

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Instituto de Matemática, Estatística

e Computação Científica

Departamento de Matemática

A Correspondência Hitchin-Kobayashi

Rodrigo Pires dos Santos

Orientador: Prof. Dr. Marcos Benevenuto Jardim

A Correspondência Hitchin-Kobayashi

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Rodrigo Pires dos Santos e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 25 de fevereiro de 2011

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Marcos Benevenuto Jardim
2. Prof. Dr. Henrique Nogueira de Sá Earp
3. Prof. Dr. Henrique Bursztyn



Prof. Dr. Marcos Benevenuto Jardim

Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de MESTRE em matemática.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

<p>Santos, Rodrigo Pires dos</p> <p>Sa59c A correspondência Hitchin-Kobayashi/Rodrigo Pires dos Santos-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2011.</p> <p style="text-align: center;">Orientador : Marcos Benevenuto Jardim</p> <p style="text-align: center;">Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.</p> <p style="text-align: center;">1.Fibrados vetoriais. 2.Conexões (Matemática). 3.Quivers. I. Jardim, Marcos Benevenuto. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.</p>

Título em inglês: Hitchin-Kobayashi correspondence

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1.Vector bundles. 2.Connections (Mathematics).
3.Quivers.

Área de concentração: Geometria Diferencial

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Marcos Benevenuto Jardim (IMECC - UNICAMP)
Prof. Dr. Henrique Nogueira de Sá Earp (IMECC - UNICAMP)
Prof. Dr. Henrique Bursztyn (IMPA)

Data da defesa: 25/02/2011

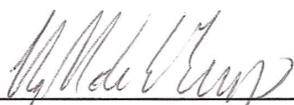
Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 25 de fevereiro de 2011 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof.(a). Dr(a). **MARCOS BENEVENUTO JARDIM**



Prof. (a). Dr (a). **HENRIQUE NOGUEIRA DE SÁ EARP**



Prof. (a). Dr (a). **HENRIQUE BURSZTYN**

Resumo

Apresentamos uma introdução aos conceitos de geometria complexa necessários à compreensão da correspondência Hitchin-Kobayashi. Enunciamos e provamos que todo fibrado que admite uma conexão de Hermite-Einstein é poliestável. Em seguida, discutimos resultados sobre Q -fibrados e enunciamos uma correspondência Hitchin-Kobayashi para esse caso. Por último, temos um resultado do autor que relaciona a estabilidade de fibrados com a estabilidade de Q -fibrados.

Abstract

We present an introduction to the concepts of complex geometry necessary to the comprehension of the Hitchin-Kobayashi correspondence. We state and prove that every holomorphic vector bundle which admits a Hermite-Einstein connexion is polystable. Then, we discuss results regarding quiver bundles and state a Hitchin-Kobayashi correspondence for this case. Finally, we state and prove an author's result which relates the stability of vector bundles with the stability of quiver bundles.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que me deu a força necessária para que eu pudesse concluir o mestrado. Gostaria de agradecer ao CNPq pela ajuda financeira. Sou grato aos meus pais, Ailson (in memoriam) e Dalila, pois sem eles eu não estaria aqui. Ao Henrique Sá Earp, que me fez tratar as coisas de uma maneira mais madura. Agradeço ao Marcos pela paciência e atenção nesse tempo de mestrado. Agradeço também a todos os amigos e professores com quem tive contato nesse período.

Rodrigo Pires dos Santos,
Fevereiro de 2011.

Então tomou Samuel uma pedra,
e a pôs entre Mizpá e Sem, e chamou
o seu nome Ebenézer; e disse:
Até aqui nos ajudou o Senhor.

(I Samuel 7, 11.)

Conteúdo

Resumo	iv
Abstract	iv
Agradecimentos	v
Introdução	1
1 Variedades complexas	3
1.1 Noções básicas de variedades diferenciáveis	4
1.2 Variedades complexas	5
1.3 Fibrados vetoriais complexos	7
1.4 Estruturas complexas	9
1.5 Variedades Kähler	12
2 Fibrados holomorfos e conexões	14
2.1 Fibrados holomorfos	14
2.2 Feixes	17
2.3 Conexões e Curvatura	19
2.4 Fibrados hermitianos	23
2.5 Conexões em fibrados holomorfos e conexão de Chern	25
3 Feixes Analíticos Coerentes	30
3.1 Sequências exatas de feixes	30
3.2 Cohomologia de feixes, Cohomologia de Čech e classe de Chern de fibrados de linha	34
3.3 Feixes Coerentes	40
3.4 Propriedades locais de Feixes Coerentes, torção e reflexividade	43
3.5 Fibrado Determinante	47
4 A Correspondência Hitchin-Kobayashi	49
4.1 Conexões de Hermite-Einstein	49
4.2 Estabilidade de Feixes	51
4.3 Estabilidade de fibrados de Hermite-Einstein	54
4.4 <i>Q</i> -feixes	56
4.5 Equação de vórtice e a correspondência <i>Hitchin-Kobayashi</i> para <i>Q</i> -fibrados	58

4.6 Resultado para Q -fibrados	59
Bibliografía	61

Introdução

A correspondência Hitchin-Kobayashi é um resultado que estabelece uma equivalência entre um conceito da geometria algébrica, a estabilidade de fibrados, com um conceito da geometria diferencial, a conexão de *Hermite-Einstein*. A estabilidade, que tem origem na teoria geométrica dos invariantes desenvolvida por D. Mumford, é um conceito muito bem compreendido em geometria algébrica e pode ser entendido como uma não degenerescência do fibrado. Por outro lado, a noção de conexão de *Hermite-Einstein* foi introduzida na década de 1980 por S. Kobayashi para fibrados holomorfos sobre variedades hermitianas, generalizando as conexões de *Kähler-Einstein* no fibrado tangente às variedades complexas. Essas conexões também generalizam a ideia de conexão autodual na teoria de *Yang-Mills*.

A história desse resultado começa em 1965 quando M. S. Narasimhan e C. S. Seshadri em [?] provaram que fibrados vetoriais holomorfos estáveis sobre uma superfície de Riemann X compacta são precisamente aqueles obtidos a partir de uma representação unitária projetiva do grupo fundamental de X . Em 1983, S. K. Donaldson demonstra este resultado utilizando técnicas de geometria diferencial [?], formulando o problema em termos de conexões. Tal formulação em termos de conexões sugeria a generalização a dimensões mais altas.

Em um trabalho de 1982, S. Kobayashi demonstrou que um fibrado holomorfo sobre uma variedade Kähler que admite conexão de *Hermite-Einstein* é soma direta de fibrados holomorfos estáveis [?]. Essa sequência de resultados levou N. Hitchin e S. Kobayashi a conjecturarem que a recíproca para esse último resultado também era verdadeira. Isso foi provado por S. K. Donaldson para fibrados sobre variedades projetivas em 1985, onde ele utiliza o método da equação do calor para demonstrar a existência da conexão de *Hermite-Einstein* [?]. Para variedades Kähler, isso por S. T. Yau e K. K. Uhlenbeck em 1986 [?] utilizando o método da continuidade. Vale ressaltar que para demonstrar esses resultados, deve-se provar a existência de solução de uma equação diferencial parcial cuja condição inicial é dada por uma condição algébrica no fibrado, a estabilidade.

Após esses trabalhos, surgiram outros resultados semelhantes para fibrados com algumas estruturas adicionais, como os fibrados de Higgs (N. Hitchin [?], 1987), sistemas coerentes (S. B. Bradlow [?], 1991) e triplas holomorfas (S. B. Bradlow e O. Garcia-Prada [?], 1996), entre outros. Fibrados com estruturas adicionais podem ser descritos de maneira unificada através de Q -fibrados¹, que são fibrados que também possuem uma estrutura adicional de *quivers*. Recentemente, O. Garcia-Prada e L. Alvarez-Consul demonstraram uma correspondência para os Q -fibrados em [?].

O principal objetivo desta dissertação é reescrever detalhadamente a demonstração da poliestabilidade de fibrados que admitem uma conexão de *Hermite-Einstein*. A demonstração

¹O original em inglês é *quiver-bundle*

que será apresentada aqui foi feita por M. Lübcke em [?]. No entanto, nos basearemos no texto de S. Kobayashi [?], páginas 178 e 179.

O texto está dividido em quatro capítulos. No primeiro, é feita uma introdução aos conceitos que serão utilizados no decorrer do texto, são eles: variedades complexas, fibrados complexos, estruturas complexas e variedades Kähler.

No segundo capítulo, serão introduzidos os principais objetos da dissertação, os fibrados holomorfos e as conexões. Na primeira seção é definido o conceito de fibrado holomorfo. Na segunda, é estabelecida a correspondência entre fibrados holomorfos sobre uma variedade complexa X e feixes de \mathcal{O} -módulos localmente livres. A terceira e quarta seções são dedicadas aos conceitos de conexões e métricas hermitianas respectivamente. O capítulo é encerrado com uma seção sobre conexões de Chern em fibrados holomorfos munidos de uma métrica hermitiana, essas conexões são caracterizadas por serem compatíveis com a estrutura holomorfa e a métrica hermitiana.

O terceiro capítulo trata dos feixes analíticos coerentes. As duas primeiras seções fazem uma introdução aos conceitos básicos de álgebra homológica de feixes. O principal resultado da segunda seção estabelece um isomorfismo entre o primeiro grupo de cohomologia de Čech do feixe \mathcal{O}^* , $H^1(X, \mathcal{O}^*)$, e o grupo de Picard da variedade X , que é o grupo das classes de isomorfismo de fibrados de linhas. A terceira seção introduz os feixes coerentes e a quarta resume os principais resultados que caracterizam tais feixes. Na quinta seção, define-se o fibrado determinante de um feixe coerente e, assim, torna-se possível o cálculo da primeira classe de Chern de um feixe coerente, isso nos permite calcular o grau de um feixe coerente.

O quarto capítulo é dedicado à correspondência de Hitchin-Kobayashi. A primeira trata das conexões de *Hermite-Einstein*. Na segunda, é definida a estabilidade de um fibrado holomorfo sobre uma variedade Kähler. Na terceira seção fazemos a demonstração da poliestabilidade de fibrados holomorfos que admitem uma métrica de *Hermite-Einstein*. A quarta e a quinta seção tratam do caso de Q -fibrados e uma correspondência *Hitchin-Kobayashi* para esse caso.

Finalmente, na última seção é enunciado e demonstrado um resultado do autor desta dissertação. O autor demonstra um resultado que estabelece uma relação entre a estabilidade de fibrados holomorfos e a de Q -fibrados para um exemplo concreto.

Capítulo 1

Variedades complexas

Neste capítulo, faremos uma breve introdução às variedades complexas. Antes, vamos definir os conceitos básicos de funções holomorfas em \mathbb{C}^n .

Notação 1.0.1. Denotaremos por $z = (z_1, \dots, z_n)$ um ponto em $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, onde fazemos a seguinte escolha de coordenadas

$$z_j = x_j + iy_j.$$

Para o espaço cotangente a um ponto em \mathbb{C}^n temos como geradores reais $\{dx_j, dy_j\}_{j=1}^n$. No que se segue, será mais útil trabalharmos com a base complexa $\{dz_j, d\bar{z}_j\}_{j=1}^n$, onde

$$\begin{aligned} dz_j &= dx_j + idy_j \text{ e} \\ d\bar{z}_j &= dx_j - idy_j. \end{aligned}$$

A base dual para o espaço tangente é

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_j} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \text{ e} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right). \end{aligned}$$

Agora, se $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ é C^∞ no aberto $U \subset \mathbb{C}^n$. Então, com a notação dada acima, a sua diferencial pode ser escrita como

$$df = \partial(f) + \bar{\partial}(f), \tag{1.0.1}$$

onde $\partial = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j}$ e $\bar{\partial} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$.

Definição 1.0.2. Uma função $f : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, diferenciável é *holomorfa* se $\bar{\partial}(f) = 0$ (Equação de Cauchy-Riemann).

Lembremos que uma função $f : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$, pode ser escrita em componentes $f = (f_1, \dots, f_m)$, onde $f_i : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ para cada i .

Definição 1.0.3. Uma função $f : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$, diferenciável é *holomorfa* se cada componente $f_i : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa.

1.1 Noções básicas de variedades diferenciáveis

Nesta dissertação, utilizaremos a seguinte definição de variedade diferenciável.

Definição 1.1.1. Uma *variedade diferenciável* (C^∞) é um espaço topológico M Hausdorff e que satisfaz o segundo axioma da enuberabilidade munido de uma cobertura aberta $\{U_i : i \in I\}$ e homeomorfismos $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$, onde cada $V_i \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, tal que as funções de transição $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ são C^∞ .

Na definição acima, exigimos que M seja Hausdorff e que satisfaça o segundo axioma da enuberabilidade, pois essas hipóteses nos permitem dizer que M é paracompacta. Portanto, poderemos usar partições da unidade.

Definição 1.1.2. Seja M uma variedade diferenciável e $\mathcal{U} = \{U_a\}$ uma cobertura de M por abertos. Uma *partição da unidade subordinada a \mathcal{U}* é uma coleção de funções diferenciáveis $\{\psi_a : M \rightarrow \mathbb{R}\}$ tais que:

- (i) $0 \leq \psi_a(x) \leq 1$ para todo a e todo $x \in M$,
- (ii) $\text{supp}(\psi_a) \subset U_a$,
- (iii) A coleção de suportes $\text{supp}(\psi_a)$ é localmente finita e
- (iv) $\sum_a \psi_a(x) = 1$ para todo $x \in M$.

Onde $\text{supp}(\psi_a) = \overline{\{x \in M \mid \psi_a \neq 0\}}$ e a condição 3. implica que a soma em 4. é sempre finita.

Teorema 1.1.3. ([?] página 54 Teorema 2.25) Seja M uma variedade diferenciável e $\mathcal{U} = \{U_a\}$ uma cobertura de M por abertos. Então, existe uma partição da unidade subordinada a \mathcal{U} .

Outro conceito em variedades diferenciáveis que será amplamente usado aqui é o de *métrica Riemanniana*.

Definição 1.1.4. Seja M uma variedade diferenciável e $T(X)$ seu fibrado tangente. Uma *métrica Riemanniana* em M é uma coleção de produtos internos g_x em $T(X)_x$ tal que dado qualquer par de campos de vetores $V, W \in C^\infty$ em X , a função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto g_x(V(x), W(x))$ é diferenciável.

Segue como consequência do teorema de existência de partição da unidade que toda variedade diferenciável admite métrica Riemanniana.

O próximo tópico é a *Cohomologia de de Rham*.

Definição 1.1.5. Seja M uma variedade diferenciável e $\Omega^p(X)$ o espaço das p -formas em M . Denote por $Z^p(M)$ o espaço das p -formas fechadas, isto é, $\omega \in \Omega^p(X)$ tais que $d(\omega) = 0$. Como $d^2 = 0$, temos $d(\Omega^{p-1}(M)) \subset Z^p(M)$. Assim,

$$H_{DR}^p(M) = \frac{Z^p(M)}{d(\Omega^{p-1}(M))}$$

é o p -ésimo grupo de cohomologia de de Rham.

1.2 Variedades complexas

Definição 1.2.1. Uma variedade diferenciável X é uma *variedade complexa* se admite uma cobertura por abertos $\{U_i : i \in I\}$ e homeomorfismos $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ para todo i , onde cada $V_i \subset \mathbb{C}^n$ é aberto, tais que as funções de transição $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ são holomorfas. Neste caso, a *dimensão complexa* de X é n , escrevemos $\dim(X) = n$.

Observação 1.2.2. Se $\dim(X) = n$, a dimensão da variedade diferenciável subjacente a X é $2n$. Sempre que dissermos dimensão referimo-nos à dimensão complexa de X , quando não for o caso isso será explicitado no texto.

Definição 1.2.3. Uma *função holomorfa* em uma variedade complexa X é uma função $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i) \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa para toda carta (U_i, φ_i) . Escrevemos $\mathcal{O}(U)$ para o anel de funções holomorfas em $U \subset X$.

Definição 1.2.4. Sejam X e Y duas variedades complexas. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é uma *função holomorfa* se para quaisquer cartas (U, φ) de X e (U', φ') de Y temos que $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(f^{-1}(U') \cap U) \rightarrow \varphi'(U')$ é holomorfa. Duas variedades complexas X e Y são *isomorfas* ou *biholomorfas* se existe uma bijeção holomorfa $f : X \rightarrow Y$ com inversa holomorfa.

Exemplo 1.2.5.

Espaço afim. \mathbb{C}^n é o exemplo mais simples de uma variedade complexa. Uma carta de \mathbb{C}^n é dada por $U = \mathbb{C}^n$ e $\varphi = id_{\mathbb{C}^n}$.

Exemplo 1.2.6.

Espaço projetivo complexo. O espaço projetivo complexo $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ é um dos mais importantes exemplos de variedade complexa. Ele é definido por

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$$

onde a ação de \mathbb{C}^* sobre $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})$ é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) &\rightarrow (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \\ (\lambda, (z_0, \dots, z_n)) &\mapsto (\lambda z_0, \dots, \lambda z_n) \end{aligned}$$

Para um ponto em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ escrevemos $(z_0 : \dots : z_n)$, onde $z_i \neq 0$ para algum $0 \leq i \leq n$. Assim, $(z_0 : \dots : z_n)$ e $(\lambda z_0 : \dots : \lambda z_n)$ são duas representações para o mesmo ponto em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

Vamos exibir as cartas locais. Primeiramente, vamos atribuir a $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ a topologia quociente dada pela ação acima. Em seguida, considere a cobertura padrão em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ dada pelos $n + 1$ abertos

$$U_i = \{(z_0 : \dots : z_n) | z_i \neq 0\} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n.$$

Observe que esses abertos formam uma cobertura para $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ e $U_i = \{(z_0 : \dots : z_n) | z_i = 1\}$, pois neste caso $(z_0 : \dots : z_i : \dots : z_n) = (\frac{z_0}{z_i} : \dots : 1 : \dots : \frac{z_n}{z_i})$.

Defina os mapas

$$\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad (z_0 : \dots : z_n) \mapsto (z_0, \dots, z_{i-1}, \widehat{z_i}, z_{i+1}, \dots, z_n)$$

com inversa

$$\varphi_i^{-1} : \mathbb{C}^n \rightarrow U_i, \quad (z_0, \dots, z_{n-1}) \mapsto (z_0 : \dots : z_{i-1} : 1 : z_i : \dots : z_{n-1}).$$

Então temos

$$\varphi_{ij}(z_0, \dots, z_n) = \left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i} \right).$$

Definição 1.2.7. Seja X uma variedade complexa de dimensão complexa n e $Y \subset X$. Y é uma *subvariedade complexa* de dimensão k se existe um sistema de coordenadas holomorfo (U_i, φ_i) tal que $\varphi_i : U_i \cap Y \rightarrow \varphi_i(U_i) \cap \mathbb{C}^k$ é homeomorfismo.

Observação 1.2.8.

Na definição acima, \mathbb{C}^k é mergulhado em \mathbb{C}^n via $(z_1, \dots, z_k) \mapsto (z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0)$.

Definimos a codimensão de Y em X por $\dim(X) - \dim(Y) = n - k$.

Todo aberto $U \subset X$ é naturalmente uma subvariedade de dimensão n .

Definição 1.2.9. Seja X uma variedade complexa. Uma *subvariedade analítica* de X é um subconjunto fechado $Y \subset X$ tal que para cada ponto $x \in X$, existe uma vizinhança aberta $U \subset X$ tal que $Y \cap U$ é o zero de finitas funções holomorfas $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{O}(U)$. Um ponto $y \in Y$ é *regular* se existe uma vizinhança U de y em X tal que $X \cap Y$ é uma subvariedade complexa de X . Denotamos o conjunto dos pontos regulares em Y por Y^* .

Definição 1.2.10. Uma subvariedade analítica Y de X é *irredutível* se ela não pode ser escrita como união de subvariedades analíticas $Y = Y_1 \cup Y_2$ tais que $Y_i \subset Y$.

Proposição 1.2.11. ([?] Proposição página 21) Uma subvariedade analítica Y de uma variedade complexa X é irredutível se e somente se Y^* é conexo.

Observação 1.2.12. No caso em que Y é irredutível, Y^* é uma subvariedade complexa de X . Isso nos permite fazer a seguinte definição.

Definição 1.2.13. A *dimensão* de uma subvariedade analítica Y irredutível é a dimensão da subvariedade complexa Y^* . No caso geral, a dimensão de Y é k se todas as suas componentes irredutíveis possuem dimensão k .

A seguir, enunciaremos alguns resultados importantes para variedades complexas. Alguns deles serão utilizados posteriormente na dissertação.

Teorema 1.2.14. ([?] página 10 Teorema 1.11) Seja X uma variedade complexa compacta e $f \in \mathcal{O}(X)$. Então f é uma função constante.

Corolário 1.2.15. Não existem subvariedades de \mathbb{C}^n de dimensão positiva.

Teorema 1.2.16. ([?] página 419 Teorema 44.40) (Teorema de extensão de Hartog) Seja X uma variedade complexa e Y uma subvariedade analítica de codimensão pelo menos 2. Se $f \in \mathcal{O}(X \setminus Y)$, então existe uma única extensão holomorfa de f em X , isto é, existe uma única $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $\tilde{f}|_{X \setminus Y} = f$.

Teorema 1.2.17. (Teorema da identidade) Se $f, g \in \mathcal{O}(U)$ são tais que $f|_V = g|_V$, onde $V \subset U$ é um aberto, então $f = g$ em U .

Proposição 1.2.18. Toda variedade complexa X é orientável, ou seja, existe uma *forma volume* $\text{vol}(X) \in \Omega^{2n}(X)$, onde $2n$ é a dimensão real de X .

1.3 Fibrados vetoriais complexos

Definição 1.3.1. Sejam M, E variedades diferenciáveis e $\pi : E \rightarrow M$ uma função diferenciável sobrejetiva. Dizemos que E é um fibrado complexo C^∞ de posto r com espaço base M e projeção π se:

- 1) A fibra $E_x = \pi^{-1}(x)$ é um espaço vetorial complexo de dimensão r e
- 2) existe uma cobertura U_i de X por abertos tais que para cada U_i temos um difeomorfismo $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^r$, chamada *trivialização local*, que faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\psi_i} & U_i \times \mathbb{C}^r \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi_1 \\ & M & \end{array}$$

onde $\pi_1 : U_i \times \mathbb{C}^r \rightarrow U_i$ é a projeção na primeira coordenada e temos um isomorfismo induzido $\psi_i|_x : E_x \rightarrow \{x\} \times \mathbb{C}^r$ que é \mathbb{C} -linear. Diremos que (U_i, ψ_i) é uma carta trivializante do fibrado.

Definição 1.3.2. Seja E um fibrado complexo com espaço base M e carta trivializante (U_i, ψ_i) , definimos as *funções de transição* por

$$g_{ij}(x) = (\psi_i \circ \psi_j^{-1})(x, \cdot) \in GL(r, \mathbb{C}) \quad \forall x \in U_i \cap U_j$$

Definição 1.3.3. Sejam E e F dois fibrados complexos sobre uma variedade M . Uma função diferenciável $\Psi : E \rightarrow F$ é um *morfismo de fibrados complexos* se o diagrama abaixo comuta e o mapa induzido $\Psi_x = \Psi|_{E_x} : E_x \rightarrow F_x$ é \mathbb{C} -linear.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Psi} & F \\ & \searrow \pi_E & \swarrow \pi_F \\ & M & \end{array}$$

Ψ é um isomorfismo de fibrados se, além de ser um morfismo entre fibrados, é um difeomorfismo entre E e F .

A proposição abaixo será muito útil e uma demonstração para o caso de Fibrados Principais pode ser encontrada em [?] volume I página 52 Proposição 5.2.

Proposição 1.3.4. As funções de transição de um fibrado satisfazem as seguintes relações, que são chamadas de *condições de cociclo*:

- (a) $g_{ij}(x) \cdot g_{ji}(x) = I \quad \forall x \in U_i \cap U_j$ e
- (b) $g_{ij}(x) \cdot g_{jk}(x) \cdot g_{ki}(x) = I \quad \forall x \in U_i \cap U_j \cap U_k$

Reciprocamente, dadas funções diferenciáveis $\{g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(\mathbb{C}^r)\}$ satisfazendo as relações (a) e (b) acima, então existe um único (a menos de isomorfismo) fibrado E com espaço base X e funções de transição $\{g_{ij}\}$.

Definição 1.3.5. Seja E um fibrado sobre M . Uma *seção diferenciável* do fibrado sobre um aberto $U \subset M$ é uma aplicação diferenciável $\sigma : U \rightarrow E$ tal que $\pi \circ \sigma = id_U$. Denotamos por $\Gamma(U, E)$ o espaço das seções diferenciáveis sobre o aberto U .

