



1150013846



IMECC

T/UNICAMP V719a

ANÁLISE ESPECTRAL DO MÉTODO DE REGULARIZAÇÃO DE TIKHONOV PARA
RESOLVER EQUAÇÕES INTEGRAIS DE FREDHOLM DE PRIMEIRA ESPÉCIE
APROXIMAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

*Este exemplar corresponde a redação
final da tese devidamente corrigida
e defendida pelo Sr. Fermín
Sinforiano Viloche Bazán e aprovada
pela Comissão Julgadora.*

Campinas, abril de 1991.

Profa. Dra. Maria Cristina Castro Cunha

Orientadora

*Dissertação apresentada ao Instituto
de Matemática, Estatística e Ciência
da Computação, UNICAMP, como
requisito parcial para obtenção do
Título de Mestre em Matemática
Aplicada na área de Análise Aplicada.*

ANÁLISE ESPECTRAL DO MÉTODO DE REGULARIZAÇÃO DE TIKHONOV PARA
RESOLVER EQUAÇÕES INTEGRAIS DE FREDHOLM DE PRIMEIRA ESPÉCIE
APROXIMAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

Fermín Sinforiano Viloche Bazán

AGRADECIMENTOS

À Profa. Dra. Maria Cristina Castro Cunha pela valiosa orientação e confiança.

Ao Prof. Dr. José Luis Boldrini pelos conhecimentos transmitidos nas horas de aula e pelos esclarecimentos durante o trabalho.

Ao Prof. Dr. Petronio Pulino pela colaboração oportuna no começo dos aspectos computacionais do trabalho.

À Prof. Dra. Vera Lopes pela leitura preliminar do trabalho.

Ao Professor Dr. João Frederico da Costa Meyer pela confiança e facilidades brindadas no uso do laboratório de Matemática Aplicada do IMECC.

Aos professores do Depto. de Matemática Aplicada que contribuíram na minha capacitação profissional.

Aos meus colegas e amigos da Pós-graduação pela agradável convivência neste interessante período. Especialmente a Mario, Esmeralda, Lillian, Tomás, Gustavo, Marcilio, Luis e Diomar.

Às Instituições CNPQ e UNICAMP pelo suporte financeiro.

À Minha Família

Í N D I C E

CAPÍTULO I: PRELIMINARES

1.1 Introdução	01
1.2 Resultados Básicos de Análise Funcional	02
1.3 Operadores Lineares em Espaços de Hilbert	03
1.3.1 Operadores Compactos e alguns resultados da teoria espectral	06
1.3.2 Inversa Generalizada	15
1.4 Espaços de Sobolev e alguns resultados da teoria de aproximação	17

CAPÍTULO II: GENERALIDADES SOBRE PROBLEMAS MAL POSTOS

3.1 Introdução	22
3.2 Algumas Considerações sobre Problemas Inversos	23
3.3 Problemas Mal Postos e sua relação com Problemas Inversos	25

CAPÍTULO III: O MÉTODO DE REGULARIZAÇÃO

3.1 Generalidades	36
3.2 Análise do Método via teoria espectral	47

CAPÍTULO IV: APROXIMAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

4.1 Primeiros Resultados	53
4.2 O Método de Ritz Regularizado e estimativas para Elementos Finitos	57

CAPÍTULO V: EXPERIÊNCIAS NUMÉRICAS	67
CONCLUSÕES E SUGESTÕES	82
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	84

INTRODUÇÃO

Muitos campos das ciências aplicadas envolvem o problema de resolver equações integrais lineares da forma

$$(1) \quad \int_a^b k(s,t)x(t)dt = y(s), \quad c \leq s \leq d$$

onde $k(s,t)$, chamado núcleo, é uma função conhecida e $y(s)$ é uma função que corresponde a dados observados. Tais equações provêm do contexto de experiências físicas onde a função $x(t)$ da qual se precisa informação está relacionada com a função dados $y(s)$ por meio de alguma função experimental $k(s,t)$. Equações do tipo (1) são conhecidas como *Equações Integrais de Fredholm de Primeira Espécie*.

Este trabalho visa o estudo das principais características de eq. (1) assim como também alguns métodos de resolução. Para este fim, consideraremos $A: X \rightarrow Y$ como sendo o operador integral definido pelo núcleo $k(s,t)$ entre espaços normados X e Y , de maneira que nossa equação pode ser reescrita como:

$$(2) \quad Ax = y$$

Em situações práticas, os valores de $y(s)$ são obtidos experimentalmente, portanto sujeitos a erros de medição. Nestas condições, somos forçados a trabalhar com uma versão aproximada $y_\delta(s)$ com um nível de ruído, isto é:

$$(3) \quad \|y_\delta - y\| < \delta, \quad \delta > 0$$

Em particular sabe-se que, quando $k(s,t)$ é contínua ou de quadrado integrável, o problema de resolver (1) é *Mal Posto*, no sentido em que a própria garantia de existência e unicidade de soluções é delicada, pois, possivelmente:

$$(4) \quad R(A) \neq Y \text{ e}$$

$$(5) \quad N(A) \neq \{0\},$$

onde $R(A)$ e $N(A)$ denotam respectivamente, os subespaços imagem e nulo do operador, ou no sentido em que pequenas variações nos dados podem ocasionar grandes perturbações na solução. Em outras palavras, o problema não depende continuamente dos dados, isto é:

$$(6) \quad A^{-1} \text{ existe, mas não é contínua.}$$

Consequentemente, o problema não pode ser abordado por métodos usuais que se aplicam nos casos estáveis; precisamos de métodos numéricos com um aceitável balanço entre precisão e estabilidade.

As dificuldades que aparecem como consequência de (4) e/ou (5), podem ser contornadas introduzindo um novo conceito de solução, cuidando que neste novo contexto, existência e unicidade sejam garantidas. Introduz-se então a noção de *Solução de Quadrados Mínimos (SQM)*.

Se $y \in R(A) + R(A)^\perp$ garante-se a existência de uma única SQM que tenha norma mínima e que denotaremos com x^+ . A função x^+ é chamada *Solução Generalizada* de (2) e pode ser vista como resultado de um operador linear $A^+ : D(A^+) = R(A) + R(A)^\perp \rightarrow X$ tal que $A^+y = x^+$. A^+ é chamado *Inversa Generalizada* de A [04].

Se $R(A)$ é fechado então $R(A) + R(A)^\perp = Y$, e A^+ é contínua, caso contrário, A^+ não é contínua e o problema de determinar a solução generalizada é mal posto, isto é, a solução existe de

maneira única só quando $y_\delta \in D(A^+)$, porém não depende continuamente dos dados. No caso de dados perturbados não temos garantia que $y_\delta \in D(A^+)$, contudo, se isto for verdade, é bastante provável que $A^+(y_\delta)$ não seja uma aproximação aceitável para $A^+(y)$ devido à descontinuidade de A^+ .

Se A é o operador integral definido no espaço de funções lobesgue mensuráveis e de quadrado integráveis: $L^2(a,b)$, induzido pelo núcleo $k(s,t)$ como em (1), então $R(A)$ é fechado se e somente se o núcleo $k(s,t)$ é degenerado, [13]. Núcleos desta natureza não são frequentes em situações práticas, logo o problema de calcular soluções generalizadas aproximadas para equações do tipo (1) em certo sentido sempre é mal posto; consequentemente, precisa de métodos estáveis de aproximação.

O estudo teórico de problemas mal postos e métodos para resolvê-los iniciou-se graças aos trabalhos fundamentais de Tikhonov [50], [51]. A pedra fundamental foi o conceito de *solução regularizada* obtida através de *algoritmos de regularização*, onde a idéia básica é aproximar o operador não limitado A^+ (A^{-1} se ele existe) por uma família uniparamétrica de operadores limitados: $R(\alpha, \cdot): Y \rightarrow X$, onde $\alpha > 0$ é chamado *Parâmetro de Regularização*, tomando como solução regularizada a função: $x_\alpha^\delta = R(\alpha, y_\delta)$ que depende sempre continuamente de y_δ . O problema reside na escolha do parâmetro α como função de δ : $\alpha = \alpha(\delta)$, de modo que, se $\delta \rightarrow 0$, então deve-se ter $\alpha \rightarrow 0$ e $x_\alpha^\delta \rightarrow x^+$.

Neste trabalho estamos interessados particularmente no estudo do método de regularização proposto por Tikhonov e sua aplicação na solução numérica de equações integrais de primeira espécie. Apresentaremos aqui um enfoque para o método de Tikhonov de maneira que o seu estudo é realizado como caso

especial de uma vasta classe de algoritmos regularizantes. Acreditamos que este enfoque é importante já que no processo da discussão iremos obtendo conclusões e/ou resultados que serão particularizados adequadamente para o método em estudo. Em particular estaremos interessados em obter respostas às seguintes questões:

- a) Como construir algoritmos regularizantes e de que maneira deve ser feita a escolha do parâmetro de regularização para garantir convergência ?
- b) O que pode ser dito com respeito à estimativas da taxa de convergência ?
- c) Como implementar eficientemente algoritmos regularizantes de maneira a obter soluções numéricas satisfatórias para o problema ?

Respostas para a) e b) são obtidas explorando uma linha de estudo de métodos de regularização via noções de teoria espectral para operadores lineares autoadjuntos [03], [09], [10], [16]. A análise é feita ao longo do capítulo III, aproveitando o conjunto de resultados de análise funcional e de teoria de operadores lineares introduzidos no capítulo I. Respostas alternativas para c), são obtidas introduzindo versões aproximadas dos algoritmos de regularização, adotando um procedimento que consiste em tratar em primeiro lugar a regularização do problema na dimensão original, para seguir depois com uma adequada discretização.

Resumindo, na primeira parte deste trabalho, apresentaremos, em forma unificada, resultados obtidos nas referências acima citadas via teoria espectral, relacionados com convergência e estimativas de erro nas soluções aproximadas do método de Tikhonov, trabalhando sempre no

ambiente original, isto é; trabalhando em dimensão infinita. Numa segunda parte, discutiremos o método combinando regularização e projeção em subespaços de dimensão finita. Mais precisamente, usaremos os resultados da primeira etapa, para conseguir estimativas da taxa de convergência para soluções aproximadas construídas em subespaços de elementos finitos. Na penúltima parte do trabalho incluímos um capítulo que corresponde à implementação do método usando elementos finitos, tomando como base funções splines lineares. Acompanhamos alguns testes numéricos. Finalizamos incluindo algumas conclusões e sugestões que consideramos válidas para trabalhos futuros.

CAPÍTULO I: PRELIMINARES

1.1 INTRODUÇÃO

Apresentaremos neste capítulo um conjunto de conceitos e resultados que servirão como suporte para o desenvolvimento deste trabalho. Faremos isto assumindo certo grau de familiaridade com os princípios e propriedades básicas de análise funcional e teoria de operadores lineares em espaços de Hilbert. Nosso desenvolvimento será no ambiente dos espaços de Hilbert, porém, com a finalidade de aproveitar conceitos e/ou resultados vitais para este trabalho, ocasionalmente vamos recorrer a espaços mais amplos como os de Banach, por exemplo.

Certos conceitos básicos como: convergência, compacidade, continuidade, densidade, e outros serão geralmente omitidos. Pelo contrário, resultados e/ou teoremas relacionados com esses conceitos e importantes para nossos objetivos, serão apresentados descritivamente, sem demonstração, e em certos casos, acompanhados com alguns comentários. Em resumo, vamos apresentar alguns teoremas de análise funcional relacionados com a continuidade do operador inverso e outros, algumas noções e propriedades de operadores compactos em espaços de Hilbert e resultados de teoria espectral, propriedades do operador inversa generalizada, noções de espaços de Sobolev e alguns resultados relacionados com a propriedade variacional de projeções ortogonais em subespaços de elementos finitos.

1.2 RESULTADOS BÁSICOS DE ANÁLISE FUNCIONAL

Apresentamos em primeiro lugar os seguintes três teoremas relacionados com a continuidade do operador inverso

Teorema 1.2.1

Seja $A: X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua e injetora e X, Y espaços normados. Se K é um subconjunto compacto de X , então $A^{-1}: A(K) \rightarrow X$ é contínua.

Prova: Ver [04].

Teorema 1.2.2 (Teorema da aplicação inversa de Banach)

Se X e Y são espaços de Banach e $A: X \rightarrow Y$ é uma aplicação linear, bijetora e contínua, então A^{-1} é contínua.

Prova: Ver [26].

Observação: Se retirarmos das hipóteses anteriores a condição $R(A) = Y$, o teorema continuará sendo válido de X em $R(A)$, sempre quando $R(A)$ seja fechado.

Teorema 1.2.3

Se X e Y são espaços de Hilbert e $A: X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua, as seguintes condições são equivalentes:

- a) $\exists$ uma constante $M > 0$ tal que $\|Ax\| \geq M\|x\| \quad \forall x \in X$.
- b) $R(A)$ é fechado.
- c) $A^{-1}: R(A) \rightarrow X$ é contínua.

Prova: Ver [04].

Outros resultados de interesse são os seguintes:

Teorema 1.2.4 (Teorema de Dini)

Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções reais e contínuas em $[a, b]$. Se $f_1(t) \leq f_2(t) \leq \dots$ para cada $t \in [a, b]$, tal que $f_n(t) \rightarrow f(t) \in C[a, b]$; então a sequência $\{f_n\}$ converge uniformemente.

Prova: Ver [15]. É conveniente observar que o teorema continua

sendo válido se substituirmos o intervalo $[a,b]$ por algum subconjunto compacto K de um espaço separável.

Teorema 1.2.5 (Teorema de Aproximação de Weierstrass)

Se $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então para cada $\epsilon > 0$, $\exists$ um polinômio $p(t)$ tal que:

$$|f(t) - p(t)| < \epsilon \quad \forall t \in [a,b].$$

Prova: Ver [17].

Teorema 1.2.6

Se X é um espaço de Banach reflexivo e B é a bola fechada unitária em X , então B é fracamente compacta em X . Consequentemente, se $A:X \rightarrow Y$ é um operador compacto linear e Y é um espaço normado, então $A(B)$ é compacta segundo a topologia de Y .

A prova da primeira parte pode ser vista em [21], enquanto a segunda parte é consequência da compacidade do operador. O conceito de compacidade será apresentado mais tarde.

1.3 OPERADORES LINEARES EM ESPAÇOS DE HILBERT

Nesta seção apresentamos alguns conceitos básicos e resultados relacionados com operadores lineares definidos entre espaços de Hilbert, dando especial atenção a alguns aspectos ligados a noções espectrais para operadores compactos. Para maiores detalhes ver [04], [08], [17], [21].

Convencionaremos em primeiro lugar, que ao longo deste trabalho vamos considerar espaços de Hilbert separáveis, isto é, se X é um espaço de Hilbert, sempre existirá um conjunto S

denso e enumerável contido nele. Daqui em diante, o símbolo $(\cdot, \cdot)$ servirá para denotar o produto interno genérico do espaço, enquanto que $\|\cdot\|$ denotará a norma associada. Se M é um subconjunto de um espaço de Hilbert X , $\bar{M}$ e $M^\perp$ denotarão o fecho e complemento ortogonal do conjunto M .

Teorema 1.3.1

Se M é um subespaço fechado de um espaço de Hilbert X então:

$$X = M \oplus M^\perp$$

e cada $x \in X$ pode ser escrito de forma única como

$$x = u + v \quad \text{com} \quad u \in M \text{ e } v \in M^\perp$$

satisfazendo a propriedade

$$\|x\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Ainda mais, existe um único operador projeção ortogonal $P: X \rightarrow X$ tal que $R(P) = M$.

Destacamos que, se X é um espaço linear, um operador linear $P: X \rightarrow X$ é chamado uma projeção se $P^2 = P \circ P = P$. Além disso, sabe-se que $R(P)$ e $N(P)$ são disjuntos e satisfazem a propriedade: $X = R(P) + N(P)$. Se X é Hilbert e P é um operador projeção em X com a propriedade $R(P) \perp N(P)$ então P é chamado projeção ortogonal.

Teorema 1.3.2

Se X é um espaço de Hilbert, e P é o operador projeção ortogonal de X sobre um subespaço fechado M então

$$\|\bar{x} - P\bar{x}\| \leq \|\bar{x} - v\| \quad \forall v \in M, \bar{x} \in X.$$

Em outras palavras :

$$\|\bar{x} - P\bar{x}\| = \inf \{ \|\bar{x} - v\|, v \in M \}$$

As provas destes teoremas podem ser vista em [43].

Por outro lado, se A é um operador linear de X em Y , a norma de A , é definida por:

$$(1.1) \quad \|A\| = \sup_{x \neq 0} \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, x \in X \right\}$$

Prova-se que o número acima definido, satisfaz as propriedades usuais de norma, demonstrando-se que o mesmo número pode ser obtido se o supremo é tomado na bola fechada unitária. Tem-se também a seguinte propriedade:

$$(1.2) \quad \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

onde A e B são operadores lineares definidos entre espaços de Hilbert, de maneira que a composição seja correta. Se $\|A\| < +\infty$, o operador é chamado *limitado*. Considerando esta definição, prova-se o seguinte teorema:

Teorema 1.3.3

Se $A: X \rightarrow Y$ é um operador linear e X e Y são espaços normados, então, A é limitado se e somente se ele é contínuo.

Observação: Graças ao teorema anterior, ao longo deste trabalho, os conceitos de continuidade e limitação de operadores lineares serão usados sem distinção.

Daqui em diante, usaremos a notação $B(X,Y)$, para denotar o conjunto de todos os operadores lineares e limitados de X em Y . Prova-se que $B(X,Y)$ é um espaço linear normado. Se $\{A_n\}$ é uma sequência de operadores em $B(X,Y)$, diz-se que $A_n \rightarrow A$ uniformemente se $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Se $\|A_n x - Ax\| \rightarrow 0 \forall x \in X$, quando $n \rightarrow \infty$ diz-se que $A_n \rightarrow A$ fortemente. Prova-se que convergência uniforme implica convergência forte; a recíproca não é verdadeira [43].

Se $A \in B(X,Y)$, o operador *adjunto* de A , denotado com A^* , é o único operador linear em $B(Y,X)$ tal que:

$$(Au, v) = (u, A^*v) \quad \forall u \in X, v \in Y$$

Teorema 1.3.4

Se $A, B \in B(X,Y)$, temos as seguintes propriedades

$$a) (A+B)^* = A^* + B^*$$

$$b) (tA)^* = tA^*, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$c) A^{**} = A$$

$$d) \text{ se } D \in B(Y, Z), \text{ onde } Z \text{ é um espaço de Hilbert,} \\ \text{então } (AD)^* = D^*A^*$$

Prova: Ver [15]

Se $A \in B(X, X)$, A é chamado *autoadjunto* se $A = A^*$. O exemplo imediato de operador autoadjunto corresponde a operadores projeção ortogonal. Propriedades importantes que relacionam A e A^* são dadas no seguinte teorema:

Teorema 1.3.5

Se $A \in B(X, Y)$ então:

$$a) \|A\| = \|A^*\| = \|AA^*\|^{1/2}$$

$$b) N(A^*A) = N(A)$$

$$c) N(A) = R(A^*)^\perp, \quad N(A)^\perp = \overline{R(A^*)}$$

$$d) N(A^*) = R(A)^\perp, \quad N(A^*)^\perp = \overline{R(A)}$$

Prova: Ver [17]

1.3.1 OPERADORES COMPACTOS E ALGUNS RESULTADOS DA TEORIA ESPECTRAL.

Um operador linear A definido de X em Y é chamado *Compacto* se para cada conjunto limitado M de X temos que $\overline{A(M)}$ é compacto. É imediato que, se A é compacto, então ele é contínuo, e se B é um operador contínuo então BA e AB são compactos [17]. Resumimos alguns resultados importantes, relacionados com operadores compactos nos seguintes teoremas:

Teorema 1.3.6

a) Se $A \in B(X, Y)$ com subespaço imagem $R(A)$ de dimensão finita, então A é compacto.

b) O operador identidade $I_X \rightarrow X$ é compacto se e somente

se X tem dimensão finita.

c) Se $A \in B(X,Y)$ é compacto e injetor, então $R(A)$ não pode ser fechado a menos que ele seja de dimensão finita.

Prova: Ver [04] para a) e b), enquanto que a parte c) é consequência do teor. 1.2.2.

Corolário 1.3.7

Se $A \in B(X,Y)$ é compacto e injetor, o operador inverso $A^{-1}:R(A) \rightarrow X$, não pode ser contínuo a menos que $R(A)$ seja de dimensão finita.

Operadores compactos de interesse para este trabalho são:

a) Operadores projeção ortogonal sobre subespaços de dimensão finita e, principalmente,

b) Operadores integrais definidos da seguinte forma:

$$(1.3) \quad Ax(s) = \int_a^b k(s,t)x(t)dt \quad c \leq s \leq d$$

onde a função $k(s,t)$ como já sabemos é a função núcleo do operador. Os seguintes teoremas garantem a compacidade do operador definido por (1.3):

Teorema 1.3.8

Se $k(s,t)$ é uma função contínua definida no retângulo $[c,d] \times [a,b]$, então o operador $A:C[a,b] \rightarrow C[c,d]$ definido em (1.3) é compacto.

Teorema 1.3.9

Se $k(s,t) \in (L^2[c,d] \times L^2[a,b])$, então o operador $A:L^2[a,b] \rightarrow L^2[c,d]$, definido por (1.3), é compacto.

As provas destes teoremas podem ser vistas em [17], [26].

