

LADRILHAMENTOS

Edson Agustini

LADRILHAMENTOS

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação de mestrado devidamente corrigida e defendida por *Edson Agustini* e aprovada pela Comissão Julgadora.

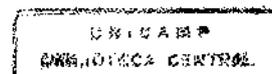
Campinas, 13 de março de 1998.

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.



Profª. Dra. *Sueli Irene Rodrigues Costa*
(Orientadora)

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
1998



UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	
	029-L
	33791
	395/98
	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
	R\$ 11,00
DATA	12/05/98
N.º CPD	

CM-00110691-9

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Agustini, Edson

Ag97L Ladrilhamentos / Edson Agustini -- Campinas, [S.P. :s.n.],
1998.

Orientador : Sueli Irene Rodrigues Costa

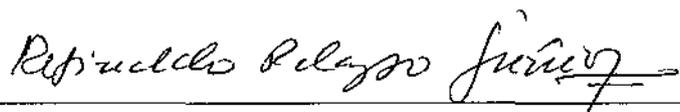
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Grupos discretos (Matemática). 2. Isometria (Matemática). 3.
Cristalografia matemática. I. Costa, Sueli Irene Rodrigues. II.
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica. III. Título.

Dissertação de Mestrado defendida e aprovada em 13 de março de 1998
pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). SUELÍ IRENE RODRIGUES COSTA



Prof (a). Dr (a). REGINALDO PALAZZO JÚNIOR



Prof (a). Dr (a). MARCELO FIRER

Para Carmen

Agradecimentos

A Deus pela presença contínua em minha vida.

À Profa. Dra. Sueli Irene Rodrigues Costa pela disposição e pela orientação durante o desenvolvimento deste trabalho.

À Cármen pelo incentivo constante e pelo apoio nos momentos difíceis.

Aos amigos que participaram comigo do programa de Mestrado em Matemática. Em especial, ao Jesse e ao Marcelo.

Aos funcionários e aos professores do IMECC pela atenção e pela dedicação aos alunos de pós-graduação.

À CAPES pelo apoio financeiro sem o qual não seria possível a realização do programa de Mestrado em Matemática.

Introdução

A presente dissertação destina-se a um estudo, de âmbito genérico, sobre uma linha da Teoria de Ladrilhamentos em algumas variedades riemannianas homogêneas e seus subconjuntos. Restringimo-nos aos espaços euclidianos de duas e de três dimensões e ao plano hiperbólico, mais precisamente os modelos de Poincaré. Esse estudo descortina uma curiosidade nascida do contato com o tema e questões levantadas desde a graduação. Ademais, são poucos os trabalhos publicados nesta área de pesquisa no Brasil, o que fez crer que, ao invés de abordar um ponto específico, seria de maior valia uma dissertação que propiciasse ao leitor um panorama genérico do assunto.

A teoria se bifurca em duas grandes vertentes, a saber: a de ladrilhamentos de toda a variedade e a de ladrilhamentos de seus subconjuntos próprios. A maior parte da dissertação refere-se ao estudo da primeira vertente, na qual surgem naturalmente estruturas algébricas que podem ser associadas a alguns tipos de ladrilhamentos. Essas estruturas são os grupos discretos de isometrias, e constituem o ponto nodal desta dissertação.

A segunda vertente refere-se a um estudo promissor e repleto de problemas de fronteira devido ao seu caráter específico. Não é possível associar grupos discretos aos ladrilhamentos de subconjuntos próprios, mas, sim, uma outra estrutura denominada grupo de ladrilhamento. No capítulo cinco apresentamos um caso especial de tal vertente, que, inclusive, possui algumas aplicações à Teoria dos Códigos Corretores de Erros. Para tanto, organizamos a pesquisa em torno de tópicos que compõem os capítulos da dissertação, os quais passamos a descrever:

Capítulo 1: constitui uma breve introdução à Teoria Combinatória dos Grupos. Este capítulo é estritamente relevante ao desenvolvimento e à compreensão dos capítulos ulteriores, excetuando o de número quatro.

Capítulo 2: abrange uma classificação de isometrias e de grupos discretos de isometrias no plano euclidiano e um estudo dos grupos cristalográficos (ladrilhamentos por ladrilhos compactos), que constitui o cerne do capítulo, e dos grupos de faixas e rosetas (ladrilhamentos por ladrilhos não-compactos).

Capítulo 3: constitui uma abordagem de grupos discretos de isometrias nos modelos de Poincaré do plano hiperbólico, particularmente, dos chamados grupos triângulos (que possuem os demais grupos discretos como subgrupos). Fazemos um estudo detalhado dos modelos hiperbólicos e das isometrias (incluindo transformações de Möbius) sob o ponto de vista riemanniano.

Capítulo 4: destina-se ao estudo e à classificação dos poliedros de Voronoi. Poliedros estes que possuem, como veremos, uma relação “métrica” especial com um reticulado “gerado por três translações LI ” e que estão associados a grupos discretos de isometrias gerados por translações no espaço euclidiano.

Capítulo 5: abarca um estudo referente a segunda vertente, no qual se aborda ladrilhamentos por poliamondes, poliominos e poliexos de regiões especiais do plano euclidiano.

O principal propósito do percurso estabelecido para esta dissertação repalda-se no desejo de colecionar e de tornar acessíveis diferentes aspectos que norteiam o tema aqui abordado. Ressaltamos, ainda, a inclusão de demonstrações e resultados que estão um tanto fragmentados na literatura internacional, assim como resultados de artigos mais recentes ainda não disponíveis em livros-texto.

Índice

1	Preliminares sobre Teoria Combinatória dos Grupos	3
1.1	Grupos	3
1.2	Grafos	5
1.3	Grupos e Grafos de Cayley	7
2	Ladrilhamentos e Grupos Discretos de Isometrias no Plano Euclidiano	17
2.1	Isometrias no Plano Euclidiano	17
2.2	Grupos Discretos de Isometrias e Ladrilhamentos.	27
2.2.1	Grupos.	27
2.2.2	Ladrilhamentos	32
2.2.3	Grupos Roseta.	36
2.2.4	Grupos de faixas.	39
2.2.5	Grupos Cristalográficos	46
3	Ladrilhamentos e Grupos Discretos de Isometrias no Plano Hiperbólico	67
3.1	O Modelo \mathfrak{S}	68
3.1.1	Uma Introdução Riemanniana ao Modelo Hiperbólico \mathfrak{S}	68
3.1.2	Isometrias em \mathfrak{S}	74
3.2	O Modelo \mathfrak{C}	78
3.2.1	Equivalência entre os modelos \mathfrak{S} e \mathfrak{C}	79
3.2.2	Métrica em \mathfrak{C}	82
3.2.3	Isometrias em \mathfrak{C}	85
3.3	Classificação de Isometrias Hiperbólicas	87
3.3.1	Inversões em \mathfrak{S}	87
3.3.2	Inversões em \mathfrak{C}	88
3.3.3	Algumas Definições Importantes	89
3.3.4	Teorema da Classificação	91
3.3.5	Feixes Hiperbólicos, Elípticos e Parabólicos	94
3.3.6	Classificação de Isometrias por meio do Traço	96

3.4	Ladrilhamentos Não-Euclidianos e Grupos Discretos de Isometrias	99
3.4.1	Preliminares	99
3.4.2	Grupos Triângulos	100
4	Classificação de Poliedros de Voronoi	111
4.1	Motivação no plano euclidiano	111
4.1.1	Polígonos de Voronoi	111
4.1.2	Diagramas Projetivos para Polígonos sc.	114
4.2	Zonoedros	116
4.2.1	Poliedros de Voronoi	117
4.2.2	Estrela de um zonoedro	121
4.2.3	O Plano Projetivo	122
4.2.4	Diagrama Projetivo Primal	122
4.2.5	Diagrama Projetivo Dual	123
5	Ladrilhamentos Especiais de Compactos Euclidianos	129
5.1	Apresentação, Definições e Alguns Resultados	129
5.2	Desenvolvimento da Resolução dos Teoremas sobre os Problemas de Ladrilhamentos de Figuras Reticuladas Triangulares	136
5.3	Ladrilhamentos por Poliamondes	147

Capítulo 1

Preliminares sobre Teoria Combinatória dos Grupos

Este capítulo é dedicado a uma pequena introdução à teoria originária de apresentações de grupos em termos de geradores e relações definidoras. Devido à frequência com que métodos combinatórios surgem nesta facção da Teoria dos Grupos, esta é muitas vezes chamada de Teoria Combinatória dos Grupos. A abordagem aqui feita é apenas a estritamente necessária para o desenvolvimento dos resultados referentes aos grupos discretos de isometrias nos capítulos subsequentes. Como veremos, estes grupos surgem de maneira muito natural em problemas de ladrilhamentos e, de um modo mais geral, em diversos problemas topológicos.

As referências mais utilizadas neste capítulo são [ROTMAN], [MAGNUS I], [GROSSMAN] e [COXETER III]. As notações e nomenclaturas tradicionais em textos de álgebra são utilizadas sem definições prévias.

1.1 Grupos

Definição 1. Consideremos um grupo finitamente gerado $G = \langle g_1, \dots, g_m \rangle$. Uma palavra P em G é uma seqüência finita $\{a_i\}_{i=1, \dots, n}$ na qual $a_i = g_j$ ou $a_i = g_j^{-1}$, $1 \leq j \leq m$.

Por comodidade, indicamos $P = a_1 \dots a_n$.

O comprimento de P é o número n e indicamos por $c(P)$.

Convencionamos que a palavra de comprimento nulo é o elemento neutro em G e indicamos por 1.

Definição 2. Sejam G grupo finitamente gerado e $P = a_1 \dots a_n \in G$ tal que $a_1 \dots a_n = 1$. Dizemos que $P = 1$ é uma relação em G e P é um relator em G .

Caso P possa ser reduzido a 1 cancelando apenas pares de elementos da forma $a_i a_i^{-1}$ em P , $i = 1, \dots, n$, diremos que P é um **relator nulo**.

Dado um relator não nulo P , podemos tomar um relator equivalente¹ P_3 que está na forma mais reduzida possível da seguinte maneira:

- Se $W \neq 1$ é a palavra de maior comprimento tal que $P = WW^{-1}$, então, seja $P_1 = V$, caso contrário, seja $P_1 = P$;
- Se P_1 possui blocos que formam relatores nulos, então, seja P_2 a palavra resultante de P_1 com esses blocos cancelados, caso contrário, seja $P_2 = P_1$;
- Se P_2 possui blocos que formam relatores do tipo V^k , $k \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}$, V relator em G , então, seja P_3 a palavra resultante de P_2 com blocos do tipo V^k substituídos por V , caso contrário, seja $P_3 = P_2$.

Definição 3. Dizemos que P_3 obtido acima é um **relator reduzido** (associado a P) e $P_3 = 1$ uma **relação reduzida** (associada a P).

Definição 4. Seja M um conjunto e L um grupo contendo M . Dizemos que L é **grupo livre sobre M** se, para qualquer grupo G , toda aplicação $f : M \rightarrow G$ tem uma única extensão a um homomorfismo $F : L \rightarrow G$.

TEOREMA 1. Se M é um conjunto, então existe um (único a menos de isomorfismo) grupo L livre sobre M .

A demonstração pode ser encontrada nas páginas 237-239 da referência [ROTMAN]. Um fato que é conveniente ressaltar nesta demonstração é o seguinte:

No caso em que M é finito, $M = \{g_1, \dots, g_m\}$, o grupo L é o representado por todas as palavras com letras g_i, g_i^{-1} e 1.

COROLÁRIO 1. Todo grupo G é quociente de um grupo livre.

Demonstração.

Pelo Teorema anterior, existe um grupo livre L sobre G . Tomemos $Id : G \rightarrow G$. Logo, existe $F : L \rightarrow G$, homomorfismo e este é sobrejetor. Pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo: $\frac{L}{Ker F} \cong Im F = G$ (\cong : isomorfo).■

Sejam $M = \{g_k\}_{k=1, \dots, m}$ um conjunto de geradores do grupo G e L um grupo livre sobre M . Tomemos $f : M \rightarrow G$ inclusão de M em G . Assim, a extensão $F : L \rightarrow G$ (Definição 4) deverá ser um homomorfismo sobrejetor (pois $F(g_i^{\varepsilon_i} g_j^{\varepsilon_j}) = F(g_i)^{\varepsilon_i} F(g_j)^{\varepsilon_j} = g_i^{\varepsilon_i} g_j^{\varepsilon_j}$ onde $\varepsilon_k \in \{-1, 0, 1\}$; $g_k^0 = 1$). Sabendo-se que $Ker F \triangleleft L$, temos uma motivação para a seguinte definição:

¹Equivalência baseada na operação e axiomas de grupo.

Definição 5. Seja G um grupo finitamente gerado. Se $M = \{g_k\}_{k=1,\dots,m}$ é um conjunto de geradores de G , L o grupo livre sobre M , $D = \{P_i = 1\}$ um conjunto de relações em G , $H \triangleleft L$ gerado por $\{P_i\}$ e $\frac{L}{H} \cong G$, então dizemos que G é um grupo definido por geradores M e relações D . Dizemos, também, que $(M|D)$ é uma apresentação de G e, às vezes, referir-nos-emos a D como conjunto de relações definidoras em G .

Notemos que se

- M é um conjunto de geradores de um grupo G ;
- G_1 e G_2 são subgrupos de G definidos pelas relações $D_1 = \{P_i = 1\}$ e $D_2 = \{Q_j = 1\}$, na qual são equivalentes ($D_1 \Leftrightarrow D_2$) segundo a operação e axiomas do grupo G ;
- $(M|D_1)$, $(M|D_2)$ representações de G_1 e G_2 respectivamente.

Então $G_1 \cong G_2$, pois, se $H_1 \triangleleft L$ e $H_2 \triangleleft L$ são gerados por $\{P_i\}$ e $\{Q_j\}$ respectivamente, temos que $H_1 \cong H_2$ e, portanto, $\frac{L}{H_1} \cong \frac{L}{H_2}$.

Observemos também que dado um conjunto D de relações, temos como consequência do Teorema 1 a existência de um único grupo G que possui D como conjunto de relações definidoras.

1.2 Grafos

Definição 6. Seja $\Gamma \neq \emptyset$ um conjunto com dois tipos de elementos, que denotaremos por **vértices** e **arestas**, satisfazendo:

a) A toda aresta $E \in \Gamma$ está associada um par ordenado de vértices (V_E, V'_E) ; $V_E, V'_E \in \Gamma$ onde V_E será denotado **vértice origem** e V'_E **vértice destino** de E .

b) A toda aresta $E \in \Gamma$ está associada uma aresta $E^{-1} \in \Gamma$, $E \neq E^{-1}$ que será denotada **inversa** de E tal que a aresta inversa de E^{-1} é E , ou seja, $(E^{-1})^{-1} = E$.

c) Se (V_E, V'_E) , $V_E, V'_E \in \Gamma$ está associado a uma aresta $E \in \Gamma$, então (V'_E, V_E) está associado a E^{-1} (Portanto, $V'_E = V_{E^{-1}}$ e $V_E = V'_{E^{-1}}$).

Nestas condições, dizemos que Γ é um **grafo**.

Numa representação gráfica de Γ , os vértices são tomados como pontos de um espaço conveniente e as arestas como curvas neste espaço, cujos pontos extremos são vértices, ou seja, Γ é representado por um complexo celular unidimensional. Podemos orientar cada aresta com o sentido proposto pelos seus vértices origem e destino.

Esta idéia pode ser formalizada da seguinte forma: Todo grafo pode ser mergulhado (ou seja, é isomorfo no sentido da definição a seguir) a um 1-complexo celular contido numa superfície fechada bidimensional (capítulo três de [COXETER III]).

Grafos planares, isto é, que são realizáveis no plano (realizáveis no seguinte sentido: não há cruzamentos de arestas exceto nos vértices), são os isomorfos a 1-complexos sobre a esfera.

Definição 7. Dois grafos Γ_1 e Γ_2 são ditos **isomorfos**, se existir uma bijeção $f : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ tal que:

- a) V é vértice de $\Gamma_1 \Leftrightarrow f(V)$ é vértice de Γ_2 .
- b) E é aresta de $\Gamma_1 \Leftrightarrow f(E)$ é aresta de Γ_2 .
- c) (V_E, V'_E) está associado a $E \Leftrightarrow (f(V_E)_{f(E)}, f(V'_E)_{f(E)})$ está associado a $f(E)$.
- d) E^{-1} é inversa de $E \Leftrightarrow f(E^{-1})$ é inversa de $f(E)$.

Observações:

- 1) Um par (V_E, V'_E) de vértices associados à aresta E num grafo Γ pode ser tal que $V_E = V'_E$ (na representação temos um laço ou curva fechada no ponto V_E).
- 2) Um par (V_E, V'_E) de vértices pode estar associado a diversas arestas de Γ .
- 3) Um grafo Γ pode ser constituído de um único ponto (com várias arestas). Neste caso, Γ é chamado de **grafo singular**.

Definição 8. Um **caminho** C em um grafo Γ é uma seqüência de arestas $E_j \in \Gamma$, $j = 1, \dots, n$, com $V'_{E_i} = V_{E_{i+1}}$, $i = 1, \dots, n - 1$ onde (V_{E_i}, V'_{E_i}) está associado a E_i . Escrevemos $C = E_1 \dots E_n$.

Se $C = E$ e (V_E, V'_E) é tal que $V_E = V'_E$, C é chamado de **caminho trivial**.

O número n é dito **comprimento** de C e é denotado $c(C)$.

Definição 9. Sejam $C_1 = E_1 \dots E_n$ e $C_2 = E_{n+1} \dots E_p$ caminhos em Γ tais que $V'_n = V_{n+1}$. O **produto** ou **justaposição** de C_1 e C_2 é um novo caminho em Γ , indicado por $C_1 C_2$ e definido por $C_1 C_2 = E_1 \dots E_p$.

Definição 10. Um caminho $C = E_1 \dots E_n$ em Γ é **fechado**, se $V_{E_1} = V'_{E_n}$ onde (V_{E_i}, V'_{E_i}) , $i = 1, \dots, n$, são vértices associados a E_i .

Caso C possa ser reduzido ao caminho trivial por meio de cancelamento de pares de arestas da forma $E_i E_i^{-1}$ em C , $i = 1, \dots, n$, diremos que C é um **caminho nulo**.

Dado um caminho fechado C não nulo, podemos tomar um caminho fechado “equivalente” C_3 que está na forma mais “reduzida” possível da seguinte maneira:

- Se A é caminho de maior comprimento tal que $C = ABA^{-1}$, então, seja $C_1 = B$, caso contrário, seja $C_1 = C$;

- Se C_1 possui blocos de arestas que formam caminhos nulos, então, seja C_2 o caminho resultante de C_1 com esses blocos cancelados, caso contrário, seja $C_2 = C_1$;

- Se C_2 possui blocos que formam caminhos fechados do tipo B^k , $k \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}$, B caminho fechado em Γ , então, seja C_3 o caminho resultante de C_2 com blocos do tipo B^k substituídos por B , caso contrário, seja $C_3 = C_2$.

Definição 11. Nas condições acima dizemos que C_3 é um **caminho fechado reduzido** (associado a C).

1.3 Grupos e Grafos de Cayley

Nosso interesse está em algum tipo de associação entre caminhos de um grafo e palavras de um grupo finitamente gerado.

Para tanto, seja G um grupo finitamente gerado: por g_1, \dots, g_n .

1) Tomemos para cada elemento $x \in G$ um ponto numa superfície conveniente. Devemos entender por conveniente uma superfície fechada bidimensional com o menor genus (gênero) possível, no qual se pode realizar o grafo que vamos construir a seguir².

Neste trabalho, este espaço será quase sempre o plano euclidiano, ou mais rigorosamente, a esfera, que através da projeção estereográfica pode ser “aberta” no plano euclidiano.

Os pontos x serão vértices de um grafo Γ que ora vamos construir.

Assim, tomemos a bijeção:

$$\text{Elemento em } G \iff \text{Vértice em } \Gamma \text{ (ponto da superfície)}$$

²A definição de grafo se sustenta sem a necessidade de uma realização geométrica, porém, para nossos fins, é interessante considerá-los “mergulhados” numa superfície.

Chamemos um vértice de Γ associado a $x \in G$ de V_x .

2) Fixado $V_x \in \Gamma$, (V_x, V_y) está associado a uma aresta $E \in \Gamma$ (orientada de x para y) se e só se $\exists g_i \in G$ gerador de G tal que $g_i x = y$. Naturalmente, (V_y, V_x) está associado a E^{-1} se e só se $g_i^{-1} y = x$. Chamemos a aresta E de E_{g_i} e E^{-1} de $E_{g_i^{-1}}$ ($= E_{g_i}^{-1}$).

Portanto, associemos a cada aresta $E \in \Gamma$ uma operação envolvendo os pontos extremos de E e um gerador ou seu inverso em G .

Notemos que cada ponto de Γ pertence a $2n$ arestas de Γ e, ainda, a metade destas arestas são do tipo E_{g_i} , $i = 1, \dots, n$ e a outra metade são do tipo $E_{g_i^{-1}}$.

Dada uma aresta $E_{g_i} \in \Gamma$, temos $(V_{E_{g_i}}, V'_{E_{g_i}})$ associado a E_{g_i} . Orientamos E_{g_i} no sentido de $V_{E_{g_i}}$ para $V'_{E_{g_i}}$ (Figura 1.1).



FIGURA 1.1

A aresta $E_{g_i^{-1}}$ está implicitamente orientada de $V'_{E_{g_i}} = V_{E_{g_i^{-1}}}$ para $V_{E_{g_i}} = V'_{E_{g_i^{-1}}}$.

Assim, temos as correspondências:

Operação com gerador $g_i \in G$	\iff	Aresta orientada E_{g_i}
Operação com $g_i^{-1} \in G$	\iff	Aresta $E_{g_i^{-1}} = E_{g_i}^{-1}$ (implicitamente orientada)

3) Dada uma palavra $P = a_1 \dots a_n$ em G associemos o caminho $C = E_{a_1} \dots E_{a_n}$ em Γ .

É fácil verificar que:

P é relator em G	\iff	C é caminho fechado em Γ
P é relator reduzido em G	\iff	C é caminho fechado reduzido em Γ
P é relator nulo em G	\iff	C é caminho nulo em Γ

Portanto, temos a bijeção:

$$\text{Palavra em } G \iff \text{Caminho em } \Gamma$$

4) Se P_1 e P_2 são palavras em G associadas a caminhos C_1 e C_2 em Γ , temos que P_1P_2 está associado a C_1C_2 .

Assim, temos a correspondência

$$\text{Produto de palavras em } G \iff \text{Produto de caminhos em } \Gamma$$

Da maneira como Γ foi construído, Γ satisfaz os axiomas da definição de grafo.

Duas perguntas surgem naturalmente a esta altura:

1) Dado um grupo G finitamente gerado, o grafo Γ associado como nos passos de 1 a 4 é único a menos de isomorfismos?

2) Dado um grafo Γ , existe um grupo finitamente gerado G tal que Γ está associado a G ?

Estas questões possuem respostas negativas e, antes de justificá-las, vamos adotar a nomenclatura usual para grafos associados a grupos finitamente gerados e, também, ilustrar o procedimento acima com um exemplo.

Definição 12. Dado um grupo finitamente gerado G , um grafo Γ associado de acordo com os passos 1 a 4 acima é chamado de **Grafo de Cayley** associado a G e indicado por Γ_G .

Definição 13. Um grafo Γ é dito **conexo**, se para quaisquer vértices V e $V' \in \Gamma$, $\exists C = E_1 \dots E_n$ caminho em Γ tal que (V, V') está associado a E_1 e (V^*, V'^*) está associado a E_n .

Definição 14. Um grafo Γ é dito **n -regular**, se para cada vértice $V \in \Gamma$, existem $2n$ arestas distintas tais que, destas, n arestas possuem V como ponto de origem e n arestas possuem V como ponto destino.

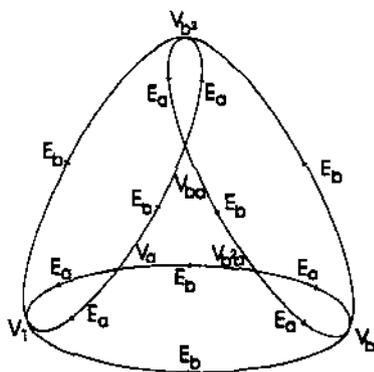


FIGURA 1.2

Exemplo. Seja $G = D_3$ (grupo diedral de ordem seis).

Temos que $G = \langle a, b \mid a^2 = b^3 = (ab)^2 = 1 \rangle$. Os elementos de D_3 são: 1, a , b , ba , b^2 e b^2a .

Os geradores são a e b . Logo, os seis vértices de Γ_G são tais que de cada um deles “saem” duas arestas que correspondem às operações com a e b e “chegam” duas arestas que correspondem às operações com a^{-1} e b^{-1} (Figura 1.2).

Como Γ_G é conexo e 2-regular, podemos tomar o ponto P_1 arbitrariamente e construir o grafo a partir deste por operações com os geradores e seus inversos.

A introdução do artigo [THURSTON] traz alguns exemplos interessantes de Grafos de Cayley de alguns grupos finitos importantes como S_4 e A_5 . Γ_{S_4} pode ser visualizado como arestas de um octaedro truncado e Γ_{A_5} como arestas de um icosaedro truncado (bola de futebol).

Quanto às justificativas às respostas das questões 1) e 2) acima formuladas, temos:

1) Sejam $G_1 = \langle a, b \mid ab = ba \rangle$ e $G_2 = \langle a, b, c \mid c = a^{-1}b^{-1} \text{ e } abc = cba = 1 \rangle$. Temos que $G_1 \cong G_2$, pois $ab = ba \iff abc = cba = 1$ e $c = a^{-1}b^{-1}$.

Mas Γ_{G_1} possui dois geradores e Γ_{G_2} possui três geradores. Se existisse $f : \Gamma_{G_2} \rightarrow \Gamma_{G_1}$ isomorfismo, teríamos (Definição 7) uma bijeção entre duas e três arestas, o que não é possível. Portanto, estes grafos não são isomorfos (embora haja bijeção entre os vértices).

A Figura 1.3 ilustra “pedaços” dos grafos Γ_{G_1} e Γ_{G_2} .

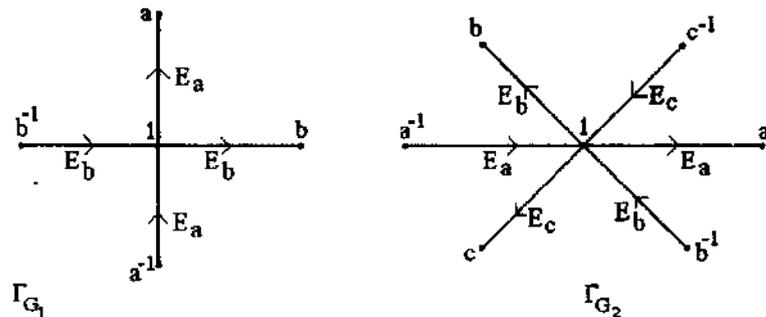


FIGURA 1.3

Entretanto, se exigirmos que G_1 e G_2 (acima) sejam expressos com “o mínimo possível” de geradores, teremos obviamente que Γ_{G_1} e Γ_{G_2} são isomorfos.

2) Seja Γ o grafo ilustrado na Figura 1.4., temos que Γ não é conexo, logo, não pode estar associado a grupo nenhum, pois, se G é grupo e $a, b \in G$, a equação $ax = b$ possui solução em G , o que implica a existência de um caminho $E_x \in \Gamma$ unindo V_a e V_b .

E se Γ for conexo?

A resposta continua negativa. Tomemos Γ como sendo o grafo da Figura 1.5., temos que cada aresta de Γ deve corresponder a uma operação envolvendo um gerador (não nulo) ou seu inverso num grupo. Desta forma, a aresta E deveria corresponder a um gerador (não nulo), portanto, Γ não está associado a nenhum grupo.

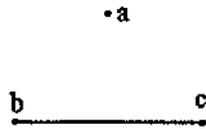


FIGURA 1.4

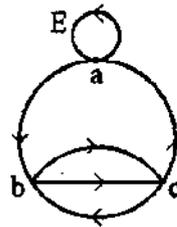


FIGURA 1.5

Outra pergunta surge neste contexto: Quais grafos estão associados a grupos? Para responder a esta questão nos valem os teoremas abaixo.

TEOREMA 2. *Se Γ é um grafo conexo e n -regular, então existe um grupo G finitamente gerado com n geradores tal que Γ é grafo associado a G .*

A demonstração deste teorema é relativamente simples, porém um pouco extensa. Como esta não é relevante para o desenvolvimento do presente trabalho, tomamos a liberdade de não transcrevê-la aqui. Entretanto, a demonstração pode ser encontrada nas páginas 63 e 64 da referência [MAGNUS I].

O Grafo de Cayley de um grupo G finitamente gerado será útil para encontrarmos relações definidoras de G e estas permitem caracterizar e estudar melhor os grupos que estamos abordando neste trabalho.

Uma propriedade importante de tais grafos refere-se ao número mínimo de geradores que o grupo associado possui: Quando um gerador g é obtido de outros geradores do grupo, a eliminação de todas as arestas E_g e $E_{g^{-1}}$ no grafo não o desconecta. Por outro lado, se a eliminação de todas as arestas associadas a um mesmo gerador desconecta o grafo, é sinal de que este gerador não é obtido dos demais geradores do grupo. Esta propriedade pode ser vista com mais detalhes no capítulo três de [COXETER III].

Terminamos este capítulo com um breve estudo sobre representações de grupos finitamente gerados.

Seja G um grupo finitamente gerado e $P = 1$ uma relação em G .

Notemos que $P = 1$ pode gerar infinitas outras relações em G , pois:

$$P = 1 \Leftrightarrow WP^nW^{-1} = 1, \forall W: \text{palavra em } G \text{ e } \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Vemos que muitas relações em G derivam de uma única relação, o que nos sugere trabalhar com um conjunto D que possui um número menor de relações. O problema é como obter D sem "redundância", ou seja, se $P = 1$ é relação em D , então $P = 1$ não deriva das outras relações em D .

O que faremos a seguir é obter um procedimento satisfatório a esta questão.

Seja D um conjunto de relações definidoras de G .

- 1) Excluamos de D todas as relações nulas;
- 2) Substituamos toda relação de D pela relação reduzida correspondente;
- 3) Excluamos de D todas as relações que possam ser deduzidas das demais.

Definição 15. *Sejam G um grupo finitamente gerado e D um conjunto de relações definidoras em G . Um conjunto D^* obtido pela aplicação dos três itens acima é de relações definidoras e chamamos de **relações definidoras reduzidas** de G .*

Observação. D^* pode ser vazio. Por exemplo, o grupo dos inteiros com a operação de soma usual: $G = \mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$, cujo grafo pode ser o representado como na Figura 1.6.

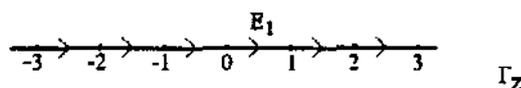


FIGURA 1.6

Notemos que, se não exigirmos que o conjunto de relações definidoras seja reduzido, todo grupo finitamente gerado possui relações definidoras mesmo que estas sejam relações nulas.

Ilustremos com um exemplo, como, a partir do Grafo de Cayley, podemos descobrir relações definidoras reduzidas e número mínimo de geradores.

Exemplo. Seja $G = \left\{ \begin{array}{l} f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^* \\ x \mapsto f_i(x) \end{array} \right\}$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -x$, $f_3(x) = \frac{1}{x}$, $f_4(x) = -\frac{1}{x}$ } munido da operação de composição de aplicações.

Este grupo é chamado de *Grupo de Klein* e, por simplicidade, denotamos $G = \left\{ x, -x, \frac{1}{x}, -\frac{1}{x} \right\}$.

Temos que $-x$ e $\frac{1}{x}$ são geradores de G . O grafo Γ_G pode ser tomado como na Figura 1.7, na qual devemos observar que $E_{-x}^{-1} = E_{(-x)^{-1}} = E_{-x}$ e $E_{-\frac{1}{x}}^{-1} = E_{(-\frac{1}{x})^{-1}} = E_{-\frac{1}{x}}$.

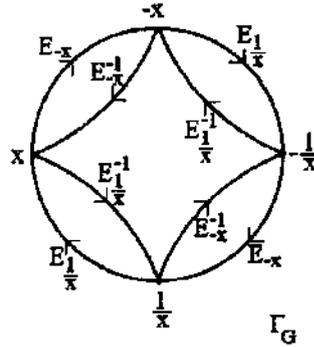


FIGURA 1.7

Os caminhos fechados com origem em x de menor comprimento (número de passos) possível são $C_1 = (E_{-x})^2$, $C_2 = (E_{\frac{1}{x}})^2$, $C_3 = (E_{\frac{1}{x}}E_{-x})^2$. Se chamarmos $-x = a$ e $\frac{1}{x} = b$, temos $R_1 = a^2 = 1$, $R_2 = b^2 = 1$, $R_3 = (ba)^2 = 1$. A outra relação que podemos ainda obter é derivada do caminho $C_4 = (E_{-x}^{-1}E_{\frac{1}{x}}^{-1})^2$ que dá origem à relação $R_4 = (ab)^2 = 1$ que é derivada de $R_3 = 1$ (inversa). É fácil verificar que $D^* = \{R_1 = R_2 = R_3 = 1\}$ é conjunto de relações definidoras reduzido:

a) Seja L grupo livre sobre $M = \{a, b\}$ e $H \triangleleft L$ gerado por R_1, R_2, R_3 . Tomando $f : M \rightarrow G$ inclusão (ver Definição 4), é fácil ver que $\frac{L}{H} \cong G$.

- b) D^* não possui relações nulas.
 - c) D^* é composto por relações reduzidas.
 - d) Nenhuma relação em D^* é consequência das demais.
- Logo, $G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ba)^2 = 1 \rangle$.

Mostremos agora que, a partir de D^* , podemos “reconstituir” G .

Se $a^{d_1}b^{e_1} \dots a^{d_r}b^{e_r} = a^{k_1}b^{l_1} \dots a^{k_s}b^{l_s}$ onde $d_i, e_i, k_j, l_j = \pm 1$ ou 0 ; $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq s$ é uma relação algébrica satisfeita em G , temos:

$$a^{d_1}b^{e_1} \dots a^{d_r}b^{e_r} b^{-l_s} a^{-k_s} \dots b^{-l_1} a^{-k_1} = 1.$$

Devido às relações $a^2 = 1$ e $b^2 = 1$, podemos tomar todos os expoentes não negativos nesta relação, ou seja, todos os expoentes podem ser reduzidos a 0 ou 1 onde $a^0 = b^0 = 1$.

Mas de $(ba)^2 = 1$ temos $ab = ba$. Logo, a relação acima pode ser reduzida a $a^\alpha b^\beta = 1$ onde $\alpha, \beta = 0$ ou 1 .

Assim, os elementos possíveis para G são a, b, ab e 1 , ou seja, $-x, \frac{1}{x}, -\frac{1}{x}, x$, que são, de fato, todos os elementos do grupo de Klein.

O procedimento empregado no exemplo acima pode ser utilizado para descobrir as relações definidoras de qualquer grupo finitamente gerado, desde que analisemos o seu Grafo de Cayley na superfície na qual está mergulhado. Naturalmente, quando o grafo é planar, este procedimento é mais fácil de ser utilizado.

Quando não é possível trabalhar com o grafo na sua “respectiva superfície”, podemos planificá-lo (onde pode ocorrer que duas arestas se cruzem em pontos que não são os vértices). Neste caso, embora seja mais complicado, podemos proceder como no exemplo acima.

Ainda há uma outra maneira de encontrar as relações definidoras de um grupo finitamente gerado cujo Grafo de Cayley não é planar: Através de um grafo localmente planar e do grupo fundamental da superfície na qual o grafo está mergulhado. Um exemplo para isto é o grupo dos quatérnios $\Omega = \langle X, Y \mid X^{-1}YXY = XYXY^{-1} = 1 \rangle$ (pág 29 do capítulo três de [COXETER III]). Γ_Ω está mergulhado num toro.

Estas idéias e métodos, no caso planar, tornar-se-ão mais claros no decorrer do trabalho.

Finalizemos o capítulo mencionando três problemas na Teoria Combinatória dos Grupos, conhecidos como Problemas Fundamentais de Dehn, os quais ilustram questões relevantes sobre grupos ainda não resolvidas completamente.

Vimos que um conjunto D de relações sobre um conjunto de símbolos origina um grupo G , do qual D é conjunto de relações definidoras.

Como D pode ser tomado das mais diversas formas, na maioria das vezes torna-se difícil caracterizar G . Perguntas como: G é finito? ou G é abeliano? podem se tornar extremamente difíceis.

Parte desta dificuldade poderia ser solucionada se tivéssemos um método “computacional” para saber quando duas palavras são “equivalentes”³. Sabendo isto, é possível determinar, por exemplo, se G é abeliano (quando $xyx^{-1}y^{-1} \sim 1, \forall x, y \in G$).

³Palavras que originam o mesmo elemento quando manipuladas de acordo com os axiomas da definição de grupo.

Isto nos leva a seguinte questão:

1) Quando uma palavra é equivalente ao elemento neutro em G ?

Este problema é conhecido como *Problema de Palavra*.

Outros problemas importantes para ajudar na caracterização de G são:

2) Dadas duas palavras P_1 e P_2 em G , quando P_1 é conjugada de P_2 ? (ou seja, quando $P_1 = aP_2a^{-1}$, para algum $a \in G$?).

3) Seja G' um outro grupo com outro conjunto D' de relações definidoras distinto de D . Como podemos determinar se G e G' são ou não isomorfos utilizando um processo "computacional" que envolva um número finito de passos?

Estes três problemas foram propostos por Max Dehn em 1911. O segundo problema é chamado de *Problema da Conjugação* e o terceiro de *Problema do Isomorfismo*. Existem muitos avanços na tentativa de simplificação de algoritmos (que em geral são bastante complexos) que solucionem estes problemas. Eles estão solucionados para uma grande quantidade de conjunto de relações, mas, no geral, estes problemas ainda persistem.

Uma abordagem mais profunda pode ser encontrada na referência [MAGNUS I].

Capítulo 2

Ladrilhamentos e Grupos Discretos de Isometrias no Plano Euclidiano

A essência deste capítulo está no estudo dos “grupos discretos de isometrias” no plano euclidiano. Na verdade, ele é uma base para o capítulo seguinte, no qual estudaremos isometrias e grupos discretos nos modelos hiperbólicos. A principal motivação para abordarmos o “caso euclidiano” reside no fato da existência de uma classificação “finita” de todos os grupos discretos de isometrias, fato que no “caso hiperbólico” não é verídico.

As referências mais utilizadas neste capítulo são [TÓTH], [BERGER] e [COXETER II e III].

2.1 Isometrias no Plano Euclidiano

Consideremos o plano euclidiano E^2 ($\equiv \mathbb{R}^2$) com a estrutura de espaço vetorial e a distância proveniente do produto interno usual.

A definição que daremos de isometria nesta seção, é equivalente a uma de cunho mais geral que será dada no capítulo 3 envolvendo produto interno.

Definição 1. *Uma aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma isometria se $d(X, Y) = d(f(X), f(Y))$, para quaisquer $X, Y \in \mathbb{R}^2$.*

As proposições de 1 a 5 são caracterizações de isometrias. Elas são de fácil demonstração na seqüência como são apresentadas.

PROPOSIÇÃO 1. *Toda isometria é injetora.*

PROPOSIÇÃO 2. *Toda isometria transforma reta em reta.*

PROPOSIÇÃO 3. Toda isometria preserva medidas de ângulos.

PROPOSIÇÃO 4. Toda isometria é bijetora e a inversa também é uma isometria.

PROPOSIÇÃO 5. Composta de isometrias também é isometria.

O teorema abaixo é um dos principais resultados concernentes a isometrias no plano.

TEOREMA 1. Três pontos não colineares no plano determinam uma única isometria, ou seja:

Se $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ são pontos não-colineares em \mathbb{R}^2 e $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ são isometrias tais que $f(A) = g(A)$, $f(B) = g(B)$ e $f(C) = g(C)$, então $f = g$.

Demonstração.

Mostremos que se uma isometria $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ deixa fixos três pontos não colineares, então $h = Id$ (Identidade).

Para tanto, sejam $F, G, H \in \mathbb{R}^2$ pontos distintos não colineares tais que $h(F) = F$; $h(G) = G$ e $h(H) = H$. Sejam r a reta que contém F e G , s a reta que contém F e H , $h(r) = r'$ e $h(s) = s'$. Logo, $r = r'$ e $s = s'$.

Assim, $h(X) = X$, $\forall X \in r$, pois se existisse $X \in r$ tal que $X' = h(X) \neq X$, teríamos que $d(F, X) = d(h(F), h(X)) = d(F, X')$ e $d(G, X) = d(h(G), h(X)) = d(G, X')$, donde concluímos que $F = G$, pois ambos estão situados no ponto médio de $\overline{XX'}$, uma contradição!

Com isto, temos que $h|_r = Id|_r$.

Analogamente $h|_s = Id|_s$.

Sejam $Z \in \mathbb{R}^2$, t uma reta tal que $Z \in t$, $t \cap r = X$ e $t \cap s = Y$ tais que $X \neq Y$. Como $h(X) = X$ e $h(Y) = Y$ temos pelo mesmo argumento usado anteriormente que $h|_t = Id|_t$. Particularmente $h(Z) = Z$. Como Z é arbitrário: $h = Id$.

Agora, sejam $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ tais que $f(A) = g(A)$, $f(B) = g(B)$ e $f(C) = g(C)$. Assim: $f^{-1} \circ g(A) = f^{-1} \circ f(A) = A$, $f^{-1} \circ g(B) = f^{-1} \circ f(B) = B$ e $f^{-1} \circ g(C) = f^{-1} \circ f(C) = C$.

Logo, A, B e C são pontos fixos da isometria $f^{-1} \circ g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, o que acarreta $f^{-1} \circ g = Id \Rightarrow f = g$. ■

Definição 2. Seja \vec{u} vetor em \mathbb{R}^2 . À aplicação $T_{\vec{u}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T_{\vec{u}}(X) = X + \vec{u}$, $\forall X \in \mathbb{R}^2$ denominamos **translação** pelo vetor \vec{u} . (No espaço euclidiano de dimensão n , a definição de translação se processa de modo análogo ao caso bidimensional).

Seja r uma reta em \mathbb{R}^2 . À aplicação $R_r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que r é a mediatriz de $\overline{XR_r(X)}$, $\forall X \in \mathbb{R}^2$ denominamos **reflexão** por r .

Seja $A \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. A aplicação $\rho_{A,\alpha} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\rho_{A,\alpha}(X) = T_{\overrightarrow{OA}} \circ f \circ T_{-\overrightarrow{OA}}(X)$, $\forall X \in \mathbb{R}^2$ na qual $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é transformação linear dada pela matriz (ortogonal) $\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ denominamos **rotação** de centro A e ângulo α .

Sejam \vec{u} vetor em \mathbb{R}^2 e r reta em \mathbb{R}^2 tal que a direção de \vec{u} é paralela a r . A aplicação $GR_{r,\vec{u}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $GR_{r,\vec{u}}(X) = T_{\vec{u}} \circ R_r(X)$, $\forall X \in \mathbb{R}^2$ denominamos **glisso-reflexão** pela reta r e vetor \vec{u} .

O Teorema 2 a seguir é uma caracterização das isometrias no espaço euclidiano, resultado este também válido para isometrias em \mathbb{R}^n e cuja demonstração se processa de maneira análoga à feita no caso tridimensional.

TEOREMA 2. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma isometria se e só se $f = h \circ T_{\vec{u}}$, onde $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é transformação linear ortogonal e $T_{\vec{u}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma translação pelo vetor \vec{u} .

Demonstração.

A métrica euclidiana é dada por $d(X, Y) = \|X - Y\|$.

É imediato verificar que se f tem a forma acima, então f é uma isometria.

Reciprocamente:

Seja $A = f(O)$, O : origem do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais em \mathbb{R}^3 . Tomemos a translação $T_{-\overrightarrow{OA}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (que é isometria). Logo, $T_{-\overrightarrow{OA}} \circ f(O) = O$.

Chamemos $T_{-\overrightarrow{OA}} \circ f = g$.

Mas \mathbb{R}^3 é espaço métrico e a função distância em \mathbb{R}^3 é $\|\cdot\|$. Logo, $\|g(X) - g(Y)\| = \|X - Y\|$, $\forall X, Y \in \mathbb{R}^3$. Para $Y = O$, temos $\|X\| = \|g(X)\| \Rightarrow \|X\|^2 = \|g(X)\|^2 \Rightarrow$

$$\langle X, X \rangle = \langle g(X), g(X) \rangle, \forall X \in \mathbb{R}^3. \quad (1)$$

Mas $\|g(X) - g(Y)\|^2 = \|X - Y\|^2 \Rightarrow \langle g(X) - g(Y), g(X) - g(Y) \rangle = \langle X - Y, X - Y \rangle \Rightarrow \langle g(X), g(X) \rangle - 2\langle g(X), g(Y) \rangle + \langle g(Y), g(Y) \rangle = \langle X, X \rangle - 2\langle X, Y \rangle + \langle Y, Y \rangle$.

Isto e (1) nos fornece

$$\langle g(X), g(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle, \forall X, Y \in \mathbb{R}^3. \quad (2)$$

Mas

$$\cos \theta = \frac{\langle X, Y \rangle}{\|X\| \cdot \|Y\|} \text{ com } \theta = \angle(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}), \theta \leq \pi. \quad (3)$$

Por (2) e (3) temos que g preserva medida de ângulos.

Com isto, se $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ é base ortonormal de \mathbb{R}^3 , então $\alpha = \{g(e_1), g(e_2), g(e_3)\}$ é base ortonormal de \mathbb{R}^3 .

Se $X \in \mathbb{R}^3$, então $X = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$.

Mas, quando $A = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$ onde $\gamma = \{v_1, \dots, v_n\}$ é ortonormal, temos $\langle A, v_1 \rangle = \langle (a_1v_1 + \dots + a_nv_n), v_1 \rangle = a_1$.

Logo, $A = \langle A, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle A, v_n \rangle v_n$.

Como $\alpha = \{g(e_1), g(e_2), g(e_3)\}$ é ortonormal:

$g(X) = \langle g(X), g(e_1) \rangle g(e_1) + \langle g(X), g(e_2) \rangle g(e_2) + \langle g(X), g(e_3) \rangle g(e_3)$.

Mas $\langle g(X), g(e_i) \rangle = \langle X, e_i \rangle = x_i$, $i = 1, 2, 3$. Logo, $g(X) = x_1g(e_1) + x_2g(e_2) + x_3g(e_3)$.

Se $\lambda \in \mathbb{R}$, então $\lambda X = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ e, portanto,

$$g(\lambda X) = \sum_{i=1}^3 \lambda x_i g(e_i) = \lambda \sum_{i=1}^3 x_i g(e_i) = \lambda g(X).$$

Se $Y \in \mathbb{R}^3$, então $g(X + Y) = \sum_{i=1}^3 (x_i + y_i) g(e_i) = \sum_{i=1}^3 x_i g(e_i) + \sum_{i=1}^3 y_i g(e_i) = g(X) + g(Y)$.

Conclusão: g é uma transformação linear. Como g transforma base ortonormal em base ortonormal, temos que g é ortogonal.

Finalmente $T_{\overline{OA}} \circ f = g \Rightarrow f = g \circ T_{\overline{OA}}$. ■

O teorema abaixo é uma classificação das isometrias no plano euclidiano.

TEOREMA 3. *Existem somente quatro tipos de isometrias no plano: translação, rotação, reflexão e glisso-reflexão.*

Demonstração.

Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma isometria, $f \neq Id$. Logo, $\exists A \in \mathbb{R}^2$ tal que $A' = f(A) \neq A$. Consideremos $A'' = f(A')$.

Temos $A'' \neq A'$, pois $d(A, A') = d(f(A), f(A')) = d(A', A'')$. Como $d(A, A') \neq 0 \Rightarrow d(A', A'') \neq 0 \Rightarrow A' \neq A''$.

Observação: $A \neq A'$ e $A' \neq A''$ não implica $A \neq A''$.

i) Suponhamos que A, A' e A'' são não colineares. Logo, temos um triângulo $AA'A''$. Consideremos o triângulo $f(A)f(A')f(A'')$ que possui vértices A' e A'' em comum com o $\triangle AA'A''$. Logo, existem duas posições possíveis para $f(A'') = B$ em relação a reta r que contém A' e A'' :

i)a) Suponhamos que B está no mesmo semi-plano (determinado por r) que contém A (Figura 2.1).

Como $\triangle AA'A'' \equiv \triangle A'A''B$, temos $\hat{A}AA'' = \hat{A}A''B$ (os pontos A e B "enxergam" $A'A''$ sob o mesmo ângulo). Logo, $AA'A''B$ pode ser inscrito

numa circunferência com centro O e raio $d(O, A)$, onde O é ponto de encontro das mediatrizes de $\overline{A'B}$ e $\overline{AA''}$.

Consideremos $O' = f(O)$. Logo, $d(O, A) = d(f(O), f(A)) = d(O', A')$, $d(O, A') = d(O', A'')$ e $d(O, A'') = d(O', B)$. Como $d(O, A) = d(O, A') = d(O, A'')$, temos $d(O', A') = d(O', A'') = d(O', B)$. Logo $O' = O$, portanto $f(O) = O$.

Consideremos a rotação $\rho_{O, -\alpha}$ de centro O e ângulo $-\alpha$, onde α é a medida (positiva) de $A''\hat{O}A'$. Logo, temos $\rho_{O, -\alpha}(A) = A'$; $\rho_{O, -\alpha}(A') = A''$; $\rho_{O, -\alpha}(A'') = B$. Mas $f(A) = A'$, $f(A') = A''$ e $f(A'') = B$. Logo, pelo Teorema 1, temos que $f = \rho_{O, -\alpha}$.

