

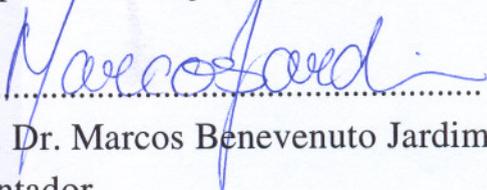
Teoria Geométrica dos Invariantes e  
Representações de Quivers

Ricardo Mendes

# Teoria Geométrica dos Invariantes e Representações de Quivers

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Ricardo Augusto Emmanuel Mendes e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 19 de junho de 2006

  
.....  
Prof. Dr. Marcos Benevenuto Jardim  
Orientador

Banca Examinadora

- 1- Marcos Benevenuto Jardim
- 2- Vyacheslav Futorny
- 3- Adriano Adrega de Moura

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Unicamp, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

*Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 859*

Mendes, Ricardo Augusto Emmanuel

M522t Teoria geométrica dos invariantes e representações de quivers /  
Ricardo Augusto Emmanuel Mendes -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2006.

Orientador : Marcos Benevenuto Jardim

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Geometria algébrica. 2. Representações de álgebra. 3.  
Invariantes. I. Jardim, Marcos Benevenuto. II. Universidade Estadual de  
Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação  
Científica. III. Título.

*Título em inglês: Geometric invariant theory and representations of quivers*

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Algebraic geometry. 2. Representations of  
algebras. 3. Invariant.

Área de concentração: Álgebra

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Marcos Benevenuto Jardim (IMECC-UNICAMP)

Prof. Dr. Vyacheslav Futorny (IME-USP)

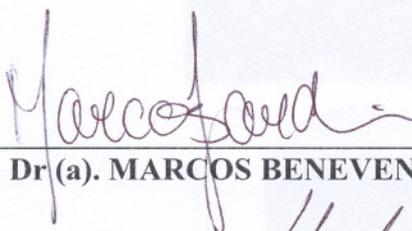
Prof. Dr. Adriano Adrega de Moura (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 09/06/2006

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

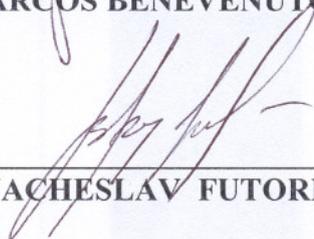
Dissertação de Mestrado defendida em 09 de junho de 2006 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



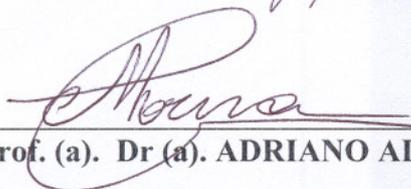
---

Prof. (a). Dr (a). MARCOS BENEVENUTO JARDIM



---

Prof. (a). Dr (a). VYACHESLAV FUTORNY



---

Prof. (a). Dr (a). ADRIANO ADREGA DE MOURA

## Resumo

A presente tese está dividida em duas partes.

Na primeira parte apresentamos as principais idéias e ferramentas da Teoria Geométrica dos Invariantes, que tem como objetivo definir precisamente e resolver o seguinte problema: Em que circunstâncias é possível dar uma estrutura de variedade algébrica ao quociente de uma variedade algébrica pela ação de um grupo (também algébrico)?

Um dos resultados mais importantes diz que é possível construir um quociente se nos restringirmos a um aberto denso (dos chamados pontos semi-estáveis) da variedade original. E o principal motivo pelo qual esse é um bom resultado é que há um critério numérico (de Hilbert-Mumford) que nos permite verificar se um dado ponto é ou não (semi-)estável.

A Teoria Geométrica dos Invariantes tem aplicações amplas em muitas áreas, principalmente nos problemas de moduli. A segunda parte desta tese trata justamente de uma tal aplicação: a construção e estudo dos espaços de moduli de representações de quivers.

Quivers são nada mais que grafos orientados, e uma representação consiste em associar a cada vértice um espaço vetorial e a cada flecha um mapa linear. Este assunto é interessante tanto por ser uma generalização direta de problemas clássicos de álgebra linear quanto pela ligação com a teoria de módulos sobre álgebras associativas de dimensão finita sobre um corpo.

## Abstract

This thesis is divided into two parts.

In the first part we present the main ideas and tools of Geometric Invariant Theory, which is concerned with the following problem: Is it possible to give an algebraic structure to the quotient of an algebraic variety by the action of an algebraic group?

One of the most important results says that an algebraic quotient exists if we restrict the space to a dense open subset of the original variety (the so-called semi-stable points). The main reason why this is a good result is that there is a numerical criterion (due to Hilbert and Mumford) to decide whether a given point is (semi-)stable.

Geometric Invariant Theory has applications to many areas, especially to moduli problems. The second part of this thesis shows one such application: we construct the moduli space of representations of a quiver.

Quivers are just directed graphs, and a representation consists of associating to each vertex a vector space and to each arrow a linear map between the spaces associated to the initial and final vertices of that arrow. There are two reasons why this is an interesting subject: it is a natural generalization of classical linear algebra problems; and it is connected to the study of modules over a finite dimensional algebra over a field.

# Introdução

A Teoria Geométrica dos Invariantes trata do seguinte problema: Dados uma variedade algébrica  $X$ , um grupo algébrico  $G$  e uma ação de  $G$  em  $X$ , é possível dar ao espaço de órbitas uma estrutura de variedade algébrica?

Nas primeiras três seções do capítulo 1 nós definimos precisamente os termos usados acima, estudamos suas propriedades básicas e vemos que, em geral, a resposta é não.

Uma hipótese fundamental para que a construção de quocientes seja possível é a de que o grupo  $G$  seja geometricamente reutivo, conceito que apresentamos na seção 4. Na seção 5 usamos essa hipótese na construção do quociente  $X//G$  quando  $X$  é afim.

Para lidar com o caso em que  $X$  não é afim, precisamos nos restringir a um subconjunto aberto denso de  $X$ , dos chamados pontos semi-estáveis, o que fazemos na seção 6. Já na seção 7 apresentamos o critério numérico de Hilbert-Mumford, que nos permite dizer se um dado ponto é ou não semi-estável.

Depois disso aplicamos essas ferramentas ao estudo de um exemplo simples, o das Formas Binárias, e terminamos o capítulo explorando as mesmas idéias num contexto um pouco mais geral e voltado à situação tratada no capítulo seguinte.

O material do primeiro capítulo foi quase totalmente retirado de [Newstead]. Outras referências básicas em Teoria de Invariantes são [Dolgachev] e [Fogarty], e uma ótima referência em Geometria Algébrica é [Hartshorne].

A Teoria Geométrica dos Invariantes tem aplicações amplas em muitas áreas, principalmente nos problemas de moduli. O segundo capítulo trata justamente de uma tal aplicação: a construção e estudo dos espaços de moduli de representações de quivers.

Quivers são nada mais que grafos orientados, e uma representação consiste em associar a cada vértice um espaço vetorial e a cada flecha um mapa linear.

As duas primeiras seções exploram os conceitos fundamentais, incluindo como o estudo das categorias de módulos sobre uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo pode ser reduzido ao estudo de representações de uma quiver com “relações”.

Na seção 3 interpretamos o espaço de moduli de representações de uma quiver como um quociente algébrico e o construímos, e na seção 4 indicamos que modificações nesses argumentos são necessárias para tratar de representações de quivers com relações.

Na seção seguinte mostramos alguns resultados gerais sobre esse espaço de moduli, e terminamos o capítulo com alguns exemplos.

A referência fundamental para o segundo capítulo é [King].

## Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha família, minha namorada e amigos, sem os quais nada disso teria sido possível (ou desejável).

Também sou grato aos professores Adriano Moura, Vyacheslav Futorny e principalmente meu orientador Marcos Jardim por inúmeras discussões matemáticas que afinal deram forma à presente dissertação. Além desses gostaria de expressar minha gratidão a vários professores que me deram aulas durante a graduação, especialmente a meu orientador de Iniciação Científica Alcibiades Rigas. Devo a eles toda minha formação matemática.

Finalmente agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Teoria Geométrica dos Invariantes</b>	<b>4</b>
1.1	Grupos Algébricos e Ações . . . . .	4
1.2	Ações Duais . . . . .	6
1.3	Quociente Categórico e o 14º Problema de Hilbert . . . . .	7
1.4	Grupos Geometricamente Redutivos . . . . .	8
1.5	Quocientes Afins . . . . .	13
1.6	O Caso Não-Afim . . . . .	15
1.7	Um Critério De Estabilidade . . . . .	16
1.8	Um Exemplo: Formas Binárias . . . . .	19
1.9	Um outro ponto de vista . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Aplicação: Quivers e suas Representações</b>	<b>24</b>
2.1	Quivers e suas Representações . . . . .	24
2.2	Álgebras de dimensão finita, Teorema de Jordan-Hölder e $\theta$ - estabilidade . . . . .	28
2.3	GIT e Representações de Quivers sem Relações . . . . .	32
2.4	GIT e Representações de Quivers com Relações . . . . .	41
2.5	Alguns Resultados Gerais Sobre o Quociente . . . . .	45
2.6	Alguns exemplos . . . . .	51
2.6.1	Diagrama de Dynkyn $A_n$ . . . . .	51
2.6.2	A Quiver de Jordan . . . . .	53

# Capítulo 1

## Teoria Geométrica dos Invariantes

### 1.1 Grupos Algébricos e Ações

**Definição 1.1.1** Um *grupo algébrico* é uma variedade algébrica e um grupo tal que os mapas

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (g, h) & \longmapsto & g \cdot h \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & g^{-1} \end{array}$$

são morfismos de variedades.

**Proposição 1.1.2** *Seja  $G$  um grupo algébrico e  $G_0$  sua componente conexa que contém a identidade. Então  $G_0$  é um subgrupo fechado, normal (como subgrupo) e irredutível. Em particular,  $G$  é conexo se e só se  $G$  é irredutível.*

PROVA: Veja [Fogarty], proposição 2.2, página 44. ■

**Definição 1.1.3** Um mapa  $\varphi : G \rightarrow H$  entre grupos algébricos é um homomorfismo se é ao mesmo tempo um homomorfismo de grupos e um morfismo de variedades algébricas.

**Proposição 1.1.4** *Se  $\varphi : G \rightarrow H$  é um homomorfismo entre grupos algébricos, então  $\ker \varphi$  é subgrupo fechado normal de  $G$ , e, se  $G$  for irredutível,  $\text{im } \varphi$  é subgrupo fechado de  $H$ .*

PROVA: A primeira parte é clara.

Pelo teorema de Chevalley,  $\text{im } \varphi$  é um conjunto construtível, e como ele é denso em  $\overline{\text{im } \varphi}$ , ele deve conter um aberto  $U$  desse grupo algébrico (veja [Hartshorne], exercícios 3.19 e 3.18 do capítulo II, página 94). Como estamos assumindo  $G$  irredutível,  $\overline{\text{im } \varphi}$  é irredutível, e assim  $U$  é denso. Desse modo, para qualquer  $h \in \overline{\text{im } \varphi}$ , os abertos  $U$  e  $h \cdot U^{-1}$  interceptam, ou seja,  $h \in U \cdot U$ , o que mostra que  $U \cdot U = \overline{\text{im } \varphi}$ . Como  $U \cdot U \subseteq \text{im } \varphi$ , concluímos que  $\text{im } \varphi = \overline{\text{im } \varphi}$ , como queríamos. ■

**Definição 1.1.5** Uma ação (à esquerda) de um grupo algébrico  $G$  em uma variedade  $X$  é um morfismo  $G \times X \rightarrow X$ ,  $(g, x) \mapsto gx$  tal que:

$$g(hx) = (gh)x \quad \forall g, h \in G, x \in X$$

$$ex = x \quad \forall x \in X$$

Nós temos então as noções usuais relacionadas a ações:

**Definição 1.1.6** Suponha dada um ação  $G \times X \rightarrow X$ .

- O *estabilizador* (ou *grupo de isotropia*) de  $x \in X$  é o subgrupo fechado  $G_x = \{g \in G \mid gx = x\} \subseteq G$
- A *órbita* de  $x \in X$  é  $O(x) = \{gx \mid g \in G\} \subseteq X$ .
- Um subconjunto  $W \subseteq X$  é *invariante* se  $gW \subseteq W \quad \forall g \in G$ .
- Dizemos que um morfismo  $\varphi : X \rightarrow Y$  é *invariante* quando  $\varphi(gx) = \varphi(x) \quad \forall g \in G, x \in X$

**Proposição 1.1.7** *Suponha que o grupo algébrico irredutível  $G$  age na variedade  $X$ . Então, para qualquer ponto  $x \in X$ , a órbita  $O(x)$  é aberta em seu fecho.*

PROVA:  $O(x)$  é a imagem do morfismo  $G \rightarrow X$  dado por  $g \mapsto gx$ . Como na prova da proposição 1.1.4 acima, ela contém um aberto denso  $U$  de  $\overline{O(x)}$ . Então ela também contém os abertos  $g \cdot U$ , para  $g$  em  $G$ , que claramente cobrem toda  $O(x)$ . Portanto a órbita é aberta em seu fecho. ■

**Definição 1.1.8** Se  $G$  age em  $X$  e em  $Y$ , um morfismo  $\varphi : X \rightarrow Y$  é um  $G$ -morfismo se ele comuta com as ações, isto é, se

$$\varphi(gx) = g\varphi(x) \quad \forall g \in G, x \in X.$$

**Exemplo 1.1.9**  $GL(n) = M(n)_{\det}$  é um grupo algébrico afim, e assim seus subgrupos fechados também são afins. Na verdade, todo grupo algébrico afim é isomorfo a algum subgrupo fechado de  $GL(n)$  para algum  $n$  (veja [Fogarty], corolário 2.22, página 63). Esses grupos são chamados *grupos lineares*.

## 1.2 Ações Duais

**Definição 1.2.1** Suponha que  $G$  age numa variedade  $X$ .

Então  $G$  age (à direita) na  $k$ -álgebra  $A(X)$  das funções regulares sobre  $X$ :

$$\begin{aligned} A(X) \times G &\longrightarrow A(X) \\ (f, g) &\longmapsto f^g \end{aligned}$$

onde  $f^g$  é dada por  $f^g(x) = f(gx) \quad \forall x \in X$ .

Essa é a *ação dual*.

**Lema 1.2.2** *Seja  $W$  um subespaço vetorial (sobre  $k$ ) de  $A(X)$  de dimensão finita. Então:*

- *Se  $W$  é invariante,  $G$  age linearmente em  $W$ , isto é, a ação fatora por um homomorfismo  $G \rightarrow GL(W)$ .*
- *De qualquer modo,  $W$  está contido num subespaço  $W'$ , invariante e de dimensão finita.*

PROVA: Veja [Newstead], páginas 45–46. ■

Então as ações sobre a  $k$ -álgebra  $A(X)$  que vêm de ações sobre  $X$  têm duas propriedades especiais. Vamos dar um nome especial a essas ações:

**Definição 1.2.3** Sejam  $G$  um grupo algébrico e  $R$  uma  $k$ -álgebra. Uma ação *racional* de  $G$  sobre  $R$  é um mapa

$$\begin{aligned} R \times G &\longrightarrow R \\ (f, g) &\longmapsto f^g \end{aligned}$$

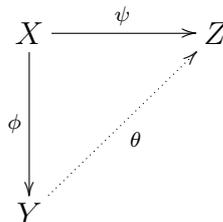
que satisfaz as seguintes propriedades:

- $f \mapsto f^g$  é um homomorfismo de  $k$ -álgebras.
- $f^e = f$ ,  $f^{(gh)} = (f^g)^h$
- todo elemento de  $R$  está contido num subespaço de dimensão finita que é invariante por  $G$  e no qual  $G$  age linearmente.

### 1.3 Quociente Categórico e o 14º Problema de Hilbert

**Definição 1.3.1** Suponha que temos uma ação de  $G$  em  $X$ . Um *quociente categórico* de  $X$  por  $G$  é um par  $(Y, \phi)$ , onde  $Y$  é uma variedade e  $\phi : X \rightarrow Y$  é um morfismo, tais que:

- $\phi$  é constante nas órbitas da ação, isto é,  $\phi$  é  $G$ -invariante;
- (propriedade universal) para cada variedade  $Z$  e morfismo  $\psi : X \rightarrow Z$  que é constante em órbitas, existe um único morfismo  $\theta : Y \rightarrow Z$  tal que  $\theta \circ \phi = \psi$ .



**Definição 1.3.2** Um *espaço de órbitas* é um quociente categórico  $(Y, \phi)$  tal que  $\phi^{-1}(y)$  contém uma única órbita para todo  $y \in Y$ .

A existência de um espaço de órbitas implica que a ação é fechada, isto é, que todas as órbitas são fechadas. (Realmente, todas elas são da forma  $\phi^{-1}(y)$ , e esses conjuntos são fechados porque  $\phi$  é morfismo.)

Considere agora a seguinte imagem informal: Se  $(Y, \phi)$  é um quociente categórico, e tanto  $X$  quanto  $Y$  são afins, pondo  $Z = k$  na definição acima concluímos que  $A(Y) \simeq A(X)^G$  (= subálgebra dos elementos invariantes pela ação de  $G$ ). Portanto  $A(X)^G$  é finitamente gerado.

Portanto seria interessante saber se  $R^G$  é finitamente gerado sempre que  $R$  for finitamente gerado e a ação de  $G$  em  $R$  for racional. Este é o chamado *14º Problema de Hilbert*.

Ele não é verdade em geral (veja o contra-exemplo de Nagata em [Dolgachev], seção 4.3, página 52). Precisamos de uma hipótese adicional sobre  $G$ : que ele seja “geometricamente reductivo”.