Definição 1.3.6. Um *referencial* sobre $U \subset M$ é uma coleção $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ de seções sobre U tal que $\{\sigma_1(x), \dots, \sigma_k(x)\}$ é uma base de E_x para todo $x \in U$.

Observação 1.3.7. Referencial e trivialização local são noções equivalentes. De fato, considere uma trivialização

$$\psi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^k,$$

as seções dadas por

$$\sigma_i(x) = \psi_U^{-1}(x, e_i)$$

definem um referencial sobre U .

Rciprocamente, dado um referencial $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ sobre U , podemos escrever $v = \sum v_i \sigma_i(x) \in E_x$ para cada $x \in U$. Dessa forma temos uma trivialização em U dada por

$$\psi_U(v) = (x, (v_1, \dots, v_k)).$$

Neste final de seção, faremos uso da proposição 1.4.5 para construirmos alguns fibrados.

Exemplo 1.3.8. Sejam E e F fibrados complexos sobre a mesma variedade M e com projeções $\pi : E \rightarrow M$ e $\tau : F \rightarrow M$. A *soma direta* de E e F é o fibrado complexo cujo espaço total é dado por

$$E \oplus F = \{(v, w) \in E \times F \mid \pi(v) = \tau(w)\}$$

e a projeção é dada por

$$\begin{aligned} E \oplus F &\rightarrow M \\ (v, w) &\mapsto \pi(v) = \tau(w). \end{aligned}$$

Note que as fibras de $E \oplus F$ são as somas diretas $E_x \oplus F_x$. Verifiquemos a trivialidade local: Se $\{\psi_a\}$ e $\{\phi_a\}$ são as trivializações de E e F , respectivamente, subordinadas a mesma cobertura. Suponha que $\{\psi_a\}$ e $\{\phi_a\}$ correspondam as funções de transição $\{g_{ab}\}$ e $\{h_{ab}\}$, respectivamente. Então, obtemos uma trivialização da soma direta dada por $\{(\psi_a \times \phi_a)|_{E \oplus F}\}$ que corresponde as funções de transição dadas por

$$g_{ab} \oplus h_{ab} = \begin{pmatrix} g_{ab} & 0 \\ 0 & h_{ab} \end{pmatrix}.$$

Exemplo 1.3.9. De forma análoga, podemos definir os seguintes fibrados complexos:

- O *produto tensorial* $E \otimes F$: as fibras são dadas por $E_x \otimes F_x$ e as funções de transição são $g_{ab} \otimes h_{ab}$.
- O *fibrado dual* E^* : as fibras são dadas por E_x^* e as funções de transição são $(g_{ab}^t)^{-1}$.
- Os *produtos exteriores* $\bigwedge^k E$: as fibras são os produtos exteriores $\bigwedge^k E_x$ e as funções de transição são dadas por $\underbrace{g_{ab} \wedge \dots \wedge g_{ab}}_{k \text{ vezes}}$. Como caso particular, se E é um fibrado

complexo de posto r , o seu fibrado determinante é $det(E) := \bigwedge^r E$.

1.4 Estruturas complexas

Nesta seção, V é um espaço vetorial real de dimensão d .

Definição 1.4.1. Um endomorfismo \mathbb{R} -linear de V , $J : V \rightarrow V$, é uma estrutura quase complexa em V se $J^2 = -I$, onde I é a identidade em V .

Note que se V admite uma estrutura quase complexa, então $d = 2n$ para algum n .

Observação 1.4.2. Se V admite uma estrutura quase complexa J , podemos equipar V com uma estrutura de espaço vetorial complexo da seguinte maneira:

$$(a + ib)v = av + bJ(v),$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $v \in V$, denotaremos esse espaço vetorial complexo por V_J . Reciprocamente, se V é um espaço vetorial, então o operador dado pela multiplicação por i é uma estrutura quase complexa em V .

Observação 1.4.3. Se v_1, \dots, v_n é uma base para V sobre \mathbb{C} , então $v_1, \dots, v_n, J(v_1), \dots, J(v_n)$ é uma base para V sobre \mathbb{R} .

Observação 1.4.4. Se V é um espaço vetorial real com estrutura quase complexa J , considere a complexificação de V , $V_c = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. O mapa linear J se estende a V_c fazendo $J(v \otimes a) = J(v) \otimes a$; dessa maneira, J ainda satisfaz $J^2 = -I$, mas possui autovalores i e $-i$. Sejam $V^{1,0}$ o autoespaço correspondente ao autovalor i e $V^{0,1}$ o autoespaço correspondente ao autovalor $-i$. Assim, temos uma decomposição

$$V_c = V^{1,0} \oplus V^{0,1}.$$

Considere a conjugação em V_c , definida por $\overline{v \otimes a} = v \otimes \bar{a}$. Essa operação nos dá um isomorfismo \mathbb{R} -linear $V^{1,0} \cong V^{0,1}$ ([?] página 26 Lema 1.2.5). Ainda mais, observe que $V^{1,0} \cong V_J$. Em particular, $\dim_{\mathbb{R}}(V^{1,0}) = \dim_{\mathbb{R}}(V^{0,1}) = n$.

Lema 1.4.5. ([?] página 26 Lema 1.2.6) Seja V um espaço vetorial real munido de uma estrutura quase complexa J . Então, o espaço dual $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R})$ possui uma estrutura quase complexa natural dada por $J(f)(v) = f(J(v))$, onde $f \in V^*$. A decomposição induzida em $(V_c)^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C}) = (V_c)^*$ é dada por

$$\begin{aligned} (V^*)^{1,0} &= \{f \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C}) \mid f(J(v)) = if(v)\} = (V^{1,0})^* \\ (V^*)^{0,1} &= \{f \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C}) \mid f(J(v)) = -if(v)\} = (V^{0,1})^*. \end{aligned}$$

Se V é um espaço vetorial real de dimensão d , a decomposição da sua álgebra exterior é

$$\bigwedge V = \bigoplus_{k=0}^d \bigwedge^k V.$$

Analogamente, $\bigwedge V_c$ denota a álgebra exterior de V_c , que se decompõe como

$$\bigwedge V_c = \bigoplus_{k=0}^d \bigwedge^k V_c.$$

Temos que $\bigwedge V_c = (\bigwedge V) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ e $\bigwedge V$ é o subespaço de $\bigwedge V_c$ que é invariante pela conjugação.

Definição 1.4.6. Seja V um espaço vetorial real de dimensão real d munido de uma estrutura quase complexa J . Definimos

$$\bigwedge^{p,q} V = \bigwedge^p V^{1,0} \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^q V^{0,1},$$

onde os produtos exteriores de $V^{1,0}$ e $V^{0,1}$ são tomados sobre \mathbb{C} . Um elemento $\alpha \in \bigwedge^{p,q}(V)$ tem *grau* (p, q) .

Proposição 1.4.7. ([?] página 27 Proposição 1.2.8) Para um espaço vetorial munido de uma estrutura quase complexa J , temos:

- (i) $\bigwedge^{p,q} V$ é canonicamente um subespaço de $\bigwedge^{p+q} V_c$,
- (ii) $\bigwedge^k V_c = \bigoplus_{p+q=k} \bigwedge^{p,q} V$ e
- (iii) $\overline{\bigwedge^{p,q} V} = \bigwedge^{q,p} V$.

A partir de agora, vamos utilizar esta construção algébrica para o fibrado tangente de uma variedade.

Definição 1.4.8. Seja M uma variedade diferenciável de dimensão real $2n$. Um isomorfismo diferenciável de fibrados $J : T(M) \rightarrow T(M)$ é uma *estrutura quase complexa* em M se $J^2 = -I$, onde I é o morfismo identidade em $T(M)$. Se M está equipado com uma estrutura quase complexa J , dizemos que o par (X, J) é uma *variedade quase complexa*.

Teorema 1.4.9. Toda variedade complexa induz uma estrutura quase complexa em sua variedade diferenciável subjacente.

Demonstração. [?] página 30 Proposição 3.4. □

Suponha que (X, J) seja uma variedade quase complexa. Então, podemos aplicar a álgebra linear anterior às fibras de $T(X)_c$. Daí, temos uma decomposição das fibras em soma direta $(T(X)_c)_x = T(X)_x^{1,0} \oplus T(X)_x^{0,1}$. No entanto, também temos uma decomposição em soma de fibrados, como mostra a próxima proposição.

Proposição 1.4.10. ([?] página 104,105 Proposição 2.6.4(i)) Seja (X, J) uma variedade quase complexa. Então, existe uma decomposição em soma direta de fibrados complexos

$$T(X)_c = T(X)^{1,0} \oplus T(X)^{0,1},$$

tal que as fibras de $T(X)^{1,0}$ e $T(X)^{0,1}$ são $T(X)_x^{1,0}$ e $T(X)_x^{0,1}$, respectivamente.

Notação 1.4.11. Os fibrados $T(X)^{1,0}$ e $T(X)^{0,1}$ são chamados de fibrados tangente *holomorfo* e *antiholomorfo*, respectivamente.

Sejam X uma variedade diferenciável, $T(X)_c = T(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ a complexificação do seu fibrado tangente e $(T(X)_c)^*$ o fibrado dual da complexificação do fibrado cotangente. Podemos tomar a potência exterior $\bigwedge^r T^*(X)$.

Definição 1.4.12. • As seções diferenciáveis de $\bigwedge^r (T(X)_c)^*$ são as *formas diferenciais de grau r com valores em \mathbb{C}* . Elas serão denotadas por $\Omega^r(X)_c = \Gamma(X, \bigwedge^r (T(X)_c)^*)$.

- As seções diferenciáveis de $\bigwedge^{p,q}(T(X)_c)^*$ são as *formas diferenciais de grau (p, q) com valores em \mathbb{C}* . Elas serão denotadas por $\Omega^{p,q}(X) = \Gamma(X, \bigwedge^{p,q}(T(X)_c)^*)$.

Proposição 1.4.13. ([?] página 106 Corolário 2.6.8) Existem decomposições em soma direta

$$\begin{aligned}\bigwedge^r(T(X)_c)^* &= \bigoplus_{p+q=r} \bigwedge^{p,q}(T(X)_c)^* \text{ e} \\ \Omega^r(X)_c &= \bigoplus_{p+q=r} \Omega^{p,q}(X).\end{aligned}$$

Na definição a seguir, utilizaremos a seguinte notação:

$$\Omega^*(X)_c = \bigoplus_{r=0}^n \Omega^r(X)_c.$$

Definição 1.4.14. Dadas as decomposições em soma direta acima, definimos as projeções canônicas:

$$\begin{aligned}\Pi^r : \Omega^*(X)_c &\rightarrow \Omega^r(X)_c \text{ e} \\ \Pi^{p,q} : \Omega^r(X)_c &\rightarrow \Omega^{p,q}(X).\end{aligned}$$

Observação 1.4.15. A diferencial exterior d pode ser estendida a $\Omega^r(X)_c$ para todo r por extensão \mathbb{C} -linear.

Definição 1.4.16. Definimos os operadores ∂ e $\bar{\partial}$ por

$$\begin{aligned}\partial &:= \Pi^{p+1,q} \circ d : \Omega^{p,q}(X) \rightarrow \Omega^{p+1,q}(X) \text{ e} \\ \bar{\partial} &:= \Pi^{p,q+1} \circ d : \Omega^{p,q}(X) \rightarrow \Omega^{p,q+1}(X).\end{aligned}$$

Observação 1.4.17. A regra de Leibniz para d implica imediatamente as regras de Leibniz para os operadores ∂ e $\bar{\partial}$.

Definição 1.4.18. Seja (X, J) uma variedade quase complexa, J é *integrável* se $d = \partial + \bar{\partial}$.

Observação 1.4.19. Existem outras maneiras equivalentes de se definir uma estrutura quase complexa integrável. Porém, não vamos nos aprofundar nessa direção. Para maiores detalhes, consultar as referências [?] páginas 27-35 e [?] páginas 104-110.

Teorema 1.4.20. ([?] página 34 Teorema 3.7) Seja X uma variedade complexa, então a estrutura quase complexa induzida na sua variedade real subjacente é integrável.

O seguinte teorema é um resultado muito importante na teoria de variedades devido a Newlander e Nirenberg.

Teorema 1.4.21. Seja (X, J) uma variedade quase complexa integrável. Então, existe uma única estrutura complexa em X , na definição usual, que induz a estrutura quase complexa J .

A partir de agora, quando dissermos que X é uma variedade complexa, estaremos supondo uma estrutura quase complexa integrável J induzida por X .

1.5 Variedades Kähler

Definição 1.5.1. Seja X uma variedade complexa. Uma métrica Riemanniana g em X é uma *métrica hermitiana* se $g(J(v), J(w)) = g(v, w)$ para todo $v, w \in T(X)_x$ e todo $x \in X$. A *forma fundamental* associada a g é $\omega := g(J(\cdot), (\cdot))$. Uma *variedade hermitiana* é uma variedade X munida de uma métrica hermitiana g , isso será denotado por (X, g) .

Lema 1.5.2. ([?] página 29 Lema 1.2.14) A forma fundamental ω de uma métrica hermitiana g é uma $(1, 1)$ -forma real, isto é, $\omega \in \Omega^{1,1}(X) \cap \Omega^2(X)$.

Definição 1.5.3. Uma variedade *Kähler* é uma variedade hermitiana (X, g) tal que $d\omega = 0$. Neste caso, dizemos que ω é a *forma de Kähler* de (X, g) .

Lema 1.5.4. Seja ω uma $(1, 1)$ -forma real numa variedade complexa X . Se ω é positiva definida (ω é localmente da forma $\omega = \sum h_{ij} dz_i \wedge d\bar{z}_j$ tal que $(h_{ij}(x))$ é uma matriz hermitiana positiva definida para todo $x \in X$). Então, existe uma métrica Kähler g em X cuja forma fundamental é ω .

Exemplo 1.5.5. A *métrica de Fubini-Study* é uma métrica Kähler canônica em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Tome a cobertura padrão $\mathbb{C}\mathbb{P}^n = \cup_{i=0}^n U_i$ e defina

$$\omega_i := \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log \left(\sum_{k=0}^n \left| \frac{z_k}{z_i} \right|^2 \right) \in \Omega^{1,1}(U_i).$$

Uma demonstração de que as ω_i colam numa $(1, 1)$ -forma real ω , globalmente definida e fechada em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ e, adicionalmente, ω é positiva definida estão em [?] páginas 117 e 118. Assim, pelo lema anterior, existe uma métrica g_{FS} em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ cuja forma fundamental é ω , que é usualmente denotada por ω_{FS} .

Exemplo 1.5.6. Seja (X, g) uma variedade Kähler e $Y \subset X$ uma subvariedade complexa de X . Então, a métrica $g|_Y$ é Kähler ([?] página 119 Proposição 3.1.10).

Definição 1.5.7. Lembremos que dada uma métrica Riemanniana g em uma variedade orientável X de dimensão m , podemos estender sua ação para cada um dos produtos exteriores $\bigwedge^r(X)$. Essa extensão também será chamada de g . Isso nos permite definir o operador ** de Hodge*, $*$: $\bigwedge^r T^*(X) \rightarrow \bigwedge^{m-r} T^*(X)$, que é determinado por

$$\alpha \wedge * \beta = g(\alpha, \beta) \text{vol}(X),$$

onde $\alpha, \beta \in \bigwedge^r(X)_x$ para algum $x \in X$ e $\text{vol}(X)$ é a forma volume de X .

Definição 1.5.8. Seja (X, g) uma variedade hermitiana com forma fundamental ω . Definimos:

- O *operador de Lefschetz*:

$$L : \bigwedge^r T^*(X) \rightarrow \bigwedge^{r+2} T^*(X)$$

$$\alpha \mapsto \omega \wedge \alpha.$$

- O dual do operador de Lefschetz Λ é o operador $\Lambda : \bigwedge^* T^*(X) \rightarrow \bigwedge^* T^*(X)$ que é o adjunto de L com respeito a g , isto é, $\Lambda\alpha$ é determinado por $g(\Lambda(\alpha), \beta) = g(\alpha, L(\beta))$ para todo $\beta \in \bigwedge^* T^*(X)$.

Lema 1.5.9. O operador de Lefschetz é tal que $\Lambda(\bigwedge^r T^*(X)) \subset \bigwedge^{r-2} T^*(X)$ (isso significa que Λ tem grau -2) e satisfaz $\Lambda = *^{-1} \circ L*$.

Observação 1.5.10. Podemos estender g e os operadores definidos acima para para os respectivos domínios complexificados.

- Extendemos g a $T(X)_c$ fazendo $g_x(v \otimes c, w \otimes d) = c\bar{d}g_x(v, w)$, para $v, w \in T(X)$. Para a generalização de g para formas, fazamos $g_x(\alpha \otimes c, \beta \otimes d) = c\bar{d}g_x(\alpha, \beta)$, para $\alpha, \beta \in \bigwedge^r T(X)^*$.
- O operador L de Lefschetz estendido por \mathbb{C} -linearidade continua sendo definido por $\alpha \mapsto \omega \wedge \alpha$ e tem grau $(1, 1)$, isto é, $L(\bigwedge^{p,q} T(X)^*) \subset \bigwedge^{p+1, q+1} T(X)^*$ ([?] página 31 observação 1.2.19).
- A extensão \mathbb{C} -linear do dual do operador de Lefschetz é $\Lambda(\alpha \otimes c) = c\Lambda(\alpha)$ e tem grau $(-1, -1)$ ([?] página 33 Lema 1.2.24)

Lema 1.5.11. ([?] página 39 exemplo 1.2.32) Para uma variedade hermitiana (X, g) com forma fundamental ω , temos as seguintes relações:

$$(i) *1 = \text{vol}(X) = \frac{1}{n!}\omega^n \text{ e}$$

$$(ii) *\omega = \frac{1}{(n-1)!}\omega^{n-1}.$$

Capítulo 2

Fibrados holomorfos e conexões

2.1 Fibrados holomorfos

Definição 2.1.1. Um *fibrado holomorfo* de posto r $\pi : E \rightarrow X$ sobre uma variedade complexa X é um fibrado complexo de posto r com uma estrutura de variedade complexa em E tal que as funções de transição $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^r$ são biholomorfas.

Note que no caso holomorfo as funções de transição g_{ij} são holomorfas.

Toda a discussão sobre fibrado complexo feita na seção 1.3 pode ser carregada para fibrados holomorfos. Em especial, vale a proposição 1.3.4 para o caso holomorfo. Também, podemos fazer as mesmas construções do caso diferenciável.

- A *soma direta* $E \oplus F$: as fibras são dadas por $E_x \oplus F_x$ e as funções de transição são $g_{ab} \oplus h_{ab}$.
- O *produto tensorial* $E \otimes F$: as fibras são dadas por $E_x \otimes F_x$ e as funções de transição são $g_{ab} \otimes h_{ab}$.
- O *fibrado dual* E^* : as fibras são dadas por E_x^* e as funções de transição são $(g_{ab}^t)^{-1}$.
- Os *produtos exteriores* $\bigwedge^k E$: as fibras são os produtos exteriores $\bigwedge^k E_x$ e as funções de transição são dadas por $\underbrace{g_{ab} \wedge \cdots \wedge g_{ab}}_{k \text{ vezes}}$. Como caso particular, se E é um fibrado

complexo de posto r , o seu fibrado determinante é $\det(E) := \bigwedge^r E$.

Definição 2.1.2. Uma seção $\sigma : U \rightarrow E$ é holomorfa se σ é holomorfo como mapa entre $U \subset X$ e E . Um *referencial* $f = \{e_1, \dots, e_r\}$ é holomorfo se cada e_i é uma seção holomorfa. Nesse caso, com relação ao referencial f , uma seção $\sigma = \sum_{i=1}^r \sigma_i e_i$ é holomorfa se e somente se cada σ_i é uma função holomorfa.

Exemplo 2.1.3. 1) (*Fibrado tangente holomorfo*). Seja X uma variedade complexa de dimensão n . Existe uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e um atlas $\{\{U_\alpha\}, \varphi_\alpha\}$ com $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ com $V_\alpha \subset \mathbb{C}^n$ um homeomorfismo e tal que as funções de transição $\varphi_{ij} := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$ são holomorfas. A matriz *Jacobiana* das funções de transição é definida por $J(\varphi_{ij})(\varphi_j(z)) := \left(\frac{\partial \varphi_{ij}^k}{\partial z_l}(\varphi_j(z)) \right)_{k,l}$. Definimos o fibrado tangente holomorfo de X como sendo o fibrado \mathcal{T} dado pela cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e funções de transição $g_{ij}(z) := J(\varphi_{ij})(\varphi_j(z))$.

- 2) (*O fibrado canônico*). Seja X uma variedade complexa de dimensão n e \mathcal{T} o seu fibrado holomorfo. O *fibrado canônico* de X é o fibrado $K := \det((T)^*)$.
- 3) (*O fibrado tautológico sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$*).

$\mathcal{O}(-1) = \{([z], v) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{C} ; v = \lambda z \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{C}^*\}$ tem estrutura de fibrado de linhas holomorfo sobre \mathbb{P}^n .

Defina a projeção

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{O}(-1) &\rightarrow \mathbb{P}^n \\ ([z], v) &\mapsto [z]. \end{aligned}$$

Sejam $U_i = \{[z_0 : z_1 : \dots : z_n] ; z_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}^n$. Vamos definir as trivializações locais por

$$\begin{aligned} \varphi_i : \pi^{-1}(U_i) &\rightarrow U_i \times \mathbb{C} \\ ([z], v) &\mapsto ([z], v_i) \end{aligned}$$

com inversa dada por

$$\begin{aligned} \varphi_i^{-1} : U_i \times \mathbb{C} &\rightarrow \pi^{-1}(U_i) \\ ([z], w) &\mapsto ([z], \frac{w}{z_i}). \end{aligned}$$

Sendo assim, as funções de transição são dadas por

$$\begin{aligned} g_{ij}([z]) : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ w &\mapsto \frac{z_i}{z_j} \cdot w. \end{aligned}$$

No restante desta seção, mostraremos que a condição para o fibrado ser holomorfo está intimamente relacionada com a existência de uma conexão parcial integrável do tipo $(0,1)$.

Definição 2.1.4. Seja E um fibrado vetorial complexo C^∞ sobre uma variedade complexa X . Uma *conexão parcial* do tipo $(0,1)$ em E é um operador

$$\bar{\delta} : \Gamma(E) \otimes \Omega^0(X) \rightarrow \Gamma(E) \otimes \Omega^{0,1}(X)$$

que satisfaz

$$\bar{\delta}(f\sigma) = \bar{\partial}(f) \otimes \sigma + f\bar{\delta}(\sigma)$$

para todos $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, com $U \subset X$, uma função C^∞ e $\sigma \in \Gamma(E)$.

Analogamente, uma *conexão parcial* do tipo $(1,0)$ em E é um operador

$$\delta : \Gamma(E) \otimes \Omega^0(X) \rightarrow \Gamma(E) \otimes \Omega^{1,0}(X)$$

que satisfaz

$$\delta(f\sigma) = \partial(f) \otimes \sigma + f\delta(\sigma)$$

para todos $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, com $U \subset X$, uma função C^∞ e $\sigma \in \Gamma(E)$.

Observação 2.1.5. Dada uma conexão parcial $\bar{\delta}$, podemos extendê-la como um operador

$$\bar{\delta} : \Gamma(E) \otimes \Omega^{p,q}(X) \rightarrow \Gamma(E) \otimes \Omega^{p,q+1}(X)$$

fazendo

$$\bar{\delta}(\varphi \otimes \sigma) = \bar{\partial}(\varphi) \otimes \sigma + (-1)^{p+q} \varphi \wedge \bar{\delta}(\sigma)$$

O mesmo vale para uma conexão parcial do tipo $(1, 0)$.

$$\delta : \Gamma(E) \otimes \Omega^{p,q}(X) \rightarrow \Gamma(E) \otimes \Omega^{p+1,q}(X)$$

fazendo

$$\delta(\varphi \otimes \sigma) = \partial(\varphi) \otimes \sigma + (-1)^{p+q} \varphi \wedge \delta(\sigma)$$

Definição 2.1.6. Uma estrutura holomorfa em E é uma conexão parcial do tipo $(0, 1)$ $\bar{\delta}$ integrável, isto é,

$$\bar{\delta}^2 = \bar{\delta} \circ \bar{\delta} = 0.$$

Teorema 2.1.7. Seja E um fibrado holomorfo de posto r sobre X . Então existe uma única conexão parcial integrável do tipo $(0, 1)$ em E .

