac{|k|+h}{2\gamma} + \frac{n+\beta}{2\gamma} - 1} (\partial_x^h \circ \nabla_x^k) \theta \in BC((0, \infty); L^q(\mathbb{R}^n)), \text{ para todo } 1 < q < \infty,$$

onde $0 < h \leq \frac{2\gamma-1}{n}$ e $\partial_x^h := (-\Delta)^{\frac{h}{2}}$. Em seguida, obtemos (3.2.1) e (3.2.2) para $|k| = m+1$, tomando $0 < \frac{1}{m_0} = h < \frac{2\gamma-1}{n}$, aplicando o operador ∂_x^h m_0 -vezes, e usando a desigualdade

$$\left\| \nabla_x^k \theta \right\|_q \leq C \left\| \partial_x^{|k|} \theta \right\|_q.$$

Passo 1: $\theta_0 \in L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ e $\frac{n}{2\gamma-\beta} \leq q < \infty$

Aplicando o operador $\partial_x^h \circ \nabla_x^k$ na equação integral (2.1.4) (página 30) e logo em seguida calculando a norma $\|\cdot\|_q$, obtemos

$$\begin{aligned} \left\| \partial_x^h \circ \nabla_x^k \theta(t) \right\|_q &\leq C t^{-(\tilde{\eta}_q + \frac{h+|k|}{2\gamma})} \left\| \theta_0 \right\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} + \left\| \int_{t/2}^t (\partial_x^h \nabla_x G_\gamma(t-s)) ((\nabla_x^k (P[\theta] \theta))(s)) ds \right\|_q \\ &\quad + \left\| \int_0^{t/2} (\partial_x^h \circ \nabla_x^k (\nabla_x G_\gamma)(t-s)) ((P[\theta] \theta)(s)) ds \right\|_q \\ &:= C t^{-(\tilde{\eta}_q + \frac{h+|k|}{2\gamma})} \left\| \theta_0 \right\|_{\frac{n}{2\gamma-\beta}} + I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Para estimar I_1 , sejam p e r tais que

$$\frac{1-\beta}{n} < \frac{1}{p} < \frac{2\gamma-\beta}{n} - \frac{2\gamma-1}{n^2} \text{ e } \frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1-\beta}{n}. \quad (3.2.4)$$

Desde que $\frac{n}{2\gamma-\beta} \leq q$ e

$$\frac{2\gamma-\beta}{n} - \frac{2\gamma-1}{n^2} < \frac{2\gamma-\beta}{n} < \frac{n+1-2\gamma}{n} < \frac{n+1-\beta}{n},$$

temos que $r > 1$, $r' > q$ e $\tilde{\eta}_p - \frac{h}{2\gamma} > 0$. Logo, usando a desigualdade de Hölder e a estimativa (2.3.1) (veja página 33), obtemos

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{h+1}{2\gamma} - \frac{n}{2\gamma r}} \left\| (\nabla_x^k (P[\theta]\theta))(s) \right\|_{\frac{qr}{r+q}} ds \\ &= \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{h+1}{2\gamma} - \frac{n}{2\gamma r}} \left\| \sum_{0 \leq i \leq k} C_{i,k} \left(\nabla_x^i \theta(s) \right) \left(\nabla_x^{k-i} P[\theta](s) \right) \right\|_{\frac{qr}{r+q}} ds \\ &\leq \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{h}{2\gamma} + \tilde{\eta}_p - 1} \left(\sum_{0 \leq i \leq k} C_{i,k} \left\| \nabla_x^i \theta(s) \right\|_q \left\| P[\nabla_x^{k-i} \theta(s)] \right\|_r \right) ds, \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

onde em (3.2.5) usamos o fato do operador $P[\theta]$ comutar com derivadas. Usando a desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev para estimar $\|P[\nabla_x^{k-i} \theta(s)]\|_r$ em (3.2.5), obtemos que

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C \sum_{0 \leq i \leq k} \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{h}{2\gamma} + \tilde{\eta}_p - 1} \left\| \nabla_x^i \theta(s) \right\|_q \left\| \nabla_x^{k-i} \theta(s) \right\|_p ds \\ &\leq C \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{h}{2\gamma} + \tilde{\eta}_p - 1} s^{-\tilde{\eta}_q - \tilde{\eta}_p - \frac{|k|}{2\gamma}} ds \\ &\quad \cdot \left(\sum_{0 \leq i \leq k} \left(\sup_{t>0} t^{\tilde{\eta}_q + \frac{|i|}{2\gamma}} \left\| \nabla_x^i \theta(t) \right\|_q \right) \left(\sup_{t>0} t^{\tilde{\eta}_p + \frac{|k|-|i|}{2\gamma}} \left\| \nabla_x^{k-i} \theta(t) \right\|_p \right) \right) \\ &\leq C t^{-\tilde{\eta}_q - \tilde{\eta}_p - \frac{|k|}{2\gamma} + 1} \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{h}{2\gamma} + \tilde{\eta}_p - 1} ds = C t^{-\tilde{\eta}_q - \frac{|k|+h}{2\gamma}}. \end{aligned}$$

Para estimar I_2 , seja $\frac{2\gamma-2\beta}{n} < \frac{1}{p} < \frac{2\gamma-\beta}{n}$ e $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1-\beta}{n}$. Então, $r > 1$, $r' > q$ e $\tilde{\eta}_p + \tilde{\eta}_q < 1$, e podemos estimar I_2 da seguinte forma:

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C \int_0^{t/2} (t-s)^{-\frac{h+|k|+1}{2\gamma} - \frac{n}{2\gamma r}} \left\| (P[\theta]\theta)(s) \right\|_{\frac{qr}{r+q}} ds \\ &\leq C \int_0^{t/2} (t-s)^{-\frac{h+|k|+1}{2\gamma} - \frac{n}{2\gamma r}} \|\theta(s)\|_q \|P[\theta](s)\|_r ds \\ &\leq C \int_0^{t/2} (t-s)^{-\frac{h+|k|}{2\gamma} + \tilde{\eta}_p - 1} s^{-\tilde{\eta}_q - \tilde{\eta}_p} ds \left(\sup_{t>0} t^{\tilde{\eta}_q} \|\theta(t)\|_q \right) \left(\sup_{t>0} t^{\tilde{\eta}_p} \|\theta(t)\|_p \right) \\ &\leq C t^{-\frac{h+|k|}{2\gamma} + \tilde{\eta}_p - 1} \int_0^{t/2} s^{-\tilde{\eta}_q - \tilde{\eta}_p} ds = C t^{-(\tilde{\eta}_q + \frac{h+|k|}{2\gamma})}. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Finalmente, substituindo (3.2.5) e (3.2.6) em (3.2.3), conseguimos a estimativa

$$t^{(\tilde{\eta}_q + \frac{h+|k|}{2\gamma})} \left\| (\partial_x^h \circ \nabla_x^k) \theta(t) \right\|_q \leq C.$$

Passo 2: $\theta_0 \in L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ e $q = \infty$.

Usando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg com $\alpha = (2\gamma - \beta)/n$ e (3.2.1) com $p = \frac{n^2}{2\gamma-\beta}$ (já demonstrada no passo 1), temos que

$$\begin{aligned} \left\| \nabla_x^k \theta \right\|_\infty &\leq C \left\| \nabla_x^k \theta \right\|_{\frac{n^2}{2\gamma-\beta}}^{1-\alpha} \left\| \nabla_x (\nabla_x^k \theta) \right\|_{\frac{n^2}{2\gamma-\beta}}^\alpha \\ &\leq C t^{-(1-\alpha)(\tilde{\eta}_p + \frac{|k|}{2\gamma})} t^{-\alpha(\tilde{\eta}_p + \frac{|k|+1}{2\gamma})} \\ &= C t^{-(\frac{2\gamma-\beta}{2\gamma} + \frac{|k|}{2\gamma})}. \end{aligned}$$

Passo 3: $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ e $1 < q < \infty$.

Aplicamos novamente o operador $\partial_x^h \circ \nabla_x^k$ na equação integral (2.1.4) e em seguida calculamos a norma $\|\cdot\|_q$ para obter

$$\begin{aligned} \left\| (\partial_x^h \circ \nabla_x^k) \theta(t) \right\|_q &\leq C t^{-\tilde{\eta}_q - \frac{h+|k|}{2\gamma} - (\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1)} \|\theta_0\|_1 + \left\| \int_{t/2}^t (\partial_x^h \nabla_x G_\gamma(t-s)) ((\nabla_x^k(P[\theta]\theta))(s)) ds \right\|_q \\ &\quad + \left\| \int_0^{t/2} (\partial_x^h \circ \nabla_x^k (\nabla_x G_\gamma)(t-s)) ((P[\theta]\theta)(s)) ds \right\|_q \\ &:= C t^{-\tilde{\eta}_q - \frac{h+|k|}{2\gamma} - (\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1)} \|\theta_0\|_1 + I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Usando p e r como em (3.2.4) e a hipótese de indução (veja página 64), estimamos I_1 como segue:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{h+1}{2\gamma} - \frac{n}{2\gamma r}} \left\| (\nabla_x^k(P[\theta]\theta))(s) \right\|_{\frac{qr}{r+q}} ds \\ &\leq C \sum_{0 \leq i \leq k} \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{h}{2\gamma} + \tilde{\eta}_p - 1} \left\| \nabla_x^i \theta(s) \right\|_q \left\| P[\nabla_x^{k-i} \theta(s)] \right\|_r ds \\ &\leq C \sum_{0 \leq i \leq k} \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{h}{2\gamma} + \tilde{\eta}_p - 1} s^{-\tilde{\eta}_q - \tilde{\eta}_p - \frac{|k|}{2\gamma} - (\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1)} ds \\ &\quad \cdot \left(\sup_{t>0} t^{\tilde{\eta}_q + \frac{|i|}{2\gamma} + \frac{n+\beta}{2\gamma} - 1} \left\| \nabla_x^i \theta(t) \right\|_q \right) \left(\sup_{t>0} t^{\tilde{\eta}_p + \frac{|k|-|i|}{2\gamma}} \left\| \nabla_x^{k-i} \theta(t) \right\|_p \right) \\ &\leq C t^{-\tilde{\eta}_q + \tilde{\eta}_p - \frac{|k|}{2\gamma} - (\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1)} \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{h}{2\gamma} + \tilde{\eta}_p - 1} ds = C t^{-\tilde{\eta}_q - \frac{|k|+h}{2\gamma} - (\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1)}. \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Para estimar I_2 , seja $\max\{\frac{n}{n-\beta}, \frac{n}{2\gamma-\beta}\} < p < \frac{n}{1-\beta}$ e $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1-\beta}{n} < 1$. Como $\tilde{\eta}_q + \tilde{\eta}_p + (\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1) < 1$ temos que

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq C \int_0^{t/2} (t-s)^{-\frac{h+|k|+1}{2\gamma} - \frac{n}{2\gamma r}} \|(P[\theta]\theta)(s)\|_{\frac{qr}{r+q}} ds \\
&\leq C \int_0^{t/2} (t-s)^{-\frac{h+|k|}{2\gamma} + \tilde{\eta}_p - 1} \|\theta(s)\|_q \|\theta(s)\|_p ds \\
&\leq C \int_0^{t/2} (t-s)^{-\frac{h+|k|}{2\gamma} + \tilde{\eta}_p - 1} s^{-\tilde{\eta}_q - \tilde{\eta}_p - (\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1)} ds \left(\sup_{t>0} t^{\tilde{\eta}_q + (\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1)} \|\theta(t)\|_q \right) \left(\sup_{t>0} t^{\tilde{\eta}_p} \|\theta(t)\|_p \right) \\
&\leq Ct^{-\frac{h+|k|}{2\gamma} + \tilde{\eta}_p - 1} \int_0^{t/2} s^{-\tilde{\eta}_q - \tilde{\eta}_p - (\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1)} ds = Ct^{-\tilde{\eta}_q - \frac{h+|k|}{2\gamma} - (\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1)}. \tag{3.2.9}
\end{aligned}$$

Substituindo (3.2.8) e (3.2.9) em (3.2.7), obtemos

$$t^{\tilde{\eta}_q + \frac{h+|k|}{2\gamma} + (\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1)} \left\| (\partial_x^h \circ \nabla_x^k) \theta(t) \right\|_q \leq C.$$

Passo 4: $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ e $q = 1$.