## 1.4 Grupos Geometricamente Redutivos

### Motivação para a definição

É razoável pedir que se  $W_1$  e  $W_2$  são dois fechados invariantes disjuntos de  $X$ , então eles são mapeados para conjuntos fechados disjuntos de  $Y$ , e assim (no caso em que  $Y$  é afim), que existe  $f \in A(X)^G$  com valores diferentes em  $W_1$  e  $W_2$ .

Nós dizemos que um grupo é geometricamente reductivo quando isso acontece no caso específico em que  $X = k^n$ ,  $W_1 = \{0\}$ ,  $W_2 = \{v\}$  e  $G$  age linearmente em  $X$ . Mais precisamente, temos a:

**Definição 1.4.1** Um grupo algébrico linear  $G$  é *geometricamente reductivo* se, para cada ação linear de  $G$  em  $k^n$ , e cada ponto invariante  $v \in k^n$ , com  $v \neq 0$ , existe um polinômio homogêneo invariante  $f$  de grau  $\geq 1$  tal que  $f(v) \neq 0$ .

Se sempre podemos escolher  $f$  com grau = 1,  $G$  é chamado *linearmente reductivo*.

Note que  $G$  é linearmente reductivo se e só se, para cada ação linear de  $G$  em  $k^n$ , e para cada subespaço invariante  $W$ , existe subespaço invariante  $W'$  tal que  $W \oplus W' = k^n$ .

Redutividade geométrica é suficiente para termos a característica mais geral citada na *Motivação* acima.

**Lema 1.4.2** *Seja  $G$  um grupo geometricamente reductivo que age numa variedade afim  $X$  e sejam  $W_1$  e  $W_2$  conjuntos fechados invariantes disjuntos de  $X$ . Então existe um  $f \in A(X)^G$  com  $f(W_1) = 0$  e  $f(W_2) = 1$ .*

PROVA: Sejam  $I_1, I_2$  ideais de  $A(X)$  tais que  $W_1 = Z(I_1)$  e  $W_2 = Z(I_2)$ . Como  $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ , temos  $I_1 + I_2 = A$ , e por isso é claro que existe  $h \in A(X)$  com  $h(W_1) = 0$  e  $h(W_2) = 1$ .

Pelo lema 1.2.2, o subespaço gerado pelos  $h^g, g \in G$  tem dimensão finita, e  $G$  age nele por transformações lineares. Numa base  $\{h_1, \dots, h_n\}$  a ação (à

direita) de  $G$  pode ser escrita como

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^g = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11}(g) & \cdots & a_{1n}(g) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(g) & \cdots & a_{nn}(g) \end{pmatrix}$$

O homomorfismo  $G \rightarrow \text{GL}(n)$  dado por

$$g \mapsto A(g) = \begin{pmatrix} a_{11}(g) & \cdots & a_{1n}(g) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(g) & \cdots & a_{nn}(g) \end{pmatrix}$$

também define uma ação à esquerda de  $G$  em  $k^n$ :

$$g \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = A(g) \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

Em relação a essa ação é fácil ver que o mapa  $\psi : X \rightarrow k^n$  dado por

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ \vdots \\ h_n(x) \end{pmatrix}$$

é um  $G$ -morfismo. (Para isso, use a fórmula  $h_i^g(x) = \sum a_{ij}(g)h_j(x)$ .)

Lembre-se que cada  $h_i$  pertence ao espaço gerado pelas translações de  $h$ , e assim existem  $g_j \in G$  e  $b_{ij} \in k$  tais que

$$h_i = \sum_{j=1}^m b_{ij} h^{g_j}$$

Isso implica que  $\psi(W_2)$  consiste de um único ponto

$$v = \begin{pmatrix} b_{11} + \dots + b_{1m} \\ \vdots \\ b_{n1} + \dots + b_{nm} \end{pmatrix} \in k^n$$

Tal ponto é invariante pela ação de  $G$  (porque  $W_2$  é invariante) e não é nulo porque  $h(W_2) = 1$ .

Usando o fato que  $G$  é geometricamente reductivo, vemos que existe polinômio invariante, homogêneo e de grau positivo  $F \in k[X_1, \dots, X_n]$  tal que  $F(v) \neq 0$ .

Portanto  $f = \frac{1}{F(v)}F \circ \psi \in A(X)$  tem as propriedades desejadas: é invariante,  $f(W_1) = 0$  e  $f(W_2) = 1$ . ■

Como dissemos na seção 1.3, temos também:

**Teorema 1.4.3 (Nagata)** *Seja  $G$  um grupo geometricamente reductivo agindo racionalmente numa  $k$ -álgebra finitamente gerada  $R$ . Então  $R^G$  é finitamente gerada.*

PROVA: Veja [Dolgachev], seção 3.4, página 41. ■

Existe um resultado (*Conjectura de Mumford*, veja abaixo) que garante reductividade geométrica quando o grupo é (*algebricamente*) reductivo:

**Definição 1.4.4** Se  $G$  é um grupo algébrico, definimos seu *radical* como sendo o subgrupo maximal conexo, normal e solúvel.

$G$  é *reductivo* se seu radical é isomorfo ao produto de um número finito de cópias de  $k^*$ . ( $k^* = k - \{0\}$  é o grupo multiplicativo de  $k$ .)

**Exemplo 1.4.5**  $GL(n)$ ,  $SL(n)$  e  $PGL(n)$  são todos reductivos.

É verdade que todo grupo geometricamente reductivo é reductivo. Em característica 0, todo grupo reductivo é linearmente reductivo, o que não é verdade em qualquer característica. Nesse caso, o que temos é:

**Teorema 1.4.6 (Conjectura de Mumford)** *Todo grupo reductivo é geometricamente reductivo.*

PROVA: Veja [Haboush]. ■

De agora em diante vamos usar os termos “reductivo” e “geometricamente reductivo” livremente.

Como não demonstraremos a conjectura de Mumford acima, vamos pelo menos mostrar que  $GL(n, \mathbb{C})$ ,  $SL(n, \mathbb{C})$  e seus produtos são linearmente reductivos, utilizando o “truque unitário” de Weyl.

Começamos com o caso  $G = SL(n, \mathbb{C})$ . Suponha dada uma ação linear de  $G$  em um espaço vetorial complexo  $E$  de dimensão finita. A idéia é que o conjunto de polinômios  $G$ -invariantes definidos sobre  $E$  é igual ao conjunto dos polinômios  $K$ -invariantes, onde  $K = SU(n) = \{M \in SL(n, \mathbb{C}) \mid M\bar{M}^t = I\}$ .

$I\}$ . É fácil então mostrar que  $SU(n)$  é linearmente reductivo, porque ele é um grupo compacto.

**Proposição 1.4.7** *Sejam  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{M \in Mat_{n \times n} \mid tr(M) = 0\}$  e  $\mathfrak{su}(n) = \{M \in Mat_{n \times n} \mid tr(M) = 0 \text{ e } M + \bar{M}^T = 0\}$  as álgebras de Lie dos grupos  $SL(n, \mathbb{C})$  e  $SU(n)$ .*

*Os mapas*

$$\exp : \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \rightarrow G \quad \exp : \mathfrak{su}(n) \rightarrow K$$

*são sobrejetores.*

PROVA: Se  $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ , então  $\mathbb{C}_f^n = \{p \in \mathbb{C}^n \mid f(p) \neq 0\}$  é conexo. Realmente, dados  $p_1, p_2 \in \mathbb{C}_f^n$ , seja  $L = \{p_1 + z(p_2 - p_1) \mid z \in \mathbb{C}\}$ .  $f|_L$  é então um polinômio em  $z$ , e como  $z = 0$  e  $z = 1$  não são raízes,  $f|_L$  tem um número finito de raízes. Assim  $\{p \in L \mid f(p) \neq 0\}$  é conexo, e existe um caminho em  $L \cap \mathbb{C}_f^n$  entre  $p_1$  e  $p_2$ . Logo  $\mathbb{C}_f^n$  é conexo. Em particular  $GL(n, \mathbb{C})$  é conexo.

O mapa

$$\begin{aligned} GL(n, \mathbb{C}) &\longrightarrow SL(n, \mathbb{C}) \\ M &\longmapsto \frac{1}{\det M} M \end{aligned}$$

é contínuo e sobrejetor, e por isso  $SL(n, \mathbb{C})$  é conexo. Também temos um mapa  $GL(n, \mathbb{C}) \rightarrow SU(n)$  contínuo e sobrejetor, que consiste em aplicar o processo de Gram-Schmidt à base dada pelas linhas de uma matriz  $M \in GL(n, \mathbb{C})$ , seguido do mapa descrito acima. Portanto  $SL(n, \mathbb{C})$  e  $SU(n)$  são conexos.

Como a imagem de  $\exp$  contém uma vizinhança aberta da identidade, e qualquer tal vizinhança gera o grupo de Lie se ele for conexo (veja [Armstrong], seção 4.3, página 75), concluímos que

$$\exp : \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \rightarrow G \quad \exp : \mathfrak{su}(n) \rightarrow K$$

são sobrejetores. ■

**Proposição 1.4.8** *A álgebra de Lie complexa  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  é a complexificação da álgebra de Lie real  $\mathfrak{su}(n)$ .*

PROVA: É só notar que o conjunto

$$\{E_{ij} - E_{ji}\} \cup \{\sqrt{-1}(E_{ij} + E_{ji})\} \cup \{\sqrt{-1}(E_{ii} - E_{jj})\}$$

é base (sobre  $\mathbb{C}$ ) de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  e base (sobre  $\mathbb{R}$ ) de  $\mathfrak{su}(n)$ . ■

**Lema 1.4.9 (Truque Unitário)** *Suponha dada uma ação linear de  $G = \text{SL}(n, \mathbb{C})$  em um espaço vetorial complexo  $E$  de dimensão finita. Seja  $K = \text{SU}(n)$ . Então*

$$\text{Pol}(E)^G = \text{Pol}(E)^K$$

PROVA: Seja  $F \in \text{Pol}(E)$ . Então

$$\begin{aligned} F \in \text{Pol}(E)^G &\iff F(g \cdot v) = F(v) \quad \forall g \in G, v \in E \\ &\iff F(e^{tM} \cdot v) = F(v) \quad \forall t \in \mathbb{R}, M \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}), v \in E \\ &\iff \frac{d}{dt}(F(e^{tM} \cdot v))|_{t=a} = 0 \quad \forall M \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}), v \in E, a \in \mathbb{R} \\ &\iff \frac{d}{dt}(F(e^{tM} \cdot v))|_{t=0} = 0 \quad \forall M \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}), v \in E \end{aligned}$$

(a última equivalência vale porque  $F(e^{(t+a)M} \cdot v) = F(e^{tM} \cdot (e^{aM} \cdot v))$ )

Defina

$$\langle M, F \rangle(v) = \left. \frac{d}{dt}(F(e^{tM} \cdot v)) \right|_{t=0}$$

de modo que temos

$$F \in \text{Pol}(E)^G \iff \langle M, F \rangle = 0 \quad \forall M \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$$

Mas  $M \mapsto \langle M, F \rangle$  é linear (para provar isso use a regra da cadeia e lembre-se que  $\frac{d}{dt}(e^{tM})|_{t=0} = M$ ) e por isso basta verificar que  $\langle M, F \rangle = 0$  para  $M$  em uma base de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ . Podemos escolher uma base que também seja uma base, sobre  $\mathbb{R}$ , de  $\mathfrak{su}(n)$  (veja proposição acima), ou seja,

$$\langle M, F \rangle = 0 \quad \forall M \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \iff \langle M, F \rangle = 0 \quad \forall M \in \mathfrak{su}(n)$$

Pelo mesmo argumento acima, vemos que

$$F \in \text{Pol}(E)^K \iff \langle M, F \rangle = 0 \quad \forall M \in \mathfrak{su}(n)$$

Portanto  $\text{Pol}(E)^G = \text{Pol}(E)^K$ . ■

**Teorema 1.4.10**  $G = \text{SL}(n, \mathbb{C})$  é linearmente reductivo.

PROVA: Seja  $v \in E^G - \{0\}$ . Escolha qualquer função linear  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  com  $f(v) \neq 0$ .

Como  $K$  é um grupo topológico compacto, existe uma regra de integração invariante sobre  $K$  (medida de Haar, veja [Sternberg], seção 4.1, página 173). Defina outra função linear  $\tilde{f} : E \rightarrow \mathbb{C}$  por:

$$\tilde{f}(w) = \int_K f(g \cdot v) dg \quad \forall w \in E$$

Então  $\tilde{f}(v) \neq 0$ , e  $\tilde{f}$  é  $K$ -invariante. Pelo truque unitário  $\tilde{f}$  é  $G$ -invariante, completando a demonstração de que  $G$  é linearmente reductivo. ■

Note que a mesma demonstração pode ser usada sempre que tivermos um grupo de Lie complexo conexo  $G$  e um subgrupo de Lie real compacto conexo  $K$  tais que a álgebra de Lie de  $G$  é a complexificação da álgebra de Lie de  $K$ . Em particular, para  $G = \text{GL}(n, \mathbb{C})$  podemos pôr  $K = \text{U}(n)$ , e, de maneira um pouco mais geral, se

$$G = \text{GL}(n_1, \mathbb{C}) \times \cdots \times \text{GL}(n_k, \mathbb{C}) \times \text{SL}(m_1, \mathbb{C}) \times \cdots \times \text{SL}(m_l, \mathbb{C})$$

podemos pôr

$$K = \text{U}(n_1) \times \cdots \times \text{U}(n_k) \times \text{SU}(m_1) \times \cdots \times \text{SU}(m_l)$$

**Teorema 1.4.11** *Os grupos  $\text{SL}(n, \mathbb{C})$ ,  $\text{GL}(n, \mathbb{C})$  e seus produtos são linearmente reductivos.*

## 1.5 Quocientes Afins

**Teorema 1.5.1** *Seja  $G$  um grupo reductivo agindo numa variedade afim  $X$ .*

*Se  $A(X)$  é o anel de coordenadas de  $X$ , seja  $Y$  a variedade afim correspondendo à  $k$ -álgebra  $A(Y) = A(X)^G$  (ela é finitamente gerada pelo teorema de Nagata 1.4.3, e não tem nilpotentes porque é subálgebra de  $A(X)$ ), e seja  $\phi : X \rightarrow Y$  o morfismo correspondente à inclusão  $A(Y) \hookrightarrow A(X)$ .*

*Então:*

- (i)  $\phi$  é  $G$ -invariante;
- (ii)  $\phi$  é sobrejetora;
- (iii) Se  $U$  é aberto de  $Y$ , então

$$\phi^* : A(U) \longrightarrow A(\phi^{-1}(U))$$

*é isomorfismo de  $A(U)$  sobre  $A(\phi^{-1}(U))^G$ ;*

- (iv) Se  $W$  é um fechado invariante de  $X$ , então  $\phi(W)$  é fechado;
- (v) Se  $W_1$  e  $W_2$  são fechados invariantes disjuntos de  $X$ , então

$$\phi(W_1) \cap \phi(W_2) = \emptyset.$$

PROVA: Veja [Newstead], páginas 62–63. ■

**Corolário 1.5.2** *Se  $x_1, x_2 \in X$ , então*

$$\phi(x_1) = \phi(x_2) \iff \overline{O(x_1)} \cap \overline{O(x_2)} \neq \emptyset$$

PROVA:

$\Rightarrow$  : ponha  $W_i = \overline{O(x_i)}$  em (v);

$\Leftarrow$  : é óbvio. ■

**Corolário 1.5.3** *Para cada aberto  $U$  de  $Y$ ,  $(U, \phi)$  é um quociente categórico de  $\phi^{-1}(U)$  por  $G$ . Em particular,  $(Y, \phi)$  é quociente categórico de  $X$  por  $G$ .*

PROVA: Veja [Newstead], páginas 63–65. ■

**Corolário 1.5.4** *Seja  $U$  um aberto de  $Y$  tal que a ação de  $G$  em  $\phi^{-1}(U)$  é fechada. Então  $U$  é espaço de órbitas.*

Aqui estão algumas propriedades adicionais:

**Lema 1.5.5** *Seja  $G$  um grupo algébrico agindo numa variedade  $X$ . Então:*

a) *para cada  $x \in X$ ,  $O(x)$  é aberto em  $\overline{O(x)}$ , e portanto  $\overline{O(x)} - O(x)$  é uma união de órbitas de dimensão menor;*

b) *para cada  $x \in X$ ,  $\dim O(x) = \dim G - \dim G_x$ ;*

c) *para cada inteiro  $n$ , o conjunto  $\{x \in X \mid \dim O(x) \geq n\}$  é aberto.*

PROVA: Veja [Newstead] páginas 66–67. ■

**Proposição 1.5.6** *Seja*

$$X' = \{x \in X \mid O(x) \text{ é fechado e } \dim O(x) \text{ atinge seu valor máximo}\}$$

*Então existe um conjunto aberto  $Y'$  de  $Y$  tal que  $\phi^{-1}(Y') = X'$ , e  $(Y', \phi)$  é um espaço de órbitas para a ação de  $G$  em  $X'$ .*

PROVA: Ponha

$$X^{\max} = \{x \in X \mid \dim O(x) \text{ atinge seu valor máximo}\}$$

$$Y' = Y - \phi(X - X^{\max})$$

(Veja [Newstead], páginas 67–68.) ■

## 1.6 O Caso Não-Afim

**Definição 1.6.1** Seja  $G$  um grupo algébrico agindo numa variedade  $X$ . Um *bom quociente* de  $X$  por  $G$  é um par  $(Y, \phi)$ , onde  $Y$  é uma variedade e  $\phi : X \rightarrow Y$  um morfismo afim, satisfazendo as condições (i)–(v) do teorema 1.5.1.