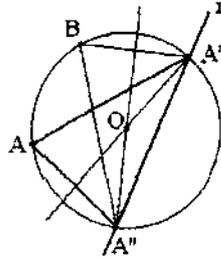


FIGURA 2.1

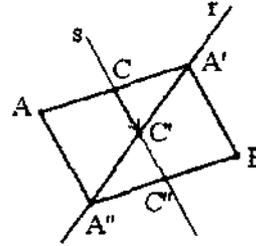


FIGURA 2.2

i)b) Suponhamos que B está no semi-plano (determinado por r) oposto ao que contém A (Figura 2.2).

Temos que $AA'BA''$ é um paralelogramo pois $\triangle AA'A'' \cong \triangle A'A''B$. Considerando os pontos médios C de $\overline{AA'}$, C' de $\overline{A'A''}$ e C'' de $\overline{A''B}$, temos que estes são colineares. Chamemos de s a reta a qual pertencem.

Consideremos a glisso-reflexão $GR_{s, \overline{CC''}}$. Temos $GR_{s, \overline{CC''}}(A) = A'$; $GR_{s, \overline{CC''}}(A') = A''$ e $GR_{s, \overline{CC''}}(A'') = B$. Mas $f(A) = A'$, $f(A') = A''$ e $f(A'') = B$. Logo, pelo Teorema 1, $f = GR_{s, \overline{CC''}}$.

ii) Suponhamos que A, A' e A'' são pontos distintos colineares.

Consideremos um ponto B tal que $B \notin r$; r : reta que contém A, A' e A'' e $f(B) = B'$. Tomemos o triângulo $AA'B$ e a imagem deste por f . Logo, temos duas possibilidades para a imagem de B :

ii)a) No mesmo semi-plano (determinado por r) que contém B (Figura 2.3).

Consideremos a translação $T_{\overline{AA'}}$. Temos que $T_{\overline{AA'}}(A) = A'$; $T_{\overline{AA'}}(A') = A''$ (pois $d(A, A') = d(A', A'')$) e $T_{\overline{AA'}}(B) = B'$ (pois $\triangle AA'B \cong \triangle A'A''B'$). Mas $f(A) = A'$; $f(A') = A''$ e $f(B) = B'$. Logo, pelo Teorema 1, temos que $f = T_{\overline{AA'}}$.

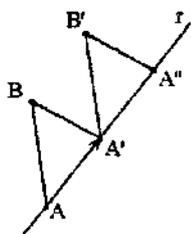


FIGURA 2.3

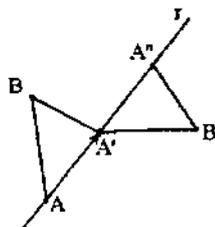


FIGURA 2.4

ii)b) Suponhamos que B' está no semi-plano (determinado por r) oposto ao que contém B (Figura 2.4).

Consideremos a glisso-reflexão $GR_{r, \overline{AA'}}$. Temos que $GR_{r, \overline{AA'}}(A) = A'$, $GR_{r, \overline{AA'}}(A') = A''$ (pois $d(A, A') = d(A', A'')$) e $GR_{r, \overline{AA'}}(B) = B'$ (pois $\triangle AA'B \equiv \triangle A'A''B'$). Portanto, pelo Teorema 1, $f = GR_{r, \overline{AA'}}$.

iii) Suponhamos que $A'' = A$.

Seja P o ponto médio de $\overline{AA'} = \overline{A''A'}$ e $P' = f(P)$, temos que $d(P, A) = d(P, A') \Rightarrow d(P', A') = d(P', A'') \Rightarrow P'$ é ponto médio de $\overline{A''A'}$. Logo, $P' = P$.

Consideremos a mediatriz r do segmento $\overline{AA'}$. Seja B um ponto de r tal que $B \neq P$ e $B' = f(B)$. Assim,

$$d(B, A) = d(B, A') \Rightarrow d(B', A') = d(B', A'') \Rightarrow B' \in r.$$

Portanto, $f(r) \subset r$. Como $f(r)$ é uma reta (Proposição 2), temos que $f(r) = r$.

Como $d(B, P) = d(B', P') = d(B', P)$ (e $B' \in r$), temos duas possibilidades:

iii)a) $B' = B$.

Consideremos a reflexão R_r . Desta forma, $R_r(A) = A'$, $R_r(P) = P = P'$ e $R_r(B) = B = B'$ (Figura 2.5). Mas $f(A) = A'$; $f(P) = P'$ e $f(B) = B'$. Logo, pelo Teorema 1, temos que $f = R_r$.

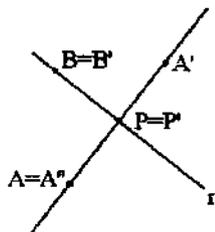


FIGURA 2.5

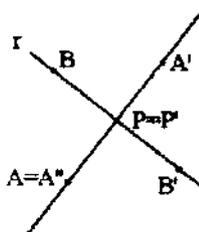


FIGURA 2.6

iii)b) Se $B' \neq B$ (Figura 2.6).

Consideremos a rotação $\rho_{P,180^\circ}$. Temos que $\rho_{P,180^\circ}(A) = A'$, $\rho_{P,180^\circ}(P) = P = P'$ e $\rho_{P,180^\circ}(B) = B'$. Mas $f(A) = A'$; $f(P) = P'$ e $f(B) = B'$. Logo, pelo Teorema 1, temos que $f = \rho_{P,180^\circ}$.

Nota. $\rho_{P,180^\circ}$ é também chamada de reflexão em torno do ponto P . ■

Definição 3. Um movimento em \mathbb{R}^2 é uma família de isometrias $H_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \in [0, 1]$ tal que, para cada $P \in \mathbb{R}^2$, $H_t(P)$ é contínua para $0 \leq t \leq 1$.

Definição 4. Uma isometria $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ preserva orientação quando existe um movimento H_t tal que $H_0 = Id$ e $H_1 = f$. Caso contrário, dizemos que f não preserva orientação.

PROPOSIÇÃO 6. A identidade preserva orientação.

Demonstração.

Basta tomar $H_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \in [0, 1]$. ■
 $X \mapsto H_t(X) = Id(X) = X$

PROPOSIÇÃO 7. Translações preservam orientação.

Demonstração.

Basta tomar $H_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \in [0, 1]$, onde \vec{v} é o
 $X \mapsto H_t(X) = T_{t\vec{v}}(X)$

vetor translação de $T_{\vec{v}}$.

Fixado $X_0 \in \mathbb{R}^2$, temos que $H_t(X_0)$, $t \in [0, 1]$ varia continuamente em $\overline{X_0 T_{\vec{v}}(X_0)}$. ■

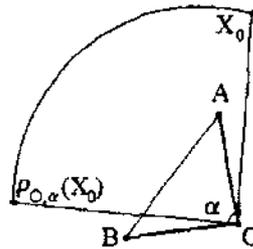


FIGURA 2.7

PROPOSIÇÃO 8. Rotações preservam orientação.

Demonstração.

Sejam $\rho_{O,\alpha}$ rotação de centro O e ângulo α e $A, B \in \mathbb{R}^2$ tais que α é medida de \widehat{AOB} . Seja B_t , $t \in [0, 1]$ o ponto do segmento AB tal que $\frac{d(A, B_t)}{d(A, B)} = t$.

Seja α_t medida de $\widehat{AOB_t}$.

Tomando $H_t = \rho_{O, \alpha_t}$, $t \in [0, 1]$, temos que $H_0 = \rho_{O, \alpha_0} = \rho_{O, 0^\circ} = Id$ e $H_1 = \rho_{O, \alpha_1} = \rho_{O, \alpha}$. Fixado $X_0 \in \mathbb{R}^2$ temos que $H_t(X_0)$, $t \in [0, 1]$ varia continuamente de X_0 até $\rho_{O, \alpha}(X_0)$ através do arco $X_0 \widehat{\rho_{O, \alpha}}(X_0)$ de centro O , raio $d(O, X_0)$ e ângulo α (Figura 2.7). ■

PROPOSIÇÃO 9. *As reflexões não preservam orientação.*

Demonstração.

Seja R_r uma reflexão em $r \subset \mathbb{R}^2$.

Suponhamos que exista um movimento $H_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $H_0 = Id$ e $H_1 = R_r$.

Sem perda de generalidade, suponhamos ainda que o eixo das ordenadas seja a reta r .

Tomando

$$\gamma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(A, B, C) \mapsto \gamma(A, B, C) = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{bmatrix}$$

onde $A = (a_1, b_1)$, $B = (a_2, b_2)$, $C = (a_3, b_3)$. Temos que γ é contínua e $\gamma(A, B, C) = \text{Área } \triangle ABC$ se os vértices A , B e C estiverem "orientados no sentido anti-horário".

Tomemos o $\triangle A_0 B_0 C_0$ tal que $A_0 = (0, 0)$, $B_0 = (1, 0)$ e $C_0 = (0, 1)$.

Logo, $\gamma(A_0 B_0 C_0) = \frac{1}{2}$.

Definamos $H_t(A_0) = A_{0t}$, $H_t(B_0) = B_{0t}$, $H_t(C_0) = C_{0t}$. Como H_t varia continuamente em \mathbb{R}^2 , temos a igualdade:

$$\gamma(A_{0t}, B_{0t}, C_{0t}) = \text{Área } \triangle A_{0t} B_{0t} C_{0t}, \forall t \in [0, 1]. \quad (4)$$

Assim, $\text{Área } \triangle A_{0t} B_{0t} C_{0t} = \frac{1}{2}, \forall t \in [0, 1]$ (H_t é isometria) e como $R_r(A_0) = A_0$, $R_r(B_0) = (-1, 0) = B'_0$ e $R_r(C_0) = C_0$, temos que $\gamma(A_0, B'_0, C_0) = -\frac{1}{2}$. Contradição com (4).

Logo, $H_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ não pode existir e R_r não preserva orientação. ■

PROPOSIÇÃO 10. *Composta de isometrias que preservam orientação também preserva orientação.*

Demonstração.

Sejam $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ isometrias que preservam orientação. Logo, $\exists H_t, L_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \in [0, 1]$ movimentos tais que $H_0 = L_0 = Id$, $H_1 = f$ e $L_1 = g$.

Assim, $K_t = H_t \circ L_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma família de isometrias e $K_t(X)$, $t \in [0, 1]$ é contínua para cada $X \in [0, 1]$. Temos, portanto um movimento em \mathbb{R}^2 tal que $K_0 = H_0 \circ L_0 = Id \circ Id = Id$ e $K_1 = H_1 \circ L_1 = f \circ g$. ■

PROPOSIÇÃO 11. *Composta de isometria que não preserva orientação com isometria que preserva orientação, não preserva orientação.*

Demonstração.

Sejam $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ isometrias tais que f preserva orientação e g não preserva orientação. Assim, temos que $\exists H_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \in [0, 1]$ movimento tal que $H_0 = Id$ e $H_1 = f$. Consequentemente, $H_t^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um movimento tal que $H_0^{-1} = Id$ e $H_1^{-1} = f^{-1}$. Logo, f^{-1} é uma isometria que preserva orientação.

Se $f \circ g$ preservasse orientação, teríamos que $f^{-1} \circ (f \circ g) = g$ preservaria orientação. Uma contradição! ■

COROLÁRIO 1. *Glisso-reflexões não preservam orientação.*

PROPOSIÇÃO 12. *Composta de isometrias que não preservam orientação, preserva orientação.*

Demonstração.

Sejam $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ isometrias que não preservam orientação e $R_r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma reflexão em $r \subset \mathbb{R}^2$, temos $R_r \circ R_r = Id$; logo, $f \circ g = (f \circ R_r) \circ (R_r \circ g)$.

Mostremos que $f \circ R_r$ e $R_r \circ g$ são isometrias que preservam orientação.

Tomemos um $\triangle ABC$ no qual, sem perda de generalidade, suporemos $B, C \in r$. Logo, $R_r(B) = B$, $R_r(C) = C$ e $R_r(A) := \bar{A}$ e definamos $f(A) = A'$, $f(\bar{A}) = \bar{A}'$, $f(B) = B'$ e $f(C) = C'$.

Sejam $T_{\overrightarrow{BB'}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ translação pelo vetor $\overrightarrow{BB'}$, $T_{\overrightarrow{BB'}}(C) = C''$ e $\rho_{B', \alpha}$ rotação onde α é o ângulo orientado formado pelos segmentos $\overline{B'C'}$ e $\overline{B'C''}$ de modo que $\rho_{B', \alpha}(C'') = C'$ (Figura 2.8).

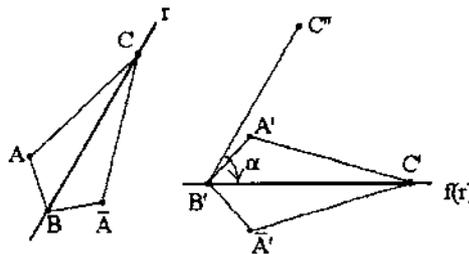


FIGURA 2.8

Seja $h = \rho_{B',\alpha} \circ T_{\overline{BB'}}$. Temos que A e \bar{A} são equidistantes de B e C ; logo, A' e \bar{A}' são equidistantes de B' e C' . Portanto, $h(\overline{AA'}) = \overline{A'\bar{A}'}$, o que implica que $h(A) = A'$ ou $h(A) = \bar{A}'$.

Se $h(A) = A'$ teremos que h e f coincidem nos pontos A, B e C . Logo, pelo Teorema 1, temos $h = f$, o que não é possível, pois h preserva orientação e f não preserva orientação.

Logo, $h(A) = \bar{A}'$ e, assim, h e $f \circ R_r$ coincidem nos pontos A, B e C . Logo, pelo Teorema 1, temos que $h = f \circ R_r$ e conseqüentemente, $f \circ R_r$ preserva orientação.

Analogamente podemos provar que $R_r \circ g$ preserva orientação e portanto, $f \circ g = (f \circ R_r) \circ (R_r \circ g)$ preserva orientação. ■

Não é muito difícil realizar um estudo sobre a composta de isometrias no plano euclidiano, conseqüentemente não o abordaremos, exceto a composição de rotações que julgamos ser mais pertinente ao nosso trabalho. Recomendamos a referência [COXETER II] para os demais casos.

TEOREMA 4. (Teorema da Soma dos Ângulos da Composta de Rotações). Se $\rho_{O_1,\alpha}$ e $\rho_{O_2,\beta}$ são rotações em \mathbb{R}^2 , então existe O_3 tal que $\rho_{O_1,\alpha} \circ \rho_{O_2,\beta} = \rho_{O_3,\alpha+\beta}$.

Demonstração.

Tomemos a reta r que contém O_1 e O_2 , a reta s que contém O_1 e forma ângulo $\frac{\alpha}{2}$ (orientado de r para s) com r e, finalmente, a reta t que contém O_2 e forma ângulo $\frac{\beta}{2}$ (orientado de t para r) com r .

É fácil ver que $\rho_{O_1,\alpha} = R_s \circ R_r$ ($R_s \circ R_r$ é isometria que preserva orientação e possui um ponto fixo: O_1 e ângulo α orientado de r para s . Aqui a orientação é imprescindível) e $\rho_{O_2,\beta} = R_r \circ R_t$. Assim, $\rho_{O_1,\alpha} \circ \rho_{O_2,\beta} = R_s \circ R_r \circ R_r \circ R_t = R_s \circ R_t$.

Dividiremos a demonstração em duas partes:

a) $\alpha + \beta \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Temos, portanto, um ponto $O_3 = s \cap t$ (Figura 2.9).

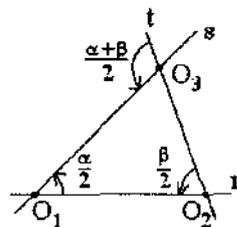


FIGURA 2.9

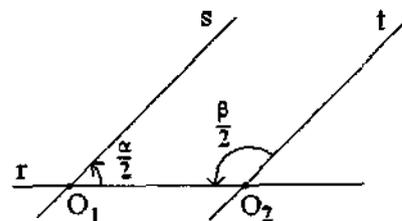


FIGURA 2.10

Assim, $\rho_{O_1, \alpha} \circ \rho_{O_2, \beta} = R_s \circ R_t = \rho_{O_3, \alpha + \beta}$.

b) $\alpha + \beta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Aqui $s//t$ (Figura 2.10).

Assim, $\rho_{O_1, \alpha} \circ \rho_{O_2, \beta} = R_s \circ R_t = T_{\vec{v}}$, onde \vec{v} pode ser tomado como sendo \overrightarrow{AB} com $A \in t, \vec{v} \perp s$ e $\frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB}\| = d$: distância entre s e t .

Pensando em $T_{\vec{v}}$ como uma rotação de ângulo 0° com centro no infinito, podemos falar na “soma dos ângulos das componentes da composta” sem restrições. ■

Observação. Baseado nos argumentos utilizados na demonstração acima, temos um resultado importante sobre isometrias no plano euclidiano:

PROPOSIÇÃO 13. *Toda isometria no plano euclidiano pode ser tomada como composta de até três reflexões.*

No caso da glisso-reflexão, basta lembrar que esta é composta por uma reflexão e uma translação.

2.2 Grupos Discretos de Isometrias e Ladrilhamentos.

2.2.1 Grupos.

Observemos inicialmente que o conjunto

$$ISO(\mathbb{R}^2) = \{f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid f \text{ é isometria}\}$$

munido da operação de composição de aplicações é um grupo.

Estabelecamos algumas definições de caráter geral.

Definição 5. *Um grupo topológico G é um grupo e um espaço topológico tal que $f : G \rightarrow G$ e $g : G \times G \rightarrow G$ são contínuas ($G \times G$ com a topologia produto).*

$$\begin{array}{ll} x \mapsto x^{-1} & (x, y) \mapsto xy \end{array}$$

Definição 6. *Dois grupos topológicos G e H são isomorfos quando existe $f : G \rightarrow H$ tal que f é isomorfismo de grupos e homeomorfismo de espaços topológicos.*

Definição 7. *Um grupo topológico G é discreto se sua topologia for discreta.*

Vimos que toda isometria no plano é composta de uma transformação ortogonal com uma translação (Teorema 2).

Utilizando coordenadas homogêneas, podemos representar uma isometria $f = g \circ T_{\vec{u}}$ pela matriz

$$N = \begin{bmatrix} a & b & r \\ c & d & s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

na qual $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é tal que

$$M = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \text{ ou } M = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}$$

e é a matriz da transformação linear ortogonal g . A translação $T_{\vec{u}}$ é tal que $(0, 0) \xrightarrow{(r, s)} = \vec{u}$.

Se tomarmos G como sendo um subgrupo de $ISO(\mathbb{R}^2)$ e pensarmos no conjunto \mathfrak{M} das matrizes do tipo (5) associadas a cada isometria de G , teremos que \mathfrak{M} é um subgrupo de $GL(\mathbb{R}, 3)$ (matrizes inversíveis 3×3). Ainda temos $\det M = \det N = \pm 1$.

Utilizando a classificação das isometrias (Teorema 3) e as Proposições de 6 a 12, podemos concluir que: uma isometria f preserva orientação se e só se $\det[M] = 1$ (M da forma citada acima).

Notemos ainda que $GL(\mathbb{R}, 3)$ é um grupo topológico, pois é grupo com a operação usual de multiplicação entre matrizes e topológico com a topologia proveniente da métrica $m : GL(\mathbb{R}, 3) \times GL(\mathbb{R}, 3) \rightarrow \mathbb{R}_+$ onde

$$m((a_{ij})_{3 \times 3}, (b_{ij})_{3 \times 3}) = \sqrt{\sum_{i,j} (a_{ij} - b_{ij})^2};$$

topologia esta que torna as aplicações $(N, P) \rightarrow NP$ e $N \rightarrow N^{-1}$ contínuas (m é a restrição da métrica euclidiana do \mathbb{R}^9 a $GL(\mathbb{R}, 3)$ que pode ser visto como um aberto deste, uma vez que: $GL(\mathbb{R}, 3) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ é um aberto em $M(\mathbb{R}, 3) \cong \mathbb{R}^9$).

Finalmente, notemos que subgrupo de grupo discreto é também discreto.

Definição 8. Sejam G subgrupo de $ISO(\mathbb{R}^2)$ e $A \in \mathbb{R}^2$. Chamamos órbita de A por G o conjunto $G(A) = \{g(A) \mid g \in G\}$.

LEMA 1. Sejam $A, A' \in \mathbb{R}^2$ e B bola fechada de centro A e raio ε . Então $S_{A'} = \{g \in ISO(\mathbb{R}^2) \mid g(A') \in B\}$ é compacto.

Demonstração.

Tomemos $f: ISO(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $g \mapsto g(A')$

Como f é contínua temos que $S_{A'} = f^{-1}(B)$ é fechado em $ISO(\mathbb{R}^2)$.

A matriz de $g \in ISO(\mathbb{R}^2)$ é

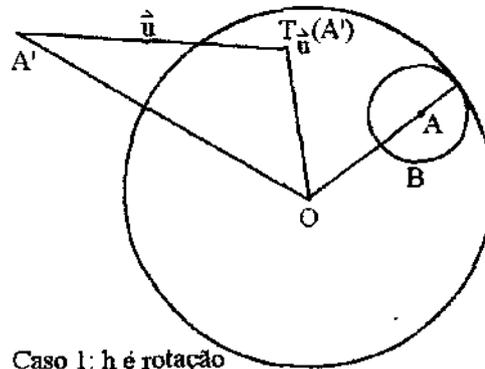
$$[g] = \begin{bmatrix} a & b & r \\ c & d & s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ (e $ac + bd = 0$). Logo, a, b, c e d são limitados.

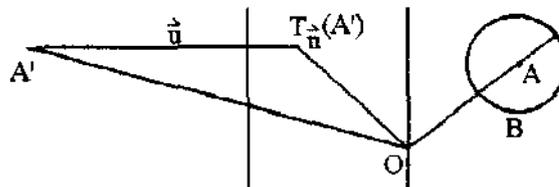
Levando-se em conta que $g = h \circ T_{\vec{u}}$ na qual g é uma rotação na origem ou uma reflexão através do eixo das ordenadas e $\|\vec{u}\| = \sqrt{r^2 + s^2}$, temos que se $g \in S_{A'}$:

$$\sqrt{r^2 + s^2} \leq d(O, A') + d(O, A) + \varepsilon$$

ou seja, r e s são limitados. A Figura 2.11 motiva a desigualdade acima.



Caso 1: h é rotação



Caso 2: h é reflexão

FIGURA 2.11

Logo, $S_{A'}$ é fechado e limitado (em \mathbb{R}^9), ou seja, $S_{A'}$ é compacto. ■

PROPOSIÇÃO 14. *Sejam G um subgrupo discreto de $ISO(\mathbb{R}^2)$ e $A \in \mathbb{R}^2$. Então*

- 1) $G(A)$ é um conjunto discreto com a topologia usual;
- 2) G é enumerável;
- 3) $G(A)$ não possui pontos de acumulação.

Demonstração.

Sejam G e A como na hipótese.

1) Tomando $A' = A$ e $B = B_\epsilon(A)$, temos pelo Lema 1 que $S_A = \{g \in ISO(\mathbb{R}^2) \mid g(A) \in B\}$ é compacto e portanto $S_A \cap G = \{g \in G \mid g(A) \in B\}$ é finito, ou seja, $G(A)$ é discreto.

2) Tomemos a seqüência $(B_n(A))_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{g \in G \mid g(A) \in B_n(A)\} = \{g_1, \dots, g_{k_n}\}$. Quando $n \rightarrow \infty$ temos

$$G = \{g_1, \dots, g_{k_1}\} \subset \dots \subset \{g_1, \dots, g_{k_n}\} \subset \dots$$

Logo, G é enumerável (admitamos que um conjunto enumerável possa ser finito).

3) Tomando A' arbitrário, temos que $\{g \in G \mid g(A') \in B\}$ é finito e portanto $G(A')$ não se acumula em A . ■

Nota. A proposição e o lema acima são verdadeiros também para grupos discretos de isometrias no plano hiperbólico (Capítulo 3) e as demonstrações se processam de modo análogo.

PROPOSIÇÃO 15. *Seja G subgrupo discreto de $ISO(\mathbb{R}^2)$. Suponhamos que as isometrias de G que preservam orientação sejam $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$. Suponhamos também que h é uma isometria de G que não preserva orientação. Então as isometrias de G que não preservam orientação são $f_1 \circ h, f_2 \circ h, \dots, f_n \circ h, \dots$.*

Demonstração.

Se g é uma isometria de G que não preserva orientação, temos que $g \circ h^{-1} \in G$ preserva orientação. Logo, $g \circ h^{-1} = f_k$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e $g = f_k \circ h$. ■

Nas condições da proposição acima $G = \{f_1, f_2, \dots, f_1 \circ h, f_2 \circ h, \dots\}$.

Nota. $ISO(\mathbb{R}^2)$ é um exemplo de grupo de isometrias não-discreto e a órbita de qualquer ponto de \mathbb{R}^2 é o plano todo, ou seja, a ação de $ISO(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é transitiva: dados A e B em \mathbb{R}^2 , existe f em $ISO(\mathbb{R}^2)$ tal que $f(A) = B$.

TEOREMA 5. (Teorema da Invariância (dos centros de rotação)).

Sejam G subgrupo discreto de $ISO(\mathbb{R}^2)$, $A \in \mathbb{R}^2$ e C o subconjunto dos pontos de $G(A)$ que são centros de rotações de G .

Se $f \in G$ e $P \in C$ é centro de uma rotação de ângulo α , então $f(P) \in C$ é centro de uma rotação (de G) de ângulo α .

Demonstração.

Se $C = \{P \in G(A) \mid \exists \rho_{P,\alpha} \in G; \alpha \neq 0\} = \emptyset$ não há nada a demonstrar.

Suponhamos $C \neq \emptyset$, e f e P como na hipótese. Logo, $\exists \rho_{P,\alpha} \in G$. Tomemos $g = f \circ \rho_{P,\alpha} \circ f^{-1} \in G$; uma isometria que preserva orientação em G . Temos os seguintes casos a considerar:

a) Suponhamos que $f = T_{\vec{u}}$.

Logo, $g = T_{\vec{u}} \circ \rho_{P,\alpha} \circ T_{\vec{u}}^{-1} = \rho_{T_{\vec{u}}(P),\beta}$, pois $T_{\vec{u}}(P)$ é ponto fixo de g .

Mostremos que $\alpha = \beta$.

Tomemos \overline{AB} , $r, s \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\overline{AB} = \vec{u}$, P é ponto médio de \overline{AB} , r é reta perpendicular a \overline{AB} em A e s é reta perpendicular a \overline{AB} em B .

Sejam $P_1 \in r$ e $P_2 \in s$ tais que $\overline{P_1P_2} \parallel \overline{AB}$ e $\rho_{P,\alpha}(P_2) = P_1$ (Figura 2.12).

Logo, $T_{\vec{u}} \circ \rho_{P,\alpha} = \rho_{P_2,\alpha}$.

Demonstração análoga indica que $\rho_{P_2,\alpha} \circ T_{\vec{u}}^{-1}$ é rotação de ângulo α .

Assim, g é rotação de ângulo α . Portanto, $\beta = \alpha$ e $f(P)$ satisfaz a tese.

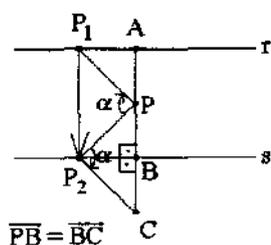


FIGURA 2.12

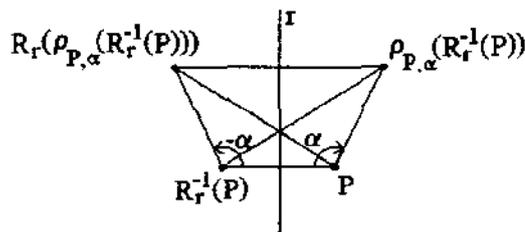


FIGURA 2.13

b) Suponhamos que $f = \rho_{O,\gamma}$.

Logo, $g = \rho_{O,\gamma} \circ \rho_{P,\alpha} \circ \rho_{O,\gamma}^{-1} = \rho_{\rho_{O,\gamma}(P),\alpha}$, pois $\rho_{O,\gamma}(P)$ é ponto fixo de g (g possui ângulo α pelo Teorema da Soma dos Ângulos da Composta de Rotações).

Logo, $f(P)$ satisfaz a tese.

c) Suponhamos que $f = R_r$.

Logo, $g = R_r \circ \rho_{P,\alpha} \circ R_r^{-1} = \rho_{R_r(P),\beta}$, pois $R_r(P)$ é ponto fixo de g .

Mostremos que $\beta = -\alpha$.

Como o triângulo de vértices P , $R_r^{-1}(P)$ e $\rho_{P,\alpha}(R_r^{-1}(P))$ é congruente ao de vértices P , $R_r^{-1}(P)$ e $R_r(\rho_{P,\alpha}(R_r^{-1}(P)))$ (Figura 2.13), temos $\rho_{R_r(P),-\alpha}(P) = R_r \circ \rho_{P,\alpha} \circ R_r^{-1}(P)$, o que nos fornece $\beta = -\alpha$.

Como $\rho_{R_r(P),-\alpha}^{-1} = \rho_{R_r(P),\alpha} \in G$, temos que $f(P)$ satisfaz a tese.

d) Suponhamos que $f = GR_{r,\bar{u}}$.

Logo, $g = GR_{r,\bar{u}} \circ \rho_{P,\alpha} \circ GR_{r,\bar{u}}^{-1} = \rho_{GR_{r,\bar{u}}(P),\beta}$, pois $GR_{r,\bar{u}}(P)$ é ponto fixo de g .

Mostremos que $\beta = -\alpha$.

Identifiquemos $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ tal que $r \equiv \text{Im}(\mathbb{C})$, $P \in \text{Re}(\mathbb{C})$ e \bar{u} possui mesmo sentido de $e_2 = (0, 1)$.

Como $GR_{r,\bar{u}}^{-1} = (T_{\bar{u}} \circ R_r)^{-1} = R_r^{-1} \circ T_{\bar{u}}^{-1} = R_r \circ T_{-\bar{u}}$, temos:

$GR_{r,\bar{u}}^{-1}(P) = R_r \circ T_{-\bar{u}}(P) = R_r(P - it) = -\overline{(P - it)} = -\bar{P} - it$, onde $t = \|\bar{u}\|$.

$\rho_{P,\alpha} \circ GR_{r,\bar{u}}^{-1}(P) = (-\bar{P} - it - P) e^{i\alpha} + P$.

$g(P) = GR_{r,\bar{u}} \circ \rho_{P,\alpha} \circ GR_{r,\bar{u}}^{-1}(P) = -\overline{((- \bar{P} - it - P) e^{i\alpha} + P)} + it = (P - it + \bar{P}) e^{-i\alpha} - \bar{P} + it$.

Mas $GR_{r,\bar{u}}(P) = -\bar{P} + it$. Logo, $\rho_{GR_{r,\bar{u}}(P),-\alpha}(P) = (P - (-\bar{P} + it)) e^{-i\alpha} + (-\bar{P} + it) = (P - it + \bar{P}) e^{-i\alpha} - \bar{P} + it$.

Logo, o ângulo de g é $-\alpha$, ou seja, $\beta = -\alpha$ (Figura 2.14).

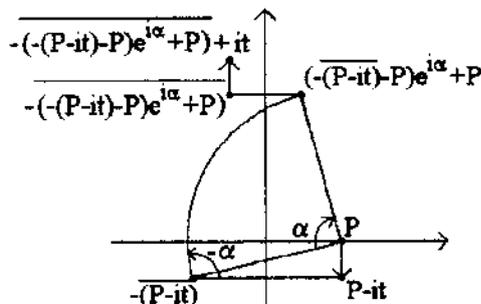


FIGURA 2.14

Como $\rho_{GR_{r,\bar{u}}(P),-\alpha}^{-1} = \rho_{GR_{r,\bar{u}}(P),\alpha} \in G$, temos que $f(P)$ satisfaz a tese. ■

2.2.2 Ladrilhamentos

A todo grupo discreto de isometrias no plano, é possível associar um “ladrilhamento” no plano, no sentido da definição a seguir:

Definição 9. Um ladrilhamento em \mathbb{R}^2 é uma cobertura do plano por regiões poligonais congruentes de tal modo que todo ponto do plano é cober-

to por pelo menos uma região e duas regiões quaisquer não se interceptam exceto, eventualmente, no bordo.

A região poligonal será chamado de **Ladrilho** e indicada por L .

O ladrilhamento será indicado por $\mathcal{L}_L(\mathbb{R}^2)$.

Caso a região poligonal seja compacta, o ladrilhamento pode ser chamado de **ladrilhamento compacto**.

Seja G subgrupo discreto de $ISO(\mathbb{R}^2)$.

Se $\bigcup_{g \in G} g(L) = \mathbb{R}^2$ e $g(L) = h(L)$ sempre que $g(\overset{\circ}{L}) \cap h(\overset{\circ}{L}) \neq \emptyset$, dizemos que G está associado a $\mathcal{L}_L(\mathbb{R}^2)$ e será indicado por $(\mathcal{L}_L(\mathbb{R}^2), G)$.

Por exemplo, no ladrilhamento por quadrados L de lado 1 em \mathbb{R}^2 (Figura 2.15) temos o subgrupo $G = \langle T_{\vec{e}_1}, T_{\vec{e}_2} \rangle$ de $ISO(\mathbb{R}^2)$ associado a $\mathcal{L}_L(\mathbb{R}^2)$.

Ressaltamos, que o ladrilhamento poderia ser definido englobando compactos com interior não vazio, os quais não constituem necessariamente regiões poligonais. Os exemplos mais conhecidos de tais ladrilhamentos são os notáveis mosaicos criados por Maurits Escher.

Na literatura aparece a designação *tiling* para ladrilhamento, sinônima de *tesselation*, que corresponderia no Português à “tesselagem”, porém tal palavra, além de não constar no dicionário da Língua Portuguesa (cf. AU-RÉLIO), poderia acarretar, por analogia com tecelagem, um sentido distinto do adequado. Há a palavra *tessela*, sinônimo de ladrilho, que não faz parte da linguagem usual. Ladrilhamento, em termos matemáticos, pode ter ainda como sinônimos pavimentação ou mosaico.

Um $\mathcal{L}_L(\mathbb{R}^2)$ pode “determinar” um subgrupo discreto G de $ISO(\mathbb{R}^2)$, mas sempre em número finito (de subgrupos). Porém, um subgrupo discreto G de $ISO(\mathbb{R}^2)$ pode associar-se a infinitos $\mathcal{L}_L(\mathbb{R}^2)$. O que pode variar infinitamente é a forma do ladrilho.

Dado $\mathcal{L}_L(\mathbb{R}^2)$ pode ocorrer que não exista um subgrupo discreto de $ISO(\mathbb{R}^2)$ associado a este, como é o caso de ladrilhamentos “não-periódicos”, como o ilustrado na Figura 2.16¹ cujo ladrilho é um eneágono irregular. Este ladrilhamento é conhecido desde 1936/37, é devido a Voderberg (referência [VODERBERG I e II]), possui forma espiralada com dois pólos e não possui grupo discreto de isometrias associado (a tentativa de associação de um tal grupo fatalmente origina sobreposição de ladrilhos).

Ladrilhamentos “não-periódicos” constituem um campo fértil de pesquisas dentro da Teoria de Ladrilhamentos e não o abordaremos neste trabalho,

¹Ilustração obtida na referência [TÓTH]

porém, podemos citar alguns textos como os das referências [ROBINSON I, II e III] e [GARDNER].

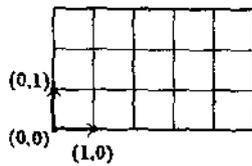


FIGURA 2.15

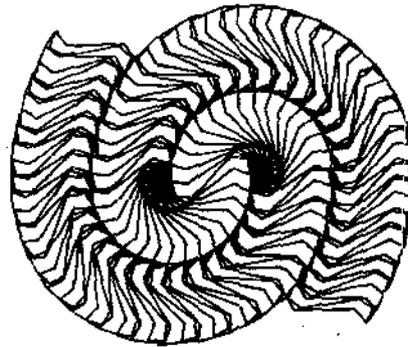


FIGURA 2.16

Ainda nesta linha, existe um belo resultado conjecturado por Minkowsky e provado por Hajós em 1941 na referência [HAJÓS]:

TEOREMA 6. *Seja C um hipercubo definido por $0 \leq x_v \leq 1$, $v = 1, \dots, n \in \mathbb{N}$ em \mathbb{R}^n . Seja $\{u_v \mid v = 1, \dots, n\}$ uma base para \mathbb{R}^n . Tomemos $G = \langle u_v \mid v = 1, \dots, n \rangle$ subgrupo de $ISO(\mathbb{R}^n)$. Suponhamos que possamos associar um ladrilhamento $\mathcal{L}_C(\mathbb{R}^n)$ por ladrilhos hipercubos C a G , ou seja, suponhamos que exista $(\mathcal{L}_C(\mathbb{R}^n), G)$.*

Assim, a ação de G sobre C é: $C \rightarrow C + \vec{t}$ onde $\vec{t} = \sum_{v=1}^n m_v \cdot u_v$ para $m_v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Nestas condições, temos que pelo menos um vetor \vec{t} possui uma componente 0 e as outras componentes ± 1 . Geometricamente, $(\mathcal{L}_L(\mathbb{R}^n), G)$ possui uma "linha" ou "coluna" de hipercubos.

Na referência [STEIN] encontramos a demonstração.

Ilustração: No plano é fácil ser convencido do teorema (mas não em dimensões maiores). Veja Figura 2.17.

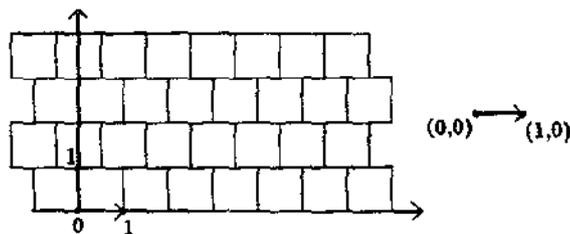


FIGURA 2.17

Será conveniente trabalharmos com um tipo especial de ladrilhamento o qual denominaremos ladrilhamento canônico:

Definição 10. Um ladrilhamento é dito **canônico** se satisfaz as seguintes condições:

1) Os ladrilhos L são compactos poligonais congruentes.

2) Dados dois ladrilhos não coincidentes: L_1 e L_2 , ocorre um dos seguintes itens:

- $L_1 \cap L_2 = \emptyset$;
- $L_1 \cap L_2 = p$, p : ponto-vértice de L_1 e L_2 .
- $L_1 \cap L_2 = l$, l : lado de L_1 e L_2 .

3) Seja a lado de um ladrilho L_0 . Então, existem exatamente um lado a' de L_0 e uma isometria $f_a \in ISO(\mathbb{R}^2)$ tal que $f_a(a) = a'$ e $L_0 \cap f_a(L_0) = a'$.
(Como $\exists f_a^{-1} \in ISO(\mathbb{R}^2)$, temos que $f_a^{-1}(a') = a$ e $L_0 \cap f_a^{-1}(L_0) = a$)

Aqui, eventualmente, a e a' podem coincidir. Neste caso, f_a é uma reflexão através de uma reta que contém a .

4) Sejam a_p , $p = 1, \dots, s \in \mathbb{N}^*$ os lados de um L_0 . Então, as isometrias $f_{a_p} \in ISO(\mathbb{R}^2)$ geram um subgrupo discreto G de $ISO(\mathbb{R}^2)$
($G = \langle f_{a_p} \mid p = 1, \dots, s \rangle$) tal que, $\forall L \in \mathcal{L}_L(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \exists f \in G \mid L = f(L_0)$.

Definição 11. O grupo G da definição acima é chamado de **grupo de ladrilhamento canônico**.

Dado $(\mathcal{L}_L(\mathbb{R}^2), G)$, G pode não ser único:

Exemplo: Se $\mathcal{L}_L(\mathbb{R}^2)$ é o ladrilhamento por quadrados de lado 1 (Figura 2.15), temos que $G_1 = \langle T_{\vec{e}_1}, T_{\vec{e}_2} \rangle$ ou $G_2 = \langle R_{r_1}, R_{r_2}, R_{r_3}, R_{r_4} \rangle$, onde r_i são retas que contêm os lados de L , podem ser grupos associados a $\mathcal{L}_L(\mathbb{R}^2)$.

O que faremos a seguir é a classificação dos grupos discretos de isometrias no plano (subgrupos discretos de $ISO(\mathbb{R}^2)$). Esta classificação será subdividida em três partes:

- 1) Grupos discretos de isometrias que não possuem translações;
- 2) Grupos discretos de isometrias que possuem todas as translações paralelas (os vetores-translações são todos paralelos);

3) Grupos discretos de isometrias que possuem translações LI (vetores-translações linearmente independentes).

Nos casos 1) e 2) devemos ter ladrilhamentos associados cujos ladrilhos não são compactos.

2.2.3 Grupos Roseta.

Suponhamos que G é grupo discreto de $ISO(\mathbb{R}^2)$ que não possui translações. Há duas possibilidades:

- A) G não possui isometrias que não preservam orientação.
- B) G possui isometrias que não preservam orientação.

A) G não possui isometrias que não preservam orientação, ou seja, G só possui rotações (eventualmente $G = \{Id\}$, $Id = \rho_{A,0^\circ}$).

PROPOSIÇÃO 16. Todas as rotações de G possuem mesmo centro.

Demonstração.

Suponhamos que G possua duas rotações com centros distintos: $\rho_{O_1, \alpha_1} = f_1$ e $\rho_{O_2, \alpha_2} = f_2$. Logo, $f_1 \circ f_2 \circ f_1^{-1} \circ f_2^{-2}$ é uma translação (Teorema da Soma dos Ângulos de Composta de Rotações).

Desta forma, $f_1 \circ f_2 \circ f_1^{-1} \circ f_2^{-1}(O_2) = f_1 \circ f_2 \circ f_1^{-1}(O_2) \neq O_2$ ($f_1 \circ f_2 \circ f_1^{-1}$ é uma rotação de centro $f_1(O_2) \neq O_2$). Logo, $f_1 \circ f_2 \circ f_1^{-1} \circ f_2^{-2} \neq Id$.

Mas G não possui translações; logo, todas as rotações de G possuem mesmo centro. ■

Seja $O \in \mathbb{R}^2$ o centro das rotações de G .

PROPOSIÇÃO 17. G é finito.

Demonstração.

A cardinalidade de G é a mesma de $G(A)$ para qualquer $A \neq O$. Como $G(A) \subset \bar{B}_{d(A,O)}(O)$, temos que $G(A)$ é finito (consequência do Teorema de Bolzano-Weierstrass). Logo, G é finito. ■

PROPOSIÇÃO 18. G é cíclico (gerado por um único elemento).

Demonstração.

Seja $f \neq Id \in G$. Logo, $f = \rho_{O, \alpha}$ com $0 < \alpha < 2\pi$.

Seja $f_1 = \rho_{O, \alpha_1}$ tal que α_1 seja o mínimo do conjunto das medidas de todos os ângulos α_i 's das rotações $f_i = \rho_{O, \alpha_i} \in G$.

Suponhamos que $f \neq f_1^k, \forall k \in \mathbb{Z}$. Então existem $m \in \mathbb{Z}$ e $0 < r < \alpha_1$ tais que $\alpha = m\alpha_1 + r$. Logo, $f_1^{-m} \circ f = \rho_{O,r}$ contradizendo a minimalidade de α_1 . Logo, $G = \langle f_1 \rangle$. ■

Observação.

$$\begin{aligned} \varphi: G &\rightarrow \mathbb{Z}_n \\ f_i &\mapsto \bar{i} \end{aligned}$$

é um isomorfismo de grupos. Logo, $G \approx \mathbb{Z}_n$ e o elemento gerador é $\rho_{O,360^\circ/n}$ onde n é a cardinalidade de G .

A Figura 2.18² mostra alguns ladrilhamentos associados a grupos do tipo \mathbb{Z}_n .

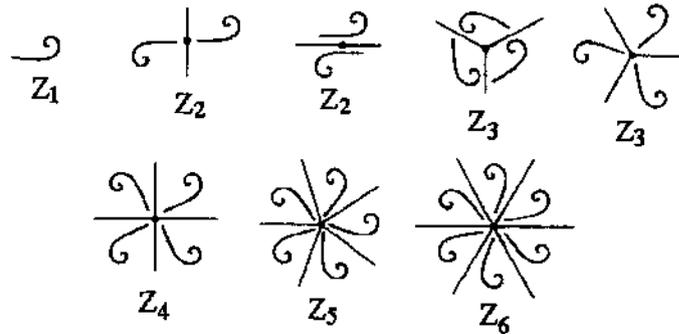


FIGURA 2.18

O Grafo de Cayley de \mathbb{Z}_n é planar e pode ser tomado como sendo um polígono regular (orientado) de n lados, donde tiramos as relações definidoras reduzidas $X^n = 1$, em que X é o gerador de $G = \mathbb{Z}_n$.

Assim, $G = \langle X \mid X^n = 1 \rangle$.

B) G possui isometrias que não preservam orientação.

Seja h uma isometria que não preserva orientação em G .

Logo, se f_1, f_2, \dots, f_n são as rotações concêntricas de G ($f_n = Id$), temos que $f_1 \circ h, f_2 \circ h, \dots, f_n \circ h$ são todas as isometrias que não preservam orientação em G . Assim, $G = \{f_1, \dots, f_n, f_1 \circ h, \dots, f_n \circ h\}$ (portanto, G é um grupo de ordem $2n$).

²Todas as ilustrações de ladrilhamentos associados a grupos discretos de isometrias nesta e nas duas próximas subseções são adaptações de ilustrações da referência [TÓTH].

Notemos que Z_n é subgrupo de G e que h é uma reflexão R_r , pois, se h fosse glisso-reflexão (com translação não nula), teríamos $h^2 = T_{\vec{v}}$ com $\vec{v} \neq \vec{0}$, o que é impossível.

Como consequência do Teorema da Invariância (dos centros de rotação), temos que R_r contém o centro das rotações de G .

Observemos que $f_i \circ R_r(r) = f_i(r) \stackrel{\text{def.}}{=} r_i$. Como $f_i \circ R_r$ é uma reflexão, temos que sua reta de reflexão deve ser a bissetriz entre r e r_i . Como $i = 1, \dots, n$, concluímos que existem n retas de reflexão no grupo G ; estas por sua vez dividem o plano em $2n$ setores angulares de mesmo ângulo: $360^\circ/2n = 180^\circ/n$ (pois $\{f_1, \dots, f_n\} = \langle f_1 \rangle$).

Conclusão: $G = D_n$: grupo diedral de ordem $2n$ ou grupo das simetrias de um polígono regular de n lados.

A Figura 2.19 ilustra alguns ladrilhamentos associados a grupos diedrais D_n .

O Grafo de Cayley de D_n para o caso $n = 3$ já foi feito: Figura 1.2 do capítulo 1. Para $n = 4$ ilustramo-o na Figura 2.20 na qual as arestas X e X^{-1} estão identificadas por uma única aresta não-orientada (pois $X = X^{-1}$) e a partir do qual extraímos as relações definidoras reduzidas $X^2 = Y^4 = (YX)^2 = 1$ ($X = R_r$ e $Y = f_1$). De maneira geral: $G = D_n = \langle X, Y \mid X^2 = Y^n = (YX)^2 = 1 \rangle$.

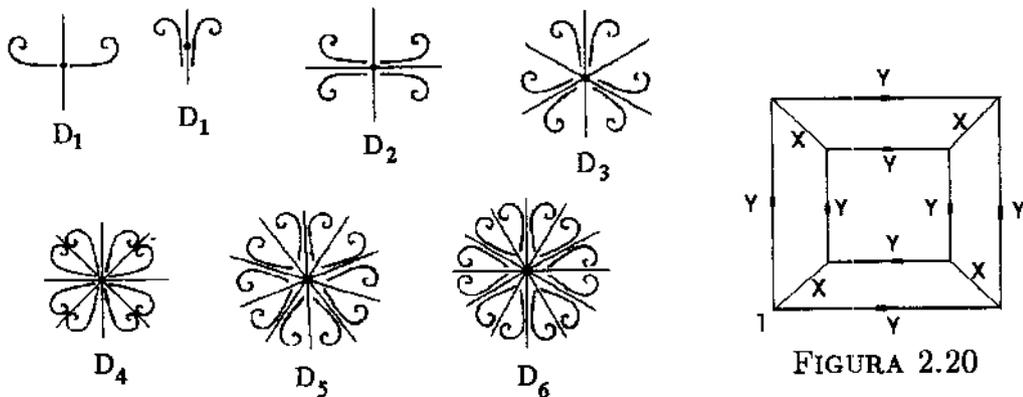


FIGURA 2.19

Definição 12. Um grupo discreto de isometrias que não possui translações é chamado de **grupo roseta** (ou grupo de setores).

Como vimos, grupos roseta são D_n ou Z_n conforme possuam ou não isometrias que não preservam orientação. Os grupos discretos de isometrias que não possuem translações são sempre finitos. Isto não acontecerá com os grupos discretos de isometrias que possuem translações.

2.2.4 Grupos de faixas.

Suponhamos que as translações do subgrupo discreto G de $ISO(\mathbb{R}^2)$ sejam todas paralelas. Consideremos os seguintes casos:

A) G possui somente isometrias que preservam orientação:

- 1) G não possui rotações.
- 2) G possui rotações.

B) G possui isometrias que não preservam orientação:

- 1) G não possui rotações.
- 2) G possui rotações.

Mostraremos que no caso A) existem duas possibilidades para o grupo G e no caso B), cinco possibilidades.

A)1) G possui somente isometrias que preservam orientação, porém não possui rotações.

PROPOSIÇÃO 19. G é finitamente gerado por uma única translação.

Demonstração.

Sejam $A \in \mathbb{R}^2$ e $G(A)$ a órbita de A . Temos portanto que $G(A) \subset r$: uma reta de \mathbb{R}^2 .

Tomemos um compacto conexo e convexo B suficientemente grande tal que

$\#(B \cap G(A)) \geq 2$. Temos que $B \cap G(A)$ é finito: $B \cap G(A) = \{A_1, \dots, A_n\}$.