Aplicamos ∂_x^k na equação integral (2.1.4) para obter (3.2.7) com $h = 0$ e $q = 1$. Desta vez, podemos estimar os termos I_1 e I_2 em (3.2.7) usando (3.2.2) com $q = p$ e $1 < p < \frac{n}{n+1-2\gamma}$ (já provado no passo 3) e (3.2.1) com $q = r' > \frac{n}{2\gamma-\beta}$, onde $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1-\beta}{n} < 1$. De fato,

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{1}{2\gamma}} \left\| (\nabla_x^k (P[\theta]\theta))(s) \right\|_1 ds \\
&\leq C \sum_{0 \leq i \leq k} \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{1}{2\gamma}} \|(P[\nabla_x^{k-i}\theta])(s)\|_r \|\nabla_x^k \theta(s)\|_{r'} ds \\
&\leq C \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{1}{2\gamma}} s^{-(\tilde{\eta}_p + \tilde{\eta}_{r'}) - \frac{|k|}{2\gamma} - (\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1)} ds \\
&\quad \cdot \sum_{0 \leq i \leq k} \left(\sup_{t>0} t^{\tilde{\eta}_p + (\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1) + \frac{|k|-|i|}{2\gamma}} \|\nabla_x^i \theta(t)\|_p \right) \left(\sup_{t>0} t^{\tilde{\eta}_{r'} + \frac{|k|}{2\gamma}} \|\nabla_x^{k-i} \theta(t)\|_{r'} \right) \tag{3.2.10}
\end{aligned}$$

$$\leq Ct^{-(1-\frac{1}{2\gamma}) - \frac{|k|}{2\gamma}} \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{1}{2\gamma}} ds = Ct^{-\frac{|k|}{2\gamma}}, \tag{3.2.11}$$

e

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq C \int_0^{t/2} (t-s)^{-\frac{|k|+1}{2\gamma}} \|(P[\theta]\theta)(s)\|_1 ds \\
&\leq C \int_0^{t/2} (t-s)^{-\frac{|k|+1}{2\gamma}} s^{-\tilde{\eta}_p - \tilde{\eta}_{r'} - (\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1)} ds \left(\sup_{t>0} t^{\tilde{\eta}_{r'}} \|\theta(t)\|_{r'} \right) \left(\sup_{t>0} t^{\tilde{\eta}_p + (\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1)} \|\theta(t)\|_p \right) \\
&\leq Ct^{-\frac{|k|+1}{2\gamma}} \int_0^{t/2} s^{-(1-\frac{1}{2\gamma})} ds = Ct^{-\frac{|k|}{2\gamma}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$t^{\frac{|k|}{2\gamma}} \|\nabla_x^k \theta(\cdot, t)\|_1 \leq C.$$

Passo 5: $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{\frac{n}{2\gamma-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ e $q = \infty$.

Como no *passo 2*, usando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg com $\alpha = (2\gamma - \beta)/n$, e (3.2.2) com $p = \frac{n^2}{2\gamma-\beta}$ (já provada no passo 3), obtemos

$$\begin{aligned} \|\nabla_x^k \theta\|_\infty &\leq C \|\nabla_x^k \theta\|_{\frac{n^2}{2\gamma-\beta}}^{1-\alpha} \|\nabla_x (\nabla_x^k \theta)\|_{\frac{n^2}{2\gamma-\beta}}^\alpha \\ &\leq C t^{-(1-\alpha)(\tilde{\eta}_p + \frac{|k|}{2\gamma} + \frac{n+\beta}{2\gamma} - 1)} t^{-\alpha(\tilde{\eta}_p + \frac{|k|+1}{2\gamma} + \frac{n+\beta}{2\gamma} - 1)} \\ &= C t^{-\frac{2\gamma-\beta}{2\gamma} - \frac{|k|}{2\gamma} - (\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1)} = C t^{-\frac{|k|}{2\gamma} - \frac{n}{2\gamma}}. \end{aligned}$$

■

3.3 Demonstração do Teorema 3.0.1

Começamos mostrando que a desigualdade (3.0.1) é verdadeira para o caso $\frac{n}{2\gamma-\beta} \leq q < \infty$.

Pelas estimativas (3.2.1) e (3.2.2), temos que, para quaisquer $0 \leq \mu \leq 1$, $\frac{n}{2\gamma-\beta} \leq q < \infty$ e $k \in (\{0\} \cup \mathbb{N})^n$,

$$t^{\tilde{\eta}_q + \mu(\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1) + \frac{|k|}{2\gamma}} \nabla_x^k \theta \in BC((0, \infty); L^q(\mathbb{R}^n)). \quad (3.3.1)$$

Também temos que

$$\begin{aligned} \|\nabla_x^k \theta(x, t) - \nabla_x^k G_\gamma(t) \theta_0\|_q &= \|\nabla_x^k B(\theta, \theta)\|_q \leq \left\| \int_{t/2}^t (\nabla_x G_\gamma(t-s) (\nabla_x^k (P[\theta] \theta))(s)) ds \right\|_q \\ &+ \left\| \int_0^{t/2} (\nabla_x^k (\nabla_x G_\gamma)(t-s)) ((P[\theta] \theta)(s)) ds \right\|_q = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Como $\frac{n}{2\gamma-\beta} \leq q$, podemos escolher $\frac{n}{n+1-2\gamma} < p < \frac{n}{1-\beta}$ tal que $0 < \frac{1}{p} - \frac{1-\beta}{n} < 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1-\beta}{n} < 1$. Usando (3.3.1) e (3.2.2), obtemos

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C \int_{t/2}^t (t-s)^{\tilde{\eta}_p-1} s^{-\tilde{\eta}_p-\tilde{\eta}_q-\frac{|k|}{2\gamma}-(\mu+1)(\frac{n+\beta}{2\gamma}-1)} ds \\ &\cdot \left(\sum_{0 \leq i \leq k} \left(\sup_{t>0} t^{\tilde{\eta}_q + \frac{|i|}{2\gamma} + \mu(\frac{n+\beta}{2\gamma}-1)} \|\nabla_x^i \theta(t)\|_q \right) \left(\sup_{t>0} t^{\tilde{\eta}_p + \frac{|k|-|i|}{2\gamma} + \frac{n+\beta}{2\gamma}-1} \|\nabla_x^{k-i} \theta(t)\|_p \right) \right) \\ &\leq C t^{-\tilde{\eta}_p-\tilde{\eta}_q-\frac{|k|}{2\gamma}-(\mu+1)(\frac{n+\beta}{2\gamma}-1)} \int_{t/2}^t (t-s)^{\tilde{\eta}_p-1} ds \\ &\leq C t^{-(\frac{|k|}{2\gamma} + \tilde{\eta}_q + (\frac{n+\beta}{2\gamma}-1)) - \mu(\frac{n+\beta}{2\gamma}-1)}. \end{aligned}$$

Para I_2 , considere $1 \leq p < \frac{n}{1-\beta}$ tal que $\mu(\frac{n+\beta}{2\gamma} - \frac{2\gamma}{n}) + \frac{n+\beta}{n} < \frac{1}{q} + \frac{1}{p} < 1$. Então

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C t^{\tilde{\eta}_p - \frac{|k|}{2\gamma} - 1} \int_0^{t/2} s^{-\tilde{\eta}_q - \tilde{\eta}_p - (\mu+1)(\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1)} ds \\ &\quad \cdot \left(\sup_{t>0} t^{\tilde{\eta}_q + \mu(\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1)} \|\theta(t)\|_q \right) \left(\sup_{t>0} t^{\tilde{\eta}_p + (\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1)} \|\theta(t)\|_p \right) \\ &\leq C t^{-\left(\frac{|k|}{2\gamma} + \tilde{\eta}_q + (\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1)\right) - \mu(\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1)}. \end{aligned}$$

Agora, para provar o caso $1 \leq q < \frac{n}{2\gamma-\beta}$, é suficientemente provar (3.0.1) para $q = 1$ e então obter os outros casos usando interpolação.

Para provar o caso $q = 1$ usamos (3.2.2) com $p = \frac{n}{n+1-2\gamma}$ e (3.3.1) com $q = r' = \frac{n}{2\gamma-\beta}$ (observe que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1-\beta}{n}$) para estimar

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{1}{2\gamma}} \left\| (\nabla_x^k (P[\theta]\theta))(s) \right\|_1 ds \\ &\leq C \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{1}{2\gamma}} \sum_{0 \leq i \leq k} \left\| (P[\nabla_x^i \theta])(s) \right\|_r \left\| \nabla_x^{k-i} \theta(s) \right\|_{r'} ds \\ &\leq C \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{1}{2\gamma}} \sum_{0 \leq i \leq k} \left\| \nabla_x^i \theta(s) \right\|_p \left\| \nabla_x^{k-i} \theta(s) \right\|_{r'} ds \\ &\leq C \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{1}{2\gamma}} s^{-\frac{|k|}{2\gamma} - \mu(\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1) - 1 + \frac{1}{2\gamma}} ds \\ &\quad \cdot \left(\sum_{0 \leq i \leq k} \left(\sup_{t>0} t^{1 - \frac{1}{2\gamma} + \frac{|i|}{2\gamma}} \left\| \nabla_x^i \theta(t) \right\|_p \right) \left(\sup_{t>0} t^{\frac{|k|-|i|}{2\gamma} + \mu(\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1)} \left\| \nabla_x^{k-i} \theta(t) \right\|_{r'} \right) \right) \\ &\leq C t^{-\frac{|k|}{2\gamma} - \mu(\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1) - 1 + \frac{1}{2\gamma}} \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{1}{2\gamma}} ds = C t^{-\frac{|k|}{2\gamma} - \mu(\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1)}, \end{aligned}$$

e desde que $\mu < \frac{\beta}{n+\beta-2\gamma}$ podemos estimar

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_0^{t/2} (t-s)^{-\frac{|k|+1}{2\gamma}} \left\| (P[\theta]\theta)(s) \right\|_1 ds \\ &\leq C \int_0^{t/2} (t-s)^{-\frac{|k|+1}{2\gamma}} \|\theta(s)\|_p \|\theta(s)\|_{r'} ds \\ &\leq C \int_0^{t/2} (t-s)^{-\frac{|k|+1}{2\gamma}} s^{-\mu(\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1) - 1 + \frac{1}{2\gamma}} ds \left(\sup_{t>0} t^{1 - \frac{1}{2\gamma}} \|\theta(t)\|_p \right) \left(\sup_{t>0} t^{\mu(\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1)} \|\theta(t)\|_{r'} \right) \\ &\leq C t^{-\frac{|k|+1}{2\gamma}} \int_0^{t/2} s^{-\mu(\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1) - 1 + \frac{1}{2\gamma}} ds \\ &= C t^{-\frac{|k|}{2\gamma} - \mu(\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$t^{\frac{|k|}{2\gamma} + \mu(\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1)} \|B(\theta, \theta)\|_1 \leq C.$$

O limite (3.0.2) segue diretamente do Lema 3.1.1 (veja (3.1.2)) juntamente com as estimativas das derivadas de $B(\theta, \theta)$ em L^q obtidas acima. Com efeito,

$$\begin{aligned}
t^{\frac{|k|}{2\gamma} + \tilde{\eta}_q + (\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1)} \|\nabla_x^k \theta(x, t) - M \nabla_x^k g_\gamma(x, t)\|_q &\leq t^{\tilde{\eta}_q + \frac{|k|}{2\gamma} + \frac{n+\beta}{2\gamma} - 1} \|\nabla_x^k G_\gamma(t) \theta_0 - M \nabla_x^k (g_\gamma(x, t))\|_q \\
&\quad + t^{\frac{|k|}{2\gamma} + \tilde{\eta}_q + (\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1)} \|\nabla_x^k B(\theta, \theta)\|_q \\
&\leq t^{\tilde{\eta}_q + \frac{|k|}{2\gamma} + \frac{n+\beta}{2\gamma} - 1} \|\nabla_x^k G_\gamma(t) \theta_0 - M \nabla_x^k (g_\gamma(x, t))\|_q \\
&\quad + C t^{-\mu(\frac{n+\beta}{2\gamma} - 1)} \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

■

Capítulo 4

Soluções Auto-similares nos Espaços de Fourier-Besov-Morrey

Este capítulo é dedicado ao estudo de existência, auto-similaridade e estabilidade assintótica de soluções para o problema (0.0.1)-(0.0.2) nos espaços de Fourier-Besov-Morrey. Em particular, vamos obter uma classe de soluções assintoticamente auto-similares.

Neste capítulo, vamos assumir que P_j 's são funções mensuráveis tais que

$$|P_j(\xi)| \leq C|\xi|^\beta, \text{ q.t.p em } \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (4.0.1)$$

para todo $1 \leq j \leq n$, onde $\beta \in [0, n + 1)$ com $\beta < 2\gamma$.

Observação 4.0.1. O espaço funcional que vamos considerar neste Capítulo (veja Seção 4.1) satisfaz as hipóteses do conjunto \mathcal{A} definido no início da Seção 0.2. Assim, se os símbolos P_j satisfazem (4.0.1) para todo $j = 1, \dots, n$ o produto $P_j(\xi)\hat{\theta}(\xi)$ faz sentido e o operador $P[\cdot]$ está bem definido neste espaço funcional.

Dividimos o capítulo em três seções. Na primeira (Seção 4.1), introduzimos os espaços de Fourier-Besov-Morrey e relembramos o conceito de solução auto-similar. A Seção 4.2 é dedicada à apresentação dos resultados e, na Seção 4.4 faremos as demonstrações dos resultados.

4.1 Espaços de Fourier-Besov-Morrey e Soluções Auto-similares

4.1.1 Espaços de Fourier-Besov-Morrey

Começamos a seção definindo os espaços de Fourier-Besov-Morrey. Para isto, seja $\varphi \in \mathcal{S}$ radialmente simétrica e satisfazendo (1.1.1) e (1.1.2), e para cada $k \in \mathbb{Z}$ seja $\varphi_k(\xi) = \varphi(2^{-k}\xi)$ (veja página 9).