Demonstração. Fixe um referencial holomorfo $f = \{e_1, \dots, e_r\}$ sobre um aberto $U \subset X$. Agora, para uma seção σ escreva $\sum_{i=1}^r f_i e_i$ e defina

$$\bar{\delta} = \sum_{i=1}^r \bar{\partial}(f_i) \otimes e_i. \quad (2.1.1)$$

Se $f' = \{e'_1, \dots, e'_r\}$ é um outro referencial holomorfo, encontramos um outro operador $\bar{\delta}'$. Vamos mostrar que $\bar{\delta}' = \bar{\delta}$. Se g é a matriz de mudança de referencial, isto é, $e_i = \sum_j g_{ij} e'_j$. Daí,

$$\begin{aligned} \bar{\delta}'(\sigma) &= \bar{\delta}' \left(\sum_i f_i \otimes e_i \right) = \bar{\delta}' \left(\sum_{i,j} f_i \otimes g_{ij} e'_j \right) \\ &= \bar{\delta}' \left(\sum_{i,j} f_i g_{ij} \otimes e'_j \right) = \sum_{i,j} \bar{\partial}(f_i g_{ij}) \otimes e_j \\ &= \sum_{i,j} \bar{\partial}(f_i) g_{ij} \otimes e'_j = \sum_{i,j} \bar{\partial}(f_i) \otimes g_{ij} e'_j \\ &= \sum_{i,j} \bar{\partial}(f_i) \otimes e_j = \bar{\delta}(\sigma). \end{aligned}$$

Isso prova que $\bar{\delta}$ é um operador global. A verificação da regra de Leibnitz e da integrabilidade seguem das propriedades de $\bar{\partial}$. \square

Observação 2.1.8. Se σ é uma seção holomorfa, então $\bar{\delta}(\sigma) = 0$.

Uma recíproca para este teorema será enunciado a seguir e a sua demonstração pode ser encontrada em [?] página 50.

Teorema 2.1.9. Seja E um fibrado complexo diferenciável sobre uma variedade complexa X . Se E admite uma conexão parcial do tipo $(0,1)$ integrável, então E admite uma única estrutura de fibrado holomorfo, no sentido da Definição 2.1.1, e tal que as seções holomorfas com relação a tal estrutura são exatamente as seções σ tais que $\bar{\delta}(\sigma) = 0$.

2.2 Feixes

O objetivo desta seção é introduzir a linguagem de feixes sobre espaços topológicos e estabelecer uma relação biunívoca entre feixes localmente livres sobre uma variedade complexa e fibrados holomorfos.

Definição 2.2.1. Um prefeixe \mathcal{F} sobre um espaço topológico X consiste dos seguintes dados:

- (a) para todo aberto $U \subset X$ temos um conjunto $\mathcal{F}(U)$ e
- (b) para cada par de abertos $V \subset U$, temos uma função (tais funções são chamadas de morfismos de restrição)

$$r_V^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V) \quad \text{tais que}$$

- 1 $r_U^U = id_U$ e
- 2 se $W \subset V \subset U$ então $r_W^U = r_W^V \circ r_V^U$.

Definição 2.2.2. Um morfismo de prefeixes $h : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ é uma coleção de morfismos

$$h_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$$

para cada aberto U de X tais que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{h_U} & \mathcal{G}(U) \\ r_V^U \downarrow & & \downarrow r_V^U \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{h_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

\mathcal{F} é subprefeixe de \mathcal{G} se os morfismos h_U são inclusões.

Observação: Na definição, consideramos $\mathcal{F}(U)$ na categoria de conjuntos, mas podemos considerá-lo em outra categoria. Neste caso, r_V^U e h_U devem ser morfismos desta categoria. Os elementos de $\mathcal{F}(U)$ são chamados de *seções* de \mathcal{F} sobre U .

Definição 2.2.3. Dizemos que um prefeixe sobre um espaço topológico X é um feixe se para todo aberto $U \subset X$ e toda cobertura aberta $\{U_i\}$ de U , \mathcal{F} satisfaz:

$$I \text{ se } s, t \in \mathcal{F}(U) \text{ e } r_{U_i}^U(s) = r_{U_i}^U(t) \forall i \text{ então } s = t \text{ e}$$

II se $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ e se para $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ temos $r_{U_i \cap U_j}^U(s_i) = r_{U_i \cap U_j}^U(s_j) \forall i$, então existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $r_{U_i}^U(s) = s_i \forall i$.

Um morfismo entre feixes \mathcal{F} e \mathcal{G} é um morfismo entre os prefeixes \mathcal{F} e \mathcal{G} .

Exemplo 2.2.4. • Seja $U \subset X$ um aberto e \mathcal{F} um feixe sobre X . Chamamos o feixe \mathcal{F}_U definido por $\mathcal{F}_U(V) = \mathcal{F}(V \cap U)$, de *feixe restrição*.

• Seja X uma variedade complexa e seja \mathcal{O}_X o prefeixe dado por:

- a) $\mathcal{O}_X(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ é holomorfa}\}$
- b) Se $f \in \mathcal{O}_X(U)$ e $V \subset U$, definimos $r_V^U = f|_V$.

\mathcal{O}_X é um feixe de anéis, chamado *feixe de funções holomorfas sobre X* .

Definição 2.2.5. Seja \mathcal{R} um feixe de anéis sobre um espaço topológico X e \mathcal{M} um feixe de módulos também sobre X . Se, para todo aberto $U \subset X$, $\mathcal{M}(U)$ tem estrutura de $\mathcal{R}(U)$ -módulo tal que para $\alpha \in \mathcal{R}(U)$, $f \in \mathcal{M}(U)$ e $V \subset U$ temos $r_V^U(\alpha f) = \rho_V^U(\alpha)r_V^U(f)$, onde r_V^U são morfismos de restrição de \mathcal{M} e ρ_V^U , de \mathcal{R} , dizemos que \mathcal{M} é um feixe de \mathcal{R} -módulos.

Exemplo 2.2.6. Seja E um fibrado holomorfo. Definimos um prefeixe $\Gamma(E)$, fazendo $\Gamma(E)(U) = \Gamma(U, E)$, para $U \subset X$ aberto, com as restrições $r_V^U(\sigma) = \sigma|_V$ se $V \subset U$. $\Gamma(E)$ é de fato um feixe e é chamado *feixe de seções holomorfas do fibrado vetorial E* . $\Gamma(E)(U)$ admite uma estrutura de $\mathcal{O}_X(U)$ -módulo para cada aberto $U \subset X$ (se $\sigma \in \Gamma(E)(U)$, e $f \in \mathcal{O}_X(U)$ definimos $(f\sigma)(x) = f(x)\sigma(x)$). A ação assim definida, faz de $\Gamma(E)$ um feixe de \mathcal{O}_X -módulos.

Definição 2.2.7. Seja \mathcal{R} um feixe de anéis comutativos sobre um espaço topológico X .

- a) Defina \mathcal{R}^p como sendo o prefeixe $\mathcal{R}^p(U) = \mathcal{R}(U) \oplus \dots \oplus \mathcal{R}(U)$. De fato \mathcal{R}^p é um feixe de \mathcal{R} -módulos chamado de **soma direta** de \mathcal{R} .
- b) Se \mathcal{M} é um feixe de \mathcal{R} -módulos sobre X e $\mathcal{M} \cong \mathcal{R}^p$, dizemos que \mathcal{M} é um **feixe livre** de módulos.
- c) Seja \mathcal{M} um feixe de \mathcal{R} -módulos sobre um espaço topológico X tal que todo $x \in X$ possua vizinhança aberta U tal que $\mathcal{M}|_U$ é livre, dizemos que \mathcal{M} é um **feixe localmente livre**.

Exemplo 2.2.8. Seja $\Gamma(E)$ o feixe de \mathcal{O}_X -módulos definido no último exemplo. Vamos mostrar que $\Gamma(E)$ é localmente livre.

Para cada $x \in X$, existe um aberto trivializante para o fibrado E , isto é, temos um homeomorfismo $E|_U \cong U \times \mathbb{C}^r$, onde r é o posto do fibrado E . Segue-se que $\Gamma(E)|_U \cong \Gamma(U \times \mathbb{C}^r)$. Afirmamos que $\Gamma(U \times \mathbb{C}^r) \cong \mathcal{O}|_U \oplus \dots \oplus \mathcal{O}|_U$. De fato, seja $f \in \Gamma(U \times \mathbb{C}^r)(V)$ (para algum $V \subset U$ aberto), então $f(x) = (x, g(x))$, onde $g : V \rightarrow \mathbb{C}^r$ é holomorfa. Podemos escrever $g = (g_1, \dots, g_r)$, com cada g_i holomorfa, isto é, $g_i \in \mathcal{O}|_U(V)$. Assim, vamos fazer a identificação para cada $V \subset U$

$$\begin{aligned} \Gamma(U \times \mathbb{C}^r)(V) &\rightarrow \mathcal{O}|_U(V) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}|_U(V) \\ f &\mapsto (g_1, \dots, g_r) \end{aligned}$$

que é um isomorfismo de feixes.

Teorema 2.2.9. Seja X uma variedade complexa e conexa. Então existe uma correspondência biunívoca entre classes de isomorfismo de fibrados holomorfos em X e classes de isomorfismo de feixes localmente livres de \mathcal{O}_X -módulos.

Demonstração. A correspondência é dada por

$$E \mapsto \Gamma(E)$$

Já vimos acima que $\Gamma(E)$ é localmente livre.

Agora, devemos construir um fibrado holomorfo a partir de um feixe localmente livre, isto é, construir uma inversa para a correspondência acima. Seja \mathcal{L} um feixe localmente livre de \mathcal{O}_X -módulos. Então, podemos encontrar uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de X tal que temos um isomorfismo

$$g_\alpha : \mathcal{L}|_{U_\alpha} \rightarrow \mathcal{O}_X^r|_{U_\alpha}$$

Defina

$$g_{\alpha\beta} := g_\alpha \circ g_\beta^{-1} : \mathcal{O}_X^r|_{U_\alpha \cap U_\beta} \rightarrow \mathcal{O}_X^r|_{U_\alpha \cap U_\beta}$$

que também é isomorfismo de feixes. Assim, temos que o isomorfismo de $\mathcal{O}_X(U_\alpha \cap U_\beta)$ -módulos

$$(g_{\alpha\beta})_{U_\alpha \cap U_\beta} : \mathcal{O}_X(U_\alpha \cap U_\beta)^r \rightarrow \mathcal{O}_X(U_\alpha \cap U_\beta)^r$$

é uma matriz não singular com entradas em $\mathcal{O}_X(U_\alpha \cap U_\beta)$, ou seja,

$$(g_{\alpha\beta})_{U_\alpha \cap U_\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(r, \mathbb{C}).$$

Definindo $\psi_{\alpha\beta} := (g_{\alpha\beta})_{U_\alpha \cup U_\beta}$, temos que $\psi_{\alpha\beta}$ satisfaz as condições de cociclo e portanto definem um único fibrado vetorial holomorfo sobre X . □

Observação 2.2.10. Um morfismo de fibrados holomorfos $f : E \rightarrow F$ induz um morfismo entre os feixes localmente livre associados a E e F $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$, dado por $\varphi_U(\sigma) = f \circ \sigma$. Reciprocamente, podemos definir um morfismo de fibrados a partir de um morfismo de feixes localmente livres.

2.3 Conexões e Curvatura

Definição 2.3.1. Uma *conexão* em E é um operador

$$\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E) \otimes \Omega_{\mathbb{C}}^p(X) \cong \Gamma(E \otimes \bigwedge_{\mathbb{C}}^p(X))$$

que satisfaz a regra de Leibnitz

$$\nabla(f\sigma) = df \otimes \sigma + f\nabla\sigma, \tag{2.3.1}$$

$\forall f : U \rightarrow \mathbb{C} \in C^\infty(X)$ e $\forall \sigma \in \Gamma(U, E)$.

Exemplo 2.3.2. Seja E o fibrado de linhas trivial sobre X , isto é, $E = X \times \mathbb{C}$. Observando que toda seção em E é da forma $\sigma(x) = (x, f(x))$ para algum $f \in C^\infty(X)$, podemos definir uma conexão fazendo

$$\nabla(\sigma) = 1 \otimes df,$$

onde 1 é a seção constante $(x, 1)$. Dessa maneira, vemos que uma conexão é uma generalização da diferenciação exterior para formas com valores em E .

Agora queremos fazer uma descrição local para a conexão. Seja $f = \{e_1, \dots, e_k\}$ um referencial C^∞ para E sobre um aberto $U \subset X$ e ∇ uma conexão em E . Assim, podemos escrever

$$\nabla(e_i) = \sum_{j=1}^k \theta_{ij} e_j, \quad (2.3.2)$$

onde $\theta_{ij} \in \Omega_{\mathbb{C}}^1(X)$ para todo i, j .

Definição 2.3.3. A matriz de 1-formas $\theta = (\theta_{ij})$ é a *matriz de conexão* de ∇ com relação ao referencial f .

Em termos da matriz de conexão, podemos representar explicitamente a ação da conexão em seções de E . Ou seja, dada uma seção $\sigma \in \Gamma(U, E)$ podemos escrever com relação ao referencial f

$$\sigma = \sum_{i=1}^k \sigma_i e_i,$$

com $\sigma_i : U \rightarrow \mathbb{C}$ funções C^∞ .

Daí,

$$\nabla(\sigma) = \nabla\left(\sum_{i=1}^k \sigma_i e_i\right) \quad (2.3.3)$$

$$= \sum_i d\sigma_i \otimes e_i + \sum \sigma_i \nabla(e_i) \quad (2.3.4)$$

$$= \sum_j (d\sigma_j + \sum_i \sigma_i \theta_{ij}) \otimes e_j. \quad (2.3.5)$$

A matriz de conexão depende do referencial escolhido. A próxima proposição nos diz como a matriz de conexão se comporta numa mudança de referencial e também sob quais condições podemos definir uma conexão a partir de matrizes de 1-formas dadas.

Proposição 2.3.4. Seja ∇ uma conexão em E e sejam θ_f e $\theta_{f'}$ matrizes de ∇ sobre $U \subset X$ com relação aos referenciais $f = \{e_1, \dots, e_k\}$ e $f' = \{e'_1, \dots, e'_k\}$ respectivamente, então $\theta_{f'} = (dg)g^{-1} + g(\theta_f)g^{-1}$, onde $g : U \rightarrow GL(\mathbb{C}^k)$ é a mudança de referencial $e'_i(x) =$

$\sum_{j=1}^k g_{ij} e_j$. Reciprocamente, dada uma cobertura $\{U_\alpha\}$ de X por abertos com referenciais f_α e matrizes de 1-formas θ_α para cada aberto U_α , tais que para $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ temos $\theta_{f_\beta} = (dg_{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}(\theta_{f_\alpha})g_{\alpha\beta}^{-1}$, onde $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(\mathbb{C}^k)$ é a matriz de mudança de referencial de f_α para f_β , então existe uma conexão ∇ em E cujas matrizes de conexão são θ_α .

Demonstração. Aplicando a equação acima para $\sigma = e'_i$ e $\sigma_i = g_{ji}$, temos

$$\begin{aligned}\nabla(e'_i) &= \sum_j dg_{ij} \otimes e_j + \sum_{j,k} g_{ik} \theta_{e_{kj}} \otimes e_j \\ &= \sum_j (dg_{ij} + \sum_k g_{ik} \theta_{e_{kj}}) \otimes e_j.\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\nabla(e'_i) = \sum_l \theta_{e'_{il}} \otimes e'_i = \sum_l \theta_{e'_{il}} \otimes \left(\sum_j g_{lj} e_j \right) = \sum_j \left(\sum_l \theta_{e'_{il}} g_{lj} \right) \otimes e_j.$$

Comparando os coeficientes, temos a igualdade. \square

Teorema 2.3.5. Todo fibrado vetorial admite conexão.

Dada uma conexão num fibrado vetorial, podemos questionar se essa conexão é única. A resposta é não ([?] página 173 Proposição 4.2.3). No entanto, se adicionarmos uma estrutura holomorfa e uma estrutura hermitiana ao fibrado, existe uma maneira de se definir uma conexão de maneira única, a chamada conexão de Chern. Isso será explorado nas seções posteriores.

Definição 2.3.6. Dada uma conexão ∇ em um fibrado vetorial E , podemos generalizar a ação de ∇ para p -formas com valores no fibrado da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\nabla : \Gamma(E) \otimes \Omega_{\mathbb{C}}^p(X) &\rightarrow \Gamma(E) \otimes \Omega_{\mathbb{C}}^{p+1}(X) \\ \nabla(\alpha \otimes \sigma) &= d\alpha \otimes \sigma + (-1)^p \alpha \wedge \nabla(\sigma),\end{aligned}$$

onde $\alpha \in \Omega_{\mathbb{C}}^p(X)$ e $\sigma \in \Gamma(E)$.

Lema 2.3.7. Se $\beta \in \Omega_{\mathbb{C}}^k(X)$, $t \in \Gamma(E) \otimes \Omega_{\mathbb{C}}^l(X)$, então

$$\nabla(\beta \wedge t) = d\beta \wedge t + (-1)^k \beta \wedge \nabla(t).$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, assumamos $t = \alpha \otimes \sigma$, para $\sigma \in \Gamma(E)$ e $\alpha \in \Omega_{\mathbb{C}}^l(X)$. Daí,

$$\begin{aligned}\nabla(\beta \wedge t) &= \nabla((\beta \wedge \alpha) \otimes \sigma) \\ &= (\beta \wedge \alpha) \otimes \sigma + (-1)^{k+l} (\beta \wedge \alpha \wedge \nabla(\sigma)) \\ &= (\beta \wedge \alpha) \otimes \sigma + (-1)^k (\beta \wedge d\alpha) \otimes \sigma + (-1)^l (\beta \wedge \alpha \wedge \nabla(\sigma)) \\ &= (\beta \wedge \alpha) \otimes \sigma + (-1)^k \beta \wedge \nabla(t).\end{aligned}$$

\square

Embora uma conexão possa ser pensada como uma generalização da derivada exterior, em geral não temos $\nabla \circ \nabla = 0$. A obstrução para que ela seja uma derivada exterior é medida por sua curvatura, um conceito que será explicado agora.

Definição 2.3.8. A *curvatura* F_∇ da conexão ∇ em E é a composição

$$F_\nabla = \nabla \circ \nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E) \otimes \Omega_{\mathbb{C}}^2(X).$$

Proposição 2.3.9. F_∇ é linear sobre as funções diferenciáveis em X para qualquer conexão ∇ .

Demonstração. Para $\sigma \in \Gamma(U, E)$, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função diferenciável e usando o lema anterior temos

$$\begin{aligned} F_\nabla(f\sigma) &= \nabla(\nabla(f\sigma)) \\ &= \nabla(df \otimes \sigma + f\nabla(\sigma)) \\ &= d^2(f) \otimes \sigma - df \wedge \nabla(\sigma) + df \wedge \nabla(\sigma) + f\nabla^2(\sigma) \\ &= fF_\nabla(\sigma). \end{aligned}$$

□

Essa proposição nos permite dizer que F_∇ é uma 2-forma com valores nos endomorfismos de E , isto é, $F_\nabla \in \Gamma(\text{End}E) \otimes \Omega_{\mathbb{C}}^2(X)$.

Faremos um tratamento local com a curvatura da mesma maneira que fizemos com as conexões. Seja $f = \{e_1, \dots, e_r\}$ um referencial C^∞ de E sobre um aberto $U \in X$. Podemos escrever

$$F_\nabla(e_i) = \sum \Theta_{ij} \otimes e_j,$$

com $\Theta_{ij} \in \Omega_{\mathbb{C}}^2(X)$.

Definição 2.3.10. A matriz de 2-formas dada por $\Theta = (\Theta_{ij})$ é a *matriz de curvatura* da conexão ∇ com relação ao referencial f .

Proposição 2.3.11. Sejam $f = \{e_1, \dots, e_r\}$ e $f' = \{e'_1, \dots, e'_r\}$ dois referenciais de E sobre um aberto $U \in X$. Então as matrizes de curvatura em relação aos referenciais dados satisfazem

$$\Theta_{f'} = g\Theta_f g^{-1},$$

onde g é a matriz de mudança de referencial.

Demonstração.

$$\begin{aligned} F_\nabla(e'_i) &= F_\nabla\left(\sum_j g_{ij}e_j\right) \\ &= \sum_j g_{ij}F_\nabla(e_j) \\ &= \sum_{j,k} g_{ij}\Theta_{jk} \otimes e_k \\ &= \sum_{j,k,l} g_{ij}\Theta_{jk}g_{kl}^{-1} \otimes e'_l, \end{aligned}$$

onde g_{kl}^{-1} é entrada (k, l) da matriz g^{-1} .

□

O próximo resultado relaciona a matriz de conexão com a de curvatura para uma conexão.

Proposição 2.3.12. (Equação de Cartan) Seja E um fibrado com conexão, então as matrizes de curvatura Θ e de conexão θ com relação a um referencial $f = \{e_1, \dots, e_r\}$ satisfazem

$$\Theta = d\theta - \theta \wedge \theta.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} F_{\nabla}(e_i) &= \nabla\left(\sum_j \theta_{ij} \otimes e_j\right) \\ &= \sum_j d\theta_{ij} \otimes e_j - \sum_j \theta_{ij} \wedge \left(\sum_k \theta_{jk} \otimes e_k\right) \\ &= \sum_j d\theta_{ij} \otimes e_j - \sum_{jk} (\theta_{ij} \wedge \theta_{jk}) \otimes e_k \\ &= \sum_j (d\theta_{ij} - \sum_k \theta_{ik} \wedge \theta_{kj}) \otimes e_j. \end{aligned}$$

□

2.4 Fibrados hermitianos

Nesta seção vamos definir métrica hermitiana e o conceito de conexão compatível com esta métrica.

Definição 2.4.1. Seja E um fibrado vetorial sobre uma variedade $C^\infty X$. Uma *métrica hermitiana estrutura hermitiana* h em E é um produto interno hermitiano h_x em cada fibra E_x que depende diferenciavelmente de x , isto é

- $h_x(u_1 + \lambda u_2, v) = h_x(u_1, v) + \lambda h_x(u_2, v)$ para $u_1, u_2, v \in E_x$ e $\lambda \in \mathbb{C}$,
- $h_x(u, v) = \overline{h_x(v, u)}$ para $u, v \in E_x$,
- $h_x(u, u) > 0$ para $u \neq 0$ e
- $h(\sigma, \tau)$ é uma função C^∞ para quaisquer seções C^∞ de E . A notação (E, h) significa que E é um fibrado vetorial hermitiano.

Assim como foi feito para conexões, vamos fazer uma descrição local da estrutura hermitiana num fibrado vetorial.

Definição 2.4.2. Dados um fibrado vetorial hermitiano (E, h) e um referencial $C^\infty f = \{e_1, \dots, e_r\}$ sobre um aberto $U \subset X$. A matriz H com entradas $h_{ij} = h(e_i, e_j)$ é a *matriz da estrutura hermitiana* h com relação ao referencial f .

Proposição 2.4.3. (Mudança de coordenadas) Seja (E, h) um fibrado hermitiano e H_f e $H_{f'}$ matrizes de h com relação aos referenciais $f = \{e_1, \dots, e_r\}$ e $f' = \{e'_1, \dots, e'_r\}$ respectivamente. Então

$$H_{f'} = g H_f \bar{g}^t, \tag{2.4.1}$$

onde g é a matriz que leva f a f' .

Demonstração. Sejam h'_{ij} as entradas da matriz $H_{f'}$ e h'_{ij} as entradas da matriz H_f . Temos que

$$\begin{aligned} h'_{ij} &= h(e'_i, e'_j) \\ &= h\left(\sum_{k=1}^r g_{ik} e_k, \sum_{l=1}^r g_{jl} e_l\right) \\ &= \sum_{k,l} g_{ik} \overline{g_{jl}} h(e_k, e_l) \\ &= \sum_{k,l} g_{ik} h_{kl} \overline{g_{jl}}. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.4.4. Todo fibrado vetorial complexo admite métrica hermitiana.

Demonstração. Esse resultado é consequência do teorema de existência de partição da unidade. Sua demonstração detalhada pode ser encontrado em [?] página 68 Teorema 1.2. □

O restante da seção será dedicado a conexões compatíveis com uma estrutura hermitiana.

Dado um fibrado hermitiano (E, h) vamos estender h de maneira natural para formas com valores em E . Defina

$$h_x(\omega \otimes u, \omega' \otimes v) = \omega \wedge \overline{\omega'} h_x(u, v),$$

para $\omega \in \bigwedge_{\mathbb{C}}^p T_x^*(X)$, $\omega' \in \bigwedge_{\mathbb{C}}^q T_x^*(X)$ e $u, v \in E_x$.

Isso define uma aplicação

$$h : \Omega^p(E) \otimes \Omega^q(E) \rightarrow \Omega^{p+q}(X),$$

onde $\Omega^p(E) = \Gamma(E) \otimes \Omega^p(X)_{\mathbb{C}}$.

Definição 2.4.5. Uma conexão ∇ num fibrado hermitiano (E, h) é *compatível com a estrutura hermitiana* se

$$dh(\sigma, \tau) = h(\nabla\sigma, \tau) + h(\sigma, \nabla\tau),$$

para quaisquer seções σ e τ .