Sejam A_i, A_{i+1} pontos de $B \cap G(A)$ cuja distância entre si seja minimal em $B \cap G(A)$. Tomemos $\vec{v} = \overrightarrow{A_i A_{i+1}}$. Sejam $A_i = B_0$ e $A_{i+1} = B_1$. Assim, $G(A) = \{T_{\vec{v}}^j(B_0) \mid j \in \mathbb{Z}\}$. De fato, se $\exists A \in G(A)$ tal que $A \notin \{T_{\vec{v}}^j(B_0) \mid j \in \mathbb{Z}\}$, teremos $A \in]B_k, B_{k+1}[$, $B_k = T_{\vec{v}}^k(B_0)$ e $B_{k+1} = T_{\vec{v}}^{k+1}(B_0)$.

Logo, $T_{\vec{v}}^{-k}(A) \in]B_0, B_1[=]A_i, A_{i+1}[$ contrariando a escolha de \vec{v} .

Desta forma, temos que $G = \langle T_{\vec{v}} \rangle = \{T_{\vec{v}}^j \mid j \in \mathbb{Z}\}$ onde $T_{\vec{v}}$ é a translação "minimal" de G . ■

Chamemos este grupo de F_1 .

A Figura 2.21 é um ladrilhamento associado ao grupo F_1 e também parte do seu grafo de Cayley, donde tiramos apenas a relação definidora nula. Portanto, $F_1 = \langle X \rangle$.

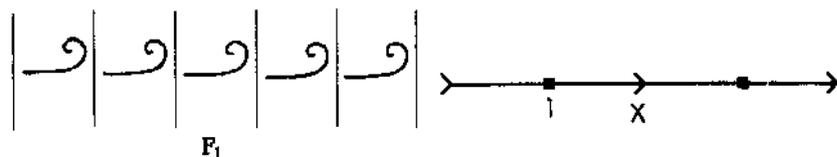


FIGURA 2.21

A)2) G possui somente isometrias que preservam orientação, dentre as quais rotações.

Observemos que F_1 é subgrupo de G .

PROPOSIÇÃO 20. As rotações de G são de 180° .

Demonstração.

Sejam $Id \neq f = \rho_{O,\alpha} \in G$ e $T_{\vec{v}}$ a translação geradora de F_1 . Tomemos $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$.

Afirmção. $f \circ T_{\vec{v}} \circ f^{-1}$ é uma translação pelo vetor $\vec{w} = \overrightarrow{Of(A)}$.

De fato, se $\alpha = 180^\circ$, o resultado é evidente.

Se $\alpha \neq 180^\circ$, o quadrilátero de vértices O , $f^{-1}(A)$, $T_{\vec{v}} \circ f^{-1}(A)$ e A é um losango. Como consequência, o ângulo $f \circ T_{\vec{v}} \circ f^{-1}(A) \hat{O}A = \alpha/2$ e o $\triangle f \circ T_{\vec{v}} \circ f^{-1}(A)OA$ é isósceles, o que nos fornece $\overrightarrow{Af \circ T_{\vec{v}} \circ f^{-1}(A)} \equiv \overrightarrow{Of(A)}$, encerrando a demonstração da afirmação (Figura 2.22).

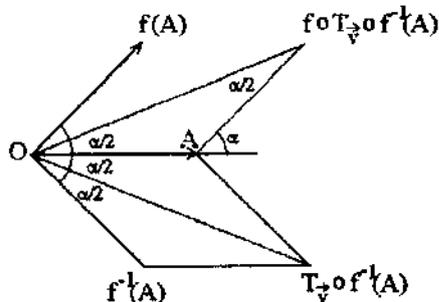


FIGURA 2.22

Como \vec{v}/\vec{w} , temos que f é uma rotação de 180° . ■

Usando o Teorema da Soma dos Ângulos da Composta de Rotações, temos que a composta de duas rotações quaisquer de G com centros distintos é uma translação.

Seja $f = \rho_{A_0, 180^\circ} \in G$.

PROPOSIÇÃO 21. Se $T_{\vec{v}}$ é a translação geradora de F_1 e $A \in \mathbb{R}^2$ é centro de alguma rotação de G , então $\{T_{\vec{v}}^j(A) \mid j \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto formado por centros de rotação de G .

A proposição acima é corolário do Teorema da Invariância dos centros de rotação.

$T_{\vec{v}} \circ f$ é uma rotação de 180° com centro no ponto médio do segmento A_0A_1 ($A_1 = T_{\vec{v}}(A_0)$). Chamemos este centro de B_0 .

Pela Proposição 21 temos que $\{T_{\vec{v}}^j(B_0) \mid j \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto formado por centros de rotações de G .

PROPOSIÇÃO 22. $C = \{\dots, B_{-2}, A_{-1}, B_{-1}, A_0, B_0, A_1, B_1, \dots\}$ onde $B_j = T_{\vec{v}}^j(B_0)$ e $A_j = T_{\vec{v}}^j(A_0)$ contém todos os centros de rotação de G .

Demonstração.

Observemos que os centros de C são colineares e pertencem a uma reta $r \subset \mathbb{R}^2$ paralela a \vec{v} .

Se existisse uma rotação $g = \rho_{D, 180^\circ}$ com $D \notin C$, teríamos necessariamente $D \in r$, pois, caso contrário, $g \circ f$ ($f = \rho_{A_0, 180^\circ}$) seria uma translação por vetor não paralelo a \vec{v} , o que não é possível.

Assim, $\exists j \in \mathbb{Z}$ tal que $D \in]A_j, A_{j+1}[$ e $D \neq B_j$. Logo, $g \circ \rho_{B_j, 180^\circ}$ é uma translação pelo vetor $2\overrightarrow{B_jD}$. Mas $\|2\overrightarrow{B_jD}\| < \|\vec{v}\|$, ($\vec{v} = \overrightarrow{A_jA_{j+1}}$) uma contradição pois $T_{\vec{v}}$ gera F_1 . ■

Dos resultados acima, advém que G pode ser tomado como gerado por $T_{\vec{v}}$ e a rotação $f = \rho_{A_0, 180^\circ}$, ou seja, $G = \langle T_{\vec{v}}, \rho_{A_0, 180^\circ} \rangle$.

Chamemos este grupo de F_2 .

A Figura 2.23 é um ladrilhamento associado ao grupo F_2 com parte de seu Grafo de Cayley, donde tiramos as relações definidoras reduzidas $Y^2 = 1$ e $(XY)^2 = 1$. Portanto, $F_2 = \langle X, Y \mid Y^2 = (XY)^2 = 1 \rangle$.

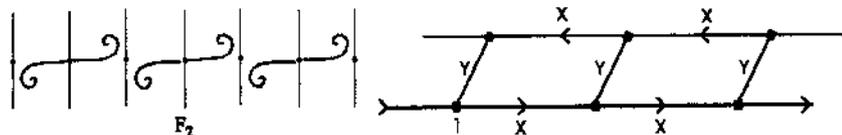


FIGURA 2.23

B)1) G possui isometrias que não preservam orientação, porém não possui rotações.

Tomemos F_1 subgrupo maximal de G e consideremos os dois casos a seguir.

B)1)a) G possui uma reflexão R_r .

Logo, podemos escrever $G = F_1 \cup \{f \circ R_r \mid f \in F_1\}$.

Afirmação. $R_r \circ T_{\vec{v}} \circ R_r$ é uma translação pelo vetor $R_r(\vec{v})$.

De fato. Se $R_r \circ T_{\vec{v}} \circ R_r = \rho_{O,\alpha}$ para alguma $\rho_{O,\alpha} \in G$, temos que $T_{\vec{v}} \circ R_r = R_r \circ \rho_{O,\alpha}$ e no ponto O temos $T_{\vec{v}}(R_r(O)) = R_r(O)$, o que não é possível.

Se $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ com $A \in r$, temos $R_r \circ T_{\vec{v}} \circ R_r(A) = R_r(B)$, o que encerra a afirmação.

Logo, $R_r(\vec{v}) // \vec{v}$ e, portanto, $r \perp \vec{v}$ ou $r // \vec{v}$.

Chegamos, portanto, a dois subcasos:

B)1)a)i) $r // \vec{v}$.

Temos, então, que $\{T \circ R_r \mid T \in F_1\}$ é um conjunto de glisso-reflexões (reflexão no caso $T = Id$). Podemos escrever $G = \langle T_{\vec{v}}, R_r \rangle$.

Chamemos este grupo de F_1^1 .

A Figura 2.24 é um ladrilhamento associado ao grupo F_1^1 contendo também parte de seu Grafo de Cayley, donde tiramos as relações definidoras reduzidas $Y^2 = X^{-1}YXY = 1$. Portanto, $F_1^1 = \langle X, Y \mid Y^2 = X^{-1}YXY = 1 \rangle$.

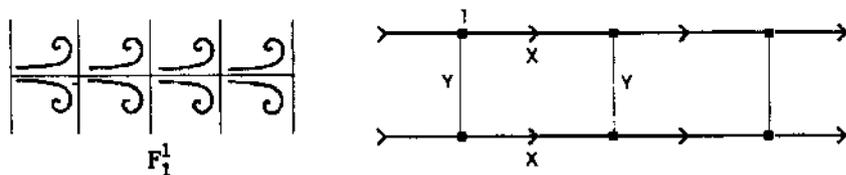


FIGURA 2.24

B)1)a)ii) $r \perp \vec{v}$.

Temos que $T_{\vec{v}}^j \circ R_r(r) = T_{\vec{v}}^j(r) = r_j$, ($T_{\vec{v}}^0 = Id$). Logo, $r_j // r$, $\forall j \in \mathbb{Z}$.

Como $T_{\vec{v}}^j \circ R_r$ é uma reflexão, a reta de reflexão é a bissetriz da faixa delimitada por r e r_j .

Com isto, concluímos que as reflexões de G possuem retas de reflexão todas paralelas e equidistantes de $\frac{1}{2} \cdot \|\vec{v}\|$. Também podemos escrever $G = \langle T_{\vec{v}}, R_{\tau} \rangle$.

Chamemos este grupo de F_1^2 .

A Figura 2.25 é um ladrilhamento associado ao grupo F_1^2 com parte de seu Grafo de Cayley, donde tiramos as relações definidoras reduzidas $Y^2 = (YX)^2 = 1$. Portanto, $F_1^2 = \langle X, Y \mid Y^2 = (XY)^2 = 1 \rangle$.

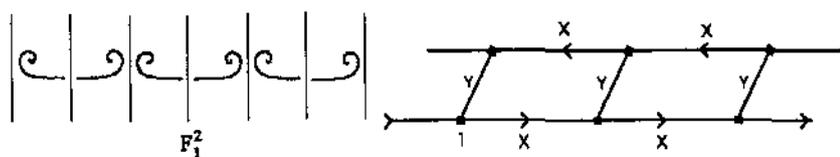


FIGURA 2.25

B)1)b) G possui uma glisso-reflexão $GR_{s,\vec{w}}$.

Temos que $GR_{s,\vec{w}}^2$ é uma translação. Logo, $GR_{s,\vec{w}}^2 = T_{2\vec{w}} \in F_1$ e, desta forma, ou $T_{2\vec{w}} = T_{\vec{v}}^{2n}$, ou $T_{2\vec{w}} = T_{\vec{v}}^{2n-1}$ para algum $n \in \mathbb{Z}$.

Com isto, chegamos a mais dois subcasos:

B)1)b)i) $T_{2\vec{w}} = T_{\vec{v}}^{2n}$.

Temos que $T_{\vec{v}}^{-n} \circ GR_{s,\vec{w}}$ é uma reflexão em $s // \vec{v}$. Logo, G possui uma reflexão por uma reta paralela a \vec{v} . É o caso B)1)a)i) e, portanto, $G = F_1^1$.

B)1)b)ii) $T_{2\vec{w}} = T_{\vec{v}}^{2n-1}$.

Temos que $T_{\vec{v}}^{-n+1} \circ GR_{s,\vec{w}}$ é a glisso-reflexão $GR_{s,\frac{1}{2}\vec{v}}$. Assim, $G = F_1 \cup \{f \circ GR_{s,\frac{1}{2}\vec{v}} \mid f \in F_1\} = \langle T_{\vec{v}}, GR_{s,\frac{1}{2}\vec{v}} \rangle$.

Chamemos este grupo de F_1^3 .

Notemos que F_1^3 não possui reflexões.

A Figura 2.26 ilustra um ladrilhamento associado a F_1^3 . Do Grafo de Cayley de F_1^3 temos que $F_1^3 = \langle X, Y \mid Y^2 X^{-1} = X^{-1} Y^{-1} X Y = 1 \rangle$.

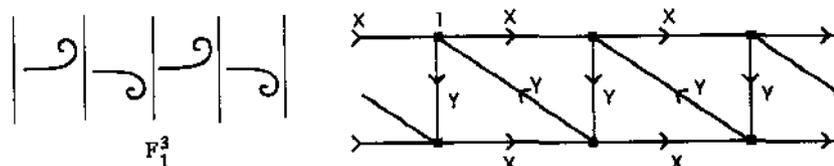


FIGURA 2.26

B)2) G possui isometrias que não preservam orientação, dentre as quais rotações.

Temos que F_2 é subgrupo de G e dois casos a considerar:

B)2)a) G possui uma reflexão R_r .

Temos que $G = F_2 \cup \{f \circ R_r \mid f \in F_2\}$.

Como F_1 é subgrupo de F_2 temos, pelo caso B)1)a), que $\vec{v} // r$ ou $\vec{v} \perp r$. Portanto, dois subcasos a considerar:

B)2)a)i) R_r é tal que $\vec{v} // r$.

Pelo Teorema da Invariância dos centros de rotação, r coincide com a reta c que contém os centros de rotação de F_2 .

Deste modo, $T_{\vec{v}}^j \circ R_r$, $j \in \mathbb{Z}$, é uma glisso-reflexão.

Sejam $\rho_{O,\alpha} \in F_2$ e s a reta perpendicular a r passando por O , temos que $\rho_{O,180^\circ} \circ R_r(A) = A, \forall A \in s$; logo, $\rho_{O,180^\circ} \circ R_r$ é uma reflexão por s . Portanto, G também possui reflexões R_s tais que $s \perp \vec{v}$. Logo, F_1^1 e F_1^2 são subgrupos de G e podemos escrever $G = \langle T_{\vec{v}}, R_r, \rho_{O,180^\circ} \rangle$.

Chamemos este grupo de F_2^1 .

A Figura 2.27 ilustra um ladrilhamento associado a F_2^1 . Do Grafo de Cayley de F_2^1 temos que $F_2^1 = \langle X, Y, X \mid Y^2 = Z^2 = (XY)^2 = (YZ)^2 = (XZ)^2 = 1 \rangle$.

Notemos que o grafo de F_2^1 "converge para um ponto".

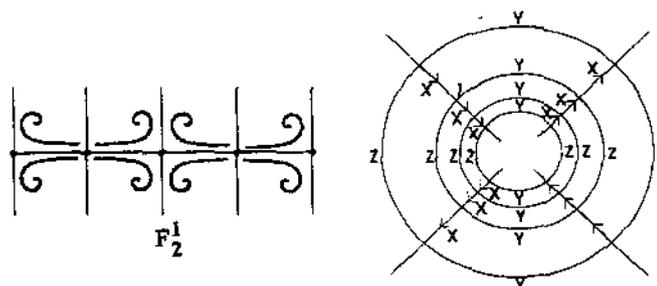


FIGURA 2.27

B)2)a)ii) R_r é tal que $\vec{v} \perp r$.

Logo, F_1^2 é subgrupo de G .

Se r contém qualquer centro de rotação de F_2 , cairemos no caso anterior.

Se r não contém centros de rotação, temos, pelo Teorema da Invariância dos centros de rotação, que r deve ser mediatriz de um segmento unindo dois centros de rotação.

Sejam $\rho_{O,180^\circ} \in F_2$ e c a reta que contém os centros de rotação de F_2 , temos $\rho_{O,180^\circ} = R_c \circ R_s$ onde s é a reta perpendicular a c passando por O . Logo, $\rho_{O,180^\circ} \circ R_r = R_c \circ T_{\vec{w}}$ onde $\vec{w} // c$. Assim, $R_c \circ T_{\vec{w}} = T_{\vec{w}} \circ R_c$ é uma glisso-reflexão. Logo, F_1^1 é subgrupo de G e podemos escrever $G = \langle T_{\vec{w}}, R_r, \rho_{O,180^\circ} \rangle$. Chamemos este grupo de F_2^2 .

A Figura 2.28 ilustra um ladrilhamento associado a F_2^2 . Do Grafo de Cayley de F_2^2 temos que $F_2^2 = \langle X, Y, Z \mid Y^2 = Z^2 = (ZX)^2 = (YX)^2 = X^{-1}(YZ)^2 = 1 \rangle$.

Aqui também podemos notar que o grafo de F_2^2 "converge para um ponto".

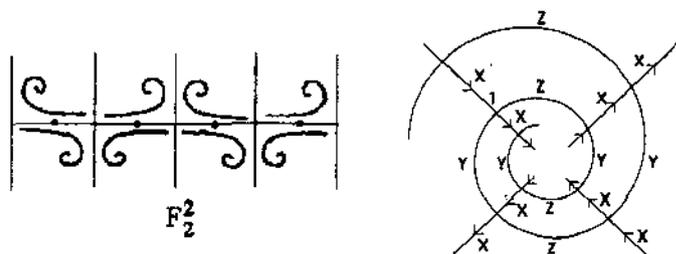


FIGURA 2.28

B)2)b) G possui uma glisso-reflexão.

Logo, nossa análise recai nos casos B)2)a)i) ou B)2)a)ii), pois, em ambos os casos, temos grupos discretos de isometrias que possuem rotações e glisso-reflexões. Vejamos isto com mais detalhes:

Se $GR_{s,\vec{w}} \in G$, então $GR_{s,\vec{w}}^{2n} = T_{\vec{v}}^{2n}$ ou $GR_{s,\vec{w}}^{2n-1} = T_{\vec{v}}^{2n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$.

B)2)b)i) $GR_{s,\vec{w}}^{2n} = T_{\vec{v}}^{2n}$.

Temos que $T_{\vec{v}}^{-n} \circ GR_{s,\vec{w}}$ é uma reflexão R_s com $s // \vec{v}$. Logo, estamos nas condições de B)2)a)i). Portanto, $G = F_2^1$.

B)2)b)ii) $GR_{s,\vec{w}}^{2n-1} = T_{\vec{v}}^{2n-1}$.

Tomemos $f = \rho_{O,180^\circ}$, $A = O - \frac{1}{4}\vec{v}$ e t a reta perpendicular a c (reta dos centros de rotação de F_2) passando por A . Temos, pelo Teorema da Invariância dos centros de rotações, que $s = c$. Assim, $g = f \circ T_{\vec{v}}^{-n+1} \circ$

$GR_{g,\bar{w}}(P) = P, \forall P \in t$, ou seja, g é uma reflexão por t . Logo, estamos nas condições de B)2)a)ii). Portanto, $G = F_2^2$.

Definição 13. Os grupos $F_1, F_1^1, F_1^2, F_1^3, F_2, F_2^1$ e F_2^2 são chamados de grupos de faixas ou fitas.

2.2.5 Grupos Cristalográficos

Consideraremos agora grupos discretos associados a ladrilhamentos compactos do plano.

Suponhamos que o subgrupo discreto G de $ISO(\mathbb{R}^2)$ possua duas translações LI , ou seja, $\exists T_{\vec{u}}, T_{\vec{v}} \in G$ tal que \vec{u} e \vec{v} são LI .

Consideremos os seguintes casos:

A) G possui somente isometrias que preservam orientação:

- 1) G não possui rotações.
- 2) G possui rotações:
 - a) G possui somente rotações de 180° .
 - b) G possui rotações de $360^\circ/p$ com $p \in \mathbb{N}, p > 2$.

Aqui cabe uma observação:

G não possui rotações que não sejam do tipo $\rho_{O,360^\circ/n}^k$ com $n \in \mathbb{N}^*$ e $k \in \mathbb{Z}$, pois, se $\exists \rho_{O,\alpha} \in G$ que não seja deste tipo, então $\rho_{O,\alpha}^i \neq Id, \forall i \in \mathbb{Z}$ ou “o ladrilhamento associado a G possui sobreposição de ladrilhos”. No primeiro caso, $C = \{\rho_{O,\alpha}^i(A) \mid A \neq O, i \in \mathbb{Z}\}$ é infinito e limitado. Logo, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, C possui um ponto de acumulação, o que não é possível pois G é discreto.

B) G possui isometrias que não preservam orientação:

- 1) G não possui rotações:
 - a) G possui uma reflexão.
 - b) G possui uma glisso-reflexão.
- 2) G possui somente rotações de 180° :
 - a) G possui uma reflexão.
 - b) G possui uma glisso-reflexão.
- 3) G possui rotações de $360^\circ/p, p \in \mathbb{N}, p > 2$.

Como veremos, existem apenas dezessete grupos que podem ser associados a ladrilhamentos compactos do plano: cinco deles é composto por isometrias que preservam orientação e os demais possuem isometrias que não preservam orientação.

A)1) G possui somente isometrias que preservam orientação, porém não possui rotações:

Logo, G possui somente translações.

Seja $A \in \mathbb{R}^2$ e consideremos $G(A)$. Tomemos uma bola compacta K com centro em A de tal modo que $G(A) \cap K$ (que é finito) contenha no mínimo três pontos. Tomemos uma figura triangular ABC (não degenerada) de tal modo que $B, C \in \overset{\circ}{G}(A)$ e $\widehat{ABC} \cap G(A) = \emptyset$.

Tomemos $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

PROPOSIÇÃO 23. $G(A) = \{A + a\vec{u} + b\vec{v} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Demonstração.

Chamemos $\{A + a\vec{u} + b\vec{v} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ de R .

Como $T_{\vec{u}}, T_{\vec{v}} \in G$ (G só possui translações), temos que $T_{\vec{u}}^a \circ T_{\vec{v}}^b = T_{a\vec{u} + b\vec{v}} \in G$. Logo, $T_{a\vec{u} + b\vec{v}}(A) \in G(A)$ e, portanto,

$$R \subset G(A). \quad (6)$$

Tomemos $D = B + \vec{v}$.

Suponhamos que $\exists P \in G(A)$ tal que $P \notin R$ e fixemos um sistema de coordenadas cartesianas (eventualmente não ortogonais) com origem em A e eixos coordenados contendo \vec{u} e \vec{v} .

Temos que, $P = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$ com $k_1 \in]a', a' + 1[$ e $k_2 \in]b', b' + 1[$; $a', b' \in \mathbb{Z}$. Logo, $P' = T_{-a'\vec{u} - b'\vec{v}}(P)$ pertence à figura triangular $ABC \setminus \{A, B, C\}$ ou à figura triangular $BCD \setminus \{B, C, D\}$ (Figura 2.29).

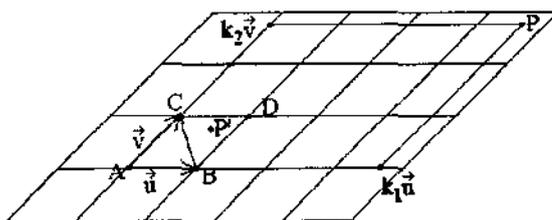


FIGURA 2.29

Dai:

- i) $d(A, P') < d(A, B)$ ou
- ii) $d(A, P') < d(A, C)$ ou
- iii) $d(P', D) < d(B, D)$ ou
- iv) $d(P', D) < d(C, D)$.

Nos casos i) e ii) temos que $T_{\overrightarrow{AP'}} \in G$ contradiz a escolha de \vec{u} e \vec{v} .

Nos casos iii) e iv) temos a existência de uma translação $T_{\overrightarrow{DP}} \in G$ e conseqüentemente, $T_{\overrightarrow{DP}}(A)$ pertence ao interior da figura triangular ABC . Novamente uma contradição com a escolha de \vec{u} e \vec{v} . Logo, $P \in G(A)$ e $P \notin R$ não pode ocorrer. Portanto,

$$G(A) \subset R. \quad (7)$$

Por (6) e (7) temos que $G(A) = R$.

Temos com isto que $T_{\vec{u}}$ e $T_{\vec{v}}$ são translações LI “minimais” de G . ■

Como a análise acima independe da escolha de $A \in \mathbb{R}^2$, temos $G = \langle T_{\vec{u}}, T_{\vec{v}} \rangle = \{T_{\vec{u}}^i \circ T_{\vec{v}}^j \mid i, j \in \mathbb{Z}\}$.

Chamemos este grupo de C_1 e $T_{\vec{u}}, T_{\vec{v}}$ geradores minimais de C_1 .

Nota. C_1 é (também) chamado de grupo reticulado do plano.

A Figura 2.30 ilustra um ladrilhamento $(\mathcal{L}_L(\mathbb{R}^2), C_1)$, onde L é o ladrilho (compacto) hachurado e também parte do Grafo de Cayley de C_1 . A partir do grafo é fácil estabelecer a relação definidora reduzida $XYX^{-1}Y^{-1} = 1$, logo, $G = \langle X, Y \mid XYX^{-1}Y^{-1} = 1 \rangle$.

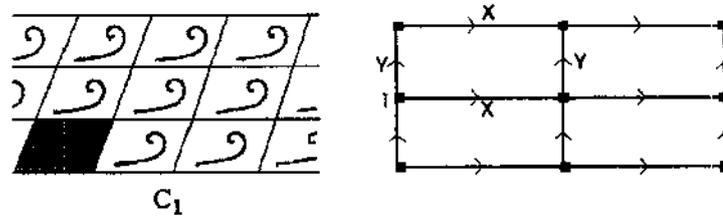


FIGURA 2.30

C_1 é subgrupo de G em qualquer dos casos citados no início desta seção.

A)2)a) G possui somente isometrias que preservam orientação dentre as quais rotações, porém todas com giro de 180° .

PROPOSIÇÃO 24. Se $f = \rho_{O,180^\circ} \in G$ e $R = \langle T_{\vec{u}/2}, T_{\vec{v}/2} \rangle$; $T_{\vec{u}}, T_{\vec{v}}$ geradores minimais de C_1 , então $R(O)$ é o conjunto de centros de rotação de G .

Demonstração.

Temos que $g = T_{\vec{u}}^i \circ T_{\vec{v}}^j \circ f$; $i, j \in \mathbb{Z}$ é uma isometria que preserva orientação com ponto fixo $O' = T_{\vec{u}}^i \circ T_{\vec{v}}^j(O)$ (lembramos que $T_{\vec{a}}^k = kT_{\vec{a}}$; $\forall k \in \mathbb{Z}$). Portanto, g é uma rotação de centro O' .

Com isto, temos que $R(O)$ é um reticulado de centros de rotações gerado por $T_{\vec{u}/2}$ e $T_{\vec{v}/2}$ (Figura 2.31). E mais, como composta de duas rotações de 180° é translação, temos que $R(O)$ é o conjunto dos centros de rotação de G . ■

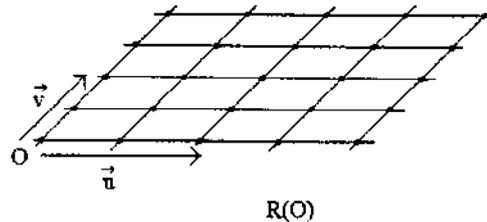


FIGURA 2.31

Como toda rotação de G pode ser gerada a partir de f e as translações geradoras minimais, temos $G = \langle \rho_{O,180^\circ}, T_{\vec{u}}, T_{\vec{v}} \rangle$.

Chamemos este grupo de C_2 .

É fácil ver que C_2 também pode ser tomado como grupo gerado por $T_{\vec{u}} \circ \rho_{O,180^\circ}$, $T_{\vec{v}} \circ \rho_{O,180^\circ}$ e $\rho_{O,180^\circ}$, ou seja, $C_2 = \langle \rho_{O,180^\circ}, T_{\vec{u}} \circ \rho_{O,180^\circ}, T_{\vec{v}} \circ \rho_{O,180^\circ} \rangle$.

A Figura 2.32 ilustra um ladrilhamento $(\mathcal{L}_L(\mathbb{R}^2), C_2)$ e parte do Grafo de Cayley de C_2 , donde concluímos que $C_2 = \langle X, Y, Z \mid X^2 = Y^2 = Z^2 = (XYZ)^2 = 1 \rangle$.

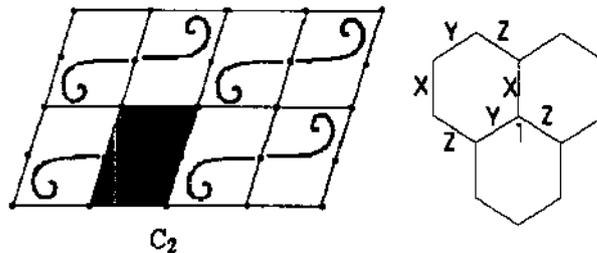


FIGURA 2.32

O procedimento empregado acima sempre se repetirá, ou seja, sempre que tomarmos G , teremos que determinar seus centros de rotação.

A)2)b) G possui somente isometrias que preservam orientação dentre as quais, uma rotação de $360^\circ/p$ com $p \in \mathbb{N}$, $p > 2$.

Seja $f = \rho_{O,360^\circ/p}$ esta rotação. Tomemos $g = \rho_{A,360^\circ/q}$, $q \in \mathbb{N}$, $q > 1$ tal que $d(O, A) > 0$ seja o mínimo possível (isto é possível pois o grupo é discreto).

Observação. g existe, pois $T_{\vec{u}} \circ \rho_{A,360^\circ/p}$ é rotação de $360^\circ/p$ com centro distinto de A .

Temos que $f \circ g = \rho_{B,-360^\circ/r}$ onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$, $r \in \mathbb{N}$, $r > 1$ (Teorema da Soma dos Ângulos da Composta de Rotações).

Assim, chegamos a três possibilidades a serem examinadas:

A)2)b)i) $p = q = r = 3$ (portanto, OAB é um triângulo equilátero).

PROPOSIÇÃO 25. Nas condições acima, $C = \left\{ T_{O,A}^i \circ T_{O,B}^j(O) \mid i, j \in \mathbb{Z} \right\}$ é o conjunto dos centros de rotação de G .

Demonstração.

Usando seguidamente o Teorema da Soma dos Ângulos da Composta de Rotações a partir de f e g , temos que C está contido no conjunto dos centros de rotação de G .

O é centro de uma figura hexagonal regular H de vértices $A, B, f(A), f(B), f^2(A), f^2(B)$ que não possui centros de rotação, exceto os vértices e o próprio O . Observando que qualquer um destes vértices é centro de uma rotação f' de $360^\circ/3$, podemos tomar essas rotações, aplicar o mesmo procedimento dado a f e obter novas figuras hexagonais regulares com centros nos vértices de H . Essas novas figuras não possuem centros de rotação, exceto os vértices de H e seus próprios vértices (Figura 2.33).

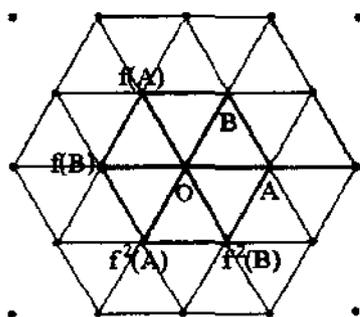


FIGURA 2.33

Procedendo recursivamente sobre as novas figuras, concluímos que C é o conjunto dos centros de rotação de G . ■

Uma outra observação: todas as rotações de G são da forma $\rho_{P,360^\circ/3}^i$ com $i \in \mathbb{Z}$ e $P \in C$.

Determinemos as translações geradoras minimais de C_1 .

A composta $f \circ g^2 = T_{Af(A)}$ é uma translação de menor amplitude em G . De fato, se $\exists T_{\vec{a}} \in G$ de menor amplitude que $T_{\vec{a}} \circ \rho_{A,360^\circ/3} = \rho_{A',360^\circ/3}$ onde $\Delta A'AT_{\vec{a}}(A)$ é tal que $\hat{A}' = 360^\circ/3$. Logo, $A' \notin C$, uma contradição.

A outra translação pode ser $g \circ f \circ g = T_{Bg(B)}$.

Chamemos este grupo de C_3 . Logo, $C_3 = \langle \rho_{O,360^\circ/3}, \rho_{A,360^\circ/3} \rangle$.

A Figura 2.34 ilustra o ladrilhamento $(\mathcal{L}_L(\mathbb{R}^2), C_3)$ e parte do Grafo de Cayley de C_3 . Concluimos que $C_3 = \langle X, Y \mid X^3 = Y^3 = (XY)^3 = 1 \rangle$.

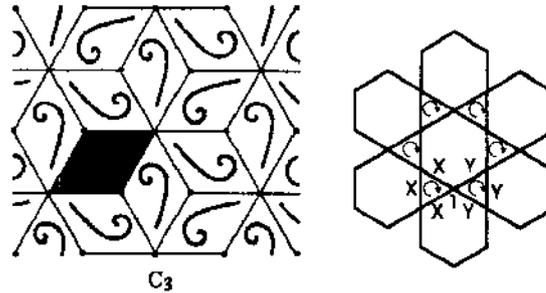


FIGURA 2.34

A)2)b)ii) $p = r = 4, q = 2$ ($p = q = 4, r = 2$ contraria a escolha de A , pois $d(O, B) < d(O, A)$).

Assim, OAB é um triângulo isósceles retângulo em A .

Usando o Teorema da Soma dos Ângulos da Composta de Rotações (e o mesmo raciocínio do item A)2)b)i), temos que $C = \{T_{O,A}^i \circ T_{O,B}^j(O) \mid i, j \in \mathbb{Z}\}$ é o reticulado de centros de rotação de G (Figura 2.35).

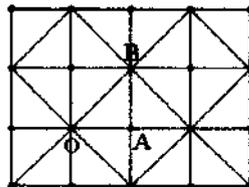


FIGURA 2.35

Quanto às translações: $g \circ f^2 = T_{Og(O)}$ e $f \circ g \circ f = T_{g(B)B}$ são as translações geradoras de C_1 (são de mesma amplitude).

De fato, se $\exists T_{\bar{a}} \in G$ de amplitude menor que $T_{Og(O)}$, basta tomar $T_{\bar{a}} \circ g$ que é uma rotação com centro não pertencente a C , para chegarmos a uma contradição.

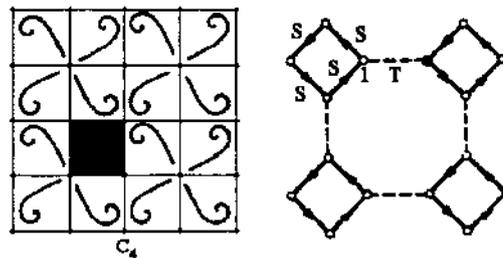


FIGURA 2.36

Chamemos este grupo de C_4 . Assim, $C_4 = \langle \rho_{O,360^\circ/4}, \rho_{A,360^\circ/2} \rangle$.

A Figura 2.36³ ilustra o ladrilhamento $(\mathcal{L}_L(\mathbb{R}^2), C_4)$ e parte do grafo de C_4 , donde concluímos que $C_4 = \langle X, Y \mid X^4 = Y^2 = (XY)^4 = 1 \rangle$.

A)2)b)iii) $p = 3, q = 2, r = 6$ (ou $p = 6, q = 2, r = 3$); ($p = 3, q = 6, r = 2$ contraria a escolha de A , pois $d(O, B) < d(O, A)$).

Temos que o triângulo OAB é tal que $\hat{O} = 60^\circ, \hat{A} = 90^\circ, \hat{B} = 30^\circ$.

Com o mesmo procedimento do item A)2)b)i), chegamos ao seguinte reticulado de centros de rotação de G (Figura 2.37).

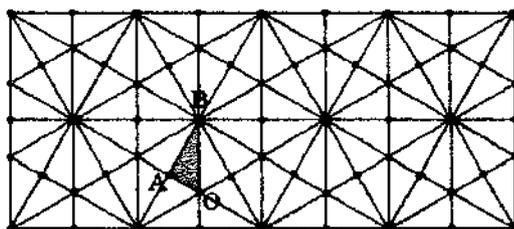


FIGURA 2.37

Quanto às translações: $g \circ (f \circ g)^3 = T_{\overrightarrow{Bg(B)}}$ e $f \circ (f \circ g)^2 = T_{\overrightarrow{Bf(B)}}$ são as translações geradoras de C_1 (são de mesma amplitude).

De fato, se $\exists T_{\vec{a}} \in G$ de amplitude menor que $T_{\overrightarrow{Bg(B)}}$, basta analisar $T_{\vec{a}} \circ h_i$, $i = 1, 2, 3$ onde $h_i \in G$ são as rotações com centros nos pontos médios dos lados do $\triangle Bf(B)f^2(B)$. Concluimos que haverá rotação com centro não pertencente a C , o que é uma contradição.

Chamemos este grupo de C_6 . Assim, $C_6 = \langle \rho_{O,360^\circ/3}, \rho_{A,360^\circ/2} \rangle$.

A Figura 2.38 ilustra um ladrilhamento $(\mathcal{L}_L(\mathbb{R}^2), C_6)$ e parte do respectivo grafo. Temos, portanto, $C_6 = \langle X, Y \mid X^2 = Y^3 = (XY)^6 = 1 \rangle$.

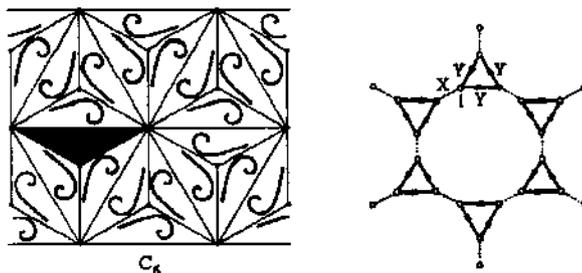


FIGURA 2.38

³Os Grafos de Cayley dos grupos discretos de isometrias associados a ladrilhamentos das figuras 2.36, 2.38, 2.40, 2.42, 2.44, 2.46, 2.47, 2.48, 2.51, 2.52, 2.53, 2.55, 2.56 e 2.57 foram adaptadas de ilustrações da referência [COXETER III].

Nota referente à notação. A nomenclatura C_k se deve ao fato do grupo possuir rotações de $360^\circ/k$.

C_1, C_2, C_3, C_4 e C_6 são os (únicos) cinco grupos discretos de isometrias que possuem translações LI e possuem somente isometrias que preservam orientações.

B)1)a) G possui isometrias que não preservam orientação dentre as quais uma reflexão R_r , porém não possui rotações.

Sejam $T_{\vec{u}}$ e $T_{\vec{v}}$ translações geradoras minimais de C_1 . Suponhamos que $\|\vec{u}\| \leq \|\vec{v}\|$. É fácil ver que $R_r \circ T_{\vec{u}} \circ R_r^{-1} = T_{R_r(\vec{u})}$.

Há dois casos a considerar:

B)1)a)i) \vec{u} não é paralelo e nem perpendicular a r .

Então, $T_{R_r(\vec{u})}$ e \vec{u} são LI e $\|R_r(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$. Logo, podemos tomar $T_{R_r(\vec{u})} = T_{\vec{v}}$. Desta forma, temos que r é paralela à diagonal do losango de vértices $O, T_{\vec{u}}(O), T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}(O), T_{\vec{v}}(O)$ que contém O (Figura 2.39).

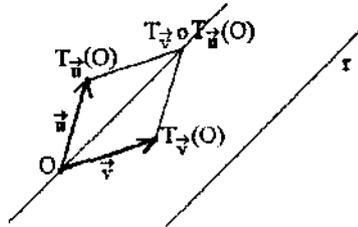


FIGURA 2.39

Seja d o comprimento da diagonal do losango ligando $T_{\vec{u}}(O)$ a $T_{\vec{v}}(O)$.

PROPOSIÇÃO 26. $G (= C_1 \cup \{f \circ R_r \mid f \in C_1\})$ possui reflexões R_s tal que $s//r$, $d(s, r) = k\frac{1}{2}d$, $k \in \mathbb{N}^*$ e glisso-reflexões $GR_{s, \vec{a}}$ tal que $s//r$, $d(r, s) = k\frac{1}{4}d$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Demonstração.

Se $R_s \in G$ é tal que s não é paralela a r , então $R_s \circ R_r$ é uma rotação. Mas G não possui rotações, portanto $s//r$. Se $R_s, R_t \in G$ e $d(s, t) < \frac{1}{2}d$, então $R_s \circ R_t = T_{\vec{a}}$ ($\|\vec{a}\| < d$) é tal que $T_{\vec{a}} \circ T_{\vec{u}}$ ou $T_{\vec{a}} \circ T_{\vec{v}}$ possui amplitude menor que $T_{\vec{u}}$. Mas $T_{\vec{u}}$ é uma translação de menor amplitude em G , portanto $d(s, t) \geq \frac{1}{2}d$. Pela existência de $R_t \in G$ tal que $d(r, t) = \frac{1}{2}d$, temos que $d(s, t) = k_0\frac{1}{2}d$, $k_0 \in \mathbb{N}^*$.

Se $GR_{s, \vec{a}} \in G$ é tal que s não é paralela a r , então $GR_{s, \vec{a}} \circ R_r = T_{\vec{a}} \circ R_s \circ R_r$ é uma rotação de G , o que não é possível. Logo, $r//s$. Se $GR_{s, \vec{a}} \in G$ e $d(s, t) < \frac{1}{4}d$ onde t é reta de reflexão de alguma $R_t \in G$, então $GR_{s, \vec{a}} \circ R_t \circ (GR_{s, \vec{a}})^{-1} =$

R_t onde $d(l, t) < \frac{1}{2}d$, o que não é possível. Logo, $d(s, t) \geq \frac{1}{4}d$. Pela existência de $GR_{m, \bar{a}} \in G$ tal que $d(r, m) = \frac{1}{4}d$, temos que $d(s, t) = k_0 \frac{1}{4}d$, $k_0 \in \mathbb{N}^*$. ■

Chamemos este grupo de C_1^1 . Logo, $C_1^1 = \langle T_{\bar{u}}, R_r \rangle$, ou, então, $C_1^1 = \langle GR_{s, \bar{t}}, R_r \rangle$, onde $s//r$, $s \neq r$ e $\|\bar{t}\| = \frac{1}{2}\|\bar{u} + \bar{v}\|$.

A Figura 2.40 ilustra um ladrilhamento $(\mathcal{L}_L(\mathbb{R}^2), C_1^1)$ e parte do respectivo grafo, de onde deduzimos que $C_1^1 = \langle X, Y \mid X^2 = XY^2X^{-1}Y^{-2} = 1 \rangle$.

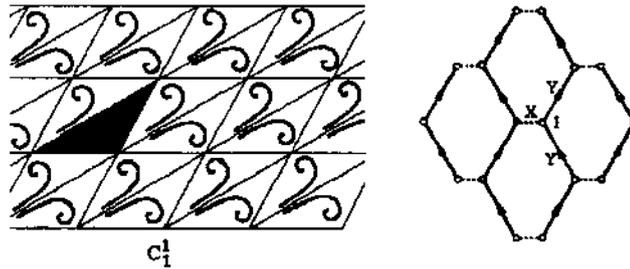


FIGURA 2.40

B)1)a)ii) Se $\bar{u} // r$ ou $\bar{u} \perp r$. (Aí $\bar{u} // T_{R_r(\bar{u})}$).

Fixemos $A \in r$, tomemos $B = A + \bar{u}$ e $C = A + \bar{v}$, l a reta perpendicular a \overline{AB} passando por seu ponto médio e s a reta paralela a l passando por A .

Seja S a faixa limitada por l e s . Temos que $C \in S$, pois, caso contrário, $T_{\bar{a}} = T_{-\bar{v}} + T_{\bar{u}}$ é tal que $\|T_{\bar{a}}\| < \|T_{\bar{v}}\|$, o que não é possível pela escolha “minimal” de $T_{\bar{v}}$ (Figura 2.41).

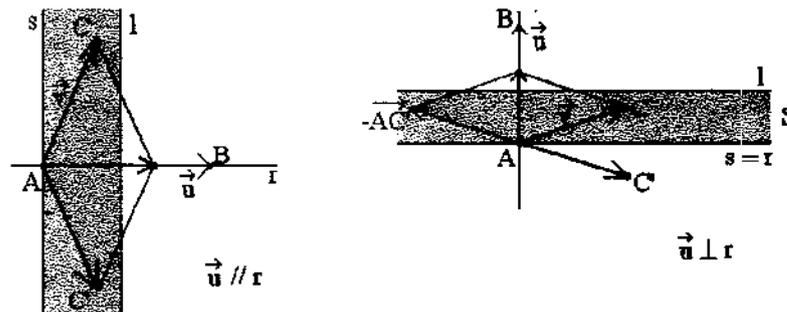


FIGURA 2.41

Suponhamos que $C \in \overset{\circ}{S}$. Logo, $R_r \circ T_{\bar{v}} \circ R_r^{-1} = T_{R_r(\bar{v})}$ onde $R_r(\bar{v}) = \overline{AC'}$. Daí $T_{\bar{v}} \circ T_{\overline{AC}}$ e $T_{\bar{v}} \circ T_{-\overline{AC'}}$ são translações por vetores paralelos a \bar{u} com amplitude menor que \bar{u} , uma contradição. Logo, $C \in s$ ou $C \in l$.

No caso $C \in l$, temos que $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{AC'}$. Logo, podemos tomar $T_{\overline{AC'}}$ e $T_{\overline{AC}}$ como geradores (que originam os geradores minimais) de C_1 . Como

r não é paralela e nem ortogonal a \overrightarrow{AC} , temos o caso anterior, B)1)a)i), e, assim, $G = C_1^1$.

No caso $C \in s$, temos um novo grupo.

Como $G = C_1 \cup \{f \circ R_r \mid f \in C_1\}$, por uma análise análoga à feita no item B)1)a)i), temos que suas reflexões e glisso-reflexões possuem retas de reflexão paralelas a r equidistantes $\frac{1}{2}\|\vec{v}\|$ entre si (caso $\vec{u} // r$) ou $\frac{1}{2}\|\vec{u}\|$ entre si (caso $\vec{u} \perp r$).

Podemos tomar $G = \langle T_{\vec{u}}, R_r, R_s \rangle$, $d(r, s) = \frac{1}{2}\|\vec{v}\|$, (caso $\vec{u} // r$) ou $G = \langle T_{\vec{v}}, R_r, R_s \rangle$, $d(r, s) = \frac{1}{2}\|\vec{u}\|$, (caso $\vec{u} \perp r$). É fácil ver que os dois grupos são isomorfos; logo, podemos considerá-los como único.

Chamemos este grupo de C_1^2 .

A Figura 2.42 ilustra um ladrilhamento $(\mathcal{L}_L(\mathbb{R}^2), C_1^2)$. A partir do Grafo de Cayley de C_1^2 , concluímos que $C_1^2 = \langle X, Y, Z \mid X^2 = Y^2 = XZX^{-1}Z^{-1} = YZY^{-1}Z^{-1} = 1 \rangle$.

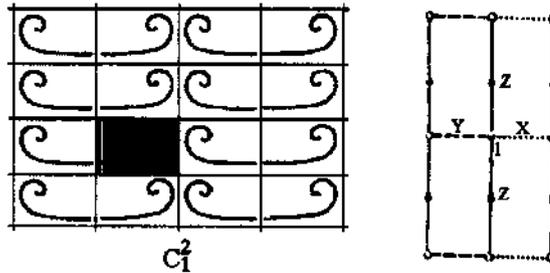


FIGURA 2.42

B)1)b) G possui isometrias que não preservam orientação dentre as quais uma glisso-reflexão, porém não possui rotações.

Temos que se $GR_{r,\vec{u}}$ é tal glisso-reflexão, então $GR_{r,\vec{u}} = T_{2\vec{u}}$. Logo, G possui translações paralelas a r , donde podemos concluir que o menor subgrupo H de G que possui $GR_{r,\vec{u}}$ e todas as translações paralelas a r é F_1^1 ou F_1^3 .

B)1)b)i) $H = F_1^1$.

Então, existe R_r , portanto estamos nos casos de B)1)a).

B)1)b)ii) $H = F_1^3$.

Então, existe uma glisso-reflexão $GR_{r,\vec{v}}$ em G tal que $GR_{r,\vec{v}}^2 = T_{\vec{v}}$ onde $T_{\vec{v}}$ é a menor translação paralela a r .

Tomemos $A_0 \in r$ e a_0 reta perpendicular a r em A_0 . Sejam a_i e A_i imagens de a_0 e A_0 por $GR_{r,\vec{v}}^i$, $i \in \mathbb{Z}$ (Figura 2.43).

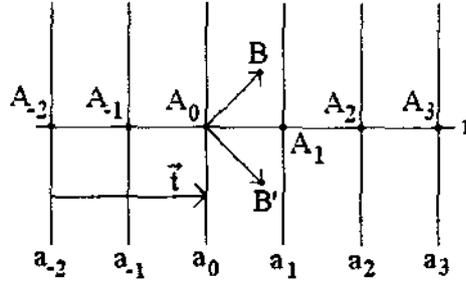


FIGURA 2.43

Seja $T_{\vec{k}} \in G$ uma translação de menor amplitude com \vec{k} não paralelo a r . Logo, $T_{\vec{k}}(A_0) = B$ é tal que $GR_{r,\vec{v}} \circ T_{\vec{k}} \circ GR_{r,\vec{v}}^{-1} = T_{G_{r,\vec{v}}(\vec{k})}$ onde $GR_{r,\vec{v}}(\vec{k}) = \overrightarrow{A_0B'}$.

Se $B \notin a_i$ para $i \in \mathbb{Z}$, temos que $T_{\vec{k}} \circ T_{\vec{t}} = T_{\vec{m}}$ onde \vec{m}/\vec{t} e $T_{\vec{m}} \circ T_{\vec{t}}^j$ para algum j conveniente é uma translação por um vetor de amplitude menor que \vec{t} , uma contradição. Logo, $B \in a_i$, $i \in \mathbb{Z}$ e, pela escolha de $T_{\vec{k}}$, temos que $B \in a_0, a_1$ ou a_{-1} .

Temos dois subcasos a considerar:

B)1)b)ii)a) $i = 1$ ou -1 .