Definição 4.1.1. (Espaços de Fourier-Besov-Morrey) Para $s \in \mathbb{R}$, $0 \leq \mu < n$, $1 \leq p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, o espaço de Fourier-Besov-Morrey homogêneo $\mathcal{FN}_{p,\mu,q}^s(\mathbb{R}^n)$ é o conjunto de todas as $f \in S'/\mathcal{P}$ tais que a norma $\|f\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,q}^s}$ é finita, onde

$$\|f\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,q}^s} = \begin{cases} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ksq} \|\varphi_k \widehat{f}\|_{M_{p,\mu}}^q \right)^{1/q}, & q < \infty, \\ \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ks} \|\varphi_k \widehat{f}\|_{M_{p,\mu}}, & q = \infty. \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Observação 4.1.2. Em (4.1.1), $M_{p,\mu}$ denota o espaço de Morrey homogêneo definido na página 19. Observamos também que, assim como no caso dos espaços de Besov homogêneos, a definição dos espaços de Fourier-Besov-Morrey não dependem da função φ escolhida.

Na próxima proposição vamos precisar do conceito de espaço vetorial topológico completo e da topologia forte para o dual de um espaço vetorial topológico. Por isso, vamos relembrar tais definições.

Seja X um espaço vetorial topológico localmente convexo. Uma rede $\{x_i\}_{i \in I}$ em X é dita de Cauchy se a rede $\{x_i - x_j\}_{(i,j) \in I \times I}$ converge a zero. X é dito completo se toda rede de Cauchy converge. Quando o espaço X é contável de primeira ordem, ou seja, quando cada ponto $x \in X$ admite uma base de vizinhanças contável (veja [31, pg. 116]), a completude de X é equivalente a toda sequência de Cauchy ser convergente.

Um subconjunto $B \subset X$ é dito limitado se para toda vizinhança U da origem existe uma constante $a > 0$ tal que $a^{-1}B \subset U$ (veja [58, pg. 44]). No caso particular em que a topologia é gerada por uma família de seminormas, a definição de conjuntos limitados coincide com ser limitado em cada seminorma.

Seja X' o dual de X . A topologia forte em X' é definida como a topologia localmente convexa em X' gerada pelas seminormas

$$\|T\|_B = \sup_{x \in B} |T(x)|, \quad (4.1.2)$$

onde $T \in X'$ e $B \subset X$ é um conjunto limitado. Note que a topologia forte em X' coincide com a topologia da convergência uniforme em conjuntos limitados de X .

Em especial, podemos munir o espaço das distribuições temperadas \mathcal{S}' com a topologia forte gerada pelas seminormas (4.1.2). Munido desta topologia, \mathcal{S}' é um espaço vetorial topológico completo. Para mais detalhes sobre topologia forte do dual e sobre espaços vetoriais completos, sugerimos ao leitor as referências [57] e [58].

A seguir vamos considerar \mathcal{S}' com a topologia forte. Vamos demonstrar que o espaço de Schwartz está continuamente incluído nos espaços de Fourier-Besov-Morrey e que estes estão continuamente incluídos no espaço das distribuições temperadas \mathcal{S}' munido da topologia forte. Provaremos também que os espaços de Fourier-Besov-Morrey são espaços de Banach.

Proposição 4.1.3. Sejam $1 \leq p, q \leq \infty$, $0 \leq \mu < n$ e $s < n - \frac{n-\mu}{p}$.

(i) Considere \mathcal{S}' com a topologia forte. Temos que

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{FN}_{p,\mu,q}^s(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'/\mathcal{P}, \quad (4.1.3)$$

onde as inclusões em (4.1.3) são contínuas.

(ii) O espaço $\mathcal{FN}_{p,\mu,q}^s(\mathbb{R}^n)$ é de Banach.

Demonstração:

(i): Graças a inclusão contínua $l^{q_1}(\mathbb{Z}) \subset l^{q_2}(\mathbb{Z})$ (para $q_1 < q_2$), é suficiente provar a inclusão do lado esquerdo de (4.1.3) para $q = 1$.

Passamos então a prova quando $q = 1$. Seja $f \in \mathcal{S}$. Como $\text{supp } \varphi_k \subset D_k = \{\xi \in \mathbb{R}^n; \frac{3}{2}2^{k-1} \leq |\xi| \leq \frac{4}{3}2^{k+1}\}$, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ks} \|\varphi_k \hat{f}\|_{M_{p,\mu}} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ks} \sup_{\xi_0 \in \mathbb{R}^n, R > 0} R^{-\mu/p} \left(\int_{B_R(\xi_0) \cap D_k} |\varphi_k(\xi)|^p |\hat{f}(\xi)|^p d\xi \right)^{1/p} \\ &\leq C \sum_{k < 0} 2^{k(s-\frac{\mu}{p})} \left(\int_{D_k} |\varphi_k(\xi)|^p (1 + |\xi|^{N_1 p}) |\hat{f}(\xi)|^p \frac{1}{1 + |\xi|^{N_1 p}} d\xi \right)^{1/p} \\ &\quad + \sum_{k \geq 0} 2^{k(s-\frac{\mu}{p})} \left(\int_{D_k} |\varphi_k(\xi)|^p (1 + |\xi|^{N_2 p}) |\hat{f}(\xi)|^p \frac{1}{1 + |\xi|^{N_2 p}} d\xi \right)^{1/p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \|\hat{f}\|_{(N_1,0)} \sum_{k<0} \|\varphi_k\|_\infty^{1/p} 2^{k(s-\frac{\mu}{p})} \left(\int_{2^{k-1}}^{2^{k+1}} \frac{r^{n-1}}{(1+r)^{N_1 p}} dr \right)^{1/p} \\
&+ C \|\hat{f}\|_{(N_2,0)} \sum_{k\geq 0} \|\varphi_k\|_\infty^{1/p} 2^{k(s-\frac{\mu}{p})} \left(\int_{2^{k-1}}^{2^{k+1}} \frac{r^{n-1}}{(1+r)^{N_2 p}} dr \right)^{1/p} \\
&\leq C \|\hat{f}\|_{(N_1,0)} \sum_{k<0} 2^{k(s+\frac{n-\mu}{p}-N_1)} + C \|\hat{f}\|_{(N_2,0)} \sum_{k\geq 0} 2^{k(s+\frac{n-\mu}{p}-N_2)}, \tag{4.1.4}
\end{aligned}$$

onde, $\|f\|_{(N,\alpha)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|)^N |\partial^\alpha f(x)|$ são as seminormas que geram a topologia de \mathcal{S} . Escolhendo $N_1 < s + \frac{n-\mu}{p}$ e $N_2 > s + \frac{n-\mu}{p}$, temos que os somatórios em (4.1.4) são finitos. Como a transformada de Fourier é um isomorfismo em \mathcal{S} , (4.1.4) implica a primeira inclusão contínua em (4.1.3).

Vamos agora provar a segunda inclusão contínua em (4.1.3) para o caso $q = \infty$. O caso $q < \infty$ segue da inclusão contínua $l^q(\mathbb{Z}) \subset l^\infty(\mathbb{Z})$. Seja $f \in \mathcal{S}'$, $\phi \in \mathcal{S}$ e para $k \in \mathbb{Z}$ defina $\chi_k(\xi) = \varphi_{k-1}(\xi) + \varphi_k(\xi) + \varphi_{k+1}(\xi)$. Graças a identidade (1.1.5) na página 10, temos que $\chi_k(\xi) = 1$ se $\xi \in \text{supp } \varphi_k$. Pela desigualdade (1.2.30) (veja página 21) temos que

$$\begin{aligned}
| \langle f, \phi \rangle | &= \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_k \hat{f}, \chi_k \hat{\phi} \rangle \right| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|\varphi_k \hat{f}\|_1 \|\chi_k \hat{\phi}\|_\infty \\
&\leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k(n-\frac{n-\mu}{p})} \|\varphi_k \hat{f}\|_{M_{p,\mu}} \|\chi_k \hat{\phi}\|_\infty \\
&\leq C \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ks} \|\varphi_k \hat{f}\|_{M_{p,\mu}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k(n-\frac{n-\mu}{p}-s)} \|\chi_k \hat{\phi}\|_\infty \\
&\leq C \|f\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k(n-\frac{n-\mu}{p}-s)} \|(\chi_k \hat{\phi}_k)^\vee\|_1 \\
&\leq C \|f\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k(n-\frac{n-\mu}{p}-s)} \|\check{\chi}_k * \phi_k\|_1 \\
&\leq C \|f\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \|\phi\|_{\dot{B}_{1,1}^{n-\frac{n-\mu}{p}-s}} \tag{4.1.5}
\end{aligned}$$

$$\leq C \|f\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \left(\sum_{i=1}^l \|\phi\|_{(N_i, \alpha_i)} \right), \tag{4.1.6}$$

onde as desigualdades (4.1.5) e (4.1.6) podem ser encontradas em [57, cap. 2]. Portanto de (4.1.6) concluímos que

$$\|f\|_B = \sup_{\phi \in B} | \langle f, \phi \rangle | \leq C_B \|f\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s},$$

para todo conjunto limitado $B \subset \mathcal{S}$.

(ii): Considere \mathcal{S}' com a topologia forte. Seja $\sum_{i=1}^\infty f_i$ uma série absolutamente convergente em

$\mathcal{FN}_{p,\mu,q}^s(\mathbb{R}^n)$, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,q}^s} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jsq} \|\varphi_j(\cdot) \widehat{f}_i(\cdot)\|_{M_{p,\mu}}^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty. \quad (4.1.7)$$

Seja ainda $S_N = \sum_{i=1}^N f_i$. Para $N > M$ temos que

$$\|S_N - S_M\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,q}^s} = \left\| \sum_{i=M+1}^N f_i \right\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,q}^s} \leq \sum_{i=M+1}^N \|f_i\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,q}^s}. \quad (4.1.8)$$

Fazendo $N, M \rightarrow \infty$ em (4.1.8) vemos que a sequência $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathcal{FN}_{p,\mu,q}^s(\mathbb{R}^n)$. Usando a segunda inclusão contínua em (4.1.3), vemos que $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em \mathcal{S}' , e portanto converge para uma $f \in \mathcal{S}'$.

Falta mostrar que $\|f\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,q}^s} < \infty$. Para isto, observe que de (4.1.7) tem-se que

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^{jsq} \|\varphi_j(\cdot) \widehat{f}_i(\cdot)\|_{M_{p,\mu}}^q < \infty, \text{ para cada } j \in \mathbb{Z}, \quad (4.1.9)$$

ou seja, para cada $j \in \mathbb{Z}$ a série $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_j \widehat{f}_i$ é absolutamente convergente em $M_{p,\mu}(\mathbb{R}^n)$ (e portanto convergente neste espaço, já que $M_{p,\mu}(\mathbb{R}^n)$ é completo). Para cada $j \in \mathbb{Z}$ defina g_j por

$$\widehat{g}_j(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_j(\xi) \widehat{f}_i(\xi). \quad (4.1.10)$$

Utilizando que a série $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ é absolutamente convergente em $\mathcal{FN}_{p,\mu,q}^s(\mathbb{R}^n)$ e (4.1.9) temos que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jsq} \|\widehat{g}_j(\cdot)\|_{M_{p,\mu}}^q \right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jsq} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_j(\cdot) \widehat{f}_i(\cdot) \right\|_{M_{p,\mu}}^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} 2^{js} \|\varphi_j(\cdot) \widehat{f}_i(\cdot)\|_{M_{p,\mu}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jsq} \|\varphi_j(\cdot) \widehat{f}_i(\cdot)\|_{M_{p,\mu}}^q \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i(\cdot)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,q}^s} < \infty, \quad (4.1.12)$$

onde em (4.1.11) usamos a desigualdade de Minkowski com as medidas contadoras em \mathbb{Z} e \mathbb{N} (veja [31, pg. 194]). Segue então que a série $g = \sum_{j \in \mathbb{Z}} g_j$ converge em \mathcal{S}' (veja [55, pg. 59]),

$\varphi_j(\xi)\hat{g}(\xi) = \hat{g}_j(\xi)$, para todo $j \in \mathbb{Z}$, e

$$\begin{aligned} \|g\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,q}^s} &= \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jsq} \|\varphi_j(\cdot)\hat{g}(\cdot)\|_{M_{p,\mu}}^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jsq} \|\hat{g}_j(\cdot)\|_{M_{p,\mu}}^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,q}^s} < \infty. \end{aligned} \tag{4.1.13}$$

Portanto $g \in \mathcal{FN}_{p,\mu,q}^s$.

Por fim observe que

$$\hat{g}(\xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{g}_j = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_j(\xi) \hat{f}_i(\xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi_j(\xi) \sum_{i=1}^{\infty} \hat{f}_i(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{f}_i(\xi),$$

pois $\sum_{i=1}^{\infty} \hat{f}_i(\xi) \in \mathcal{S}'$. Assim, $g = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$ em \mathcal{S}' .