A próxima proposição nos dá uma condição necessária e suficiente para que tenhamos uma conexão compatível com uma estrutura hermitiana dada.

Proposição 2.4.6. Seja (E, h) um fibrado hermitiano com uma conexão ∇ . Para que ∇ seja compatível com h , é necessário e suficiente que as matrizes de conexão θ e da estrutura hermitiana h em relação a um referencial $f = \{e_1, \dots, e_r\}$ dado satisfaçam

$$dH = \theta H + H \overline{\theta}^t. \quad (2.4.2)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
dh_{ij} &= dh(e_i, e_j) \\
&= h(\nabla(e_i), e_j) + h(e_i, \nabla(e_j)) \\
&= h\left(\sum_k \theta_{ik} \otimes e_k, e_j\right) + h\left(e_i, \sum_k \theta_{jk} \otimes e_k\right) \\
&= \sum_k \theta_{ik} h(e_k, e_j) + \sum_l \bar{\theta}_{jl} h(e_i, e_l) \\
&= \sum_k \theta_{ik} h_{kj} + \sum_l h_{ij} \bar{\theta}_{jl} \\
&= (\theta H)_{ij} + (H \bar{\theta}^t)_{ij},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$dH = \theta H + H \bar{\theta}^t.$$

□

Encerramos seção com o Teorema de existência de conexão compatível com a estrutura hermitiana.

Teorema 2.4.7. Seja (E, h) um fibrado hermitiano. Então existe uma conexão compatível com a estrutura hermitiana h .

Observação 2.4.8. Dado um fibrado hermitiano (E, h) , a conexão compatível com h é não única ([?] página 176 corolário 4.2.11).

2.5 Conexões em fibrados holomorfos e conexão de Chern

Seja $(E, \bar{\partial})$ um fibrado holomorfo de posto r sobre uma variedade complexa X . Lembremos que $\Omega_c^k = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{p,q}(X)$, em particular $\Omega_c = \Omega^{1,0}(X) \oplus \Omega^{0,1}(X)$. Seja ∇ uma conexão em E

$$\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E) \otimes \Omega_c^1 = (\Gamma(E) \otimes \Omega^{1,0}(X)) \oplus (\Gamma(E) \otimes \Omega^{0,1}(X))$$

Assim, ∇ se decompõe como soma direta de operadores $\nabla = \nabla^{1,0} + \nabla^{0,1}$, onde

$$\begin{aligned}
\nabla^{1,0} &: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E) \otimes \Omega^{1,0}(X), \text{ e} \\
\nabla^{0,1} &: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E) \otimes \Omega^{0,1}(X).
\end{aligned}$$

Podemos observar como a regra de Leibnitz se decompõe. Para $f \in \mathcal{O}(U)$ e $\sigma \in \Gamma(U, E)$, temos

$$\begin{aligned}
\nabla(f\sigma) &= df \otimes \sigma + f\nabla(\sigma) \\
&= (\partial(f) + \bar{\partial}(f)) \otimes \sigma + f(\nabla^{1,0}(\sigma) + \nabla^{0,1}(\sigma)) \\
&= \underbrace{\partial(f) \otimes \sigma + f\nabla^{1,0}(\sigma)}_{\in \Gamma(E) \otimes \Omega^{1,0}(X)} + \underbrace{\bar{\partial}(f) \otimes \sigma + f\nabla^{0,1}(\sigma)}_{\in \Gamma(E) \otimes \Omega^{0,1}(X)}.
\end{aligned}$$

Daí, temos o

Lema 2.5.1. $\nabla^{1,0}$ e $\nabla^{0,1}$ são conexões parciais em E do tipo $(1, 0)$ e $(0, 1)$ respectivamente. Isto é, satisfazem as seguintes regras de Leibnitz

$$\begin{aligned}\nabla^{1,0}(f\sigma) &= \partial(f) \otimes \sigma + f\nabla^{1,0}(\sigma), \text{ e} \\ \nabla^{0,1}(f\sigma) &= \bar{\partial}(f) \otimes \sigma + f\nabla^{0,1}(\sigma).\end{aligned}$$

Observação 2.5.2. Na definição 2.3.8 temos um operador induzido pela conexão

$$\nabla : \Omega^k(X)_c \otimes \Gamma(E) \rightarrow \Omega_c^{k+1}(X) \otimes \Gamma(E)$$

satisfazendo, para $\omega \in \Omega^k(X)$ e $\sigma \in \Gamma(E)$

$$\nabla(\omega \otimes \sigma) = d\omega \otimes \sigma + (-1)^k \omega \wedge \nabla\sigma.$$

Vamos analisar a decomposição desse operador com relação a decomposição feita acima. Para isso, restringimos o operador acima para $\Omega^{p,q}(X)$, onde $p+q=k$, temos para $\omega \in \Omega^{p,q}(X)$ e $\sigma \in \Gamma(E)$

$$\begin{aligned}\nabla(\omega \otimes \sigma) &= d\omega \otimes \sigma + (-1)^{p+q} \omega \wedge \nabla\sigma \\ &= \underbrace{\partial\omega \otimes \sigma + (-1)^{p+q} \omega \wedge \nabla\Omega^{1,0}(X)\sigma}_{\in \Gamma(E) \otimes \Omega^{p+1,q}} + \underbrace{\bar{\partial}\omega \otimes \sigma + (-1)^{p+q} \omega \wedge \nabla^{0,1}\sigma}_{\in \Gamma(E) \otimes \Omega^{p,q+1}(X)}.\end{aligned}$$

Portanto, o operador induzido pela conexão também se decompõe. Logo, podemos passar essa decomposição para a curvatura.

$$F_\nabla = \nabla \circ \nabla = \nabla^{1,0} \circ \nabla^{1,0} + (\nabla^{1,0} \circ \nabla^{0,1} + \nabla^{0,1} \circ \nabla^{1,0}) + \nabla^{0,1} \circ \nabla^{0,1}.$$

Analogamente a proposição 2.3.9, temos

Proposição 2.5.3.

$$\begin{aligned}\nabla^{1,0} \circ \nabla^{1,0} &\in \Omega^{2,0} \otimes \Gamma(\text{End}E) \\ \nabla^{1,0} \circ \nabla^{0,1} + \nabla^{0,1} \circ \nabla^{1,0} &\in \Omega^{1,1} \otimes \Gamma(\text{End}E) \\ \nabla^{0,1} \circ \nabla^{0,1} &\in \Omega^{0,2} \otimes \Gamma(\text{End}E)\end{aligned}$$

Observação 2.5.4. Observe que as matrizes de conexão e curvatura também se decompõem

$$\begin{aligned}\theta &= \theta^{1,0} + \theta^{0,1} \text{ e} \\ \Theta &= \Theta^{2,0} + \Theta^{1,1} + \Theta^{0,2}.\end{aligned}$$

Definição 2.5.5. Uma conexão ∇ num fibrado holomorfo $(E, \bar{\delta})$ é compatível com a estrutura holomorfa se $\nabla^{0,1} = \bar{\delta}$.

Proposição 2.5.6. Para uma conexão ∇ num fibrado holomorfo $(E, \bar{\delta})$, são equivalentes

- (i) ∇ é compatível com a estrutura holomorfa,
- (ii) para toda seção holomorfa σ , isto é, $\bar{\delta}(\sigma) = 0$, $\nabla(\sigma) \in \Gamma(E) \otimes \Omega^{1,0}(X)$ e
- (iii) para todo referencial holomorfo, θ é do tipo $(1, 0)$.

Demonstração. (1. \Rightarrow 2.) Se σ é uma seção holomorfa de E e ∇ é uma conexão compatível com a estrutura holomorfa, temos

$$\begin{aligned}\nabla(\sigma) &= \nabla^{1,0}(\sigma) + \nabla^{0,1}(\sigma) \\ &= \nabla^{1,0}(\sigma) + \underbrace{\bar{\delta}(\sigma)}_{=0} \\ &= \nabla^{1,0}(\sigma).\end{aligned}$$

(2. \Rightarrow 3.) Seja $f = \{e_1, \dots, e_r\}$ um referencial holomorfo de E sobre um aberto $U \subset X$. Daí

$$\begin{aligned}\nabla(e_i) &= \sum_{j=1}^r \theta_{ij} \otimes e_j \\ &= \underbrace{\sum_{j=1}^r \theta_{ij}^{1,0} \otimes e_j}_{\in \Gamma(E) \otimes \Omega^{1,0}(U)} + \underbrace{\sum_{j=1}^r \theta_{ij}^{0,1} \otimes e_j}_{\in \Gamma(E) \otimes \Omega^{0,1}(U)}.\end{aligned}$$

Mas, $\sum_{j=1}^r \theta_{ij}^{0,1} \otimes e_j = 0$, pois $\nabla(e_i) \in \Gamma(E) \otimes \Omega^{1,0}(U)$. Portanto, $\theta_{ij}^{0,1} = 0$ para todo i, j .

(3. \Rightarrow 1.) Para uma seção $\sigma \in \Gamma(U, E)$ sobre um aberto trivializante U com um referencial holomorfo $f = \{e_1, \dots, e_r\}$. Utilizando a equação (2.6) temos

$$\begin{aligned}\nabla(\sigma) &= \sum_j (d\sigma_j + \sum_i \sigma_i \theta_{ij}) \otimes e_j \\ &= \sum_j (\partial\sigma_j + \sum_i \sigma_i \theta_{ij}^{1,0}) \otimes e_j + \sum \bar{\partial}(\sigma_j) \otimes e_j,\end{aligned}$$

pois θ é do tipo $(1, 0)$. Mas, $\nabla^{0,1}(\sigma) = \sum \bar{\partial}(\sigma_j) \otimes e_j$ e portanto, comparando com a equação (2.1) temos que $\nabla^{0,1} = \bar{\delta}$. \square

Teorema 2.5.7. Seja $(E, \bar{\delta}, h)$ um fibrado complexo com estruturas holomorfa $\bar{\delta}$ e hermitiana h . Então, existe uma única conexão ∇ compatível com ambas as estruturas, holomorfa e hermitiana. ∇ é denominada conexão de Chern de $(E, \bar{\delta}, h)$.

Demonstração. Suponha que ∇ seja compatível com $\bar{\delta}$ e h . Então, com relação a um referencial holomorfo $f = \{e_1, \dots, e_r\}$, as matrizes de ∇ e h com relação a f , θ e H respectivamente, satisfazem, pela proposição 2.4.6

$$dH = \theta H + H \bar{\theta}^t$$

e pela proposição 2.5.6, θ é do tipo $(1, 0)$, pois f é um referencial holomorfo.

Assim, temos $\partial H + \bar{\delta}H = \theta H + H \bar{\theta}^t$ e comparando os tipos, temos que

$$\begin{cases} \partial H = \theta H \\ \bar{\delta}H = H \bar{\theta}^t. \end{cases}$$

Portanto, devemos ter $\theta = \partial H H^{-1}$. Isso prova a unicidade.

Para provar a existência, para cada aberto trivializante $U \subset X$ e referencial holomorfo $f = \{e_1, \dots, e_r\}$, defina $\theta_f = \partial H H^{-1}$. Assim, se isso definir uma conexão global no fibrado, ela satisfará as compatibilidades.

Seja $U \subset X$ um aberto trivializante, $f' = \{e'_1, \dots, e'_r\}$ outro referencial holomorfo sobre U e g a mudança holomorfa de referencial entre f e f' . Daí, as matrizes da estrutura hermitiana com relação aos referenciais f e f' , H_f e $H_{f'}$ respectivamente, se relacionam por (pela proposição 2.4.3)

$$H_{f'} = g H_f \bar{g}^t,$$

logo,

$$H_{f'}^{-1} = (\bar{g}^t)^{-1} H_f g^{-1}$$

e

$$\begin{aligned} \theta_{f'} g &= (\partial H_{f'} H_{f'}^{-1}) g \\ &= [\partial (g H_f \bar{g}^t) (\bar{g}^t)^{-1} H_f^{-1} g^{-1}] g \\ &= [(\partial g) H_f \bar{g}^t + g (\partial H_f) \bar{g}^t + g H_f \partial (\bar{g}^t)] (\bar{g}^t)^{-1} H_f^{-1} \\ &= dg H_f H_f^{-1} + g (\partial H_f) H_f^{-1} \\ &= dg + g \theta_f. \end{aligned}$$

Isso é consistente com a proposição 2.3.4 e, portanto define uma conexão em E . \square

Proposição 2.5.8. Seja ∇ a conexão de Chern do fibrado $(E, \bar{\delta}, h)$ e θ e Θ as matrizes de conexão de ∇ com relação a um referencial holomorfo f . Então, $\Theta = \bar{\partial} \theta$, em particular Θ é do tipo $(1, 1)$.

Demonstração. Primeiramente vamos demonstrar que $\partial \theta = \theta \wedge \theta$. Para isso, do teorema anterior temos que $\theta = \partial H H^{-1}$. Daí,

$$\begin{aligned} \partial \theta &= \partial(\theta = \partial H H^{-1}) \\ &= \partial^2 H H^{-1} - \partial H \wedge \partial H^{-1}. \end{aligned}$$

Mas, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \partial(I) = \partial(H H^{-1}) = \partial H H^{-1} + H \partial H^{-1} \\ &\Rightarrow \partial H^{-1} = -H^{-1} (\partial H) H^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned} \partial \theta &= \partial H \wedge H^{-1} \partial H H^{-1} \\ &= (\partial H) H^{-1} \wedge (\partial H) H^{-1} \\ &= \theta \wedge \theta. \end{aligned}$$

Pela equação de Cartan temos

$$\begin{aligned}\Theta &= d\theta - \theta \wedge \theta \\ &= \partial\theta + \bar{\partial}\theta - \theta \wedge \theta \\ &= \theta \wedge \theta + \bar{\partial}\theta - \theta \wedge \theta \\ &= \bar{\partial}\theta.\end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Feixes Analíticos Coerentes

3.1 Sequências exatas de feixes

Definição 3.1.1. Seja \mathcal{F} um prefeixe sobre um espaço topológico X . Para cada ponto $x \in X$, definimos a *haste* \mathcal{F}_x de \mathcal{F} sobre o ponto x como sendo

$$\mathcal{F}_x = \{\sigma \in \mathcal{F}(U); U \ni x\} / \sim,$$

onde \sim é dada por: $\sigma \in \mathcal{F}(U) \sim \tau \in \mathcal{F}(V)$ se e somente se existe aberto $W \subset U \cap V$ temos $\sigma|_W = \tau|_W$.

Notação 3.1.2. Se $\sigma \in \mathcal{F}(U)$, denotamos o germe de σ em \mathcal{F}_x por σ_x . Dizemos também que σ é um representante do germe $f \in \mathcal{F}_x$ quando $f = \sigma_x$.

Observação 3.1.3. \mathcal{F}_x herda as mesmas estruturas algébricas de \mathcal{F} . Isto é, se \mathcal{F} é um prefeixe de grupos abelianos, então \mathcal{F}_x é um grupo abeliano para todo $x \in X$ (basta definir $\sigma_x + \tau_x = (\sigma + \tau)_x$); se \mathcal{F} é um prefeixe de \mathcal{O} -módulos (\mathcal{O} é um prefeixe de anéis), então \mathcal{F}_x é um \mathcal{O}_x -módulo para todo $x \in X$. A ação é dada por $f_x \sigma_x = (f\sigma)_x$, onde $f \in \mathcal{O}(U)$ e $\sigma \in \mathcal{F}(U)$.

Além do mais, dado um morfismo de prefeixes $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, temos um morfismo induzido nas hastes $\varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ dado por $\varphi_x(f) = (\varphi_U(\sigma))_x$, onde $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ é um representante do germe $f \in \mathcal{F}_x$.

A partir de agora, trataremos apenas o caso de feixes de grupos abelianos.

A proposição seguinte ilustra a natureza local dos feixes. Ela não é válida para prefeixes.

Proposição 3.1.4. ([?] página 63 proposição 1.1) Seja $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo de prefeixes. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) φ é isomorfismo,
- (ii) o morfismo induzido nas hastes $\varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ é um isomorfismo para todo $x \in X$ e
- (iii) $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ é um isomorfismo para todo aberto $U \subset X$.

Definição 3.1.5. Seja $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo de prefeixes, definimos

- (i) o *prefeixe núcleo* de φ como sendo o prefeixe $U \mapsto \ker(\varphi_U)$,

(ii) o *prefeixe conúcleo* como $U \mapsto \text{coker}(\varphi_U)$ e

(iii) o *prefeixe imagem* como $U \mapsto \text{im}(\varphi_U)$.

Lema 3.1.6. Seja $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um mapa de feixes. Então, o *prefeixe* $\ker(\varphi)$ é um feixe.

Demonstração. Vamos demonstrar que $\ker(\varphi)$ satisfaz as duas condições complementares para feixes.

(i) Seja $U \subset X$ um aberto e $\{V_i\}$ uma cobertura aberta de U . Tome $\sigma \in \ker(\varphi_U)$ tal que $\sigma|_{V_i} = 0$ para todo i . Assim, temos que $\sigma = 0$, pois $\sigma|_{V_i} \in \mathcal{F}$, pois \mathcal{F} é feixe.

(ii) Seja $U \subset X$ um aberto e $\{V_i\}$ uma cobertura aberta de U . Tome $\sigma_i \in \ker(\varphi)(V_i)$ tal que $\sigma_i|_{V_i \cap V_j} = \sigma_j|_{V_i \cap V_j}$. Como $\sigma_i \in \mathcal{F}(V_i)$ e \mathcal{F} é feixe, temos que existe $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\sigma|_{V_i} = \sigma_i$. Falta mostrar que $\sigma \in \ker(\varphi_U)$. Para isso, basta observar que $\varphi_U(\sigma) = \varphi_{V_i}(\sigma|_{V_i}) = \varphi_{V_i}(0) = 0$ e, como \mathcal{G} é feixe, $\varphi_U(\sigma) = 0$.

□

Observação 3.1.7. Apesar de o *prefeixe* $\ker(\varphi)$ ser um feixe quando \mathcal{F} e \mathcal{G} são feixes, o mesmo não ocorre com os *prefeixes* imagem e conúcleo.

Os resultados a seguir seguem no sentido de definir o feixe associado a um *prefeixe*.

Proposição 3.1.8. Dado um *prefeixe* \mathcal{F} , defina um *prefeixe* por

$$\mathcal{F}^+ = \left\{ \sigma : U \rightarrow \bigcup_{x \in U} \mathcal{F}_x; \sigma \text{ satisfaz 1. e 2.} \right\},$$

onde,

(i) $\sigma(x) \in \mathcal{F}_x$ para todo $x \in U$ e

(ii) para cada $x \in U$, existe uma vizinhança de x $V \subset U$ e $\tau \in \mathcal{F}(V)$ tal que para todo $y \in V$, $\tau_y = \sigma(y) \in \mathcal{F}_y$.

\mathcal{F}^+ é de fato um feixe.

Demonstração. Vamos provar que \mathcal{F}^+ satisfaz as duas propriedades adicionais para feixes.

(i) Seja $U \subset X$, $\{V_i\}$ uma cobertura de U por abertos e $\sigma \in \mathcal{F}^+$ tal que $\sigma|_{V_i} = 0$ para todo i . Mas, isso significa que $(\sigma|_{V_i})(x) = 0$ para todo $x \in V_i$ em cada V_i . Portanto, $\sigma(x) = 0$ para todo $x \in U$, ou seja, $\sigma = 0 \in \mathcal{F}^+$.

(ii) Seja $u \in X$, $\{V_i\}$ uma cobertura de U por abertos e $\sigma_i \in \mathcal{F}^+(V_i)$ para cada i tal que $\sigma_i|_{V_i \cap V_j} = \sigma_j|_{V_i \cap V_j}$. Defina $\sigma : U \rightarrow \bigcup_{x \in U} \mathcal{F}_x$ por $\sigma(x) = \sigma_i(x)$ se $x \in V_i \cap V_j$. σ está bem definido, pois $\sigma_i(x) = \sigma_j(x)$.

□

Proposição 3.1.9. Se $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ é um morfismo de *prefeixes*, então ele induz um morfismo $\varphi^+ : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}^+$.

Demonstração. Defina $\varphi_U^+ : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}^+$ por

$$\begin{aligned} \varphi_U^+ : \mathcal{F}^+(U) &\rightarrow \mathcal{G}^+(U) \\ \sigma &\mapsto \varphi_U^+(\sigma) : U \rightarrow \bigcup_{x \in U} \mathcal{G}_x \\ x &\mapsto \varphi_x(\sigma(x)) \end{aligned} .$$

Precisamos verificar que φ^+ está bem definido, isto é, $\varphi_U^+(\sigma) \in \mathcal{G}^+(U)$.

(i) De fato, $\varphi^+(\sigma)(x) \in \mathcal{G}_x$ e

(ii) fixe $x \in U$ arbitrário. Como $\sigma \in \mathcal{F}^+(U)$, existe vizinhança $V \subset U$ de x e $\tau \in \mathcal{F}(V)$ tal que para todo $y \in V$, $\tau_y = \sigma(y) \in \mathcal{F}_y$. Agora, $\varphi_V(\tau)$ é tal que $(\varphi_V(\tau))_y = \varphi_y(\tau_y) = \varphi_y(\sigma(y)) = (\varphi_V^+(\sigma))(y) \forall y \in V$. Como x foi tomado arbitrário, o resultado está provado. □

Proposição 3.1.10. (Propriedade Universal) Seja \mathcal{F} um prefeixe. Existe um morfismo natural $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ com a seguinte propriedade: Dado um feixe \mathcal{G} e um morfismo $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, então existe um único morfismo $\Psi : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$ tal que $\varphi = \Psi \circ \theta$.

Demonstração. Defina $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ por

$$\begin{aligned} \theta_U : \mathcal{F}(U) &\rightarrow \mathcal{F}^+(U) \\ \sigma &\mapsto \sigma_U^+ : U \rightarrow \bigcup_{x \in U} \mathcal{F}_x \\ x &\mapsto \sigma_x \end{aligned} .$$

Observe que θ induz um isomorfismo nas hastes e que se \mathcal{F} já é um feixe, então $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}^+$ (proposição 3.1.4). Ainda mais, observe que o diagrama abaixo comuta, onde $\varphi^+ : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}^+$ é o mapa induzido da proposição 3.1.9.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\theta_{\mathcal{F}}} & \mathcal{F}^+ \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi^+ \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{\theta_{\mathcal{G}}} & \mathcal{G}^+ \end{array}$$

Agora, seja \mathcal{G} um feixe e considere um mapa $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$. Pela proposição 3.1.9, sabemos que existe um mapa induzido $\varphi^+ : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}^+$. Porém, $\theta : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^+$ é isomorfismo, pois \mathcal{G} é feixe (proposição 3.1.4). Assim, defina $\Psi = \varphi^+ \circ (\theta_{\mathcal{G}})^{-1}$. Por construção, Ψ satisfaz as condições requeridas. □

Definição 3.1.11. Dado um prefeixe \mathcal{F} o feixe \mathcal{F}^+ é o *feixe associado a \mathcal{F}* .

Agora, estamos em ponto de definir o *feixe imagem*, o *feixe conúcleo* de um morfismo de feixes $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ e o feixe quociente \mathcal{F}/\mathcal{F}' para um subfeixe $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$.

Definição 3.1.12. Dado um morfismo de feixes $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, definimos o *feixe imagem* de φ , $im(\varphi)$, como sendo o feixe associado ao prefeixe imagem definido em 3.1.5(3) e o *feixe conúcleo* de φ , $coker(\varphi)$, é o feixe associado ao prefeixe conúcleo. Analogamente, se \mathcal{F}' é um subfeixe de \mathcal{F} o *feixe quociente* é o feixe associado ao prefeixe $U \mapsto \mathcal{F}/\mathcal{F}'$.

Definição 3.1.13. Seja $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo de feixes. φ é *injetivo* se $ker(\varphi) = 0$ e *sobrejetivo* se $im(\varphi) = \mathcal{G}$.

Observação 3.1.14. Seja $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo de feixes. Pela propriedade Universal acima, existe um morfismo injetivo $im(\varphi) \rightarrow \mathcal{G}$. Portanto, $im(\varphi)$ é um subfeixe de \mathcal{G} .

Definição 3.1.15. Uma sequência de morfismos de feixes

$$\cdots \mathcal{F}_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{F}_{i+1} \cdots$$

é exata se $im(\varphi_{i-1}) = ker(\varphi_i)$.

Lema 3.1.16. Para todo morfismo de feixes $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, temos $(ker\varphi)_x = ker(\varphi_x)$ e $(im\varphi)_x = im(\varphi_x)$ para todo $x \in X$.