Temos que $T_{\vec{k}}$ e $T_{\vec{t}}$ são as translações que geram as translações geradoras minimais de G ($T_{\vec{k}}$ é uma delas) e que $T_{-\vec{t}} \circ T_{\vec{k}} \circ GR_{r,\vec{v}} = T_{-\vec{t}} \circ GR_{s,\vec{t}} = T_{-\vec{t}} \circ T_{\vec{t}} \circ R_s = R_s$ onde s/r a uma distância de $\frac{1}{2}||\overrightarrow{BB'}||$. Logo, G possui uma reflexão e \vec{k} (e \vec{t}) não é paralelo e nem ortogonal a s . Temos, portanto, o grupo C_1^1 .

B)1)b)ii)b) $i = 0$.

Temos, então, um novo grupo, onde as translações que geram as translações minimais de C_1 são $T_{\vec{t}}$ e $T_{\vec{k}}$.

Como $G = C_1 \cup \{f \circ GR_{r,\vec{v}} \mid f \in C_1\}$, temos que G não possui reflexões (pois $T_{\vec{v}} \notin C_1$). G possui somente translações e glisso-reflexões com retas de reflexão paralelas a r equidistantes $\frac{1}{2}||\vec{k}'||$.

Chamemos este grupo de C_1^3 .

Seja $GR_{s,\vec{v}}$ tal que $d(r, s) = \frac{1}{2}||\vec{k}'||$. Logo, $C_1^3 = \langle T_{\vec{k}}, GR_{r,\vec{v}} \rangle$ ou $C_1^3 = \langle GR_{s,\vec{v}}, GR_{r,\vec{v}} \rangle$.

A Figura 2.44 ilustra um ladrilhamento $(\mathcal{L}_L(\mathbb{R}^2), C_1^3)$ e parte do Grafo de Cayley de C_1^3 . Temos que $C_1^3 = \langle X, Y \mid X^2 = Y^2 \rangle$.

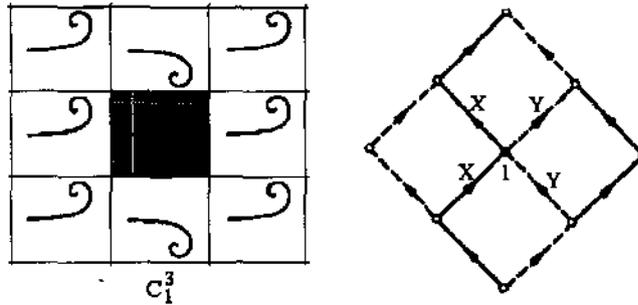


FIGURA 2.44

B)2)a) G possui isometrias que não preservam orientação dentre as quais uma reflexão R_r , porém possui rotações e estas são todas de 180° .

Temos, portanto, que C_2 é subgrupo de G .

Observação. Temos, baseados nos casos A)1) e A)2)a), que se $\rho_{O,180^\circ} \in C_2$, o reticulado de centros de rotação de C_2 é $C = \{T_{\frac{u}{2}}^i \circ T_{\frac{v}{2}}^j(O), i, j \in \mathbb{Z}\}$ onde T_u e T_v são geradoras minimais de C_1 . O reticulado gerado por C_1 é, pelo que vimos nos casos B)1)a)i) e B)1)a)ii), losangonal ou retangular. Portanto, há dois casos a considerar:

B)2)a)i) Suponhamos que o reticulado gerado por C_1 é losangonal.

Pelo Teorema da Invariância dos centros de rotação, temos que r deve conter uma diagonal de algum losango do reticulado gerado por C_1 (Figura 2.45).

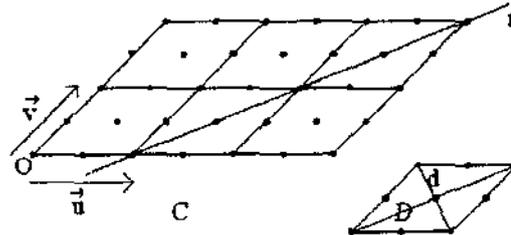


FIGURA 2.45

Como $G = C_2 \cup \{f \circ R_r \mid f \in C_2\}$, fazendo uma análise análoga à feita no item B)1)a)i), temos que as retas de reflexão de G ocorrem paralelas às diagonais D e d equidistantes $\frac{D}{2}$ e $\frac{d}{2}$ respectivamente e as retas de reflexão das glisso-reflexões ocorrem paralelas às diagonais D e d equidistantes $\frac{D}{4}$ e $\frac{d}{4}$ respectivamente.

Chamemos este grupo de C_2^1 . Logo, $C_2^1 = \langle T_{\bar{u}}, \rho_{O,180^\circ}, R_r \rangle$.

Melhorando: sejam $R_s, \rho_{A,180^\circ} \in C_2^1$ tal que $s \perp r$ e $d(A, s \cap r) = \frac{1}{2} \|\vec{u}\|$. É fácil ver que $C_2^1 = \langle R_s, R_r, \rho_{A,180^\circ} \rangle$.

A Figura 2.46 ilustra um ladrilhamento $(\mathcal{L}_L(\mathbb{R}^2), C_2^1)$ e parte do respectivo grafo. Temos que $C_2^1 = \langle X, Y, Z \mid X^2 = Y^2 = Z^2 = (XY)^2 = (XZY)^2 = 1 \rangle$.

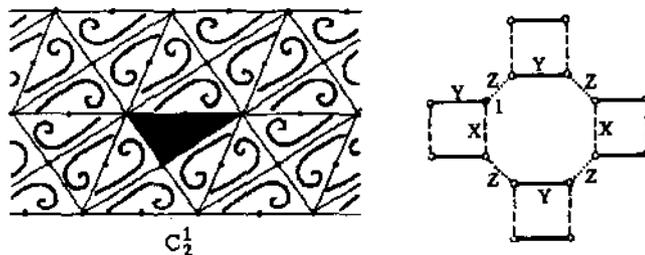


FIGURA 2.46

B)2)a)ii) Suponhamos que o reticulado gerado por C_1 é retangular.

Há dois subcasos a considerar:

B)2)a)ii)a) Suponhamos que r contenha um centro de rotação.

Fazendo a mesma análise do caso anterior, r deve ser paralela a \vec{u} ou a \vec{v} ($T_{\vec{u}}$ e $T_{\vec{v}}$ geradores minimais de C_1).

Como $G = C_2 \cup \{f \circ R_r \mid f \in C_2\}$, as retas de reflexão das reflexões de G ocorrem paralelas a \vec{u} e \vec{v} equidistantes $\frac{1}{2} \|\vec{u}\|$ e $\frac{1}{2} \|\vec{v}\|$ respectivamente (mesma análise do caso B)1)a)i)).

Analogamente para as retas das glisso-reflexões.

Chamemos este grupo de C_2^2 . Logo, $C_2^2 = \langle T_u, T_v, \rho_{O,180^\circ}, R_r \rangle$ ou melhor, $C_2^2 = \langle R_k, R_l, R_r, R_s \rangle$, onde $k // l, r // s, k \perp r$ e $A = r \cap k, B = r \cap l, C = s \cap k, D = s \cap l$ formam uma figura quadrilátera, cujo interior não possui centros de rotação.

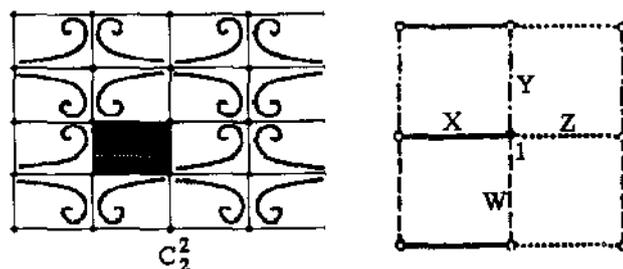


FIGURA 2.47

A Figura 2.47 ilustra um ladrilhamento $(\mathcal{L}_L(\mathbb{R}^2), C_2^2)$ e parte do respectivo grafo, donde concluímos que $C_2^2 = \langle X, Y, Z, W \mid X^2 = Y^2 = Z^2 = W^2 = (XY)^2 = (YZ)^2 = (ZW)^2 = (WX)^2 = 1 \rangle$

B)2)a)ii)b) *Suponhamos que r não contenha centros de rotação.*

Novamente, por uma análise análoga à empregada no item B)2)a)i), temos que r deve ser a mediatriz entre duas linhas consecutivas e paralelas de centros de rotação (portanto r é paralela ou a \vec{u} ou a \vec{v}).

Como $G = C_2 \cup \{f \circ R_r \mid f \in C_2\}$, as reflexões são paralelas a r equidistantes, ou $\frac{1}{2}||\vec{u}||$, ou $\frac{1}{2}||\vec{v}||$.

As glisso-reflexões são paralelas a r equidistantes, ou $\frac{1}{2}||\vec{u}||$, ou $\frac{1}{2}||\vec{v}||$ e perpendiculares a r passando pelos centros de rotação.

Chamemos este grupo de C_2^3 .

Sejam $\rho_{O,180^\circ}, \rho_{A,180^\circ} \in C_2$ tais que $\overline{OA} // r$, entre O e a intersecção da perpendicular a r contendo O não exista centros de rotação, assim como entre O e A . Por conseguinte, é fácil ver que $C_2^3 = \langle \rho_{A,180^\circ}, \rho_{O,180^\circ}, R_r \rangle$.

A Figura 2.48 ilustra um ladrilhamento $(\mathcal{L}_L(\mathbb{R}^2), C_2^3)$. O Grafo de Cayley de C_2^3 nos permite concluir que $C_2^3 = \langle X, Y, Z \mid X^2 = Y^2 = Z^2 = XZXYZY = 1 \rangle$.

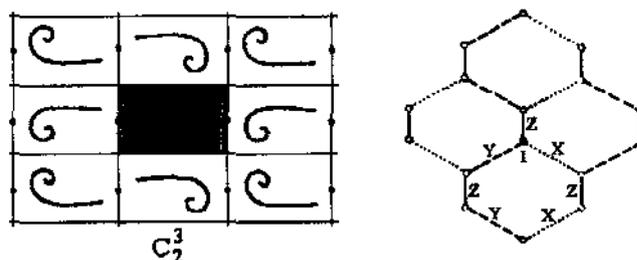


FIGURA 2.48

B)2)b) G possui isometrias que não preservam orientação, dentre as quais uma glisso-reflexão, porém possui rotações e estas são todas de 180° .

Novamente, chegamos a dois subcasos:

B)2)b)i) *Suponhamos que o reticulado gerado por C_1 é losangonal.*

Se $\rho_{A,180^\circ} \in C_2$ e $GR_{r,\vec{t}}$ é a glisso-reflexão, temos, pelo Teorema da Invariância dos centros de rotação, que r deve ser paralela à reta que bissecta o ângulo formado por \vec{u} e \vec{v} passando por centros de rotação ($T_{\vec{u}}$ e $T_{\vec{v}}$ são as

translações geradoras minimais de C_1). Assim, se $\vec{t} = m(\vec{u} + \vec{v})$ para algum $m \in \mathbb{Z}$, então $T_{-\vec{t}} \in G$ e $T_{-\vec{t}} \circ GR_{r,\vec{t}} = R_r$.

Se $2\vec{t} = m(\vec{u} + \vec{v})$ para algum $m \in (2n+1)\mathbb{Z}$, então $T_{\vec{u}} \circ GR_{r,\vec{t}} = GR_{s,\vec{t} + \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})} = GR_{s,n_0(\vec{u} + \vec{v})}$ onde $s//r$ a uma distância de $\frac{1}{4}||\overline{T_u(O)T_v(O)}||$ e $n_0 \in \mathbb{Z}$. Logo, $T_{-n_0(\vec{u} + \vec{v})} \circ GR_{s,n_0(\vec{u} + \vec{v})} = R_s$ (Figura 2.49).

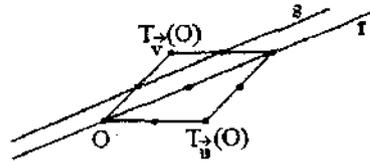


FIGURA 2.49

Conclusão: este grupo possui reflexão R_l tal que l não é paralela e nem perpendicular a \vec{u} e \vec{v} . Logo, este grupo é o C_2^1 .

B)2)b)ii) Suponhamos que o reticulado gerado por C_1 é retangular.

Fazendo a mesma análise do item anterior, r deve ser paralela a \vec{u} ou a \vec{v} . Sem perda de generalidade, suponhamos que $r//\vec{u}$. Há mais dois subcasos a considerar:

B)2)b)ii)a) r contém centros de rotações.

Então, $T_{-v} \circ GR_{r,\vec{t}} = R_s$ onde s pode ou não conter centros de rotação. Logo, caímos nos casos B)2)a)ii)a) e B)2)a)ii)b).

B)2)b)ii)b) r não contém centros de rotação.

Temos um novo grupo.

Como $G = C_2 \cup \{f \circ G_{r,\vec{t}} \mid f \in C_2\}$, é fácil ver que não há reflexões em G e os eixos de reflexões das glisso-reflexões formam uma rede de retas perpendiculares de tal modo que cada centro de rotação está no centro de um retângulo da rede (Figura 2.50).

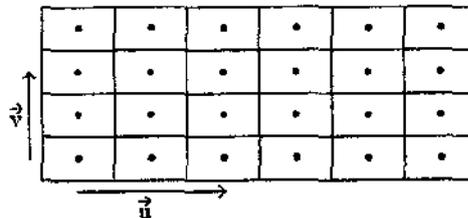


FIGURA 2.50

Chamemos este grupo de C_2^4 .

Sejam $GR_{s, \frac{\pi}{2}}, GR_{r, \frac{\pi}{2}} \in C_2^4$ ($T_{\vec{u}}$ e $T_{\vec{v}}$ translações geradoras minimais de C_1). Temos que $C_2^4 = \langle GR_{s, \frac{\pi}{2}}, GR_{r, \frac{\pi}{2}} \rangle$.

A Figura 2.51 ilustra um ladrilhamento $(\mathcal{L}_L(\mathbb{R}^2), C_2^4)$, do qual decorre que $C_2^4 = \langle X, Y \mid (XY)^2 = (X^{-1}Y)^2 = 1 \rangle$.

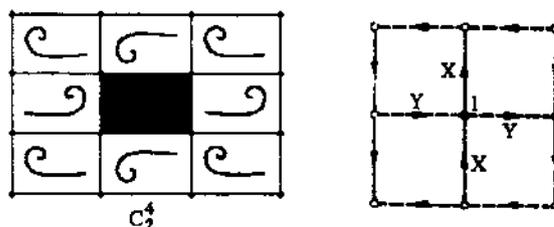


FIGURA 2.51

B)3) G possui isometrias que não preservam orientação, porém possui rotações de $360^\circ/p$, $p \in \mathbb{N}^*$, $p > 2$.

Há três casos a analisar:

B)3)a) C_3 é subgrupo de G .

Observação. Como o reticulado gerado por C_1 é losangonal (item A)2)b)), temos que se G possui uma glisso-reflexão, então pelo caso B)2)b)i), G deverá possuir uma reflexão. Logo, analisaremos G tomando apenas reflexões.

Consideremos o lasango $ABCD$, gerador do reticulado C de centros de rotação, de modo que \overline{BC} é a diagonal menor, \overline{AD} é a diagonal maior. Pelo Teorema da Invariância dos centros de rotação, temos que $r // \overline{BC}$ ou $r // \overline{AD}$.

Assim, temos dois casos a analisar:

B)3)a)i) $r // \overline{BC}$.

Sem perda de generalidade, $\overline{BC} \subset r$.

Temos que $\rho_{C, 360^\circ/3} \circ R_r = R_s$ onde $\overline{AC} \subset s$ e $\rho_{C, 720^\circ/3} \circ R_r = R_t$ onde $\overline{CD} \subset t$. Com isto, G contém três famílias de reflexões paralelas equidistantes $\frac{\|\overline{AD}\|}{2}$ de tal modo que cada triângulo equilátero do reticulado (de centros de rotação) possui lados em retas de reflexão.

Notemos que as famílias de retas de reflexão são também de retas de glisso-reflexão.

Chamemos este grupo de C_3^1 . Logo, $C_3^1 = \langle R_r, R_s, R_t \rangle$.

A Figura 2.52 ilustra um ladrilhamento $(\mathcal{L}_L(\mathbb{R}^2), C_3^1)$. Temos que $C_3^1 = \langle X, Y, Z \mid X^2 = Y^2 = Z^2 = (XY)^3 = (YZ)^3 = (ZX)^3 = 1 \rangle$.

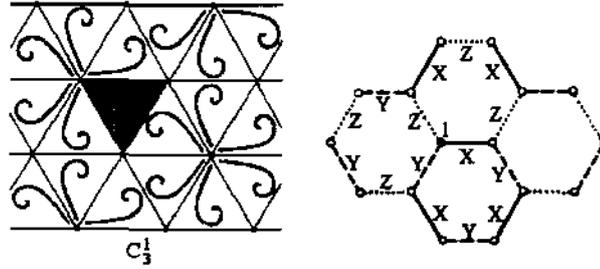


FIGURA 2.52

B)3)a)ii) $r // \overline{AD}$.

Sem perda de generalidade, $\overline{AD} \subset r$.

O procedimento é análogo ao feito no item anterior, exceto na equidistância das retas de reflexões, que neste caso é $\frac{3}{2}||\overline{AB}||$.

Vale a mesma observação feita no item anterior sobre as glisso-reflexões. Chamemos este grupo de C_3^2 e chegamos a $C_3^2 = \langle \rho_{O,360^\circ/3}, R_r \rangle$, $O \notin r$.

A Figura 2.53 ilustra um ladrilhamento $(\mathcal{L}_L(\mathbb{R}^2), C_3^2)$. Notemos que $C_3^2 = \langle X, Y \mid X^2 = Y^3 = (Y^{-1}XYX)^2 = 1 \rangle$.

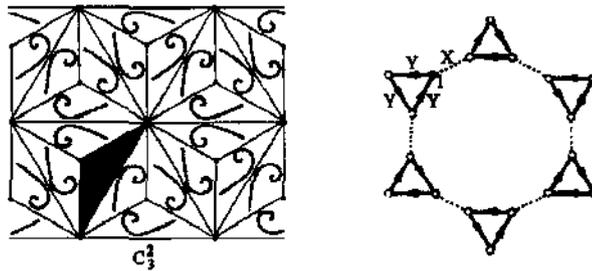


FIGURA 2.53

B)3)b) C_4 é subgrupo de G .

Consideremos o reticulado quadrangular gerado pelos centros de rotação de C_4 . Suponhamos que $ABCD$ seja o quadrado gerador do reticulado (Figura 2.54).

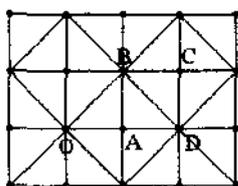


FIGURA 2.54

Pelo Teorema da Invariância dos centros de rotação, temos que se $GR_{r,\tilde{r}} \in G$, r deve ser paralela, ou a \overline{AB} , ou \overline{AC} , ou \overline{AD} , ou \overline{BD} .

É fácil ver, a partir de $GR_{r,\tilde{r}}$, que $\exists R_s, GR_{s,\tilde{s}} \in G$ tal que $s \perp r$ ou a \overline{AC} . Isto nos remete à análise apenas de reflexões R_r com $r // \overline{AB}$ ou $r // \overline{AC}$, portanto dois casos a analisar:

B)3)b)i) Seja $R_r \in G$ tal que $r // \overline{AB}$.

É fácil encontrar (construir) as quatro famílias de retas de reflexão de G . Elas são tais que:

Todas possuem centros de rotação de $360^\circ/4$.

Duas delas são ortogonais com retas equidistantes $\|\overline{AB}\|$ e as outras duas são também ortogonais com retas equidistantes $\|\overline{AC}\|$.

Chamemos este grupo de C_4^1 e notemos que $C_4^1 = \langle R_r, R_s, R_t \rangle$, onde r, s, t contêm os lados de um dos dois triângulos de ângulos $45^\circ, 90^\circ, 45^\circ$ no qual $ABCD$ se decompõe.

A Figura 2.55 ilustra um ladrilhamento $(\mathcal{L}_L(\mathbb{R}^2), C_4^1)$. Do Grafo de Cayley de C_4^1 tiramos que

$$C_4^1 = \langle X, X, Z \mid X^2 = Y^2 = Z^2 = (XY)^4 = (YZ)^4 = (ZX)^2 = 1 \rangle.$$

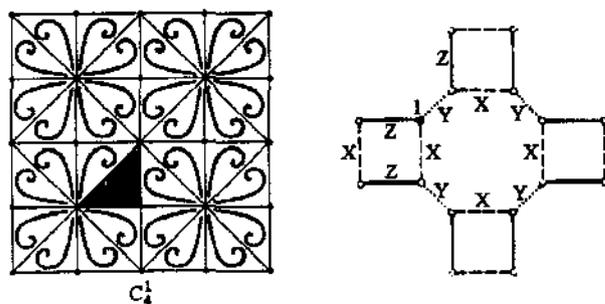


FIGURA 2.55

B)3)b)ii) Seja $R_r \in G$ tal que $r // \overline{AC}$.

Logo, r contém apenas centros de rotação múltipla de $360^\circ/2$.

Desta forma, existem duas famílias de retas de reflexão (equidistantes $\|\overline{AC}\|$) ortogonais.

Chamemos este grupo de C_4^2 e notemos que $C_4^2 = \langle \rho_{O,360^\circ/4}, R_r \rangle$, onde $O \notin r$.

A Figura 2.56 ilustra um ladrilhamento $(\mathcal{L}_L(\mathbb{R}^2), C_4^2)$. Do Grafo de Cayley tiramos $C_4^2 = \langle X, Y \mid X^4 = Y^2 = (X^{-1}YXY)^2 = 1 \rangle$.

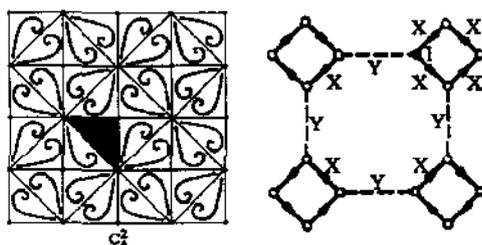


FIGURA 2.56

B)3)c) C_6 é subgrupo de G .

Baseados no reticulado C de centros de rotação e no Teorema da Invariância dos centros de rotação, se $GR_{s,\vec{r}}$, temos que s deve ser uma reta que une dois pontos de C . Mas toda reta que une dois pontos de C deve conter um centro de rotação de $360^\circ/2$. Seja $\rho_{A,360^\circ/2} \in G$, $A \in s$. Logo, $\rho_{A,360^\circ/2} \circ GR_{s,\vec{r}} = R_r \in G$ é tal que $r \perp s$. Isto nos permite analisar somente as reflexões em G . Assim sendo, suponhamos que $R_r \in G$.

Como $G = C_6 \cup \{f \circ R_r \mid f \in C_6\}$, é fácil verificar que por todo ponto de C deve passar uma reta de reflexão de G . Ademais, se um centro de rotação possui rotação de $360^\circ/6$, então por este centro passam 6 retas de reflexão. Analogamente para centros de $360^\circ/4$ e $360^\circ/3$.

Chamemos este grupo de C_6^1 e notemos que $C_6^1 = \langle R_r, R_s, R_t \rangle$, onde r, s, t são retas que contêm os lados de um triângulo gerador de C .

A Figura 2.57 ilustra um o ladrilhamento $(\mathcal{L}_L(\mathbb{R}^2), C_6^1)$. Do Grafo de Cayley de C_6^1 temos $C_6^1 = \langle X, Y, Z \mid X^2 = Y^2 = Z^2 = (XY)^2 = (YZ)^3 = (ZX)^6 = 1 \rangle$.

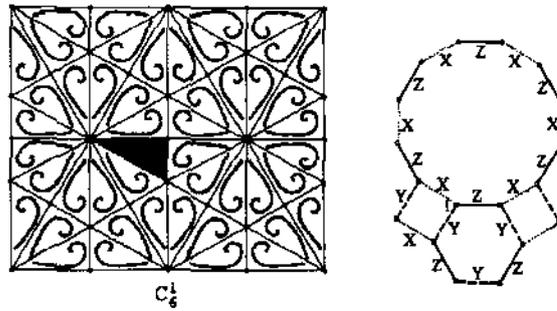


FIGURA 2.57

Definição 14. Os grupos $C_1, C_2, C_3, C_4, C_6, C_1^1, C_1^2, C_1^3, C_2^1, C_2^2, C_2^3, C_2^4, C_3^1, C_3^2, C_4^1, C_4^2$ e C_6^1 são chamados de **grupos cristalográficos**.

Em nossa notação, C_j^i é subgrupo de C_j .

O número de grupos cristalográficos é finito em qualquer \mathbb{R}^n . Tal resultado é conhecido como Teorema de Bieberbach e pode ser encontrado na referência [WOLF]. Sabemos que em dimensão três o número de tais grupos é 230, enquanto em dimensão quatro este número é 4.783.

Resumimos a seguir a classificação dos grupos discretos de isometrias do plano euclidiano:

I) 2 famílias de grupos que não possuem translações: $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, chamados de *grupos roseta* (grupos finitos).

II) 7 grupos que possuem todos os vetores translação paralelos entre si, chamados de *grupos de faixas* (grupos infinitos).

III) 17 grupos que possuem vetores translação linearmente independentes, chamados de *grupos cristalográficos* (grupos infinitos).

Os grupos de I) e II) estão associados a ladrilhamentos no plano euclidiano com ladrilhos não-compactos enquanto que os de III) estão associados a ladrilhamentos com ladrilhos compactos.

Capítulo 3

Ladrilhamentos e Grupos Discretos de Isometrias no Plano Hiperbólico

Neste capítulo estudaremos alguns grupos de isometrias no plano hiperbólico, particularmente os grupos discretos de isometrias. Estes grupos possuem diversas peculiaridades, dentre as quais a associação com uma série de ladrilhamentos no plano hiperbólico. Mais precisamente, é esta associação que estamos interessados em explorar neste capítulo. Para tanto, admitiremos conceitos e resultados básicos de geometria hiperbólica plana.

As principais referências para este capítulo são [BEARDON], [KLINGENBERG], [MAGNUS II] e [CARATHÉODORY].

É conveniente uma pequena introdução a algumas propriedades “globais” de isometrias que neste trabalho são enfocadas tendo por base o plano hiperbólico. Utilizaremos os modelos de Poincaré do semi-plano superior: $\mathfrak{S} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ e do disco unitário: $\mathfrak{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ para representação do plano hiperbólico.

Denotaremos $r_\infty = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z = 0\} \cup \{\infty\}$ e $c_\infty = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ por reta e círculo no infinito de \mathfrak{S} e \mathfrak{C} respectivamente. Utilizaremos, ainda, a notação $\mathfrak{S}^* = \mathfrak{S} \cup r_\infty$ e $\mathfrak{C}^* = \mathfrak{C} \cup c_\infty$.

3.1 O Modelo \mathfrak{S}

3.1.1 Uma Introdução Riemanniana ao Modelo Hiperbólico \mathfrak{S}

Nosso objetivo nesta seção é tratar os modelos hiperbólicos como variedades riemannianas. Para tanto, é preciso definir um produto interno variável ponto a ponto nesses modelos, a partir do qual, introduziremos a noção de isometria.

Definição 1. Chamemos **métrica riemanniana sobre a variedade bidimensional M de dimensão m** a aplicação $g : M \rightarrow S(m, \mathbb{R})$ onde $g_{ij} : M \rightarrow \mathbb{R}$ são diferenciáveis e $(g_{ij}(z))$ é simétrica e positiva definida.

Se $M = \mathfrak{S}$, tomemos $g_{ij}(x, y) = \frac{1}{y^2}$ se $i = j$ e $g_{ij}(x, y) = 0$ se $i \neq j$.

g_{ij} é uma métrica denominada métrica hiperbólica do semi-plano superior. Em vizinhanças coordenadas de M sempre é possível definir tais g_{ij} .

Definição 2. Definimos o **produto interno** $\langle \cdot, \cdot \rangle : T_z M \times T_z M \rightarrow \mathbb{R}$

no ponto $z \in M$ por $\langle v_1, v_2 \rangle = [a_1 \ \dots \ a_m] \cdot (g_{ij}(z)) \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ onde $v_1 = (a_1, \dots, a_m)$ e $v_2 = (b_1, \dots, b_m)$ são vetores em $T_z M$ e $g_{ij}(z)$ são como na Definição 1.

Notemos que em \mathfrak{S} , $\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{1}{y^2} \cdot (a_1 a_2 + b_1 b_2)$.

Definição 3. Definimos a **norma** $|\cdot| : M \rightarrow \mathbb{R}_+$ no ponto $z \in M$ por $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ onde $v \in T_z M$.

Definição 4. Sejam $v_1 = (a_1, \dots, a_m)$ e $v_2 = (b_1, \dots, b_m)$ vetores em $T_z M$. Definimos **M -ângulo α** entre v_1 e v_2 de tal modo que $\cos \alpha = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{|v_1| \cdot |v_2|}$.

PROPOSIÇÃO 1. O \mathfrak{S} -ângulo α entre v_1 e v_2 em $T_{(x,y)}\mathfrak{S}$ é o mesmo que o ângulo α entre v_1 e v_2 em \mathbb{R}^2 .

Demonstração.

Basta observar que em \mathbb{R}^2 , $\langle v_1, v_2 \rangle_{(\mathbb{R}^2)} = a_1 a_2 + b_1 b_2$, $(|v_i|)_{(\mathbb{R}^2)} = \sqrt{\langle v_i, v_i \rangle_{(\mathbb{R}^2)}}$

e $\cos \alpha = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle_{(\mathbb{R}^2)}}{|v_1|_{(\mathbb{R}^2)} \cdot |v_2|_{(\mathbb{R}^2)}}$ onde α é ângulo euclidiano entre v_1 e v_2 .

Assim, $\langle v_1, v_2 \rangle_{(\mathfrak{S})} = \frac{1}{y^2} \langle v_1, v_2 \rangle_{(\mathbb{R}^2)}$ e $|v_i|_{(\mathfrak{S})} = \frac{1}{y} |v_i|_{(\mathbb{R}^2)}$. ■

Devido à proposição acima, chamemos \mathfrak{S} -ângulo α de ângulo (euclidiano) α .

Definição 5. Seja

$$\gamma : [r, s] \subset \mathbb{R} \rightarrow M \quad (1)$$

curva parametrizada C^1 por partes em M .

Definimos o **comprimento** de γ por

$$|\gamma| = \int_r^s |\gamma'(t)| dt.$$

Particularmente, se $M = \mathfrak{S}$, então $|\gamma| = \int_r^s \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im } \gamma(t)} dt$, onde o numerador do integrando é a norma em \mathbb{R}^2 .

Definição 6. Sejam $z, w \in M$. Definimos **distância** entre z e w como sendo o valor $\inf \{|\gamma|\}$ onde γ é da forma (1), $\gamma(r) = z$ e $\gamma(s) = w$.

PROPOSIÇÃO 2. $\rho : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, onde γ é da forma (1) $\rho(r) = z$ e $\rho(s) = w$ é métrica em M .

Demonstração.

1) $\forall z, w \in M \Rightarrow \rho(z, w) \geq 0$, pois $|\gamma'(t)| \geq 0$ e, portanto, $\int_r^s |\gamma'(t)| dt \geq 0$, $\forall \gamma$ e $r \leq s$.

2) $\rho(z, w) = \rho(w, z)$, $\forall z, w \in M$:

$$\rho(z, w) = \inf \left\{ \int_r^s |\gamma'(t)| dt \right\}, r \leq s \text{ (fixos)}, \gamma(r) = z \text{ e } \gamma(s) = w.$$

$$\rho(w, z) = \inf \left\{ \int_r^s |\alpha'(t)| dt \right\}, \alpha(r) = w \text{ e } \alpha(s) = z.$$

$$\text{Seja } g : [r, s] \rightarrow [r, s] \\ t \mapsto g(t) = -t + r + s$$

$$\text{Então, } \inf \left\{ \int_r^s |\alpha'(t)| dt \right\} = \inf \left\{ \int_{g(r)}^{g(s)} |\alpha'(g(t))| g'(t) dt \right\} = \\ \inf \left\{ \int_s^r |\alpha'(g(t))| (-1) dt \right\} = \inf \left\{ \int_r^s |\alpha'(g(t))| dt \right\} =$$

$$\inf \left\{ \int_r^s |\alpha'(g(t))g'(t)| dt \right\} = \inf \left\{ \int_r^s |(\alpha \circ g)'(t)| dt \right\} = \inf \left\{ \int_r^s |\gamma'(t)| dt \right\},$$

onde $\gamma(r) = z, \gamma(s) = w \Rightarrow \rho(w, z) = \rho(z, w)$.

3) $\rho(z_1, z_3) \leq \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3), \forall z_1, z_2, z_3 \in M:$

$$\rho(z_1, z_3) = \inf \left\{ \int_r^s |\gamma'(t)| dt \right\}, r \leq s, \gamma(r) = z_1, \gamma(s) = z_3.$$

Seja $p \in [r, s]$. Podemos tomar

$$\rho(z_1, z_2) = \inf \left\{ \int_r^p |\alpha'(t)| dt \right\}, \alpha(r) = z_1, \alpha(p) = z_2.$$

$$\rho(z_2, z_3) = \inf \left\{ \int_p^s |\beta'(t)| dt \right\}, \beta(p) = z_2, \beta(s) = z_3.$$

$$\text{Mas } \inf \left\{ \int_r^p |\alpha'(t)| dt \right\} + \inf \left\{ \int_p^s |\beta'(t)| dt \right\} = \inf \left\{ \int_r^s |(\alpha \vee \beta)'(t)| dt \right\},$$

onde $\alpha \vee \beta: [r, s] \rightarrow M$

$$t \mapsto \begin{cases} \alpha(t) & \text{se } t \in [r, p] \\ \beta(t) & \text{se } t \in [p, s] \end{cases}$$

Assim, $\alpha \vee \beta(r) = z_1, \alpha \vee \beta(p) = z_2, \alpha \vee \beta(s) = z_3$.

Logo, $\rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3) \geq \rho(z_1, z_3)$, pois

$$\inf \left\{ \int_r^s |(\alpha \vee \beta)'(t)| dt \right\} \geq \inf \left\{ \int_r^s |\gamma'(t)| dt \right\}, \text{ onde } \gamma(r) = z_1 \text{ e } \gamma(s) = z_3. \blacksquare$$

$$\text{Notemos que em } \mathfrak{S}, \rho(z, w) = \inf \left\{ \int_r^s \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im } \gamma(t)} dt \right\}.$$

Sempre que nos referirmos ao modelo \mathfrak{S} , estamos com o espaço métrico (\mathfrak{S}, ρ) em mente.

Definição 7. $g: M \rightarrow N$ é uma **isometria** entre M e N se g é diferenciável (como aplicação entre variáveis reais), bijetora e

$$\langle dg_p(v_1), dg_p(v_2) \rangle_N = \langle v_1, v_2 \rangle_M$$

onde $dg_p: T_p M \rightarrow T_{g(p)} N$ é aplicação derivada de g em $p \in M, v_1, v_2 \in T_p M$.

Particularmente, se $M = N = \mathfrak{S}$, temos que g é isometria em \mathfrak{S} .

PROPOSIÇÃO 3. $g: M \rightarrow N$ é isometria entre M e N se e só se $\rho(z, w) = \rho^*(g(z), g(w)), \forall z, w \in M$, onde ρ e ρ^* são métricas em M e N definidas como na Proposição 2.

Demonstração.

$$\Rightarrow \rho^*(g(z), g(w)) = \inf \left\{ \int_r^s |\alpha'(t)|_N dt \right\} \text{ onde } \alpha: [r, s] \subset \mathbb{R} \rightarrow N \text{ é curva parametrizada tal que } \alpha(r) = g(z) \text{ e } \alpha(s) = g(w).$$

Podemos tomar $\alpha = g \circ \gamma$ onde $\gamma : [r, s] \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ é curva parametrizada tal que $\gamma(r) = z$ e $\gamma(s) = w$.

$$\begin{aligned} \text{Logo, } \rho^*(g(z), g(w)) &= \inf \left\{ \int_r^s |(g \circ \gamma)'(t)|_N dt \right\} = \\ \inf \left\{ \int_r^s \sqrt{\langle (g \circ \gamma)'(t), (g \circ \gamma)'(t) \rangle_N} dt \right\} &= \\ \inf \left\{ \int_r^s \sqrt{(\gamma'(t))^2 \langle dg_{\gamma(t)}(1, 0, \dots, 0), dg_{\gamma(t)}(1, 0, \dots, 0) \rangle_N} dt \right\} &= \\ \inf \left\{ \int_r^s |\gamma'(t)| \sqrt{\langle (1, 0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0) \rangle_M} dt \right\} &= \inf \left\{ \int_r^s |\gamma'(t)|_{M^2} dt \right\} = \\ \rho(z, w). \end{aligned}$$

\Leftarrow) A demonstração neste sentido não é imediata e requer um desenvolvimento mais profundo da teoria, fugindo aos propósitos deste trabalho. Para tanto, indicamos a referência [KOBAYASHI] página 169. ■

As isometrias $g : M \rightarrow M$ constituem um grupo com a operação de composição. Denotaremos este grupo por $ISO(M)$

Definição 8. Um segmento geodésico em M é uma curva de comprimento mínimo entre dois pontos de M .

Algumas perguntas naturais surgem nesta ocasião:

- 1) Quais são os segmentos geodésicos em \mathfrak{S} ?
- 2) Há expressões analíticas “mais simples” para $\rho(z, w)$, onde $z, w \in \mathfrak{S}$?
- 3) Quais são os círculos em \mathfrak{S} ?

Em resposta à primeira pergunta formulada acima temos:

PROPOSIÇÃO 4. Um segmento (geodésico) ligando dois pontos de \mathfrak{S} é um arco de círculo centrado em r_∞ ou um segmento de semi-reta ortogonal a r_∞ .

Demonstração.

Sejam z_0 e w_0 pontos em $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$.

Seja $\gamma : [r, s] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{S}$ curva parametrizada tal que $\gamma(r) = z_0$ e $\gamma(s) = w_0$ e tomemos $\gamma(t) = x(t) + iy(t) \Rightarrow \gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

Suponhamos que $y'(t) \neq 0, \forall t \in [0, 1]$.

Logo,

$$|\gamma| = \int_r^s |\gamma'(t)|_{(\mathfrak{S})} dt = \int_r^s \frac{|x'(t) + iy'(t)|_{(\mathbb{R}^2)}}{y'(t)} dt = \int_r^s \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y'(t)} dt =$$

$$\int_r^s \frac{y'(t) \sqrt{\overbrace{\left(\frac{x'(t)}{y'(t)}\right)^2 + 1}^{\geq 1}}}{y(t)} dt \stackrel{(*)}{\geq} \int_r^s \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \log y(t) \Big|_r^s = \log \frac{y(s)}{y(r)}.$$

Temos que a igualdade em (*) ocorre se e só se $x'(t) = 0$ e $y'(t) \neq 0$, $\forall t \in [0, 1]$.

Suponhamos que $z_0 = x_0 + ip$ e $w_0 = x_0 + iq$, $p \neq q$.

Seja $\gamma: [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{S}$

$$t \mapsto \gamma(t) = x_0 + i(p + t(q - p))$$

Desta forma, γ é uma parametrização do segmento euclidiano $\overline{z_0 w_0}$ e a igualdade ocorre em (*), sendo

$$|\gamma| = \int_0^1 \frac{|i(q - p)|}{t(q - p)} dt = \left| \int_0^1 \frac{1}{t} dt \right| = \left| \log \frac{q}{p} \right| \quad (2)$$

Assim, um segmento de semi-reta euclidiana ortogonal a r_∞ é um segmento geodésico.

Agora, suponhamos que z_0 e w_0 não pertencem a uma semi-reta euclidiana ortogonal a r_∞ . Consideremos o semi-círculo L euclidiano com centro c em r_∞ e raio r tal que $z_0, w_0 \in L$.

Tomemos

$$h: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S} \quad (3)$$

$$z \mapsto \frac{-2rz - (4r^2 - 2rc - 2r^2)}{z - (r + c)}$$

Veremos mais adiante que h é isometria em \mathfrak{S} (geometricamente h é uma composição de uma inversão num semi-círculo tangente a L , com o dobro do raio de L , e uma translação horizontal).

Temos que $h(L) \subset \{yi \mid y \in \mathbb{R}_+^*\}$ e, portanto, $h(z_0) = ia$ e $h(w_0) = ib$ e recaímos no caso anterior.

Como $\rho(z_0, w_0) = \rho(h(z_0), h(w_0))$, concluímos que arcos de círculos euclidianos centrados em r_∞ são segmentos geodésicos.

Por outro lado, qualquer curva de comprimento mínimo entre dois pontos pode ser "levada" a um segmento de semi-reta ortogonal a r_∞ , donde concluímos nossa asserção. ■

Os prolongamentos dos segmentos geodésicos em \mathfrak{S} determinam as retas hiperbólicas ou geodésicas em \mathfrak{S} , que doravante terão outra designação:

Definição 9. Chamemos de **h-reta** a intersecção de \mathfrak{S} com círculo ou reta (euclidianos) ortogonais à r_∞ .

Definição 10. Sejam $z, w \in \mathfrak{S}$ e $L \subset \mathfrak{S}$ a h -reta que contém z e w . Logo, $L \setminus \{z, w\}$ possui três componentes conexas. A componente compacta (que é um segmento geodésico) unida aos pontos z e w denotamos **h-segmento** e escrevemos \overline{zw} . As outras duas componentes unidas aos seus respectivos pontos z e w são denotadas **h-semi-retas** e escrevemos $\overrightarrow{z\alpha}$ e $\overrightarrow{w\beta}$ onde $\alpha, \beta \in r_\infty \cup \{\infty\}$.

Nota. A definição geral de geodésica em variedades riemannianas pode ser encontrada na referência [do CARMO]. Não a introduziremos neste trabalho, pois envolve uma série de conceitos que fogem aos nossos propósitos.

Em resposta a segunda questão temos:

PROPOSIÇÃO 5. $\forall z, w \in \mathfrak{S}$:

- a) $\rho(z, w) = \log \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}$;
 b) $\cosh \rho(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2 \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} w}$;
 c) $\sinh \left(\frac{1}{2} \rho(z, w) \right) = \frac{|z - w|}{2 \sqrt{\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} w}}$;
 d) $\tanh \left(\frac{1}{2} \rho(z, w) \right) = \left| \frac{z - w}{z - \bar{w}} \right|$.

Demonstração.

Sabemos que $\cosh z = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z})$ e $\sinh z = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z})$.

Com estas definições é fácil verificar que as equivalências seguem; logo, demonstraremos apenas o item b).

Sejam $z_0, w_0 \in \mathfrak{S}$ que, devido à isometria (3), podemos considerá-los pertencentes a uma geodésica L do tipo semi-reta ortogonal a r_∞ . Logo,

$z_0 = x_0 + ip$ e $w_0 = x_0 + iq$ e devido a (2), temos que $\rho(z_0, w_0) = \left| \log \frac{q}{p} \right|$.

Logo, $\cosh \rho(z_0, w_0) = \frac{1}{2} (e^{|\log \frac{q}{p}|} + e^{-|\log \frac{q}{p}|}) = \frac{1}{2} \left(\frac{q}{p} + \frac{p}{q} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{q^2 + p^2}{pq} \right) = \frac{2pq - 2pq + q^2 + p^2}{2pq} = \frac{2pq}{2pq} + \frac{(p - q)^2}{2pq} = 1 + \frac{|z - w|^2}{2 \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} w}$, o que completa a demonstração. ■

Em resposta à terceira questão temos:

PROPOSIÇÃO 6. Círculos em \mathfrak{S} são círculos euclidianos com centro deslocado.

Demonstração.

Temos que o círculo é escrito na forma $\{z \in \mathfrak{S} \mid \rho(z, c) = r\}$ e que $-1 < \frac{e^r - 1}{e^r + 1} < 1 \Rightarrow -1 < \frac{e^{\frac{r}{2}} - e^{-\frac{r}{2}}}{e^{\frac{r}{2}} + e^{-\frac{r}{2}}} < 1 \Rightarrow -1 < \tanh \frac{r}{2} < 1 \Rightarrow 1 - \left(\tanh \frac{r}{2}\right)^2 \neq 0$.

Sabemos que um círculo euclidiano no plano complexo é dado por $z\bar{z} + Az + \bar{A}\bar{z} + B = 0$ onde $A \in \mathbb{C}$ e $B \in \mathbb{R}$. (Se $A = a + bi$ e $z = x + iy$, temos que a equação acima se escreve como $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + B = 0$).

O centro deste círculo é $-\bar{A}$ e o raio é $\sqrt{A\bar{A} - B}$; ($|z + \bar{A}| = \sqrt{A\bar{A} - B}$); naturalmente $A\bar{A} - B > 0$.

Seja $A = \frac{-\bar{c} + c \left(\tanh \frac{r}{2}\right)^2}{1 - \left(\tanh \frac{r}{2}\right)^2}$ e $B = \frac{c\bar{c} - c\bar{c} \left(\tanh \frac{r}{2}\right)^2}{1 - \left(\tanh \frac{r}{2}\right)^2}$. É fácil verificar

que $A\bar{A} - B > 0$.

Logo,

$$\begin{aligned} z\bar{z} + \left(\frac{-\bar{c} + c \left(\tanh \frac{r}{2}\right)^2}{1 - \left(\tanh \frac{r}{2}\right)^2}\right) \bar{z} + \left(\frac{-c + \bar{c} \left(\tanh \frac{r}{2}\right)^2}{1 - \left(\tanh \frac{r}{2}\right)^2}\right) z + \frac{c\bar{c} - c\bar{c} \left(\tanh \frac{r}{2}\right)^2}{1 - \left(\tanh \frac{r}{2}\right)^2} &= 0 \Rightarrow \\ \left(1 - \left(\tanh \frac{r}{2}\right)^2\right) z\bar{z} + \left(-\bar{c} + c \left(\tanh \frac{r}{2}\right)^2\right) \bar{z} + \left(-c + \bar{c} \left(\tanh \frac{r}{2}\right)^2\right) z + & \\ c\bar{c} - c\bar{c} \left(\tanh \frac{r}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{c\bar{c} - c\bar{z} - z\bar{c} + z\bar{z}}{c\bar{c} - cz - \bar{c}\bar{z} + z\bar{z}} = \left(\tanh \frac{r}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{c - z}{c - \bar{z}}\right) \left(\frac{\bar{c} - \bar{z}}{\bar{c} - z}\right) = & \\ \left(\tanh \frac{r}{2}\right)^2 \Rightarrow \left|\frac{c - z}{c - \bar{z}}\right| = \tanh \frac{r}{2} \Rightarrow \tanh \left(\frac{1}{2}\rho(c, z)\right) = \tanh \frac{r}{2} \Rightarrow \rho(c, z) = & \\ r. \blacksquare & \end{aligned}$$

3.1.2 Isometrias em \mathfrak{S}

Definição 11. Aplicações do tipo $g: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad -$

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

$bc > 0$ são chamadas de transformações de Möbius.

Vamos determinar quais são as isometrias em \mathfrak{S} . Veremos que estas são dadas por transformações de Möbius ou suas compostas com a conjugação complexa. Um tipo importante de isometria hiperbólica que é dada por esta última forma é constituído, como veremos mais adiante, por inversões em círculos.

LEMA 1. Se $g : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$ é transformação de Möbius, então $\frac{|g'(z)|}{\text{Im } g(z)} = \frac{1}{\text{Im } z}$.

Demonstração.

$$g'(z) = \frac{a(cz+d) - (az+b)c}{(cz+d)^2}.$$

$$\text{Se } z = x + iy: \text{Im } g(z) = \frac{y(ad-bc)}{(cx+d)^2 + (cy)^2}.$$

$$|g'(z)| = \sqrt{\frac{a(cz+d) - (az+b)c}{(cz+d)^2} \cdot \frac{a(\bar{c}\bar{z}+d) - (a\bar{z}+b)c}{(\bar{c}\bar{z}+d)^2}} = \sqrt{\frac{(ad-bc)^2}{(cz+d)^2(\bar{c}\bar{z}+d)^2}} = \frac{(ad-bc)}{(cz+d)(\bar{c}\bar{z}+d)}.$$

$$\text{Logo, } \frac{|g'(z)|}{\text{Im } g(z)} = \frac{\frac{(ad-bc)}{(cz+d)(\bar{c}\bar{z}+d)}}{\frac{y(ad-bc)}{(cx+d)^2 + (cy)^2}} = \frac{(cx+d)^2 + (cy)^2}{y(c^2z\bar{z} + cd(z+\bar{z}) + d^2)} =$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{(cx+d)^2 + (cy)^2}{c^2(x^2+y^2) + cd(2x) + d^2} = \frac{1}{y} \cdot \frac{((cx+d)^2 + (cy)^2)}{((cx)^2 + 2cxd + d^2 + (cy)^2)} = \frac{1}{y} = \frac{1}{\text{Im } z}. \blacksquare$$

PROPOSIÇÃO 7. Se $g : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$ é transformação de Möbius, então g é isometria em (\mathfrak{S}, ρ) .

Demonstração.

Seja $\gamma : [r, s] \rightarrow \mathfrak{S}$ diferenciável. O caminho $g \circ \gamma : [r, s] \rightarrow \mathfrak{S}$ é tal que

$$|g \circ \gamma| = \int_r^s \frac{|g'(\gamma(t)) \gamma'(t)|}{\text{Im } g(\gamma(t))} dt = \int_r^s \frac{|g'(\gamma(t))|}{\text{Im } g(\gamma(t))} |\gamma'(t)| dt = \int_r^s \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im } \gamma(t)} dt = |\gamma|.$$

Logo, $\rho(z, w) = \inf \{|\gamma|\}; \gamma(r) = z; \gamma(s) = w \Rightarrow \rho(z, w) = \inf \{|g \circ \gamma|\}; g \circ \gamma(r) = g(z); g \circ \gamma(s) = g(w) \Rightarrow \rho(z, w) = \rho(g(z), g(w)); \forall z, w \in \mathfrak{S}$.

Portanto, g é uma isometria de (\mathfrak{S}, ρ) . ■

PROPOSIÇÃO 8. $g : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc > 0$
 $z \mapsto \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d}$

é isometria em (\mathfrak{S}, ρ) .

Demonstração.