Desde que $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ também converge para f em \mathcal{S}' (veja página 75) segue por unicidade da convergência no sentido de distribuição que $f = g$. De (4.1.13) vemos que $\|f\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,q}^s} < \infty$ e portanto a série $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ é convergente em $\mathcal{FN}_{p,\mu,q}^s(\mathbb{R}^n)$, o que prova que $\mathcal{FN}_{p,\mu,q}^s(\mathbb{R}^n)$ é completo. ■

4.1.2 Soluções Auto-Similares

Começamos analisando a relação de escala satisfeita pelo problema (0.0.1)-(0.0.2). Suponhamos que os símbolos $P_j(\xi)$ são homogêneos de grau β , para todo $j = 1, \dots, n$. Então, para todo $\lambda > 0$, a função $\theta_\lambda(x, t) = \lambda^{2\gamma-\beta}\theta(\lambda x, \lambda^{2\gamma}t)$ é solução de (0.0.1)-(0.0.2) desde que θ também seja uma solução. Com efeito, observe que a transformada de Fourier de cada componente do vetor velocidade satisfaz

$$\begin{aligned} \widehat{P_k[\theta]}(\lambda x, \lambda^{2\gamma}t) &= \lambda^{-n} \sum_{j=1}^n a_{jk} \lambda \frac{i\xi_j}{|\xi|^2} P_j \left(\frac{\xi}{\lambda} \right) \hat{\theta} \left(\frac{\xi}{\lambda}, \lambda^{2\gamma}t \right) \\ &= \lambda^{-(\beta-1)} \sum_{j=1}^n a_{jk} \frac{i\xi_j}{|\xi|^2} P_j(\xi) \lambda^{-n} \hat{\theta} \left(\frac{\xi}{\lambda}, \lambda^{2\gamma}t \right). \end{aligned}$$

Aplicando a transformada de Fourier inversa, concluímos que

$$\lambda^{\beta-1} P[\theta](\lambda x, t\lambda^{2\gamma}) = P[\theta(\lambda \cdot, \lambda^{2\gamma} \cdot)](x, t). \tag{4.1.14}$$

Além disso, é fácil ver que cada parcela da equação (0.0.1)-(0.0.2) satisfaz

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta_\lambda}{\partial t}(x, t) &= \lambda^{2\gamma-\beta+2\gamma} \frac{\partial \theta}{\partial t}(\lambda x, \lambda^{2\gamma} t) \\ (-\Delta)^\gamma \theta_\lambda(x, t) &= \lambda^{2\gamma-\beta+2\gamma} ((-\Delta)^\gamma \theta)(\lambda x, \lambda^{2\gamma} t) \\ P[\theta_\lambda] \nabla_x \theta_\lambda(x, t) &= \lambda^{2\gamma-\beta+2\gamma} (P[\theta] \nabla_x \theta)(\lambda x, \lambda^{2\gamma} t).\end{aligned}$$

Portanto, se θ é solução global de (0.0.1)-(0.0.2) então θ_λ também o é. Basta somar as três igualdades acima.

Segue que (0.0.1)-(0.0.2) possui a seguinte relação de escala:

$$\theta \rightarrow \theta_\lambda = \lambda^{2\gamma-\beta} \theta(\lambda x, \lambda^{2\gamma} t). \quad (4.1.15)$$

Fazendo $t \rightarrow 0^+$ em (4.1.15), obtemos a relação de escala para o dado inicial

$$\theta_0 \rightarrow (\theta_\lambda)_0 = \lambda^{2\gamma-\beta} \theta_0(\lambda x). \quad (4.1.16)$$

Definição 4.1.4. Uma solução θ do problema (0.0.1)-(0.0.2) é dita auto-similar se $\theta_\lambda = \theta$ para todo $\lambda > 0$.

Observe que as quantidades $\sup_{t>0} t^{\eta_q} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}}$ e $\sup_{t>0} t^{\tilde{\eta}_q} \|\theta(t)\|_q$, normas dos espaços $\mathcal{X}_1 = \{\theta; t^{\eta_q} \theta(t) \in BC((0, \infty), \dot{H}_q^{\beta-1}(\mathbb{R}^n))\}$ e $\mathcal{X}_2 = \{\theta; t^{\tilde{\eta}_q} \theta(t) \in BC((0, \infty), L^q(\mathbb{R}^n))\}$, respectivamente, são invariantes pela relação de escala (4.1.15). Com efeito, usando a propriedade (1.2.15) (veja página 17) temos que

$$\begin{aligned}\sup_{t>0} t^{\eta_q} \|\theta_\lambda(t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} &= \sup_{t>0} t^{\eta_q} \lambda^{2\gamma-\beta} \|\theta(\lambda \cdot, \lambda^{2\gamma} t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \\ &= \sup_{t>0} (\lambda^{2\gamma} t)^{\eta_q} \lambda^{-2\gamma\eta_q+2\gamma-\beta+\beta-1-\frac{\eta_q}{p}} \|\theta(\cdot, \lambda^{2\gamma} t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} \\ &= \sup_{t>0} (\lambda^{2\gamma} t)^{\eta_q} \|\theta(\cdot, \lambda^{2\gamma} t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}} = \sup_{t>0} t^{\eta_q} \|\theta(\cdot, t)\|_{\dot{H}_q^{\beta-1}}.\end{aligned}$$

Analogamente, $\sup_{t>0} t^{\tilde{\eta}_q} \|\theta_\lambda(t)\|_q = \sup_{t>0} t^{\tilde{\eta}_q} \|\theta(t)\|_q$.

Com essas propriedades em mente, uma pergunta a se fazer é se é possível mostrar que as soluções obtidas no Capítulo 2 são auto-similares. A resposta para esta pergunta é não. De fato, por (4.1.16), vemos que soluções auto-similares correspondem a dados iniciais homogêneos de grau $-(2\gamma - \beta)$; entretanto, nenhum espaço $L^p(\mathbb{R}^n)$ com $p \neq \infty$ possui funções homogêneas.

Por outro lado, o espaço $\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s(\mathbb{R}^n)$ com $s = n - \frac{n-\mu}{p} - (2\gamma - \beta)$ contém funções homogêneas de grau $-(2\gamma - \beta)$, as quais são as únicas funções invariantes por (4.1.16). Neste sentido, dizemos que o espaço $\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s(\mathbb{R}^n)$ com $s = n - \frac{n-\mu}{p} - (2\gamma - \beta)$ é crítico, e é um espaço conveniente para estudar a existência de soluções auto-similares.

4.1.3 Formulação Funcional

Calculando formalmente a transformada de Fourier na equação integral (2.1.4) (veja pg. 30) obtemos que

$$\widehat{\theta}(\xi, t) = e^{-|\xi|^{2\gamma}t}\widehat{\theta}_0(\xi) - \int_{\mathbb{R}^n} i\xi e^{-|\xi|^{2\gamma}(t-\tau)}(\widehat{P[\theta]} * \widehat{\theta})(\xi, \tau)d\tau = \widehat{G_\gamma(t)\theta_0}(\xi) + \widehat{B(\theta, \theta)}(\xi, t),$$

onde $G_\gamma(t)$ e $B(\cdot, \cdot)$ são definidas como na página 30. Assim, podemos escrever para (0.0.1)-(0.0.2) a seguinte formulação funcional

$$\theta(t) = G_\gamma(t)\theta_0 + B(\theta, \theta) \quad (4.1.17)$$

definindo os operadores $G_\gamma(t)$ e $B(\cdot, \cdot)$, respectivamente, por

$$\widehat{G_\gamma(t)\theta_0}(\xi) = e^{-|\xi|^{2\gamma}t}\widehat{\theta}_0(\xi) \text{ e } \widehat{B(\theta, \phi)}(\xi, t) = - \int_{\mathbb{R}^n} i\xi e^{-|\xi|^{2\gamma}(t-\tau)}(\widehat{P[\theta]} * \widehat{\phi})(\xi, \tau)d\tau \quad (4.1.18)$$

e entendendo (4.1.17) e (4.1.18) no sentido de distribuições temperadas \mathcal{S}' .

4.2 Resultados

Nesta seção, apresentamos nossos resultados para o problema (0.0.1)-(0.0.2) com dado inicial θ_0 em $\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 4.2.1. Sejam

$$n \geq 1, \gamma > 1/2, 0 \leq \beta < 2\gamma < \frac{n + \beta + 1}{2}, \frac{n - \mu}{n + \beta + 1 - 4\gamma} < p \leq \infty, \text{ e } 0 \leq \mu < n.$$

Suponha que $\theta_0 \in \mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s(\mathbb{R}^n)$ com $s = n - \frac{n-\mu}{p} - (2\gamma - \beta) \geq 0$. Seja K como no Lema 4.3.3 e $0 < \varepsilon < \frac{1}{4K}$.

- (i) **(Boa Colocação)** Se $\|\theta_0\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \leq \varepsilon$ então existe uma única solução θ da formulação funcional (4.1.17) tal que $\theta \in BC((0, \infty); \mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s(\mathbb{R}^n))$ e $\sup_{t>0} \|\theta(t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \leq 2\varepsilon$. A aplicação dado-solução $\theta_0 \rightarrow \theta(x, t)$ de $\{f \in \mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s : \|f\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \leq \varepsilon\}$ em $BC((0, \infty); \mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s(\mathbb{R}^n))$ é Lipschitz contínua. Além disso, $\theta(x, t) \rightarrow \theta_0$ em $S'(\mathbb{R}^n)$ quando $t \rightarrow 0^+$.
- (ii) **(Auto-Similaridade)** Se $P_j(\xi)$ é homogêneo de grau β , para todo $j = 1, 2, \dots, n$, e θ_0 é uma distribuição homogênea de grau $-(2\gamma - \beta)$, então a solução θ é auto-similar.

Observação 4.2.2. (Solução local no tempo) Assumindo as mesmas condições em n, β, γ, p, μ dadas no Teorema 4.2.1 e sendo $s > n - \frac{n-\mu}{p} - (2\gamma - \beta)$ e $\theta_0 \in \mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s(\mathbb{R}^n)$, é possível mostrar existência de solução θ da formulação funcional (4.1.17) em $BC((0, T); \mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s(\mathbb{R}^n))$ assumindo que $T > 0$ é suficientemente pequeno e sem supor que o dado inicial é pequeno na norma do espaço $\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s(\mathbb{R}^n)$. Além disso, esta solução θ satisfaz $\theta(x, t) \rightharpoonup \theta_0$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ quando $t \rightarrow 0^+$.

A seguir mostramos que as condições assumidas no Teorema 4.2.1 permitem considerar alguns dados iniciais θ_0 com norma em $L^2(\mathbb{R}^n)$ grande.

Observação 4.2.3. (Dado inicial com norma em L^2 grande) Sejam $\theta_0, \psi_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$\hat{\theta}_0(\xi) = \delta |\xi|^{-(n-(2\gamma-\beta))} 1_{|\xi| < R_1} \text{ e } \hat{\psi}_0(\xi) = \delta |\xi|^{-(n-(2\gamma-\beta))} 1_{|\xi| > R_2}, \quad (4.2.1)$$

onde $\delta > 0$ e 1_A denota a função característica do conjunto A . Observe que $(|\xi|^{-(n-(2\gamma-\beta))})^\vee = C |x|^{-(2\gamma-\beta)}$, e portanto

$$\|\theta_0\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s}, \|\psi_0\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \leq \left\| \delta C |x|^{-(2\gamma-\beta)} \right\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} = C\delta,$$

onde $C > 0$ é independente de R_1, R_2 . Assim, escolhendo $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$, podemos aplicar o Teorema 4.2.1 para quaisquer $R_1, R_2 > 0$. Por outro lado, se $n + 2\beta < 4\gamma$, temos que $|\xi|^{-2(n-(2\gamma-\beta))} \in L^1(B_{R_1}(0))$ e

$$\begin{aligned} \|\hat{\theta}_0\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\delta |\xi|^{-(n-(2\gamma-\beta))} 1_{|\xi| < R_1} \right)^2 d\xi = \delta^2 \int_{B_{R_1}(0)} |\xi|^{-2(n-(2\gamma-\beta))} d\xi \\ &= \delta^2 \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^{R_1} r^{n-1} r^{-2(n-(2\gamma-\beta))} dr d\theta = C\delta^2 R_1^{4\gamma-(n+2\beta)}. \end{aligned}$$

Se $n + 2\beta > 4\gamma$ então $|\xi|^{-2(n-(2\gamma-\beta))} \in L^1(B_{R_2}(0)^c)$ e

$$\begin{aligned} \|\hat{\psi}_0\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\delta |\xi|^{-(n-(2\gamma-\beta))} 1_{|\xi| > R_2} \right)^2 d\xi = \int_{B_{R_2}(0)^c} |\xi|^{-2(n-(2\gamma-\beta))} d\xi \\ &= \delta^2 \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_{R_2}^{\infty} r^{n-1} r^{-2(n-(2\gamma-\beta))} dr d\theta = C\delta^2 R_2^{4\gamma-(n+2\beta)}, \end{aligned}$$

onde a constante C depende somente de n, γ e β . Como $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$, concluímos que se $n + 2\beta < 4\gamma$ então $\theta_0 \in L^2$ com $\|\theta_0\|_{L^2}^2 = C(\delta)R_1^{4\gamma-(n+2\beta)}$ para todo $R_1 > 0$, e se $n + 2\beta > 4\gamma$ então $\psi_0 \in L^2$ com $\|\psi_0\|_{L^2}^2 = C(\delta)R_2^{4\gamma-(n+2\beta)}$, para todo $R_2 > 0$. Além disto, fazendo $R_1 \rightarrow \infty$ e $R_2 \rightarrow 0$, θ_0 e ψ_0 podem ter norma em L^2 tão grande quanto se queira.

Apresentamos abaixo um resultado de estabilidade assintótica de soluções nos espaços de Fourier-Besov-Morrey. Aqui, adaptamos ideias de [7] onde os autores estudaram as equações de Navier-Stokes nos espaços PM^a .