Quando a função núcleo $k(s,t)$ é da seguinte forma:

$$k(s,t) = \sum_{n=1}^m \phi_n(s) \psi_n(t)$$

onde os fatores da soma são contínuos e/ou de quadrado integráveis segundo Lebesgue, então o operador integral é chamado *degenerado*. Com relação a este conceito, usando o corolário 1.3.7, temos:

Teorema 1.3.10

Se A é um operador integral definido como em (1.3), então $R(A)$ é fechado se e somente se o núcleo é degenerado.

Daqui em diante vamos descrever algumas considerações da teoria espectral para operadores compactos autoadjuntos. Começaremos introduzindo algumas definições e resultados preliminares. Um escalar λ é chamado *autovalor* de $A \in B(X,X)$, se existe um vetor não nulo $x \in X$ tal que $Ax = \lambda x$. O vetor x é o subespaço $N(A - \lambda I)$ onde I é o operador identidade em X , são chamados *autovetor* e *autoespaço* de A associado ao λ . A dimensão de $N(A - \lambda I)$ é a *multiplicidade* de λ . É claro que λ será um autovalor unicamente no caso em que $N(A - \lambda I)$ for diferente do subespaço trivial.

Analogamente ao caso de matrizes simétricas prova-se:

Lema 1.3.11

Se $A \in (X,X)$ é autoadjunto, então:

- a) Todo autovalor de A é real
- b) autovetores correspondentes a autovalores diferentes são ortogonais.
- c) Se λ é um autovalor de A , então

$$|\lambda| \leq \|A\|$$

Se $A \in B(X,X)$, o *resolvente* de A , denotado por $\rho(A)$, é o

conjunto dos números complexos λ tal que $(A - \lambda I)^{-1}$ existe e é limitado. Se $\lambda \in \rho(A)$, diz-se que λ é um valor regular. O espectro de A , denotado por $\sigma(A)$ é o complemento de $\rho(A)$, ou seja:

$$\sigma(A) = \mathbb{C} / \rho(A)$$

O raio espectral de A , denotado por $|\sigma(A)|$ é definido por:

$$|\sigma(A)| = \sup \{ |\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A) \}$$

Daqui, temos que o espectro de um operador é formado por:

- i) O conjunto de autovalores do operador, ou
- ii) Por todos os λ tal que o operador $(A - \lambda I)^{-1}$ existe mas não é contínuo.

O último fato acontece por exemplo, com o seguinte operador:

$A: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$, onde $Ax(t) = h(t)x(t)$, $\forall t \in [0,1]$, com $h(t)$ contínua e fixa. Observamos também que, se X é de dimensão finita, ii) não pode acontecer, pois $(A - \lambda I)^{-1}$ é limitado.

Prova-se que $\rho(A)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$, formado pelos complexos λ tal que $|\lambda| > \|A\|$. Consequentemente $\sigma(A)$ é um conjunto compacto que está contido na bola com centro na origem e raio $\|A\|$; sendo assim, o raio espectral satisfaz a propriedade $|\sigma(A)| \leq \|A\|$. Se $A \in B(X,Y)$ é autoadjunto, usando o teor. 1.2.3 demonstra-se que $\lambda \in \rho(A)$ se e somente se existe uma constante $M > 0$ tal que $\|A - \lambda I\|x\| \geq M\|x\| \quad \forall x \in X$. Com este resultado prova-se o seguinte teorema:

Teorema 1.3.12

Se $A \in B(X,X)$ é autoadjunto, o espectro $\sigma(A)$ é um subconjunto de números reais e:

$$\sigma(A) \subset [-\|A\|, \|A\|]$$

A existência de autovalor para um operador compacto A é

garantida desde que A seja autoadjunto. Nesse caso temos que pelo menos $\|A\|$ ou $-\|A\|$ é um autovalor de A e o raio espectral satisfaz: $\|A\| = |\sigma(A)|$. A prova destes resultados podem ser vistas em Baumeister [04], Groetsch [17].

Teorema 1.3.13 (Caracterização do espectro)

Se $A \in B(X, X)$ é compacto e autoadjunto, então valem as seguintes propriedades:

- a) $\sigma(A) = \{0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{R} / \lambda \text{ é autovalor de } A\}$.
- b) Se X é de dimensão finita, então $\sigma(A)$ é formado pelo conjunto de autovalores de A .
- c) Para cada autovalor λ o subespaço $N(A - \lambda I)$ tem dimensão finita.
- d) $\sigma(A)$ é enumerável. Se $\sigma(A)$ é infinito, então a sequência de autovalores λ_n satisfaz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$$

Prova: Ver [04].

Teorema 1.3.14 (Teorema Espectral)

Seja $A \in B(X, X)$ um operador compacto e autoadjunto com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, repetidos de acordo com suas multiplicidades. Se $u_1, u_2, \dots$, é a correspondente sequência de autovetores ortonormais, então temos que:

Para cada $x \in X$, existe $x_0 \in N(A)$ tal que:

$$(1.4) \quad x = x_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, u_j \rangle u_j$$

$$(1.5) \quad Ax = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle x, u_j \rangle u_j$$

Prova: Ver [04], [17].

Observação:

Se a soma anterior for finita, isto é, se A possui unicamente um número finito de autovalores, então $R(A)$ tem dimensão finita e é gerado pelo sistema de autovetores. Além disso, no caso geral, o teorema mostra que operadores compactos e autoadjuntos, são completamente determinados por seus autovalores e pelo correspondente sistema de autovetores.

Grças ao teorema anterior, se $A \in B(X, X)$ é compacto e autoadjunto, então para $x \in X$ temos que:

$$\begin{aligned}
 (1.6) \quad x &= x_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (x, u_j) u_j \\
 Ax &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (x, u_j) u_j \\
 A^2 x &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 (x, u_j) u_j \\
 &\vdots \\
 A^n x &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^n (x, u_j) u_j, \quad n \in \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

Logo, para cada polinômio:

$$P_n = \sum_{k=0}^n a_k t^k, \quad a_k \in \mathbb{R}$$

associaremos o polinômio em A :

$$(1.7) \quad P_n(A) = \sum_{k=0}^n a_k A^k, \quad \text{com } A^0 = I$$

Para fazer isto, se P_0 é a projeção ortogonal de X sobre $N(A)$, com $a_0 = P_n(0)$, usando (1.6), para cada $x \in X$ definimos:

$$(1.8) \quad P_n(A) = P_n(0) P_0 x + \sum_{j=1}^{\infty} P_n(\lambda_j) (x, u_j) u_j$$

Demonstra-se facilmente que $P_n(A)$ está bem definido e que este operador polinomial em A é limitado. Por outro lado, se f é

uma função contínua definida no intervalo $[a,b]$, com $\sigma(A) \subset [a,b]$, então, imitando (1.8), definimos:

$$(1.9) \quad f(A)x = f(0)P_0x + \sum_{j=1}^{\infty} f(\lambda_j)(x, u_j)u_j \quad \forall x \in X$$

Com esta definição, $f(A)$ é uma função contínua do operador A : para cada $x \in X$, com $P_0x = x_0$, $x_0 \in N(A)$, por (1.9)

$$\begin{aligned} \|f(A)x\|^2 &= |f(0)|^2 |P_0x|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} |f(\lambda_j)|^2 |(x, u_j)|^2 \\ &\leq \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |f(\lambda)|^2 \|x_0\|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} |(x, u_j)|^2 \end{aligned}$$

Se $x = x_0 + x_1$, com $x_1 \in N(A)^\perp$, (1.4) implica que

$$x_1 = \sum_{j=1}^{\infty} (x, u_j)u_j$$

portanto, na desigualdade anterior temos que:

$$\|f(A)\| \leq \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |f(\lambda)| \|x\|$$

Dáí, por (1.1)

$$(1.10) \quad \|f(A)\| \leq \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |f(\lambda)| \leq \sup_{\lambda \in [a,b]} |f(\lambda)|$$

Agora, se u é autovetor unitário correspondente ao autovalor λ

$$\|f(A)x\| \leq \|f(A)\| \|x\| \rightarrow \|f(A)\| \geq \|f(A)u\| = |f(\lambda)|$$

logo:

$$(1.11) \quad \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |f(\lambda)| \leq \|f(A)\|$$

Então de (1.10) e (1.11) temos o seguinte teorema:

Teorema 1.3.15 (Teorema do Raio Espectral)

Se $A \in B(X, X)$ é compacto e autoadjunto, então para $f(A)$ definido em (1.8) valem as seguintes propriedades:

a) $f(A)$ é um operador contínuo e

$$\|f(A)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |f(\lambda)| = |\sigma(f(A))|$$

b) $\|f(A)\| \leq \|f\|_\infty$

Se $A \in B(X, Y)$ é compacto, temos os seguintes resultados:

a) $A^*A: X \rightarrow X$ é compacto e autoadjunto

b) Se λ é autovalor de A^*A com autovetor unitário u , então $\lambda \geq 0$, pois

$$0 \leq \|Au\|^2 = \langle Au, Au \rangle = \langle A^*Au, u \rangle = \lambda \langle u, u \rangle = \lambda$$

Consequentemente, pelos teoremas 1.3.5 e 1.3.13; temos:

$$(1.12) \quad \sigma(A^*A) \subset [0, \|A\|^2]$$

c) Existem sistemas ortonormais $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ em X e Y respectivamente, e uma sequência $\{\sigma_n\}$ com $\sigma_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ tais que $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ são bases ortonormais para $N(A)^\perp$ e $N(A^*)^\perp$ respectivamente; satisfazendo-se que:

$$(1.13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$$

$$(1.14) \quad Ax = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \langle x, u_j \rangle u_j \quad \forall x \in X.$$

As provas destes resultados são consequências do Teorema Espectral aplicado ao operador A^*A com autovalores λ_j , $j \in \mathbb{N}$, ordenados decrescentemente na forma

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots > 0$$

com sistema ortonormal associado $u_1, u_2, \dots$, definindo:

$$\sigma_j = \lambda_j^{1/2}, \quad v_j = \mu_j Au_j, \text{ onde } \mu_j = 1/\sigma_j, j \in \mathbb{N} \text{ e}$$

notando que $\{u_n\}$ é base para $N(A^*A)^\perp = N(A)^\perp$, e que $v_j \in R(A)$ $\forall j \in \mathbb{N}$ [3].

Os números σ_j , $j \in \mathbb{N}$ são chamados *valores singulares* de A , (1.14) é a *decomposição em valores singulares* de A e o

conjunto $\{\sigma_j, u_j, v_j\}$ é um sistema singular para A .

d) Se $f(t) = t^a$, $a > 0$, então por (1.9) temos

$$(1.14) \quad (A^*A)^a(x) = f(A^*A)(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^a(x, u_j) u_j, \quad \forall x \in X$$

Além disso,

$$(1.15) \quad R[(A^*A)^a] \subset N(A^*A)^{\perp} = N(A)^{\perp}$$

e) Se $g(t) = (\alpha + t)^{-1}$, $\alpha > 0$, então por (1.9) e teor. (1.3.15) temos:

$$(1.16) \quad (A^*A + \alpha I)^{-1} = g(A^*A)$$

$$(1.17) \quad \|A^*A(A^*A + \alpha I)^{-1}\| \leq \|tg(t)\|_{\infty} \quad \forall t \in \sigma(A^*A).$$

Ainda mais, se P_n é um polinômio de grau n , usando (1.7) temos:

$$(1.18) \quad A^*P_n(AA^*) = P_n(A^*A)A^*$$

Com esta propriedade, usando o teor. de aproximação de Weierstrass prova-se que (1.18) é válida também para funções contínuas [05], isto é, se $g:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua com $\sigma(A^*A) \subset [a,b]$, então:

$$(1.19) \quad A^*g(AA^*) = g(A^*A)A^*$$

Em particular, para $g(t)$ acima definida temos:

$$(1.20) \quad (A^*A + \alpha I)^{-1}A^* = A^*(AA^* + \alpha I)^{-1}$$

Finalizamos esta parte, apresentando o seguinte resultado básico, relacionado com o problema de existência de soluções para equações funcionais do tipo $Ax = y$, onde A é compacto.

Teorema 1.3.16 (Existência de Soluções)

Se $A \in B(X,Y)$ é um operador compacto e (σ_j, u_j, v_j) um sistema singular para A , a equação $Ax = y$ tem solução se e

somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

$$a) y \in [N(A)^{\perp}]$$

$$b) \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 |\langle y, u_j \rangle|^2 < \infty$$

Quando a) e b) são satisfeitas a solução é dada por:

$$(1.21) \quad x = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \langle y, u_j \rangle u_j$$

onde a igualdade deve ser interpretada como:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{j=1}^N \mu_j \langle y, u_j \rangle u_j \right\| = 0$$

Observação: As condições a) e b) do teorema exigem certa regularidade da função y para existência de solução. Em particular, a sequência de produtos internos $\langle y, u_j \rangle$ deve decair suficientemente rápido para conter o crescimento dos fatores μ_j , que crescem sem controle devido ao comportamento dos valores singulares do operador. Se usamos (1.21) para obter uma solução do problema então pequenas mudanças em y podem ocasionar grandes perturbações na solução, já que $\mu_j \rightarrow \infty$ quando n cresce. A prova do teorema pode ser vista em [17].

1.3.2 INVERSA GENERALIZADA

Quando consideramos o problema de resolver a equação linear

$$(1.22) \quad Ax = y, \quad A \in B(X, Y), \quad y \in Y$$

é frequente que o lado direito y não esteja em $R(A)$; consequentemente (1.22) não tem solução no sentido clássico. Exemplo típico desta situação acontece quando A é um operador integral induzido por uma função núcleo $k(s, t)$ com certo grau de regularidade. Com a finalidade de contornar o problema de

não existência de soluções, introduzimos uma mudança no conceito de solução no seguinte sentido: se $A \in B(X,Y)$, a função $u \in X$ é uma *solução de quadrados mínimos* (SQM) para (1.22) se:

$$\|Au-y\| = \inf \{ \|Ax-y\| \mid x \in X \}.$$

Uma caracterização útil para soluções de quadrados mínimos é dada no seguinte teorema:

Teorema 1.3.17

Para $y \in Y$ e $u \in X$ as seguintes propriedades são equivalentes:

- a) u é uma solução de quadrados mínimos.
- b) $A^* A u = A^* y$,
- c) $Au = Qy$, onde Q é a projecção ortogonal de Y sobre $\overline{R(A)}$.

Prova: Ver [04].

A equação b) é conhecida como *equação normal* de (1.22). Se S_y denota o conjunto de soluções de quadrados mínimos de (1.22), usando c) prova-se que $S_y \neq \{\phi\}$ se e somente se $Qy \in R(A)$, ou de outra forma, se e somente se $y \in R(A) + R(A)^\perp$. Deve ser claro que se $y \in R(A)$, S_y coincide com o conjunto de soluções de (1.22). Por outro lado, usando a parte b) demonstra-se que, se $S_y \neq \{\phi\}$, então S_y é convexo e fechado, portanto existe uma única solução de quadrados mínimos de norma mínima. Logo, se $A \in B(X,Y)$, o operador *inversa generalizada* de A , denotado por A^+ , com domínio de definição $D(A^+) = R(A) + R(A)^\perp$, é o operador que designa a cada $y \in D(A^+)$ a única SQM de norma mínima para (1.22). Isto é:

$$A^+ : D(A^+) \longrightarrow X, \text{ tal que } A^+(y) = x^+, \forall y \in D(A^+).$$

Com respeito a isto, prova-se que:

$$(1.23) \quad N(A^+) = R(A)^\perp, \text{ e}$$

$$(1.24) \quad R(A^+) = N(A)^\perp.$$

Notar que a última propriedade diz que $x^+ \in N(A)^\perp$. Se A é compacto, usando sistemas singulares, prova-se que x^+ tem a mesma representação da solução clássica dada em (1.21). As provas destes resultados podem ser vistas em [04].

Teorema 1.3.18

Se $A \in B(X,Y)$ então A^+ é contínuo se e somente se, $R(A)$ é fechado.

Para provar este teorema, introduz-se o operador restrição $A_r = A/N(A)^\perp : N(A)^\perp \rightarrow R(A)$, dando a seguinte definição alternativa para A^+ :

$$A^+(y) = \begin{cases} A_r^{-1}Q(y) & , y \in D(A^+) \\ 0 & , y \in R(A)^\perp \end{cases}$$

e aplicando teor. 1.2.2.

1.4 ESPAÇOS DE SOBOLEV E RESULTADOS DA TEORIA DE APROXIMAÇÃO

Seja (a,b) um intervalo aberto em $\mathbb{R}$, e L^p o espaço das funções mensuráveis u , definidas em (a,b) com valores reais tais que

$$\int_a^b |u(t)|^p dt < +\infty$$

Se $u \in L^p(a,b)$, define-se a norma de u em $L^p(a,b)$ da seguinte forma:

$$\|u\|_{L^p(a,b)} = \left(\int_a^b |u(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

Os espaços $L^p(a,b)$, $1 \leq p < +\infty$, são de Banach e quando $p = 2$ $L^2(a,b)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u,v)_{L^2(a,b)} = \int_a^b u(t)v(t)dt, \quad u,v \in L^2(a,b)$$

com norma induzida

$$\|u\|_{L^2(a,b)} = \left(\int_a^b |u(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

Espaços de Sobolev de ordem m

Define-se um espaço de Sobolev de ordem m, sobre um intervalo aberto (a,b), denotado por $H^m(a,b)$ como o espaço vetorial das funções $u \in L^2(a,b)$ tais que as derivadas no sentido de distribuições $D^j u$, $j = 1, 2, \dots, m$ [33], pertencem a $L^2(a,b)$. Define-se em $H^m(a,b)$ o seguinte produto interno:

$$(1.25) \quad (u,v)_{H^m(a,b)} = \int_a^b u v dt + \sum_{j=1}^m \int_a^b D^j u D^j v dt$$

com este produto interno tem-se a seguinte norma associada:

$$(1.26) \quad \|u\|_{H^m(a,b)}^2 = \int_a^b |u(t)|^2 dt + \sum_{j=1}^m \int_a^b |D^j u|^2 dt$$

O espaço $H^m(a,b)$ com o produto interno acima definido é um espaço de Hilbert separável [33]. O espaço $H^m(a,b)$ pode ser definido também como o fecho do espaço de funções continuamente diferenciáveis até a ordem m: $C^m[a,b]$ com respeito à norma (1.26). Daqui em diante, o produto interno e a norma associada em $H^m(a,b)$ serão denotados por $(\cdot, \cdot)_m$ e $\|\cdot\|_m$ respectivamente. O Subespaço de $H^m(a,b)$ formado pelas funções cujas derivadas de ordem menor ou igual a (m-1) que se anulam nos extremos do intervalo é denotado por $H_0^m(a,b)$. Prova-se que H_0^m é também um espaço de Hilbert.

Espaços de Sobolev são importantes já que podemos obter em forma precisa o grau de regularidade de seus elementos. Assim por exemplo, demonstra-se que $H^1(a,b)$ está contido no

espaço de funções contínuas $C[a,b]$, onde a inclusão deve ser entendida no sentido que, para cada $u \in H^1(a,b)$, existe uma função contínua em $C[a,b]$ que é sua representante. Ainda mais, prova-se que $H^m(a,b)$ é compactamente imerso em $C[a,b]$, isto é, a aplicação:

$$i: H^m(a,b) \longrightarrow C[a,b]$$

tal que, $\forall u \in H^m(a,b)$, $i(u) = u \in C[a,b]$ é compacta [33]. Consequentemente, considerando que em espaços de Hilbert bolas fechadas são fracamente compactas, pelo teor. 1.2.6, temos que a bola unitária em $H^m(a,b)$ é compacta em $C[a,b]$.

Resultados importantes:

Considerando o intervalo (a,b) como sendo limitado, temos:

- i) Se $u \in H^m(a,b)$, então $u \in C^{m-1}[a,b]$ (ver [14]).
- ii) Se $p \geq q \geq 0$, $H^p(a,b) \subset H^q(a,b)$ e a inclusão é densa e contínua [43], satisfazendo-se:

$$\|u\|_q \leq \|u\|_p$$

- iii) Se $p > q$, a imersão $i: H^p(a,b) \longrightarrow H^q(a,b)$ é compacta; consequentemente a bola unitária em $H^p(a,b)$ é compacta em $H^q(a,b)$. Ver [33].

Espaços de Aproximação - Resultados

A idéia de aproximação vem intimamente ligada ao problema de resolver problemas que envolvem equações a operador da forma $Ax = y$ entre espaços de dimensão infinita X, Y , cuja resolução analítica direta é geralmente impossível. A técnica padrão de métodos aproximados para resolver este tipo de problemas, consiste em substituir o problema original por uma sequência de problemas em subespaços de dimensão finita, cuja solução seja simples de obter, de tal maneira que a sequência

de soluções gerada nesse processo convirja à solução do problema original.

A questão de saber quando um subespaço contém elementos próximos aos do espaço original é vital. Assim, se $M_h \subset X$ é uma sequência de subespaços de dimensão finita, onde h é um parâmetro real que varia inversamente com a dimensão n de M_h , é desejável que $M_h \rightarrow X$ quando $h \rightarrow 0$, isto é, estaríamos garantindo que M_h realmente aproxima o espaço X a medida que a dimensão n cresce. A existência de subespaços de aproximação M_h em X será garantida desde que X seja separável.