Sejam $z, w \in \mathfrak{S}$:

$$\tanh\left(\frac{1}{2}\rho(g(z), g(w))\right) = \left|\frac{g(z) - g(w)}{g(z) + \overline{g(w)}}\right| = \dots = \left|\frac{z - w}{z - \overline{w}}\right| = \tanh\left(\frac{1}{2}\rho(z, w)\right).$$

Logo, $\rho(g(z), g(w)) = \rho(z, w)$. ■

PROPOSIÇÃO 9. Se $\phi: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$ é isometria em (\mathfrak{S}, ρ) , então $\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ ou $\phi(z) = \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d}$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc > 0$.

Demonstração.

Sejam $z, w, v \in h\text{-reta} \subset \mathfrak{S}$, com v entre z e w .

Como $\rho(z, w) = \rho(z, v) + \rho(v, w)$, se $\phi: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$ é isometria em (\mathfrak{S}, ρ) , então $\rho(\phi(z), \phi(w)) = \rho(\phi(z), \phi(v)) + \rho(\phi(v), \phi(w))$.

Logo, $\phi(v)$ está entre $\phi(z)$ e $\phi(w)$.

Assim, $\phi(\overline{zw}) = \phi(z)\phi(w)$ e conseqüentemente,

$$\phi \text{ leva } h\text{-retas em } h\text{-retas.} \quad (4)$$

Seja $g: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$; $ad - bc > 0$ tal que se $L =$ eixo ima-

$$z \mapsto g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

ginário e $g(\phi(L)) = L$, ou seja, $g \circ \phi: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$ é isometria que fixa $L \subset \mathfrak{S}$. A expressão analítica de g pode ser obtida de (3).

Podemos supor que $g \circ \phi$ fixa o ponto i . Caso não fixe, componhe $g \circ \phi$ com:

$$h_1 \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}, r \in \mathbb{R}_+^* \\ z \mapsto rz$$

Podemos supor que $g \circ \phi(0) = 0$ e $g \circ \phi(\infty) = \infty$. Caso não haja essa invariância, componhe $g \circ \phi$ com:

$$h_2 \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S} \\ z \mapsto -\frac{1}{z}$$

(h_1 e h_2 são isometrias em (\mathfrak{S}, ρ)).

Com isto, temos que se $p \neq 1$, $\rho(i, ip) = \left|\log \frac{p}{1}\right|$.

Mas $\rho(i, ip) = \rho(g \circ \phi(i), g \circ \phi(ip)) = \rho(i, g \circ \phi(ip)) = \left|\log \frac{k}{1}\right|$, onde $ki = g \circ \phi(ip)$ e, assim, se

$$p > 1 \Rightarrow k > 1 \text{ e se } p < 1 \Rightarrow k < 1. \quad (5)$$

Logo, $|\log p| = |\log k| \Rightarrow \log p = \pm \log k$.

$$\text{Se } \log p = \log k \Rightarrow \log \frac{p}{k} = 0 \Rightarrow \frac{p}{k} = 1 \Rightarrow k = p. \quad (6)$$

$$\text{Se } \log p = -\log k \Rightarrow \log pk = 0 \Rightarrow pk = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{p}. \quad (7)$$

O caso (7) não ocorre devido a (5).

Logo, podemos considerar $g \circ \phi|_L = Id$.

Sejam $z = x + iy$ e $g \circ \phi(z) = u + iv$. Temos que $\rho(z, it) = \rho(g \circ \phi(z), g \circ \phi(it)) = \rho(u + iv, it)$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$.

Mas $\sinh\left(\frac{1}{2}\rho(z, w)\right) = \frac{|z - w|}{2\sqrt{\text{Im } z \cdot \text{Im } w}}$. Logo,

$$\sinh\left(\frac{1}{2}\rho(z, it)\right) = \sinh\left(\frac{1}{2}\rho(u + iv, it)\right) \Rightarrow \frac{|z - it|}{2\sqrt{yt}} = \frac{|u + iv - it|}{2\sqrt{vt}} \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2 + (y - t)^2}}{\sqrt{yt}} = \frac{\sqrt{u^2 + (v - t)^2}}{\sqrt{vt}} \Rightarrow (x^2 + (y - t)^2)v = (u^2 + (v - t)^2)y.$$

Temos a igualdade de duas funções (na variável t).

Portanto, $x^2 = u^2$ e $y = v \Rightarrow x = \pm u$ e $y = v$.

Assim, $g \circ \phi(z) = z$ ou $g \circ \phi(z) = -x + iy = -\bar{z}$.

Mas isometrias são contínuas. Logo, $g \circ \phi(z) = z$ ou $g \circ \phi(z) = -\bar{z}$, $\forall z \in \mathfrak{S}$.

Logo, de $g \circ \phi(z) = z \Rightarrow \phi = g^{-1} \Rightarrow \phi: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$; com

$$z \mapsto \frac{dz - b}{-cz + a}$$

$ad - bc > 0$.

De $g \circ \phi(z) = -\bar{z} \Rightarrow \phi = g^{-1} \circ f$ onde $f: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$.■

$$z \mapsto -\bar{z}$$

Juntando as Proposições 7, 8 e 9, temos:

TEOREMA 1. $\phi: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$ é isometria em (\mathfrak{S}, ρ) se e só se $\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ ou $\phi(z) = \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d}$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc > 0$.

Nota. Seja $\phi \in ISO(\mathfrak{S}, \rho)$. Dividindo o numerador e denominador de $\phi(z)$ por $\mathfrak{d} = \sqrt{ad - cb}$, temos $\frac{a}{\mathfrak{d}} \cdot \frac{d}{\mathfrak{d}} - \frac{b}{\mathfrak{d}} \cdot \frac{c}{\mathfrak{d}} = \frac{ad - cb}{\mathfrak{d}^2} = \frac{\mathfrak{d}^2}{\mathfrak{d}^2} = 1$.

Com isto, podemos reformular o Teorema 1:

TEOREMA 1*. $\phi: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$ é isometria em (\mathfrak{S}, ρ) se e só se $\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ ou $\phi(z) = \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d}$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc = 1$.

A vantagem de se trabalhar com isometrias na forma proposta pelo Teorema 1* é que podemos compor isometrias do tipo $\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ simplesmente multiplicando matrizes do tipo $M_\phi = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Temos, ainda, alguns resultados importantes sobre isometrias em \mathfrak{S} :

Observação. Isometrias em \mathfrak{S} levam h-retas em h-retas (geodésicas em geodésicas) e preservam medidas de ângulos.

De fato, vimos a primeira asserção no item numerado (4). Quanto à segunda asserção, basta notar que se ϕ é isometria em \mathfrak{S} , então $\langle d\phi_p(v_1), d\phi_p(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$ onde $p \in \mathfrak{S}$ e $v_1, v_2 \in T_p\mathfrak{S}$. Seja α ângulo entre v_1 e v_2 . Logo, $\cos \alpha = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{|v_1| \cdot |v_2|} = \frac{\langle d\phi_p(v_1), d\phi_p(v_2) \rangle}{|d\phi_p(v_1)| \cdot |d\phi_p(v_2)|} = \cos \beta$ onde β é ângulo entre $\phi(v_1)$ e $\phi(v_2)$. Tomando $\alpha, \beta \in [0, \pi]$, temos que $\alpha = \beta$.

Finalmente, não poderíamos deixar de mencionar o seguinte resultado:

TEOREMA 2. *Três pontos não colineares hiperbólicos em \mathfrak{S} determinam uma única isometria, ou seja:*

Se $z, w, x \in \mathfrak{S}$ são pontos não-colineares hiperbólicos e $f, g : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$ são isometrias tais que $f(z) = g(z)$, $f(w) = g(w)$ e $f(x) = g(x)$, então $f = g$.

A demonstração se processa exatamente como no Teorema 1 do Capítulo 2, pois, em função dos resultados aqui obtidos, os nossos argumentos se aplicam.

3.2 O Modelo \mathfrak{C}

Seja $f : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{C}$. Sua inversa é $f^{-1} : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{S}$.

$$z \mapsto \frac{z-i}{z+i} \qquad z \mapsto \frac{zi+i}{1-z}$$

É fácil verificar que f é um difeomorfismo.

Definamos $\rho^* : \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$(z, w) \mapsto \rho^*(z, w) = \rho(f^{-1}(z), f^{-1}(w))$$

ρ^* é uma métrica em \mathfrak{C} , pois ρ o é em \mathfrak{S} .

A aplicação f é uma isometria entre (\mathfrak{S}, ρ) e (\mathfrak{C}, ρ^*) do ponto de vista riemanniano, conforme podemos verificar na Proposição 3 e Definição 7.

A métrica acima é obtida do produto interno definido em \mathfrak{C} dado pela

matriz $\begin{bmatrix} \left(\frac{2}{1-(x^2+y^2)}\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{1-(x^2+y^2)}\right)^2 \end{bmatrix}$ onde $(x, y) \in \mathfrak{C}$.

Desta forma, f preserva ângulos e distâncias. Além disso, f preserva também orientação, uma vez que é dada por uma transformação analítica no plano. Este último resultado estudaremos com mais detalhes na próxima seção, onde faremos, com base na referência [HILBERT], uma descrição geométrica da construção desta aplicação.

3.2.1 Equivalência entre os modelos \mathfrak{S} e \mathfrak{C}

Consideremos a projeção estereográfica

$$\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$\begin{cases} (\alpha, \beta, \gamma) \\ (0, 0, 1) \end{cases} \mapsto \begin{cases} \left(\frac{\alpha}{1-\gamma}, \frac{\beta}{1-\gamma} \right) \\ \infty \end{cases}$$

Sua inversa é

$$\pi^{-1}: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow S^2$$

$$\begin{cases} (x, y) \\ \infty \end{cases} \mapsto \begin{cases} \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \right) \\ (0, 0, 1) \end{cases}$$

Observemos que o equador de S^2 é invariante por π e consideremos as rotações euclidianas

$$\tau_1: S^2 \rightarrow S^2$$

$$(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

e

$$\tau_2: S^2 \rightarrow S^2$$

$$(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Não é difícil verificar que $\pi \circ \tau_1 \circ \tau_2 \circ \pi^{-1}: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{C}$ é tal que $\pi \circ \tau_1 \circ \tau_2 \circ \pi^{-1}(z) = \frac{z-i}{z+i}$, ou seja, $\pi \circ \tau_1 \circ \tau_2 \circ \pi^{-1} = f$: isometria de \mathfrak{S} em \mathfrak{C} .

É fácil enxergar a ação geométrica de f entre \mathfrak{S} e \mathfrak{C} :

$$\pi^{-1}(\mathfrak{S}) = S^2 \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0\}.$$

$\tau_2(\pi^{-1}(\mathfrak{S})) = S^2 \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 0\}$ obtido por uma rotação de um ângulo reto no espaço euclidiano em torno do eixo x .

$\tau_1(\tau_2(\pi^{-1}(\mathfrak{S}))) = S^2 \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 0\}$ obtido por uma rotação de um ângulo reto no espaço euclidiano em torno do eixo z .

Finalmente, $\pi(\tau_1(\tau_2(\pi^{-1}(\mathfrak{S})))) = \mathfrak{C}$.

Notemos que se $L = \{yi \mid y \in \mathbb{R}_+\}$ então $f(L) = \{x \mid -1 < x < 1\}$ e, ainda, $\lim_{y \rightarrow 0} f(yi) = -1$ e $\lim_{y \rightarrow \infty} f(yi) = 1$.

As Figuras 3.1 e 3.2 ilustram este procedimento.

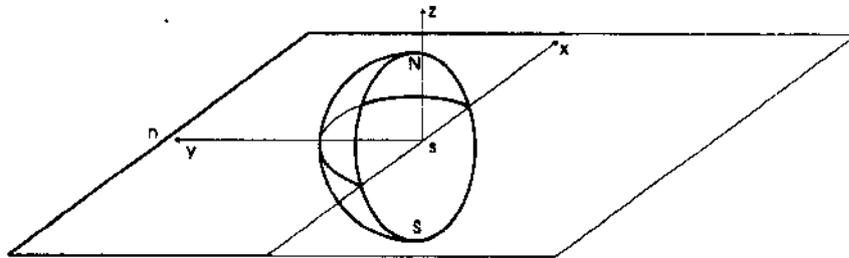


FIGURA 3.1

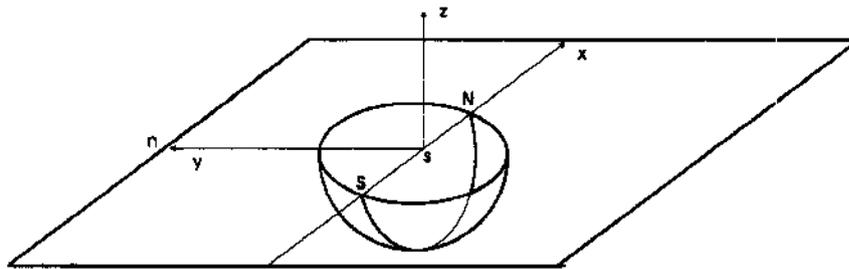


FIGURA 3.2

No livro “Geometry and Imagination” de Hilbert [HILBERT] há uma ilustração mais intuitiva para o procedimento acima. A projeção estereográfica adotada por Hilbert envolve uma esfera de raio 2 e sua intersecção com o plano complexo se dá através do pólo sul desta. Estas ilustrações são as Figuras 3.3 e 3.4.

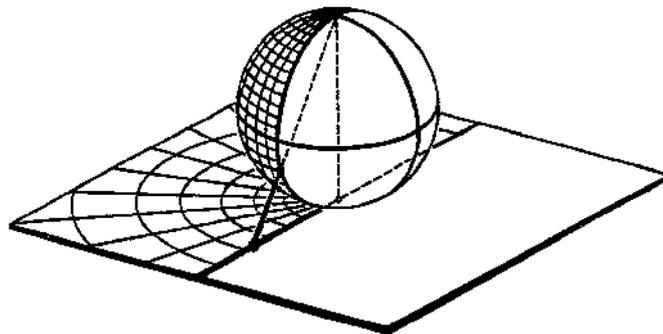


FIGURA 3.3

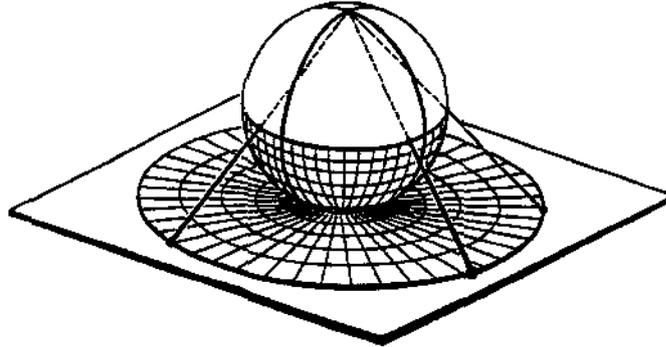


FIGURA 3.4

Notemos que as imagens de círculos e retas por inversa de projeção estereográfica são círculos:

Temos que $L = \{(x, y) \in \mathbb{C} \mid ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0; a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ é círculo se $a \neq 0$ e reta se $a = 0$.

Assim,

$$\pi^{-1}(L) = S^2 \cap \left\{ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid a \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(1 - \gamma)^2} + \frac{b\alpha}{1 - \gamma} + \frac{c\beta}{1 - \gamma} + d = 0 \right\} = S^2 \cap \{ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid b\alpha + c\beta + (a - d)\gamma + a + d = 0 \}.$$

Mas $b\alpha + c\beta + (a - d)\gamma + a + d = 0$ é um plano no \mathbb{R}^3 e intersecção de S^2 com plano é círculo. Particularmente, se L for reta, $\pi^{-1}(L)$ é círculo passando pelo pólo norte de S^2 .

Também é fácil ver que imagem de círculo em S^2 por π é círculo ou reta em \mathbb{C} .

Como círculos em S^2 são preservados por rotações euclidianas com centro em $(0, 0, 0)$, concluímos que imagens das intersecções de círculos e retas em \mathbb{C} com \mathfrak{S} por $\pi \circ \tau_1 \circ \tau_2 \circ \pi^{-1}$ são intersecções de círculos ou retas em \mathbb{C} com \mathfrak{E} .

Definição 12. Uma aplicação diferenciável que preserva medidas de ângulos é chamada de **aplicação conforme**.

Temos que f é diferenciável em \mathfrak{S} , ou seja, f é analítica em \mathfrak{S} .

Temos também que $f'(z) = \frac{2i}{(z+i)^2} \neq 0, \forall z \in \mathfrak{S}$.

Seja $z_0 \in \mathfrak{S}$. Logo, $f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + R(z)$

onde $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{R(z)}{z - z_0} = 0$.

Assim,

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)(f'(z_0) + R(z)). \quad (8)$$

O argumento de um número complexo (vetor) z é o ângulo orientado positivamente que este forma com o eixo real. Indiquemos $\arg z$.

De (8) temos:

$$\begin{aligned} \arg(f(z) - f(z_0)) &= \arg((z - z_0)(f'(z_0) - R(z))) = & (9) \\ &= \arg(z - z_0) + \arg(f'(z_0) - R(z)). \end{aligned}$$

Sejam $\phi = \lim_{z \rightarrow z_0} \arg(f(z) - f(z_0))$ e $\theta = \lim_{z \rightarrow z_0} \arg(z - z_0)$. Temos que $\lim_{z \rightarrow z_0} \arg(f'(z_0) - R(z)) = \arg f'(z_0)$. Assim, (9) pode ser escrita na forma

$$\phi = \theta + \arg f'(z_0). \quad (10)$$

Tomemos duas curvas diferenciáveis passando por z_0 cujos vetores tangentes em z_0 formam ângulos θ_1 e θ_2 com o eixo real. De (10) temos:

$\phi_2 - \phi_1 = (\theta_2 + \arg f'(z_0)) - (\theta_1 + \arg f'(z_0)) = \theta_2 - \theta_1$, ou seja, f é conforme e preserva orientação de ângulos.

Na verdade, provamos um resultado mais amplo:

PROPOSIÇÃO 11. *Se uma aplicação de variável complexa F é analítica num domínio D e $F'(z_0) \neq 0, \forall z_0 \in D$ então F é conforme e preserva orientação de ângulos em D .*

3.2.2 Métrica em \mathcal{C}

Novamente surgem as perguntas naturais:

- 1) Quais são os segmentos geodésicos em (\mathcal{C}, ρ^*) ?
- 2) Quais são os círculos em (\mathcal{C}, ρ) ?

Para repondê-las, poderíamos utilizar a isometria f e analisar as imagens dos segmentos geodésicos em \mathfrak{S} , pois f leva segmento geodésico de \mathfrak{S} em segmento geodésico de \mathcal{C} . Porém, utilizaremos um outro caminho, talvez não o mais conciso, mas que leva a aproveitar resultados importantes como o correspondente à Proposição 4:

PROPOSIÇÃO 12. $\forall z, w \in \mathcal{C}$:

a) $\rho^*(z, w) = \log \frac{|1 - z\bar{w}| + |z - w|}{|1 - z\bar{w}| - |z - w|},$

b) $\tanh\left(\frac{1}{2}\rho^*(z, w)\right) = \frac{|z - w|}{|1 - z\bar{w}|}.$

Demonstração.

Mostremos a). A equivalência entre a) e b) não é difícil de demonstrar tendo em mente que

$$\sinh(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \text{ e } \cosh(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}).$$

Para tanto, sejam $z, w \in \mathcal{C}$.

$$\begin{aligned} \rho^*(z, w) &= \rho(f^{-1}(z), f^{-1}(w)) = \log \frac{|f^{-1}(z) - \overline{f^{-1}(w)}| + |f^{-1}(z) - f^{-1}(w)|}{|f^{-1}(z) - \overline{f^{-1}(w)}| - |f^{-1}(z) - f^{-1}(w)|} = \\ &= \log \frac{\left| \frac{2i(1-z\bar{w})}{(1-z)(1-\bar{w})} \right| + \left| \frac{2i(z-w)}{(1-z)(1-w)} \right|}{\left| \frac{2i(1-z\bar{w})}{(1-z)(1-\bar{w})} \right| - \left| \frac{2i(z-w)}{(1-z)(1-w)} \right|}. \text{ Como } |1-\bar{w}| = |1-w|, \text{ temos} \\ \rho^*(z, w) &= \log \frac{|1-z\bar{w}| + |z-w|}{|1-z\bar{w}| - |z-w|}. \blacksquare \end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO 13. *Os segmentos (geodésicos) em \mathcal{C} são arcos de círculos ortogonais a c_∞ ou segmentos de retas passando pelo centro de \mathcal{C} .*

Demonstração.

Da Proposição 12 temos a particularidade $\rho^*(0, r) = \log \frac{1+r}{1-r}$, $0 \leq r < 1$.

Consideremos a aplicação $h^* : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Veremos

$$z \mapsto \frac{e^{i\theta}z}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta}z$$

mais adiante que h^* é isometria em \mathcal{C} . Seja $2\theta = \varphi$.

$$\text{Assim, } \log \frac{1+r}{1-r} = \rho^*(0, r) = \rho^*(h^*(0), h^*(r)) = \rho^*(0, re^{i\varphi}).$$

Logo, $\rho^*(0, z) = \log \frac{1+|z|}{1-|z|}$. Desta forma, se $z, w, 0$ são colineares euclidianamente, então

$$\rho^*(z, w) = \log \frac{1+|w|}{1-|w|} - \log \frac{1+|z|}{1-|z|} = \log \frac{(1+|w|)(1-|z|)}{(1-|w|)(1+|z|)}. \quad (11)$$

Sejam L a intersecção de \mathcal{C} com um círculo euclidiano ortogonal a c_∞ e R a intersecção de \mathcal{C} com uma reta euclidiana passando pelo centro de \mathcal{C} tal que R e L "convergem" para o mesmo ponto de c_∞ . Veja a Figura 3.5.

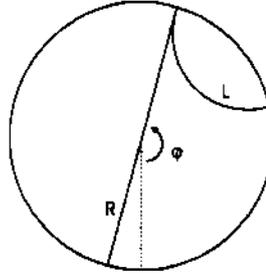


FIGURA 3.5

Seja $h_1: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, $\varphi \in \mathbb{R}_+^*$ (veja Figura 3.5). h_1 é uma

$$z \mapsto \frac{e^{i\frac{-\varphi}{2}}}{e^{i\frac{\varphi}{2}}} z = e^{-i\varphi} z$$

isometria em \mathcal{C} (h_1 é uma rotação euclidiana de ângulo $-\varphi$).

Seja $h_2: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ onde c é o centro da circunferência euclidiana

$$z \mapsto \frac{-2cz}{z - 2c}$$

(no plano complexo) que contém $h_1(L)$ (notemos que $c \neq 0$). Novamente, como veremos, h_2 é isometria em \mathcal{C} .

Temos que $h_2 \circ h_1(L) = L^*$ é do tipo intersecção de \mathcal{C} com reta passando por seu centro. Conseqüentemente $(h_2 \circ h_1)^{-1}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ é isometria tal que

$$(h_2 \circ h_1)^{-1}(L^*) = L. \quad (12)$$

Assim, tendo em vista (11), se $z, w, v \in \mathcal{C}$; $v \in \overline{z\bar{w}}$ são tais que $z, w, 0$ são colineares euclidianamente, então $\rho^*(z, w) = \rho^*(z, v) + \rho^*(v, w)$, ou seja, $\overline{z\bar{w}}$ é curva que minimiza a distância entre z e w , portanto um segmento geodésico. Utilizando uma isometria do tipo (12), temos a asserção. ■

Novamente, aos prolongamentos de segmentos geodésicos em \mathcal{C} chamamos geodésicas em \mathcal{C} . Porém, adotaremos outra nomenclatura para estas:

Definição 13. Chamamos de **h*-reta** a intersecção de \mathcal{C} com círculos ou retas (euclidianos) ortogonais a c_∞ .

Nota. De maneira análoga à Definição 10, temos o **h*-segmento** e a **h*-semi-reta** para o modelo \mathcal{C} .

Fica claro, desta forma, que f leva h-retas de \mathcal{S} em h*-retas em \mathcal{C} .

PROPOSIÇÃO 14. Círculos em \mathcal{C} são círculos euclidianos com centro deslocado.

Demonstração.

Basta proceder como na Proposição 6 com $A = \frac{-\bar{c} + \bar{c} \tanh^2 \frac{r}{2}}{1 - c\bar{c} \tanh^2 \frac{r}{2}}$ e $B = \frac{-c\bar{c} - \tanh^2 \frac{r}{2}}{1 - c\bar{c} \tanh^2 \frac{r}{2}}$. ■

3.2.3 Isometrias em \mathcal{C}

PROPOSIÇÃO 15. $g: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ e $g: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ onde $a, c \in \mathbb{C}$
 $z \mapsto \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}$ $z \mapsto \frac{a\bar{z} + \bar{c}}{c\bar{z} + \bar{a}}$

\mathbb{C} e $|a|^2 - |c|^2 > 0$ são isometrias em (\mathcal{C}, ρ^*) .

Demonstração.

Basta mostra que $\rho^*(z, w) = \rho^*(g(z), g(w))$ usando $\tanh\left(\frac{1}{2}\rho^*(z, w)\right) = \frac{|z - w|}{|1 - z\bar{w}|}$. ■

PROPOSIÇÃO 16. Se $\phi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ é isometria em (\mathcal{C}, ρ^*) , então $\phi(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}$ ou $\phi(z) = \frac{a\bar{z} + \bar{c}}{c\bar{z} + \bar{a}}$ com $a, c \in \mathbb{C}$ e $a\bar{a} - c\bar{c} = |a|^2 - |c|^2 > 0$.

Demonstração.

Seja ϕ como na hipótese. Temos que $f^{-1} \circ \phi \circ f: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$ é isometria. De fato:

Se $z^*, w^* \in \mathfrak{S}$, então $z^* = f^{-1}(z) \Rightarrow f(z^*) = z$ e $w^* = f^{-1}(w) \Rightarrow f(w^*) = w$ para algum $z, w \in \mathcal{C}$. Logo,

$$\rho(z^*, w^*) = \rho(f^{-1}(z), f^{-1}(w)) = \rho^*(z, w) = \rho^*(\phi(z), \phi(w)) = \rho(f^{-1} \circ \phi(z), f^{-1} \circ \phi(w)) = \rho(f^{-1} \circ \phi \circ f(z^*), f^{-1} \circ \phi \circ f(w^*)).$$

Assim, $f^{-1} \circ \phi \circ f = g$ para alguma isometria $g: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$. Temos então, $\phi = f \circ g \circ f^{-1}$.

Pelo Teorema 1, há duas possibilidades para g :

a) $g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - cd > 0$.

Assim, é fácil verificar que

$$\phi(z) = \frac{((-b + c) + (a + d)i)z - \overline{((-b - c) + (a - d)i)}}{((-b - c) + (a - d)i)z - \overline{((-b + c) + (a + d)i)}}$$

Chamando

$$\begin{aligned} m &= (-b + c) + (a + d)i \\ n &= (-b - c) + (a - d)i \end{aligned} \tag{13}$$

temos $\phi(z) = \frac{mz - \bar{n}}{nz - \bar{m}}$.

Temos também que $m(-\bar{m}) - n(-\bar{n}) = -|m|^2 + |n|^2 = -((-b+c)^2 + (a+d)^2) + ((-b-c)^2 + (a-d)^2) = -4bc - 4ad = -4(ad - bc) < 0$.

Seja $\delta = ki$ onde $k \in \mathbb{R}_+$.

Assim, podemos tomar $\phi(z) = \frac{\frac{m}{ki}z - \frac{\bar{n}}{ki}}{\frac{n}{ki}z - \frac{\bar{m}}{ki}}$. Chamemos

$$\alpha = \frac{m}{ki} \text{ e } \beta = \frac{n}{ki}.$$

Logo, $\bar{\alpha} = -\frac{\bar{m}}{ki}$ e $\bar{\beta} = -\frac{\bar{n}}{ki}$.

Assim, $\phi(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\beta z + \bar{\alpha}}$ onde

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 > 0. \quad (14)$$

Notemos que (13) nos permite arbitrar α e β desde que (14) seja satisfeita.

b) $g(z) = \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - cd > 0$.

Neste caso, $\phi(z) = \frac{((-b+c) + (a+d)i)\bar{z} + (b+c) - (a-d)i}{((-b-c) + (a-d)i)\bar{z} + (b-c) - (a+d)i}$ e o procedimento é o mesmo que o empregado no item anterior. ■

Juntando as Proposições 15 e 16, temos:

TEOREMA 3. $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é isometria em (\mathbb{C}, ρ^*) se e só se $\phi(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}$ ou $\phi(z) = \frac{a\bar{z} + \bar{c}}{c\bar{z} + \bar{a}}$ com $a, c \in \mathbb{C}$ e $a\bar{a} - c\bar{c} = |a|^2 - |c|^2 > 0$.

Se tomarmos $\phi \in ISO(\mathbb{C}, \rho^*)$ e dividirmos o numerador e denominador de ϕ por $\sqrt{|a|^2 - |c|^2}$, temos:

TEOREMA 3*. $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é isometria em (\mathbb{C}, ρ^*) se e só se $\phi(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}$ ou $\phi(z) = \frac{a\bar{z} + \bar{c}}{c\bar{z} + \bar{a}}$ com $a, c \in \mathbb{C}$ e $a\bar{a} - c\bar{c} = |a|^2 - |c|^2 = 1$.

Finalmente, o Teorema 2 continua verdadeiro no modelo \mathbb{C} e a demonstração mais uma vez se processa de maneira idêntica à feita no Teorema 1 do Capítulo 2.

3.3 Classificação de Isometrias Hiperbólicas

A classificação de isometrias, como pudemos observar no Capítulo 2, nos ajuda a classificar os grupos discretos de isometrias. Embora desta vez não façamos uma classificação sistemática destes grupos, esta seção nos apresenta uma série de resultados muito interessantes intimamente ligados a ladrilhamentos hiperbólicos.

3.3.1 Inversões em \mathfrak{S}

As inversões em círculos são isometrias importantes em \mathfrak{S} pelo fato de serem compostas de transformações de Möbius com conjugação complexa. O que faremos a seguir é encontrar uma expressão analítica para estas isometrias.

Tomemos o círculo $|z| = 1$, e a aplicação $h_3: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

$$z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$$

Seja $h_2: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$. Notemos que $|z| \rightarrow \infty \Leftrightarrow \left| \frac{1}{\bar{z}} \right| \rightarrow 0$ e

$$z \mapsto r^2 z$$

$$|z| = r \Leftrightarrow \left| \frac{r^2}{\bar{z}} \right| = r \text{ em } h_2 \circ h_3.$$

Agora tomemos o círculo $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| = r, c \in \mathbb{C}\}$ e a aplicação

$$h_4: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto z - c$$

Finalmente, a aplicação $h_1: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

$$z \mapsto z + c$$

Assim, $F = h_1 \circ h_2 \circ h_3 \circ h_4$ é chamada de inversão em C e é tal que

$$F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{c}} + c = \frac{c\bar{z} + (r^2 - |c|^2)}{\bar{z} - \bar{c}}$$

Se c for real ($c \in \mathbb{R}$), poderemos tomar $g = F|_{\mathfrak{S}}$:

$$g: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$$

$$z \mapsto \frac{r^2}{\bar{z} - c} + c = \frac{c\bar{z} + (r^2 - c^2)}{\bar{z} - c}$$

Para concluirmos que g é inversão no sentido intuitivo, notemos que c, z e $g(z)$ são colineares euclidianamente e $|g(z) - c| \cdot |z - c| = r^2$.

g é chamada inversão no semi-círculo C .

Notemos que g é isometria em (\mathfrak{S}, ρ) (Teorema 1).

A expressão para uma inversão (reflexão) numa semi-reta vertical em \mathfrak{S} passando por $(p, 0)$ é $g(z) = z - 2(\operatorname{Re} z - p) = -\bar{z} + 2p$ e pode ser considerada uma inversão num semi-círculo de raio infinito e um ponto comum a r_∞ e o semi-círculo fixo. Podemos formalizá-la da seguinte forma:

Suponhamos que $c \in \mathbb{R}^*$ e $0 \in C$; logo, $|c| = |\bar{c}| \neq 0$. Tomemos $F(z) = \frac{c}{|c|} \bar{z} + \left(\frac{r^2}{|c|} - |c| \right) \frac{\bar{z} - \bar{c}}{|c| - |\bar{c}|}$ e fixemos $0 \in C$. Logo, $r = |c|$. Façamos $|c| \rightarrow \infty$.

Temos, desta forma, a aplicação $\tilde{F}(z) = \frac{u\bar{z}}{-\bar{u}} = \frac{\frac{u}{ki}\bar{z}}{\frac{-u}{ki}} = \frac{w\bar{z}}{w}$; $k \in \mathbb{R}^*$, que é uma reflexão através de uma reta passando pela origem e ortogonal ao vetor $\overrightarrow{0u}$.

Se fixarmos um ponto $p = c - r \in r_\infty$ e, depois, $r \rightarrow \infty$ em g , temos uma reflexão na semi-reta vertical $x = p$ cuja expressão analítica é dada por $g(z) = z - 2(\operatorname{Re} z - p) = -\bar{z} + 2p$

Novamente, notemos que é isometria em (\mathfrak{S}, ρ) .

3.3.2 Inversões em \mathfrak{C}

O que faremos a seguir é um análogo à seção anterior.

Se tomarmos uma inversão $g(z) = \frac{c\bar{z} + (r^2 - c^2)}{\bar{z} - c}$ em uma h-reta de \mathfrak{S} , temos uma inversão $h = f \circ g \circ f^{-1}$ em uma h*-reta de \mathfrak{C} :

$$h: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}$$

$$z \mapsto \frac{(-r^2 + c^2 - 1 - 2ci)\bar{z} + (r^2 - c^2 - 1)}{(-r^2 + c^2 + 1)\bar{z} + (r^2 - c^2 + 1 - 2ci)}$$

$$\text{Se } (-r^2 + c^2 + 1) \neq 0, \text{ temos que } h(z) = \frac{\frac{(-r^2 + c^2 - 1 - 2ci)}{(-r^2 + c^2 + 1)}\bar{z} - 1}{\bar{z} - \frac{(-r^2 + c^2 - 1 - 2ci)}{(-r^2 + c^2 + 1)}}$$

Chamando $\frac{(-r^2 + c^2 - 1 - 2ci)}{(-r^2 + c^2 + 1)} = \sigma$, temos $h(z) = \frac{\sigma\bar{z} - 1}{\bar{z} - \bar{\sigma}}$ que é uma inversão num círculo ortogonal a S^1 e centro σ (se $C(a, r)$ é círculo ortogonal a S^2 , então $1^2 + r^2 = |a|^2 \Rightarrow r^2 - a\bar{a} = -1$).

É fácil ver que h é isometria em (\mathfrak{C}, ρ^*) .

$$\text{Se } (-r^2 + c^2 + 1) = 0, \text{ temos } h(z) = \frac{(-r^2 + c^2 - 1 - 2ci)\bar{z}}{-(-r^2 + c^2 - 1 - 2ci)}$$

Chamando $(-r^2 + c^2 - 1 - 2ci) = \tau$, temos que h é uma reflexão numa reta passando pela origem e ortogonal a $\overrightarrow{0\tau}$.

Novamente, é fácil ver que h é isometria em (\mathcal{C}, ρ^*) .

3.3.3 Algumas Definições Importantes

Definição 14. Seja $r \subset \mathfrak{S}(\mathcal{C})$ uma h (h^*)-reta.

Seja $R_r : \mathfrak{S}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{C})$ inversão em r . Chamemos R_r de **reflexão** em r .

É possível mostrar que $R_r(X) = X, \forall X \in r$ e $R_r(P) = Q$ onde $P \notin r$ e r é mediatriz de \overline{PQ} .

Notemos, também, que R_r é uma isometria de período dois, pois $R_r^2 = Id$.

Definição 15. Às h (h^*)-retas de $\mathfrak{S}(\mathcal{C})$ que não se interceptam e não convergem para um mesmo ponto de r_∞ (c_∞) chamamos de **h (h^*)-retas hiperparalelas** ou **disjuntas**.

Às h (h^*)-retas de $\mathfrak{S}(\mathcal{C})$ que não se interceptam mas convergem para um mesmo ponto de r_∞ (c_∞) chamamos de **h (h^*)-retas paralelas**.

Às h (h^*)-retas de $\mathfrak{S}(\mathcal{C})$ que se interceptam chamamos de **h (h^*)-retas concorrentes**.

A Figura 3.6 ilustra a definição acima.

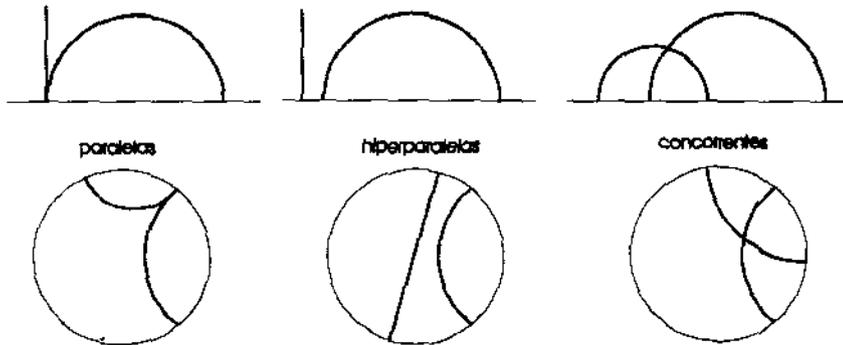


FIGURA 3.6

Notemos que uma h (h^*)-reta possui infinitas h (h^*)-retas hiperparalelas e paralelas.

Isometrias Hiperbólicas

Definição 16. Sejam \overrightarrow{AB} um h (h^*)-segmento orientado e $R_{r_1}, R_{r_2} : \mathfrak{S}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{C})$ reflexões tais que r_1 é h (h^*)-mediatriz de \overline{AB} e r_2 é perpendicular a \overline{AB} em B . Tomemos $TH_{r_1, r_2} = R_{r_2} \circ R_{r_1}$. Logo, TH_{r_1, r_2} é uma isometria que chamaremos de **translação hiperbólica** ou **isometria hiperbólica**.

A h (h^*)-reta que contém \overline{AB} é chamada de eixo da translação.

Se \overline{AB} é um segmento vertical no modelo \mathfrak{S} , é fácil ver que TH_{r_1, r_2} é uma homotetia com centro em r_∞ .

Notemos, também, que r_1 e r_2 são hiperparalelas.

Tendo por base as subseções 3.3.1 e 3.3.2, não é difícil mostrar (embora seja trabalhoso) que *translações hiperbólicas possuem exatamente dois pontos fixos em \mathfrak{S}^* (ou \mathfrak{E}^*) e estes são impróprios, ou seja, pertencem à r_∞ (ou c_∞)*.

Isometrias Elípticas

Definição 17. Sejam L_1 e L_2 h (h^*)-semi-retas em \mathfrak{S}^* (\mathfrak{E}^*) com $O \in L_1 \cap L_2$. Ao par ordenado (L_1, L_2) designamos **ângulo hiperbólico orientado** de L_1 para L_2 e indicamos por $\sphericalangle(L_1, L_2)$ e denotamos o ponto O por vértice de $\sphericalangle(L_1, L_2)$.

Se $P_1 \in L_1$ e $P_2 \in L_2$, indiquemos $\sphericalangle(L_1, L_2)$ por $\sphericalangle P_1 O P_2$.

Como o ângulo hiperbólico entre L_1 e L_2 coincide com o ângulo euclidiano entre as curvas L_1 e L_2 no plano euclidiano, fazemos a mensuração de ângulo nos modelos, como no caso euclidiano, com medidas variando entre 0 e 2π .

Definição 18. Seja $\sphericalangle(h, k)$ um ângulo hiperbólico orientado de vértice O . Sejam $R_{r_1}, R_{r_2} : \mathfrak{S}(\mathfrak{C}) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathfrak{C})$ reflexões tais que r_1 é h (h^*)-bissetriz de $\sphericalangle(h, k)$ e r_2 é h (h^*)-reta que contém k . Seja $\rho_{O, \alpha} = R_{r_2} \circ R_{r_1}$, onde α é a medida de $\sphericalangle(h, k)$. Temos que $\rho_{O, \alpha}$ é uma isometria que chamamos de **rotação ou isometria elíptica**.

Notemos que r_1 e r_2 são concorrentes em O .

Obviamente O é ponto fixo de $\rho_{O, \alpha}$ e, novamente, utilizando as subseções 3.3.1 e 3.3.2, podemos verificar que O é o único ponto fixo de $\rho_{O, \alpha}$ em \mathfrak{S}^* (ou \mathfrak{E}^*) (se o domínio de $\rho_{O, \alpha}$ fosse \mathbb{C} , haveria outro ponto fixo cuja parte imaginária seria negativa (modelo \mathfrak{S}) ou o módulo maior que 1 (modelo \mathfrak{E})).

Isometrias Parabólicas

Definição 19. Seja $\sphericalangle A_\infty O_\infty B_\infty$ um ângulo hiperbólico onde $A_\infty, O_\infty, B_\infty \in r_\infty$ (c_∞).

Sejam $r_2 = \overline{O_\infty B_\infty}$ e r_1 h (h^*)-bissetriz de $\sphericalangle A_\infty O_\infty B_\infty$.

Seja $TP_{r_1, r_2} = R_{r_2} \circ R_{r_1}$. Logo, TP_{r_1, r_2} é uma isometria, que denotamos **translação parabólica ou isometria parabólica**.

Notemos que r_1 e r_2 são paralelas.

Nota. No modelo \mathfrak{S} , se $O_\infty = \infty$, então $O_\infty A_\infty$ e $O_\infty B_\infty$ são retas verticais. Logo, TP_{r_1, r_2} é simplesmente uma translação euclidiana.

Novamente, é óbvio que O_∞ é ponto fixo de TP_{r_1, r_2} e, mais uma vez, utilizando as expressões para inversões nas subseções 3.3.1 e 3.3.2, podemos verificar que O_∞ é o único ponto fixo de TP_{r_1, r_2} .

3.3.4 Teorema da Classificação

TEOREMA 4. *Seja $\phi \neq Id$ uma isometria em \mathfrak{S} ou \mathfrak{C} . Então um dos itens abaixo ocorre:*

- ϕ é uma reflexão;
- ϕ é uma translação hiperbólica;
- ϕ é uma rotação;
- ϕ é uma translação parabólica;
- ϕ é uma reflexão composta com uma das três isometrias acima.

Demonstração.

Sejam $\phi: \mathfrak{S}(\mathfrak{C}) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathfrak{C})$, $\phi \neq Id$, isometria e $P \in \mathfrak{S}(\mathfrak{C})$, $\phi(P) \neq P$.

Sejam m_1 : mediatriz de $P\phi(P)$ e $m_2 = \phi(m_1)$. Logo, m_2 é mediatriz de $\phi(P)\phi^2(P)$.

Nesta demonstração, indicaremos ρ ou ρ^* por d .

Caso 1) $\phi^2(P) = P$.

Logo, $\phi(m_1) = m_1$.

Seja $O = m_1 \cap P\phi(P)$ (Figura 3.7).

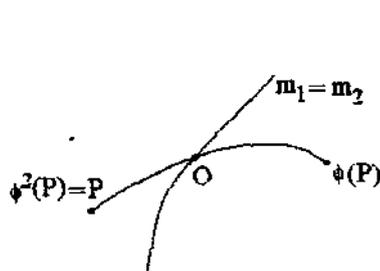


FIGURA 3.7

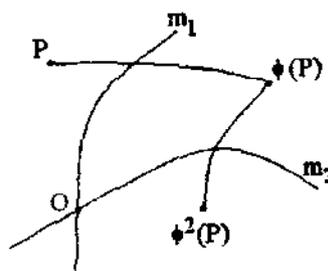


FIGURA 3.8

Como $d(P, O) + d(O, \phi(P)) = d(P, \phi(P))$, temos $d(P, \phi(O)) + d(\phi(P), \phi(O)) = d(P, \phi(P))$. Logo, $O = \phi(O)$.

Seja R_{m_1} : reflexão em m_1 . Temos:

$R_{m_1}(P) = \phi(P)$, $R_{m_1}(\phi(P)) = \phi(\phi(P)) = P$, $R_{m_1}(O) = O = \phi(O)$.

Logo, pelo Teorema 2, $R_{m_1} = \phi$.

Caso 2) $\phi^2(P) \neq P$. Há três subcasos:

a) m_1 e m_2 são concorrentes.

Seja $O = m_1 \cap m_2$ (Figura 3.8).

Temos que:

$$d(P, O) = d(O, \phi(P)) = d(O, \phi^2(P)) = d(\phi(P), \phi(O)) = d(\phi(O), \phi^2(P)).$$

Logo, $\phi(O) \in m_2$ e, mais, $\phi(O) = O$ ou $\phi(O) = Q$: reflexão de O em $\overline{\phi(P)\phi^2(P)}$.

a)i) Se $\phi(O) = O$.

Seja $\rho_{O,\alpha}$ rotação tal que $\alpha = P\widehat{O}\phi(P)$, $\triangle OP\phi(P) \equiv \triangle O\phi(P)\phi^2(P)$.

Logo, $\rho_{O,\alpha}(O) = O = \phi(O)$, $\rho_{O,\alpha}(P) = \phi(P)$, $\rho_{O,\alpha}(\phi(P)) = \phi(\phi(P))$.

Assim, pelo Teorema 2, $\rho_{O,\alpha} = \phi$.

a)ii) Se $\phi(O) = Q$. Sejam R_r reflexão tal que $r \supset \overline{\phi(P)\phi^2(P)}$ e R_s reflexão tal que $s \supset \overline{O\phi(P)}$.

Seja $\varphi = R_r \circ R_s \circ R_{m_1}$.

Logo, $\varphi(O) = \phi(O) = Q$, $\varphi(P) = \phi(P)$, $\varphi(\phi(P)) = \phi(\phi(P)) = \phi^2(P)$.

Assim, pelo Teorema 2, $\varphi = \phi$. Mas $\varphi = R_r \circ \rho_{O,\alpha}$ onde $\alpha = P\widehat{O}\phi(P)$.

Logo, $\phi = R_r \circ \rho_{O,\alpha}$.

b) m_1 e m_2 são paralelas.

Logo, m_1 e m_2 convergem num ponto impróprio O_∞ na reta r_∞ (ou c_∞) (Figura 3.9).

Temos que $d(P, O_\infty) = d(\phi^2(P), O_\infty)$.

Logo, $d(\phi(P), \phi(O_\infty)) = d(\phi(P), \phi(O_\infty))$. Assim, $\phi(O_\infty) \in m_2$.

Desta forma, $\phi(O_\infty) = O_\infty$ ou $\phi(O_\infty) = Q$: reflexão em $\overline{\phi(P)\phi^2(P)}$.

b)i) Se $\phi(O_\infty) = O_\infty$.

Seja $TP_{m_1,s}$ onde $s \supset \overline{O_\infty\phi(P)}$.

Logo, $TP_{m_1,s}(O_\infty) = O_\infty = \phi(O_\infty)$, $TP_{m_1,s}(P) = \phi(P)$, $TP_{m_1,s}(\phi(P)) = \phi(\phi(P)) = \phi^2(P)$.

Pelo Teorema 2, $TP_{m_1,s} = \phi$.

b)ii) Se $\phi(O_\infty) = Q$.

Seja R_r reflexão tal que $r \supset \overline{\phi(P)\phi^2(P)}$.

Logo, $\varphi = R_r \circ R_s = R_{m_1}$ onde $s \supset \overline{O_\infty\phi(P)}$ é tal que $\varphi(O_\infty) = \phi(O_\infty)$, $\varphi(P) = \phi(P)$, $\varphi(\phi(P)) = \phi^2(P)$.

Assim, $\varphi = \phi$. Mas $\varphi = R_r \circ TP_{m_1,s}$. Por conseguinte, $\phi = R_r \circ TP_{m_1,s}$.

Observação: como $\phi(O_\infty) \in r_\infty$, temos que m_1 é vertical ou r é vertical.

c) Se m_1 e m_2 são disjuntas (hiperparalelas).

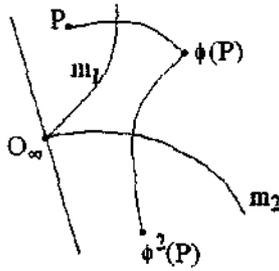


FIGURA 3.9

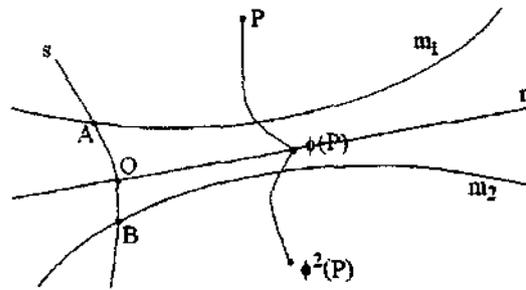


FIGURA 3.10

Seja s a reta ortogonal a m_1 e m_2 (que é única).

Seja r a reta perpendicular a s baixada de $\phi(P)$.

Sejam, $O = s \cap r$, $A = s \cap m_1$, $B = s \cap m_2$ (Figura 3.10).

Logo, $d(A, P) = d(A, \phi(P)) = d(\phi(A), \phi(P)) = d(\phi(A), \phi^2(P)) \Rightarrow \phi(A) \in m_2$.

Como $\triangle A\phi(P)O \cong \triangle B\phi(P)O$, temos que $\phi(A) = B$ ou $\phi(A) = Q$: reflexão em $\phi(P)\phi^2(P)$.

c)i) $\phi(A) = B$.

Seja $TH_{m_1, r}$. Logo, $TH_{m_1, r}(A) = B = \phi(A)$, $TH_{m_1, r}(P) = \phi(P)$, $TH_{m_1, r}(\phi(P)) = \phi(\phi(P))$ (pois $\triangle OP\phi(P) \cong O\phi(P)\phi^2(P)$).

Desta forma, pelo Teorema 2, $\phi = TH_{m_1, r}$.

c)ii) $\phi(A) = Q$.

Seja $\varphi = R_t \circ TH_{m_1, r}$ onde $t \supset \overline{\phi(P)\phi^2(P)}$.

Logo, $\varphi(A) = \phi(A)$, $\varphi(P) = \phi(P)$, $\varphi(\phi(P)) = \phi^2(P)$.