Teorema 4.2.4. (Estabilidade assintótica) Considere as hipóteses do Teorema 4.2.1. Suponha que θ e ϕ são soluções de (4.1.17) dadas pelo Teorema 4.2.1 com dados iniciais θ_0 e $\phi_0 \in \mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s(\mathbb{R}^n)$, respectivamente. Temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\theta(\cdot, t) - \phi(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} = 0 \quad (4.2.2)$$

se e somente se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|G_\gamma(t)(\theta_0 - \phi_0)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} = 0. \quad (4.2.3)$$

Observação 4.2.5. O Teorema 4.2.4 fornece uma classe de soluções assintoticamente auto-similares no infinito. De fato, considerando $\phi_0 = \theta_0 + \varphi$ com $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e θ_0 homogênea de grau $-(2\gamma - \beta)$ temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|G_\gamma(t)(\theta_0 - \phi_0)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} = \lim_{t \rightarrow \infty} \|G_\gamma(t)\varphi\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} = 0,$$

(veja Observação 4.3.2), e então a solução $\phi(x, t)$ com dado inicial ϕ_0 é atraída para a solução auto-similar $\theta(x, t)$ com dado inicial θ_0 , no sentido de (4.2.2).

4.3 Estimativas

Nesta seção, provamos as estimativas centrais para as partes linear e bilinear de (4.1.17) nos espaços $\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s(\mathbb{R}^n)$. Para estimar o termo bilinear, seguimos algumas ideias de Konieczny-Yoneda [45].

Lema 4.3.1. Sejam $0 < \mu < n$ e $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$. Existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\|G_\gamma(t)f\|_{\mathcal{FN}_{p_2,\mu,\infty}^s} \leq Ct^{-\frac{1}{2\gamma}(\frac{n-\mu}{p_1} - \frac{n-\mu}{p_2})} \|f\|_{\mathcal{FN}_{p_1,\mu,\infty}^s}, \quad (4.3.1)$$

para toda $f \in \mathcal{FN}_{p_1,\mu,\infty}^s(\mathbb{R}^n)$. Quando $p_1 = p_2$, a constante C pode ser tomada igual a 1.

Demonstração:

Pela desigualdade de Hölder nos espaços de Morrey (veja (1.2.28) na página 21) com $\frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_1} + (\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}) := \frac{1}{p_1} + \frac{1}{r}$ e $\frac{\mu}{p_2} = \frac{\mu}{p_1} + \frac{\mu}{r}$, temos que

$$\begin{aligned} \|G_\gamma(t)f\|_{\mathcal{FN}_{p_2,\mu,\infty}^s} &= \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ks} \|\hat{g}_\gamma(\cdot, t)\varphi_k \hat{f}\|_{M_{p_2,\mu}} \\ &\leq C \|\hat{g}_\gamma(\cdot, t)\|_{M_{r,\mu}} \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ks} \|\varphi_k \hat{f}\|_{M_{p_1,\mu}} \\ &\leq C \|\hat{g}_\gamma(t^{\frac{1}{2\gamma}} \cdot, 1)\|_{M_{r,\mu}} \|f\|_{\mathcal{FN}_{p_1,\mu,\infty}^s} \\ &\leq Ct^{-\frac{1}{2\gamma}(\frac{n-\mu}{r})} \|f\|_{\mathcal{FN}_{p_1,\mu,\infty}^s} \\ &\leq Ct^{-\frac{1}{2\gamma}(\frac{n-\mu}{p_1} - \frac{n-\mu}{p_2})} \|f\|_{\mathcal{FN}_{p_1,\mu,\infty}^s}, \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

onde na desigualdade (4.3.2) usamos (1.2.26) (veja pg. 20). ■

Observação 4.3.2. Observe que se $p_1 < p_2$ o expoente $-\frac{1}{2\gamma}(\frac{n-\mu}{p_1} - \frac{n-\mu}{p_2}) < 0$ pelas hipóteses sobre μ, p_1 e p_2 . Portanto, fazendo $t \rightarrow \infty$, tem-se $\|G_\gamma(t)f\|_{\mathcal{FN}_{p_2, \mu, \infty}^s} \rightarrow 0$, para toda função $f \in \mathcal{FN}_{p_1, \mu, \infty}^s(\mathbb{R}^n)$. Em particular, como $\mathcal{S} \subset \mathcal{FN}_{p_1, \mu, \infty}^s(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 \leq p_1 \leq \infty$, e todo $s < n - \frac{n-\mu}{p_1}$, temos que $\|G_\gamma(t)f\|_{\mathcal{FN}_{p_2, \mu, \infty}^s} \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$, para toda $f \in \mathcal{S}$.

A seguir vamos estimar a forma bilinear $B(\cdot, \cdot)$ (definida na página 78), nos espaços de Fourier-Besov-Morrey.

Lema 4.3.3. Assuma as hipóteses do Teorema 4.2.1. Existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\sup_{t>0} \|B(\theta, \phi)\|_{\mathcal{FN}_{p, \mu, \infty}^s} \leq K \sup_{t>0} \|\theta\|_{\mathcal{FN}_{p, \mu, \infty}^s} \sup_{t>0} \|\phi\|_{\mathcal{FN}_{p, \mu, \infty}^s} \quad (4.3.3)$$

para todo $\theta, \phi \in L^\infty((0, \infty); \mathcal{FN}_{p, \mu, \infty}^s(\mathbb{R}^n))$.

Observação 4.3.4. O supremo em $t > 0$ na desigualdade (4.3.3) deve ser entendido como o supremo essencial.

Demonstração de 4.3.3: A demonstração consiste em dois passos. Primeiro vamos mostrar que existe $K_1 > 0$ tal que

$$\sup_{t>0} \|B(\theta, \phi)\|_{\mathcal{FN}_{p, \mu, \infty}^s} \leq K_1 \sup_{t>0} \|P[\theta]\phi\|_{\mathcal{FN}_{p, \mu, \infty}^{s-2\gamma+1}}, \quad (4.3.4)$$

e em seguida vamos usar a decomposição de Bony (1.1.8) (veja pg. 11) para provar que

$$\sup_{t>0} \|P[\theta]\phi\|_{\mathcal{FN}_{p, \mu, \infty}^{s-2\gamma+1}} \leq K_2 \sup_{t>0} \|\theta\|_{\mathcal{FN}_{p, \mu, \infty}^s} \sup_{t>0} \|\phi\|_{\mathcal{FN}_{p, \mu, \infty}^s}. \quad (4.3.5)$$

Para provar (4.3.4), fixe $k \in \mathbb{Z}$. Como $\text{supp}(\varphi_k) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{3}{2}2^{k-1} \leq |\xi| \leq \frac{4}{3}2^{k+1}\}$, temos que

$$\begin{aligned} 2^{ks} \|\varphi_k \widehat{B(\theta, \phi)}\|_{M_{p, \mu}} &\leq 2^{ks} \int_0^t \|\ |\xi| e^{-(t-\tau)|\xi|^{2\gamma}} \left(\widehat{P[\theta]\phi} \right) (\xi, \tau) \varphi_k(\xi) \|_{M_{p, \mu}} d\tau \\ &\leq \int_0^t \frac{4}{3} 2^{k+1} e^{-(t-\tau)2^{2\gamma(k-1)}} 2^{(2\gamma-1)k} 2^{(s-2\gamma+1)k} \left\| \left(\widehat{P[\theta]\phi} \right) (\cdot, \tau) \varphi_k(\cdot) \right\|_{M_{p, \mu}} d\tau \\ &\leq \frac{4}{3} 2^{2\gamma+1} \int_0^t 2^{2\gamma(k-1)} e^{-(t-\tau)2^{2\gamma(k-1)}} 2^{(s-2\gamma+1)k} \left\| \left(\widehat{P[\theta]\phi} \right) (\cdot, \tau) \varphi_k(\cdot) \right\|_{M_{p, \mu}} d\tau \\ &\leq C \int_0^t 2^{2\gamma(k-1)} e^{-(t-\tau)2^{2\gamma(k-1)}} \left\| \left(\widehat{P[\theta]\phi} \right) (\cdot, \tau) \right\|_{\mathcal{FN}_{p, \mu, \infty}^{s-2\gamma+1}} d\tau \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

$$\leq K_1 \sup_{t>0} \|(P[\theta]\phi)(t)\|_{\mathcal{FN}_{p, \mu, \infty}^{s-2\gamma+1}}. \quad (4.3.7)$$

Tomando o supremo sobre $k \in \mathbb{Z}$ e logo depois sobre $t > 0$, obtemos (4.3.4).

Provaremos (4.3.5). Para tal, observe que da estimativa (0.0.9) (veja pg. 2), obtemos que

$$\|\varphi_k(\xi)\hat{u}(\xi, t)\|_{M_{p,\mu}} \leq C2^{k(\beta-1)}\|\varphi_k(\xi)\hat{\theta}(\xi, t)\|_{M_{p,\mu}}, \quad (4.3.8)$$

pois $\text{supp}(\varphi_k) \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n; \frac{3}{2}2^{k-1} \leq |\xi| \leq \frac{4}{3}2^{k+1}\}$. Desde que a norma de $\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^{s-2\gamma+1}(\mathbb{R}^n)$ é dada por

$$\|f\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^{s-2\gamma+1}} = \sup_{j \in \mathbb{Z}} 2^{j(s-2\gamma+1)} \|\varphi_j \hat{f}\|_{M_{p,\mu}},$$

temos que

$$\|P[\theta]\phi\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^{s-2\gamma+1}} = \sup_{j \in \mathbb{Z}} 2^{j(s-2\gamma+1)} \|\varphi_j(\widehat{P[\theta]\phi})\|_{M_{p,\mu}}.$$

Seja agora $j \in \mathbb{Z}$ fixado. Usando a decomposição (1.1.8) na página 11, com $P[\theta]$ e ϕ no lugar de f e g , respectivamente, e tomando a norma $\|\cdot\|_{M_{p,\mu}}$, obtemos

$$\begin{aligned} \|\varphi_j \widehat{P[\theta]\phi}\|_{M_{p,\mu}} &\leq \sum_{|k-j| \leq 4} \|\varphi_j(\widehat{S_{k-1}P[\theta]}) * (\varphi_k \hat{\phi})\|_{M_{p,\mu}} + \sum_{|k-j| \leq 4} \|\varphi_j(\widehat{S_{k-1}\phi}) * (\varphi_k \widehat{P[\theta]})\|_{M_{p,\mu}} \\ &+ \sum_{k \geq j-2} \|\varphi_j(\varphi_k \widehat{P[\theta]}) * (\tilde{\varphi}_k \hat{\phi})\|_{M_{p,\mu}} = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Para estimar I_1 , usamos a desigualdade de Young em espaços de Morrey (1.2.29) (veja pg. 21) para obter

$$2^{j(s-2\gamma+1)} I_1 \leq 2^{j(s-2\gamma+1)} \sum_{|k-j| \leq 4} \|\widehat{S_{k-1}P[\theta]}\|_1 \|\varphi_k \hat{\phi}\|_{M_{p,\mu}}. \quad (4.3.10)$$

Da definição de S_j e da desigualdade (1.2.30) (veja página 21) com $|\alpha| = 0$, obtemos

$$\|\widehat{S_{k-1}P[\theta]}\|_1 \leq \sum_{k' < k} \|\varphi_{k'} \widehat{P[\theta]}\|_1 \leq C \sum_{k' < k} 2^{k'(n-\frac{n-\mu}{p})} \|\varphi_{k'} \widehat{P[\theta]}\|_{M_{p,\mu}}. \quad (4.3.11)$$

Como $n - \frac{n-\mu}{p} = s + 2\gamma - \beta$ e $2^k \sim 2^j$ quando $|k - j| \leq 4$, segue de (4.3.11) que

$$\begin{aligned}
& 2^{j(s-2\gamma+1)} \sum_{|k-j| \leq 4} \|\widehat{S_{k-1}P[\theta]}\|_1 \|\varphi_k \widehat{\phi}\|_{M_{p,\mu}} \\
& \leq 2^{j(s-2\gamma+1)} \sum_{|k-j| \leq 4} \sum_{k' < k} 2^{k'(s+2\gamma-\beta)} \|\varphi_{k'} \widehat{P[\theta]}\|_{M_{p,\mu}} \|\varphi_k \widehat{\phi}\|_{M_{p,\mu}} \\
& \leq 2^{j(s-2\gamma+1)} C \sum_{|k-j| \leq 4} \|\varphi_k \widehat{\phi}\|_{M_{p,\mu}} \sum_{k' < k} 2^{k'(2\gamma-1)} 2^{k'(s-\beta+1)} 2^{k'(\beta-1)} \|\varphi_{k'} \widehat{\theta}\|_{M_{p,\mu}} \\
& \leq 2^{j(s-2\gamma+1)} C \left(\sum_{|k-j| \leq 4} \|\varphi_k \widehat{\phi}\|_{M_{p,\mu}} \sum_{k' < k} 2^{k'(2\gamma-1)} \right) \left(\sup_{k' \in \mathbb{Z}} 2^{k's} \|\varphi_{k'} \widehat{\theta}\|_{M_{p,\mu}} \right) \\
& \leq C \|\theta\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \sum_{|k-j| \leq 4} 2^{k(s-2\gamma+1)} \|\varphi_k \widehat{\phi}\|_{M_{p,\mu}} 2^{k(2\gamma-1)} \\
& \leq C \|\theta\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \sum_{|k-j| \leq 4} 2^{ks} \|\varphi_k \widehat{\phi}\|_{M_{p,\mu}} \\
& \leq C \sup_{t>0} \|\theta\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \sup_{t>0} \|\phi\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s},
\end{aligned} \tag{4.3.12}$$

$$\leq C \sup_{t>0} \|\theta\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \sup_{t>0} \|\phi\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s}, \tag{4.3.13}$$

onde, usamos (4.3.8) em (4.3.12). Inserindo (4.3.13) em (4.3.10), obtemos

$$2^{j(s-2\gamma+1)} I_1 \leq C \sup_{t>0} \|\theta\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \|\phi\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s}. \tag{4.3.14}$$