Demonstração. Vamos provar que $(ker\varphi)_x = ker(\varphi_x)$. Tome $v \in (ker\varphi)_x$ e $\sigma \in (ker\varphi)(U)$ um representante de v . Assim, temos que $\varphi_x(v) = (\varphi_U(\sigma))_x = 0$. Logo, $v \in ker(\varphi_x)$. Reciprocamente, seja $v \in ker(\varphi_x)$. Tome $\sigma \in \mathcal{F}$ um representante de v . Daí, $(\varphi_U(\sigma))_x = \varphi_x(\sigma_x) = 0$. Portanto, existe $V \subset U$ tal que $\varphi_V(\sigma|_V) = (\varphi_U(\sigma))|_V = 0$, ou seja, $\sigma|_V \in (ker\varphi)(V)$. Isto implica que $v (= \sigma_x) \in (ker\varphi)_x$.

Para a imagem, a demonstração é semelhante. □

Proposição 3.1.17. A sequência de feixes

$$\cdots \mathcal{F}_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{F}_{i+1} \cdots$$

é exata se e somente se a sequência induzida nas hastes é uma sequência exata de grupos abelianos.

Demonstração. Basta observar que $im(\varphi_{i-1}) = ker(\varphi_i)$ se e somente se $im((\varphi_{i-1})_x) = (im\varphi_{i-1})_x = (ker\varphi_i)_x = ker((\varphi_i)_x) \forall x \in X$. □

Proposição 3.1.18. Seja $0 \rightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}''$ uma sequência exata de feixes. Para todo $U \subset X$ a sequência $0 \rightarrow \mathcal{F}'(U) \xrightarrow{\varphi_U} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\psi_U} \mathcal{F}''(U)$ é uma sequência exata de grupos abelianos.

Vamos encerrar essa seção com um importante exemplo de sequência exata, a sequência exponencial. Ela será usada na definição da primeira classe de Chern.

Exemplo 3.1.19. Seja X uma variedade complexa, \mathbb{Z} o feixe dos inteiros sobre X , \mathcal{O} seu feixe de funções holomorfas e \mathcal{O}^* o feixe das funções holomorfas que não se anulam. Seja $i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}$ a inclusão e $exp : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^*$ o morfismo definido por $exp_U(f) = e^{2\pi i f}$ para $f \in \mathcal{O}(U)$. Então a sequência $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O} \xrightarrow{exp} \mathcal{O}^* \rightarrow 0$ é exata. De fato:

(i) $ker(i) = 0$, pois i é a inclusão,

- (ii) Para verificar que \exp é sobrejetiva, vamos mostrar que o morfismo induzido nas hastes $\exp_x : \mathcal{O}_x \rightarrow \mathcal{O}_x^*$ é sobrejetivo. Seja $g_x \in \mathcal{O}_x^*$ um germe com representante $g \in \mathcal{O}(U)$, onde U é uma vizinhança simplesmente conexa de $x \in X$. Assim, podemos escolher $f_x = (\frac{1}{2\pi i} \log(g))_x$, para algum ramo do logarítimo, e temos que $\exp_x(f_x) = g_x$.
- (iii) Para verificar que $\ker(\exp) = \text{im}(i)$, observe primeiro que $\exp(n) = e^{2\pi i n} = 1$. Reciprocamente, considere $f_x \in \mathcal{O}_x$ tal que $\exp(f_x) = 1$, isto é, $f_x \in \ker(\exp_x)$. Daí, existe uma vizinhança U de x e um representante $f \in \mathcal{O}(U)$ tal que f é uma constante em \mathbb{Z} .

3.2 Cohomologia de feixes, Cohomologia de Čech e classe de Chern de fibrados de linha

Definição 3.2.1. Seja I um conjunto. Uma relação binária \preceq é uma ordem parcial em I se

- $i \preceq i$,
- se $i \preceq j$ e $j \preceq i$ então $i = j$ e
- se $i \preceq j$ e $j \preceq k$ então $i \preceq k$.

Dizemos que (I, \preceq) é um conjunto parcialmente ordenado com ordem parcial \preceq . Frequentemente, chamaremos I de um conjunto parcialmente ordenado, deixando a ordem parcial subentendida quando não houver perigo de confusão.

Observação 3.2.2. Um conjunto parcialmente ordenado (I, \preceq) pode ser visto como uma categoria cujos objetos são os elementos de I e os morfismos são

$$\text{Hom}(x, y) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } x \not\preceq y \\ \{\text{ponto}\} & \text{se } x \preceq y. \end{cases}$$

Exemplo 3.2.3. Seja X um espaço topológico. Podemos munir o conjunto de todas as coberturas abertas de X com uma ordem parcial dada pelo refinamento, isto é, se a cobertura aberta $\{U_i\}$ é um refinamento da cobertura $\{V_i\}$, então $\{V_i\} \preceq \{U_i\}$.

Definição 3.2.4. Seja I um conjunto parcialmente ordenado e \mathcal{C} uma categoria, um *sistema direto em \mathcal{C}* é um par ordenado $\{M_i, \varphi_j^i\}$, onde M_i são objetos em \mathcal{C} e $\varphi_j^i : M_j \rightarrow M_i$ é uma família de morfismos tal que $\varphi_i^i = \text{id}_{M_i}$ para todo i e tal que $\varphi_k^i = \varphi_j^i \circ \varphi_k^j$ sempre que $i \preceq j \preceq k$ em I .

Observação 3.2.5. Na linguagem da observação 3.2.2, um sistema direto é um funtor de I para \mathcal{C} .

Definição 3.2.6. Seja I um conjunto parcialmente ordenado, \mathcal{C} uma categoria e $\{M_i, \varphi_j^i\}$ um sistema direto em \mathcal{C} sobre I . O *colimite* (ou *limite indutivo* ou *limite direto*) é um objeto $\varinjlim M_i$ e *morfismos de inclusão* $\alpha_i : M_i \rightarrow \varinjlim M_i$ para cada $i \in I$ tal que

- (i) $\alpha_j \varphi_j^i = \alpha_i$, sempre que $i \preceq j$,

(ii) sejam X um objeto de \mathcal{C} e morfismos $f_i : M_i \rightarrow X$ satisfazendo $f_j \varphi_j^i = f_i$ sempre que $i \preceq j$. Então, existe um único morfismo $\theta : \varinjlim M_i \rightarrow X$ tal que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc}
 \varinjlim M_i & \xrightarrow{\theta} & X \\
 \alpha_i \swarrow & & \nearrow f_i \\
 & M_i & \\
 \alpha_j \swarrow & \downarrow \varphi_j^i & \nearrow f_j \\
 & M_j &
 \end{array}$$

Definição 3.2.7. Um feixe \mathcal{I} sobre um espaço topológico X é *injetivo* se para toda sequência exata de feixes

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{H} \rightarrow 0,$$

a sequência de feixes induzida

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{I}) \xrightarrow{\varphi_*} \text{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{I}) \xrightarrow{\psi_*} \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{I}) \rightarrow 0$$

é exata. Onde $\varphi_*(f) = f \circ \varphi$ para $f \in \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{I})$ e $\psi_*(g) = g \circ \psi$ para $g \in \text{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{I})$.

Proposição 3.2.8. Todo feixe de grupos abelianos sobre um espaço topológico X admite resolução por feixes injetivos, ou seja, dado um feixe de grupos abelianos \mathcal{F} existe uma sequência exata

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}^0 \rightarrow \mathcal{I}^1 \rightarrow \dots,$$

onde \mathcal{I}^j são feixes injetivos para todo j .

Demonstração. ([?] Corolário 6.5 página 327). □

Proposição 3.2.9. Seja

$$\dots \rightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{\varphi^{i-1}} \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi^i} \mathcal{F}'' \rightarrow \dots$$

uma sequência exata de feixes de grupos abelianos sobre um espaço topológico X . Então, a sequência

$$\dots \rightarrow \mathcal{F}'(X) \xrightarrow{\varphi_X^{i-1}} \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\varphi_X^i} \mathcal{F}''(X) \rightarrow \dots$$

é um complexo, isto é, $\varphi_X^i \circ \varphi_X^{i-1} = 0$.

Demonstração. Basta observar que como a sequência de feixes é exata temos $\varphi^i \circ \varphi^{i-1} = 0$. Mas, isto implica que $\varphi_U^i \circ \varphi_U^{i-1} = 0$ para todo aberto $U \subset X$. Em particular, $\varphi_X^i \circ \varphi_X^{i-1} = 0$. □

As duas proposições anteriores nos permitem fazer a seguinte definição.

Definição 3.2.10. Seja \mathcal{F} um feixe de grupos abelianos e fixe uma resolução injetiva para esse feixe.

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}^0 \xrightarrow{\varphi^0} \mathcal{I}^1 \xrightarrow{\varphi^1} \dots \xrightarrow{\varphi^{i-1}} \mathcal{I}^i \xrightarrow{\varphi^i} \mathcal{I}^{i+1} \rightarrow \dots$$

Agora, considere a seguinte seqüência

$$0 \rightarrow \mathcal{I}^0(X) \xrightarrow{\varphi_X^0} \mathcal{I}^1(X) \xrightarrow{\varphi_X^1} \dots \xrightarrow{\varphi_X^{i-1}} \mathcal{I}^i(X) \xrightarrow{\varphi_X^i} \mathcal{I}^{i+1}(X) \rightarrow \dots$$

O i -ésimo grupo de cohomologia do feixe \mathcal{F} é

$$H^i(\mathcal{F}) = \frac{\ker \varphi^i}{\operatorname{im} \varphi^{i-1}}. \quad (3.2.1)$$

Corolário 3.2.11. (Da proposição 3.1.18) Para todo feixe \mathcal{F} , temos $H^0(\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X)$.

Observação 3.2.12. ([?] proposição 6.17 página 344) Considere um morfismo de feixes $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, então para cada $i \geq 0$ temos um morfismo de grupos abelianos induzido $f_i^* : H^i(\mathcal{F}) \rightarrow H^i(\mathcal{G})$ satisfazendo as seguintes propriedades. Em termos categoricos, H^i é um funtor $\forall i$ inteiro não negativo.

- se $g : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{I}$ é outro mapa de feixes, então $(f \circ g)_i^* = (f_i^*) \circ (g_i^*)$ e
- se $id_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ é a identidade, então $(id_{\mathcal{F}})_i^* = id_{H^i(\mathcal{F})}$ para todo $i \geq 0$.

Em termos categoricos, H^i é um funtor $\forall i$ inteiro não negativo.

Proposição 3.2.13. ([?] proposição 6.20 página 346) A cohomologia de um feixe é independente da resolução escolhida.

Teorema 3.2.14. (Seqüência exata em cohomologia) ([?] página 333 teorema 6.10) Seja $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ uma seqüência exata de feixes. Então, existe uma seqüência exata longa de grupos abelianos

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\mathcal{F}') \rightarrow H^0(\mathcal{F}) \rightarrow H^0(\mathcal{F}'') \xrightarrow{\delta^0} H^1(\mathcal{F}') \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow H^i(\mathcal{F}') \rightarrow H^i(\mathcal{F}) \rightarrow H^i(\mathcal{F}'') \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(\mathcal{F}') \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Os morfismos de grupos abelianos δ^i são chamados de morfismos conectantes.

Definição 3.2.15. Seja \mathcal{F} um feixe de grupos abelianos sobre um espaço topológico X e $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de X . Fixe, de uma vez por todas, uma boa ordem em I e para cada conjunto de índices $i_0, \dots, i_p \in I$ denote a interseção $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$ por U_{i_0, \dots, i_p} . Para cada $p \geq 0$ defina

$$C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 < \dots < i_p} \mathcal{F}(U_{i_0, \dots, i_p}).$$

Assim, um elemento $\alpha \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ é determinado por elementos $\alpha_{i_0, \dots, i_p} \in \mathcal{F}(U_{i_0, \dots, i_p})$ para cada $(p+1)$ -upla $i_0 < \dots < i_p$ de elementos de I . Defina o mapa de cobordo $d : C^p \rightarrow C^{p+1}$ por

$$(d\alpha)_{i_0, \dots, i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \alpha_{i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_p} |_{U_{i_0, \dots, i_{p+1}}},$$

onde a notação \hat{i}_k significa a omissão de i_k .

Para o mapa de cobordo, um cálculo direto mostra que:

Proposição 3.2.16. Para o mapa d definido acima, temos que $d^2 = 0$.

Definição 3.2.17. Sejam X , \mathcal{U} e \mathcal{F} como na definição anterior. Defina $Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \ker(d : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$ e $B^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \text{im}(d : C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$. O p -ésimo grupo de cohomologia de Čech da cobertura \mathcal{U} com coeficientes em \mathcal{F} é

$$\check{H}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \frac{Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})}{B^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})}.$$

Os elementos de $Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ são chamados de *cociclos* e os de $B^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, *cobordos*.

Observação 3.2.18. Em geral, o teorema da sequência exata longa em cohomologia não se aplica para a cohomologia de Čech ([?] página 387 exemplo 6.78(v)).

Observação 3.2.19. Pelo exemplo 3.2.3, o conjunto das coberturas de X é parcialmente ordenado. Adicionalmente, o conjunto dos grupos $\check{H}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ formam um sistema direto indexado pelo refinamento ([?] exemplo 6.83 página 390).

Assim, podemos considerar a Cohomologia de Čech no limite direto.

Definição 3.2.20. O p -ésimo grupo de Cohomologia de Čech de X com coeficientes em \mathcal{F} é o limite direto sobre a ordem dada pelo refinamento

$$\check{H}^p(X, \mathcal{F}) = \varinjlim \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

Um elemento $\alpha \in \check{H}^p(X, \mathcal{F})$ é determinado por uma cobertura \mathcal{U} e um elemento $\tilde{\alpha} \in \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Proposição 3.2.21. Se X é um espaço topológico paracompacto (uma variedade complexa, por exemplo), então

$$\check{H}^p(X, \mathcal{F}) \cong H^p(X, \mathcal{F}),$$

para todo $p \geq 0$.

Demonstração. [?] página 392 teorema 6.88. □

Corolário 3.2.22. Se X é um espaço topológico paracompacto, então o teorema da sequência exata longa em cohomologia se aplica para a cohomologia de Čech.

A partir de agora, nesta seção, todos os fibrados de linha serão fibrados de linha holomorfos.

Definição 3.2.23. Seja X uma variedade complexa. O grupo de Picard de X , $\text{Pic}(X)$ é o grupo abeliano cujos elementos são as classes de isomorfismo dos fibrados de linha com a operação \otimes , elemento neutro é o fibrado de linhas trivial e a inversão é a dualização.

Lema 3.2.24. Sejam E e F dois fibrados vetoriais holomorfos de posto r sobre uma variedade complexa X com trivializações locais $\{\varphi_i\}$ e $\{\varphi_j\}$ respectivamente, subordinadas a mesma cobertura aberta $\{U_i\}$ de X . Sejam g_{ij} e g'_{ij} as funções de transição correspondentes. Se E e F são dois fibrados holomorfos isomorfos, então existem aplicações $f_i : U_i \rightarrow GL(\mathbb{C}^r)$ holomorfas, tais que

$$g'_{ij}(x) = f_i \cdot g_{ij}(x) \cdot (f_j(x))^{-1} \quad x \in U_i \cap U_j.$$

Demonstração. Seja $\Psi : E \rightarrow F$ um isomorfismo holomorfo. Para cada U_i , defina $f_i : U_i \rightarrow GL(\mathbb{C}^r)$ por

$$f_i(x) = \varphi'_i(x) \circ \Psi(\varphi_i(x))^{-1}.$$

Se $x \in U_i \cap U_j$, então

$$\begin{aligned} g'_{ij}(x) &= \varphi'_i(x) \circ (\varphi'_j(x))^{-1} \\ &= f_i(x) \circ \varphi_i(x) \circ \Psi^{-1} \circ (f_j(x) \circ \varphi_j(x) \circ \Psi^{-1})^{-1} \\ &= f_i(x) \circ \varphi_i(x) \circ (\varphi_j(x))^{-1} \circ (f_j(x))^{-1} \\ &= f_i(x) \circ g_{ij}(x) \circ (f_j(x))^{-1}. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.2.25. Seja X uma variedade complexa, então $Pic(X) \cong \check{H}^1(X, \mathcal{O}^*)$. Onde \mathcal{O}^* é o feixe multiplicativo das funções holomorfas em X que não se anulam.

Demonstração. Seja L um fibrado de linhas holomorfo sobre X . Então, existe uma cobertura aberta $\mathcal{U} = \{U_i\}$ e trivializações locais φ_i com funções de transição holomorfas $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ que satisfazem

$$\begin{aligned} g_{ij} \cdot g_{jk} \cdot g_{ki} &= 1 & \text{em} & \quad U_i \cap U_j \cap U_k, \\ g_{ii} &= 1 & \text{em} & \quad U_i. \end{aligned}$$

Logo, as funções de transição definem um cociclo de Čech $g \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ e daí uma classe de cohomologia no limite direto $\check{H}^1(X, \mathcal{O}^*)$. Se L' é um fibrado de linhas isomorfo a L , podemos supor, sem perda de generalidade, que L' está trivializado com relação aos abertos da cobertura \mathcal{U} com trivializações e funções de transição φ'_i e $g'_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, respectivamente. Daí, pelo lema anterior, existem funções $f_i : U_i \rightarrow GL(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ que satisfazem

$$g'_{ij}(x) = f_i \cdot g_{ij}(x) \cdot f_j^{-1}(x) \quad x \in U_i \cap U_j.$$

Mas, $GL(\mathbb{C})$ é abeliano e temos seguinte relação

$$g'_{ij}(x) \cdot (g_{ij}(x))^{-1} = f_i(x) \cdot f_j^{-1}(x) \quad x \in U_i \cap U_j.$$

Assim, as funções g_{ij} e g'_{ij} definem cociclos que diferem por um cobordo de Čech. Portanto, definem a mesma classe no grupo de cohomologia $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$. Isso define uma aplicação (por enquanto um morfismo de conjuntos)

$$\Gamma : Pic(X) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{O}^*).$$

Vamos verificar que Γ é de fato um morfismo de grupos. Sejam L e L' dois fibrados de linha com funções de transição g_{ij} e g'_{ij} , respectivamente, subordinadas a mesma cobertura $\mathcal{U} = \{U_i\}$. Assim, as funções de transição para $L \otimes L'$ com relação a mesma cobertura são dadas por $g_{ij} \cdot g'_{ij}$. Portanto, a classe de cohomologia $\Gamma(L \otimes L')$ é dada pelo produto das classes $\Gamma(L)$ e $\Gamma(L')$.

Para mostrar que Γ é um isomorfismo, vamos exibir sua inversa. Seja $g \in \check{H}^1(X, \mathcal{O}^*)$ uma classe de cohomologia de Čech no limite direto. Isso significa que existe uma cobertura \mathcal{U} de X por abertos e funções $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ que satisfazem as relações

$$\begin{aligned} g_{ij} \cdot g_{jk} \cdot g_{ki} &= 1 & \text{em} & \quad U_i \cap U_j \cap U_k, \\ g_{ii} &= 1 & \text{em} & \quad U_i. \end{aligned}$$

Logo, existe uma classe de isomorfismo de fibrados de linha $[L]$, com um representante L , tal que $\Gamma(L) = g$. Pela construção, isso define um mapa inverso para Γ . Portanto, Γ é isomorfismo. \square

Teorema 3.2.26. (Teorema de de Rham) Se X é uma variedade diferenciável. Então $H^p(X, \mathbb{R}) \cong H_{DR}^p(X)$.

Demonstração. [?] página 44. \square

Observação 3.2.27. Pela observação 3.2.12, a inclusão dos feixes constantes $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ induz um morfismo entre os grupos de cohomologia $j : H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{R})$.

Seja

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \rightarrow 0$$

a sequência exata curta de feixes do exemplo 3.1.19 e considere a sequência exata longa de cohomologia induzida por essa sequência

$$H^1(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{O})$$

Agora, podemos definir a primeira classe de Chern de um fibrado de linhas.

Definição 3.2.28. Seja $L \in H^1(X, \mathcal{O}^*)$ uma classe de isomorfismo de um fibrado de linhas. A primeira classe de Chern de L é $c_1(L) = j \circ \delta(L) \in H_{DR}^2(X, \mathbb{R})$.

Lembremos que dado um fibrado diferenciável complexo E de posto r sobre X com conexão ∇ , a curvatura F_∇ é representada em termos de uma trivialização φ_α de E sobre um aberto U_α por uma matriz $r \times r$ de 2-formas Θ_α . Se φ_β é outra trivialização, temos

$$\Theta_\alpha = g_{\alpha\beta} \Theta_\beta g_{\beta\alpha},$$

onde $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(\mathbb{C}^r)$ é a função de transição entre as trivializações φ_α e φ_β . No caso particular em que E é um fibrado de linhas, $GL(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus 0$ que é abeliano. Daí, $\Theta_\alpha = g_{\alpha\beta} \Theta_\beta g_{\beta\alpha} = g_{\alpha\beta} g_{\beta\alpha} \Theta_\beta = \Theta_\beta$ em $U_\alpha \cap U_\beta$. Isso define uma 2-forma Θ fechada e globalmente definida em X .

Teorema 3.2.29. ([?] página 141 proposição 1) Seja L um fibrado de linhas com conexão ∇ e forma de curvatura Θ . Então

$$c_1(L) = [\Theta] \in H_{DR}^2(X, \mathbb{R}).$$

3.3 Feixes Coerentes

Nesta seção, X é um espaço topológico e \mathcal{O} é um feixe de anéis sobre X . Todos os feixes sobre X serão feixes de \mathcal{O} -módulos e todos os morfismos de feixes são morfismos de \mathcal{O} -módulos. Caso não seja, isso será mencionado explicitamente no texto.

Definição 3.3.1. Seja \mathcal{F} um feixe sobre X . Dadas seções $\sigma_1, \dots, \sigma_p \in \mathcal{F}(U)$ temos um morfismo

$$\begin{aligned} \tau : \mathcal{O}_U^p &\rightarrow \mathcal{F}_U \\ \tau_V(a_1, \dots, a_p) &= \sum_{i=1}^p a_i \sigma|_V \end{aligned}$$

\mathcal{F}_U é gerado pelas seções $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ se τ é sobrejetivo.

Observação 3.3.2. \mathcal{F}_U é gerado pelas seções $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ se e somente se $\mathcal{F}_x = \sigma_{1x}\mathcal{O}_x + \dots + \sigma_{px}\mathcal{O}_x$ para cada $x \in U$.

Definição 3.3.3. Um feixe \mathcal{F} sobre X é de tipo finito no ponto $x \in X$ se existe uma vizinhança U de x tal que \mathcal{F}_U é gerado por finitas seções de $\mathcal{F}(U)$.

Observação 3.3.4. Isso é equivalente a dizer que existe uma vizinhança U de x , um inteiro $p \geq 1$ e uma seqüência exata

$$\mathcal{O}_U^p \rightarrow \mathcal{F}_U \rightarrow 0.$$

Definição 3.3.5. Um feixe \mathcal{F} é do tipo finito em X se é do tipo finito para todos os pontos $x \in X$.

Exemplo 3.3.6. Todos os feixes localmente livres são do tipo finito em X .

Exemplo 3.3.7. Se $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ é sobrejetiva e \mathcal{F} é do tipo finito em $x \in X$, então \mathcal{F}' também é. Como consequência, o quociente de feixes de tipo finito também é de tipo finito.

As duas proposições a seguir nos mostram como é o comportamento local dos feixes de tipo finito.

Proposição 3.3.8. Sejam \mathcal{F} um feixe do tipo finito no ponto $x \in X$ e $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ seções numa vizinhança U de x tal que $\sigma_{1x}, \dots, \sigma_{px}$ geram \mathcal{F}_x como \mathcal{O}_x -módulo. Então, existe uma vizinhança $V \subset U$ de x tal que $\sigma_1|_V, \dots, \sigma_p|_V$ geram \mathcal{F}_V .

Demonstração. Como \mathcal{F} é do tipo finito em x existe uma vizinhança W de x e seções $\tau_1, \dots, \tau_q \in \mathcal{F}(W)$ que geram \mathcal{F}_W . Como $\sigma_{1x}, \dots, \sigma_{px}$ geram \mathcal{F}_x , podemos encontrar seções f_{ij} numa vizinhança de x tal que $\tau_{jx} = \sum_{i=1}^p f_{ijx}\sigma_{ix}$, com $1 \leq j \leq q$. Logo, existe uma vizinhança $V \subset W$ tal que $\tau_{jx}|_V = \sum_{i=1}^p f_{ijx}\sigma_{ix}|_V$, com $1 \leq j \leq q$. Como $\tau_1|_V, \dots, \tau_q|_V$ geram \mathcal{F}_V , temos que $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ geram \mathcal{F}_V . \square

Proposição 3.3.9. Seja $f : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ um morfismo de \mathcal{O}_x -módulos com \mathcal{F} e \mathcal{G} do tipo finito em x . Então, existe uma vizinhança U de x e um morfismo de feixes $\varphi : \mathcal{F}_U \rightarrow \mathcal{G}_U$ tal que $\varphi_x = f$.