Pelo Teorema 2, $\varphi = \phi \Rightarrow \phi = R_t \circ TH_{m_1, r}$.

Com isto, esgotamos todas as possibilidades. ■

COROLÁRIO 1. Toda isometria nos modelos hiperbólicos é escrita como composta de no máximo três reflexões.

Resumindo: Isometrias do tipo $\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ em \mathfrak{S} e $\phi(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}$ em \mathfrak{C} são conformes e, pela Proposição 11 preservam orientação de ângulos entre $h(h^*)$ -retas e se subdividem em três categorias:

- hiperbólicas: cujos dois únicos pontos fixos (distintos) estão em r_∞ (ou c_∞);
- parabólicas: cujo ponto fixo (único) está em r_∞ (ou c_∞);
- elípticas: que possui um único ponto fixo em \mathfrak{S} (ou \mathfrak{C}).

Na próxima seção fazemos uma abordagem geométrica desta classificação.

3.3.5 Feixes Hiperbólicos, Elípticos e Parabólicos

Definição 20. Sejam L_1 e L_2 $h(h^*)$ -retas em $\mathfrak{S}(\mathfrak{C})$.

Sejam $\mathfrak{F}(L_1, L_2)$ conjunto de $h(h^*)$ -retas contendo L_1 e L_2 e $\mathfrak{D}(\mathfrak{F}(L_1, L_2))$ conjunto de curvas em $\mathfrak{S}(\mathfrak{C})$ satisfazendo as seguintes condições:

- Todo ponto de $\mathfrak{S}(\mathfrak{C})$ pertence a um único elemento de $\mathfrak{D}(\mathfrak{F}(L_1, L_2))$;
- Todo ponto de $\mathfrak{S}(\mathfrak{C})$ pertence a um único elemento de $\mathfrak{F}(L_1, L_2)$;
- Toda $h(h^*)$ -reta de $\mathfrak{F}(L_1, L_2)$ é ortogonal a toda curva de $\mathfrak{D}(\mathfrak{F}(L_1, L_2))$;
- Toda curva de $\mathfrak{D}(\mathfrak{F}(L_1, L_2))$ é invariante sob a ação de reflexões em qualquer $h(h^*)$ -reta de $\mathfrak{F}(L_1, L_2)$;
- Quaisquer duas curvas C_1, C_2 em $\mathfrak{D}(\mathfrak{F}(L_1, L_2))$ são equidistantes.
($\forall z_1 \in C_1, \exists z_2 \in C_2 \mid \rho(\rho^*)(z_1, z_2) = \rho(\rho^*)(C_1, C_2)$ e z_1, z_2 pertencem à mesma $h(h^*)$ -reta de $\mathfrak{F}(L_1, L_2)$);
- z_1, z_2 pertencem à mesma curva de $\mathfrak{D}(\mathfrak{F}(L_1, L_2))$ se e só se a $h(h^*)$ -mediatriz de $\overline{z_1 z_2}$ pertence a $\mathfrak{F}(L_1, L_2)$;
- $\mathfrak{F}(L_1, L_2)$ é o conjunto das $h(h^*)$ retas da forma $\{z \in \mathfrak{S}(\mathfrak{C}) \mid a \sinh \rho(\rho^*)(z, L_1) = b \sinh \rho(\rho^*)(z, L_2)\}$ para algum $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

Dizemós que $\mathfrak{F}(L_1, L_2)$ é feixe:

- 1) **parabólico** se L_1 e L_2 são paralelas;
- 2) **elíptico** se L_1 e L_2 são concorrentes;
- 3) **hiperbólico** se L_1 e L_2 são hiperparalelas.

Definição 21. Ao círculo euclidiano contido em $\mathfrak{S}(\mathfrak{C})$ tangente a $r_\infty(c_\infty)$ denotamos **horocírculo**.

A intersecção de um círculo euclidiano com $\mathfrak{S}(\mathfrak{C})$ passando por a_∞ e b_∞ em $r_\infty(c_\infty)$ denotamos **hipercírculo**.

Ao círculo euclidiano contido em $\mathfrak{S}(\mathfrak{C})$ não contendo pontos de $r_\infty(c_\infty)$ denotamos **círculo hiperbólico**.

Sejam L_1 e L_2 $h(h^*)$ -retas de $\mathfrak{S}(\mathfrak{C})$ paralelas em $p_\infty \in r_\infty(c_\infty)$.

Tomemos $\mathfrak{F}(L_1, L_2)$ como sendo o conjunto de todas as $h(h^*)$ -retas paralelas a L_1 e L_2 e $\mathfrak{D}(\mathfrak{F}(L_1, L_2))$ como sendo o conjunto de todos os horocírculos tangentes em $p_\infty \in r_\infty(c_\infty)$.

Tomando o modelo \mathfrak{S} e $p_\infty = \infty$, temos que $\mathfrak{F}(L_1, L_2)$ é a família das semi-retas euclidianas verticais do tipo $\{k + yi \mid y \in \mathbb{R}_+^*\}$ e $\mathfrak{D}(\mathfrak{F}(L_1, L_2))$ as retas horizontais do tipo $\{x + ki \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Não é muito difícil verificar as propriedades da Definição 20 e, portanto, concluir que $\mathfrak{F}(L_1, L_2)$ é parabólico.

A Figura 3.11¹ ilustra um $\mathfrak{F}(L_1, L_2)$ parabólico.

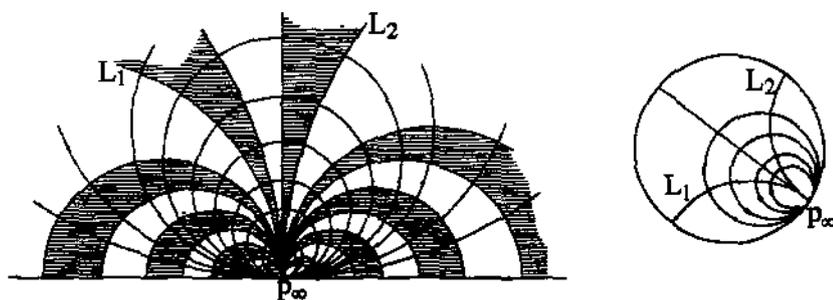


FIGURA 3.11

Sejam L_1 e L_2 $h(h^*)$ -retas de $\mathfrak{S}(\mathfrak{C})$ concorrentes em p . Tomemos $\mathfrak{F}(L_1, L_2)$ como sendo o conjunto de todas as $h(h^*)$ -retas concorrentes em p e $\mathfrak{D}(\mathfrak{F}(L_1, L_2))$ como sendo o conjunto de todos os círculos hiperbólicos $C_r = \{z \in \mathfrak{S}(\mathfrak{C}) \mid \rho(\rho^*)(z, p) = r\}$.

No modelo \mathfrak{C} , se $p = 0$, temos que $\mathfrak{F}(L_1, L_2)$ é o conjunto de todos os “diâmetros” de \mathfrak{C} e $\mathfrak{D}(\mathfrak{F}(L_1, L_2))$ é o conjunto de todos os círculos euclidianos de raio < 1 com centro em 0 .

Novamente, não é difícil verificar as propriedades da Definição 13 e concluir que $\mathfrak{F}(L_1, L_2)$ é elíptico.

A Figura 3.12 ilustra um $\mathfrak{F}(L_1, L_2)$ elíptico.

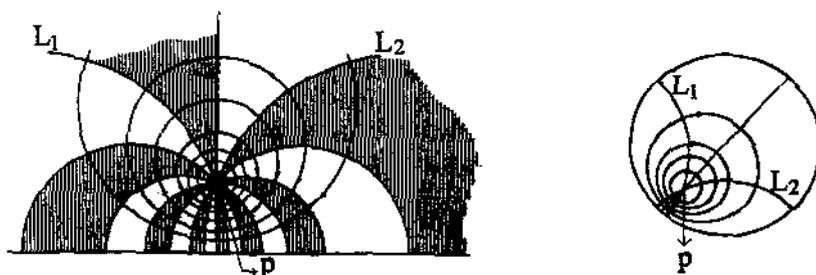


FIGURA 3.12

Se L_1 e L_2 são $h(h^*)$ -retas hiperparalelas, tomemos L_0 como sendo a (única) $h(h^*)$ -reta ortogonal a L_1 e L_2 . Sejam $a_\infty, b_\infty \in r_\infty(c_\infty)$ pontos convergentes de L_0 . Tomemos $\mathfrak{F}(L_1, L_2)$ como sendo o conjunto das $h(h^*)$ -retas ortogonais a L_0 e $\mathfrak{D}(\mathfrak{F}(L_1, L_2))$ como sendo o conjunto dos hipercírculos em $a_\infty b_\infty$.

No modelo \mathfrak{S} , se L_1 e L_2 são semi-círculos euclidianos concêntricos com centro p_∞ , temos que $\mathfrak{F}(L_1, L_2)$ consiste de todos os semi-círculos concêntri-

¹As ilustrações envolvendo feixes no modelo \mathfrak{S} das Figuras 3.11, 3.12 e 3.13 foram adaptadas de ilustrações encontradas na referência [MAGNUS II].

cos em p_∞ e $\mathcal{D}(\mathfrak{F}(L_1, L_2))$ consiste de todas as semi-retas euclidianas em \mathfrak{S} com origem em p_∞ .

Finalmente, não é difícil verificar as propriedades da Definição 20 e, portanto, concluir que $\mathfrak{F}(L_1, L_2)$ é hiperbólico.

A Figura 3.13 ilustra um $\mathfrak{F}(L_1, L_2)$ hiperbólico.

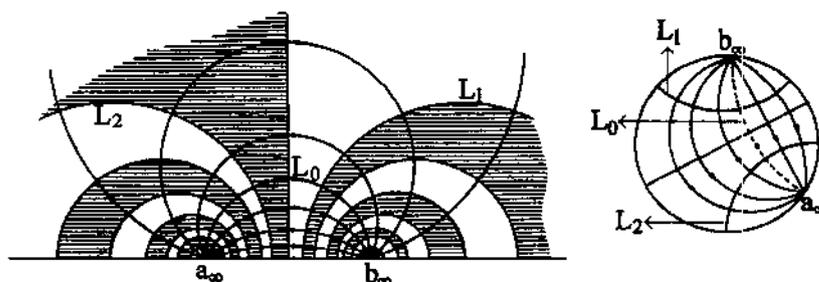


FIGURA 3.13

A razão para a nomenclatura empregada na Definição 20 não é em vão:

Uma isometria ϕ hiperbólica de eixo ortogonal a L_1 e L_2 “leva” h (h^*) -retas de $\mathfrak{F}(L_1, L_2)$ hiperbólica em h (h^*) -retas de $\mathfrak{F}(L_1, L_2)$ e se $z_0 \in \mathfrak{S}(\mathfrak{C})$, então $\{\phi(z_0) \subset C \in \mathcal{D}(\mathfrak{F}(L_1, L_2))\}$ para alguma curva C , ou seja, cada elemento de $\mathcal{D}(\mathfrak{F}(L_1, L_2))$ contém órbitas de pontos de $\mathfrak{S}(\mathfrak{C})$ sob a ação de ϕ .

Analogamente, se ϕ e $\mathfrak{F}(L_1, L_2)$ forem parabólicas ou elípticas.

3.3.6 Classificação de Isometrias por meio do Traço

Já fizemos alguns comentários a respeito dos pontos fixos das isometrias conformes de \mathfrak{S} ou \mathfrak{C} . Retomemos este assunto com um pouco mais de detalhes, visto que será útil para uma identificação das isometrias via expressões analíticas.

Tomemos o modelo \mathfrak{S} e isometrias do tipo $\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc = 1$. Estendamos o domínio e contra-domínio de ϕ de \mathfrak{S} para \mathfrak{S}^* .

Se $c \neq 0$ e z_0 é ponto fixo de ϕ , então:

$$z_0 = \frac{-(d - a) \pm \sqrt{(d - a)^2 + 4cb}}{2c}. \text{ Seja } \Delta = (d - a)^2 + 4cb.$$

Logo, se:

- $\Delta = 0 \Rightarrow \phi$ possui um único ponto fixo $z_0 = \frac{a - d}{2c}$, ou seja, $z_0 \in r_\infty$.

Portanto, ϕ é parabólica.

• $\Delta > 0 \Rightarrow \phi$ possui dois pontos fixos reais, ou seja, $z_1, z_2 \in r_\infty$. Portanto, ϕ é hiperbólica.

• $\Delta = (d - a)^2 + 4cb < 0 \Rightarrow \phi$ possui dois pontos fixos complexos conjugados, ou seja, ϕ possui um ponto fixo não pertencente a r_∞ . Portanto, ϕ é elíptica.

Se $c = 0$ e z_0 for ponto fixo de ϕ , então:

• Se $a \neq \pm 1$ então $z_0 = \frac{b}{d - a}$ ou $z_0 = \infty \Rightarrow \phi$ possui dois pontos fixos em r_∞ e, portanto, ϕ é hiperbólica. (Este é caso de ϕ ser homotetia com centro em $\frac{b}{d - a}$).

• Se $a = \pm 1$, então $z_0 = \infty \Rightarrow \phi$ possui um único ponto fixo e este pertence a r_∞ . Logo, ϕ é uma translação parabólica. (Este é o caso de ϕ ser uma translação euclidiana).

Definição 15. Sejam $\phi: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$; $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc = 1$

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

ou $\phi: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}$; $a, c \in \mathbb{C}$ e $|a|^2 - |c|^2 = 1$. Ao real $|a + d|$ ou $|a + \bar{a}|$

$$z \mapsto \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}$$

denominamos **traço** de ϕ e indicamos por $TR(\phi)$.

Podemos simplificar ainda mais nossa classificação:

No caso $c \neq 0$:

• $\Delta = 0 \Rightarrow (d - a)^2 + 4cb = 0 \Rightarrow a^2 - 2ad + d^2 + 4cb + 4ad - 4ad = 0 \Rightarrow (a + d)^2 = 4(ad - bc) = 4 \Rightarrow |a + d| = 2$.

• $\Delta > 0 \Rightarrow (a + d)^2 > 4 \Rightarrow |a + d| > 2$.

• $\Delta < 0 \Rightarrow (a + d)^2 < 4 \Rightarrow |a + d| < 2$.

Conclusão:

$$\begin{aligned} c \neq 0 : TR(\phi) = 2 \\ c = 0 \text{ e } a = \pm 1 \end{aligned} \iff \phi \text{ é translação parabólica.}$$

$$\begin{aligned} c \neq 0 : TR(\phi) > 2 \\ c = 0 \text{ e } a \neq \pm 1 \end{aligned} \iff \phi \text{ é translação hiperbólica.}$$

$$TR(\phi) < 2 \iff \phi \text{ é rotação.}$$

Tomemos o modelo \mathfrak{C} e isometrias do tipo $\phi(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}$ onde $a, c \in \mathbb{C}$ e $a\bar{a} - c\bar{c} = 1$. Estendamos o domínio e contra-domínio de ϕ de \mathfrak{C} para \mathfrak{C}^* .

Notemos que $a \neq 0$ sempre.

Suponhamos que $c \neq 0$.

Se z_0 é ponto fixo de ϕ , então:

$$z_0 = \frac{a - \bar{a} \pm \sqrt{(\bar{a} - a)^2 + 4c\bar{c}}}{2c}. \text{ Seja } \Delta^* = (\bar{a} - a)^2 + 4c\bar{c}.$$

- Se $\Delta^* = 0$, então ϕ é translação parabólica, pois $|z_0| = \left| \frac{a - \bar{a}}{2c} \right| = 1 \Rightarrow z_0 \in C_\infty$.

- Se $\Delta^* > 0$, então ϕ é translação hiperbólica, pois $|z_0| = |z_1| = \left| \frac{\pm \sqrt{(\operatorname{Re} a)^2 - 1 + \operatorname{Im} a \cdot i}}{c} \right| \Rightarrow |z_0| = |z_1| = 1 \Rightarrow z_0, z_1 \in C_\infty$.

- Se $\Delta^* < 0$, então ϕ é rotação pois ϕ possui um único ponto fixo em \mathcal{C} .

Notemos que $\Delta^* = 4((\operatorname{Re} a)^2 - 1)$. Logo, $\Delta^* > = < 0 \Leftrightarrow |\operatorname{Re} a| > = < 1$ respectivamente. Mas $|\operatorname{Re} a| = |a + \bar{a}| = TR(\phi)$.

Se $c = 0$, então $\phi(z) = a^2 z$.

Se $a \neq \pm 1$, então ϕ possui 0 como único ponto fixo e, portanto, ϕ é uma rotação.

Se $a = \pm 1$, então $\phi = Id$.

Conclusão:

$$c \neq 0 : TR(\phi) = 1 \iff \phi \text{ é translação parabólica.}$$

$$c \neq 0 : TR(\phi) > 1 \iff \phi \text{ é translação hiperbólica.}$$

$$c \neq 0 : TR(\phi) < 1 \iff \phi \text{ é rotação.}$$

$$c = 0 \text{ e } a \neq \pm 1$$

Há uma outra maneira de classificarmos as isometrias conformes e que preservam orientação em \mathcal{C} :

Tomemos $-\frac{a}{\bar{a}} = e^{i\varphi}$ e $-\frac{\bar{c}}{a} = A$. Logo, é fácil escrever $\phi(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}$ da seguinte maneira:

$$\phi(z) = e^{i\varphi} \frac{A - z}{1 - \bar{A}z}.$$

$$\text{Seja } \delta = \frac{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{1 - A\bar{A}}.$$

É fácil verificar que $\delta = (\operatorname{Re} a)^2 = |a + \bar{a}|^2 = TR(\phi)^2$.

Assim,

- Se $\delta = 1 \Rightarrow \phi$ é translação parabólica.
- Se $\delta > 1 \Rightarrow \phi$ é translação hiperbólica.
- Se $\delta < 1 \Rightarrow \phi$ é rotação (elíptica).

A vantagem de se trabalhar com ϕ nesta forma é a versatilidade geométrica que esta oferece quando estamos em contato com análises e construções geométricas (especialmente “ladrilhamentos” envolvendo \mathcal{C}).

3.4 Ladrilhamentos Não-Euclidianos e Grupos Discretos de Isometrias

3.4.1 Preliminares

Nesta seção, estudamos ladrilhamentos nos modelos hiperbólicos. A notação para ladrilhamentos associados a grupos de isometrias é a mesma que a sugerida na Seção 2.2.2 do Capítulo 2.

Associar $\mathcal{L}_L(X)$ onde X é um espaço métrico qualquer a subgrupos do grupo de isometrias em X e estudar suas propriedades pode nos conduzir a caminhos bastante complexos, principalmente quando pretendemos classificar os grupos de isometrias em X .

Dentre os espaços onde há razoáveis condições de efetuar este estudo ressaltamos:

- Espaços euclidianos de dimensão 2 e 3;
- Plano elíptico;
- Esfera euclidiana de dimensão 2;
- Espaços hiperbólicos de dimensão 2 e 3.

Estas são variedades riemannianas “homogêneas e isotrópicas”, isto é, de curvatura constante.

Neste trabalho, concentramos nossos estudos no espaço hiperbólico de dimensão 2, ou, mais precisamente, nos modelos \mathcal{S} ou \mathcal{C} já abordados aqui.

Quando fazemos referência aos modelos hiperbólicos mencionando propriedades que exigem uma topologia, estamos pensando-os com a topologia “usual” induzidas de suas respectivas métricas. Além disso, os ladrilhamentos que mencionamos são todos do tipo canônico (Definição 10 Capítulo 2).

Definição 16. Um subconjunto no modelo \mathcal{S} (ou \mathcal{C}) é **convexo** se para qualquer $z, w \in \mathcal{S}$ (ou \mathcal{C}), então $\bar{z}w \subset \mathcal{S}$ (ou \mathcal{C}).

Utilizamos (sem demonstração) a Proposição 17 abaixo que nos dá uma condição necessária e suficiente para um polígono hiperbólico ser convexo. Para a demonstração indicamos [BEARDON].

PROPOSIÇÃO 17. *Seja \mathfrak{P} um polígono hiperbólico (em \mathfrak{S} ou \mathfrak{E}) com ângulos internos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Temos que \mathfrak{P} é convexo se e só se $0 \leq \alpha_i \leq \pi$ com $i = 1, \dots, n$.*

3.4.2 Grupos Triângulos

Os grupos que estudamos a seguir (grupos triângulos) têm uma importância particular dentre os grupos discretos de isometrias nos modelos hiperbólicos. São grupos finitamente gerados por três reflexões. Como toda isometria hiperbólica é composta de no máximo três reflexões, temos que todo grupo discreto de isometria é subgrupo de algum destes. Como veremos a seguir, existem infinitos grupos triângulos, o que acarreta um número infinito de grupos discretos de isometrias não conjugados entre si nos modelos hiperbólicos.

Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

Sejam $\delta = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$ e $\Delta = ABC$ o triângulo de ângulos internos $\frac{\pi}{\alpha}, \frac{\pi}{\beta}, \frac{\pi}{\gamma}$.

Se $\delta > 1$, Δ é um triângulo esférico ou elíptico.

Se $\delta = 1$, Δ é um triângulo euclidiano.

Se $\delta < 1$, Δ é um triângulo hiperbólico.

Sejam a, b, c os lados de Δ opostos aos ângulos $\frac{\pi}{\alpha}, \frac{\pi}{\beta}, \frac{\pi}{\gamma}$ de A, B, C respectivamente e sejam R_a, R_b, R_c reflexões nas retas (do espaço correspondente) que contém os lados a, b, c de Δ respectivamente.

Neste trabalho, nos concentramos no caso hiperbólico.

O grupo gerado por R_a, R_b, R_c : $\langle R_a, R_b, R_c \rangle$ denotamos por $T_{\alpha, \beta, \gamma}$.

Os subgrupos $T_{\alpha, \beta, \gamma}^*$ de $T_{\alpha, \beta, \gamma}$ constituídos por palavras de comprimento par em R_a, R_b, R_c são tais que $[T_{\alpha, \beta, \gamma} : T_{\alpha, \beta, \gamma}^*] = 2$. Portanto, $T_{\alpha, \beta, \gamma}^* \triangleleft T_{\alpha, \beta, \gamma}$.

Chamemos Δ de triângulo básico de $T_{\alpha, \beta, \gamma}$.

Definição 17. *Um grupo de isometrias gerado por três reflexões nos lados de um triângulo básico é chamado de grupo triângulo.*

Caso Euclidiano

Primeiramente, consideremos uma cobertura \mathfrak{F} originária das sucessivas reflexões nos lados de um triângulo euclidiano Δ e seus refletidos, ou seja, \mathfrak{F} é resultado da ação do grupo $G = \langle R_a, R_b, R_c \rangle$ sobre Δ onde a, b, c são lados de Δ . A pergunta natural neste ponto é: para quais Δ , \mathfrak{F} é um ladrilhamento $\mathcal{L}_\Delta(\mathbb{R}^2)$ associado a um $H \subset_{sg} ISO(\mathbb{R}^2)$?

Uma condição necessária para isto é que cada ângulo interno de Δ seja da forma $\frac{\pi}{k}$, $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

Assim, os ângulos internos de Δ satisfazem $\frac{\pi}{\alpha} + \frac{\pi}{\beta} + \frac{\pi}{\gamma} = \pi \Rightarrow$

$$\delta = 1 \tag{1}$$

É importante observar que se não exigíssemos que \mathfrak{F} fosse obtida por reflexões a partir dos lados de Δ , a condição necessária seria outra: cada ângulo interno de Δ seria da forma $\frac{2\pi}{k}$, $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1, 2\}$. Logo, $\frac{2\pi}{\alpha} + \frac{2\pi}{\beta} + \frac{2\pi}{\gamma} = \pi \Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{2}$. Uma terna de naturais que satisfaz isto é $(5, 5, 10)$ e devido ao fato de $R_b \circ R_c = \rho_{A, \frac{4\pi}{5}}$, temos que $\rho_{A, \frac{4\pi}{5}}^3(\Delta)$ e Δ possuem a aresta b em comum. Mas $R_b(\Delta)$ e $\rho_{A, \frac{4\pi}{5}}^3(\Delta)$ possuem orientações distintas (no capítulo 3 veremos com mais detalhes composição de isometrias e orientação no caso euclidiano). No entanto, é fácil ver que, para evitar este “problema”, devemos ter um número par no denominador de $\frac{2\pi}{k}$ e, portanto, a condição necessária (1).

As ternas de naturais que satisfazem (1) são: $(3, 3, 3)$, $(2, 3, 6)$ e $(2, 4, 4)$ a menos de comutatividade.

Portanto, na melhor das hipóteses, \mathfrak{F} pode ser associado a três ladrilhamentos distintos que são os ladrilhamentos associados aos grupos cristalográficos C_3^1 , C_4^1 e C_6^1 (Figuras 2.52, 2.55, 2.57 Capítulo 2).

Caso Elíptico

A relação (1) nos fornece a base para o estudo de grupos triângulos.

Quando

$$\delta > 1 \tag{2}$$

temos um triângulo esférico (ou elíptico).

As ternas de naturais que satisfazem (2) são $(2, 2, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(2, 3, 5)$ e $(2, 2, k)$, $k \in \mathbb{N}^*$, a menos de comutatividade.

Para obter os ladrilhamentos oriundos dos grupos triângulo dos três primeiros casos, fazemos uso dos poliedros P platônicos inscrito em $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Tomemos a projeção radial das arestas de P sobre S^2 . Temos que P origina um ladrilhamento por polígonos \mathfrak{P} esféricos congruentes em S^2 . Cada \mathfrak{P} com t lados será triangulado em $2t$ triângulos Δ onde cada Δ possui um vértice num vértice de \mathfrak{P} , outro num ponto médio de um lado de \mathfrak{P} e o outro no centro de \mathfrak{P} .

Assim, um ladrilhamento $(\mathcal{L}_\Delta(S^2), T_{\alpha,\beta,\gamma})$, onde (α, β, γ) é uma das três primeiras ternas acima. Para efeito de visualização, utilizamos a projeção estereográfica (que é conforme) $\pi : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ na esfera ladrilhada. O tetraedro origina a Figura 3.14². O cubo ou o octaedro origina a Figura 3.15. O dodecaedro ou o icosaedro origina a Figura 3.16.

Para obter o ladrilhamento $(\mathcal{L}_\Delta(S^2), T_{2,2,k})$, $k \in \mathbb{N}^*$, tomamos o equador de S^2 e $2k$ pontos equidistantes (euclidianamente) sobre este. Tomamos os meridianos passando por estes pontos e chegamos assim ao ladrilhamento desejado. Novamente, pela projeção estereográfica, visualizamos o mosaico da Figura 3.17 que ilustra o caso $k = 3$.

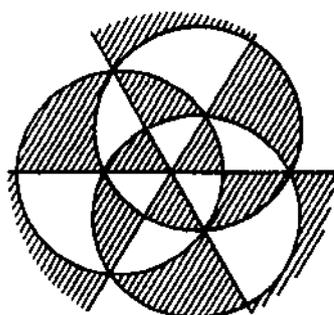


FIGURA 3.14

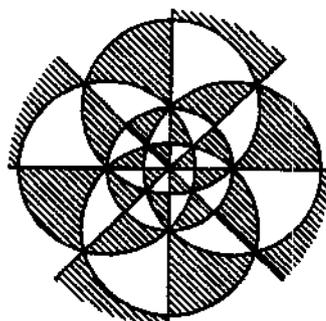


FIGURA 3.15

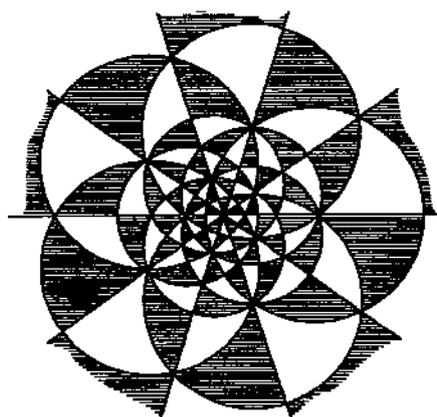


FIGURA 3.16

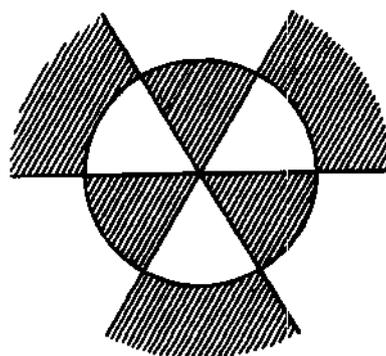


FIGURA 3.17

²Os quatro próximos ladrilhamentos foram retirados da referência [MAGNUS II].

Caso Hiperbólico

A relação

$$\delta < 1 \quad (3)$$

caracteriza triângulos Δ hiperbólicos, nosso objeto de estudo nesta seção.

Neste caso, temos infinitos triângulos. Surge aqui uma pergunta que nos casos anteriores era respondida construindo-se o ladrilhamento: para todas as ternas de naturais satisfazendo (3) temos um ladrilhamento? E se algum(s) ângulo(s) de Δ for(em) nulo(s)?

A resposta afirmativa a ambas as questões respalda-se no seguinte teorema:

TEOREMA 8. *Sejam R_a, R_b, R_c reflexões nos lados de um triângulo Δ hiperbólico de ângulos $\frac{\pi}{\alpha}, \frac{\pi}{\beta}$ e $\frac{\pi}{\gamma}$ (α, β e γ , naturais estendidos satisfazendo (3)). Então as imagens de Δ sob a ação de $T(\alpha, \beta, \gamma)$ formam uma cobertura do plano hiperbólico \mathfrak{H} sem sobreposição (exceto nos bordos) e $T(\alpha, \beta, \gamma) = \langle X, Y, Z \mid X^2 = Y^2 = Z^2 = 1, (XY)^\alpha = (YZ)^\beta = (ZX)^\gamma = 1 \rangle$.*

Demonstração.

Façamos a demonstração em duas partes. A primeira viabiliza a construção do ladrilhamento e a segunda, a representação do grupo.

A) Utilizemos o modelo \mathcal{C} (naturalmente há uma equivalência em \mathfrak{S}).

Sem perda de generalidade, suponhamos que Δ possui o vértice A no ponto $z = 0$ de \mathcal{C} . Logo, Δ possui dois lados (b e c) nos "diâmetros" de \mathcal{C} .

Tomemos $\mathfrak{P}_1 = \{f(\Delta) \mid f \in \langle R_b \circ R_c, R_b \rangle\}$ o polígono hiperbólico composto por 2α triângulos isométricos a Δ . Chamemos os triângulos que compõem \mathfrak{P}_1 de triângulos de ordem um (Figura 3.18).

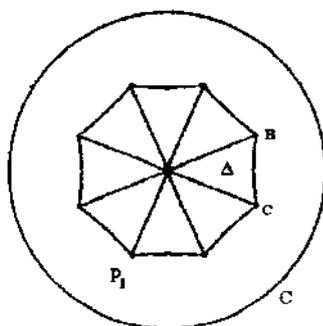


FIGURA 3.18

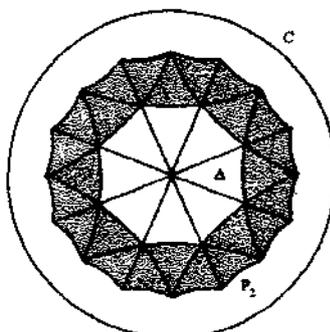


FIGURA 3.19

Tomando os vértices de \mathfrak{P}_1 e aplicando um procedimento análogo ao feito com o vértice A de Δ , obtemos um novo polígono hiperbólico que denotamos

\mathfrak{P}_2 e que possui \mathfrak{P}_1 no seu interior. Os triângulos que compõe \mathfrak{P}_2 mas não pertencem a \mathfrak{P}_1 chamamos de triângulos de ordem dois (Figura 3.19).

Mostramos que este procedimento pode ser realizado indefinidamente. Para tanto, basta mostrar que os triângulos de ordem k não se sobrepõem com triângulos de ordens inferiores. Separamos esta demonstração em seis casos:

A)i) $\alpha, \beta, \gamma \geq 3$.

Façamos a demonstração por indução: suponhamos que os triângulos de ordem $k-1$ não interceptam (exceto nos bordos) os de ordens inferiores (uma vez que os de ordem 2 não interceptam os de ordem 1).

Os triângulos de ordem $k-1$ formam uma “região anular” \mathfrak{A} em torno de polígono hiperbólico \mathfrak{P}_{k-2} . Chamemos os triângulos de \mathfrak{A} de $\Delta_1, \dots, \Delta_p$. É fácil ver que todo vértice de $\Delta_1, \dots, \Delta_p$ que não está em \mathfrak{P}_{k-2} é comum a dois ou três triângulos de \mathfrak{A} (Figura 3.20³). Juntando esta observação com o fato de $\alpha, \beta, \gamma \geq 3$, temos que cada ângulo interno de \mathfrak{P}_{k-1} é $\leq \pi$. Logo, \mathfrak{P}_{k-1} é convexo.

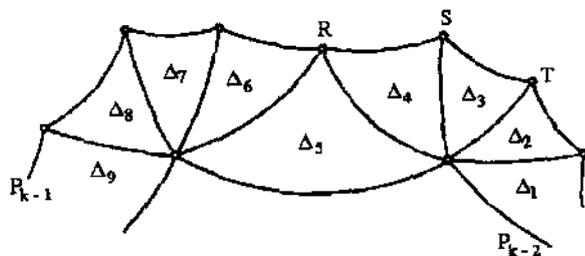


FIGURA 3.20

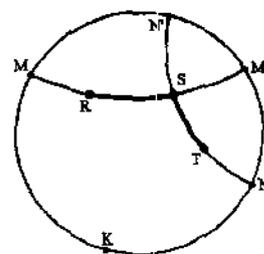


FIGURA 3.21

Tomemos dois lados consecutivos de \mathfrak{P}_{k-1} com vértices R, S, T e as h-retas $MRSM', NSTN'$; $M, M', N, N' \in c_\infty$ que contêm os lados \overline{RS} e \overline{ST} de \mathfrak{P}_{k-1} respectivamente (Figura 3.21).

Temos que um dos semi-planos hiperbólicos determinado por $MRSM'$ contém o interior de \mathfrak{P}_{k-1} . Mais ainda: o interior de \mathfrak{P}_{k-1} está contido no interior do ângulo hiperbólico $MSNK$. Assim, os triângulos de ordem k em S não possuem interior no ângulo $MSNK$. Como S é arbitrário, temos que os triângulos de ordem k não se sobrepõem com triângulos de ordem inferior.

Resta mostrar que os triângulos de ordem k não se sobrepõem. Para tanto, dividamos estes triângulos em duas classes:

- Os que possuem dois vértices em comum com \mathfrak{P}_{k-1} , que chamamos de Z_1, \dots, Z_t .

³As ilustrações de 3.20 a 3.28 foram adaptadas de figuras encontradas na referência [CARATHÉODORY].

- Os que possuem apenas um vértice em comum com \mathfrak{P}_{k-1} , que chamamos de E_1, \dots, E_u (Figura 3.23).

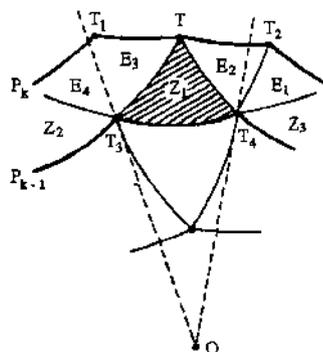


FIGURA 3.22

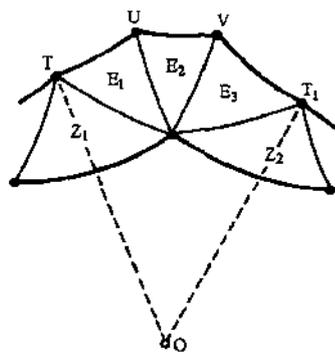


FIGURA 3.23

Tomemos os segmentos que unem a origem O de \mathcal{C} com os vértices de \mathfrak{P}_{k-1} . Sejam R_1, R, R_2 três vértices consecutivos de \mathfrak{P}_{k-1} . Se R é encontro de dois triângulos de ordem $k-1$ então, $\sphericalangle(\overline{RO}, \overline{RR_1}), \sphericalangle(\overline{RO}, \overline{RR_2}) \leq \frac{2\pi}{3}$.

Se R é encontro de três triângulos de ordem $k-1$, o mesmo resultado vale. Demonstramos isto por indução.

Como o resultado é verdadeiro para \mathfrak{P}_2 , suponhamos que seja verdadeiro para \mathfrak{P}_{k-2} . Mostremos que vale para \mathfrak{P}_{k-1} (para efeito de aproveitamento da Figura 3.22, suponhamos que o resultado valha para \mathfrak{P}_{k-1} e mostremos que vale para \mathfrak{P}_k):

Sejam T_1, T, T_2 vértices em \mathfrak{P}_k , T encontro de três triângulos de ordem k . Tomemos o triângulo $Z_1 = T_3TT_4$ com T_3, T_4 vértices de \mathfrak{P}_{k-1} (Figura 3.22).

De $\sphericalangle(\overline{T_3O}, \overline{T_3T_4}), \sphericalangle(\overline{T_4O}, \overline{T_4T_3}) \leq \frac{2\pi}{3}$ e $\sphericalangle(\overline{T_3T}, \overline{T_3T_4}), \sphericalangle(\overline{T_4T}, \overline{T_4T_3}) \leq \frac{\pi}{3}$ temos que Z_1 está contido no setor de ângulo $\widehat{T_3OT_4}$. Logo, $\sphericalangle(\overline{TO}, \overline{TT_1}), \sphericalangle(\overline{TO}, \overline{TT_2}) \leq \frac{2\pi}{3}$. O que demonstra nossa asserção.

Com isto, chegamos que $Z_i, 1 \leq i \leq t$, não se sobrepõem.

Tomemos dois triângulos consecutivos de ordem k do tipo Z_i , digamos Z_1 e Z_2 e todos os triângulos de tipo E_j de ordem k "entre" Z_1 e Z_2 (Figura 3.23).

Pelo fato de todos os ângulos dos triângulos que se encontram num ponto serem congruentes, temos, como indicado na Figura 3.23, que o polígono $OTUV\dots T_1$ é convexo, pois todos os seus ângulos internos são $\leq \pi$. Isto mostra que os triângulos de tipo E_i não se sobrepõem. Logo, os triângulos de ordem k não se sobrepõem.

Finalmente, mostremos que \mathfrak{F} cobre \mathcal{C} . Para tanto, tomemos um ponto X pertencente a algum triângulo ABC de \mathfrak{F} . Tomemos \mathfrak{P}^* polígono composto

pelos triângulos de \mathfrak{F} que possuem alguma intersecção com ABC .

Temos que $d(Fr(\Delta ABC), Fr(\mathfrak{P}^*)) = d > 0$ (constante). Assim, todo ponto X de \mathfrak{F} possui uma vizinhança V_X tal que $B_d(X) \subset V_X$ e V_X pertence a \mathfrak{F} . Logo, $\bigcup_{X \in \mathfrak{F}} V_X = \mathcal{E}$.

A)ii) $\alpha = 2; \beta, \gamma > 4$.

Sem perda de generalidade, tomemos ΔABC com A na origem de \mathcal{E} onde $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$.

Criando os polígonos \mathfrak{P} 's como no item i), temos que \mathfrak{P}_2 não é convexo pois possui ângulos interiores de medida $\frac{3\pi}{2}$ (que ocorrem nos vértices dos triângulos do tipo Z_i que não pertencem a \mathfrak{P}_1).

Tomemos os triângulos H_i refletidos dos triângulos E_i adjacentes a Z_i em \mathfrak{P}_2 (Figura 3.24).

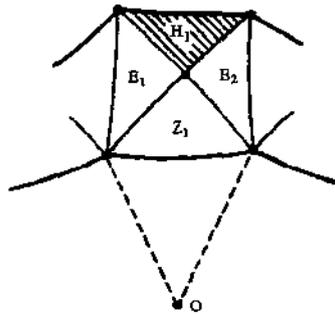


FIGURA 3.24

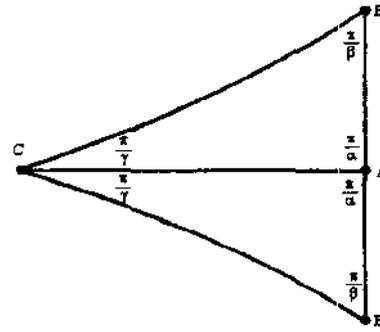


FIGURA 3.25

Temos, assim, que $\mathfrak{P}_2 \cup \bigcup_i H_i = \mathfrak{P}'_2$ é um polígono convexo e podemos utilizar raciocínio semelhante ao do item i) para este caso.

A)iii) $\alpha = 2, \beta = 3, \gamma > 6$.

Tomemos ΔABC e aplicamos a reflexão no lado b de modo a obter um novo triângulo Δ' de ângulos $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$ e $2\frac{\pi}{\gamma} < \frac{\pi}{3}$ (Figura 3.25). Temos que Δ' está de acordo com as hipóteses do item i).

A)iv) $\alpha = 0; \beta, \gamma > 0$.

Tomemos um vértice B tal que $\widehat{B} > 0$ de ΔABC na origem de \mathcal{E} .

Suponhamos que $\widehat{B} = \frac{\pi}{t}$. Logo, \mathfrak{P}_1 possui t cúspides em c_∞ (Figura 3.26).

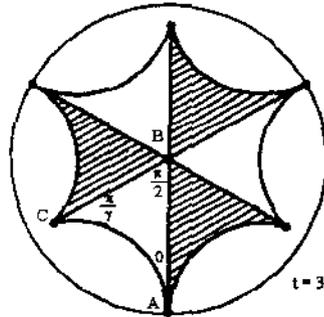


FIGURA 3.28

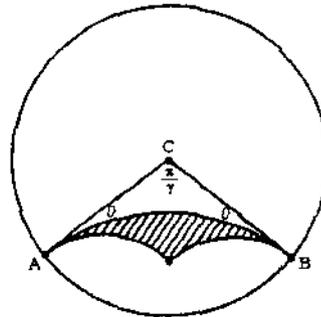


FIGURA 3.27

Tomando \mathfrak{P}_2 a partir de \mathfrak{P}_1 por reflexões nos lados de triângulos que se encontram em vértices não cuspidais de \mathfrak{P}_1 , teremos que \mathfrak{P}_2 é convexo e, por um processo análogo ao item i), é fácil verificar que os triângulos de ordem k não se sobrepõem com triângulos de ordem inferior.

A parte principal nesse caso gira em torno da demonstração de que \mathfrak{F} cobre \mathcal{C} . Para tanto, tomemos ΔABC e seus adjacentes (triângulos que possuem alguma intersecção com ΔABC incluindo arestas e vértices). Chamemos o polígono assim obtido de \mathfrak{P}' . Todo ponto $X \in \mathcal{C}$, $X \in \Delta ABC$ é tal que $d(X, \mathfrak{P}') = d_X > 0$. Logo, $B_{d_X}(X) \in \mathfrak{P}'$. Notemos que $\lim_{X \rightarrow A} d_X = 0$. Mas se fixamos $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$, $\mathcal{C}' = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r < 1\}$, temos que $\inf_{\substack{X \in \Delta ABC \\ X \in \mathcal{C}'}} d_X = d > 0$.

Logo, \mathcal{C}' é coberto por um número finito de triângulos de \mathfrak{F} . Como $0 < r < 1$ é arbitrário, \mathcal{C} é coberto por \mathfrak{F} .

A)v) $\alpha, \beta = 0; \gamma > 0$.

Neste caso, tomemos ΔABC com vértice C na origem de \mathcal{C} . Logo, $A, B \in c_\infty$ são cúspides. \mathfrak{P}_1 é um polígono com todos os vértices cuspidais.

Os triângulos de ordem dois são obtidos por reflexões nos lados dos triângulos de primeira ordem que são comuns a \mathfrak{P}_1 (Figura 3.27). Logo, \mathfrak{P}_2 é convexo e o processo para demonstração é o mesmo do item i).

A)vi) $\alpha, \beta, \gamma = 0$.

Neste caso tomamos o modelo \mathcal{S} . Consideremos o ΔABC com cúspides nos pontos $0, 1$ e $\infty \in r_\infty$ respectivamente. Logo, $H_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z \geq \frac{1}{2} \right\} \subset F_1 = \{f(\Delta ABC) \mid f \in \langle R_a, R_b \rangle\}$. Assim, F_1 cobre H_1 .

Refletindo F_1 em cada semi-círculo de raio $\frac{1}{2}$ da fronteira de F_1 e chamando esta cobertura de F_2 , temos que $H_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z \geq \frac{1}{4} \right\} \subset F_2$.

Genericamente, $H_k = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z \geq \frac{1}{2^k} \right\} \subset F_k$ (Figura 3.28).

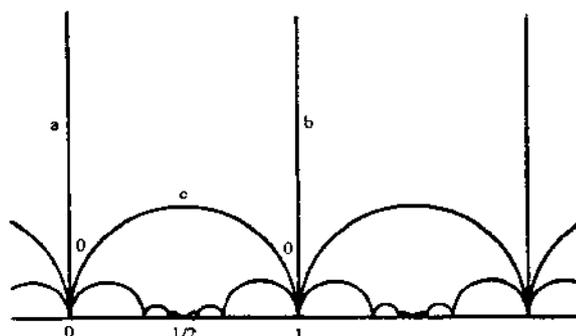


FIGURA 3.28

$\mathfrak{F} = \lim_{k \rightarrow \infty} F_k$ cobre \mathfrak{S} e não possui sobreposições de triângulos.

Notemos que o conjunto $D = \left\{ \frac{1}{2} + k \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \subset r_\infty$ é composto por pontos de acumulação de vértices de triângulos de \mathfrak{F} (se pensarmos em \mathfrak{S} como semi-plano superior euclidiano).

Nota. O grupo gerado pelas reflexões hiperbólicas nos lados de um triângulo de ângulos internos nulos é chamado de **grupo modular**.

B) Temos que $T(\alpha, \beta, \gamma)$ é gerado por reflexões R_a, R_b, R_c nos lados a, b, c do ΔABC de ângulos $\frac{\pi}{\alpha}, \frac{\pi}{\beta}, \frac{\pi}{\gamma}$. Veja a Figura 3.29.

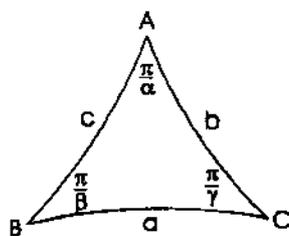


FIGURA 3.29

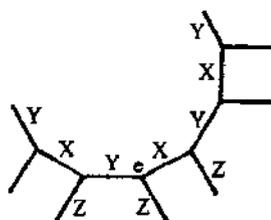


FIGURA 3.30

É fácil ver que $R_a^2 = R_b^2 = R_c^2 = Id$.

Como vimos, na classificação de isometria hiperbólicas, $R_a \circ R_b = \rho_{C, 2\frac{\pi}{\gamma}}$: rotação (elíptica) de centro C e giro $2\frac{\pi}{\gamma}$. Logo, $(R_a \circ R_b)^\gamma = \rho_{C, 2\pi}^\gamma = Id$.

Analogamente, $(R_b \circ R_c)^\alpha = (R_c \circ R_a)^\beta = Id$.

Sejam $X = R_b, Y = R_c$ e $Z = R_a$. A Figura 3.30 ilustra um “pedaço” do grafo $\Gamma_{T_{\alpha, \beta, \gamma}}$, que é planar. É fácil ver que $\Gamma_{T_{\alpha, \beta, \gamma}}$ é 3-regular, conexo e que todo caminho fechado é consequência das relações definidoras $X^2 = Y^3 = Z^2 = (XY)^\alpha = (YZ)^\beta = (ZX)^\gamma = Id$. Logo,

$$T_{\alpha,\beta,\gamma} = \langle X, Y, Z \mid X^2 = Y^3 = Z^2 = (XY)^\alpha = (YZ)^\beta = (ZX)^\gamma = 1 \rangle. \blacksquare$$

Vejam os alguns ladrilhamentos⁴ associados a grupos triângulos:

Figura 3.31: $(\mathcal{L}_L(\mathfrak{S}), T(2, 3, 0))$ (L é um triângulo hiperbólico de ângulos internos $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ e 0).

Figura 3.32: $(\mathcal{L}_L(\mathfrak{C}), T(2, 3, 0))$. Este ladrilhamento é o obtido da figura anterior pela aplicação f (isometria entre os modelos).

Figura 3.33: $(\mathcal{L}_L(\mathfrak{C}), T(0, 0, 0))$. Este ladrilhamento é especial pelo fato dos ladrilhos terem todos ângulos nulos.

Figura 3.34: $(\mathcal{L}_L(\mathfrak{C}), T(2, 0, 0))$. Este ladrilhamento é ilustrado com ladrilhos compostos por quatro triângulos hiperbólicos justapostos.

Figura 3.35: $(\mathcal{L}_L(\mathfrak{C}), T(3, 0, 0))$. Este ladrilhamento é análogo ao anterior, porém, desta vez, cada ladrilho é composto por três triângulos hiperbólicos justapostos.

Figura 3.36: $(\mathcal{L}_L(\mathfrak{C}), T(2, 3, 7))$.

Figura 3.37: $(\mathcal{L}_L(\mathfrak{C}), T(2, 3, 8))$.

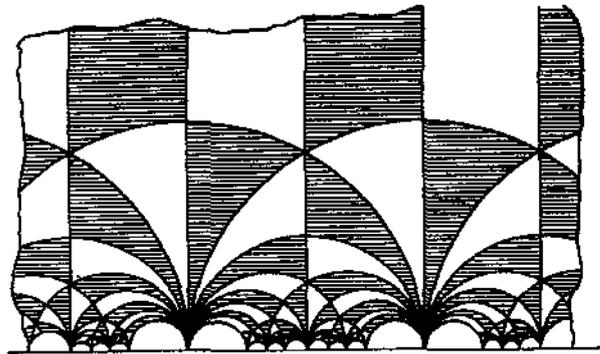


FIGURA 3.31

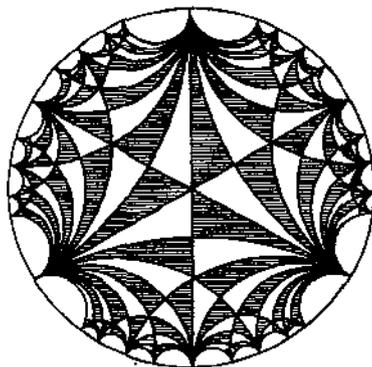


FIGURA 3.32

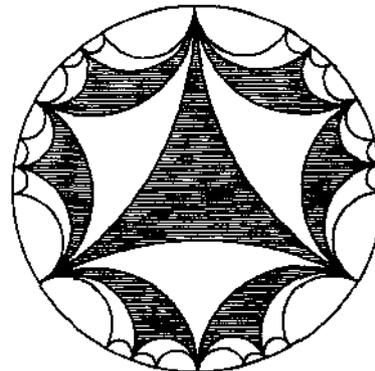


FIGURA 3.33

⁴Figuras retiradas da referência [MAGNUS II].