Dado que $H^m(a,b)$ é separável, vamos considerar nele a classe de subespaços de aproximação conhecida como "Subespaços Elemento Finito", cujas propriedades de aproximação são sistematicamente organizadas em famílias de classe $S_h^{k,r}$ [11], [14]. Uma família M_h , $0 < h < 1$ de subespaços de dimensão finita é de classe $S_h^{k,r}$, se as seguintes condições são satisfeitas:

$$(1.27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i)} \quad M_h \subset H^k(a,b) \text{ para todo } h. \\ \text{ii)} \quad \forall u \in H^j(a,b), \exists C > 0 \text{ independente de } h \text{ de } u \\ \quad \text{tal que: } \inf_{\varphi \in M_h} \|u - \varphi\| \leq Ch^{j-i} \|u\| \\ \quad 0 \leq i \leq k, \quad 1 \leq j \leq r \end{array} \right.$$

Uma forma conveniente de construir famílias de classe $S_h^{k,r}$, é considerando funções polinomiais por parte em subintervalos de algum intervalo dado. A escolha obedece ao fato de que esse tipo de polinômios possibilita a construção de bases locais para tais subespaços. No que segue, vamos exibir algumas famílias de subespaços de aproximação; para isto, seja Δ uma partição regular do intervalo $I = [a,b]$,

$$\Delta: a=t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1}=b$$

$$I_j = [t_j, t_{j-1}], h_j = (t_j - t_{j-1}) = (b-a)/n = h$$

$$j = 1, 2, \dots, n.$$

Agora, para $0 \leq k \leq s$, seja $M_k^s(\Delta)$ o espaço de funções v em $C^k[a,b]$ tais que a restrição $v|_{I_j}$ é um polinômio de grau menor ou igual a s . Demonstra-se que a dimensão do espaço $M_k^s(\Delta)$ é $n(s-k)+s+1$. Os espaços $M_k^s(\Delta)$ possuem a seguinte propriedade:

$\forall u \in H^j(a,b), \exists \varphi \in M_k^s(\Delta)$, e uma constante $C > 0$ independente de h e de u , tais que:

$$\|D^i(u-\varphi)\|_{L^2(a,b)} \leq Ch^{j-i} \|D^j u\|_{L^2(a,b)}$$

$$0 \leq i \leq k+1, \quad 1 \leq j \leq s+1$$

Portanto, vale o seguinte teorema:

Teorema 1.3.19

Para cada $s, k, 0 \leq k < s$, $M_k^s(\Delta)$ é uma família de classe $S_h^{k+1, s+1}$.

A prova do teorema pode ser vista em [07]. Como exemplos dos espaços $M_k^s(\Delta)$ temos:

i) O espaço de splines de ordem s : M_{s-2}^{s-1} , $s \geq 2$, onde destacam-se, o espaço de splines lineares e splines cúbicas, cujos elementos pertencem a $C[a,b]$ e $C^2[a,b]$ respectivamente. Bases locais serão exibidas no cap. V.

ii) O espaço dos polinômios de Hermite por partes: $H^{(m)}(\Delta)$ que é definido como sendo o espaço de funções $M_{m-1}^{2m-1}(\Delta)$, isto é, o conjunto de funções $u \in C^{m-1}[a,b]$, tais que $u|_{I_j}$ é um polinômio de grau menor ou igual a $(2m-1)$, para $j = 1, 2, \dots, n$. Maiores detalhes podem ser vistos em [14].

CAPÍTULO II: GENERALIDADES SOBRE PROBLEMAS MAL POSTOS

2.1 INTRODUÇÃO

A imperativa necessidade de resolução de problemas conectados com diversas áreas das ciências naturais e/ou engenharia [11], [53], tem impulsionado nas últimas três décadas o desenvolvimento de um novo ramo da Matemática dedicado ao estudo e solução dos chamados problemas mal postos. A noção deste tipo de problema foi introduzida por Hadamard em 1902 em conexão com o estudo de problemas de valor na fronteira, com a idéia que nenhum fenômeno natural poderia ser refletido por algum modelo que conduza a esta classe de problemas; posteriormente comprovou-se a falsidade de tais idéias.

A teoria geral e métodos para resolver problemas mal postos foram assentados por A. Tikhonov [54], no tratamento de problemas inversos em física matemática, e posteriormente desenvolvidos por ele mesmo, Lavrent'ev [27], Ivanov [24], e outros. A bibliografia básica relacionada com o estudo dos métodos de solução desta classe de problemas pode ser encontrada em [30], [36], [52].

Neste capítulo apresentamos as principais idéias e certas características dos chamados problemas mal postos, assim como alguns comentários com respeito aos métodos para resolvê-los. Antes, devido à estreita relação entre problemas inversos e problemas mal postos, introduziremos algumas considerações relacionadas com problemas inversos.

2.2 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE PROBLEMAS INVERSOS

Problemas inversos aparecem em diversos campos das ciências aplicadas, por exemplo, na interpretação de medições de instrumentos físicos, pertinentes a algum objeto natural desconhecido, ou no processamento de resultados de experimentos correspondentes a fenômenos naturais. Na prática, o resultado de experimentos são apresentados na forma de funções de valor real chamadas funções dados. Com esta informação, através de um adequado processamento da função dados tem-se o propósito de estimar valores de alguma característica física ou geométrica do objeto motivo da experimentação, que também é identificado com outra função de valor real.

A conexão entre o processo físico e sua modelagem matemática é descrita por meio de equações do tipo:

$$(2.1) \quad Ax = y$$

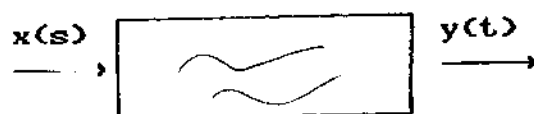
onde A é um operador conhecido, possivelmente não linear, x é a função objeto desconhecida, e y a função dados. Assume-se em geral que estas funções são elementos de espaços normados X e Y , chamados espaço de soluções e espaço de dados respectivamente. O Problema Inverso consiste em determinar a função objeto x sendo conhecida a função y ; em outras palavras, o problema corresponde à inversão do operador. Se A tem inversa conhecida, o problema é resolvido fazendo:

$$(2.2) \quad x = A^{-1}(y).$$

Porém, a determinação explícita do operador inverso não é útil se a função dados y não pertence ao domínio de definição de tal operador, já que (2.2) não resolve o problema. Este fato é frequente quando a função dados provém da leitura de

instrumentos físicos, portanto, carentes de precisão absoluta. Logo, somos forçados a trabalhar com dados aproximados y_δ como em (3), onde δ é determinado pela precisão do instrumento, e a escolha da norma é feita tomando em conta considerações intimamente relacionadas com o tipo de processo natural, sendo as mais usuais: $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$, já que geralmente dispomos de estimativas para o erro quadrático medio, ou para o máximo erro nas medições.

O processo de leitura de instrumentos físicos pode ser descrito pela figura:



Onde para cada sinal de entrada $x(s)$, uma função $y(t)$ é registrada na saída do instrumento. Em casos simples, estas funções, podem ser relacionadas pelo seguinte modelo linear invariante no tempo:

$$(2.3) \quad Ax(t) = \int_c^t \psi(t-s)x(s)ds = y(t),$$

onde $\psi(t)$ chamada *função transição*, caracteriza a operação do instrumento [17]. Teoricamente $\psi(t)$ é a função registrada pelo instrumento quando o sinal de entrada é a função generalizada $\delta(t)$. Logo, o problema de interpretação de leitura de instrumentos físicos reduz-se à resolução de (2.3).

Outro tipo de problema inverso aparece quando conhecemos a entrada x e saída y para um sistema físico. Considerando que sistemas físicos são descritos por operadores (diferenciais, integrais, etc.), contendo um número finito de parâmetros,

então, se a entrada e saída são dadas, deseja-se determinar o sistema paramétrico $A(p)$ que concorda melhor com a relação de entrada e saída. Aqui, p é usado para representar um vetor de parâmetros. Matematicamente, dadas x, y em X e Y respectivamente, queremos determinar o vetor p tal que:

$$A(p)x = y$$

Este tipo de problema é conhecido como *problema de identificação de parâmetros*, e seu tratamento em geral é mais difícil e delicado que o do caso anterior. O exemplo mais simples para esta classe de problema, aparece na teoria de aproximação de funções, quando temos uma tabela de dados x_i/y_i e queremos encontrar a função f que melhor simula tais dados. Neste trabalho, não trataremos problemas deste tipo, isto é, vamos nos referir sempre a problemas do tipo anterior.

No processo de resolução de um problema inverso, tem que ser feita uma análise prévia com relação a questões de existência, unicidade e estabilidade de soluções. Isto é importante pois, se a função dados não pertence ao espaço imagem do operador, (2.1) não tem solução. Ainda que isto não aconteça, se A é não injetor então A^{-1} não existe e (2.1) pode ter muitas soluções. Com relação à questão de estabilidade, precisamos saber se a solução depende continuamente dos dados. A estabilidade é necessária se desejamos assegurar que pequenas variações nos dados conduzem a pequenas mudanças na solução. Estas considerações são analisadas no contexto de Problemas Mal Postos apresentado na seguinte seção.

2.3 PROBLEMAS MAL POSTOS E SUA RELAÇÃO COM PROBLEMAS INVERSOS

Diz-se que o problema de resolver a eq. (2.1) é *Bem Posto no Sentido de Hadamard*, se as seguintes condições são

satisfeitas:

- a) A solução existe para $\forall y \in Y$.
- b) A solução é única.
- c) A solução depende continuamente dos dados, isto é, a aplicação $A^{-1}:Y \rightarrow X$ é contínua.

Se alguma das condições falha, o problema é chamado *mal posto*. Enquanto que, se falha c), o problema é chamado *instável*.

A propriedade de ser bem posto para a equação (2.1) depende dos espaços X , Y e suas topologias, daí que, se o problema (2.1) é mal posto, em alguns casos é possível restaurar a propriedade de ser bem posto para o problema, por uma adequada mudança dos espaços (ou de algum deles) e/ou suas topologias. Para isto será suficiente escolher subespaços U , V em X e Y respectivamente, dotando esses subconjuntos de topologias diferentes das originais de tal forma que o operador inverso $A^{-1}:V \rightarrow U$ seja contínuo. É um fato que a escolha das novas topologias não pode ser feita por considerações puramente matemáticas. Pelo contrário, esta escolha deverá ser coerente com as considerações físicas tomadas em conta na formulação do modelo matemático que levou à eq. (2.1). Mais tarde, no exemplo número três, ilustraremos este tipo de artifício matemático, ressaltando os riscos aos quais estamos sujeitos.

Por outro lado, é importante destacar que dependência contínua da solução com respeito aos dados é uma condição necessária mas não suficiente. Assim, no caso de um problema bem posto, a propagação do erro relativo na solução com respeito ao erro relativo nos dados é controlada pelo número de condição do operador [28]: $k(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$. Com relação a isto, se em vez de trabalhar com a equação considerando dados

exatos, resolvemos o sistema perturbado:

$$(2.3) \quad A(x+\delta x) = y+\delta y$$

temos que:

$$(2.4) \quad \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq k(A) \frac{\|\delta y\|}{\|y\|}$$

onde δy é a variação nos dados, e δx é a variação na solução. Daqui, se $k(A)$ é pequeno, diz-se que o problema (2.1) é *bem condicionado* e a solução é estável com respeito a pequenas variações nos dados. Pelo contrário, se $k(A)$ é grande, diz-se que o problema é *mal condicionado* e o problema é instável. Claramente, o conceito de ser bem ou mal condicionado é menos preciso que o conceito de ser bem ou mal posto.

ALGUNS EXEMPLOS

Exemplo N^o 1: (O Exemplo Típico)

Corresponde a equações integrais de primeira espécie:

$$Ax(s) = \int_a^b k(s,t)x(t)dt = y(s) \quad c \leq s \leq d,$$

onde existência e unicidade de soluções em ambos os sentidos clássico ou generalizado, geralmente não é garantida. Assim por exemplo, se A é o operador integral definido pelo núcleo $k(s,t) \in C([a,b] \times [c,d])$ e $x \in L^2(a,b)$, então $Ax(s) \in C[c,d]$. Consequentemente, a equação $Ax = y$ não tem solução em $L^2(a,b)$ se $y(s)$ não for contínuo. Por outro lado, a equação:

$$\int_{-\pi}^{\pi} s \operatorname{Sen}(t)x(t)dt = y(s), \quad -\pi \leq s \leq \pi$$

tem infinitas soluções ($N(A)$ tem dimensão infinita). Ainda quando as situações anteriores não aconteçam, salvo o caso de núcleo degenerado, o problema é instável, já que o operador A^+ (ou A^{-1} se ele existe), pelo teor. 1.3.18 é sempre descontínuo.

Exemplo N^o 2: (Problema de Cauchy para Equação de Laplace)

Dado o seguinte problema de valor inicial

$$P : \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 & , (s,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \quad (a) \\ u(s,0) = 0, \quad \frac{\partial u(s,0)}{\partial t} = w(s) , s \in \mathbb{R} & (b) \end{cases}$$

Deseja-se determinar $u(s,t)$ para $s > 0$, considerando (b) como dados de entrada. Não é difícil verificar que o problema é mal posto. Para isto, tomemos:

$$w(s) = w_n(s) = n^{-1} \text{Sen}(ns) \quad s \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

por outro lado, tomemos também:

$$\bar{w}(s) = \bar{w}(s) = 0, \quad s \in \mathbb{R}$$

Com estas funções de entrada, encontram-se as soluções:

$$u_n(s,t) = n^{-2} \text{Sen}(ns) \text{Senh}(nt), (s,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

$$\bar{u}(s,t) = 0, \forall (s,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

respectivamente. Agora, prova-se que $w_n \rightarrow \bar{w}$ uniformemente, enquanto que u_n não converge a $\bar{u}$, isto é, a solução não depende continuamente dos dados, portanto o problema é mal posto.

Exemplo N^o 3: (Transformando um problema mal posto em um problema bem posto via mudança de espaços)

Seja $X \subset L^2(\mathbb{R})$, o conjunto de funções munido da norma:

$$\|x\| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + s^{-2}) |\bar{x}(s)|^2 ds ,$$

onde

$$\bar{x}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ist} x(t) dt , \text{ com } i^2 = -1$$

é a transformada de Fourier da função $x(t)$. Se $Y = L^2(\mathbb{R})$, seja

$A: X \rightarrow Y$, o operador definido por:

$$(2.5) \quad Ax(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du$$

Agora, para cada $y \in Y$, deseja-se resolver o problema inverso

$$Ax = y$$

Vemos que, se a função dada y é diferenciável, a solução do problema é dada por $x = y'$, caso contrário o problema não admite solução. Consequentemente o problema é mal posto. Porém, se reformulamos o problema, tomando como espaço de chegada $V = H^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$, com a topologia induzida pela norma:

$$\|u\| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (1+s^2) |\bar{u}(s)|^2 ds$$

isto é, considerando $A: X \rightarrow V$, como definido (2.5), então prova-se que o problema reformulado é bem posto. Vejamos: a) e b) se verificam facilmente, enquanto que, para verificar c), usando as propriedades [42]:

$$i) \quad \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \quad (\text{Igualdade de Plancherel})$$

$$ii) \quad \bar{u}'(t) = i s u(\bar{s}) \quad (\text{Transformada da derivada})$$

onde i é a unidade complexa imaginária

prova-se que: $\|Ax\|_{H^1(\mathbb{R})} = \|x\| \quad \forall x \in X$, isto é, o operador A é uma isometria, portanto o operador inverso $A^{-1}: V \rightarrow X$ é contínuo, logo o problema reformulado é bem posto.

Análise de estabilidade para o problema reformulado

Suporemos que contamos unicamente com dados perturbados $y_\delta(s)$, tais que:

$$y_\delta(s) = y(s) + \delta y(s)$$

onde $\delta y(s)$ é considerado como perturbação da função dados. Se:

$\delta y(s) = \delta \phi(s) \cos(s/\delta^2)$, com $\phi(s) \in H^1(\mathbb{R})$, $|\phi(s)| \leq 1$, $\forall s \in \mathbb{R}$, temos o seguinte:

a') Para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, $\delta y(s)$ é uma função fortemente oscilante que assume valores pequenos, portanto, pode perfeitamente ser considerada como uma pequena perturbação.

$$b') \quad \|\delta y\|_{L^2(\mathbb{R})} = o(\delta)$$

$$c') \quad \|\delta y\|_{H^1(\mathbb{R})} = o(\delta^{-1})$$

Nestas condições, usando c') em (2.4), vemos que o limitante do erro relativo da solução, cresce à medida que $\delta \rightarrow 0$. Consequentemente, qualquer tentativa de controle de estabilidade na solução do problema, com esta classe de dados na topologia de $H^1(\mathbb{R})$ é estéril. Este fato é devido a que, para este exemplo, a topologia de $H^1(\mathbb{R})$, não permite uma apropriada descrição do efeito das perturbações.

A transformação de um problema mal posto em problema bem posto via mudança do espaço de chegada, deve levar em conta uma correta descrição do efeito de perturbações nos dados. Na nova topologia, é desejável que:

$$\|\delta y\| = \|y_\delta - y\| \leq \delta, \quad \delta > 0.$$

Exemplo N^o 4: (O Problema de Diferenciação)

Se $y(s)$ é uma função conhecida aproximadamente, por exemplo em forma de tabela, deseja-se determinar a derivada n-ésima $y^{(n)}(s)$. O problema pode ser resolvido, determinando a solução da equação:

$$\int_{t_0}^t \frac{1}{(n-1)!} (t-s)^{(n-1)} x(s) ds = y(t)$$

já que a solução para este problema é: $x(t) = y^{(n)}(s)$. Neste caso, o problema é mal posto pois trata-se de uma equação

integral de primeira espécie.

Exemplo N^o 5: (Equação do Calor para tempo anterior)

A distribuição de temperatura U em uma barra estendida ao longo do intervalo $0 \leq s \leq \pi$, satisfazendo:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} & 0 \leq s \leq \pi \\ U(0,t) = U(\pi,t) = 0, & t > 0 \\ U(s,0) = x(s) & 0 \leq s \leq \pi \end{array} \right.$$

pode ser obtida usando o método de separação de variáveis. Feito isto, para cada $t > 0$ temos:

$$U(s,t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} a_n \text{Sen}(ns), \quad a_n = \int_0^{\pi} x(r) \text{Sen}(nr) dr$$

Agora, supondo que U é conhecida no tempo $t = T$, digamos $U(s,T) = y(s)$, deseja-se determinar a distribuição da temperatura inicial $U(s,0) = x(s)$. Para isto, evidentemente devemos resolver a seguinte equação:

$$\int_0^{\pi} k(s,r) x(r) dr = y(s) \quad 0 \leq s \leq \pi$$

onde:

$$k(s,r) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 T} \text{Sen}(ns) \text{Sen}(nr)$$

Considerando que o núcleo $k(s,r)$ não é degenerado, o problema de determinar a distribuição de temperatura inicial é mal posto (ver teor. 1.3.10).

Uma grande quantidade de problemas mal postos aparecem quando resolvemos problemas inversos das ciências naturais, que quase todos os problemas inversos lineares que caem no modelo matemático padrão (2.1), são mal postos.

Exemplo imediato para este modelo é refletido em problemas de valor na fronteira não estandarizados (Ex. N^o 5), problemas de inversão da transformada de Laplace, entre outros.

A teoria que estuda os métodos de resolução de problemas mal postos é conhecida como *Teoria de Regularização*, enquanto que os métodos são chamados *Métodos de Regularização*. Intuitivamente, a teoria de regularização é a teoria das "aproximações contínuas" para a inversa descontínua, portanto, a análise e solução de um problema mal posto, é feita via solução de um problema associado que é bem posto. Tendo em conta que as possíveis causas para que o problema de resolver (2.1) seja mal posto são:

$$(2.6) \quad N(A) \neq \{0\},$$

$$(2.7) \quad R(A) \neq Y \text{ e}$$

$$(2.8) \quad A^{-1} \text{ existe mas é descontínua,}$$

estudam-se métodos de regularização considerando os seguintes casos:

1^o Problemas mal postos como consequência de não existência ou ambiguidade na solução.

Neste caso, tenta-se a transformação do problema em problema bem posto introduzindo a mudança do conceito de solução que considera soluções de quadrados mínimos (SQM) para (2.1). Neste novo contexto, transformar o problema em problema bem posto, exige uma análise com relação a existência, unicidade e estabilidade da solução de quadrados mínimos de norma mínima. Para equações integrais de primeira espécie com núcleo não degenerado, o problema de mal posicionamento persiste ainda neste novo contexto, já que $R(A)$ é aberto. Ver cor. 1.3.7 e teor. 1.3.18. Mais adiante, nos caps. III-IV,

trataremos do problema de calcular soluções generalizadas aproximadas estáveis para (2.1).

2^o Problemas mal postos como consequência de instabilidade

Aqui, admitimos a existência do operador inverso $A^{-1}:R(A) \rightarrow X$, mas não sua continuidade. Neste caso, os métodos de regularização visam a restauração da continuidade do operador inverso girando em torno das seguintes idéias:

- Revisão do conceito de ser bem posto [30].
- Restrição das soluções admissíveis por informação a priori. Por exemplo, por imposição de limitantes a priori na solução.
- Construção de soluções aproximadas estáveis por métodos variacionais.
- Análise do problema via associação com um problema bem posto [27].
- Mudança dos espaços e/ou topologias. Ver Ex. N^o 3.