Um *quociente geométrico* é um bom quociente que também é um espaço de órbitas.

**Proposição 1.6.2**  $(Y, \phi)$  é bom quociente  $\implies (Y, \phi)$  é quociente categórico.

**Proposição 1.6.3** Se  $(Y, \phi)$  é bom quociente, e  $x_1, x_2 \in X$  então

$$\phi(x_1) = \phi(x_2) \iff \overline{O(x_1)} \cap \overline{O(x_2)} \neq \emptyset$$

**Proposição 1.6.4** Se a ação de  $G$  em  $X$  é fechada, então  $(Y, \phi)$  é um quociente geométrico.

**Definição 1.6.5** Uma *linearização* de uma ação de um grupo algébrico  $G$  em uma variedade projetiva  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  é uma ação linear de  $G$  em  $\mathbb{A}^{n+1}$  que induz a ação dada em  $X$ .

Ganhamos então uma ação de  $G$  em  $k[X_0, \dots, X_n]$ .

**Definição 1.6.6** Seja  $X$  uma variedade projetiva em  $\mathbb{P}^n$  e suponha dada uma ação linear de um grupo reductivo  $G$  em  $X$ . Um ponto  $x \in X$  é então chamado:

- (i) *semi-estável* se existe um polinômio homogêneo invariante  $f$  de grau  $\geq 1$  tal que  $f(x) \neq 0$ .
- (ii) *estável* se  $\dim O(x) = \dim G$  e existe um polinômio homogêneo invariante  $f$  de grau  $\geq 1$  tal que  $f(x) \neq 0$  e a ação de  $G$  no aberto afim  $X_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$  é fechada.

**Lema 1.6.7** Os seguintes conjuntos são abertos:

$$X^{\text{ss}} = \{x \in X \mid x \text{ é semi-estável}\}$$

$$X_0^{\text{s}} = \{x \in X \mid x \text{ é estável}\}$$

PROVA: Isso é óbvio se usarmos o fato que  $\{x \in X \mid \dim O(x) = \dim G\}$  é aberto (ver lema 1.5.5). ■

**Teorema 1.6.8** *Seja  $X$  uma variedade projetiva em  $\mathbb{P}^n$ . Então, para qualquer ação linear de um grupo reductivo  $G$  em  $X$ ,*

- (i) *existe um bom quociente  $(Y, \phi)$  de  $X^{\text{ss}}$  por  $G$ , e  $Y$  é projetivo;*
- (ii) *existe um subconjunto aberto  $Y^{\text{s}} \subseteq Y$  tal que  $\phi^{-1}(Y^{\text{s}}) = X_0^{\text{s}}$  e  $(Y^{\text{s}}, \phi)$  é um quociente geométrico de  $X_0^{\text{s}}$ ;*
- (iii) *para  $x_1, x_2 \in X^{\text{ss}}$ ,*

$$\phi(x_1) = \phi(x_2) \iff \overline{O(x_1)} \cap \overline{O(x_2)} \cap X^{\text{ss}} \neq \emptyset$$

- (iv) *para  $x \in X^{\text{ss}}$ ,*

$$x \text{ é estável} \iff \dim O(x) = \dim G \text{ e } O(x) \text{ é fechado em } X^{\text{ss}}$$

PROVA: Veja [Newstead], páginas 75–77. ■

## 1.7 Um Critério De Estabilidade

Começamos com alguns resultados técnicos preliminares.

**Lema 1.7.1** *Um ponto  $x$  é estável se e só se existe um polinômio homogêneo invariante  $f$  de grau  $\geq 1$  com  $f(x) \neq 0$  satisfazendo qualquer uma das propriedades abaixo:*

- (a)  $\dim O(x) = \dim G$  e a ação de  $G$  em  $X_f$  é fechada (esta é a definição original);
- (b)  $\dim O(x) = \dim G$  e  $O(x)$  é fechada em  $X_f$ ;
- (c)  $\dim O(y) = \dim G$  para todo  $y \in X_f$ ;
- (d)  $G_y$  é finito para todo  $y \in X_f$ ;
- (e) o morfismo

$$(\sigma_x)_f : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & X_f \\ g & \longmapsto & gx \end{array}$$

é próprio.

PROVA: Veja [Newstead], páginas 77–79. ■

**Proposição 1.7.2** *Sejam  $x \in X$  e  $\hat{x} \in \mathbb{A}^{n+1}$  um ponto sobre  $x$ . Então:*

- (i)  $x$  é semi-estável se e só se  $0 \notin \overline{O(\hat{x})}$ ;
- (ii)  $x$  é estável se e só se o morfismo

$$\begin{aligned} (\sigma_{\hat{x}})_f : G &\longrightarrow \mathbb{A}^{n+1} \\ g &\longmapsto g\hat{x} \end{aligned}$$

é próprio.

PROVA: Veja [Newstead], páginas 101–102. ■

O fato importante, que vamos apresentar nesta seção, é que para determinar se um ponto é (semi-)estável, basta verificar se ele é (semi-)estável para a ação de cada subgrupo 1-dimensional de  $G$ , cuja definição precisa é a seguinte:

**Definição 1.7.3** Um *subgrupo a um parâmetro* (1-PS) de  $G$  é um homomorfismo não-trivial de grupos algébricos

$$\lambda : k^* \longrightarrow G$$

Escreva  $\mathbb{P}^1 = k^* \cup \{0\} \cup \{\infty\}$ . Para  $x \in X$ , defina  $\tau : k^* \rightarrow X$  por  $\tau(t) = \lambda(t) \cdot x$ .

Se  $X$  é uma variedade quase-projetiva em  $\mathbb{P}^n$ , então existe uma única extensão  $\bar{\tau} : \mathbb{P}^1 \rightarrow \bar{X}$ . (veja [Hartshorne], capítulo 1, proposição 6.8, página 43.)

Então

- (a) qualquer ponto de  $\overline{\tau(k^*)} - \tau(k^*)$  deve ser ou  $\bar{\tau}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \tau(t)$  ou  $\bar{\tau}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t)$ , e
- (b)  $\tau$  é próprio se e só se tanto  $\lim_{t \rightarrow 0} \tau(t)$  quanto  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t)$  não pertencem a  $X$ .

**Proposição 1.7.4** *Se  $\lambda$  é um 1-PS de  $G$ , ele induz uma ação linear de  $k^*$  em  $\mathbb{A}^{n+1}$  e essa ação pode ser diagonalizada, isto é, existem uma base  $e_0, \dots, e_n$  de  $\mathbb{A}^{n+1}$  e  $r_0, \dots, r_n \in \mathbb{Z}$  tais que*

$$\lambda(t)e_i = t^{r_i}e_i \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}$$

PROVA: A ação linear se dá através de um homomorfismo  $k^* \rightarrow \text{GL}(n+1)$ ,  $t \mapsto A(t) = (a_{ij}(t))$ .

Como  $A(t_1)A(t_2) = A(t_1t_2) = A(t_2)A(t_1)$ , podemos supor que as matrizes  $A(t)$  estão postas simultaneamente em forma de Jordan. Desse modo vemos que o mapa regular  $a_{ij} : k^* \rightarrow k$  tem apenas um número finito de valores quando  $i \neq j$ , e portanto deve ser constante. Como  $A(1) = \text{Id}$ , eles são nulos, isto é, as matrizes  $A(t)$  são diagonais.

Para cada  $i$ ,  $a_{ii}$  satisfaz  $a_{ii}(t_1t_2) = a_{ii}(t_1)a_{ii}(t_2)$ , e por isso deve ser igual a  $t^{r_i}$  para algum  $r_i \in \mathbb{Z}$ . ■

**Definição 1.7.5**

$$\begin{aligned} \mu(x, \lambda) &= \max\{-r_i \mid \hat{x}_i \neq 0\} \\ &= \text{único inteiro } \mu \text{ tal que } \lim_{t \rightarrow 0} t^\mu \lambda(t) \hat{x} \text{ existe e não é nulo,} \end{aligned}$$

onde  $\lambda(t)e_i = t^{r_i}e_i$  e  $\hat{x} = \sum \hat{x}_i e_i$ , e  $\hat{x}$  é um ponto qualquer sobre  $x$ .

**Proposição 1.7.6** *Se  $G = k^*$ , e  $\lambda_1, \lambda_2$  são os 1-PS dados por*

$$\lambda_1(t) = t \quad \lambda_2(t) = t^{-1}$$

então

- $x$  é semi-estável se e só se  $\mu(x, \lambda_1) \geq 0$  e  $\mu(x, \lambda_2) \geq 0$ ;
- $x$  é estável se e só se  $\mu(x, \lambda_1) > 0$  e  $\mu(x, \lambda_2) > 0$ .

Como havíamos prometido, o resultado da proposição acima vale para todo grupo reutivo:

**Teorema 1.7.7** *Seja  $G$  um grupo reutivo agindo linearmente numa variedade projetiva  $X \subseteq \mathbb{P}^n$ . Então*

- $x$  é semi-estável se e só se  $\mu(x, \lambda) \geq 0$  para todo grupo  $a$  um parâmetro  $\lambda$  de  $G$ ;
- $x$  é estável se e só se  $\mu(x, \lambda) > 0$  para todo grupo  $a$  um parâmetro  $\lambda$  de  $G$ .

## 1.8 Um Exemplo: Formas Binárias

Nesta seção consideramos a ação de  $G = \text{SL}(2, k)$  no espaço  $V$  das formas binárias de grau  $n$ , isto é, das expressões da forma

$$f(X_0, X_1) = \sum_{i=0}^n a_i X_0^{n-i} X_1^i \quad a_i \in k$$

Como estamos supondo o corpo  $k$  algebricamente fechado, cada forma binária pode ser escrita como um produto de formas lineares (do tipo  $AX_0 + BX_1$ ), e então podemos considerar a projetivização  $\mathbb{P}(V)$  como sendo o espaço de conjuntos de  $n$  pontos de  $\mathbb{P}^1$ , contados com multiplicidades (através da bijeção entre pontos de  $\mathbb{P}^1$  e formas lineares não-nulas, dada por  $AX_0 + BX_1 \mapsto$  reta que ela define).

Desse modo estamos na situação das seções anteriores: temos uma ação de  $G$  em  $\mathbb{P}(V)$  e uma linearização dela (a ação de  $G$  em  $V$ ). Vamos descobrir quais pontos são estáveis / semi-estáveis.

Como

$$t^\mu(g^{-1}\lambda(t)g)\hat{x} = g^{-1}(t^\mu\lambda(t)g\hat{x})$$

nós vemos que

$$\mu(gx, \lambda) = \mu(x, g^{-1}\lambda g)$$

No nosso caso, com  $G = \text{SL}(2, k)$ , o fato que todo 1-PS é diagonalizável significa que todo 1-PS  $\lambda$  é conjugado a

$$\lambda_r(t) = \begin{pmatrix} t^{-r} & 0 \\ 0 & t^r \end{pmatrix}$$

para algum  $r \in \{1, 2, \dots\}$ .

Em vista do teorema 1.7.7, temos:

**Proposição 1.8.1** *Seja  $f$  uma forma binária.*

- $f$  é semi-estável se e só se

$$\mu(gf, \lambda_r) \geq 0 \quad \forall g \in \text{SL}(2), r \in \{1, 2, \dots\}$$

- $f$  é estável se e só se

$$\mu(gf, \lambda_r) > 0 \quad \forall g \in \text{SL}(2), r \in \{1, 2, \dots\}$$

Vamos calcular  $\mu(f, \lambda_r)$ , onde  $f(X_0, X_1) = \sum a_i X_0^{n-i} X_1^i$ .  
Como

$$\lambda_r(f) = f \left( \begin{pmatrix} t^{-r} & 0 \\ 0 & t^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix} \right) = f(t^{-r} X_0, t^r X_1) = \sum_{i=0}^n a_i t^{r(2i-n)} X_0^{n-i} X_1^i$$

vemos que  $\lambda_r(t)$  é diagonal com autovalores  $t^{r(2i-n)}$ .

Assim  $\mu = r(n - 2i_0)$ , onde  $i_0$  é o menor índice  $i$  tal que  $a_i \neq 0$ .

Portanto

$$\mu \leq 0 \iff a_i = 0 \quad \forall i < \frac{n}{2}$$

$$\mu < 0 \iff a_i = 0 \quad \forall i \leq \frac{n}{2}$$

Em outras palavras

$$\mu \leq 0 \iff (1, 0) \text{ tem multiplicidade } \geq \frac{n}{2}$$

$$\mu < 0 \iff (1, 0) \text{ tem multiplicidade } > \frac{n}{2}$$

Como  $gf$  move apenas move as raízes, sem mudar suas multiplicidades, e além disso pode levar qualquer raiz para qualquer ponto de  $\mathbb{P}^1$ , vemos que

**Proposição 1.8.2** *Uma forma binária  $f$  de grau  $n$  é estável (semi-estável) se e só se nenhum ponto de  $\mathbb{P}^1$  ocorre como raiz de multiplicidade  $\geq \frac{n}{2}$  ( $> \frac{n}{2}$ ).*

## 1.9 Um outro ponto de vista

Seja  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  uma variedade na qual o grupo reductivo  $G$  age. Lembre-se que, de acordo com a definição 1.6.5, uma ação linearizada de  $G$  em  $X$  é uma ação linear de  $G$  em  $\mathbb{A}^{n+1}$  que induz a ação dada em  $X$ .

Denotando por  $L$  a restrição do fibrado de linha tautológico de  $\mathbb{P}^n$  a  $X$ , temos então uma ação de  $G$  no espaço total desse fibrado, tal que  $g \cdot L_x \subseteq L_{g \cdot x}$ , sendo esse mapa linear. Podemos então generalizar a definição de linearização de uma ação da seguinte forma:

**Definição 1.9.1** *Sejam  $X$  uma variedade,  $G$  um grupo reductivo que age em  $X$ ,  $L$  um fibrado de linha sobre  $X$  e  $p : L \rightarrow X$  a projeção. Uma *linearização* da ação de  $G$  com respeito a  $L$  é uma ação de  $G$  no (espaço total de)  $L$  tal que:*

- $\forall y \in L, g \in G \quad p(g \cdot y) = g \cdot p(y)$
- $\forall x \in X, g \in G \quad$  o mapa  $L_x \rightarrow L_{g \cdot x}$  dado por  $y \mapsto g \cdot y$  é linear.

No restante desta seção vamos considerar o seguinte caso específico, que será usado no próximo capítulo:

$X = \mathcal{R}$ , um espaço vetorial de dimensão finita sobre  $k$ . Então o fibrado  $L$  deve ser  $\mathcal{R} \times k$ , com a projeção  $p : \mathcal{R} \times k \rightarrow \mathcal{R}$  óbvia. Uma seção é uma função  $s : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R} \times k$  da forma  $s(x) = (x, f(x))$ , para algum  $f \in k[\mathcal{R}]$ .

Dado um caráter (algébrico)  $\chi : G \rightarrow k^*$ , definimos ações de  $G$  no espaço total e no espaço das seções através das seguintes fórmulas:

$$g \cdot (x, z) = (g \cdot x, \chi(g)z) \quad (g \cdot s)(x) = g \cdot s(g^{-1} \cdot x) = (x, \chi(g)f(g^{-1} \cdot x))$$

Então o espaço das seções invariantes pode ser identificado com o espaço das funções relativamente invariantes de peso  $\chi$ , isto é, com

$$k[\mathcal{R}]^{G, \chi} = \{f \in k[\mathcal{R}] \mid f(g \cdot x) = \chi(g)f(x), \quad \forall g \in G\}$$

Se  $L_1$  e  $L_2$  são dois fibrados de linha (sobre  $X$ ) com linearizações da ação de  $G$  em  $X$ , podemos definir uma ação de  $G$  em  $L_1 \otimes L_2$  de modo que o mapa

$$(L_1 \otimes L_2)_x \rightarrow (L_1 \otimes L_2)_{gx} \quad : \quad y \mapsto gy$$

seja simplesmente o produto tensorial dos mapas (para  $i = 1, 2$ )

$$(L_i)_x \rightarrow (L_i)_{gx} \quad : \quad y \mapsto gy$$

Usando essa construção, vemos que, para  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $G$  age no espaço total  $\mathcal{R} \times k$  de  $L^n$  e nas seções através das seguintes fórmulas:

$$g \cdot (x, z) = (g \cdot x, \chi^n(g)z) \quad (g \cdot s)(x) = g \cdot s(g^{-1} \cdot x) = (x, \chi^n(g)f(g^{-1} \cdot x))$$

e o espaço das seções invariantes pode ser identificado com  $k[\mathcal{R}]^{G, \chi^n}$ .

As definições de semi-estabilidade e estabilidade podem ser generalizadas para o caso de uma ação linearizada com relação a qualquer fibrado de linha. No caso descrito acima, elas ficam assim: (exceto por uma pequena modificação para permitir que a ação de  $G$  possua um núcleo  $\Delta$ , que assumimos ser um subgrupo fechado e conexo de  $G$ )

**Definição 1.9.2** • Um ponto  $x \in \mathcal{R}$  é dito  $\chi$ -semi-estável se existe  $f \in k[\mathcal{R}]^{G, \chi^n}$ , com  $n \geq 1$  tal que  $f(x) \neq 0$ ;

- Um ponto  $x \in \mathcal{R}$  é  $\chi$ -estável se existe  $f \in k[\mathcal{R}]^{G, \chi^n}$ , com  $n \geq 1$  tal que  $f(x) \neq 0$ , e, além disso,  $\dim G \cdot x = \dim G/\Delta$  e a ação de  $G$  em  $\mathcal{R}_f = \{x \in \mathcal{R} \mid f(x) \neq 0\}$  é fechada.