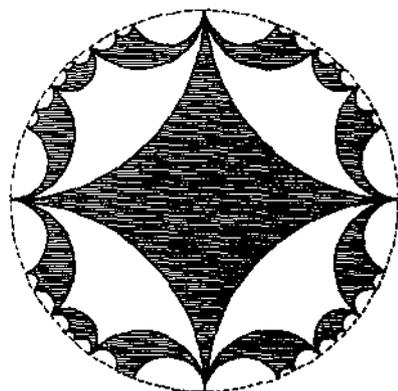


FIGURA 3.34

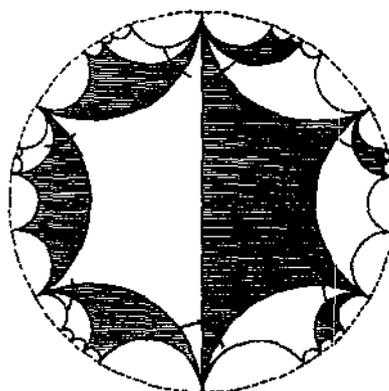


FIGURA 3.35

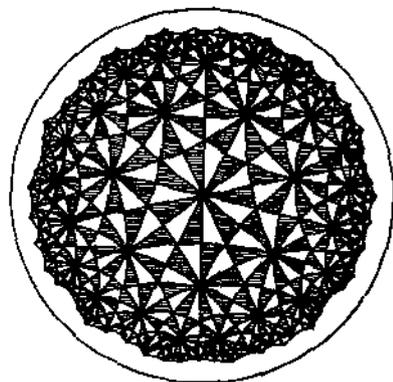


FIGURA 3.36

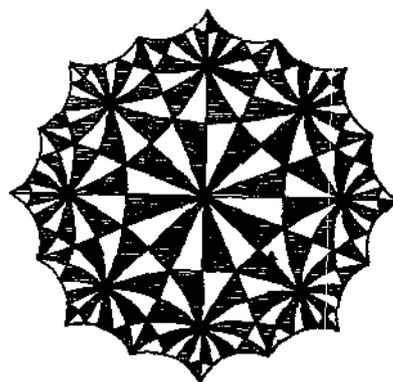


FIGURA 3.37

Um resultado importante sobre ladrilhamentos nos modelos hiperbólicos é: para qualquer $g \geq 2$ existem ladrilhamentos por polígonos de $4.g$ lados, nos quais o subgrupo G de $ISO(\mathfrak{G})$ ($ISO(\mathfrak{C})$) associado só envolve translações [cf. FENN].

Este fato tem como consequência que toda superfície orientável M_g de genus $g \geq 2$ admite uma métrica de curvatura constante negativa igual a -1 $\left(M_g = \frac{\mathfrak{G}}{G} \left(= \frac{\mathfrak{C}}{G} \right) \right)$.

Capítulo 4

Classificação de Poliedros de Voronoi

Poliedros de Voronoi são um tipo especial de poliedros que ladrilham o espaço euclidiano e possuem, como veremos, uma propriedade muito interessante com relação à sua distribuição num reticulado de pontos gerado por três translações LI no espaço. Com base nesta propriedade, a classificação de tais poliedros se torna um estudo relevante, sendo, por conseguinte, o objetivo deste capítulo.

Como referências para tal estudo, citamos o artigo [COXETER I] e o livro [COXETER II].

4.1 Motivação no plano euclidiano

4.1.1 Polígonos de Voronoi

Definição 1. Um polígono em \mathbb{R}^2 é dito **simétrico centralmente** se puder ser transformado em si próprio através de uma rotação de 180° (em \mathbb{R}^2). Denotamos tal polígono por sc .

Conseqüências.

Um polígono sc possui um número par de vértices, ocorrendo opostos dois a dois (em relação ao centro da rotação de 180° que transforma o polígono).

Dois lados opostos de um polígono sc são paralelos e possuem mesma medida euclidiana.

Um polígono sc com quatro lados é um paralelogramo.

PROPOSIÇÃO 1. Um polígono sc ladrilha o plano se e só se possui quatro ou seis lados.

Demonstração.

⇐) Seja L tal polígono *sc*.

Se L possui quatro lados (paralelogramo), então existe $(\mathfrak{L}_L(\mathbb{R}^2), C_1)$ (C_1 : grupo cristalográfico gerado por duas translações LI). A Figura 4.1 ilustra tal ladrilhamento.

Se L possui seis lados, então o mesmo resultado acima é válido, porém, chamando $L = ABCDEF$, temos que as translações geradoras de C_1 são pelos vetores \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{AE} (Figura 4.2).



FIGURA 4.1

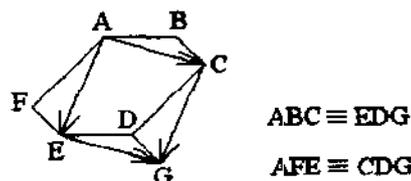


FIGURA 4.2

⇒) Mostremos, inicialmente, que um polígono qualquer que ladrilha o plano possui no máximo seis lados. Para tanto, consideremos um ladrilhamento do plano como sendo limite de uma seqüência de mapeamentos da esfera no plano ou, ainda, uma seqüência de poliedros eulerianos (poliedros com todas as faces com mesmo número de lados) indexada ao número de faces. Mais precisamente:

Se $\mathfrak{L}_{\{L_j\}}(\mathbb{R}^2)$ é ladrilhamento de \mathbb{R}^2 pelos polígonos L_j , $j \in I$: conjunto enumerável de índices, então $\mathfrak{L}_{\{L_j\}}(\mathbb{R}^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$, onde $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 4$; P_n é poliedro euleriano com n faces; $\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{Área de } P_n) = \infty$ e L_j são as faces de P_n .

Sejam V : no. de vértices de um poliedro euleriano (da seqüência) P_{n_0} .

A : no. de arestas de P_{n_0} .

F : no. de faces de P_{n_0} .

p : no. de lados de cada face de P_{n_0} .

Temos que $3V \leq 2A$, pois de cada vértice saem no mínimo 3 arestas. O número mínimo de arestas contadas duas vezes no poliedro é $3V$ e o número de arestas, contadas duas vezes, em P_{n_0} é pF , pois cada aresta pertence a duas faces. Logo, $3V \leq 2A = pF$.

Mas a fórmula de Euler nos fornece $F - A + V = 2 \Rightarrow A - V = F - 2$.

Assim, de $3V \leq 2A \Rightarrow A + 3V \leq 3A \Rightarrow A \leq 3(A - V) = 3(F - 2)$.

Mas de $2A = pF \Rightarrow A = \frac{pF}{2}$.

Logo, $\frac{pF}{2} \leq 3(F - 2) \Rightarrow p \leq 6 \left(1 - \frac{2}{F}\right)$.

Fazendo $n \rightarrow \infty$, implica $F \rightarrow \infty$. Logo, temos $p \leq 6$.

Como um polígono *sc* possui um número par de lados, se ladrilha o plano, deve possuir quatro ou seis lados. ■

Definição 2. A órbita de um ponto em \mathbb{R}^2 por um grupo cristalográfico C_1 (gerado por duas translações $T_{\vec{u}}$ e $T_{\vec{v}}$ LI) chamamos **reticulado gerado** por \vec{u} e \vec{v} e escrevemos $[\vec{u}, \vec{v}]$.

Nota. De modo análogo, podemos definir reticulado no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 : É a órbita de um ponto em \mathbb{R}^3 pelo grupo $\langle T_{\vec{u}}, T_{\vec{v}}, T_{\vec{w}} \rangle$, onde \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são LI.

Definição 3. Consideremos o reticulado $[\vec{u}, \vec{v}]$. Fixado um ponto $A \in [\vec{u}, \vec{v}]$, ao conjunto

$$P_A = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, X) \leq d(X, T), \forall T \in [\vec{u}, \vec{v}]\}$$

chamamos de **região de Voronoi** (ou de *Dirichlet*) do reticulado $[\vec{u}, \vec{v}]$ no ponto A .

PROPOSIÇÃO 2. $P_A \subset \mathbb{R}^2$ é região de Voronoi de um reticulado $[\vec{u}, \vec{v}]$ em A se e só se:

- P_A é um polígono *sc* com quatro ou seis lados.
- P_A é completamente inscritível numa circunferência C de centro A (todos os seus vértices pertencem a C).

Demonstração.

\Rightarrow) Como qualquer reticulado $[\vec{u}, \vec{v}]$ é localmente finito, temos que P_A é um polígono, $\forall A \in [\vec{u}, \vec{v}]$.

Fixado $A \in [\vec{u}, \vec{v}]$ temos que $[\vec{u}, \vec{v}]$ é *sc* em relação à A no seguinte sentido: qualquer ponto $Z \in [\vec{u}, \vec{v}]$ e $Y = -2T_{\vec{AZ}}(X)$ são simétricos em relação a A . Logo P_A é *sc* e, mais ainda, $P_A \equiv P_B, \forall B \in [\vec{u}, \vec{v}]$.

Como $\forall X \in \mathbb{R}^2$ é tal que $X \in P_B$ para algum $B \in [\vec{u}, \vec{v}]$, temos que $\mathcal{L}_{P_A}(\mathbb{R}^2)$ é um ladrilhamento de \mathbb{R}^2 e, portanto, pela Proposição 1, P_A possui quatro ou seis lados.

Como todo lado de P_A é lugar geométrico de pontos equidistantes de dois pontos de $[\vec{u}, \vec{v}]$ e os lados de P_A ocorrem opostos dois a dois, o segmento que une os pontos médios de dois lados opostos de P_A é perpendicular a estes lados. Como P_A é *sc*, A é ponto médio deste segmento. Assim, P_A é inscritível numa circunferência C de centro A onde os vértices pertencem a C (Figura 4.3).

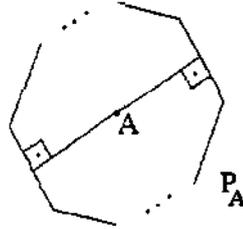


FIGURA 4.3

\Leftarrow) Como P_A é *sc* e possui quatro ou seis lados, temos, pela Proposição 1, que $\mathcal{L}_{P_A}(\mathbb{R}^2)$ é um ladrilhamento de \mathbb{R}^2 .

Tomemos P_A e todos os polígonos adjacentes a P_A : P_{A_1}, \dots, P_{A_n} .

Como todos os P_{A_j} 's estão completamente inscritos em circunferências C_j 's de centros A_j 's, temos que os segmentos $\overline{AA_1}, \dots, \overline{AA_n}$ são ortogonais aos lados de P_A passando pelos pontos médios destes.

Como todas as circunferências possuem o mesmo raio, temos que os pontos médios de $\overline{AA_1}, \dots, \overline{AA_n}$ pertencem aos lados de P_A . Assim, dado $X \in P_A$ temos pela desigualdade triangular que $d(A, X) \leq d(X, A_i), \forall i = 1, \dots, n$.

Logo, P_A é região de Voronoi de $[\vec{u}, \vec{v}]$, onde \vec{u} e \vec{v} são tomados como vetores das translações geradoras de C_1 associado a $\mathcal{L}_{P_A}(\mathbb{R}^2)$ (Proposição 1). ■

Vimos que se $A \in [\vec{u}, \vec{v}]$, então $P_A \equiv P_B, \forall B \in [\vec{u}, \vec{v}]$ e mais ainda: P_A é um polígono. Logo, podemos considerar a seguinte definição:

Definição 3*. Chamamos $P_A, A \in [\vec{u}, \vec{v}]$ simplesmente de P : **polígono de Voronoi do reticulado** $[\vec{u}, \vec{v}]$.

A conclusão mais relevante que obtemos dos resultados anteriores (para nossos fins) é que todo polígono de Voronoi possui quatro ou seis lados. Esta é a classificação dos polígonos de Voronoi em \mathbb{R}^2 .

4.1.2 Diagramas Projetivos para Polígonos *sc*.

Estrelas de um Polígono *sc*

Nesta seção introduziremos os chamados diagramas projetivos associados a polígonos *sc*. Estes diagramas, definidos para polígonos, não são necessários para a classificação dos "poliedros de Voronoi", uma vez que definiremos, na próxima seção, os diagramas projetivos associados a "poliedros *sc*". Porém, é interessante estudá-los no caso dos polígonos a título de familiarização.

A classificação dos "poliedros de Voronoi", ao contrário dos polígonos de Voronoi, depende fortemente deste novo conceito.

Seja Q um polígono *sc*. Temos que os lados de Q são opostos dois a dois e os opostos são paralelos com mesma medida euclidiana. Associamos a cada par de lados opostos um segmento cujo comprimento é a soma dos comprimentos dos lados (associados) e arranjemos estes segmentos de tal modo que todos se cruzem em seus pontos médios e cada um seja paralelo aos lados que representam no polígono. Chamemos este arranjo de *estrela de segmentos*. Como exemplo, na Figura 4.4 vemos um polígono Q *sc* e sua estrela de segmentos.

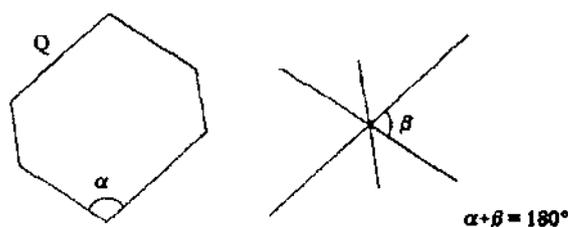


FIGURA 4.4

Podemos associar a cada par de regiões opostas na estrela de segmentos um par de vértices no polígono Q , de tal modo que um dos ângulos das regiões opostas na estrela seja o suplemento de um dos ângulos internos do polígono nos vértices opostos associados (na Figura 4.4, $\alpha + \beta = 180^\circ$).

Em resumo, se Q possui $2m$ vértices, a estrela de segmentos possui $2m$ regiões opostas e m segmentos.

Considerando a estrela de segmentos de Q em \mathbb{R}^2 , tomemos retas no lugar dos segmentos (os segmentos estão contidos nas retas). Logo, podemos tomar a seguinte definição.

Definição 4. À configuração de retas associada a Q tomadas como no parágrafo anterior, chamamos de *estrela associada a Q* e denotamos por $E(Q)$.

Consideremos o conjunto $S = \{E(Q) \mid Q \text{ é polígono } sc\}$. Tomemos a relação de equivalência \sim sobre S :

$E(Q_1) \sim E(Q_2) \Leftrightarrow E(Q_1)$ e $E(Q_2)$ possuem o mesmo número de retas.

Acrescentando uma reta no infinito ao plano euclidiano, temos o plano projetivo e esta reta no infinito é um plano projetivo de dimensão um (portanto S^1).

As m retas da estrela de Q no plano projetivo dividem a reta projetiva em m pontos e as $2m$ regiões opostas da estrela dividem a reta projetiva em m "segmentos" (arcos de S^1) (Figura 4.5).

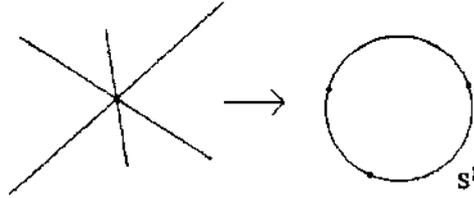


FIGURA 4.5

Diagramas Projetivos e Classes de Equivalências

Seja $C = \{Q \mid Q \text{ é polígono } sc\}$. Consideremos a relação de equivalência \approx sobre C :

$Q_1 \approx Q_2 \Leftrightarrow E(Q_1)$ e $E(Q_2)$ pertencem à mesma classe de equivalência de $\frac{S}{\sim}$.

Assim, tomando m pontos sobre $RP^1 \equiv S^1$, temos associado a esta uma classe de $\frac{S}{\sim}$, conseqüentemente, uma classe \mathcal{D} de $\frac{C}{\approx}$ na qual cada polígono sc de \mathcal{D} possui m pares de lados opostos. Os m arcos determinados pelos m pontos sobre S^1 representam os m pares de vértices opostos dos polígonos sc de \mathcal{D} .

Definição 5. Chamamos os m pontos em RP^1 , oriundos da estrela de Q de **diagrama projetivo** associado à classe \mathcal{D} de Q .

4.2 Zonoedros

Definição 6. Um poliedro convexo P no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 é dito **zonoedro** se todas as suas faces forem polígonos sc .

Como conseqüência, todas as faces de um zonoedro possui um número par de lados.

Definição 7. Chamamos de **zona** de um zonoedro P um conjunto Z de faces deste, de modo que se a_1 e a_2 são arestas comuns às faces F_1, F_2 e G_1, G_2 respectivamente, então $a_1 // a_2$. Dizemos que a_1 e a_2 pertencem à zona Z .

Observação. Se o zonoedro possui arestas em n diferentes direções, temos n zonas distintas.

A Figura 4.6 ilustra as zonas de um cubo.

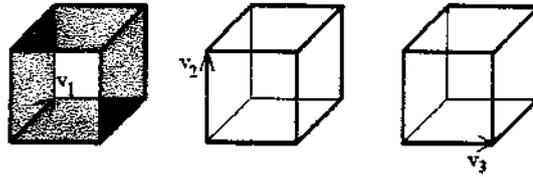


FIGURA 4.6

Definição 8. Um poliedro convexo P é dito **simétrico centralmente** se existe um ponto O do espaço euclidiano tal que para qualquer reta r contendo O , a intersecção $P \cap r$ é constituída por dois pontos A_1 e A_2 tais que $d(O, A_1) = d(O, A_2)$.

Indicaremos tais poliedros com a notação *SC*.

PROPOSIÇÃO 3. Todo zonoedro é *SC*.

Demonstração.

Se uma face F possui $2k$ lados, temos que F pertence à k zonas distintas. Tomando duas destas zonas: Z_1 e Z_2 , deverá existir outra face F' tal que $F' \in Z_1$ e $F' \in Z_2$, uma vez que as faces de Z_1 formam um “circuito fechado bidimensional” sobre P .

Se a_1 é aresta de Z_1 e lado de F , a_2 é aresta de Z_2 e lado de F , temos que se a'_1 é aresta de Z_1 e lado de F' , então $a'_1 // a_1$ e se a'_2 é aresta de Z_2 e lado de F' temos que $a'_2 // a_2$. Logo, a face F é paralela à face F' .

Como todas as zonas que possuem F devem possuir F' , o número de lados de F e F' é o mesmo e estas possuem lados opostos dois a dois congruentes (devido ao fato de que todas as arestas de uma zona são congruentes) e, sendo F' *sc*, temos que F e F' são congruentes.

Como cada zona forma um circuito em P , temos que F e F' são simétricas em relação a um ponto O_F no espaço.

Tomando uma face G adjacente à F e sua oposta G' (adjacente a F'), temos que $O_G = O_F$, pois os pontos da aresta comum a F e G são simétricos em relação à aresta comum à G' e F' por O_G e O_F . Logo, P possui um ponto de simetria central que chamamos de O . ■

4.2.1 Poliedros de Voronoi

Definição 9. Seja $R = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ reticulado gerado pelos vetores LI $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ em \mathbb{R}^3 . Fixado $A \in R$, ao conjunto

$$P_A = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid d(A, X) \leq d(X, T), \forall T \in R\}$$

chamamos de região de Voronoi do reticulado R no ponto A .

PROPOSIÇÃO 4. $P_A \equiv P_B, \forall B \in R, P_A \text{ é } SC \text{ e } \mathcal{L}_{P_A}(\mathbb{R}^3) \text{ é ladrilhamento de } \mathbb{R}^3.$

Demonstração.

Fixado $A \in R$ temos que R é simétrico centralmente em A no seguinte sentido: $\forall X \in R$, temos que $Y = -2T_{\overrightarrow{AX}}(X)$ e X são simétricos em relação a A .

Como R é localmente finito (ou seja, se $B \in R$, para $\forall r \in \mathbb{R}_+$, temos que $B_r(B) \cap R$ é finito) e o lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois pontos de R é um plano, P_A é um poliedro. Devido ao fato de R ser SC em A temos que P_A é SC e, ainda, $P_A \equiv P_B, \forall B \in R$.

Com base nisto, como todo ponto de \mathbb{R}^3 pertence a algum P_B , temos que $\mathcal{L}_{P_A}(\mathbb{R}^3)$ é ladrilhamento de \mathbb{R}^3 . ■

Vimos que se $A \in R$, então $P_A \equiv P_B, \forall B \in R$ e mais ainda: P_A é um poliedro. Logo, podemos considerar a seguinte definição:

Definição 10. Chamamos $P_A, A \in R$ simplesmente de P : **poliedro de Voronoi do reticulado R .**

PROPOSIÇÃO 5. Se P é poliedro de Voronoi de R , então:

- a) P é um zonoedro.
- b) P é completamente inscritível numa esfera E (possui todos os vértices sobre E).

Demonstração.

Sejam $A \in R$ e P_A poliedro de Voronoi em A . Se F é face de P_A , tomemos F' face oposta a F em P_A . Temos, também, que F é determinada por dois pontos de R , um é A e o outro chamemos de B (centro de outro poliedro de Voronoi que possui a face F em comum com P_A). Como $\mathcal{L}_{P_A}(\mathbb{R}^3)$ é ladrilhamento de \mathbb{R}^3 , temos que $T_{\overrightarrow{AB}}(F') = F$. Logo, $F' \equiv F$ e como F' é simétrico a F em relação a A , temos que F é sc . Logo, P_A é um zonoedro.

Como toda face de P_A é lugar geométrico dos pontos equidistantes a dois pontos de R e as faces de P_A ocorrem opostas duas a duas, temos que se O_1 e O_2 são centros de simetrias de F_1, F_2 : faces opostas de P_A , então $\overline{O_1O_2}$ é perpendicular a F_1 e F_2 (Figura 4.7).

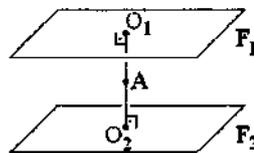


FIGURA 4.7

Como P_A é SC , temos que A é ponto médio de $\overline{O_1O_2}$. Como para cada par de faces podemos fazer o mesmo, P_A é inscritível numa esfera E com os vértices sobre E . ■

PROPOSIÇÃO 6. *Se um zonoedro é poliedro de Voronoi para algum reticulado, então cada zona possui quatro ou seis faces.*

Demonstração.

Suponhamos que um zonoedro P seja um poliedro de Voronoi para algum reticulado. Tomemos o prisma infinito cujas faces contenham uma zona Z qualquer do zonoedro. Este prisma “ladrilha” \mathbb{R}^3 . Projeteamos ortogonalmente este ladrilhamento no plano \mathbb{R}^2 . Logo, cada prisma é projetado em um polígono cujo número de lados é o mesmo que a quantidade de faces de Z (Figura 4.8).

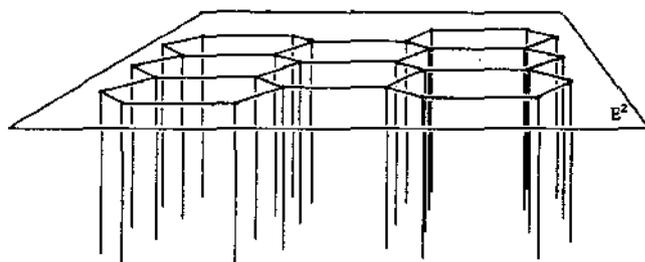


FIGURA 4.8

Como este polígono “ladrilha” \mathbb{R}^2 , temos que ele possui no máximo seis lados e como Z possui um número par de faces, este polígono possui quatro ou seis lados. ■

PROPOSIÇÃO 7. *Todo zonoedro que possui zonas com quatro ou seis faces e é completamente inscritível numa esfera E , pode ser tomado como poliedro de Voronoi para algum reticulado.*

Demonstração.

Seja P zonoedro como na hipótese.

Seja Z_1 zona, F_1, F_1', F_2, F_2' faces de Z_1 opostas duas a duas.

Sejam O_{F_1}, O_{F_2}, O centros de simetria de F_1, F_2 e P respectivamente.

Tomemos T_1 translação pelo vetor $2\overrightarrow{OO_{F_1}}$ e T_2 pelo vetor $2\overrightarrow{OO_{F_2}}$. Seja π o plano que contém O, O_{F_1} e O_{F_2} .

Tomemos a projeção ortogonal de Z_1 sobre π . Temos, assim, um polígono \overline{P} com quatro ou seis lados sc . Logo, \overline{P} “ladrilha” π . A partir do ladrilhamento $\mathcal{L}_{\overline{P}}(\pi)$ tomemos os zonoedros cujas projeções das zonas paralelas a Z_1 resultam nos polígonos do ladrilhamento (um zonoedro para cada polígono),

de modo que todos os centros de simetrias estejam no plano π . Temos assim uma camada de zonoedros todos justapostos pelas zonas paralelas a Z_1 (Figura 4.9).

Sejam G_1, G'_1, G_2, G'_2 faces de uma outra zona Z_2 de P distinta de Z_1 , tal que G_1 e G_2 são adjacentes a F_1 (portanto G'_1 e G'_2 são adjacentes a F'_1). Tomemos O_{G_1} centro de simetria de G_1 e T_3 translação pelo vetor $2\overrightarrow{OO_{G_1}}$. Assim, T_3 é tal que $T_3(G_2) = T_1(G'_2)$ (pois Z_2 possui quatro ou seis faces). A Figura 4.10 ilustra o caso de Z_2 possuir seis faces.

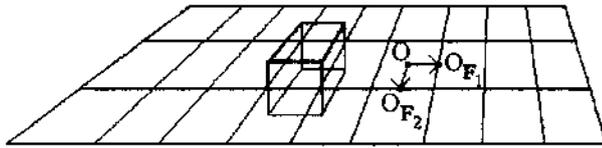


FIGURA 4.9

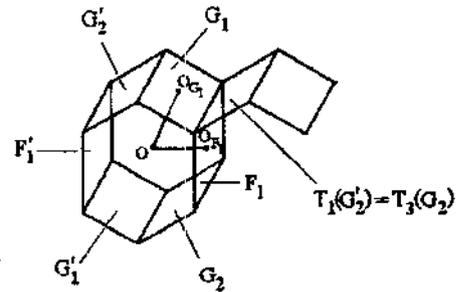


FIGURA 4.10

Logo, $\overline{T_3(P)} \cap \{T(P) \mid T \in \langle T_1, T_2 \rangle\} = \emptyset$. Chamemos $\{T(P) \mid T \in \langle T_1, T_2 \rangle\}$ de camada C_1 . Assim, a camada $\{T(P) \mid T \in \langle T_1, T_3 \rangle\} = C_2$ é tal que se $\overset{\circ}{P}_1 \cap \overset{\circ}{P}_2 \neq \emptyset$, onde $P_1 \in C_1$ e $P_2 \in C_2$, então $P_1 = P_2$.

Desenvolvendo o mesmo raciocínio para todas as zonas de P , temos que se $F_1, F'_1, \dots, F_k, F'_k$ são as faces de P com centros de simetria $O_{F_1}, O_{F'_1}, \dots, O_{F_k}, O_{F'_k}$, temos que $\{T(P) \mid T \text{ é translação por } 2\overrightarrow{OO_{F_i}}; i = 1, \dots, k\}$ é uma cobertura face a face de P por transladados de P . Logo, P ladrilha o espaço e o conjunto de centros dos ladrilhos forma um reticulado R gerado por T_1, T_2 e T_3 .

Como P é completamente inscritível numa esfera, $\overrightarrow{O_{F_i}O_{F'_i}}; i = 1, \dots, k$ é perpendicular a F_i e F'_i e a condição da definição de poliedro de Voronoi é facilmente checada. Portanto P é Poliedro de Voronoi. ■

Sejam $C = \{Q \mid Q \text{ é zonoedro}\}$ e \sim relação de equivalência sobre C tal que

$Q_1 \sim Q_2 \Leftrightarrow Q_1$ e Q_2 possuem mesmo número de faces, mesmo número de arestas (portanto mesmo número de vértices) e mesmo número de zonas.

Assim, todo zonoedro pertence a uma classe de equivalência de $\frac{C}{\sim}$.

PROPOSIÇÃO 8. Toda classe de equivalência \mathfrak{C} de $\frac{C}{\sim}$ possui um zonoedro completamente inscritível numa esfera E .

Demonstração.

Seja $Q \in \mathcal{C}$ zonoedro. Como Q possui um centro O de simetria, tomemos uma esfera E de centro O e raio qualquer e projetemos os vértices de Q radialmente sobre E (chamemos esta projeção de π) e liguemos estes novos vértices de modo que se V_1 e V_2 são vértices de P unidos por uma aresta a , então $\pi(V_1)$ e $\pi(V_2)$ são unidos por uma aresta. Temos, assim, que o poliedro inscrito em E é um zonoedro pertencente à mesma classe na qual Q se encontra. ■

Conseqüência: todo zonoedro com zonas com quatro ou seis faces está numa classe de $\frac{C}{\sim}$ que possui Poliedros de Voronoi.

4.2.2 Estrela de um zonoedro

Como as arestas de uma zona de um zonoedro Q são paralelas e de mesma medida, podemos tomar, a menos de sentido, um vetor no espaço representante destas arestas (e conseqüentemente representante desta zona), de modo que a norma deste vetor é a mesma que o comprimento de uma aresta e este seja paralelo à zona.

Definição 11. Chamamos ao arranjo originado por todos os vetores, representantes das zonas do zonoedro Q com a mesma origem, de estrela de vetores.

Nota. Poderíamos trabalhar com pares de vetores opostos representando uma zona: os resultados seriam os mesmos. Neste enfoque, haveria uma semelhança entre a estrela de vetores e a estrela de segmentos do caso bidimensional.

Se aos vetores da estrela chamamos e_1, \dots, e_k , temos que

$$P = \left\{ a_1 e_1 + \dots + a_k e_k \mid -\frac{1}{2} \leq a_i \leq \frac{1}{2}; i = 1, \dots, k \right\}.$$

Logo, existe uma correspondência biunívoca entre as estrelas do espaço e os zonoedros. A Figura 4.11 ilustra dois zonoedros e suas estrelas de vetores.

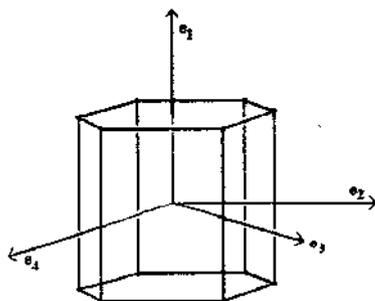


FIGURA 4.11

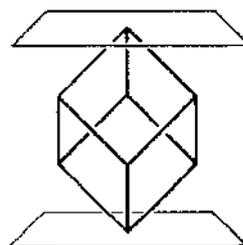
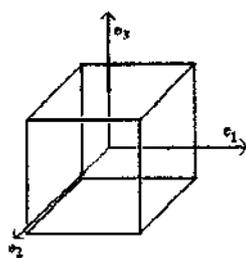


FIGURA 4.12

Tomando planos “suportes” paralelos no zonoedro (ou seja, planos paralelos que contenham vértices opostos do zonoedro) e representando-os por um plano paralelo passando pela origem da estrela, vemos que quando os planos suporte tendem às faces F e \bar{F} opostas do zonoedro, o plano suporte na estrela tende ao plano gerado pelos vetores que representam as zonas que contêm F e \bar{F} (Figura 4.12). Assim, cada plano gerado por vetores da estrela representam um par de faces opostas de P e se o plano possui m vetores, temos que cada face possui $2m$ lados.

4.2.3 O Plano Projetivo

Temos em \mathbb{R}^3 um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais $Oxyz$. Tomemos um plano euclidiano π paralelo não coincidente a Oxy (π é chamado plano afim em \mathbb{R}^3). Tomando todas as retas que passam pela origem O de \mathbb{R}^3 que não estão em Oxy , temos que estas retas interceptam π em um único ponto.

Quanto às retas contidas em Oxy , estas interceptam uma reta no infinito no plano π .

Definição 12. Chamamos o plano afim π unido a uma reta no infinito de **Plano Projetivo Real**. Denotamos por RP^2 .

Tomando a esfera S^2 com centro em O e π passando pelo polo sul de S^2 , podemos pensar em cada ponto p de π como dois pontos S_1 e S_2 antípodas de S^2 , identificados de tal modo que p, S_1, O, S_2 são colineares.

Os pontos da reta no infinito são pontos antípodas do equador da esfera identificados.

Como a relação \approx sobre S^2 tal que

$S_1 \approx S_2 \Leftrightarrow S_1$ é antípoda a S_2 é de equivalência, RP^2 pode ser pensado como $\frac{S^2}{\approx}$.

4.2.4 Diagrama Projetivo Primal

Tomando retas pela origem no lugar de vetores na estrela de vetores de um zonoedro Q e colocando-a em \mathbb{R}^3 de forma que nenhuma reta da estrela esteja em Oxy , temos o que chamamos de **estrela de retas de Q** e denotamos por $E(P)$.

As retas e os planos (determinados pelas retas) da estrela de retas de P determinam pontos e retas em RP^2 .

Definição 13. À configuração de retas e pontos em RP^2 descrita acima, chamamos de **Diagrama Projetivo Primal do zonoedro Q** .

Sejam $S = \{E(Q) \mid Q \text{ é zonoedro}\}$ e Δ a seguinte relação de equivalência sobre S :

$E(Q_1) \Delta E(Q_2) \Leftrightarrow E(Q_1)$ e $E(Q_2)$ possuem o mesmo número de retas.

Notemos que se Q_1 e Q_2 pertencem à mesma classe de equivalência de $\frac{C}{\sim}$, então $E(Q_1) \Delta E(Q_2)$.

Notemos que uma reta no primal representa um plano numa classe \mathfrak{S} de $\frac{S}{\Delta}$, o qual representa um par de faces opostas numa classe \mathfrak{C} de $\frac{C}{\sim}$.

Se a reta no primal possui m pontos (que representam zonas de zonoedros), então temos um plano de \mathfrak{S} que possui m retas, as quais representam um par de faces opostas com $2m$ lados em cada face de \mathfrak{C} .

Se um ponto (zona) é intersecção de m retas, temos que esta zona possui $2m$ faces em \mathfrak{C} . A Figura 4.13 nos fornece um esquema ilustrativo da discussão acima tendo por base um cubo.

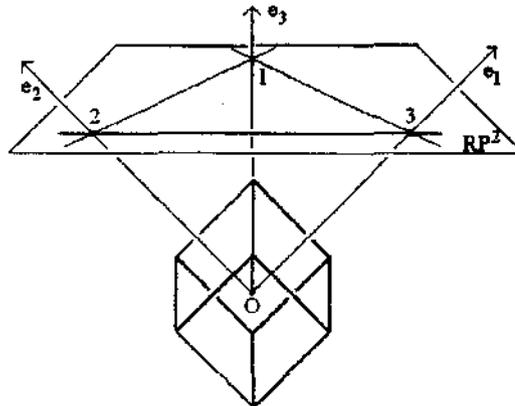


FIGURA 4.13

Neste tipo de diagrama, vemos que se dados k pontos (zonas) no plano projetivo e, tomando todas as possíveis retas que ligam estes k pontos, temos que esta configuração determina uma classe de zonoedros, porém nem todo ponto de intersecção de retas é ponto que representa um zona. Este é o ponto negativo dos Diagramas Projetivos Primais.

4.2.5 Diagrama Projetivo Dual

O Princípio da Dualidade da Geometria Projetiva [COXETER II] possibilita, entre outras coisas, trocar retas por pontos e pontos por retas no primal de forma a preservar as propriedades que o primal possui.

Definição 14. Chamamos esta nova configuração (advinda do Princípio da Dualidade sobre um Diagrama Projetivo Primal) de **Diagrama Projetivo Dual**.

Assim, se no primal uma reta possui m pontos, no dual, temos um ponto que é intersecção de m retas e vice-versa. No dual, ponto representa par de faces opostas e retas representam zonas.

Um ponto de intersecção de m retas representa um par de faces opostas cada uma com $2m$ lados (pertence a m zonas).

Uma reta com n pontos é uma zona com $2n$ faces.

Cada região representa um par de vértices opostos a qual é encontro de k faces onde k é o número de lados da região no plano projetivo.

Na Figura 4.14, $v_2 \perp [v_1, v_3]$: plano gerado pelos vetores v_1 e v_3 ; $v_1 \perp [v_2, v_3]$; $v_3 \perp [v_1, v_2]$; $v \perp \pi$ e w_1 e w_2 são vértices opostos do cubo.

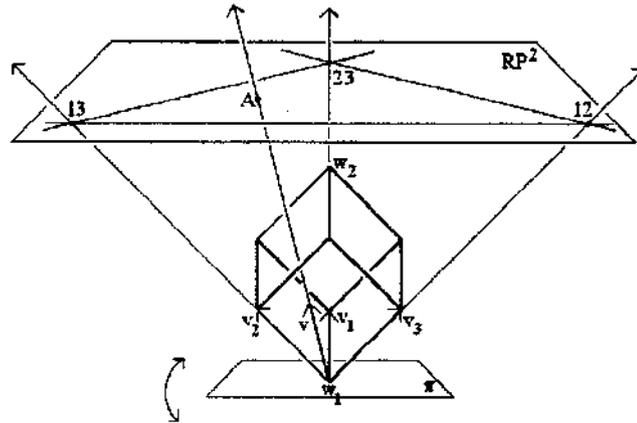


FIGURA 4.14

Contagem

Toda reta do primal é reta suporte de dois pontos (zonas); logo, todo ponto do dual é intersecção de pelo menos duas retas (zonas).

Resultado 1. Todo ponto (intersecção de retas) do dual é intersecção de retas que representam zonas.

Se no primal existem n pontos, $m_i > 3$ pontos colineares, onde $i = 1, \dots, k$, então o número de retas distintas (retas que ligam os pontos) no primal é:

$$\binom{n}{2} - \sum_{i=1}^k \binom{m_i}{2} + k.$$

Se uma reta possui m_i pontos no primal, existe um ponto no dual que é intersecção de m_i retas. Se estas retas do dual se interseccionassem duas a duas, teríamos $\binom{m_i}{2}$ pontos distintos e não apenas 1.

Assim, no dual existem $\binom{n}{2} - \binom{m_1}{2} + 1 - \binom{m_2}{2} + 1 \dots - \binom{m_k}{2} + 1 = \binom{n}{2} - \sum_{i=1}^k \binom{m_i}{2} + k$ pontos distintos (que são os pontos de intersecção das retas do dual).■

Como consequência da demonstração acima, temos:

Resultado 2. O número de pontos de intersecção de retas do dual é igual ao número de retas do primal.

Com os Resultados 1 e 2 temos que todo ponto de intersecção de retas do dual é ponto proveniente de retas do primal.

Concluimos, assim, que qualquer configuração dual com mais de um ponto representa uma classe de equivalência de $\frac{C}{\sim}$ de zonoedros.

Como estamos interessados em poliedros de Voronoi, cada zona do zonoedro deve possuir quatro ou seis faces, logo cada reta do dual deve possuir dois ou três pontos. Assim, os Diagramas Duais que satisfazem tal condição são:

A)

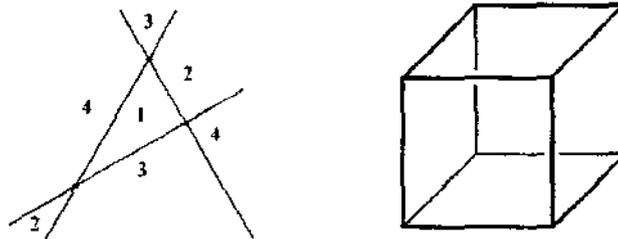


FIGURA 4.15

3 retas: 3 zonas.

2 pontos em cada reta: 4 faces em cada zona.

3 pontos: 6 faces (opostas duas a duas).

cada ponto é intersecção de duas retas: cada face possui 4 lados.

4 regiões: 8 vértices.

todas triangulares: todas encontro de 3 faces.

Exemplo: Cubo.

Há duas possibilidades de introduzir uma reta no dual representado na Figura 4.15:

B1)

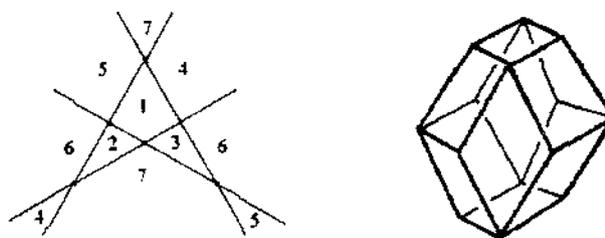


FIGURA 4.16

4 retas: 4 zonas, todas com 6 faces.

6 pontos: 12 faces, todas com 4 lados.

7 regiões: 14 vértices.

regiões 1, 5, 7 quadrangulares: 6 vértices são encontro de 4 faces.

regiões 2, 3, 4, 6 triangulares: 8 vértices são encontro de 3 faces.

Exemplo: Dodecaedro Losangonal.

B2)

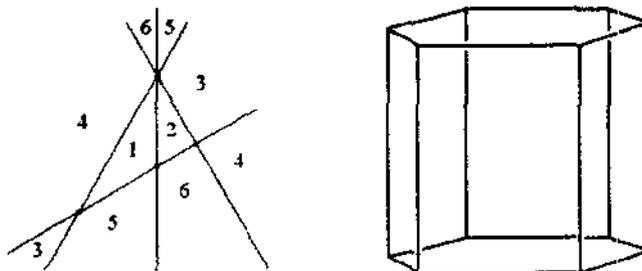


FIGURA 4.17

4 retas: 4 zonas.

3 zonas com 4 faces.

1 zona com 6 faces.

4 pontos: 8 faces.

6 faces com 4 lados.

2 faces com 6 lados.

6 regiões: 12 vértices, todos encontro de 3 faces.

Exemplo: Prisma Hexagonal.

Nos duais ilustrados nas figuras 4.16 e 4.17 só há uma maneira de introduzir mais uma reta (sem introduzir um quarto ponto numa reta):

C)

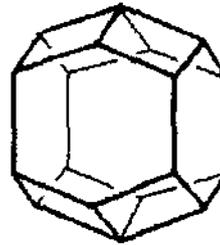
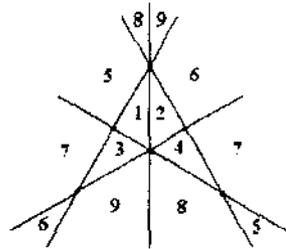


FIGURA 4.18

5 retas: 5 zonas.

4 zonas com 6 faces.

1 zona com 4 faces.

6 pontos: 12 faces.

8 faces com 4 lados.

4 faces com 6 lados.

9 regiões: 18 vértices.

16 vértices é encontro de 3 faces.

2 vértices é encontro de 4 faces.

Exemplo: Dodecaedro Alongado.

D)

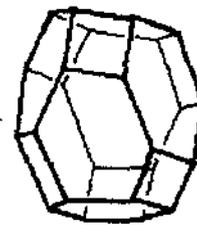
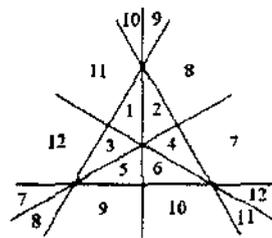


FIGURA 4.19

6 retas: 6 zonas, todas com 6 faces.

7 pontos: 14 faces.

8 faces com 6 lados.

6 faces com 4 lados.

12 regiões: 24 vértices.

Todas as regiões são triangulares:

Todos os vértices são encontro de 3 faces.

Exemplo: Octaedro Truncado.

O diagrama dual representado na Figura 4.19 está saturado no sentido de que uma sétima reta, fatalmente, originaria um quarto ponto em uma reta.

Logo, existem somente 5 classes de equivalência de $\frac{C}{\sim}$ que possuem poliedros de Voronoi.

Existe um trabalho, relativamente simples, que aborda a questão sobre o número máximo de faces que um “politopo de Voronoi” pode ter no espaço \mathbb{R}^n : $2(2^n - 1)$ faces (de fato, em nossa classificação, um polígono de Voronoi pode possuir no máximo 6 lados e um poliedro de Voronoi pode possuir no máximo 14 faces). Este trabalho pode ser encontrado no artigo [BAMBAH].

Capítulo 5

Ladrilhamentos Especiais de Compactos Euclidianos

Há duas vertentes concernentes à Teoria de Ladrilhamentos. Uma delas trata de ladrilhamentos envolvendo “toda” a variedade na qual se está desenvolvendo o estudo, como, por exemplo, os ladrilhamentos que estudamos nos Capítulos 2 e 3, envolvendo o plano euclidiano e hiperbólico, respectivamente.

A outra vertente faz o mesmo estudo, porém restrita a subconjuntos da variedade. Por exemplo, dado um subconjunto compacto C do espaço euclidiano e um poliedro P qualquer, é natural a pergunta sobre a existência de $\mathcal{L}_P(C)$.

Neste capítulo estudamos um pouco esta segunda vertente da Teoria de Ladrilhamentos. Para tanto, concentrar-nos-emos apenas em alguns compactos especiais do plano euclidiano, pois, no momento, não há condições de abordarmos muitos outros casos. Como veremos, este estudo é bastante rico em métodos e ferramentas matemáticas e, também, tem se tornado alvo de pesquisas em outras áreas, como, por exemplo, em Engenharia Elétrica, na qual obtêm-se aplicações em Teoria dos Códigos.

As principais referências para este capítulo são os artigos [CONWAY] e [THURSTON].

5.1 Apresentação, Definições e Alguns Resultados

Definição 1. **Ladrilhamento reticulado regular** (do plano Euclidiano \mathbb{R}^2): *Ladrilhamentos por triângulos equiláteros, quadrados ou hexágonos regulares do plano.* (Figura 5.1).

Dentre os polígonos regulares, somente esses três ladrilham o plano.

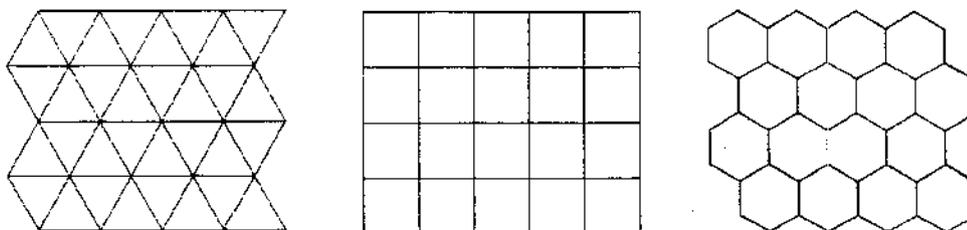


FIGURA 5.1

Definição 2. Célula: Cada um dos polígonos regulares do ladrilhamento acima (com o bordo). (O mesmo que ladrilho no espaço \mathbb{R}^2).

Definição 3. Figura reticulada ou região reticulada: União finita e conexa de células no ladrilhamento acima.

Definição 4. Poliamonde: Figura reticulada composta por células triangulares regulares.

Definição 5. Poliomino: Figura reticulada composta por células quadradas.

Definição 6. Polieixo: Figura reticulada composta por células hexagonais regulares.

Definição 7. Ladrilho (reticulado): Figura reticulada simplesmente conexa.

O ladrilho abordado neste capítulo não deve ser confundido com os ladrilhos dos capítulos 2 e 3. Aqui, ladrilho é conjunto de células.

Definição 8. Seja R uma figura reticulada qualquer em um ladrilhamento reticulado regular do plano. Um conjunto S de ladrilhos não congruentes ladrilha R , se e só se:

- a) R é coberto por cópias de ladrilhos de S sem sobreposição (exceto nos bordos dos ladrilhos);
- b) Toda célula fora de R não é coberta por cópias de ladrilhos de S .

Os dois problemas, abaixo, são a principal motivação para o estudo de ladrilhamentos nas duas vertentes da Teoria de Ladrilhamentos citadas na introdução deste capítulo.

Problema 1. (Problema de ladrilhamento no plano) Dado um conjunto finito S de ladrilhos, quando S ladrilha o plano?

Problema 2. (*Problema do ladrilhamento de uma figura*) Dada uma figura R do plano e um conjunto finito S de ladrilhos, quando S ladrilha R ?

Particularizemos o Problema 2: Tomemos R como sendo um conjunto de células hexagonais dispostas em forma triangular regular, como mostrado na Figura 5.2.

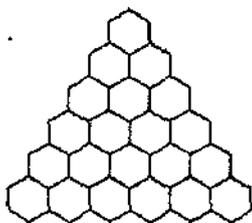


FIGURA 5.2

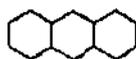


FIGURA 5.3

Definição 9. Se a base de R possuir n hexágonos, chamamos R de T_n .

Notemos que R possui $C_{n+1,2} = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ hexágonos.

Definição 10. Chamamos de L_n uma “linha” de hexágonos. (Figura 5.3)

Questão 1. (*Problema de ladrilhamento de figuras triangulares por triângulos*) Para quais valores de $n \in \mathbb{N}^*$, T_n é ladrilhado por T_2 ?

Questão 2. (*Problema de ladrilhamentos de figuras triangulares por linhas*) Para quais valores de $n \in \mathbb{N}^*$, T_n é ladrilhado por L_3 ?

Em resposta a essas questões, temos:

TEOREMA 1. A figura triangular T_n no reticulado hexagonal regular é ladrilhada por T_2 se e só se $n \equiv 0, 2, 9$ ou $11 \pmod{12}$.

TEOREMA 2. É impossível ladrilhar a figura T_n no reticulado hexagonal regular por L_3 .

Permitindo alguma sobreposição “comportada” de ladrilhos, no sentido das definições abaixo, podemos ampliar a quantidade de ladrilhamentos dos Teoremas 1 e 2:

Definição 11. Ladrilho com sinal: atribuição do valor $+1$ ou -1 a um ladrilho.