Na prática, a restauração de estabilidade exige informação a priori com respeito às características qualitativas da solução do problema. Por informação a priori, entende-se o tipo de informação que é obtida independentemente dos valores dos dados observados, isto é, informação não contida na equação $Ax = y$. Informação a priori geralmente é organizada em subconjuntos do espaço de soluções, impondo certas exigências nas soluções tais como:

- Requerimentos de monotonicidade:
 $x'(t) \geq 0, \quad x'(t) \leq 0.$
- Requerimentos de convexidade:

$$x''(t) \geq 0.$$

- Requerimentos de regularidade:

$$\int_a^b x'(t) dt \leq M, \quad M > 0, \text{ etc.}$$

Se K é um subconjunto de possíveis soluções, então um procedimento para construir soluções aproximadas para problemas mal postos, considera a resolução do problema reformulado:

$$(2.9) \quad P: \text{ Encontrar } x \in K \subset X, \text{ tal que } \|Ax - y_\delta\| < \delta.$$

Encerramos esta seção apresentando em forma sucinta os seguintes métodos variacionais:

O método de Quase Soluções

Para este método precisa-se de um certo conjunto $K \subset X$ contendo a solução do problema. Introduz-se a noção de Quase Solução em K , dizendo que $\bar{x}$ é quase solução para (2.1) se:

$$\|\bar{A}\bar{x} - y_\delta\| = \inf \{ \|Ax - y_\delta\|, x \in K \}$$

Se $A \in B(X, Y)$ onde X e Y são espaços de Banach, existência e unicidade de quase soluções $\forall y \in Y$ é garantida, desde que K seja compacto e convexo. Ainda mais, a quase solução $\bar{x}_\delta$ associada a y_δ depende continuamente de y_δ , e se $y \in R(A)$, a quase solução associada coincide com a solução clássica. Ver [35], teor. 2.9 pag. 27, [53]. Observar que o conceito de quase solução está intimamente relacionado com a noção de soluções de quadrados mínimos.

O Método de Regularização de Tikhonov

Foi proposto para equações do tipo (2.1) considerando

operadores não necessariamente lineares definidos entre espaços métricos X, Y . Em forma breve, o método consiste em tomar como soluções aproximadas para (2.1), as funções x_α que minimizam o funcional:

$$F_\alpha(x, y) = \rho^2(Ax, y) + \alpha\Omega(x), \quad \alpha > 0$$

para um valor adequado de α chamado parâmetro de regularização, onde ρ é a métrica em Y e $\Omega(x)$ é um funcional contínuo, definido num subespaço denso V em X , satisfazendo certas propriedades a serem precisadas mais tarde. O funcional $\Omega(x)$ toma o nome de funcional estabilizador. Detalhes do método serão estudados no capítulo seguinte.

O Método Residual

Seja:

$$J_\delta = \{x \in X, \rho(Ax, y_\delta) \leq \delta\}$$

O método constrói soluções aproximadas estáveis, tomando as funções x_δ que minimizam o funcional estabilizador $\Omega(x)$ no conjunto J_δ .

Os métodos descritos se inter-relacionam estreitamente. Uma análise disto pode ser vista em [30].

CAPITULO III: O MÉTODO DE REGULARIZAÇÃO

Neste capítulo, introduzimos as idéias básicas do método de regularização para resolver problemas mal postos, baseando-nos na noção de operador regularizante. Em particular, consideramos uma classe geral de métodos de regularização para equações a operador de primeira espécie, que envolvem operadores compactos, e que incluem o método de regularização de Tikhonov como caso especial. Para isto, introduzimos previamente o método na sua forma original, isto é, no contexto de métodos variacionais, onde consideraremos o problema de construção de soluções aproximadas estáveis em ambos os sentidos: clássico e/ou generalizado.

Apresentamos resultados de convergência e estimativas de erro para as soluções aproximadas construídas pelo método, explorando idéias e resultados da análise espectral para operadores compactos em espaços de Hilbert.

3.1 GENERALIDADES

Consideremos a seguinte equação a operador:

$$(3.1) \quad Ax = y$$

onde A é um operador não necessariamente linear, e X, Y são espaços métricos com métricas ρ_x e ρ_y respectivamente. Admitiremos que em vez de y , contamos com dados aproximados y_δ satisfazendo:

$$(3.2) \quad \rho_y(y, y_\delta) \leq \delta, \quad \delta > 0$$

Admitiremos também a existência do operador inverso $A^{-1}:R(A) \rightarrow X$ mas não sua continuidade, de maneira que para cada y em $R(A)$, (3.1) admite solução única mas não depende continuamente de y , isto é, (3.1) é mal posta.

Nas considerações anteriores, mesmo que $y_\delta \in R(A)$, não temos certeza de que a solução $x_\delta = A^{-1}(y_\delta)$ seja uma aproximação aceitável para a solução exata do problema. Seria desejável que, se $y_\delta \rightarrow y$ quando $\delta \rightarrow 0$, então $x_\delta \rightarrow x$. Como já sabemos, este fato acontecerá só no caso em que x_δ for construído por algum método estável de aproximação. No que segue, apresentamos uma forma de construção de soluções aproximadas estáveis para (3.1), via construção de operadores regularizantes. Com este fim, diz-se que um operador $R_\alpha:Y \rightarrow X$ dependendo de um parâmetro α é operador regularizante para a equação (3.1) (ou para a solução de (3.1)), se:

$$(3.3) \quad \begin{cases} \text{i) } \forall \alpha > 0, R_\alpha \text{ é contínuo.} \\ \text{ii) } \forall x \in X, \lim_{\alpha \rightarrow 0} \rho_x(R_\alpha Ax, x) = 0. \end{cases}$$

Temos imediatamente que, se R_α é um operador regularizante para (3.1), i) e ii) garantem que R_α é uma aproximação contínua para A^{-1} . Consequentemente para cada y em $R(A)$, $R_\alpha(y)$ é uma aproximação contínua para a solução x . Ainda na presença de dados perturbados, com $y \in Y_\delta$ satisfazendo (3.2), graças à continuidade de R_α , é possível determinar o parâmetro α como função de δ , de tal maneira que a função $x_\alpha^\delta = R_\alpha(y_\delta)$ esteja suficientemente próxima à solução de (3.1). O parâmetro α é chamado *parâmetro de regularização* enquanto que a função x_α^δ é conhecida como solução regularizada. Segue, portanto, que todo operador regularizante junto com a escolha do parâmetro de regularização adaptado ao erro dos dados de entrada, define um método estável de construção de soluções aproximadas para

(3.1).

Um método de regularização consiste na escolha de um operador regularizante R_α e do parâmetro α como função de δ : $\alpha = \alpha(\delta)$, tais que:

$$R_{\alpha(\delta)}(y_\delta) = x_\alpha^\delta \rightarrow x \text{ quando } \delta \rightarrow 0.$$

Operadores regularizantes são facilmente construídos, usando métodos variacionais em combinação com a noção de funcionais estabilizadores. Se V é um subespaço denso de X (podendo ser $V = X$), um funcional contínuo não negativo $\Omega: V \rightarrow \mathbb{R}$ é chamado *funcional estabilizador*, se as seguintes propriedades são satisfeitas:

$$(3.4) \quad \begin{cases} \text{i) A solução de (3.1) está no domínio de } \Omega(x). \\ \text{ii) } \forall d > 0, \text{ o subconjunto } K = \{x \in V / \Omega(x) \leq d\} \\ \text{é compacto em } X. \end{cases}$$

Agora, seja:

$$(3.5) \quad J_\delta(y_\delta) = \{x \in X / \rho_y(Ax, y_\delta) \leq \delta\}$$

Num primeiro instante, pensa-se neste conjunto como um potencial candidato para o conjunto de possíveis soluções de (3.1), mas esta idéia é abandonada pois $J_\delta(y_\delta)$ não é limitado devido à não continuidade de A^{-1} , ou seja, elementos arbitrários deste conjunto não garantem uma boa aproximação para a solução de (3.1). Logo, torna-se necessário um princípio de seleção para as possíveis soluções. A escolha certa será, sem dúvida alguma, aquela que toma os elementos de $J_\delta(y_\delta)$ que dependem continuamente da variação dos dados y_δ .

Se $V_\delta = V \cap J_\delta(y_\delta)$, um operador regularizante para (3.1) é construído tomando em V_δ o elemento x_δ que minimiza o funcional $\Omega(x)$. Isto pode ser visto pensando na associação

$y_\delta \rightarrow x_\delta$, como sendo o efeito de um operador R_δ tal que $R_\delta(y_\delta) = x_\delta$. Prova-se que o operador assim construído é verdadeiramente um operador regularizante (ver [52], pag. 50). Em resumo, o método considera a resolução do seguinte problema:

$$(3.6) \quad P_1: \begin{cases} \text{Min } \Omega(x) \\ \text{s/a } x \in V_\delta \end{cases}$$

O método descrito apresenta dificuldades na resolução numérica do problema variacional, logo, precisa-se pensar em alguma reformulação.

Se $V_0 = \{x_0 \in V / \Omega(x_0) = \inf \Omega(x), x \in V\}$, diz-se que um funcional $\Omega(x)$ é *quase monótono*, se $\forall x \in V, x \notin V_0$, existe uma vizinhança V_x contendo x_1 tal que $\Omega(x_1) < \Omega(x)$. Prova-se que, se $\Omega(x)$ é quase monótono tal que $V_0 \cap V_\delta = \emptyset$, isto é, se o extremo inferior irrestrito de $\Omega(x)$ é atingido em um ponto $x_0 \notin V_\delta$, então o extremo inferior do funcional restrito a V_δ é atingido em um elemento x_δ que está na fronteira de V_δ . Portanto, podemos reformular o problema variacional (3.6), passando ao seguinte problema de minimização com restrições:

$$(3.7) \quad P_2: \begin{cases} \text{Min } \Omega(x) \\ \text{s/a } \rho_y(Ax, y) = \delta \end{cases}$$

Agora, usando o método de multiplicadores de Lagrange [31], o problema é:

$$(3.8) \quad P_3: \text{Min } F_\alpha(x) = \rho_y^2(Ax, y_\delta) + \alpha \Omega(x)$$

com α sujeito à condição: $\rho_y(Ax_\alpha^\delta, y_\delta) = \delta$, onde x_α^δ é o elemento que minimiza $F_\alpha(x)$.

Nas considerações do problema (3.8), também podemos pensar em x_α^δ como efeito de um operador R_α aplicado aos dados y_δ , de modo que $x_\alpha^\delta = R_\alpha(y_\delta)$.

Na prática, operadores regularizantes são construídos adotando o seguinte esquema:

- (3.9)
- 1^o Construir o funcional F_α .
 - 2^o Encontrar x_α^δ que minimiza $F_\alpha(x)$, montando uma estratégia de escolha do parâmetro α como função do erro δ , tais que, se $\delta \rightarrow 0$, então $\alpha = \alpha(\delta) \rightarrow 0$ e, consequentemente, $x_\alpha^\delta \rightarrow x^+$.

O método que acabamos de descrever é conhecido como O *Método de Regularização de Tikhonov*, enquanto que o funcional $F_\alpha(x)$ é chamado *funcional de Tikhonov*. A existência do elemento x_α^δ que minimiza $F_\alpha(x)$ é garantida para todo $\alpha > 0$, desde que o operador $A: X \rightarrow Y$ seja contínuo. A questão de unicidade é mais delicada; porém, é possível estabelecer condições suficientes para que isto ocorra. Assim, se A é um operador linear e contínuo, X, Y são espaços de Hilbert e $\Omega(x)$ é um funcional quadrático, então garante-se a unicidade do minimizador x_α^δ . A questão de existência pode ser vista em [52], enquanto que a questão da unicidade será comentada mais tarde.

Algumas considerações com respeito ao funcional estabilizador

A eficiência da regularização por meio do funcional estabilizador depende da coordenação do funcional com a equação, da informação a priori com respeito à solução e da complexidade do problema de minimização. Portanto, vamos dar algumas sugestões, para facilitar a construção do funcional estabilizador para espaços concretos.

- 1^o Seja V um subconjunto do espaço métrico X tal que:
 - i) V admite uma métrica majorante ρ_V , isto é:

$\rho_x(u,v) \leq \rho_v(u,v)$ para cada $u, v \in V$.

ii) A bola $\rho_v(v, v_0) \leq d$ é compacta em X (na métrica de X).

Então um funcional estabilizador $\Omega: V \rightarrow \mathbb{R}$ é definido por:

$$\Omega(x) = \rho_v^2(x, 0) \quad \forall x \in V.$$

As condições i) e ii) se verificam, por exemplo, se tomamos $X = C[a, b]$ e $V = C^1[a, b]$ com as métricas:

$$\rho_x(u, v) = \sup \{ |u(t) - v(t)|, t \in [a, b] \}$$

$$\rho_v(u, v) = \sup \{ |u(t) - v(t)| + |u'(t) - v'(t)|, t \in [a, b] \}$$

ou, se tomamos X como antes e $V = H^p(a, b)$, com a métrica ρ_v definida por:

$$\rho_v(u, v) = \left\{ \int_a^b \left(\sum_{j=1}^p q_j(t) (D^j z)^2 \right) dt \right\}^{1/2}, \text{ com } z = u - v,$$

onde $q_j(t) > 0$ são funções contínuas em $[a, b]$,

já que em ambos os casos, ρ_v é majorante com relação a ρ_x , e a bola: $\rho_v(v, v_0) \leq d$, é compacta em X . Ver sec. 1.4.

2^o Se $A: X \rightarrow Y$ é compacto, linear e X, Y são espaços de Hilbert, com V sendo um subespaço denso em X que admite uma norma majorante tal que a bola $\|u\| \leq d$ é compacta em X , então podemos definir o funcional estabilizador $\Omega: V \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\Omega(x) = \|x\|_V^2$$

Em caso mais geral, se X, Y são espaços de Banach com V imerso compactamente e denso em X , então o funcional Ω pode ser definido por: (ver [27])

$$\Omega(x) = \varphi(\|x\|_V)$$

onde $\varphi(t)$ é uma função estritamente crescente $\forall t \geq 0$.

Com estas considerações, no que segue formularemos alguns esquemas de regularização:

Sejam X, Y espaços de Hilbert e $A: X \rightarrow Y$ um operador linear e contínuo. Suponhamos que a informação a priori não é suficiente para montar um compacto K em X que contenha a solução de (3.1). Contando unicamente com um conjunto de restrições K , convexo e fechado (se não houvessem restrições $K = X$), podemos considerar $\Omega(x) = \|x\|^2$ para cada $x \in X$ ($V = X$) com a observação que a compacidade dos conjuntos $\Omega(x) \leq d$, é satisfeita na topologia fraca, portanto, o seguinte funcional deve ser minimizado:

$$(3.10) \quad F_{\alpha}(x) = \|Ax - y_{\delta}\|^2 + \alpha \|x\|^2, \alpha > 0.$$

onde as restrições devem ser embutidas no processo de minimização. Se $K = X$, então, prova-se que (3.10) admite um único minimizador x_{α}^{δ} que satisfaz a seguinte equação:

$$(3.11) \quad (A^*A + \alpha I)x = A^*y_{\delta},$$

onde I é o operador identidade em X . Para ver isto, se $\varphi(t) = F_{\alpha}(x + tv)$ onde $t \geq 0$ e $v \in X$ é uma variação arbitrária para x , então o mínimo de F_{α} é determinado pela condição:

$$\begin{aligned} 0 = \varphi'(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{F_{\alpha}(x + tv) - F_{\alpha}(x)}{t} \right) \\ &= 2(A^*Ax - A^*y_{\delta} + \alpha x, v) \end{aligned}$$

isto é:

$$(3.12) \quad ((A^*A + \alpha I)x - A^*y_{\delta}, v) = 0 \quad \forall v \in X.$$

A unicidade segue do fato de F_{α} ser estritamente convexo. Além disso, temos:

$$\|(A^*A + \alpha I)x\| \geq \alpha \|x\| \quad \forall x \in X, \alpha > 0$$

logo pelo teor. 1.2.3:

$$(3.13) \quad \begin{cases} \text{i) O subespaço imagem de } (A^*A + \alpha I) \text{ é fechado} \\ \text{ii) } (A^*A + \alpha I)^{-1} \text{ é contínuo;} \end{cases}$$

consequentemente temos que $x_\alpha^\delta = (A^*A + \alpha I)^{-1} A^* y$, de modo que o operador regularizante construído pelo método é:

$$(3.14) \quad R_\alpha = (A^*A + \alpha I)^{-1} A^*, \alpha > 0$$

tendo que R_α é uma aproximação contínua para A^{-1} . Prova-se que, se a escolha do α é feita de modo que $\delta^2/\alpha \rightarrow 0$ quando $\delta \rightarrow 0$, então $x_\alpha^\delta \rightarrow x$ fortemente (ver [52], [53], teor. 2.12), notando que esta condição permite uma ampla opção na escolha de α . Diz-se que este tipo de escolha é *a priori*. Outro tipo de escolha para α pode ser feito segundo (3.8), isto é, neste contexto devemos tomar α de modo a satisfazer:

$$(3.15) \quad \|Ax_\alpha^\delta - y_\delta\| = \delta.$$

Escolhas como esta são de tipo *a posteriori*. Neste caso diz-se que α satisfaz o *princípio de discrepância*. Nós trataremos aqui unicamente com escolhas de tipo *a priori*.

Outro esquema de regularização é obtido considerando espaços de Hilbert X, Y, V , com V denso e compactamente imerso em X e o operador $A \in B(X, Y)$. Aqui, vamos considerar que a única informação *a priori* é no sentido da solução de (3.1) pertencer a V . Agora, sejam:

$I: V \rightarrow X$ o operador imersão de V em X

$J = I^* \in B(X, V)$ o adjunto de I

$A^* \in B(Y, X)$ o adjunto de $A \in B(X, Y)$

$A^\#$ o adjunto de $A \in B(V, Y)$

Logo, temos que: $A^\# = JA^*$. Usando o esquema (3.9), minimizamos o funcional:

$$(3.16) \quad F_{\alpha}(x) = \|Ax - y_{\delta}\|^2 + \alpha \|x\|_V^2, \quad \alpha > 0.$$

Mas, por (3.12), temos :

$$(3.17) \quad x_{\alpha}^{\delta} = (A^{\#}A + \alpha I)^{-1} A^{\#}y = (\alpha L + A^*A)^{-1} A^*y_{\delta}$$

onde $L = J^{-1}$, restando adotar uma estratégia de escolha para α . Podemos ilustrar este esquema com o seguinte exemplo:

Sejam $X = L^2(a,b) = Y$, seja também $A \in B(X,Y)$ um operador integral definido pelo núcleo $k(s,t)$. Logo, considere-se a seguinte equação integral:

$$Ax(t) = \int_a^b k(s,t)x(s)ds = y(t) \quad a \leq s \leq b$$

Agora, seja: $V = \{u \in L^2(a,b) / D^m u \in L^2(a,b), \quad m \geq 1\}$, com produto interno:

$$(u,v) = \int_a^b (uv + D^m u D^m v) dt$$

Temos que o operador $J \in B(X,V)$ é: $J = L^{-1}$, onde

$$\begin{aligned} Lu &= (-1)^m D^{2m} u + u \\ D^k u(a) &= D^k u(b) = 0, \quad k = m, (2m-1). \end{aligned}$$

Portanto, o método de Tikhonov considera a resolução do problema:

$$(3.18) \quad \begin{cases} (\alpha L + A^*A)u = A^*y_{\delta} \\ D^k u(a) = D^k u(b) = 0, \quad k = m, \dots, (2m-1) \end{cases}$$

$$\text{com:} \quad A^*v(s) = \int_a^b k(t,s)v(t)dt$$

Tikhonov [51] usou um esquema parecido para resolver a equação integral acima definida, considerando $X = C[a,b]$, $Y = L^2(a,b)$ e $V = H^1(a,b)$, ou seja $m = 1$. Com esta escolha, o problema

(3.18) se reduz a resolver a seguinte equação integro-diferencial:

$$(3.19) \quad \begin{cases} \int_a^b \bar{k}(s,r)x(r)dr - \int_a^b k(r,s)y(r)dr + \alpha[x(s)-x''(s)] = 0 \\ x'(a) = x'(b) = 0, \end{cases}$$

$$\text{com } \bar{k}(s,r) \text{ definido por: } \bar{k}(s,r) = \int_a^b k(t,s)k(t,r)dt$$

O problema (3.19) pode ser considerado como resultado de um esquema de regularização, envolvendo unicamente dois espaços.

Para ver isto, seja:

$$V = \{u / u \in H^2(a,b), u'(a) = u'(b) = 0\} \subset L^2(a,b)$$

onde $H^2(a,b)$ é o conhecido espaço de Sobolev de ordem 2.

Agora, tomemos $X = \bar{V}$ segundo a topologia de $H^1(a,b)$, tomando o funcional estabilizador como $\Omega(x) = \|x\|_1^2$, onde $\|\cdot\|_1$ é a norma em $H^1(a,b)$. Desta maneira, o esquema de regularização, implica em minimização do funcional (3.10) cuja solução é determinada de (3.11).

Construção de aproximações estáveis para x^+

Agora trataremos o problema de construir soluções aproximadas estáveis para a solução generalizada x^+ de (3.1).

Evidentemente, supomos que $A \in B(X,Y)$, $N(A) \neq \{0\}$, e $R(A) \neq Y$ aberto, de maneira que o problema é mal posto. O procedimento de construção também será via operadores regularizantes. Com este fim, diz-se que um operador R_α é regularizante para a solução generalizada de (3.1), se:

$$(3.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } R_{\alpha}: Y \longrightarrow X \text{ é contínua } \forall \alpha > 0. \\ \text{ii) Para qualquer } y \text{ em } Y \text{ tal que } P_y \in R(A) \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|R_{\alpha}Ax - x\| = 0, \forall x \in N(A)^{\perp} \end{array} \right.$$

onde P é a projeção ortogonal de X sobre o fecho de $R(A)$.