Demonstração. Como \mathcal{F} é do tipo finito, existem seções $\sigma_1, \dots, \sigma_p \in \mathcal{F}(U)$, onde U é uma vizinhança de x . Daí, $\sigma_{1x}, \dots, \sigma_{px}$ geram \mathcal{F}_x como \mathcal{O}_x -módulo. Escolha τ_i como sendo um representante de $f(\sigma_{ix})$. Defina um morfismo de feixes $\varphi : \mathcal{F}_U \rightarrow \mathcal{G}_U$ por $\varphi(\sigma_i) = \tau_i$. \square

Definição 3.3.10. Seja \mathcal{F} um feixe sobre X . Dadas seções $\sigma_1, \dots, \sigma_p \in \mathcal{F}(U)$. Considere o morfismo τ da definição 3.3.1. O feixe de relações de $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ é $Rel(\sigma_1, \dots, \sigma_p) := ker(\tau)$.

Definição 3.3.11. Um feixe \mathcal{F} sobre X é de *relações finitas no ponto* $x \in X$ se para cada conjunto finito de seções numa vizinhança de x , o feixe de relações $Rel(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$ é do tipo finito em x . \mathcal{F} é de *relações finitas em* X se é de relações finitas para todo ponto $x \in X$.

Observação 3.3.12. \mathcal{F} é de relações finitas em $x \in X$ se e somente se $ker(\tau)$ de todo morfismo $\tau : \mathcal{O}_U^p \rightarrow \mathcal{F}_U$, onde U é uma vizinhança de x , é do tipo finito no ponto $x \in X$.

Exemplo 3.3.13. (*Teorema de Coerência de Oka*) ([?] página 59 teorema 2.5.2). Se X é uma variedade complexa e \mathcal{O}_X é o feixe de funções holomorfas em X , então \mathcal{O}_X é de relações finitas.

Exemplo 3.3.14. Se $\varphi : \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}$ é um monomorfismo de feixes e \mathcal{F} é de relações finitas, então \mathcal{F}' também é de relações finitas. Consequentemente, subfeixes de feixes de relações finitas são de relações finitas.

Definição 3.3.15. Um feixe \mathcal{F} é *coerente* se é do tipo finito e de relações finitas em X .

Proposição 3.3.16. Seja \mathcal{F} um feixe coerente. Um subfeixe \mathcal{G} de \mathcal{F} é coerente se e somente se é de tipo finito.

Demonstração. Segue diretamente do exemplo 3.3.14. \square

Proposição 3.3.17. Se \mathcal{F} é um feixe coerente, então para todo $x \in X$ existe uma vizinhança U de x e uma sequência exata de feixes

$$\mathcal{O}_U^p \rightarrow \mathcal{O}_U^q \rightarrow \mathcal{F}_U \rightarrow 0, \quad 1 \leq p, q < \infty$$

Demonstração. Como \mathcal{F} é do tipo finito, então existe sequência exata

$$\mathcal{O}_U^q \xrightarrow{\phi} \mathcal{F}_U \rightarrow 0, \quad 1 \leq q < \infty.$$

Mas, \mathcal{F} também é de relações finitas. Portanto, $ker\phi$ é do tipo finito. Daí, existe sequência exata

$$\mathcal{O}_U^p \rightarrow ker\phi_U \rightarrow 0, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Combinando as duas sequências, temos a sequência exata desejada. \square

Teorema 3.3.18. (*Lema dos três*) Seja $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ uma sequência exata de feixes. Se dois deles são coerentes, então os três são coerentes.

Demonstração. [?] pg 236. \square

Corolário 3.3.19. A soma direta finita de feixes coerentes é coerente.

Demonstração. Tome $\mathcal{F} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{H}$ onde os feixes \mathcal{G} e \mathcal{H} são coerentes. Considere a sequência exata $0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ e aplique o lema dos três. A generalização para qualquer número finito segue por indução. \square

Corolário 3.3.20. Seja $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo entre dois feixes coerentes. Então, os feixes $im\phi$, $ker\phi$ e $coker\phi$ são coerentes.

Demonstração. Como $im\phi$ é do tipo finito (proposição 3.3.7) também é coerente (observação 3.3.16). A coerência de $ker\phi$ e de $coker\phi$ segue aplicando o lema dos três nas sequências exatas $0 \rightarrow ker\phi \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow im\phi \rightarrow 0$ e $0 \rightarrow im\phi \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow coker\phi \rightarrow 0$ respectivamente. \square

Corolário 3.3.21. Seja $\mathcal{F}' \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}''$ uma sequência de feixes coerentes que é exata num ponto x . Então, existe uma vizinhança U de x tal que a sequência $\mathcal{F}'_U \xrightarrow{\varphi|_U} \mathcal{F}_U \xrightarrow{\psi|_U} \mathcal{F}''_U$ é exata. (A aplicação $\varphi|_U : \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}$ é um morfismo de feixes, diferente de $\varphi_U : \mathcal{F}'(U) \rightarrow \mathcal{F}$ que é um morfismo de grupos abelianos, idem para $\psi|_U$.)

Demonstração. O feixe $\mathcal{F}'/ker(\varphi \circ \psi)$ é coerente e é igual a zero em x . Logo, esse feixe é zero numa vizinhança U de x , isto é, $im\varphi|_U \subset ker\psi|_U$. Por outro lado, $ker\psi|_U/im\varphi|_U$ é coerente em U e zero em x . Daí, segue que $ker\psi|_U = im\varphi|_U$, possivelmente para um U menor. \square

Observação 3.3.22. Se tivermos apenas uma sequência exata nas hastes $\mathcal{F}'_x \xrightarrow{\varphi_x} \mathcal{F}_x \xrightarrow{\psi_x} \mathcal{F}''_x$ o corolário acima nos diz que existe uma vizinhança U de x tal que a sequência induzida (prop 3.3.9) $\mathcal{F}'_U \xrightarrow{\varphi|_U} \mathcal{F}_U \xrightarrow{\psi|_U} \mathcal{F}''_U$ é exata. Como um caso particular, se \mathcal{F} e \mathcal{G} são coerentes e $\mathcal{F}_x \cong \mathcal{G}_x$ como \mathcal{O}_x -módulos para algum $x \in X$, então existe uma vizinhança U de x tal que $\mathcal{F}_U \cong \mathcal{G}_U$ como \mathcal{O}_U -módulo. Conclui-se o seguinte: se \mathcal{F} é um feixe coerente e $U = x \in X : \mathcal{F}_x$ não é livre, então \mathcal{F}_U é um feixe localmente livre.

A próxima proposição é uma recíproca da proposição 3.3.17 no caso em que \mathcal{O} é um feixe coerente.

Proposição 3.3.23. Seja X um espaço topológico e \mathcal{O} um feixe de anéis que é coerente como \mathcal{O} -módulo. Então, um \mathcal{O} -módulo \mathcal{F} é coerente se para todo $x \in X$ existe uma vizinhança U de x , inteiros positivos p q e uma sequência exata $\mathcal{O}_U^p \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_U^q \rightarrow \mathcal{F}_U \rightarrow 0$.

Demonstração. Basta observar que os feixes \mathcal{O}^p e \mathcal{O}^q são coerentes e que $\mathcal{F}_U \cong coker\varphi$. \square

O próximo exemplo ilustra uma maneira de criar feixes coerentes a partir de feixes coerentes dados. Esse exemplo será importante nas seções posteriores.

Exemplo 3.3.24. (O feixe hom) Dados feixes \mathcal{F} e \mathcal{G} definimos o feixe $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ por $U \mapsto \text{Hom}(\mathcal{F}_U, \mathcal{G}_U)$, onde $\text{Hom}(\mathcal{F}_U, \mathcal{G}_U)$ é o grupo abeliano de morfismo de \mathcal{F}_U para \mathcal{G}_U . Se \mathcal{F} e \mathcal{G} são coerentes, então $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ é coerente ([?] proposição página 240). O feixe dual de um feixe \mathcal{F} é dado por $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{O})$.

3.4 Propriedades locais de Feixes Coerentes, torção e reflexividade

Nesta seção, X é uma variedade complexa de dimensão n , \mathcal{O} é o feixe das funções holomorfas sobre X e \mathcal{F} é um feixe analítico, isto é, um feixe de \mathcal{O} -módulos.

Definição 3.4.1. Seja R um anel e M um R -módulo. A dimensão homológica de M , denotado por $dh(M)$, é o menor comprimento d de uma resolução livre

$$0 \rightarrow E_d \rightarrow \cdots \rightarrow E_1 \rightarrow E_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Teorema 3.4.2. Teorema syzygy de Hilbert para feixes. Seja X uma variedade complexa de dimensão n e \mathcal{F} um feixe coerente sobre X . Então, para cada $x \in X$, a haste \mathcal{F}_x admite resolução livre de comprimento no máximo n . Isto é, $dh(\mathcal{F}_x) \leq n$.

Demonstração. [?] página 143 proposição 3.11. □

Definição 3.4.3. O conjunto de m -singularidades de \mathcal{F} é o conjunto

$$S_m(\mathcal{F}) = \{x \in X; dh(\mathcal{F}_x) \neq n - m\}.$$

Observação 3.4.4. Temos que

$$S_0(\mathcal{F}) \subset S_1(\mathcal{F}) \subset \cdots \subset S_{n-1}(\mathcal{F}) \subset S_n(\mathcal{F}) = X.$$

Chamamos $S_{n-1}(\mathcal{F})$ de o conjunto de singularidades de \mathcal{F} . Também, $S_{n-1}(\mathcal{F}) = \{x \in X; \mathcal{F}_x \text{ não é livre}\}$.

Teorema 3.4.5. ([?] página 156 teorema 5.8) O conjunto de m -singularidades de um feixe coerente é um subconjunto analítico fechado de X de dimensão $\leq m$.

Proposição 3.4.6. ([?] página 158 corolário 5.11) Se um feixe coerente \mathcal{F} é um k -syzygy no sentido que para todo ponto x de X existe vizinhança aberta U com sequência exata

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_U \rightarrow \mathcal{E}_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{E}_k$$

tal que os \mathcal{E}_i são localmente livres sobre U , então $dim S_m(\mathcal{F}) \leq m - k$.

Lembrando que um feixe coerente é localmente livre fora do seu conjunto de singularidades, podemos definir o posto de um feixe coerente.

Definição 3.4.7. Seja \mathcal{F} um feixe coerente sobre uma variedade complexa X . O posto de \mathcal{F} é definido por

$$rank \mathcal{F} = rank \mathcal{F}_x \text{ (como } \mathcal{O}_x\text{-módulo); } x \in X \setminus S_{n-1}(\mathcal{F}).$$

Definição 3.4.8. Seja \mathcal{F} um feixe coerente sobre uma variedade complexa X e $\Psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^{**}$ o morfismo canônico de \mathcal{F} para o seu bidual (esse morfismo é dado por $(\Psi_U(\sigma))(f) = f(\sigma)$, onde $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ e $f \in \mathcal{F}^*(U)$). O núcleo de Ψ é o \mathcal{O} -módulo de torção de \mathcal{F} , que será denotado por $\mathcal{T}(\mathcal{F})$.

Observação 3.4.9. Vamos relacionar essa noção de \mathcal{O} -módulo de torção com a noção algébrica de torção das hastes \mathcal{F}_x como \mathcal{O}_x -módulos.

Dado um R -módulo M , onde R é um domínio, define-se o submódulo de torção de M como $T(M) = \{v \in M; \text{ existe elemento } r \neq 0 \text{ tal que } rv = 0\}$. M é sem torção se $T(M) = 0$.

Temos que ([?] página 69 proposição 3) $\mathcal{T}(\mathcal{F}) = \bigcup_{x \in X} T(\mathcal{F}_x)$.

Definição 3.4.10. Um feixe coerente \mathcal{F} é *sem torção* se $\mathcal{T}(\mathcal{F}) = 0$. Pela observação acima, isso significa que as hastes \mathcal{F}_x são sem torção. \mathcal{F} é um feixe de torção se $\mathcal{T}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

Pela observação 3.4.9, um subfeixe não nulo de um feixe sem torção é sem torção.

Lema 3.4.11. Se M é um R -módulo sem torção de posto r , então ele é um submódulo de um R -módulo livre de posto r .

Demonstração. ([?] página 150 proposição 4.2) □

Proposição 3.4.12. Se \mathcal{F} é um feixe sem torção sobre uma variedade complexa X , então para toda haste \mathcal{F}_x de X , existe uma vizinhança U de x e um morfismo injetivo de feixes $j : \mathcal{F}_U \rightarrow \mathcal{O}_U^r$. Isto é, \mathcal{F} é localmente um subfeixe de um feixe localmente livre.

Demonstração. Pelo lema anterior, existe um morfismo injetor

$$j_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{O}_x^r.$$

Como \mathcal{F} é coerente, j se estende a um morfismo injetivo numa vizinhança U de x . □

De 3.4.12 e 3.4.6, temos o seguinte.

Corolário 3.4.13. Se \mathcal{F} é um feixe coerente sem torção, então

$$\dim S_m(\mathcal{F}) \leq m - 1,$$

para todo m .

Observação 3.4.14. Isso significa que se \mathcal{F} é sem torção, então $S_{n-1}(\mathcal{F})$ tem codimensão pelo menos 2. Juntando isso ao fato de que todo feixe coerente sem torção é localmente livre fora de seu conjunto de singularidades, temos que numa Superfície de Riemann todo feixe sem torção é localmente livre.

Definição 3.4.15. Se o mapa canônico $\Psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^{**}$ for um isomorfismo, dizemos que \mathcal{F} é *reflexivo*.

Proposição 3.4.16. O dual \mathcal{F}^* de qualquer feixe coerente \mathcal{F} é reflexivo.

Demonstração. Para demonstrar esse resultado, faremos uso do seguinte resultado de álgebra comutativa cuja demonstração pode ser encontrada em ([?] página 152 proposição 4.11).

Seja M um R -módulo finitamente gerado, então o homomorfismo canônico $\psi_{M^} : M^* \rightarrow M^{***}$ é um isomorfismo.*

Considere o morfismo canônico $\Psi^* : \mathcal{F}^* \rightarrow \mathcal{F}^{***}$. Olhando para os morfismos induzidos nas hastes, temos que $\Psi_x^* = \psi_{\mathcal{F}_x^*}$. Pelo resultado acima, temos que Ψ_x^* é um isomorfismo para todo $x \in X$. Portanto, Ψ^* é um isomorfismo. □

Proposição 3.4.17. ([?] página 160 proposição 5.19) Se \mathcal{F} é reflexivo, então todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança U tal que existe uma sequência exata

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_U \rightarrow \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$$

tal que \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 são localmente livres sobre U .

De 3.4.6 e 3.4.17, temos o seguinte

Corolário 3.4.18. Se \mathcal{F} é um feixe coerente reflexivo, então

$$\dim S_m(\mathcal{F}) \leq m - 2.$$

Isso significa que \mathcal{F} é localmente livre fora do conjunto de singularidades, que possui codimensão pelo menos 3. Assim sendo, todo feixe reflexivo numa superfície complexa é localmente livre.

Definição 3.4.19. Um feixe \mathcal{F} é *normal* se para todo aberto $U \subset X$ e todo subconjunto analítico $Z \subset U$ de codimensão pelo menos 2 o mapa restrição

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U \setminus Z)$$

é um isomorfismo.

Proposição 3.4.20. Se \mathcal{F} é sem torção o morfismo de restrição acima sempre é injetivo.

Demonstração. Seja $\rho : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U \setminus Z)$ o mapa de restrição do feixe \mathcal{F} e tome $\sigma \in \text{Ker}(\rho)$. Queremos mostrar que $\sigma = 0$. Mas, o germe σ_x é nulo para todo $x \in U \setminus Z$. Portanto, é suficiente mostrar que $\sigma_x = 0$ para todo $x \in Z$. Fixe $x \in Z$ arbitrário; tome uma vizinhança V de x tal que $V \subset U$ e um morfismo injetivo $j : \mathcal{F}_V \rightarrow \mathcal{O}_V^r$, como na proposição 3.4.12. Observe que $j_V(\sigma|_V) = (f_1, \dots, f_r) \in \mathcal{O}(V)^r$. Como $\sigma_x = 0$ para $x \in U \setminus Z$, segue que cada $(f_i)_x = 0$ para todo $x \in V \setminus Z$. Pelo Teorema da Identidade, temos $f_i = 0$ em V e portanto $\sigma_x = 0 \forall x \in V$. Como x foi tomado arbitrário, o resultado está provado. \square

Exemplo 3.4.21. Pelo teorema de extensão de Hartog para variáveis complexas, o feixe estrutural de uma variedade complexa \mathcal{O}_X é normal.

Lema 3.4.22. O dual de todo feixe coerente é normal.

Demonstração. Devemos mostrar que a restrição

$$\begin{aligned} \rho : \text{Hom}(\mathcal{F}_U, \mathcal{O}_U) &\rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}_{U \setminus Z}, \mathcal{O}_{U \setminus Z}) \\ f : \mathcal{F}_U \rightarrow \mathcal{O}_U &\mapsto f|_{U \setminus Z} : \mathcal{F}_{U \setminus Z} \rightarrow \mathcal{O}_{U \setminus Z} \end{aligned}$$

é um isomorfismo de grupos abelianos. Pela proposição 3.4.16, \mathcal{F}^* é reflexivo, logo sem torção. Daí, pela proposição 3.4.20, ρ é injetivo. Para verificar que é sobre, tome um morfismo $g : \mathcal{F}_{U \setminus Z} \rightarrow \mathcal{O}_{U \setminus Z}$ de feixes. Fixe $U \subset X$ e considere o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{g_U} & \mathcal{O}(U) \\ r_1 \downarrow & & \downarrow r_2 \\ \mathcal{F}(U \setminus Z) & \xrightarrow{g_{U \setminus Z}} & \mathcal{O}(U \setminus Z) \end{array} \quad ,$$

e defina $\tilde{g}_U : r_2^{-1} \circ g_{U \setminus Z} \circ r_1$. Isso define um morfismo $\tilde{g} : \mathcal{F}_U \rightarrow \mathcal{O}_U$ tal que $\rho(\tilde{g}) = g$. Portanto, ρ é um isomorfismo. \square

Proposição 3.4.23. Um feixe coerente \mathcal{F} é reflexivo se e somente se é sem torção e normal.

Demonstração. (\Rightarrow) Basta verificar que \mathcal{F} é normal. Mas, isso se verifica pelo lema anterior e lembrando que $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}^{**}$.

(\Leftarrow) Assuma que \mathcal{F} é sem torção e normal. Do fato de ser sem torção, o morfismo canônico $\sigma : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^{**}$ é injetivo e o conjunto de singularidades $Z = S_{n-1}(\mathcal{F})$ é de codimensão no máximo 2. Agora, para todo aberto $U \subset X$ temos o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\sigma_U} & \mathcal{F}^{**}(U) \\ r_1 \downarrow & & \downarrow r_2 \\ \mathcal{F}(U \setminus Z) & \xrightarrow{\sigma_{U \setminus Z}} & \mathcal{F}^{**}(U \setminus Z) \end{array} ,$$

onde σ é o mapa canônico.

Os mapas verticais r_1 e r_2 são isomorfismos, uma vez que \mathcal{F} é normal e \mathcal{F} é reflexivo e, portanto, normal pela primeira parte da demonstração. O mapa horizontal abaixo é isomorfismo também, já que $\sigma : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^{**}$ é isomorfismo fora do conjunto de singularidades (\mathcal{F} é localmente livre fora de $S_{n-1}(\mathcal{F})$ e, portanto é reflexivo nesse domínio). Assim, o morfismo acima é sobrejetivo e \mathcal{F} é reflexivo. \square

Proposição 3.4.24. seja

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$$

uma sequência exata de feixes coerentes onde \mathcal{F} é reflexivo e \mathcal{F}' e \mathcal{F}'' são sem torção. Então, \mathcal{F}' é normal e portanto reflexivo.

Demonstração. Seja $U \subset X$ um aberto e $Z \subset U$ um subconjunto analítico de codimensão pelo menos 2. Considere o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}'(U) & \xrightarrow{\alpha_1} & \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\beta_1} & \mathcal{F}''(U) \\ & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \varphi \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}'(U \setminus Z) & \xrightarrow{\alpha_2} & \mathcal{F}(U \setminus Z) & \xrightarrow{\beta_2} & \mathcal{F}''(U \setminus Z) \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & 0, & & \end{array}$$

onde γ , δ e φ são as restrições dos feixes \mathcal{F}' , \mathcal{F} e \mathcal{F}'' respectivamente. Sabemos que γ e φ são injetivos pela proposição 3.4.20. Mais ainda, as sequências horizontais e verticais são exatas no diagrama acima, pela proposição 3.1.18. Precisamos mostrar que γ é sobrejetivo. Para isso, considere $\omega \in \mathcal{F}'(U \setminus Z)$ e defina $\omega_1 = \alpha_2(\omega) \in \mathcal{F}(U \setminus Z)$ e $\omega_2 = \delta^{-1}(\omega_1) \in \mathcal{F}(U)$, pois δ é isomorfismo. Se $\omega_2 \in \text{Im}(\alpha_1)$, tome $v \in \mathcal{F}'(U)$ tal que $\gamma(v) = \omega$. Daí, temos que $\alpha_2(\gamma(v)) = \delta(\alpha_1(v))$, pela comutatividade do diagrama. Podemos calcular $\alpha_2^{-1}(\delta(\alpha_1(v)))$, pois $\delta(\alpha_1(v)) \in \text{Im}(\alpha_2)$ e α_2 é injetivo. Assim, temos que $\gamma(v) = \alpha_2^{-1}(\delta(\alpha_1(v))) = \omega$. Portanto, devemos mostrar que $\omega_2 \in \text{Im}(\alpha_1)$.

Para isso, vamos fazer um caça diagramas. Defina $\omega_3 = \beta_2(\omega_1) \in \mathcal{F}''(U \setminus Z)$ e $\omega_4 = \beta_1(\omega_2) \in \mathcal{F}''(U)$. Pela comutatividade do diagrama temos que $\varphi \circ \beta_1(\omega_2) = \beta_2 \circ \delta(\omega_2)$. Por

um lado, temos $\beta_2 \circ \delta(\omega_2) = \beta_2(\overset{\in Im(\alpha_2)}{\widehat{\omega_1}}) = 0$, pela exatidão da sequência de baixo. Portanto, chegamos a $\varphi \circ \beta_1(\omega_2) = 0$ e a injetividade de φ nos dá $\beta_1(\omega_2) = 0$ e assim, $\omega_2 \in Ker(\beta_1)$. Pela exatidão da sequência superior, vem que $\omega_2 \in Im(\alpha_1)$. \square

Proposição 3.4.25. Sejam \mathcal{F} e \mathcal{G} feixes coerentes sobre uma variedade complexa X . Se \mathcal{F} é reflexivo. Então, $Hom(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ é reflexivo.

Demonstração. [?] página 161 proposição 5.23. \square

3.5 Fibrado Determinante

Definição 3.5.1. Seja \mathcal{F} um feixe coerente sobre uma variedade complexa X e considere uma resolução de \mathcal{F}_U , onde U é um aberto em X , por feixes localmete livres \mathcal{E}_i

$$0 \rightarrow \mathcal{E}_n \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{F}_U \rightarrow 0.$$

Seja E_i o fibrado correspondente ao feixe \mathcal{E}_i . Definimos

$$det(\mathcal{F})_U = \bigotimes_{i=0}^n (det E_i)^{(-1)^i}. \quad (3.5.1)$$

Proposição 3.5.2. $det(\mathcal{F})_U$ não depende da resoulução escolhida.

Demonstração. [?] páginas 163-165. \square

Proposição 3.5.3. ([?] página 165 proposição 6.9) Se

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$$

é uma sequência exata de feixes coerentes, então existe um isomorfismo canônico

$$det(\mathcal{F}) = det(\mathcal{F}') \otimes det(\mathcal{F}''). \quad (3.5.2)$$

Na proposição abaixo, chamaremos o feixe de seções do fibrado determinante de $det(\mathcal{F})$ também.