Analogamente, usando a condição $\beta < 2\gamma$, podemos estimar

$$\begin{aligned}
2^{j(s-2\gamma+1)} I_2 & \leq 2^{j(s-2\gamma+1)} \sum_{|k-j| \leq 4} \|\widehat{S_{k-1}\phi}\|_1 \|\varphi_k \widehat{P[\theta]}\|_{M_{p,\mu}} \\
& \leq 2^{j(s-2\gamma+1)} \sum_{|k-j| \leq 4} \sum_{k' < k} 2^{k'(s+2\gamma-\beta)} \|\varphi_{k'} \widehat{\phi}\|_{M_{p,\mu}} \|\varphi_k \widehat{P[\theta]}\|_{M_{p,\mu}} \\
& \leq \|\phi\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} 2^{j(s-2\gamma+1)} \sum_{|k-j| \leq 4} \left(\sum_{k' < k} 2^{k'(2\gamma-\beta)} \right) 2^{k(\beta-1)} \|\varphi_k \widehat{\theta}\|_{M_{p,\mu}} \\
& \leq C \|\phi\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \sum_{|k-j| \leq 4} 2^{k(s-2\gamma+1)} 2^{k(\beta-1)} 2^{k(2\gamma-\beta)} \|\varphi_k \widehat{\theta}\|_{M_{p,\mu}} \\
& \leq C \sup_{t>0} \|\phi\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \sup_{t>0} \|\theta\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s}.
\end{aligned} \tag{4.3.15}$$

Vamos agora estimar o terceiro termo em (4.3.9). Note que $s - 2\gamma + 1 > 0$ devido a condição $\frac{n-\mu}{n+\beta+1-4\gamma} < p$. Novamente aplicando a desigualdade de Young em espaços de Morrey (1.2.29) e a

desigualdade (1.2.30) (veja pg. 21), obtemos

$$\begin{aligned}
2^{j(s-2\gamma+1)} I_3 &\leq 2^{j(s-2\gamma+1)} \sum_{k \geq j-2} \|\varphi_k \widehat{P}[\widehat{\theta}]\|_1 \|\tilde{\varphi}_k \widehat{\phi}\|_{M_{p,\mu}} \\
&\leq \sum_{k \geq j-2} 2^{j(s-2\gamma+1)} 2^{k(\beta-1)+k(n-\frac{n-\mu}{p})} \|\varphi_k \widehat{\theta}\|_{M_{p,\mu}} \|\tilde{\varphi}_k \widehat{\phi}\|_{M_{p,\mu}} \\
&\leq \sum_{k \geq j-2} 2^{j(s-2\gamma+1)} 2^{(s+2\gamma-1)k} \|\varphi_k \widehat{\theta}\|_{M_{p,\mu}} \|\tilde{\varphi}_k \widehat{\phi}\|_{M_{p,\mu}} \\
&\leq C \sum_{k \geq j-2} 2^{(j-k)(s-2\gamma+1)} \left(2^{ks} \|\varphi_k \widehat{\theta}\|_{M_{p,\mu}}\right) \left(2^{ks} \|\tilde{\varphi}_k \widehat{\phi}\|_{M_{p,\mu}}\right) \\
&\leq C \sup_{t>0} \|\theta\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \sup_{t>0} \|\phi\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s},
\end{aligned} \tag{4.3.16}$$

pois

$$\sum_{k \geq j-2} 2^{(j-k)(s-2\gamma+1)} = C \sum_{w \geq 0} 2^{-w(s-2\gamma+1)} < \infty.$$

A estimativa (4.3.5) segue de (4.3.14), (4.3.15) e (4.3.16). ■

4.4 Demonstração dos Resultados

4.4.1 Demonstração do Teorema 4.2.1

Demonstração de (i):

Considere o espaço de Banach

$$\mathcal{X} = BC((0, \infty); \mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s(\mathbb{R}^n))$$

com norma dada por

$$\|\theta\|_{\mathcal{X}} = \sup_{t>0} \|\theta(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s}.$$

Reescrevendo o Lema 4.3.3 com a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$, obtemos

$$\|B(\theta, \phi)\|_{\mathcal{X}} \leq K \|\theta\|_{\mathcal{X}} \|\phi\|_{\mathcal{X}}. \tag{4.4.1}$$

Além disso, o Lema 4.3.1 com $p = p_1 = p_2$ implica que

$$\|G_\gamma(t)\theta_0\|_{\mathcal{X}} \leq \|\theta_0\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s}. \tag{4.4.2}$$

Portanto, tomando $0 < \varepsilon < \frac{1}{4K}$ e $\|\theta_0\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \leq \varepsilon$, o Lema 1.4.1 juntamente com as estimativas (4.4.1) e (4.4.2) implicam que existe uma única solução θ de (4.1.17) em \mathcal{X} tal que $\|\theta\|_{\mathcal{X}} \leq 2\varepsilon$.

Para mostrar a convergência fraca da solução para a condição inicial θ_0 , seja $\phi \in \mathcal{S}$. Então,

$$\begin{aligned} | \langle G_\gamma(t)\theta_0 - \theta_0, \phi \rangle | &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (e^{-t|\xi|^{2\gamma}} - 1) \hat{\theta}_0(\xi) \hat{\phi}(\xi) d\xi \right| \\ &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{(1 - e^{-t|\xi|^{2\gamma}})}{t|\xi|^{2\gamma}} t \left| \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta}_0(\xi) |\xi|^{2\gamma} \hat{\phi}(\xi) d\xi \right| \\ &\leq t \left| \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta}_0(\xi) |\xi|^{2\gamma} \hat{\phi}(\xi) d\xi \right|, \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

pois

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{(1 - e^{-t|\xi|^{2\gamma}})}{t|\xi|^{2\gamma}} \leq \sup_{s>0} e^{-s} = 1.$$

Além disto, como $\theta_0 \in \mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s$, podemos usar a decomposição de Littlewood-Paley (1.1.7) e obter que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta}_0(\xi) |\xi|^{2\gamma} \hat{\phi}(\xi) d\xi &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(\xi) \hat{\theta}_0(\xi) |\xi|^{2\gamma} \hat{\phi}(\xi) d\xi \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|\varphi_k \hat{\theta}_0\|_1 2^{(k+1)2\gamma} \|1_{D_k} \hat{\phi}\|_\infty \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

$$\leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k(n - \frac{n-\mu}{p})} \|\varphi_k \hat{\theta}_0\|_{M_{p,\mu}} 2^{k2\gamma} \|1_{D_k} \hat{\phi}\|_\infty \quad (4.4.5)$$

$$\begin{aligned} &\leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ks} \|\varphi_k \hat{\theta}_0\|_{M_{p,\mu}} 2^{k(4\gamma-\beta)} \|1_{D_k} \hat{\phi}\|_\infty \\ &\leq C \|\theta_0\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k(4\gamma-\beta)} \|1_{D_k} \hat{\phi}\|_\infty, \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

onde em (4.4.4) usamos que $\text{supp } \varphi_k \subset D_k := \{\xi \in \mathbb{R}^n; \frac{3}{2}2^{k-1} \leq |\xi| \leq \frac{4}{3}2^{k+1}\}$ e em (4.4.5) usamos (1.2.30). Como $\phi \in \mathcal{S}$ e $2\gamma > \beta$ podemos escolher $N > 4\gamma - \beta$, tal que

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k(4\gamma-\beta)} \|1_{D_k} \hat{\phi}\|_\infty &\leq \sum_{k < 0} 2^{k(4\gamma-\beta)} \|1_{D_k} \hat{\phi}\|_\infty + \sum_{k \geq 0} 2^{k(4\gamma-\beta)} \|1_{D_k} \hat{\phi}\|_\infty \\ &\leq \sum_{k < 0} 2^{k(4\gamma-\beta)} \|\hat{\phi}\|_\infty + C \sum_{k \geq 0} 2^{k(4\gamma-\beta)} \left(\sup_{2^{k-1} \leq |\xi| \leq 2^{k+1}} \frac{1}{1 + |\xi|^N} \right) \\ &\leq C \sum_{k < 0} 2^{k(4\gamma-\beta)} + C \sum_{k \geq 0} 2^{k(4\gamma-\beta-N)} < \infty. \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Substituindo (4.4.7) em (4.4.6) concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta}_0(\xi) |\xi|^{2\gamma} \hat{\phi}(\xi) d\xi \leq C \|\theta_0\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s},$$

e portanto, a estimativa (4.4.3) (veja pg. anterior) nos dá

$$|\langle G_\gamma(t)\theta_0 - \theta_0, \phi \rangle| \leq Ct \|\theta_0\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow 0^+.$$

Falta mostrar que $\lim_{t \rightarrow 0^+} |\langle B(\theta, \theta), \phi \rangle| = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} |\langle B(\theta, \theta), \phi \rangle| &= |\langle \widehat{B(\theta, \theta)}, \hat{\phi} \rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^t |\xi| e^{-(t-\tau)|\xi|^{2\gamma}} |(\widehat{P[\theta]}\theta)(\xi, \tau)| d\tau \right) \hat{\phi}(\xi) d\xi \\ &\leq \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(t-\tau)|\xi|^{2\gamma}} |\xi| |(\widehat{P[\theta]}\theta)(\xi, \tau)| \hat{\phi}(\xi) d\xi \right) d\tau \\ &\leq \int_0^t \|e^{-(t-\tau)|\cdot|^{2\gamma}}\|_\infty \| |\cdot| (\widehat{P[\theta]}\theta)(\cdot, \tau) \hat{\phi}(\cdot) \|_1 d\tau \\ &\leq \int_0^t \| |\cdot| (\widehat{P[\theta]}\theta)(\cdot, \tau) \hat{\phi}(\cdot) \|_1 d\tau. \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \| |\cdot| (\widehat{P[\theta]}\theta)(\cdot, \tau) \hat{\phi}(\cdot) \|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi| |(\widehat{P[\theta]}\theta)(\xi, \tau)| \hat{\phi}(\xi) d\xi \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi| |\varphi_k(\xi) (\widehat{P[\theta]}\theta)(\xi, \tau)| \hat{\phi}(\xi) d\xi \\ &\leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|\varphi_k(\cdot) (\widehat{P[\theta]}\theta)(\cdot, \tau)\|_1 2^{k+1} \|1_{D_k} \hat{\phi}(\cdot)\|_\infty \\ &\leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k(n-\frac{n-\mu}{p})} \|\varphi_k(\cdot) (\widehat{P[\theta]}\theta)(\cdot, \tau)\|_{M_{p,\mu}} 2^k \|1_{D_k} \hat{\phi}(\cdot)\|_\infty \\ &\leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k(s-2\gamma+1)} \|\varphi_k(\cdot) (\widehat{P[\theta]}\theta)(\cdot, \tau)\|_{M_{p,\mu}} 2^{k(4\gamma-\beta)} \|1_{D_k} \hat{\phi}(\cdot)\|_\infty \\ &\leq C \|P[\theta]\theta\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^{s-2\gamma+1}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k(4\gamma-\beta)} \|1_{D_k} \hat{\phi}(\cdot)\|_\infty \\ &\leq C \left(\|\theta(\tau)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \right)^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k(4\gamma-\beta)} \|1_{D_k} \hat{\phi}(\cdot)\|_\infty \\ &\leq C \left(\|\theta(\tau)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \right)^2, \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

pois,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k(4\gamma-\beta)} \|1_{D_k} \hat{\phi}(\cdot)\|_\infty < \infty,$$

como mostramos na página anterior (veja (4.4.7)). Substituindo (4.4.9) em (4.4.8) concluímos que

$$\begin{aligned} |\langle B(\theta, \theta), \phi \rangle| &\leq C \int_0^t \left(\|\theta(\tau)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \right)^2 d\tau \\ &\leq C \int_0^t d\tau \left(\sup_{t>0} \|\theta(t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \right)^2 \\ &= Ct \left(\sup_{t>0} \|\theta(t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \right)^2 \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow 0^+, \end{aligned}$$

como queríamos.