Temos que o operador $R_{\alpha}A: X \longrightarrow X$ é uma aproximação contínua da projeção ortogonal sobre $N(A)^{\perp}$ ou da identidade se A for injetor. Agora, como em (3.5), seja:

$$(3.21) \quad J_{\delta}(y_{\delta}) = \{x \in N(A)^{\perp} \subset X / \|Ax - y_{\delta}\| < \delta\}.$$

Seguindo um procedimento análogo ao caso de construção de aproximações estáveis para a solução clássica, minimizamos o funcional estabilizador $\Omega(x) = \|x\|^2$ no conjunto (3.21). Como o mínimo absoluto de $\Omega(x)$ é atingido em $x = 0 \notin J_{\delta}(y_{\delta})$, então o mínimo de Ω restrito a (3.21) é atingido em um elemento que está na fronteira de $J_{\delta}(y_{\delta})$, portanto, podemos formular o seguinte problema de minimização sem restrições:

$$(3.22) \quad \min_{x \in X} \left\{ \|Ax - y_{\delta}\|^2 + \alpha \|x\|^2, \alpha > 0 \right\}$$

onde α satisfaz o critério de discrepância.

Cabe destacar o seguinte:

- A função que minimiza (3.22): $x_{\alpha}^{\delta} \in N(A)^{\perp}$. Isto pode ser visto usando (3.11) e (1.20).
- Prova-se que x_{α}^{δ} realmente converge a x^+ quando $\delta \rightarrow 0$. Ver [05] teor. 5.1.
- O operador regularizante : $R_{\alpha} = (A^*A + \alpha I)^{-1}A^*$ serve como aproximante, tanto para a inversa como para a inversa generalizada de A , conforme o caso.

Consequentemente, se $A \in B(X, Y)$ onde X, Y são espaços de Hilbert, podemos seguir o procedimento (3.9) para construir

soluções generalizadas aproximadas estáveis. Em resumo, seguiremos o seguinte método para construir soluções aproximadas para problemas mal postos (3.1) em ambos os sentidos, clássico ou generalizado:

1^o Minimizar o funcional de Tikhonov

$$F_{\alpha}(x) = \|Ax - y\|^2 + \alpha \|x\|^2, \alpha > 0.$$

2^o Tomar como solução aproximada x_{α}^{δ} obtida resolvendo (3.11), montando uma estratégia de escolha do $\alpha = \alpha(\delta)$, tal que: se $\delta \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$ e $x_{\alpha}^{\delta} \rightarrow x^{+}$.

3.2 ANÁLISE DO MÉTODO VIA TEORIA ESPECTRAL

Daqui em diante trataremos unicamente com operadores compactos definidos entre espaços de Hilbert. Neste contexto, via uma adequada indução e operadores regularizantes, vamos introduzir uma classe geral de métodos de regularização que envolvem o método de Tikhonov de modo particular. Para este fim, se $A \in B(X, Y)$, observamos o seguinte:

- i) O regularizador de Tikhonov $R_{\alpha} = (A^{*}A + \alpha I)^{-1}A^{*}$ pode ser escrito como: $R_{\alpha} = U(\alpha, A^{*}A)A^{*}$, onde $U(\alpha, A^{*}A)$ é o operador induzido via teoria espectral como em (1.16) pela função contínua: $U(\alpha, t) = (t + \alpha)^{-1}$, $t \geq 0$, $\alpha > 0$.
- ii) $U(\alpha, t) \rightarrow t^{-1}$ quando $\alpha \rightarrow 0$.

Logo, podemos pensar em operadores contínuos $R_{\alpha}: Y \rightarrow X$ que aproximam A^{+} (ou A^{-1}) induzidos por outras funções contínuas que satisfaçam ii), respeitando a condição:

$$R_{\alpha} y = U(\alpha, A^{*}A)A^{*}y \rightarrow A^{+}y = x^{+} \text{ quando } \alpha \rightarrow 0, \forall y \in D(A^{+})$$

Portanto, precisa-se impor condições sob as quais funções contínuas induzam operadores regularizantes. Uma função contínua $U(\alpha, t): (0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é regularizante se:

$$(3.23) \quad i) \lim_{\alpha \rightarrow 0} U(\alpha, t) = \frac{1}{t} \text{ para cada } t > 0.$$

ii) Existe $C > 0$ tal que

$$(3.24) \quad |tU(\alpha, t)| \leq C, \text{ para } \alpha > 0, t \geq 0.$$

Com relação a $U(\alpha, t)$, introduz-se a função $r(\alpha)$ definida por:

$$r(\alpha) = \text{Sup } \{|U(\alpha, t)| \mid t \in [0, \|A\|^2]\},$$

esta função satisfaz $r(\alpha) \rightarrow +\infty$ quando $\alpha \rightarrow 0$. Claramente, o operador $R_\alpha = U(\alpha, A^*A)A^*$ é contínuo. O seguinte teorema mostra que R_α é regularizante.

Teorema 3.2.1 (Convergência)

Se R_α é uma família de operadores contínuos de Y em X induzidos por uma função regularizante em $[0, \|A\|^2]$, então $\|R_\alpha y - x^+\| \rightarrow 0$ quando $\alpha \rightarrow 0$, para cada $y \in D(A^+)$.

A prova do teorema se baseia no teorema espectral (teor. 1.3.14) e (1.21), ver [16].

Taxas de convergência

Para estabelecer taxas de convergência, que são importantes por fornecerem informações sobre a precisão das aproximações, precisamos caracterizar o conjunto de possíveis soluções. Se $y \in D(A^+)$ então $x^+ = A^+y$ está em $N(A)^\perp$. Portanto parece natural selecionar o conjunto das possíveis soluções dentro de $N(A)^\perp$. Por outro lado, por (1.15) sabemos que

$$R[(A^*A)^s] \subset N(A^*A) = N(A)^\perp, \quad s > 0$$

É portanto natural supor $x^+ \in R[(A^*A)^s]$ para algum $s > 0$; sob esta hipótese existe $v \in X$ tal que $x^+ = (A^*A)^s v$. Agora, como x^+ é solução de quadrados mínimos para (3.1), então ela satisfaz: $A^*Ax^+ = A^*y$ e, portanto, temos que:

$$A^*y = A^*A(A^*A)^S v \text{ para algum } v \text{ em } X$$

Se $R_\alpha = U(\alpha, A^*A)A^*$ é um operador regularizante para (3.1), tomando como solução regularizada $x_\alpha = R_\alpha y$, usando a relação anterior e o teor. 1.3.15-b), teremos

$$\begin{aligned} \|x^+ - x_\alpha\| &= \|(A^*A)^S v - U(\alpha, A^*A)A^*A(A^*A)^S v\| \\ &= \| \{I - U(\alpha, A^*A)A^*A\} (A^*A)^S v \| \\ &\leq \| \{1 - U(\alpha, t)t\} t^S \|_\infty \|v\| \end{aligned}$$

para algum v em X . Por outro lado, a condição (3.23) nos diz que $|1 - U(\alpha, t)t|t^S \rightarrow 0$ quando $\alpha \rightarrow 0$. Se definimos uma função $\omega(\alpha, s)$ tal que $\omega(\alpha, s) \rightarrow 0$ quando $\alpha \rightarrow 0$ e

$$(3.25) \quad |1 - U(\alpha, t)t|t^S \leq \omega(\alpha, s) \quad \forall t \in [0, \|A\|^2]$$

teremos um regulador da velocidade de convergência de x_α para x^+ ; a função $\omega(\alpha, s)$ é chamada *taxa de convergência*. Uma análise semelhante pode ser elaborada quando x^+ está na imagem de $A^*(AA^*)^{s-1}$ para algum $s \geq 1$. Portanto temos

Teorema 3.2.2

Seja $y \in D(A^+)$

i) Se $x^+ \in R[(A^*A)^S]$ para algum $s > 0$, então

$$\|x^+ - x_\alpha\| \leq \omega(\alpha, s) \|v\| \text{ para algum } v \in X$$

ii) Se $x^+ \in R[A^*(AA^*)^{s-1}]$ para algum $s \geq 1$, então

$$\|x^+ - x_\alpha\| \leq \sqrt{\omega(\alpha, s-1)\omega(\alpha, s)} \|u\| \text{ para algum } u \in Y.$$

Convergência no caso de dados aproximados

Seja $x_\alpha^\delta = R_\alpha y = U(\alpha, A^*A)A^*y_\delta$ onde y_δ satisfaz

$$(3.26) \quad \|y - y_\delta\| \leq \delta, \delta > 0$$

A seguir, analisaremos as condições sob as quais $x_\alpha^\delta \rightarrow x^+$.

Antes, provamos o seguinte resultado preliminar:

Lema 3.2.3.

Se R_α é um operador regularizante induzido por $U(\alpha, t)$ em $[0, \|A\|^2]$, então

$$\|R_\alpha\| \leq C \sqrt{r(\alpha)}, \quad C > 0.$$

Prova:

Usando (1.19), para cada $y \in Y$, temos

$$\begin{aligned} \|R_\alpha y\|^2 &= (U(\alpha, A^*A)A^*y, U(\alpha, A^*A)A^*y) \\ &= (A^*U(\alpha, AA^*)y, A^*U(\alpha, AA^*)y) \\ &= (U(\alpha, AA^*)y, AA^*U(\alpha, AA^*)y) \\ &\leq \|U(\alpha, AA^*)\| \|AA^*U(\alpha, AA^*)\| \|y\|^2 \end{aligned}$$

O resultado segue de (1.3) e (3.24).

Teorema 3.2.4

Se $\alpha = \alpha(\delta) \rightarrow 0$ e $\delta^2 r(\alpha) \rightarrow 0$ quando $\delta \rightarrow 0$, então, para cada $y \in D(A^+)$ e y_δ satisfazendo (3.26), temos

$$x_\alpha^\delta \rightarrow x^+ \text{ quando } \delta \rightarrow 0,$$

onde x^+ é a solução generalizada de (3.1) correspondente aos dados exatos y .

Prova:

Segue do teor.(3.2.1) e lema (3.2.3), notando que

$$\|x^+ - x_\alpha^\delta\| = \|x^+ - R_\alpha y + R_\alpha y - R_\alpha y_\delta\| \leq \|x^+ - R_\alpha y\| + \|R_\alpha(y - y_\delta)\|$$

Observar que uma vez identificada $r(\alpha)$, o teorema permite múltiplas escolhas do parâmetro α garantindo convergência.

Taxas de convergência para o método de Tikhonov

Para obter taxas de convergência para o método de

Tikhonov, precisamos de alguma função taxa de convergência ω como em (3.25) de modo que

$$|1 - U(\alpha, t)t|t^s \leq \omega(\alpha, s) \rightarrow 0 \text{ quando } \alpha \rightarrow 0$$

Como o regularizador de Tikhonov é induzido pela função $U(\alpha, t) = (t + \alpha)^{-1}$, fazendo uma análise de extremos para a função

$$h(t) = |1 - U(\alpha, t)t|t^s \text{ para } \alpha > 0, t \in [0, \|A\|^2]$$

temos:

$$h(t) = \frac{\alpha t^s}{1-s} \leq \alpha^s, \quad 0 \leq s < 1$$

consequentemente, o teor. 3.22 garante o seguinte corolário:

Corolário 3.2.5

Seja $y \in D(A^+)$

i) Se $x^+ \in R[(A^*A)^s]$ para algum s , $0 < s \leq 1$ então

$$\|x^+ - x_\alpha\| = O(\alpha^s)$$

ii) Se $x^+ \in R(A^*)$ então $\|x^+ - x_\alpha\| = O(\alpha^{1/2})$

No caso de dados aproximados, como:

a) $r(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$,

b) A constante C em (3.24) é $C = 1$,

c) $\|R_\alpha\| \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

Então, análogamente como na prova do teor. 3.2.4, temos

$$\|x^+ - x_\alpha^\delta\| \leq \|x^+ - x_\alpha\| + \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}$$

Agora, usando esta desigualdade e o corolário anterior temos:

Corolário 3.2.6

i) Se $x^+ \in R[(A^*A)^s]$ e $\alpha = M\delta^{2/(2s+1)}$, $M > 0$, então

$$\|x^+ - x_\alpha^\delta\| = O(\delta^{2s/(2s+1)})$$

ii) Se $x^+ \in R(A^*)$ e $\alpha = M\delta$, então

$$\|x^+ - x_{\alpha}^{\delta}\| = O(\delta^{1/2})$$

Cabe observar que, no caso de dados perturbados, a melhor taxa que podemos obter pelo método de Tikhonov ocorre quando $x^+ \in R(A^*A)$ que é da ordem de $\delta^{2/3}$, próxima da taxa ideal $O(\delta)$ que pode ser atingida só no caso de núcleo degenerado (ver prop. 1.1 [19]). Para operadores integrais não degenerados a taxa $O(\delta^{2/3})$ não pode ser melhorada [19].

CAPÍTULO IV: APROXIMAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

A computação numérica de soluções aproximadas construídas pela minimização do funcional de Tikhonov

$$F_{\alpha}(x) = \|Ax - y\|^2 + \alpha \|x\|^2 \quad (*)$$

encontra dificuldades devido ao fato de trabalhar com espaços de dimensão infinita. Com a finalidade de contornar esta dificuldade, têm-se introduzido variantes do método em dimensão finita via discretização, por regras de quadratura, diferenças finitas ou por esquemas de projeção, ver [04], [22], [25], [55]. Neste capítulo, vamos discutir uma versão discreta do método de Tikhonov obtida por um esquema de projeção que considera a minimização do funcional $F_{\alpha}(x)$ sobre espaços de elementos finitos.

4.1 PRIMEIROS RESULTADOS

O uso de elementos finitos para problemas mal postos tem atraído atenção desde a década de 70. Com relação a equações integrais de primeira espécie, destacam-se os trabalhos de F. Natterer [40], [41], G. R. Richter [48] e G. C. Hsiao an W. L. Wendland [23]. Com respeito a equação

$$(4.1) \quad Ax(s) = \int_a^b k(s,t)x(t)dt = y(s) \quad a \leq s \leq b$$

considerando $A: L^2(a,b) \rightarrow L^2(a,b)$ injetor, Richter [48] calcula soluções aproximadas para (4.1) em espaços de dimensão finita usando a técnica de quadrados mínimos ($\alpha = 0$ em (*)), sob as seguintes hipóteses:

a) A solução do problema pertence ao espaço de Sobolev $H^q(a,b)$.

b) Existe um índice $l > 0$ tal que o operador satisfaz

$$(4.2) \quad m\|x\|_{-l} \leq \|Ax\| \leq M\|x\|_{-l} \quad \forall x \in L^2(a,b)$$

onde m, M são constantes positivas e $\|x\|_{-l}$ é a norma do espaço $H^{-l}(a,b)$ dual de $H^l(a,b)$, definido pela relação de dualidade:

$$\|x\|_{-l} = \sup \left\{ \frac{|\langle x, y \rangle|}{\|y\|_l} \mid y \in H^l(a,b) \right\}$$

c) A aproximação é feita num subespaço de dimensão finita $V_h \subset H^q(a,b)$ satisfazendo:

i) V_h é um sistema de classe $S_h^{k,r}$ (ver Seção 1.4) tal que $\forall \phi \in V_h$, e vale a propriedade inversa

$$(4.3) \quad \|\phi\|_0 \leq Ch^{-l} \|\phi\|_{-l}$$

onde $\|\phi\|_0$ denota a norma de $L^2(a,b)$, e $C > 0$ não depende de h e de ϕ .

ii) $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ é uma base para V_h , e a matriz de Gram $[(\phi_i, \phi_j)]$ é uniformemente limitada em h .

iii) $\|x - \phi_h\|_{-l} = O(h^{p+l})$ quando $h \rightarrow 0$, onde x é solução de (4.1) e ϕ_h é a projeção ortogonal de x sobre V_h .

Na presença de dados perturbados, com y_δ satisfazendo $\|y - y_\delta\| \leq \delta$, $\delta > 0$, o método produz a seguinte estimativa:

$$(4.4) \quad \|x - \bar{\phi}\|_0 = O(Eh^q + \delta h^{-l})$$

onde $\bar{\phi} \in V$ resolve o problema: $\text{Min} \{\|Ax - y_\delta\| \mid \phi \in V_h\}$, e E é uma constante positiva satisfazendo $\|x\| \leq E$ (informação a priori).

Se h é escolhido como: $h(\delta) = (\delta/E)^{1/q+1}$, usando (4.4) temos

$$(4.5) \quad \|x - \bar{\phi}\| \leq Ch^{q/q+1} E^{1/q+1}$$

Richter [48], Hsiao-Wedland [23], conseguem a mesma estimativa (4.4) para o método de Galerkin com elementos finitos, para A positivo definido e autoadjunto, sob hipótese da existência de um índice $l > 0$ tais que

$$(4.6) \quad m\|x\|_{-l/2} \leq \|Ax\|_{l/2} \leq M\|x\|_{-l/2} \quad \text{com } m, M > 0$$

onde $\|x\|_{l/2}$ é a norma do espaço de Sobolev de índice fracionário $H^{l/2}(a,b)$ [11]. As relações (4.6) são típicas em certos operadores integrais definidos por funções $k(s,t)$ com singularidade (logarítmica, por exemplo).

Sob a hipótese que a), b) e c-i) são satisfeitas, Natterer [40], [41] constrói soluções aproximadas minimizando o funcional de Tikhonov $F_\alpha(x)$ sobre um subespaço de dimensão finita $V \subset H_h^q(a,b)$ com a escolha do parâmetro de regularização $\alpha = \delta$, e com $h(\delta) = O(\delta^{1/q+1})$, obtendo a estimativa

$$(4.7) \quad \|x - \bar{\phi}\|_0 = O(\delta^{q/q+1})$$

onde $\bar{\phi}$ resolve o problema: $\text{Min } \{F_\alpha(\phi), \phi \in V_h\}$

Algumas observações:

- As propriedades c-i) e c-ii) são características típicas dos subespaços de elementos finitos; são satisfeitas por subespaços de polinômios por partes com partição uniforme do intervalo (splines por exemplo), ver seção 1.4. [14], [46].

- O índice l em b) é relacionado com o número de

derivadas no sentido de distribuições tais que a transformação $D^l A$:

$$D^l A x = \int_a^b \frac{\partial^l}{\partial s^l} \left[k(s,t) \right] x(t) dt$$

é continuamente inversível de $L^2(a,b)$ sobre um subespaço fechado de $L^2(a,b)$ [48], [41]. O número l é chamado índice de mau posicionamento.

- Se $l \gg q$, ou seja se o problema tem alto índice de mau posicionamento, então $q/(q+l) \ll 1$ e as estimativas (4.5) e (4.7) não são boas. Se $l \ll q$ então $q/(q+l) \approx 1$, consequentemente o erro na aproximação é quase da mesma ordem do erro nos dados, o que é razoável.

Das observações feitas, concluímos que quanto menor é o índice de mau posicionamento, ou seja, quanto menor o número de derivadas finitas com respeito à primeira variável admita a função $k(s,t)$, melhores são as características de estabilidade dos métodos. Se l é pequeno, digamos 1 ou 2, então podemos tratar o problema sem precisar de regularização. Como exemplo disto temos:

i) Para o problema de diferenciação numérica, com $n = 1$ no exemplo N^o 4, Cap. III, prova-se que $l = 1$.

ii) Para a função núcleo $k(s,t)$ definida por

$$k(s,t) = \begin{cases} (b-s)(t-a) & b \geq s \geq t \geq a \\ (b-t)(s-a) & a \leq s \leq t \leq b \end{cases}$$

prova-se que $l = 2$. Ver [41].

Se $k(s,t)$ é infinitamente derivável com respeito a s , as desigualdades (4.2) são satisfeitas para qualquer índice finito [41], consequentemente é necessária uma escolha do

índice l de maneira a obter um adequado parâmetro de discretização h tais que a estabilidade e precisão do método sejam conservados.

Com respeito aos métodos comentados nesta seção, destacamos o seguinte:

- i) Assume-se como hipótese essencial a injetividade do operador, consequentemente, problemas que precisem de soluções generalizadas fogem deste contexto.
- ii) O índice l é vital nas estimativas de erro, porém, sua identificação é muito complicada.

Na seção seguinte analisamos o método de regularização de Tikhonov usando elementos finitos, onde a função dados não precisa pertencer a $R(A)$, a injetividade do operador é relaxada, e principalmente, ressaltando que a análise não depende do índice de mau posicionamento.

4.2 O MÉTODO DE RITZ REGULARIZADO E ESTIMATIVAS PARA ELEMENTOS FINITOS

Se $T \in B(X,X)$ é autoadjunto, positivo definido, e X é um espaço de Hilbert, o método de Ritz [47] considera a construção de soluções aproximadas para a equação $Tu = v$, minimizando o funcional

$$J(u) = (Tu, u) - 2(u, v)$$

sobre um subespaço de dimensão finita $V_m \subset X$. Por outro lado, se $A \in B(X,Y)$ é um operador compacto linear, a solução regularizada x_α para a equação $Ax = y$, construída pelo método de Tikhonov satisfaz

$$(4.8) \quad (A^*A + \alpha I)x_\alpha = A^*y, \quad \alpha > 0.$$

Como $(A^*A + \alpha I)$ é autoadjunto e positivo definido, podemos então, abordar o problema de construir soluções regularizadas aproximadas pelo método de Ritz. Prova-se que, se o funcional J é construído baseando-se em (4.8), então os problemas de minimização de J e F_α em X respectivamente são equivalentes. Nossa análise estará orientada para este último problema.