Proposição 3.5.4. Se \mathcal{F} é um feixe coerente sem torção de posto r , então existe um isomorfismo canônico

$$det(\mathcal{F}) \cong (\bigwedge^r \mathcal{F})^{**}. \quad (3.5.3)$$

Demonstração. Seja $Z = S_{n-1}(\mathcal{F})$ que tem codimensão no mínimo 2, pois \mathcal{F} é sem torção. Então, temos um isomorfismo canônico $f : det(\mathcal{F})|_{U \setminus Z} \rightarrow (\bigwedge^r \mathcal{F})^{**}|_{U \setminus Z}$, já que $\mathcal{F}_{U \setminus Z}$ é localmente livre. Como $(\bigwedge^r \mathcal{F})^{**}$ é normal, $Hom(det(\mathcal{F}), (\bigwedge^r \mathcal{F})^{**})$ também é normal. Assim, f se estende a um morfismo $\tilde{f} : det(\mathcal{F}) \rightarrow (\bigwedge^r \mathcal{F})^{**}$. Considere a inversa f^{-1} ; como $det(\mathcal{F})$ é normal, $Hom((\bigwedge^r \mathcal{F})^{**}, det(\mathcal{F}))$ também o é. Logo, f^{-1} se estende a um morfismo $\widetilde{f^{-1}} : det(\mathcal{F}) \rightarrow (\bigwedge^r \mathcal{F})^{**}$. Agora, temos que \tilde{f} e $\widetilde{f^{-1}}$ são inversas uma da outra, pois $Hom(det(\mathcal{F}), Hom(det(\mathcal{F}), (\bigwedge^r \mathcal{F})^{**}))$ e $Hom((\bigwedge^r \mathcal{F})^{**}, (\bigwedge^r \mathcal{F})^{**})$ são normais. \square

Proposição 3.5.5. Se \mathcal{F} é um feixe coerente sem torção, então

$$\det(\mathcal{F}^*) \cong (\det(\mathcal{F}))^*.$$

Demonstração. [?] página 166 proposição 6.12. □

Observação 3.5.6. Dado um morfismo de feixes $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$, o morfismo dual $\phi^* : \mathcal{E}^* \rightarrow \mathcal{F}^*$ é definido por $\phi^*(f) = f \circ \phi$, onde $f \in \mathcal{E}^*$.

Proposição 3.5.7. Seja \mathcal{E} um feixe coerente sem torção e \mathcal{F} um subfeixe de posto $r < rk(\mathcal{E})$. O morfismo de inclusão $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ induz um morfismo injetivo $\det(\phi) : \det(\mathcal{F}) \rightarrow \det(\mathcal{E})$.

Demonstração. Defina um morfismo $\Psi : \bigwedge^r \mathcal{F} \rightarrow \bigwedge^r \mathcal{E}$ por $\Psi_U(s_1 \wedge \cdots \wedge s_r) = \phi_U(s_1) \wedge \cdots \wedge \phi_U(s_r)$. O morfismo $\det(\phi)$ é definido por Ψ^{**} . Sabemos que $\det(\phi)$ é injetiva em $X' = X \setminus (Z \cup Z')$, onde $Z = S_{n-1}(\mathcal{F})$ e $Z' = S_{n-1}(\mathcal{E})$, pois é onde ambos os feixes são localmente livres. Daí, $\ker(\phi)$ é um feixe de torção e sendo subfeixe de um feixe sem torção, deve ser nulo. □

Proposição 3.5.8. Se \mathcal{F} é um feixe de torção ($\mathcal{T}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$), então $\det(\mathcal{F})$ admite uma seção holomorfa não trivial. Adicionalmente, se $\text{sup}(\mathcal{F}) = \{x \in X; \mathcal{F}_x \neq 0\}$ tem codimensão pelo menos 2, então $\det(\mathcal{F})$ é o fibrado de linhas trivial.

Demonstração. [?] página 166,167 proposição 6.14. □

Encerramos a seção com uma importante definição. Uma vez que definimos o fibrado determinante $\det(\mathcal{F})$ de um feixe coerente \mathcal{F} , podemos definir a primeira classe de Chern $c_1(\mathcal{F})$.

Definição 3.5.9. Seja \mathcal{F} um feixe coerente, definimos sua primeira classe de Chern por $c_1(\mathcal{F}) = c_1(\det(\mathcal{F}))$.

Capítulo 4

A Correspondência Hitchin-Kobayashi

4.1 Conexões de Hermite-Einstein

Durante esta seção, (E, h) será um fibrado holomorfo Hermitiano de posto r sobre uma variedade complexa Hermitiana de dimensão n (X, g) e $\Lambda : \Omega_{\mathbb{C}}^k(X) \rightarrow \Omega_{\mathbb{C}}^{k-2}(X)$ denotará a contração pela forma fundamental ω de g .

Observação 4.1.1. Dado um fibrado complexo F sobre X , podemos estender Λ para $\Omega^k(F)$; definimos $\Lambda(\omega \otimes v) = \Lambda(\omega) \otimes v$. Obtemos então um operador $\Lambda : \Omega^k(F) \rightarrow \Omega^{k-2}(F)$.

Definição 4.1.2. Seja ∇ a conexão de Chern de (E, h) com curvatura F_{∇} . A *curvatura média* de (E, h) é

$$K = i\Lambda(F_{\nabla}).$$

Observação 4.1.3. Como $F_{\nabla} \in \Omega^2(\text{End}(E))$, pela observação anterior, temos que $K \in \text{End}(E)$.

Proposição 4.1.4. A curvatura média satisfaz a seguinte relação

$$K\omega^n = inF_{\nabla} \wedge \omega^{n-1}.$$

Demonstração. Primeiramente, observe que $\Lambda(F_{\nabla}) = g(\Lambda(F_{\nabla}), 1) = g(F_{\nabla}, \omega \wedge 1)$ e que $*\omega = \frac{1}{(n-1)!}\omega^{n-1}$.

Daí, $K = ig(F_{\nabla}, \omega)$. Multiplicando ambos os lados pela forma de volume $\frac{\omega^n}{n!}$ de X , temos $K\frac{\omega^n}{n!} = ig(F_{\nabla}, \omega)\frac{\omega^n}{n!}$. Pela definição do operador $*$, $K\omega^n = in!(F_{\nabla} \wedge *\omega)$. Utilizando a equação acima, temos que $K\omega^n = inF_{\nabla} \wedge \omega^{n-1}$. \square

Definição 4.1.5. Um fibrado (E, h) satisfaz a *condição de Hermite-Einstein fraca* (com fator φ) se

$$K = \varphi I_E,$$

onde I_E é o endomorfismo identidade de E e φ é uma função real definida em X . Se φ é constante, dizemos que (E, h) satisfaz a *condição de Hermite-Einstein* e que (E, h) é um *fibrado de Hermite-Einstein* sobre (X, g) .

Proposição 4.1.6. Todo fibrado de linhas (E, h) satisfaz a condição de Hermite-Einstein fraca.

Demonstração. Seja $f : E \rightarrow E$ um endomorfismo de E . Então, para cada ponto de X , o endomorfismo $f_x : E_x \rightarrow E_x$ pode ser representado por um número complexo. Portanto, para a curvatura média temos $K = \varphi I_E$, onde φ é uma função complexa. Temos que verificar que φ é uma função real. Para isso, basta lembrar que a curvatura da conexão de Chern de um fibrado (E, h) é uma forma real do tipo $(1, 1)$ e que Λ é um operador real. \square

Definição 4.1.7. Sejam h e h' duas estruturas hermitianas num fibrado complexo E . h e h' são *conformemente equivalentes* se existe uma função real positiva a em X tal que $h' = ah$.

Proposição 4.1.8. ([?] página 104 proposição 2.4) Se um fibrado (E, h) satisfaz a condição de Hermite-Einstein fraca, então existe uma estrutura hermitiana h' conformemente equivalente a h em E tal que (E, h') satisfaz a condição de Hermite-Einstein.

Corolário 4.1.9. Todo fibrado de linhas E admite uma estrutura hermitiana h tal que (E, h) é de Hermite-Einstein.

Proposição 4.1.10. ([?] página 99 proposição 1.4)

- (i) Se (E, h) satisfaz a condição de Hermite-Einstein (fraca) com fator φ , então o fibrado dual (E^*, h^*) satisfaz a condição de Hermite-Einstein (fraca) com fator $-\varphi$.
- (ii) Se (E_1, h_1) e (E_2, h_2) satisfazem a condição de Hermite-Einstein (fraca) com fator φ_1 e φ_2 , respectivamente. Então, o produto tensorial $(E_1 \otimes E_2, h_1 \otimes h_2)$ satisfaz a condição de Hermite-Einstein (fraca) com fator $\varphi_1 + \varphi_2$.
- (iii) A soma $(E_1 \oplus E_2, h_1 \oplus h_2)$ a condição de Hermite-Einstein (fraca) com fator φ se e somente se os somandos (E_1, h_1) e (E_2, h_2) satisfazem a condição de Hermite-Einstein (fraca) com fator φ .

Corolário 4.1.11. Se (E, h) satisfaz a condição de Hermite-Einstein (fraca) com fator φ , então

- (i) o fibrado $E^{\otimes p} \otimes E^{*\otimes q}$ com a estrutura hermitiana induzida satisfaz a condição de Hermite-Einstein (fraca) com fator $(p - q)\varphi$,
- (ii) a p -ésima potência exterior $\Lambda^p E$ com a estrutura hermitiana induzida satisfaz a condição de Hermite-Einstein (fraca) com fator $p\varphi$.

Proposição 4.1.12. ([?] página 103 proposição 2.1) Se (E, h) satisfaz a condição de Hermite-Einstein (fraca) com fator φ e se X é compacta, então

$$\int_X c_1(E) \wedge \omega^{n-1} = \frac{r}{2n\pi} \int_X \varphi \omega^n,$$

onde $c_1(E) = \frac{i}{2\pi} \text{tr}(F_\nabla)$, para alguma conexão ∇ em E , é uma 2-forma que representa a classe de Chern de E .

4.2 Estabilidade de Feixes

Nesta seção, \mathcal{F} é um feixe coerente sem torção sobre uma variedade Kähler compacta (X, g) com forma de Kähler ω e $c_1(\mathcal{F})$ é um representante da primeira classe de Chern de \mathcal{F} em $H_{DR}^2(X, \mathbb{R})$.

Definição 4.2.1. O ω -*grau* (ou simplesmente *grau*) de \mathcal{F} é definido por

$$\deg(\mathcal{F}) = \int_X c_1(\mathcal{F}) \wedge \omega^{n-1}.$$

Definição 4.2.2. A *inclinação* de \mathcal{F} é a razão $\mu(\mathcal{F}) = \deg(\mathcal{F})/rk(\mathcal{F})$.

Segundo Mumford e Takemoto, faremos a definição de semiestabilidade e estabilidade de feixes.

Definição 4.2.3. \mathcal{F} é *semiestável* se para todo subfeixe coerente \mathcal{F}' , $0 < rk(\mathcal{F}')$, nós temos

$$\mu(\mathcal{F}') \leq \mu(\mathcal{F}).$$

Se a desigualdade estrita

$$\mu(\mathcal{F}') < \mu(\mathcal{F})$$

vale para todo feixe coerente \mathcal{F}' tal que $0 < rk(\mathcal{F}') < rk(\mathcal{F})$, então \mathcal{F} é *estável*. Um fibrado holomorfo E é *semiestável* (respectivamente *estável*) se o feixe de seções holomorfas $\mathcal{O}(E)$ é *semiestável* (respectivamente *estável*).

Lema 4.2.4. Se

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$$

é uma sequência exata de feixes coerentes, então

$$r'(\mu(\mathcal{F}) - \mu(\mathcal{F}')) + r''(\mu(\mathcal{F}) - \mu(\mathcal{F}'')) = 0,$$

onde $r' = rk(\mathcal{F}')$ e $r'' = rk(\mathcal{F}'')$.

Demonstração. Por 3.5.3, temos

$$\det(\mathcal{F}) = \det(\mathcal{F}') \otimes \det(\mathcal{F}'').$$

Daí, $c_1(\mathcal{F}) = c_1(\mathcal{F}') + c_1(\mathcal{F}'')$. Portanto

$$(r' + r'')\mu(\mathcal{F}) = \deg(\mathcal{F}) = \deg(\mathcal{F}') + \deg(\mathcal{F}'') = r'\mu(\mathcal{F}') + r''\mu(\mathcal{F}'').$$

□

Como consequência desse lema, estabilidade e semiestabilidade podem ser definido em termos de feixes quocientes de \mathcal{F} ao invés de subfeixes.

Proposição 4.2.5. (i) \mathcal{F} é *semiestável* se e somente se para todo feixe quociente \mathcal{F}'' com $0 < rk(\mathcal{F}'')$, vale $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{F}'')$.

(ii) \mathcal{F} é estável se e somente se para todo feixe quociente \mathcal{F}'' com $0 < rk(\mathcal{F}') < rk(\mathcal{F})$, vale $\mu(\mathcal{F}) < \mu(\mathcal{F}'')$.

No próximo resultado, provaremos que não é necessário considerar todos os subfeixes ou quocientes para verificarmos semiestabilidade e estabilidade. Antes, enunciaremos um lema auxiliar.

Lema 4.2.6. ([?] página 169 lema 7.5) Se \mathcal{F} é um feixe de torção, então $deg(\mathcal{F}) \geq 0$.

Proposição 4.2.7. Seja \mathcal{F} um feixe coerente sem torção sobre uma variedade Kähler compacta. Então

(a) \mathcal{F} é semiestável se e somente se uma das seguintes condições é satisfeita:

(a') $\mu(\mathcal{F}') \leq \mu(\mathcal{F})$ para qualquer subfeixe \mathcal{F}' tal que o quociente \mathcal{F}/\mathcal{F}' é sem torção;

(a'') $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{F}'')$ para todo feixe quociente sem torção \mathcal{F}'' .

(b) \mathcal{F} é estável se e somente se uma das seguintes condições é satisfeita:

(b') $\mu(\mathcal{F}') < \mu(\mathcal{F})$ para qualquer subfeixe \mathcal{F}' tal que o quociente \mathcal{F}/\mathcal{F}' é sem torção e $0 < rk(\mathcal{F}') < rk(\mathcal{F})$;

(b'') $\mu(\mathcal{F}) < \mu(\mathcal{F}'')$ para todo feixe quociente sem torção \mathcal{F}'' tal que

$$0 < rk(\mathcal{F}'') < rk(\mathcal{F})$$

Demonstração. A demonstração se baseia no comentário a seguir. Considere a seguinte sequência exata

$$0 \rightarrow \mathcal{F}'' \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}'' \rightarrow 0,$$

seja \mathcal{G}'' o feixe de torção de \mathcal{F}'' e defina $\mathcal{F}_1'' = \mathcal{F}''/\mathcal{G}''$. Considere a seguinte composição

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}'' \xrightarrow{\pi} \mathcal{F}''/\mathcal{G}'',$$

onde $\pi : \mathcal{F}'' \rightarrow \mathcal{F}''/\mathcal{G}''$. Defina $\Psi = \pi \circ \beta$, que é sobrejetiva, e defina também $\mathcal{F}'_1 = \ker(\Psi)$.

Assim, temos uma sequência exata

$$0 \rightarrow \mathcal{F}'_1 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_1'' \rightarrow 0,$$

onde \mathcal{F}_1'' é sem torção. Observe que \mathcal{F}' é um subfeixe de \mathcal{F}'_1 , uma vez que $\mathcal{F}'_1 \cong im(\alpha) = \ker(\beta)$ e $\ker(\beta)$ é subfeixe de $\ker(\Psi) = \mathcal{F}'_1$. Denote por $i : \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}'_1$ a inclusão.

Vamos mostrar que $\mathcal{F}'_1/\mathcal{F}' \cong \mathcal{G}''$. Para isso, considere o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}' & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F}'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow i & & \downarrow id_{\mathcal{F}} & & \downarrow \pi \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}'_1 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F}_1'' \longrightarrow 0, \end{array}$$

Por um resultado em álgebra homológica, lema da serpente ([?] página 335 corolário 6.12), temos que existe uma sequência exata

$$0 \rightarrow \ker(i) \rightarrow \ker(id_{\mathcal{F}}) \rightarrow \ker(\pi) \rightarrow \operatorname{coker}(i) \rightarrow \operatorname{coker}(id_{\mathcal{F}}) \rightarrow \operatorname{coker}(\pi) \rightarrow 0.$$

No entanto, $\ker(i) = \ker(id_{\mathcal{F}}) = \operatorname{coker}(id_{\mathcal{F}}) = \operatorname{coker}(\pi) = 0$, $\ker(\pi) = \mathcal{G}''$ e $\operatorname{coker}(i) = \mathcal{F}'_1/\mathcal{F}'$. Daí, temos que $0 \rightarrow \mathcal{G}'' \rightarrow \mathcal{F}'_1/\mathcal{F}' \rightarrow 0$ é exata. Portanto, $\mathcal{F}'_1/\mathcal{F}' \cong \mathcal{G}''$.

Agora, considere a seguinte sequência exata,

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}'_1 \rightarrow \mathcal{G}'' \rightarrow 0.$$

Temos que $\det(\mathcal{F}'_1) = \det(\mathcal{F}') \otimes \det(\mathcal{G}'')$. Isso implica que $c_1(\mathcal{F}'_1) = c_1(\mathcal{F}') + c_1(\mathcal{G}'')$ e, portanto, $\deg(\mathcal{F}'_1) = \deg(\mathcal{F}') + \deg(\mathcal{G}'') \geq \deg(\mathcal{F}')$, pelo lema anterior. Portanto, segue que

$$\mu(\mathcal{F}'_1) = \frac{\deg(\mathcal{F}'_1)}{\operatorname{rk}(\mathcal{F}'_1)} \geq \frac{\deg(\mathcal{F}')}{\operatorname{rk}(\mathcal{F}')} = \mu(\mathcal{F}').$$

Analogamente, temos $\mu(\mathcal{F}''_1) \leq \mu(\mathcal{F}'')$.

Agora, vamos demonstrar (a'), pois as outras afirmações são similares.

Suponha que para qualquer subfeixe \mathcal{F}'_1 tal que $\mathcal{F}/\mathcal{F}'_1$ vale $\mu(\mathcal{F}'_1) \leq \mu(\mathcal{F})$. Vamos provar que \mathcal{F} é semiestável. Seja \mathcal{F}' um subfeixe de \mathcal{F} . Pelo comentário acima, existe subfeixe \mathcal{F}'_1 , com $\mathcal{F}/\mathcal{F}'_1$ sem torção e tal que $\mu(\mathcal{F}') \leq \mu(\mathcal{F}'_1)$. Por hipótese, $\mu(\mathcal{F}'_1) \leq \mu(\mathcal{F})$. Portanto, $\mu(\mathcal{F}') \leq \mu(\mathcal{F})$ e \mathcal{F} é semiestável. \square

Proposição 4.2.8. ([?] página 170 proposição 7.7) Seja \mathcal{F} um feixe coerente sem torção sobre uma variedade Kähler compacta (X, g) . Então,

- (a) Se $\operatorname{rk}(\mathcal{F}) = 1$, então \mathcal{F} é semiestável.
- (b) \mathcal{F} é estável (semiestável) se e somente se seu dual \mathcal{F}^* é estável (semiestável).

Proposição 4.2.9. Sejam \mathcal{F} e \mathcal{F}' dois feixes coerentes sem torção sobre uma variedade Kähler compacta (X, g) . Então, $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}'$ é semiestável se e somente se \mathcal{F} e \mathcal{F}' são semiestáveis com $\mu(\mathcal{F}) = \mu(\mathcal{F}')$.

Demonstração. Primeiramente, suponha que \mathcal{F} e \mathcal{F}' são semiestáveis com $\mu(\mathcal{F}) = \mu(\mathcal{F}') = \mu$. Temos $\mu(\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}') = \mu$. De fato, considere a sequência exata $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow 0$ e tome $r = \operatorname{rk}(\mathcal{F})$ e $r' = \operatorname{rk}(\mathcal{F}')$. O lema 4.2.4 nos diz que $r(\mu(\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}') - \mu) + r'(\mu(\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}') - \mu) = 0$, logo $(r + r')(\mu(\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}') - \mu) = 0$ e $\mu(\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}') = \mu$. Agora, para todo subfeixe \mathcal{G} de $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}'$ temos o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}' & \longrightarrow & \mathcal{F}' & \longrightarrow & 0 \\ & & \updownarrow & & \up & & \up & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G}' & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G}'' & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

onde $\mathcal{G}' = \mathcal{G} \cap \mathcal{F} \oplus \iota$ e \mathcal{G}'' é a imagem de \mathcal{G} por $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}'$. Os morfismos verticais são todos injetivos. Como \mathcal{F} e \mathcal{F}' são semiestáveis, temos $\deg(\mathcal{G}') \leq \mu[\operatorname{rk}(\mathcal{G}')] e \deg(\mathcal{G}'') \leq \mu[\operatorname{rk}(\mathcal{G}'')]$. Daí,

$$\mu(\mathcal{G}) = \frac{\deg(\mathcal{G}') + \deg(\mathcal{G}'')}{\operatorname{rk}(\mathcal{G}') + \operatorname{rk}(\mathcal{G}'')} \leq \mu.$$

Reciprocamente, assumamos que $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}'$ é estável. Como \mathcal{F} é tanto um subfeixe como um feixe quociente de $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}'$, a proposição 4.2.5.1 e a definição de semiestabilidade nos dizem que $\mu(\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}') = \mu(\mathcal{F})$. Analogamente, $\mu(\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}') = \mu(\mathcal{F}')$. Se \mathcal{G} é um subfeixe de \mathcal{F} , é também um subfeixe de $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}'$. Daí, $\mu(\mathcal{G}) \leq \mu(\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}') = \mu(\mathcal{F})$ e \mathcal{F} é semiestável. \square

Observação 4.2.10. Fica claro na demonstração que se \mathcal{F} e \mathcal{F}' são não nulos, então $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}'$ nunca é estável.

4.3 Estabilidade de fibrados de Hermite-Einstein

Antes de demonstrarmos o principal teorema da dissertação, enunciaremos alguns resultados que serão usados na demonstração.

Teorema 4.3.1. ([?] página 50 teorema 2.2.1) Seja (E, h) um fibrado holomorfo com estrutura hermitiana h sobre uma variedade complexa compacta hermitiana (X, g) cuja conexão de Chern ∇ satisfaz a condição de *Hermite-Einstein* com fator c . Então:

- (i) Se c é negativo, então E não possui seções holomorfas globais não triviais, em outras palavras $H^0(\mathcal{E}) = 0$ (onde \mathcal{E} é o feixe de seções holomorfas de E), e
- (ii) Se $c = 0$, então toda seção holomorfa global σ é paralela, isto é, $\nabla(\sigma) = 0$.

Observação 4.3.2. • Seja E um fibrado holomorfo de posto r sobre uma variedade complexa X tal que existe uma sequência exata de fibrados holomorfos

$$0 \rightarrow S \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow 0.$$

Então podemos obter uma métrica induzida em S por restrição pela métrica de E e uma métrica induzida em F usando o mapa sobrejetor.

- Uma sequência exata de fibrados holomorfos, como acima, *cinde* se $E = S \oplus F$, isso é equivalente a dizermos que existe um mapa de fibrados $c : E \rightarrow S$ tal que $c \circ i = id_S$, onde $i : S \rightarrow E$ é o morfismo injetivo da sequência exata.

Proposição 4.3.3. ([?] página 176 proposição 8.2) Seja

$$0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$$

uma sequência exata de fibrados holomorfos sobre uma variedade complexa compacta hermitiana (X, g) . Se E possui uma estrutura hermitiana h tal que (E, h) é um fibrado de *Hermite-Einstein* com fator c . Então $\mu(E') \leq \mu(E)$ e se a igualdade ocorre, a sequência *cinde* holomorficamente e ortogonalmente e (explicar isso no final da primeira seção do capítulo 3) E' e E'' são fibrados de *Hermite-Einstein* ambos com fator c (com respeito a métrica hermitiana induzida por E).

Observação 4.3.4. Seja \mathcal{F} um feixe de \mathcal{O} -módulos sobre uma variedade complexa X . Considere um morfismo injetivo $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{F}$. Podemos definir uma seção global não nula (uma seção em que a haste em cada ponto é não nula) de \mathcal{F} através de f . De fato, basta definir $\sigma = f(1) \in \mathcal{F}(X)$, onde $1 \in \mathcal{O}(X)$ é a função constante 1. Reciprocamente, dada uma seção não nula $\sigma \in \mathcal{F}(X)$, defina um morfismo injetivo $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{F}$ por $f(\tau) = \sigma\tau$.

Teorema 4.3.5. Seja (E, h) um fibrado de *Hermite-Einstein* com fator c sobre uma variedade Kähler compacta (X, g) . Então E é semiestável e se não for estável é uma soma direta ortogonal $(E, h) = (E_1, h_1) \oplus \cdots \oplus (E_k, h_k)$ de fibrados estáveis e cada (E_i, h_i) é de *Hermite-Einstein* com mesmo fator c .