Chamamos os conjuntos dos pontos  $\chi$ -semi-estáveis e  $\chi$ -estáveis de  $\mathcal{R}_\chi^{ss}$  e  $\mathcal{R}_\chi^s$ , respectivamente.

De maneira análoga ao teorema 1.6.8, temos:

**Proposição 1.9.3**  $\mathcal{R}_\chi^{ss}$  possui um bom quociente, que pode ser construído como

$$\mathcal{R} // (G, \chi) = \text{Proj} \left( \bigoplus_{n \geq 0} k[\mathcal{R}]^{G, \chi^n} \right)$$

Tal quociente é projetivo sobre o quociente  $\mathcal{R}/G = \text{Spec}(k[\mathcal{R}]^G)$  (e então é projetivo se  $k[\mathcal{R}]^G = k$ ).

Além disso há um quociente geométrico para o conjunto dos pontos estáveis.

Também temos neste caso resultados análogos aos da seção 1.7.

**Lema 1.9.4** Sejam  $x \in \mathcal{R}$  e  $\hat{x} = (x, z) \in \mathcal{R} \times k$  um ponto sobre ele com  $z \neq 0$ . Então:

- $x$  é  $\chi$ -semi-estável se e só se  $\overline{O(\hat{x})} \cap \mathcal{R} \times \{0\} = \emptyset$ . Nesse caso temos  $\chi(\Delta) = \{1\}$ .
- $x$  é  $\chi$ -estável se e só se  $O(\hat{x})$  é fechado e o grupo de isotropia de  $\hat{x}$  contém  $\Delta$  com índice finito.

PROVA: Suponha que  $x$  é  $\chi$ -semi-estável. Como existe  $f \in k[\mathcal{R}]^{G, \chi^n}$ , com  $n \geq 1$  tal que  $f(x) \neq 0$ , vemos que  $\chi^n(\Delta) = \{1\}$ . Se  $1, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$  são as  $n$ -ésimas raízes da unidade de  $k$ , podemos escrever

$$\Delta = (\Delta \cap \chi^{-1}(1)) \cup (\Delta \cap \chi^{-1}(\xi_1)) \cup \dots \cup (\Delta \cap \chi^{-1}(\xi_{n-1}))$$

Mas  $\Delta$  é conexo, e por isso devemos ter  $\Delta = \Delta \cap \chi^{-1}(1)$ , isto é,  $\chi(\Delta) = \{1\}$ . ■

**Lema 1.9.5** Sejam  $x \in \mathcal{R}$  e  $\hat{x} = (x, z) \in \mathcal{R} \times k$  um ponto sobre ele com  $z \neq 0$ . Então:

- $x$  é  $\chi$ -semi-estável se e só se, para todo subgrupo  $a$  um parâmetro  $\lambda$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot \hat{x} \notin \mathcal{R} \times \{0\}$$

- $x$  é  $\chi$ -estável se e só se, para todo subgrupo  $a$  um parâmetro  $\lambda$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot \hat{x} \text{ existe} \implies \text{imagem}(\lambda) \subseteq \Delta$$

**Definição 1.9.6** Sejam  $\lambda$  um subgrupo  $a$  um parâmetro e  $\chi$  um caráter (algébrico). A composição  $\chi \circ \lambda$  é um morfimo de grupos algébricos  $k^* \rightarrow k^*$ , e portanto deve ser da forma  $t \mapsto t^m$  para algum  $m \in \mathbb{Z}$ . Defina  $\langle \chi, \lambda \rangle = m$ .

Então o lema acima pode ser reescrito como:

**Proposição 1.9.7**

- $x \in \mathcal{R}$  é  $\chi$ -semi-estável se e só se  $\chi(\Delta) = \{1\}$  e, para todo subgrupo  $a$  um parâmetro  $\lambda$  tal que  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot x$  existe, temos  $\langle \chi, \lambda \rangle \geq 0$ .
- $x \in \mathcal{R}_\chi^{ss}$  é estável se e só se, para cada subgrupo  $a$  um parâmetro  $\lambda$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot x \text{ existe e } \langle \chi, \lambda \rangle = 0 \implies \text{imagem}(\lambda) \subseteq \Delta$$

**Proposição 1.9.8**

- Uma órbita  $O(x)$  é fechada em  $\mathcal{R}_\chi^{ss}$  se e só se, para cada subgrupo  $a$  um parâmetro  $\lambda$  com  $\langle \chi, \lambda \rangle = 0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot x \text{ existe} \implies \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot x \in O(x)$$

- Sejam  $x, y \in \mathcal{R}_\chi^{ss}$ . Então eles são GIT-equivalentes (isto é,  $\overline{O(x)} \cap \overline{O(y)} \cap \mathcal{R}_\chi^{ss} \neq \emptyset$ ) se e só se existem subgrupos  $a$  um parâmetro  $\lambda_1, \lambda_2$  com  $\langle \chi, \lambda_1 \rangle = \langle \chi, \lambda_2 \rangle = 0$  tais que  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_1(t) \cdot x$  e  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_2(t) \cdot x$  pertencem à mesma órbita fechada.

# Capítulo 2

## Aplicação: Quivers e suas Representações

### 2.1 Quivers e suas Representações

**Definição 2.1.1** Uma *quiver* (finita)  $Q$  consiste de dois conjuntos finitos  $Q_0$  (dos *vértices*) e  $Q_1$  (das *flechas*) e dois mapas  $h, t : Q_1 \rightarrow Q_0$  (*head* e *tail*). Dizemos que a flecha  $a \in Q_1$  *começa* no vértice  $t(a)$  e *termina* no vértice  $h(a)$ .

Um *caminho* de comprimento  $n$  é simplesmente uma sequência de  $n$  flechas  $a_1 \dots a_n$  tal que

$$h(a_n) = t(a_{n-1}), h(a_{n-1}) = t(a_{n-2}), \dots, h(a_2) = t(a_1)$$

De agora em diante vamos fixar um corpo algebricamente fechado  $k$ .

**Definição 2.1.2** Uma *representação* de uma quiver  $Q$  consiste de um conjunto de espaços vetoriais (sobre  $k$ , de dimensão finita)  $\{W_v \mid v \in Q_0\}$  e um conjunto de mapas  $k$ -lineares  $\{\eta_a : W_{t(a)} \rightarrow W_{h(a)} \mid a \in Q_1\}$ . O vetor  $\alpha \in \mathbb{Z}^{Q_0}$  dado por  $\alpha_v = \dim W_v$  é chamado de *vetor dimensão* da representação.

**Definição 2.1.3** Definimos a *forma de Euler*, ou *forma de Ringel* de uma quiver (finita)  $Q$  como sendo a seguinte forma bilinear sobre  $\mathbb{Z}^{Q_0}$ :

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{v \in Q_0} \alpha_v \beta_v - \sum_{a \in Q_1} \alpha_{t(a)} \beta_{h(a)}$$

**Definição 2.1.4** Um *morfismo*  $f$  da representação  $(\{W_v\}, \{\eta_a\})$  para a representação  $(\{U_v\}, \{\psi_a\})$  consiste de mapas lineares  $f_v : W_v \rightarrow U_v$ , um para cada vértice  $v$ , tais que, para cada flecha  $a$ , temos  $f_{h(a)} \circ \eta_a = \psi_a \circ f_{t(a)}$ , isto é, o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} W_{t(a)} & \xrightarrow{\eta_a} & W_{h(a)} \\ f_{t(a)} \downarrow & & \downarrow f_{h(a)} \\ U_{t(a)} & \xrightarrow{\psi_a} & U_{h(a)} \end{array}$$

**Definição 2.1.5** Seja  $Q$  uma quiver. Definimos a *álgebra de caminhos*  $kQ$  como sendo a álgebra que tem como base o conjunto

$$\{\text{caminhos de } Q \text{ com comprimento positivo}\} \cup \{e_v \mid v \in Q_0\}$$

(podemos interpretar cada vértice como um “caminho de comprimento 0”), e o produto definido através das fórmulas abaixo:

$$(a_1 \dots a_n) \cdot (a_{n+1} \dots a_{n+m}) = \begin{cases} a_1 \dots a_{n+m} & \text{se } h(a_{n+1}) = t(a_n) \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$e_v \cdot (a_1 \dots a_n) = \begin{cases} a_1 \dots a_n & \text{se } h(a_1) = e_v \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$(a_1 \dots a_n) \cdot e_v = \begin{cases} a_1 \dots a_n & \text{se } t(a_n) = e_v \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$e_v \cdot e_{v'} = \begin{cases} e_v & \text{se } v = v' \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$kQ$  é então uma álgebra associativa com identidade  $\sum_{v \in Q_0} e_v$ . Ela é de dimensão finita sobre  $k$  se e só se  $Q$  não possui ciclos orientados, ou seja, caminhos  $a_1 \dots a_n$  com  $h(a_1) = t(a_n)$ . De agora em diante vamos sempre supor  $Q$  desse tipo.

A noções de representação de uma quiver  $Q$  e a de módulo de dimensão finita sobre a álgebra  $kQ$  são equivalentes. Mais precisamente, vamos definir

um funtor aditivo covariante  $F$  que vai da categoria  $\text{Rep}_Q$  das representações da quiver  $Q$  para a categoria  $\text{mod-}kQ$  dos  $kQ$ -módulos que têm dimensão finita sobre  $k$ .

Dada uma representação  $(\{W_v\}, \{\eta_a\})$ , defina  $M = F((\{W_v\}, \{\eta_a\}))$  por

$$M = \bigoplus_{v \in Q_0} W_v$$

Vamos agora definir a ação  $\rho : kQ \rightarrow \text{End}(M)$  usando as fórmulas abaixo (onde  $a \in Q_1$  e  $v, v' \in Q_0$ ):

$$\rho(a)|_{W_v} = \begin{cases} \eta_a & \text{se } t(a) = v \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\rho(e_v)|_{W_{v'}} = \begin{cases} \text{Id}_{W_v} & \text{se } v' = v \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Ou seja, na matriz de  $\rho(a)$ , o bloco de coluna  $t(a)$  e linha  $h(a)$  é  $\eta_a : W_{t(a)} \rightarrow W_{h(a)}$ , e todos os outros blocos são nulos.

Para um caminho  $a_1 \dots a_n$  definimos

$$\rho(a_1 \dots a_n) = \rho(a_1) \circ \dots \circ \rho(a_n)$$

e depois extendemos  $\rho$  para toda  $kQ$  por linearidade.

Note que

$$\rho(1) = \rho \left( \sum_{v \in Q_0} e_v \right) = \text{Id}_M$$

Agora é fácil ver que demos a  $M$  uma estrutura de  $kQ$ -módulo.

Resta mostrar o que  $F$  faz com morfismos. Dado um morfismo entre representações

$$f = \{f_v\} : (\{W_v\}, \{\eta_a\}) \rightarrow (\{U_v\}, \{\psi_a\})$$

defina  $F(f)$  por

$$F(f) : \bigoplus_{v \in Q_0} W_v \rightarrow \bigoplus_{v \in Q_0} U_v \quad F(f) = \bigoplus_{v \in Q_0} f_v$$

A condição sobre  $f$  dada na definição de morfismo de representações vale se e só se  $F(f)$  é um homomorfismo de  $kQ$ -módulos.

**Proposição 2.1.6**  $F$  é funtor covariante aditivo e induz equivalência de categorias, ou seja,

a)  $F(\text{Id}) = \text{Id}$  e  $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ ;

b) o mapa

$$\begin{aligned} \text{Hom}((\{W_v\}, \{\eta_a\}), (\{U_v\}, \{\psi_a\})) &\longrightarrow \text{Hom}(F(M), F(N)) \\ f &\longmapsto F(f) \end{aligned}$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais sobre  $k$ ;

c) todo  $kQ$ -módulo  $M$  (de dimensão finita sobre  $k$ ) é isomorfo a algum objeto na imagem de  $F$ .

PROVA:

a) Óbvio.

b) Esse mapa é claramente linear e injetor. Vamos provar sobrejetividade.

Seja  $T : \bigoplus W_v \rightarrow \bigoplus U_v$  um homomorfismo de  $kQ$ -módulos. Como  $\rho(e_v) \circ T = T \circ \rho(e_v)$ , temos  $T|_{W_v}(W_v) \subseteq U_v$ , e portanto existem  $f_v : W_v \rightarrow U_v$  tais que  $T = \bigoplus f_v$ . Agora a condição que  $T$  é homomorfismo garante que  $f = \{f_v\}$  é morfismo de representações.

c) Seja  $M$  um  $kQ$ -módulo com dimensão finita sobre  $k$ .

Como  $\rho(e_v)^2 = \rho(e_v^2) = \rho(e_v)$ ,  $\rho(e_v)$  é uma projeção. Defina  $W_v = \text{imagem}(\rho(e_v)) \subseteq M$ .

Como  $\rho(\sum e_v) = \text{Id}_M$ , vemos que  $\sum W_v = M$ . A soma é na verdade direta porque  $e_v e_{v'} = \delta_{v,v'} e_v$ .

Usando as fórmulas da definição de álgebra de caminhos é fácil ver que, para  $a \in Q_1$ ,  $\rho(a)|_{W_v}$  tem imagem contida em  $W_{h(a)}$  e só não é nulo quando  $v = t(a)$ . Definindo  $\eta_a = \rho(a)|_{W_{t(a)}}$ , temos isomorfismo entre  $M$  e  $F((\{W_v\}, \{\eta_a\}))$ . ■

## 2.2 Álgebras de dimensão finita, Teorema de Jordan-Hölder e $\theta$ -estabilidade

Nesta seção vamos mostrar como o estudo de módulos sobre uma álgebra de dimensão finita se reduz ao estudo de representações de uma quiver (sem ciclos orientados) com “relações”, e mostramos que em tal categoria vale o teorema de Jordan-Hölder.

**Definição 2.2.1** Seja  $A$  uma álgebra de dimensão finita sobre o corpo  $k$  (associativa, com unidade, não necessariamente comutativa). Definimos o *radical* (de Jacobson) como sendo o ideal à esquerda  $R$  igual à interseção de todos os ideais à esquerda maximais.

**Proposição 2.2.2** *O radical  $R$  de uma álgebra  $A$  é também um ideal à direita.*

**Definição 2.2.3** Dizemos que uma álgebra  $A$  com radical  $R$  é *básica* quando a álgebra  $A/R$  é isomorfa a um produto de cópias de  $k$ .

Os próximos dois teoremas mostram como o estudo da categoria de módulos de uma álgebra de dimensão finita arbitrária é reduzido ao estudo da categoria de representações de uma quiver com relações.

**Teorema 2.2.4** *Para cada álgebra  $A$  de dimensão finita sobre  $k$ , existe uma álgebra básica  $A'$  (unicamente determinada) Morita-equivalente a  $A$ , isto é, tal que as categorias de módulos  $\text{mod-}A$  e  $\text{mod-}A'$  sejam equivalentes.*

### Observação (sobre equivalência de Morita)

Dadas álgebras  $A$  e  $B$ , e um  $(A, B)$ -bimódulo  $X$  (isto é,  $X$  é espaço vetorial sobre  $k$ , módulo à esquerda sobre  $A$  e à direita sobre  $B$ ) podemos definir um funtor  $\mathcal{F}_X : \text{mod-}B \rightarrow \text{mod-}A$ , entre as categorias de módulos à esquerda sobre  $B$  e  $A$ , da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_X(M) &= X \otimes_B M && \text{para } M \in \text{Obj}(\text{mod-}B) \\ \mathcal{F}_X(T)(x \otimes_B m) &= x \otimes_B T(m) && \text{para } T : M \rightarrow M'\end{aligned}$$

É verdade que, se  $\mathcal{F} : \text{mod-}B \rightarrow \text{mod-}A$  é um funtor que induz equivalência de categorias, então  $\mathcal{F}$  é naturalmente equivalente a um funtor do tipo  $\mathcal{F}_X$ , para algum  $(A, B)$ -bimódulo  $X$ .

Além disso, se  $Y$  é um  $(B, A)$ -bimódulo,  $\mathcal{F}_X$  e  $\mathcal{F}_Y$  são inversos se e só se

$$\begin{aligned} X \otimes_B Y &\simeq A && \text{como } (A, A)\text{-bimódulos.} \\ Y \otimes_A X &\simeq B && \text{como } (B, B)\text{-bimódulos.} \end{aligned}$$

Desse modo concluímos que a definição de equivalência de Morita usada no enunciado do teorema acima é equivalente à existência de bimódulos  $X$  e  $Y$  satisfazendo essas equações. Para mais detalhes, veja [Bursztyn and Weinstein].

**Teorema 2.2.5** *Seja  $A$  uma álgebra básica (e de dimensão finita sobre  $k$ ). Então existe uma quiver  $Q$ , e um ideal  $I$  satisfazendo  $I \subseteq (k\Delta^+)^2$ , tais que  $kQ/I$  e  $A$  são isomorfas. (Observação: dada uma quiver  $Q$ ,  $k\Delta^+$  é o ideal gerado pelos caminhos de comprimento positivo.)*

Fixe um conjunto  $S$  de geradores de  $I$ , e chame-os de *relações*. Juntado os dois teoremas acima com a proposição 2.1.6, vemos que a categoria dos  $A$ -módulos é equivalente à categoria das representações de  $Q$  que satisfazem as relações, ou seja, das representações  $(\{W_v\}, \{\eta_a\})$  que satisfazem

$$\sum_i \lambda_i (a_{i_1} \dots a_{i_{r_i}}) \in S \implies \sum_i \lambda_i (\eta_{a_{i_1}} \circ \dots \circ \eta_{a_{i_{r_i}}}) = 0$$

(perdoem a notação). No caso em que  $I = 0$  dizemos que  $A$  é uma álgebra *hereditária*.