O problema de minimização de funcional de Tikhonov, $F_\alpha(x) = \|Ax - y\|^2 + \alpha \|x\|^2$, pode ser abordado usando a idéia de minimização de F_α numa sequência encaixante de subespaços de dimensão finita. Esta é a base do método de Rayleigh - Ritz, também conhecido como método de Ritz, introduzido no meio matemático no início deste século. Num contexto geral, estabelecida uma base de funções $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ procuramos x_α que minimiza $F_\alpha(x)$ no subespaço gerado por tal base. A questão é a escolha da base de modo que a sequência x_α^m se aproxime de x_α que é a função que minimiza F_α em X . A escolha destas funções depende do problema a ser minimizado, isto é, de F_α e de seu domínio.

Analisaremos inicialmente as condições sob as quais as aproximações x_α^m , caracterizadas no cap. V, convergem para a solução generalizada x^+ . Com este fim, seja $\{V_m\}$ uma sequência de subespaços de dimensão finita tal que

$$(4.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a)} \quad V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_m \subset V_{m+1} \subset X \\ \text{b)} \quad \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i} = X \end{array} \right.$$

Nestas condições, relacionando adequadamente α com m esperamos que $x_\alpha^m \rightarrow x^+$, quando $m \rightarrow \infty$. Vamos proceder como na seção 3.2 considerando dados exatos em primeiro lugar, para depois fazer

a mesma análise com dados perturbados. Se x_α é o minimizador de $F_\alpha(x)$ em X , então (3.12) implica que

$$(4.10) \quad \langle Ax_\alpha - y, A\phi \rangle + \alpha \langle x_\alpha, \phi \rangle = 0, \quad \forall \phi \in X.$$

Se o mínimo é procurado em V_m teremos, como acima

$$(4.11) \quad \langle Ax_\alpha^m - y, A\phi \rangle + \alpha \langle x_\alpha^m, \phi \rangle = 0, \quad \forall \phi \in V_m.$$

Por outro lado podemos introduzir um novo produto interno em X definido por

$$[u, v] = (Au, Av) + \alpha(u, v);$$

a este produto interno está associada uma nova norma em X que designaremos por $|u|$. Se denotamos com P_m o operador projecção ortogonal de X sobre V_m segundo o novo produto interno, então subtraindo (4.10) de (4.11), tomado em $\phi \in V_m$, temos

$$[x_\alpha - x_\alpha^m, \phi] = 0, \quad \forall \phi \in V_m.$$

Assim x_α^m é a projecção ortogonal de x_α sobre V_m , segundo o produto escalar $[u, v]$, isto é: $x_\alpha^m = P_m x_\alpha$.

Lema 4.2.1

Se P_m é o operador projecção ortogonal de X sobre V_m , segundo o produto escalar original em X , então temos que

$$\beta_m = \|A(I - P_m)\| \rightarrow 0 \text{ quando } m \rightarrow \infty.$$

Prova:

Pelo teor. 1.3.6-a, usando (1.1) temos

$$\begin{aligned} \|A(I - P_m)\| &= \|(I - P_m)A^*\| \\ &= \sup \{ \|(I - P_m)A^*v\| / \|v\| \leq 1, v \in X \} \end{aligned}$$

Por outro lado, seja $V = \{v \in Y / \|v\| \leq 1\}$, como A^* é compacto, $\hat{V} = A^*(V)$ é compacto em X . Agora, se $z = A^*v$, $v \in V$, por (4.9), temos

$$\|(I-P_{m+1})z\| \leq \|(I-P_m)z\|, \quad m = 1, 2, \dots$$

Consequentemente

$$\psi_m(z) = \|(I-P_m)z\| \rightarrow 0 \quad \text{quando } m \rightarrow \infty$$

monótona e pontualmente. Agora, usando o teorema de Dini (ver teor. 1.2.4) $\psi_m(z) \rightarrow 0$ uniformemente quando $m \rightarrow \infty$, $\forall z \in \hat{V}$. Portanto, $\beta_m = \|(I-P_m)A^*\| \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$.

Observação: Se $A_m = AP_m$, o número β_m mede "quão boa" é a aproximação de A por A_m , como veremos logo, e joga importante papel na análise de convergência das aproximações x_α^m .

Lema 4.2.2

$$\|x_\alpha - x_\alpha^m\| \leq \sqrt{(1 + \beta_m^2/\alpha)} \|(I-P_m)x_\alpha\|$$

Prova:

Como x_α^m é a projecção ortogonal de x_α , no produto escalar $[\cdot, \cdot]$, temos

$$\begin{aligned} |x_\alpha - x_\alpha^m|^2 &= |x_\alpha - P_m x_\alpha|^2 \leq |x_\alpha - P_m x_\alpha|^2 \\ &= \|A(I-P_m)x_\alpha\|^2 + \alpha \|(I-P_m)x_\alpha\|^2 \\ &= \|A(I-P_m)^2 x_\alpha\|^2 + \alpha \|(I-P_m)x_\alpha\|^2 \end{aligned}$$

como $\alpha \|x_\alpha - x_\alpha^m\|^2 \leq |x_\alpha - x_\alpha^m|^2$, temos finalmente

$$\|x_\alpha - x_\alpha^m\|^2 \leq (1 + \beta_m^2/\alpha) \|(I-P_m)x_\alpha\|^2.$$

Análise de Convergência e estimativas de erro

Assumiremos que o parâmetro de regularização α será relacionado com m de modo que $\alpha = \alpha(m) \rightarrow 0$, quando $m \rightarrow \infty$.

Teorema 4.2.3 (Convergência)

Se $\beta_m = O(\sqrt{\alpha(m)})$ então $x_{\alpha(m)}^m \rightarrow x^+$, quando $m \rightarrow \infty$.

Prova:

Pela desigualdade triangular e lema 4.2.2 temos:

$$\|x_{\alpha(m)} - x^+\| \leq \left(1 + \beta_m^2/\alpha\right)^{1/2} \|(I - P_m)x_\alpha\| + \|x_\alpha - x^+\|$$

Agora, tomando α de modo que $\beta_m = O(\sqrt{\alpha(m)})$, considerando que $\alpha \rightarrow 0$, quando $m \rightarrow \infty$, então usando o teor. 3.2.1, se obtem o resultado desejado.

Teorema 4.2.4 (Estimativa de erro)

i) Se $x^+ \in R(A^*)$ e $\beta_m = O(\sqrt{\alpha(m)})$, então

$$\|x_{\alpha(m)} - x^+\| = O(\sqrt{\alpha})$$

ii) Se $x^+ \in R(A^*A)$ e $\beta_m = O(\alpha(m))$, então

$$\|x_{\alpha(m)} - x^+\| = O(\alpha)$$

Prova:

Se $x^+ \in R(A^*)$, para algum $v \in Y$, $x^+ = A^*v$, e como x^+ é uma solução de quadrados mínimos então pelo teor. 1.3.17

$$A^*y = A^*Ax^+ = A^*AA^*v.$$

Agora, usando (1.20), (4.8) e a última relação

$$x_\alpha = A^*(AA^* + \alpha I)^{-1}AA^*y.$$

Com este resultado, na desigualdade da prova do teor. 4.2.3, temos

$$\|x_{\alpha(m)} - x^+\| \leq (1 + \beta_m^2/\alpha)^{1/2} \beta_m \|(AA^* + \alpha I)^{-1}AA^*\| + \|x_{\alpha(m)} - x^+\|.$$

Mas, por (1.17) $\|(AA^* + \alpha I)^{-1}AA^*\| \leq 1$, logo na desigualdade anterior, usando Cor. 3.25 com a hipótese $\beta_m = O(\sqrt{\alpha})$ a prova de i) é imediata. A prova para ii) é semelhante.

Analisaremos agora o caso em que trabalhamos com dados aproximados y_δ , satisfazendo $\|y - y_\delta\| \leq \delta$, $\delta > 0$. Assumiremos a

dependência de m com δ : $m = m(\delta)$, de modo que se $\delta \rightarrow 0$, então $m \rightarrow \infty$. Minimizando o funcional:

$$F_{\alpha}(x) = \|Ax - y_{\delta}\|^2 + \alpha\|x\|^2$$

sobre o subespaço V_m , e chamando $\bar{x}_{\alpha}^m$ ao minimizador de F_{α} , analogamente como em (4.11) temos

$$(A\bar{x}_{\alpha}^m - y_{\delta}, A\phi) + \alpha(\bar{x}_{\alpha}^m, \phi) = 0 \quad \forall \phi \in V_m.$$

Mas esta relação é equivalente a

$$(A\bar{x}_{\alpha}^m - x, A\phi) + (y - y_{\delta}, A\phi) + \alpha(x, \phi) = 0 \quad \forall \phi \in V_m,$$

de onde obtemos

$$[\bar{x}_{\alpha}^m - x, \phi] = -\alpha(x, \phi) - (y - y_{\delta}, A\phi) \quad \forall \phi \in V_m.$$

Por outro lado prova-se facilmente que

$$[x_{\alpha}^m - x, \phi] = -\alpha(x, \phi) \quad \forall \phi \in V_m.$$

Subtraindo membro a membro as últimas relações temos

$$[\bar{x}_{\alpha}^m - x_{\alpha}^m, \phi] = (y - y_{\delta}, A\phi) \quad \forall \phi \in V_m.$$

Como esta relação vale para todo ϕ em V_m , em particular, para $\phi = (\bar{x}_{\alpha}^m - x_{\alpha}^m)$ que é um elemento de V_m , temos

$$|\bar{x}_{\alpha}^m - x_{\alpha}^m|^2 = (y - y_{\delta}, A(\bar{x}_{\alpha}^m - x_{\alpha}^m))$$

$$(4.12) \quad \leq \|y - y_{\delta}\| \|A(\bar{x}_{\alpha}^m - x_{\alpha}^m)\|$$

Agora provaremos que $\|A(\bar{x}_{\alpha}^m - x_{\alpha}^m)\| \leq \delta$. Com efeito, com $A_m = AP_m$, usando o teor. 2.14, pag. 36 [47], temos que:

$$(4.13) \quad \begin{cases} \bar{x}_{\alpha}^m = (A_m^* A_m + \alpha I)^{-1} A_m^* y_{\delta} \\ x_{\alpha}^m = (A_m^* A_m + \alpha I)^{-1} A_m^* y \end{cases}$$

Pela fórmula do raio espectral (ver teor. 1.3.15)

$$\|A(x_{\alpha}^m - x_{\alpha}^m)\| = \|A_m A_m^* (A_m A_m^* + \alpha I_m)^{-1} (y - y_{\delta})\| \leq \|y - y_{\delta}\| \leq \delta.$$

Portanto em (4.12)

$$\alpha \|x_{\alpha}^m - x_{\alpha}^m\|^2 \leq \|x_{\alpha}^m - x_{\alpha}^m\|^2 \leq \delta^2.$$

Com este resultado e a desigualdade triangular temos:

$$(4.14) \quad \|x^+ - x_{\alpha}^m\| \leq \|x^+ - x_{\alpha}^m\| + \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}.$$

Agora, de (4.14), teor. 4.2.3 e teor. 4.2.4; obtemos

Teorema 4.2.5 (Convergência no caso de dados aproximados)

Se $\beta_m(m) = O(\sqrt{\alpha})$ e $\frac{\delta}{\sqrt{\alpha}} \rightarrow 0$, quando $\delta \rightarrow 0$ então

$$x_{\alpha}^m \rightarrow x^+ \text{ quando } \delta \rightarrow 0.$$

Teorema 4.2.6 (Estimativas de erro no caso de dados aproximados)

i) Se $x^+ \in R(A^*)$, $\alpha = C\delta$, $C > 0$ e $\beta_m(m) = O(\delta)^{1/2}$; então

$$\|x^+ - x_{\alpha}^m\| = O(\delta)^{1/2}.$$

ii) Se $x^+ \in R(A^*A)$, $\alpha = C\delta^{2/3}$, $C > 0$ e $\beta_m(m) = O(\delta^{2/3})$

$$\text{então: } \|x^+ - x_{\alpha}^m\| = O(\delta^{2/3}).$$

Observações:

i) O papel de β_m no processo de convergência e estimativa do erro da solução aproximada é decisivo, sendo sua relação com V_m claramente evidente. No caso dos teoremas 4.2.3-4.2.4, vemos que escolhas a priori do parâmetro α são possíveis desde que tenhamos adequadas

estimativas para β_m .

ii) Para o caso de dados aproximados, o teor. 4.2.6 exige uma conciliação entre as estimativas de β_m com o máximo erro nos dados. Assim, se β_m é estimado como função da dimensão n de V_m , deve-se conciliar um adequado valor de n como função de δ , de modo que as hipóteses do teorema sejam satisfeitas.

Estimativas para β_m e aplicação para equações integrais de primeira espécie.

Vamos procurar estimativas para β_m em função do parâmetro de discretização h associado com V_m . Para este fim, usamos subespaços típicos de elementos finitos em uma dimensão, cujas propriedades de aproximação são sistematicamente organizadas em famílias de classe $S_h^{k,r}$ (ver seção 1.4), particularizando para o caso de equações integrais de primeira espécie:

$$(4.15) \quad Ax(s) = \int_a^b k(s,t)x(t)dt \quad a \leq s \leq b,$$

onde a regularidade da função núcleo é explorada. Com efeito, seja I o intervalo aberto com extremos em a, b e seja h o parâmetro de discretização correspondente a uma partição regular de $[a,b]$. Como na seção 1.4, $\|\cdot\|_j$ denotará a norma do espaço de Sobolev $H^j(I)$, onde para $j = 0$, $H^0(I) = L^2(I)$. Logo, faremos estimativas para β_m em dois casos :

Primeiro Caso: (Regularização de Ordem Zero)

Neste caso, (4.15) é formulada de $H^0(I)$ em $H^0(I)$, isto é:

$$A: H^0(I) \rightarrow H^0(I), \text{ e } F_\alpha(x) = \|Ax-y\|_0^2 + \alpha \|x\|_0^2, \alpha > 0$$

portanto, procuramos soluções aproximadas para (4.15) em algum

subespaço $V_{m(h)} \subset H^0(I)$, que é uma família de classe $S_h^{k,r}$. Logo:

$$\begin{aligned}\beta_m &= \|A(I-P_m)\| = \|(I-P_m)A^*\| \\ &= \sup_{\|v\|_0 \leq 1} \{ \|A^*v - P_m A^*v\|_0 \} \\ &= \sup_{\|v\|_0 \leq 1} \{ \inf_{\phi \in V_m} \|A^*v - \phi\|_0 \}\end{aligned}$$

como $V_{m(h)}$ é de classe $S_h^{k,r}$, com $l = 0$, $j = r$ em (1.29), temos

$$\inf_{\phi \in V_m} \|A^*v - \phi\|_0 \leq Ch^p \|A^*v\|_p$$

desde que $A^*v \in H^d(I)$, onde $p = \min \{r, d\}$. Consequentemente

$$(4.16) \quad \beta_m \leq Ch^p \sup_{\|v\|_0 \leq 1} \|A^*v\|_p.$$

Por outro lado, como $A^*v(t) = \int_a^b k(t,s)v(s)ds$, temos

$$\|A^*v\|_p^p = \int_a^b \left[\left| \int_a^b k(t,s)v(s)ds \right|^2 + \dots + \left| \int_a^b \frac{\partial^p k(t,s)}{\partial t^p} v(s)ds \right|^2 \right] dt$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwartz em cada parcela

$$\left| \int_a^b \frac{\partial^i k(t,s)}{\partial t^i} v(s)ds \right|^2 \leq \left(\int_a^b \left| \frac{\partial^i k(t,s)}{\partial t^i} \right|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_a^b |v(s)|^2 ds \right)^{1/2}$$

para $i = 0, 1, \dots, p$. Logo

$$\|A^*v\|_p \leq \|v\|_0 \left\{ \int_a^b \int_a^b \sum_{i=0}^p \left| \frac{\partial^i k(t,s)}{\partial t^i} \right|^2 ds dt \right\}^{1/2}.$$

Denotando a expressão entre chaves por $\|A\|_{0,p}$, temos em (4.16)

$\beta_m \leq Ch^p \|A\|_{0,p}$. Finalmente, assumindo a suficiente regularidade da função $k(s,t)$, isto é, se $d \geq r$, então a melhor estimativa para β_m será :

$$(4.17) \quad \beta_m = O(h^r)$$

Segundo Caso: Regularização de Ordem Superior

Aqui, consideramos $A: H^q(I) \rightarrow H^0(I)$, conseqüentemente o funcional de Tikhonov é:

$$F_\alpha(x) = \|Ax - y\|_0^2 + \alpha \|x\|_q^2, \quad \alpha > 0.$$

Isto é, estamos supondo (informação a priori) que a solução de (4.15) pertence ao espaço $H^q(I)$. Para estimar β_m , consideremos $I: H^q(I) \rightarrow H^0(I)$, o operador imersão, e $I^* \in B(H^0(I), H^q(I))$ o seu adjunto. Analogamente como na seção 3.2, denotando com $A^\# = I^* A^*$, onde $A^* \in B(H^0(I), H^0(I))$, temos

$$\begin{aligned} \beta_m &= \|A(I - P_m)\| = \|(I - P_m)A^\#\| \\ &= \sup_{\|v\|_q \leq 1} \left\{ \|(I - P_m)A^\#v\|_q \right\} \end{aligned}$$

mas,

$$\|(I - P_m)A^\#v\|_q = \inf_{\phi \in V_m(h)} \left\{ \|A^\#v - \phi\|_q \right\}$$

Agora, se $A^*v \in H^d(I)$, com $p = \min\{d, r\}$, na relação anterior

$$\|A^\#v - P_m A^\#v\|_q \leq Ch^{p-q} \|A^\#v\| \leq Ch^{p-q} \|I\| \|A^*v\|_p \leq C_1 h^{p-q} \|A\|_{0,p}$$

Conseqüentemente, assumindo a suficiente regularidade da função $k(s, t)$, temos

$$(4.18) \quad \beta_m = O(h^{r-q})$$

CAPÍTULO V: EXPERIÊNCIAS NUMÉRICAS

Neste capítulo apresentamos um conjunto de resultados numéricos obtidos aplicando o método de Tikhonov, para a solução aproximada de equações integrais de Fredholm de primeira espécie. Nossas soluções aproximadas são construídas em subespaços de elementos finitos, gerados por funções splines lineares, cujas propriedades de aproximação foram já discutidas nas seções 1.4 e 4.2.

As experiências numéricas foram feitas desenvolvendo alguns programas computacionais na linguagem FORTRAN, cuja implementação foi realizada em microcomputadores tipo IBM-PC, no Laboratório de Matemática Aplicada do IMECC.

Caracterização da Solução Aproximada em Subespaços de Elementos Finitos e Estimativas para β_m

Se $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ é uma base para um subespaço de elementos finitos V_m , então o minimizador x_α^m de $F_\alpha(x)$ em V_m é caracterizado facilmente como sendo:

$$(5.1) \quad x_\alpha^m = \sum_{i=0}^n c_i \phi_i, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad \phi_i \in V_m.$$

Onde o vetor $c = (c_0, c_1, \dots, c_n)^t \in \mathbb{R}^{n+1}$, é a única solução do sistema linear:

$$(5.2) \quad [M + \alpha N] c = b, \quad \alpha > 0.$$

Com:

$$M = [(A\phi_i, A\phi_j)]_{(n+1) \times (n+1)} \quad i, j = 0, \dots, n.$$

$$N = [\phi_i, \phi_j]_{(n+1) \times (n+1)} \quad i, j = 0, \dots, n.$$

$$b = [(A\phi_0, y), \dots, (A\phi_n, y)]^t \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Onde y é o lado direito da equação $Ax = y$, e $(\cdot, \cdot)$ é o produto interno no correspondente espaço. A matriz $[M + \alpha N]$ é positiva definida.

Nos testes numéricos escolhemos subespaços V_m gerados por splines lineares, com certas condições de fronteira a serem especificadas segundo as exigências de cada caso. Nas experiências numéricas, testamos a ordem de aproximação das soluções aproximadas para equações integrais da forma.

$$(5.3) \quad Ax(s) = \int_a^b k(s,t)x(t)dt = y(s) \quad c \leq s \leq d.$$

Onde $A: L^2(a,b) \rightarrow L^2(c,d)$, assumindo núcleos suficientemente regulares. Os testes serão feitos, usando o esquema de regularização que procura soluções aproximadas no espaço de Sobolev $H^1(a,b)$. Isto é, minimizaremos o funcional:

$$F_\alpha(x) = \|Ax - y\|_0^2 + \alpha \|x\|_1^2, \quad \alpha > 0$$

no subespaço V_m , onde $\|\cdot\|_1$ é a norma em $H^1(a,b)$. Claramente, o produto interno na formação da matriz N é o produto em $H^1(a,b)$. Agora, considerando que:

- Splines lineares formam uma família de classe $S_h^{1,2}$, (ver seção 1.4),
- O núcleo das equações testadas assim como as respectivas soluções são suficientemente regulares.