Definição 12. Uma figura reticulada R possui ladrilhamento com sinal por ladrilhos (com sinal) de S se existir uma alocação finita de ladrilhos de S cobrindo R (possivelmente sobrepondo-se) de modo que cada célula de R é coberta por ladrilhos cuja soma de sinais é 1 e, quando uma célula de $E \setminus R$ é coberta por ladrilhos de S , então a soma dos valores destes ladrilhos é 0.

Claramente, se existe um ladrilhamento de uma figura reticulada R por ladrilhos de S , então existe um ladrilhamento com sinal de R (basta atribuir valor 1 aos ladrilhos que cobrem R).

TEOREMA 3. A figura triangular T_n no reticulado hexagonal regular possui um ladrilhamento com sinal de T_2 se e só se $n \equiv 0$ ou $2 \pmod{3}$.

Notemos que o conjunto dos “ n ’s” do Teorema 1 está contido no conjunto dos “ n ’s” do Teorema 3.

TEOREMA 4. A figura triangular T_n no reticulado hexagonal regular tem um ladrilhamento com sinal pelo ladrilho L_3 se e só se $n \equiv 0$ ou $8 \pmod{9}$.

Nosso objetivo é demonstrar os quatro teoremas acima. Para isto, trabalhemos com ladrilhamento reticulado quadrado ao invés de hexagonal regular por razões de conveniência.

No ladrilhamento reticulado quadrado temos três entes a serem destacados:

- a) O conjunto de pontos do reticulado (que podemos identificar com $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \equiv \mathbb{Z}^2$). Dizemos que dois pontos do reticulado são vizinhos se possuem distância euclidiana 1 (sistema de coordenadas cartesianas ortogonais fixado e quadrado com lado 1). Com isto, um ponto do reticulado possui 4 vizinhos;
- b) O conjunto das arestas, onde uma aresta é o segmento que une dois pontos vizinhos no reticulado;
- c) O conjunto das células que são os quadrados com os bordos.

Definição 13. Caminho orientado: Sequência de arestas orientadas no sentido dos vetores da base canônica do \mathbb{R}^2 contendo

$$A = \{(x_i, y_i) | 0 \leq i \leq n, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}$$

de modo que a i -ésima aresta ($0 < i$) conecta (x_{i-1}, y_{i-1}) a (x_i, y_i) . Indiquemos o caminho pelo conjunto de vértices A .

Definição 14. Caminho orientado fechado: $(x_0, y_0) = (x_n, y_n)$ em A .

Definição 19. Chamamos a extremidade inicial do vetor e de ponto de base de R .

Definição 20. Se G é subgrupo de F , denotemos $N(G)$ para o menor subgrupo normal de F que contém G .

Definição 21. Seja $\mathcal{U} = \{R_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ conjunto de ladrilhos simplesmente conexo com uma aresta e_i associada a cada ladrilho R_i e todos os pontos base coincidindo com $(0, 0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Definição 22. Grupo de Ladrilhamento:

$$\begin{aligned} T(\mathcal{U}) &= N(\langle \partial R_i(e_i) \mid 1 \leq i \leq m \rangle) \\ &= \langle p \partial R_i(e_i) p^{-1} \mid p \in F \text{ e } 1 \leq i \leq m \rangle \end{aligned}$$

onde $\partial R_i(e_i)$ é o bordo orientado de R_i .

TEOREMA 5. Seja R uma figura reticulada simplesmente conexa e \mathcal{U} um conjunto de ladrilhos (como descrito acima). Se \mathcal{U} ladrilha R , então $[\partial R] \subset T(\mathcal{U})$.

Demonstração.

Como $T(\mathcal{U})$ é um subgrupo normal de F , para mostrar que $[\partial R] \subset T(\mathcal{U})$, basta mostrar que um bordo orientado $\partial R(e)$ qualquer de R está contido em $T(\mathcal{U})$. Procederemos por indução sobre o número de ladrilhos no ladrilhamento de R :

Se R for ladrilhado por apenas um ladrilho R_i de \mathcal{U} , então $\partial R(e) \equiv \partial R_i(e_i)$ e, conseqüentemente, $[\partial R] \subset T(\mathcal{U})$.

Suponhamos que R possa ser ladrilhado por uma quantidade $k \geq 2$ de ladrilhos de \mathcal{U} .

Afirmção. Nas condições do teorema, temos que R pode ser decomposta em duas figuras reticuladas simplesmente conexas não vazias R^* e R^{**} (portanto, $R = R^* \cup R^{**}$) tais que R^* e R^{**} são ladrilhadas por \mathcal{U} e, ainda, existem arestas orientadas e_1 e e_2 de ∂R^* e ∂R^{**} tais que $\partial R(e_1) = \partial R^{**}(e_2) \partial R^*(e_1)$.

Provando a afirmação, podemos tomar uma figura R ladrilhada por $k+1$ ladrilhos de \mathcal{U} e como $R = R^* \cup R^{**}$ com $R^*, R^{**} \neq \emptyset$, R^* e R^{**} são ladrilhados (separadamente) por $m \leq k$ ladrilhos de \mathcal{U} ; logo, $\partial R^{**}(e_2)$ e $\partial R^*(e_1) \in T(\mathcal{U})$ e, portanto, $\partial R(e_1) \in T(\mathcal{U})$, completando a demonstração do teorema.

Demonstração da afirmação.

Como R é simplesmente conexa, topologicamente R é homeomorfo a um círculo. Esta afirmação não é estritamente verdadeira; temos que pensar nos pontos que são vértices de quatro arestas distintas como sendo duas pequenas regiões quadrangulares, como ilustrado na Figura 5.5.

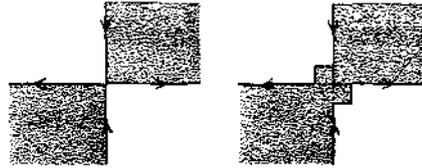


FIGURA 5.5

Como R é ladrilhado por \mathcal{U} , tomemos um ladrilho S em \mathcal{U} presente no ladrilhamento de R de tal modo que ∂R e ∂S possuam uma aresta em comum. Pelo fato de ∂R e ∂S serem curvas de Jordan (simples e fechada) e $S \subset R$, temos que existem decomposições dos bordos de R e S de tal modo que:

$$\begin{aligned}\partial R &= \partial R_1 \cup \dots \cup \partial R_{2j} \\ \partial S &= \partial S_1 \cup \dots \cup \partial S_{2j}\end{aligned}$$

onde cada ∂R_i e ∂S_i são caminhos simples, cada $\partial R_i \neq \emptyset$ é constituído de arestas consecutivas de ∂R e $\partial R_{2i+1} = \partial S_{2i+1}$ e $\partial S_{2i} \cap \partial R = \emptyset$ (aqui convém ressaltar que ∂R e ∂S_i são vistos como conjuntos de arestas, portanto $\partial S_{2i} \cap \partial R \neq \emptyset$ se e só se existe uma aresta comum aos dois conjuntos).

Um exemplo como o da Figura 5.6 ilustra esta decomposição:

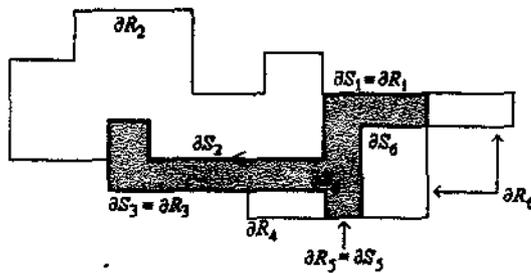


FIGURA 5.6

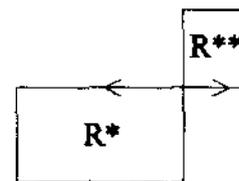


FIGURA 5.7

Da maneira como fizemos a decomposição acima, podemos ter $\partial S_{2i} = \emptyset$ e, de fato, isto pode acontecer, como ilustrado na Figura 5.7.

Denotemos por ∂R^* a união de ∂S_{2i} , de arestas orientadas em sentido oposto, com ∂R_2 . Temos que $\partial R^* \neq \emptyset$ é um caminho fechado delimitando $R^* \neq \emptyset$ simplesmente conexa.

Seja $R^{**} = R \setminus R^*$. Temos que o bordo de R^{**} é:

$$\partial R^{**} = \partial S_1 \cup \partial S_2 \cup \partial S_3 \cup \partial R_4 \cup \partial S_5 \cup \partial R_6 \cup \partial S_7 \cup \dots \cup \partial R_{2j}.$$

Vemos que ∂R^{**} é um caminho simples e fechado; logo, R^{**} é simplesmente conexa. Com isto, o ladrilho S separa R^* de $R^{**} \setminus S$. Chamando o ladrilhamento de R por \mathcal{U} de \mathcal{T} , temos que $\mathcal{T} \setminus \{S\}$ é ladrilhamento de R^* e $R^{**} \setminus S$ e, em consequência da disjunção de R^* e $R^{**} \setminus S$, temos que $\mathcal{T} \setminus S$ se decompõe em dois ladrilhamentos \mathcal{T}^* e \mathcal{T}^{**} de R^* e $R^{**} \setminus S$.

Como S , \mathcal{T}^* e \mathcal{T}^{**} são compostos por ladrilhos de \mathcal{U} , temos que \mathcal{U} ladrilha R^* e R^{**} .

Seja e_1 a primeira aresta em ∂R_2 (lembramos que $\partial R_i \neq \emptyset$ para todo i). Tomemos e_2 como sendo a primeira aresta de ∂S_j , $j > 1$ com $\partial S_j \neq \emptyset$ e j o menor possível. Caso este j não exista, tome e_2 como sendo a primeira aresta de ∂S_1 (Este é o caso da Figura 5.7). Assim, $\partial R(e_1) = \partial R^{**}(e_2) \partial R^*(e_1)$ e a afirmação (e o teorema) está demonstrada. ■

O Teorema 5 fornece uma condição necessária muito importante para a existência de ladrilhamentos de uma figura reticulada R por um conjunto de ladrilhos \mathcal{U} :

“Se $[\partial R] \notin T(\mathcal{U})$, então \mathcal{U} não ladrilha R ”.

5.2 Desenvolvimento da Resolução dos Teoremas sobre os Problemas de Ladrilhamentos de Figuras Reticuladas Triangulares

As figuras reticuladas no reticulado hexagonal, que estamos interessados em estudar, possuem uma figura reticulada “equivalente” no reticulado quadrangular. A Figura 5.8 estabelece esta correspondência, onde:

$$\begin{array}{ll} \partial R_1(e_1) = \partial R_1 & \partial R_4(e_4) = \partial R_4 \\ \partial R_2(e_2) = \partial R_2 & \partial R_4(e_4) = \partial R_5 \\ \partial R_3(e_3) = \partial R_3 & \partial T_n(e) = \partial T_n \end{array}$$

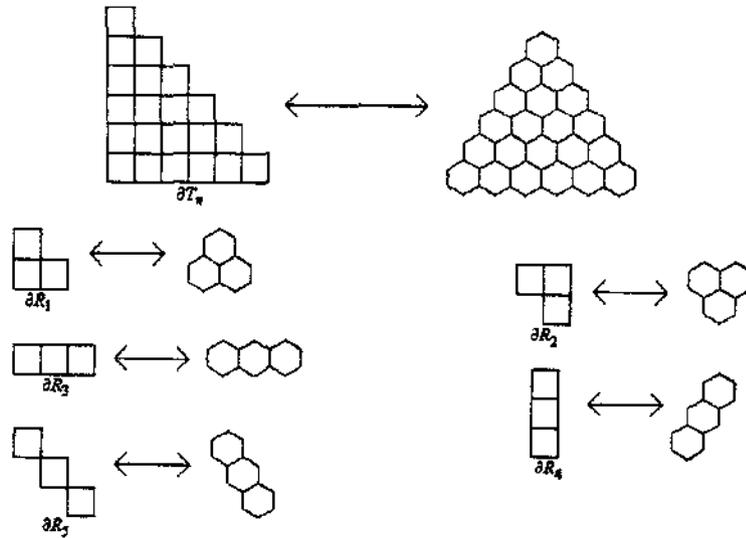


FIGURA 5.8

Tomemos um grupo livre F_k com k geradores. Seja $K \triangleleft F_k$ (subgrupo normal); logo, o grupo quociente $\frac{F_k}{K}$ está definido $\left(\frac{F_k}{K} = \{gK \mid g \in F_k\}\right)$; onde $gK = \{gk \mid k \in K\}$ é uma classe lateral à esquerda (poderíamos tomar uma classe lateral à direita).

Se $p = g_m^{e_m} g_{m-1}^{e_{m-1}} \dots g_1^{e_1}$, onde g_i são geradores de F_k e $e_i = \pm 1$, é uma palavra em F_k , temos um caminho orientado do vértice idK ao vértice $g_m^{e_m} g_{m-1}^{e_{m-1}} \dots g_1^{e_1} K$ em $\Gamma_{\frac{F_k}{K}}$ ($\Gamma_{\frac{F_k}{K}}$ é grafo de Cayley do grupo $\frac{F_k}{K}$), onde cada aresta do caminho é obtida aplicando $g_i^{e_i}$ ao vértice $g_{i-1}^{e_{i-1}} \dots g_1^{e_1} K$ (g_1 é aplicado ao vértice identidade idK).

Afirmação. Nas condições do parágrafo anterior, temos que uma palavra $p \in K$ se e só se p corresponde a um caminho fechado em $\Gamma_{\frac{F_k}{K}}$.

De fato:

\Rightarrow) Se $p \in K$, temos que o caminho associado tem início em idK e fim em $pK = K = idK$; portanto um caminho fechado em $\Gamma_{\frac{F_k}{K}}$.

\Leftarrow) Se p corresponde a um caminho fechado em $\Gamma_{\frac{F_k}{K}}$, temos que o início e o fim do caminho é o vértice idK . Logo, $pK = idK$ e portanto $p \in K$.

Seja F como em (1). Tomemos $K \triangleleft F$ tal que $\Gamma_{\frac{F}{K}}$ seja um grafo planar infinito formando um ladrilhamento por triângulos e hexágonos regulares como indicado na Figura 5.9.

As arestas dos triângulos orientados no sentido anti-horário correspondem a elementos hK e dos triângulos orientados no sentido horário a elementos

vK . (Notemos que vK e hK são geradores de $\frac{F_k}{K}$).

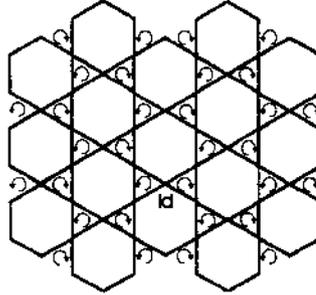


FIGURA 5.9

Notemos que se $a \in K$, gag^{-1} é o caminho a “transladado” por g .

Sejam $\mathcal{U}_1 = \{R_1, R_2\}$ e $\mathcal{U}_2 = \{R_3, R_4, R_5\}$, onde R_i 's são os ladrilhos equivalentes aos ladrilhos do Teorema 1 e 2 via correspondência da Figura 5.8.

PROPOSIÇÃO 1. Os grupos de ladrilhamento $T(\mathcal{U}_1)$, $T(\mathcal{U}_2)$ e o bordo combinatório $[\partial T_n]$ para $n \equiv 0$ ou $2 \pmod{3}$ estão contidos em K .

Demonstração.

Devido às definições de $T(\mathcal{U}_1)$, $T(\mathcal{U}_2)$ e $[\partial T_n]$ e ao fato de K ser normal em F_2 , basta mostrarmos que $\partial R_1, \partial R_2, \partial R_3, \partial R_4, \partial R_5$ e ∂T_n (que são palavras em F_2) estão em K .

Podemos facilmente verificar que $\partial R_1, \partial R_2, \partial R_3, \partial R_4$ e ∂R_5 correspondem a caminhos fechados em $\Gamma_{\frac{F_2}{K}}$; logo, estão em K . Quanto ao ∂T_n , se $n = 2$ ou 3 , ∂T_n corresponde a caminhos fechados em $\Gamma_{\frac{F_2}{K}}$. Como $\partial T_n = h^n v^{-n} (h^{-1} v)^n$, é fácil ver que se, $n = 3k$ ou $n = 3k + 2$, $k \in \mathbb{Z}$, temos caminhos fechados em $\Gamma_{\frac{F_2}{K}}$; logo, $n \equiv 0$ ou $2 \pmod{3}$ e, portanto, ∂T_n está em K . ■

Da Análise Complexa, temos o seguinte resultado:

“Para cada $a \in \mathbb{C}$ e para cada caminho regular fechado γ em $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z-a} dz = 2\pi in”.$$

E a seguinte definição:

Definição 22. Nas condições do resultado acima, dizemos que n é o índice de γ em relação a a e escrevemos

$$n = I(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz.$$

Tomemos o grafo $\Gamma_{\frac{E_2}{K}}$. Este grafo ladrilha o plano por células triangulares e hexagonais. Sejam s uma destas células, p um ponto em $\overset{\circ}{s}$ e C um caminho fechado em $\Gamma_{\frac{E_2}{K}}$. Temos que C é um caminho regular no plano ($\equiv \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$). Logo, o índice de C em p é dado por:

$$I(C, p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{z - p} dz$$

Como $I(C, p) = I(C, q)$, $\forall p, q \in \overset{\circ}{s}$, identifiquemos $I(C, p) \equiv I(C, s)$; onde $p \in \overset{\circ}{s}$ é qualquer. Assim:

$$I(C, s) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{z - p} dz$$

Podemos pensar no índice $I(C, s)$ como sendo o “número de voltas” no sentido anti-horário que o caminho C realiza em torno de s (se o sentido for horário, $I(C, s)$ é negativo).

Podemos também definir a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} I(\cdot, s) : K &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ p &\longmapsto I(C(p), s) \end{aligned}$$

onde $C(p)$ é o caminho correspondente em $\Gamma_{\frac{E_2}{K}}$ da palavra p .

Se C_1 e C_2 são caminhos fechados em $\Gamma_{\frac{E_2}{K}}$, então $I(C_1 C_2, s) = I(C_1, s) + I(C_2, s)$. Isto mostra que $I(\cdot, s)$ é um homomorfismo de grupos; logo, podemos definir:

$$\begin{aligned} I(\cdot, S) : K &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ p &\longmapsto I(C(p), S) = \sum_{s \in S} I(C(p), s) \end{aligned}$$

onde S é um conjunto finito ou infinito de células s . (Notemos que um caminho fechado $C(p)$ em $\Gamma_{\frac{E_2}{K}}$ sempre delimita uma quantidade finita de células; logo, $I(\cdot, S)$ está bem definida).

Temos que $I(\cdot, S)$ é um homomorfismo (pois $I(\cdot, s)$ é homomorfismo).

Demonstração do Teorema 1.

\Rightarrow) **Afirmação.** Como \mathcal{U}_1 ladrilha T_n , $n \equiv 0$ ou $2 \pmod{3}$.

Demonstração da afirmação.

Tomando o conjunto de ladrilhos \mathcal{U}_1 , que possui ladrilhos compostos por três células cada e que ladrilha T_n , temos que a quantidade de células de T_n deve ser múltipla de três. Logo, $\frac{n(n+1)}{2} = 3k$, onde $k \in \mathbb{N}$.

Se $n = 3i + 1$, onde $i \in \mathbb{N}$, temos que $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(3i+1)(3i+2)}{2} = \frac{9i^2 + 9i + 2}{2} = 3 \left(\frac{3i^2 + 3i}{2} \right) + 1$, onde $\frac{3i^2 + 3i}{2} \in \mathbb{N}$. Logo, $\frac{n(n+1)}{2} \neq 3k$.

Notemos que os casos $n = 3i$ e $n = 3i + 2$, de fato, podem ocorrer.

Logo:

$$n \equiv 0 \text{ ou } 2 \pmod{3}$$

O que faremos a seguir é mostrar que $\partial T_n \notin T(\mathcal{U}_1)$, (logo, $[\partial T_n] \notin T(\mathcal{U}_1)$), para $n \equiv 3, 5, 6$ ou $8 \pmod{12}$ e, portanto, pelo Teorema 5, temos que \mathcal{U}_1 não ladrilha T_n nestes casos.

Seja S o conjunto de todos os hexágonos do ladrilhamento gerado por $\Gamma_{\frac{F_2}{K}}$ no plano. Temos que $I(C(\partial R_1), S) = 1$ e $I(C(\partial R_2), S) = -1$.

É fácil ver que $I(C(p\partial R_i p^{-1}), S) = I(C(\partial R_i), S)$, para $p \in F_2$ e $i = 1$ ou 2 e que $I(C((\partial R_i)^{-1}), S) = -I(C(\partial R_i), S)$.

Para $n \equiv 0$ ou $2 \pmod{3}$ temos, pela Proposição 1, que $\partial T_n \in K$ e como $\partial T_n = h^n v^{-n} (h^{-1} v)^n$, temos que:

$$I(C(\partial T_n), S) = \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor; (\lfloor \cdot \rfloor : \text{função máximo inteiro}). \quad (2)$$

Como $\partial T_n \in T(\mathcal{U}_1)$ (\mathcal{U}_1 ladrilha T_n), temos:

$$\partial T_n = \prod_{i=1}^m p_i (\partial R_{k_i})^{e_i} p_i^{-1}, \quad (3)$$

para algum $m \in \mathbb{Z}$, $p_i \in F_2$, $k_i = 1$ ou 2 e $e_i = 1$ ou -1 .

Assim:

$$\begin{aligned} I(C(\partial T_n), S) &= \sum_{i=1}^m I(C(p_i (\partial R_{k_i})^{e_i} p_i^{-1}), S) \\ &= \sum_{i=1}^m I(C((\partial R_{k_i})^{e_i}), S) \\ &= \sum_{i=1}^m e_i I(C(\partial R_i), S) \end{aligned}$$

Mas

$$\sum_{i=1}^m e_i I(C(\partial R_i), S) - m = 2 \sum_{i=1}^p -I(C(\partial R_{i_i}), S) \quad (4)$$

onde p é a quantidade de termos negativos no somatório original. Isto nos diz que:

$$I(C(\partial T_n), S) \equiv m \pmod{2}. \quad (5)$$

Seja K o subgrupo de F_2 constituído por todos os elementos que formam caminhos fechados no reticulado quadrangular (facilmente verificamos que $K \triangleleft F_2$).

Definamos a aplicação:

$$\begin{aligned} \psi: K &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ p &\longmapsto \psi(p) = \sum_{r \subset R} I(p, r) \end{aligned}$$

onde R é a região limitada pelo caminho p no reticulado e r são as células que compõe R . Temos, assim, que $\psi(p\partial R_i p^{-1}) = \psi(\partial R_i) = 3$, para $i = 1, 2$ e $p \in F_2$.

Temos, também, que

$$\psi(\partial T_n) = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (6)$$

Utilizando os itens (3) e (4), temos:

$$\begin{aligned} \psi(\partial T_n) &= \sum_{i=1}^m \psi(p_i(\partial R_{k_i})^{e_i} p_i^{-1}) \\ &= \sum_{i=1}^m e_i \psi(\partial R_{k_i}) \equiv m \pmod{2} \end{aligned} \quad (7)$$

Finalmente, por (2), (5), (6) e (7), temos:

$$\left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor \equiv \binom{n+1}{2} \pmod{2}$$

(que necessariamente ocorre quando $\partial T_n \subset T(\mathcal{M}_1)$).

Tomemos

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto f(n) = \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor \pmod{2} \end{aligned}$$

e

$$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto g(n) = \binom{n+1}{2} \pmod{2}$$

Assim, se n satisfaz a congruência acima, temos que $f(n) = g(n)$. Analisando os gráficos de f e g (Figura 5.10), vemos que estas aplicações são periódicas de período 6 e 4, respectivamente. Logo, um período comum às duas aplicações é $\text{mmc}(6, 4) = 12$. Assim, precisamos verificar somente para quais valores de $n \leq 12$ as duas aplicações diferem e, assim, para estes valores, temos que $\partial T_n \not\subseteq T(\mu_1)$ (logo, $\partial T_n \not\subseteq T(\mu_1)$). Estes valores são: 1, 3, 4, 5, 6 e 8, e para qualquer outro $n \equiv i \pmod{12}$ onde i é um destes números.

Assim, pelo Teorema 5, temos que μ_1 não ladrilha T_n para $n \equiv 1, 3, 4, 5, 6$ ou $8 \pmod{12}$. Dos i 's restantes (0, 2, 7, 9, 10 e 11), devemos excluir o 7 e o 10, pois se μ_1 ladrilha T_n , então $n \equiv 0$ ou $2 \pmod{3}$.

Conclusão: $n \equiv 0, 2, 9$ ou $11 \pmod{12}$.

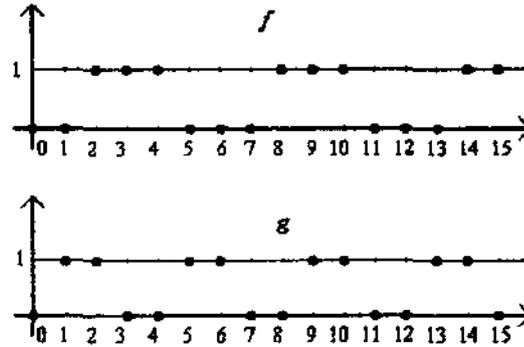


FIGURA 5.10

\Leftarrow) Os ladrilhamentos de T_2, T_9, T_{11} e T_{12} por T_2 são ilustrados nas Figuras 5.11 (T_2 e T_9) e 5.12 (T_{11} e T_{12}).

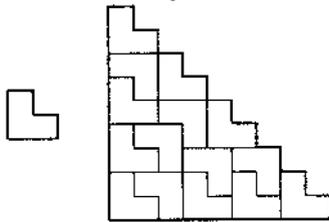


FIGURA 5.11

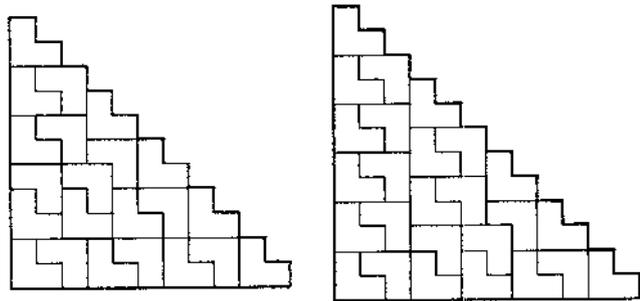


FIGURA 5.12

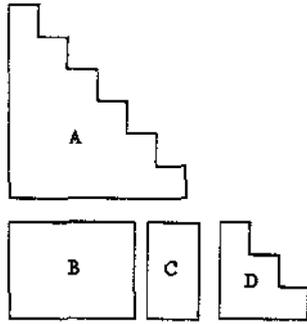


FIGURA 5.13

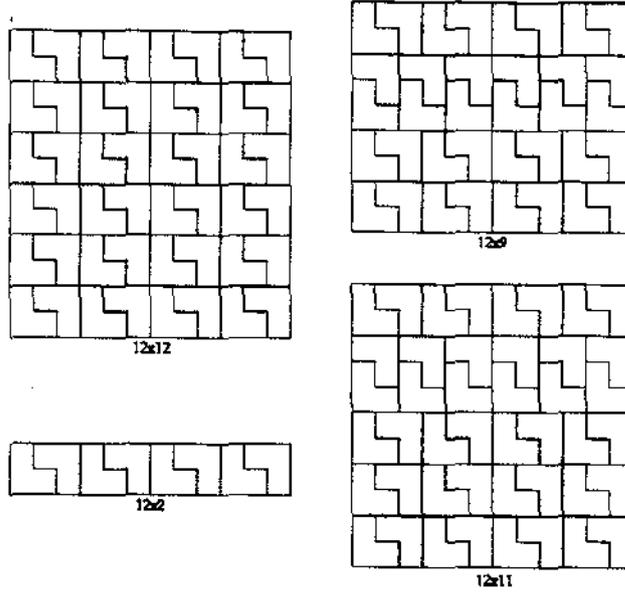


FIGURA 5.14

Procedamos por indução sobre $k \in \mathbb{N}$ em T_{12k+l} onde $l = 2, 9, 11$ e 12 .

Para $k = 0$ já verificamos que é verdade. Suponhamos que seja verdade para $k = n_0$.

Decomponamos $T_{12(n_0+1)+l}$ da maneira ilustrada na Figura 5.13, onde $A = T_{12n_0+l}$; $B = 12 \times 12n_0$; $C = 12 \times l$; $D = T_{12}$.

Como T_2 ladrilha um retângulo $12 \times 12n_0$ e um retângulo $l \times 12$ (ver Figura 5.14), temos a conclusão do Teorema 1. ■

Demonstração do Teorema 2.

Nesta demonstração também utilizamos o Teorema 5. Vamos mostrar que $\partial T_n \notin T(\mathcal{U}_2)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ (logo, L_3 não ladrilha T_n para qualquer $n \in \mathbb{N}$).

Tomemos S como sendo o conjunto de todos os triângulos não hachurados em $\Gamma_{\frac{F_2}{K}}$ (Figura 5.9). Logo,

$$I(C(\partial R_3), S) = I(C(\partial R_4), S) = I(C(\partial R_5), S) = 0 \quad (8)$$

Temos, também, que $I(p(C(\partial R_i))p^{-1}, S) = I(C(\partial R_i))$ onde $i = 3, 4, 5$ e $p \in F_2$.

Temos, finalmente, que

$$I(C(\partial T_n)) = \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Afirmação. Se $I(C(\partial T_n)) = \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor$, então $\partial T_n \notin T(\mathcal{M}_2)$.

Demonstração da afirmação.

Suponhamos que $\partial T_n \in T(\mathcal{M}_2)$ para algum $n \geq 2$. Logo, $\partial T_n = \prod_{i=1}^m p_i (\partial R_{k_i})^{e_i} p_i^{-1}$ para algum $m \in \mathbb{Z}$, $p_i \in F_2$, $k_i = 3, 4$ ou 5 e $e_i = 1$ ou -1 . Assim, $I(C(\partial T_n), S) = \sum_{i=1}^m e_i I(C(\partial R_{k_i}), S) = 0$ (por (8)), o que entra em contradição com $I(C(\partial T_n)) = \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor$, demonstrando a afirmação.

Como para $n = 1$ ou 2 , L_3 não ladrilha T_n , temos a conclusão da demonstração do teorema. ■

Demonstração do Teorema 3.

\implies) No ladrilhamento com sinal, cada T_2 possui valor $+1$ ou -1 . Como T_2 possui 3 células, cada ladrilho contribui com “peso” $+3$ ou -3 na soma geral dos sinais sobre cada célula do reticulado.

Assim, se temos k ladrilhos T_2 no ladrilhamento e identificando cada ladrilho por T_2^j , $1 \leq j \leq k$, temos que a soma geral dos sinais será $M = \sum_{j=1}^k \text{sgn } T_2^j \equiv 0 \pmod{3}$. Mas “fora” de T_n a soma dos sinais dos ladrilhos é 0.

Logo, M é a soma geral de sinais dos ladrilhos em T_n . Como cada célula em T_n possui soma de sinais 1, M é a quantidade de ladrilhos em T_n , ou seja, $M = \frac{n(n+1)}{2} \equiv 0 \pmod{3} \implies n \equiv 0$ ou $2 \pmod{3}$.

\impliedby) Se $n \equiv 0$ ou $2 \pmod{3}$, então $n \equiv 0, 2, 3, 5, 6, 8, 9$ ou $11 \pmod{12}$.

Já vimos, pelo Teorema 1, que se $n \equiv 0, 2, 9$ ou $11 \pmod{12}$ então T_2 ladrilha T_n e, conseqüentemente, T_n possui ladrilhamento com sinal por T_2 (basta atribuir valor 1 aos ladrilhos em T_n). Logo, basta mostrarmos que existe um ladrilhamento com sinal para $n \equiv 3, 5, 6, 8 \pmod{12}$.

Os ladrilhamentos de T_3, T_5, T_6, T_8 são inspirados na Figura 5.15, onde:

T_3 : Os ladrilhos de peso $+1$ são: 1-2-3, 2-4-5 e 3-5-6. O ladrilho de peso -1 é 2-3-5.

T_5 : Os ladrilhos de peso $+1$ são: 1-2-3, 2-4-5, 3-5-6, 7-11-12, 8-9-13 e 10-14-15. O ladrilho de peso -1 é: 2-3-5.

T_8 : Os ladrilhos de peso $+1$ são: 1-2-3, 2-4-5, 3-5-6, 10-14-15, 14-19-20, 15-20-21, 7-11-12, 11-16-17, 8-12-13, 12-17-18, 9-13-14 e 13-18-19. Os ladrilhos de peso -1 são: 2-3-5, 14-15-20, 12-13-18, 11-12-17 e 13-14-19.

T_8 : Igual ao T_6 , adicionando os ladrilhos de peso +1: 22-29-30, 23-24-31, 25-32-33, 26-27-34 e 28-35-36.

1							
2	3						
4	5	6					
7	8	9	10				
11	12	13	14	15			
16	17	18	19	20	21		
22	23	24	25	26	27	28	
29	30	31	32	33	34	35	36

FIGURA 5.15

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36

FIGURA 5.16

Resta, ainda, mostrar que existe ladrilhamento com sinal para T_{12k+l} , $k \in \mathbb{N}$ e $l = 3, 5, 6$ ou 8 . Procedendo por indução sobre k , a demonstração se procede como no Teorema 1 (Figuras 5.13 e 5.14). Logo, devemos mostrar que existe ladrilhamento com sinal dos retângulos $12 \times l$; $l = 3, 5, 6$ ou 8 :

No caso 12×3 , tomemos por base a Figura 5.16, onde os ladrilhos de sinal +1 são: 1-13-14, 2-3-15, 4-16-17, 5-6-18, 7-19-20, 8-9-21, 10-22-23, 11-12-24, 13-25-26, 14-26-27, 16-28-29, 17-29-30, 19-31-32, 20-32-33, 22-34-35 e 23-35-36. Os ladrilhos de peso -1 são: 13-14-26, 16-17-29, 19-20-32 e 22-23-35.

No caso 12×5 , basta juntar o retângulo 12×3 ao retângulo 12×2 composto pelos ladrilhos de peso +1: 1-13-14, 2-3-15, 4-16-17, 5-6-18, 7-19-20, 8-9-21, 10-22-23 e 11-12-24.

Os casos 12×6 e 12×8 podem ser obtidos dos casos anteriores por justaposição. ■

Demonstração do Teorema 4.

⇒) Tomemos a região T_n e numeremos suas linhas de tal modo que a k linha possua k células.

Tomemos os ladrilhos R_3, R_4, R_5 .

Temos que R_3 cobre três células consecutivas numa única linha, enquanto R_4 e R_5 cobrem uma células por linha em três linhas consecutivas.

Definamos $\alpha_{45}^+ : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $\alpha_{45}^+(x)$ é o número de ladrilhos do tipo R_4 e R_5 com peso +1 que cobrem células somente nas linhas $x, x+1$ e $x+2$.

Analogamente, $\alpha_{45}^- : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ (com peso -1).

Finalmente, $\alpha_{45} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$

$$x \mapsto \alpha_{45}(x) = \alpha_{45}^+(x) - \alpha_{45}^-(x)$$

Também de modo análogo, podemos definir $\alpha_3(x) = \alpha_3^+(x) - \alpha_3^-(x)$ sendo $\alpha_3^+(x)$ o número de ladrilhos do tipo R_3 com peso +1 que cobre três células na linha x (analogamente $\alpha_3^-(x)$).

De posse destas definições, não é difícil verificar que:

$$\alpha_{45}(x-2) + \alpha_{45}(x-1) + \alpha_{45}(x) + 3\alpha_3(x) = x, \text{ se } 1 \leq x \leq n.$$

$$\alpha_{45}(x-2) + \alpha_{45}(x-1) + \alpha_{45}(x) + 3\alpha_3(x) = 0, \text{ se } x \leq 0 \text{ ou } x \geq n+1.$$

Do qual obtemos:

$$\alpha_{45}(x-2) + \alpha_{45}(x-1) + \alpha_{45}(x) + 3\alpha_3(x) \equiv x \pmod{3}, \quad (9)$$

se $1 \leq x \leq n$

$$\alpha_{45}(x-2) + \alpha_{45}(x-1) + \alpha_{45}(x) + 3\alpha_3(x) \equiv 0 \pmod{3}, \quad (10)$$

se $x \neq 0$ ou $x \geq n+1$

As equações acima podem ser melhor interpretadas observando que cada ladrilho do tipo R_4 ou R_5 , que possui intersecção com a linha x , cobre apenas uma célula nesta linha, enquanto cada ladrilho do tipo R_3 , que possui intersecção com a linha x , cobre três células nesta linha. As equações seguem da contagem dos pesos em cada célula da linha x

Mas, num ladrilhamento com sinal, a alocação de ladrilhos em T_n é finita. Logo, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_{45}(m+i) = 0$ e $\alpha_{45}(-m-i) = 0$ para $i \in \mathbb{N}$, assim, utilizando (10) com $x = m+i+1, m+i, \dots, n+1$, concluímos que:

$$\alpha_{45}(x) \equiv 0 \pmod{3}, \quad n-1 \leq x \quad (11)$$

e utilizando (10) com $x = -m-i-1, -m-i, \dots, 0$ concluímos que

$$\alpha_{45}(x) \equiv 0 \pmod{3}, \quad x \leq 0. \quad (12)$$

Definamos

$$\begin{aligned} h: \mathbb{N}^* &\rightarrow \{0, 1, 2\}. \\ x &\mapsto h(x) = \alpha_{45}(x) \pmod{3} \end{aligned} \quad (13)$$

Utilizando (12) e (9), facilmente verificamos que h é periódica de período 9 (Figura 5.17).

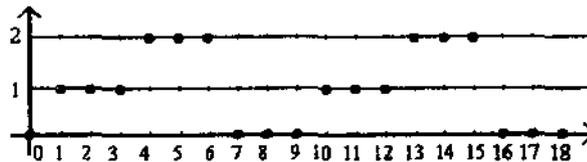


FIGURA 5.17

De (11) temos que $\alpha_{45}(n-1) \equiv 0 \pmod{3}$ e $\alpha_{45}(n) \equiv 0 \pmod{3}$. Isto e (13) nos fornece que $n \equiv 0$ ou $8 \pmod{9}$.

⇐) Construamos os ladrilhamentos com sinal para $n = 8$ e 9 .

Para tanto, tomemos T_n numerado como na Figura 5.15. No caso $n = 8$ temos que:

Os ladrilhos de peso $+1$ são: 1-2-4, 7-11-16, 3-6-10, 5-8-12, 9-13-18, 17-18-19, 14-20-27, 15-21-28, 19-25-32, 20-26-33, 22-23-24, 29-30-31, 34-35-36.

Ladrilho de peso -1 : 18-19-20.

No caso $n = 9$, basta acrescentar ao ladrilhamento de T_8 os ladrilhos de peso $+1$: 37-38-39, 40-41-42, 43-44-45.

Para construir os ladrilhamentos com sinal para T_{9k+l} sendo $l = 8$ ou 9 e $k \in \mathbb{N}$, utilizemos indução:

Para $k = 0$, já vimos que existe tal ladrilhamento. Suponhamos que exista ladrilhamento com sinal para T_{9k_0+l} e mostremos que existe ladrilhamento com sinal para $T_{9(k_0+1)+l}$, $l = 8$ ou 9 . Para tanto, decomponemos $T_{9(k_0+1)+l}$ como na Figura 5.13 onde $A = T_{9k_0+l}$, $B = 9 \times 9k_0$, $C = 9 \times l$ e $D = T_9$. Logo, basta mostrar a existência de ladrilhamentos com sinal para os retângulos 9×9 e 9×8 , ladrilhamentos estes que são triviais. Logo, existe ladrilhamento com sinal para $T_{9(k_0+1)+l}$ e, portanto, para T_{9k+l} , $l = 8, 9$ e $k \in \mathbb{N}$. ■

5.3 Ladrilhamentos por Poliamondes

Nesta seção abordamos ladrilhamentos por poliamondes. Aqui, os nossos ladrilhos são losangos (dois triângulos equiláteros justapostos) e da mesma forma que na seção anterior, estamos interessados em ladrilhamentos de figuras reticuladas. Não tomamos uma classe de figuras reticuladas em especial como fizemos anteriormente, pois a abordagem desta vez é bastante geométrica no sentido de que vamos explorar o grupo de ladrilhamento dos ladrilhos em questão de uma maneira bastante intuitiva, sem muito formalismo algébrico. No fundo, referímo-nos a uma visão mais geométrica do Teorema 5 para o caso de ladrilhos poliamondes.

Tomemos o ladrilhamento reticulado regular triangular (que chamamos de *LRRT*). Orientemos cada célula no *LRRT* como na Figura 5.18.

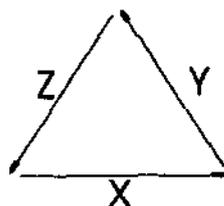


FIGURA 5.18

Deste modo, o $LRRT$ é um grafo 3-regular conexo; logo, é grafo de Cayley de algum grupo. Este grupo é $G = \langle X, Y, Z \mid XYZ = ZYX = 1 \rangle = \langle X, Y \mid XY = YX \rangle = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$ (X, Y e Z podem ser visto como translações).

Tomemos $\mathfrak{U} = \{L_1, L_2, L_3\}$ sendo os L_i 's ladrilhos tais que $\partial L_1 = XYX^{-1}Y^{-1}$, $\partial L_2 = YZY^{-1}Z^{-1}$ e $\partial L_3 = ZXZ^{-1}X^{-1}$. Logo, o grupo de ladrilhamento $T(\mathfrak{U}) = N(\langle \partial L_i \mid i = 1, 2, 3 \rangle)$ (menor subgrupo normal contido em $F = \langle X, Y, Z \rangle$ e contendo $\langle \partial L_i \mid i = 1, 2, 3 \rangle$) é tal que

$$\begin{aligned} T(\mathfrak{U}) &= \langle X, Y, Z \mid \partial L_i = 1, i = 1, 2, 3 \rangle = \\ &= \langle X, Y, Z \mid XY = YX, YZ = ZY, XZ = ZX \rangle = \\ &= \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^3. \end{aligned}$$

Se R é figura reticulada simplesmente conexa no $LRRT$, temos que o bordo combinatório $[\partial R] = \{p\partial R p^{-1} \mid p \in G\}$ está contido em $T(\mathfrak{U})$ se \mathfrak{U} ladrilha R (Teorema 5). Isto significa que ∂R é identidade em $T(\mathfrak{U})$, ou seja, é um caminho fechado em $\Gamma_{T(\mathfrak{U})}$.

Com base na análise que acabamos de realizar, temos uma interpretação geométrica para ladrilhamentos envolvendo poliamondes muito interessante:

Tomemos o grafo $\Gamma_{T(\mathfrak{U})}$ como sendo o 1-complexo celular de um ladrilhamento por cubos no espaço euclidiano, de tal modo que os pontos inicial e final do caminho XYZ em $\Gamma_{T(\mathfrak{U})}$ estejam sobre a mesma reta vertical r . Deste modo, a projeção de $\Gamma_{T(\mathfrak{U})}$ num plano perpendicular a r origina o grafo Γ_G . A Figura 5.19¹ fornece uma idéia deste procedimento.

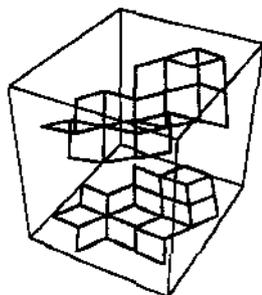


FIGURA 5.19

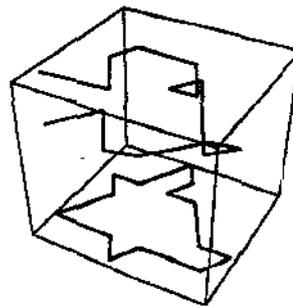


FIGURA 5.20

Da maneira como dispomos os dois grafos, $\Gamma_{T(\mathfrak{U})}$ e Γ_G , temos como consequência imediata: tomando um caminho fechado em $T(\mathfrak{U})$, temos que a projeção deste em Γ_G corresponde ao bordo de uma figura reticulada que pode ser ladrilhada por \mathfrak{U} . Obviamente, vale a recíproca (um exemplo na Figura 5.19).

Uma questão natural que surge neste contexto é se todo bordo de figura reticulada em Γ_G corresponde a um caminho fechado em $\Gamma_{T(\mathfrak{U})}$. A resposta é negativa e o contra-exemplo é o bordo da figura reticulada R tal que

¹As ilustrações 5.19 e 5.20 foram retiradas da referência [THURSTON].

$\partial R = X^{-2}YZX^{-2}ZXY^{-2}XZY^{-1}Z^{-2}XYZ^{-2}$. Uma idéia do caminho correspondente em $\Gamma_{T(\mathcal{U})}$ é dada na Figura 5.20.

A Figura 5.21 fornece um esquema em termos de diagramas de Venn sobre os resultados obtidos até então, o qual legendamos:

- A: caminhos em $\Gamma_{T(\mathcal{U})}$.
- B: Caminhos abertos em $\Gamma_{T(\mathcal{U})}$.
- C: Caminhos fechados em $\Gamma_{T(\mathcal{U})}$.
- D: "Imagens" de caminhos fechados de Γ_G em $\Gamma_{T(\mathcal{U})}$.
- E: "Imagens" de caminhos fechados em Γ_G que são bordo de figuras reticuladas que são ladrilhadas por \mathcal{U} .
- F: "Imagens" de caminhos abertos de Γ_G em $\Gamma_{T(\mathcal{U})}$.

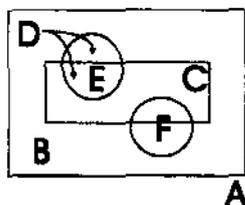


FIGURA 5.21

Referências Bibliográficas

[BAMBAH]

BAMBAH, R. P. DAVENPORT, H. The Covering of N-dimensional Space by Spheres. **Journal of London Math. Soc.** n.27, p, 224-229. 1952.

[BEARDON]

BEARDON, Alan F. **The Geometry of Discrete Groups.** Springer-Verlag. New York, 1982.

[BERGER]

BERGER, Marcel. **Geometry I.** Springer-Verlag. New York, 1987.

[CARATHÉODORY]

CARATHÉODORY, C. **Theory of Functions of a Complex Variable.** Chelsea. New York, 1960. v.2.

[CONWAY]

CONWAY, J. H., LAGARIAS, J. C. Tiling with Polyominoes and Combinatorial Group Theory. **Journal of Combinatorial Theory.** Serie A, n.53, p.183-208. 1990.

[COXETER I]

COXETER, H. S. M. The Classification of Zonoedra by Means of Projective Diagrams. **Journal of Math. Pures Appl.** n.41, p. 137-156. 1962.

[COXETER II]

COXETER, H. S. M. **Introduction of Geometry.** 2 ed. John Wiley & Sons. New York, 1969.

[COXETER-III]

COXETER, H. S. M., MOSER, W. O. **Generators and Relations for Discrete Groups.** Springer-Verlag. New York, 1972.

[do CARMO]

do CARMO, Manfredo P.. **Geometria Riemanniana.** SBM. Rio de Janeiro, 1988.

[FENN]

FENN, Roger. What is the geometry of a surface? **The American Mathematical Monthly.** p. 87-98. Feb. 1983.

[GARDNER]

GARDNER, Martin. **Extraordinary Non-periodic Tiling that Enriches the Theory of Tilings.** Scientific American, January, 1977.

[GROSSMAN]

GROSSMAN, Israel. MAGNUS, Wilhelm. **Groups and Their Graphs.** The Mathematical Association of America. Washington, 1992.

[HAJÓS]

HAJÓS, G. **Ueber einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes mit einem Wuerfelgitter.** Math Z, n.47, p.427-467, 1941.

[HILBERT]

HILBERT, David. COHN-VOSSEN, S. **Geometry and Imagination.** Chelsea. New York, 1952.

[KLINGENBERG]

KLINGENBERG, Wilhelm. **A Course in Differential Geometry.** Springer-Verlag. New York, 1978.

[KOBAYASHI]

KOBAYASHI, S. NOMIZU K.. **Foundations of Differential Geometry.** Interscience Publishers. New York, 1963. v.1.

[MAGNUS I]

MAGNUS. KARRAS. SOLITAR. **Combinatorial Group Theory: Presentation of Groups in Terms of Generators and Relations.** John Wiley & Sons. New York, 1966.

[MAGNUS II]

MAGNUS, Wilhelm. **Noneuclidean Tessellations and Their Groups.** Academic Press. New York, 1974.

[ROBINSON I]

ROBINSON, Raphael M. **Undecidability and Nonperiodicity for Tilings of the Plane.** Inventiones Math., n.12, p.177-209, 1971.

[ROBINSON II]

ROBINSON, Raphael M. **Undecidable Tiling Problems in the Hyperbolic Plane.** *Inventiones Math.*, n.44, p.259-264, 1978.

[ROBINSON III]

ROBINSON, Raphael M. **Comments on the Penrose Tilings.** Preprint, University of California, Berkeley.

[ROTMAN]

ROTMAN, Joseph J. **The Theory of Groups: An Introduction.** Allyn and Bacon. Boston, 1965.

[STEIN]

STEIN, Sherman. SZABÓ, Sándor. **Algebra and Tiling: Homomorphisms in the Service of Geometry.** The mathematical Association of America. New York, 1994.

[THURSTON]

THURSTON, William P. **Conway's Tiling Group.** *The American Mathematical Monthly.* v.97, n.8, p.757-773. Oct. 1990.

[TÓTH]

TÓTH, L. Fejes. **Regular Figures.** Pergamon Press. Oxford, 1964.

[VODERBERG I]

VODERBERG, H. **Zur Zerlegung eines ebenen Bereiches in Kongruente.** *Jahresberichte d. Deutschen Math. Ver.*, n.46, p.229-231, 1936.

[VODERBERG II]

VODERBERG, H. **Zur Zerlegung der Ebene in Kongruente Bereiche in Form einer Spirale.** *Jahresberichte d. Deutschen Math. Ver.*, n.47, p.159-160, 1937.

[WOLF]

WOLF, Joseph A. **Spaces of Constant Curvatures.** Boston, 1974, p.100.