Uma referência para o material apresentado até este ponto desta seção é [Ringel].

Vamos agora apresentar o teorema de Jordan-Hölder.

**Definição 2.2.6** Um objeto  $M$  de uma categoria abeliana é dito *simples* quando seus únicos subobjetos são  $0$  e  $M$ , ou seja, quando todo monomorfismo não nulo  $M' \rightarrow M$  é um isomorfismo.

Dizemos que  $M$  é *semi-simples* se ele é isomorfo a uma soma direta de objetos simples.

**Proposição 2.2.7** *Seja  $Q$  uma quiver (sem ciclos orientados), e  $S \subset kQ$  um conjunto de relações que geram um ideal  $I$  que satisfaz  $I \subseteq (k\Delta^+)^2$ . Então na categoria das representações de  $Q$  que satisfazem as relações  $S$  há um (a menos de isomorfismo) objeto simples para cada vértice de  $Q$ . Mais precisamente, as representações simples são as  $(\{U_v\}, \{\psi_a\})$  com  $\psi_a = 0 \quad \forall a$ , e apenas um  $U_v$  não-nulo, que deve ter dimensão 1.*

PROVA: As representações descritas acima satisfazem as relações porque todos os  $\psi_a$  são nulos, e além disso elas são claramente simples.

Seja  $(\{U_v\}, \{\psi_a\})$  uma representação simples não-nula que satisfaz as relações. Escolha um vértice  $v_0 \in Q_0$  tal que  $U_{v_0} \neq 0$  e  $\psi_a = 0$  para todas as flechas  $a$  que começam em  $v_0$  (tal vértice existe porque a quiver  $Q$  é finita e não contém ciclos orientados).

Definindo

$$W_v = \begin{cases} U_{v_0} & \text{se } v = v_0 \\ 0 & \text{se } v \neq v_0 \end{cases}$$

e  $\eta_a = 0 \quad \forall a \in Q_1$ , obtemos uma subrepresentação não-nula  $(\{W_v\}, \{\eta_a\})$  de  $(\{U_v\}, \{\psi_a\})$ , porque, para cada  $a \in Q_1$ , ou a inclusão  $W_{t(a)} \hookrightarrow U_{t(a)}$  ou  $\psi_a$  é nula, e assim o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} W_{t(a)} & \hookrightarrow & U_{t(a)} \\ \downarrow \eta_a & & \downarrow \psi_a \\ W_{h(a)} & \hookrightarrow & U_{h(a)} \end{array}$$

Como  $(\{U_v\}, \{\psi_a\})$  é simples, vemos que  $U_v = 0 \quad \forall v \neq v_0$ . Agora é claro que  $\dim U_{v_0}$  deve ser um. ■

Como estamos lidando com representações de dimensão finita (isto é, os  $W_v$  têm dimensão finita sobre  $k$ , e  $Q$  tem apenas um número finito de vértices), a categoria das representações que satisfazem as relações  $S$  é artiniana e noetheriana, ou seja, para qualquer objeto  $M$ , todas as sequências de subobjetos  $M_i$  de  $M$ , tanto crescentes quanto decrescentes,

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots \quad \text{ou} \quad M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$$

são estacionárias. Portanto vale o teorema de Jordan-Hölder:

**Teorema 2.2.8 (Jordan-Hölder)** *Seja  $\mathcal{A}$  uma categoria abeliana artiniana e noetheriana. Então todo objeto  $M$  de  $\mathcal{A}$  possui uma série de Jordan-Hölder, isto é, uma série*

$$M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_n = M$$

tal que  $M_1, M_2/M_1, \dots, M_n/M_{n-1}$  são todos simples.

Além disso, o ciclo de componentes simples de  $M$ , dado por

$$M_1 \oplus M_2/M_1 \oplus \dots \oplus M_n/M_{n-1}$$

não depende (a menos de isomorfismo, é claro) da série de Jordan-Hölder escolhida.

PROVA: Veja seção 2 de [Seshadri]. ■

Agora definimos  $\theta$ -estabilidade, que será usada adiante.

**Definição 2.2.9** Seja  $\mathcal{A}$  uma categoria abeliana. Seu *Grupo de Grothendieck*  $K_0(\mathcal{A})$  é definido como o quociente  $F/N$ , onde  $F$  é o grupo abeliano livre gerado por todos os objetos, e  $N$  é o subgrupo gerado por

$$\{M - M' - M'' \mid \text{existe sequência exata } 0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0\}$$

**Exemplo 2.2.10** Na notação da proposição 2.2.7,  $K_0(\text{mod-}kQ/I) \simeq \mathbb{Z}^{Q_0}$ .

Realmente, denotando por  $M_v$  a representação simples “centrada” em  $v \in Q_0$ , vemos que cada representação satisfazendo as relações  $I$  é equivalente, em  $K_0$ , a seu ciclo de componentes simples, que é do tipo  $\bigoplus_{v \in Q_0} (M_v)^{\beta(v)}$ , para algum  $\beta \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ .

Defina então  $\Phi : K_0 \rightarrow \mathbb{Z}^{Q_0}$  por

$$\Phi \left( \bigoplus_{v \in Q_0} (M_v)^{\beta(v)} \right) = \beta.$$

$\Phi$  é claramente sobrejetora e injetora.

**Definição 2.2.11** Seja  $\theta$  uma função aditiva sobre os objetos de  $\mathcal{A}$ , ou seja, um homomorfismo de grupos abelianos  $\theta : K_0(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Dizemos que um objeto  $M$  é  $\theta$ -semi-estável se  $\theta(M) = 0$ , e, para todo subobjeto  $M' \subseteq M$ ,  $\theta(M') \geq 0$ . Dizemos que  $M$  é  $\theta$ -estável se ele é  $\theta$ -semi-estável e, além disso, os únicos subobjetos  $M'$  tais que  $\theta(M') = 0$  são  $M$  e  $0$ .

**Observação:**

Uma outra possível definição de (semi)-estabilidade é a do tipo “slope”. Fixamos duas funções aditivas  $c, r : K_0(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ , sendo que  $r$  satisfaz

$$r(M) = 0 \implies M = 0$$

e definimos  $\mu(M) = \frac{c(M)}{r(M)}$  quando  $M \neq 0$ . Dizemos então que  $M \neq 0$  é  $(c : r)$ -semi-estável (respectivamente, estável) quando, para todo subobjeto  $M'$  com  $M' \neq M, 0$ , temos  $\mu(M') \leq \mu(M)$  (respectivamente,  $\mu(M') < \mu(M)$ ).

No caso que vamos considerar adiante, onde  $\mathcal{A}$  é a categoria das representações de uma quiver, as duas definições são equivalentes no seguinte sentido:

Dados  $c$  e  $r$  como acima, e  $M_0 \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ , defina

$$\theta(M) = -c(M) + \frac{c(M_0)}{r(M_0)}r(M) \quad \forall M \in \text{Obj}(\mathcal{A})$$

Então  $\theta$ (-semi)-estabilidade é equivalente a  $(c : r)$ (-semi)-estabilidade para objetos em  $\theta^{-1}(0) = \mu^{-1}(\mu(M_0))$ . (A prova disso é um cálculo simples.)

Além disso, dados  $\theta$  e  $M_0$  com  $\theta(M_0) = 0$ , e qualquer  $r$  que satisfaça  $M \neq 0 \Rightarrow r(M) \neq 0$  (no caso que estamos considerando, uma escolha possível é  $r(M) = \sum_v \alpha_v(M)$ ), podemos definir

$$c(M) = \theta(M) + \frac{1}{r(M_0)}r(M)$$

e teremos novamente

$$\theta(M) = -c(M) + \frac{c(M_0)}{r(M_0)}r(M) \quad \forall M \in \text{Obj}(\mathcal{A})$$

Para uma definição mais geral de estabilidade e discussões como a acima, veja [Rudakov].

## 2.3 GIT e Representações de Quivers sem Relações

Dados uma quiver (finita)  $Q$  e um vetor dimensão  $\alpha \in \mathbb{N}^{Q_0}$ , defina o espaço vetorial

$$\mathcal{R}(Q, \alpha) = \bigoplus_{a \in Q_1} \text{Hom}(k^{\alpha(t(a))}, k^{\alpha(h(a))})$$

Então é claro que toda representação de  $Q$  com vetor dimensão  $\alpha$  é isomorfa a uma representação dada por um ponto  $\eta = (\eta_a)_{a \in Q_1}$  de  $\mathcal{R}(Q, \alpha)$ .

Defina uma ação de

$$\text{GL}(\alpha) = \prod_{v \in Q_0} \text{GL}(k^{\alpha(v)})$$

em  $\mathcal{R}(Q, \alpha)$  por

$$(g \cdot \eta)_a = g_{h(a)} \circ \eta_a \circ g_{t(a)}^{-1}$$

Note que o subgrupo  $\Delta = \{(t \cdot \text{Id}_{\alpha(v)})_{v \in Q_0} \mid t \in k\}$  age trivialmente.

Dois pontos de  $\mathcal{R}(Q, \alpha)$  definem representações isomorfas se e só se eles pertencem à mesma órbita dessa ação.

Essa é a ligação entre Representações de Quivers e GIT que vamos explorar no restante deste capítulo, adotando o ponto de vista da seção 1.9.

**Proposição 2.3.1** *Para qualquer ponto  $\eta = (\eta_a)_{a \in Q_1} \in \mathcal{R}(Q, \alpha)$ , o subgrupo de isotropia  $GL(\alpha)_\eta$  é irredutível.*

PROVA: Por definição

$$GL(\alpha)_\eta = \{(g_v)_{v \in Q_0} \in GL(\alpha) \mid \eta_a = g_{h(a)} \circ \eta_a \circ g_{t(a)}^{-1} \ \forall a \in Q_1\}$$

Ou seja,  $GL(\alpha)_\eta$  é definido pelas equações lineares (uma para cada flecha)

$$\eta_a g_{t(a)} = g_{h(a)} \eta_a$$

Então o grupo de isotropia é igual à interseção entre um subespaço vetorial de  $\prod_{v \in Q_0} \text{End}(k^{\alpha(v)})$  e o aberto  $GL(\alpha)$ , e por isso é irredutível. ■

**Proposição 2.3.2** *Os caracteres (algébricos)  $\chi : GL(\alpha) \rightarrow k^*$  de  $G$  são da forma*

$$\chi_\theta(g_v) = \prod_{v \in Q_0} (\det g_v)^{\theta_v} \quad \text{para algum } \theta \in \mathbb{Z}^{Q_0}$$

PROVA: Basta mostrar que os caracteres de  $GL(n)$  são da forma  $\det^\theta$  para algum  $\theta \in \mathbb{Z}$ . Dividimos a prova desse fato em duas partes:

- Todo homomorfismo de grupos algébricos  $k^* \rightarrow k^*$  é da forma  $t \mapsto t^\theta$  para algum  $\theta \in \mathbb{Z}$ . Os morfismos de variedades algébricas  $k^* \rightarrow k^*$  já devem ser dessa forma, e eles são claramente homomorfismos de grupos.
- Todo homomorfismo de grupos  $GL(n) \rightarrow k^*$  fatora através do determinante, ou seja,  $\chi(SL(n)) = \{1\}$ . Isso ocorre porque  $SL(n)$  é igual a seu subgrupo de comutadores (veja [Lang], teoremas 8.3 e 9.2 do capítulo XIII). Assim, qualquer matriz de determinante 1 é igual a  $MNM^{-1}N^{-1}$  para matrizes  $M, N$ , e

$$\chi(MNM^{-1}N^{-1}) = \chi(M)\chi(N)\chi(M)^{-1}\chi(N)^{-1} = 1 \quad \blacksquare$$

Um vetor  $\theta \in \mathbb{Z}^{Q_0}$  induz uma função aditiva  $\theta : K_0(\text{mod-}kQ) \rightarrow \mathbb{Z}$ , através da fórmula

$$\theta((\{W_v\}, \{\eta_a\})) = \sum_{v \in Q_0} \theta_v \dim W_v$$

(No caso em que  $Q$  não tem ciclos orientados,  $K_0(\text{mod-}kQ) = \mathbb{Z}^{Q_0}$ , e assim  $\theta \mapsto \chi_\theta$  dá uma bijeção entre funções aditivas com valores inteiros e caracteres.) Note que, para uma representação  $M$  com vetor dimensão  $\alpha$ ,

$$\theta(M) = 0 \Leftrightarrow \sum \theta_v \alpha(v) = 0 \Leftrightarrow \prod \det(t \cdot \text{Id}_{\alpha(v)})^{\theta_v} = 1 \Leftrightarrow \chi_\theta(\Delta) = \{1\}$$

Na definição 2.2.11 a função aditiva  $\theta$  tinha valores reais. O próximo resultado mostra que, no caso que estamos considerando, exigir que  $\theta$  tenha valores inteiros não é uma restrição:

**Proposição 2.3.3** *Sejam  $Q$  uma quiver (finita) e  $\alpha$  um vetor dimensão. Então dada uma função aditiva  $\theta : K_0(\text{mod-}kQ) \rightarrow \mathbb{R}$  existe uma  $\tilde{\theta}$  com valores inteiros tal que  $\theta$ -(semi-)estabilidade e  $\tilde{\theta}$ -(semi-)estabilidade sejam equivalentes para módulos com vetor dimensão  $\alpha$ .*

PROVA: Claramente basta mostrar que existe uma função aditiva com valores racionais com a propriedade desejada. Para facilitar a notação, assuma  $Q_0 = \{1, \dots, n\}$ .

Já sabemos (veja exemplo 2.2.10) que  $K_0(\text{mod-}kQ) \simeq \mathbb{Z}^{Q_0}$ . Assim, uma função aditiva  $\theta$  nada mais é que um vetor  $(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$ , e

$$\theta(M) = (\theta_1, \dots, \theta_n) \cdot \alpha(M)$$

onde  $\alpha(M)$  denota o vetor dimensão de  $M$  e o produto é o produto interno usual de  $\mathbb{R}^n$ .

Escolha um subconjunto  $\{\psi_1, \dots, \psi_m\} \subseteq \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$  que seja base do espaço vetorial (sobre  $\mathbb{Q}$ ) gerado por  $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ . Então existem  $r_{ij} \in \mathbb{Q}$  tais que, para  $i = 1, \dots, n$

$$\theta_i = \sum_{j=1}^m r_{ij} \psi_j$$

Para  $(\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_m) \in \mathbb{Q}^m$ , defina

$$\tilde{\theta}(\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_m) = \left( \sum_{j=1}^m r_{1j} \tilde{\psi}_j, \dots, \sum_{j=1}^m r_{nj} \tilde{\psi}_j \right)$$

Como os  $\psi_j$  são linearmente independentes, para qualquer  $\beta \in \mathbb{Z}^n$ , e qualquer  $(\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_m) \in \mathbb{Q}^m$  temos que

$$\theta \cdot \beta = 0 \implies \tilde{\theta}(\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_m) \cdot \beta = 0$$

Desse modo precisamos achar  $(\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_m) \in \mathbb{Q}^m$  tal que, para todo  $\beta \in \mathbb{N}^m$  com entradas menores que as de  $\alpha$  (podemos considerar só esses  $\beta$ s porque as entradas de  $\alpha(M')$  são menores que as de  $\alpha(M)$  quando  $M'$  é submódulo de  $M$ ), tenhamos

$$\begin{aligned}\theta \cdot \beta > 0 &\implies \tilde{\theta}(\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_m) \cdot \beta > 0 \\ \theta \cdot \beta < 0 &\implies \tilde{\theta}(\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_m) \cdot \beta < 0\end{aligned}$$

A existência de tal  $(\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_m) \in \mathbb{Q}^m$  é garantida pelos fatos que  $\tilde{\theta} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua, que o número de  $\beta$ s em questão é finito, e que  $\mathbb{Q}^m$  é denso em  $\mathbb{R}^m$ . Isso conclui a demonstração. ■

Agora lidamos com subgrupos a um parâmetro de  $G$ :

**Proposição 2.3.4** *Sejam  $\eta = (\eta_\alpha) \in \mathcal{R}(Q, \alpha)$ , e  $M$  o  $kQ$ -módulo correspondente.*

a) *Cada subgrupo a um parâmetro  $\lambda$  para o qual  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot \eta$  existe define uma  $\mathbb{Z}$ -filtração*

$$\cdots \supseteq M_n \supseteq M_{n+1} \supseteq \cdots$$

*tal que  $M_n = M$  para  $n \ll 0$  e  $M_n = 0$  para  $n \gg 0$ .*

b) *Para qualquer  $\mathbb{Z}$ -filtração do tipo acima existe um (não necessariamente único) subgrupo a um parâmetro que a define.*

c) *A representação dada pelo ponto  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot \eta$  é isomorfa a*

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n / M_{n+1}$$

PROVA:

a) Seja  $\lambda : k^* \rightarrow \text{GL}(\alpha)$  um subgrupo a um parâmetro para o qual  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot \eta$  existe.

Para cada  $v \in Q_0$ ,  $\lambda(t) : W_v \rightarrow W_v$  é diagonalizável com autovalores da forma  $t^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  (veja a Proposição 1.7.4). Escreva

$$W_v = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} W_v^{(n)}$$

onde  $W_v^{(n)}$  é o autoespaço de  $t^n$ .