Então, por (4.18), temos:

$$\beta_m = O(h)$$

A Montagem do sistema linear

Consideramos aqui a formação do sistema (5.2), para uma

equação padrão do tipo (5.3), no caso em que $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ é uma base de splines lineares no intervalo $[a, b]$, onde temos introduzido uma partição regular de tamanho h . O elemento base padrão num intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ é definido por:

$$(5.4) \quad \phi_i(t) = \begin{cases} \frac{1}{h} (t - t_{i-1}) & , t \in [t_{i-1}, t_i] \\ \frac{1}{h} (t_{i+1} - t) & , t \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0 & , t \notin [t_{i-1}, t_{i+1}] \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1 \quad , h = (b-a)/n .$$

A base é formada incorporando a (5.4), as funções ϕ_0 e ϕ_n definidas por:

$$(5.5) \quad \phi_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{h} (t_1 - t) & , t \in [t_0, t_1] \\ 0 & , t \notin [t_0, t_1] \end{cases}$$

$$(5.6) \quad \phi_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{h} (t - t_{n-1}) & , t \in [t_{n-1}, t_n] \\ 0 & , t \notin [t_{n-1}, t_n] \end{cases}$$

Com estas funções como base, a matriz N em (5.2) é:

$$(5.7) \quad N = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 2 & -1 \\ & & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 4 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 4 & 1 \\ & & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sendo a ordem de N igual a $(n+1) \times (n+1)$. Por outro lado, se $\psi_i(s) = A\phi_i(s)$, temos:

$$\psi_i(s) = \frac{1}{h} \left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} \mu_i k(s, t) (t - t_{i-1}) dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \eta_i k(s, t) (t_{i+1} - t) dt \right]$$

$$t_i = a + ih \quad , i = 0, \dots, n \quad , c \leq s \leq d .$$

$$\mu_i = \begin{cases} 0, & i = 0 \\ 1, & i \neq 0 \end{cases} \quad , \quad \eta_i = \begin{cases} 1, & i \neq n \\ 0, & i = n \end{cases}$$

Se usamos quadratura de Gauss-Legendre com $nq+1$ pontos:

$$\int_{\beta}^{\alpha} f(t) dt \approx \frac{(\beta-\alpha)}{2} \sum_{l=0}^{mq} w_l f\left((z_l(\beta-\alpha)+\beta+\alpha) \frac{1}{2}\right)$$

onde z_l e w_l são raízes e pesos respectivamente; então

$$(5.8) \begin{cases} \psi_i(s) \approx \frac{h}{4} \left[\sum_{l=0}^{mq} w_l \left(\mu_l k(s, t_l + a)(z_l + 1) - \eta_l k(s, u_l + a)(z_l - 1) \right) \right] \\ \text{onde: } t_l = (z_l + 2i - 1) \frac{h}{2}, u_l = (z_l + 2i + 1) \frac{h}{2}, i = 0, \dots, n \end{cases}$$

Agora, introduzindo uma partição regular no intervalo $[c, d]$, com $\tau = (d-c)/m$, $s_k = c + \tau k$, $k = 0, \dots, m$; temos:

$$M = [m_{i+1, j+1}]_{(n+1) \times (n+1)}, i, j = 0, \dots, n.$$

$$m_{i+1, j+1} = \int_c^d \psi_i(s) \psi_j(s) ds = \sum_{k=1}^m \int_{s_{k-1}}^{s_k} \psi_i(s) \psi_j(s) ds.$$

Aproximando as integrais por quadratura Gaussiana com $mq+1$ pontos temos finalmente:

$$(5.9) \quad m_{i+1, j+1} \approx \frac{\tau}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{mq} w_{ll} \psi_i(s_{ll}) \psi_j(s_{ll}), i, j = 0, \dots, n$$

onde: $s_{ll} = (z_{ll} + 2k - 1) \frac{\tau}{2} + c$, z_{ll} e w_{ll} são raízes e pesos da fórmula de quadratura. Para facilitar os cálculos em (5.9) sugerimos o seguinte procedimento:

Procedimento CBT (Calculando Base Transformada):

Para $i = 0$ até n , fazer:

Para $k = 1$ até m , fazer:

Para $ll = 0$ até mq , fazer:

- a) $s = (z_{ll} + 2k-1) * \frac{h}{2} + c$
- b) avaliar $\psi_i(s)$ usando (5.8)
- c) $AR(i, l, k) = \psi_i(s)$

Seguinte l .

Seguinte k .

Seguinte i .

Observar que o arranjo $AR(i, l, k)$ "guarda" os valores da i -ésima função ψ , em pontos para usar quadratura Gaussiana no subintervalo $[s_{k-1}, s_k]$. Portanto, os elementos $m_{i+1, j+1}$ podem ser montados facilmente, tomando adequadamente as somas dos produtos $AR(i, l, k) * AR(j, l, k)$ em l e em k respectivamente. O mesmo arranjo pode ser usado para construir o lado direito do sistema linear (5.2), já que:

$$(5.10) \quad b_i = \int_c^d \psi_i(s) y(s) ds \approx \frac{\tau}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{mq} w_{ll} \psi_i(s_{ll}) y(s_{ll})$$

$i = 0, \dots, n$, e s_{ll} como em (5.10).

Resultados Numéricos

Observamos em primeiro lugar que o teor. (4.2.4) e as estimativas obtidas para β_m : $\beta_m = O(h)$, possibilitam as seguintes escolhas a priori do parâmetro de regularização:

$$(5.11) \quad \alpha = O(h), \text{ se } x^+ \in R(A^*A),$$

$$(5.12) \quad \alpha = O(h^2), \text{ se } x^+ \in R(A^*).$$

A escolha do α para ambos os casos, prediz a seguinte estimativa para a ordem de aproximação:

$$(5.13) \quad \|x^+ - x_{\alpha}^m\| = O(h).$$

Nos três primeiros testes, usamos escolhas para α segundo

(5.11), já que as soluções tem a mesma regularidade do núcleo. No último teste, a escolha para α é do tipo (5.12), devido a que a solução do problema, não garante a condição de pertencer a $R(A^*A)$. Como veremos, a regularidade do núcleo é muito maior que a regularidade da solução, portanto devemos assumir que $x^+ \in R(A^*)$.

Teste N^o 1

Equação Testada:
$$\int_0^1 e^{-st} x(t) dt = \frac{e^{(s-1)} - 1}{s-1}, \quad 0 \leq s < 1$$

Solução Exata: $x(t) = e^t$

Neste caso, x^+ coincide com a solução clássica. Considerando x^+ em $H^1(0,1)$, por (3.18), a solução aproximada x_α^m em V_m deve satisfazer a condição de fronteira:

$$x_\alpha^m(0) = x_\alpha^m(1) = 0.$$

Se $x_\alpha = c_0 \phi_0 + c_1 \phi_1 + \dots + c_n \phi_n$, as condições de fronteira serão satisfeitas se: $c_0 = c_1$ e $c_{n-1} = c_n$. Consequentemente, devemos considerar uma nova base: $\{\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1, \dots, \bar{\phi}_{n-2}\}$, onde:

$$\bar{\phi}_0 = \phi_0 + \phi_1, \bar{\phi}_i = \phi_{i+1}, i = 1, (n-3), \bar{\phi}_{n-2} = \phi_{n-1} + \phi_n.$$

Na figura ao lado vemos o comportamento da nova base no intervalo $[0,1]$, para uma partição regular, com quatro subintervalos.

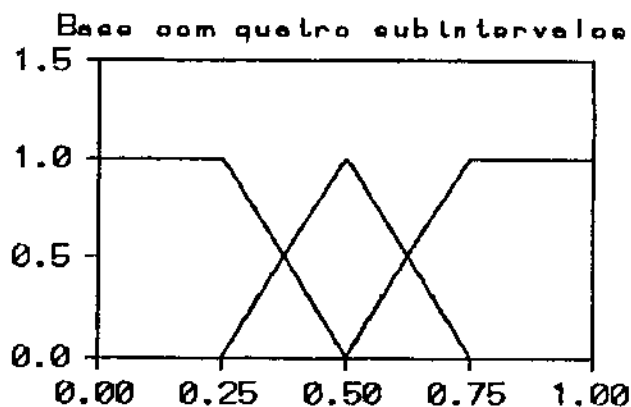


fig. 1

Com esta nova base, o sistema (5.2) é de ordem $(n-1) \times (n-1)$. As matrizes M e N são facilmente montadas, usando (5.7), (5.9) e (5.10). Na prática, formamos o sistema (5.2) com a base original, a partir daí, somamos:

- Primeira e segunda coluna,
- Penúltima e última coluna,
- Primeira e segunda equação, e;
- Penúltima e última equação.

O sistema resultante para este e os demais testes foi resolvido usando a fatoração Cholesky. Em todos os testes, o lado direito $y(s)$ da equação (5.3) foi construído por integração numérica. Sendo mais precisos, a solução exata do problema é substituída no lado esquerdo de (5.3) e posteriormente a integral é aproximada por meio de quadratura Gaussiana. Mesmo assim, nos testes consideramos $y(s)$ como sendo exato. Para este caso, a matriz N é:

$$N = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 2 & -1 \\ & & & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 4 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

No que segue, denotaremos com:

n: Número de subintervalos de $(0,1)$.

h: Parâmetro de discretização.

ε : Erro na norma em $L^2(0,1)$, $\varepsilon = \|x^+ - x_\alpha^m\|_0$.

r: Resíduo na norma $L^2(0,1)$, $r = \|Ax_\alpha^m - y\|_0$.

Apresentamos o resultado de dois testes numéricos, organizados em duas colunas.

$$\begin{aligned}n &= 6 \\h &= 0.1666 \\e &= 0.1110 \\r &= 0.0074 \\\alpha &= h \times 10^{-3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n &= 16 \\h &= 0.0625 \\e &= 0.0751 \\r &= 0.0028 \\\alpha &= h \times 10^{-3}\end{aligned}$$

O comportamento da solução aproximada com relação à solução exata, pode ser visto nas seguintes figuras:

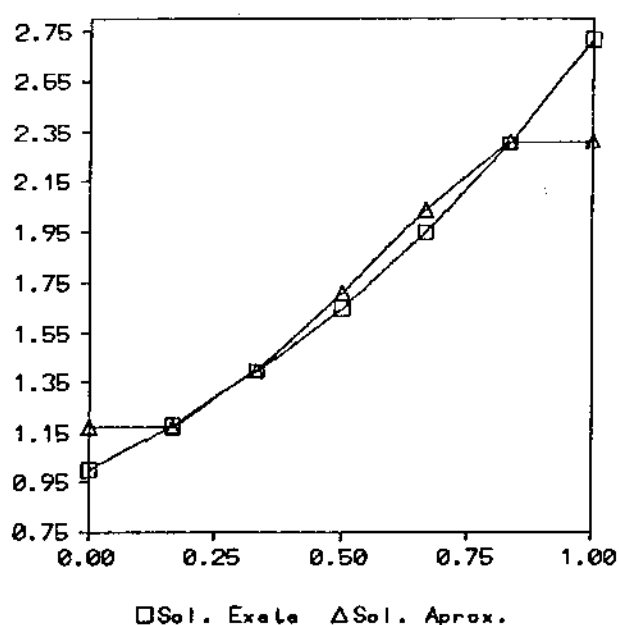


fig. 2

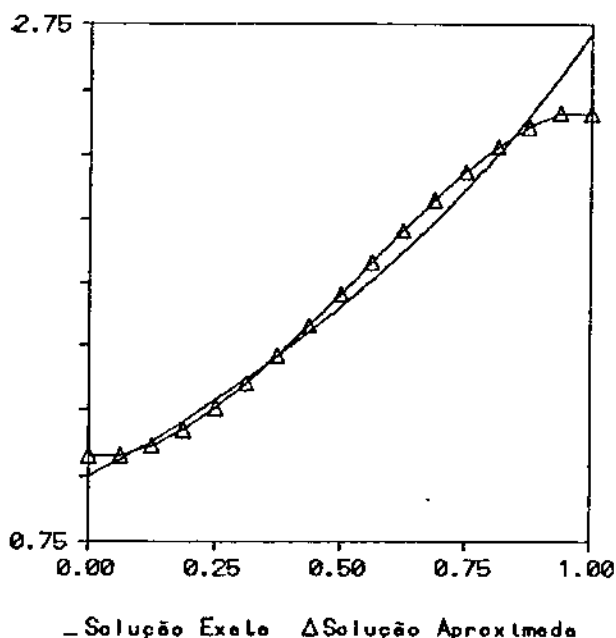


fig 3.

Observamos que a solução aproximada, claramente satisfaz as condições de fronteira. Observamos também que a ordem de aproximação da solução x_{α}^m , satisfaz: $e = O(h)$. Nas figs. 4-5, apresentamos as soluções obtidas pelo método de quadrados mínimos usando a mesma base ($\alpha = 0$ em (5.2)), para valores de $n = 6$, e $n = 7$. Neste caso, aprecia-se claramente o efeito do mal condicionamento do problema (instabilidade). Para $n \geq 7$, a solução aproximada é fortemente oscilante. Para certos valores de n , a matriz M em (5.2) se comportou como sendo

singular.

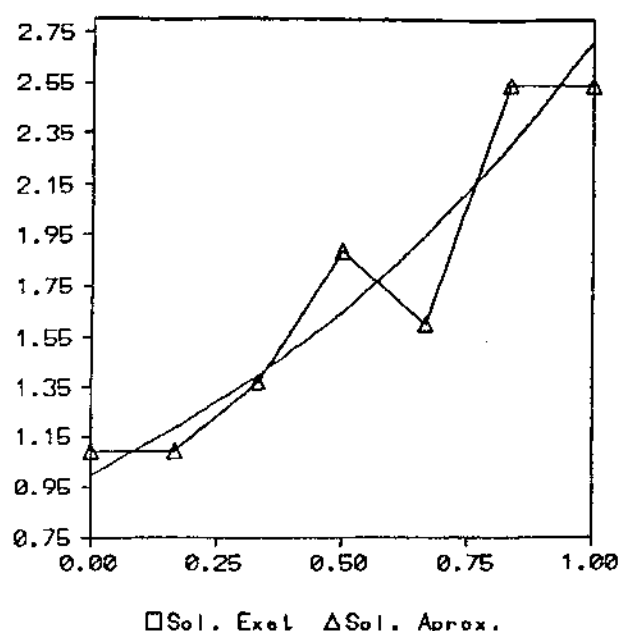


fig. 4.

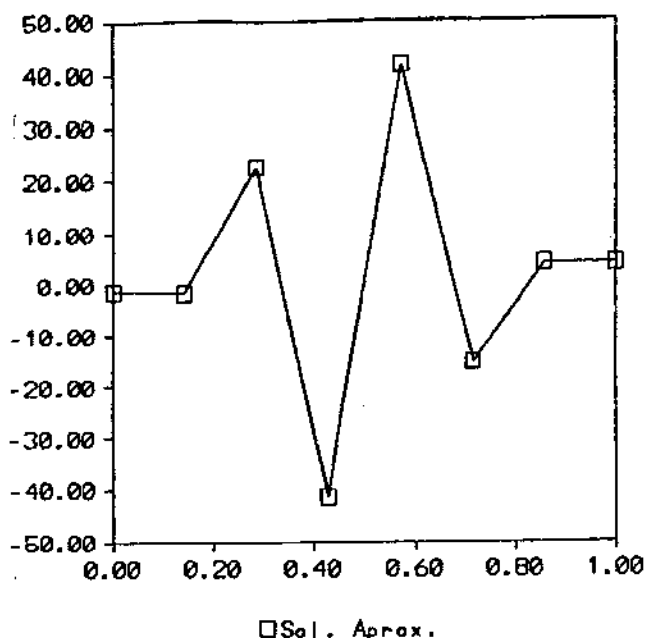


fig. 5.

Teste N^o 2

Equação Testada:

$$\int_{-1}^1 \frac{x(t)dt}{(s-t)^2+4} = y(s) \quad -1 \leq s \leq 1$$

Solução Exata : $x(t) = (1-t^2)^2$.

Para este caso, vamos considerar informação apriori com respeito a solução, no sentido que, "sabemos" que a solução do problema satisfaz as condições de fronteira: $x(-1) = x(1) = 0$. Com esta informação, procuramos a solução aproximada no subespaço V_m , gerado pelas funções definidas em (5.4), isto é; as funções ϕ_0 e ϕ_n são desconsideradas. A formação da matriz M em (5.2) pode ser feita também com o procedimento CBT e (5.9). A matriz N é semelhante como em (5.7) e o sistema (5.2) com esta base é de ordem $(n-1) \times (n-1)$.

Resultados Obtidos:

$n = 16$
 $h = 0.125$
 $\epsilon = 0.1017$
 $r = 0.0005$
 $\alpha = hx10^{-4}$

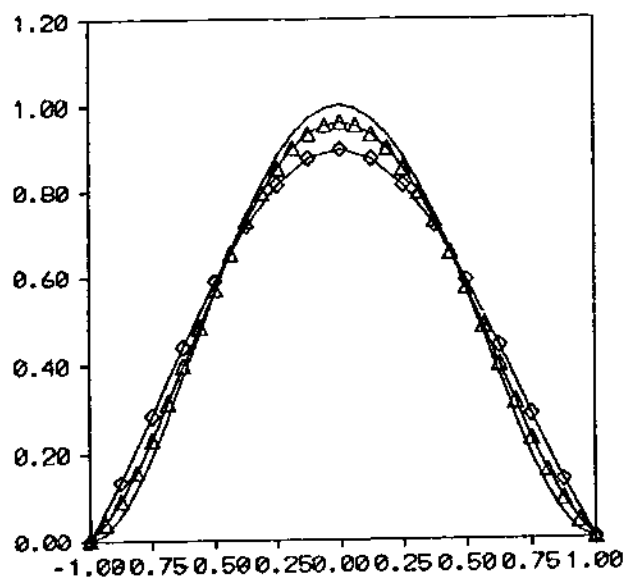


fig. 6

$n = 32$
 $h = 0.0625$
 $\epsilon = 0.0421$
 $r = 0.0002$
 $\alpha = hx10^{-4}$

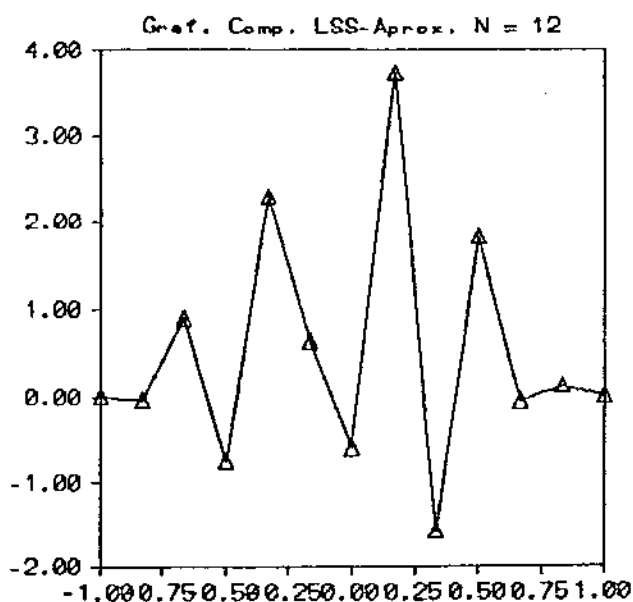


fig. 7

Na fig 6. observamos o comportamento da solução aproximada x_{α}^m para dois valores diferentes de n . Enquanto que na fig. 7, vemos o gráfico da solução aproximada, obtida com $\alpha = 0$.

Teste N^o 3

Equação Testada:

$$\int_0^1 e^{(s-t)^2} x(t) dt = y(s) \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Solução Exata:

$$x(t) = t(1-t)^2$$

Igual como no teste N^o 2, usamos informação apriori: $x(0) = x(1) = 0$. O sistema linear é formado igual como no caso anterior. Nos testes numéricos, além do caso de trabalharmos

com dados exatos, experimentamos a resolução do problema com dados perturbados. Para isto, tomamos a seguinte função perturbadora:

$$p(s) = \delta \cos(s/\delta^2).$$

E trabalhamos com o lado direito de (5.3): $y_\delta(s) = y(s) + p(s)$. Claramente, para cada $\delta > 0$, $\|y - y_\delta\|_0 \leq \delta$. A escolha de δ é realizada como função do número n associado ao subespaço V_m , por exemplo, $\delta = 1/n^2$, e a escolha do α é segundo o teor. (4.2.6). As soluções aproximadas podem ser vistos nas figs. 8-9.

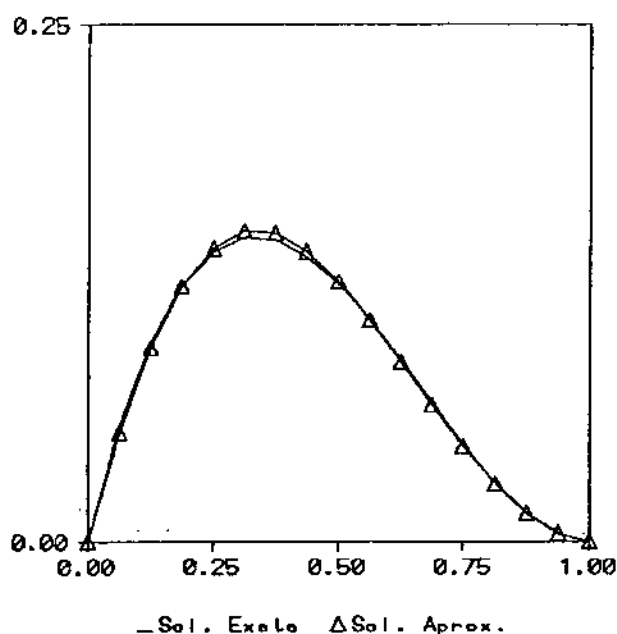


fig. 8

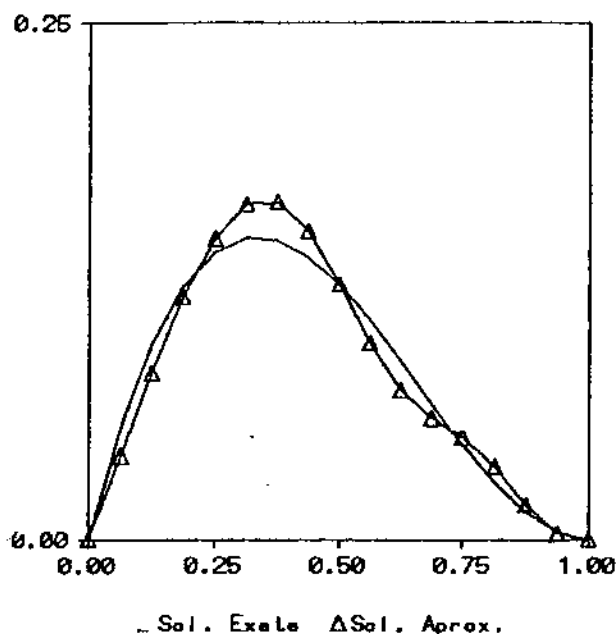


fig. 9

A fig. 9 ilustra a solução aproximada para o caso de dados perturbados. No que segue, apresentamos os resultados numéricos da experimentação.