Demonstração de (ii):

Recordemos que a solução θ obtida no Teorema 4.2.1 é o limite em \mathcal{X} da sequência $\{\theta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ definida recursivamente por

$$\theta_1 = G_\gamma(t)\theta_0 \text{ e } \theta_{m+1} = \theta_1 + B(\theta_m, \theta_m). \quad (4.4.10)$$

Uma vez que os símbolos P_j são homogêneos de grau β e θ_0 é uma distribuição homogênea de grau $-(2\gamma - \beta)$, temos que cada componente da sequência θ_m é invariante pela relação de escala (4.1.15), ou seja,

$$\theta_m \equiv \theta_{m,\lambda} \text{ onde } \theta_{m,\lambda}(x, t) = \lambda^{2\gamma-\beta}\theta_m(\lambda x, \lambda^{2\gamma}t). \quad (4.4.11)$$

Para mostrar que θ_1 satisfaz a propriedade (4.4.11) observe que $g_\gamma(\lambda x, \lambda^{2\gamma}t) = \lambda^{-n}g_\gamma(x, t)$. Com efeito,

$$\left(g_\gamma(\lambda x, \lambda^{2\gamma}t)\right)^\wedge(\xi) = \lambda^{-n}e^{-|\xi/\lambda|^{2\gamma}\lambda^{2\gamma}t} = \lambda^{-n}\widehat{g}_\gamma(x, t). \quad (4.4.12)$$

Esse fato, juntamente com a condição que θ_0 é homogêneo de grau $-(2\gamma - \beta)$, implicam que

$$\begin{aligned} \theta_{1,\lambda}(x, t) &= \lambda^{2\gamma-\beta}G_\gamma(\lambda^{2\gamma}t)\theta_0(\lambda x) = \lambda^{2\gamma-\beta} \int_{\mathbb{R}^n} g_\gamma(\lambda x - y, \lambda^{2\gamma}t)\theta_0(y)dy \\ &= \lambda^{2\gamma-\beta} \int_{\mathbb{R}^n} g_\gamma(\lambda x - \lambda z, \lambda^{2\gamma}t)\theta_0(\lambda z)\lambda^n dz \\ &= \lambda^{2\gamma-\beta} \int_{\mathbb{R}^n} g_\gamma(x - z, t)\lambda^{-(2\gamma-\beta)}\theta_0(z)dz \\ &= G_\gamma(t)\theta_0(x) = \theta_1(x, t). \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

Para o caso $m > 1$ usamos (4.1.14) (veja página 76) e (4.4.12) para mostrar que

$$\begin{aligned} &B(\theta_m, \theta_m)(\lambda x, \lambda^{2\gamma}t) \\ &= - \int_0^{\lambda^{2\gamma}t} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x g_\gamma(\lambda x - y, \lambda^{2\gamma}t - \tau)[P[\theta_m]\theta_m](y, \tau) dy d\tau \\ &= -\lambda^{2\gamma} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x g_\gamma(\lambda(x - \lambda^{-1}y), \lambda^{2\gamma}(t - \sigma))[P[\theta_m]\theta_m](y, \lambda^{2\gamma}\sigma) dy d\sigma \\ &= -\lambda^{2\gamma+n} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x g_\gamma(\lambda(x - z), \lambda^{2\gamma}(t - \sigma))[P[\theta_m]\theta_m](\lambda z, \lambda^{2\gamma}\sigma) dz d\sigma \\ &= -\lambda^{2\gamma+n} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^{-n-1}\nabla_x g_\gamma(x - z, t - \sigma)P[\theta_m](\lambda z, \lambda^{2\gamma}\sigma)\theta_m(\lambda z, \lambda^{2\gamma}\sigma) dz d\sigma \\ &= -\lambda^{2\gamma} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^{-1}\nabla_x g_\gamma(x - z, t - \sigma)\lambda^{-(\beta-1)}P[\theta_m(\lambda \cdot, \lambda^{2\gamma}\cdot)](z, \sigma)\theta_m(\lambda z, \lambda^{2\gamma}\sigma) dz d\sigma \\ &= -\lambda^{2\gamma-\beta} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x g_\gamma(x - z, t - \sigma)\lambda^{-2(2\gamma-\beta)}P[\theta_{m,\lambda}](z, \sigma)\theta_{m,\lambda}(z, \sigma) dz d\sigma \\ &= \lambda^{-(2\gamma-\beta)}B(\theta_{m,\lambda}, \theta_{m,\lambda})(x, t). \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

Multiplicando (4.4.14) por $\lambda^{2\gamma-\beta}$ concluímos que

$$\lambda^{2\gamma-\beta} B(\theta_m, \theta_m)(\lambda x, \lambda^{2\gamma} t) = B(\theta_{m,\lambda}, \theta_{m,\lambda})(x, t), \text{ para todo } \lambda > 0. \quad (4.4.15)$$

Utilizando (4.4.13), (4.4.15) e um argumento de indução pode-se mostrar que $\theta_{m,\lambda}(x, t) = \theta_m(x, t)$ para todo $\lambda > 0$, ou seja, cada elemento θ_m da sequencia (4.4.10) é invariante pela relação de escala (4.1.15).

Observe que a convergência $\theta_m \rightarrow \theta$ em \mathcal{X} implica na convergência $\theta_m \rightharpoonup \theta$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$. Além disto, usando mudança de variáveis pode-se mostrar que $\theta_{m,\lambda} \rightharpoonup \theta_\lambda$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$, para cada $\lambda > 0$. De fato, seja $\lambda > 0$ fixado e $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$. Então

$$\begin{aligned} \langle \theta_{m,\lambda}, \phi \rangle &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \theta_{m,\lambda}(x, t) \phi(x, t) dx dt \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^{2\gamma-\beta} \theta_m(\lambda x, \lambda^{2\gamma} t) \phi(x, t) dx dt \\ &= \lambda^{-\beta-n} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \theta_m(z, \tau) \phi(\lambda^{-1} z, \lambda^{-2\gamma} \tau) dz d\tau \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

Fazendo $m \rightarrow \infty$ em (4.4.16), usando o fato do $\theta_m \rightharpoonup \theta$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ e novamente usando mudança de variáveis, obtemos que

$$\begin{aligned} \langle \theta_{m,\lambda}, \phi \rangle &\rightarrow \lambda^{-\beta-n} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \theta(z, \tau) \phi(\lambda^{-1} z, \lambda^{-2\gamma} \tau) dz d\tau \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \theta_\lambda(x, t) \phi(x, t) dx dt \\ &= \langle \theta_\lambda, \phi \rangle, \end{aligned}$$

o que prova que $\theta_{m,\lambda} \rightharpoonup \theta_\lambda$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$. Desde que o limite no sentido de distribuições é único, $\theta_m \rightharpoonup \theta$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ e $\theta_{m,\lambda} = \theta_m$ (como mostramos anteriormente), segue que $\theta \equiv \theta_\lambda$, para cada $\lambda > 0$ fixado, como queríamos. ■

4.4.2 Demonstração do Teorema 4.2.4

Passo 1: Primeiro provaremos que (4.2.3) implica (4.2.2). Subtraindo as correspondentes equações satisfeitas por θ e ϕ e em seguida calculando a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|\theta(t) - \phi(t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} &= \|G_\gamma(t)(\theta_0 - \phi_0)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} + \|B(\theta - \phi, \theta) + B(\phi, \theta - \phi)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \\
&\leq \|G_\gamma(t)(\theta_0 - \phi_0)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \\
&\quad + \left\| \int_0^t \nabla_x G_\gamma(t - \tau) (P[\theta - \phi]\theta(\tau) - P[\phi](\theta - \phi)(\tau)) d\tau \right\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \\
&\leq \|G_\gamma(t)(\theta_0 - \phi_0)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \\
&\quad + \left\| \int_0^{\delta t} \nabla_x G_\gamma(t - \tau) (P[\theta - \phi]\theta(\tau) - P[\phi](\theta - \phi)(\tau)) d\tau \right\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \\
&\quad + \left\| \int_{\delta t}^t \nabla_x G_\gamma(t - \tau) (P[\theta - \phi]\theta(\tau) - P[\phi](\theta - \phi)(\tau)) d\tau \right\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \\
&:= I_0(t) + I_1(t) + I_2(t), \tag{4.4.17}
\end{aligned}$$

onde $\delta > 0$ será escolhido depois. Estimando como na demonstração do Lema 4.3.3 (veja (4.3.6) e (4.3.5)), obtemos

$$\begin{aligned}
I_1(t) &= \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ks} \left\| \int_0^{\delta t} |\xi| e^{-(t-\tau)|\xi|^{2\gamma}} (P[\theta(\tau) - \phi(\tau)]\theta(\tau) - P[\phi(\tau)](\theta(\tau) - \phi(\tau)))^\wedge d\tau \right\|_{M_{p,\mu}} \\
&\leq C \sup_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{\delta t} 2^{2\gamma(k-1)} e^{-(t-\tau)2^{2\gamma(k-1)}} \|P[\theta(\tau) - \phi(\tau)]\theta(\tau) - P[\phi(\tau)](\theta(\tau) - \phi(\tau))\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^{s-2\gamma+1}} d\tau \\
&\leq C \sup_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{\delta t} 2^{2\gamma(k-1)} e^{-(t-\tau)2^{2\gamma(k-1)}} \|\theta(\tau) - \phi(\tau)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \left(\|\theta(\tau)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} + \|\phi(\tau)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \right) d\tau \\
&\leq 4\varepsilon K \sup_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{\delta t} 2^{2\gamma(k-1)} e^{-(t-\tau)2^{2\gamma(k-1)}} \|\theta(\tau) - \phi(\tau)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} d\tau, \tag{4.4.18}
\end{aligned}$$

onde $K > 0$ é como no Lema 4.3.3 e usamos que as soluções θ e ϕ satisfazem

$$\sup_{t>0} \|\theta(t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \leq 2\varepsilon \text{ e } \sup_{t>0} \|\phi(t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \leq 2\varepsilon. \tag{4.4.19}$$

Fazendo a mudança de variáveis $\tau = tz$ em (4.4.18) e usando a igualdade

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{2\gamma(k-1)} e^{-t(1-\tau)2^{2\gamma(k-1)}} = \frac{C}{t(1-\tau)},$$

obtemos

$$\begin{aligned}
I_1(t) &\leq 4\varepsilon K \sup_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{\delta t} 2^{2\gamma(k-1)} e^{-(t-\tau)2^{2\gamma(k-1)}} \|\theta(\tau) - \phi(\tau)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} d\tau \\
&= 4\varepsilon K \sup_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{\delta} t 2^{2\gamma(k-1)} e^{-t(1-z)2^{2\gamma(k-1)}} \|\theta(tz) - \phi(tz)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} dz \\
&\leq 4\varepsilon K C \int_0^{\delta} (1-z)^{-1} \|\theta(tz) - \phi(tz)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} dz.
\end{aligned} \tag{4.4.20}$$

Estimamos I_2 da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
I_2(t) &\leq C \sup_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\delta t}^t 2^{2\gamma(k-1)} e^{-(t-\tau)2^{2\gamma(k-1)}} \|\theta(\tau) - \phi(\tau)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \left(\|\theta(\tau)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} + \|\phi(\tau)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \right) d\tau \\
&\leq 4\varepsilon K \left(\sup_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\delta t}^t 2^{2\gamma(k-1)} e^{-(t-\tau)2^{2\gamma(k-1)}} d\tau \right) \left(\sup_{\delta t < \tau < t} \|\theta(\tau) - \phi(\tau)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \right) \\
&\leq 4\varepsilon K \sup_{\delta t < \tau < t} \|\theta(\tau) - \phi(\tau)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s}.
\end{aligned} \tag{4.4.21}$$

Seja

$$L = \limsup_{t \rightarrow \infty} \|\theta(\cdot, t) - \phi(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s}.$$

Usando (4.4.20) e o teorema da convergência dominada, vemos que

$$\begin{aligned}
\limsup_{t \rightarrow \infty} I_1(t) &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} 4\varepsilon K C \int_0^{\delta} (1-z)^{-1} \|\theta(tz) - \phi(tz)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} dz \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \geq k} 4\varepsilon K C \int_0^{\delta} (1-z)^{-1} \|\theta(tz) - \phi(tz)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} dz \\
&\leq \lim_{k \rightarrow \infty} 4\varepsilon K C \int_0^{\delta} (1-z)^{-1} \sup_{t \geq k} \|\theta(tz) - \phi(tz)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} dz \\
&\leq 4\varepsilon K C \int_0^{\delta} (1-z)^{-1} \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \geq k} \|\theta(tz) - \phi(tz)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} dz \\
&= 4\varepsilon K C \log \left(\frac{1}{1-\delta} \right) L.
\end{aligned} \tag{4.4.22}$$

Além disto, segue de (4.4.21) que

$$\begin{aligned}
\limsup_{t \rightarrow \infty} I_2(t) &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} 4\varepsilon K \sup_{\delta t < \tau < t} \|\theta(\tau) - \phi(\tau)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \geq k} 4\varepsilon K \sup_{\delta t < \tau < t} \|\theta(\tau) - \phi(\tau)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \\
&\leq 4\varepsilon K \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{\delta k < \tau < \infty} \|\theta(\tau) - \phi(\tau)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} = 4\varepsilon K L.
\end{aligned} \tag{4.4.23}$$

Portanto, calculando o $\limsup_{t \rightarrow \infty}$ em (4.4.17), usando (4.4.22), (4.4.23) e a hipótese (4.2.3), concluímos que

$$\begin{aligned} L &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} I_0(t) + \limsup_{t \rightarrow \infty} I_1(t) + \limsup_{t \rightarrow \infty} I_2(t) \\ &\leq 0 + \left(C4\varepsilon K \log \left(\frac{1}{1-\delta} \right) + 4\varepsilon K \right) L. \end{aligned} \quad (4.4.24)$$

Desde que $4\varepsilon K < 1$, podemos escolher $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$C4\varepsilon K \log \left(\frac{1}{1-\delta} \right) + 4\varepsilon K < 1.$$

Assim, podemos concluir de (4.4.24) que $L = 0$, o que implica (4.2.2).