Denote por  $\eta_a^{(mn)}$  a componente de  $\eta_a$  que leva  $W_{t(a)}^{(n)}$  em  $W_{h(a)}^{(m)}$ . Vemos então que a ação de  $\lambda(t)$  consiste em multiplicar  $\eta_a^{(mn)}$  por  $t^{m-n}$ , e como  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot \eta$  existe, concluímos que  $\eta_a^{(mn)} = 0$  sempre que  $m < n$  (na verdade a implicação contrária também vale). Em outras palavras,  $\eta_a$  dá um mapa  $W_{t(a)}^{\geq n} \rightarrow W_{h(a)}^{\geq n}$ , onde

$$W_v^{\geq n} = \bigoplus_{m \geq n} W_v^{(m)}$$

Isso significa que os subespaços  $W_v^{\geq n}$  definem subrepresentações  $M_n$  de  $M$ , e conseguimos a filtração

$$\cdots \supseteq M_n \supseteq M_{n+1} \supseteq \cdots$$

que queríamos.

b) Suponha dada uma filtração do tipo descrito no enunciado

$$M = M_{n_0} \supseteq M_{n_0+1} \supseteq \cdots \supseteq M_{n_0+r} = 0$$

Temos as decomposições usuais (veja construção na prova de 2.1.6)

$$M = \bigoplus_{v \in Q_0} U_v \quad M_n = \bigoplus_{v \in Q_0} U_v^{(n)}$$

É claro que

$$U_v = U_v^{(n_0)} \supseteq \cdots \supseteq U_v^{(n_0+r)} = 0$$

Defina  $V_v^{(n_0+r)} = 0$  e, para cada  $i > 0$ , escolha  $V_v^{(n_0+r-i)} \subseteq U_v^{(n_0+r-i)}$  tal que

$$U_v^{(n_0+r-i)} = U_v^{(n_0+r-i+1)} \oplus V_v^{(n_0+r-i)}$$

( $\lambda$  não é unicamente determinado por causa dessa escolha). Então

$$U_v = V_v^{(n_0)} \oplus \cdots \oplus V_v^{(n_0+r)}$$

Defina  $\lambda(t)$  agindo em  $V_v^{(n)}$  por multiplicação por  $t^n$ . Assim, na notação da parte a) acima,  $U_v^{(\geq n)} = U_v^{(n)}$ , e como os  $M_n$  são submódulos,  $\eta_a(U_{t(a)}^{(\geq n)}) \subseteq U_{h(a)}^{(\geq n)}$ , ou seja,  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot \eta$  existe. Pela construção  $\lambda(t)$  induz a filtração dada.

c) Na notação acima, escreva

$$\eta_a = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{r+1,1} & \cdots & \cdots & a_{r+1,r+1} \end{pmatrix} \text{ onde } a_{ij} \in \text{Hom}(V_{t(a)}^{(n_0-1+j)}, V_{h(a)}^{(n_0-1+i)})$$

Então temos

$$\lambda(t) \cdot \eta_a = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ t \cdot a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ t^r \cdot a_{r+1,1} & \cdots & t \cdot a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} \end{pmatrix}$$

$$\text{e } \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot \eta_a = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & & a_{r+1,r+1} \end{pmatrix}$$

Isso conclui a demonstração. ■

**Proposição 2.3.5** *Seja  $\eta \in \mathcal{R}(Q, \alpha)$ , e  $M$  a representação associada. Então*

*$\eta$  é  $\chi_\theta$ -semi-estável ( $\chi_\theta$ -estável)  $\iff M$  é  $\theta$ -semi-estável ( $\theta$ -estável).*

PROVA:

•  $\Leftarrow$ :

$M$  é  $\theta$ -semi-estável. Então  $\theta(M) = 0$  (e assim  $\chi_\theta(\Delta) = \{1\}$ , veja a nota na página 34), e para cada submódulo  $M' \subseteq M$ ,  $\theta(M') \geq 0$ .

Seja  $\lambda$  um subgrupo a um parâmetro para o qual  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot \eta$  existe. Ele induz uma filtração

$$\cdots \supseteq M_n \supseteq M_{n+1} \supseteq \cdots$$

Vamos calcular  $\langle \chi_\theta, \lambda \rangle$ :

$$\chi_\theta(\lambda(t)) = \prod_{v \in Q_0} \det(\lambda(t)_v)^{\theta_v}$$

E assim

$$\begin{aligned}
\langle \chi_\theta, \lambda \rangle &= \sum_{v \in Q_0} \theta_v \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \dim W_v^{(n)} \right) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \theta(M_n/M_{n+1}) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} n(\theta(M_n) - \theta(M_{n+1})) \quad \text{porque } \theta \text{ é aditiva.} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \theta(M_n) - \sum_{l \in \mathbb{Z}} (l-1) \theta(M_l) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \theta(M_n) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Logo  $M$  é  $\chi_\theta$ -semi-estável pela proposição 1.9.7.

Se  $M$  for  $\theta$ -estável, seja  $\lambda$  um subgrupo a um parâmetro tal que  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot \eta$  existe, e  $\langle \chi_\theta, \lambda \rangle = 0$ .  $\lambda$  induz uma filtração  $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , e, pelo cálculo acima,  $\theta(M_n) = 0 \forall n$ . Como  $M$  é  $\theta$ -estável, isso implica que cada  $M_n$  é ou  $M$  ou  $0$ . Portanto existe  $n_0 \in \mathbb{Z}$  tal que  $\lambda(t)$  age por multiplicação por  $t^{n_0}$  em todos os espaços  $U_v$ . Então  $\text{imagem}(\lambda) \subseteq \Delta$ , e, pela proposição 1.9.7,  $M$  é  $\chi_\theta$ -estável.

•  $\implies$ :

Assuma que  $M$  é  $\chi_\theta$ -semi-estável. Então  $\chi_\theta(\Delta) = \{1\}$ , e  $\theta(M) = 0$ .

Seja  $M' \subseteq M$  uma subrepresentação, e  $\lambda$  um subgrupo a um parâmetro que induz a filtração  $M \supseteq M' \supseteq 0$ . Pela proposição 1.9.7,  $\theta(M') = \langle \chi_\theta, \lambda \rangle \geq 0$ . Logo  $M$  é  $\theta$ -semi-estável.

Agora assumamos que  $M$  é  $\chi_\theta$ -estável. Seja  $M' \subseteq M$  com  $\theta(M') = 0$ . Escolha um subgrupo a um parâmetro  $\lambda$  que a induz. Pelo cálculo acima,

$$\langle \chi_\theta, \lambda \rangle = \theta(M') = 0$$

Pela proposição 1.9.7,  $\lambda$  tem imagem em  $\Delta$ , e portanto  $M'$  é ou  $M$  ou  $0$ , o que conclui a demonstração. ■

Vamos agora relacionar a situação atual com o teorema de Jordan-Hölder (teorema 2.2.8).

**Proposição 2.3.6** *As representações  $\theta$ -semi-estáveis formam uma subcategoria abeliana de  $\text{mod-}kQ$ .*

PROVA: Seja  $f : M \rightarrow N$  um morfismo entre representações  $\theta$ -semi-estáveis. Nossa missão é mostrar que  $\ker f$ ,  $\text{coker } f$  e  $\text{im } f$  são todos  $\theta$ -semi-estáveis.

Temos sequências exatas

$$0 \rightarrow \ker f \rightarrow M \rightarrow \text{im } f \rightarrow 0 \quad 0 \rightarrow \text{im } f \rightarrow N \rightarrow \text{coker } f \rightarrow 0$$

Assim  $\theta(\ker f) + \theta(\text{im } f) = 0$ . Mas  $\ker f$  e  $\text{im } f$  são subobjetos de  $M$  e  $N$ , que são  $\theta$ -semi-estáveis, e por isso  $\theta(\ker f)$  e  $\theta(\text{im } f)$  são  $\geq 0$ . Logo eles devem ser nulos. Da outra fórmula  $\theta(\text{coker } f) + \theta(\text{im } f) = 0$  vemos então que  $\theta(\text{coker } f)$  também é nulo.

$\ker f$  é subobjeto de  $M$ , e assim

$$M' \subseteq \ker f \Rightarrow M' \subseteq M \Rightarrow \theta(M') \geq 0$$

Logo  $\ker f$  é  $\theta$ -semi-estável. De modo análogo  $\text{im } f$  é  $\theta$ -semi-estável.

Para o caso de  $\text{coker } f$ , seja  $N' \subseteq \text{coker } f = N/\text{im } f$ . Chamando de  $\pi$  a projeção natural  $N \rightarrow \text{coker } f$ , temos a sequência exata

$$0 \rightarrow \text{im } f \rightarrow \pi^{-1}(N') \rightarrow N' \rightarrow 0$$

Assim  $\theta(N') = \theta(\pi^{-1}(N'))$ , que é não-negativo porque  $N$  é  $\theta$ -semi-estável. Portanto  $\text{coker } f$  também é  $\theta$ -semi-estável. ■

Essa categoria também é noetheriana e artiniana, e por isso nela vale o teorema de Jordan-Hölder.

**Definição 2.3.7** *Duas representações  $\theta$ -semi-estáveis  $M$  e  $N$  são  $S$ -equivalentes se elas têm o mesmo ciclo de componentes simples, na categoria das representações  $\theta$ -semi-estáveis.*

Também podemos descrever os objetos simples nessa categoria:

**Proposição 2.3.8** *Seja  $M$  uma representação  $\theta$ -semi-estável. Então  $M$  é simples na categoria de todas as representações  $\theta$ -semi-estáveis se e só se  $M$  é  $\theta$ -estável.*

PROVA: Uma subrepresentação  $M' \subseteq M$  é  $\theta$ -semi-estável se e só se  $\theta(M') = 0$ . O resultado segue imediatamente disso. ■

Note também que, para um subgrupo  $a$  um parâmetro  $\lambda$ , a condição  $\langle \chi, \lambda \rangle = 0$  (que aparece tantas vezes neste texto) significa simplesmente que todos os elementos da filtração induzida são  $\theta$ -semi-estáveis.

**Proposição 2.3.9**

- Uma representação  $\theta$ -semi-estável  $M$  tem órbita fechada em  $\mathcal{R}_\chi^{ss}(Q, \alpha)$  se e só se  $M$  é igual a uma soma direta de representações  $\theta$ -estáveis (ou seja,  $M$  é semi-simples na categoria das representações  $\theta$ -semi-estáveis).
- Duas representações  $\theta$ -semi-estáveis são GIT-equivalentes se e só se elas são  $S$ -equivalentes.

PROVA:

- Suponha que a órbita de  $M$  é fechada em  $\mathcal{R}_\chi^{ss}(Q, \alpha)$ . Seja  $\lambda$  um subgrupo a um parâmetro que induz uma série de Jordan-Hölder (na categoria das representações  $\theta$ -semi-estáveis, é claro). Em particular  $\langle \chi, \lambda \rangle = 0$ , e então, pela proposição 1.9.8, o limite  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot M$ , que é igual ao ciclo de componentes simples de  $M$ , pertence a órbita de  $M$ . Em outras palavras,  $M$  é isomorfa a seu ciclo de componentes simples. Agora suponha que  $M = \bigoplus N_i$ , onde cada  $N_i$  é  $\theta$ -estável. Seja  $\lambda$  um subgrupo a um parâmetro com  $\langle \chi, \lambda \rangle = 0$  e tal que  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot M$  existe. Tal  $\lambda$  induz uma filtração

$$\dots \supseteq M_n \supseteq M_{n+1} \supseteq \dots$$

onde cada  $M_n$  é semi-estável. Então, pela semi-simplicidade de  $M$ , os  $M_n$  devem ser somas diretas de alguns dos  $N_i$ , e assim fica claro que  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot M$ , que é igual a  $\bigoplus M_n/M_{n+1}$ , deve ser isomorfo a  $M$ . Assim, pela proposição 1.9.8, a órbita de  $M$  é fechada.

- Isso segue diretamente da segunda parte da proposição 1.9.8. ■

**Proposição 2.3.10** *Seja  $Q$  uma quiver finita e sem ciclos orientados. Então o quociente  $\mathcal{R}(Q, \alpha) // (GL(\alpha), \chi_\theta)$  é projetivo, ou seja,  $k[\mathcal{R}(Q, \alpha)]^{GL(\alpha)} = k$ . (veja a Proposição 1.9.3)*

PROVA: Seja  $\eta = (\eta_a)_{a \in Q_1}$  um ponto de  $\mathcal{R}(Q, \alpha)$ , e seja  $M$  o  $kQ$ -módulo correspondente.

Como a categoria dos  $kQ$ -módulos é noetheriana e artiniana, existe uma filtração de Jordan-Hölder

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots \subseteq M_n = M$$

Escolha um subgrupo  $a$  um parâmetro  $\lambda$  que induz essa filtração. Então  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)\eta$  corresponde ao módulo semi-simples

$$M_1 \oplus M_2/M_1 \oplus \cdots \oplus M_n/M_{n-1}$$

Assim  $\eta$  e um ponto que corresponde a um módulo semi-simples são mandados para o mesmo ponto de

$$\mathcal{R}(Q, \alpha) // \mathrm{GL}(\alpha) = \mathrm{Spec}(k[\mathcal{R}(Q, \alpha)]^{\mathrm{GL}(\alpha)})$$

Mas nós sabemos exatamente quais são os módulos simples (há um para cada vértice de  $Q$ , porque  $Q$  é finita e não tem ciclos orientados), e então concluimos que existe apenas um módulo semi-simples com vetor dimensão  $\alpha$ .

Logo  $\mathcal{R}(Q, \alpha) // \mathrm{GL}(\alpha)$  é o espaço de apenas um ponto, isto é,

$$k[\mathcal{R}(Q, \alpha)]^{\mathrm{GL}(\alpha)} = k$$

como queríamos. ■

## 2.4 GIT e Representações de Quivers com Relações

Nesta seção vamos construir o espaço de moduli das representações de uma quiver  $Q$  (finita e sem ciclos orientados) que satisfazem um conjunto de relações  $S$  (que gera um ideal  $I \subseteq (k\Delta^+)^2$ ), e que tenham um vetor-dimensão fixo  $\alpha$ .

Vamos precisar da hipótese que  $\mathrm{GL}(\alpha)$  é linearmente reductivo para garantir a existência dos operadores de Reynolds (veja abaixo), e para isso vamos supor nesta seção que  $\mathrm{char} k = 0$ .

**Definição 2.4.1** Suponha dada uma representação de um grupo  $G$  em um espaço vetorial  $V$ . Um *operador de Reynolds* é um mapa linear  $R : V \rightarrow V$  tal que

- i)  $R$  é  $G$ -invariante;
- ii)  $R \circ R = R$ ;

iii)  $R(V) = V^G$ .

Note que existe bijeção entre operadores de Reynolds  $R$  de  $V$  e complementos invariantes de  $V^G$  em  $V$ , dada por  $R \mapsto \ker R$ .

**Lema 2.4.2** *Suponha dada uma representação de um grupo  $G$  em um espaço vetorial  $V$  de dimensão finita. Se  $W$  é complemento invariante de  $V^G$  (e  $R_V$  é o operador de Reynolds correspondente), e  $W'$  é qualquer subespaço invariante de  $V$ , então  $W' = (W' \cap W) \oplus (W' \cap V^G)$ . Em particular,  $R_V(W') \subseteq W'$ .*

PROVA:  $W' \cap V^G$  é subespaço invariante de  $W'$ , e como  $G$  é linearmente redutivo, existe subespaço invariante  $W'' \subseteq W'$  que complementa  $W' \cap V^G$  (veja nota após a definição 1.4.1). Usando novamente o fato que  $G$  é linearmente redutivo, escrevemos  $W'' = W''_1 \oplus \dots \oplus W''_n$ , onde cada  $W''_i$  é irredutível. Assim,  $W \cap W''_i$  deve ser igual a  $\{0\}$  ou  $W''_i$ . Se ele fosse igual a  $\{0\}$ , teríamos

$$V^G \cap (W \oplus W''_i) = (W \oplus W''_i)^G = W^G \oplus (W''_i)^G = 0$$

o que é impossível porque  $\dim V^G + \dim(W \oplus W''_i) > \dim V$ . Logo devemos ter  $W \cap W''_i = W''_i$ , ou seja,  $W''_i \subseteq W$ . Assim  $W'' \subseteq W$ , como queríamos. ■

**Proposição 2.4.3** *Suponha dada uma representação de um grupo  $G$  em um espaço vetorial  $V$ . Se  $G$  é linearmente redutivo e  $V$  é tal que todo  $v \in V$  pertence a um subespaço invariante de dimensão finita, então existe um único operador de Reynolds  $R_V : V \rightarrow V$ .*

PROVA:

- Primeiro caso:  $V$  tem dimensão finita.

A existência de  $R_V$  segue diretamente do fato que  $G$  é linearmente redutivo, e  $V^G$  é invariante. A unicidade segue do lema acima: Se  $R$  é outro operador de Reynolds,  $\ker R_V \subseteq \ker R$  e  $\ker R \subseteq \ker R_V$ , isto é,  $R = R_V$ .

- Caso Geral.

Para cada  $v \in V$ , escolha um subespaço invariante de dimensão finita  $U$  contendo  $v$  e defina  $R_V(v) = R_U(v) \in U^G = U \cap V^G$ .  $R_V$  está bem-definido, pela unicidade do operador de Reynolds mostrada acima: se  $U'$  é outro subespaço invariante de dimensão finita contendo  $v$ , tanto

$R_U|_{U \cap U'}$  quanto  $R_{U'}|_{U \cap U'}$  são operadores de Reynolds de  $U \cap U'$  (o lema acima garante que  $R_U(U \cap U')$  e  $R_{U'}(U \cap U')$  estão contidos em  $U \cap U'$ ), e por isso devem ser iguais, o que implica que  $R_U(v) = R_{U'}(v)$ .