Demonstração. Seja \mathcal{E} o feixe de seções holomorfas de E . Considere \mathcal{F} um subfeixe de \mathcal{E} tal que \mathcal{E}/\mathcal{F} é sem torção e $p = rk(\mathcal{F}) < rk(\mathcal{E}) = r$. A inclusão $j : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ induz um morfismo injetivo, pela proposição 3.5.6,

$$det(j) : det(\mathcal{F}) \rightarrow \Lambda^p(\mathcal{E}).$$

Defina

$$f = det(j) \otimes id_{det(\mathcal{F})^*} : \mathcal{O} \rightarrow \Lambda^p(\mathcal{E}) \otimes det(\mathcal{F})^*.$$

Assim, f é um monomorfismo e, portanto, define uma seção global do fibrado $\Lambda^p(\mathcal{E}) \otimes det(\mathcal{F})^*$.

Pela proposição 4.1.12, o fator c para (E, h) é dado por

$$c = \frac{2n\pi\mu(\mathcal{E})}{n!vol(X)},$$

onde $vol(X) = \frac{1}{n!} \int_X \omega^n$. Como todo fibrado de linhas admite uma estrutura de *Hermite-Einstein*, podemos escolher uma estrutura para $det(\mathcal{F})$ com fator c' . Daí, temos

$$c' = \frac{2n\pi\mu(det(\mathcal{F}))}{n!vol(X)} = \frac{2np\pi\mu(\mathcal{F})}{n!vol(X)}.$$

Utilizando a proposição 4.1.10, temos que $\Lambda^p(\mathcal{E}) \otimes (det(\mathcal{F}))^*$ satisfaz a condição de *Hermite-Einstein* com fator $pc - c'$. Como $\Lambda^p(\mathcal{E}) \otimes det(\mathcal{F})^*$ admite seção holomorfa global, o teorema 4.3.1 nos diz que $pc - c' \geq 0$. Mas isso implica que $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{E})$ e E é semiestável.

No caso em que E não é estável, assuma que o subfeixe que desestabiliza \mathcal{E} é \mathcal{F} . Assim, $\mu(\mathcal{F}) = \mu(\mathcal{E})$ e fazendo uma contração análoga a que foi feita acima, temos $pc - c' = 0$. Considere $X' = X \setminus S_{n-1}(\mathcal{F})$, então $\mathcal{F}_{X'}$ é localmente livre. Defina $\mathcal{G} = \mathcal{E}/\mathcal{F}$, assim temos a seguinte sequência exata de feixes,

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$$

e podemos concluir que \mathcal{F} é normal. Restringindo a sequência acima a X' , temos uma sequência exata de feixes localmente livres

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_{X'} \rightarrow \mathcal{E}_{X'} \rightarrow \mathcal{G}_{X'} \rightarrow 0.$$

Se F e G são os fibrados sobre X' cujos feixes de seções holomorfas são $\mathcal{F}_{X'}$ e $\mathcal{G}_{X'}$ respectivamente, então temos uma sequência exata de fibrados

$$0 \rightarrow F \rightarrow E|_{X'} \rightarrow G \rightarrow 0.$$

Sabemos que $(E|_{X'}, h)$ é um fibrado de *Hermite-Einstein* e, pela proposição 4.4.3, existe decomposição ortogonal (com relação a h) e holomorfa $E|_{X'} = F \oplus G$ e F e G são de *Hermite-Einstein* com a métrica induzida por h ambos com mesmo fator c . Devemos provar que essa decomposição se estende para todo X .

Como \mathcal{F} e \mathcal{E} são normais, $\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ e $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ são normais. Daí, o morfismo que cinde a sequência acima se estende unicamente para todo X . Portanto, $\mathcal{E} = \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$, em particular \mathcal{F} e \mathcal{G} são localmente livres. O teorema segue pela proposição 4.1.10.3. \square

O seguinte teorema e um resultado de existência e não será demonstrado aqui. Na versão que será apresentada aqui, ele foi demonstrado por K. Uhlenbeck e S. T. Yau em [?] utilizando-se de uma técnica desenvolvida por S. Donaldson.

Teorema 4.3.6. Seja E um fibrado holomorfo estável sobre uma variedade Kähler compacta, então E admite uma métrica hermitiana h cuja conexão de Chern satisfaz a equação de *Hermitian-Einstein*.

Juntando as informações dos dois últimos teoremas, temos a *Correspondência Hitchin-Kobayashi*.

Teorema 4.3.7. (Correspondência Hitchin-Kobayashi) Seja E um fibrado holomorfo sobre uma variedade Kähler compacta. E admite métrica de *Hermite-Einstein* se e somente se E é poliestável, isto é, $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$, onde cada E_i é estável.

4.4 Q -feixes

Nos últimos dez anos, muitos trabalhos estão sendo feitos sobre esse tipo de resultado. Apresentaremos aqui uma correspondência semelhante para o caso de Q -fibrados.

Definição 4.4.1. Um *quiver* $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ consiste de dois conjuntos finitos Q_0 (conjunto dos *vértices*) e Q_1 (conjunto das *flechas*) e duas funções $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$. Para cada flecha $a \in Q_1$, os vértice $s(a)$ e $t(a)$ são chamados *cauda* e *cabeça* da flecha a , respectivamente.

Exemplo 4.4.2. Considere o *quiver* com dois vértices $Q_0 = \{v, w\}$, duas flechas $Q_1 = \{a, b\}$ e com funções s, t tais que $s(a) = t(b) = v$ e $s(b) = v, t(b) = w$. Esse *quiver* é representado pelo diagrama de pontos e flechas abaixo.

$$a \circlearrowleft \cdot v \xrightarrow{b} \cdot w$$

Outro *quiver* que nos será útil é o *quiver* com dois vértices $Q_0 = \{v, w\}$, duas flechas $Q_1 = \{a, b\}$ e com funções s, t tais que $s(a) = v, t(a) = w$ e $s(b) = w, t(b) = v$. Sua representação por diagramas de pontos e flechas é:

$$\cdot v \xrightarrow{b} \cdot w \\ \cdot \xleftarrow{a} \cdot$$

De agora em diante, utilizaremos apenas a representação de pontos e flechas para designar um *quiver*. Como nos exemplos a seguir.

Exemplo 4.4.3.

$$\circlearrowleft \cdot$$

Exemplo 4.4.4.

$$\cdot \longrightarrow \cdot$$

Dado um *quiver* Q , M é uma coleção de feixes localmente livres de posto finito M_a para cada flecha $a \in Q_1$ sobre uma variedade Kähler compacta (X, g) .

Definição 4.4.5. Dado um *quiver* Q e uma variedade Kähler compacta (X, g) , um Q -feixe M -torcido ([?]) sobre X é um par $\mathcal{R} = (\mathcal{E}, \phi)$, onde \mathcal{E} é uma coleção de feixes coerentes \mathcal{E}_v para cada vértice $v \in Q_0$ e ϕ é uma coleção de morfismos $\phi_a : \mathcal{E}_{t(a)} \otimes M_a \rightarrow \mathcal{E}_{s(a)}$ para cada flecha $a \in Q_1$.

Notação 4.4.6. (i) Sempre omitiremos os termos Q e M -torcido quando não houver perigo de confusão, isto é, um Q -feixe M -torcido será frequentemente chamado de Q -feixe.

(ii) No caso em que \mathcal{E} é uma coleção de feixes localmente livres, (\mathcal{E}, ϕ) será chamado de Q -fibrado.

(iii) As vezes, diremos que um Q -feixe \mathcal{E} é uma *representação* do quiver Q .

Definição 4.4.7. Um morfismo $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ entre dois Q -feixes $\mathcal{R} = (\mathcal{E}, \phi)$ e $\mathcal{R}' = (\mathcal{E}', \phi')$ é dado por uma coleção de morfismos $f_v : \mathcal{E}_v \rightarrow \mathcal{E}'_v$ para cada vértice $v \in Q_0$, tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_v \otimes M_a & \xrightarrow{\phi_a} & \mathcal{E}_{v'} \\ \downarrow f_v \otimes id_{M_a} & & \downarrow f_{v'} \\ \mathcal{E}'_v \otimes M_a & \xrightarrow{\phi'_a} & \mathcal{E}'_{v'} \end{array}$$

para toda flecha $a : v \rightarrow v'$.

Definição 4.4.8. Um Q -feixe $\mathcal{R}' = (\mathcal{E}', \phi')$ é um Q -subfeixe de $\mathcal{R} = (\mathcal{E}, \phi)$ se $\mathcal{E}'_v \subset \mathcal{E}_v$ para todo vértice $v \in Q_0$, $\phi_a(\mathcal{E}'_{s(a)} \otimes M_a) \subset \mathcal{E}'_{t(a)}$ e $\phi'_a : \mathcal{E}'_{s(a)} \otimes M_a \rightarrow \mathcal{E}'_{t(a)}$ é a restrição de ϕ_a a $\mathcal{E}'_{s(a)} \otimes M_a$, para cada $a \in Q_1$.

Definição 4.4.9. Dados dois Q -feixes M -torcidos $\mathcal{R} = (\mathcal{E}, \phi)$ e $\mathcal{R}' = (\mathcal{E}', \phi')$, a *soma direta* deles é o Q -feixe $\mathcal{R} \oplus \mathcal{R}' = (\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}', \phi \oplus \phi')$, onde $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}'$ é a coleção dos feixes $\mathcal{E}_v \oplus \mathcal{E}'_v$ para todo vértice v e $\phi \oplus \phi'$ é a coleção dos morfismos $\phi_a \oplus \phi'_a : (\mathcal{E}_{s(a)} \oplus \mathcal{E}'_{s(a)}) \otimes M_a \rightarrow (\mathcal{E}_{t(a)} \oplus \mathcal{E}'_{t(a)})$.

Seja Q um quiver e σ, τ uma coleção de números reais σ_v, τ_v , com $\sigma_v > 0$, para cada $v \in Q_0$. σ e τ são os *parâmetros de estabilidade*. Seja $\mathcal{R} = (\mathcal{E}, \phi)$ um Q -feixe sobre X . De acordo com Álvarez-Cónsul e Garcia-Prada ([?]), definimos:

Definição 4.4.10. O (σ, τ) -*grau* e a (σ, τ) -*inclinação* do Q -feixe \mathcal{R} são dados por

$$deg_{\sigma, \tau}(\mathcal{R}) = \sum_{v \in Q_0} \sigma_v deg(\mathcal{E}_v) - \tau_v rk \mathcal{E}_v \text{ e}$$

$$\mu_{\sigma, \tau}(\mathcal{R}) = \frac{deg_{\sigma, \tau}(\mathcal{R})}{\sum_{v \in Q_0} \sigma_v rk \mathcal{E}_v},$$

respectivamente. \mathcal{R} é *semiestável* se para qualquer Q -subfeixe \mathcal{R}' de \mathcal{R} , temos $\mu_{\sigma, \tau}(\mathcal{R}') \leq \mu_{\sigma, \tau}(\mathcal{R})$. Se essa desigualdade for estrita para todo Q -subfeixe, então \mathcal{R} é *estável*.

Observação 4.4.11. Note que para todo Q -feixe \mathcal{R} se $\sigma' = c\sigma$ e $\tau' = c\tau$ para algum real $c > 0$, então $\mu_{\sigma,\tau}(\mathcal{R}) = \mu_{\sigma',\tau'}(\mathcal{R})$. Também, se $\sigma' = \sigma$ e $\tau' = \tau + d\sigma$, então $\mu_{\sigma,\tau}(\mathcal{R}) = \mu_{\sigma',\tau'}(\mathcal{R}) - d$. Isto é, essas duas transformções dos parâmetros não mudam a estabilidade de um Q -feixe e o espaço de parâmetros efetivos tem dimensão $2N(Q_0) - 2$, onde $N(Q_0)$ é o número de vértices de \mathcal{R} tal que $\mathcal{E}_v \neq 0$. Isso significa que se Q é o quiver que consiste de um vértice e não possui flechas, então recuperamos a noção de estabilidade da seção 2.

Nos exemplos abaixo, mostraremos como a estabilidade de Q -feixe generaliza outras noções de estabilidade.

Exemplo 4.4.12. Seja X uma superfície de Riemann. Um *fibrado de Higgs* sobre X é um par $\mathcal{H} = (E, \phi)$, onde E é um fibrado holomorfo sobre X e $\phi : E \otimes K^* \rightarrow E$ é uma função holomorfa e K é o fibrado canônico de X . Na linguagem de Q -fibrados, \mathcal{H} é uma representação K^* -torcida do quiver

$$\begin{array}{c} \circ \\ \curvearrowright \end{array} \cdot \cdot$$

A condição de estabilidade acima nos diz que H é estável se para qualquer subfeixe \mathcal{F} de E tal que $\phi(\mathcal{F} \otimes K^*) \subset \mathcal{F}$, temos $\mu(\mathcal{F}) < \mu(E)$. Esta é exatamente a condição de estabilidade em ([?] página 69 definição 3.1). Observe que a estabilidade de \mathcal{H} independe dos parâmetros, pois o quiver possui apenas um vértice.

Exemplo 4.4.13. Uma *tripla holomorfa* é uma representação \mathcal{O} -torcida do quiver

$$\cdot \longrightarrow \cdot$$

e pode ser representado na forma

$$\mathcal{E}_2 \xrightarrow{\phi} \mathcal{E}_1.$$

A estabilidade com os parâmetros (σ, τ) , onde $\sigma = (1, 1)$ e $\tau = (0, \alpha)$ é exatamente a α -estabilidade em [?] página 15.

4.5 Equação de vórtice e a correspondência *Hitchin-Kobayashi* para Q -fibrados

Nesta seção, sempre que \mathcal{E} é um feixe localmente livre e dissermos que h é uma métrica em \mathcal{E} significa que h é uma métrica no fibrado holomorfo E cujo feixe de seções holomorfas é \mathcal{E} . O mesmo vale para uma conexão em \mathcal{E} .

Considere um Q -fibrado $\mathcal{R} = (\mathcal{E}, \phi)$. Fixemos, de uma vez por todas, uma coleção de métricas hermitianas q_a em M_a para cada $a \in Q_1$. Uma métrica hermitiana em \mathcal{R} é uma coleção H de métricas hermitianas h_v em \mathcal{E}_v para cada $v \in Q_0$ tal que $\mathcal{E}_v \neq 0$.

De acordo com ([?]) fazemos as seguintes observações: o morfismo $\phi_a : \mathcal{E}_{s(a)} \otimes M_a \rightarrow \mathcal{E}_{t(a)}$ possui uma adjunta suave $\phi_a^{*h_a} : \mathcal{E}_{t(a)} \rightarrow \mathcal{E}_{s(a)} \otimes M_a$ com relação às métricas $h_{s(a)} \otimes q_a$ em $\mathcal{E}_{s(a)} \otimes M_a$ e $h_{t(a)}$ em $\mathcal{E}_{t(a)}$, portanto temos uma composição $\phi_a \circ \phi_a^{*h_a} : \mathcal{E}_{s(a)} \rightarrow \mathcal{E}_{s(a)}$. Ainda mais, podemos considerar o morfismo $\phi_a : \mathcal{E}_{s(a)} \rightarrow \mathcal{E}_{t(a)} \otimes M_a$. O mesmo ocorre com $\phi_a^{*h_a} : \mathcal{E}_{t(a)} \otimes M_a \rightarrow \mathcal{E}_{s(a)}$. Dessa maneira, faz sentido escrever $\phi_a^{*h_a} \circ \phi_a : \mathcal{E}_{s(a)} \rightarrow \mathcal{E}_{s(a)}$.

Agora, de acordo com Garcia-Prada e Alvarez-Consul, podemos fazer a seguinte definição.

Definição 4.5.1. Sejam σ e τ coleções de números reais σ_v e τ_v (com $\sigma_v > 0$), para cada $v \in Q_0$. Uma métrica H em \mathcal{R} satisfaz as equações de (σ, τ) -vortex se

$$\sigma_v i\Lambda(F_{\nabla_v}) + \sum_{a \in t^{-1}(v)} \phi_a \circ \phi_a^{*h_a} - \sum_{a \in s^{-1}(v)} \phi_a^{*h_a} \circ \phi_a = \tau_v id_{\mathcal{E}_v},$$

para cada $v \in Q_0$ tal que $\mathcal{E}_v \neq 0$, onde F_{∇_v} é a curvatura da conexão de Chern ∇_v em \mathcal{E}_v com a métrica h_v .

Observação 4.5.2. Essa equação recebe o nome *vortex*, pois ela generaliza a equação de vortex ([?] página 29 definição 4.7) para *triplas holomorfas* como faremos a seguir.

Exemplo 4.5.3. Considere a tripla holomorfa \mathcal{R} dada por

$$\mathcal{E}_2 \xrightarrow{\phi} \mathcal{E}_1$$

e fixe uma métrica hermitiana $H = (h_1, h_2)$ (h_i é uma métrica hermitiana em \mathcal{E}_i) em \mathcal{R} . Se escrevermos as equações de vortex via definição 4.5.1, obtemos:

$$\begin{aligned} i\Lambda(F_{\nabla_1}) + \phi \circ \phi^{*h_1} &= \tau_1 id_{\mathcal{E}_1} \text{ para o vértice 1 e} \\ i\Lambda(F_{\nabla_2}) - \phi^{*h_2} \circ \phi &= \tau_2 id_{\mathcal{E}_2} \text{ para o vértice 2,} \end{aligned}$$

que são as mesmas equações de vortex em ([?] página 29 definição 4.7).

Exemplo 4.5.4. Considere um fibrado de Higgs \mathcal{H} . A equação de vortex para uma métrica $H = \{h\}$ em \mathcal{R} para os parâmetros $\sigma = 1$ e $\tau = 0$ é

$$\sigma i\Lambda(F_{\nabla}) + [\phi, \phi^{*h}] = 0,$$

onde $[\phi, \phi^{*h}] = \phi \circ \phi^{*h} - \phi^{*h} \circ \phi$.

Antes de enunciarmos o último teorema desta seção, faremos uma definição.

Definição 4.5.5. Um Q -feixe \mathcal{R} é (σ, τ) -poliestável se existem finitos *quiver sheaves* \mathcal{R}_i (σ, τ) -estáveis tais que $\mathcal{R} = \oplus_i \mathcal{R}_i$.

Teorema 4.5.6. ([?] página 8 teorema 3.1) Sejam Q um quiver e σ e τ duas coleções de números reais $\sigma_v > 0$ e τ_v , para cada vértice de Q e $\mathcal{R} = (\mathcal{E}, \phi)$ um Q -fibrado tal que $deg_{\sigma, \tau}(\mathcal{R}) = 0$. \mathcal{R} é (σ, τ) -poliestável se e somente se ele admite uma métrica hermitiana H que satisfaz as (σ, τ) -equações de vortex. H é única a menos de uma multiplicação por uma constante $\lambda_i > 0$ para cada somando (σ, τ) -estável \mathcal{R}_i de $\mathcal{R} = \oplus_i \mathcal{R}_i$.

4.6 Resultado para Q -fibrados

Nesta seção, enunciarei um resultado que eu encontrei para Q -fibrados, ele estabelece uma relação entre a estabilidade de feixes coerentes e a de Q -feixes. Esse problema foi proposto pelo Prof. Marcos Jardim.

Considere o quiver

$$\begin{array}{c} \circ \\ \curvearrowright \end{array} \longrightarrow \cdot$$

Associado a esse quiver temos o Q -feixe \mathcal{R}

$$\phi_1 \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \mathcal{E}_1 \end{array} \xrightarrow[\phi_2]{} \mathcal{E}_2 \quad (4.6.1)$$

Para esse teorema, semiestabilidade é com relação aos parâmetros (\vec{r}, \vec{d}) , onde \vec{r} é o vetor posto e \vec{d} é o vetor grau do Q -feixe \mathcal{R} .

Teorema 4.6.1. \mathcal{R} é semiestável $\Leftrightarrow \mathcal{E}_2$ é semiestável e não existe subfeixe desestabilizador $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}_1$ tal que $\phi_1(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$.

Demonstração. Para um Q -subfeixe \mathcal{R}' e para os parâmetros mencionados acima, temos

$$\mu(\mathcal{R}') = \frac{r_1 r'_1 (\mu'_1 - \mu_1) + r_2 r'_2 (\mu'_2 - \mu_2)}{r_1 r'_1 + r_2 r'_2} \quad (4.6.2)$$

\Rightarrow)

- Se \mathcal{E}_2 não é semiestável, então existe um feixe desestabilizador $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}_2$ e o Q -feixe, \mathcal{R}' , abaixo é um Q -subfeixe de \mathcal{R} .

$$0 \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ 0 \end{array} \xrightarrow[0]{} \mathcal{F} \quad (4.6.3)$$

Dessa forma, $\mu(\mathcal{R}') > 0$, isto é, \mathcal{R} não é semiestável.

- Agora, se \mathcal{E}_1 não é semiestável e existe feixe desestabilizador $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}_1$ tal que $\phi_1(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$, o Q -feixe abaixo \mathcal{R}'' é um Q -subfeixe de \mathcal{R} .

$$\phi_{1|\mathcal{F}} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \mathcal{F} \end{array} \xrightarrow[\phi_{2|\mathcal{F}}]{} \mathcal{E}_2 \quad (4.6.4)$$

Portanto, $\mu(\mathcal{R}'') > 0$ e \mathcal{R} não é semiestável.

\Leftarrow) Seja $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$ um Q -subfeixe qualquer representado pelo diagrama abaixo.

$$\phi_{1|\mathcal{F}_1} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \mathcal{F}_1 \end{array} \xrightarrow[\phi_{2|\mathcal{F}_1}]{} \mathcal{F}_2 \quad (4.6.5)$$

Fatos:

- $\mu(\mathcal{F}_2) \leq \mu(\mathcal{E}_2)$, pois \mathcal{E}_2 é semiestável.
- $\phi(\mathcal{F}_1) \subset \mathcal{F}_1 \Rightarrow \mathcal{F}_1$ não é subfeixe desestabilizador, ou seja, $\mu(\mathcal{F}_1) \leq \mu(\mathcal{E}_1)$.

Portanto, temos que $\mu(\mathcal{R}') \leq \mu(\mathcal{R})$.

□

Bibliografia

- [1] S.S. Abhyankar, *Local Analytic Geometry*. World Scientific, (1964).
- [2] L. Álvarez-Cónsul, O. Garcia-Prada, *Hitching-Kobayashi Correspondence, Quivers and Vortices*. Commun. Math. Phys. 238, 1-33 (2003).
- [3] S. B. Bradlow, G. D. Daskalopoulos *Moduli of Stable Pairs for Holomorphic Bundles over Riemann Surfaces*. I, Int. J. Math 2 (1991), 903-925.
- [4] S. B. Bradlow, O. Garcia-Prada, *Stable triples, equivariant bundles and dimensional reduction*. Math. Ann. 304, 225-252 (1996).
- [5] S. K. Donaldson, *A new proof of a theorem of Narasimhan and Seshadri*. J. Diff. Geometry 18 (1983), 269-278.
- [6] S. K. Donaldson, *Anti self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles*. Proc. London Math. Soc. 50 (1985), 1-26.
- [7] S. K. Donaldson, P. Kronheimer, *The Geometry of four-manifolds*. Oxford University Press, (1990).
- [8] H. Grauert, R. Remmert, *Coherent Analytic Sheaves*. Grundlehren math. Wiss. 265. Springer, (1984).
- [9] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*. Wiley (1978).
- [10] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*. GTM 52. Springer, (1977).
- [11] N. Hitchin, *The self-duality equations on a Riemann surface*. Proc. London Math. Soc. (3) 55, 59-126 (1987).
- [12] D. Huybrechts, *Complex Geometry, an introduction*. Universitext. Springer, (2004).
- [13] S. Kobayashi, *Curvature and stability of vector bundles*. Proc. Japan Acad. 58 (1982), 158-162.
- [14] S. Kobayashi, *Differential Geometry of Complex Vector Bundles*. Publ. Math. Soc. Japan 15 Princeton Univ. Press and Iwanami Shoten, (1987).
- [15] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*. Wiley, vols I e II.
- [16] J. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*. GTM 218. Springer, (2002).

- [17] M. Lübcke, *Stability of Einstein-Hermitian vector bundles*. Manuscripta Math. 42 (1983).
- [18] M. Lübke, A. Teleman, *The Kobayashi-Hitchin Correspondence*. World Scientific, (1995).
- [19] M. S. Narasimhan, C. S. Seshadri, *Stable and unitary vector bundles on compact Riemann surfaces*. Ann. of Math. 82 (1965), 540-567.
- [20] O. Garcia-Prada, F. Pioli, D. Hernández Ruiprez, C. Tejero Prieto, *Fourier-Mukai And Nahm transforms for holomorphic triples on elliptic curves*. J. Geom. Phys. 55, 353-384 (2005).
- [21] J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*. Segunda Edição. Universitext. Springer, (2008).
- [22] K. Uhlenbeck, S. T. Yau, *On the existence of Hermitian-Yang-Mills connexions in stable vector bundles*. Comm Pure and Appl. Math. 39 (1986), S257-S293.
- [23] R.O. Wells, *Differential Analysis on Complex Manifolds*. Terceira Edição. GTM 65. Springer, (2007).