Dados Exatos

$n = 16$
 $h = 0.0625$
 $\epsilon = 0.0016$

Dados Perturbados

$n = 16$
 $h = 0.0625$
 $\epsilon = 0.0097$

$$r = 0.0056$$

$$\delta = 0.0000$$

$$\alpha = h \times 10^{-4}$$

$$r = 0.0028$$

$$\delta = 0.0039$$

$$\alpha = 10^{-4} \delta$$

Com a finalidade de ilustrar a instabilidade do modelo, fizemos também, testes numéricos para esta equação, com os métodos de quadrados mínimos e de Galerkin. No primeiro caso, os resultados são como na primeira equação, isto é, a solução aproximada é fortemente oscilante. Para o método de Galerkin, com $n = 8$, a solução é satisfatória, porém; aumentando o valor de n a solução aproximada começa a ter comportamento oscilatório. No caso de dados perturbados, as oscilações são extremamente fortes. Ver fig. 10-11.

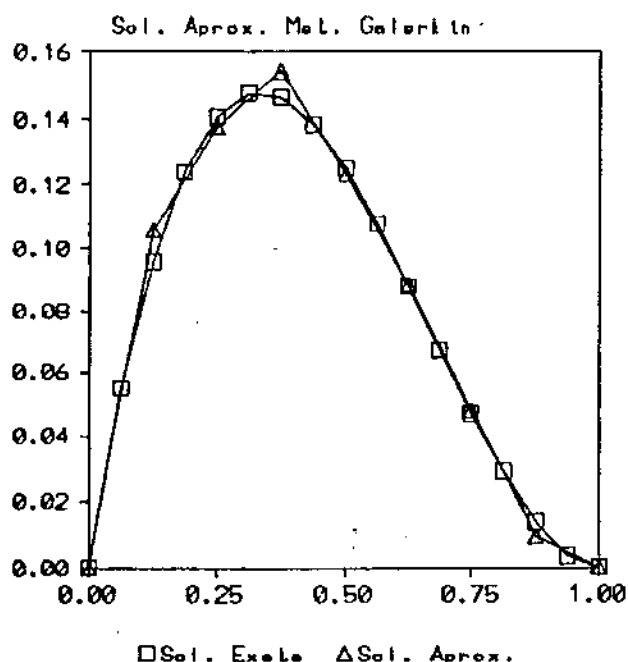


fig. 10

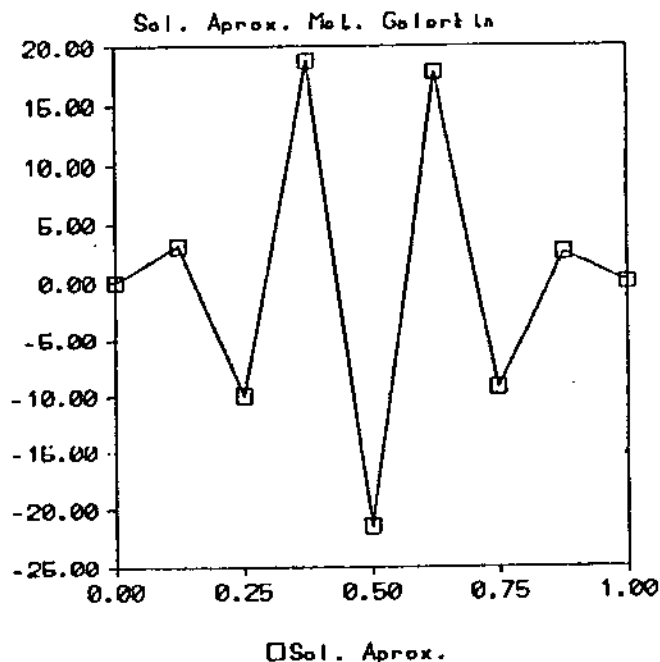


fig. 11

Teste N^o 4

Equação Testada:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(st) x(t) dt = y(s), \quad \pi \leq s \leq -\pi.$$

$$y(s) = 2\pi [Si[(1+s)n] + Si[(1-s)n]]$$

$$Si(s) = - \int_s^{+\infty} \frac{\text{Sen}t}{t} dt + \frac{\pi}{2}$$

$Si(s)$ é conhecida como função Seno Integral. A equação do nosso teste é típica na teoria de desenho de antenas [03]. Para este caso, a solução de norma mínima é:

$$x^+(t) = 2\pi \frac{\text{Sen}(t)}{t}, \quad t \neq 0.$$

Neste caso, assumimos também informação a priori, no sentido de que: $x^+(-\pi) = x^+(\pi) = 0$. Nos testes numéricos, trabalhamos com dados exatos e também com dados perturbados. Apresentamos unicamente, os resultados numéricos.

Caso 1: Dados Exatos

PARÂMETRO DE REGULARIZAÇÃO : ALFA = 0.00039481

NÚMERO DE SUB-INTERVALOS : N = 10

TAMANHO DO SUBINTERVALO : h = .62834

***** ERRO NA NORMA L-2 : 0.06426684

***** RESIDUO NA NORMA L-2 : 0.00684556

s	Sol. Aprx.	Sol. Ex.	Erro
-3.1417	0.00000000	-0.00017269	0.00017269
-2.5133	1.41326677	1.46932344	0.05605667
-1.8850	3.21208909	3.17013507	0.04195402
-1.2567	4.76881978	4.75533602	0.01348376
-0.6283	5.95720650	5.87799232	0.07921418
0.0000	6.33788534	6.28335810	0.05452724
0.6283	5.95720650	5.87799232	0.07921418
1.2567	4.76881978	4.75533602	0.01348376
1.8850	3.21208909	3.17013507	0.04195402
2.5133	1.41326677	1.46932344	0.05605667
3.1417	0.00000000	-0.00017269	0.00017269

Caso 2: Dados perturbados

PARÂMETRO DE REGULARIZAÇÃO : $\text{ALFA} = 0.00039481$
 NÚMERO DE SUBINTERVALOS : $N = 10$
 TAMANHO DO SUBINTERVALO : $h = .62834$
 TAMANHO DA PERTURBAÇÃO : $\text{DELTA} \leq 0.39480588$
 ***** ERRO NA NORMA L-2 : 0.60243759
 ***** RESIDUO NA NORMA L-2 : 0.67207359

s	Sol. Aprx.	Sol. Ex.	Erro
-3.1417	0.00000000	-0.00017269	0.00017269
-2.5133	1.37840292	1.46932344	0.09092052
-1.8850	3.13249797	3.17013507	0.03763710
-1.2567	5.11569062	4.75533602	0.36035460
-0.6283	5.32402710	5.87799232	0.55396523
0.0000	7.09450015	6.28335810	0.81114205
0.6283	5.32402710	5.87799232	0.55396523
1.2567	5.11569062	4.75533602	0.36035460
1.8850	3.13249797	3.17013507	0.03763710
2.5133	1.37840292	1.46932344	0.09092052
3.1417	0.00000000	-0.00017269	0.00017269

Para este caso, assumimos que $x^+ \in R(A^*)$ (ver teor. 4.2.6) e tomamos $\delta = h^2$. A perturbação do lado direito de (5.3) é com a mesma função $p(s)$ como no caso anterior. Vemos que a solução aproximada, satisfaz a ordem de aproximação estabelecida no teor. 4.2.6: $O(\delta^{1/2})$. Aumentando a dimensão do subespaço com $n = 20$, e tomando δ como antes obtivemos os seguintes resultados:

PARÂMETRO DE REGULARIZAÇÃO : ALFA = 0.00009870
 NÚMERO DE SUBINTERVALOS : N = 20
 TAMANHO DO SUBINTERVALO : h = .31417
 TAMANHO DA PERTURBAÇÃO : DELTA <= 0.09870147
 ***** ERRO NA NORMA L-2 : 0.08466607
 ***** RESIDUO NA NORMA L-2 : 0.05155405

s	Sol. Aprx.	Sol. Ex.	Erro
-3.1417	0.00000000	-0.00017269	0.00017269
-2.8275	0.59875663	0.68654020	0.08778357
-2.5133	1.38591074	1.46932344	0.08341269
-2.1992	2.30370216	2.31137565	0.00767349
-1.8850	3.18559521	3.17013507	0.01546014
-1.5708	3.99590789	4.00000006	0.00409217
-1.2567	4.75356060	4.75533602	0.00177541
-0.9425	5.41934755	5.39354822	0.02579934
-0.6283	5.91200041	5.87799232	0.03400808
-0.3142	6.19138211	6.18050422	0.01087789
0.0000	6.27771444	6.28335810	0.00564366
0.3142	6.19138211	6.18050422	0.01087789
0.6283	5.91200041	5.87799232	0.03400808
0.9425	5.41934755	5.39354822	0.02579934
1.2567	4.75356060	4.75533602	0.00177541
1.5708	3.99590789	4.00000006	0.00409217
1.8850	3.18559521	3.17013507	0.01546014
2.1992	2.30370216	2.31137565	0.00767349
2.5133	1.38591074	1.46932344	0.08341269
2.8275	0.59875663	0.68654020	0.08778357
3.1417	0.00000000	-0.00017269	0.00017269

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

O incessante estudo da natureza nos conduz frequentemente a resolver problemas inversos com a característica de ser mal postos. Em particular, problemas de tomografia, processamento de imagens, geofísica, astrofísica, sistemas eletrodinâmicos, ótica, teoria de espalhamento, etc; exigem a resolução de equações integrais de Fredholm de primeira espécie, que como sabemos necessitam de alguma técnica de regularização. É neste contexto, que o método de regularização de Tikhonov tem-se mostrado como uma eficaz ferramenta para contornar a instabilidade, que é a grande dificuldade associada a estas equações. Neste trabalho, comprovamos que o enfoque do método de Tikhonov, via teoria espectral, é uma forma muito conveniente de estudo, já que permite analisar facilmente as questões relacionadas com convergência e estimativas de erro das soluções aproximadas.

Nos experimentos numéricos simulamos casos reais, já que os lados direitos das equações testadas são construídos por integração numérica. Isto é, na prática trabalhamos com dados aproximados. Embora tenhamos feito testes para $n \leq 33$ (devido à limitação de memória do PC), podemos concluir que as estimativas teóricas da ordem de aproximação para as soluções aproximadas, foram atingidas. Portanto, fica comprovada que a combinação Tikhonov-Elementos Finitos, é uma técnica eficaz para a resolução de equações integrais de primeira espécie.

Com relação à escolha praticada para o parâmetro α , é

importante destacar que nem sempre $\alpha = 10xh^{-3}$ ou $\alpha = 10xh^{-4}$ é a melhor escolha. O que é bom para um caso, pode não ser para outro e vice versa. Escolhas muito pequenas do α podem conduzir a resultados inesperados, pois neste caso estaríamos quase no método de quadrados mínimos. Portanto, faz-se necessário pensar em outro tipo de escolhas para α . Sugerimos a leitura dos trabalhos publicados em [11].

Para trabalhos de pesquisa na direção de problemas mal postos, em particular para trabalhos que envolvam problemas de resolução de equações de primeira espécie, apresentamos as seguintes sugestões:

- Pesquisar métodos de regularização induzidos por funções regularizantes diferentes de $f(t) = (t+\alpha)^{-1}$, de maneira a obter taxas de convergência cada vez melhores.

- Usar o procedimento que consiste em aproximar o operador de $Ax = y$ em primeiro lugar, e depois regularizar segundo Tikhonov. Neste contexto, sugerimos aproximar o operador pelo esquema de projecção que toma $A_h \approx A$, com $A_h = Q_n A P_m$, onde P_m e Q_n são projecções ortogonais em X e Y sobre subespaços de dimensão finita V_m e U_n respectivamente. Neste trabalho, A foi aproximado por $A_h = A P_m$.

- Estudar a inversão numérica da transformada de Laplace no esquema do cap. IV, tomando V_m como sendo o subespaço gerado por polinômios ortogonais de Laguerre, com o seguinte produto interno:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} x(t)y(t)dt = (x,y).$$

- Partir para o estudo de regularização iterativa. Na atualidade, não conhecemos nenhum tratamento sistemático, de métodos iterativos para resolver problemas mal postos. Sugerimos a leitura dos trabalhos publicados em [11] e [57].

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [01] BABUSKA, I., AZIZ, A.K., Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method, The Mathematical Foundations of the Finite Element Method, A. K. Aziz, ed., Academic Press, New York, 1972, 83-91.
- [02] BAKUSHINSKII, A. B. and SIZIKOV, V. S., Some non-standard regularizing algorithms and their numerical realization, USSR Comput. Maths. Math Phys. Vol. 22, No 3, (1982) 532-539.
- [03] BAKUSHINSKII, A. B., A general method for constructing regularizing algorithms for ill-posed linear equation in a Hilbert space, USSR Comput. Maths. Math. Phys. Vol. 7, No 3, (1967) 672-677.
- [04] BAUMEISTER, J., Stable Solution of Inverse Problems, Edited by Gerd Fisher, Braunschwig, 1987.
- [05] BERTERO, M., Regularization Methods for Linear Inverse Problems, in Lec. Not. in Math., Springer-Verlag, Firenze, 1986.
- [06] BREZIS, W., Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications, Massons, Paris, 1983.
- [07] de BOOR, C., On local spline approximation by moments, J. Math Mech., 17 (1968), 729-735.
- [08] DUNFORD, N., SCHWARTZ, J. T., Linear Operators. Intersciencies, New York, 1958.
- [09] EMELIN, I. J. and KRASNOSEL'SKII, M. A., On the theory of ill-posed problems, Dokl. Akad. Nauk, USSR, 244, No 4 805-808, 1979.
- [10] ENGL, H. W., Necessary and Sufficient conditions for convergence of regularization methods for solving linear operator equations of the first kind, Numer. Funct. Anal. & Optimiz. 3 (1981), 201-222.
- [11] ENGL, H. W. , GROETSCH, C. W., Inverse and Ill-Posed Problems, Academic-Press, New York, 1987.
- [12] ENGL, H. W., NEUBAUER, A., Optimal parameter choice for ordinary and iterated Tikhonov Regularization, in [11].

- [13] ENGL, H. W., Methods for approximating solutions of ill-posed linear operator equations based on numerical functional analysis, in: MICHELLI, C. PAI, D., LIMAYE, B. (eds.), Methods of Functional Analysis in Approximation Theory, Birkhäuser, 1987.
- [14] FAIRWEATHER, G., Finite Element Galerkin Methods for Differential Equations, Dekker, New-York, 1978.
- [15] GOHBERG, I., GOLDBERG, S., Basic Operator Theory, Birkhäuser, Boston, 1981.
- [16] GROETSCH, C. W., On a class of regularization methods, Boll. Un. Mat. Ital., Ser. 17-B (1980), 1411-1419.
- [17] GROETSCH, C. W., Elements of Applicable Functional Analysis, Dekker, New-York, 1980.
- [18] GROETSCH, C. W., KING, J. T., MURIO, D., Asymptotic analysis of a finite element for Fredholm equations of the first kind, in Baker, C. T. H. Miller, G. F. (Eds.), Treatment of Integral Equations by Numerical Methods, Academic Press, London 1982.
- [19] GROETSCH, C. W., On the Asymptotic Order of Accuracy of Tikhonov Regularizations, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 41, 293-298.
- [20] GROETSCH, C. W., Generalized Inverses of Linear Operators, Approximation and Representation, Dekker, New-York, 1978.
- [21] HELMBERG, G.: Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space, North-Holland Publishing Company, 2^a Ed., 1975.
- [22] HILGERS, J. W., On the equivalence of regularization and certain reproducing Kernel Hilbert spaces approaches for solving first kind problems, SIAM J. Numer. Anal., 13 No 2, 172-184 (1976).
- [23] HSIAO, G. C., WEDLAND, W., A finite element method for some integral equations of the first kind, J. Math. Anal. and Appl. 58, 449-481, 1977.
- [24] IVANOV, V. K., The approximate solution of operator equations of the first kind, USSR Comput. Maths. Math. Phys., 6, 6 (1966), 197-205.
- [25] IVANOV, V. K., KOROLYUK, T. I., On the estimation of errors in the solution of ill-posed linear problems. Mat. Mat.

Fiz., 9, No 1, (1969) 30-41.

[26] KOLMOGOROV, A. N., FOMIN, S. V., Elementos de la Teoria de Funciones y del Análisis Funcional, MIR, Moscu, 1970.

[27] LAVRENT'EV, M., ROMANOV, M., Ill Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis, Translation of Mathematical Monographs, AMS, Vol. 64, Providence 1986.

[28] LINZ, P., Theoretical Numerical Analysis; an introduction to advanced techniques, New-York, Wiley, 1979.

[29] LIONS, J. L., MAGENES, E., Problèmes aux limites non homogènes et applications, Dunod, Paris, 1968.

[30] LISKOVETS, O. A., Theory an the Methods of Solution of Ill-Posed Problems, Journal of Soviet Mathematics, Vol. 34 - No 3 -August 1986.

[31] LUENBERGER, D. G., Optimization by Vector Space Methods. Wiley, 1969.

[32] MARTI, J. T., On the convergence of an algorithm computing minimum-norm solutions of ill-posed problems, Math. Comp. 34 (1980) 521-527.

[33] MEDEIROS, L. A., MIRANDA, M. M., Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferencias Parciais. UFRJ, Rio de Janeiro, 1989.

[34] Mc WIRTER, J. G. and PIKE E. R., On the numerical inversion of the Laplace transform and similar Fredholm integral equations of the first kind, J. Phys, A:Math. Gen., Vol. 11, No 9, 1978.

[35] MOROZOV, V. A., The error principle in the solution of operational equations by the regularization method, USSR Comput. Math. and Math. Phys. 8 (No 2) (1968), 63-87.

[36] MOROZOV, V. A., Methods for Solving Incorrectly Posed Problems, Springer, Berlin 1984.

[37] MILLER, K., Least square methods for ill-posed problems with a prescribed bound, SIAM J. Anal. 1, 52-74, 1970.

[38] NASHED, M. Z., On the moment discretization and least squares solutions of linear integrals equations of the first kind, J. Math. Anal. Appl. 53, 359-366, 1976.

[39] NASHED, M. Z., Generalized Inverses and Applications, Academic Press, New-York 1976.

[40] NATTERER, F., The finite Element Method for Ill-posed Problems. R.A.I.R.O. Analyse Numerique 11, 271-278, 1977.

[41] NATTERER, F., Numerical Analysis of Ill-Posed Problems, Trabalho No 145, Dpto. de Matemática Univ. Brasília, 1979.

[42] ODEN, J. T., An Introduction to the Mathematical Theory of finite Elements, Wiley-Interscience, New-York, 1976.

[43] ODEN, J. T., Applied Functional Analysis, A First Course for Students of Mechanics and Engineering Science, Prentice-Hall, inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1979.

[44] PHILIPS, D. L., A Technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind, J. Assoc. Comp. Mach. 9, 84-97, 1962.

[45] PLATO, R. VAINIKKO, G., On the Regularization of Projection Methods for solving Ill-Posed problems, Numer. Math. 57, 63-79 (1980).

[46] PRENTER, P., Splines and Variational Methods, Wiley, New York, 1975.

[47] REINHARDT, H. T., Analysis of Approximation Methods for Differential and Integral Equations, Applied Mathematical Sciences 57, Springer-Verlag 1985.

[48] RICHTER, G. R., Numerical solution of integral equations of the first kind with nonsmooth kernels, SIAM J. Numer. Anal. 15, 511-522, 1978.

[49] RUSHFORTH, C. K., Signal Restoration, Functional Analysis, and Fredholm Integral Equations of the first kind, in: Image Restoration and Reconstruction, Oxford, 1987 by BATES, R. H.

[50] TIKHONOV, A. N., Solution of incorrectly formulated problems and the regularization methods, Soviet. Math. Dokl. 4, 1035-1038, 1963.

[51] TIKHONOV, A. N., Regularizations of incorrectly posed problems, Soviet. Math. Dokl. 4, 1624-1627, 1963.

[52] TIKHONOV, A. N., ARSENIN, V. Y.: Solutions of Ill-Posed Problems, Wiley, New York, 1977.

[53] TIKHONOV, A. N., GONCHARSKY, A. V., Ill-Posed Problems in the Natural Sciences. Advances in Sciences and Technology in

the USSR, MIR Publishers, Moscow, 1987.

[54] TIKHONOV, A. N., On the stability of inverse problems, Doklady Akademii Nauk SSSR, 39, 5 (1943).

[55] TWONEY, S., On the numerical solutions of Fredholm integral equations by inversion of the linear system produced by quadrature. J. Assoc. Comput. Mach. 10, 97-101, 1963.

[56] VAINIKKO, G. M., The discrepancy principle for a class of Regularization Methods, USSR Comput. Maths. Math. Phys. Vol. 22 No 3, 1-19, 1982.

[57] VAINIKKO, G. M., On the optimality of Regularization Methods, in [11].