A unicidade é clara. ■

**Proposição 2.4.4** *Seja  $G$  um grupo algébrico linearmente reutivo.*

*Suponha que  $G$  age linearmente nos espaços vetoriais  $V$  e  $W$  de modo que cada ponto está contido num subespaço invariante de dimensão finita.*

*Se  $f : V \rightarrow W$  é  $G$ -equivariante, então o diagrama abaixo é comutativo:*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ R_V \downarrow & & \downarrow R_W \\ V^G & \xrightarrow{f|_{V^G}} & W^G \end{array}$$

PROVA: Podemos claramente supor que  $V$  e  $W$  têm dimensão finita.

Temos que mostrar a igualdade  $R_W \circ f = f|_{V^G} \circ R_V$

Os subespaços  $\text{im } f$  e  $\ker f$  são invariantes. Como  $G$  é linearmente reutivo, existe subespaço invariante  $V'$  tal que  $\ker f \oplus V' = V$ . Então  $f|_{V'} : V' \rightarrow \text{im } f$  é isomorfismo, e pela unicidade dos operadores de Reynolds, vemos que a igualdade vale em  $V'$ :

$$(R_W \circ f)|_{V'} = (f|_{V^G} \circ R_V)|_{V'}$$

Agora só resta mostrar a igualdade em  $\ker f$ . Pelo lema acima  $R_V(\ker f) \subseteq \ker f$  e por isso os dois lados são nulos. ■

**Teorema 2.4.5** *Sejam  $X$  uma variedade afim na qual o grupo linearmente reutivo  $G$  age, e  $Y$  um fechado invariante de  $X$ . Chame de  $\pi : X \rightarrow X//G$  a projeção sobre o quociente afim.*

*Então  $\pi(Y)$  é fechado e  $\pi|_Y : Y \rightarrow \pi(Y)$  é o quociente afim de  $Y$  por  $G$ .*

PROVA: Que  $\pi(Y)$  é fechado já foi visto no teorema 1.5.1. Seja  $J \subseteq A(X)$  o ideal de  $Y$ . Como  $Y$  é invariante,  $J$  é invariante, e  $G$  age em  $A(X)/J$ . O ideal de  $\pi(Y)$  é  $J \cap A(X)^G \subseteq A(X)^G$ , e o mapa  $\pi|_Y : Y \rightarrow \pi(Y)$  corresponde à inclusão

$$\frac{A(X)^G}{J \cap A(X)^G} \subseteq \frac{A(X)}{J}$$

Tudo o que precisamos mostrar é que

$$\frac{A(X)^G}{J \cap A(X)^G} = \left( \frac{A(X)}{J} \right)^G$$

Como  $J$  é invariante, temos mapa bem-definido

$$p : A(X)^G \rightarrow \left( \frac{A(X)}{J} \right)^G$$

O núcleo desse mapa é claramente  $J \cap A(X)^G$ , e então basta mostrar que  $p$  é sobrejetor. O diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} A(X) & \longrightarrow & \frac{A(X)}{J} \\ \downarrow R_{A(X)} & & \downarrow R_{A(X)/J} \\ A(X)^G & \xrightarrow{p} & \left( \frac{A(X)}{J} \right)^G \end{array}$$

Como  $R_{A(X)/J}$  é sobre e  $A(X) \rightarrow A(X)/J$  também, a composição é sobre, e assim  $p$  deve ser sobrejetor. ■

**Corolário 2.4.6** *Seja  $\mathcal{V}_S(Q, \alpha) \subseteq \mathcal{R}(Q, \alpha)$  o conjunto fechado e invariante das representações que satisfazem as relações em  $S$ . Seja*

$$\pi : \mathcal{R}(Q, \alpha)^{ss} \rightarrow \mathcal{R}(Q, \alpha) // (GL(\alpha), \chi_\theta) = Y$$

*a projeção no quociente.*

*Então  $\pi(\mathcal{V}_S(Q, \alpha) \cap \mathcal{R}(Q, \alpha)^{ss})$  é fechado em  $Y$  (e portanto é uma variedade projetiva) e é bom quociente pela ação de  $GL(\alpha)$  (a projeção sendo dada pela restrição de  $\pi$ ).*

**PROVA:** Já vimos no capítulo 1 que  $\pi(\mathcal{V}_S(Q, \alpha))$  é fechado. Para cada aberto afim  $U$  de  $Y$ ,  $\pi^{-1}(U)$  é aberto afim de  $\mathcal{R}^{ss}$ , e  $\pi$  restrita a esse aberto é simplesmente o quociente afim. Pelo teorema acima  $\pi$  restrita a  $\mathcal{R}^{ss} \cap \mathcal{V}_S$  é quociente afim dessa variedade pela ação de  $GL(\alpha)$ . Isso conclui a demonstração (porque ser um bom quociente é uma propriedade local). ■

Construímos o quociente desejado, e

- os pontos considerados foram as representações em  $\text{mod-}kQ/I$  que eram  $\theta$ -semi-estáveis em  $\text{mod-}kG$ ;

- dois pontos foram identificados quando as representações correspondentes eram  $S$ -equivalentes em  $\text{mod-}kQ$ .

Vamos terminar esta seção traduzindo esses dois fatos na linguagem da categoria  $\text{mod-}kQ/I$ .

**Proposição 2.4.7** *Como  $K_0(\text{mod-}kQ) = K_0(\text{mod-}kQ/I)$ ,  $\theta$  pode também ser vista como uma função aditiva em  $\text{mod-}kQ/I$ . Pensando dessa maneira, um objeto  $M$  de  $\text{mod-}kQ/I$  é  $\theta$ (-semi)-estável em  $\text{mod-}kQ/I$  se e só se ele é  $\theta$ (-semi)-estável em  $\text{mod-}kQ$ .*

PROVA: Se o morfismo na categoria  $\text{mod-}kQ$   $i : M \rightarrow N$  é injetor e  $N \in \text{Obj}(\text{mod-}kQ/I)$ , então  $M$  também é objeto de  $\text{mod-}kQ/I$ . A demonstração segue imediatamente desse fato. ■

**Proposição 2.4.8** *Dois objetos de  $\text{mod-}kQ/I$  são  $S$ -equivalentes como objetos de  $\text{mod-}kQ/I$  se e só eles são  $S$ -equivalentes como objetos de  $\text{mod-}kQ$ .*

## 2.5 Alguns Resultados Gerais Sobre o Quociente

Nesta seção vamos apresentar alguns resultados gerais sobre os quocientes  $Y = \mathcal{R}(Q, \alpha) // (\text{GL}(\alpha), \chi_\theta)$ , isto é, sobre o espaço de moduli das representações de  $Q$  (sem relações), uma quiver finita e sem ciclos orientados.

**Proposição 2.5.1**  *$Y$  é irredutível (se for não-vazio).*

PROVA: Como  $\mathcal{R}$  é um espaço vetorial (ou seja, um  $\mathbb{A}^m$ ), ele é irredutível, o que implica que o aberto não-vazio  $\mathcal{R}^{ss}$  também é, assim como  $Y$ , que é a imagem do morfismo  $\pi : \mathcal{R}^{ss} \rightarrow Y$ . ■

**Definição 2.5.2** Um domínio  $A$  é *integralmente fechado* se ele é igual a seu fecho integral no seu corpo de frações  $K$ . Em outras palavras, todo elemento  $\mu \in K$  que é integral sobre  $A$ , isto é, que satisfaz uma equação

$$\mu^n + c_{n-1}\mu^{n-1} + \dots + c_0 = 0 \quad c_i \in A \quad \forall i$$

deve pertencer a  $A$ . (veja [Atiyah and MacDonald], capítulo 5)

Uma variedade  $Z$  é dita *normal* quando, para todo  $z \in Z$ , o anel local  $\mathcal{O}_z$  é um domínio integralmente fechado. (veja [Hartshorne], exercício 3.17 do capítulo 1 para propriedades básicas.)

**Proposição 2.5.3**  $Y$  é normal.

PROVA:  $Y$  é quociente categórico de  $\mathcal{R}^{ss}$  por  $G$ . Assim, para  $y \in Y$ , e vizinhança aberta afim  $U$  de  $y$ , temos  $A(U) \simeq A(\pi^{-1}(U))^G$ .

Como  $\pi^{-1}(U)$  é aberto afim da variedade normal  $\mathcal{R}(Q, \alpha)$ , a álgebra  $R = A(\pi^{-1}(U))$  é integralmente fechada. Sejam  $K(R)$  e  $K(R^G)$  os corpos de frações de  $R$  e  $R^G$ . É claro que  $K(R^G) \subseteq K(R)$ .

Seja  $\mu \in K(R^G)$  integral sobre  $R^G$ . Então ele também é integral sobre  $R$ , e assim pertence a  $R$  (porque  $R$  é integralmente fechado). Mas é claro que  $R^G = R \cap K(R^G)$ , de modo que  $\mu \in R^G$ .

Logo  $R^G$  é integralmente fechado, e  $Y$  é normal. ■

**Proposição 2.5.4**  $Y^s$  é não-singular, e, se for não-vazio, tem dimensão igual a  $1 - \langle \alpha, \alpha \rangle$ .

Para a demonstração, precisaremos do teorema abaixo e da suposição que o corpo base  $k$  seja igual a  $\mathbb{C}$ . Veja as definições e propriedades básicas de conjunto saturado, morfismos étale e fortemente étale em [Drézet], e as do espaço tangente de Zariski em [Hartshorne], capítulo I, exercício 5.10.

**Teorema 2.5.5 (Teorema do Slice Étale de Luna para pontos suaves)**

Seja  $G$  um grupo reductivo agindo numa variedade afim  $X$ . Seja  $x \in X$  tal que  $X$  é suave em  $x$  e a órbita  $O(x)$  é fechada. Então existe uma subvariedade localmente fechada e suave  $V$  de  $X$  e morfismo  $G_x$ -equivariante  $\zeta : V \rightarrow T_x V$  com  $\zeta(x) = 0$ ,  $T_x \zeta = \text{Id}$ , tais que:

- (i)  $V$  é afim e contém  $x$ ;
- (ii)  $V$  é  $G_x$ -invariante;
- (iii) A imagem do morfismo  $G$ -equivariante  $\psi : G \times_{G_x} V \rightarrow X$  induzido pela ação de  $G$  em  $X$  é um aberto saturado  $U$  de  $X$  (aqui  $G \times_{G_x} V = (G \times V) // G$ );
- (iv) A restrição  $\psi : G \times_{G_x} V \rightarrow U$  é fortemente étale;
- (v)  $T_x X = T_x(O(x)) \oplus T_x V$ ;
- (vi) A imagem de  $\zeta$  é um aberto saturado  $W$  de  $T_x V$ ;
- (vii) A restrição  $\zeta : V \rightarrow W$  é um morfismo  $G_x$ -equivariante e fortemente étale.

PROVA: Veja [Drézet], teorema 5.4 ou o artigo original [Luna]. ■

PROVA DA PROPOSIÇÃO 2.5.4: Seja  $x \in \mathcal{R}^s$  um ponto  $\theta$ -estável,  $\pi : \mathcal{R}^{ss} \rightarrow Y$  a projeção no quociente, e  $y = \pi(x) \in Y^s$ .

Assim existe  $f \in k[\mathcal{R}]^{G, \chi_\theta^n}$ , com  $n \geq 1$ , tal que  $f(x) \neq 0$  e a órbita de  $x$  é fechada em  $\mathcal{R}_f$ . Como  $\mathcal{R}_f$  é afim, podemos aplicar o teorema de Luna acima, e ganhamos uma subvariedade  $V$  satisfazendo todas aquelas propriedades.

Como  $\dim G_x = 1$  e  $G_x$  é irredutível (veja proposição 2.3.1), devemos ter  $G_x = \Delta$ .

Pela definição de fortemente étale, o morfismo

$$\psi_{/G} : (G \times_{G_x} V) // G \rightarrow U // G$$

é étale.

Pela proposição 4.9 de [Drézet], temos

$$(G \times_{G_x} V) // G \simeq V // G_x = V$$

(porque  $G_x = \Delta$  age trivialmente em  $V$ ). Como  $U$  é saturado, ele é da forma  $\pi^{-1}(U')$  para algum aberto  $U'$  de  $Y$ , e  $U // G = U'$ . Desse modo o morfismo étale  $\psi : V \rightarrow U'$  é simplesmente a restrição de  $\pi$  a  $V$ .

Como  $V$  é suave em  $x$ ,  $U'$  é suave em  $y$ , e o mapa tangente  $T_x \psi : T_x V \rightarrow T_y U'$  é um isomorfismo. (Veja proposição 4.3 de [Drézet].)

O item (v) do teorema de Luna nos permite calcular a dimensão de  $T_y Y$ :

$$\begin{aligned} \dim T_y Y &= \dim T_x(\mathcal{R}_f) - \dim T_x(O(x)) \\ &= \dim T_x(\mathcal{R}_f) - \dim G + \dim G_x \\ &= \sum_{a \in Q_1} \alpha_{t(a)} \alpha_{h(a)} - \sum_{v \in Q_0} \alpha_v^2 + 1 \\ &= 1 - \langle \alpha, \alpha \rangle \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Corolário 2.5.6** *Se  $Y^s \neq \emptyset$ , a dimensão de  $Y$  é  $1 - \langle \alpha, \alpha \rangle$ .*

Agora vamos estudar quando  $Y^s$ , a imagem dos pontos estáveis, é projetiva, ou seja, quando estabilidade e semi-estabilidade são equivalentes.

**Proposição 2.5.7** *Para  $\alpha \in \mathbb{N}^{Q_0}$  indivisível (ou seja,  $\text{mdc}(\alpha_v)_{v \in Q_0} = 1$ ), o conjunto*

$$S = \{\theta \in \mathbb{R}^{Q_0} \mid \theta\text{-semi-estabilidade} = \theta\text{-estabilidade}\}$$

*é aberto, e  $S \cap T$  é denso em*

$$T = \{\theta \in \mathbb{R}^{Q_0} \mid \text{existe representação } \theta\text{-estável } M \in \mathcal{R}(Q, \alpha)\}$$

PROVA: Seja  $\theta \in S$ . Se  $\theta \cdot \alpha \neq 0$ , para  $\theta'$  próximo de  $\theta$ , ainda temos  $\theta' \cdot \alpha \neq 0$ , de modo que não há representações  $\theta'$ -semi-estáveis, e trivialmente  $\theta' \in S$ . Vamos então assumir que  $\theta \cdot \alpha = 0$ .

Sejam  $\beta_1, \dots, \beta_l$  os vetores dimensão das sub-representações próprias das representações  $\theta$ -estáveis de dimensão  $\alpha$ . Pela definição de estabilidade, eles satisfazem  $\theta \cdot \beta_i > 0$ . Cada representação não  $\theta$ -semi-estável com dimensão  $\alpha$  possui uma subrepresentação própria de dimensão  $\beta$  tal que  $\theta \cdot \beta < 0$ . Sejam  $\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_k$  todos os vetores dimensão que aparecem dessa maneira.

Então, para  $\theta'$  num aberto suficientemente pequeno ao redor de  $\theta$ , ainda temos

$$\theta' \cdot \beta_i > 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, l\} \quad \text{e} \quad \theta' \cdot \tilde{\beta}_j < 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, k\}$$

Se  $\theta' \cdot \alpha \neq 0$ , é claro que  $\theta'$  pertence a  $S$ . No caso em que  $\theta' \cdot \alpha = 0$ , para cada representação  $M$  de dimensão  $\alpha$ , temos

$$M \text{ } \theta\text{-estável} \Rightarrow M \text{ } \theta'\text{-estável}$$

$$M \text{ não } \theta\text{-semi-estável} \Rightarrow M \text{ não } \theta'\text{-semi-estável}$$

(por causa das inequações acima), o que mostra que  $\theta' \in S$ . Logo  $S$  é aberto.

Para provar que  $S \cap T$  é denso em  $T$  vamos precisar da hipótese que  $\alpha$  é indivisível, na seguinte forma: Se  $\beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{Q}_0}$  é um subvetor próprio de  $\alpha$ , ou seja, se satisfaz  $\beta \neq 0$ ,  $\beta \neq \alpha$  e  $0 \leq \beta_v \leq \alpha_v \quad \forall v$ , então  $\beta$  não é múltiplo de  $\alpha$ . (Se  $\beta = \lambda\alpha$ , devemos ter  $\lambda \in \mathbb{Q}$ . Escrevendo  $\lambda = p/q$  com  $\text{mdc}(p, q) = 1$ , vemos que  $q$  é maior que um e divide  $\alpha$ , o que é absurdo.)

Essa condição implica que  $\{\theta \in \mathbb{R}^{\mathbb{Q}_0} \mid \theta \cdot \beta = 0 \text{ e } \theta \cdot \alpha = 0\}$  é subespaço vetorial próprio de  $\alpha^\perp = \{\theta \in \mathbb{R}^{\mathbb{Q}_0} \mid \theta \cdot \alpha = 0\}$ , e assim o conjunto

$$R = \{\theta \in \mathbb{R}^{\mathbb{Q}_0} \mid \theta \cdot \alpha = 0 \text{ e } \theta \cdot \beta \neq 0 \text{ para todos os } \beta \text{ do tipo acima}\}$$

é denso em  $\alpha^\perp$ . É fácil ver que  $R \subseteq S$ . Além disso,  $T$  é subconjunto aberto de  $\alpha^\perp$ , e concluímos que  $S \cap T$  é denso em  $T$ . ■

Agora vamos apresentar um critério para que o conjunto  $T$  da proposição acima seja não vazio.