Passo 2: Para concluir a demonstração do Teorema 4.2.4 falta mostrar que (4.2.2) implica (4.2.3), ou seja, a recíproca. Procedendo como no passo 1, obtemos

$$\begin{aligned} \|G_\gamma(t)(\theta_0 - \phi_0)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} &\leq \|\theta(t) - \phi(t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} + \|B(\theta - \phi, \theta) + B(\phi, \theta - \phi)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \\ &\leq \|\theta(t) - \phi(t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \\ &\quad + \left\| \int_0^{\frac{t}{2}} \nabla_x \cdot G_\gamma(t - \tau) (P[\theta - \phi]\theta(\tau) - P[\phi](\theta - \phi)(\tau)) d\tau \right\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \\ &\quad + \left\| \int_{\frac{t}{2}}^t \nabla_x \cdot G_\gamma(t - \tau) (P[\theta - \phi]\theta(\tau) - P[\phi](\theta - \phi)(\tau)) d\tau \right\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \\ &\leq \|\theta(t) - \phi(t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} + 4\varepsilon K C \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - \tau)^{-1} \|\theta(t\tau) - \phi(t\tau)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} d\tau \\ &\quad + 4\varepsilon K \sup_{\frac{t}{2} < \tau < t} \|\theta(\tau) - \phi(\tau)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s}. \end{aligned} \quad (4.4.25)$$

Aplicando o $\limsup_{t \rightarrow \infty}$ em (4.4.25) e usando (4.2.2), segue que

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \|G_\gamma(t)(\theta_0 - \phi_0)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \|\theta(t) - \phi(t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \\ &\quad + \limsup_{t \rightarrow \infty} 4\varepsilon K C \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - \tau)^{-1} \|\theta(t\tau) - \phi(t\tau)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} d\tau \\ &\quad + \limsup_{t \rightarrow \infty} 4\varepsilon K \sup_{\frac{t}{2} < \tau < t} \|\theta(\tau) - \phi(\tau)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} \\ &\leq 0 + 4\varepsilon K C \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - \tau)^{-1} \limsup_{t \rightarrow \infty} \|\theta(t\tau) - \phi(t\tau)\|_{\mathcal{FN}_{p,\mu,\infty}^s} d\tau + 0 = 0, \end{aligned}$$

o que demonstra (4.2.3). ■

Referências Bibliográficas

- [1] M. F. Almeida. *Existência e comportamento assintótico de soluções em espaços de Morrey para as equações de Boussinesq no \mathbb{R}^n e de Navier-Stokes no semi-plano \mathbb{R}^n* . PhD thesis, Universidade Federal de Pernambuco, Pernambuco, Brasil, 2011.
- [2] H. Bahouri, J. Chemin and R. Danchin. *Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations*. Springer, 2011.
- [3] J. Bergh and J. Löfström. *Interpolation Spaces, an Introduction*. Springer Verlag, 1976.
- [4] P. Biler, G. Karch and R. Monneau. Nonlinear diffusion of dislocation density and self-similar solutions. *Comm. Math. Phys.*, 294(1):145–168, 2010.
- [5] J. M. Bony. Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. *Ann. de l'Ecole Norm. Sup.*, 14(2):209–246, 1981.
- [6] L. A. Caffarelli and A. Vasseur. Drift diffusion equations with fractional diffusion and the quasi-geostrophic equation. *Ann. of Math.*, 171(3):1903–1930, 2010.
- [7] M. Cannone and G. Karch. Smooth or singular solutions to the Navier-Stokes system. *J. Differential Equations*, 197(2):247–274, 2004.
- [8] J. A. Carrillo and L. C. F. Ferreira. Self-similar solutions and large time asymptotics for the dissipative quasi-geostrophic equation. *Monatsh. Math.*, 151(2):111–142, 2007.
- [9] J. A. Carrillo, L. C. F. Ferreira. The asymptotic behaviour of subcritical dissipative quasi-geostrophic equations. *Nonlinearity*, 21(5):1001–1018, 2008.
- [10] J. A. Carrillo, L. C. F. Ferreira and J. C. Precioso. A mass-transportation approach to a one dimensional fluid mechanics model with nonlocal velocity. *Adv. Math.*, 231(1):306–327, 2012.

- [11] A. Castro and D. Córdoba. Global existence, singularities and ill-posedness for a nonlocal flux. *Adv. Math.*, 219(6):1916–1936, 2008.
- [12] A. Castro and D. Córdoba. Infinite energy solutions of the surface quasi-geostrophic equation. *Adv. Math.*, 225(4):1820–1829, 2010.
- [13] D. Chae, A. Córdoba, D. Córdoba and M. A. Fontelos. Finite time singularities in a 1D model of the quasi-geostrophic equation. *Adv. Math.*, 194(1):203–223, 2005.
- [14] D. Chae, P. Constantin and J. Wu. Dissipative models generalizing the 2D Navier-Stokes and the surface quasi-geostrophic equations. *to appear in Indiana University Mathematics Journal*.
- [15] D. Chae, P. Constantin and J. Wu. Inviscid models generalizing the 2D euler and the surface quasi-geostrophic equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 202(1):35–62, 2011.
- [16] D. Chae, P. Constantin, D. Córdoba, F. Gancedo and J. Wu. Generalized surface quasi-geostrophic equations with singular velocities. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 65(8):1037–1066, 2012.
- [17] P. Constantin and J. Wu. Behavior of solutions of 2D quasi-geostrophic equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 30(5):937–948, 1999.
- [18] P. Constantin, A. Majda and E. Tabak. Formation of strong fronts in the 2D quasi-geostrophic thermal active scalar. *Nonlinearity*, 7:1459–1533, 1994.
- [19] P. Constantin, D. Córdoba and J. Wu. On the critical dissipative quasi-geostrophic equation. *Indiana University Mathematics Journal*, 50:97–107, 2001.
- [20] P. Constantin, G. Iyer and J. Wu. Global regularity for a modified critical dissipative quasi-geostrophic equation. *Indiana University Mathematics Journal*, 57(6):2681–2692, 2008.
- [21] A. Córdoba and D. Córdoba. A maximum principle applied to quasi-geostrophic equations. *Comm. Math. Phys*, 249(3):511–528, 2004.
- [22] M. Dabkowski, A. Kiselev and V. Vicol. Global well-posedness for a slightly supercritical surface quasi-geostrophic equation. *Nonlinearity*, 25(5):1525–1535, 2012.

- [23] J. Deslippe, D. Chrzan, M. Daw, M. Mills, T. Neeraj and R. Tedstrom,. Dynamics scaling in a simple one-dimensional model of dislocation activity. *Phil. Mag.*, 84:2445–2454, 2004.
- [24] H. Dong. Well-posedness for a transport equation with nonlocal velocity. *J. Funct. Anal.*, 255(11):3070–3097, 2008.
- [25] H. Dong and D. Du. Global well-posedness and a decay estimate for the critical dissipative quasi-geostrophic equation in the whole space. *Dyn. Syst.*, 21(4):1095–1101, 2008.
- [26] J. Duoandikoetxea and E. Zuazua. Tmoments, dirac deltas and expansion of functions. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 315(6):693–698, 1992.
- [27] L. C. F. Ferreira. A family of dissipative active scalar equations with singular velocity and measure initial data. *Computers & Mathematics with Applications*, 64:3292–3301, 2012.
- [28] L. C. F. Ferreira and E. J. Villamizar Roa. Self-similar solutions, uniqueness and long time asymptotic behavior for the semilinear heat equation. *Differential and Integral Equations*, 10(12):1349–1370, 2006.
- [29] L. C. F. Ferreira, L. S. M. Lima. Self-similar solutions for active scalar equations in fourier-besov-morrey spaces. *arXiv:1309.5369*, 2013.
- [30] L. C. F. Ferreira, L. S. M. Lima. Global well-posedness and symmetries for dissipative active scalar equations with higher-order couplings. *arXiv:1305.2987*, 2014.
- [31] G. B. Folland. *Real analysis: Modern Techniques and Their Applications, 2nd ed.* John Wiley Sons, 1999.
- [32] S. Friedlander and V. Vicol. Global well-posedness for an advection-diffusion equation arising in magneto-geostrophic dynamics. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 28(2):283–301, 2011.
- [33] S. Friedlander and V. Vicol. On the ill/well-posedness and nonlinear instability of the magneto-geostrophic equations. *Nonlinearity*, 24(11):3019–3042, 2011.
- [34] S. Friedlander and V. Vicol. Higher regularity of Hölder continuous solutions of parabolic equations with singular drift velocities. *J. Math. Fluid Mech.*, 14(2):255–266, 2012.

- [35] S. Friedlander, W. Rusin and V. Vicol. On the supercritically diffusive magnetogeostrophic equations. *Nonlinearity*, 25(11):3071–3097, 2012.
- [36] L. Grafakos. *Classical Fourier analysis*. Springer, 2008.
- [37] L. Grafakos. *Modern Fourier Analysis*, volume 250. Springer New York, 2009.
- [38] A. K. Head. Dislocation group dynamics iii. similarity solutions of the continuum approximation. *Phil. Mag.*, 26(1):65–72, 1972.
- [39] N. Ju. The maximum principle and the global attractor for 2D dissipative quasi-geostrophic equations. *Comm. Math. Phys.*, 255(6):161–181, 2005.
- [40] T. Kato. Strong solutions of the Navier-Stokes equation in Morrey spaces. *Bol. Soc. Bras. Mat.*, 22(2):127–155, 1992.
- [41] T. Kato. The Navier-Stokes equation for an incompressible fluid in \mathbb{R}^2 with a measure as the initial vorticity. *Differential Integral Equations*, 7(3):949–966, 1994.
- [42] A. Kiselev. Regularity and blow up for active scalars. *Math. Model. Nat. Phenom.*, 5(4):225–255, 2010.
- [43] A. Kiselev. Nonlocal maximum principles for active scalars. *Adv. Math.*, 227(5):1806–1826, 2011.
- [44] A. Kiselev, F. Nazarov and A. Volberg. Global well-posedness for the critical 2D dissipative quasi-geostrophic equation. *Invent. Math.*, 167(3):445–453, 2007.
- [45] P. Konieczny and T. Yoneda. On dispersive effect of the coriolis force for the stationary Navier-Stokes equations. *J. Differential Equations*, 250(10):3859–3873, 2011.
- [46] H. Kozono and M. Yamazaki. The stability of small stationary solutions in Morrey spaces of the Navier-Stokes equation. *Indiana Univ. Math.*, 44(2):1307–1336, 1995.
- [47] P. G. Lemarie. *Recent developments in the Navier-Stokes equations*. Chapman and Hall, Research Notes in Maths, 2002.
- [48] R. May. Global well-posedness for a modified dissipative surface quasi-geostrophic equation in the critical sobolev space H^1 . *J. of Differential Equations*, 250(1):320–339, 2011.

- [49] C. Miao and L. Xue. On the regularity of a class of generalized quasi-geostrophic equations. *J. Differential Equations*, 251(10):2789–2821, 2011.
- [50] C. Miao and L. Xue. Global well-posedness for a modified critical dissipative quasi-geostrophic equation. *J. Differential Equations*, 252(1):792–818, 2012.
- [51] H. K. Moffatt. Magnetostrophic turbulence and the geodynamo. in iutam symposium on computational physics and new perspectives in turbulence. *Springer, Dordrecht*, 4:339–346, 2008.
- [52] A. C. Morlet. Further properties of a continuum of model equations with globally defined flux. *J. Math. Anal. Appl.*, 221(1):132–160, 1998.
- [53] C. J. Niche and M. E. Schonbek. Decay of weak solutions to the 2D dissipative quasi-geostrophic equation. *Comm. Math. Phys.*, 276(1):93–115, 2007.
- [54] K. Ohkitani. Dissipative and ideal surface quasi-geostrophic equations. *Lecture presented at ICMS, Edinburgh*, 2007.
- [55] J. Peetre and J. Peetre. *New thoughts on Besov spaces*, volume 1. Mathematics Department, Duke University Durham, 1976.
- [56] M. E. Schonbek and T. P. Schonbek. Asymptotic behavior to dissipative quasi-geostrophic flows. *SIAM J. Math. Anal.*, 35(2):357–375, 2003.
- [57] H. Triebel. *Theory of function spaces*. Birkhäuser, Basel, 1983.
- [58] K. Yosida. *Functional analysis*. Springer-Verlag, 1980.

Índice Remissivo

- Bloco diádico, 10
- Decomposição de Littlewood-Paley, 11
- Desigualdade do tipo
 - Hölder, 21
 - Young, 21
- Espaço de
 - Besov homogêneo, 12
 - Fourier-Besov-Morrey, 72
 - Morrey Homogêneo, 19
 - Sobolev Homogêneo, 15
- Formulação
 - funcional, 78
 - integral, 30
- Função
 - Beta, 27
 - Gamma, 25
- Lema do tipo Bernstein, 12, 21
- Núcleo singular de Calderon-Zygmund, 24
- Operador
 - interal singular, 24
 - soma parcial, 10
 - Laplaciano fracionário, 14
 - multiplicador de Fourier, 18
- Paraproduto de Bony, 11
- Potencial de Riesz, 15
- Solução
 - auto-similar, 77
 - branda, 30
- Transformada de
 - Hilbert, 23
 - Riesz, 25