**Definição 2.5.8**  $M$  é uma *representação de Schur* se  $\text{Hom}(M, M) = k$ .  $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{Q}_0}$  é chamado de *raiz de Schur* quando existe representação de Schur com vetor dimensão  $\alpha$ . (Para uma explicação sobre a nomenclatura “raiz”, veja a nota no final desta seção.)

**Proposição 2.5.9** *Seja  $x \in \mathcal{R}(Q, \alpha)$  e  $M$  a representação correspondente. Então*

$$G_x = \Delta \iff \text{Hom}(M, M) = k$$

PROVA: Note primeiramente que o conjunto dos elementos invertíveis de  $R = \text{Hom}(M, M)$  é exatamente  $G_x$ . Assim, se  $R = k$ , então  $G_x = \Delta$ .

Para a outra implicação, suponha que o conjunto de invertíveis da álgebra (de dimensão finita sobre  $k$ )  $R$  seja apenas  $k^*$ . Devemos mostrar que  $R = k$ .

Seja  $r \in R$ . Defina a aplicação  $k$ -linear  $T : R \rightarrow R$  por  $T(r') = r'r$ . Escolha  $\lambda \in k$  que não seja autovalor de  $T$ . Então  $\lambda + T$  é invertível, e em particular, existe  $r' \in R$  com  $r'(\lambda + r) = 1$ . Pela nossa hipótese,  $\lambda + r \in k$ , o que implica que  $r \in k$ . Logo  $R = k$ . ■

**Proposição 2.5.10** *Se existe  $\theta$  tal que há representação  $\theta$ -estável  $M$  com vetor dimensão  $\alpha$ , então  $\text{End}(M) = k$ , e assim  $\alpha$  é raiz de Schur.*

PROVA: Seja  $x$  um ponto correspondente a  $M$  em  $\mathcal{R}(Q, \alpha)$ . Pela definição temos  $\dim G_x = 1$ . Como  $G_x$  é irreduzível (veja 2.3.1), ele deve ser igual a  $\Delta$ . Pelo lema acima,  $\text{End}(M) = k$ . ■

A recíproca também vale: Se  $\text{End}(M) = k$ , então existe  $\theta$  tal que  $M$  é  $\theta$ -estável.

Em [King], o autor usa o seguinte resultado de Van den Bergh (Proposição 6 em [Bessenrodt and Le Bruyn]): Se  $G_x$  é trivial, existe aberto afim invariante  $U$  tal que  $O(x)$  é fechado em  $U$ .

O que precisamos é de um aberto *principal* invariante  $\mathcal{R}_f$  com essa propriedade, porque então (assumindo que  $(f)$  é ideal radical)

$$f^g = \chi(g)f \quad \forall g \in G$$

para algum caráter  $\chi$  de  $G$ , que deve ser da forma  $\chi_\theta$  para algum  $\theta$ , de modo que  $M$  é  $\theta$ -estável. Mas King não deixa claro como passar do aberto afim  $U$  para o principal  $\mathcal{R}_f$ .

Uma prova alternativa da recíproca pode ser obtida do teorema 2.5.12 abaixo.

**Observação:**

Resultados muito interessantes sobre representações de quivers foram obtidos através da ligação com o estudo de um tipo de álgebras de Lie de dimensão infinita, as chamadas álgebras de Kac-Moody. Terminamos esta seção com alguns deles.

Dada uma quiver  $Q$ , esquecemos a direção das flechas, obtendo simplesmente um grafo, que é usado para definir uma matriz de Cartan  $n \times n$   $A = (a_{ij})$  (onde  $n = |Q_0|$ ) da seguinte maneira:

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{se } i = j \\ -(\text{número de arcos entre os vértices } i \text{ e } j) & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

A partir dessa matriz construímos uma álgebra de Kac-Moody  $\mathfrak{g}(A)$ , e ganhamos alguns conceitos clássicos no estudo de álgebras de Lie, como um conjunto  $\Delta \subseteq \mathbb{Z}^{Q_0}$  de “raízes”, um grupo de Weyl etc. Veja [Kac1], [Kac2] e [Kac3] para mais detalhes.

**Teorema 2.5.11** *Existe representação indecomponível (isto é, que não pode ser escrita como soma direta de duas subrepresentações próprias) com vetor dimensão  $\alpha$  se e só se  $\alpha \in \Delta_+ = \{\beta \in \Delta \mid \beta_v \geq 0 \forall v \text{ e } \beta_v > 0 \text{ para algum } v\}$ .*

PROVA: Veja [Kac2], Teorema B, seção 1. ■

É fácil ver que  $\text{End}(M) = k \implies M$  é indecomponível, e isso explica a nomenclatura “raiz de Schur” na definição 2.5.8.

**Teorema 2.5.12** *Seja  $\alpha$  um vetor dimensão da quiver  $Q$ . Defina*

$$\Theta_\alpha(\beta) = \langle \beta, \alpha \rangle - \langle \alpha, \beta \rangle$$

*Existem um conjunto de subvetores de  $\alpha$ , os chamados subvetores genéricos, e um aberto denso  $U \subseteq \mathcal{R}(Q, \alpha)$ , tais que, para toda representação  $M$  em  $U$ , os vetores dimensão das subrepresentações de  $M$  são exatamente os subvetores genéricos.*

*Então  $\alpha$  é raiz de Schur se e só se  $\Theta_\alpha(\beta) > 0$  para todo subvetor genérico.*

PROVA: Veja [Schofield1], Teorema 6.1. ■

**Corolário 2.5.13** *Vale a recíproca da proposição 2.5.10: Se  $\alpha$  é raiz de Schur, existe  $\theta$  tal que há representação  $\theta$ -estável com vetor dimensão  $\alpha$ .*

PROVA: Basta pôr  $\theta = \Theta_\alpha$ . ■

**Teorema 2.5.14** *Seja  $\alpha$  uma raiz de Schur e defina  $h$  e  $p$  pelas fórmulas:*

$$h = \text{mdc}(\alpha_v)_{v \in Q_0} \quad p = 1 - \left\langle \frac{\alpha}{h}, \frac{\alpha}{h} \right\rangle$$

Defina  $Z = (k^{h \times h})^p$ , o espaço de  $p$ -uplas de matrizes  $h \times h$ , e faça o grupo  $GL(h)$  agir em  $Z$  por conjugação simultânea:

$$g \cdot (B_1, \dots, B_p) = (gB_1g^{-1}, \dots, gB_pg^{-1})$$

Então, para qualquer  $\theta$  tal que o conjunto das representações  $\theta$ -estáveis em  $\mathcal{R}(Q, \alpha)$  não seja vazio, os espaços

$$\mathcal{R}(Q, \alpha)^{ss} // (GL(\alpha), \chi_\theta) \quad e \quad Z // GL(h)$$

são birracionais. (O segundo é simplesmente o quociente afim.)

PROVA: Veja [Schofield2]. ■

## 2.6 Alguns exemplos

### 2.6.1 Diagrama de Dynkin $A_n$

Seja  $Q$  a quiver definida por  $Q_0 = \{1, \dots, n\}$  e  $Q_1 = \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ , com  $t(a_i) = i$  e  $h(a_i) = i + 1$ :

$$\bullet \xrightarrow{a_1} \bullet \xrightarrow{a_2} \bullet \longrightarrow \dots \longrightarrow \bullet \xrightarrow{a_{n-1}} \bullet$$

Nós vamos mostrar que o espaço de moduli  $\mathcal{R}(Q, \alpha) // (GL(\alpha), \chi_\theta)$  é vazio ou tem apenas um ponto, para quaisquer  $\alpha$  e  $\theta$ . Começamos com uma definição:

**Definição 2.6.1** Uma representação  $M$  é *indecomponível* se ela não pode ser escrita como  $M_1 \oplus M_2$ , com  $M_1$  e  $M_2$  não-nulas.

**Proposição 2.6.2** Para cada par  $j, l$  com  $0 \leq j \leq l \leq n$ , defina a representação  $M_{j,l}$  de  $Q$  por

$$V_i = \begin{cases} k & \text{se } j \leq i \leq l \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\eta_{a_i} = \begin{cases} 1 & \text{se } j \leq i \leq l - 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Ela é indecomponível.

PROVA: Suponha que  $M_{j,l} = M_1 \oplus M_2$ . Uma delas, que supomos ser  $M_1 = (\{W_i \mid i = 1, \dots, n\}, \{\psi_i \mid i = 1, \dots, n-1\})$  deve ser tal que  $W_j = k$ . Mas então, como ela é subrepresentação de  $M_{j,l}$ , a imagem de  $\eta_{a_j}$  deve estar contida em  $W_{j+1}$ , ou seja,  $W_{j+1} = k$ . Do mesmo modo,  $W_{j+2} = k, \dots, W_l = k$ . Portanto  $M_1 = M_{j,l}$ , concluindo a demonstração. ■

Para mostrarmos que essas são todas as representações indecomponíveis, precisamos de dois lemas.

**Lema 2.6.3** *Suponha dada uma cadeia de espaços vetoriais de dimensão finita sobre  $k$*

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots \subseteq V_j \subseteq V_{j+1}$$

*Para qualquer subespaço  $W \subseteq V_{j+1}$ , existem subespaços  $V'_i \subseteq V_i$  com*

$$V'_1 \subseteq \dots \subseteq V'_{j+1} \quad e \quad V_i = (V_i \cap W) \oplus V'_i \quad \forall i$$

PROVA: Escolha qualquer subespaço  $V'_1 \subseteq V_1$  que complementa  $V_1 \cap W$ . Claramente temos  $V'_1 \cap W = \{0\}$ , e isso nos permite escolher  $V'_2 \subseteq V_2$  que complementa  $V_2 \cap W$  e que contém  $V'_1$ . Podemos continuar o processo, e no final teremos  $V'_1 \subseteq \dots \subseteq V'_{j+1}$  com a propriedade desejada. ■

**Lema 2.6.4** *Suponha que a representação  $M$*

$$V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} V_3 \longrightarrow \dots \longrightarrow V_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} V_n$$

*seja indecomponível, e que  $f_1, \dots, f_j$ , para  $j \leq n-2$ , sejam todas injetoras. Então ou  $f_{j+1}$  também é injetora, ou  $V_{j+2} = \dots = V_n = 0$ .*

PROVA: Aplicando o lema acima com  $W = \ker f_{j+1}$ , vemos que  $M$  é igual à soma direta das duas representações abaixo:

$$V'_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow V'_{j+1} \longrightarrow V_{j+2} \longrightarrow \dots \longrightarrow V_n$$

$$V_1 \cap \ker f_{i+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow \ker f_{i+1} \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \longrightarrow 0$$

Como  $M$  é indecomponível, uma delas deve ser nula, o que implica que ou  $f_{j+1}$  é injetora, ou  $V_{j+2} = \dots = V_n = 0$ . ■

**Teorema 2.6.5** *Se a representação  $M$ , dada por*

$$V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} V_3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow V_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} V_n$$

*é indecomponível, então  $M$  é isomorfa a alguma das representações listadas na proposição 2.6.2.*

PROVA: Por indução em  $n$ .

Se  $n = 1$ , o resultado é óbvio. Suponha então que  $n > 1$ .

Se nem todas as  $f_i$  são injetoras, então  $V_n = 0$  (ver lema acima), e por isso a representação

$$V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} V_3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow V_{n-2} \xrightarrow{f_{n-2}} V_{n-1}$$

é indecomponível. Agora é só aplicar a hipótese indutiva.

Se, por outro lado, todas as  $f_i$  são injetoras, devemos ter  $\dim V_n = 1$  (exceto se  $M = 0$ ). Realmente, se  $V_n$  tiver subespaço próprio  $W$ , o lema 2.6.3 daria uma decomposição de  $M$  como soma direta de duas representações não-nulas, o que é impossível. Agora fica claro que  $M$  é isomorfa a  $M_{j,n}$ , para algum  $j$  entre 0 e  $n$ . ■

**Corolário 2.6.6** *Quaisquer que sejam  $\alpha$  e  $\theta$ , o quociente  $\mathcal{R}(Q, \alpha) // (GL(\alpha), \chi_\theta)$  é vazio ou tem apenas um ponto.*

PROVA: É fácil ver que qualquer representação de  $Q$  pode ser escrita como soma direta de indecomponíveis. Como há apenas um número finito dessas,  $\mathcal{R}(Q, \alpha)$  tem um número finito de órbitas, o que implica que o quociente tem um número finito de pontos. Agora é só lembrar que o quociente é irredutível (se for não-vazio). ■

## 2.6.2 A Quiver de Jordan

A quiver de Jordan tem apenas um vértice  $v$  e uma flecha  $a$  (que começa e termina em  $v$ , é claro).



$\alpha$  é apenas um número natural. Se  $\theta$  for não-nulo, não há pontos semi-estáveis, e por isso vamos assumir  $\theta = 0$ , de modo que todas as representações são semi-estáveis. Então o quociente é simplesmente o quociente afim  $\text{Spec}(k[\mathcal{R}(Q, \alpha)]^{\text{GL}(\alpha)})$ , e podemos dar uma descrição explícita dele:

**Proposição 2.6.7** *Dada uma representação  $M$  em  $\mathcal{R}(Q, \alpha)$ , isto é, uma matriz  $h \times h$ , defina  $\phi(M) = (a_1, \dots, a_h) \in \mathbb{A}^h$ , onde  $a_i$  são os coeficientes do polinômio característico de  $M$ :*

$$\det(X \cdot \text{Id} - M) = X^h + a_1(M)X^{h-1} + \dots + a_h(M)$$

*Então  $\mathbb{A}^h$  é o quociente de  $\mathcal{R}(Q, \alpha)$  por  $GL(h)$  e  $\phi$  é a projeção.*

PROVA: Veja [Newstead], proposição 2.11, página 39. ■

Note que neste caso o quociente não é projetivo. Isso não contradiz a proposição 2.3.10, porque a quiver de Jordan tem ciclo orientado.

# Bibliografia

- [Armstrong] M. A. Armstrong: (1983) *Basic Topology*. Undergraduate Texts in Mathematics 42. Springer-Verlag.
- [Atiyah and MacDonald] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald: (1969) *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley, Reading, Mass.
- [Bessenrodt and Le Bruyn] Christine Bessenrodt and Lieven Le Bruyn: (1991) *Stable Rationality of Certain  $PGL_n$ -quotients*. Invent. Math. 104, 179–199.
- [Bursztyn and Weinstein] Henrique Bursztyn and Alan Weinstein: (2004) *Poisson Geometry and Morita Equivalence*. London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge, England, v. 323
- [Dolgachev] I. Dolgachev: (2003) *Lectures on Invariant Theory*. LMS Lecture Note Series, 296. Cambridge University Press.
- [Drézet] J. M. Drézet: (2004) *Luna's slice theorem and applications*. Algebraic group actions and quotients, Notes of XXIII Autumn School in Algebraic Geometry (Wykno, Poland, 2000) Ed. J. Wisniewski, Hindawi Publ. Corp., 39–90. (disponível em <http://www.math.jussieu.fr/~drezet>)
- [Esteves] Eduardo Esteves: (1997) *Construção de Espaços de Moduli*. 21º Colóquio de Matemática, IMPA.
- [Fogarty] John Fogarty: (1969) *Invariant Theory*. Benjamin, New York.
- [GIT] D. Mumford, J. Fogarty e F. Kirwan: (1994) *Geometric Invariant Theory*. Third Edition, Erg. Math. 34, Springer-Verlag, Berlin.

- [Haboush] W. J. Haboush: (1975) *Reductive Groups Are Geometrically Reductive*. Annals of Mathematics 102, 67–83.
- [Hartshorne] R. Hartshorne: (1977) *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics 52. Springer-Verlag, New York.
- [Kac1] V. G. Kac: (1980) *Infinite Root Systems, Representations of Graphs and Invariant Theory*. Inventiones math. 56, 57–92.
- [Kac2] V. G. Kac: (1982) *Infinite Root Systems, Representations of Graphs and Invariant Theory, II*. Journal of Algebra 78, 141–162.
- [Kac3] V. G. Kac: (1990) *Infinite Dimensional Lie Algebras*. Third Edition. Cambridge University Press.
- [King] A. D. King: (1994) *Moduli of Representations of Finite Dimensional Algebras*. Quart. J. Math. Oxford (2), 45, 515–530.
- [Lang] S. Lang: (2002) *Algebra*. Graduate Texts in Mathematics 211. Springer-Verlag, New York.
- [Luna] D. Luna: (1973) *Slices Étales*. Bull. Soc. Math. de France 33, 81–105.
- [Newstead] P. Newstead: (1978) *Introduction to Moduli Problems and Orbit Spaces*. Tata Institute, Bombay. Springer-Verlag.
- [Ringel] C. M. Ringel: (1984) *Tame Algebras and Integral Quadratic Forms*. Lecture Notes in Mathematics 1099. Springer-Verlag, Berlin.
- [Rudakov] Alexei Rudakov: (1997) *Stability for an Abelian Category*. Journal of Algebra 197, 231–245.
- [Savage] Alistair Savage: (2005) *Finite-Dimensional Algebras and Quivers*. Preprint math.RA/0505082.
- [Seshadri] C. S. Seshadri: (1967) *Space of Unitary Vector Bundles on a Compact Riemann Surface*. Annals of Mathematics 85, 303–336.
- [Schofield1] Aidan Schofield: (1992) *General Representations of Quivers*. Proc. London Math. Soc. 65, 46–64.

- [Schofield2] Aidan Schofield: (2001) *Birational Classification of Moduli Spaces of Representations of Quivers*. *Indag. Mathem., N. S.*, 12 (3), 407–432.
- [Sternberg] S. Sternberg: (1994) *Group Theory and Physics*. Cambridge University Press, Cambridge.